

В. В. Учайкин

МЕТОД ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ББК 22.161.3
УДК 517.524
У90



*Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту 08-01-07080*

У90

Учайкин В. В.

Метод дробных производных / В. В. Учайкин – Ульяновск:
Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.: ил. (исправл.)

Книга содержит изложение метода дробных производных и состоит из трех частей, раскрывающих физические основания метода, математический аппарат и примеры применения метода в различных областях физики: в механике и гидродинамике, вязкоупругости и термодинамике, физике диэлектриков и полупроводников, электротехнике и физике плазмы, нанофизике и космофизике. Она завершается справочным приложением и обширной библиографией, отражающей проникновение дробно-дифференциального исчисления в современную физику.

Книга рассчитана на читателя с университетским или инженерно-техническим образованием и будет полезной как молодым исследователям (студентам старших курсов и аспирантам), так и сложившимся ученым, для которых дробное исчисление остается экзотикой.

Ил. 51. Табл. 6. Библиогр.: 1001 назв.

ISBN 978-5-904198-01-5

© Учайкин В. В., 2008

Содержание

Предисловие	12
Часть I Физические основания метода	17
Глава 1 Эредитарность	19
1.1 Понятие эредитарности	19
1.2 Эредитарная теория Вольтерры	22
1.2.1 Законы эредитарности Вольтерры	22
1.2.2 Эредитарная струна	23
1.2.3 Эредитарный осциллятор	25
1.2.4 Принцип энергии	27
1.2.5 Эредитарная электродинамика	28
1.3 Эредитарная термодинамика	29
1.4 Эредитарное кинетическое уравнение Больцмана	30
1.5 Обобщенная гидродинамика	33
1.6 Эредитарная диффузия	35
1.7 Память в полимерных жидкостях	36
1.8 Эредитарное уравнение Паули	38
1.9 Эредитарное уравнение Фоккера-Планка	39
1.10 Эредитарное уравнение Ланжевена	41
1.11 Эредитарная динамика упругого тела	42
1.12 Эредитарная кинетика плазмы	43
1.13 Эредитарность и скрытые переменные	45
Глава 2 Степенные функции в физике	49
2.1 Стандартная степенная функция	49
2.2 Свойства степенных функций	50
2.3 Степенные законы в физике	53
2.3.1 Движение шара в жидкости	53
2.3.2 Звуковые волны	54
2.3.3 Диффузия	54
2.3.4 Закон Нуттинга	56
2.3.5 Релаксация полимерных цепочек	57

2.3.6	Самонепересекающиеся блуждания	58
2.3.7	Диффузионно-ограниченная агрегация	59
2.3.8	Закон Кюри-фон Швайдлера	60
2.3.9	Асимптотически степенные аппроксимации релаксации	61
2.3.10	Затухание люминесценции	63
2.3.11	Затухание турбулентности	64
2.3.12	Релаксация в спиновых стеклах	65
2.3.13	Аномальная кинетика экситонов	66
2.3.14	Временные корреляции в жидкостях и газах	66
2.3.15	Тяжелые хвосты в распределениях вероятностей	67
2.3.16	Спектральная форма Лоренца	69
2.3.17	Время пребывания в ловушке	69
2.3.18	Пробег фотона в плазме	71
2.3.19	Мерцающая флуоресценция квантовых точек	73
2.3.20	Распределения с тяжелыми хвостами и принцип максимума энтропии	74
2.4	От степенных функций к дробным производным	77
Глава 3 Автомоделные случайные процессы		83
3.1	Нормальная диффузия	83
3.2	Марковские процессы	85
3.3	Автомоделность и устойчивость	88
3.4	Устойчивые распределения	91
3.4.1	Характеристические функции	91
3.4.2	Устойчивые распределения как предельные	93
3.4.3	Свойства устойчивых распределений	94
3.4.4	Многомерные устойчивые распределения	97
3.4.5	Устойчивые плотности – экзотика или реальность?	99
3.5	L-процессы и дробные производные	107
3.5.1	Движение Леви	107
3.5.2	Траектории движения Леви	108
3.5.3	Процесс Орнштейна-Уленбека	110
3.5.4	Дробная стохастика и шумы	111
3.6	От скачкообразных блужданий к дробным производным	114
3.6.1	Процессы восстановления	114
3.6.2	Теорема об аномальной диффузии	117
3.6.3	Уравнения аномальной диффузии	119
3.6.4	Обобщенный закон Фика	120
Глава 4 Фракталы и дробные производные		125
4.1	Фракталы	125
4.2	Фрактальная пыль	131
4.3	Генератор фрактальной пыли	134
4.4	Дьявольская лестница и дробные производные	136
4.5	Фрактальная пыль в d -мерном пространстве	140

Часть II Математические основы метода 147

Глава 5	От кратных интегралов к дробным производным	149
5.1	Производные натуральных порядков	149
5.2	Производные целых отрицательных порядков	151
5.3	Дробные интегралы Римана-Лиувилля	155
5.4	Дробные производные Римана-Лиувилля и Вейля	158
5.5	Свойства дробных производных ${}_a f^{(\nu)}(x)$	160
5.5.1	Элементарные свойства	160
5.5.2	Формулы сложения порядков	161
5.5.3	Обратные операторы	161
5.5.4	Почленное дифференцирование	162
5.5.5	Дифференцирование произведения	162
5.5.6	Обобщенные ряды Тейлора	162
5.5.7	Выражение дробной производной через целые	163
5.5.8	Дифференцирование функции по функции	164
5.5.9	Асимптотическое поведение ${}_a f^{(\nu)}(x)$ при $x \rightarrow a$	164
5.5.10	Асимптотическое поведение ${}_a f^{(\nu)}(x)$ при $x \rightarrow \infty$	165
5.5.11	Производная от постоянной	166
5.5.12	Производные степенной функции	167
5.6	Дробные производные Капуто	168
5.7	Дробные производные Маршо	171
5.8	Производные аналитических функций	174
5.9	Производные обобщенных функций	176
5.10	Локальные дробные производные	177
Глава 6	От конечных разностей к дробным производным	179
6.1	Операторы сдвига и разности	179
6.2	Разности целых и дробных порядков	180
6.3	Производные Грюнвальда-Летникова с бесконечным пределом	181
6.4	Производные Грюнвальда-Летникова	184
6.5	Связь с дробными операторами Вейля, Лиувилля и Римана	185
Глава 7	Интегральные преобразования	189
7.1	Преобразование Лапласа	189
7.2	Преобразование Меллина	192
7.3	Преобразование Фурье	195
Глава 8	Потенциалы, гиперсингулярные интегралы и производные	199
8.1	Потенциалы и производные Рисса на прямой	199
8.2	Преобразование Фурье потенциалов Рисса	200
8.3	Риссовы производные	201
8.4	Преобразование Фурье производных Рисса	203
8.5	Потенциал Феллера	204

8.6	Производные по направлению	206
8.7	Дробные градиенты и лапласианы	207
8.8	Риссовы потенциалы и движение Леви	210
Глава 9 Обыкновенные дифференциальные уравнения		215
9.1	Простейшее уравнение	215
9.2	Приведение к интегральному уравнению	217
9.3	Метод последовательных приближений	217
9.4	Метод характеристических полиномов	219
9.5	Неоднородные уравнения рационального порядка	221
9.6	Метод разложения в степенной ряд	222
9.7	Разложение в ряд обратных дифференциальных операторов	223
9.8	Метод преобразования Лапласа	224
9.9	Метод функций Грина	228
9.10	Уравнение с составным дробным оператором	229
9.11	Обобщенное уравнение Абеля	232
9.12	Уравнения с распределенными порядками	233
9.13	Уравнения с переменными коэффициентами	234
Глава 10 Уравнения в частных производных		237
10.1	Дробно-баллистическое движение	237
10.2	Субдиффузия на оси	240
10.3	Субдиффузия на полуоси	242
10.4	Сигнальная задача	244
10.5	Проблема нормировки	245
10.6	Субдиффузия в многомерном пространстве	247
10.7	Субволны в многомерном пространстве	249
10.8	Изотропная супердиффузия	251
10.9	Связь между решениями уравнений с дробными и целыми производными по времени	252
10.10	Телеграфное уравнение	254
10.11	Аномальная диффузия на отрезке	256
10.12	Дробно-устойчивые плотности	258
Часть III Применения метода		265
Глава 11 Механика		267
11.1	Задача о таутохроне	267
11.2	Обратные задачи механики	268
11.3	Пластина в вязкой жидкости	270
11.4	Дробно-дифференциальное уравнение Ньютона	272
11.5	Дробно-дифференциальное падение	273
11.6	Дробно-дифференциальный осциллятор	275
11.7	Жидкая капля в акустическом поле	275
11.8	Вариационная задача с дробными производными	278

11.9	Гамильтониан дискретной системы	280
11.10	Гамильтонов формализм для поля	281
Глава 12	Вязкоупругость	285
12.1	Постановка задачи	285
12.2	Дробно-дифференциальная модель Максвелла	287
12.3	Дробно-дифференциальное обобщение модели Кельвина	288
12.4	Стандартная модель и ее обобщение	289
12.5	Модель Бэгли-Торвика	291
12.6	Петля гистерезиса	292
12.7	Модель Работнова	294
12.8	Составные механические модели	296
12.9	Теория Рауса	299
12.10	Динамический подход	300
12.11	Течение вязкоупругой среды	303
	12.11.1 Плоское течение	303
	12.11.2 Цилиндрическое течение	305
12.12	Акустика термовязкой среды	306
	12.12.1 Излучение звука	306
	12.12.2 Поглощение звука	307
Глава 13	Диффузия в пористых средах	311
13.1	Два подхода	311
13.2	Гранулированная пористость	314
13.3	Телеграфная модель	315
13.4	Вывод дробно-дифференциального уравнения	316
13.5	Волоконная пористость	318
13.6	Второй вывод дробно-дифференциального уравнения	319
13.7	Фильтрация	320
13.8	Волны	322
13.9	Гребешковая модель	323
Глава 14	Термодинамика	329
14.1	Нагревание стержня	329
14.2	Теплообмен (диффузия) через сферическую границу	331
14.3	Уравнение Орнштейна-Цернике	332
14.4	Дробно-дифференциальный аналог уравнения Орнштейна-Цернике	334
14.5	Классификация фазовых переходов	335
Глава 15	Диэлектрики	339
15.1	Феноменология релаксации	339
15.2	Процесс Коула-Коула: макроскопическая интерпретация	341
15.3	Микроскопическая интерпретация	342
15.4	Феномен памяти	343
15.5	Процесс Коула-Дэвидсона	348

15.6	Процесс Гавриляка-Негами	351
15.7	Универсальный закон релаксации Джоншера	351
Глава 16	Полупроводники	355
16.1	Диффузия в полупроводниках	355
16.2	Дисперсионный перенос	356
16.3	Автомодельность	357
16.4	Устойчивость как следствие автомодельности	361
16.5	Дробно-дифференциальные уравнения как следствие устойчивости	362
Глава 17	Электротехника	367
17.1	Полубесконечная электрическая линия	367
17.2	Электрохимия	370
17.3	Импеданс шероховатой поверхности	370
Глава 18	Турбулентность	375
18.1	Турбулентная диффузия	375
18.2	Уравнение турбулентной диффузии	377
18.3	Турбулентная диффузия с учетом вязкости	379
18.4	Дробно-дифференциальное обобщение уравнения Навье-Стокса	380
18.5	Дробно-дифференциальное уравнение Рейнольдса	382
18.6	Диффузия в полосовых течениях	384
18.7	Луч света в турбулентной среде	387
Глава 19	Плазма	393
19.1	Дробно-дифференциальная феноменология	393
19.2	Гидродинамический подход	394
19.3	Неравновесные стационарные распределения	395
19.4	Диффузия резонансных фотонов	396
19.5	Ударное уширение спектральной линии	397
Глава 20	Нанофизика	401
20.1	Фрактоны	401
20.2	Слабые фрактонные возбуждения	402
20.3	Нелинейное дробно-дифференциальное уравнение Шредингера	403
20.4	Дробный аналог уравнения Гинзбурга-Ландау	403
20.5	Лазерное охлаждение атомов	404
20.6	Флуоресценция нанокристаллов	406
20.6.1	Бинарная модель	406
20.6.2	Дробно-дифференциальные уравнения процесса	409
Глава 21	Космофизика	413
21.1	Крупномасштабная структура: модель Мандельброта	413
21.2	Статистика в узком луче	416
21.3	Рассеяние света гравитационными полями	418
21.4	Диффузия космических лучей	422

Глава 22 Заключение	427
22.1 Проблема интерпретации	427
22.2 Геометрическая интерпретация дробных интегралов	428
22.3 Механическая интерпретация дробных операторов	430
22.4 Фрактальная интерпретация дробного интеграла	431
22.5 Сложные системы и скрытые переменные	435
Приложение. Некоторые специальные функции	441
Библиография. Дробно-дифференциальные модели в физике	450

Предисловие

«Бог создал целые числа. Остальное сделал человек...» Десятки веков человечество удовлетворялось целыми числами, пока не открыло дроби, а затем – вещественные и комплексные числа. Вещественные числа образуют фундамент классического анализа, важнейшей концепцией которого является *непрерывность*. В рамках этой концепции счетное множество натуральных (и даже рациональных) чисел исчезающе мало (в смысле мощности) по сравнению с континуальным множеством вещественных чисел. В практике эксперимента целые или рациональные числа предстают обычно в виде приближенных значений «истинных» вещественных чисел. Это только в задачнике мы имеем дело со «стержнем длиной 2 метра», на самом деле ни изготовить такой стержень, ни убедиться в том, что длина его строго равна 2 метрам, невозможно. По этой же причине параболические траектории в ньютоновом поле тяготения существуют только в воображении математиков (условие $E = 0$, выделяющее параболическую траекторию, не может быть ни проверено, не приготовлено).

Разумеется, в *счетном режиме*, когда речь идет о количестве предметов, целые числа и по сей день сохраняют монополию, но уже в вопросе о числе операций ситуация изменяется. Так, в выражениях типа

$$y = x_1 + x_2 + \dots + x_n = \sum_{j=1}^n x_j,$$

$$y = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \prod_{j=1}^n x_j,$$

число n можно не комментировать: из самых формул следует, что оно целое, но при одинаковых составляющих ($x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$), эти операции легко продолжают в область вещественных значений n (будем обозначать их через ν):

$$y = \nu x, \quad y = x^\nu, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Важнейшим изобретением Л. Эйлера явилось продолжение факториала $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ в область вещественных (вообще, – комплексных) чисел,

осуществляемое гамма-функцией

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

С ее помощью и был осуществлен прорыв в область нецелого числа повторяющихся операций в интегродифференциальном исчислении, точнее, в область дробных степеней операторов дифференцирования и интегрирования.

Прорыв этот впечатляет по своим последствиям: чрезвычайно обогащается семейство дифференциальных уравнений, «пустые» промежутки между уравнениями первого, второго и высших целых порядков плотно заполняются уравнениями нецелых вещественных порядков, становятся возможными непрерывные переходы между параболическим, гиперболическим и эллиптическим типами уравнений в частных производных.

Наличие в уравнениях дробной производной по времени интерпретируется как отражение особого свойства описываемого процесса – *памяти*, или, в случае стохастического процесса – *немарковости*. Дробные производные по координатам обычно отражает самоподобную неоднородность структуры или среды, в которой развивается процесс. Такие структуры называют *фракталами*.

Хотя основы дробно-дифференциального исчисления были заложены еще в позапрошлом веке, его широкое применение началось лишь в последние десятилетия. Вот неполный перечень задач, в которых появляются и оказываются эффективными уравнения с дробными производными:

- классическая механика (обратные задачи);
- гидродинамика (движение тела в вязкой жидкости);
- теплопроводность (динамика тепловых потоков);
- диффузия (электрохимический анализ поверхностей электродов);
- динамика турбулентной среды;
- теория фазовых переходов;
- пространственные и временные корреляции в жидкостях;
- просачивание в пористых средах;
- вязкоупругость (реология полимеров);
- недебаевская релаксация в диэлектриках;
- аномальный перенос заряда в неупорядоченных полупроводниках;
- статистическая оптика;
- радиофизика и радиотехника;
- лазерное охлаждение атомов;
- мерцающая флуоресценция квантовых точек;
- резонансное излучение и диффузионные процессы в плазме;

- динамический хаос;
- геология (землетрясения);
- астрофизика (аномальная диффузия космических лучей);
- ядерные процессы при высоких энергиях;
- фрактальная космография.

Однако для большинства моих коллег дробно-дифференциальное исчисление остается экзотикой. Желание внести свой вклад в распространение этих идей и стимулировало автора к написанию данной книги. В ней отражен личный опыт работы автора по выполнению ряда проектов РФФИ (2000-2008 г.) в области применения дробно-дифференциального исчисления, а также итоги многочисленных обсуждений на конференциях, частных дискуссий, результаты библиографических изысканий. Не все из перечисленных выше задач будут рассмотрены в книге, но почти все найдут отражение в библиографии.

Слово «метод» в названии книги означает, что речь пойдет в ней не просто о дробно-дифференциальном исчислении как таковом (о дробных интегралах и производных, их свойствах, правилах работы с ними и т.д.), но и о физических предпосылках его применения (*как появляются дробные производные на стадии вывода, откуда следует сама «дробность», какие особенности решения порождаются ею и какую физическую интерпретацию следует им давать*). Читатель ознакомится также с понятиями эрдитарности, автомодельности, фрактальности, с устойчивыми и дробно-устойчивыми распределениями, с движением Леви как обобщением броуновского движения и с рядом других понятий, тесно связанных с дробно-дифференциальным исчислением. Книга завершается справочным приложением и библиографией, отражающей применение метода дробных производных в различных областях физической науки.

Книга эта писалась несколько лет, и я благодарен администрации Ульяновского госуниверситета за условия для плодотворной работы над книгой. Находясь в зарубежных поездках, я имел возможность пользоваться библиотеками и другими информационными системами, за что приношу благодарность администрации Ноттингем-Трент университета и профессору Д. Эпплбауму (Ноттингем, Англия), администрации Института физики сложных систем, доктору Х. Канцу и доктору С. Флаху (Дрезден, Германия), администрации Кейз Вестерн Резерв университета и профессору В. Войцзинскому (Кливленд, США), администрации Института прикладного анализа и стохастики К. Вейерштрасса и доктору К. Сабельфельду (Берлин, Германия).

Я благодарен всем моим российским и зарубежным коллегам, дискуссии с которыми помогли мне продвинуться в понимании логики дробного исчисления.

Я благодарен Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку издания этой книги (грант 08-01-07080) и научных проектов, результаты которых нашли в ней отражение (00-01-00284, 00-02-17507, 03-01-00163, 04-02-16571, 07-01-00517).

Я глубоко благодарен ближайшему своему помощнику к.ф.-м.н. Р. Т. Сибатову, а также моим сыновьям Д. В. и М. В. Учайкиным за участие в подготовке рукописи к изданию.

В. В. Учайкин
v_uchaikin@mail.ru

Часть I

**Физические основания
метода**

Глава 1

Эредитарность

1.1 Понятие эредитарности

В физическом аспекте термин *эредитарность* (hereditariness-лат.) примерно эквивалентен понятиям *память, последствие, запаздывание, наследственность, остаточность*. Речь идет здесь о причинно-следственной связи между двумя процессами: процессом-причиной $f(t)$ и процессом-следствием $g(t)$. Во многих случаях допустимо считать, что временная связь между этими процессами мгновенна и состояние $g(t)$ определяется состоянием $f(t)$ в *тот же момент времени*:

$$g(t) = F(f(t), t). \quad (1.1.1)$$

В действительности же такое мгновенное (не запаздывающее, не эредитарное) влияние одного процесса на другой является лишь приближенной моделью. Фактически, любое осуществление такого влияния требует определенного времени, и дело лишь в том, стóит в рамках решаемой задачи учитывать это запаздывание или нет. Ситуация аналогична той, что возникает при использовании понятия материальной точки: мы игнорируем размеры тела, которыми оно несомненно обладает, покуда они не играют существенной роли в условиях данной задачи, и вносим поправки или вообще решаем задачу заново, если роль размеров становится заметной или весьма существенной.

Выдающийся итальянский математик Вито Вольтерра, посвятивший развитию понятия эредитарности и его применению к физическим и экологическим задачам ряд научных работ и несколько глав в книгах [1, 2], отмечал, что впервые понятие последствия в физике ввел Пикар в 1907, хотя явления усталости металлов, магнитного и электри-

ческого гистерезиса, запаздывания волн и других эредитарных процессов были известны, конечно, много раньше.

Наглядным примером эредитарной связи является дипольный момент атома, наведенный пролетающей вблизи него заряженной частицей. Здесь $f(t)$ – координата пролетающей частицы в момент t , $g(t)$ – наведенный дипольный момент в момент времени t . Влияние частицы на атом осуществляется через электрическое поле, распространение которого требует определенного времени. Однако скорость этого распространения столь велика, что влияние можно считать практически мгновенным и пользоваться формулой типа (1.1.1), за исключением, правда, случая, когда сама налетающая частица движется со скоростью того же порядка, что и скорость распространения электромагнитных взаимодействий (скорость света). В последнем случае уже необходимо учитывать запаздывание и вместо t в аргументе функции $f(t)$ следует писать $t - r(t)/c$, где $r(t)$ – расстояние от частицы до атома в момент времени t , а c – скорость света. Здесь мы имеем дело с простейшим видом эредитарности, выражаемой лишь сдвигом аргумента (заметим, что это лишь первое приближение: точное решение задачи требует вычисления поля, созданного всей предысторией движения заряда).

Математическое отражение эредитарной ситуации состоит в замене функции $F(f(t), t)$ функционалом (эредитарным оператором) $\mathcal{F}(f_t(\cdot); t)$ от предыстории процесса $\{f_t(\tau); \tau < t\}$:

$$g(t) = \mathcal{F}[f_t(\cdot); t]. \quad (1.1.2)$$

Заметим, что в качестве $g(t)$ здесь может выступать и сама функция $f(t)$ и ее производные,

$$\frac{df(t)}{dt} = \mathcal{F}[f_t(\cdot); t] \quad (1.1.3)$$

и т. д.

Функционал \mathcal{F} в соотношении (1.1.2) будем называть *функционалом влияния* процесса $f(t)$ на процесс $g(t)$. Если $g(t)$ является также характеристикой процесса $f(t)$ (как в уравнении (1.1.3)), функционал влияния уместно называть *функционалом памяти*.

Приведем еще два примера эредитарных процессов.

Броуновское движение. Эредитарные эффекты заметно проявляются в броуновском движении тяжелой частицы в жидкости, состоящей из легких молекул. В математической модели броуновского движения предполагается, что каждое смещение случайно и не зависит от предыдущих смещений. Понятно, что это условие, называемое в теории случайных процессов *марковским свойством*, фиксирующим отсутствие памяти процесса, на практике проявляется лишь приближенно. Если предыдущее

смещение оказалось большим, то естественно предположить, что в конце этого интервала скорость частицы будет также превышать среднее ее значение, вследствие чего последующее смещение также следует ожидать большим. Скорости такой частицы приписать марковское свойство можно тоже лишь приближенно: время столкновения, в модели твердых шаров принимаемое нулевым, в действительности таковым не является, и в течение этого времени изменения скоростей в ближайшем прошлом дают некоторую информацию о ближайшем будущем. Если масса броуновской частицы соизмерима с массой окружающих молекул жидкости, марковское свойство может нарушаться в результате захвата частицей сталкивающихся с ней молекул. Наконец, движение броуновской частицы вызывает возмущения течения самой жидкости, влияющие на дальнейшее движение частицы. Окружающая жидкость, как и в указанном выше динамическом случае, действует как накопитель памяти, нарушающий марковское свойство процесса. Численные расчеты [3, 4] показали, что скорость выделенной молекулы газа не является марковским процессом как раз по этим причинам.

Вязкоупругость. Явления упругого последействия были отражены еще в интегралах наследственности Л. Больцмана [5]. Мы ограничимся здесь рассмотрением одномерной системы.

Обозначим через $\psi(t)$, $t > 0$, эволюцию деформации $\varepsilon(t)$, вызванной единичным скачком напряжения

$$\sigma(t) = 1(t) \equiv \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

в момент времени $t = 0$, и назовем ее *функцией ползучести*. Аппроксимируя произвольную кусочно-непрерывную зависимость напряжения от времени $\sigma(t)$ многоступенчатой функцией со скачками $\Delta\sigma(t_j)$ в точках t_j временной оси и переходя затем к пределу при $\Delta t_j = t_j - t_{j-1} \rightarrow 0$, получим *интеграл ползучести*

$$\varepsilon(t) = \sum_{t_j < t} \psi(t - t_j) \Delta\sigma(t_j) \rightarrow \int_{-\infty}^t \psi(t - t') d\sigma(t').$$

Обозначим, далее, через $\varphi(t)$, $t > 0$ *функцию релаксации*, представляющую эволюцию напряжения $\sigma(t)$, вызванного единичным скачком деформации $\varepsilon(t) = 1(t)$ и запишем с ее помощью *интеграл релаксации*

$$\sigma(t) = \sum_{t_j < t} \varphi(t - t_j) \Delta\varepsilon(t_j) \rightarrow \int_{-\infty}^t \varphi(t - t') d\varepsilon(t').$$

Представление наследственных эффектов с помощью интегралов отражает предполагаемую *линейность* процессов относительно их «источников», интегрирование только по предыстории согласуется с *принципом причинности*.

Выполняя интегрирование по частям, можно привести полученные соотношения к виду

$$\varepsilon(t) = \psi(0)\sigma(t) + \int_{-\infty}^t \dot{\psi}(t-t')\sigma(t')dt'$$

и

$$\sigma(t) = \varphi(0)\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^t \dot{\varphi}(t-t')\varepsilon(t')dt',$$

где точками над символами функций ползучести и релаксации отмечены их производные. В этом представлении выделены мгновенные (неэредитарные) компоненты реакций на нагрузку, $\psi(0)\sigma(t)$ и $\varphi(0)\varepsilon(t)$, что в ряде случаев позволяет упростить анализ ситуации.

1.2 Эредитарная теория Вольтерры

1.2.1 Законы эредитарности Вольтерры

Для развития содержательной теории и ее эффективного использования в практических задачах следует установить определенные ограничения на вид функционалов, выделить важнейшие для приложений свойства и изучить соответствующие следствия. Первый шаг в этом направлении сделал сам В. Вольтерра, сформулировав положения, названные им *общими законами эредитарности* [2, п.148].

1. Принцип *линейности*:

$$\mathcal{F}(f_t(\cdot); t) = \int_{-\infty}^t \phi(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

(В. Вольтерра выделяет δ -составляющую функции влияния в явном виде, дополняя интеграл слагаемым $\sigma(t)f(t)$). В соответствии с ним выражение (1.1.2) принимает вид:

$$g(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t, \tau)f(\tau)d\tau. \quad (1.2.1)$$

2. Принцип *затухания*:

$$\phi(t, \tau) \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow -\infty.$$

3. Принцип *инвариантности*:

$$\phi(t, \tau) = \phi(t - a, \tau - a) = \phi(t - \tau, 0) \equiv \Phi(t - \tau).$$

Эредитарность называется *ограниченной*, если существует такое $\tau_0 < \infty$, что $\phi(\tau) = 0$ при $\tau > \tau_0$. Ограниченность эредитарности дает основание для расширения понятия состояния эредитарной системы: две одинаковые эредитарные системы находятся в данный момент в одинаковых состояниях, если их динамические переменные совпадают на всем интервале эредитарности $(t - \tau_0, t)$, предшествующем этому моменту.

В действительности эти принципы выделяют лишь простейший класс эредитарных явлений. В п. 153 [2] В. Вольтерра замечает, со ссылкой на несколько современных ему работ, что линейной эредитарности «однако недостаточно для объяснения некоторых явлений электродинамики».

1.2.2 Эредитарная струна

В. Вольтерра демонстрирует применение эредитарной идеи к задачам упругости (точнее, вязкоупругости) на примере кручения струны, один из концов которой закреплен, а ко второму приложен момент силы M , под действием которого этот конец поворачивается на угол Θ . Если вращение происходит достаточно медленно (квазистатический случай), связь между Θ и M в первом приближении дается линейным соотношением

$$\Theta = KM, \tag{1.2.2}$$

где K – материальная постоянная. За пределами линейного приближения используется более сложная зависимость

$$\Theta = F(M), \tag{1.2.3}$$

где $F(M)$ – материальная функция. Формула (1.2.2) при этом представляет собой первый не исчезающий член ряда Маклорена:

$$\Theta = F(0) + F'(0)M + \dots \approx KM, \quad F(0) = 0, \quad F'(0) = K.$$

Общим свойством формул (1.2.2) и (1.2.3) является то, что обе переменные M и Θ берутся в один и тот же момент времени: влияние M на Θ предполагается мгновенным, не зависящим от предыстории процесса.

Более точные измерения, однако, показывают, что $\Theta(t)$ зависит не только от крутящего момента $M(t)$ в момент измерения, но и от предыстории $M(\tau)$, $\tau < t$: струна обладает свойством эредитарности. Стало быть, вместо (1.2.2) следует писать функциональное соотношение

$$\Theta(t) = \mathcal{F}[M_t(\cdot)].$$

Подобно своему предшественнику (1.2.3), оно так же может быть линейризовано разложением в (теперь уже функциональный) ряд и удержанием только первого неисчезающего члена:

$$\Theta(t) = \mathcal{F}[0] + \int_{-\infty}^t \frac{\delta \mathcal{F}(0)}{\delta M_t(\tau)} M(\tau) d\tau + \dots \approx \int_{-\infty}^t \phi(t, \tau) M(\tau) d\tau. \quad (1.2.4)$$

Нетрудно усмотреть физический смысл *функции влияния* $\phi(t, \tau)$, положив $M(\tau) = \delta(\tau - \tau')$:

$$\phi(t, \tau') = \Theta(t)|_{M(\tau)=\delta(\tau-\tau')}.$$

Она равна углу поворота конца струны в момент t , подвергнутого импульсному действию крутящего момента в один из предшествующих наблюдению моментов времени $\tau' < t$.

Как и материальные постоянные, материальная функция $\phi(t, \tau)$ не выводится «из первых принципов», а получается либо из модельных расчетов, либо из экспериментальных данных. При этом часто используется инвариантная относительно сдвига во времени форма

$$\phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau),$$

так что вместо (1.2.4) имеем

$$\Theta(t) = \int_{-\infty}^t \Phi(t - \tau) M(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \Phi(\tau) M(t - \tau) d\tau.$$

Решение этого уравнения относительно $M(t)$, записанное в виде

$$M(t) = \int_{-\infty}^t \Psi(t - \tau) \Theta(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \Psi(\tau) \Theta(t - \tau) d\tau, \quad (1.2.5)$$

в свою очередь может рассматриваться как уравнение относительно $\Theta(t)$ при заданном $M(t)$.

В. Вольтерра пишет: «Если предположить, что эффектом эредитарности до некоторого момента $t_0 < t$ можно пренебречь (для простоты на t_0 можно смотреть как на начало времени: $t_0 = 0$), то (1.2.5) принимает вид:

$$M(t) = \int_0^t \Psi(t - \tau)\Theta(\tau)d\tau,$$

где оба предела интеграла конечны» [2, с. 188].

Заметим только, что пренебрегать необязательно: условие $M(\tau) = 0$ при $\tau < 0$ может быть задано как *исходное условие задачи*. С другой стороны, если эредитарность есть, и мы намерены пренебречь влиянием отрицательной полуоси на процесс в момент времени t , то это значит, согласно принципу затухания эредитарности, мы должны подразумевать здесь под t большие времена.

Переход к динамической задаче (крутильным колебаниям струны), согласно принципу Даламбера, осуществляется путем замены $M(t)$ на $M(t) - \mu\ddot{\Theta}(t)$, μ – положительная постоянная. В результате получим интегро-дифференциальное уравнение для динамической эредитарной задачи:

$$M(t) - \mu\ddot{\Theta}(t) = \int_{-\infty}^t \Psi(t - \tau)\Theta(\tau)d\tau.$$

Для определения угла закручивания $\Theta(t)$ по заданному моменту $M(t)$ достаточно дважды проинтегрировать это уравнение по времени от 0 до t и разрешить полученное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\Theta(t)$.

1.2.3 Эредитарный осциллятор

Второй параграф главы VI книги [2], названный «Эредитарная динамика», В. Вольтерра посвящает эредитарному обобщению одномерного гармонического осциллятора, осуществляемого заменой дифференциального уравнения

$$m\ddot{q} + kq = 0, \quad m, k > 0,$$

интегро-дифференциальным

$$m\ddot{q} + k \int_{-\infty}^t \Phi(t - \tau)q(\tau)d\tau = 0.$$

Не вдаваясь в обоснование задачи и физический смысл этой замены, он находит выражение для «потенциальной энергии», в наших обозначениях

имеющее вид

$$U(q) = \frac{k}{2} \left\{ \int_0^{\infty} \Phi(\tau) d\tau \cdot q^2(t) - \int_0^{\infty} \Phi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\},$$

так что

$$\frac{\partial U}{\partial q} = k \int_0^{\infty} \Phi(\tau) q(t - \tau) d\tau.$$

Введя внешнюю силу $Q(t)$ и выделив в $\Phi(\tau)$ сингулярную (неэредитарную) составляющую,

$$k\Phi(\tau) = k\delta(\tau) + \varphi(\tau),$$

Вольтерра приходит к уравнению

$$d \left\{ \frac{m\dot{q}^2(t)}{2} + \frac{Kq^2(t)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \right\} + \\ + \frac{dt}{2} \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau = Qdq, \quad (1.2.6)$$

где

$$K = k + \int_0^{\infty} \varphi(\tau) d\tau.$$

В отсутствие эредитарных эффектов $\varphi(\tau) = 0$ и уравнение (1.2.6) принимает обычный для неэредитарной динамики вид

$$d \left\{ \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} \right\} = Qdq,$$

означающий, что работа внешних сил равна приращению полной механической энергии системы. Включение эредитарности приводит не только к модификации формы потенциальной энергии, в результате чего полная механическая энергия принимает вид

$$E_M = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{Kq^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \varphi(\tau) [q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau,$$

но и к появлению дополнительного (можно показать, что положительно-го) слагаемого

$$Wdt = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \dot{\varphi}(\tau)[q(t) - q(t - \tau)]^2 d\tau \cdot dt,$$

отражающего диссипацию энергии в эредитарном процессе. В результате имеем

$$dE_M + Wdt = Qdq$$

или, в интегральной форме

$$E_M - E_M^0 + \int_{t_0}^t Wdt = A. \quad (1.2.7)$$

Здесь E_M и E_M^0 суть значения полной механической энергии в моменты времени t и t_0 , а A – работа, совершенная внешними силами в данном интервале времени.

1.2.4 Принцип энергии

Уточним понятие *состояния эредитарной системы*. Будем говорить, что эредитарная система в моменты t_1 и t_2 находится в одном и том же состоянии, если ее динамические переменные совпадают не только в эти моменты времени, но и в предшествующих им интервалах $(t_1 - \tau_0, t_1)$ и $(t_2 - \tau_0, t_2)$ длительностью τ_0 , характеризующей затухание эредитарности.

Теорема Вольтерры. *Если в конце некоторого периода времени эредитарная система возвращается к своему первоначальному состоянию, то работа внешних сил является положительной.*

Поскольку с динамической точки зрения состояние системы то же самое, полная механическая энергия не изменилась и указанная положительная работа является мерой диссипации энергии:

$$E_D = \int_{t_0}^t Wdt.$$

Согласно принципу сохранения энергии она должна превращаться в другие формы энергии, в первую очередь – в тепловую. На этом принципе развивается целое направление термодинамических сред с памятью (то есть, эредитарной термодинамики) (см. п. 1.3).

1.2.5 Эредитарная электродинамика

Свойство эредитарности находит отражение и в материальных уравнениях, выражающих электрическую и магнитную индукции через предыстории соответствующих напряженностей. Вместо квазистатических соотношений

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon \mathbf{E}(t)$$

и

$$\mathbf{B}(t) = \mu \mathbf{H}(t),$$

мы имеем

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon \mathbf{E}(t) + \int_0^{\infty} \phi(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau, \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{B}(t) = \mu \mathbf{H}(t) + \int_0^{\infty} \psi(\tau) \mathbf{H}(t - \tau) d\tau. \quad (1.2.9)$$

Эти уравнения и положил В. Вольтерра в основу эредитарной электродинамики. Используя их при выводе уравнения для плотности электромагнитной энергии, он получил

$$\frac{\dot{\mathbf{D}}\mathbf{E} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{H}}{4\pi} = \frac{d}{dt}(W_e + W_m) + w_d,$$

где

$$W_e = \frac{1}{8\pi} \left(\varepsilon \mathbf{E}^2(t) + \int_0^{\infty} \phi(\tau) \mathbf{E}^2(t - \tau) d\tau \right),$$

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \left(\mu \mathbf{H}^2(t) + \int_0^{\infty} \psi(\tau) \mathbf{H}^2(t - \tau) d\tau \right),$$

а

$$w_d = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{\infty} \{ \dot{\phi}(\tau) [\mathbf{E}(t - \tau) - \mathbf{E}(t)]^2 + \\ + \dot{\psi}(\tau) [\mathbf{H}(t - \tau) - \mathbf{H}(t)]^2 \} d\tau$$

– величина, названная *плотностью электромагнитной энергии рассеяния*, обусловленного свойством эредитарности. Все три плотности положительны.

Следует остановиться на том, что помимо естественной для электромагнитного поля «быстрой» эредитарности, уравнения (1.2.8) и (1.2.9) отражают также медленные процессы, происходящие в твердых телах в течение нескольких часов или даже дней после скачка напряженности поля [6].

1.3 Эредитарная термодинамика

Развитие эредитарных методов описания механических процессов в сплошной среде, начатое Больцманом и Вольтеррой, не могло не привести к появлению эредитарной термодинамики, хотя и произошло это с заметным опозданием. Термодинамика была и остается до настоящего времени «наиболее феноменологическим» разделом теоретической физики, и многие предпочитают видеть ее скорее покоящейся на фундаменте аксиом, чем вытекающей из статистической физики. На этом-то пути аксиоматизации неравновесной термодинамики и были использованы эредитарные идеи, породившие *термодинамику сред с памятью* [7-11].

Состояние сплошной среды характеризуется набором определенно-го числа величин (в случае неоднородных сред – функций координат). Удобно разделить их на два класса – взаимно независимые *активные переменные*, которыми можно независимо манипулировать в эксперименте, и *реактивные переменные*, значения которых однозначно определяются активными переменными по известным *конститутивным (определяющим) уравнениям*. Понятно, что это разбиение может быть осуществлено не единственным образом.

В задачах равновесной термодинамики, когда процессы происходят бесконечно медленно, в соотношения между активными x_j и реактивными y_i переменными время в явном виде вообще не входит

$$y_i(t) = \phi^i(x_j(t)).$$

Когда время, за которое осуществляется влияние активных переменных на реактивные, становится заметным по сравнению с характерным временем изменения состояния системы, в списке аргументов функций ϕ^i появляются производные по времени от активных переменных:

$$y_i(t) = \phi^i(x_j(t), \dot{x}_j(t)).$$

Можно представить себе, что дальнейшее увеличение скоростей потребует введения производных высших порядков. Заметив, что совокупность всех производных бесконечно дифференцируемой функции в данной точке определяет всю функцию целиком, естественно предположить, что в общем случае функции ϕ^i необходимо заменить функционалами Φ^i :

$$y_i(t) = -_{\infty}\Phi_t^i[x_j(\cdot)].$$

Пределы $(-\infty, t)$ указывают, что функционал памяти, определяющий y_j в момент времени t , зависит лишь от предыстории активных переменных $x_i(t')$, $t' < t$, но не от их будущих значений (*принцип причинности*). Чаще всего используются линейные функционалы памяти, представляемые интегральными операторами.

В качестве примера соотношений последнего типа приведем уравнение теплопроводности Гуртина-Пипкина [12] :

$$h_i(t) = \sum_j \int_{-\infty}^t R_{ij}(t-t')T_{,j}(t')dt'. \quad (1.3.1)$$

В частном случае, когда ядро памяти имеет экспоненциальный вид,

$$R_{ij}(t) = A_{ij}e^{-t/\tau}, \quad (1.3.2)$$

где τ – время температурных релаксаций, из (1.3.1) и (1.3.2) следует:

$$\frac{dh_i}{dt} = \sum_j \left[A_{ij}T_{,j}(t) - \frac{A_{ij}}{\tau} \int_0^t e^{-t'/\tau} T_{,j}(t-t')dt' \right]. \quad (1.3.3)$$

Подставляя (1.3.1) в (1.3.3), получаем обобщенный закон теплопроводности А. Лыкова [13]:

$$h_i(t) + \tau \frac{dh_i}{dt} = \tau \sum_j A_{ij}T_{,j}.$$

1.4 Эредитарное кинетическое уравнение Больцмана

Традиции и принципы теоретической физики побуждают нас искать корни эредитарности в молекулярно-кинетической природе вещества. Основой такого подхода является иерархия кинетических уравнений – цепочка уравнений ББГКИ, начинающаяся с уравнения Лиувилля и приводящая к уравнению Больцмана, в пространственно-однородном случае имеющему вид

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)]. \quad (1.4.1)$$

Здесь \mathbf{B}_0 – больцмановский билинейный *оператор столкновений*, действующий на $\varphi(\mathbf{v}, t)$ – одночастичную плотность распределения молекул в пространстве скоростей:

$$\mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)] \equiv \int d\mathbf{u} \int \sigma(\Theta; g) [\varphi(\mathbf{v}', t)\varphi(\mathbf{u}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)\varphi(\mathbf{u}, t)] d\Omega.$$

В этом выражении \mathbf{v} и \mathbf{u} – скорости сталкивающихся молекул до или после (со штрихом) столкновения, $g = |\mathbf{v} - \mathbf{u}|$ – их относительная скорость,

Θ – угол рассеяния, $\sigma(\Theta; g)d\Omega$ – дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ (законы сохранения энергии и импульса однозначно связывают \mathbf{v}' и \mathbf{u}' с \mathbf{v} , \mathbf{u} и Θ).

Предположения, лежащие в основе вывода этого уравнения, существенно упрощают решение газодинамических задач, но до сих пор не считаются достаточно обоснованными для плотных газов и жидкостей. Для них получены *обобщенные кинетические уравнения*, связанные с именами Л. ван Хова, И. Пригожина, Р. Браута, П. Резибуа, Р. Цванцига, Э. Монролла (см. [14-20]). Выведенные при более слабых ограничениях, эти уравнения сохраняют важнейшее свойство больцмановского уравнения – описывают необратимый процесс релаксации к равновесию. Главным же математическим отличием обобщенных уравнений является учет запаздывания в интеграле столкновения путем дополнительного интегрирования по сдвинутому временному аргументу одночастичной функции распределения в нелинейном операторе столкновений B_τ

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t B_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t). \quad (1.4.2)$$

В случае равновесного состояния решение уравнения Больцмана не зависит от времени, $\varphi(\mathbf{v}, t) = \varphi_{eq}(\mathbf{v})$ и влияние запаздывания исчезает.

Последовательность получаемых в процессе этого вывода уравнений и образует новую иерархию. Напомним основные этапы вывода.

1. Из канонических уравнений Гамильтона для системы N взаимодействующих молекул без всяких дополнительных предположений выводится *уравнение Лиувилля* для фазовой плотности $\rho^N \equiv \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t)$:

$$\frac{\partial \rho^N}{\partial t} = iL^N \rho^N,$$

где L^N – *оператор Лиувилля*. Оно непригодно для решения и применения к конкретным задачам из-за «астрономически» большого числа переменных N .

2. Введением проекционного оператора P , выполняющего усреднение фазовой плотности по пространству конфигураций,

$$P\rho^N = \frac{1}{V^N} \int_V \dots \int_V \rho^N(\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}; t) \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j \equiv \varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t),$$

уравнение Лиувилля преобразуется в эквивалентное ему *формальное кинетическое уравнение*

$$\frac{\partial \varphi^N}{\partial t} = \int_0^t C_\tau^N [\varphi^N(\{\mathbf{v}\}|t-\tau)] d\tau + f^N(\{\mathbf{v}\}, t),$$

где C_τ^N – оператор взаимодействия молекул между собой. Интеграл по времени появился в результате разложения решения ρ^N на две компоненты – «существенную» $\varphi^N = \mathbf{P}\rho^N$ и «несущественную» $(1-\mathbf{P})\rho^N$ – и исключения последней из образовавшейся в результате этого разделения системы двух уравнений. Никаких новых процессов, ни ограничений на старые здесь не введено. Таким свойством обладает любой марковский процесс: усреднение по части переменных порождает интегрирование по времени, свидетельствующее о немарковском характере *редуцированного* процесса (справедливо и обратное: подходящим расширением фазового пространства немарковский процесс может быть преобразован в марковский). Свободный член уравнения f^N зависит от начального значения только «несущественной» части. Число независимых переменных, хоть и уменьшилось в два раза, все еще чрезвычайно велико, а само уравнение теперь стало незамкнутым.

3. Чтобы сократить N -частичный набор переменных до одночастичного и вместе с тем замкнуть уравнение, вводится **гипотеза молекулярного хаоса**: *случайные скорости вступающих во взаимодействие молекул взаимно независимы*:

$$\varphi^N(\{\mathbf{v}\}; t-\tau) = \prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j; t-\tau),$$

где $\varphi(\mathbf{v}_j; t-\tau)$ – одночастичные плотности в пространстве скоростей. В результате приходим к *обобщенному кинетическому уравнению*

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t-\tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t),$$

где

$$\mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot|t-\tau)] \equiv \text{TL} \int \dots \int C_\tau^N \left[\prod_{j=1}^N \varphi(\mathbf{v}_j|t-\tau) \right] \prod_{j=2}^N d\mathbf{v}_j,$$

интегрирование предполагается по всем пронумерованным скоростям (индекс 1 опущен), а TL означает термодинамический предел.

4. Газ достаточно разрежен, чтобы взаимодействие молекул можно было рассматривать в модели бинарных мгновенных столкновений. В этом случае

$$\mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]\delta(\tau)$$

и мы приходим к уравнению Больцмана.

Отказавшись от последнего ограничения, аппроксимируем зависимость оператора столкновения от времени запаздывания множителем $b(\tau)$, нормированным на 1:

$$\mathbf{B}_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] = \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]b(\tau), \quad \int_0^\infty b(\tau)d\tau = 1.$$

Запаздывание это и есть эффект памяти, или немарковский эффект, отражающий реальные процессы, происходящие в среде. Полученное при этом уравнение

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)]d\tau + f(\mathbf{v}, t)$$

и образует математическую основу эредитарной, или, как ее называют еще, *обобщенной гидродинамики* [20].

1.5 Обобщенная гидродинамика

Долгое время считалось, что гидродинамика применима на временах, на много порядков больших «кинетических» времен: времени столкновения ($\sim 10^{-15}$ с) и времени между последовательными столкновениями (для типичных жидкостей, например, воды $\sim 10^{-14}$). Численное моделирование показало, однако, что в ряде случаев обычная гидродинамика применима и на гораздо меньших временных масштабах – примерно до 30 столкновений, то есть, до времен порядка 10^{-13} с. Заметим, что в приложениях математической статистики число 30 так же играет приметную роль: считается, что для типичных выборок такого объема уже применима центральная предельная теорема, эквивалентная диффузионному приближению в гидродинамике.

Обобщенная гидродинамика явилась следствием распространения гидродинамического подхода с макроскопических на микроскопические масштабы. Уравнения Навье-Стокса сохранили при этом свою форму,

но коэффициенты переноса стали зависеть от радиуса действия градиентов и от длительности их приложения. Тем самым включились масштабные факторы длины и времени, что позволило выйти за пределы модели непрерывной среды и учесть ее молекулярную структуру. Жидкость, характеризуемая обобщенной вязкостью $\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$, обладает двумя свойствами – *нелокальностью* и *памятью*: сигнал, рожденный в момент времени t' в точке \mathbf{r}' , придет в точку \mathbf{r} в более поздний момент t . Это запаздывание обусловлено не столько инерционными свойствами жидкости, сколько диффузионным характером распространения флуктуаций. В любом случае, для перестройки расположения молекул требуется некоторое время.

Кроме того, выяснилась также необходимость учета корреляций с партнерами по предшествующим столкновениям. Ранее распад корреляций предполагался экспоненциальным и в гидродинамических масштабах корреляции представлялись несущественными (гипотеза молекулярного хаоса). Численное моделирование показало наличие долговременного хвоста автокорреляционной функции для скорости жидкости при промежуточных плотностях [21]: скорость частицы даже после нескольких сотен столкновений обнаруживает корреляцию со своим начальным значением, спадающую по степенному закону. В макроскопической гидродинамике этот факт известен со времен Стокса, установившего его при рассмотрении движения шарика в сплошной среде. Никто, однако, не предполагал, что этот вывод останется справедливым и для шариков атомных размеров.

Важную роль в интерпретации эффекта памяти играет и тот факт, что в определенных условиях мы уже не можем считать столкновения мгновенными и должны учитывать их продолжительность. Характерное время столкновения τ_{col} становится теперь соизмеримым со временем релаксации τ_{rel} , что необходимо учитывать при высоких плотностях.

Это легко понять из следующих соображений. Характерное время бинарных столкновений при низких плотностях оценивается отношением радиуса взаимодействий r_0 к средней скорости движения молекул \bar{v} :

$$\tau_{col} \approx r_0/\bar{v}.$$

Время же релаксации оценивается сведением кинетического уравнения к релаксационному типу

$$\frac{\partial(\varphi - \varphi_{eq})}{\partial t} \approx -nr_0^2\bar{v}(\varphi - \varphi_{eq})$$

и имеет вид

$$\tau_{rel} \approx 1/(nr_0^2\bar{v}).$$

Таким образом, мы видим, что

$$\tau_{col}/\tau_{rel} \approx nr_0^3,$$

и при низких плотностях n время столкновений τ_{col} пренебрежимо мало по сравнению со временем релаксации.

К аналогичному выводу приходят и авторы книги [22] на основе известного разложения обратного времени релаксации по степеням плотности молекул газа (концентрации) n :

$$\tau_{rel}^{-1} = r_0^2 n \bar{v} [1 + c_1 r_0^3 n + c_2 (r_0^3 n)^2 + \dots].$$

Отношение рассматриваемых времен

$$\tau_{col}/\tau_{rel} = r_0^3 n + c_1 (r_0^3 n)^2 + \dots,$$

так что если мы хотим сохранить поправку $(r_0^3 n)^2$, мы не имеем права считать столкновения мгновенными.

Второй член в правой части обобщенного кинетического уравнения (1.4.2) описывает распад пространственных корреляций, могущих существовать в начальный момент времени. Можно показать, что если в начальный момент времени пространственные корреляции отсутствуют, то $f(\mathbf{v}; t) = 0$ при всех $t > 0$. Допустим теперь, что в начальный момент времени корреляции простираются на расстояния порядка радиуса взаимодействия r_0 . Хаотически направленные скорости входящих в корреляционный кластер частиц ведут к их взаимному разбеганию, расплыванию кластера, и через время $\tau_{col} = r_0/\bar{v}$ частицы перестают взаимодействовать друг с другом. Следует ожидать поэтому, что

$$f(\mathbf{v}; t) \approx 0, \quad t \gg \tau_{col}.$$

Расчеты подтверждают это в случае слабо взаимодействующего газа с экспоненциальным отталкиванием молекул, однако строгое доказательство этого свойства в общем случае не найдено.

Аналогичная ситуация имеет место и с операторным членом. Принято считать, что

$$\mathbf{B}_\tau[\varphi] \simeq 0, \quad t \gg \tau_{col}.$$

Несколько иной подход развит Р. Цванцигом [17].

1.6 Эредитарная диффузия

Выше уже подчеркивалась важная роль диффузионной модели в гидродинамических задачах. Наличие долговременных корреляций существенным образом видоизменяет эту модель: входящий в диффузионное

уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

коэффициент диффузии K пропорционален интегралу от автокорреляционной функции $\int_0^\infty \rho(t) dt$ и поэтому расходится, если корреляции спадают по степенному закону. В модифицированном уравнении диффузии, приближенно учитывающем нелокальность процесса с помощью дополнительного члена с 4-й производной (поправка Бернета),

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B \frac{\partial^4 f}{\partial x^4},$$

расходятся оба коэффициента. «Простейший возможный путь, приводящий к переопределению коэффициентов», – говорится в статье Б. Олдера и У. Алли [21] – «обобщение закона Фика путем введения нелокальной (по времени) «функции памяти»:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K_0 \int_0^t \rho(t-t') \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dt' + B_0 \int_0^t \rho(t-t') \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} dt'.$$

Это уравнение не только дает хорошо определенный коэффициент Бернета, но и предсказывает количественно синглетную функцию распределения при больших временах».

1.7 Память в полимерных жидкостях

Пожалуй, наиболее яркое отличие от стандартной гидродинамики проявляют полимерные жидкости. Они состоят из огромных (с молекулярным весом $10^5 - 10^8$) полимерных молекул – длинных, часто запутанных цепочек большого числа повторяющихся звеньев (мономеров). Полимерные жидкости могут представлять собой как растворы полимеров, так и неразбавленные полимеры, называемые также расплавами.

Можно наблюдать целый ряд удивительных явлений, качественно отличающихся от поведения в таких ситуациях ньютоновских жидкостей (см. [23]). Так, вблизи вертикально погруженного в жидкость вращающегося стержня поверхность ньютоновской жидкости опускается, а полимерной – поднимается. Вращение диска на дне цилиндрического сосуда приводит к движению ньютоновской жидкости от центра и полимерной – к центру. Вытекая из вертикальной трубки, поток ньютоновской жидкости постепенно сужается в диаметре, тогда как полимерная жидкость вначале быстро расширяется (в два с лишним раза), а уж затем начинает

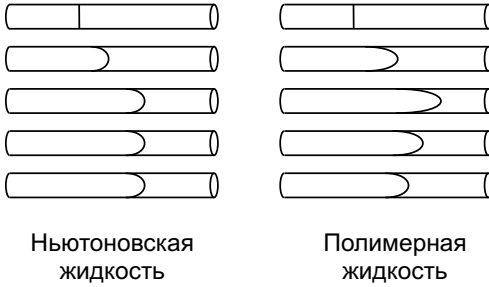


Рис. 1.1: Эредитарное поведение полимерной жидкости [23].

сужаться. Чтобы выкачать ньютоновскую жидкость из сосуда с помощью засасывающей трубки, надо погрузить трубку в жидкость, а полимерная жидкость выкачивается и в случае, когда трубка не достаёт до поверхности на несколько сантиметров. Надо ли говорить, что такие особенности не могут быть предсказаны стандартной гидродинамикой?

Рассмотрим подробнее следующий опыт (Рис. 1.1). Насос прокачивает жидкость через трубу. В начальный момент опыта краской помечается сечение жидкости, за которым в дальнейшем ведётся наблюдение. Окрашенная поверхность в процессе движения принимает характерную для течения Пуазейля параболическую форму. Выключение насоса приводит к прекращению движения жидкости. При этом ньютоновская жидкость продолжает оставаться в покое, тогда как полимерная жидкость откатывается на некоторое расстояние назад, не возвращаясь, однако, к начальному положению. Сам процесс движения в обратную сторону обнаруживает «память» полимерной жидкости, а то обстоятельство, что жидкость не возвращается в начальное состояние, как это мы наблюдаем в случае с пружиной, свидетельствует о затухании памяти.

Одной из основных проблем в полимерной динамике является отыскание соответствующего выражения для тензора напряжений, которое заменило бы закон Ньютона для вязкой жидкости. В статье [23] предложено следующая формула для полимерного расплава молекул в виде свободно-связанных цепочек, состоящих из N шариков и $N - 1$ звеньев длины a :

$$p_{ij} = p\delta_{ij} + nNkT \left[\frac{1}{3}\delta_{ij} - \int_{-\infty}^t \mu(t-t')A_{ij}(t')dt' - \varepsilon \int_{-\infty}^t \nu(t-t')B_{ij}(t')dt' \right].$$

Здесь A_{ij} и B_{ij} – тензоры, зависящие от тензора конечных деформаций

и его скорости, n – концентрация полимерных молекул,

$$\nu(t) = (16/\pi^2\lambda) \sum_{\text{нечетн } l} l^{-2} \exp(-\pi l^2 t/\lambda),$$

а

$$\mu(t) = -\frac{\lambda}{2} \frac{d\nu}{dt}.$$

Постоянная λ , имеющая размерность времени, связана с параметрами модели соотношением

$$\lambda = N^{3+\beta} \zeta a^2 / 2kT,$$

где β – эмпирическая постоянная.

1.8 Эредитарное уравнение Паули

Квантовым аналогом уравнения Больцмана является кинетическое уравнение Паули для вероятности $P(\nu, t)$ обнаружить систему в состоянии с квантовыми числами ν в момент времени t :

$$\frac{dP(\nu, t)}{dt} = \sum_{\mu} [W(\nu, \mu)P(\mu, t) - W(\mu, \nu)P(\nu, t)],$$

где $W(\nu, \mu)$ – вероятность перехода из μ в ν в единицу времени. Для крупноструктурной (сглаженной) плотности вероятности $p(\nu, t)$ уравнение принимает вид:

$$\frac{dp(\nu, t)}{dt} = 2\pi\lambda^2 \int d\mu [w(\nu, \mu)p(\mu, t) - w(\mu, \nu)p(\nu, t)].$$

К нему следует добавить начальное условие, например, $p(\nu, 0) = \delta(\nu - \nu_0)$. Уравнение Паули выведено для систем со слабым взаимодействием ($\lambda^2 \tau_{rel} \simeq 1$) в предположении, что фазы коэффициентов $c(\nu, t)$ разложения

$$|\varphi_t\rangle = \int d\nu c(\nu, t) |\nu\rangle$$

во все моменты времени случайны, независимы и равномерно распределены по всем возможным значениям. Это допущение, аналогичное больцмановской гипотезе о молекулярном хаосе, не вполне корректно: оно выполняется только в случае, когда система находится в состоянии полного термодинамического равновесия.

Ван Хов вывел аналог этого уравнения в предположении, что указанные свойства случайных фаз имеют место лишь в *начальный момент*

времени [18]. Обобщенное таким образом кинетическое уравнение записывается в виде:

$$\frac{dp(\nu, t)}{dt} = 2\pi\lambda^2 \int_0^t d\tau \int d\mu [w(\nu, \mu; \tau)p(\mu, t - \tau) - w(\mu, \nu; \tau)p(\nu, t - \tau)] + \delta(\nu - \nu_0)f(\nu; t).$$

Основное отличие этого уравнения от предыдущего проявляется в наличии интегрирования по запаздывающему временному аргументу в слагаемых, описывающих переходы, и в присутствии последнего неоднородного члена, отсутствующего в уравнении ван Хова. При малых возмущениях интегро-дифференциальное по времени уравнение переходит в дифференциальное уравнение Паули. Исследуя процесс этого перехода, ван Хов отмечает: «Для очень малых возмущений мы можем, следовательно, различать два временных масштаба, короткий (τ_0), не зависящий от λ , и длинный (τ_1), возрастающий пропорционально λ^2 при $\lambda \rightarrow 0$ » ([18], с. 462). В другом месте статьи он пишет:

«Обобщенное кинетическое уравнение существенно отличается от его версии низшего порядка (так называет ван Хов уравнение Паули – В.У.) тем, что оно соответствует немарковскому процессу. Переход от точного кинетического уравнения к его приближению низшего порядка показывает существование двух временных масштабов, короткого и длинного, для очень медленных необратимых процессов... Эта немарковская природа общего кинетического уравнения может быть объяснена интерференционными эффектами производимых возмущением волн. Эти эффекты суть проявление определенных фазовых соотношений. Они становятся пренебрежимо малыми для малых возмущений, и именно поэтому уравнение низшего порядка является марковским» ([18], с. 477).

1.9 Эредитарное уравнение Фоккера-Планка

Если рассматриваемая частица отличается каким-то образом от остальных (например, массой или внутренней энергией), а множество остальных молекул представляет собой равновесный ансамбль, нелинейные кинетические уравнения (1.4.1) и (1.4.2) превращаются в линейные для функции $\varphi(\mathbf{v}, t)$, принимающей теперь смысл плотности вероятности рассматриваемой частицы в пространстве скоростей:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \mathbf{B}'_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)],$$

$$\mathbf{B}'_0[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)] \equiv \int d\mathbf{v}' \bar{\sigma}(\Theta; v') [\varphi(\mathbf{v}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)] d\mathbf{v}'.$$

и

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = \int_0^t \mathbf{B}'_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t - \tau)] d\tau + f(\mathbf{v}, t),$$

$$\mathbf{B}'_\tau[\mathbf{v}, \varphi(\cdot, t)] \equiv b(\tau) \int d\mathbf{v}' \bar{\sigma}(\Theta; v') [\varphi(\mathbf{v}', t) - \varphi(\mathbf{v}, t)] d\mathbf{v}'.$$

Если нас интересует не только скорость, но и положение в пространстве выделенной частицы, необходимо ввести совместную плотность распределения координат и скоростей, $p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Положив, что в начальный момент времени ($t = 0$) частица находилась в начале координат и имела скорость \mathbf{v}_0 , приходим к уравнению

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_0^t \mathbf{B}'_\tau[\mathbf{v}, p(\mathbf{r}, \cdot, t - \tau)] d\tau + \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \delta(t).$$

Если мы действительно имеем в виду броуновскую частицу, которую наблюдают под микроскопом, то следует учесть, что ее масса M чрезвычайно велика по сравнению с массами «толкающих» ее молекул, и каждый из толчков лишь незначительно изменяет ее скорость. В этом случае

$$\mathbf{B}'_0[\mathbf{v}, p(\mathbf{r}, t)] \approx \zeta \nabla_v (\mathbf{v} + M k_B T \nabla_v) p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$$

и записанное выше уравнение превращается в эредитарное уравнение Фоккера-Планка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = \zeta \nabla_v (\mathbf{v} + M k_B T \nabla_v) \int_0^t d\tau b(\tau) p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t - \tau) + \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \delta(t), \end{aligned}$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура среды, ζ – коэффициент трения. При $b(\tau) = \delta(\tau)$ оно переходит в обычное уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \zeta \nabla_v (\mathbf{v} + M k_B T \nabla_v) p(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \delta(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) \delta(t).$$

1.10 Эредитарное уравнение Ланжевена

Приведенные выше уравнения получены для одночастичных одно-временных функций распределения частиц $\varphi(\mathbf{v}, t)$. Следуя этим путем далее, можно получить уравнения для многочастичных одно-временных функций $\varphi_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, t)$, $\varphi_3(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, t)$ и т. д., описывающих корреляции случайного поля скоростей в один и тот же момент времени t . Понятно, что аргументы \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 относятся здесь к разным частицам, что характерно для *эйлерова описания* движения. Часто оказывается полезным *лагранжево описание*, когда рассматривается скорость одной и той же частицы в разные моменты времени $\mathbf{v}(t_1)$, $\mathbf{v}(t_2)$, $\mathbf{v}(t_3)$ и т. д. Случайная функция $\mathbf{v}(t)$ обычно находится из стохастического *уравнения Ланжевена*

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -m\zeta\mathbf{v} + \mathbf{f}.$$

Правая часть представляет собой силу, действующую на рассматриваемую частицу со стороны окружающих ее молекул. Первое слагаемое дает ее среднее значение (ζ – коэффициент трения), второе слагаемое – осциллирующую часть этой силы, обусловленную постоянно и быстро меняющимся окружением частицы. В связи с этим $\mathbf{f}(t)$ интерпретируется как случайная вектор-функция времени, удовлетворяющая условию

$$\langle \mathbf{f}(t) \rangle = 0.$$

В процессе быстрого хаотического движения молекулы сталкиваются друг с другом много чаще, чем с броуновской частицей (в том смысле, что между *повторными* столкновениями одной и той же молекулы с броуновской частицей эта молекула испытывает много столкновений с другими молекулами, сильно меняющих ее скорость). В результате повторное взаимодействие молекулы с броуновской частицей в статистическом смысле практически не отличается от первичного взаимодействия: молекулы быстро «забывают» свою предысторию. Это предположение и лежит в основе стандартного ланжевенского подхода, находя свое математическое выражение в δ -образной форме корреляционной функции случайной силы

$$\langle f_i(t_1) f_j(t_2) \rangle = 2\zeta m k_B T \delta(t_1 - t_2) \delta_{ij},$$

где k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура среды (множитель $2\zeta m k_B T$ является следствием стационарности рассматриваемого процесса).

Более строгий анализ, основанный на применении метода проекционных операторов к уравнению Лиувилля, точно описываемому чисто

механическое движение микроскопически обратимой системы, приводит к эредитарному уравнению Ланжевена

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j \int_0^t d\tau \gamma_{ij}(t-\tau) \mathbf{v}_j(\tau) + \mathbf{f}_i(t).$$

В этом уравнении векторы \mathbf{f}_i и \mathbf{v}_i являются случайными, удовлетворяющими условиям $\langle \mathbf{f}_i \rangle = 0$, $\langle \mathbf{f}_i(t) \mathbf{v}_i(0) \rangle = 0$ и $\langle \mathbf{f}_i(t_1), \mathbf{f}_j(t_2) \rangle = k_B T \gamma_{ij}(t_1 - t_2)$, а матрица памяти γ_{ij} определяется формальным соотношением

$$\gamma_{ij}(t) = (k_B T)^{-1} \langle \dot{\mathbf{v}}_i | \mathbf{Q} e^{-i\mathbf{Q}L\mathbf{Q}t} \mathbf{Q} | \dot{\mathbf{v}}_j \rangle,$$

включающим в себя дополнение \mathbf{Q} оператора проектирования \mathbf{P} на переменные \mathbf{v}_i ($\mathbf{Q}=1-\mathbf{P}$) (см. п. 5.2 в [24]). Соотношение это не позволяет найти явный вид функции памяти.

Отметим, что первое слагаемое правой части отражает влияние прошлого поведения скорости молекулы (или броуновской частицы) на ее теперешнее ускорение (левая часть уравнения). Влияние это осуществляется через термостат: информация о скорости $\mathbf{v}(t-\tau)$ непрерывно передается в термостат и возвращается от него оказывая влияние на изменение скорости во все последующие моменты времени, в том числе и в момент наблюдения t .

1.11 Эредитарная динамика упругого тела

Аналогичная система эредитарных уравнений получена и для упругого твердого тела, когда оно разбивается на элементы мезоскопических размеров, положения и скорости центров масс которых рассматриваются как новые *крупнозернистые переменные* \mathbf{X}_i , \mathbf{V}_i . С использованием теории проекционных операторов Мори [25] в [26] выведена система уравнений движения

$$M_i \frac{d\mathbf{V}_i(t)}{dt} = - \sum_j \left[\Lambda_{ij} \mathbf{X}_j(t) + \int_0^t d\tau \Phi_{ij}(\tau) \mathbf{V}_j(t-\tau) \right] + \mathbf{R}_i(t),$$

где M_i – массы укрупненных частиц, Λ_{ij} – матрица упругих сил, $\Phi_{ij}(t)$ – ядро памяти, отвечающее диссипативным силам, $\mathbf{R}_i(t)$ – случайные силы, удовлетворяющие условию $\langle \mathbf{R}_i(t) \rangle = 0$ и флуктуационно-диссипационной теореме $\langle \mathbf{R}_i(t) \mathbf{R}_j(0) \rangle = k_B T \Phi_{ij}(t)$. Усреднение здесь осуществляется по начальному распределению, близкому к равновесному. Наличие памяти авторы трактуют как следствие возмущений, переносимых внутри укрупненных частиц звуковыми волнами.

1.12 Эредитарная кинетика плазмы

Рассмотренные выше эредитарные модели применимы к различным физическим системам, в том числе – к газам и плазме. Весьма интересным с физической точки зрения является и вывод эредитарного уравнения для концентрации ионов плазмы, принадлежащий Балеску [27]. Рассматривая бесстолкновительное движение плазмы в плоскости (x, y) , перпендикулярной магнитному полю, он записывает уравнение непрерывности

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) = 0,$$

которое содержит случайное поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, задаваемое потенциалом $\phi(\mathbf{x}, t)$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \propto [\nabla\phi(\mathbf{x}, t), \mathbf{e}_z].$$

Потенциал этот определяется как гауссов стационарный однородный и изотропный процесс с нулевым средним и двухточечной эйлеровой корреляционной функцией

$$\langle \phi(\mathbf{x}_1, t_1) \phi(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}, t_1 + t) \rangle = \epsilon^2 E(\mathbf{x}/\lambda_c) h(t/\tau_c),$$

где E и h – безразмерные функции координат и времени, спадающие до нуля при возрастании аргументов, ϵ – мера интенсивности флуктуаций потенциала, λ_c и τ_c – пространственный и временной масштабы (радиусы) корреляций.

Разделяя решение f на среднюю часть $n = \langle f \rangle$ и флуктуации δf и предполагая плазму несжимаемой, а турбулентность – однородной и изотропной, Балеску приходит к основному уравнению (master equation) в виде

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \int_0^t d\tau \Lambda(\tau) \Delta n(\mathbf{x}, t - \tau) + S(\mathbf{x}, t),$$

где

$$\Lambda(\tau) = \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, \tau) \mathbf{v}(\mathbf{X}(\tau|0), 0) \rangle,$$

$$S(\mathbf{x}, t) = -\nabla \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \delta f(\mathbf{X}(t|0), 0) \rangle,$$

а

$$\mathbf{X}(t|t') = \mathbf{x} - \int_{t'}^t d\tau \mathbf{v}(\mathbf{X}(t|\tau), \tau)$$

– обращенная во времени траектория частицы (положение в момент времени $t' < t$ частицы, которая в момент t находится в точке \mathbf{x}).

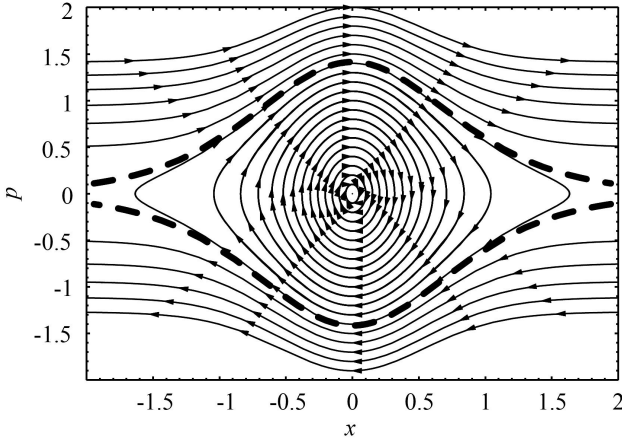


Рис. 1.2: Возможные траектории в фазовом пространстве свободных и захваченных частиц [31].

Это уравнение очевидно немарковское, так как скорость изменения плотности в момент времени t зависит от ее значения во все предыдущие моменты времени. Важнейшим физическим механизмом, обеспечивающим немарковость процесса может быть «траппинг». «Trapping» означает, что некоторые из частиц плазмы удерживаются в ограниченных областях фазового пространства, двигаясь по замкнутым траекториям (схематически такие траектории показаны на Рис. 1.2). Впервые этот процесс был предсказан в работе [28], посвященной аналитическому конструированию равновесных электростатических систем, обладающих такими ловушками. Наличие таких областей в фазовом пространстве было подтверждено численным моделированием [29, 30]. Дальнейшее развитие концепции ловушек в плазме и сегодняшнее ее состояние хорошо представлено в обзоре [31].

Степень влияния немарковости на процесс турбулентной диффузии определяется числом Кубо

$$Ku = \frac{\epsilon \tau_c}{\lambda_c^2}.$$

В случае слабой турбулентности ($Ku \ll 1$) в основном уравнении можно пренебречь запаздыванием ($n(\mathbf{x}, t - \tau) \approx n(\mathbf{x}, t)$) и распространить интегрирование по τ до бесконечности. Процесс становится марковским. В результате приходим к обычному уравнению диффузии с правой частью, описывающей источники диффундирующих частиц:

$$\frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = K \Delta n(\mathbf{x}, t) + S(\mathbf{x}, t).$$

1.13 Эредитарность и скрытые переменные

Анализируя конкретные примеры в надежде понять общую природу эредитарности, нельзя не заметить, что всякий раз мы сталкиваемся с феноменом *скрытых переменных*. Исходная система, описываемая полным набором переменных, как правило, неэредитарна. Стоит только исключить из рассмотрения («скрыть») некоторые переменные, появляется член, отражающий предысторию редуцированной системы – она становится эредитарной.

Вот простой механический пример. В горизонтально расположенной открытой с обеих сторон трубке находятся поршень массой m_1 с коэффициентом трения о ее стенки η , соединенный пружинкой длиной l и жесткостью $k > (\eta/2)^2$ с шариком массы m_2 , движущимся в трубке без трения (Рис. 1.3). К последнему с момента $t = 0$ приложена сила $F(t)$. Мы имеем дело с неэредитарной системой с двумя степенями свободы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -\eta \dot{x}_1 + k(x_2 - x_1 - l), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F(t) - k(x_2 - x_1 - l). \end{aligned}$$

Дополним эту систему уравнений условиями

$$x_1(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad x_2(0) = l, \quad \dot{x}_2(0) = 0,$$

предполагающими, что в начальный момент времени система неподвижна и поршень находится в начале координат.

Разрешив теперь первое уравнение относительно x_1 в предположении, что $x_2(t)$ известно,

$$x_1(t) = \int_0^t K(\tau)[x_2(t-\tau) - l]d\tau,$$

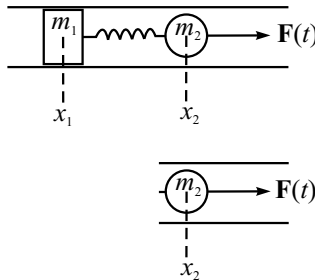


Рис. 1.3: Наглядный пример скрытой переменной (x_1).

$$K(\tau) = \frac{k}{m_1 \omega_1} \exp\left(-\frac{\eta \tau}{2m_1}\right) \sin(\omega_1 \tau), \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1} - \left(\frac{\eta}{2m_1}\right)^2},$$

и подставив результат во второе, получаем эредитарное уравнение для системы, приведенной к одной степени свободы:

$$m_2 \ddot{x}_2 + kx_2 = k \int_0^t K(\tau) x_2(t - \tau) d\tau + F_2(t), \quad (1.13.1)$$

где

$$F_2(t) = F(t) + kl \left[1 - \int_0^t K(\tau) d\tau \right].$$

Представим для наглядности, что мы прикрыли экраном часть трубки, содержащей поршень с пружинкой и видим лишь шарик, движение которого подчиняется уравнению (1.13.1). Влияние предыстории $x_2(t - \tau)$ движения шарика на его поведение в момент времени t осуществляется через невидимую (скрытую) переменную $x_1(t)$.

Отметим, что еще Зенер, комментируя интегральный эредитарный член в конститутивном уравнении вязкоупругости, высказывал предположение о том, что эредитарность эта может служить признаком существования скрытых параметров, к числу которых, как пример, он отнес температуру [32].

Литература

1. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976.
2. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982.
3. *Alder B. J., Wainwright T. E.* Phys. Rev. Lett. **18**, 988 (1967).
4. *Wood W. W.* In: Fundamental Problems in Statistical Mechanics III. – North-Holland, Amsterdam, 1975.
5. *Boltzmann L.* Wissenschaftl. Abhandlung **Bd. 1** (1874).
6. *Westerlund S.* Physica Scripta **43**, 174 (1991).
7. *Дэи У. А.* Термодинамика простых сред с памятью. – М.: Мир, 1974.

8. *Колеман Б. Д., Оуэн Д. Р.* О термодинамике сред с памятью. Механика (сб. переводов) № 5 (129), 1971 с. 100. // Coleman B. D., Owen D. R. On the thermodynamics of materials with memory. Arkhive for Rational Mechanics and Analysis, 36, No. 4, 1970, p. 245.
9. *Илюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970.
10. *Виноградов Г. В., Малкин А. Я.* Реология полимеров. – М.: Химия, 1977.
11. *Колпащиков В. Л., Шнин А. И.* ИФФ **68**, 633, 724 (1995).
12. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Arch. Rat. Mech. Anal. **31**, 113 (1968).
13. *Luikov A. V.* Int. J. Heat Mass Transfer **9**, 139 (1966).
14. *Prigogine I. Resibois P.* Physica **27**, 629 (1961).
15. *Resibois P.* Physica **27**, 541 (1961).
16. *Brout R.* Physica **22**, 509 (1956); **23**, 953 (1957).
17. *Zwanzig R.* In: Lect. in Theor. Phys. (Boulder) III, 1960, p. 106.
18. *van Hove L.* Physica **23**, 441 (1957).
19. *Монтролл Э. В.* В сб.: Термодинамика необратимых процессов. – М., 1962.
20. *Честер Дж.* В сб.: Термодинамика необратимых процессов. – М., 1962.
21. *Олдер Б. Дж., Алли У. Е.* В сб.: Физика за рубежом 86. – М.: Мир (1986) с. 52.
22. *Резибуа П., Де Ленер М.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов. – М.: Мир, 1980.
23. *Берд Р. Б., Кертисс Ч. Ф.* В сб.: Физика за рубежом 86. – М.: Мир, 1986, с. 29.
24. *Форстер Д.* Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции. – М.: Атомиздат, 1980. // *Forster D.* Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions – Massachusetts: W. A. Benjamin, Inc. Abpr (1975).

25. *Zwanzig R.* Nonequilibrium Statistical Mechanics. – New York: Oxford University Press, 2001.
26. *Cubero D., Yalíkari S. N.* J. Chem. Phys. **122**, 034108 (2005).
27. *Balescu R.* Plasma Phys. Control Fusion **42**, B1 (2000) .
28. *Bernstein I. B., Greene J. M., Kruskal M. D.* Phys. Rev. **108**, 546 (1957).
29. *Berk H. L., Roberts K. V.* Phys. Fluids **10**, 1595 (1967).
30. *Morse R. L., Nielson C. W.* Phys. Rev. Lett. **23**, 1087 (1969).
31. *Luque A., Schamel H.* Phys. Rep. **415**, 261 (2005).
32. *Zener C. M.* Suppl. Nuovo Cimento **7**, 544 (1958).

Глава 2

Степенные функции в физике

2.1 Стандартная степенная функция

Сформулированные В. Вольтеррой принципы эрeditarности (линейности, затухания, инвариантности относительно сдвига во времени) и попытки их применения к динамике материальных точек, механике сплошной среды и электродинамике при благоприятном стечении обстоятельств могли бы стать основой для содержательной и плодотворной теории. Могли бы, но не стали: физики тех лет были увлечены потоком революционных *фундаментальных* идей – теорией относительности, квантовой механикой, ядерной физикой, элементарными частицами (золотой век физики! – повторится ли он когда-нибудь?). Однако последние десятилетия характеризуются возрастающей концентрацией усилий в направлении исследования сложных систем и процессов, описание которых зачастую возможно лишь на *феноменологическом* уровне.

Ключевую роль в эрeditarной теории играет функция влияния (функция памяти). Отражая в сжатом виде сложность системы или процесса, она обычно не может быть выведена из первых принципов и вводится на основании некоторых общих соображений, немаловажную роль среди которых играет свойство самоподобия – «родовой признак» степенной функции.

Без сомнения, экспонента – самая популярная функция в теоретической физике, с ее помощью (или с помощью суперпозиций экспонент) описываются многочисленные неравновесные процессы. Однако еще 150 лет назад писали о том, что падение со временем напряжения

на одном из первых электрических аккумуляторов – лейденской банке – происходит не по экспоненциальному, а по степенному закону $t^{-\gamma}$, где $\gamma \approx 1$ [1]. Большая коллекция степенных закономерностей в физике собрана в книгах [2-4].

Много замечательных примеров появления степенных законов в других сферах человеческой деятельности – музыке, архитектуре, живописи, лингвистике, экологии, психологии, акустике, не говоря уже о таких областях, как геометрия, теория вероятностей, геофизика – приведено в специально посвященной им книге М. Шредера [5]. На с. 177, после замечания о степенном затухании звука в концертных залах с недостаточно сильным рассеянием, он пишет: «По-видимому, куда бы мы ни смотрели или что бы мы ни слушали, мы увидим или услышим, что экспоненциальное поведение встречается гораздо реже, чем принято думать».

Степенные функции играют важную роль в теоретических и прикладных исследованиях. В частности, в математическом анализе на их основе построено интегро-дифференциальное исчисление дробного порядка. В комплексном анализе с их помощью введено понятие полюсов и создана теория вычетов, развиты методы интегрирования, построена теория асимптотических разложений. В теории вероятностей переход к «широким» распределениям с асимптотикой степенного типа ознаменовал целую эпоху *устойчивых законов П. Леви*, радикально изменившего Центральную предельную теорему и расширившего область ее применения.

Следуя [6], введем специальным образом нормированную степенную функцию

$$\Phi_{\mu}(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} t_{+}^{\mu-1}, \quad t > 0,$$

и назовем ее *стандартной степенной функцией*. Это выражение определяет функции Φ_{μ} для всех вещественных значений индекса $\mu \in (-\infty, \infty)$ кроме $\mu = 0, -1, -2, \dots$ В этих точках они определяются как обобщенные функции, выражающиеся через *дельта-функцию и ее производные*.

2.2 Свойства степенных функций

Функции Φ_{μ} в определенном смысле более интересны, чем экспоненты, благодаря их следующим свойствам.

1. Они *самоподобны*: $\Phi_{\mu}(ct) = c^{\mu-1} \Phi_{\mu}(t)$.
2. Они обладают *полугрупповым свойством*:

$$\Phi_{\mu} \star \Phi_{\nu}(t) = \int_0^t \Phi_{\mu}(t-\xi) \Phi_{\nu}(\xi) d\xi = \Phi_{\mu+\nu}(t).$$

3. В точках $\mu = -m$, $m = 0, 1, 2, \dots$ функции $\Phi_\mu(t)$ определяются как *обобщенные функции*, выражающиеся через *дельта-функцию и ее производные* [6],

$$\Phi_{-m}(t) = (-1)^m \delta^{(m)}(t).$$

4. *Трансформанты Лапласа* степенных функций с точностью до постоянного множителя *также принадлежат этому семейству* (точнее, его продолжению в комплексную плоскость):

$$\begin{aligned} \widehat{\Phi}_\mu(\lambda) &= \mathcal{L}\{\Phi_\mu(t)\}(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi_\mu(t) dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{\mu-1} dt = \lambda^{-\mu}. \end{aligned}$$

Формула обратного преобразования

$$\mathcal{L}^{-1}\{\lambda^{-\mu}\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda t} \lambda^{-\mu} d\lambda = \frac{1}{\Gamma(\mu)} t^{\mu-1}.$$

5. *Тауберовы теоремы*. Вытекающее из приведенных выше соотношений соответствие между степенными функциями и их лапласовскими образами

$$f(t) = At^{\mu-1} \Leftrightarrow \widehat{f}(\lambda) = A\Gamma(\mu)\lambda^{-\mu}, \quad \mu > 0,$$

обобщается на *асимптотически степенные функции*:

$$f(t) \sim At^{\mu-1}, \quad t \rightarrow \infty \Leftrightarrow \widehat{f}(\lambda) \sim A\Gamma(\mu)\lambda^{-\mu}, \quad \lambda \rightarrow 0, \quad \mu > 0.$$

Утверждения, связывающие поведение функции в асимптотике больших аргументов с поведением ее лапласовской трансформанты в области малых значений лапласовской переменной, называются тауберовыми теоремами. Подробное изложение этих теорем читатель найдет в [7]. Мы приведем здесь еще одну формулировку, полезную для решения вероятностных задач. Пусть $p(t)$, $t > 0$ – плотность распределения вероятностей положительной случайной величины, и $\alpha \in (0, 1)$. Тогда

$$\int_t^\infty p(t') dt' \sim At^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty \Leftrightarrow 1 - \widehat{p}(\lambda) \sim A\Gamma(1-\alpha)\lambda^\alpha, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

6. Трансформанты Фурье

$$\tilde{\Phi}_\mu(k) = F\{\Phi_\mu(t)\}(k) \equiv \int_0^\infty e^{ikt} \Phi_\mu(t) dt$$

функций $\Phi_\mu(t)$ нетрудно получить из трансформанты Лапласа

$$\tilde{\Phi}_\mu(k) = \tilde{\Phi}_\mu(-ik) = (-ik)^{-\mu}$$

В развернутом виде

$$\tilde{\Phi}_\mu(k) = \frac{|k|^{-\mu}}{\Gamma(\mu)} \left\{ \int_0^\infty x^{\mu-1} \cos x dx + i \operatorname{sign} k \int_0^\infty x^{\mu-1} \sin x dx \right\} =$$

$$= \frac{|k|^{-\mu}}{\Gamma(\mu)} \{ \Gamma(\mu) \cos(\mu\pi/2) + i \operatorname{sign}(k) \Gamma(\mu) \sin(\mu\pi/2) \} = |k|^{-\mu} e^{i\mu(\pi/2)\operatorname{sign}k}.$$

7. В отличие от экспоненциальных функций, обладающих свойством инвариантности (с точностью до постоянного множителя) относительно операции сдвига,

$$e^t \mapsto e^{t+a} = \operatorname{const} \cdot e^t, \quad \operatorname{const} = e^a,$$

степенные функции таким свойством не обладают:

$$\Phi_\mu(t) \mapsto \Phi_\mu(t+a) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} (t+a)^{\mu-1} \neq \operatorname{const} \cdot \Phi_\mu(t).$$

Качественно степенная функция отличается от экспоненциальной наличием особенности в нуле, более быстрым спадом в окрестности нуля и более медленным при $t \rightarrow \infty$ (см. рис. 2.1).

В приложениях свойство (1), проявляющееся в пространственных переменных, интерпретируется как *самоподобие* структуры, отсутствие характерного масштаба, что приводит к концепции *фракталов*, активно развиваемой в настоящее время. Свойство (7) по отношению к временной переменной интерпретируется как наличие *памяти* у системы, релаксация которой описывается степенной функцией, в отличие от системы, чья релаксация описывается экспоненциальной функцией e^{-t} . В дифференциальной формулировке отсутствие памяти проявляется в том, что скорость изменения функции в момент времени t пропорциональна значению этой функции *в тот же самый момент времени* t и не зависит от ее предыстории,

$$\frac{de^{-t}}{dt} = -e^{-t}.$$

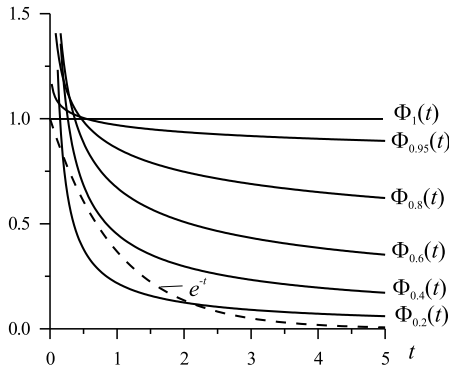


Рис. 2.1: Стандартные степенные функции $\Phi_\mu(t)$. Пунктиром изображена функция e^{-t} .

Степенная функция таким свойством, очевидно, не обладает:

$$\frac{dt^\nu}{dt} = \frac{\nu}{t} t^\nu.$$

В теоретической физике степенные функции лежат в основе теории электромагнетизма и гравитации (законы Кулона, Ньютона и др.), в гидродинамике с их помощью формулируются автомодельные законы турбулентности и описываются явления просачивания в пористых средах, в физике элементарных частиц они лежат в основе теории полюсов Редже. Степенные законы являются важнейшими элементами квантовой хромодинамики, теории подобия в механике и термодинамике сплошных сред, определяющим признаком фрактальных структур, характеризующих, в частности, крупномасштабную структуру Вселенной. Ниже мы рассмотрим ряд конкретных примеров.

2.3 Степенные законы в физике

2.3.1 Движение шара в жидкости

Наиболее известный пример эрдитарной связи степенного типа демонстрирует движение тела в вязкой жидкости. Пусть шар радиусом a вплоть до момента t_0 покоился в жидкости с плотностью ρ и вязкостью η , а в момент t_0 импульсивно приведен в поступательное равномерное и прямолинейное движение со скоростью V_0 . Сила сопротивления, действу-

ющая на него в момент времени $t > t_0$, равна [8]

$$F(t) = 6\pi\eta a V_0 \left[1 + \sqrt{\frac{\rho a^2}{\pi\eta(t-t_0)}} \right], \quad t > t_0.$$

Тело движется с постоянной скоростью, но жидкость «помнит», когда началось движение, и память эта проявляется в зависимости сопротивления жидкости от t_0 . С течением времени память ослабевает, среда «забывает», когда началось движение, и сила сопротивления убывает, приближаясь к значению, даваемому формулой Стокса:

$$F(\infty) = 6\pi\eta a V_0.$$

2.3.2 Звуковые волны

Как известно, вязкость и теплопроводность приводят к диссипации энергии звуковых волн, в связи с чем амплитуда звуковой волны (скорости, давления), распространяющейся вдоль оси z в однородной среде, убывает по экспоненциальному закону

$$A(z) = A e^{-\gamma z},$$

где коэффициент поглощения пропорционален квадрату частоты,

$$\gamma = a\omega^2,$$

если только убывание амплитуды относительно мало на расстояниях порядка длины волны [9]. Это имеет место для газов и для жидкостей, если силы внутреннего трения невелики. Существуют, однако, среды, в которых сохраняется степенной характер зависимости γ в широком диапазоне частот, но показатель α отличен от 2 (Табл. 2.1)

$$\gamma(\omega) = a\omega^\alpha, \quad \alpha \in [0, 2].$$

Таблица. 2.1. Показатель степени в коэффициенте ослабления звука [10].

Вещество	Вода	Жир	Мышечная ткань	Пристеночный слой	Осадочные породы
α	2	1,7	1,5	1	0,5

2.3.3 Диффузия

Вспомним классические опыты по определению коэффициента диффузии. В одном из них берется длинный цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения S и поперечной перегородкой в плоскости

$x = 0$. В правой части цилиндра содержится чистый растворитель, в левой части – раствор с концентрацией c_0 . В момент времени $t = 0$ перегородка удаляется и начинается процесс диффузии растворенного вещества, описываемый уравнением

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2}$$

с начальным условием

$$c(x, 0) = \begin{cases} c_0, & x < 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Его решение имеет вид

$$c(x, t) = \frac{c_0}{2\sqrt{\pi Kt}} \int_{-\infty}^x \exp(-\xi^2/(4Kt)) d\xi.$$

За время $d\tau$ через плоскость $x = 0$ проходит

$$dq = K[\partial c(x, \tau)/\partial x]_{x=0} S d\tau$$

диффундирующего вещества. В момент времени t перегородка закрывается и измеряется полное количество этого вещества в правой половине цилиндра

$$Q(t) = \int_0^t K[\partial c(x, \tau)/\partial x]_{x=0} S d\tau = c_0 S \sqrt{K/\pi} t^{1/2},$$

откуда находится коэффициент диффузии K . Нас, однако, интересует здесь не сам коэффициент диффузии, а появление в ответе функции Φ_μ :

$$Q(t) = A\Phi_{3/2}(t), \quad A = c_0 S \sqrt{K}/2.$$

В другом опыте перегородка не удаляется, а заменяется (в момент $t = 0$) липкой пластинкой, а по окончании опыта (в момент t) она вынимается и производится измерение количества M осевшего на нее вещества. Бриллюэн полагал, что получится тот же результат, но в действительности получается удвоенное значение

$$M(t) = 2A\Phi_{3/2}(t).$$

Удвоение это объясняется тем, что здесь частицы растворенного вещества, попавшие на пластинку, не могут уже вернуться назад, тогда как

в первом опыте половина диффундирующего вещества возвращается назад – в левую половину сосуда.

Пусть теперь в начальный момент времени вещество сосредоточено в плоскости $x = -s$, $s > 0$: $c(x, 0) = C\delta(x + s)$. Тогда скорость оседания на пластинку вещества

$$m(t) = \dot{M}(t) = \frac{sC}{2\sqrt{\pi Kt^3}} \exp\left(-\frac{s^2}{4Kt}\right) \sim A\Phi_{-1/2}(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

При $C = 1$ мы можем интерпретировать этот результат как плотность распределения случайного времени первого достижения броуновской частицей плоскости $x = 0$, находящейся от нее на расстоянии s .

2.3.4 Закон Нуттинга

В 1921 г. Нуттинг сообщил о результатах своих наблюдений, согласно которым механические напряжения, возникшие при мгновенной деформации вязкоупругих материалов, спадают со временем по степенному закону [11]:

$$\sigma(t) \simeq \text{const} \cdot \Delta\varepsilon \cdot t^{-\alpha},$$

где $\alpha \in (0, 1)$ – показатель степени, для многих материалов близкий к 0,5 (см. [12]). Этот вывод находился в резком противоречии с классическим представлением об экспоненциальном характере релаксаций. Позже исследование Гемантом поведения вязкоупругих материалов под действием гармонической нагрузки и вычисление методами молекулярной динамики подтвердили медленное затухание функции памяти $\eta(t)$ по степенному закону $t^{-3/2}$. Есть основания думать, что такими тяжелыми хвостами обладают функции памяти всех навье-стоксовых коэффициентов. Полагают также, что наличие долговременных релаксаций степенного типа может быть связано с крупномасштабными коллективными процессами.

Анализ связи этих закономерностей с дробными производными отложим до главы 12, посвященной применению дробно-дифференциальных уравнений в теории вязкоупругости, а здесь укажем на наследственную механику Ю. Работнова [13, 14], которая успехом своим во многом обязана выбором в качестве «элементарных кирпичиков» ядра релаксации функций степенного типа $\Phi_\mu(t)$ заменивших собой классические экспоненты:

$$K(t) = \sum_j b_j \Phi_{\mu_j}(t), \quad \mu_j < 1.$$

2.3.5 Релаксация полимерных цепочек

Теоретическое обоснование степенной эрeditарности в реологии вязкоупругих жидкостей дает модель, предложенная Раусом [15]. Молекула полимера в этой модели представляется в виде цепочки N точечных мономеров, последовательно соединенных между собой упругими связями (невесомыми пружинками с жесткостью K). Конфигурация молекулы задается набором радиус-векторов положений мономеров $\{\mathbf{r}_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$, отрезки $[\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_{n+1}]$ средней длины a могут свободно вращаться вокруг своих концов. Молекула погружена в вязкую ньютоновскую жидкость при температуре T , со стороны которой на n -й мономер действует случайная сила $\mathbf{f}(n, t)$ – гауссов тепловой шум

$$\langle \mathbf{f}(n, t) \rangle = 0, \quad \langle f_i(m, s) f_j(n, t) \rangle = 2\zeta kT \delta_{ij} \delta_{mn} \delta(s - t),$$

где $i, j = 1, 2, 3$ индексы проекций силы на декартовы оси, а k – постоянная Больцмана.

Пусть к крайнему мономеру \mathbf{r}_0 в момент времени ($t_0 < t$) приложен скачок силы $\Delta F(t_0)$ в направлении оси Ox . Статистические расчеты [16] показывают, что под действием этой силы центр масс движется вдоль Ox равномерно, среднее значение координата крайнего мономера бесконечной цепочки растет по закону

$$\langle x_0(t) \rangle \approx \frac{a\Delta F(t_0)}{\sqrt{\zeta kT}} (t - t_0)^{1/2}, \quad t > t_0. \quad (2.3.1)$$

Отклонение (2.3.1) от ожидаемой линейной зависимости объясняется тем, что вследствие вязкоупругих сил мономеры цепочки вовлекаются в коллективное движение вдоль Ox не сразу все, а постепенно: число n_τ вовлеченных в движение за время $\tau = t - t_0$ мономеров растет пропорционально $\tau^{1/2}$:

$$n_\tau \approx \sqrt{\frac{kT}{a^2 \zeta}} \tau^{1/2}, \quad \tau = t - t_0.$$

В случае конечной цепочки длиной N за время Рауса

$$\tau_N = \zeta (aN)^2 / (kT)$$

приходят в направленное движение все ее мономеры, и движение всей молекулы выходит на линейный режим.

В работе [17] рассмотрена более плотная, чем линейная цепочка, макромолекулярная структура – фрактальная сеть с дробной размерностью d_f . Рассматривая распространение импульса по системе мономеров как процесс случайного блуждания на фрактале, можно получить

$$n_\tau \approx \left(\frac{kT}{a^2 \zeta} \right)^{d_f/2} \tau^{d_f/2}, \quad 1 < d_f < 2,$$

и

$$\langle x_0(t) \rangle \approx \frac{a^{d_f} \Delta F(t_0)}{\zeta^{1-d_f/2} (kT)^{d_f/2}} (t - t_0)^{1-d_f/2}, \quad t > t_0. \quad (2.3.2)$$

В случае произвольно заданной силы $F(t)$

$$\langle x_0(t) \rangle \approx A \int_{-\infty}^t \Phi_{2-d_f/2}(t-t') dF(t') \equiv A \Phi_{2-d_f/2} * \dot{F}(t),$$

где $A = a^{d_f} \Gamma(2-d_f/2) / [\zeta^{1-d_f/2} (kT)^{d_f/2}]$, k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, точка над символом функции означает дифференцирование по аргументу.

2.3.6 Самонепересекающиеся блуждания

Самонепересекающиеся блуждания являются кинетическим процессом, асимптотически воспроизводящим равновесную статистику линейных полимеров в хорошем растворителе. В ходе этого процесса частица перемещается по узлам простой d -мерной кубической решетки случайно, но ей запрещено попадать в узлы, которые она посетила ранее. Соответствующая (крупномасштабная) плотность распределения координат частицы, начавшей блуждание из начала координат в начальный момент времени, дается в этом случае нормированным произведением

$$p(\mathbf{r}, t) = A(t) S(\mathbf{r}, t) p_0(\mathbf{r}, t), \quad A(t) = \left[\int S(\mathbf{r}, t) p_0(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right]^{-1},$$

d -мерной гауссовой плотности $p_0(\mathbf{r}, t)$ и *вероятности выживания* $S(\mathbf{r}, t)$, отражающей запрет на пересечения. Качественно эту вероятность оценивают следующим образом [18]. Полагая вероятность вторичного попадания в посещенную ранее точку $q \sim At/|\mathbf{r}|^d$, записывают $S(\mathbf{r}, t)$ как вероятность того, что за $N = t/\Delta t$ независимых шагов такого ни разу не случится, и переходя к пределу, получают:

$$S(\mathbf{r}, t) \sim (1 - q)^N \sim \exp(-Nq) \sim \exp(-gt^2/|\mathbf{r}|^d),$$

где g – положительная постоянная. Подстановка этой функции в выражение для плотности $p(\mathbf{r}, t)$ и вычисление среднего квадрата расстояния между начальной и конечной (к моменту t) точками траектории приводит к интегралу

$$\langle |\mathbf{r}(t)|^2 \rangle = A(t) \int \exp[-F(\mathbf{r}, t)] |\mathbf{r}|^2 d^d \mathbf{r}, \quad A(t) = \left[\int \exp[-F(\mathbf{r}, t)] d^d \mathbf{r} \right]^{-1},$$

где

$$F(\mathbf{r}, t) = \frac{|\mathbf{r}|^2}{4Kt} + \frac{gt^2}{|\mathbf{r}|^d}.$$

Использование для оценки обоих интегралов метода перевала приводит к асимптотике

$$\xi(t) \equiv \sqrt{\langle |\mathbf{r}(t)|^2 \rangle} \sim (gKt)^{\nu_F}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где показатель ν_F дается формулой Флори:

$$\nu_F = \frac{3}{2+d}.$$

2.3.7 Диффузионно-ограниченная агрегация

Диффузионно-ограниченной агрегацией называется математическая модель, точнее, семейство моделей, предназначенных для описания процессов роста структур: полимеризации, образования аэрозолей, рост коллоидов, агрегация красных кровяных телец, образование зародышей при фазовых переходах и др. [19]. В основе их лежит предложенное еще М. Смолуховским *приближение среднего поля*, в котором коалесценция кластеров происходит путем бинарных столкновений в пренебрежении флуктуациями пространственного распределения этих объектов. Эволюция концентрации $n_k(t)$ k -частичных кластеров при условии, что в единичном объеме размера генерируется m частиц в единицу времени, описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dn_k(t)}{dt} = m\delta_{k1} - \left[n_k(t) \sum_{j=1}^{\infty} K_{kj}n_j(t) - \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} K_{ij}n_i(t)n_j(t) \right].$$

Ядра K_{ij} приближенно учитывают зависимость сечений столкновений и подвижности кластеров от их размеров. После замены переменных $\tilde{t} = \sqrt{mt}$, $\tilde{n}_k(\tilde{t}) = n_k(t)/\sqrt{m}$ множитель m при дельта-символе исчезает и в пределе больших времен, когда система «забывает» о начальных условиях, решение ее принимает автомодельный вид

$$n_k(t; m) \sim \sqrt{m}f_k(\sqrt{mt}).$$

Отсюда следует, что в стационарном случае распределение кластеров по размерам \bar{n}_k и время релаксации к нему τ_k имеют характерные масштабы $\bar{n}_k \sim \sqrt{m}$ и $\tau_k \sim 1/\sqrt{m}$, в то время как закон релаксации при $m = 0$ является неэкспоненциальным:

$$n_k(t; 0) \sim t^{-1}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Более общий подход, выходящий за пределы приближения среднего поля, использует представление правой части уравнения в виде однородной функции степени δ (в духе скейлинговых постулатов теории критических явлений):

$$\frac{dn_k(t)}{dt} = m\delta_{k1} - G_k(n_1, n_2, \dots), \quad G_k(\lambda n_1, \lambda n_2, \dots) = \lambda^\delta G_k(n_1, n_2, \dots).$$

Асимптотическое поведение решения такого уравнения [20]

$$n_k(t; m) \sim m^{1/\delta} f_k(m^{1-1/\delta} t).$$

отличается от записанного ранее произвольным показателем δ . Аналогичным образом меняется и показатель закона релаксации:

$$n_k(t; 0) \sim t^{-1/(\delta-1)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

2.3.8 Закон Кюри-фон Швайцлера

В элементарной модели идеального (вакуумного) конденсатора скачок приложенного к нему в фиксированный момент времени t_0 напряжения

$$U(t) = \begin{cases} U = \text{const}, & t < t_0; \\ U + \Delta U(t_0) = \text{const}, & t > t_0 \end{cases}$$

порождает дельта-импульс тока

$$I_0(t) = C_0 \Delta U(t_0) \delta(t - t_0),$$

где C_0 – «геометрическая» емкость [21]. Заполнение межэлектродного вакуума диэлектриком приводит к дополнительной составляющей тока $I_\chi(t)$, зависящей от свойств диэлектрика и времени, так что

$$I(t) = I_0(t) + I_\chi(t).$$

В отличие от первой, геометрической составляющей, зависимость материальной составляющей от времени характеризуется монотонно спадающей вследствие потерь энергии функцией. В простейшей модели Дебая потери учитываются введением в схему замещения резистора, приводящим к популярной формуле

$$I_\chi(t) = I_\chi(t_0) e^{-(t-t_0)/\tau}, \quad \tau > 0.$$

Многочисленные эксперименты, однако, показали, что наблюдаемая зависимость $I_\chi(t)$ характеризуется более быстрым спадом на малых

временах и более медленным – на больших. Аналитически это выражается *законом Кюри-фон Швайдлера* [22, 23]

$$I_{\chi}(t) = B\Delta U(t_0)(t - t_0)^{\mu-1} = A\Delta U(t_0)\Phi_{\mu}(t - t_0),$$

$$B = \text{const}, \quad A = B\Gamma(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \quad t > t_0,$$

установленным более ста лет тому назад. Если зависимость напряжения от времени характеризуется не только скачками, но и непрерывным изменением между ними, то ток (при $U(t) = 0$ для $t < 0$) выражается через интеграл Римана-Стилтьеса:

$$I_{\chi}(t) = A \int_0^t \Phi_{\mu}(t - t') dU(t') \equiv A\Phi_{\mu} \star \dot{U}(t). \quad (2.3.3)$$

Напомним, что преобразование Лапласа свертки двух функций приводит к произведению их трансформант, так что трансформанта выражения (2.3.3) имеет вид

$$\widehat{I}_{\chi}(\lambda) = \mathbf{L}\{\Phi_{\mu} \star \dot{U}(t)\}(\lambda) = \lambda^{-\mu} \mathbf{L}\{\dot{U}(t)\}(\lambda) = \lambda^{-\mu} \lambda \mathbf{L}\{U(t)\}(\lambda) = \lambda^{1-\mu} \widehat{U}(\lambda).$$

Множественно подвергавшийся перепроверке в широком временном диапазоне (вплоть до нескольких дней), этот закон оказался справедливым, в частности, для таких высокотехнологических диэлектриков, как полипропилен, полистирен и др. [11], когда постоянная $1 - \mu$ очень близка к 1 (для полипропилена $1 - \mu \in (0, 999, 1)$).

2.3.9 Асимптотически степенные аппроксимации релаксации

Систематические экспериментальные исследования диэлектриков временными и спектральными методами укрепило исследователей в мысли, что степенное, или более общо, асимптотически степенное поведение релаксации сложных неупорядоченных диэлектриков является типичным. Анализируя многочисленные экспериментальные данные и развивая далее степенную концепцию недебаевской релаксации, Джоншер предложил функцию [3, 4]

$$f(t) = A[(t/\tau)^{\mu+1} + (t/\tau)^{\nu}]^{-1} \sim \begin{cases} A(t/\tau)^{-\mu-1}, & t \gg \tau, \quad 0 \leq \mu \leq 1; \\ A(t/\tau)^{-\nu}, & t \ll \tau, \quad 0 \leq \nu \leq 1 \end{cases}$$

как аппроксимацию *универсального закона релаксации*, охватывающую все твердые полярные диэлектрики. В спектральном представлении комплексной восприимчивости

$$\tilde{\chi}(\omega) \sim \begin{cases} B(\omega\tau)^\mu, & \omega\tau \ll 1, \\ B(\omega\tau)^{\nu-1}, & \omega\tau \gg 1. \end{cases}$$

Обсуждая физические основания недебаевской релаксации в твердых телах, Джоншер отмечает среди прочего, что релаксирующие элементы – диполи, перескакивающие из ловушки в ловушку, заряды, другие образования взаимодействуют между собой и с окружающей средой, так что микроскопические релаксационные процессы изменяют среду и это изменение влияет на их течение. В то время, как дебаевская теория описывает релаксацию как множество параллельно текущих взаимно-независимых процессов (отсюда и экспонента), в действительности более правдоподобным представляется иерархическая последовательность процессов, приводящая, как и в случае турбулентной среды, к степенным закономерностям.

Хорошо известны и часто используются следующие аппроксимации недебаевской релаксации: *формула Коула-Коула* [24]

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{1 + (i\omega\tau)^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

Коула-Дэвидсона [25]

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{(1 + i\omega\tau)^\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

и их комбинация – *формула Гаврильяка-Негами* [26]:

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta}, \quad 0 < \alpha\beta \leq 1.$$

При $\alpha = \beta = 1$ все они принимают вид

$$\tilde{\chi}(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau},$$

соответствующий дебаевской релаксации.

В работе Коула-Коула [24] дана обширная сводка параметров аппроксимации для разных веществ, выдержку из которой мы приводим в Табл. 2.2.

Таблица 2.2. Значения параметра α для разных диэлектриков [24].

Жидкий диэлектрик	$T^{\circ}C$	α	Твердый диэлектрик	$T^{\circ}C$	α
Вода	19	0,91-1,00	Лед	-1	0,97
Метиловый спирт	19	0,87	Лед	-20	0,93-0,98
Этиловый спирт	20	0,85	Лед	-40	0,84-0,98
Глицерин	-50	0,79	Лед	-70	0,78
Канифольное масло	-1	0,49	Парафин	21	0,15
Канифольное масло	-40	0,63	Резина	75	0,36
Канифольное масло	-50	0,36	Стекло пирекс	21	0,115
Трансформаторное масло	0	0,37	Слюда	21	0,12

2.3.10 Затухание люминесценции

Кинетика затухания спонтанной люминесценции в простейшем случае, когда можно пренебречь временем колебательной релаксации и вероятностями безызлучательных переходов, описывается, как и дебаевская релаксация, экспоненциальным законом

$$I = I_0 e^{-t/\tau}.$$

Этот закон, однако, наблюдается редко. Кинетика более сложных механизмов типов люминесценции (рекомбинационной, люминесценции кристаллофосфоров), в которых важную роль играют излучательные и безызлучательные переходы, захват электронов и дырок ловушками и другие процессы, аппроксимируется *гиперболой Беккереля*

$$I = I_0 (1 + t/\tau)^{-\alpha}, \quad 0,5 < \alpha \leq 2,$$

где τ , как и выше – положительная постоянная с размерностью времени. Во многих случаях постоянная эта настолько мала, что экспериментальные данные аппроксимируются степенной функцией

$$I(t) = At^{-\alpha} = A\Gamma(1 - \alpha)\Phi_{1-\alpha}(t)$$

в широком диапазоне времен. Так, на рис. 3.5 цитируемой книги [4] экспериментальные данные по затуханию люминесценции в p -типе GaAs при 4,2 К после оптического возбуждения импульсом длительностью 7 нс хорошо ложатся на кривую $At^{-1,34}$ в диапазоне времен от $5 \cdot 10^{-8}$ до 10^{-3} с (Рис. 2.2). Затухание люминесценции в стильбене, используемом при регистрации ядерных излучений, аппроксимируется степенной функцией с $\alpha = 1,1$ в диапазоне $10^{-8} - 10^{-4}$ с. Затухание люминесценции в

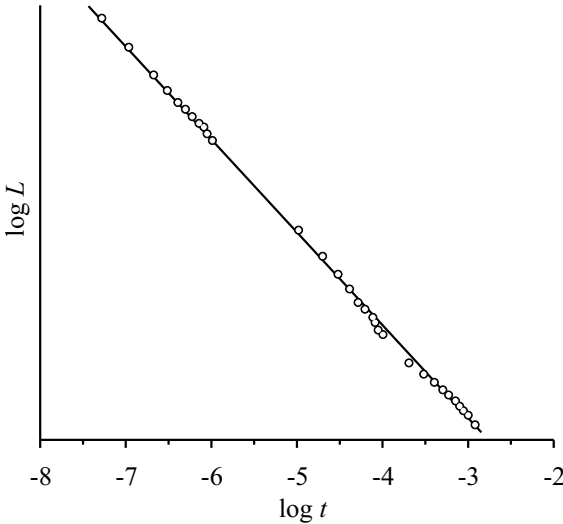


Рис. 2.2: Затухание люминесценции в GaAs р-типа при температуре 4,2 К после импульсного воздействия длительностью 7 нс (точки – эксперимент, кривая – степенная аппроксимация $At^{-1,34}$) [4].

метилциклогексане (бифенильное стекло при 77 К), возбуждаемой коротким импульсом быстрых электронов и длительным облучением гамма-излучения, происходит по одному и тому же степенному с показателем $\alpha = 1,06$ в диапазоне $10^{-6} - 10^{-3}$ с.

2.3.11 Затухание турбулентности

Макроскопические флуктуации, наблюдаемые в турбулентных потоках, также характеризуются степенными закономерностями. Изотропную турбулентность (когда $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$) можно представить себе как движение жидкости, подвергнутой сильному взбалтыванию и предоставленной затем самой себе. Следуя [27], рассмотрим появление степенного закона затухания изотропной турбулентности, опираясь на специфический *закон сохранения Л. Г. Лойцянского*

$$\int \langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle r^2 d\mathbf{r} = \text{const},$$

в свою очередь вытекающий из закона изменения момента импульса турбулентной среды. Подынтегральное выражение быстро убывает за пределами области размеров l (основной масштаб турбулентного движения),

так что приближенно можно положить

$$v^2 l^5 \simeq \text{const}. \quad (2.3.4)$$

Пока число Рейнольдса велико, скорость диссипации энергии в единице объема ε оценивается величиной $\rho v^3/l$. Приравнявая ее к оценке производной кинетической энергии $\rho v^2/t$, находим $l \sim vt$, откуда

$$v \simeq \frac{\text{const}}{t^{5/7}}.$$

Таким образом, скорость изотропного турбулентного движения затухает на этой стадии обратно пропорционально $t^{5/7}$, а основной масштаб турбулентности растет по закону *А. Н. Колмогорова*

$$l \propto t^{2/7}.$$

Число Рейнольдса $\text{Re} = vl/\nu$ падает по закону $t^{-3/7}$, и по истечении достаточно большого времени существенную роль в турбулентном движении жидкости начинает играть ее вязкость. На этой стадии

$$\varepsilon = \frac{\rho\nu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \sim \frac{\rho\nu v^2}{l^2}$$

и сопоставление этой величины с со скоростью потерь кинетической энергии дает формулу

$$l \sim \sqrt{\nu t},$$

сопоставляя которую с выражением (2.3.4), приходим к формуле, определяющей закон затухания изотропной турбулентности на последних стадиях ее существования:

$$v \propto t^{-5/4}.$$

Соответствующая этой стадии корреляционная функция скорости имеет вид

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle \propto t^{-5/2} \exp(-r^2/[8\nu t]).$$

2.3.12 Релаксация в спиновых стеклах

Чрезвычайно интересными в рассматриваемом плане оказываются спиновые стекла, в которых взаимодействие между соседними изинговскими спинами может быть как ферромагнитным, так и антиферромагнитным. Классическим спиновым стеклом является сплав железа с золотом, содержащий лишь несколько процентов железа. Этот сплав обнаруживает переход в замороженное состояние спинов при температуре

$T_f \approx 5 \div 15$ К в зависимости от концентрации. Спины Fe случайным образом распределены среди немагнитных ионов Au и взаимодействуют друг с другом с помощью непрямого обменного механизма. На больших расстояниях это взаимодействие описывается параметром взаимодействия $J(r) \propto r^{-3} \cos(2k_F r)$, где k_F – фермионный волновой вектор электронов проводимости Au.

Если моделирование ферромагнетиков методом Монте-Карло начинается из состояния, в котором все спины направлены вверх, то намагниченность $M(t) = \langle \sigma_i(t) \rangle$, равная вначале единице, уменьшается с установлением равновесия, и, в конце концов, устанавливается спонтанная намагниченность. Моделирование спиновых стекол [27] показывает, что остаточная намагниченность их очень слабо спадает до нуля: процесс идет не по экспоненте, как ожидалось, а по степенному закону:

$$M(t) \propto t^{-\alpha}, \quad \alpha \approx (1/2)k_B T / \Delta J.$$

Такие же результаты для этого сплава получены и в эксперименте при температурах $1,2 \div 4,2$ К [29].

2.3.13 Аномальная кинетика экситонов

Аномальная кинетика экситонов наблюдается в изотопических сплавах нафталина и в образцах нафталина со сложными геометрическими ограничениями: нафталин в каналах пористого стекла викор, пористых полимерных (например, нейлоновых) мембран, в полостях полимерного стекла (например, плексигласа) или на границах зерен в пленках нафталина при низкой температуре. Общим свойством этих систем является необычное поведение процесса аннигиляции экситонов: коэффициент скорости аннигиляции k не постоянен, а спадает со временем по степенному закону

$$k(t) \propto t^{-\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

с показателем неоднородности α , обращаемым в нуль для однородных образцов [30].

2.3.14 Временные корреляции в жидкостях и газах

Важнейшими характеристиками микроскопических флуктуаций газа или жидкости, обуславливающих явления рассеяния света, критической опалесценции и т. п., являются корреляционные (автокорреляционные) функции – временные и пространственные. Примечательным в отношении круга рассматриваемых проблем является п. 21.5 второго тома книги Балеску [31, с. 333]. Сообщая о том, что среди специалистов

существовало общее убеждение об экспоненциальном характере затухания корреляций, Балеску указывает, что мнение это основывалось на изучении поведения простых моделей, таких как броуновское движение, больцмановская кинетическая теория, марковские процессы. Но примеры не могут заменить доказательства того, что и в общем случае имеет место такое же поведение. Напротив, в 1960 году Гернси показал, что в плазме корреляции с малыми волновыми векторами затухают как t^{-1} . В 1968 году Олдер и Вайнрайт провели численное моделирование системы твердых дисков и твердых сфер методом молекулярной динамики и показали, что на больших временах корреляции убывают как $t^{-d_S/2}$, где d_S – размерность системы. Балеску пишет, что этот результат оказался большой неожиданностью и поколебал устоявшееся представление. Несколько позже Дорфман и Коэн на примере умеренно плотного газа показали, что чтобы получить этот результат, необходимо выйти за пределы больцмановского приближения, и тогда расходящиеся в разложении по степеням плотности члены станут конечными и обеспечат степенной хвост корреляционных функций. Последующие расчеты ряда авторов подтвердили предположение о том, что затухание корреляций

$$C_\tau(t) = At^{-d_S/2} = A\Gamma(1 - d_S/2)\Phi_{1-d_S/2}(t)$$

«следует считать совершенно общим явлением, связанным с гидродинамическим поведением длинноволновых возмущений в жидкости» [31, с. 334]. Там же читатель найдет и математические выкладки, которые по мнению автора показывают, что «в действительности она (степенная функция – В.У.) появляется в результате *суперпозиции экспонент*» и замечание о том, что неэкспоненциальный хвост корреляционных функций обусловлен «распространением возмущений на большие расстояния с помощью механизма, определяемого законами макроскопической гидродинамики. Это – медленный процесс, который продолжается еще долго после затухания быстрых экспоненциальных переходных процессов».

2.3.15 Тяжелые хвосты в распределениях вероятностей

Рассмотрим теперь вероятностные распределения. Ни их плотности $p(x)$, ни функции распределения $F(x)$ не могут быть чисто степенными, этого не позволяет им условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1, \quad F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1.$$

Речь может идти лишь об асимптотическом поведении распределений в далеких областях, на вероятностном жаргоне называемых «хвостами» (в теории формирования оптических спектральных линий используется более романтическая метафора – «крылья»). Хвосты со степенной асимптотикой, экспериментальные графики которых похожи на крокодильи хвосты, называют «тяжелыми»,

Приведем три примера распределений с «тяжелыми хвостами». Пусть X – стандартная нормальная случайная величина с плотностью

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2.3.5)$$

Возьмем обратную величину $Y_1 = 1/X$. Ее функция распределения

$$F_{Y_1}(y) \equiv \mathbb{P}(Y_1 < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1/y}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

и плотность

$$p_{Y_1}(y) = F'_{Y_1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y^2} e^{-1/2y^2},$$

как и плотность нормального распределения, симметрична относительно нуля. Второй момент этого распределения бесконечен, а среднее значение (в смысле несобственного интеграла в бесконечных пределах) не существует.

Случайная величина $Y_2 = 1/X^2$ положительна, ее плотность

$$p_{Y_2}(y) = \frac{d\mathbb{P}(Y_2 < y)}{dy} = \frac{d}{dy} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{1/\sqrt{y}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}y^3} e^{-1/2y},$$

называемая *плотностью Левчи-Смирнова* имеет степенной хвост $p_{Y_2}(y) \propto y^{-3/2}$, $y \rightarrow \infty$.

Пусть X_1 и X_2 – независимые случайные величины с плотностью распределения (2.3.5). Найдем плотность распределения случайной величины $Y_3 = X_1/X_2$. В силу симметрии достаточно найти ее лишь на положительной полуоси:

$$\begin{aligned} p_{Y_3}(y) &= \frac{d}{dy} \left[\frac{1}{2} \mathbb{P}(X_1/X_2 < y | X_1 > 0, X_2 > 0) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dx_1 e^{-x_1^2/2} \int_{x_1/y}^{\infty} e^{-x_2^2/2} dx_2 = \frac{1}{\pi(1+y^2)}. \end{aligned}$$

В теории вероятностей это распределение носит название *закона Коши*.

2.3.16 Спектральная форма Лоренца

Мы видим, что распределения с тяжелыми хвостами в теории вероятностей появляются при элементарных алгебраических преобразованиях случайных переменных. Но в ряде случаев им можно придать и физическую интерпретацию. В частности, закон Коши известен в физике (оптике) как спектральное распределение Лоренца, возникающее при разложении в интеграл Фурье экспоненциальной функции релаксации:

$$S(\omega) = \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{i\omega t} e^{-t/\tau} dt = \frac{\tau}{1 + (\omega\tau)^2}.$$

Распределению Коши можно придать и геометро-оптическую интерпретацию. Поместим на единичном расстоянии от тонкого бесконечного стержня точечный источник света. Тогда линейная освещенность его (энергия, приходящаяся на единицу длины) на расстоянии y от ближайшей к источнику точки окажется пропорциональной $p_{Y_3}(y)$. Приведем более содержательные физические примеры.

2.3.17 Время пребывания в ловушке

Рассмотрим ансамбль частиц, находящихся в локализованных состояниях с энергией активации ε , которые для удобства будем называть *ловушками*. Время пребывания частицы в такой ловушке есть случайная величина Θ с экспоненциальным распределением

$$P(\Theta > t|\varepsilon) = e^{-t/\tau(\varepsilon)}$$

и средним значением $\tau(\varepsilon)$, по *закону Аррениуса* равным

$$\tau(\varepsilon) = \tau_0 \exp(\varepsilon/k_B T).$$

Разным членам ансамбля, отвечающим разным положениям ловушек, в неоднородной среде соответствуют разные значения энергии ε , так что эту величину можно так же считать случайной. Приняв в качестве ее распределения *закон Гиббса*,

$$p(\varepsilon) = (1/\varepsilon_0) \exp(-\varepsilon/\varepsilon_0),$$

получим

$$P(\Theta > t) = \int_0^{\infty} P(\Theta > t|\varepsilon) p(\varepsilon) d\varepsilon =$$

$$= \int_0^{\infty} \exp(-(t/\tau_0)e^{-\varepsilon/kT})(1/\varepsilon_0)e^{-\varepsilon/\varepsilon_0} d\varepsilon = \alpha \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-\alpha} \int_0^{t/\tau_0} e^{-z} z^{\alpha-1} dz,$$

где $\alpha = kT/\varepsilon_0$. При $t \rightarrow 0$ эта вероятность, как и положено, стремится к 1, а в асимптотике больших времен

$$P(\Theta > t) \sim \Gamma(1 + \alpha) \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{-\alpha},$$

и, соответственно,

$$p_{\Theta}(t) \sim \alpha \Gamma(1 + \alpha) \tau_0^{\alpha} t^{-1-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Аналогичная ситуация встречается и в модели переноса путем туннелирования, предложенной в работе [32]. В ней предполагается, что носители совершают одномерное движение в положительном направлении оси x , определяемом направлением приложенного поля. На оси случайным образом расположены ловушки – одинаковые потенциальные ямы, переход носителей между которыми осуществляется путем туннелирования. Расстояние X между соседними узлами случайно и распределено по экспоненциальному закону,

$$P(X > x) = e^{-\mu x}.$$

В пренебрежении собственными (то есть, при фиксированном расстоянии до следующего узла) флуктуациями времени между последовательными скачками получается соотношение [33]

$$\Theta = \beta(e^{X/x_0} - 1),$$

где постоянная β обратно пропорциональна градиенту потенциала. В результате вновь приходим к асимптотически степенному распределению временного интервала между скачками:

$$P(\Theta > t) = P(\beta(e^{X/x_0} - 1) > t) = P(X > x_0 \ln(1 + t/\beta)) = \frac{1}{(1 + t/\beta)^{\mu x_0}}.$$

Рассмотрим еще одну модель асимптотически степенного распределения, приведенную в [34]. Пусть t – безразмерное время, а

$$\psi_n(t) = \mu^n \exp(-\mu^n t), \quad t \geq 0, \quad \mu > 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.6)$$

– распределение интервала времени между двумя последовательными событиями пуассоновского потока с интенсивностью μ^n . Заменим натуральное n случайной величиной N , распределенной по геометрическому закону:

$$P(N = n) = (1 - q)q^{n-1}, \quad 0 < q < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3.7)$$

Пусть, например, q – вероятность частице, вступившей во взаимодействие с ловушкой, избежать захвата, тогда $1 - q$ есть вероятность того, что она будет захвачена при этом взаимодействии, а формула (2.3.7) дает вероятность того, что частица, последовательно вступающая во взаимодействие с ловушкой (ловушками), окажется захваченной при n -м взаимодействии. Усредним теперь распределение (2.3.6) по случайной переменной N :

$$\psi(t) = \langle \psi_N(t) \rangle = \frac{1-q}{q} \sum_{n=1}^{\infty} (\mu q)^n \exp(-\mu^n t).$$

Заменяв t на μt и прибавив и вычтя $[(1-q)/q] \exp(-\mu t)$, преобразуем это выражение к виду

$$\psi(\mu t) = \frac{1}{\mu q} \psi(t) - \frac{1-q}{q} e^{-\mu t},$$

из которого следует асимптотическое соотношение

$$\psi(\mu t) \sim \frac{1}{\mu q} \psi(t), \quad t \rightarrow \infty.$$

Прямой подстановкой нетрудно убедиться, что решение этого функционального уравнения имеет вид степенной функции

$$\psi(t) \sim t^{-\gamma-1}, \quad t \rightarrow \infty,$$

с показателем $\gamma = \ln q / \ln \mu$.

Физически эта модель находит свое воплощение в одном из механизмов дисперсионного переноса в неупорядоченных полупроводниках – явлении многократного захвата. Как уже отмечалось выше, скорости переходов в активационных процессах, в результате которых происходит освобождение носителей заряда с низколежащих ловушек в зону проводимости, экспоненциально зависят от энергии. Эквиливантное расположение энергетических уровней $E_n = n\Delta E$ приводит к скоростям переходов, пропорциональным $\exp(-E_n/kT) = [\exp(-\Delta E/kT)]^n$. Плотность состояний в хвосте зоны часто сама спадает с энергией как $\exp(-E_n/kT_0) = [\exp(-\Delta E/kT_0)]^n$, где T_0 – постоянная размерности температуры. Таким образом, $\mu = \exp(-\Delta E/kT)$, $q = \exp(-\Delta E/kT_0)$ и мы имеем асимптотические степенное распределение времени освобождения носителей заряда с показателем $\gamma = T/T_0$.

2.3.18 Пробег фотона в плазме

Характерная особенность переноса резонансного излучения в плазме состоит в том, что спектр поглощения (в приближении локального

термодинамического равновесия и полного перераспределения по частоте) пропорционален спектру излучения:

$$k(\omega) = C\varepsilon(\omega), \quad C > 0.$$

Таким образом, если распределение свободного пробега R фотона при фиксированной частоте ω дается экспонентой,

$$P(R > x|\omega) = e^{-k(\omega)x}, \quad x > 0,$$

то безусловное – усредненное по спектру излучения $\varepsilon(\omega)$ – распределение выражается интегралом

$$P(R > x) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega) e^{-k(\omega)x} d\omega.$$

Существует несколько процессов, влияющих на формирование профиля спектральной линии.

Излучение изолированного атома. Прежде всего, конечно, сама электродинамика излучения, приводящая к спектру Лоренца:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0(\omega) \equiv \frac{\gamma}{2\pi[(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2]}, \quad \gamma > 0, \quad \gamma/2 \ll \omega_0.$$

Перейдя к переменной интегрирования $s = 2(\omega - \omega_0)/\gamma$, находим

$$\begin{aligned} P(R > x) &= \int_0^{\infty} \varepsilon_0(\omega) e^{-k(\omega)x} d\omega \approx \\ &\approx \frac{1}{2\pi} e^{-k_0 x/2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{1}{2} k_0 x \cos \varphi} d\varphi = e^{-k_0 x/2} I_0(k_0 x/2). \end{aligned}$$

При больших x эта функция имеет асимптотику

$$P(R > x) \sim (\pi k_0)^{-1/2} x^{-1/2}, \quad R \rightarrow \infty.$$

Влияние окружающих атомов. Приведенный выше результат относится к газу, состоящему из неподвижных не взаимодействующих друг с другом нейтральных атомов. В действительности, каждый атом находится в электрическом поле, напряженность которого определяется конфигурацией окружающих атомов (даже если атомы нейтральны, поле создается их дипольными или квадрупольными моментами). Для

разных излучаемых атомов эти конфигурации различны и постоянно изменяются в результате теплового движения. Рассматривая создаваемые ими напряженности в качестве реализаций некоторого изотропного случайного электрического поля и усредняя распределение пробегов по этому ансамблю, также получаем асимптотику степенного типа с показателями, приведенными в Табл. 2.3.

Таблица 2.3. Показатель α в асимптотике распределения пробегов
 $P(R > x) \propto x^{-\alpha}$.

Эффект Штарка	Ионы	Диполи	Квадруполи
Линейный	1/2	1/2	3/7
Квадратичный	3/7	2/3	8/11

Влияние движения излучающего атома. Тепловое движение излучающего атома приводит к смещению частоты – Доплер-эффекту. Если при расчете дисперсионного профиля учесть доплеровское смещение частоты, получим комбинированное доплер-лоренц-хольцмарковское распределение, называемое профилем Фойгта. При этом доплеровский механизм уширения оказывает влияние лишь на центральную область, крылья же остаются прежней степенной формы.

2.3.19 Мерцающая флуоресценция квантовых точек

Флуоресценция одиночных полупроводниковых коллоидных нанокристаллов, например квантовых точек CdSe с оболочкой из ZnS, проявляет прерывистое поведение: при лазерном облучении нанокристаллы мерцают, т. е. оп-состояния, в которых происходит излучение фотонов, чередуются off-состояниями, в которых наночастица не излучает (подробнее см. [35]). В экспериментальных исследованиях [36, 37] мерцающей флуоресценции квантовых точек отмечается, что on- и off-интервалы распределены по асимптотически степенным законам:

$$P(T_{\text{on}} > t) \propto t^{-\alpha}, \quad P(T_{\text{off}} > t) \propto t^{-\beta}.$$

Параметры $\alpha, \beta \in (0, 1)$ практически не изменяются при варьировании условий измерений: температуры, интенсивности излучения лазера, размеров квантовых точек. В связи с этим определение механизма является сложной задачей. Физические причины мерцания квантовых точек до конца не выяснены, хотя существует несколько правдоподобных гипотез [36-40]. Эфрос и Розен [38] объяснили мерцание флуоресценции на основе модели оже-ионизации квантовых точек с последующей нейтрализацией. Однако, эта модель приводит к экспоненциальному распределению

on- и off-интервалов по длительности. В качестве возможных механизмов, приводящих к степенному распределению интервалов, предлагаются термически активируемая ионизация [36], модель туннелирования через флуктуирующие барьеры [36], резонансное туннелирование между ядром и заряженными локализованными состояниями [37] и др.

2.3.20 Распределения с тяжелыми хвостами и принцип максимума энтропии

Когда речь заходит о необычного вида распределениях вероятностей, отражающих свойства статистических ансамблей реальных физических систем, их в первую очередь сравнивают с нормальным и выясняют причины отличия. Математики это делают с верой в центральную предельную теорему, физики – в стационарность энтропии Больцмана-Гиббса:

$$S = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx. \quad (2.3.8)$$

При выполнении условий

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad (2.3.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) x dx = 0 \quad (2.3.10)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) x^2 dx = \sigma^2, \quad (2.3.11)$$

уравнение

$$\delta S = 0$$

приводит к нормальному распределению с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Каковы могут быть мотивы, чтобы отказаться от столь естественных условий?

В качестве такого мотива может выступать, например, *расходимость интегралов*, определяющих используемые здесь моменты распределения. Первая реакция физика на этот факт обычно отрицательна: физическая величина не может принимать бесконечное значение и распределения с бесконечными моментами физического смысла не имеют. Однако для расходимости несобственных интегралов, каковыми определяются моменты, вовсе не обязательно, чтобы соответствующая случайная величина принимала бесконечные значения. Более того, условие нормировки (2.3.9) как раз и исключает такую ситуацию (для непрерывных распределений). Таким образом, расходимость несобственных интегралов для моментов означает просто, что $p(x)$ убывает на бесконечности недостаточно быстро. Критик, конечно, может перефразировать свое возражение: физическая величина должна быть ограниченной, и тогда все ее моменты существуют и конечны. Замечу, однако, что и нормально распределенная случайная величина не ограничена по своим значениям. Расчеты показывают, что во многих случаях наличие длинного хвоста распределения, ограниченного на большом расстоянии, эквивалентно наличию неограниченного хвоста, и принципиальных препятствий к использованию неограниченных распределений с расходящимися моментами не существует (разумеется, есть ситуации, где ограниченностью значений случайной величины пренебречь нельзя). Как показано в [42], чтобы получить любую заданную плотность $f(x)$ из условия стационарности энтропии, достаточно заменить связи (2.3.10)-(2.3.11) условием

$$\langle \ln f(x) \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \ln p(x) dx = c = \text{const.} \quad (2.3.12)$$

Вводя неопределенные множители Лагранжа μ и λ для включения в уравнение стационарности связей (2.3.9) и (2.3.12), получим:

$$\delta S = \delta \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln p(x) dx + \mu \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx \right] + \lambda \left[c - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln f(x) dx \right] \right\} = 0.$$

Отсюда следует уравнение для $p(x)$, при $\mu = 1$ и $\lambda = -1$ имеющее решение

$$p(x) = f(x).$$

Таким образом, любая плотность, в том числе и плотность с хвостом степенного вида, приводящим к бесконечной дисперсии и даже расходящемуся математическому ожиданию, может быть выведена из стационарности энтропии Больцмана-Гиббса.

Другой способ «вывести» негауссовы распределения с тяжелыми хвостами был найден Цаллисом [43], использовавшим для этой цели *обобщенную энтропию*

$$S_q^T = \frac{1 - \sum_{i=1}^w p_i^q}{q - 1},$$

напоминающую энтропию Реньи:

$$S_q^R = \frac{\ln \sum_{i=1}^w p_i^q}{1 - q}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$S_q^R = \frac{\ln[1 + (1 - q)S_q^T]}{1 - q}$$

и

$$\lim_{q \rightarrow 1} S_q^T = \lim_{q \rightarrow 1} S_q^R = - \sum_i p_i \ln p_i.$$

Основанный на этом определении энтропии математический формализм обладает замечательными свойствами: он сохраняет структуру чрезвычайно важных для термодинамики преобразований Лежандра, оставляет инвариантными теорему Эренфеста, уравнение фон Неймана и теорему взаимности Онзагера при любых значениях параметра q .

Представив новую энтропию в форме

$$S_q^T[p(\cdot)] = \frac{1 - \int_{-\infty}^{\infty} d(x/\sigma) [\sigma p(x)]^q}{q - 1}$$

и используя метод неопределенных множителей Лагранжа для учета связей

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx p(x) = 1$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 [p(x)]^q = \sigma^{3-q},$$

Цаллис с соавторами получили следующий класс распределений:

$$p(x) = A(q) \frac{1}{[1 + \beta(q - 1)x^2]^{1/(q-1)}}, \quad -\infty < x < \infty,$$

при $1 < q < 3$ и

$$p(x) = \begin{cases} A(q) \frac{1}{[1 + \beta(q-1)x^2]^{1/(q-1)}}, & |x| \leq \frac{1}{\sqrt{\beta(1-q)}}, \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

при $-\infty < q < 1$. Большое число приложений этих распределений с тяжелыми хвостами можно найти в работах Цаллиса и его последователей [43 – 45].

2.4 От степенных функций к дробным производным

Вспользуемся теперь степенной функцией $\Phi_\mu(t)$, $0 < \mu < 1$ в качестве функции влияния в выражении (1.2.1):

$$g(t) = \int_0^t \Phi_\mu(t - \tau) f(\tau) d\tau = \Phi_\mu \star f(t). \quad (2.4.1)$$

Преобразование Лапласа свертки равно произведению лапласовских образов свертываемых функций:

$$\widehat{g}(\lambda) = \widehat{\Phi}_\mu(\lambda) \widehat{f}(\lambda) = \lambda^{-\mu} \widehat{f}(\lambda).$$

Вспомнив, что $\lambda^{-m} \widehat{f}(\lambda)$ представляет собой лапласовский образ m -кратного интеграла от функции $f(t)$,

$$\lambda^{-m} \widehat{f}(\lambda) = \mathbb{L} \{ {}_0I_t^m f(t) \} (\lambda), \quad {}_0I_t^m f(t) \equiv \int_0^t d\xi_m \int_0^{\xi_m} d\xi_{m-1} \dots \int_0^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1),$$

резонно интерпретировать произведение $\lambda^{-\mu} \widehat{f}(\lambda)$ как *дробное обобщение кратного интеграла*:

$$\lambda^{-\mu} \widehat{f}(\lambda) = \mathbb{L} \{ {}_0I_t^\mu f(t) \} (\lambda), \quad {}_0I_t^\mu f(t) = \int_0^t \Phi_\mu(t - \tau) f(\tau) d\tau.$$

Учитывая также, что каждое дифференцирование оригинала увеличивает показатель степени множителя λ^{-m} на единицу,

$$\mathbb{L} \{ D_t^n {}_0I_t^m f(t) \} (\lambda) = \lambda^{n-m},$$

можно *определить* производную дробного порядка $\nu = n - \mu = [\nu] - \mu + 1$ функции $f(t)$ соотношением

$$\begin{aligned} {}_0f^{(\nu)}(t) &= D_t^n {}_0I_t^\mu f(t) = D_t^n \int_0^t \Phi_\mu(t-\tau) f(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})} D_t^{[\nu]+1} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\{\nu\}}}, \quad \nu \geq 0. \end{aligned}$$

Здесь ν – положительное вещественное число (порядок дробной производной), $[\nu]$ – его целая часть, $\{\nu\}$ – дробная часть, $n = [\nu] + 1$. Позднее мы увидим, что интегралы дробных порядков $\mu > 0$ удобно интерпретировать как производные отрицательных порядков $\nu = -\mu < 0$:

$${}_0f^{(\nu)}(t) = {}_0I_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\nu+1}}, \quad \nu < 0.$$

Определенные этими выражениями функции называются *дробными производными Римана-Лиувилля* порядка ν функции $f(t)$. При этом нижний индекс интеграла не обязательно должен быть равен нулю. В этом случае

$${}_a f^{(\nu)}(t) \equiv {}_a D_t^\nu f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\nu+1}}, & \nu < 0; \\ \frac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})} D_t^{[\nu]+1} \int_a^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\{\nu\}}}, & \nu > 0. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Заметим, что мы ввели здесь обозначение оператора дифференцирования дробного порядка ${}_a D_t^\nu$. В отличие от целочисленных порядков он содержит указание на нижний (левый) предел интегрирования и определяет *правостороннее* (по отношению к a) *дифференцирование*. При перестановке пределов мы получаем оператор *левостороннего дифференцирования* ${}_t D_b^\nu$.

При определенных ограничениях на дифференцирование функции имеют место соотношения

$$g(t) = {}_0 D_t^\nu f(t) \Leftrightarrow \tilde{g}(k) = (-ik)^\nu \tilde{f}(k), \quad (2.4.3)$$

$$g(t) = {}_0 D_t^\nu f(t) \Leftrightarrow \hat{g}(\lambda) = \lambda^\nu \hat{f}(\lambda), \quad (2.4.4)$$

которым удобно использовать для «опознания» дробных производных по их интегральным преобразованиям. Заметим, что в физическом плане преобразованию Фурье соответствует спектральное разложение. Соответствующие эксперименты как правило более точны (особенно в оптике) по сравнению с прямыми временными измерениями.

В теоретических исследованиях соотношения типа (2.4.3)-(2.4.4) часто являются следствием асимптотических разложений. Важную роль при этом играют тауберовы теоремы (п. 2.2).

Литература

1. *Kohlrausch R.* Annalen der Physik und Chemie (Poggendorf), V. IV-91 **56**, 179 (1854).
2. *Sessler G. M.* Electrets. – Berlin: Springer, 1980.
3. *Jonscher A. K.* Dielectric Relaxation in Solids. – London: Chelsea Dielectric Press, 1983.
4. *Jonscher A. K.* Universal Relaxation Law. – London: Chelsea Dielectric Press, 1996.
5. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. – Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2001.
6. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М., 1959.
7. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 2. – М.: Мир, 1967.
8. *Слезкин Н. А.* Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат (1955).
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. – М.: Наука (1988).
10. *Chen W.* Chin. Phys. Lett. **22**, 2601 (2005).
11. *Nutting P. G.* J. Franklin Inst. **191**, 679 (1921).
12. *Bagley R. L., Torvik P. J.* Journal of Rheology **27**, 201 (1983).
13. *Работнов Ю. Н.* Прикладная математика и механика **12**, 53 (1948).
14. *Работнов Ю. Н.* Элементы эредитарной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.

15. *Rouse P. E.* J. Chem. Phys. **21**, 1272 (1953).
16. *Doi M., Edwards S. F.* The Theory of Polymer Dynamics. – Oxford: Clarendon Press, 1995.
17. *Schiessel H., Friedrich C., Blumen A.* In: Applications of Fractional Calculus in Physics. Ed. by *Hilfer, R.* – Singapore: World Scientific, 2000, p. 331.
18. *Пеллутти Л.* В сб.: Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988, с. 106.
19. Kinetics of Aggregation and Gelation. Ed. by *Family F., Landau D. P.* – North-Holland: Amsterdam, 1984.
20. *Рау З.* В сб.: Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988, с. 440.
21. *Westerlund S.* Physica Scripta **43**, 174 (1991).
22. *Curie M. J.* Annales de chimie et de physique. Ser. 6. **18**, 203 (1889).
23. *von Schweidler E. R.* Ann. der Physik **24**, 711 (1907).
24. *Cole K. S., Cole R. H.* J. Chem. Phys. **9**, 341 (1941).
25. *Davidson D., Cole R. J.* J. Chem. Phys. **19**, 1484 (1951).
26. *Havriiliak S., Negami S. J.* Polym. Sci. **14**, 99 (1966).
27. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. – М.: Наука, 1954, с. 178.
28. *Биндер К., Штауффер Д.* В кн.: Методы Монте-Карло в статистической физике, ред. К.Биндер. – М.: Мир, 1982, с. 329.
29. *Holtzberg F., Tholence J. L., Tournier R.* In: Amorphous Magnetism II. Ed. by *Levy R. A., Hasegawa R.* – New York: Plenum Press, 1977, p. 155.
30. *Копельман Р.* В кн.: Фракталы в физике. Под ред. *Пьетронеро Л., Тосатти Э.* – М.: Мир (1988) с. 524.
31. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2. М.: Мир, 1978.
32. *Tunaley J. K. E.* J. Appl. Phys. **43**, 4783 (1972).
33. *Harper W. R.* Contact and Frictional Electrification. – Oxford: Oxford Univ. Press, 1967.

34. *Блюмен А., Клафтер Дэс., Цумофен Г.* В сб.: Фракталы в физике. – М.: Мир, 1988, с. 561.
35. *Осадько И. С.* УФН **176**, 23 (2006).
36. *Kuno M. et al.* J. Chem. Phys. **115**, 1028 (2001).
37. *Shimizu K. T. et al.* Phys. Rev. B **63**, 205316 (2001).
38. *Efros A. L., Rosen M.* Phys. Rev. Lett. **78**, 1110 (1997).
39. *Tang J., Marcus R. A.* J. Chem. Phys. **123**, 054704 (2005).
40. *Осадько И. С.* Письма в ЖЭТФ **79**, 522 (2004).
41. *Jung Y., Barkai E., Silbey R. J.* Chem. Phys. **284**, 181 (2002).
42. *Montroll E. W., Shlesinger M. F.* J. Stat. Phys. **32**, 209 (1983).
43. *Tsallis C. J.* Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
44. *Tsallis C., de Souza A., Maynard R.* In: Levy Flights and Related Topics in Physics. Ed. by *Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Frisch U.* – Berlin: Springer, 1995, p. 269.
45. *Tsallis C.* Physica D **193**, 3 (2004).

Глава 3

Автомодельные случайные процессы

3.1 Нормальная диффузия

Известно, что результат X измерения изучаемой величины a как правило, сопровождается или, как образно выразился А. Н. Зайдель, *отягощается* [1] случайной ошибкой Δ

$$X = a + \Delta.$$

Полностью исключить ее не удастся, но можно уменьшить повторением опыта и вычислением среднего арифметического (выборочного среднего) измеренных величин X_1, \dots, X_n :

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = a + \Delta_n.$$

Здесь a – по-прежнему истинное значение физической величины (систематическая ошибка предполагается исключенной), а Δ_n – зависящая от числа повторных измерений n случайная ошибка, которая при больших n распределена по нормальному (гауссову) закону. Основанием последнего утверждения служит

1.1. Центральная предельная теорема (ЦПТ). Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены со средним значением $\langle x \rangle = a$ и дисперсией $\sigma^2 < \infty$. Тогда

$$\frac{\sum_{j=1}^n X_j - na}{\sqrt{n}\sigma} \underset{d}{\sim} G, \quad n \rightarrow \infty,$$

где G – случайная величина со стандартной нормальной (гауссовой) плотностью распределения

$$p_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Эта же теорема лежит в основе объяснения феномена броуновского движения, изменения координат которого в неперекрывающиеся промежутки времени можно считать независимыми. Эволюция плотности распределения $p(x, t)$ координаты в одномерном случае описывается уравнением

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2},$$

где K – коэффициент диффузии. Если в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в начале координат $x = 0$,

$$p(x, 0) = \delta(x),$$

то решение этого уравнения имеет вид

$$p(x, t) = (Kt)^{-1/2} g\left(x(Kt)^{-1/2}\right),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-x^2/4}$$

– гауссово распределение (с дисперсией, равной 2). Заметим, что в данном случае уравнение диффузии можно представить также в виде

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \delta(x)\delta(t),$$

предполагающем нулевое начальное условие.

Эти формулы образуют фундамент теории линейной нормальной диффузии. Простейший вывод уравнения диффузии основан на *уравнении непрерывности*

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}$$

и *законе Фика*

$$j(x, t) = -K \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}.$$

К диффузионной модели приводят различные физические и не обязательно физические задачи: одни и те же диффузионные уравнения описывают поведение нейтронов в ядерном реакторе, курса ценных бумаг на финансовой бирже и частиц цветочной пыльцы, взвешенных в

жидкости. История изучения броуновского движения связана с именами А. Эйнштейна, М. Смолуховского, П. Ланжевена, А. Фоккера, М. Планка, Г. Уленбека, С. Чандрасекара и других известнейших физиков. С пионерскими работами в этом направлении читатель старшего поколения может быть знаком по сборнику [2]. М. Смолуховский, в частности, пишет: «Известная теория брауновского движения, развитая Эйнштейном, мною и Ланжевенном...» ([2], с. 319). Работы А. Эйнштейна, П. Ланжевена и М. Смолуховского [3-5] датированы соответственно 1905-м, 1908-м и 1912-м годами. Однако впервые диффузионное уравнение появилось в диссертации Луи Башелье – ученика А. Пуанкаре – в 1900 году. Диссертация называлась «Теория спекуляций» и была посвящена изучению случайного процесса эволюции рыночных цен.

Тот факт, что совершенно различные по природе явления описываются одинаковыми уравнениями, является прямым указанием на то, что *дело здесь не в конкретном механизме явления, а в некотором общем качестве, которым обладает весь класс подобных явлений*. Формулировка этого качества в виде аксиом или определений позволяет освободить картину от деталей, не влияющих существенно на ход процесса, и исследовать полученную модель «в чистом виде». Это уже удел математиков, усилиями которых и была создана *теория случайных процессов*, первым объектом применения которой стало броуновское движение. Важнейший вклад в математическую теорию броуновского движения внес Н. Винер, доказавший, что траектории броуновского процесса почти всюду непрерывны, но нигде не дифференцируемы. В связи с этим броуновское движение называют *винеровским процессом*. Наряду с Н. Винером математическими аспектами броуновского движения занимались Я. Бернулли, Дж. Дуб, М. Кац, В. Феллер, С. Н. Бернштейн, П. Леви, А. Н. Колмогоров, Р. Л. Стратонович и другие известные теоретики.

3.2 Марковские процессы

Для того, чтобы лучше представить себе место диффузии среди других случайных процессов, напомним несколько определений [6]. Мы ограничимся рассмотрением одномерного движения, так что случайная координата блуждающей частицы $X(t)$, $t \geq 0$ будет вещественной переменной. В этом случае понятие случайного процесса совпадает с понятием случайной функции [7, с. 589].

3.2.1. *Случайный процесс (случайная функция) $\{X(t), T\}$ есть совокупность случайных величин $X(t)$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве и отвечающих всевозможным значениям $t \in T$. Случайная величина $X(t)$ называется *координатой* случайного процесса*

в момент времени t , а случайная реализация $X(\cdot)$ – траекторией случайного процесса.

Следуя принятой в физической литературе традиции будем характеризовать случайный процесс $\{X(t), T\}$ набором конечномерных плотностей $p_n(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$, $t_n > t_{n-1} > \dots > t_1$, в предположении, что они существуют.

3.2.2. Случайный процесс $\{X(t), T\}$ называется *гауссовским процессом*, если для любых $n \geq 1$ и t_1, \dots, t_n $p_n(x_n, t; \dots; x_1, t_1)$ является n -мерным нормальным (гауссовским) распределением. Так как нормальное распределение однозначно определяется своими первыми и вторыми моментами, то для задания гауссовского процесса достаточно указать две функции: математическое ожидание $m(t) = \langle X(t) \rangle$ и корреляционную функцию $B(t, u) = \langle [X(t) - m(t)][X(u) - m(u)] \rangle$.

3.2.3. Случайный процесс $\{X(t), T\}$ называется *марковским процессом*, если для любых $n \geq 1$ и $t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ условная плотность $p(x, t|x_n, t_n; \dots; x_1, t_1)$ зависит лишь от последней координаты:

$$p(x, t|x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = p(x, t|x_n, t_n).$$

Свойство марковости интерпретируется как независимость будущего от прошлого при известном настоящем. Леви формулирует это свойство фразой «прошедшее влияет на будущее только через настоящее» и подчеркивает аналогию с принципом Гюйгенса («можно сказать, что это принцип Гюйгенса в расчете вероятностей» [8, с. 48]). В некотором смысле его можно считать стохастическим обобщением динамического принципа, заложенного в уравнениях механики: будущее механической системы полностью определяется ее фазовыми координатами в настоящий момент и не зависит от прошлого.

Условную плотность $p(x, t|y, u)$ обозначают для наглядности $p(x, t \leftarrow y, u)$ и называют *переходной плотностью*. Переходная плотность удовлетворяет *уравнению Колмогорова-Чепмена*, являющемуся переформулировкой приведенного выше определения:

$$p(y, u \rightarrow x, t) = \int p(x, t \leftarrow z, v)p(z, v \leftarrow y, u)dz, \quad u < v < t.$$

Заметим, что «промежуточных» аргументов здесь два: z и v , но интегрирование по одному из них (z) снимает и зависимость от другого (v). Переходная плотность вместе с одномерной плотностью $p(x, 0)$, заданной в начальный момент времени $t = 0$, полностью определяет марковский процесс при $t > 0$.

3.2.4. Случайный процесс $\{X(t), T\}$ называется *процессом с независимыми приращениями*, если для $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t$ при любых

$n \geq 1$ случайные величины $X(0), X(t_1) - X(0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ взаимно независимы. Леви такие процессы называет *аддитивными* [8, с.80]. Очевидно, они принадлежат к классу марковских процессов, причем

$$p(x, t \leftarrow y, u) = p(x - y, t \leftarrow 0, u).$$

3.2.5. Процесс с независимыми приращениями называется *однородным*, если распределения разностей $X(t + \tau) - X(t)$ не зависят от t :

$$p(x, t \leftarrow y, u) = p(x - y, t - u \leftarrow 0, 0) \equiv p(x - y, t - u).$$

Леви называет такие процессы *линейными*, отмечая, что среди них «существуют процессы и отличные от броуновского» [8, с. 81].

3.2.6. Однородный процесс называется *стохастически (слабо) непрерывным*, если

$$\int_{|x| > \varepsilon} p(x, \tau) dx \rightarrow 0$$

при $\tau \downarrow 0$ и любом $\varepsilon > 0$.

Приведем наиболее распространенные определения диффузионного процесса (броуновского движения).

3.2.7. *Броуновское движение* $\{X(t), t \geq 0\}$ может быть определено как однородный процесс с переходной плотностью $p(x, t)$, являющейся фундаментальным решением параболического дифференциального уравнения [9, с.319].

3.2.8. *Броуновским движением* или *процессом Винера-Башелье* называют начинающийся в начале координат процесс, с независимыми приращениями, имеющими нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, пропорциональной t . Винером и Леви было показано, что траектории такого процесса с вероятностью 1 непрерывны и что это свойство выделяет этот процесс из более широкого класса безгранично-делимых процессов [10, с.212].

3.2.9. *Винеровский процесс (броуновское движение)* есть однородный процесс с независимыми приращениями и непрерывными траекториями [11, с.38], то есть:

- а) при $0 < t_1 < t_2 < \dots$ случайные величины $X(t_1), X(t_2) - X(t_1), \dots$ независимы;
- б) $X(t + \tau) - X(t)$ не зависит от t ;
- в) $\lim_{\tau \rightarrow 0} P(|X(t + \tau) - X(t)| \geq \varepsilon) / \tau = 0$ при $\tau \rightarrow 0$ и всех $\varepsilon > 0$ (*условие Линдберга*).

Нетрудно видеть (свойство а)), что винеровский процесс является марковским: если приращение $X(t_n) - X(t_{n-1})$ не зависит от остальных приращений $X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}), \dots, X(t_1) - X(0)$, то оно не зависит и от

самих значений $X(t_{n-2}), \dots, X(0)$, а, следовательно, и $X(t_n)$ при заданном $X(t_{n-1})$ не зависит от всех предыдущих значений $X(t_{n-2}), \dots, X(0)$. Свойство б) обеспечивает однородность процесса, а при равномерном разбиении времени – и одинаковость их распределений. Таким образом, два положения а) и б) подводят нас к ЦПТ. Остается «последний штрих», и он дается третьим свойством – в) – непрерывностью траекторий. Это свойство, впрочем, может быть заменено заданием нормального распределения траекторий [12, с. 17], заданием линейного закона возрастания дисперсии со временем или просто требованием *конечности дисперсии*. Ее линейная зависимость от времени возникает в результате независимости приращений, а нормальный закон следует из центральной предельной теоремы. Определение **3.2.9**, таким образом, может быть переписано в следующем эквивалентном виде.

3.2.10. Винеровский процесс (W-процесс) есть однородный процесс с *конечной дисперсией*.

3.3 Автомоделность и устойчивость

На первый взгляд, нет ничего общего между динамическим типом движения, когда частица движется по гладкой кривой (например, прямой) в пространстве, и стохастическим типом, когда траектория представляет собой чрезвычайно нерегулярную, всюду изломанную линию (пример – броуновская траектория). Однако, это общее, по крайней мере между прямой и броуновской кривой есть. Для обоих типов движения нет больших и малых времен, *они автомодельны*. Прямая остается прямой на всех масштабах, как и броуновская траектория остается броуновской.

Автомоделность (самоподобие, масштабная инвариантность, скейлинг – это все синонимы автомодельности) – особая симметрия системы, состоящая в том, что изменение масштабов одних переменных может быть скомпенсировано преобразованием масштабов других [13, с. 8, с. 351]. Постоянная H , называемая *показателем Херста*, определяет порядок автомодельности.

В терминах случайной переменной $X(t)$ свойство автомодельности формулируется в виде

$$X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1),$$

или

$$X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t),$$

при $a > 0$ и любом фиксированном t . Вообще, случайный процесс $\{X(t), T\}$ называется автомодельным, если автомодельны распределения

всех его конечномерных векторов:

$$(X(at_1), \dots, X(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X(t_1), \dots, a^H X(t_n)).$$

Для автомоделности же однородного марковского процесса достаточно автомоделности одномерного распределения.

Автомоделность одновременной плотности распределения $p(x, t)$ выражается соотношением

$$p(x, t) = t^{-H} p(xt^{-H}, 1).$$

В баллистическом движении со скоростью v

$$X(t) = vt$$

и

$$X(at) = avt = a^H X(t), \quad H = 1.$$

В представлении плотности распределения $p(x, t) = \delta(x - vt)$ мы имеем

$$p(x, t) = \delta(x - vt) = \delta((x/t - v)t) = t^{-1} \delta(x/t - v) = t^{-H} p(xt^{-H}, 1), \quad H = 1.$$

В броуновском движении с коэффициентом диффузии K

$$X(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{2Kt} G$$

и

$$X(at) \stackrel{d}{=} \sqrt{2Kat} G = a^H X(t), \quad H = 1/2.$$

В представлении плотности

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-x^2/4Kt} = t^{-H} p(xt^{-H}, 1), \quad H = 1/2.$$

На самом деле существует целое семейство автомоделных процессов, по отношению к которому баллистическое и броуновское движения оказываются частными случаями.

Определим теперь L -процесс как однородный марковский процесс с автомоделным одномерным распределением

$$p(x, t) = t^{-1/\alpha} g^{(\alpha)}(xt^{-1/\alpha}),$$

где $\alpha = 1/H$, а $g^{(\alpha)}(x)$ – неизвестная пока плотность распределения. Таким образом, переход от **3.2.10** к L -процессу осуществляется *заменой условия конечности дисперсии требованием автомоделности*.

Очевидно, что такая замена не может привести к сужению класса рассматриваемых процессов: броуновское движение удовлетворяет этому условию и остается в классе L с $\alpha = 2$. Появятся ли при этом какие-то новые процессы? Ответ на этот вопрос связан с тем, существуют или нет отличные от гауссова распределения $p(x, t)$ L -процесса, удовлетворяющие условию автомодельности.

Рассмотрим два момента времени: t и $t + \tau$. Случайные координаты L -процесса частицы в эти моменты связаны соотношением

$$X(t + \tau) = X(t) + X(\tau).$$

При условии $X(0) = 0$ случайные величины $X(t)$ и $X(\tau)$ являются приращениями процесса в непересекающихся интервалах $(0, t)$ и $(t, t + \tau)$ и, стало быть, независимы. Плотность распределения их суммы дается сверткой плотностей слагаемых:

$$p(x, t + \tau) = p(x, t) * p(x, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x - x', t)p(x', \tau)dx'.$$

Удобно от плотностей перейти к характеристическим функциям

$$\tilde{p}(k, t) = \langle \exp\{ikX(t)\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p(x, t) dx,$$

для которых операция свертки превращается в произведение

$$\tilde{p}(k, t + \tau) = \tilde{p}(k, t) \tilde{p}(k, \tau),$$

а условие автомодельности принимает вид

$$\tilde{p}(k, t) = \tilde{g}^{(\alpha)}(kt^{1/\alpha}).$$

Эти соотношения приводят к функциональному уравнению

$$\tilde{g}^{(\alpha)}(k(t + \tau)^{1/\alpha}) = \tilde{g}^{(\alpha)}(kt^{1/\alpha}) \tilde{g}^{(\alpha)}(k\tau^{1/\alpha}),$$

определяющему класс *строго устойчивых законов*, называемых далее, для краткости, просто устойчивыми. Характеристические функции $\tilde{g}^{(\alpha)}(k)$ выражаются в элементарных функциях и могут быть записаны в нескольких формах.

3.4 Устойчивые распределения

3.4.1 Характеристические функции

Как отмечалось выше, винеровский процесс (в смысле определения 4.4) входит в класс L -процессов. Он характеризуется нормальным распределением с плотностью

$$g^{(2)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4)$$

и характеристической функцией

$$\tilde{g}^{(2)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(x; 2) dx = \exp(-k^2).$$

Чтобы найти характеристические функции остальных членов этого семейства, введем *вторую характеристику*

$$\psi^{(\alpha)}(k) = \ln \tilde{g}^{(\alpha)}(k),$$

для которой свойство устойчивости эквивалентно аддитивности

$$\psi^{(\alpha)}(c_1 k) + \psi^{(\alpha)}(c_2 k) = \psi^{(\alpha)}(ck),$$

где

$$c = (c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}.$$

Распространяя это соотношение на сумму произвольного числа n одинаково распределенных слагаемых ($c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$), получим

$$n\psi^{(\alpha)}(k) = \psi^{(\alpha)}(n^{1/\alpha} k).$$

Согласно свойству

$$\psi^{(\alpha)}(-k) = [\psi^{(\alpha)}(k)]^*,$$

(здесь * означает комплексное сопряжение) достаточно определить функцию $\psi^{(\alpha)}(k)$ для положительных значений аргумента $k > 0$. Учитывая ее непрерывность в окрестности начала координат и вытекающее из определения характеристической функции условие

$$\psi^{(\alpha)}(0) = 0,$$

приходим к равенству

$$|\psi^{(\alpha)}(k)| = \text{const} \cdot k^\alpha, \quad (k > 0, \alpha > 0),$$

из которого следует, что

$$\psi^{(\alpha)}(k) = -k^\alpha [c_0 - ic_1].$$

Характеристическая функция удовлетворяет условию

$$|\tilde{g}(k)| \leq 1,$$

поэтому

$$\operatorname{Re} \psi^{(\alpha)}(k) \leq 0,$$

и вещественная постоянная c_0 должна быть положительной. С другой стороны, из условия

$$\tilde{g}''(0) = -\langle S^2 \rangle$$

(здесь S – случайная величина с характеристической функцией $\tilde{g}(k)$) следует, что

$$[\psi^{(\alpha)}]''(0) = -\langle S^2 \rangle + \langle S \rangle^2 \equiv -DS \leq 0.$$

Вычислив вторую производную,

$$[\psi^{(\alpha)}(k)]'' = -[c_0 - ic_1]\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2},$$

и устремив $k \rightarrow 0$, можно убедиться, что при $\alpha = 2$ дисперсия конечна (вследствие вещественности последней постоянная c_1 должна быть равна нулю), при $\alpha < 2$ она бесконечна (в этом случае величина c_1 роли не играет), и при $\alpha > 2$ предельное значение производной равно нулю. Последнее означает, что второй момент функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx = 0.$$

Для не сосредоточенного в нуле распределения это может означать только, что произведение $x^2 g(x)$ является знакопеременным, и стало быть, $g(x)$ не является плотностью вероятности. Таким образом, область допустимых значений параметра α есть $(0, 2]$.

Постоянные c_0 и c_1 могут быть представлены в нескольких формах. В одной из них

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2),$$

где второй вещественный параметр $\beta \in [-1, 1]$ характеризует асимметрию распределения. Таким образом, характеристическая функция одномерной устойчивой плотности на положительной полуоси имеет вид:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp\{-k^\alpha [1 - i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)]\}, \quad k > 0.$$

Аналогичные вычисления для отрицательной полуоси дают

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp\{-(-k)^\alpha [1 + i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)]\}, \quad k < 0.$$

Объединяя эти формулы в одну, получим:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp\{-|k|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) \operatorname{sign} k]\}, \quad -\infty < k < \infty. \quad (\text{A})$$

Это – стандартное представление устойчивой характеристической функции в форме A .

Часто используется представление в форме C , получаемое введением в показатель экспоненты масштабного множителя, подобранного таким образом, чтобы характеристическая функция приняла вид

$$\tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp\{-|k|^\alpha \exp[-i(\theta\alpha\pi/2) \operatorname{sign} k]\}. \quad (\text{C})$$

Здесь $\alpha \in (0, 2]$ – характеристический показатель устойчивого закона, а $\beta \in [-1, 1]$ и $\theta \in [-\theta_\alpha, \theta_\alpha]$, $\theta_\alpha = \min\{1, 2/\alpha - 1\}$ – параметры асимметрии.

Задаваемые этими характеристическими функциями устойчивые случайные величины будем обозначать через $S^{(\alpha, \beta)}$ и $S(\alpha, \theta)$ соответственно.

3.4.2 Устойчивые распределения как предельные

Открытие Полем Леви класса устойчивых распределений, возможно, было одним из самых крупных событий в теории вероятностей XX века. Они освободили ЦПТ от ограничения, налагаемого требованием конечности дисперсии, и открыли возможность суммирования случайных величин с бесконечными дисперсиями. Оказалось, что если только существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение нормированной суммы $(\sum_{j=1}^n X_j - A_n) / B_n$ при $n \rightarrow \infty$ и подходящим образом выбранных последовательностях A_n и $B_n > 0$, то это распределение *обязательно будет устойчивым*. При этом $B_n = h(n)n^{1/\alpha}$, где $h(n)$ – медленно меняющаяся функция (типа логарифма или какой-нибудь его степени), а α – характеристический показатель. Если для случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ можно подобрать такие A_n и B_n , то говорят, что X *принадлежит области притяжения устойчивого закона*. В противном случае она не принадлежит области притяжения никакого закона: *только устойчивые законы обладают областями притяжения*.

Чтобы проверить, принадлежит ли области притяжения случайная величина X , надо, прежде всего, вычислить дисперсию или просто второй момент $\langle X^2 \rangle$. Если он конечен, X находится в области притяжения

нормального закона. Если $\langle X^2 \rangle = \infty$, необходимо проверить асимптотику «хвостов» распределения X . Если оказывается, что

$$P(|X| > x) \sim h(x)x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то ответ положителен, если же асимптотика имеет иной вид, ответ отрицательный. Мы ограничимся далее лишь случаем «нормального» (не путать с гауссовым!) притяжения, когда $h(x) \rightarrow \text{const} > 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь известно, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона. Как узнать его параметры α и β (или θ)? Ответ на этот вопрос как раз и дает

Обобщенная предельная теорема (ОПТ). Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены и удовлетворяют условиям

$$P(X > x) \sim a_+ x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$P(X < -x) \sim a_- x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$0 < \alpha \leq 2$, $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$ и $a_+ + a_- > 0$. Тогда найдутся такие последовательности A_n и $B_n > 0$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left(\sum_{j=1}^n X_j - A_n \right) / B_n \stackrel{d}{\sim} S^{(\alpha, \beta)},$$

где $\beta = (a_+ - a_-)/(a_+ + a_-)$.

Разумеется, существует бесконечное множество последовательностей нормирующих коэффициентов A_n, B_n с одним и тем же асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$. В частности, они могут быть определены следующим образом ($a = \langle X \rangle$ и $c = a_+ + a_-$):

$$\text{при } \alpha = 2 \quad A_n = na, \quad B_n = \sqrt{cn \ln n},$$

$$\text{при } \alpha \in (1, 2) \quad A_n = na, \quad B_n = (\pi cn / [2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)])^{1/\alpha},$$

$$\text{при } \alpha = 1 \quad A_n = \beta cn \ln n, \quad B_n = \pi cn / 2,$$

$$\text{при } \alpha \in (0, 1) \quad A_n = 0, \quad B_n = (\pi cn / [2\Gamma(\alpha) \sin(\alpha\pi/2)])^{1/\alpha}.$$

3.4.3 Свойства устойчивых распределений

Приведем важнейшие свойства одномерных устойчивых распределений (в форме С).

1. Все устойчивые плотности одновершинны.
2. Дисперсии всех устойчивых распределений, кроме гауссова, бесконечны.
3. Средние значения устойчивых распределений с показателем $\alpha \leq 1$ не существуют.

4. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению инверсии:

$$g(x; \alpha, \theta) = g(-x; \alpha, -\theta).$$

5. Устойчивые плотности удовлетворяют соотношению двойственности: при $\alpha \geq 1$

$$g(x; \alpha, \theta) = x^{-1-\alpha} g(x^{-\alpha}; \alpha', \theta'),$$

где $\alpha' = 1/\alpha$, $\theta' = \alpha(1 + \theta) - 1$.

6. В начале координат функция распределения

$$G(x; \alpha, \theta) = \int_{-\infty}^x g(x'; \alpha, \theta) dx',$$

плотность и ее производная имеют следующие значения:

$$G(0; \alpha, \theta) = (1 - \theta)/2,$$

$$g(0; \alpha, \theta) = \pi^{-1} \Gamma(1 + 1/\alpha) \cos(\theta\pi/2),$$

$$g'(0; \alpha, \theta) = (2\pi)^{-1} \Gamma(1 + 2/\alpha) \sin(\theta\pi).$$

7. Если плотность распределения $g(x; \alpha, \theta)$ не является *крайней* (то есть $\theta \neq \pm\theta_\alpha$), то оба ее хвоста спадают по закону $|x|^{-\alpha-1}$ («тяжелые хвосты»):

$$g(\pm|x|; \alpha, \theta) \sim \frac{\Gamma(1 + \alpha)}{\pi} \sin[\alpha(1 \pm \theta)\pi/2] |x|^{-1-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty.$$

8. Для крайних плотностей, когда

$$\theta = \begin{cases} \pm 1, & \alpha < 1, \\ \pm(2/\alpha - 1), & \alpha > 1 \end{cases}$$

одна из приведенных выше формул теряет смысл: соответствующий хвост становится «коротким» с экспоненциально спадающей асимптотикой.

9. Как следует из формулы для $G(0; \alpha, \theta)$, положительным значениям коэффициента асимметрии θ соответствует сосредоточение большей доли вероятности на положительной полуоси, отрицательным значениям θ – на отрицательной полуоси. При $\alpha \leq 1$ $G(0; \alpha, 1) = 0$ и $G(0; \alpha, -1) = 1$, то есть крайние распределения становятся *односторонними*, сосредоточенными исключительно на положительной или отрицательной полуосях. При $\alpha \rightarrow 1$

$$G(x; \alpha, 1) \rightarrow G(x; 1, 1) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

и односторонние плотности становятся вырожденными:

$$g(x; 1, \pm 1) = \delta(x \mp 1).$$

10. Следующие устойчивые плотности представляются в элементарных функциях: распределение Гаусса

$$g(x, 2, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \exp(-x^2/4),$$

распределение Коши

$$g(x, 1, 0) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

и распределение Леви-Смирнова

$$g(x, 1/2, 1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x^3}} \exp(-1/4x).$$

11. Трансформанта Меллина от плотности на положительной полуоси

$$g(s; \alpha, \theta) \equiv \int_0^{\infty} g(x; \alpha, \theta) x^s dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s\alpha)}{\Gamma(\rho s)\Gamma(1-\rho s)}, \quad \rho = \frac{1+\theta}{2}.$$

12. Преобразование Лапласа односторонних распределений

$$g(\lambda; \alpha, 1) \equiv \int_0^{\infty} g(x; \alpha, 1) e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda^\alpha}, \quad \alpha \leq 1.$$

13. Характеристический показатель α в обеих формах А и С один и тот же, параметры асимметрии β и θ связаны формулой

$$\beta = \operatorname{tg}(\theta\alpha\pi/2)/\operatorname{tg}(\alpha\pi/2),$$

а сами случайные величины – соотношением

$$S(\alpha, \theta) \stackrel{d}{=} [\cos(\theta\alpha\pi/2)]^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

14. Удобство формы С, среди прочего, и в том, что при $\theta = 1$ и $\alpha \uparrow 1$, как это видно из свойства **12**

$$g(x; \alpha, 1) \rightarrow \delta(x-1).$$

В форме А распределение вероятностей при этих условиях уходит на бесконечность.

Мы пришли к устойчивым распределениям, рассмотрев сначала L -процессы, затем – последовательности нормированных сумм независимых

случайных величин, однако сами устойчивые (мы ограничиваемся везде лишь строго устойчивыми) распределения и определяемые ими случайные величины могут быть определены и непосредственно. Одно из таких определений имеет следующий вид.

15. Случайная величина S называется устойчивой с показателем $\alpha \in (0, 2]$, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n S_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} S,$$

где S_j – не зависящие от S и друг от друга случайные величины с одним и тем же α -устойчивым распределением.

3.4.4 Многомерные устойчивые распределения

Понятие устойчивости в смысле Леви легко обобщается на случайные векторы и соответствующие им многомерные распределения.

Случайный вектор $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d)$ называется устойчивым, если для любого n

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{S}_j \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} \mathbf{S}.$$

Характеристическая функция d -мерного устойчивого вектора имеет вид

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{k}) = \exp \left\{ - \int_{S_d} |\mathbf{k}\mathbf{s}|^\alpha [1 - i \operatorname{sign}(\mathbf{k}\mathbf{s}) \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)] \Gamma(ds) \right\},$$

где $\Gamma(ds)$ – конечная мера на сфере S_d единичного радиуса в рассматриваемом d -мерном пространстве, называемая *спектральной мерой*. Плотность

$$\begin{aligned} g_d^{(\alpha, \Gamma)}(\mathbf{x}) &= g_d^{(\alpha, \Gamma)}(x_1, \dots, x_d) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dk_d e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_d x_d)} \tilde{g}^{(\alpha, \Gamma)}(k_1, \dots, k_d) \end{aligned}$$

называется *многомерной устойчивой плотностью*.

Если спектральная мера равномерно распределена по сфере,

$$\Gamma(ds) = \operatorname{const} ds$$

эта плотность изотропна. Определим стандартную характеристическую функцию изотропного распределения формулой

$$\tilde{g}_d^{(\alpha, \Gamma_0)}(\mathbf{k}) \equiv \tilde{g}_d(\mathbf{k}, \alpha) = \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha), \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

Соответствующая ей плотность может быть представлена в виде однократного интеграла, содержащего функцию Бесселя:

$$g_d(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_{d/2-1}(s|\mathbf{x}|)^{1-d/2} s^{d-1} ds.$$

Для первых трех размерностей имеем

$$g_1(x, \alpha) = \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \cos(s|x|) ds,$$

$$g_2(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_0(s|\mathbf{x}|) s ds,$$

$$g_3(\mathbf{x}, \alpha) = (2\pi^2|x|)^{-1} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} \sin(s|\mathbf{x}|) s ds.$$

Как и в одномерном случае имеют место разложения в ряды:

$$\begin{aligned} g_d(\mathbf{x}, \alpha) &\equiv g_d(r, \alpha) = \\ &= \frac{1}{\pi} (r\sqrt{\pi})^{-d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma((\alpha n + d)/2) \Gamma(\alpha n/2 + 1)}{\Gamma(n+1)} \sin(\alpha n\pi/2) (r/2)^{-\alpha n}, \\ g_d(r, \alpha) &= (2/\alpha)/(2\sqrt{\pi})^{-d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma((2/\alpha)n + d/\alpha)}{\Gamma(n + d/2) \Gamma(n+1)} (r/2)^{2n}. \end{aligned}$$

Первый из них является сходящимся при $\alpha \in (0, 1)$ и асимптотическим при $\alpha \in [1, 2)$, второй, напротив, сходится при $\alpha \in [1, 2]$ и является асимптотическим при $\mu \in (0, 1)$.

Если спектральная мера сосредоточена в точках пересечения осей со сферой, компоненты S_1, \dots, S_d устойчивого вектора \mathbf{S} взаимно независимы.

Два важных обстоятельства следует отметить здесь. Во-первых, изотропность распределения влечет за собой независимость компонент только в случае $\alpha = 2$. При $\alpha < 2$ компоненты изотропно распределенного вектора не являются независимыми, а распределение с независимыми компонентами не является изотропным. Во-вторых, ввиду расходимости дисперсии обычная корреляционная техника анализа статистической связи компонент при $\alpha < 2$ неприменима.

3.4.5 Устойчивые плотности – экзотика или реальность?

Четверть века тому назад мне довелось принять участие в работе семинара Бориса Владимировича Гнеденко в Москве (в МГУ). Как-то я спросил его относительно перспектив применения негауссовых устойчивых законов в прикладных задачах. Он оценил их несколько скептически, подчеркнув, что бесконечность дисперсии при $\alpha < 2$ и отсутствие математического ожидания при $\alpha \leq 1$ являются естественными препятствиями применения этих законов в физике и других науках, по крайней мере, в тех задачах, в которых этим параметрам придается конкретный физический смысл. «Однако, в теоретико-вероятностном отношении открытие этих законов невозможно переоценить», добавил он, «поскольку они полностью исчерпывают класс всех возможных предельных распределений в схеме суммирования случайных величин». Так, или примерно так (за давностью времени я, конечно, не могу ручаться за абсолютную точность этих фраз) ответил мне соавтор А. Н. Колмогорова по одной из первых книг, посвященных почти полностью устойчивым распределениям [14].

Будучи физиком и выйдя на устойчивые законы по воле случая (в годы моей учебы в стандартных курсах теории вероятностей из устойчивых законов рассматривался лишь один – нормальный закон), я не мог внутренне смириться с такой оценкой, хотя и возразить на это Борису Владимировичу мне было нечего. Наивные мои рассуждения о судьбе устойчивых законов привели прежде всего к некоторому парадоксальному заключению: из бесконечного множества всех устойчивых законов лишь один – нормальный закон – обладает конечной дисперсией, у всех остальных она бесконечна. *Бесконечная дисперсия является нормой (в обычном, не математическом смысле) для всех устойчивых законов, кроме одного – гауссова закона*, по иронии судьбы называемого нормальным. С точки зрения всего «благородного семейства» гауссов закон со своей конечной дисперсией выглядит уродцем, этаким гадким утенком, альбиносом. Почему же нам он представляется нормальным? Почему он почти полностью овладел ситуацией в естественных и гуманитарных приложениях?

На этот, скорее психологический, чем математический вопрос невозможно ответить теоремой. Здесь уместнее был бы социологический опрос, но мне кажется, что в любом случае следующие три причины выплыли бы при опросе.

Первой, совершенно несущественной с чисто математической точки зрения, но чрезвычайно важной в практическом отношении *причиной является отсутствие простых аналитических, то есть, содержащих лишь известные элементарные функции выражений для плотностей*

или функций устойчивых распределений. Гауссова плотность в этом отношении – одно из немногих исключений. Другим исключением является распределение Коши, известное в электродинамике под названием естественной формы спектральной линии Лоренца

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

В ядерной физике эту форму имеет формула Брейта-Вигнера, описывающая поведение сечения ядерных реакций вблизи резонансов. Подобно гауссову, распределение Коши имеет симметричную колоколообразную форму, но на этом сходство и кончается. Дисперсия этого распределения бесконечна, а математическое ожидание существует лишь в смысле главного значения Коши. Большое впечатление на неспециалиста, впервые знакомящегося с этим распределением, оказывает то, что среднее арифметическое суммы случайных величин, распределенных по этому закону, имеет то же распределение, что и отдельное слагаемое. В обыденной терминологии это означает, что «статистическая погрешность» среднего арифметического не убывает с увеличением числа слагаемых – то есть, вообще ничего не происходит. И уже совсем экзотическим представляется *возрастание* «статистической погрешности» среднего арифметического n слагаемых с ростом n при характеристических показателях $\alpha < 1$. В случае несимметричных законов с такими показателями растут (чрезвычайно нерегулярно и неограниченно) и средние арифметические. К числу таких законов относится закон Леви-Смирнова – последний в списке выражающихся через элементарные функции устойчивых распределений, форма А которого имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2x}\right\} x^{-3/2} & , \quad x > 0, \\ 0 & , \quad x < 0. \end{cases}$$

Формула эта была получена М. Смолуховским и А. Эйнштейном в задаче о распределении случайного времени достижения броуновской частицей заданной точки (1915). В 1919 году в известной работе И. Хольцмарка [15], рассматривавшего влияние электрического поля окружающих атом соседей на его излучение, было найдено сразу три трехмерных изотропных устойчивых плотности с характеристическими показателями $3/2$ (ионизированный газ, по существу – плазма), 1 (газ нейтральных молекул с отличным от нуля дипольным моментом) и $3/4$ (газ нейтральных молекул с нулевым дипольным и отличным от нуля квадрупольным моментами). Впервые на физической арене появляются устойчивые законы, не выражаемые в элементарных функциях. В сороковых годах они успешно

используются С. Чандрасекаром и Дж. Нейманом для внедрения негауссовой статистики в астрофизику: флуктуации гравитационного поля случайно распределенных в пространстве звезд подчиняются распределению Хольцмарка, не сводимому к распределению Гаусса [16].

Освоение физиками *terra incognita* за пределами гауссова поля осуществлялось медленно, но неуклонно. В 1944 году вышла работа Л. Д. Ландау [17], в которой случайные потери энергии заряженной частицы, проходящей слой вещества заданной толщины рассматривались как сумма случайного (с пуассоновским распределением) числа независимых случайных слагаемых – потерь энергии в отдельных столкновениях Δ с одинаковой плотностью $w(x)$. Разумеется, величина Δ ограничена максимально возможной в одном столкновении потерей Δ_{\max} , но, рассматривая быстрые частицы, автор пренебрег этим ограничением и использовал асимптотику

$$P\{\Delta > x\} = \int_x^{\infty} w(x)dx \propto x^{-1}.$$

В результате он получил характеристическую функцию и привел результаты численных расчетов для устойчивой плотности с $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ (отметим, что она не является строго устойчивой). Впрочем, устойчивых законов Лев Давыдович, несерьезно (по слухам) относившийся к теории вероятностей, не знал и все аналитические выкладки воспроизвел самостоятельно, хотя в этой части работы достаточно было бы сослаться на ОПТ. Тринадцать лет спустя П. В. Вавилов вернулся к этой задаче с целью учесть упомянутое ограничение $\Delta \leq \Delta_{\max}$. Он установил, что в этом случае начиная с некоторой толщины распределение потерь практически совпадает с гауссовым, но при существенно меньших значениях совпадает с распределением Ландау [18].

1955-56-м годах А. С. Монин приходит к трехмерному изотропному устойчивому закону с показателем $\alpha = 2/3$ в задаче о диффузии частиц в турбулентной среде [19-20]. Примерно к этому же времени относятся и работа И. М. Лифшица [21], касающаяся флуктуаций температуры среды, подверженной действию ядерных излучений. Найденное в ней распределение является одномерным предельно асимметричным («крайним») устойчивым распределением с показателем $\alpha = 5/3$.

Любопытно отметить, что в перечисленных выше работах устойчивые законы не были опознаны авторами, они выводились каждый раз заново, без каких-либо ссылок на вероятностные источники. Это можно считать первым периодом экспансии устойчивых законов в физику, в течение которого был успешно преодолен барьер «неэлементарности» устойчивых плотностей: распределения Хольцмарка, Ландау, Лифшица, Монина уже не «элементарны».

Отсутствие апелляций к теории вероятностей в перечисленных выше работах вскрывает *вторую причину замедленной диффузии устойчивых законов в физику и другие науки: незнание теории устойчивых законов*. Поразительно, но мой личный опыт общения даже с очень известными физиками, работавшими (и работающими сейчас) в области статистической физики и кинетики, физики высоких энергий, физики плазмы, астрофизики показывает, что многие из них даже представления не имеют о существовании такой теории (впрочем, в последний десяток лет положение изменяется).

Пожалуй, первой работой прикладного характера, содержащей явную ссылку на устойчивые законы, была работа Р. Л. Добрушина (1958), посвященная распространению и детектированию радиоволн [25]. Пять лет спустя появляется работа [26], написанная специалистом по методам Монте-Карло М. Калосом также использующим термин «устойчивые законы» и ссылающимся на книгу Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [14]. В упрощенной постановке задача о статистической погрешности локальной оценки потока излучения в заданной точке выглядит как нахождение распределения выборочного среднего $\hat{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n R_j^{-2}$, где R_j – расстояние от начала координат до случайной точки, равномерно распределенной в трехмерном шаре с единичным, скажем, радиусом. Иначе говоря, речь идет о выборочном среднем

$$\hat{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j,$$

где Z_j – независимые случайные величины с плотностью

$$p(z) = (3/2)z^{-5/2}, \quad 1 \leq z < \infty,$$

принадлежащие области притяжения устойчивого закона с показателем $\alpha = 3/2$ и асимметрией $\beta = 1$. Статистика \hat{a}_n является несмещенной оценкой плотности потока в начале координат, но расходимость дисперсии уменьшает скорость сходимости и возникает искушение окружить начало координат непроницаемой для случайных точек сферой малого радиуса, чтобы ценой некоторого смещения оценки обеспечить конечность дисперсии и нормальную скорость сходимости оценки к математическому ожиданию.

Такой способ решения проблемы довольно распространен в теоретической физике, особенно в электродинамике и квантовой теории поля. Введен специальный термин *перенормировка*, означающий процедуру устранения ультрафиолетовых расходимостей, которые возникают при разложении квантовополевых величин в формальные степенные ряды по константе связи. Усечение пределов соответствующих интегралов (то есть

замена бесконечного предела интегрирования конечным) является самым простым методом перенормировки. Возможно, студентам, изучающим эти методы в двадцать с небольшим лет, и не видится здесь никакой проблемы – «так написано в учебнике». Но мне это представлялось противоестественным. И не одному мне: с несказанной радостью понимания прочел я в книге «Теоретическая физика XX века», посвященной В. Паули, слова известного теоретика: «Господа, если какая-то величина обращается в бесконечность, то это еще не основание для того, чтобы ей пренебрегать».

Возникает, таким образом, *третья причина – бесконечность дисперсии* (не говоря уж о бесконечности математических ожиданий у подмножества устойчивых законов). Трактую (по инерции) дисперсию как меру погрешности результата (а в некоторых случаях – как энергию) неискушенные в теории вероятностей физики (как теоретики, так и экспериментаторы) вряд ли сразу примут новый «символ веры». Справедливости ради, однако, надо отметить, что с открытием ведущей роли устойчивых законов в процессах перколяции (просачивания), аномальной диффузии, в теории неупорядоченных структур – фракталов, полимерных молекул, крупномасштабных неоднородностей Вселенной и проч. – возросло число работ, сопровождаемых математическими приложениями с описанием свойств устойчивых законов [27-29].

Важнейшим признаком принадлежности случайной величины к области притяжения устойчивого закона с $\alpha < 2$ является наличие у плотности, по крайней мере, одного «длинного» хвоста, то есть, хвоста со степенным законом убывания плотности $\propto |x|^{-\alpha-1}$, $0 < \alpha < 2$. Это обстоятельство существенным образом отличает ситуацию с $\alpha < 2$ от нормального случая с $\alpha = 2$ при анализе эмпирических данных, так привычного экспериментаторам-профессионалам.

Представим себе, что мы имеем дело с гистограммой (с чего, конечно, начинается всякий статистический анализ) и стараемся «на глаз» определить параметры эмпирического распределения. Если кривая по форме подобна гауссовой, то, пытаясь оценить среднее и дисперсию распределения, мы обращаемся к центральной части гистограммы, наиболее богатой статистически. Если же есть основания считать распределение α -устойчивым с $\alpha < 2$, то для определения главного параметра – характеристического показателя α , нужно обратиться к хвостам эмпирического распределения, более бедным статистически и всегда ограниченным. Ограниченность эмпирических распределений очевидна: в случайной выборке X_1, \dots, X_n всегда найдутся наименьшие и наибольшие числа, между которыми заключены все остальные. Увеличение объема выборки может раздвинуть эти границы, обогащение статистикой хвостов может выявить их степенной характер на конечном интервале значений (x_1, x_2) , но *никогда не удастся доказать, что хвост эмпирического распределения*

сохраняет степенной характер до бесконечности: точка x_2 будет отодвигаться в сторону больших значений с увеличением объема выборки, но всегда останется на конечном расстоянии от x_1 .

С другой, теоретической стороны всегда находятся основания для того, чтобы предсказать ограниченность возможных значений случайной величины (скажем, в системе частиц с полной энергией E кинетическая энергия отдельной частицы не может превысить E и т. д.). Теоретическая ограниченность распределений в сочетании с эмпирической недоказуемостью длинных хвостов может породить (и часто порождает) мысль о физической неприемлемости устойчивых распределений, их непригодности для описания естественных систем и процессов. Действительно, усечение распределения слагаемого X принадлежащего к области притяжения негауссова устойчивого закона *на сколь угодно большом расстоянии от начала координат* перебрасывает его в ОП гауссова закона, радикально меняя вид предельного распределения. Альтернатива «нет ограничения – есть ограничение» решается, казалось бы, в пользу последнего вывода, приводящего к нормальному предельному распределению.

Вернемся однако к М. Калосу. Обсуждая влияние усечения на результат, он замечает, что, несмотря на конечность дисперсии потребуется выборка очень большого объема, чтобы предельное распределение стало нормальным. «Вычисление характеристической функции... подтверждает интуитивное представление о том, что усечение не поможет нам, пока ожидаемое число попаданий в отрезаемую часть распределения мало. Иными словами, если усечение приносит какую-то пользу, оно должно оказывать заметное влияние на средний результат» ([26], с. 113).

В свое время автору этой заметки вместе с Александром Владимировичем Лапой (моим давним другом, ныне профессором Челябинского госуниверситета) удалось приблизить подход М. Калоса к реальным вычислительным задачам с учетом многократного рассеяния излучения в среде, анизотропии рассеяния, зависимости сечений взаимодействия от энергии, наличия границ раздела сред с различными характеристиками, использования статистических весов при моделировании траекторий частиц, вычисления различных типов локальных функционалов. На основе теории устойчивых законов был разработан алгоритм оценки статистической погрешности в условиях бесконечной дисперсии [30]. Сравнение получаемых в ходе расчетов распределений с предельными устойчивыми распределениями показало хорошее согласие. Не сразу, лишь некоторое время спустя, мы вдруг обратили внимание на то обстоятельство, что в действительности ЭВМ оперировала с усеченными распределениями, поскольку существует максимальное число, ограничивающее множество чисел, с которыми работает машина. В процессе расчетов ЭВМ, однако, ни разу не остановилась. Это означает, что она просто *не заметила*,

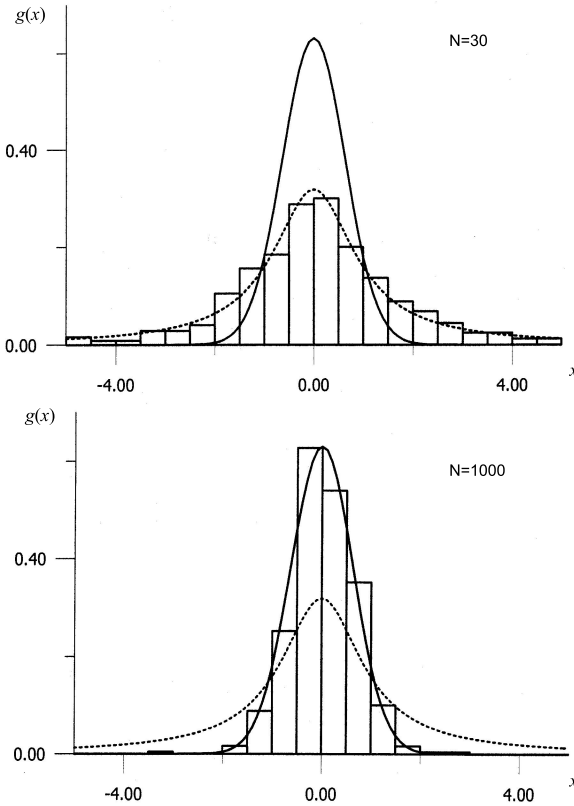


Рис. 3.1: Сопоставление распределения суммы N усеченных случайных слагаемых (гистограмма) с распределениями Коши (---) и Гаусса (—).

что имеет дело с неограниченным распределением. В действительности, критерий согласия должен был бы подтвердить стремление результата к гауссовому закону, поскольку мы находимся в области притяжения обычной центральной предельной теоремы. Но дело не в том, что результат распределен не по закону Гаусса, это могло бы быть простым следствием недостаточно большого числа слагаемых в сумме. Дело в том, что он оказался распределенным по негауссову устойчивому закону, хотя слагаемые принадлежат области притяжения гауссова закона. Отметим, что аналогичный вывод следует и из упоминавшейся выше работы П. В. Вавилова.

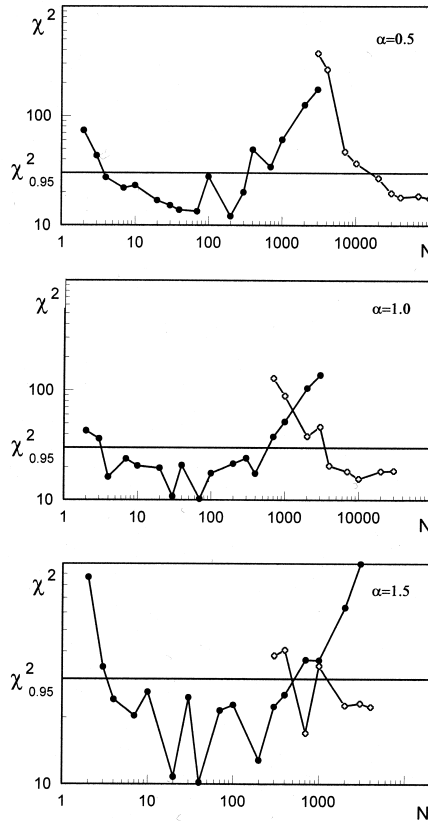


Рис. 3.2: Переход распределения суммы N усеченных случайных величин от устойчивого (\bullet) к нормальному (\circ) распределениям по χ^2 -критерию.

Более подробные исследования показали, что при сложении случайных величин Z_i распределение, которых получено из устойчивого усечением длинных хвостов на больших расстояниях, наблюдается следующая картина. При малых n распределение суммы $\sum_{i=1}^n Z_i$ зависит от начального ($n = 1$) распределения и с ростом n эволюционирует в сторону устойчивого распределения, забывая о начальном и не ощущая еще усеченности слагаемых. Далее, существует интервал (n_1, n_2) , внутри которого χ^2 -критерий не отличает распределения суммы от устойчивого, ширина этого интервала возрастает по мере удаления границы усечения слагаемых. За пределами этой области распределение суммы снова начинает меняться: сказывается влияние усечения. При $n > n_3$, когда вблизи

порога усечения набирается уже достаточная статистика, распределение суммы приходит в нормальное и далее остается таковым.

Рис. 3.1 и 3.2 весьма убедительно демонстрируют обсуждаемую закономерность. На рис. 3.1 показано распределение суммы одинаково распределенных независимых случайных слагаемых с симметричной плотностью, имеющей длинные хвосты порядка $\alpha - 1$, $\alpha = 1$, симметрично усеченной на общую вероятность $P_{tr} = 10^{-4}$ с последующей перенормировкой. Хорошо видно, что при числе слагаемых 30 распределение этой суммы (после надлежащей нормировки, разумеется) согласуется с распределением Коши, а при числе 1000 распределение таких же слагаемых совпадает уже с распределением Гаусса. Динамика этого процесса во времени при трех значениях α , показана на рис. 3.2, где в качестве индикатора согласия распределения использован χ^2 -критерий.

Таким образом, *устойчивые законы играют, точнее, могут играть роль промежуточной асимптотики при суммировании ограниченных случайных величин с ярко выраженными хвостами степенного типа*, а это – уже вполне приемлемое оправдание применения их в физических и иных задачах. Любопытно отметить, что рассматриваемая ситуация попадает в русло концепции промежуточной асимптотики, начало которой положила замечательная работа А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [31], а дальнейшее развитие осуществлялось Г. И. Баренблаттом, Я. Б. Зельдовичем [32] и др. Заметим также возросший в последние годы интерес и к самим усеченным степенным распределениям [33-37].

3.5 L-процессы и дробные производные

3.5.1 Движение Леви

Вернемся к случайным процессам. Мы ввели в рассмотрение L-процесс как однородный автомодельный процесс, его случайное значение в момент времени t

$$X^{(\alpha, \beta)}(t) \stackrel{d}{=} t^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

Семейство таких процессов названо в [9] *устойчивыми процессами*, однако в [38] предлагается оставить это название за процессами, конечномерные распределения которых являются многомерными устойчивыми (см. п. 3.4.), а для рассматриваемых процессов использовать следующую терминологию.

Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется (стандартным) α -устойчивым движением Леви с параметрами $0 < \alpha \leq 2$, $-1 \leq \beta \leq 1$, если

- 1) $X(0) = 0$ почти наверное;
- 2) $X(t)$ является процессом с независимыми приращениями;
- 3) $X(t + \tau) - X(t) \stackrel{d}{=} \tau^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}$ при любых t и τ .

Для краткости мы будем называть его $L^{(\alpha, \beta)}$ -процесс, тогда винеровский процесс обозначится как $L^{(2, 0)}$ -процесс.

Характеристическая функция состояния L -процесса $X^{(\alpha, \beta)}(t)$ в момент t , имеет вид ($\alpha \neq 1$)

$$\tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t) = \langle \exp\{ikX^{(\alpha, \beta)}(t)\} \rangle = \exp\{-t|k|^\alpha [1 - i\beta t g(\alpha\pi/2) \text{sign } k]\}.$$

Непосредственно отсюда следует и уравнение, которому она удовлетворяет

$$\partial \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t) / \partial t = -|k|^\alpha [1 - i\beta t g(\alpha\pi/2) \text{sign } k] \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t).$$

Нетрудно видеть, что при $\alpha = 2$ мы имеем здесь Фурье-образ обычного диффузионного уравнения. При $\alpha < 2$ сомножитель в правой части может быть преобразован к виду

$$-|k|^\alpha [1 - i\beta t g(\alpha\pi/2) \text{sign } k] = A(-ik)^\alpha + B(ik)^\alpha,$$

означающему появление в уравнении для оригинала плотности $p^{(\alpha, \beta)}(x, t)$ дробных операторов $-\infty D_x^\alpha$ и ${}_x D_\infty^\alpha$:

$$\partial p^{(\alpha, \beta)}(x, t) / \partial t = L^{(\alpha, \beta)} p^{(\alpha, \beta)}(x, t), \quad L^{(\alpha, \beta)} \equiv A -\infty D_x^\alpha + B {}_x D_\infty^\alpha,$$

$$A = -\frac{\beta + 1}{\cos(\alpha\pi/2)}, \quad B = \frac{\beta}{\cos(\alpha\pi/2)}.$$

Подчеркнем, что дробный характер операторов явился результатом автомодельности процесса, и посмотрим, какие новые свойства траекторий процесса появляются при этом.

3.5.2 Траектории движения Леви

Чтобы яснее увидеть различие между траекториями W -процесса и L -процесса, рассмотрим поведение функции

$$Q(\tau, \Delta) \equiv P(|X(t + \tau) - X(t)| \geq \Delta) / \tau$$

при $\tau \rightarrow 0$. Для W -процесса

$$Q_W(\tau, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau^{3/2}}} \int_{\Delta}^{\infty} e^{-x^2/4\tau} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} \int_{\Delta/\sqrt{\tau}}^{\infty} e^{-z^2/4} dz.$$

Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталья, получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Q_W(\tau, \Delta) = 0,$$

отражающее непрерывность траекторий винеровского процесса. В случае же L-процесса с $\alpha < 2$

$$Q_W(\tau, \Delta) = P\left(|S^{(\alpha, \beta)}| \geq \Delta \tau^{-1/\alpha}\right) / \tau.$$

Известно, что

$$P\left(|S^{(\alpha, \beta)}| \geq x\right) \propto x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

так что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} Q_W(\tau, \Delta) = \text{const} \Delta^{-\alpha} > 0, \quad \tau \rightarrow 0.$$

При $\alpha < 2$ траектории L^(α, β)-процесса *не являются более непрерывными* – в этом их главное отличие. Амплитуда скачков (разрывов) зависит от α : чем меньше α , тем больше разрывы. Таким образом, среди L^(α, β)-процессов L^(2,0) – единственный, обладающий непрерывными траекториями.

Ширина диффузионного пакета при $\alpha < 2$ растет со временем быстрее, чем \sqrt{t} , а именно – пропорционально $t^{1/\alpha}$. При этом форма его описывается негауссовым устойчивым законом. Дисперсия бесконечна, но ничто не мешает воспользоваться любой другой мерой ширины – например, шириной на половине высоты пика, или шириной интервала, содержащего фиксированную вероятность. Мы пришли к *стохастической модели супердиффузии* подробно рассмотренной в [39, 40]. Ярким примером процесса супердиффузии является распространение резонансных фотонов в плазме.

Заметим, что семейство L(α, θ) процессов содержит еще два процесса с непрерывными траекториями: это вырожденные процессы L(1, ± 1), траектории которых представляют собой прямые линии в пространстве координаты-время, описывающие движение частицы из начала координат с постоянной скоростью (баллистический режим).

Наглядное представление о траекториях L-процессов с тремя разными α и $\theta = 0$ дает рис. 3.3, на которых представлены результаты моделирования методом Монте-Карло.

По аналогии с обычной диффузией введем положительную постоянную – «коэффициент диффузии» K соотношением $X^{(\alpha, \beta)}(t) \stackrel{d}{=} (Kt)^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}$. Уравнение для характеристической функции такого процесса имеет вид:

$$\partial p^{(\alpha, \beta)}(x, t) / \partial t = K L^{(\alpha, \beta)} p^{(\alpha, \beta)}(x, t).$$

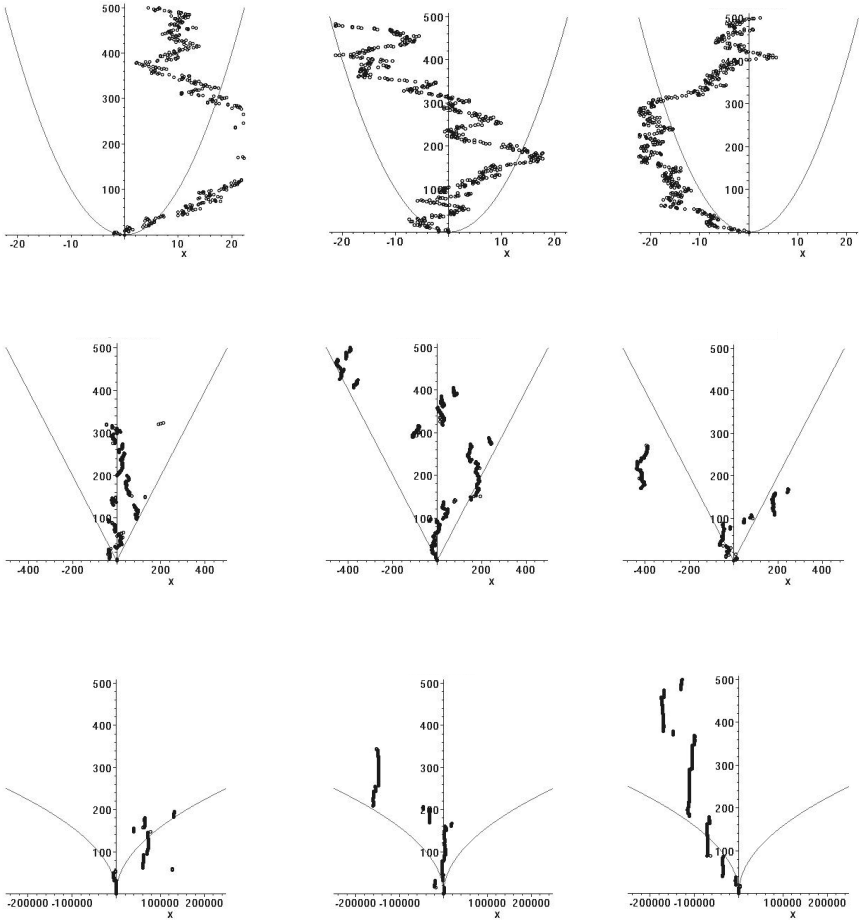


Рис. 3.3: Типичные траектории $L(\alpha, 0)$ -процессов в переменных x, t ($\alpha = 2, 1, 1/2$ – сверху вниз). Пунктир показывает изменение ширины диффузионного пакета со временем.

3.5.3 Процесс Орнштейна-Уленбека

Добавив в левую часть диффузионного уравнения слагаемое

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, t)p(x, t)),$$

мы получаем уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК). Его дробный аналог имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x, t)p(x, t)) = K\mathbf{L}^{(\alpha, \beta)}p(x, t).$$

Решение дробного уравнения ФПК находится по аналогии с решением обычного (см., например [41]). Мы найдем его здесь для случая $\mu(x, t) = -\nu x$, допускающего две физические интерпретации. Одна из них – гармонический осциллятор под действием потока случайных импульсов, вторая – эволюция скорости частицы в вязкой среде, испытывающей импульсы силы со стороны «тяжелых молекул». Характеристическая функция этого распределения (при $K = 1$ и $\nu = 1$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + k \frac{\partial \tilde{p}}{\partial k} = -|k|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) \operatorname{sign}k] \tilde{p}^{(\alpha, \beta)}(k, t).$$

Его решение имеет вид

$$\tilde{p}(k, t) = \exp \left\{ -|k|^\alpha [1 - e^{-\alpha t}] M / \alpha - i k e^{-t} x_0 \right\},$$

где x_0 – начальная координата процесса, а

$$M = 1 - i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) \operatorname{sign}k.$$

Обратное преобразование Фурье дает

$$p(x, t) = \frac{\alpha^{1/\alpha}}{(1 - e^{-\alpha t})^{1/\alpha}} g^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{(x - x_0 e^{-t}) \alpha^{1/\alpha}}{(1 - e^{-\alpha t})^{1/\alpha}} \right).$$

При $t \rightarrow \infty$ получаем стационарное решение

$$p(x, \infty) = \alpha^{1/\alpha} g^{(\alpha, \beta)}(x \alpha^{1/\alpha}).$$

В работе [42] это решение получено непосредственно из стационарного ($\partial \tilde{p} / \partial t = 0$) уравнения. Представленный здесь результат является более общим он показывает и закон релаксации системы к равновесному распределению, в качестве которого выступает теперь устойчивый (с параметрами α и β) закон. Впрочем, при $\alpha = 2$ мы получаем известный результат для процесса Орнштейна-Уленбека.

3.5.4 Дробная стохастика и шумы

Другой способ введения эрдитарности в автомодельные процессы основан на использовании стохастических интегралов по случайной мере

$dL(t)$, описывающей случайное приращение L-процесса в интервале времени $(t, t + dt)$. В этой терминологии

$$X(t) = \int_0^t dL(\tau), \quad t > 0,$$

$$X(t + \tau) - X(t) = \int_t^{t+\tau} dL(\tau') \stackrel{d}{=} \tau^{1/\alpha} S^{(\alpha, \beta)}.$$

Эредитарность здесь вводится с помощью функции $h(t, \tau)$, определяющей вклад единичной меры в момент τ в состояние процесса в момент t :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) dL(\tau).$$

Если функции $h(t, \tau)$ инвариантна относительно сдвига по времени,

$$h(t, \tau) = h(t - \tau),$$

такой процесс называют *процессом скользящего среднего* (moving average process, МА-процесс).

Примером МА-процесса служит процесс Орнштейна-Уленбека-Леви, который можно записать в виде

$$X(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-\tau)} dL(\tau).$$

Построенный по такому же принципу процесс

$$X_{\alpha}^H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (|t - \tau|^{H-1/\alpha} - |\tau|^{H-1/\alpha}) dL(\tau),$$

где $0 < H < 1$, $H \neq 1/\alpha$, называется *линейным дробным устойчивым движением*, так как получается из устойчивого процесса интегрированием дробного порядка. Два важных свойства процесса $\{X_{\alpha}^H(t)\}$ должны быть отмечены здесь. Во-первых, он самоподобен с параметром H , то есть, для любых $a > 0$, t_1, \dots, t_n

$$(X_{\alpha}^H(at_1), \dots, X_{\alpha}^H(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X_{\alpha}^H(t_1), \dots, a^H X_{\alpha}^H(t_n)).$$

Во-вторых, он обладает стационарными приращениями

$$X_\alpha^H(t) - X_\alpha^H(0) \stackrel{d}{=} X_\alpha^H(t + \tau) - X_\alpha^H(\tau).$$

В частном случае $\alpha = 2$ мы имеем здесь дело с *дробным броуновским движением*. Если его среднее значение равно нулю (при $H \neq 1$), дисперсия

$$\langle [X_2^H(t)]^2 \rangle = t^{2H} \sigma^2, \quad \sigma^2 = \langle [X_2^H(1)]^2 \rangle,$$

а автоковариационная функция

$$C_2^H(t_1, t_2) = \langle X_2^H(t_1) X_2^H(t_2) \rangle = (|t_1|^{2H} + |t_2|^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}) \sigma^2 / 2.$$

Обычному броуновскому движению соответствует $H = 1/2$ и

$$C_2^{1/2}(t_1, t_2) = \begin{cases} \sigma^2 \min(t_1, t_2), & \text{если } t_1 \text{ и } t_2 \text{ одинакового знака,} \\ 0, & \text{если } t_1 \text{ и } t_2 \text{ - разных знаков.} \end{cases}$$

При $H < 1/2$ имеет место субдиффузия, при $1/2 < H < 1$ – супердиффузия, при $H = 1$ – баллистический режим. Заметим, что форма распределения вероятности во всех режимах остается гауссовой:

$$p(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma t^H} \exp\left\{-\frac{X^2}{4\sigma^2 t^{2H}}\right\}.$$

Поскольку броуновское движение имеет стационарные приращения, последовательность

$$\{Z_j = X_2^H(j+1) - X_2^H(j), \quad j = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$$

является стационарной и называется *дробным гауссовым шумом*. Его автоковариационная функция

$$R_j = (|j+1|^{2H} - 2|j|^{2H} + |j-1|^{2H}) \sigma_0^2 / 2 \sim \sigma_0^2 H(2H-1) j^{2H-2}, \\ j \rightarrow \infty, \quad H \neq 1/2,$$

а спектральная плотность $P(\nu)$ имеет асимптотически степенной вид

$$P(\nu) \propto \nu^{-\gamma}, \quad \gamma = 2H - 1.$$

При $\gamma = 0$ имеем белый шум, моделирующий электронный и фотонный дробовые шумы, тепловой шум. Случаи $\gamma = 1, 2$ и $\gamma > 2$ соответствуют розовому, коричневому и черному шумам, также находящим применение к естественным и общественным процессам. В частности, черные спектры описывают различного рода катастрофы – разливы рек, засухи, перебои с электроэнергией, финансовые кризисы [43].

3.6 От скачкообразных блужданий к дробным производным

3.6.1 Процессы восстановления

Вернемся к процессу аномальной диффузии, введенному нами на основе идеи самоподобия. Исторически эта модель была построена иным путем – как асимптотика (предел) скачкообразных процессов. основополагающей работой в этом направлении принято считать статью Монтролла и Вейса [44], без ссылки на которую не обходится ныне ни один обзор по аномальной диффузии. (см. также прекрасный обзор [45]). Покажем здесь основные вехи этого пути, воспользовавшись терминологией теории восстановления [46]. Будучи менее формальным, чем вывод из принципа самоподобия, этот путь обладает большой наглядностью и создает хорошие предпосылки для физической интерпретации модели в конкретных задачах.

Пусть T_1, T_2, \dots – последовательность взаимно независимых положительных случайных величин с общей плотностью распределения $q(t)$. Назовем их *временами ожиданий*, а моменты времени

$$T(n) = \sum_{j=1}^n T_j, \quad T(0) = 0,$$

моментами восстановления (регенерации). Последовательность случайных величин $\{T(n)\}$ образует *процесс восстановления*. Поскольку случайные величины T_j положительны, то среднее значение

$$\tau \equiv \langle T_j \rangle = \int_0^{\infty} tq(t) dt$$

имеет смысл и тогда, когда интеграл расходится: в этом случае $\tau = \infty$.

В физических процессах с моментами $T(n)$ обычно связаны некоторые физические события нулевой длительности – скачкообразные переходы системы из одного состояния в другое, столкновения частицы с атомами среды, излучение или поглощение фотона и т.д. Назовем их просто *событиями* и рассмотрим число $N(t)$ событий, происходящих в промежутке времени $(0, t)$.

Случайный процесс

$$N(t) = \max\{n : T(n) < t\}$$

называется *считающим процессом восстановления*, функция

$$\bar{N}(t) = \langle N(t) \rangle$$

– функцией восстановления. Последняя может быть представлена в виде

$$\bar{N}(t) = \sum_{n>0} P(T(n) < t) = \int_0^t q^{*n}(s) ds.$$

Она не убывает, конечна, неотрицательна, полуаддитивна

$$\bar{N}(t + s) \leq \bar{N}(t) + \bar{N}(s), \quad t, s \geq 0,$$

и удовлетворяет уравнению восстановления

$$\bar{N}(t) = \int_0^t [1 + \bar{N}(t - s)] q(s) ds.$$

Его интерпретация крайне проста: среднее число событий в промежутке $(0, t)$ равно вероятности попадания в него первого события плюс среднее число следующих за ним событий.

Функция восстановления также удовлетворяет элементарной теореме восстановления:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{N}(t)/t = \tau^{-1},$$

а в предположении конечности второго момента

$$m^{(2)} = \int_0^\infty t^2 q(t) dt < \infty$$

справедливы неравенства

$$t/m \leq \bar{N}(t) \leq t/m + m^{(2)}/2\tau^2.$$

Выбрав в качестве $q(t)$ показательное распределение

$$q(t) = \mu e^{-\mu t},$$

мы получаем простейший процесс восстановления – пуассоновский процесс, для которого $\tau = \mu^{-1}$.

Обобщенный пуассоновский процесс введен в [10, с. 211] посредством случайных сумм

$$X(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} R_j,$$

где R_j – независимые случайные величины с одинаковым распределением $p(x)$, а $N(t)$ – обычный пуассоновский процесс:

$$P(N(t) = n) = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t}.$$

Плотность распределения $p(x, t)$ случайной суммы $X(t)$, имеет вид

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} p^{*n}(x).$$

Здесь $p^{*n}(x)$ означает многократную свертку плотностей $p(x)$, при этом $p^{*1}(x) \equiv p(x)$, а $p^{*0}(x) = \delta(x)$. То, что суммирование начинается с $n = 0$, означает, что в начальный момент времени частица находится в начале координат и продолжает оставаться там вплоть до $t = T_1$ – момента, когда она совершает свой первый скачок. После этого скачка способность частицы к ожиданию восстанавливается в том же виде и процесс продолжается. Таким образом, рассматриваемый процесс может быть интерпретирован как скачкообразное блуждание частицы вдоль оси x . Пуассоновский характер потока событий (перескоков) во времени означает, что интервалы времени T между ними независимы и распределены по экспоненциальному закону

$$P(T > t) = e^{-\mu t}, \quad t \geq 0.$$

Таким образом, полагая в нашей схеме R_j независимыми, а плотность $q(t)$ – произвольной, получим

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(t) p^{*n}(x).$$

где

$$\begin{aligned} W_n(t) &= P(N(t) = n) = P(N(t) \geq n) - P(N(t) \geq n + 1) = \\ &= Q^{*n}(t) - Q^{*(n+1)}(t). \end{aligned}$$

Отсюда

$$p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} [Q^{*n}(t) - Q^{*(n+1)}(t)] p^{*n}(x).$$

Это – простейшая модель одномерного скачкообразного блуждания частицы с независимыми временами ожиданий, непрерывно распределенными по одному и тому же закону $q(t)$ и независимыми (друг от друга и от времен ожиданий) смещениями, распределенными с одинаковой плотностью $p(x)$. В англоязычной литературе этот процесс обозначается CTRW (Continuous Time Random Walks), в русскоязычной – СБНВ.

3.6.2 Теорема об аномальной диффузии

Вычисление распределения $p(x, t)$ в указанных выше предположениях называют проблемой Монтролла-Вейсса [44]. Ее удобно решать путем преобразований Фурье по координате и Лапласа – по времени:

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx - \lambda t} p(x, t).$$

Учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p^{*n}(x) dx = [\tilde{p}(k)]^n$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} Q^{*n}(t) dt &= \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \int_0^t q^{*n}(s) ds = \\ &= \int_0^{\infty} ds \int_s^{\infty} dt e^{-\lambda t} q^{*n}(s) = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} ds e^{-\lambda s} q^{*n}(s) = \frac{1}{\lambda} [\tilde{q}(\lambda)]^n, \end{aligned}$$

получим:

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} [\tilde{q}^n(\lambda) - \tilde{q}^{n+1}(\lambda)] \tilde{p}^n(k) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda [1 - \tilde{q}(\lambda) \tilde{p}(k)]}.$$

Таким образом,

$$p(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} d\lambda \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda [1 - \tilde{q}(\lambda) \tilde{p}(k)]} e^{-ikx + \lambda t}.$$

Непосредственное вычисление по этой формуле требует задания конкретных распределений $q(t)$ и $p(x)$, если же ограничиться лишь асимптотическим исследованием при $t \rightarrow \infty$, то достаточно задать лишь асимптотики $q(t)$ и $p(x)$ при больших значениях аргументов. В одномерной постановке эта задача решена М. Котульским [47]. Мы приведем здесь его результат в виде теоремы, сформулированной в работе [48].

Пусть T_1, T_2, \dots – последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения, принадлежащей области притяжения устойчивого закона с параметрами $\omega, \theta = 1$, а R_1, R_2, \dots – не зависящая от нее последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения, принадлежащей области притяжения

устойчивого закона с параметрами α, θ . Тогда существует конечная положительная постоянная $c = c(\alpha, \omega, \theta)$, такая, что

$$P\left(\frac{X(t)}{c(\alpha, \omega, \theta)t^{\omega/\alpha}} < x\right) \Rightarrow Q(x; \alpha, \omega, \theta), \quad t \rightarrow \infty,$$

где

$$Q(x; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^\infty G(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) dG(y; \omega, 1).$$

Дифференцируя это соотношение по x , переходим к плотности

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^\infty g(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) g(y; \omega, 1) y^{\omega/\alpha} dy,$$

названной в нашей работе [48] *дробно-устойчивой*. Таким образом, плотность распределения одномерного процесса $\{X(t), t \geq 0\}$ в асимптотике больших времен имеет вид

$$p^{as}(x, t) = q(xt^{-\omega/\alpha}/c; \alpha, \omega, \theta)t^{-\omega/\alpha}/c.$$

Этот результат может быть получен двумя способами: путем рассмотрения процесса $X(t)$ как суммы случайного числа случайных слагаемых с применением обобщенного варианта центральной предельной теоремы, выводящей на устойчивые законы [47, 48], и асимптотическим обращением с использованием тауберовых теорем, как это сделано для одномерного случая в работе [49], а для трехмерного симметричного случая в нашей книге [24]. В случае d -мерного сферически симметричного блуждания

$$p_d^{as}(\mathbf{x}, t) = q_d(\mathbf{x}t^{-\omega/\alpha}/c; \alpha, \omega)t^{-d\omega/\alpha}/c^d,$$

где

$$q_d(\mathbf{x}; \alpha, \omega) = \int_0^\infty g_d(\mathbf{x}y^{\omega/\alpha}, \alpha)g_1(y; \omega, 1)y^{d\omega/\alpha}dy,$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, а $g_d(\mathbf{x}, \alpha)$ – плотность сферически симметричного d -мерного устойчивого распределения, характеристическая функция которого имеет вид

$$\tilde{g}_d(\mathbf{k}; \alpha) = e^{-|\mathbf{k}|^\alpha}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d.$$

3.6.3 Уравнения аномальной диффузии

Возможно, самый простой способ выйти на асимптотику рассматриваемого процесса, отталкиваясь от трансформанты

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda [1 - \tilde{q}(\lambda) \tilde{p}(k)]},$$

заключается в использовании в качестве $p(x)$ и $q(t)$ самих устойчивых плотностей $g(x; \alpha, \theta)$ и $g(x; \omega, 1)$, $0 < \alpha \leq 2$, $\omega \leq 1$. Законность такой подстановки обусловлена тем, что *каждый устойчивый закон принадлежит своей области притяжения*. Тем самым условие теоремы об аномальной диффузии выполняется. В то же время асимптотическое выражение $p(x, t)$ определяется только асимптотиками функций $p(x)$ и $q(t)$, а все распределения, принадлежащие фиксированной области притяжения, в том числе и устойчивое, имеют одну и ту же (с точностью до постоянного множителя) асимптотику. Следовательно, выбирая в качестве $p(x)$ и $q(t)$ устойчивые плотности, мы нисколько не теряем в общности.

Согласно тауберовым теоремам, в восстановлении распределения $p(x, t)$ при больших x и t основную роль играет поведение трансформанты Фурье-Лапласа $\tilde{p}(k, \lambda)$ в области малых значений аргументов, где

$$\begin{aligned} \tilde{p}(k) &= \tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp \{ -|k|^\alpha \exp[-i\alpha\theta\pi/2 \operatorname{sign}k] \} \sim \\ &\sim 1 - |k|^\alpha \exp \{ -i\alpha\theta\pi/2 \operatorname{sign}k \}, \quad k \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и

$$\tilde{q}(\lambda) = \tilde{g}(-i\lambda; \omega, 1) = e^{-\lambda^\omega} \sim 1 - \lambda^\omega, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Несложные преобразования приводят к следующему уравнению для главной асимптотики

$$\lambda^\omega \tilde{p}^{as}(k, \lambda) = -|k|^\alpha \exp \{ -i\alpha\theta\pi/2 \operatorname{sign}k \} \tilde{p}^{as}(k, \lambda) + \lambda^{\omega-1}.$$

которое может быть также представлено в виде

$$\lambda^\omega \tilde{p}^{as}(x, \lambda) = L^{(\alpha, \beta)} \tilde{p}^{as}(k, \lambda) + \lambda^{\omega-1},$$

обобщающем уравнение движения Леви (п. 3.5.1) на немарковский тип процесса.

Произведение же $\lambda^\omega \tilde{p}(x, \lambda)$ и функция $\lambda^{\omega-1}$ являются трансформантами Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля

$${}_0D_t^\omega p(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\omega)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\omega}.$$

и обобщенной функции

$$\frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)}\delta(x).$$

Таким образом, главная асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть распределения $p(x, t)$ удовлетворяют уравнению в частных производных дробного порядка

$${}_0D_t^\omega p^{as}(x, t) = L^{(\alpha, \beta)} p^{as}(x, t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)}\delta(x),$$

которое мы будем называть *уравнением аномальной диффузии (АД-уравнением)*. Здесь масштаб переменных x и t выбран специальным образом.

В общем случае АД-уравнение имеет вид

$${}_0D_t^\omega f(x, t) = KL^{(\alpha, \beta)} f(x, t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)}\delta(x),$$

где K – положительная постоянная (коэффициент диффузии), $f(x, t) = p^{as}(x, t)$. Многомерный аналог АД-уравнения в изотропном случае включает в себя лапласиан дробного порядка:

$${}_0D_t^\omega f(\mathbf{x}, t) = -K(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)}\delta(\mathbf{x}).$$

3.6.4 Обобщенный закон Фика

Будучи преобразованным (путем дробного дифференцирования порядка $1 - \omega$ обеих частей) к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -D(-\Delta)^{\alpha/2} {}_0D_t^{1-\omega} f(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t),$$

АД-уравнение может быть представлено в виде системы двух уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = D(-\Delta)^{\alpha/2} {}_0D_t^{1-\omega} f(\mathbf{x}, t),$$

первое из которых является уравнением непрерывности, определяющим вектор плотности тока вероятности \mathbf{j} , а второе – *обобщенным законом Фика*, заданным в неявной форме.

При $\alpha = 2$ и $\omega = 1$ обобщенный закон принимает вид обычного закона Фика

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -D\Delta f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{j} = -D\operatorname{grad} f(\mathbf{x}, t).$$

При $\alpha = 2$ и $\omega \neq 1$ мы имеем дело с субдиффузионным обобщением:

$$\mathbf{j} = -D \text{grad } {}_0D_t^{1-\omega} f(\mathbf{x}, t) = -D_0 D_t^{1-\omega} \text{grad} f(\mathbf{x}, t).$$

Наличие в правой части производной по времени дробного порядка

$${}_0D_t^{1-\omega} \text{grad} f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\text{grad} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\omega}}$$

отражает влияние памяти процесса на распространение диффузионного пакета: плотность тока в данный момент определяется не мгновенным градиентом плотности в данный момент, а его эволюцией в течение всего предшествующего периода диффузии. Эта особенность может быть обусловлена наличием в среде случайно распределенных ловушек с распределением времени удержания степенного типа. Субдиффузия носит немарковский, но локальный характер.

При $\alpha < 2$ и $\omega = 1$ имеет место супердиффузионный режим:

$$\text{div} \mathbf{j} = D(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t).$$

В этом режиме скорость изменения плотности в данной точке определяется не градиентом в данной точке, а распределением диффундирующей субстанции во всем пространстве в данный момент (влияние больших пробегов с асимптотически степенным характером распределения). Супердиффузия (называемая также диффузией Леви или полетами Леви) – марковский, но нелокальный процесс.

В работе [51] рассмотрена задача об одномерной супердиффузии на отрезке $[a, b]$, в рамках которой диффузионный ток (точнее, его проекция на ось x , вдоль которой рассматривается диффузия) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} j(x, t) &= -\frac{K}{2} [{}_aD_x^{\alpha-1} + {}_xD_b^{\alpha-1}] f(x, t) = -K {}_aD_b^{\alpha-1} f(x, t) = \\ &= -\frac{K}{2\Gamma(2-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_a^x \frac{f(x', t) dx'}{(x-x')^{\alpha-1}} + \int_x^b \frac{f(x', t) dx'}{(x'-x)^{\alpha-1}} \right] = \\ &= -\frac{K}{2\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_a^x \frac{f(x', t) dx'}{(x-x')^\alpha} - \int_x^b \frac{f(x', t) dx'}{(x'-x)^\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Авторы интерпретируют каждый из членов этой разности как вклад в наблюдаемый в точке x ток левой и правой (по отношению к ней) части отрезков, игнорируя тот факт, что при $\alpha > 1$ эти интегралы расходятся

и физический смысл они обретают лишь в сумме. В этом отношении их второе представление супердиффузионного закона Фика

$$j = -K {}_a D_b^{\alpha-1} f(x, t),$$

приводящее к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial}{\partial x} {}_a D_b^{\alpha-1} f(x, t)$$

представляется более корректным.

В случае $\alpha < 2$ и $\omega < 1$ процесс аномальной диффузии является немарковским и нелокальным.

Литература

1. *Зайдель А. Н.* Ошибки измерений физических величин. – Л.: Наука, 1974.
2. *Эйнштейн А., Смолуховский М.* В сб.: Брауновское движение. Под ред. Давыдова Б. И. – М.: ОНТИ, 1936.
3. *Einstein A.* Ann. der Phys. **17**, 549 (1905).
4. *Langevin P.* Compt. Rend. **146**, 530 (1908).
5. *Smoluchowski M. V.* Phys. Zeitschr **13**, 1069 (1912).
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. 1. – М.: Наука, 1971.
7. Вероятность и математическая статистика. (Энциклопедия). Под ред. *Прохорова Ю. В.* – М.: Большая российская энциклопедия, 1999.
8. *Левы П.* Стохастические процессы и броуновское движение. – М.: Наука, 1972.
9. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. Основные понятия, предельные теоремы, случайные процессы. – М.: Наука, 1973.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2 – М.: Мир, 1984.
11. *Кайзер Дж.* Статистическая термодинамика неравновесных процессов. – М.: Мир, 1990.

12. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. – М.: Наука, 1975.
13. Математическая физика (Энциклопедия). Под ред. *Фаддеева Л. Д.* – М.: Большая Российская энциклопедия, 1998.
14. *Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н.* Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. – М.: Гостехиздат, 1949.
15. *Holtzmark J.* Annal. der Phys. **58**, 577 (1919).
16. *Chandrasekhar S., von Neumann J.* Astrophys. J. **489**, 95 (1941); **97**, 1 (1943).
17. *Ландау Л. Д.* О потерях энергии быстрыми частицами на ионизацию. Собр. трудов. Т. 1. – М.: Наука, 1969.
18. *Вавилов П. В.* ЖЭТФ **32**, 920 (1957).
19. *Монин А. С.* ДАН СССР **105** 256 (1955).
20. *Монин А. С.* Изв. АН СССР, сер.геофиз. **3**, 327 (1956).
21. *Лифшиц И. М.* ДАН СССР **109**, 1109 (1956).
22. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983.
23. *Janicki A., Weron A.* Simulation and Chaotic Behavior of α -stable Stochastic Processes. – New York: Marcel Dekker Inc., 1994.
24. *Uchaikin V. V., Zolotarev V. M.* Chance and Stability. – Utrecht: VSP, 1999.
25. *Добрушин Р. А.* Теория вероятностей и ее применение **3**, 161 (1958).
26. *Kalos M. N.* Nucl. Sci. Engn. **16**, 111 (1963).
27. *Bouchaud J.-P., Georges A.* Phys. Rep. **195**, 127 (1990).
28. *West B. J., Deering W.* Phys. Rep. **246**, 1 (1994).
29. *Metzler R., Klafter J.* Phys. Rep. **339**, 1 (2000).
30. *Учайкин В. В., Лаппа А. В.* Вероятностные задачи в теории переноса. – Томск: Изд-во Томского университета, 1978.
31. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Бюллетень МГУ, секция А 1:6, 1937.

32. *Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б.* УМН **26**, 115 (1971).
33. *Burroughs S. M., Tebbens S. F.* Pure Appl. Geophys. **158**, 741 (2001).
34. *Chechkin A. V., Gonchar V. Yu., Klafter J., Metzler R.* Phys. Rev. E **72**, 010101(R) (2005).
35. *Gupta H. M., Campanha J. R.* Physica A **268**, 231 (1999).
36. *Sokolov I. M., Chechkin A. V., Klafter J.* Physica A **336**, 245 (2004).
37. *Terdik G., Woyczynski W. A., Piryatinska A.* Physics Letters A **348**, 94 (2006).
38. *Samorodnitsky G., Taqqu M. S.* Stable Non-Gaussian Random Processes – New York: Chapman & Hall, 1994.
39. *Золотарев В. М., Учайкин В. В., Саенко В. В.* ЖЭТФ **115**, 1411 (1999).
40. *Uchaikin V. V.* Int. J. Theor. Phys. **38**, 2375 (1999).
41. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения глазами физика. – М.: Физматлит, 2001.
42. *Chechkin A., Gonchar V., Klafter J. et al.* Chem. Phys. **284**, 233 (2002).
43. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Москва-Ижевск: РХД, 2001.
44. *Montroll E. W., Weiss G. H. J.* J. Math. Phys. **6**, 167 (1965).
45. *Montroll E. W., Schlesinger M. F.* In: Studies in Statistical Mechanics. Vol. 2 – North-Holland, Amsterdam, 1984.
46. *Кокс Д. Р., Смут В. Л.* Теория восстановления. – М.: Советское радио, 1967.
47. *Kotulski M. J.* Stat. Phys. **81**, 777 (1995).
48. *Kolokoltsov V., Korolev V. Yu., Uchaikin V. V.* J. Math. Sci. **105** 2569 (2001).
49. *Saichev A. I., Zaslavsky G. M.* Chaos **7**, 753 (1997).
50. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
51. *Molz F. J., Fix G. J., Lu S.* Applied Math. Lett. **15**, 907 (2002).

Глава 4

Фракталы и дробные производные

4.1 Фракталы

Концепция подобия, проявляющаяся в степенных функциях и устойчивых законах, является не просто некоторым частным их свойством, оно отражает важнейшее свойство многих наблюдаемых в природе структур и построенных на их основе моделей. Применительно к геометрическим структурам самоподобие (в узком смысле) означает инвариантность структуры относительно масштабного преобразования координат: $x \mapsto ax$, $a > 0$. Масштабно инвариантными являются точка, прямая, плоскость, пространство: как не изменяй масштаб, точка остается точкой, а прямая (бесконечная прямая) – прямой.

Важную роль в анализе самоподобных структур играет понятие *размерности*. Термин «размерность» употребляется в различных смыслах: размерность физической величины, размерность фазового пространства и т.п. Даже в чисто *геометрическом* аспекте существует несколько определений размерности, соответствующих разным понятиям. Наиболее известное определение размерности – минимальное число независимых координат, необходимых для однозначного определения положения точки. Так определенная размерность является целым числом, равным 3 для пространства, 2 – для поверхности, 1 – для линии. При другом (*топологическом*) определении размерность множества также полагается целым числом, на единицу большим размерности разреза, разделяющего его на две несвязанные части (примеры: разрезать трехмерное множество можно двумерной поверхностью, поверхность – одномерной линией).

Размерность самоподобия D определяется формулой

$$D = \frac{\ln N}{\ln n}, \quad (4.1.1)$$

где N – число одинаковых частей, на которые можно разрезать самоподобный объект на подобные ему части с линейными размерами в n раз меньшие исходных. Легко видеть, что определенная формулой (4.1.1) размерность, будучи примененной к отрезку, квадрату и кубу, дает соответственно значения 1, 2 и 3, согласующиеся с другими определениями. В отличие от них, однако, определение (4.1.1) может привести и к дробному значению.



Рис. 4.1: Множество Кантора.

Возьмем отрезок длиной L и удалим его центральную треть (Рис. 4.1). Бесконечно повторяя эту операцию с оставшимися отрезками, получим некоторое множество точек, являющееся самоподобным. Из построения видно, что $N = 2$ и $n = 3$, так что

$$D = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,63093. \quad (4.1.2)$$

Соотнесем теперь с рассматриваемым множеством неотрицательную аддитивную функцию (массу) $m(x)$, так что если отрезок L делится на три части, одна из которых оказывается пустой, а две других подобны исходной, то

$$m(L) = 2m(L/3).$$

Нетрудно проверить, что решением этого уравнения является степенная функция

$$m(x) = m(1) x^D, \quad (4.1.3)$$

где D вновь дается выражением (4.1.2). Формулу (4.1.3) можно рассматривать как еще одно определение размерности. Удобно слегка модифицировать его, введя понятие радиуса R :

$$m(R) = m(1) R^D. \quad (4.1.4)$$

Здесь $m(R)$ – теперь масса части рассматриваемого множества, находящейся внутри шара радиусом R , и D – *массовая размерность*. Если масса равномерно распределена по объему, то $m(R) = m(1)R^3$, если она равномерно распределена по плоскости или по прямой, то $m(R) = m(1)R^2$ или $m(R) = m(1)R^1$, соответственно. Масса изолированной точки в этом случае равна нулю. Нулю же равна и масса счетного множества изолированных точек. Соотношение (4.1.3) говорит, что мы имеем дело здесь с некоторым множеством промежуточного типа: это уже не точка, для которого D было бы равно 0, но еще и не линия, для которой $D = 1$.

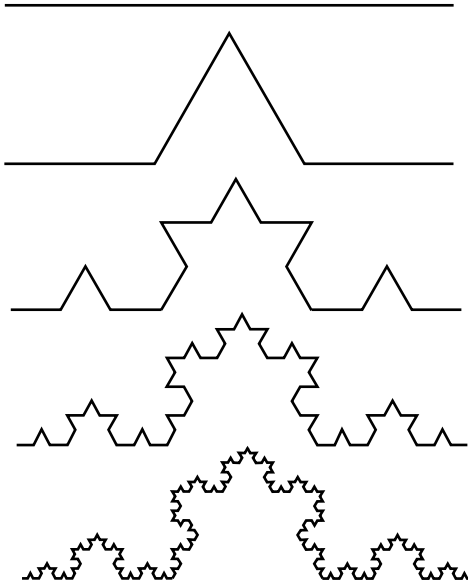


Рис. 4.2: Кривая Коха.

Если мы будем не просто убирать центральную треть отрезков, а заменять ее дополнением до равностороннего треугольника, построенного на ней как на основании, получим другую последовательность (Рис. 4.2). Из очевидного по построению соотношения

$$m(L) = 4m(L/3),$$

следует, что

$$m(x) = m(1)x^D,$$

где

$$D = \ln 4 / \ln 3 \approx 1,26186$$

больше единицы, так что мы имеем дело с множеством, которое уже не линия, но еще не поверхность.

Самоподобные множества с нецелой размерностью называют *фракталами*. Более строгое, хотя, возможно, и не окончательное, определение фрактала базируется на *размерности Хаусдорфа-Безиковича* (рХБ): фракталами считаются множества, рХБ которых не совпадает с их топологической размерностью. Наиболее удобными для изучения фрактальной размерности реальных или моделируемых структур являются упомянутая выше массовая размерность и *клеточная размерность* (в определенном смысле – практическая реализация рХБ) – показатель степени в зависимости числа покрывающих фрактал клеток (кубов) от их линейного размера.

Термин «фрактал» был введен в обиход Бенуа Мандельбротом, американским математиком польского происхождения (см. его работы [1,2]). Именно геометрический аспект фрактальной концепции способствовал быстрому и широкому распространению фрактальных моделей в самых разных науках – физике, химии, материаловедении, биологии, физиологии, геологии, экологии, экономике, лингвистике, космологии [3-5]. Несомненно также, что немалую роль в этом процессе сыграл и сам автор – блестящий популяризатор современного типа, умеющий показать «товар лицом» и в два счета убедить собеседника, что это – именно то, что ему нужно для достижения успеха. Успех самого Б. Мандельброта, вероятно, самого популярного в настоящее время математика в нематематической среде, является лучшим свидетельством тому, что он знает, о чем говорит.

Однако основной причиной такого взрывного развития и распространения этих идей является современный компьютер, выступающий подчас в роли соавтора исследователя, без которого эти результаты никоим образом не могли бы быть получены. Нет сомнений в том, что непрерывное совершенствование компьютерных технологий влечет за собой не только эволюцию старых, но и рождение новых научных технологий, к числу которых относится и фрактальный анализ.

Причудливые формы фрактальных структур, похожие то на снежинки, то на листья клена, то на кучевые облака, то на изрезанное фьордами побережье, создают впечатление некой альтернативной геометрии, идущей от природы, описать которую привычными аналитическими средствами невозможно. Действительно, и сама прямая, и простейший после нее геометрический объект – знакомая со школьной скамьи парабола $y = x^2 + c$ – гладкие, «без сучка и задоринки» линии, бесконечно далекие от «естественных» линий – контура дерева, границы листа... Типичный продукт деятельности абстрактного ума. Не будем, однако, торопиться. Перейдем в комплексную плоскость и совершим по ней «прогулку» с по-

мощью той же формулы, превратив ее в рекуррентное соотношение

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Результатом такой «прогулки» (называемой *процессом Мандельброта*) станет последовательность точек в комплексной плоскости $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$. В зависимости от выбора z_0 и c при $n \rightarrow \infty$ эта последовательность может уходить на бесконечность (как, скажем, при $c = 0$ и $z_0 = 2$), стремиться к нулю (как, например, при $c = 0$ и $z_0 = 1/2$) или бесконечно блуждать, оставаться на конечном расстоянии от центра и не стремясь ни к какой конкретной точке. Точка комплексной плоскости, к которой сходится последовательность $\{z_n\}$, называется *аттрактором*. В первом случае аттрактором является бесконечность, во втором – нуль.

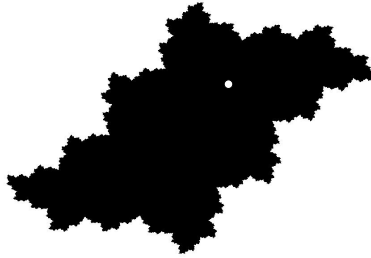


Рис. 4.3: Множество Жюлиа (граница затемненной области).

Зафиксируем теперь c и рассмотрим множество всех значений z_0 , при которых последовательность $\{z_n\}$ остается ограниченной (*множество Жюлиа*). Если $c = 0$, таким множеством является просто окружность единичного радиуса, делящая комплексную плоскость на зоны влияния двух упомянутых выше аттракторов. Если же выберем, например,

$$c = -0.1235 + 0.56508i,$$

то ситуация резко изменится: внутренний аттрактор уже не будет нулем, а граница деформируется и, что пожалуй, самое интересное здесь, перестанет быть гладкой, станет сильно изломанной на разных масштабах (Рис. 4.3). Она напоминает линию побережья где-нибудь в Норвегии, длина которой, измеренная по карте, оказывается тем больше, чем меньше масштаб последней, то есть чем более подробное изображение эта карта дает. Внимательно разглядывая рис. 4.3, можно обнаружить, что один и

тот же элемент встречается в различных местах и имеет разные размеры. Такие самоподобные структуры Б. Мандельброт и назвал фракталами.

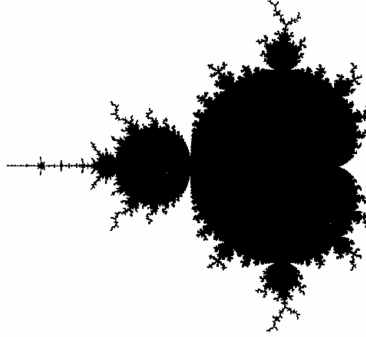


Рис. 4.4: Множество Мандельброта.

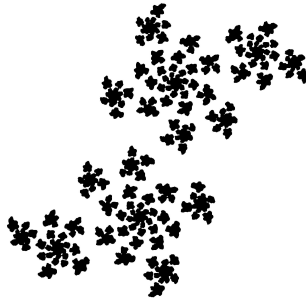


Рис. 4.5: Фрактальная пыль Фату.

Множество Жюлиа столь же прихотливо зависит от c . Если выбрать

$$c = -0.12 + 0.74i,$$

то получим уже не одну, а бесконечное множество деформированных окружностей, все еще образующих связное множество. Множество M значений c , приводящих к связанным структурам множеств Жюлиа, называется *множеством Мандельброта* (Рис. 4.4). Если $c \notin M$, множество Жюлиа распадается в облако изолированных точек – *фрактальную пыль* (Рис. 4.5). В непосредственной близости от границы M фрактальная пыль образует удивительные фигуры – фазовые портреты *хаотической динамики* (Рис. 4.6) [6].

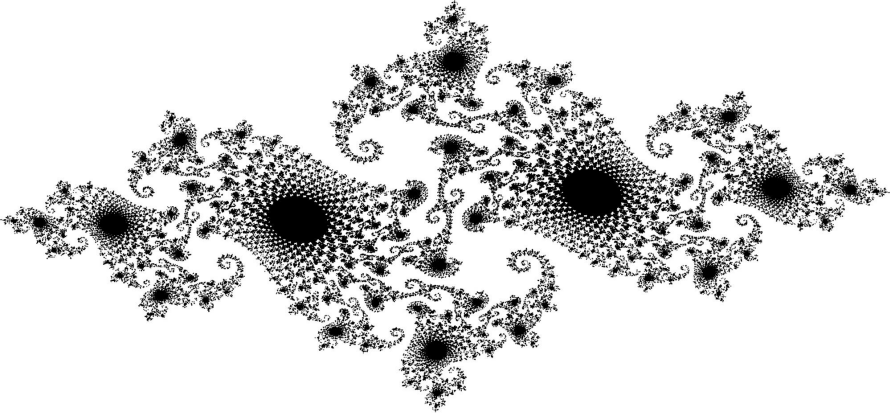


Рис. 4.6: Фазовый портрет хаотичной динамики.

4.2 Фрактальная пыль

Процесс Мандельброта является лишь одним из множества алгоритмов генерации фрактальных структур. Он наглядно демонстрирует возникновение хаоса из порядка, но хаос этот детерминирован и воспроизводим. Уже упомянутые выше снежинки поражают наше воображение и радуют глаз своей строгой симметрией и порядком, но для природных объектов строгий порядок – скорее исключение, чем правило. Обычно присутствующая во фракталоподобных системах вариабельность (изменчивость от одного экземпляра к другому при сохранении общего мотива) дает основание рассматривать *стохастические (случайные)* фракталы.

Введение стохастики существенно обогащает фрактальную концепцию и расширяет сферу ее применений. Стохастический фрактал не воспроизводим: он понимается как бесконечное множества реализаций с заданной на нем вероятностной мерой (*статистический ансамбль Гиббса*). Соотношение (4.1.3) понимается теперь в смысле математического ожидания, (среднего по ансамблю), а свойство самоподобия распространяется и на вероятностные характеристики стохастического фрактала. Будучи стохастическим в одном масштабе, в силу самоподобия фрактал должен быть стохастическим и во всех других масштабах. Другими словами, увеличение размеров наблюдаемой части рассматриваемого стохастического фрактала не сопровождается уменьшением статистических флуктуаций. *Статистика фракталов – негауссова статистика, в ее основе лежат устойчивые распределения, отличные от нормального.*

Центральной моделью теоретической физики является материальная точка – объект столь малых размеров, что для указания его положе-

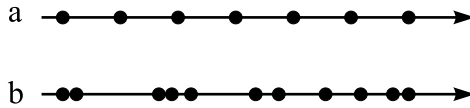


Рис. 4.7: Одномерная решетка (a) и одномерный газ (b).

ния в пространстве достаточно дать координаты одной геометрической точки. Разумеется, все зависит от рассматриваемой задачи: описывая Вселенную, мы можем считать такими точками целые галактики, в солнечной системе мы считаем точками планеты, в сосуде с газом – атомы или молекулы, изучая атом мы считаем точками электроны и ядро.

Будем, для краткости, называть материальные точки *атомами*. Разместив атомы на прямой на равном расстоянии друг от друга, получим одномерную модель кристаллической решетки, а разбросав их случайно, получим модель одномерного газа. Здесь, однако, следует кое-что уточнить, и в первую очередь – понятие «случайно».

Пусть атомы расположены в точках x_1, x_2, x_3, \dots и расстояния между соседями разные и колеблются (не в смысле зависимости от времени – картина статичная, а в смысле их значений для разных промежутков) в широких пределах (Рис. 4.7). Можно ли сказать о том, что они распределены случайно? Нет, каким бы причудливым это распределение нам ни казалось. Для того, чтобы говорить о случайном распределении атомов на прямой, надо задать или хотя бы мысленно (как это делал Гиббс) представить статистический ансамбль, т. е. множество разных распределений атомов на прямой с заданными вероятностями появления каждого конкретного распределения. С этой точки зрения детерминированная среда – это ансамбль, все члены которого одинаковы. Поэтому, если мы имеем всего одно наблюдаемое распределение, нам не дано узнать, принадлежит оно статистическому или детерминированному ансамблю. Однако, если мы имеем возможность повторять эксперимент и наблюдать результат снова и снова, то уже при малом числе наблюдений можно установить факт случайности, а при большом – построить некоторую модель статистического ансамбля.

Предположим, что такая возможность есть, и что, наблюдая некоторый промежуток $(0, x]$ оси, мы установили, что число атомов на нем $N(x)$ распределено по закону Пуассона со средним значением $\langle N(x) \rangle$. Если теперь, разбивая $(0, x]$ на отрезки Δx_i различной длины, мы будем получать тот же результат и для этих отрезков, т. е. увидим, что независимо от чисел атомов на других отрезках $N(\Delta x_i)$ распределено по закону Пуассона со средним значением $\langle N(\Delta x_i) \rangle = \langle N(x) \rangle \Delta x_i / x$, пропорциональным Δx_i , то можно сказать, что мы имеем дело с *однородным пуассоновским ансамблем*, описывающим, например, одномерный идеальный газ.

Моделировать, т.е. получать конкретные реализации такого распределения, чрезвычайно просто. Поместив первый атом, например, в начале координат, случайное расстояние до первого соседа справа (или слева) можно выбрать из экспоненциального распределения с плотностью $\psi_1(x) = \mu e^{-\mu x}$ и затем повторять эту процедуру в выбранном направлении. Ситуация такова, как если бы какая-то реальная частица двигалась вдоль оси x , испытывая столкновения в отдельных точках однородной среды, сопровождающиеся появлением в них атомов (ионов).

Удивительно то, что несмотря на очевидную связь между этими событиями, порождаемыми одной траекторией, случайные числа атомов в непересекающихся интервалах оказываются строго независимыми и образуют пуассоновский ансамбль, для которого среднее и дисперсия случайного числа $N(x)$ имеют вид:

$$\langle N(x) \rangle = \mu x, \quad \langle N^2(x) \rangle - \langle N(x) \rangle^2 = \mu x,$$

где $\mu = \text{const}$ – линейная плотность атомов. Это связано с особым свойством распределения $\psi_1(x) = \mu e^{-\mu x}$, удовлетворяющего уравнению

$$d\psi_1/dx = -\mu\psi_1 : \quad (4.2.1)$$

отношение $d\psi_1/\psi_1$ не зависит от x . Это свойство пуассоновского процесса трактуется как *отсутствие памяти*.

Сохранив теперь тот же алгоритм блуждания для построения случайного распределения атомов на прямой, возьмем вместо $\psi_1(x)$ другое распределение $\psi(x)$, не являющееся экспоненциальным. Пользуясь элементарными средствами теории вероятностей можно найти распределение случайного числа атомов на отрезке $[0, x]$ при условии, что первый из них находится в точке 0, среднее значение и дисперсию. Если при этом дисперсия распределения $\psi(x)$ расстояния между соседними атомами конечна, то для толстых слоев мы по-прежнему получим $\langle N(x) \rangle \propto x$, и $\sigma_{N(x)}^2 \propto x$, т.е. относительные флуктуации $\delta_{N(x)} = \sigma_{N(x)}/\langle N(x) \rangle$ числа атомов в слое толщиной x будут убывать как $x^{-1/2}$. Отличие от пуассоновского ансамбля лишь в том, что теперь это наблюдается в асимптотическом режиме (не при любых x , как выше, а только при больших).

В случае бесконечной дисперсии $\psi(x)$ общие (т.е., не зависящие в асимптотике от конкретной формы $\psi(x)$) результаты могут быть получены лишь для распределений с хвостами степенного типа $\psi(x) \propto x^{-\nu-1}$, $0 < \nu \leq 1$, $x \rightarrow \infty$. Расчеты показывают, что в асимптотике больших толщин x среднее число атомов в слое растет пропорционально x^ν (т.е. медленнее, чем в пуассоновском случае) и *относительные флуктуации асимптотически конечны*, т.е. с ростом x не исчезают, как в пуассоновском случае, а стремятся к отличной от нуля постоянной.

Если принять во внимание только первый факт, то можно было бы подумать, что речь просто идет о среде с переменной концентрацией атомов

$$f(x) = d\langle N(x) \rangle / dx \propto x^{-\nu-1},$$

убывающей с ростом x по степенному закону. Как это не удивительно, но это не так. Легко сообразить, что процесс блуждания, генерирующий распределение атомов, инвариантен относительно направления движения гипотетической «частицы», рассаживающей атомы, слева направо или справа налево, расстояния между соседями в любом случае распределены по одному и тому же закону. Это значит, что убывание $f(x)$ должно наблюдаться в обе стороны от выбранной точки, положение которой мы выберем за начало координат. Но этот атом ничем не отличается от других, следовательно, плотность атомов должна убывать в обе стороны относительно любого из них. Парадоксальность ситуации очевидна: если относительно, скажем, точки x_1 , плотность атомов убывает в обе стороны, то относительно $x_2 > x_1$ она должна быть асимметричной: убывать направо и возрастать при перемещении точки наблюдения от x_2 до x_1 налево, а уж затем перейти в режим убывания, но с более высокого начального значения. Этого, однако, не происходит: все атомы рассматриваемой структуры равноправны. Такая простая задача и такой парадокс! Мы имеем дело с *фрактальной пылью*.

4.3 Генератор фрактальной пыли

Назовем фрактальную пыль, для которой условия

$$\langle N_\nu(x) \rangle = \mu_\nu x^\nu, \quad f_\nu(x) = \mu_\nu \nu x^{\nu-1}, \quad 0 < \nu \leq 1 \quad (4.3.1)$$

выполняются не только в асимптотике больших толщин, но и при любых x , *совершенной фрактальной пылью*, а плотность $\psi_\nu(x)$ – ее *генератором*. Генератор пыли связан с ее плотностью $f_\nu(x)$ уравнением восстановления

$$f_\nu(x) = \psi_\nu(x) + \int_0^x f_\nu(x-x')\psi_\nu(x')dx'. \quad (4.3.2)$$

Поставим задачу найти генератор фрактальной пыли по заданным условиям (4.3.1)

Применим к уравнению восстановления преобразование Лапласа:

$$\widehat{f}_\nu(\lambda) = [1 + \widehat{f}_\nu(\lambda)]\widehat{\psi}_\nu(\lambda). \quad (4.3.3)$$

Случаю $\nu = 1$ (равномерному в среднем распределению атомов на оси, $f_1(x) = \mu_1$) соответствует

$$\psi_1(x) = \mu_1 e^{-\mu_1 x}$$

и, следовательно,

$$\widehat{\psi}_1(\lambda) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \lambda}.$$

Действительно, подставив это выражение в уравнение (4.3.2) и решив его относительно $\widehat{f}_1(\lambda)$, получим

$$\widehat{f}_1(\lambda) = \frac{\widehat{\psi}_1(\lambda)}{1 - \widehat{\psi}_1(\lambda)} = \frac{\mu_1}{\lambda},$$

откуда и следует

$$f_1(x) = \mu_1.$$

Поставим теперь вопрос иначе: какой должна быть плотность $\psi_\nu(x)$, чтобы генерируемая ею стохастическая пыль имела фрактальную размерность $\nu < 1$, то есть чтобы выполнялись соотношения (4.3.1). Учитывая, что

$$\widehat{f}_\nu(\lambda) = \mu_\nu \nu \Gamma(\nu) \lambda^{-\nu},$$

из уравнения (4.3.3) находим

$$\widehat{\psi}_\nu(\lambda) = \frac{\widehat{f}_\nu(\lambda)}{1 + \widehat{f}_\nu(\lambda)} = \frac{\mu}{\mu + \lambda^\nu}, \quad \mu = \mu_\nu \nu \Gamma(\nu).$$

При выполнении обратного преобразования Лапласа

$$\psi_\nu(x) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \widehat{\psi}_\nu(\lambda) \right\} (x) = \mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\mu}{\mu + \lambda^\nu} \right\} (x) = \mu \mathbf{L}^{-1} \left\{ \lambda^{-\nu} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}} \right\} (x)$$

разложим сумму геометрической прогрессии в ряд,

$$\lambda^{-\nu} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{-\nu - j\nu}, \quad \gamma = j\nu + \nu,$$

и воспользуемся соотношением

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \lambda^{-\gamma} \right\} (x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}.$$

В результате получим

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\mu x^\nu)^j}{\Gamma(\nu j + \nu)}.$$

Учитывая представление двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера в виде ряда

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)},$$

перепишем генератор фрактальной пыли в виде:

$$\psi_{\nu}(x) = \mu x^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu x^{\nu}). \quad (4.3.4)$$

Напомним, что $\psi_{\nu}(x)$ – плотность вероятности для случайного расстояния X между соседними атомами фрактальной пыли, запишем вероятность того, что X превысит заданное значение x :

$$P(X > x) = \int_x^{\infty} \psi_{\nu}(x) dx = E_{\nu}(-\mu x^{\nu}).$$

Здесь E_{ν} – однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера (см. Приложение). При $\nu = 1$ она превращается в обычную экспоненту,

$$E_1(-\mu x) = e^{-\mu x},$$

и мы имеем дело с обычным пуассоновским процессом. При $\nu < 1$ мы имеем пуассоновский процесс дробного порядка (дробный пуассоновский процесс) [7-11].

4.4 Дьявольская лестница и дробные производные

График случайной функции $N(t)$ имеет форму лестницы, все ступеньки которой имеют одинаковую высоту, но разную длину. Подниматься по такой лестнице не очень удобно. Особенно это становится неудобным, когда длины ступенек имеют большой разброс: длина ступеньки может оказаться очень большой, и бегущий уже думает, что миновал лестницу вообще, и тут под ноги ему попадаетея вновь ступенька, да и не одна... «Черт побери!» – воскликнет, падая, он подобно герою Юрия Никулина в известном фильме. Оттого-то эта лестница и называется чертовой (дьявольской).

То же самое свойство фрактальной пыли проявляется в следующем эксперименте. Возьмем интервал длиной L с числом атомов N , разобьем его на n ячеек и, подсчитав число атомов в каждой из них, представим результат в виде гистограмм. При $\nu = 1$ вид гистограммы будет зависеть от

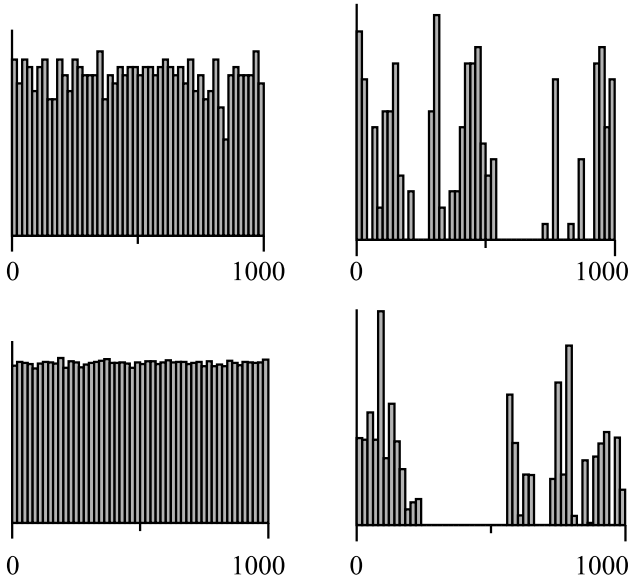


Рис. 4.8: Изменение масштаба разбиения в 100 раз сглаживает гистограмму в случае $\nu = 1$ (слева) и не сглаживает ее в случае $\nu < 1$ ($\nu = 1/2$) (справа) [12].

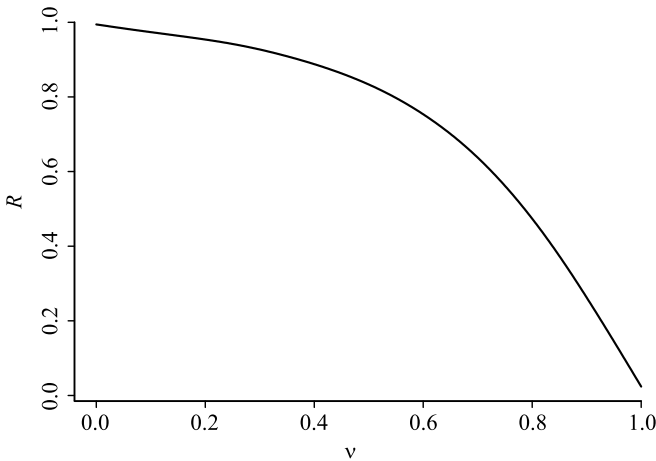


Рис. 4.9: Коэффициент перемежаемости как функция ν [12].

числа атомов $N(L)$ в интервале L и числа ячеек. Если среднее число атомов в ячейке $N(L)/n$ достаточно велико (скажем, больше трех-четырех десятков), то заполнены будут все ячейки и приблизительно одинаковым

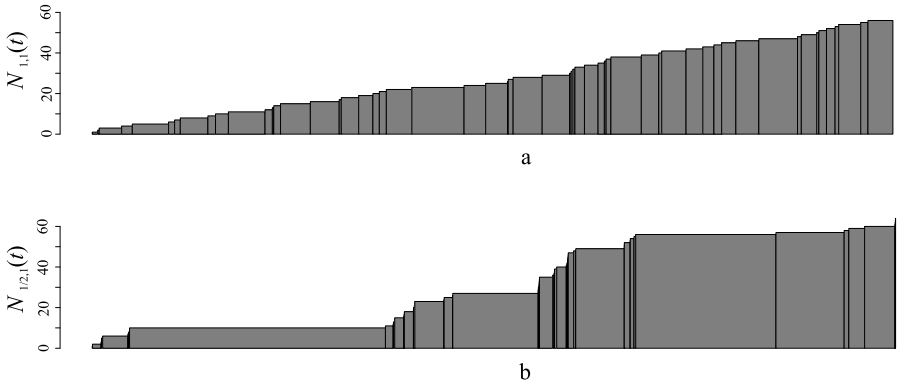


Рис. 4.10: Случайные реализации функции $N_\nu(t)$: $\nu = 1$ (верхний график) и $\nu = 1/2$ (нижний график).

числом атомов. При фрактальном же распределении ($\nu < 1$) часть ячеек, как правило, будет оставаться пустой (Рис. 4.8). Явление это носит название *перемежаемости*. Конечно, и в регулярном случае (при $\nu = 1$) столбики гистограммы не будут иметь одинаковую высоту, но с увеличением N или увеличением длины отрезка L при фиксированном числе ячеек и эта разница будет уменьшаться. Во фрактальном же случае ($\nu < 1$) увеличение N (достигаемое увеличением μ_ν) или L не приводит к качественному изменению картины: по-прежнему видны пустоты и сгущения (Рис. 4.8). Можно сказать, что на самоподобные структуры, коими являются фракталы, философский закон о переходе количества в качество не распространяется.

На рис. 4.9 показана зависимость *коэффициента перемежаемости* (средней доли пустых ячеек при $\mu \rightarrow \infty$)

$$R(\nu) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \langle n_0/n \rangle.$$

Переписав (4.3.3) в виде

$$[\lambda^\nu + \mu] \widehat{\psi}_\nu(\lambda) = \mu$$

и выполнив обратное преобразование, приходим к дробно-дифференциальному уравнению

$${}_0D_x^\nu \psi_\nu(x) + \mu \psi_\nu(x) = \mu \delta(x).$$

Мы уже установили в п. 4.3, что при $\nu < 1$ решение этого уравнения выражается через двухпараметрическую функцию Миттаг-Леффлера

$$\psi_\nu(x) = \mu x^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(-\mu x^\nu), \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}.$$

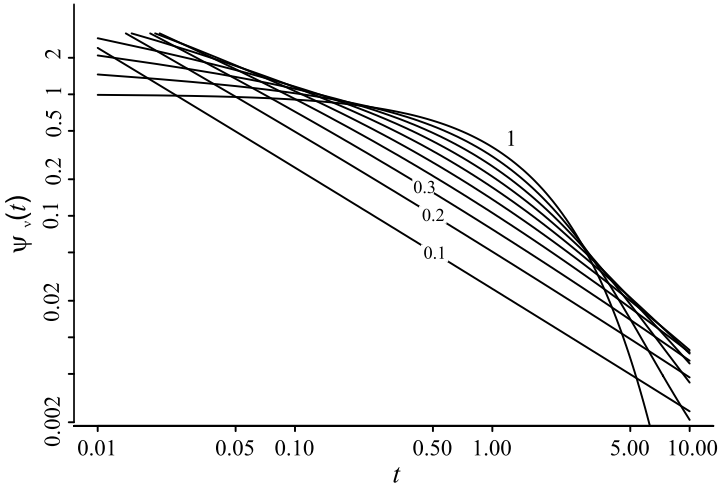


Рис. 4.11: Плотности $\psi_\nu(x)$, $\nu = 0.1(0.1)1$.

Существует еще одно представление этой плотности [7],

$$\psi_\nu(x) = \frac{1}{t} \int_0^\infty e^{-t} \phi_\nu(\mu x/t) dt, \quad \phi_\nu(\xi) = \frac{\sin(\nu\pi)}{\pi[\xi^\nu + \xi^{-\nu} + 2 \cos(\nu\pi)]},$$

позволяющее установить асимптотику поведения плотности при $\alpha \neq 1$ на больших и малых временах (рис. 4.11):

$$\psi_\nu(x) \sim \begin{cases} \frac{\mu^\nu}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1}, & x \rightarrow 0; \\ \frac{\nu\mu^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} x^{-\nu-1}, & x \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Мы снова убеждаемся в том, что дробно-дифференциальные операторы появляются в результате применения требования самоподобия.

Рассмотрим теперь распределение $p_n(x) = \mathbf{P}(N(x) = n)$ для случайного числа атомов фрактальной пыли на отрезке длиной x . Согласно теории восстановления

$$p_n(x) \equiv \mathbf{P}(N(x) = n) = \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^n R_j > x\right) - \mathbf{P}\left(\sum_{j=1}^{n+1} R_j > x\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и следующая система интегральных уравнений для $p_n(x)$ имеет место:

$$p_n(x) = \delta_{n0} \int_x^\infty \psi_\nu(\tau) d\tau + [1 - \delta_{n0}] \int_0^x \psi_\nu(x - \tau) p_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

После преобразования Лапласа:

$$\lambda^\nu \widehat{p}_n(\lambda) = -\mu \widehat{p}_n(\lambda) + \mu \widehat{p}_{n-1}(\lambda) + \lambda^{\nu-1} \delta_{n0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \widehat{p}_{-1} = 0.$$

Обратное преобразование приводит к системе уравнений для фрактального распределения:

$${}_0D_x^\nu p_n(x) = \mu [p_{n-1}(x) - p_n(x)] + \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \delta_{n0}, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (4.4.1)$$

При $\nu \rightarrow 1$ она превращается в систему для регулярного случая:

$$\frac{dp_n(x)}{dx} = \mu [p_{n-1}(x) - p_n(x)] + \delta(x) \delta_{n0}.$$

Здесь использовано предельное (в смысле обобщенных функций) соотношение

$$\lim_{\nu \rightarrow 1} \frac{x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} = \delta(x).$$

Уравнения (4.4.1) и описывают статистические свойства дьявольской лестницы. При $\nu = 1$ длины разных ступенек, хоть и имеют разброс, но разброс этот не критический: нет ни очень коротких ступенек (точнее, они маловероятны), ни очень длинных, и можно как-то приноровиться. Дьявольский характер лестницы проявляется лишь при $\nu < 1$: у плотности распределения длины ступеньки появляется особенность в нуле, порождая сгущения ступенек (кластеры), и тяжелый степенной хвост, ответственный за появление длинных полок, усыпляющих бдительность бегущего. Но плотность распределения длины ступеньки удовлетворяет дифференциальному уравнению, которое при $\nu < 1$ становится дробным. Таким образом, *дьявольский характер лестницы возникает одновременно с дробным характером дифференциального уравнения.*

4.5 Фрактальная пыль в d -мерном пространстве

Пространственный аналог уравнения (4.3.2) имеет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) + \int f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Оно описывает среднюю плотность числа столкновений исчезающей частицы, начинающей свое движение из начала координат с переходной плотностью $p\mathbf{x}$. Это, однако, не единственная интерпретация: если предположить, что в каждом столкновении частица с вероятностью $1 - 1/n$ исчезает и с вероятностью $1/n$ расщепляется на n частиц, продолжающих движение с теми же переходными вероятностями независимо друг от друга, для средней плотности столкновений мы вновь придем к тому же самому уравнению.

Собственно движение нас в данном случае не интересует, мы будем рассматривать лишь *след*, оставленный частицей в виде конечного или бесконечного множества точек в пространстве (назовем его, для краткости, *пылью*) – тех самых точек, где частица испытала столкновения. Образ блуждающей частицы просто позволяет лучше представить себе общую картину корреляций в этом множестве случайных точек и воспользоваться готовым математическим аппаратом теории переноса.

Решение этой задачи для изотропной экспоненциальной плотности

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi r^2} e^{-r}, \quad r = |\mathbf{x}|$$

хорошо известно [13]. Асимптотическое поведение функции $f(\mathbf{x})$ при этом имеет вид

$$f^{as}(\mathbf{x}) \propto r^{-1}, \quad r \rightarrow \infty.$$

К такому же результату мы придем и при любом другом выборе переходной плотности, удовлетворяющей условию

$$\sigma^2 \equiv \int p(\mathbf{x}) |\mathbf{x}|^2 d\mathbf{x} < \infty.$$

Ситуация изменится в случае, если дисперсия бесконечна, к этой категории относятся и блуждания с переходной плотностью

$$\psi(\mathbf{x}) \propto r^{-3-\alpha}, \quad r \rightarrow \infty, \quad \alpha < 2$$

называемые «полетами Леви».

Непосредственное преобразование Фурье интегрального уравнения

$$[1 - \tilde{\psi}(\mathbf{k})] \tilde{f}(\mathbf{k}) = 1$$

в области малых $|\mathbf{k}|$, когда

$$1 - \tilde{\psi}(\mathbf{k}) \propto |k|^\alpha,$$

приводит к соотношению

$$|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}^{as}(\mathbf{k}) = 1,$$

эквивалентному уравнению с дробным лапласианом

$$-(-\Delta)^{\alpha/2} f^{as}(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x}).$$

Его решение имеет вид

$$f^{as}(\mathbf{x}) = C(\alpha)r^{-3+\alpha},$$

где $C(\alpha)$ – нормировочная постоянная. Обратите внимание на изменение знака перед α : так же, как и в одномерном случае в выражении для переходной плотности перед α стоит минус, а в формуле для плотности всех точек – плюс. Такое поведение решения является следствием бесконечной длины траектории. Если траектория имеет конечное (детерминированное или случайное с конечным средним) число узлов, то асимптотика $f^{as}(\mathbf{x})$ будет такой же, как и $p(\mathbf{x})$, то есть $\propto r^{-3-\alpha}$, хотя, если это число (в среднем) велико, то функция $f^{as}(\mathbf{x})$ будет иметь ярко выраженный участок с поведением $\propto r^{-3+\alpha}$, сменяющийся участком, где $f^{as}(\mathbf{x}) \propto r^{-3-\alpha}$ [14].

В случае бесконечной траектории среднее число ее узлов в шаре радиуса R асимптотически растет по закону:

$$\langle N(R) \rangle \propto R^\alpha, \quad \alpha \in (0, 2].$$

Б. Мандельброт использовал полеты Леви для моделирования распределения галактик (узлов) и получил качественное согласие с наблюдательными данными, что породило еще один термин, популярный в последние годы – *фрактальная космология*.

Поставим теперь в d -мерном пространстве ту же задачу, что и в одномерном: найдем переходную плотность (d -мерный генератор фрактальной пыли), порождающий совершенную фрактальную пыль, то есть, коррелированную систему случайных точек, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \langle N(r) \rangle &= Br^D, \quad r = |\mathbf{x}|, \\ f(\mathbf{x}) &= \frac{d\langle N(r) \rangle}{S_d r^{d-1} dr} = \frac{BD}{S_d} r^{D-d}, \quad 0 < r < \infty. \end{aligned}$$

при всех $r \in (0, \infty)$, а не только в асимптотике больших расстояний. Единственное отличие от одномерного случая, где блуждание было направленным, многомерное блуждание будем предполагать изотропным.

Применив преобразование Фурье по вектору \mathbf{x}

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) = \tilde{\psi}(\mathbf{k})\tilde{f}(\mathbf{k}) + \tilde{\psi}(\mathbf{k}),$$

находим

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{f}(\mathbf{k})}{\tilde{f}(\mathbf{k}) + 1}.$$

Можно показать, что

$$\tilde{f}(\mathbf{k}) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{BD}{S_d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} r^{D-d} d\mathbf{x} = C_d(D) |\mathbf{k}|^{-D},$$

где

$$C_d(D) = \frac{BD}{S_d} \frac{2^D \pi^{d/2} \Gamma(D/2)}{\Gamma((d-D)/2)}.$$

Таким образом, трансформанта Фурье искомого генератора

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{1 + C_d^{-1} |\mathbf{k}|^D}.$$

удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = -C_d^{-1} |\mathbf{k}|^D \tilde{\psi}(\mathbf{k}) + 1,$$

а сам он – уравнению с лапласианом в дробной степени:

$$\psi(\mathbf{x}) = -(-\Delta_d)^{D/2} \psi(\mathbf{x}) + \delta(\mathbf{x}).$$

Используя тождество

$$\frac{1}{1 + C_d^{-1} |\mathbf{k}|^D} = \int_0^\infty e^{-[1 + C_d^{-1} |\mathbf{k}|^D]t} dt,$$

перепишем трансформанту Фурье в виде

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}) = \int_0^\infty e^{-t} \tilde{g}_d((C_d^{-1}t)^{1/D} \mathbf{k}; D) dt, \quad D \in (0, 2].$$

Обратное преобразование Фурье приводит к формуле

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{k} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \int_0^\infty e^{-t} \tilde{g}_d((C_d^{-1}t)^{1/D} \mathbf{k}; D) dt = \\ &= \int_0^\infty dt e^{-t} (C_d/t)^{d/D} g_d((C_d/t)^{1/D} \mathbf{x}; D) = \\ &= C_d D r^{D-d} \int_0^\infty e^{-C_d(r/\xi)^D} \xi^{d-D-1} g_d(\xi; D) d\xi. \end{aligned}$$

Мы учли здесь изотропию распределений и использовали обозначение r для $|\mathbf{x}|$ и ξ для $(C_d/t)^{1/D}|\mathbf{x}|$. Заметим, что плотность перехода имеет в нуле особенность порядка $r^{-(d-D)}$:

$$\psi(r) \sim DC_d r^{D-d} \int_0^\infty \xi^{d-D-1} g_d(\xi; D) d\xi = \frac{2^{-D} C_d \Gamma((d-D)/2)}{\Gamma(D/2)} r^{-(d-D)}, \quad r \rightarrow 0.$$

Применение асимптотического разложения для устойчивой плотности приводит к соответствующему разложению для искомого генератора:

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{D^2}{2\pi^{d/2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{nD} n \Gamma((nD+d)/2)}{C_d^n \Gamma(1-nD/2)} r^{-nD-d} \sim \\ &\sim \frac{D^2}{2\pi^{d/2}} \frac{2^D \Gamma((D+d)/2)}{C_d \Gamma(1-D/2)} r^{-D-d}, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Литература

1. *Mandelbrot B.* Fractals: Form, Chance and Dimension. – San-Francisco: W. H. Freeman, 1977.
2. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. – New-York: W. H. Freeman, 1983.
3. *Федер Е.* Фракталы. – М.: Мир, 1991.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Москва-Ижевск: РХД, 2001.
5. Фракталы в физике. Под. ред. *Пьетронеро Л., Тозатти Э.* – М.: Мир, 1988.
6. *Пайтген Х.-О., Рухтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993.
7. *Репин О. Н., Саучев А. И.* Известия вузов. Радиофизика **43**, 823 (2000).
8. *Jumarie G.* Chaos, Solitons and Fractals **12**, 2577 (2001).
9. *Laskin N.* Comm. Nonlinear Sci. and Numer. Simulattion **8**, 201 (2003).
10. *Wang Xiao-Tian, Wen Zhi-Xiong.* Chaos, Solitons and Fractals **18**, 169 (2003).

11. *Wang Xiao-Tian, Wen Zhi-Xiong, Zhang Shi-Ying*. Chaos, Solitons and Fractals **28**, 143 (2006).
12. *Uchaikin V., Cahoy D., Sibatov R.* Int. J. of Bifurcation and Chaos **18**, 1 (2008).
13. *Кеүз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. – М.: Мир, 1972.
14. *Uchaikin V. V., Gusarov G. G.* J. Math. Phys. **38**, 2453 (1997).
15. *Slobodenyuk V. A., Uchaikin V. V.* J. Math. Sci. **89**, 1570 (1998).
16. *Потанов А. А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005.
17. Фракталы в прикладной физике. Под ред. *Дубинова А. Е.* – Арзамас-16: ВНИИЭФ, 1995.

Часть II

Математические основы
метода

Глава 5

От кратных интегралов к дробным производным

5.1 Производные натуральных порядков

Пусть D_x – обыкновенный дифференциальный оператор, $D_x \equiv \frac{d}{dx}$. Многократное применение его к дифференцируемой должное число раз функции $f(x)$,

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= D_x f(x), \\ f^{(2)}(x) &= D_x f^{(1)}(x) = D_x^2 f(x), \\ &\dots, \\ f^{(n)}(x) &= D_x f^{(n-1)}(x) = D_x^n f(x), \\ &\dots, \end{aligned}$$

производит последовательность производных натуральных порядков

$$f^{(1)}(x), \quad f^{(2)}(x), \quad \dots, \quad f^{(n)}(x), \quad \dots$$

каждый член которой получается из предыдущего рекуррентным соотношением

$$f^{(n)}(x) = D_x f^{(n-1)}(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad f^{(0)} \equiv f(x).$$

Удобно дополнить эту последовательность *производной нулевого порядка*, положив ее равной самой функции

$$f^{(0)}(x) = D_x^0 f(x) = f(x).$$

Наряду с символом $f^{(n)}(x)$ мы будем использовать для обозначения производной соответствующую степень оператора дифференцирования

$$f^{(n)}(x) = D_x^n f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Использование операторной символики особенно удобно тогда, когда переменная, по которой ведется дифференцирование, отличается от аргумента функции, например,

$$D_x^n f(ax) = \frac{d^n f(ax)}{dx^n} = a^n \frac{d^n f(ax)}{d(ax)^n} = a^n f^{(n)}(ax) \neq f^{(n)}(ax).$$

Получаемые применением рекуррентного соотношения производные обладают следующими свойствами:

1. Однородность:

$$D_x^n f(bx + c) = b^n f^{(n)}(bx + c).$$

2. Линейность:

$$[bf(x) + cg(x)]^{(n)} = bf^{(n)}(x) + cg^{(n)}(x), \quad b, c = \text{const}$$

3. Сложение порядков (полугрупповое свойство):

$$[f^{(n)}(x)]^{(m)} = [f^{(m)}(x)]^{(n)} = f^{(m+n)}(x).$$

Последнее имеет более наглядный вид, будучи представлено в операторной форме:

$$D_x^m D_x^n = D_x^n D_x^m = D_x^{m+n}.$$

4. Производная произведения (правило Лейбница):

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

5. Производная степенной функции с положительным целым показателем:

$$D_x^n (x-a)^m = m(m-1)\dots(m-n+1)(x-a)^{m-n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-n)}(x-a)^{m-n},$$

$$-\infty < a < \infty, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Заметим, что

$$D_x^n (x-a)^m = \begin{cases} m!, & n = m, \\ 0, & n > m \end{cases}$$

6. Производная от степенной функции с отрицательным целым показателем, часто используемая для разложения функций в асимптотические (при $x \rightarrow \infty$) ряды, имеет вид:

$$D_x^n (x - a)^{-m} = (-1)^n [\Gamma(m + n) / \Gamma(m)] (x - a)^{-(m+n)}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

7. Подобно оператору D_x , имеющему постоянные функции $C_1(x) = c$, $c = \text{const}$, для которых $D_x C_1(x) = 0$, операторы D_x^n имеют свои «постоянные» функции $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x - a)^k$:

$$D_x^n C_n(x) = D_x^n \sum_{k=0}^{n-1} c_k (x - a)^k = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad c_k = \text{const}, \quad C_0(x) = 0.$$

5.2 Производные целых отрицательных порядков

Рассмотрим другую последовательность функций $f_m(x)$, получаемую из той же исходной функции $f(x)$ повторным интегрированием от некоторого фиксированного предела a до текущего значения x :

$$f_1(x) = \int_a^x d\xi_1 f(\xi_1), \quad f_2(x) = \int_a^x d\xi_2 \int_a^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1), \quad \dots,$$

$$f_n(x) = \int_a^x d\xi_n \int_a^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_a^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1), \dots$$

Заметим, что

$$D_x f_n(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f_{n-1}(\xi) d\xi = f_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

или

$$f_{n-1}(x) = D_x f_n(x).$$

Теперь оператор D_x связывает члены этой последовательности в обратном направлении: будучи примененным к одному из них, например к $f_n(x)$, он дает *предыдущий* член $f_{n-1}(x)$. Если же переобозначить члены новой последовательности, изменив знак перед порядком n ,

$$f_n(x) \equiv {}_a f^{(-n)}(x),$$

и пристроить их слева к последовательности производных положительных порядков в порядке возрастания новых номеров, мы получим бесконечную в обе стороны последовательность с одним и тем же направлением генерации ее членов с помощью оператора D_x – слева направо:

$$\dots, {}_a f^{(-n)}(x), \dots, {}_a f^{(-1)}(x), f^{(0)}(x), f^{(1)}(x), \dots f^{(n)}(x), \dots$$

Члены с отрицательными значениями порядков снабжены нижним индексом a , указывающим нижний предел интегрирования (члены с положительными порядками, то есть, «настоящие» производные, в этих индексах не нуждаются, они – локальные характеристики функции, отражающие ее поведение в окрестности данной точки x , а не в конечном интервале (a, x) , как интегралы). Удобно ввести оператор интегрирования

$${}_a I_x f(x) \equiv \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

так что

$${}_a f^{(-n)}(x) = {}_a I_x {}_a f^{(-n+1)}(x) = {}_a I_x^n f(x).$$

Применяя правило Дирихле об изменении порядка интегрирования в двукратном интеграле с переменным пределом внутреннего,

$$\int_a^x d\xi_2 \int_a^{\xi_2} d\xi_1 \dots = \int_a^x d\xi_1 \int_{\xi_1}^x d\xi_2 \dots,$$

и используя метод математической индукции, можно преобразовать многократные интегралы этой последовательности в однократные со степенными ядрами, придя к так называемой формуле Коши:

$${}_a f^{(-n)}(x) = \int_a^x d\xi_n \int_a^{\xi_n} d\xi_{n-1} \dots \int_a^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Используя эти формулы, нетрудно убедиться в том, что три первые свойства производных целых положительных порядков остаются справедливыми и по отношению к функциям ${}_a f^{(-n)}(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$:

1. ${}_a D_x^{-n} f(bx + c) = b^{-n} {}_{ab+c} f^{(-n)}(bx + c)$;
2. ${}_a [bf(x) + cg(x)]^{(-n)} = b {}_a f^{(-n)}(x) + c {}_a g^{(-n)}(x)$, $b, c = \text{const}$;

$$3. {}_a D_x^{-m} {}_a D_x^{-n} = {}_a D_x^{-n} {}_a D_x^{-m} = {}_a D_x^{-m-n}, \quad m, n > 0.$$

Так, первое свойство доказывается следующей выкладкой:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^{-n} f(bx+c) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(b\xi+c) d\xi = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{b} \int_{ab+c}^{bx+c} \left(x - \frac{\zeta-c}{b}\right)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \frac{1}{bb^{n-1}} \int_{ab+c}^{bx+c} (bx+c-\zeta)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = \\ &= \frac{1}{b^n} \frac{1}{(n-1)!} \int_{ab+c}^{bx+c} (bx+c-\zeta)^{n-1} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{b^n} {}_{ab+c} f^{(-n)}(bx+c). \end{aligned}$$

Второе следует из общего свойства линейности интегралов, третье вытекает из самой структуры кратного интеграла.

Согласно аксиоматике Росса [1], этих трех свойств достаточно для присвоения функциям ${}_a f^{(n)}(x)$ звания производных порядка $-n$ в точке x промежутка $(a, x]$. Таким образом, производная отрицательного порядка $-n$ функции $f(x)$ есть просто n -кратный интеграл от этой функции по $(a, x]$.

Свойство 3, отражающее коммутативность дифференциальных операторов D_x^n ($n > 0$) между собой, и интегральных операторов ${}_a I_x^n = {}_a D_x^{-n}$ ($n > 0$) между собой, сохраняется и в смешанном случае, когда дифференциальный оператор действует после интегрального,

$$D_x^n {}_a I_x^m f(x) = {}_a D_x^{n-m},$$

но не имеет места в случае обратного порядка, например,

$$D_x {}_a I_x f(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi) d\xi = f(x),$$

тогда как

$${}_a I_x D_x f(x) = \int_a^x \frac{d}{d\xi} f(\xi) d\xi = f(x) - f(a) \neq f(x) = D_x {}_a I_x f(x).$$

По этой причине D_x^n , $n > 0$, являясь левым обратным оператором по отношению к $a I_x^n$, не является правым:

$$a I_x^n D_x^n f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a+) \frac{(x-a)^k}{k!} \neq f(x) = D_x^n a I_x^n f(x), \quad x > 0.$$

Проверим остальные свойства.

4. Заменяем в формуле Лейбница факториалы $n!$ и $(n-k)!$ гамма-функциями $\Gamma(n+1)$ и $\Gamma(n+1-k)$ соответственно, и, приняв во внимание, что $\Gamma(n+1-k)$ имеет полюса в точках $k = n+1, n+2, \dots$, распространим суммирование по k до бесконечности:

$$[f(x)g(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n+1-k)} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Воспользуемся далее свойством гамма-функции

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots (n-k+1) \Gamma(n-k+1)$$

и после сокращения числителя и знаменателя на $k! \Gamma(n-k+1)$ заменим в обеих частях равенства n на -1 :

$$a [f(x)g(x)]^{(-n)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k f^{(k)}(x) g^{(-n-k)}(x), \quad n = 1.$$

Множкратно повторяя операцию интегрирования по частям в выражении

$$a [f(x)g(x)]^{(-1)} = \int_a^x f(\xi) g(\xi) d\xi,$$

убеждаемся в справедливости записанного выше обобщения формулы Лейбница на случай однократного интегрирования.

5. Производная отрицательного порядка степенной функции с положительным показателем

$$\begin{aligned} a D_x^{-n} (x-a)^m &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} (\xi-a)^m d\xi = \\ &= \frac{(x-a)^{m+n}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-z)^{n-1} z^m dz = [\Gamma(m+1)/\Gamma(m+1+n)] (x-a)^{m+n}, \\ &-\infty < a < \infty, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

6. Производные отрицательных порядков степенных функций с отрицательными целыми показателями не существуют.

7. Интегральные операторы нулевых функций (то есть функций, не равных тождественно нулю, но обращающих интеграл в нуль при любом значении переменного предела) не имеют.

8. Наряду с левосторонними интегралами

$${}_a I_x^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi) d\xi$$

можно ввести и правосторонние:

$${}_x I_b^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_x^b (\xi-x)^{n-1} f(\xi) d\xi.$$

Очевидно, ${}_a I_x^n = (D_x^{-1})^n = D_x^{-n}$, тогда как ${}_x I_b^n = (-D_x^{-1})^n = (-1)^n D_x^{-n}$.

5.3 Дробные интегралы Римана-Лиувилля

Изобразим результаты нашей деятельности на диаграмме, представляющей собой вещественную ось ν , каждая точка которой изображает производную порядка, равного координате этой точки. Сама функция при этом изображается точкой начала координат (производная нулевого порядка). Мы начали с оператора дифференцирования D_x , применение которого к исходной функции дает первую производную, перемещая представляющую точку вправо на единичное расстояние (Рис. 5.1). Повторным применением этого оператора мы заполнили все точки с целочисленными координатами на положительной полуоси (черные точки). Приписав каждой точке с отрицательной целой координатой (светлые точки) повторный интеграл соответствующей кратности, мы обнаружили, что применение дифференциального оператора D_x и в этой области перемещает точки на единичное расстояние в том же положительном направлении оси ν , обеспечивая последовательный переход от кратных интегралов через саму функцию к кратным производным (Рис. 5.2). Мы получили одномерную кристаллическую решетку, каждый «атом» которой соответствует производной определенного целого (по модулю) порядка (если кратные интегралы называть производными отрицательных целых порядков). Наша задача теперь – заполнить промежутки между этими атомами, перейти от целых чисел $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ к вещественным, непрерывно заполняющим ось ν . Решение этой задачи мы проведем в два этапа.

На первом этапе мы обобщим понятие кратного интеграла (интеграла целой кратности) на дробные порядки. Разумеется, мы не можем проинтегрировать функцию *полтора* или *три с четвертью* раза. Но у нас есть удобный аналитический инструмент – формула Коши:

$${}_a f^{(-m)}(x) = \int_a^x d\xi_m \int_a^{\xi_m} d\xi_{m-1} \dots \int_a^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1) = \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{m-1} f(\xi) d\xi,$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

превращающая повторный интеграл произвольной целой кратности m в однократный интеграл с ядром степенного типа. Это представление и может быть использовано для аналитического продолжения интегралов целой кратности m в область вещественных значений «кратности» $\mu > 0$ (дробный аналог формулы Коши):

$${}_a f_\mu(x) \equiv {}_a f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-\xi)^{\mu-1} f(\xi) d\xi, \quad \mu > 0.$$

Первое, что теперь надо сделать, это проверить, выполняются ли основные соотношения (1-3) в случае дробных значений показателя. Очевидно, при $\mu = m = 1, 2, 3, \dots$ эта формула совпадает с формулой Коши, и соотношения эти выполняются. Рассмотрим общий случай, положив $\nu = -\mu < 0$. Свойство 1)

$${}_a D_x^\nu f(bx + c) = b^\nu {}_{ab+c} f^{(\nu)}(bx + c), \quad \nu < 0,$$

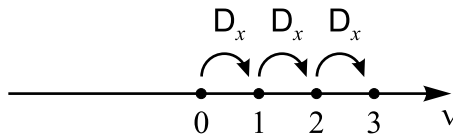


Рис. 5.1: Производные натуральных порядков.

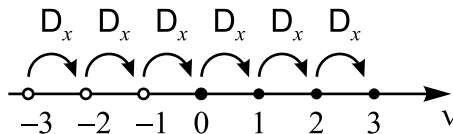


Рис. 5.2: Производные целых порядков обоих знаков (дифференциалы).

проверяется элементарно,

$${}_a D_x^\nu f(bx + c) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x - \xi)^{-\nu-1} f(b\xi + c) d\xi = b^\nu {}_{ab+c} f^{(\nu)}(bx + c).$$

Свойство 2)

$${}_a [bf(x) + cg(x)]^{(\nu)} = b {}_a f^{(\nu)}(x) + c {}_a g^{(\nu)}(x), \quad b, c = \text{const}, \nu < 0,$$

следует из линейности интегрального оператора. Свойство 3)

$${}_a D_x^\mu {}_a D_x^\nu = {}_a D_x^\nu {}_a D_x^\mu = {}_a D_x^{\mu+\nu}, \quad \mu, \nu < 0$$

(заметьте, здесь оба показателя μ и ν отрицательны) доказывается следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\mu {}_a D_x^\nu f(x) &= {}_a D_x^\nu \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x - \xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)\Gamma(-\nu)} \int_a^x d\eta (x - \eta)^{-\mu-1} \int_a^\eta (\eta - \xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\mu)\Gamma(-\nu)} \int_a^x \left[\int_\xi^x (x - \eta)^{-\mu-1} (\eta - \xi)^{-\nu-1} d\eta \right] f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(-\nu - \mu)} \int_a^x (x - \xi)^{-\mu-\nu-1} f(\xi) d\xi \equiv {}_a D_x^{\mu+\nu} f(x), \quad \mu, \nu < 0. \end{aligned}$$

Здесь использовано правило Дирихле при перестановке интегралов и формула

$$\int_0^1 (1-x)^{-\mu-1} x^{-\nu-1} dx = \frac{\Gamma(-\mu)\Gamma(-\nu)}{\Gamma(-\mu-\nu)}.$$

Таким образом, функция

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x - \xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, \quad \nu < 0, \quad (5.3.1)$$

называемая *дробным интегралом Римана-Лиувилля порядка $-\nu > 0$* от функции $f(x)$, может быть принята в качестве *дробной производной Римана-Лиувилля отрицательного порядка $\nu < 0$* . Непрерывное множество этих производных изображено светлой линией на отрицательной полусоси ν (Рис. 5.3).

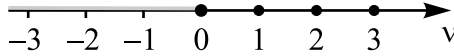


Рис. 5.3: Производные отрицательных вещественных порядков (светлая линия).

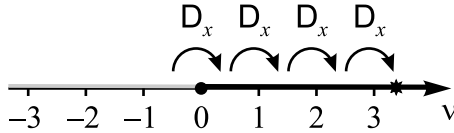


Рис. 5.4: Переход от дробных интегралов к дробным производным.

5.4 Дробные производные Римана-Лиувилля и Вейля

Определив дробные производные отрицательных порядков, необходимо продолжить их в область положительных вещественных порядков. Казалось бы, это можно сделать простым изменением знака порядка: имея выражение (5.3.1) для отрицательных ν , распространить его же на положительные значения. Дело, однако, в том, что при положительных ν интеграл

$$\int_a^x (x - \xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi$$

расходится на верхнем пределе.

Один из путей преодоления этой трудности был развит Риманом и Лиувиллем. Их подход был основан на продолжении соотношения

$${}_a f^{(n)}(x) = D_x^k {}_a f^{(n-k)}(x) = D_x^k {}_a I_x^{k-n} f(x), \quad n < k = 1, 2, 3, \dots$$

в область положительных значений нецелых ν :

$${}_a f^{(\nu)}(x) = D_x^k {}_a I_x^{k-\nu} f(x). \quad (5.4.1)$$

Здесь k можно положить равным любому натуральному числу, превосходящему ν . Удобно, однако, взять наименьшее из таких чисел, так что

$$k - 1 \leq \nu < k.$$

Наглядно эту процедуру можно описать следующим образом. Предположим, нам необходимо найти производную ${}_a f^{(3,4)}(x)$ (звездочка на оси ν , Рис. 5.4). Мы же умеем находить производные любых (целых и дробных) отрицательных порядков и целых положительных порядков.

Сделаем несколько шагов единичной длины от точки ν в отрицательном направлении оси, так, чтобы в результате попасть на отрицательную полуось. Пусть k – число таких шагов до попадания в первый единичный интервал отрицательной полуоси $(-1, 0)$ (в нашем примере $k = 4$). Мы пришли в точку с отрицательной координатой $\nu - k = -0.6$, производная такого порядка вычисляется по дробному аналогу формулы Коши:

$${}_a f^{(\nu-k)}(x) \equiv {}_a f_{k-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{k-\nu-1} f(\xi) d\xi.$$

Чтобы вернуться в исходную точку, надо сделать те же k шагов, но уже вправо. Каждому такому шагу соответствует оператор D_x и k шагам соответствует k -я степень этого оператора. В результате получаем

$${}_a f^{(\nu)}(x) = D_x^k {}_a f^{(\nu-k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} D_x^k \int_a^x (x-\xi)^{k-\nu-1} f(\xi) d\xi.$$

Заметив, что число k на единицу больше целой части исходного порядка ν , обозначаемой $[\nu]$, перепишем эту функцию, называемую *производной Римана-Лиувилля* (положительного порядка) функции $f(x)$, в виде

$${}_a f^{(\nu)}(x) = D^{[\nu]+1} {}_a I_x^{1-\{\nu\}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\{\nu\})} D_x^{[\nu]+1} \int_a^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\{\nu\}}}$$

где $\{\nu\}$ означает дробную часть числа ν , $0 \leq \{\nu\} < 1$, так что $\nu = [\nu] + \{\nu\}$. В развернутом виде выражение для дробной производной произвольных (как положительных, так и отрицательных) порядков записывается следующим образом:

$${}_a f^{(\nu)}(x) \equiv {}_a D_x^\nu f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x (x-\xi)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, & \nu < 0, \\ \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_a^x (x-\xi)^{-\nu} f(\xi) d\xi, & 0 \leq \nu < 1, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} D_x^2 \int_a^x (x-\xi)^{-\nu+1} f(\xi) d\xi, & 1 \leq \nu < 2, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots \end{cases}$$

В рассматриваемых нами дробных производных интегрирование ведется от постоянного нижнего предела до переменного верхнего, по которому (при положительных ν) выполняется дифференцирование. Такие

производные называются *левосторонними*. Их *правосторонние* аналоги определяются соотношением

$$f_b^{(\nu)}(x) \equiv {}_x D_b^\nu f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_x^b (\xi - x)^{-\nu-1} f(\xi) d\xi, & \nu < 0; \\ \frac{1}{\Gamma(1 - \{\nu\})} (-D_x)^{[\nu]+1} \int_x^b \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^{\{\nu\}}}, & \nu \geq 0, \end{cases}$$

В качестве пределов дробных производных могут выступать 0 и ∞ . Иногда производные (интегралы) вида ${}_{-\infty} f^{(\nu)}(x)$ называют *производными (интегралами) Лиувилля* $f_\infty^{(\nu)}(x)$ – *производными (интегралами) Вейля*. Последние иногда модифицируются следующим образом:

$$f_\infty^{(\nu)}(x) = \frac{e^{i(\nu+1)\pi}}{\Gamma(1 - \{\nu\})} D_x^{[\nu]+1} \int_x^\infty \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - x)^{\{\nu\}}}.$$

Читателю, желающему углубиться в теорию дробных операторов, можно порекомендовать книги [2, 3], а тем, кому доступны зарубежные издания – книги [4-6].

5.5 Свойства дробных производных ${}_a f^{(\nu)}(x)$

5.5.1 Элементарные свойства

1. Линейность:

$${}_a D_x^\nu (bf(x) + cg(x)) = b {}_a f^{(\nu)}(x) + c {}_a g^{(\nu)}(x).$$

2. Формула линейного преобразования предела:

$${}_{a+b+c} D_x^\nu f(x) = b^{-\nu} {}_a D_{(x-c)/b}^\nu f(bx + c), \quad b > 0.$$

3. Формула линейного преобразования аргумента:

$${}_a D_x^\nu f(bx + c) = b^{-\nu} {}_{ab+c} D_x^\nu f(x), \quad b > 0.$$

4. Формулы отражения: пусть

$$R_c f(x) \equiv f(c - x), \quad c \in R,$$

тогда для $\nu < 0$) имеют место соотношения

$${}_a D_x^\nu = R_{a+b} {}_x D_b^\nu R_{a+b} f(x),$$

и

$${}_{-\infty} D_x^\nu = R_0 {}_x D_\infty^\nu R_0 f(x).$$

5.5.2 Формулы сложения порядков

Пусть α и β – положительные вещественные числа, так что ${}_a D_x^{-\alpha} = {}_a I_x^\alpha$ и ${}_a D_x^{-\beta} = {}_a I_x^\beta$, а m и n – натуральные числа 1, 2, 3, ... для целых производных обобщается в следующую систему формул для дробных:

$${}_a D_x^{-\alpha} {}_a D_x^{-\beta} f(x) = {}_a D_x^{-\alpha-\beta} f(x);$$

$${}_a D_x^\alpha {}_a D_x^{-\beta} f(x) = {}_a D_x^{\alpha-\beta} f(x), \quad \beta \geq \alpha;$$

$${}_a D_x^{-\alpha} {}_a D_x^\beta f(x) = D^{-\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^n {}_a f^{(\beta-j)}(a+) \frac{(x-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)};$$

$${}_a D_x^\alpha {}_a D_x^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x) - \sum_{j=1}^n {}_a f^{(\beta-j)}(a+) \frac{(x-a)^{-\alpha-j}}{\Gamma(1-\alpha-j)};$$

$$m-1 < \alpha \leq m, \quad n-1 < \beta \leq n, \quad \alpha + \beta < n.$$

Здесь

$${}_a f^{(\nu)}(a+) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} {}_a D_{a+\varepsilon}^\nu f(a + \varepsilon).$$

5.5.3 Обратные операторы

Сопоставим теперь дробные производные противоположных по знаку порядков. Равенство

$${}_a D_x^\nu {}_a D_x^{-\nu} f(x) = f(x)$$

при $\nu > 0$ выполняется для любой суммируемой функции $f(x)$, в то время как обратный порядок применения этих же операторов дает иной результат

$${}_a D_x^{-\nu} {}_a D_x^\nu f(x) = f(x) - \sum_{j=1}^n {}_a f^{(\nu-j)}(a+) \frac{(x-a)^{\nu-j}}{\Gamma(\nu-j)}, \quad n-1 < \nu \leq n = 1, 2, \dots,$$

обобщающий известную формулу Ньютона-Лейбница. В частности, при $0 < \nu = \alpha \leq 1$

$${}_a D_x^{-\alpha} {}_a D_x^\alpha f(x) = f(x) - \frac{(x-a)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_a f^{(\alpha-1)}(a+).$$

Таким образом, оператор ${}_a D_x^\nu$ является *левым обратным* к ${}_a D_x^{-\nu}$ оператором, но (как и в случае целых порядков) не наоборот.

5.5.4 Почленное дифференцирование

Если бесконечные ряды функций $\sum f_j$ и $\sum {}_a D_x^\nu f_j$ сходятся равномерно в круге $0 < |x - a| < R$, то при любых ν в нем справедлива формула

$${}_a D_x^\nu \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} {}_a D_x^\nu f_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} {}_a f_j^{(\nu)}(x).$$

5.5.5 Дифференцирование произведения

Существует несколько форм, обобщающих известную формулу Лейбница на дробные порядки. Одна из них имеет вид ряда

$${}_a D_x^\nu [f(x)g(x)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c \binom{\nu}{ck + \mu} {}_a f^{(\nu - ck - \mu)}(x) {}_a g^{(ck + \mu)}(x),$$

где $0 < c \leq 1$, а μ - произвольное вещественное число. При $c = 1$ и $\mu = 0$ этот ряд принимает вид

$${}_a D_x^\nu [f(x)g(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{k! \Gamma(\nu - k + 1)} {}_a f^{(\nu - k)}(x) g^{(k)}(x),$$

а при $\nu = n$ превращается в обычную формулу Лейбница. Другая представляется интегралом по порядку дробных производных:

$${}_a D_x^\nu [f(x)g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\nu + 1 - \mu)} {}_a f^{(\nu - \mu)}(x) {}_a g^{(\mu)}(x) d\mu.$$

5.5.6 Обобщенные ряды Тейлора

Обычный ряд Тейлора позволяет восстановить аналитическую функцию во всей области ее определения по счетному множеству ее производных целых порядков в одной точке. С переходом к дробным производным возможности такого представления расширяются, и это понятно: нелокальная дробная производная «вмещает» в себя больше информации, чем локальная целая. Одно из таких обобщений ряда Тейлора имеет вид:

$$f(x + \xi) = c \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(ck + \mu + 1)} {}_a f^{(ck + \mu)}(x) \xi^{ck + \mu}, \quad 0 < c \leq 1.$$

Полагая здесь $c = 1$, $\mu = 0$ и принимая во внимание, что $1/\Gamma(k + 1) = 0$, при $k = -1, -2, -3, \dots$, приходим к обычному ряду Тейлора.

Другой вариант обобщения ряда Тейлора основан на использовании последовательности дробных производных

$${}_a \mathcal{D}_x^{(\nu_j)} f(x) \equiv {}_a I_x^{1-\nu_j-\nu_{j-1}} {}_a f^{(1+\nu_{j-1})}(x), \quad \nu_0 = 0,$$

$$0 < \nu_j - \nu_{j-1} \leq 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m:$$

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{\nu_j}}{\Gamma(\nu_j+1)} {}_a \mathcal{D}_x^{(\nu_j)} f(a).$$

Заметим, что, вообще говоря,

$${}_a \mathcal{D}_x^{(\nu_j)} f(x) \neq {}_a \mathbf{D}_x^{(\nu_j)} f(x),$$

хотя на «хороших» функциях эти производные совпадают [4, с. 52].

Существует вариант, использующий только дробные интегралы. Формула

$$\int_0^{\infty} f(x+\xi) \xi^{\mu-1} d\xi = \Gamma(\mu) {}_x I_{\infty}^{\mu} f(x)$$

при фиксированном x и $\mu > 0$ есть не что иное как *трансформанта Меллина функции* $\varphi_x(\xi) \equiv f(x+\xi)$. Выполняя обратное преобразование и полагая $x = 0$, получим искомое разложение, но не в ряд по производным, а в *интеграл по интегралам*:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mu-i\infty}^{\mu+i\infty} \Gamma(z) {}_0 f_{\infty}^{(-z)} \xi^{-z} dz, \quad \xi > 0, \quad \mu > 0.$$

Здесь использовано обобщение дробного интеграла на комплексные порядки.

Еще один вариант обобщения разложения Тейлора имеет вид

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{{}_a f^{\mu}(x_0)}{\Gamma(\mu+1)} (x-x_0)^{\mu} d\mu.$$

5.5.7 Выражение дробной производной через целые

Применяя обычную формулу Тейлора к дробной производной легко получить полезную формулу, выражающую дробную производную через целые производные в начальной точке интервала:

$${}_a \mathbf{D}_x^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\nu}}{\Gamma(1+k-n\nu)} f^{(k)}(a) + \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\nu-n+1}}, \quad n = [\nu]+1.$$

5.5.8 Дифференцирование функции по функции

Пусть $g(x)$ – монотонная функция, имеющая непрерывную производную. *Дробным интегралом функции $f(x)$ по функции $g(x)$* называется интеграл

$${}_a I_{g(\cdot)}^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x \frac{f(\xi)g'(\xi)d\xi}{[g(x) - g(\xi)]^{1-\mu}}, \quad \mu > 0, \quad a \geq -\infty.$$

Дробная производная порядка $\alpha \in (0, 1)$ функции $f(x)$ по функции $g(x)$ определяется формулой

$${}_a D_{g(\cdot)}^\alpha f(x) = \frac{d}{g'(x)dx} {}_a I_{g(\cdot)}^{1-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{g'(x)dx} \int_a^x \frac{f(\xi)g'(\xi)d\xi}{[g(x) - g(\xi)]^\alpha}.$$

Она может быть также представлена в форме Маршо:

$${}_a D_{g(\cdot)}^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{f(x)}{[g(x) - g(a)]^\alpha} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{[f(x) - f(\xi)]g'(\xi)d\xi}{[g(x) - g(\xi)]^{1+\alpha}}.$$

Аналогичным образом вводятся производные с пределами (x, ∞) . В частности, при $g(x) = x^\sigma$ и произвольном ν имеем:

$$x^\sigma D_\infty^\nu f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma}{\Gamma(-\nu)} \int_x^\infty \frac{f(\xi)\xi^{\sigma-1}d\xi}{(\xi^\sigma - x^\sigma)^{1+\nu}}, & \nu < 0, \\ f(x), & \nu = 0, \\ \frac{\sigma^{-n}}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{d}{x^{\sigma-1}dx}\right)^{n+1} \int_x^\infty \frac{f(\xi)\xi^{\sigma-1}d\xi}{(\xi^\sigma - x^\sigma)^\alpha}, & \nu = n + \alpha > 0. \end{cases}$$

5.5.9 Асимптотическое поведение ${}_a f^{(\nu)}(x)$ при $x \rightarrow a$

При ν целом отрицательном ($\nu = -m$, $m = 1, 2, \dots$) мы имеем дело с обычным интегралом, для которого

$${}_a f^{(-m)}(a) \equiv \lim_{x \rightarrow a} {}_a I_x^m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{m-1}d\xi = 0.$$

Если ν – положительное целое или ноль ($\nu = n$), производная ${}_a f^{(\nu)}(x)$ превращается в обычную (целую) производную или саму функцию в точке a :

$${}_a f^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Для всех других значений ν аналитическая функция

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

имеет производные

$$\begin{aligned} {}_a f^{(\nu)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\nu+1)} (x-a)^{k-\nu} \sim \\ &\sim \frac{f(a)}{\Gamma(1-\nu)} (x-a)^{-\nu} \rightarrow \begin{cases} 0, & \nu < 0, \\ \infty, & \nu > 0, \end{cases} \quad x \rightarrow a+0. \end{aligned}$$

Если $f(x)$ не является аналитической, но принадлежит классу дробно-дифференцируемых функций [6],

$$f(x) = (x-a)^p \varphi(x), \quad p > -1, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

то

$${}_a f^{(\nu)}(x) \sim \frac{\varphi(a)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\nu+1)} (x-a)^{p-\nu} \rightarrow \begin{cases} 0, & \nu < p, \\ \varphi(a)\Gamma(p+1), & \nu = p, \\ \infty, & \nu > p \end{cases}$$

при $x \downarrow a$.

5.5.10 Асимптотическое поведение ${}_a f^{(\nu)}(x)$ при $x \rightarrow \infty$

Обратившись к другому пределу, $x \rightarrow a \rightarrow \infty$, мы ограничимся рассмотрением аналитических функций $f(x)$. Для $\nu < 0$,

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_a^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\nu+1}} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{x-a} \frac{f(x-\xi) d\xi}{\xi^{\nu+1}}.$$

Согласно разложению Тейлора

$$f(x-\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(x) \xi^k.$$

Используя его в предыдущей формуле для ${}_a f^{(\nu)}$ и выполняя почленное интегрирование, приходим к выражению

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k f^{(k)}(x) (x-a)^{k-\nu}}{k! \Gamma(-\nu) (k-\nu)}.$$

Если $x \gg a$, то

$$(x - a)^{k-\nu} \sim x^{k-\nu} + (\nu - k)ax^{k-\nu-1}$$

и

$${}_a f^{(\nu)}(x) \sim {}_0 f^{(\nu)}(x) + (a/\pi)\Gamma(\nu + 1) \sin(\nu\pi)f(0)x^{-\nu-1} \sim {}_0 f^{(\nu)}(x), \quad x \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для больших x дробная производная ${}_a f^{(\nu)}(x)$ перестает зависеть от нижнего предела, который, в частности, может быть заменен нулем.

Интерпретируя переменную x как время эволюции некоторого процесса $f(x)$, можно сказать, что при больших временах роль начального состояния процесса становится пренебрежимо малой. Этот факт и формулируется в виде принципа ограниченной памяти, означающий, что для предсказания эволюции такого процесса в будущем $x' > x$ достаточно знать его поведение в период ограниченной продолжительности $(x - T, x)$, предшествующий настоящему x [7]:

$${}_a f^{(\nu)}(x) \approx {}_{x-T} f^{(\nu)}(x), \quad x > a + T.$$

Заметим, что этот вывод переключается с принципом затухания памяти Вольтерры.

5.5.11 Производная от постоянной

То, что производные отрицательных порядков от постоянных функций не равны нулю, понятно: ведь они не что иное как интегралы от знакостоянных степенных функций:

$${}_a 1^{(\nu)}(x) = \frac{(x - a)^{-\nu}}{\Gamma(1 - \nu)}, \quad \nu < 0, \quad x > a,$$

Несколько неожиданным для читателя может явиться то, что и производные положительных порядков от постоянных функций отличны от нуля:

$${}_a 1^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\nu\})} \frac{d^{[\nu]+1}}{dx^{[\nu]+1}} \int_a^x \frac{d\xi}{(x - \xi)^{\{\nu\}}} = \frac{(x - a)^{-[\nu] - \{\nu\}}}{\Gamma(1 - [\nu] - \{\nu\})} = \frac{(x - a)^{-\nu}}{\Gamma(1 - \nu)},$$

$$\nu > 0, \quad x > a.$$

Правда, при целых значениях ν они обращаются в нуль, как и положено производным постоянных. Но в промежутках между ними... Может

быть, с этим фактом легче смириться, посмотрев на поведение производной ${}_a 1^{(\nu)}(x)$ в фиксированной точке $x = a + 1$ как функции порядка ν (Рис. 5.2). Изобразив точками на оси ν значения ${}_a 1^{(1)}(a + 1) = 0$, ${}_a 1^{(2)}(a + 1) = 0$, ${}_a 1^{(3)}(a + 1) = 0$, ..., мы не видим оснований для того, чтобы в промежутках между ними график кривой ${}_a 1^{(\nu)}(a + 1)$ отклонился от оси, на которой лежат эти точки. Однако поставим еще одну точку, соответствующую значению $\nu = 0$:

$${}_a 1^{(0)}(a + 1) = 1.$$

Именно это значение определяется соответствующей аксиомой: нулевая производная функции есть сама функция. Теперь уже нельзя сказать, что все точки лежат на оси: одна «выпала». Другая аксиома требует, чтобы производная была аналитической функцией ν , стало быть, график функции ${}_a 1^{(\nu)}(a + 1)$, проходящий через указанные точки, должен представлять собой гладкую кривую, выходящую из точки с координатами $(0, 1)$ и пересекающую ось ν в точках 1, 2, 3, ... При пересечении каждой из этих точек она меняет знак, а амплитуда ее колебаний, как показывают вычисления по формуле

$${}_a 1^{(\nu)}(x) = \frac{(x - a)^{-\nu}}{\Gamma(1 - \nu)}, \quad \nu > 0,$$

убывает. Из этой формулы также видно, что эффект этот ослабевает с увеличением расстояния между точками a и x и исчезает совсем в пределе $a \rightarrow -\infty$:

$$-\infty 1^{(\nu)}(x) = 0, \quad \nu > 0.$$

5.5.12 Производные степенной функции

Еще один важный вывод следует из вычисления дробной производной от степенной функции $\Phi_\mu(x - a)$, $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} {}_a D_x^\nu \Phi_\mu(x - a) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(1 - \{\nu\})} D_x^{[\nu]+1} \int_a^x (x - \xi)^{-\{\nu\}} (\xi - a)^{\mu-1} d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \{\nu\} + \mu)} D_x^{[\nu]+1} (x - a)^{\mu-\nu} = \frac{1}{\Gamma(\mu - \nu)} (x - a)^{\mu-\nu-1}. \end{aligned}$$

При значениях $\mu = \nu - j$, где $0 \leq j < \nu$, дробная производная функции $\Phi_\mu(x - a)$ тождественно равна нулю:

$${}_a D_x^\nu \Phi_{\nu-j}(x - a) = 0.$$

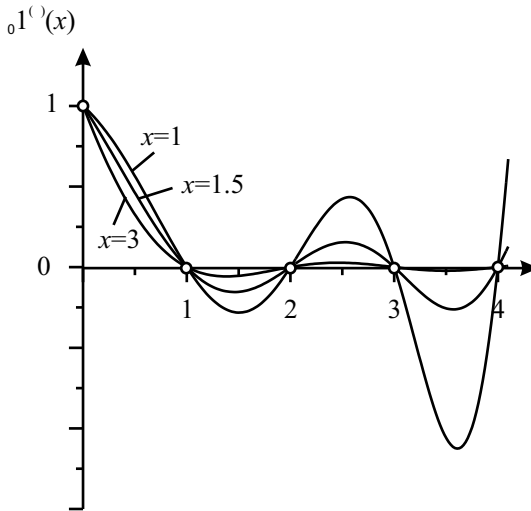


Рис. 5.5: Зависимость производной постоянной функции в точке от порядка ν .

Стало быть, каждая из этих функций для *этого* дифференциального оператора играет роль «постоянной». Другими словами, если $\phi_0(x)$ является решением уравнения

$${}_a D_x^\nu \phi_0(x) = f(x), \quad \nu > 0,$$

то и функция

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=0}^{[\nu]} c_j \Phi_{\nu-j}(x) = \phi_0(x) + \sum_{j=0}^{[\nu]} C_j (x-a)^{\nu-j-1}$$

тоже будет его решением (а функция $\phi_0(x) + C$ – нет!). Заметим, что при $\nu \uparrow 1$ j принимает единственное значение (0) и $\Phi_\nu(x-a) \uparrow 1$, то есть предельное значение при $\nu \uparrow 1$ согласуется с обычной ситуацией: решение дифференциального уравнения первого порядка определено с точностью до произвольной постоянной.

5.6 Дробные производные Капуто

Наряду с дробной производной Римана-Лиувилля, в которой операция дробного интегрирования предшествует операции кратного дифференцирования,

$${}_a f^{(\nu)}(x) = D_x^n {}_a I_x^{n-\nu} f(x),$$

часто используется и другая конструкция, в которой порядок выполнения этих операций изменен на обратный: вначале выполняется кратное дифференцирование, а затем вычисляется дробный интеграл:

$${}_a^{(\nu)}f(x) \equiv {}_a I_x^{n-\nu} D_x^n f(x).$$

Такая конструкция называется *производной Капуто*.

В общем случае производные Римана-Лиувилля и Капуто не совпадают друг с другом. Возьмем производную Римана-Лиувилля порядка $0 < \nu < 1$ и преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{aligned} {}_a f^{(\nu)}(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_a^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\nu} = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} D_x \int_a^x \frac{f(x-\xi) d\xi}{\xi^\nu} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_a^x \frac{D_x f(x-\xi) d\xi}{\xi^\nu} + \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{f(a+)}{(x-a)^\nu} = \\ &= {}_a^{(\nu)}f(x) + \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{f(a+)}{(x-a)^\nu}, \quad 0 < \nu < 1. \end{aligned}$$

Заметим, что на множестве функций, удовлетворяющих условию $f(a+) = 0$ разница между рассматриваемыми производными исчезает.

В общем случае соотношение между производными Капуто и Римана-Лиувилля имеет вид

$${}_a f^{(\nu)}(x) = {}_a^{(\nu)}f(x) + \sum_{j=0}^n \frac{1}{\Gamma(1+j-\nu)} \frac{f^{(j)}(a+)}{(x-a)^{\nu-j}}, \quad \nu > 0, \quad n = [\nu].$$

Теперь для совпадения этих производных необходимо, чтобы в точке $x = a$ обращалась в нуль не только сама дифференцируемая функция $f(x)$, но и $n = [\nu]$ ее первых производных.

Очевидно, что

$${}_a^{(\nu)}1(x-a) \equiv 0, \quad \nu > 0,$$

тогда как

$${}_a 1^{(\nu)}(x-a) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} (x-a)^{-\nu}.$$

Вообще,

$${}_a D_x^\nu (x-a)^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\nu)} (x-a)^{\mu-\nu},$$

поэтому обратное соотношение между рассматриваемыми производными можно представить в виде

$${}^{(\nu)}f(x) = {}_a D_x^\nu \left[f(x) - \sum_{k=0}^{[\nu]} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right]$$

где $[\nu]$ - целое число, определяемое уравнением $[\nu] < \nu \leq [\nu] + 1$.

Интегральные преобразования производных на конечном отрезке (положим, для простоты, $a = 0$) удобно выполнять методом Лапласа:

$$\widehat{f}(\lambda) = \mathcal{L}\{f(x)\}(\lambda) \equiv \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx.$$

Сопоставим трансформанты Лапласа сравниваемых производных:

$$\widehat{{}_0 f^{(\nu)}}(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda), & \nu < 1, \\ \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - \sum_{j=1}^n \lambda^{n-j} {}_0 f^{(\nu-1+j)}(0), & \nu \geq 1, \end{cases}$$

и

$${}_0^{(\nu)} \widehat{f}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - \sum_{j=0}^n \lambda^{\nu-j-1} f^{(j)}(0).$$

Из этих выражений следует, что

$$\lim_{\nu \downarrow m} {}_0 f^{(\nu)}(x) = \lim_{\nu \uparrow m} {}_0^{(\nu)} f(x) = f^{(m)}(x),$$

так что обе эти производные согласуются (в указанном смысле) с обычными производными целого порядка. Они совпадают также при условии, что $f(0) = f^{(1)}(0) = f^{(2)}(0) = \dots = f^{([\nu]}(0) = 0$, но отличаются друг от друга при дифференцировании постоянных:

$${}_0 1^{(\nu)}(x) = x^\nu / \Gamma(1 - \nu),$$

тогда как

$${}_0^{(\nu)} 1(x) = 0, \quad \nu > 0.$$

В этом отношении производная Капуто привычнее для физика, которому непросто примириться с тем, что какие-то производные от единицы могут быть отличными от нуля.

5.7 Дробные производные Маршо

Дробные производные Римана-Лиувилля могут быть приведены к более удобному виду, если дифференцируется достаточно хорошая функция. Пусть $0 < \nu < 1$:

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\nu}. \quad (5.7.1)$$

Выполним следующие действия.

1) Преобразуем интеграл интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{-\nu} d\xi &= -f(\xi) \frac{(x-\xi)^{-\nu+1}}{-\nu+1} \Big|_{\xi=a}^{\xi=x} + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{-\nu+1}}{-\nu+1} df(\xi) = \\ &= -f(x) \cdot 0 + \frac{f(a)(x-a)^{-\nu+1}}{-\nu+1} + \int_a^x \frac{(x-\xi)^{-\nu+1}}{-\nu+1} df(\xi). \end{aligned}$$

2) Продифференцируем результат по x :

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{-\nu} d\xi = f(a)(x-a)^{-\nu} + \int_a^x (x-\xi)^{-\nu} d[f(\xi) - f(x)].$$

Под знаком дифференциала мы добавили $-f(x)$: поскольку x при интегрировании по ξ является постоянной, это ничего не меняет.

3) Последний интеграл преобразуем интегрированием по частям:

$$\int_a^x (x-\xi)^{-\nu} d[f(\xi) - f(x)] = (x-\xi)^{-\nu} [f(\xi) - f(x)] \Big|_{\xi=a}^{\xi=x} - \nu \int_a^x \frac{f(\xi) - f(x)}{(x-\xi)^{\nu+1}} d\xi.$$

Подставляя полученный результат в (5.7.1) и производя необходимые сокращения, окончательно получаем:

$${}_a f^{(\nu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left\{ \nu \int_a^x \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-\xi)^{\nu+1}} d\xi + \frac{f(x)}{(x-a)^\nu} \right\}, \quad 0 < \nu < 1. \quad (5.7.2)$$

Полученная формула и представляет собой *производную Маршо*.

Часто используются ее варианты с бесконечными пределами:

$$-\infty f^{(\nu)}(x) = \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_{-\infty}^x \frac{f(x) - f(\xi)}{(x-\xi)^{1+\nu}} d\xi = \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{1+\nu}} d\xi,$$

и

$$f_{\infty}^{(\nu)}(x) = \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_x^{\infty} \frac{f(\xi) - f(x)}{(x-\xi)^{1+\nu}} d\xi = \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x+\xi)}{\xi^{1+\nu}} d\xi. \quad (5.7.3)$$

Производная Маршо может быть получена и менее наглядным, но более общим путем: регуляризацией расходящегося выражения, получаемого при перемене знака порядка в дробном интеграле Римана-Лиувилля. Покажем это на примере производной с бесконечным нижним пределом. Дробный интеграл отрицательного порядка $-\nu$ ($\nu > 0$) запишется в виде

$$-_{\infty}f_{-\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^x \frac{f(\xi)d\xi}{(x-\xi)^{\nu+1}} = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi)d\xi}{\xi^{\nu+1}}, \quad \nu > 0.$$

Процедура регуляризации заключается в выделении из этого выражения конечной части (*partie finie* – p.f.) в смысле Адамара:

$$\begin{aligned} -_{\infty}f^{(\nu)}(x) &= \text{p.f. } -_{\infty}f_{-\nu}(x) = \text{p.f. } \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi)}{\xi^{\nu+1}} d\xi \\ &\equiv \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{\xi^{\nu+1}} d\xi, \quad 0 < \nu < 1. \end{aligned}$$

Эта конечная часть и интерпретируется как дробная производная Маршо положительного порядка ν .

Продолжить производные Маршо в область значений ν больших 1 можно двумя путями. Первый из них очевиден:

$$\begin{aligned} D_+^{\nu}f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\nu]} \frac{\{\nu\}}{\Gamma(1-\{\nu\})} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x-\xi)}{\xi^{1+\{\nu\}}} d\xi = \\ &= \frac{\{\nu\}}{\Gamma(1-\{\nu\})} \int_0^{\infty} \frac{f^{([\nu])}(x) - f^{([\nu])}(x-\xi)}{\xi^{1+\{\nu\}}} d\xi, \\ D_-^{\nu}f(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^{[\nu]} \frac{\{\nu\}}{\Gamma(1-\{\nu\})} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x+\xi)}{\xi^{1+\{\nu\}}} d\xi = \\ &= \frac{\{\nu\}}{\Gamma(1-\{\nu\})} \int_0^{\infty} \frac{f^{([\nu])}(x) - f^{([\nu])}(x+\xi)}{\xi^{1+\{\nu\}}} d\xi. \end{aligned}$$

Последняя производная иногда представляется в несколько модифицированном виде:

$${}^*D_-^\nu f(x) = e^{i\nu\pi} \left(\frac{d}{dx}\right)^{[\nu]} \frac{\{\nu\}}{\Gamma(1 - \{\nu\})} \int_0^\infty \frac{f(x) - f(x + \xi)}{\xi^{1 + \{\nu\}}} d\xi.$$

Другой путь основан на том, что $f(x) - f(x - \xi)$ есть не что иное, как *конечная разность первого порядка* $\Delta_\xi^1 f(x)$ функции $f(x)$, так что

$$D_+^\nu f(x) = \frac{\nu}{\Gamma(1 - \nu)} \int_0^\infty \frac{\Delta_\xi^1 f(x)}{\xi^{1 + \nu}} d\xi, \quad \nu < 1.$$

Чтобы продолжить это выражение в область $\nu > 1$, заменим первую разность разностью высшего порядка m с тем же шагом ξ :

$$\Delta_\xi^1 f(x) \mapsto \Delta_\xi^m f(x) = \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} f(x - j\xi).$$

В результате получаем:

$$D_+^\nu f(x) = \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \int_0^\infty \frac{\Delta_\xi^m f(x)}{\xi^{1 + \nu}} d\xi, \quad \nu < m = 1, 2, 3, \dots$$

Здесь

$$\kappa(\nu, m) = \int_0^\infty \frac{(1 - e^{-\xi})^m}{\xi^{1 + \nu}} d\xi = \Gamma(-\nu) \sum_{n=1}^m (-1)^n \binom{m}{n} n^\nu, \quad 0 < \nu < m,$$

– нормировочные постоянные.

Правосторонние аналоги этих производных имеют вид:

$$D_-^\nu f(x) = (-1)^{[\nu]} \frac{\{\nu\}}{\Gamma(1 - \{\nu\})} \int_0^\infty \frac{f^{([\nu])}(x) - f^{([\nu])}(x + \xi)}{\xi^{1 + \{\nu\}}} d\xi$$

и

$$D_-^\nu f(x) = \frac{(-1)^{[\nu]}}{\kappa(\nu, m)} \int_0^\infty \frac{\Delta_{-\xi}^m f(x)}{\xi^{1 + \nu}} d\xi, \quad \nu < m = 1, 2, 3, \dots$$

соответственно.

Заметим, что правые части в формулах для $D_{\pm}^{\nu} f(x)$ перестают зависеть от m , как только m становится больше ν . Покажем это, ограничившись случаем $0 < \nu < 1$. Для любого натурального m

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\Delta_{\pm \xi}^m f(x)}{\xi^{1+\nu}} d\xi &= \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \frac{f(x)}{\nu \epsilon^{\nu}} + \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \sum_{n=1}^m (-1)^n \binom{m}{n} n^{\nu} \int_{n\epsilon}^{\infty} \frac{f(x \mp \xi)}{\xi^{1+\nu}} d\xi = \\ &= \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \sum_{n=1}^m (-1)^n \binom{m}{n} n^{\nu} \int_{n\epsilon}^{\infty} \frac{f(x \mp \xi) - f(x)}{\xi^{1+\nu}} d\xi. \end{aligned}$$

Устремив теперь ϵ к нулю, видим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_{\pm \xi}^m f(x)}{\xi^{1+\nu}} d\xi &= \left\{ \frac{1}{\kappa(\nu, m)} \sum_{n=1}^m (-1)^n \binom{m}{n} n^{\nu} \right\} \int_0^{\infty} \frac{f(x \mp \xi) - f(x)}{\xi^{1+\nu}} d\xi = \\ &= \frac{\nu}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\infty} \frac{f(x) - f(x \mp \xi)}{\xi^{1+\nu}} d\xi \end{aligned}$$

действительно не зависит от m . Методом преобразований Лапласа можно показать также, что в классе достаточно «хороших» функций (см. [8]) дробные операторы D_{\pm}^{ν} and $0|_x^{\nu}$ являются взаимно обратными:

$$0|_x^{\nu} g(x) = f(x) \leftrightarrow D_{\pm}^{\nu} f(x) = g(x).$$

Решение интегрального уравнения $0|_x^{\nu} g(x) = f(x)$ выражается через дробную производную Маршо соотношением $g(x) = D_{\pm}^{\nu} f(x)$. Отметим, наконец, что производная Маршо от постоянной функции равна нулю.

5.8 Производные аналитических функций

Дробные производные аналитических функций комплексного переменного могут быть получены аналитическим продолжением формулы Коши

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

в область комплексных порядков ν

$${}_a f^{(\nu)}(z) = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{\nu+1}},$$

где замкнутый контур \mathcal{L} проходит через точку a и обходит точку z в положительном направлении.

Другой способ построения дробной производной аналитической функции – обобщение формулы

$$D_z^n(z-a)^m = m(m-1)\dots(m-n+1)(z-a)^{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!}(z-a)^{m-n}$$

на дробные порядки

$${}_a D_z^\nu(z-a)^m = \frac{m!}{\Gamma(m-\nu+1)}(z-a)^{m-\nu}$$

с последующим применением ее к аналитической функции, представленной в виде степенного ряда:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m, \quad c_m = f^{(m)}(a)/m!.$$

В результате приходим к следующему определению дробной производной аналитической функции:

$${}_a f^{(\nu)}(z) = {}_a D_z^\nu \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m(z-a)^m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{\Gamma(m-\nu+1)} c_m(z-a)^{m-\nu}.$$

В случае целого порядка $\nu = n$ оно согласуется с обычным определением n -кратной производной $f^{(n)}(x)$, при произвольном вещественном положительном ν согласуется с производной Римана-Лиувилля. Действительно, в первом случае

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-a)^{m-n}}{(m-n)!} f^{(m)}(a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^{m-n} = \\ &= D^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x-a)^m}{m!} f^{(m)}(a) = f^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Чтобы проверить второе утверждение, возьмем формулу производной Римана-Лиувилля и разложим в ряд Тейлора подынтегральную функцию $f(\xi)$ в точке нижнего предела a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(k-\nu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \int_a^x (x-\xi)^{k-\nu-1} f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(k-\nu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(a) \int_a^x (x-\xi)^{k-\nu-1} (\xi-a)^m d\xi. \end{aligned}$$

Выполняя подстановку $\theta = (\xi - a)/(x - a)$ и используя известную формулу

$$\int_0^1 (1 - \theta)^{\alpha-1} \theta^{\beta-1} d\theta = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(k - \nu)} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \int_a^x (x - \xi)^{k-\nu-1} f(\xi) d\xi = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m + k - \nu + 1)} f^{(m)}(a) \left(\frac{d}{dx} \right)^k (x - a)^{k+m-\nu} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(m - \nu + 1)} f^{(m)}(a) (x - a)^{m-\nu}. \end{aligned}$$

Заметим, что имеет место и более общее соотношение:

$${}_a D_x^\nu \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m (z - a)^{m+p} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m + p + 1)}{\Gamma(m + p - \nu + 1)} c_m (z - a)^{m+p-\nu},$$

$$p \neq -1, -2, -3, \dots$$

5.9 Производные обобщенных функций

Вернемся к представлению дробного интеграла в виде свертки подынтегральной функции со стандартной степенной функцией $\Phi_\mu(x)$. Аналитическое продолжение этой свертки в область отрицательных значений индекса $\mu = -\nu$ может рассматриваться как обобщенная функция, обладающая, в частности, свойством

$$\lim_{\nu \rightarrow n} \Phi_{-\nu}(x) \equiv \Phi_{-n}(x) = \delta^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где $\delta^{(n)}(x)$ — n -я производная дельта-функции Дирака $\delta(x) \equiv d1(x)/dx$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \delta^{(n)}(x - \xi) d\xi = f^{(n)}(x).$$

Определенная таким образом функция ${}_a f^{(\nu)}(x)$ при целых положительных $\nu = n = 1, 2, 3, \dots$ совпадает с производными целого порядка

$${}_a f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x), \quad x > a,$$

а при целых отрицательных $\nu = -n$ с n -кратными интегралами.

Из свойства

$$\Phi_\mu \star \Phi_\lambda(x) = \Phi_{\mu+\lambda}(x).$$

непосредственно вытекает формула дробного дифференцирования *обобщенной функции* Φ_μ :

$${}_a[\Phi_\mu(x-a)]_x^{(\nu)} = \frac{(x-a)_+^{\mu-\nu-1}}{\Gamma(\mu-\nu)} = \Phi_{\mu-\nu}(x-a).$$

В частности,

$${}_a[1(x-a)]_x^{(\nu)} = \frac{(x-a)_+^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}.$$

$${}_a[\delta(x-a)]_x^{(\nu)} = \frac{(x-a)_+^{-\nu-1}}{\Gamma(-\nu)} = \Phi_{-\nu}(x-a),$$

$${}_a[\delta^{(n)}(x-a)]_x^{(\nu)} = \frac{(x-a)_+^{-n-\nu-1}}{\Gamma(-n-\nu)} = \Phi_{-n-\nu}(x-a),$$

$${}_a[\Phi_{\nu-n}(x-a)]_x^\nu = \delta^{(n)}(x-a), \quad x > a.$$

5.10 Локальные дробные производные

Предельное поведение дробной производной ${}_a f_x^\nu$ при $x \rightarrow a$ связано с новым типом дробного дифференциального оператора, определяющего локальную дробную производную Колванкара пределом [9]

$$f_x^{(\nu)} = \lim_{\xi \rightarrow x} {}_x D_\xi^\nu [f(\xi) - f(x)],$$

если этот предел существует.

Авторы мотивируют новое определение стремлением вернуть производной свойство *локальности*, утраченное ею при переходе от целых к дробным значениям порядков. Для получения нетривиальных результатов на этом пути им приходится пересмотреть понятие дифференцируемости и ввести понятие локальной дифференцируемости, позволяющее исследовать функции с фрактальными графиками, типа функций Вейерштрасса, не дифференцируемые в обычном смысле. Мы не будем рассматривать такие производные.

Литература

1. *Ross B.* Lecture Notes in Mathematics. – New York: Springer-Verlag, 1975.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
3. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2000.
4. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – New York: Academic Press, 1974.
5. *Nishimoto K.* Fractional Calculus. Vol. I-IV – Koriyama, Japan: Descartes Press, 1984, 1987, 1989, 1991.
6. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
7. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – San Diego: Academic Press, 1999.

Глава 6

От конечных разностей к дробным производным

6.1 Операторы сдвига и разности

Прежде, чем приступить к рассмотрению другой конструкции дробных производных – Грюнвальда-Летникова, напомним некоторые факты из исчисления разностей.

На множестве функций, определенных на всей вещественной оси, введем оператор сдвига соотношением

$$E_{\xi} f(x) = f(x + \xi), \quad \xi > 0.$$

Оператор этот линеен, его повторное применение определяется формулой

$$E_{\xi}^n f(x) = f(x + n\xi), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Доопределим его этой формулой для $n = 0$ и отрицательных значений $-1, -2, -3, \dots$ Очевидно, $E_{\xi}^{-1} = E_{-\xi}$ является оператором, обратным к E_{ξ} .

Пусть $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора в точке x , тогда формально этот ряд можно представить с помощью операторной экспоненты:

$$f(x + \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} D_x^k f(x) = \exp(\xi D_x) f(x).$$

Сопоставляя это соотношение с определением оператора сдвига, приходим к символическому представлению

$$E_{\xi} = \exp(\xi D_x).$$

Введем, далее, два разностных оператора: левосторонний Δ_+ и правосторонний Δ_- соотношениями

$$\Delta_{\pm} = I - E_{\mp\xi} = I - e^{\mp\xi} D_x.$$

Нетрудно видеть, что для дифференцируемой в точке x функции

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_+}{\xi} = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_-}{\xi} = D_x.$$

6.2 Разности целых и дробных порядков

Последовательное применение операторов Δ_+ (Δ_-) к функции $f(x)$ дает ее левые (правые) разности высших порядков:

$$\begin{aligned} \Delta_+ \Delta_+ \dots \Delta_+ f(x) &= \Delta_+^n f(x) = (I - E_{-\xi})^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} E_{-\xi}^k f(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - k\xi), \\ \Delta_- \Delta_- \dots \Delta_- f(x) &= \Delta_-^n f(x) = (I - E_{\xi})^n f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} E_{\xi}^k f(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x + k\xi), \end{aligned}$$

Заменяя здесь целое n произвольным ν и продолжая суммирование до бесконечности, получим разности дробных порядков:

$$\Delta_{\pm}^{\nu} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\nu}{k} f(x \mp k\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu + 1)}{k! \Gamma(\nu - k + 1)} f(x \mp k\xi).$$

Формально определяемые этими соотношениями операторы можно представить в виде

$$\Delta_{\pm}^{\nu} = (1 - e^{\mp\xi} D_x)^{\nu} = 1 - \frac{\nu}{1!} e^{\mp\xi} D_x + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} e^{\mp 2\xi} D_x - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} e^{\mp 3\xi} D_x + \dots$$

Отсюда видно полугрупповое свойство разностных операторов:

$$\Delta_{\pm}^{\mu} \Delta_{\pm}^{\nu} = \Delta_{\pm}^{\mu+\nu},$$

которое может быть выведено и непосредственно в биномиальном представлении:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\pm}^{\mu} \Delta_{\pm}^{\nu} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} \Delta_{\pm}^{\nu} f(x \mp k\xi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\mu}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \binom{\nu}{l} f(x \mp (k+l)\xi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k} \sum_{j=l}^{\infty} (-1)^j \binom{\nu}{j-k} f(x \mp j\xi) = \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left[\sum_{k=0}^j \binom{\mu}{k} \binom{\nu}{j-k} \right] f(x \mp j\xi) = \\
 &= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu+\nu}{j} f(x \mp j\xi) = \Delta_{\pm}^{\mu+\nu} f(x).
 \end{aligned}$$

6.3 Производные Грюнвальда-Летникова с бесконечным пределом

Определим операторы дифференцирования дробных порядков предельными соотношениями

$$D_+^{\nu} \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_+^{\nu}}{\xi^{\nu}},$$

$$D_-^{\nu} \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_-^{\nu}}{\xi^{\nu}}.$$

Соответствующие им производные записываются в виде

$$f_+^{(\nu)}(x) = D_+^{\nu} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu-k+1)} f(x-k\xi) \quad (6.3.1)$$

и

$$f_-^{(\nu)}(x) = D_-^{\nu} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^{\nu}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu-k+1)} f(x+k\xi) \quad (6.3.2)$$

и называются *производными Грюнвальда-Летникова с бесконечным пределом*.

Пользуясь формальным представлением, получим

$$D_+^\nu = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-\xi D_x})^\nu}{\xi^\nu} = (D_x)^\nu,$$

$$D_-^\nu = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{\xi D_x})^\nu}{\xi^\nu} = (-D_x)^\nu.$$

Нетрудно убедиться в том, что введенные соотношениями (6.3.1-6.3.2) дробные производные удовлетворяют принципу соответствия. Запишем левостороннюю разность дробного порядка ν в развернутом виде

$$\Delta_+^\nu f(x) = f(x) - \frac{\nu}{1!} f(x-\xi) + \frac{\nu(\nu-1)}{2!} f(x-2\xi) - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{3!} f(x-3\xi) + \dots$$

При целом $\nu = n$ этот ряд обрывается на $n-1$ члене и мы приходим к обычным формулам для конечных разностей

$$\Delta_+^0 f(x) = f(x).$$

$$\Delta_+^1 f(x) = f(x) - f(x-\xi),$$

$$\Delta_+^2 f(x) = f(x) - 2f(x-\xi) + f(x-2\xi) = [f(x) - f(x-\xi)] - [f(x-\xi) - f(x-2\xi)]$$

и т. д. Предельные отношения $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta_+^n f(x)/\xi^n$ совпадают с обычными производными соответствующих порядков $f^{(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$. Аналогичные вычисления с правосторонними разностями показывают, что $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta_-^n f(x)/\xi^n = (-1)^n f^{(n)}(x)$.

Перейдем теперь к отрицательным целым значениям $\nu = -m$, $m = 1, 2, 3, \dots$ В этом случае ряды не обрываются,

$$\Delta_+^{-1} f(x) = f(x) + f(x-\xi) + f(x-2\xi) + \dots,$$

$$\Delta_+^{-2} f(x) = f(x) + 2f(x-\xi) + 3f(x-2\xi) + \dots,$$

а имеют вид интегральных сумм (будем полагать, что они абсолютно сходятся):

$$\Delta_+^{-1} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) = \xi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) \Delta x_k, \quad x_k = x - k\xi, \quad \Delta x_k = \xi,$$

$$\Delta_+^{-2} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)f(x_k) = \xi^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)f(x_k) \Delta x_k.$$

С использованием правила Дирихле для сумм, последнее выражение приводится к виду

$$\Delta_+^{-2} f(x) = \xi^{-2} \sum_{l=0}^{\infty} \Delta x_l \sum_{k=l}^{\infty} f(x_k) \Delta x_k.$$

Следовательно,

$$f_+^{(-1)}(x) = \int_{-\infty}^x d\xi f(\xi),$$

$$f_+^{(-2)}(x) = \int_{-\infty}^x d\xi_2 \int_{-\infty}^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1)$$

и вообще,

$$f_+^{(-m)}(x) = {}_{-\infty}f^{(-m)}(x),$$

где

$${}_{-\infty}f^{(-m)}(x) = \int_{-\infty}^x d\xi_m \dots \int_{-\infty}^{\xi_2} d\xi_1 f(\xi_1).$$

Производные отрицательных целых порядков представляют собой левосторонние интегралы соответствующей кратности.

Аналогичным образом, для правосторонних производных получаем:

$$f_-^{(-m)}(x) = f_{\infty}^{(-m)}(x),$$

где

$$f_{\infty}^{(-m)}(x) = \int_x^{\infty} d\xi_m \dots \int_{\xi_2}^{\infty} d\xi_1 f(\xi_1).$$

Таким образом, мы убеждаемся, что производные

$$f_+^{(\nu)}(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_+^{\nu} f(x)}{\xi^{\nu}}$$

обеспечивают интерполяцию между интегралами и производными целой кратности ($\nu = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$) и по этой причине некоторые авторы называют их дифференциалами [1].

6.4 Производные Грюнвальда-Летникова с конечным пределом

Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ отлична от нуля только при $x > a$. Тогда шаг ξ можно связать с целочисленной переменной $k = 0, 1, 2, \dots, K$ соотношением

$$\xi = \frac{x - a}{K}$$

и записать левую производную в виде

$${}_a f^{(\nu)}(x) = {}_a D_+^\nu f(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi^\nu} \sum_{k=0}^{(x-a)/\xi} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu-k+1)} f(x - k\xi) \quad (6.4.1)$$

или эквивалентном ему

$$\begin{aligned} {}_a f^{(\nu)}(x) &= {}_a D_+^\nu f(x) = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{K}{x-a} \right)^\nu \sum_{k=0}^K (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{k! \Gamma(\nu-k+1)} f \left(x - k \left(\frac{x-a}{K} \right) \right). \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Аналогичным образом может быть представлена и правая производная для функции, обращающейся в нуль при $x > b$.

Представление Грюнвальда-Летникова, удобное для численных расчетов, не обеспечивает, однако, предельного перехода к целым отрицательным порядкам $\nu = -1, -2, \dots$. Можно, однако, преобразовать его к виду, имеющему смысл для всех отрицательных ν . Заметив, что

$$\binom{n}{k} = \frac{\Gamma(n+1)}{k! \Gamma(n-k+1)} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!},$$

и заменив здесь n на $-m$, получим:

$$\begin{aligned} \binom{-m}{k} &= \frac{-m(-m-1) \dots (-m-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{(m+k-1)!}{k! (m-1)!} = \\ &= (-1)^k \frac{\Gamma(m+k)}{k! \Gamma(m)}. \end{aligned}$$

Используя это выражение для аналитического продолжения биномиального коэффициента $\binom{\nu}{k}$ в область отрицательных $\nu = -\mu$, $\mu > 0$, получим

$$\binom{-\mu}{k} = (-1)^k \frac{\Gamma(\mu+k)}{k! \Gamma(\mu)},$$

и соответственно,

$${}_a D_x^{-\mu} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^\mu \sum_{k=0}^{(x-a)/\xi} \frac{\Gamma(\mu+k)}{k! \Gamma(\mu)} f(x-k\xi),$$

и

$${}_a D_x^{-\mu} f(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{K} \right)^\mu \sum_{k=0}^K \frac{\Gamma(\mu+k)}{k! \Gamma(\mu)} f \left(x - k \left(\frac{x-a}{K} \right) \right).$$

Проверим справедливость полученных соотношений в случае $\mu = 1$:

$${}_a D_x^{-1} f(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{(x-a)/\xi} \frac{\Gamma(1+k)}{k! \Gamma(1)} f(x-k\xi) \xi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=0}^K f(x_j) \Delta x = \int_a^x f(x') dx',$$

где $j = K - k$, $x_j = a + j \Delta x$, $K = (x - a) / \Delta x$.

6.5 Связь с дробными операторами Вейля, Лиувилля и Римана

Нетрудно убедиться, что дробные интегралы

$$-_{\infty} f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x - \xi)^{\mu-1} d\xi$$

и

$$f_{\infty}^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} f(\xi) (\xi - x)^{\mu-1} d\xi, \quad \mu > 0$$

представляют собой дробные производные Грюнвальда-Летникова отрицательных порядков

$$-_{\infty} f^{(-\mu)}(x) = f_+^{(-\mu)}(x) \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_+^{-\mu}}{\xi^{-\mu}}$$

и

$$f_{\infty}^{(-\mu)}(x) = f_-^{(-\mu)}(x) \equiv \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_-^{-\mu}}{\xi^{-\mu}}.$$

Действительно,

$$-_{\infty} f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x f(\xi) (x - \xi)^{\mu-1} d\xi = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} f(x - \xi) \xi^{\mu-1} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} e^{-\xi} D_x \xi^{\mu-1} d\xi f(x) = (D_x)^{-\mu} f(x) = f_+^{(-\mu)}(x).$$

Таким образом, дробные производные $f_+^{(\nu)}(x)$ и $f_-^{(\nu)}(x)$, определенные ранее пределами отношений $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta_+^{\nu} f(x)/\xi^{\nu}$ и $\lim_{\xi \rightarrow 0} \Delta_-^{\nu} f(x)/\xi^{\nu}$, при отрицательных порядках $\nu = -\mu < 0$ могут быть представлены в виде интегралов $_{-\infty}f^{(-\mu)}(x)$ и $f_{\infty}^{(-\mu)}(x)$, называемых дробными интегралами Лиувилля и Вейля соответственно. Заменяв в первом из них нижний предел $-\infty$ конечным значением a , получим интеграл Римана,

$${}_a f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x f(\xi)(x-\xi)^{\mu-1} d\xi, \quad \mu > 0,$$

а положив затем $a = 0$ – дробный интеграл Римана-Лиувилля:

$${}_0 f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x f(\xi)(x-\xi)^{\mu-1} d\xi, \quad \mu > 0.$$

Переход в положительную область значений показателей основывается на «правиле показателей», отражающем полугрупповое свойство дробных разностей:

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm}^{\mu+\lambda} &= \Delta_{\pm}^{\mu} \cdot \Delta_{\pm}^{\lambda}, \\ D_{\pm}^{\mu+\lambda} &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{\mu+\lambda}}{\xi^{\mu+\lambda}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{\mu} \cdot \Delta_{\pm}^{\lambda}}{\xi^{\mu+\lambda}} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{\mu}}{\xi^{\mu}} \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\Delta_{\pm}^{\lambda}}{\xi^{\lambda}} = D_{\pm}^{\mu} \cdot D_{\pm}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Представляя положительное число ν в виде $\nu = m - \mu$, где m – наименьшее целое число, превосходящее или равное $\nu - a$, $0 < \mu < 1$ – дробный остаток, перепишем это соотношение в виде:

$$D_{\pm}^{\nu} = D_{\pm}^m \cdot D_{\pm}^{-\mu} = (\pm D_x)^m \cdot D_{\pm}^{-\mu}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \mu < 1.$$

В результате приходим к дробным производным Лиувилля и Вейля, соответственно,

$$f_+^{\nu}(x) = {}_{-\infty}f^{(\nu)}(x) = (D_x)^m \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{-\infty}^x f(\xi)(x-\xi)^{\mu-1} d\xi, \quad \nu > 0,$$

и

$$f_-^{\nu}(x) = f_{\infty}^{(\nu)}(x) = (-D_x)^m \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^{\infty} f(\xi)(\xi-x)^{\mu-1} d\xi, \quad \nu > 0.$$

Более подробные сведения о дробных производных можно найти в книгах [1-5].

Литература

1. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003.
3. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – New York: Academic Press, 1974.
4. *Nishimoto K.* Fractional Calculus. Vol. I-IV – Koriyama, Japan: Descartes Press, 1984, 1987, 1989, 1991.
5. *Miller K. S., Ross B.* An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

Глава 7

Интегральные преобразования

7.1 Преобразование Лапласа

В интегро-дифференциальном исчислении дробных порядков интегральные преобразования играют еще более важную роль, чем в случае целых порядков. Теперь они служат не только для анализа и решения соответствующих уравнений, но часто и *для вывода самих уравнений*.

Мы начнем с одностороннего преобразования Лапласа

$$f(x) \xrightarrow{L} \widehat{f}(\lambda) = L\{f(x)\}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} f(x) dx.$$

Интеграл здесь предполагается абсолютно сходящимся в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$. Формула обращения имеет вид

$$f(x) = L^{-1}\{\widehat{f}(\lambda)\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\lambda x} \widehat{f}(\lambda) d\lambda, \quad x > 0, \quad (7.1.1)$$

где прямая $\sigma = \text{const}$ проходит параллельно мнимой оси справа от всех особых точек изображения $\widehat{f}(\lambda)$.

Важнейшим свойством каждого интегрального преобразования является наличие специальной операции – свертки – и соответствующей теоремы о свертке. В случае преобразования Лапласа свертка двух функций

$f(x)$ и $g(x)$ определяется формулой

$$f \star g(x) = \int_0^x f(x - \xi)g(\xi)d\xi,$$

а теорема о свертке гласит:

$$\mathbb{L}\{f \star g(x)\}(\lambda) = \mathbb{L}\{f(x)\}(\lambda) \cdot \mathbb{L}\{g(x)\}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{g}(\lambda).$$

Напомним, что для производных целых порядков

$$\widehat{f^{(n)}}(\lambda) = \mathbb{L}\{f^{(n)}\}(\lambda) = \lambda^n \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k f^{(n-k-1)}(0+), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.1.2)$$

а для многократных интегралов

$${}_a \widehat{f^{(-m)}}(\lambda) = \lambda^{-m} \widehat{f}(\lambda), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Обе формулы могут быть объединены в одной записи для произвольного (положительного или отрицательного) целого ν :

$${}_0 \widehat{f^{(\nu)}}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k {}_0 f_0^{(n-k-1)}(0+), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Поскольку дробный интеграл Римана-Лиувилля представляет собой свертку интегрируемой функции со стандартной степенной,

$${}_0 f^{(-\mu)}(x) = f \star \Phi_\mu(x),$$

применение теоремы о свертке ведет к произведению лапласовских трансформант двух этих функций:

$${}_0 \widehat{f^{(-\mu)}}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda)\widehat{\Phi}_\mu(\lambda).$$

Напомним, что

$$\widehat{\Phi}_\mu(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} x^{\mu-1} dx = \lambda^{-\mu},$$

получим:

$${}_0 \widehat{f^{(-\mu)}}(\lambda) = \lambda^{-\mu} \widehat{f}(\lambda), \quad \mu > 0.$$

Чтобы выполнить преобразование Лапласа дробной производной Римана-Лиувилля ${}_0f^\nu(x)$, $\nu > 0$, представим ее в виде

$${}_0f^{(\nu)}(x) = \mathbf{D}_x^n {}_0f^{(-\mu)}(x), \quad \mu = n - \nu \in (0, 1),$$

и воспользуемся формулой (7.1.2) преобразования Лапласа производной целого порядка n функции ${}_0f^{(-\mu)}(x)$. В результате получим

$$\begin{aligned} {}_0\widehat{f^{(\nu)}}(\lambda) &= \mathbf{L}\{{}_0\mathbf{D}_x^\nu f(x)\}(\lambda) = \mathbf{L}\{ \mathbf{D}_x^n {}_0f^{(-\mu)}\}(\lambda) = \\ &= \lambda^n {}_0\widehat{f^{(-\mu)}}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k [{}_0f^{(-\mu)}]^{(n-k-1)}(0+) = \\ &= \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k {}_0f^{(\nu-k-1)}(0+), \quad n-1 < \nu < n. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

В частности, если $0 < \nu < 1$, то

$${}_0\widehat{f^{(\nu)}}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - {}_0f^{(\nu-1)}(0+). \quad (7.1.4)$$

Заметим, что для достаточно хороших функций

$${}_0f^{(\nu-1)}(0+) = \lim_{x \downarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^\nu} = 0,$$

и формула (7.1.4) принимает совсем простой вид:

$${}_0\widehat{f^{(\nu)}}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda), \quad 0 < \nu < 1.$$

Преобразование Лапласа производной Капуто может быть получено аналогичным путем в виде:

$${}_0^{(\nu)}\widehat{f}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{\nu-k-1} f^{(k)}(0+), \quad n-1 < \nu \leq n. \quad (7.1.5)$$

В частности, если $0 < \nu \leq 1$, то

$${}_0^{(\nu)}\widehat{f}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) - \lambda^{\nu-1} f(0+).$$

Существенная разница между этими двумя обобщениями (Римана-Лиувилля и Капуто) в том, что первое из них (7.1.3) содержит дробные

производные, взятые в точке $x = 0$, в то время как второе (7.1.5) содержит производные только целых порядков. Несмотря на это, обе производные имеют одинаковые трансформанты Лапласа, если дифференцируемая функция и соответствующее количество ее производных обращаются в нуль на нижнем пределе:

$$\widehat{{}_0^{(\nu)}f}(\lambda) = \widehat{{}_0f^{(\nu)}}(\lambda) = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda).$$

Наконец, для производной Грюнвальда-Летникова, в случае $0 < \nu < 1$ имеющей вид

$${}_0f^{(\nu)}(x) = \frac{f(0)x^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} + \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^x (x-\xi)^{-\nu} f'(\xi) d\xi,$$

преобразование Лапласа

$$\widehat{{}_0f^{(\nu)}}(\lambda) = \lambda^{\nu-1} [f(0) + \lambda \widehat{f}(\lambda) - f(0)] = \lambda^\nu \widehat{f}(\lambda).$$

Отметим, что преобразование Лапласа для $\nu > 1$ не существует в классическом смысле, но имеет такой же вид в смысле обобщенных функций [1].

7.2 Преобразование Меллина

Другое интегральное преобразование, действующее в той же области $(0, \infty)$, – это преобразование Меллина

$$f(x) \stackrel{M}{\mapsto} \bar{f}(s) = M\{f(x)\}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx.$$

Обратное преобразование Меллина

$$f(x) = M^{-1}\{\bar{f}(s)\}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s} \bar{f}(s) ds, \quad \sigma = \text{Re } s.$$

Операция свертки Меллина и теорема для нее записываются в виде:

$$f \circ g(x) = \int_0^\infty f(x/\xi) g(\xi) d\xi / \xi$$

и

$$M\{f \circ g(x)\}(s) = M\{f(x)\}(s) \cdot M\{g(x)\}(s) = \bar{f}(s) \bar{g}(s).$$

Напомним, что преобразование Меллина первой производной вычисляется интегрированием по частям:

$$\begin{aligned}\overline{f^{(1)}}(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} f'(x) dx = [x^{s-1} f(x)]_0^{\infty} - (s-1) \int_0^{\infty} x^{s-2} f(x) dx = \\ &= [x^{s-1} f(x)]_0^{\infty} - (s-1) \overline{f}(s-1).\end{aligned}$$

Продолжая вычисление с помощью индукции, приходим к

$$\overline{f^{(n)}}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)} [x^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(x)]_0^{\infty} + \frac{(-1)^n \Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} \overline{f}(s-n). \quad (7.2.1)$$

Если

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x^{s-k-1} f^{(n-k-1)}(x)] = 0, \quad 0 \leq k < n,$$

формула (7.2.1) приобретает простой вид:

$$\overline{f^{(n)}}(s) = \frac{(-1)^n \Gamma(s)}{\Gamma(s-n)} \overline{f}(s-n) = \frac{\Gamma(1-s+n)}{\Gamma(1-s)} \overline{f}(s-n).$$

Преобразование Меллина интеграла Римана-Лиувилля может быть осуществлено непосредственно для нецелых порядков, поскольку формула имеет аналогичный вид:

$${}_0 f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x (x-\xi)^{\mu-1} f(\xi) d\xi.$$

Умножая обе части ее на $x^{s-1} dx$, интегрируя по x от 0 до ∞ и меняя порядок интегрирования по правилу Дирихле, мы получаем:

$$\overline{{}_0 f^{(-\mu)}}(s) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} d\xi f(\xi) \int_{\xi}^{\infty} (x-\xi)^{\mu-1} x^{s-1} dx.$$

С помощью замены $t = \xi/x$, внутренний интеграл может быть выражен через бета-функцию

$$\int_{\xi}^{\infty} (x-\xi)^{\mu-1} x^{s-1} dx = \xi^{s+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} t^{-s-\mu} dt = \xi^{s+\mu-1} B(\mu, 1-s-\mu).$$

В результате имеем

$${}_0\overline{f^{(-\mu)}}(s) = \frac{\Gamma(1-s-\mu)}{\Gamma(1-s)} \overline{f}(s+\mu) \quad (\operatorname{Re} s < 1-\mu).$$

Найдем образ Меллина дробной производной Римана-Лиувилля. Согласно ее определению

$${}_0f^{(\nu)}(x) = D_x^n {}_0f^{(\nu-n)}(x) \equiv g^{(n)}(x), \quad g(x) = {}_0f^{(\nu-n)}(x),$$

$$n-1 \leq \nu < n \quad (n = [\nu] + 1).$$

Используя вышеприведенную формулу для $\overline{g^{(n)}}(s)$ и подставляя в нее

$$\overline{g}(s-n) = {}_0\overline{f^{(\nu-n)}}(s-n) = \frac{\Gamma(1-s+\nu)}{\Gamma(1-s+n)} \overline{f}(s-\nu),$$

приходим к следующему выражению для трансформанты Меллина дробной производной Римана-Лиувилля:

$${}_0\overline{f^{(\nu)}}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(1-s+k)}{\Gamma(1-s)} \left[{}_0f^{(\nu-k-1)}(x)x^{s-k-1} \right]_0^\infty + \frac{\Gamma(1-s+\nu)}{\Gamma(1-s)} \overline{f}(s-\nu).$$

Если функция $f(x)$ такова, что подстановка пределов в первую сумму дает ноль, то формула приобретает простой вид:

$${}_0\overline{f^{(\nu)}}(s) = \frac{\Gamma(1-s+\nu)}{\Gamma(1-s)} \overline{f}(s-\nu) \quad (\operatorname{Re} s < 1-\mu).$$

Для производной Капуто

$${}_0^{(\nu)}\overline{f}(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\nu-k-s)}{\Gamma(1-s)} \left[f^{(k)}(x)x^{s-\nu+k} \right]_0^\infty + \frac{\Gamma(1-s+\nu)}{\Gamma(1-s)} \overline{f}(s-\nu),$$

или, при нулевой первой сумме, переписанный в виде

$${}_{-\infty}f^{(-\mu)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \xi^{\mu-1} f(x-\xi) d\xi,$$

есть не что иное, как образ Меллина функции $\phi_x(\xi) \equiv f(x-\xi)$ (с точностью до множителя $1/\Gamma(\mu)$) с μ , продолженным в комплексную плоскость:

$$\Gamma(\mu) {}_{-\infty}f^{(-\mu)} = \overline{\phi_x}(\mu).$$

Применив обратное преобразование Лапласа

$$\phi_x(\xi) = f(x - \xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \mu - i\infty}^{\text{Re } \mu + \infty} \Gamma(\mu) {}_{\infty}f^{-\mu}(x)\xi^{-\mu} d\mu, \quad \xi > 0.$$

и положив $x = 0$, получим:

$$\phi_0(\xi) = f(-\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Re } \mu - i\infty}^{\text{Re } \mu + \infty} \Gamma(\mu) {}_{\infty}f^{-\mu}(0)\xi^{-\mu} d\mu, \quad \xi > 0.$$

Таким образом, функция $f(x)$ может быть восстановлена по ее дробным интегралам ${}_{\infty}f^{(-\mu)}(x)$, взятым только при одном значении верхнего предела $x = 0$, если они известны для всех комплексных порядков μ на прямой $\text{Re } \mu = \text{const} > 0$ [2]. Результат этот может рассматриваться как обобщение разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора.

7.3 Преобразование Фурье

При рассмотрении поведения производных на всей вещественной оси $-\infty < x < \infty$ более подходящим оказывается преобразование Фурье

$$f(x) \xrightarrow{F} \tilde{f}(k) = F\{f(x)\}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x) dx$$

с обратным преобразованием

$$f(x) = F^{-1}\{\tilde{f}(k)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \tilde{f}(k) dk$$

и теоремой о свертке

$$F\left\{\int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi\right\}(k) = F\{f * g(x)\}(k) = \tilde{f}(k)\tilde{g}(k).$$

Для операций многократного интегрирования и дифференцирования имеют место соотношения

$$\tilde{f}_n(k) = \{F {}_{-\infty}I_x^n f(x)\}(k) = (-ik)^{-n} \tilde{f}(k), \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\tilde{f}^{(n)}(k) = F\{D^n f(x)\}(k) = (-ik)^n \tilde{f}(k), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка, мы снова используем представление в виде свертки

$$-\infty f^{(-\mu)}(x) = f * \Phi_\mu(x),$$

теорему о свертке

$$-\infty \tilde{f}^{(-\mu)}(k) = \tilde{f}(k) \tilde{\Phi}_\mu(k),$$

и выражение для Фурье-образа функции $\Phi_\mu(x)$:

$$\tilde{\Phi}_\mu(k) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty e^{ikx} x^{\mu-1} dx = (-ik)^{-\mu}.$$

Применяя известную формулу

$$(ik)^\nu = |k|^\nu \exp\{-i\nu(\pi/2)\text{sign}(k)\} = |k|^\nu \{\cos(\nu\pi/2) - i \sin(\nu\pi/2)\text{sign}(k)\},$$

получаем для левостороннего интеграла

$$-\infty \tilde{f}^{(-\mu)}(k) = (-ik)^{-\mu} \tilde{f}(k) = |k|^{-\mu} \exp\{i(\mu\pi/2)\text{sign}(k)\} \tilde{f}(k), \quad \mu > 0.$$

Аналогично, для правостороннего

$$\tilde{f}_\infty^{(-\mu)}(k) = (ik)^{-\mu} \tilde{f}(k) = |k|^{-\mu} \exp\{-i(\mu\pi/2)\text{sign}(k)\} \tilde{f}(k), \quad \mu > 0.$$

Для левосторонних дробных производных Римана-Лиувилля мы имеем ($n = [\nu] + 1$)

$$\begin{aligned} -\infty \tilde{f}^{(\nu)}(k) &= F\{-\infty I_x^{n-\nu} f^{(n)}(x)\}(k) = F\{\Phi_{\nu-n} * f^{(n)}(x)\}(k) = \\ &= (-ik)^{-(\nu-n)} \cdot (-ik)^n \tilde{f}(k) = (-ik)^\nu \tilde{f}(k) = |k|^\nu \exp\{-i(\pi/2)\text{sign}(k)\} \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

Аналогично, для правосторонних

$$x \tilde{f}_\infty^{(\nu)}(k) = (ik)^\nu = |k|^\nu \exp\{i(\nu\pi/2)\text{sign}(k)\} \tilde{f}(k)$$

Если $n - 1 < \nu < n$, функция $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, имеет n непрерывных производных и $f(x), f^{(1)}(x), \dots, f^{(n-1)}$ стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$, то многократным интегрированием по частям можно убедиться, что производные Римана-Лиувилля, Капуто и Грюнвальда-Летникова в полубесконечных пределах ($(-\infty, x)$ или (x, ∞)) совпадают:

$$-\infty D_x^\nu f(x) = -\infty {}^\nu D_x f(x) = D_+^\nu f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_{-\infty}^x \frac{f^{(n)}(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{\nu+1-n}}.$$

Литература

1. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – New York – London: Academic Press, 1999.
2. *Butzer P., Westphal U.* In: Applications of Fractional Calculus in Physics. Ed. *R. Hilfer*. World Scientific, Singapore, 2000.
3. *Rubin B.* Fractional Integrals and Potentials. – Harlow: Longman, Edinburgh Gate, 1996.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

Глава 8

Потенциалы, гиперсингулярные интегралы и производные

8.1 Потенциалы и производные Рисса на прямой

Рассмотренные выше производные Римана-Лиувилля содержат интегральные операторы с сингулярным ядром, принадлежащие Вольтеррову типу: один из пределов является переменным. Во многих физических задачах, однако, интегрирование необходимо выполнять по фиксированному отрезку или по всей вещественной оси от $-\infty$ до ∞ . Такая ситуация имеет место, например, при нахождении скалярного потенциала $\phi(x)$, создаваемого на оси x распределенным по ней зарядом с плотностью $f(x)$

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{|x - \xi|}.$$

Определение напряженности

$$E_x(x) = -d\phi(x)/dx,$$

связано с вычислением интеграла

$$E_x(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x - \xi)f(\xi)d\xi}{|x - \xi|^2}.$$

Обобщение таких интегралов на дробные порядки выполнено М. Риссом [1]. Один из дробных интегралов, имеющий вид

$$R^\nu f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)d\xi}{|x - \xi|^{1-\nu}}, \quad \nu \in (0, 1),$$

называется *потенциалом Рисса* порядка ν от функции $f(x)$, другой,

$$\dagger R^\nu f(x) = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \sin(\nu\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x - \xi)f(\xi)d\xi}{|x - \xi|^{1-\nu}}, \quad \nu \in (0, 1), \quad -\infty < x < \infty.$$

– *сопряженным потенциалом Рисса*. Эти потенциалы распространяются на все положительные (и даже комплексные) значения $\nu > 0$ [2].

Легко видеть, что потенциалы Рисса связаны с интегралами Римана-Лиувилля соотношениями

$$R^\nu = \frac{1}{2 \cos(\nu\pi/2)} (-\infty|_x^\nu + x|_\infty^\nu), \quad \dagger R^\nu = \frac{1}{2 \sin(\nu\pi/2)} (-\infty|_x^\nu - x|_\infty^\nu),$$

и что обратные соотношения имеют вид:

$$-\infty|_x^\nu = \cos(\nu\pi/2)R^\nu + \sin(\nu\pi/2) \dagger R^\nu, \quad x|_\infty^\nu = \cos(\nu\pi/2)R^\nu - \sin(\nu\pi/2) \dagger R^\nu.$$

Выполняются также следующие правила сложения порядков: если положительные $\mu > 0$ и $\nu > 0$ таковы, что $\mu + \nu < 1$, то [3]

$$R^\mu R^\nu f(x) = R^{\mu+\nu} f(x), \quad \dagger R^\mu \dagger R^\nu f(x) = -R^{\mu+\nu} f(x).$$

8.2 Преобразование Фурье потенциалов Рисса

С точностью до множителя $[2\Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2)]^{-1}$ потенциал Рисса представляет собой свертку (в смысле Фурье) функций $f(x)$ и $g_\nu(x) = |x|^{\nu-1}$. Преобразование Фурье последней (для $0 < \nu < 1$) имеет вид

$$\tilde{g}_\nu(k) = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi|^{\nu-1} e^{ik\xi} d\xi = 2|k|^{-\nu} \int_0^{\infty} |\xi|^{\nu-1} \cos(\xi) d\xi = 2|k|^{-\nu} \Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2),$$

так что преобразование Фурье потенциала $R^\nu f(x)$ выглядит следующим образом:

$$F\{R^\nu f(x)\}(k) = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2)} F\{g_\nu * f(x)\}(k) =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos(\nu\pi/2)} \tilde{g}_\nu(k) \tilde{f}(k) = |k|^{-\nu} \tilde{f}(k).$$

Аналогично находится и образ Фурье сопряженного потенциала Рисса:

$$F\{\dagger R^\nu f(x)\}(k) = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \sin(\nu\pi/2)} \dagger \tilde{g}_\nu(k) \cdot \tilde{f}(k),$$

где

$$\dagger \tilde{g}_\nu(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(\xi) |\xi|^{\nu-1} e^{ik\xi} d\xi = 2i \text{sign}(k) |k|^{-\nu} \Gamma(\nu) \sin(\nu\pi/2),$$

так что

$$F\{\dagger R^\nu f(x)\}(k) = i \text{sign}(k) |k|^{-\nu} \tilde{f}(k).$$

8.3 Риссовы производные

Как и в случае односторонних производных Римана-Лиувилля, переход от интегралов к производным (от отрицательных ν к положительным) может осуществляться как путем целого дифференцирования, так и методом регуляризации Адамара.

Дополним приведенные выше соотношения парой следующих преобразований, содержащих дифференциальный оператор первого порядка,

$$F\{D_x R^{1-\nu} f(x)\}(k) = (-ik) |k|^{\nu-1} \tilde{f}(k) = -i \text{sign}(k) |k|^\nu \tilde{f}(k),$$

и

$$F\{D_x \dagger R^{1-\nu} f(x)\}(k) = (-ik)(i \text{sign}(k)) |k|^{\nu-1} \tilde{f}(k) = |k|^\nu \tilde{f}(k),$$

Полученные формулы позволяют нам рассматривать составные операторы $D_x \dagger R^{1-\nu} f(x)$ и $D_x R^{1-\nu} f(x)$ как *оператор дифференцирования Рисса* и *сопряженный оператор дифференцирования Рисса*, соответственно [3].

Определяя производную Рисса как регуляризованный путем выделения конечной части по Адамару риссов потенциал отрицательного порядка, получим:

$$\begin{aligned} \text{p.f. } R^{-\nu} f(x) &= \text{p.f. } \frac{1}{K_{\nu,2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{|x-\xi|^{1+\nu}} = \\ &= \frac{1}{K_{\nu,2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi \equiv D^\nu f(x), \quad 0 < \nu < 2, \quad \nu \neq 1. \end{aligned}$$

Здесь

$$K_{\nu,2} = \begin{cases} 2\Gamma(-\nu) \cos(\nu\pi/2), & 0 < \nu < 2, \quad \nu \neq 1, \\ -\pi & \nu = 1. \end{cases}$$

и несобственный интеграл интерпретируется как предел

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{|\xi| \geq \varepsilon} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi.$$

Формула дробной производной Рисса

$$D^{\nu} f(x) = \frac{1}{K_{\nu,2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi$$

может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} D^{\nu} f(x) &= \frac{1}{K_{\nu,2}} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi + \int_0^{\infty} \frac{f(x-\xi) - f(x)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi \right\} = \\ &= \frac{1}{K_{\nu,2}} \int_0^{\infty} \frac{f(x+\xi) - 2f(x) + f(x-\xi)}{\xi^{1+\nu}} d\xi \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

с центральной разностью в числителе подынтегрального выражения. Для произвольного $\nu > 0$ этот метод приводит к выражению,

$$D^{\nu} f(x) = \frac{1}{K_{\nu,2j}} \int_0^{\infty} \frac{\overline{\Delta}_{\xi}^{2j} f(x)}{\xi^{1+\nu}} d\xi, \quad 0 < \nu < 2j,$$

содержащему центральные разности функции $f(x)$ четных порядков $2j$:

$$\overline{\Delta}_{\xi}^{2j} f(x) = \sum_{k=0}^{2j} (-1)^k \binom{2j}{k} f(x + (j-k)\xi)$$

и нормировочные коэффициенты

$$K_{\nu,2j} = (-1)^j 2^{2j-\nu} \int_0^{\infty} \frac{\sin^{2j} \xi}{\xi^{1+\nu}} d\xi.$$

Заметим, что производные Рисса выражаются через производные Маршо соотношением

$$D^{\nu} f(x) = [2 \cos(\nu\pi/2)]^{-1} (D_{+}^{\nu} f(x) + D_{-}^{\nu} f(x)).$$

Рассмотрим теперь сопряженный потенциал Рисса. Действуя тем же образом, получим:

$$\begin{aligned}
 {}^{\dagger}D^{\nu} f(x) &= \text{p.f. } {}^{\dagger}R^{-\nu} f(x) = \text{p.f. } \frac{-1}{2\Gamma(-\nu) \sin(\nu\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1+\nu}} f(\xi) d\xi = \\
 &= \frac{-1}{2\Gamma(-\nu) \sin(\nu\pi/2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1+\nu}} [f(\xi) - f(x)] d\xi = \\
 &= \frac{-1}{2\Gamma(-\nu) \sin(\nu\pi/2)} \left\{ \int_{-\infty}^x \frac{f(\xi) - f(x)}{(x-\xi)^{1+\nu}} d\xi - \int_x^{\infty} \frac{f(\xi) - f(x)}{(\xi-x)^{1+\nu}} d\xi \right\} = \\
 &= \frac{\nu}{2\Gamma(1-\nu) \sin(\nu\pi/2)} \int_0^{\infty} [f(x-\xi) - f(x+\xi)] \xi^{-1-\nu} d\xi, \quad 0 < \nu < 2.
 \end{aligned}$$

8.4 Преобразование Фурье производных Рисса

Чтобы найти трансформанту Фурье производной Рисса, подействуем на обе части равенства (8.3.1) оператором преобразования Фурье:

$$\widetilde{f_x^{(\nu)}}(k) = F\{D^{\nu} f(x)\}(k) = \frac{1}{2\Gamma(-\nu) \cos(\nu\pi/2)} \int_0^{\infty} F(k, \xi) \xi^{-1-\nu} d\xi$$

где

$$F(k, \xi) = F\{f(x+\xi) - 2f(x) + f(x-\xi)\}(k) = [e^{-ik\xi} + e^{ik\xi} - 2] \widetilde{f}(k).$$

Заменой переменных и использованием формулы

$$\int_0^{\infty} [1 - e^{-\xi}] \xi^{-1-\nu} d\xi = -\Gamma(-\nu), \quad 0 < \nu < 1,$$

мы приходим к результату

$$F\{D^{\nu} f(x)\}(k) = \frac{\Gamma(-\nu)[(-ik)^{\nu}] + (ik)^{\nu}}{2\Gamma(-\nu) \cos(\nu\pi/2)} \widetilde{f}(k) = |k|^{\nu} \widetilde{f}(k),$$

согласующемуся с соответствующей формулой для целых производных данного типа.

Аналогичным образом, для сопряженной производной

$${}^{\dagger}D^{\nu}f(x) = \text{p.f. } {}^{\dagger}R^{-\nu}f(x) = \frac{\nu}{2\Gamma(1-\nu)\sin(\nu\pi/2)} \int_0^{\infty} [f(x-\xi) - f(x+\xi)]\xi^{-1-\nu}d\xi,$$

получаем

$${}^{\dagger}\widetilde{f}_x^{\nu}(k) = F\{{}^{\dagger}D^{\nu}f(x)\}(k) = \frac{\nu}{2\Gamma(1-\nu)\sin(\nu\pi/2)} \int_0^{\infty} {}^{\dagger}F(k, \xi)\xi^{-1-\nu}d\xi$$

где

$${}^{\dagger}F(k, \xi) = F\{f(x-\xi) - f(x+\xi)\}(k) = [e^{ik\xi} - e^{-ik\xi}]\widetilde{f}(k).$$

Выполняя замену переменных в интеграле

$$\int_0^{\infty} \xi^{-1-\nu} \sin(k\xi)d\xi = \text{sign}(k)|k|^{\nu} \int_0^{\infty} t^{-1-\nu} \sin tdt$$

и применяя формулу

$$\int_0^{\infty} t^{-1-\nu} \sin tdt = -\Gamma(-\nu)\sin(\nu\pi/2), \quad 0 < \nu < 1,$$

приходим к выражению

$$F\{{}^{\dagger}D^{\nu}f(x)\}(k) = i \text{sign}(k)|k|^{\nu}\widetilde{f}(k).$$

Наблюдая за поведением этой трансформанты при $\nu \rightarrow 1$ и $\nu \rightarrow 0$, мы видим, что она не переходит в $\widetilde{f}'(k)$ и $\widetilde{f}(k)$ соответственно, и по этой причине дробный оператор ${}^{\dagger}D^{\nu}$ не является оператором дифференцирования ν -го порядка.

8.5 Потенциал Феллера

Как отмечалось выше, риссовы потенциалы связаны с интегралами Римана-Лиувилля соотношениями:

$$R^{\nu} = \frac{1}{2\cos(\nu\pi/2)} (-\infty|_x^{\nu} + x|_{\infty}^{\nu})$$

и

$${}^{\dagger}R^{\nu} = \frac{1}{2\sin(\nu\pi/2)} (-\infty|_x^{\nu} - x|_{\infty}^{\nu}).$$

Феллером был введен оператор более общего типа, называемый *феллеровским интегралом*, представляющий собой линейную суперпозицию дробных интегралов Римана-Лиувилля:

$$I_{u,v}^\nu f(x) = A^{-1/2} [u I_{-\infty}^\nu f(x) + v I_x^\nu f(x)].$$

Мы ввели сюда произвольную положительную постоянную $A^{-1/2}$, ограничив значения двух параметров данного оператора u и v симметричным условием $u^2 + v^2 = 1$. Переходя к потенциалам Рисса, а затем – к явным представлениям интегралов, мы получим:

$$\begin{aligned} I_{u,v}^\nu f(x) &= A^{-1/2} [(u+v) \cos(\nu\pi/2) R^\nu f(x) + (u-v) \sin(\nu\pi/2) {}^\dagger R^\nu] = \\ &= \frac{A^{-1/2}}{2\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u+v + (u-v)\text{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1-\nu}} f(\xi) d\xi, \quad 0 < \nu < 1. \end{aligned}$$

Используя известные трансформанты Фурье дробных интегралов Римана-Лиувилля или риссовых потенциалов, найдем трансформанту Фурье феллеровского потенциала:

$$\begin{aligned} F\{I_{u,v}^\nu f(x)\}(k) &= A^{-1/2} \cos(\nu\pi/2) [(u+v) + i(u-v)\text{tg}(\nu\pi/2)\text{sign}(k)] |k|^{-\nu} \tilde{f}(k), \\ &0 < \nu < 1. \end{aligned}$$

Оператор, обратный феллеровскому потенциалу (*обратный феллеровский потенциал*) определяется как конечная (по Адамару) часть феллеровского потенциала отрицательного порядка:

$$\begin{aligned} D_{u,v}^\nu f(x) &= \text{p.f. } F_{u,v}^{-\nu} = \frac{A^{-1/2}}{2\Gamma(-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u+v + (u-v)\text{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1+\nu}} [f(x) - f(\xi)] d\xi, \\ &0 < \nu < 1. \end{aligned}$$

Выполняя несложные выкладки

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u+v + (u-v)\text{sign}(x-\xi)}{|x-\xi|^{1+\nu}} [f(x) - f(\xi)] d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{u+v + (u-v)}{(x-\xi)^{1+\nu}} [f(x) - f(\xi)] d\xi + \int_x^{\infty} \frac{u+v - (u-v)}{(\xi-x)^{1+\nu}} [f(x) - f(\xi)] d\xi = \\ &= -2 \int_0^{\infty} [(u+v)f(x) - uf(x-\xi) - vf(x+\xi)] \xi^{-1-\nu} d\xi, \end{aligned}$$

приходим к следующему результату:

$$D_{u,v}^{\nu} f(x) = \frac{\nu A^{-1/2}}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\infty} [(u+v)f(x) - uf(x-\xi) - vf(x+\xi)] \xi^{-1-\nu} d\xi.$$

В заключение, найдем трансформанту Фурье обратного феллеровского потенциала:

$$\begin{aligned} F\{D_{u,v}^{\nu} f(x)\}(k) &= \frac{\nu A^{-1/2}}{\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\infty} F\{(u+v)f(x) - uf(x-\xi) - vf(x+\xi)\}(k) \xi^{-1-\nu} d\xi = \\ &= \frac{\nu A^{-1/2}}{\Gamma(1-\nu)} \left\{ \int_0^{\infty} [(u+v) - ue^{ik\xi} - ve^{-ik\xi}] \xi^{-1-\nu} d\xi \right\} \tilde{f}(k) = \\ &= A^{-1/2} [u(-ik)^{\nu} + v(ik)^{\nu}] \tilde{f}(k) = \\ &= A^{-1/2} \cos(\nu\pi/2) [(u+v) - i(u-v)\operatorname{tg}(\nu\pi/2)\operatorname{sign}(k)] |k|^{\nu} \tilde{f}(k). \end{aligned}$$

Чтобы удовлетворить условию

$$F\{D_{u,v}^{\nu} (I_{u,v}^{\nu} f(x))\}(k) = \tilde{f}(k),$$

позволяющему назвать оператор $D_{u,v}^{\nu}$ *феллеровской производной*, постоянная A должна быть взята в виде:

$$A = [(u+v) \cos(\nu\pi/2)]^2 + [(u-v) \sin(\nu\pi/2)]^2.$$

8.6 Производные по направлению

Оставшаяся часть данной главы посвящена дробным операциям в многомерном пространстве \mathbb{R}^d , точки которого обозначим через \mathbf{x} . Дробный интеграл от функции $f(\mathbf{x})$ по направлению, задаваемому d -мерным единичным вектором \mathbf{u} , определяется выражением

$$I_{\mathbf{u}}^{\mu} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} f(\mathbf{x} - \mathbf{u}\xi) \xi^{\mu-1} d\xi, \quad \mu > 0.$$

Имеет место полугрупповое свойство:

$$I_{\mathbf{u}}^{\mu} I_{\mathbf{u}}^{\nu} f(\mathbf{x}) = I_{\mathbf{u}}^{\mu+\nu} f(\mathbf{x}), \quad \mu, \nu > 0.$$

Дробная производная порядка $n + \nu$ дается соотношением

$$D_{\mathbf{u}}^{n+\nu} f(\mathbf{x}) = \left(\frac{d}{d\mathbf{u}} \right)^{n+1} I_{\mathbf{u}}^{1-\nu} f(\mathbf{x}),$$

где d/du - обычная производная по направлению. Имеет место свойство обратимости:

$$D_{\mathbf{u}}^{\nu} f(\mathbf{x}) \equiv f(\mathbf{x}).$$

Частные производные Римана-Лиувилля дробных порядков определяются как и в случае целых порядков:

$$a_j f_{x_j}^{(\nu_j)}(\mathbf{x}) = a_j D_{x_j}^{\nu_j} f(\mathbf{x}).$$

Аналогично вводятся смешанные производные

$$\mathbf{a} f_{\mathbf{x}}^{(\mathbf{v})}(\mathbf{x}) = a_1 D_{x_1}^{\nu_1} \dots a_d D_{x_d}^{\nu_d} f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v} = (\nu_1, \dots, \nu_d).$$

8.7 Дробные градиенты и лапласианы

Рассматривая риссовы операторы

$$\begin{aligned} D_j^{\nu} f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_d) = \\ = \frac{1}{K_{\nu,2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1, \dots, x_j - \xi, \dots, x_d) - f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_d)}{|\xi|^{1+\nu}} d\xi, \\ 1 \leq j \leq d, \quad 0 < \nu \leq 1, \end{aligned}$$

как компоненты «вектора» ∇^{ν} , получаем обобщение градиента, операцию $\nabla^{2\nu}$ определим как скалярный квадрат $\nabla^{\nu} \nabla^{\nu}$. В формальной записи

$$\nabla^{2\nu} \equiv \sum_{j=1}^d D_j^{2\nu}. \quad (8.7.1)$$

При $\nu \rightarrow 1$ этот оператор превращается в лапласиан, однако при $\nu < 1$ он теряет важнейшее свойство лапласиана - инвариантность относительно вращения. Таким свойством обладает оператор

$$-(-\Delta)^{\nu} \equiv - \left(- \sum_{j=1}^d D_j^2 \right)^{\nu}, \quad (8.7.2)$$

при $\nu \rightarrow 1$ так же превращающийся в обычный лапласиан.

Образы Фурье операторов (8.7.1) и (8.7.2)

$$F \{ \nabla_{\mathbf{x}}^{2\nu} \} (k) = \sum_{j=1}^d (-ik_j)^{2\nu}$$

и

$$F\{(-\Delta)^\nu\}(k) = \left(-\sum_{j=1}^d (-ik_j)^2\right)^\nu = \left(\sum_{j=1}^d k_j^2\right)^\nu = |\mathbf{k}|^{2\nu}$$

демонстрируют их различие при $\nu < 1$. В частности, при $\nu = 1/2$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^1 f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j},$$

а

$$\Delta^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j^2}}.$$

Найдем явное выражение для действия оператора $(-\Delta)^\nu$ на функцию $f(\mathbf{x})$. В терминах преобразования Фурье

$$F\{(-\Delta)^\nu f(\mathbf{x})\}(\mathbf{k}) = F\{(-\Delta)^\nu\}(\mathbf{k}) \cdot F\{f(\mathbf{x})\}(\mathbf{k})$$

и, следовательно,

$$(-\Delta)^\nu f(\mathbf{x}) = F^{-1}\{F\{(-\Delta)^\nu\}(\mathbf{k}) \cdot F\{f(\mathbf{x})\}(\mathbf{k})\}(\mathbf{x}) = F^{-1}\{|\mathbf{k}|^{2\nu}\} * f(\mathbf{x}).$$

Первая из свертываемых функций, характеризующая действующий оператор, находится следующим интегрированием:

$$\begin{aligned} F^{-1}\{|\mathbf{k}|^{2\nu}\}(\mathbf{x}) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} |\mathbf{k}|^{2\nu} d\mathbf{k} = \\ &= |\mathbf{x}|^{-2\nu-d} (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty J_{d/2-1}(\xi) \xi^{2\nu+d/2} d\xi = [\gamma_d(2\nu)]^{-1} |\mathbf{x}|^{-2\nu-d}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma_d(2\nu) = 2^{-2\nu} \pi^{d/2} \Gamma(-\nu) / \Gamma(\nu + d/2),$$

а $\nu \in (-1, 0)$. Таким образом,

$$(-\Delta)^\nu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma_d(2\nu)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d+2\nu}}, \quad -1 < \nu < 0. \quad (8.7.3)$$

Это выражение представляет собой d -мерный потенциал Рисса порядка -2ν .

В многомерных пространствах, особенно в трехмерном, потенциалы играют более существенную роль в физических задачах. Примером

может служить скалярный потенциал электростатического поля $\phi(\mathbf{x})$, создаваемый распределением зарядов с пространственной плотностью $f(\mathbf{x})$:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{3-2}}.$$

Трехмерное преобразование Фурье дает

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\mathbf{k}|^{-2} \tilde{f}(\mathbf{k}).$$

Риссов потенциал обобщает эту операцию на произвольный порядок ядра интеграла $2 \rightarrow \mu$ и произвольную размерность пространства

$$I^\mu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma_n(-\mu)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d-\mu}}, \quad \mu \neq n, n+2, n+4, \dots,$$

При $0 < \nu < 1$ используем регуляризацию интеграла методом Адамара, в результате чего приходим к ν -й степени лапласиана

$$(-\Delta)^\nu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma_d(2\nu)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{[f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x})] d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{d+2\nu}}, \quad 0 < \nu < 1. \quad (8.7.4)$$

Переход в область $\nu \geq 1$ может быть осуществлен как повторной регуляризацией, так и применением конечных разностей. В последнем случае мы получаем представление $(-\Delta)^{\nu/2}$, $\nu > 0$ в виде

$$(-\Delta)^{\nu/2} = \frac{1}{\delta_d(\nu, l)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\Delta_h^l f)(\mathbf{x})}{|\mathbf{h}|^{d+\nu}} d\mathbf{h},$$

где $(\Delta_h^l f)(\mathbf{x})$ – конечная разность функции $f(\mathbf{x})$ нескольких переменных с векторным шагом \mathbf{h} .

Можно использовать здесь оба типа разностей – центрированные

$$(\Delta_h^l f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f[\mathbf{x} + (l/2 - k)\mathbf{h}]$$

и нецентрированные

$$(\Delta_h^l f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^l (-1)^k \binom{l}{k} f(\mathbf{x} - k\mathbf{h}).$$

Нормировочные постоянные, обеспечивающие выполнение равенства

$$F \left\{ \frac{1}{\delta_d(\nu, l)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\Delta_h^l f)(\mathbf{x})}{|\mathbf{h}|^{d+\nu}} d\mathbf{h} \right\} = |\mathbf{k}|^\nu \tilde{f}(\mathbf{k}),$$

определяются интегралами

$$\delta_d(\nu, l) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{ix_1}) |\mathbf{x}|^{-d-\nu} d\mathbf{x} & \text{для нецентрированной разности,} \\ 2^{l-\nu} i^l \int_{\mathbb{R}^d} \sin^l x_1 |\mathbf{x}|^{-d-\nu} d\mathbf{x} & \text{для центрированной разности.} \end{cases}$$

Здесь x_1 – первая (в принципе, любая) компонента d -мерного вектора $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$. Заметим, что риссов оператор $(-\Delta)^\nu$, выраженный через разность Δ_h^l , не зависит от выбора l , требуется только, чтобы $l > \nu$.

8.8 Риссовы потенциалы и движение Леви

Известны простые соотношения, связывающие потенциалы Рисса $I^\nu f(\mathbf{x})$ с интегралами Пуассона [2]

$$P_t f(\mathbf{x}) \equiv \frac{\Gamma((d+1)/2)t}{\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}'}{(|\mathbf{x}'|^2 + t^2)^{(d+1)/2}}$$

и Гаусса-Вейерштрасса [5]

$$W_t f(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') e^{-|\mathbf{x}'|^2/(4t)} d\mathbf{x}'.$$

Связь эта осуществляется посредством одномерных дробных интегралов лиувиллиевского типа [2] и представляется формулами:

$$I^\nu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^\infty t^{\nu-1} (P_t f)(\mathbf{x}) dt, \quad (8.8.1)$$

$$I^\nu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \int_0^\infty t^{\nu/2-1} (W_t f)(\mathbf{x}) dt. \quad (8.8.2)$$

Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$P_t I^\nu f(\mathbf{x}) = (I_-^\nu (P_\tau f)(\mathbf{x}))(t) \quad (8.8.3)$$

$$(W_t l^\nu f)(\mathbf{x}) = (l_-^{\nu/2}(W_\tau f)(\mathbf{x}))(t) \quad (8.8.4)$$

где операторы l_-^ν и $l_-^{\nu/2}$ действуют по переменной τ .

Легко усмотреть вообще в этих формулах: в первой из них в качестве ядра интегрального оператора стоит плотность d -мерного изотропного Коши движения

$$P_t(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma((d+1)/2)t}{\pi^{(d+1)/2}} \frac{1}{(|\mathbf{x}|^2 + t^2)^{(d+1)/2}},$$

во второй – d -мерная плотность броуновского движения

$$W_t(\mathbf{x}) = \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/(4t)}.$$

Оба эти процесса принадлежат семейству изотропных Леви-Фельдгейма движений, задаваемому характеристической функцией

$$\tilde{p}_d(\mathbf{k}, t, \nu) \equiv \int_{\mathbb{R}^d} p(\mathbf{x}, t, \nu) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x} = e^{-t|\mathbf{k}|^\nu}, \quad 0 < \nu \leq 2:$$

$$P_t(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t, 1), \quad W_t(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, t, 2).$$

Для трех первых размерностей

$$\begin{aligned} p_d(\mathbf{x}, t, \nu) &= \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-ts^\nu} \cos(s|\mathbf{x}|) ds, \quad d = 1; \\ p_d(\mathbf{x}, t, \nu) &= (2\pi)^{-1} \int_0^\infty e^{-ts^\nu} J_0(s|\mathbf{x}|) s ds, \quad d = 2; \\ p_d(\mathbf{x}, t, \nu) &= (2\pi^2|\mathbf{x}|)^{-1} \int_0^\infty e^{-ts^\nu} \sin(s|\mathbf{x}|) s ds, \quad d = 3. \end{aligned}$$

Для произвольной размерности d

$$p_d(\mathbf{x}, t, \nu) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty e^{-ts^\nu} J_{d/2-1}(s|\mathbf{x}|)^{1-d/2} s^{d-1} ds.$$

Кроме того, имеют место разложения в ряды

$$\begin{aligned} p_d(\mathbf{x}, t, \nu) &\equiv p_d(r, t, \nu) = \\ &= \frac{1}{\pi} (r\sqrt{\pi})^{-d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma((\nu n + d)/2) \Gamma(\nu n/2 + 1)}{\Gamma(n+1)} \sin(\nu n\pi/2) (r/2)^{-\nu n} t^n, \end{aligned}$$

и

$$p_d(r, t, \nu) = (2/\nu)/(2\sqrt{\pi}t^{1/\nu})^{-d} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma((2/\nu)n + d/\nu)}{\Gamma(n + d/2) \Gamma(n+1)} (r/2)^{2n} t^{-2n/\nu}.$$

Первый из них сходится при $\mu \in (0, 1)$ и является асимптотическим при $\mu \in [1, 2)$, второй сходится при $\nu \in [1, 2]$ и является асимптотическим в области $\nu \in (0, 1)$.

Естественно ожидать, что соотношения (8.8.1)-(8.8.4) останутся справедливыми и для остальных членов этого семейства. Обозначим через $L_p(\mathbb{R}^d)$ пространство функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_d)$, для которых

$$\|f\|_p = \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right\}^{1/p} < \infty.$$

Справедлива следующая

Теорема. Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p < d/\nu$, и для любого $\mu \in (0, 2]$

$$I^\nu f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(\nu/\mu)} \int_0^\infty t^{\nu/\mu-1} S_t^{(\mu)} f(\mathbf{x}) dt \quad (8.8.5)$$

и

$$S_t^{(\mu)} I^\nu f(\mathbf{x}) = (I^{\nu/\mu} S_\tau^{(\mu)} f(\mathbf{x}))(t), \quad (8.8.6)$$

где

$$S_t^{(\mu)} f(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') p(\mathbf{x}', t, \mu) d\mathbf{x}'.$$

Доказательство легко проводится посредством преобразования Фурье:

$$F\{I^\nu f\}(\mathbf{k}) = \frac{\tilde{f}(\mathbf{k})}{\Gamma(\nu/\mu)} \int_0^\infty t^{\nu/\mu-1} \tilde{p}_d(\mathbf{k}, t, \nu) dt.$$

Учитывая, что

$$F\{I^\nu f\}(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^{-\nu} \tilde{f}(\mathbf{k}),$$

получаем:

$$\frac{\tilde{f}(\mathbf{k})}{\Gamma(\nu/\mu)} \int_0^\infty t^{\nu/\mu-1} e^{-t|\mathbf{k}|^\mu} dt = \frac{|\mathbf{k}|^{-\nu} \tilde{f}(\mathbf{k})}{\Gamma(\nu/\mu)} \int_0^\infty \tau^{\nu/\mu-1} e^{-\tau} d\tau = |\mathbf{k}|^{-\nu} \tilde{f}(\mathbf{k}).$$

Формула (8.8.6) следует из (8.8.5) как результат полугруппового свойства операторов $S_t^{(\mu)}(\mathbf{x})$:

$$S_t^{(\mu)} S_\tau^{(\mu)} = S_{t+\tau}^{(\mu)}.$$

Таким образом, мы приходим к целому семейству соотношений, полезных как для описания самих движений Леви, так и для решения дробно-дифференциальных уравнений [6-8].

Литература

1. *Riesz M.* Acta Math. **81**, 1 (1949).
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987.
3. *Butzer P. L., Westphal U.* In: Applications of Fractional Calculus in Physics. Ed. by *Hilfer R.* – Singapore: World Scientific, 2000.
4. *Stein E. M., Weiss G.* Acta Math. **103**, 25 (1960).
5. *Johnson R.* Proc. London Math. Soc. **27**, 290 (1973).
6. *Золотарев В. М.* Одномерные устойчивые распределения. – М.: Наука, 1983.
7. *Zolotarev V. M.* In: Contributions to Probability. Ed. by *Gani J., Rohatgi V. K.* – London: Academic Press, 1981.
8. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006.
9. *Rubin B.* Fractional Integrals and Potentials. – Harlow: Longman, Edinburgh Gate, 1996.

Глава 9

Обыкновенные дифференциальные уравнения

9.1 Простейшее уравнение

Простейшее уравнение, содержащее дробную производную Римана-Лиувилля, имеет вид:

$${}_0D_x^\nu f(x) = h(x), \quad x > 0.$$

Здесь ν – произвольное положительное число, $h(x)$ – известная функция и $f(x)$ – искомая функция. Естественная попытка получить решение этого уравнения действием на обе его части оператором ${}_0D_x^{-\nu} = {}_0I_x^\nu$ приводит к функции

$$f(x) = {}_0D_x^{-\nu} h(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x - \xi)^{\nu-1} h(\xi) d\xi, \quad x > 0, \quad (9.1.1)$$

которая действительно удовлетворяет рассматриваемому уравнению, но не является его общим решением.

Из п. 5.4 следует, что две функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие одну и ту же производную дробного порядка ν , $n - 1 < \nu < n$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$${}_a f^{(\nu)}(x) = {}_a g^{(\nu)}(x),$$

связаны друг с другом соотношением

$$f(x) = g(x) + \sum_{j=1}^n c_j x^{\nu-j},$$

в котором c_j являются произвольными постоянными. Следовательно, общее решение рассматриваемого уравнения должно иметь вид

$$f(x) = {}_0D_x^{-\nu} h(x) + \sum_{j=1}^n c_j x^{\nu-j},$$

содержащий $n = [\nu] + 1$ постоянных, которые могут быть определены из граничных условий. Подействовав на обе части этого уравнения оператором ${}_0D_x^\mu$, ($\mu \leq \nu - 1$),

$${}_0f^{(\mu)}(x) = {}_0D_x^{\mu-\nu} h(x) + \sum_{j=1}^n c_j {}_0D_x^\mu x^{\nu-j},$$

и принимая во внимание формулу

$${}_0D_x^\mu x^{\nu-j} = \frac{\Gamma(\nu-j+1)}{\Gamma(\nu-j+1-\mu)} x^{\nu-j-\mu},$$

выразим эти постоянные через характеристики функции в граничной точке:

$$c_j = \frac{{}_0f^{(\nu-j)}(0+)}{\Gamma(\nu-j+1)},$$

так что

$$f(x) = {}_0D_x^{-\nu} h(x) + \sum_{j=1}^n \frac{{}_0f^{(\nu-j)}(0+)}{\Gamma(\nu-j+1)} x^{\nu-j}.$$

Возьмем в качестве примера уравнение

$${}_0D_x^{3/2} = x^5.$$

Его общее решение

$$f(x) = {}_0D_x^{-3/2} x^5 + c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1/2} = [\Gamma(6)/\Gamma(15/2)] x^{13/2} + c_1 x^{1/2} + c_2 x^{-1/2},$$

содержит две произвольные постоянные c_1 и c_2 , для определения которых надо знать производные ${}_0f^{(1/2)}(0+)$ и ${}_0f^{(-1/2)}(0+)$.

Заметим, что в случае дробного уравнения Капуто,

$${}_0^{\nu}D_x f(x) = {}_0D_x^{\nu} \left(f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0+) \right) = h(x), \quad x > 0, \quad m-1 < \nu \leq m,$$

граничные условия формулируются с использованием производных целого порядка $f^{(k)}(0+)$ [1].

9.2 Приведение к интегральному уравнению

Весьма общий метод решения дробных дифференциальных уравнений, пригодный и в случае переменных коэффициентов, основан на приведении их к виду интегрального уравнения Вольтерры второго рода.

Рассмотрим задачу Коши для дробного уравнения порядка $\alpha \in (0, 1)$:

$${}_0D_x^\alpha f(x) - af(x) = h(x), \quad {}_0f^{(\alpha-1)}(0+) = b.$$

Представим уравнение это в виде

$${}_0D_x^\alpha f(x) = F(x),$$

и предположим на время, что его правая часть

$$F(x) = af(x) + h(x)$$

известна. Согласно предыдущему параграфу, при $\alpha \in (0, 1)$ общее решение такого уравнения имеет вид

$$f(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + {}_0D_x^{-\alpha} F(x).$$

Вернувшись к прежним обозначениям, получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода

$$f(x) = f_0(x) + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}},$$

где

$$f_0(x) = \frac{b}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{h(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}.$$

Именно с такого типа уравнений, называемых *абелевыми*, начиналось развитие дробно-дифференциального аппарата.

9.3 Метод последовательных приближений

Воспользуемся для решения полученного выше интегрального уравнения Вольтерры *методом последовательных приближений*:

$$f_m(x) = f_0(x) + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f_{m-1}(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Производя последовательные подстановки, получаем:

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= b \sum_{k=1}^2 \frac{a^{k-1} x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} + \int_0^x \left[\frac{(x-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right] h(\xi) d\xi, \\
 f_2(x) &= b \sum_{k=1}^3 \frac{a^{k-1} x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} + \int_0^x \left[\sum_{k=1}^2 \frac{a^{k-1} (x-\xi)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} \right] h(\xi) d\xi, \\
 &\dots\dots\dots \\
 f_m(x) &= b \sum_{k=1}^{m+1} \frac{a^{k-1} x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} + \int_0^x \left[\sum_{k=1}^m \frac{a^{k-1} (x-\xi)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} \right] h(\xi) d\xi,
 \end{aligned}$$

и т.д. В пределе $m \rightarrow \infty$ $f_m(x) \rightarrow f(x)$, где

$$f(x) = b \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1} x^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} + \int_0^x \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1} (x-\xi)^{\alpha k-1}}{\Gamma(\alpha k)} \right] h(\xi) d\xi.$$

В результате приходим к выводу, что решение поставленной задачи выражается через функции Миттаг-Леффлера формулой

$$f(x) = bx^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(ax^\alpha) + \int_0^x (x-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[a(x-\xi)^\alpha] h(\xi) d\xi.$$

В частности, задача Коши для полуинтегрального ($\alpha = 1/2$) уравнения

$${}_0D_x^{1/2} f(x) - af(x) = h(x), \quad {}_0f^{(-1/2)}(0+) = b,$$

имеет решение вида

$$f(x) = \frac{b}{\sqrt{x}} E_{1/2,1/2}(a\sqrt{x}) + \int_0^x (x-\xi)^{-1/2} E_{1/2,1/2}(a\sqrt{x-\xi}) h(\xi) d\xi.$$

В следующем единичном интервале порядков, $\nu \in (1, 2)$, решение задачи Коши

$${}_0D_x^\nu f(x) - af(x) = h(x), \quad {}_0f^{(\nu-1)}(0+) = b, \quad {}_0f^{(\nu-2)}(0+) = c.$$

имеет вид

$$f(x) = bx^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(ax^\nu) + cx^{\nu-2} E_{\nu,\nu-1}(ax^\nu) + \int_0^x (x-\xi)^{\nu-1} E_{\nu,\nu}[a(x-\xi)^\nu] h(\xi) d\xi.$$

9.4 Метод характеристических полиномов

Напомним, что линейно независимые решения дифференциального уравнения целого порядка

$$P_n(D_x)y(x) \equiv D_x^n y(x) + a_1 D_x^{n-1} y(x) + \dots + a_n D_x^0 y(x) = 0$$

с постоянными коэффициентами a_j определяются нулями α_j *характеристического полинома*

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n.$$

Действительно, подставляя в дифференциальное уравнение $y(x) = e^{\lambda x}$ и учитывая, что

$$P_n(D_x)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x},$$

приходим к алгебраическому уравнению

$$P_n(\lambda) = 0.$$

Стало быть, если λ_j – корень характеристического уравнения, то $e^{\lambda_j x}$ является решением дифференциального уравнения.

Обратимся теперь к дробному уравнению. Метод характеристических полиномов не может быть непосредственно применен к уравнению нецелого порядка

$${}_0D_x^{\nu_n} f(x) + a_1 {}_0D_x^{\nu_{n-1}} f(x) + \dots + a_n {}_0D_x^{\nu_0} f(x) = 0.$$

Это можно сделать, однако, если ограничиться только рациональными значениями ν_j [2]. В этом случае, если q – наименьший общий множитель знаменателей дробей, которыми представлены ν_j , то есть

$$\nu_n = n\nu, \quad \nu = 1/q,$$

исходное уравнение можно представить в виде дробно-дифференциального уравнения порядка (n, q) [2]:

$$[{}_0D_x^{\nu}]^n f(x) + a_1 [{}_0D_x^{\nu}]^{n-1} f(x) + \dots + a_n [{}_0D_x^{\nu}]^0 f(x) = 0.$$

В символическом виде

$$P_n({}_0D_x^{\nu})f(x) = 0.$$

Идея применения характеристического полинома в классическом случае основана на главном свойстве экспоненциальной функции: производная любого целого порядка от нее пропорциональна ей самой:

$$D_x^n e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если же мы применим к этой функции оператор дифференцирования дробного порядка ${}_0D_x^\nu$, то получим:

$${}_0D_x^\nu e^{\lambda x} = E_x(-\nu, \lambda).$$

Дробное дифференцирование превращает экспоненту в другую функцию, однако, существуют функции двух переменных, которые в результате этой операции изменяют лишь значение пассивного аргумента:

$${}_0D_x^\nu E_x(\mu, \lambda) = E_x(\mu - \nu, \lambda).$$

Известно также, что

$${}_0D_x^\nu [xE_x(\mu, \lambda)] = xE_x(\mu - \nu, \lambda) + \nu E_x(\mu - \nu + 1, \lambda), \quad \mu > -2.$$

Две эти формулы подобны формулам

$$D_x e^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$$

и

$$D_x [xe^{\lambda x}] = \lambda xe^{\lambda x} + e^{\lambda x}$$

соответственно. Использование этой аналогии ведет к следующей теореме, касающейся случая, когда все нули характеристического полинома различны (общий случай представляет собой более трудную задачу [2]).

Теорема. Пусть

$$\left[{}_0D_x^{n\nu} + a_1 {}_0D_x^{(n-1)\nu} + \dots + a_n {}_0D_x^0 \right] f(x) = 0$$

– дробно-дифференциальное уравнение порядка (n, q) , где $q = 1/\nu$ – целое число и

$$P_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

– соответствующий характеристический полином. Пусть, далее, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$ – нули полинома $P_n(z)$ и

$$A_m^{-1} = P'(\alpha_m), \quad m = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда это уравнение имеет N линейно-независимых решений

$$y_j(x) = \sum_{m=1}^n A_m \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_m^{qj-k-1} E_x(-k\nu, \alpha_m^q), \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где N – наименьшее целое число, большее или равное $n\nu$. Общее решение есть линейная суперпозиция этих решений.

Примеры. Простейшее дробное уравнение порядка (4,3)

$${}_0D_x^{4/3} f(x) = 0$$

имеет общее решение в виде суперпозиции двух частных решений степенного типа

$$f(x) = C_1 x^{1/3} + C_2 x^{-2/3},$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные. Уравнение

$$\left[{}_0D_x^1 + a {}_0D_x^{1/2} + b \right] f(x) = 0$$

порядка (2, 2) имеет одно решение

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_1 E_x(0, \alpha_1^2) - \alpha_2 E_x(0, \alpha_2^2) + E_x(-1/2, \alpha_1^2) - E_x(-1/2, \alpha_2^2) = \\ &= \alpha_1 \exp(\alpha_1^2 x) \operatorname{erfc}(-\alpha_1 \sqrt{x}) - \alpha_2 \exp(\alpha_2^2 x) \operatorname{erfc}(-\alpha_2 \sqrt{x}) \end{aligned}$$

(если $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Легко видеть также, что

$$f(0) = \alpha_1 - \alpha_2, \quad {}_0f^{(-1/2)}(0+) = 0, \quad {}_0f^{(1/2)}(0+) = \infty, \quad f'(0) = \infty.$$

9.5 Неоднородные уравнения рационального порядка

Напомним, что общее решение неоднородного дифференциального уравнения целого порядка

$$[D_x^n + a_1 D_x^{n-1} + \dots + a_n D_x^0] f(x) = h(x)$$

может быть представлено в виде

$$f(x) = \int_0^x G(x - \xi) h(\xi) d\xi + C_1 G(x) + C_2 G'(x) + \dots + C_n G^{(n-1)}(x),$$

где C_i – произвольные постоянные, а $G(x)$ – функция Грина. В случае однородных граничных условий $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$ все C_i равны нулю и

$$f(x) = \int_0^x G(x - \xi) h(\xi) d\xi.$$

Методом преобразования Лапласа этот результат распространяется на дробно-дифференциальные уравнения рационального порядка [2].

Теорема. Пусть $h(x)$ – кусочно-непрерывная на $(0, \infty)$ и интегрируемая экспоненциального порядка на $[0, \infty)$ функция. Пусть, далее,

$$[{}_0D_x^{n\nu} + a_1 {}_0D_x^{(n-1)\nu} + \dots + a_n {}_0D_x^0]f(x) = h(x), \quad f(0) = f'(0) = \dots = f^{(N-1)}(0) = 0$$

– дробное дифференциальное уравнение порядка (n, q) , где N – наименьшее целое, большее или равное $n\nu$. Тогда его единственное решение дается формулой

$$f(x) = \int_0^x G(x-\xi)h(\xi)d\xi$$

где $G(x)$ – дробная функция Грина, найденная из характеристического полинома $P_n(z)$ с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$G(x) = \mathcal{L}^{-1}\{P^{-1}(\lambda^\nu)\}(x).$$

9.6 Метод разложения в степенной ряд

Многие классические методы решения дифференциальных уравнений, подобно методу характеристического полинома, распространяются на дробно-дифференциальные и оказываются там не менее эффективными, чем в случае целых порядков. К их числу принадлежит и *метод разложения решения в степенные ряды*.

Вернемся к уравнению

$${}_0D_x^{(\nu)} f(x) = h(x), \quad x > 0, \quad 0 < \nu < 1,$$

и поставим задачу найти его решение при граничном условии $f(0+) = 0$ в предположении, что правая часть уравнения $h(x)$ может быть разложена в ряд Маклорена, сходящийся в области $0 \leq x < R$, где R – некоторая положительная постоянная:

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0+)}{n!} x^n.$$

Будем искать решение уравнения в виде

$$f(x) = x^p \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Подставив оба этих ряда в уравнение,

$${}_0D_x^\nu \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+p} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0+)}{n!} x^n$$

и учитывая, что

$${}_0D_x^\nu x^p = \frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\nu)} x^{p-\nu},$$

получим

$$p = \nu$$

и

$$a_n = \frac{h^{(n)}(0)}{\Gamma(1+n+\nu)}.$$

Окончательно,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0+)}{n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1+\nu)} x^{n+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0+)}{n!} {}_0D_x^{-\nu} x^n = \\ &= {}_0D_x^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(0)}{n!} x^n = {}_0D_x^{-\nu} h(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-\xi)^{\nu-1} h(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x < R. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, найденное здесь решение совпало с частным решением (9.1.1).

9.7 Разложение в ряд обратных дифференциальных операторов

В этом параграфе мы применим разложение в ряд к самому обратному оператору, рассматривая дробно-дифференциальный оператор D^ν как аргумент. С этой целью мы определим сначала коэффициенты разложения

$$[P_n(z)]^{-1} = \frac{1}{P_n(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$$

и воспользуемся ими для представления формального решения уравнения

$$P_n({}_0D_x^\nu) f(x) = h(x), \quad \nu < 0,$$

в виде

$$f(x) = [P_n({}_0D_x^\nu)]^{-1} h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j {}_0D_x^{j\nu} h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j {}_0h^{(j\nu)}(x).$$

Пример. Для уравнения

$$(1 + a {}_0D_x^\nu) f(x) = h(x), \quad \nu < 0$$

имеем

$$P(z) = 1 + az,$$

и

$$[P(z)]^{-1} = \frac{1}{1 + az} = \sum_{j=0}^{\infty} (-az)^j, \quad |az| < 1,$$

так что решение уравнения может быть записано в одной из следующих форм

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j {}_0h^{(j\nu)}(x),$$

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x g_\nu(x - \xi) h(\xi) d\xi,$$

где

$$g_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-a)^j x^{-j\nu}}{\Gamma(1 - j\nu)}.$$

В частности, при $\nu = -1/2$

$$g_{-1/2}(x) = e^{a^2 x} \operatorname{erfc}(a\sqrt{x}), \quad x > 0.$$

9.8 Метод преобразования Лапласа

В случае постоянных коэффициентов весьма эффективным продолжает оставаться *метод интегральных преобразований*. Для решения на полуоси ($0 < x < \infty$) используются одностороннее преобразование Лапласа или преобразование Меллина.

Пусть требуется найти решение дробного уравнения Римана-Лиувилля

$${}_0f^{(\nu)}(x) + af(x) = h(x), \quad x > 0, \quad \nu \in (n - 1, n],$$

при начальном условии

$${}_0f^{(\nu-k)}(0+) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Задача эта решалась в работе [3] методом последовательных приближений. Здесь мы покажем, как она решается методом преобразования Лапласа. Алгебраическое уравнение для трансформанты

$$\lambda^\nu \widehat{f}(\lambda) + a\widehat{f}(\lambda) = \widehat{h}(\lambda) + \sum_{k=1}^n b_k \lambda^{k-1},$$

легко решается:

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{\widehat{h}(\lambda)}{\lambda^\nu + a} + \sum_{k=1}^n b_k \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda^\nu + a}.$$

Для обратного преобразования Лапласа удобно представить дробь $\lambda^{k-1}/(\lambda^\nu + a)$ в виде

$$\frac{\lambda^{k-1}}{\lambda^\nu + a} = \lambda^{k-\nu-1} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{-\gamma}$$

где $\gamma = \nu j + \nu - k + 1$. Выполняя почленное обращение ряда

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda^\nu + a} \right\} (x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \mathbf{L}^{-1} \{ \lambda^{-\gamma} \} (x)$$

с использованием соотношения

$$\mathbf{L}^{-1} \{ \lambda^{-\gamma} \} (x) = \frac{x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)},$$

находим

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda^\nu + a} \right\} (x) = x^{\nu-k} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ax^\nu)^j}{\Gamma(\nu j + \nu - k + 1)}.$$

Сравнивая полученный ряд с соответствующим представлением двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + \beta)},$$

видим, что

$$\mathbf{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda^\nu + a} \right\} (x) = x^{\nu-k} E_{\nu, \nu+1-k}(-ax^\nu).$$

Используя теорему о свертке ($k = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda^\nu + a} \cdot \widehat{h}(\lambda) &= \mathbf{L} \{ x^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-ax^\nu) \} (\lambda) \cdot \mathbf{L} \{ h(x) \} (\lambda) = \\ &= \mathbf{L} \{ (x^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-ax^\nu)) \star h(x) \} (\lambda), \end{aligned}$$

приходим к искомому результату:

$$f(x) = \int_0^x (x-\xi)^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-a(x-\xi)^\nu) h(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n b_k x^{\nu-k} E_{\nu, \nu-k+1}(-ax^\nu).$$

Для однородного уравнения

$${}_0f^{(\nu)}(x) + af(x) = 0$$

получаем: при $\nu \in (0, 1)$

$$f(x) = b_1 x^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-ax^\nu),$$

а при $\nu \in (1, 2)$

$$f(x) = b_1 x^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-ax^\nu) + b_2 x^{\nu-2} E_{\nu, \nu-1}(-ax^\nu).$$

Частный случай такой задачи рассматривался в книге [4]: решалось полудифференциальное уравнение

$${}_0f_x^{(1/2)} + f(x) = 0, \quad x > 0$$

с начальным условием

$${}_0f_{0+}^{(-1/2)} = b.$$

Решение получено в виде:

$$f(x) = bx^{-1/2} E_{1/2, 1/2}(-\sqrt{x}) = b(1/\sqrt{\pi x} - e^x \operatorname{erfc}(\sqrt{x})).$$

Решим тем же методом аналогичное уравнение с производной Капуто

$${}^{(\nu)}f(x) + af(x) = h(x), \quad x > 0, \quad \nu \in (n-1, n]$$

при начальных условиях

$$f^{(k)}(0+) = c_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Преобразование Лапласа теперь приводит к уравнению

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{\widehat{h}(\lambda)}{\lambda^\nu + a} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{\lambda^{\nu-k-1}}{\lambda^\nu + a}.$$

Используя разложение в ряд

$$\frac{\lambda^{\nu-k-1}}{\lambda^\nu + a} = \lambda^{-k-1} \frac{1}{1 + a\lambda^{-\nu}} = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{-\gamma}, \quad \gamma = \nu j + k + 1$$

и выполняя обратное преобразование,

$$\mathbb{L}^{-1} \left\{ \frac{\lambda^{\nu-k-1}}{\lambda^\nu + a} \right\} (x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \mathbb{L}^{-1} \{ \lambda^{-\gamma} \} (x) =$$

$$= x^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ax^\nu)^j}{\Gamma(\nu j + k + 1)} = x^k E_{\nu, k+1}(-ax^\nu)$$

приходим к результату

$$f(x) = \int_0^x (x - \xi)^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-a(x - \xi)^\nu) h(\xi) d\xi + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k E_{\nu, k+1}(-ax^\nu).$$

Для однородного уравнения

$${}^{(\nu)}_0 f(x) + af(x) = 0$$

получаем: при $\nu \in (0, 1)$

$$f(x) = c_0 E_\nu(-ax^\nu),$$

а при $\nu \in (1, 2)$

$$f(x) = c_0 E_\nu(-ax^\nu) + c_1 x E_{\nu, 2}(-ax^\nu).$$

В частности, решение задачи

$${}^{(1/2)}_0 f(x) + f(x) = 0, \quad x > 0, \quad f(0+) = c$$

имеет вид

$$f(x) = c E_{1/2, 1}(-\sqrt{x}) = ce^x \operatorname{erfc}(\sqrt{x}).$$

В работе [6], посвященной анализу этой задачи процессу с $\nu \in (0, 1)$ придавался смысл *дробной релаксации*, а процессу с $\nu \in (1, 2)$ – *дробных осцилляций* с «частотой» $\omega = a^{1/\nu}$. При $c_0 = 0$ решение уравнения Капуто изменяется непрерывно при переходе индекса ν из одной области в другую. Сходящийся ряд

$$f(t) = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{\nu k}}{\Gamma(\nu k + 1)}$$

удобен для вычисления решения только при относительно небольших временах, с увеличением времени скорость сходимости падает. Для больших времен лучше использовать асимптотическое разложение

$$f(t) \sim -c_0 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\omega t)^{-\nu k}}{\Gamma(1 - \nu k)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Асимптотическое поведение при малых и больших временах определяется главными членами указанных разложений

$$f(t) \sim \begin{cases} c_0[1 - (\omega t)^\nu / \Gamma(1 + \nu)], & t \rightarrow 0+; \\ c_0(\omega t)^{-\nu} / \Gamma(1 - \nu), & t \rightarrow \infty. \end{cases}$$

Отметим, что дробное уравнение релаксации ($0 < \nu < 1$) по сравнению с обычным ($\nu = 1$) дает более быструю релаксацию на малых временах и более медленную – на больших. Дробное уравнение осцилляций ($1 < \nu < 2$) описывает затухающие колебания, переходящие в убывающую степенную функцию. Число колебаний и их амплитуда возрастают по мере приближения ν к 2.

9.9 Метод функций Грина

Рассмотренные выше уравнения содержали лишь один член с производной. Сейчас мы займемся уравнением с двумя дробными производными различных порядков:

$${}_0f_x^{(\mu)} + a {}_0f_x^{(\nu)} = h(x), \quad 0 < \nu < \mu < 1.$$

Выполнив преобразование Лапласа

$$(\lambda^\mu + a\lambda^\nu)\widehat{f}(\lambda) = c + \widehat{h}(\lambda), \quad c = {}_0f^{(\mu-1)}(0+) + a {}_0f^{(\nu-1)}(0+)$$

найдем трансформанту решения

$$\widehat{f}(\lambda) = \frac{c + \widehat{h}(\lambda)}{\lambda^\mu + a\lambda^\nu}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\widehat{f}(\lambda) = [c + \widehat{h}(\lambda)] \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{(\nu-\mu)j-\mu}$$

представляет собой лапласовский образ произведения степенной функции $x^{\mu-1}$ и двухпараметрической функции Миттаг-Леффлера:

$$\mathbb{L}^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{(\nu-\mu)j-\mu} \right\} (x) = x^{\mu-1} E_{\mu-\nu, \mu}(-ax^{\mu-\nu}) \equiv G(x).$$

Вновь используя теорему о свертке, приходим к выражению

$$f(x) = cG(x) + \int_0^x G(x-\xi)h(\xi)d\xi, \quad (9.9.1)$$

в котором $G(x)$ имеет смысл функции Грина рассматриваемого уравнения:

$${}_0D_x^\mu G + a {}_0D_x^\nu G = \delta(x), \quad G(x) = x^{\mu-1} E_{\mu-\nu, \mu}(-ax^{\mu-\nu}), \quad 0 < \nu < \mu < 1.$$

Приведем функции Грина еще для нескольких простых уравнений:

$$a {}_0D_x^\nu G(x) = \delta(x), \quad G(x) = \frac{x_+^{\nu-1}}{a\Gamma(\nu)};$$

$$a {}_0D_x^\nu G(x) + bG(x) = \delta(x), \quad G(x) = (1/a)x^{\nu-1} E_{\nu, \nu}(-(b/a)x^\nu); \quad (9.9.2)$$

$$a {}_0D_x^\alpha G(x) + b {}_0D_x^\beta G(x) + cG(x) = \delta(x), \quad \alpha > \beta,$$

$$G(x) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k x^{\alpha(k+1)-1} E_{\alpha-\beta, \alpha+\beta k}^{(k)}(-(b/a)x^{\alpha-\beta}). \quad (9.9.3)$$

В последнем случае трансформанта функции Грина

$$\widehat{G}(\lambda) = \frac{1}{a\lambda^\alpha + b\lambda^\beta + c},$$

приводится к виду

$$\widehat{G}(\lambda) = \frac{1}{c} \frac{c\lambda^{-\beta}}{a\lambda^{\alpha-\beta} + b} \frac{1}{1 + c\lambda^{-\beta}/(a\lambda^{\alpha-\beta} + b)} = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c\lambda^{-\beta}}{a\lambda^{\alpha-\beta} + b} \right)^{k+1},$$

обратное преобразование Лапласа которого выполняется с применением формулы

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)}(z) \equiv \frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! z^j}{j! \Gamma(\alpha(j+k) + \beta)}.$$

и дает функцию (9.9.3).

9.10 Уравнение с составным дробно-дифференциальным оператором

Ограничения на коммутативность и правило сложения порядков при последовательном применении дробных операторов побуждают ввести понятие *составного дифференциального оператора*, представляющего собой произведение операторов, не подчиняющихся закону сложения порядков:

$${}_aD_x^{\langle \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k \rangle} \equiv {}_aD_x^{\nu_1} {}_aD_x^{\nu_2} \dots {}_aD_x^{\nu_k}.$$

Если все ν_j одного знака, то оператор этот совпадает с оператором дробного дифференцирования суммарного порядка,

$${}_a D_x^{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)} \equiv {}_a D_x^{\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k}.$$

В противном случае, результат зависит от порядка следования индексов.

Покажем это на примере, приведенном в [1]. Рассматриваются три дифференциальных уравнения с $0 < \nu < 1$:

$$a) \quad D_x u \equiv {}_0 D_x^{1-\nu+\nu} u(x) = h(x),$$

$$b) \quad {}_0 D_x^{(1-\nu, \nu)} v(x) \equiv {}_0 D_x^{1-\nu} {}_0 D_x^\nu v(x) = h(x),$$

и

$$c) \quad {}_0 D_x^{(\nu, 1-\nu)} w(x) \equiv {}_0 D_x^\nu {}_0 D_x^{1-\nu} w(x) = h(x).$$

Общее решение первого уравнения

$$a) \quad u(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi + a,$$

где a – произвольная постоянная. Чтобы найти функцию $v(x)$, действуем на обе части второго уравнения сначала оператором ${}_0 D_x^{\nu-1}$, а затем – оператором ${}_0 D_x^{-\nu}$. В результате получим

$$b) \quad v(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi + b_1 + b_2 x^{\nu-1}.$$

Решая третье уравнение, мы применим сначала ${}_0 D_x^{-\nu}$, а затем – ${}_0 D_x^{\nu-1}$:

$$c) \quad w(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi + c_1 + c_2 x^{-\nu}.$$

Дополнительные слагаемые появляются вследствие соотношений

$${}_0 D_x^\gamma x^{\gamma-1} \equiv 0, \quad {}_0 D_x^{\gamma-1} x^{\gamma-1} = \Gamma(\gamma), \quad \gamma = \nu, 1 - \nu.$$

Заметим, что в то время, как общее решение уравнения первого порядка содержит, как и положено, одну произвольную постоянную, общие решения уравнений с составными суммарного порядка, равного 1, содержат по две постоянных. При $\nu = 1/2$ решения б) и с) совпадают, при $\nu \neq 1/2$ отличаются дополнительными слагаемыми, дающими в нуле сингулярности разных порядков. Авторы работы [1] отмечают, что введение составных

операторов увеличивает число свободных постоянных и потребность в большем числе начальных условий, необходимых для однозначного выбора решения.

В работе [2] рассматривался составной оператор

$${}_0D_x^{\alpha,\beta} \equiv {}_0D_x^{(\alpha-1)\beta,1,(\alpha-1)(1-\beta)} = {}_0I_x^{\beta(1-\alpha)} D_x {}_0I_x^{(1-\beta)(1-\alpha)}, \quad \alpha \in (0,1), \quad \beta \in [0,1].$$

Три уравнения рассмотрены при начальном условии

$${}_0f^{-(1-\beta)(1-\alpha)}(0+) = b$$

с использованием формулы преобразования:

$$\mathbb{L} \left\{ {}_0D_x^{\alpha,\beta} f(x) \right\} (\lambda) = \lambda^\alpha \widehat{f}(\lambda) - \lambda^{\beta(\alpha-1)} {}_0f_{0+}^{-(1-\beta)(1-\alpha)}(0+).$$

Первое уравнение:

$${}_0D_x^{\alpha,\beta} f(x) = 0.$$

Его решение

$$f(x) = b \frac{x^{(1-\beta)(\alpha-1)}}{\Gamma((1-\beta)(\alpha-1)+1)}.$$

Второе уравнение:

$${}_0D_x^{\alpha,\beta} f(x) = a.$$

Его решение

$$f(x) = \frac{ax^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + b \frac{x^{(1-\beta)(\alpha-1)}}{\Gamma((1-\beta)(\alpha-1)+1)}.$$

Третье уравнение:

$${}_0D_x^{\alpha,\beta} f(x) + af(x) = 0.$$

Его решение:

$$\widehat{f}(\lambda) = b \frac{\lambda^{\beta(\alpha-1)}}{a + \lambda^\alpha} = b \sum_{j=0}^{\infty} (-a)^j \lambda^{-\alpha j - \gamma}, \quad \gamma = \alpha + \beta(1-\alpha),$$

$$f(x) = bx^{\gamma-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-ax^\alpha)^j}{\Gamma(\alpha j + \gamma)} = bx^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha, \alpha + \beta(1-\alpha)}(-ax^\alpha).$$

9.11 Обобщенное уравнение Абеля

Так называется интегральное уравнение первого рода с линейной суперпозицией левого и правого дробных интегральных операторов

$$u {}_{-\infty}I_x^\nu f(x) + v {}_xI_\infty^\nu f(x) = h(x),$$

с постоянными коэффициентами u и v [3]. Оно может быть представлено с помощью феллеровского потенциала

$$I_{u,v}^\nu f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \text{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^{1-\nu}} f(\xi) d\xi = h(x),$$

где $c_1 = (u + v)/2$, $c_2 = (u - v)/2$, $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, $0 < \nu < 1$.

Решение этого уравнения может быть представлено в одной из двух форм:

$$f(x) = \frac{\nu}{A\Gamma(1-\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_1 + c_2 \text{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^{1+\nu}} [h(x) - h(\xi)] d\xi$$

и

$$f(x) = \frac{\nu}{A\Gamma(1-\nu)} \int_0^{\infty} [(u+v)h(x) - uh(x-\xi) - vh(x+\xi)] \xi^{-1-\nu} d\xi,$$

где $A = 4[c_1^2 \cos^2(\nu\pi/2) + c_2^2 \sin^2(\nu\pi/2)]$.

Рассмотрим подробнее два важных частных случая:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{|x - \xi|^{1-\nu}} = h(x)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sign}(x - \xi) \phi(\xi) d\xi}{|x - \xi|^{1-\nu}} = h(x).$$

Как следует из вышеизложенного, решения этих уравнений даются соотношениями

$$\varphi(x) = \frac{\nu}{2\pi} \text{tg} \left(\frac{\nu\pi}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x) - h(\xi)}{|x - \xi|^{1+\nu}} d\xi,$$

и

$$\phi(x) = \frac{\nu}{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\nu\pi}{2} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x) - h(\xi)}{|x - \xi|^{1+\nu}} \operatorname{sign}(x - \xi) d\xi.$$

Таким образом, мы получили операторы, обратные потенциалам $M_{u,\nu}^\nu$, R^ν , и R'^ν соответственно. Для достаточно хороших функций эти выражения могут быть представлены в виде

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{AG}(1-\nu)} D_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_2 + c_1 \operatorname{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^\nu} h(\xi) d\xi,$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\nu\pi}{2} \right) D_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sign}(x - \xi)}{|x - \xi|^\nu} h(\xi) d\xi,$$

и

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{ctg} \left(\frac{\nu\pi}{2} \right) D_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi) d\xi}{|x - \xi|^\nu}.$$

9.12 Уравнения с распределенными порядками

Если линейное дифференциальное уравнение содержит производные целых порядков $f^{(n_1)}(x)$, $f^{(n_2)}(x)$, ..., $f^{(n_m)}(x)$ с положительными постоянными коэффициентами p_1, \dots, p_m ,

$$\left\{ \sum_{j=1}^m p_j D_x^{n_j} \right\} f(x) + af(x) = h(x), \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad \sum_{j=1}^m n_j = n,$$

то содержимое фигурных скобок может рассматриваться как дифференциальный оператор порядка n , распределенного по натуральным значениям n_1, \dots, n_m с относительными весами («вероятностями») p_1, \dots, p_m , соответственно. Полагая веса непрерывно распределенными по отрезку $[a, b]$, можно обобщить это уравнение:

$$\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(\nu) {}_a D_x^\nu d\nu \right\} f(x) + af(x) = h(x), \quad w(\nu) \geq 0, \quad -\infty < \nu < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\nu) d\nu = 1.$$

Дифференциальный оператор порядка ν , распределенного с плотностью $w(v)$, будем обозначать через ${}_a D_x^{\{\nu; w(\cdot)\}}$, так что записанное выше уравнение примет вид:

$${}_a D_x^{\{\nu; w(\cdot)\}} f(x) + a f(x) = h(x).$$

Следует, однако, предостеречь читателя: интерпретируя интегрально-дифференциальный оператор как оператор ${}_a D_x^\nu$ усредненный по случайному порядку ν ,

$${}_a D_x^{\{\nu; w(\cdot)\}} = \langle {}_a D_x^\nu \rangle,$$

не следует считать, что решение соответствующего уравнения может быть найдено путем аналогичного усреднения решения уравнения с оператором ${}_a D_x^\nu$ по всем возможным значениям ν , поскольку

$$\langle {}_a D_x^\nu f(x; \nu) \rangle \neq \langle {}_a D_x^\nu \rangle \langle f(x; \nu) \rangle.$$

9.13 Уравнения с переменными коэффициентами

Выше мы рассматривали уравнения с постоянными коэффициентами. Приведем пример решения дробного уравнения с переменным коэффициентом, рассмотренный в [8]:

$${}_0 D_x^\nu f(x) = a^{-\mu} D_x^n (x^{2\mu} f(x)), \quad \mu = n - \nu > 0.$$

Здесь $n = 1$ (то есть, $\nu = 1 - \mu$), если $0 < \mu < 1$, $n = 2$ (то есть $\nu = 2 - \mu$), если $1 < \mu < 2$ и т.д. При начальных условиях $f^{(k)}(0+) = 0, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ оно эквивалентно дробному интегральному уравнению

$$x^{2\mu} f(x) = a^\mu {}_0 D_x^{-\mu} f(x). \quad (9.13.1)$$

При $a = \pi$ и $\mu = 1/2$ оно превращается в уравнение Абеля

$$x f(x) = \int_0^x (x - \xi)^{-1/2} f(\xi) d\xi,$$

решение которого находится методом преобразования Лапласа:

$$f(x) = x^{-3/2} \exp(-\pi/x).$$

В работе [8] найдено решение уравнения (9.13.1) для произвольных нецелых положительных μ :

$$f(x) = \frac{a^q}{\Gamma(q)} x^{-q-1} \exp(-a/x), \quad a > 0, \quad x > 0.$$

В справедливости его легко убедиться прямой подстановкой его под интеграл и последующей заменой переменной $\xi = ax/(x + a)$:

$$\begin{aligned} a^\mu {}_0D_x^{-\mu} f(x) &= \frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)} \frac{a^q}{\Gamma(q)} \int_0^x (x - \xi)^{\mu-1} \xi^{-q-1} e^{-a/\xi} d\xi = \\ &= \frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)} \frac{e^{-a/x}}{x^{q+1-2\mu}} \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{z^{\mu-1} e^{-z} dz}{(xz + a)^{q-\mu}}. \end{aligned}$$

При $q = \mu$ оставшийся интеграл есть просто $\Gamma(\mu)$, $\mu > 0$, поэтому

$$a^\mu {}_0D_x^{-\mu} f(x) = \frac{a^\mu}{\Gamma(\mu)} \frac{e^{-a/x}}{x^{1-\mu}} = x^{2\mu} f(x),$$

что и заканчивает доказательство.

Теперь рассмотрим уравнение

$${}_0D_x^\nu f(x) - ax^\beta f(x) = 0, \quad x > 0, \nu > 0, \beta > -\nu, a \in \mathbb{R}$$

с начальными условиями

$${}_a f^{(\nu-k)}(0+) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Оно эквивалентно интегральному уравнению Вольтерры второго рода

$$f(x) = f_0(x) + \frac{a}{\Gamma(\nu)} \int_0^x \frac{\xi^\beta f(\xi) d\xi}{(x - \xi)^{1-\nu}},$$

где

$$f_0(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j}{\Gamma(\nu - j + 1)} x^{\nu-j}.$$

Применив к нему метод последовательных приближений, получим

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j x^{\nu-j}}{\Gamma(\nu - j + 1)} \left[1 + \sum_{k=1}^m c_k (ax^{\nu+\beta})^k \right],$$

где

$$c_k = \prod_{r=1}^k \frac{\Gamma[r(\nu + \beta) - j + 1]}{\Gamma[r(\nu + \beta) + \nu - j + 1]}.$$

Устремляя m к бесконечности и используя разложение в ряд трехпараметрической функции Миттаг-Леффлера, приходим к формуле

$$f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{b_j x^{\nu-j}}{\Gamma(\nu-j+1)} E_{\nu, 1+\beta/\nu, 1+(\beta-j)/\nu} (\lambda x^{\nu+\beta}).$$

В частности, в интервале порядков $0 < \nu < 1$ задача Коши

$${}_0 D_x^\nu f(x) - ax^\beta f(x) = 0, \quad {}_0 f^{(\nu-1)}(0+) = b,$$

имеет решение

$$f(x) = \frac{b}{\Gamma(\nu)} x^{\nu-1} E_{\nu, 1+\beta/\nu, 1+(\beta-1)/\nu} (ax^{\nu+\beta}).$$

Литература

1. *Gorenflo R., Mainardi F.* In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Ed. by *Carpinteri A., Mainardi F.* – Vienna – New York: Springer Verlag, 1997, p. 223.
2. *Miller K. S., Ross B.* *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.
3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск: Наука и техника, 1987.
4. *Oldham K. B., Spanier J.* *The Fractional Calculus*. – New York – London: Academic Press, 1974.
5. *Podlubny I.* *Fractional Differential Equations*. – New York – London: Academic Press, 1999.
6. *Mainardi F.* *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 1461 (1996).
7. *Hilfer R.* In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Ed. by *Hilfer R.* – Singapore: World Scientific, 2000, P. 87.
8. *Nonnenmacher T. F.* *J. Physics A: Math. Gen.* **23**, 697 (1990).
9. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. – Amsterdam: Elsevier, 2006.

Глава 10

Уравнения в частных производных

10.1 Дробно-баллистическое движение

Важнейшую роль в динамике распределенных систем играют уравнения в частных производных. В случае одномерной системы (x – координата, t – время) простейшие уравнения (с постоянными коэффициентами и разделенными переменными) имеют вид

$$\frac{\partial^m f(x, t)}{\partial t^m} = \frac{\partial^n f(x, t)}{\partial x^n} + h(x, t), \quad m, n = 1, 2, \dots, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

Хотя в практике решения физических задач встречаются и высшие значения порядков m и n , центральное место занимают первые и вторые производные. Наиболее популярными можно считать

баллистическое

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + h(x, t),$$

диффузионное

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + h(x, t)$$

и *волновое*

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + h(x, t)$$

уравнения.

Пожалуй, самым интригующим в итоге обобщения этих уравнений на вещественные порядки производных,

$$\frac{\partial^\omega f(x, t)}{\partial t^\omega} = \frac{\partial^\alpha f(x, t)}{\partial x^\alpha} + h(x, t), \quad \omega, \alpha \in R, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

является возможность наблюдать эволюцию решений при *непрерывном изменении параметров* ω и α . Выход из нескольких «классических» точек с целочисленными координатами в плоскость (ω, α) бесконечно обогащает коллекцию решений и дает надежды на успешное применение их к физическим, техническим и другим задачам.

Мы начнем с простейшей задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + {}_0D_x^\alpha f(x, t) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad \alpha \in (0, 1), \quad f(x, 0) = F(x). \quad (10.1.1)$$

Считая t координатой, а x – временем, авторы работы [1] назвали его *обобщенным волновым уравнением*. Для $\alpha = 1/2$ его решение было найдено в работе [2] и представлено в виде

$$f(x, t) = \frac{t}{\sqrt{4\pi}} \int_0^x F(x - \xi) \xi^{-3/2} \exp(-t^2/4\xi) d\xi.$$

Выполняя преобразование Лапласа уравнения (10.1.1) по x и учитывая, что $\exp(-\lambda^\alpha)$ есть трансформанта односторонней устойчивой плотности $g_+(x; \alpha)$, легко выразить через эту плотность решение (10.1.1) при произвольном $\alpha \in (0, 1)$:

$$f(x, t) = t^{-1/\alpha} \int_0^x F(x - \xi) g_+(t^{-1/\alpha} \xi; \alpha) d\xi.$$

Напомним, что

$$g_+(x; 1/2) = \frac{1}{4\pi} x^{-3/2} \exp(-1/4x),$$

так что полученный результат согласуется с приведенным выше частным случаем.

Нетрудно видеть, что если $F(x) \geq 0$ и $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 1$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx = 1$$

и функции $f(x, t)$ может быть придан смысл плотности вероятности случайной координаты частицы в момент времени t . Если в начальный момент времени частица находилась в точке $x = 0$, то $F(x) = \delta(x)$,

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + {}_0D_x^\alpha f(x, t) = \delta(x)\delta(t) \quad (10.1.2)$$

и

$$f(x, t) = t^{-1/\alpha} g_+(t^{-1/\alpha} x; \alpha). \quad (10.1.3)$$

При $\alpha = 1$

$$f(x, t) = t^{-1} \delta(t^{-1} x - 1) = \delta(x - t),$$

и мы имеем свободное движение частицы с постоянной (равной единице) скоростью. Такой режим движения назовем *баллистическим*. При $\alpha < 1$ распределение вероятностей координаты будет не только перемещаться в положительном направлении оси x , но и быстро расплываться по полуоси, так что уже при сколь угодно малом t среднее значение координаты станет бесконечным,

$$\int_0^{\infty} f(x, t) x dx = \infty.$$

В связи с этим удобнее следить за перемещением максимума распределения:

$$x_{max} \propto t^{1/\alpha}.$$

Он перемещается с возрастающей скоростью; такой режим, а вместе с ним и уравнение (10.1.1) можно назвать *супербаллистическими*.

Уравнение

$${}^\omega D_t f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = 0, \quad x > 0, t > 0, \omega \in (0, 1). \quad (10.1.4)$$

описывает другой тип движения – *суббаллистический*, при котором частица движется с убывающей в среднем скоростью. Заметим, что дробное дифференцирование по времени осуществляется теперь оператором Капуто:

$${}^\omega D_t f(x, t) \equiv {}_0D_t^\omega f(x, t) - \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} f(x, 0+) = {}_0D_t^\omega [f(x, t) - f(x, 0+)]. \quad (10.1.5)$$

Такая замена связана с необходимостью выдержать нормировку: поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} dx = f(x, t) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} = 0,$$

должно иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}_0^{\omega}D_t f(x, t) dx = {}_0^{\omega}D_t \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = {}_0^{\omega}D_{+1} = 0,$$

которое выполняется только при дифференцировании Капуто. Впрочем, подставляя (10.1.5) в (10.1.4), мы получаем уравнение с производной Римана-Лиувилля и нужной нормировкой решения:

$${}_0D_t^{\omega} f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} f(x, 0+).$$

Если в начальный момент времени частица находилась в начале координат, то уравнение это имеет вид

$${}_0D_t^{\omega} f(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x).$$

Его решение также выражается через устойчивую плотность $g_+(x, \omega)$ соотношением

$$f(x, t) = \frac{1}{\omega} x^{-1/\omega-1} g_+(tx^{-1/\omega}; \omega).$$

Среднее значение этого распределения конечно и движется по закону t^{ω} с убывающей скоростью, то есть имеет место замедляющееся, суббаллистическое движение. Замедление это может быть обусловлено наличием ловушек, надолго задерживающих частицу.

Общий случай дробно-баллистического движения, описываемый уравнением

$${}_0D_t^{\omega} f(x, t) + {}_0D_x^{\alpha} f(x, t) = \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x), \quad 0 < \alpha, \omega < 1, \quad (10.1.6)$$

мы рассмотрим в п. 10.10.

10.2 Субдиффузия на оси

Рассмотрим однородное уравнение

$${}_0D_t^{\omega} f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

при условии

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, t) = 0, \quad \left[{}_0f_t^{(\omega-1)}(x, t) \right]_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 < \omega < 1.$$

При $\omega = 1$ оно совпадает с уравнением диффузии, при $\omega < 1$ описывает замедленную диффузию (субдиффузию). Это уравнение (при $\omega = 1/2$) было интерпретировано Р. Нигматуллиным [3] в рамках перколяционной (гребешковой) модели, а его решение исследовалось Ф. Майнардн [4] и др.

Преобразованием Лапласа по времени и Фурье по координате приводим дифференциальное уравнение к алгебраическому, решение которого имеет вид

$$\widehat{f}(k, \lambda) = \frac{\widetilde{\varphi}(k)}{\lambda^\omega + k^2}.$$

Обратное преобразование Лапласа выражает зависимость трансформанты Фурье решения от времени через функцию Миттаг-Леффлера:

$$\widetilde{f}(k, t) = \widetilde{\varphi}(k)t^{\omega-1}E_{\omega, \omega}(-k^2t^\omega).$$

Последующее обращение Фурье дает решение в виде

$$f(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t)\varphi(\xi)d\xi,$$

где

$$G(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} t^{\omega-1} E_{\omega, \omega}(-k^2t^\omega) \cos(kx) dk$$

есть функция Грина данного уравнения. Выполнив прямое и обратное преобразования Лапласа этой функции по времени,

$$\widehat{G}(x, \lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kx) dk}{\lambda^\omega + k^2} = (1/2)\lambda^{-\omega/2} \exp(-|x|\lambda^{\omega/2}),$$

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\text{Br}} \exp(\lambda t - |x|\lambda^{\omega/2}) \lambda^{-\omega/2} d\lambda,$$

сделав замены переменных $\sigma = \lambda t$ и $z = |x|t^{-\omega/2}$ и деформируя должным образом контур интегрирования [4], получаем

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi i} t^{1-\omega/2} \int_{\text{Ha}} \exp(\sigma - z\sigma^{\omega/2}) \sigma^{-\omega/2} d\sigma = \frac{1}{2} t^{\omega/2-1} W(-z, -\omega/2, \omega/2),$$

где $W(z, \mu, \nu)$ – функция Райта.

10.3 Субдиффузия на полуоси

В работе [5] рассматривалось дробно-диффузионное уравнение того же типа

$${}_0D_t^\omega f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < \omega < 1,$$

на положительной полуоси (в полупространстве): $x, t \in R_+$. Решались две задачи с граничными условиями

$$1) f(x, 0) = l(x), \quad f(0, t) = 0, \quad t > 0;$$

и

$$2) f(x, 0) = l(x), \quad f(0, t) = -1, \quad t > 0,$$

где $l(x)$ обозначает ступенчатую единичную функцию, равную нулю для отрицательных значений аргумента.

При $\omega = 1$ задачи сводятся к классическим, имеющим решения

$$1) f(x, t) = \text{Erf}(t^{-1/2}x/2) \sim \pi^{-1/2}xt^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

и

$$2) f(x, t) = \text{Erf}(t^{-1/2}x/2) \sim \pi^{-1/2}xt^{-1/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

При $\omega < 1$ подстановка

$$f(x, t) = F(y), \quad y = t^{-\omega/2}x$$

приводит к интегро-дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 F(y)}{dy^2} = y^{2/\omega} \int_0^\infty \eta^{-1-2/\omega} g(y/\eta) F(\eta) d\eta,$$

в котором

$$g(y) = \frac{2}{\omega \Gamma(-\omega)} (1 - y^{2/\omega})^{-\omega-1}.$$

Соответствующие граничные условия принимают вид

$$1) F(0) = 0, \quad F(\infty) = 1;$$

$$2) F(0) = -1, \quad F(\infty) = 0.$$

Преобразование Меллина по y ведет к разностному уравнению

$$(s-1)(s-2)\bar{F}(s-2) = \bar{g}(s+2/\omega)\bar{F}(s),$$

решения которого, соответствующие указанным условиям, имеют вид:

$$1) \bar{F}(s) = 2^s / \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1/2 + s/2)\Gamma(1 + s/2)}{\Gamma(1 - s)\Gamma(1 + s\omega/2)},$$

$$2) \bar{F}(s) = -2^s / \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1/2 + s/2)\Gamma(1 + s/2)}{\Gamma(1 + s)\Gamma(1 + s\omega/2)}.$$

Обратное преобразование Меллина дает

$$F(y) = 1/\sqrt{\pi}h(y/2),$$

где

$$1) h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1/2 - s/2)\Gamma(1 - s/2)}{\Gamma(1 + s)\Gamma(1 - s\omega/2)} z^s ds,$$

$$2) h(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Gamma(-s)\Gamma(1/2 - s/2)\Gamma(1 - s/2)}{\Gamma(1 - s)\Gamma(1 - s\omega/2)} z^s ds,$$

Найденные трансформанты позволяют выразить результат через функции Фокса:

$$1) f(x, t) = (1/\sqrt{\pi})H_{23}^{21} \left(t^{-\omega/2}x/2 \left| \begin{matrix} (1, 1); (1, \omega/2) \\ (1/2, 1/2), (1, 1/2); (0, 1) \end{matrix} \right. \right),$$

$$2) f(x, t) = -(1/\sqrt{\pi})H_{23}^{30} \left(t^{-\omega/2}x/2 \left| \begin{matrix} -; (1, 1), (1, \omega/2) \\ (0, 1), (1/2, 1/2), (1, 1/2); - \end{matrix} \right. \right).$$

Используя информацию о свойствах функций Фокса, легко убедиться, что приведенные решения удовлетворяют требуемым начальным условиям и характеризуются медленно убывающей со временем асимптотикой степенного типа:

$$1) f(x, t) \sim 1/\Gamma(1 - \omega/2)xt^{-\omega/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$2) f(x, t) \sim 1/\Gamma(1 - \omega/2)xt^{-\omega/2} - 1, \quad t \rightarrow \infty.$$

При $\omega = 1$ эти решения превращаются в классические результаты:

$$1) f(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} (xt^{-1/2}/2)^{2k+1} = \text{Erf}(xt^{-1/2}/2);$$

$$2) f(x, t) = \text{Erf}(xt^{-1/2}/2) - 1.$$

В заключение цитируемой работы [5] автор отмечает, что полученные результаты остаются справедливыми и в следующей области значений порядка производной по времени $1 \leq \omega < 2$.

10.4 Сигнальная задача

Сигнальной задачей (задачей о распространении сигнала) называют решение волнового или диффузионного уравнения с заданной формой *начального сигнала*, создаваемого источником, помещенным в фиксированную точку. В случае обычного диффузионного уравнения постановка такой задачи имеет вид:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0$$

$$f(0, t) = \phi(t).$$

Ее решение находится путем применения преобразования Лапласа с использованием теоремы о свертке,

$$f(x, t) = \int_0^t S(x, t - \tau)\phi(\tau)d\tau,$$

где

$$S(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{\pi}}t^{-3/2} \exp[-x^2/(4t)]$$

представляет собой фундаментальное решение (функцию Грина) сигнальной задачи, поскольку описывает распространение первоначально мгновенного импульсного сигнала $\phi(t) = \delta(t)$. Оно выражается через плотность одностороннего устойчивого распределения с показателем $1/2$

$$S(x, t) = g_+(x/\sqrt{t}, 1/2)$$

Сигнальная задача для дробно-дифференциального уравнения

$${}_0D_t^\omega f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad f(0, t) = \phi(t)$$

исследовалась Ф. Майнардн [7-9] и др. Трансформанта Лапласа функции Грина в данном случае имеет вид

$$\widehat{S}^\omega(x, \lambda) = \exp\{-x\lambda^{\omega/2}\}, \quad x \geq 0.$$

Вводя автомодельную переменную $r = xt^{-\omega/2}$ и функцию

$$F(r; \omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Br}} \exp(\sigma - r\sigma^{\omega/2})d\sigma,$$

находим

$$S^\omega(x, t) = t^{-1}F(r; \omega).$$

Интеграл $F(r, \omega)$ может быть аналитически продолжен с полуоси $r > 0$ в комплексную плоскость путем соответствующего деформирования контура интегрирования. Получаемое при этом решение выражается через функцию Райта.

Другое представление сигнальной функции Грина дробного порядка дается односторонней устойчивой плотностью с характеристическим показателем $\omega/2$ и масштабным фактором $b = x^{2/\omega}$:

$$S^\omega(x, t) = x^{-2/\omega} g_+(x^{-2/\omega} t; \omega/2).$$

10.5 Проблема нормировки

Вернемся теперь к п. 10.2. Заметим, что хотя при $\omega = 1$ полученный там результат совпадает с классическим диффузионным решением

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp(-x^2/(4t)),$$

при $\omega < 1$ возникает принципиальное отличие: интеграл от $f(x, t)$ по всей оси перестает быть постоянной величиной, он убывает с течением времени:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx \equiv \tilde{f}(0, t) = \tilde{\varphi}(0) t^{\omega-1} E_{\omega, \omega}(0) = \tilde{\varphi}(0) t^{\omega-1}.$$

Это нарушение нормировки решения однородного дробного уравнения препятствует принятой в диффузионной теории интерпретации $f(x, t)$ как плотности диффундирующих частиц, а $G(x, t)$ – как плотности вероятности: ни число частиц, ни вероятность теперь не сохраняются.

Очевидно, несохранение интеграла есть свойство самого уравнения, а не процесса. Хотя, в принципе, и существуют процессы, в которых частицы поглощаются, или исчезают в результате распада, но мы никакой информации об этом в наше уравнение не закладывали. Более того, уравнение дает асимптотически степенной (то есть, *медленный*) закон убывания полной вероятности, тогда как известные физические процессы следуют показательному закону. Дело, стало быть, в самом уравнении, в *его выводе*. При внимательном рассмотрении обнаруживается, что существует по крайней мере два различных обобщения, вытекающих их трех различных, но эквивалентных представлений классического диффузионного процесса. Перечислим эти три представления:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad f(x, 0+) = \varphi(x), \quad (10.5.1)$$

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \varphi(x)\delta(t), \quad f(x, 0-) = 0, \quad t \geq 0, \quad (10.5.2)$$

$$f(x, t) - f(x, 0+) = \int_0^t \frac{\partial^2 f(x, \tau)}{\partial x^2} d\tau, \quad t > 0. \quad (10.5.3)$$

Учитывая, что $f(x, 0+) = \varphi(x)$, а дельта-функция есть производная от ступенчатой функции Хэвисайда $l(t)$,

$$\delta(t) = \frac{d l(t)}{dt},$$

два последних уравнения можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(x, t) - \varphi(x) l(t)] = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2}, \quad f(x, 0-) = 0, \quad t \geq 0, \quad (10.5.4)$$

$$f(x, t) - \varphi(x) = \int_0^t d\tau \frac{\partial^2 f(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad t > 0. \quad (10.5.5)$$

Замена оператора производной по времени дробной производной в первом уравнении ведет к рассмотренному выше варианту с нарушенной нормировкой. Аналогичная операция в случае с учетом дробной производной от постоянной приводит к *неоднородному уравнению*

$${}_0D_t^\omega f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \varphi(x). \quad (10.5.6)$$

В случае (10.5.5) мы имеем дело с интегро-дифференциальным уравнением, и к его дробному обобщению естественно идти путем замены оператора интегрирования дробным аналогом этого оператора:

$$f(x, t) - \varphi(x) = {}_0D_x^{-\omega} \frac{\partial^2 f(x, \tau)}{\partial x^2}.$$

Применив к обеим частям полученного уравнения оператор ${}_0D_x^\omega$,

$${}_0D_t^\omega f(x, t) = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \varphi(x),$$

приходим к тому же неоднородному уравнению, что и в случае (10.5.6). Соответствующее уравнение для функции Грина имеет вид:

$${}_0D_t^\omega G(x, t) = \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x),$$

Трансформанта Фурье-Лапласа этой функции

$$\widehat{G}(k, \lambda) = \frac{\lambda^{\omega-1}}{\lambda^{\omega} + k^2}$$

показывает, что принцип сохранения вероятности в данном случае выполняется:

$$\widehat{G}(0, \lambda) = \int_0^{\infty} \widetilde{G}(0, t) e^{-\lambda t} dt = 1/\lambda.$$

10.6 Субдиффузия в многомерном пространстве

Функция Грина. Следуя работе [10], рассмотрим решение уравнения субдиффузии в бесконечной однородной среде, положив, для общности, размерность пространства равной произвольному целому числу d :

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^t d\tau (t - \tau)^{\omega-1} \Delta_d f(\mathbf{x}, \tau) + \phi(\mathbf{x}).$$

Решение этого уравнения выражается через функцию Грина соотношением

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} G^{\omega}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t) \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'.$$

Преобразование Лапласа по времени дает

$$\widehat{f}(\mathbf{x}, \lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{G}^{\omega}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \lambda) \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

где

$$\widehat{G}^{\omega}(r, \lambda) = g(r, \lambda^{\omega/2}) \lambda^{\omega-1}.$$

Как показано в [10], функция $g(r, a)$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta - a^2)g(r, a) = -\delta(\mathbf{x})$$

и выражается через модифицированную функцию Бесселя второго рода:

$$g(r, a) = (2\pi)^{-d/2} (r/a)^{1-d/2} K_{d/2-1}(ar).$$

Далее авторы отмечают, что прямое обращение Лапласа полученной трансформанты сопровождается громоздкими выкладками, и прибегают к обходному маневру, воспользовавшись преобразованием Меллина в форме

$$\bar{\phi}(\sigma) = \int_0^{\infty} dt t^{\sigma-1} \phi(t)$$

и связью между ним и преобразованием Лапласа

$$\bar{\phi}(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^{\infty} ds s^{-\sigma} \hat{\phi}(s).$$

В результате

$$\begin{aligned} \bar{G}^{\omega}(r, \sigma) &= \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^{\infty} g(r, \lambda^{\omega/2}) \lambda^{\omega-\sigma-1} d\lambda = \\ &= \omega^{-1} \pi^{-d/2} 2^{-2\sigma/\omega} r^{-d+2\sigma/\omega} \Gamma(1-\sigma/\omega) \Gamma(d/2 + \sigma/\omega) / \Gamma(1-\sigma). \end{aligned}$$

Выражая обратное преобразование через функцию Фокса, приходим к формуле

$$G^{\omega}(r, t) = \pi^{-d/2} 2^{-1} r^{-d} H_{12}^{20} \left(t^{-\omega/2} r/2 \left| \begin{matrix} (1, \omega/2) \\ (d/2, 1/2), (1, 1/2) \end{matrix} \right. \right).$$

При $\omega = 1$ приходим к известному результату:

$$G^1(r, t) = (4\pi t)^{-d/2} \exp(-r^2/4t).$$

Согласно свойствам функций Фокса

$$\begin{aligned} G^{\omega}(r, t) &\sim \gamma^{\omega} r^{-[(1-\omega)d]/(2-\omega)} t^{-[d\omega/2]/(2-\omega)} \times \\ &\times \exp\{-(2-\omega)\omega^{\omega/(2-\omega)}(r/2)^{2/(2-\omega)} t^{-\omega/(2-\omega)}\}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma^{\omega} = \pi^{-d/2} 2^{d/(\omega-2)} (2-\omega)^{-1/2} \omega^{[\omega(d+1)/2-1]/(2-\omega)}.$$

Выполнив преобразование Фурье по d -мерной пространственной переменной, получим

$$\tilde{G}^{\omega}(k, t) = (2\pi)^{d/2} k^{1-d/2} \int_0^{\infty} J_{d/2-1}(kr) G_j^{\omega}(r, t) r^{d/2} dr,$$

где J – функция Бесселя первого рода. Последующее преобразование Меллина по переменной k дает:

$$M\{\tilde{G}^\omega(k, t)\}(\sigma, t) = t^{-\sigma\omega/2} \frac{\Gamma(\sigma/2)\Gamma(1-\sigma/2)}{2\Gamma(1-\sigma\omega/2)},$$

откуда

$$\tilde{G}^\omega(k, t) = \frac{1}{2} H_{12}^{11} \left(kt^{\omega/2} \left| \begin{array}{c} (0, 1/2) \\ (0, 1/2), (-k, \omega/2) \end{array} \right. \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1+n\omega)} k^{2n} t^{n\omega}.$$

При $\omega = 1$ получаем очевидный результат:

$$\tilde{G}^1(k, t) = \exp(-k^2 t).$$

Моменты субдиффузионного распределения даются формулами, легко получаемыми преобразованием Меллина:

$$\langle r^{2n}(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} G^\omega(|\mathbf{x}|, t) |\mathbf{x}|^{2n} d\mathbf{x} = 2^{2n} \frac{\Gamma(n+d/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(d/2)\Gamma(n\omega+1)} t^{n\omega}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В частности,

$$\langle r^0(t) \rangle = 1, \quad \langle r^2(t) \rangle = \frac{2d}{\Gamma(\omega+1)} t^\omega, \quad \langle r^4(t) \rangle = \frac{8(2+d)d}{\Gamma(2\omega+1)} t^{2\omega}$$

и т.д. Из первого равенства видно, что заданная в начальный момент времени нормировка функции Грина с течением времени сохраняется, а из второго – что ширина диффузионного пакета, сосредоточенного в начальный момент времени в начале координат, растет пропорционально $t^{\omega/2}$. Это, замедленное по сравнению с обычной диффузией расплывание диффузионного пакета и дает основание называть такой процесс субдиффузией.

10.7 Субволны в многомерном пространстве

Рассмотрим теперь то же уравнение в области значений $\omega \in (1, 2)$, требующее для выбора единственного частного решения задания двух начальных условий. Выберем в качестве таковых

$$f(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x})$$

и

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} \right|_{t=0} = \chi(\mathbf{x}).$$

Соответствующее этим начальным условиям интегродифференциальное уравнение имеет вид

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \int_0^t d\tau (t - \tau)^{\omega-1} \Delta f(\mathbf{x}, t) + \phi(\mathbf{x}) + \chi(\mathbf{x})t.$$

Решение этого уравнения представляется в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} G^\omega(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t) \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \int_{\mathbb{R}^d} K^\omega(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, t) \chi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}',$$

где $K^{(\omega)}$ – вторая функция Грина, трансформанта Лапласа по времени которой выражается через ту же функцию $g(r, a)$:

$$\widehat{K}^\omega(r, \lambda) = g(r, \lambda^{\omega/2}) \lambda^{\omega-2}.$$

Соответственно,

$$\overline{K}^\omega(r, \sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\sigma)} \int_0^\infty g(r, \lambda^{\omega/2}) \lambda^{\omega-\sigma-2} d\lambda =$$

$$= \omega^{-1} \pi^{-d/2} 2^{-2(1+\sigma)/\omega} r^{-d+2(1+\sigma)/\omega} \Gamma(1-(1+\sigma)/\omega) \Gamma(d/2+(1+\sigma)/\omega) / \Gamma(1-\sigma)$$

и

$$K^\omega(r, t) = \pi^{-d/2} 2^{-1-2/\omega} r^{-d+2/\omega} \times \\ \times H_{12}^{20} \left(\frac{r}{2} t^{-\omega/2} \middle| \begin{matrix} (1, \omega/2) \\ (d/2 - 1/\omega, 1/2), (1 - 1/\omega, 1/2) \end{matrix} \right).$$

Асимптотика второй функции Грина при больших временах имеет вид

$$K^\omega(r, t) \sim \delta^\omega r^{-[(1-\omega)d+2]/(2-\omega)} t^{-[d\omega/2-2]/(2-\omega)} \times \\ \times \exp\{-(2-\omega)\omega^{\omega/(2-\omega)}(r/2)^{2/(2-\omega)} t^{-\omega/(2-\omega)}\},$$

где

$$\delta^\omega = \pi^{-d/2} 2^{(2-d)/(2-\omega)} (2-\omega)^{-1/2} \omega^{[\omega(d+1)/2-3]/(2-\omega)}.$$

Трансформанта Фурье по пространственной переменной

$$\widetilde{K}^\omega(k, t) = (2\pi)^{d/2} k^{1-d/2} \int_0^\infty J_{d/2-1}(kr) K^\omega(r, t) r^{d/2} dr,$$

а ее меллиновская трансформанта по переменной Фурье

$$M\{\tilde{G}_j^\omega(k, t)\}(\sigma, t) = t^{1-\sigma\omega/2} \frac{\Gamma(\sigma/2)\Gamma(1-\sigma/2)}{2\Gamma(2-\sigma\omega/2)},$$

откуда следует

$$\tilde{K}^\omega(k, t) = \frac{1}{2} t H_{12}^{11} \left(kt^{\omega/2} \left| \begin{array}{c} (0, 1/2) \\ (0, 1/2), (-k, d/2) \end{array} \right. \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(2+n\omega)} k^{2n} t^{1+n\omega}.$$

Отсюда, в частности, могут быть выведено соотношение

$$\tilde{G}^\omega(k, t) = \frac{\partial \tilde{K}^\omega(k, t)}{\partial t}$$

и найдены пределы

$$\tilde{G}^\omega(k, 0+) = 1, \quad \tilde{K}^\omega(k, 0+) = 0.$$

Заметим, что

$$\tilde{G}^2(k, t) = \cos(kt), \quad \tilde{K}^2(k, t) = (1/k) \sin(kt),$$

тогда как

$$\tilde{G}^1(k, t) = \exp(-k^2 t).$$

10.8 Изотропная супердиффузия

Рассмотрим теперь решение уравнения

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t),$$

$$t > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \alpha \leq 2,$$

с начальным условием

$$f(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}).$$

Представив решение в виде

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \phi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}'$$

запишем уравнение для функции Грина $G(\mathbf{x}, t)$ данной задачи:

$$\frac{\partial G(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -(-\Delta)^{\alpha/2} G(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t), \quad G(\mathbf{x}, t) = 0, \quad t < 0. \quad (10.8.1)$$

Выполняя преобразование Фурье по пространственным переменным,

$$\frac{d\tilde{G}(\mathbf{k}, t)}{dt} = -|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{G}(\mathbf{k}, t) + \delta(t)$$

и решая это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, мы получим:

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, t) = \exp(-|\mathbf{k}|^\alpha t).$$

Найденное решение есть характеристическая функция многомерного изотропного устойчивого распределения (распределения Леви-Фельдгейма):

$$\tilde{G}(\mathbf{k}, t) = \tilde{g}_d(t^{1/\alpha} \mathbf{k}; \alpha).$$

Обратное преобразование дает

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{g}_d(t^{1/\alpha} \mathbf{k}; \alpha) d\mathbf{k} = t^{-d/\alpha} g_d(t^{-1/\alpha} \mathbf{x}; \alpha). \quad (10.8.2)$$

Мы уже обсуждали этот процесс в Главе 3. Дисперсия распределения (10.8.2) при $\alpha < 2$ бесконечна, а его ширина растет пропорционально $t^{1/\alpha}$, то есть, быстрее, чем в случае нормальной диффузии ($t^{1/2}$), что и дает основание называть этот процесс *супердиффузией*.

10.9 Связь между решениями уравнений с дробными и целыми производными по времени

Мы остановимся здесь на связи между решениями линейных уравнений дробного порядка $\omega \in (0, 1)$ и первого порядка по времени, которая позволяет вообще избежать процедуры решения уравнения с дробной производной (метод этот был впервые предложен и использован в работе автора [11]).

Рассмотрим уравнения

$${}_0D_t^\omega f_{\omega, \nu}(t) = K f_{\omega, \nu}(t) + \Phi_\nu(t)$$

и

$$\frac{df}{dt} = K f(t) + \delta(t).$$

Начальные условия ${}_0D_t^{\omega-1} f_{\omega, \nu}(t) \rightarrow 0$ при $t \uparrow 0$ в обоих случаях (отметим согласованность обозначений: при $\omega \rightarrow 1$ и $\nu \rightarrow 0$ первое уравнение превращается во второе).

Выполнив преобразование Лапласа обоих уравнений,

$$\lambda^\omega \widehat{f}_{\omega,\nu}(\lambda) = K \widehat{f}_{\omega,\nu}(\lambda) + \lambda^{-\nu}, \quad \lambda \widehat{f}(\lambda) = K \widehat{f}(\lambda) + 1,$$

и разрешив их относительно трансформант, приходим к соотношению:

$$\widehat{f}_{\omega,\nu}(\lambda) = \lambda^{-\nu} \widehat{f}(\lambda^\omega).$$

Обратное преобразование дает:

$$f_{\omega,\nu}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t} \lambda^{-\nu} \widehat{f}(\lambda) = \int_0^\infty h_{\omega,\nu}(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

где

$$h_{\omega,\nu}(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\lambda t - \lambda^\omega \tau} \lambda^{-\nu} d\lambda.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что решения уравнений

$${}_0D_t^\omega f_{\omega,0}(t) = K f_{\omega,0}(t) + \delta(t) \quad (10.9.1)$$

и

$$\frac{df}{dt} = K f(t) + \delta(t) \quad (10.9.2)$$

связаны соотношением

$$f_{\omega,0}(t) = \omega t^{\omega-1} \int_0^\infty f((t/\tau)^\omega) g^+(\tau; \omega) \tau^{-\omega} d\tau = \int_0^\infty f(\tau) g^+(t\tau^{-1/\omega}; \omega) \tau^{-1/\omega} d\tau, \quad (10.9.3)$$

а решения уравнений

$${}_0D_t^\omega f_{\omega,1-\omega}(t) = K f_{\omega,1-\omega}(t) + \frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \quad (10.9.4)$$

и

$$\frac{df}{dt} = K f(t) + \delta(t) \quad (10.9.5)$$

– соотношением

$$f_{\omega,1-\omega}(t) = \int_0^\infty f((t/\tau)^\omega) g_+(\tau; \omega) d\tau = (t/\omega) \int_0^\infty f(\tau) g_+(t\tau^{-1/\omega}; \omega) \tau^{-1/\omega-1} d\tau. \quad (10.9.6)$$

Замечание 1. Все эти соотношения остаются справедливыми и в случае, если K – не зависящий от времени линейный оператор, действующий на функцию $f(t) \equiv f(\mathbf{x}, t)$ по совокупности переменных \mathbf{x} .

Вернемся теперь к дробно-баллистическому уравнению (10.1.6). Согласно формулам (10.9.4)-(10.9.6), его решение может быть представлено в виде

$$f(x, t) = (t/\omega) \int_0^{\infty} \tau^{-1/\alpha-1/\omega-1} g_+(\tau^{-1/\alpha}x; \alpha) g_+(t\tau^{-1/\omega}; \omega) d\tau. \quad (10.9.7)$$

И, наконец, функция Грина диффузионного уравнения общего типа

$${}_0D_t^\omega G(\mathbf{x}, t) = -(-\Delta)^{\alpha/2} G(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x}) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

выражается через функцию Грина (10.8.2) соотношением

$$G(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{\omega} \int_0^{\infty} g_d(\tau^{-1/\alpha}\mathbf{x}; \alpha) g_+(t\tau^{-1/\omega}; \omega) \tau^{-1/\omega-d/\alpha-1} d\tau, \quad (10.9.8)$$

приводящим к дробно-устойчивой плотности

$$G(\mathbf{x}, t) = t^{-\omega d/\alpha} q_d(t^{-\omega/\alpha}\mathbf{x}; \alpha, \omega).$$

10.10 Телеграфное уравнение

В статье [12] решается уравнение

$$\left[{}_0^{2\alpha}D_t + b {}_0^\beta D_t - {}_0^{2\gamma}D_x \right] G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) = b_1 \delta(t) \delta(x),$$

с начальными и граничными условиями

$$G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, 0) = b_2 \delta(x), \quad \left. \frac{\partial G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t)}{\partial x} \right] = 0.$$

Интерпретируя t как время, а x как координату, в уравнении этом можно увидеть дробный аналог телеграфного уравнения, в которое оно и превращается при $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Преобразование Лапласа по времени и Фурье по координате и решение полученного алгебраического уравнения приводит к следующему выражению для трансформанты:

$$\tilde{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(k, \lambda) \equiv \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) = \frac{b_1 + b_2(\lambda^{2\alpha-1} + b\lambda^{\beta-1})}{\lambda^{2\alpha} + b\lambda^\beta - |k|^{2\gamma}}.$$

Для выполнения обратных преобразований приведем ее к виду

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(k, \lambda) &= \frac{b_1 + b_2(\lambda^{2\alpha-1} + b\lambda^{\beta-1})}{\lambda^{2\alpha} + b\lambda^\beta - |k|^{2\gamma}} = \\ &= \frac{\Omega(\lambda)}{|k|^{2\gamma}} \frac{|k|^{2\gamma}\lambda^{-\beta}}{\lambda^{2\alpha-\beta} + b} \frac{1}{1 - \frac{|k|^{2\gamma}\lambda^{-\beta}}{\lambda^{2\alpha-\beta} + b}} = \Omega(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|k|^{2\gamma n}\lambda^{-\beta n-\beta}}{(\lambda^{2\alpha-\beta} + b)^{n+1}}, \end{aligned}$$

где $\Omega(\lambda) = b_1 + b_2(\lambda^{2\alpha-\beta} + b\lambda^{\beta-1})$ и предполагается выполнение условия сходимости геометрической прогрессии $||k|^{2\gamma}\lambda^{-\beta}/(\lambda^{2\alpha-\beta} + b)| < 1$. Пользуясь свойствами обобщенной трехпараметрической функции Миттаг-Леффлера, выполним обратное преобразование Лапласа,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{\alpha,\beta}^\gamma(k, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} |k|^{2\gamma n} \{ b_1 t^{2\alpha n + 2\alpha - 1} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha n + 2\alpha}^{n+1}(-bt^{2\alpha-\beta}) + \\ &+ b_2 t^{2\alpha n} [E_{2\alpha-\beta, 2\alpha n + 1}(-bt^{2\alpha-\beta}) + bt^{2\alpha-\beta} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha n + 2\alpha - \beta + 1}^{n+1}(-2bt^{2\alpha-\beta})] \}. \end{aligned}$$

а затем и обращение Фурье:

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\beta}^\gamma(x, t) &= \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\gamma\pi) \Gamma(2n\gamma + 1) |x|^{-2n\gamma-1} \{ b_1 t^{2\alpha n + 2\alpha - 1} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha n + 2\alpha}^{n+1}(-bt^{2\alpha-\beta}) + \\ &+ b_2 t^{2\alpha n} [E_{2\alpha-\beta, 2\alpha n + 1}^{n+1}(-bt^{2\alpha-\beta}) + bt^{2\alpha-\beta} E_{2\alpha-\beta, 2\alpha n + 2\alpha - \beta + 1}^{n+1}(-bt^{2\alpha-\beta})] \}, \end{aligned}$$

где $b \neq 0, -1 - m, m = 0, 1, 2, \dots$

Полагая здесь $\alpha = \beta$, получим решение уравнения

$$[{}_0^{2\alpha} D_t + b {}_0^\alpha D_t - {}_0^{2\gamma} D_x] G_{\alpha,\alpha}^\gamma(x, t) = b_1 \delta(t) \delta(x)$$

в виде

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\alpha}^\gamma(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\gamma\pi) \Gamma(2n\gamma + 1) |x|^{-2n\gamma-1} \{ b_1 t^{\alpha(n+2)-1} E_{\alpha, n\alpha + 2\alpha}(-bt^\alpha) + \\ &+ b_2 t^{2n\alpha} [E_{\alpha, n\alpha + 1}(-bt^\alpha) + bt^\alpha E_{\alpha, n\alpha + \alpha + 1}(-bt^\alpha)] \}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

На основе этого соотношения, заменяющего в некотором смысле формулу Крамерса-Кронига, с эмпирически определенными параметрами α и a_α в работах [13, 14] разрабатывается модель с конститутивным уравнением, содержащим регуляризованный гиперсингулярный интеграл дробного порядка (производную Маршо) и приводящим к волновому уравнению с потерями вида

$$\left[\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(\mathbf{x}, t) = \frac{4a_\alpha \Gamma(\alpha + 2) \cos((\alpha + 1)\pi/2)}{\pi c_0} \text{p.f.} \int_{-\infty}^t \frac{p(\mathbf{x}, \tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha+2}},$$

где $p(\mathbf{x}, t)$ – давление в точке \mathbf{x} в момент времени t , а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару.

Другой подход к описанию ослабления волн в термовязкой среде был предложен в работах [15–17]. В его основу было положено уравнение

$$\left[\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(\mathbf{x}, t) = -\frac{\mu}{c_0^2} \frac{\partial}{\partial t} [\Delta p], \quad (10.10.1)$$

где μ – коэффициент термовязкости. В работе [18] оно было обобщено путем замены лапласиана его дробной степенью,

$$\left[\Delta - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] p(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu}{c_0^\alpha} \frac{\partial}{\partial t} [(-\Delta)^{\alpha/2} p(\mathbf{x}, t)], \quad \alpha \in (0, 2], \quad (10.10.2)$$

что соответствует аппроксимации дисперсионного соотношения

$$k^2 - \left(\frac{\omega}{c_0} \right)^2 = i \frac{\mu}{c_0^\alpha} \omega |\mathbf{k}|^\alpha,$$

приемлемой во многих практических ситуациях, включая, по утверждению автора работы [18], ультразвуковые исследования в медицине.

10.11 Аномальная диффузия на отрезке

Завершим эту главу рассмотрением одномерного процесса *аномальной диффузии*, сочетающим в себе признаки как субдиффузии ($\omega < 1$), так и супердиффузии ($\alpha < 2$). Его уравнение имеет вид

$${}^{\omega}_0 D_t f(x, t) = -(-\Delta_1)^{\alpha/2} f(x, t). \quad (10.11.1)$$

Как следует из п. 10.9, его решение для бесконечной оси $-\infty < x < \infty$ выражается через дробно-устойчивую плотность. Здесь мы рассмотрим решения (10.11.1) на конечном отрезке $[0, L]$ с однородными граничными условиями

$$f(0, t) = f(L, t) = 0$$

и начальным условием

$$f(x, 0) = f_0(x).$$

Воспользуемся методом разложения решения по системе ортогональных функций, выбрав в качестве таковых собственные функции оператора $-\Delta_1$:

$$\begin{aligned} -\Delta_1 \phi_n(x) &= \lambda_n \phi_n(x), \\ \phi_n(0) &= \phi_n(L) = 0. \end{aligned}$$

Собственные значения этого оператора

$$\lambda_n = (an)^2, \quad a = \pi/L, n = 1, 2, 3, \dots$$

а соответствующие им собственные функции

$$\phi_n(x) = c_n \sin(анx), \quad 0 \leq x \leq L,$$

где c_n – нормированные постоянные.

В основе применения этого метода к уравнению с дробным лапласианом лежит теорема о том, что если $\psi(z)$ – достаточно хорошая функция, то собственные значения оператора-функции $\psi(-\Delta_1)$ выражается через собственные значения оператора-аргумента λ_n формулой $\psi(\lambda_n)$, а собственные функции совпадают с $\phi_n(x)$ [19]. Подставив разложение

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(анx)$$

в уравнение (10.11.1) и учитывая, что согласно теореме

$$(-\Delta_1)^{\alpha/2} \sin(\alpha nx) = (an)^\alpha \sin(\alpha nx),$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} [{}_0^\omega D_t f_n(t) + (an)^\alpha f_n(t)] \sin(анx) = 0.$$

Умножая это уравнение на $\sin(amx)$ и интегрируя по отрезку $[0, L]$, приходим к уравнению

$${}_0^\omega D_t f_m(t) + (am)^\alpha f_m(t) = 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

решение которого имеет вид

$$f_m(t) = f_m(0) E_\omega(-am)^\alpha t^\omega,$$

где постоянные

$$f_m(0) = \int_0^L f(x, 0) \sin(amx) dx$$

определяются начальными условиями задачи. В итоге получаем

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) \sin(анx) E_\omega[-(an)^\alpha t^\omega].$$

При $\alpha = 2$ этот результат совпадает с решением уравнения субдиффузии на отрезке

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) \sin(анx) E_{\omega} [-(ан)^2 t^{\omega}],$$

полученным в работе [6], а при $\omega = 1$ – с решением уравнения супердиффузии,

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(0) \sin(анx) \exp [-(ан)^{\alpha} t],$$

приведенным в [19]. При $\alpha = 2$ и $\omega = 1$ мы приходим к известному решению уравнения нормальной диффузии [20].

10.12 Дробно-устойчивые плотности

В заключение главы остановимся на свойствах дробно-устойчивых плотностей, являющихся фундаментальными решениями дробно-дифференциальных уравнений в частных производных.

Пусть $S(\alpha, \theta)$ и $S(\omega, 1)$ – взаимно независимые устойчивые случайные величины в представлении С. Назовем случайную величину

$$Z(\alpha, \omega, \theta) = S(\alpha, \theta) / [S(\omega, 1)]^{\omega/\alpha}, \quad \omega < 1,$$

дробно-устойчивой.

1. Плотность распределения $q(x; \alpha, \omega, \theta)$ случайной величины $Z(\alpha, \omega, \theta)$ назовем *дробно-устойчивой плотностью*. Она выражается через устойчивые плотности $g(x; \alpha, \theta)$ соотношением

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^{\infty} g(xy^{\omega/\alpha}; \alpha, \theta) g_+(y; \omega) y^{\omega/\alpha} dy.$$

2. Если $0 < \alpha < 1$ и $\theta = 1$, плотность $q(x; \alpha, \omega, 1)$ отличается от нуля только на положительной полуоси. Во всех других случаях она отлична от нуля на всей вещественной оси.

3. Имеет место свойство инверсии:

$$q(-x; \alpha, \omega, \theta) = q(x; \alpha, \omega, -\theta).$$

Если $\theta = 0$, то

$$q(-x; \alpha, \omega, 0) = q(x; \alpha, \omega, 0),$$

то есть дробно-устойчивое распределение с $\theta = 0$ является симметричным относительно начала координат.

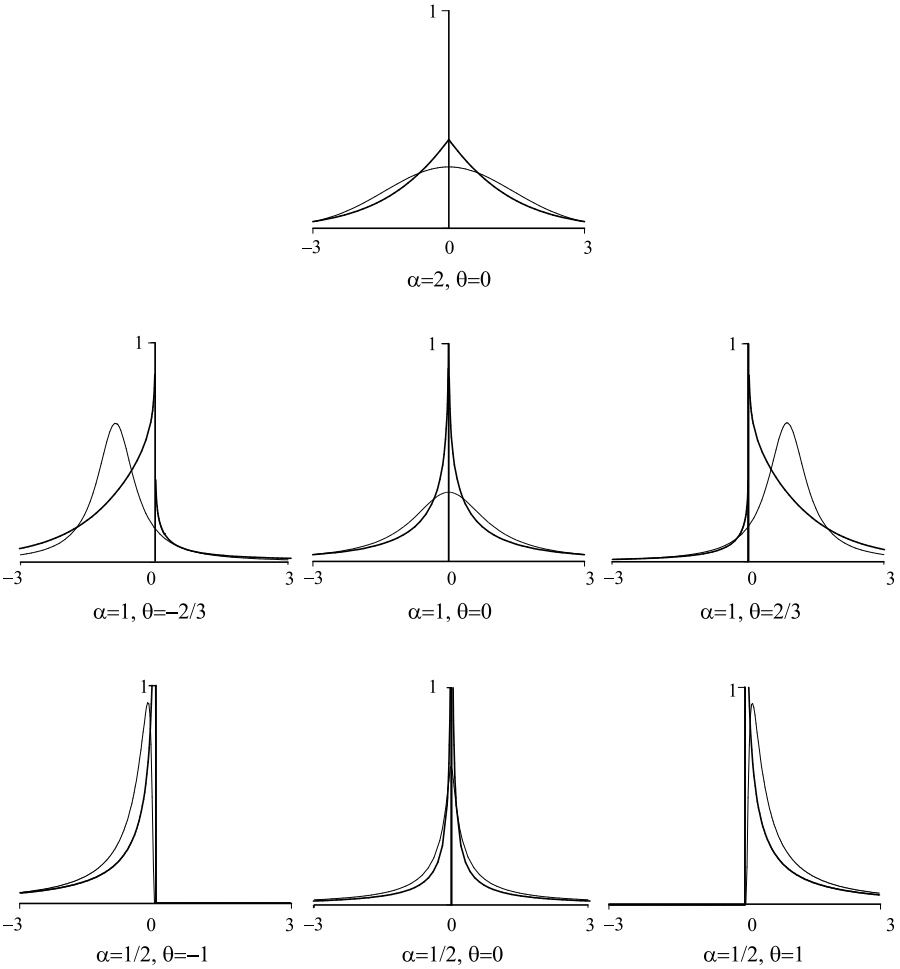


Рис. 10.1: Графики дробно-устойчивых плотностей ($\omega = 1/2$) в сравнении с графиками устойчивых плотностей (тонкие линии).

4. Согласно свойству инверсии, достаточно рассмотреть класс дробно-устойчивых плотностей при всех α, ω и θ только на положительной полуоси, что позволяет ввести одностороннее преобразование Меллина

$$\bar{q}(s; \alpha, \omega, \theta) = \int_0^{\infty} x^s q(x; \alpha, \omega, \theta) dx, \quad -1 < \operatorname{Re} s < \alpha,$$

которое, в силу специфики дробно-устойчивой случайной величины,

является значительно более удобным инструментом анализа, чем традиционная характеристическая функция. Применяя это преобразование и используя выражение для трансформанты Меллина устойчивой плотности

$$\bar{g}(s; \alpha, \theta) = \rho \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s/\alpha)}{\Gamma(1+\rho s)\Gamma(1-\rho s)}, \quad \rho = (1+\theta)/2,$$

мы получим

$$\bar{q}(s; \alpha, \omega, \theta) = \rho \frac{\Gamma(1+s)\Gamma(1-s/\alpha)\Gamma(1+s/\alpha)}{\Gamma(1+\rho s)\Gamma(1-\rho s)\Gamma(1+\omega s/\alpha)}.$$

5. Дробно-устойчивое распределение имеет моменты всех порядков только в случае $\alpha = 2$. При этом область значений θ сужается до одного значения $\theta = 0$, распределение становится симметричным, нечетные моменты обращаются в нуль, а четные даются формулой

$$m^{(2n)}(2, \omega, 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} q(x; 2, \omega, 0) dx = \frac{4^n n! \Gamma(n+1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(n\omega+1)}.$$

При $1 < \alpha < 2$ второй и высшие моменты бесконечны, при $\alpha \leq 1$ перестает существовать и среднее значение.

6. В начале координат

$$q(0; \alpha, \omega, \theta) = \frac{\Gamma(1+1/\alpha)\Gamma(1-1/\alpha)}{\pi\Gamma(1-\omega/\alpha)} \cos(\theta\pi/2)$$

и

$$Q(0; \alpha, \omega, \theta) \equiv \int_{-\infty}^0 q(0; \alpha, \omega, \theta) = (1-\theta)/2.$$

Заметим, что $q(x; \alpha, \omega, \theta)$ имеет интегрируемую особенность в начале координат, когда $\alpha \leq 1$ и $\omega < 1$.

7. При $\omega \rightarrow 1$ плотности $q(x; \alpha, \omega, \theta)$ превращаются в устойчивые плотности $g(x; \alpha, \theta)$.

8. Если $\omega < 1$ и $\theta > 0$, то

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) \sim g(x; \alpha, \theta) / \Gamma(1+\omega), \quad x \rightarrow \infty,$$

то есть дробно-устойчивые плотности имеют такие же тяжелые (в смысле степенной зависимости) хвосты, что и устойчивые плотности.

9. При $\alpha = 2$ дробно-устойчивая плотность выражается через одностороннюю устойчивую плотность соотношением

$$q(x; 2, \omega, 0) = \frac{1}{\omega |x|^{1+2/\omega}} g_+ \left(|x|^{-2/\omega}; \omega/2 \right).$$

10. Характеристические функции дробно-устойчивых распределений выражаются через функции Миттаг-Леффлера

$$\tilde{q}(k; \alpha, \omega, \theta) = E_\omega(-\psi(k; \alpha, \theta)),$$

где

$$\psi(k; \alpha, \theta) = -|k|^\alpha \exp\{-i\alpha\theta(\pi/2)\text{sign}k\}.$$

Имеет место разложение по обратным степеням

$$q(x; \alpha, \omega, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(n\alpha + 1)}{\Gamma(n\alpha\rho)\Gamma(1 - n\alpha\rho)\Gamma(1 + n\omega)} x^{-n\alpha-1}.$$

11. Одномерные дробно-устойчивые плотности естественным образом обобщаются на многомерные

$$q_d(\mathbf{x}; \alpha, \omega, \Gamma) = \int_0^\infty g_d(\mathbf{x}y^{\omega/\alpha}; \alpha, \Gamma) g_+(y; \omega) y^{d\omega/\alpha} dy,$$

описывающие распределение случайного вектора

$$\mathbf{Z}_d(\alpha, \omega, \Gamma) \equiv \mathbf{S}_d(\alpha, \Gamma) / [S_1(\omega, 1)]^{\omega/\alpha}.$$

Мы ограничимся здесь перечислением свойств стандартных изотропных дробно-устойчивых плотностей $q_d(\mathbf{x}; \alpha, \omega, \mu_0) \equiv q_d(|\mathbf{x}|; \alpha, \omega)$, характеристическая функция которых имеет вид

$$\tilde{q}_d(\mathbf{k}; \alpha, \omega) = E_\omega(-|\mathbf{k}|^\alpha).$$

11.1. Плотности $q_{d+2}(r; \alpha, \omega)$ и $q_d(r; \alpha, \omega)$ связаны соотношением

$$q_{d+2}(r; \alpha, \omega) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{dq_d(r; \alpha, \omega)}{dr}.$$

Плотности $q_{d+1}(r; \alpha, \omega)$ и $q_d(r; \alpha, \omega)$ связаны при помощи производной порядка $1/2$.

11.2. Подобно нормальному случаю, проекция диффузионного d -мерного вектора $X(t)$ на d' - мерном подпространстве ($d' < d$) диффундирует согласно d' -мерному закону такими же параметрами α и ω .

11.3. В отличие от нормального случая, различные координаты $X_1(t), \dots, X_d(t)$ частицы, совершающей аномальную диффузию ($\alpha \neq 2$ или $\omega \neq 1$) не являются независимыми друг от друга.

11.4. Плотность $q_d(r; \alpha, \omega)$ – убывающая функция r и ее максимальное значение $q_d(0; \alpha, \omega)$ конечно только если $d < \alpha$:

$$q_d(0; \alpha, \omega) = \frac{\Gamma(1 + d/\alpha)\Gamma(1 - d/\alpha)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(1 + d/2)\Gamma(1 - d\omega/\alpha)}.$$

В частности

$$q_1(0; \alpha, \omega) = \frac{\csc(\pi/\alpha)}{\alpha\Gamma(1 - \omega/\alpha)}.$$

11.5. В случае $\omega = 1$ дробно-устойчивые плотности переходят в устойчивые:

$$q_d(r; \alpha, 1) = \rho_d(r; \alpha)$$

$$q_d(r; \alpha, 1) = \rho_d(r; \alpha) = (2\pi)^{-d/2} \int_0^\infty e^{-s^\alpha} J_{d/2-1}(rs)(rs)^{1-d/2} s^{d-1} ds.$$

11.6. Имеет место соотношение:

$$q_d(r; \alpha, \omega) = \int_0^\infty q_d(r\tau^{\omega/\alpha}; \alpha, 1) g_+(\tau; \omega) d\tau.$$

11.7. Если $\alpha = 2$ и $\omega < 1$, тогда

$$q_1(0; 2, \omega) = [2\Gamma(1 - \omega/2)]^{-1},$$

$$q_2(r; 2, \omega) \sim [2\pi\Gamma(1 - \omega)]^{-1} |\ln r|, \quad r \rightarrow 0,$$

и для $d \geq 3$

$$q_d(r; 2, \omega) \sim (4\pi)^{-m/2} [\Gamma(d/2 - 1)/\Gamma(1 - \omega)] (r/2)^{-(d-2)}, \quad r \rightarrow 0.$$

11.8. На больших расстояниях

$$q_d(r; 2, \omega) \sim (4\pi)^{-d/2} (2 - \omega)^{-1/2} \omega^{[(d+1)\omega/2-1]/(2-\omega)} \times \\ \times (r/2)^{-d(1-\omega)/(2-\omega)} \exp\{-(2 - \omega)\omega^{\omega/(2-\omega)}(r/2)^{2/(2-\omega)}\}.$$

11.9. В случае $\alpha = 1$, $\omega = 1/2$ распределения для всех размерностей выражаются через неполную гамма-функцию:

$$q_d(r; 1, 1/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((d+1)/2)}{(4\pi)^{(d+1)/2}} e^{r^2/4} \Gamma(1 - (d+1)/2, r^2/4).$$

Для нечетных размерностей

$$q_d(r; 1, 1/2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((d+1)/2)}{(4\pi)^{(d+1)/2}} \left(\frac{r^2}{4}\right)^\mu e^{r^2/4} E_{(d+1)/2}(r^2/4),$$

где $\mu = 1 - (d+1)/2$.

11.10. В случае $\alpha = 1$, $\omega = 1$

$$q_d(r; 1, 1) = \Gamma((d+1)/2) [\pi(1+r^2)]^{-(d+1)/2}.$$

11.11. Преобразование Меллина:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_d(s; \alpha, \omega) &\equiv \int_0^\infty q_d(r; \alpha, \omega) r^{s-1} dr = \\ &= \frac{2^s \Gamma(1 - (d-s)/\alpha) \Gamma(s/2) \Gamma((d-s)/\alpha)}{\alpha (4\pi)^{d/2} \Gamma(1 - (d-s)\omega/\alpha) \Gamma((d-s)/2)}. \end{aligned}$$

11.12. При $\alpha = 2$ все моменты существуют и имеют вид

$$\langle |X(t)|^{2n} \rangle = \frac{\Gamma(n+d/2) \Gamma(n+1)}{\Gamma(d/2) \Gamma(n\omega+1)} (4Dt^\omega)^n.$$

Литература

1. *Berens H., Westphal U.* Acta Sci. Math. **29**, 93 (1968).
2. *Butzer P. L., Westphal U.* In: Applications of Fractional Calculus in Physics. Ed. R. Hilfer. – Singapore: World Scientific, 2000.
3. *Nigmatullin R. R.* Phys. Stat. Sol. **133**, 425 (1986).
4. *Mainardi F.* In: Waves and Stability in Continuous Media. Ed. by *Rionero S., Ruggeri T.* – Singapore: World Scientific, 1994.
5. *Wyss W. J.* Math. Phys. **27**, 2782 (1986).
6. *Agrawal O. P.* Nonlinear Dynamics **29**, 145 (2002).
7. *Mainardi F.* Radiofizika **38**, 20 (1995).
8. *Mainardi F.* Chaos, Solitons and Fractals **7**, 1461 (1996).

9. *Mainardi F.* In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Ed. by *Carpinteri A., Mainardi F.* – Vienna – New York: Springer Verlag, 1997.
10. *Schneider W. R., Wyss W. J.* *Math. Phys.* **30**, 134 (1989).
11. *Учайкин В. В.* *ЖЭТФ* **88**, 1155 (1999).
12. *Camargo R. F., Chiacchio A. O., de Oliveira E. C.* *J. of Math. Phys.* **49**, 033505 (2008).
13. *Szabo T. L.* *J. Acoust. Sco. Amer.* **96**, 491 (1994).
14. *Szabo T. L., Wu J. J.* *J. Acoust. Sco. Amer.* **107**, 2437 (2000).
15. *Blackstock D. T.* *J. Acoust. Sco. Amer.* **77**, 2050 (1985).
16. *Lighthill J.* *Waves in Fluids*. – Cambridge, 1980.
17. *Pierce A. D.* *Acoustics, an Introduction to its Physical Principles and Applications*. – New York: Acoustical Society of America, Woodbury, 1989.
18. *Chen W.* *Chin. Phys. Lett.* **22**, 2601 (2005).
19. *Ilic M., Liu M., Turner I., Anh V.* *FCAA* **8**, 323 (2005).
20. *Франк Ф., Мизес Р.* *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики*. – Ленинград – Москва: ОНТИ, 1973, с. 644.
21. *Псху А. В.* *Уравнения в частных производных дробного порядка*. – М.: Наука, 2005.
22. *Kilbas A., Srivastava H., Trujillo J.* *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. – Elsevier, 2006.

Часть III

Применения метода

Глава 11

Механика

11.1 Задача о таутохроне

Последняя – третья часть книги представляет собой обзор различных применений метода дробных производных в физических задачах, но конечно, не всех. Представление о не включенных в обзор физических задачах можно получить из Библиографии применений, не содержащей, впрочем, работ по теории управления, динамике хаоса, шумам и некоторым другим специфическим направлениям.

Начнем этот обзор с механической задачи о таутохроне, постановка которой принадлежит Абелью. По кривой, расположенной в первом квадранте вертикальной плоскости и проходящей через начало координат (ось OY направлена вверх, ось OX горизонтальна), из состояния покоя скользит без трения под действием силы тяжести материальная точка единичной массы, попадая в момент времени T в начало координат. Найти уравнение *таутохроны* – множества начальных точек $\{x, y\}$, отвечающих одному и тому же значению времени скольжения T (Рис. 11.1). Пусть $h(s)$ – высота точки таутохроны, соответствующая длине $s(h)$ ее участка от начала координат до этой точки. Из закона сохранения энергии

$$\dot{s}(h(t))^2/2 + gh = E.$$

С учетом начального условия $\dot{s}(y) = 0$ имеем $\dot{s}^2/2 = g(y - h)$. Интегрирование путем разделения переменных дает

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{s(y)} \frac{ds}{\sqrt{y - h(s)}}.$$

Вводя обратную к $h(s)$ функцию $\eta(h)$, произведем под интегралом замену переменной

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^y \frac{d\eta/dh}{\sqrt{y-h}} dh = \sqrt{\frac{\pi}{2g}} {}^{1/2}D_y \eta(y),$$

сразу приводящую к полупроизводной Капуто. Чтобы завершить решение задачи, надо найти из этого уравнения функцию $s = \eta(y)$, обратить ее, $y = h(s)$, и выразить s через переменные x и y , но мы не будем продолжать далее. Нашей целью было показать, как в процессе решения известнейшей механической задачи возникают дробные производные.

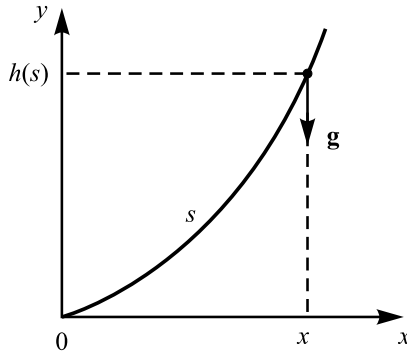


Рис. 11.1: К задаче о таутохроне.

11.2 Обратные задачи механики

В классической механике обратная задача – определение потенциала взаимодействия по измеряемым характеристикам движения – также может привести к дробно-дифференциальным уравнениям. Заглянем в §12 «Механики» Ландау и Лифшица [1], посвященный определению потенциальной энергии $U(x)$ по известной зависимости периода T одномерных колебаний от энергии E (Рис. 11.2). Задача сводится к решению интегрального уравнения

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^{X(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (11.2.1)$$

где $X(E)$ есть корень уравнения $U(x) = E$ (для простоты считаем потенциал четной функцией, монотонно возрастающей по мере удаления от

начала координат). Переходя к интегрированию по переменной U , получим дробно-дифференциальное уравнение

$$T(E) = 2\sqrt{2m} \int_0^E \frac{dX(U)}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} = 2\sqrt{2m\pi} {}_0^{1/2}D_E X(E),$$

интегрирование которого приводит к формуле (12.2) на с. 43 упомянутой «Механики»:

$$X(U) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2m}} \int_0^U \frac{T(E)dE}{\sqrt{U-E}}.$$

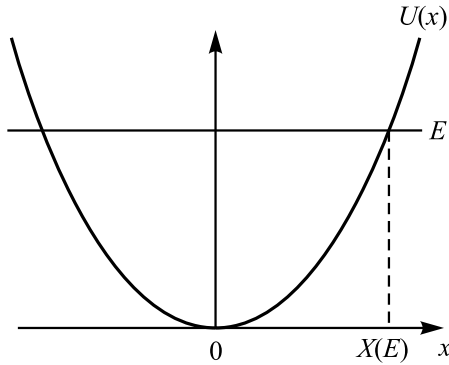


Рис. 11.2: К выводу уравнения (11.2.1).

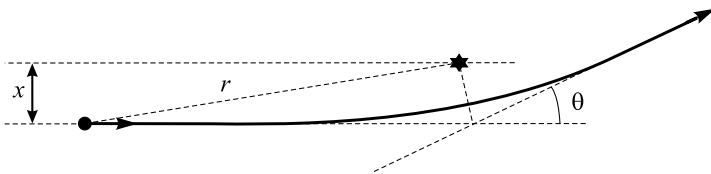


Рис. 11.3: К выводу формулы (11.2.2).

Другая обратная задача механики – определение потенциала взаимодействия из экспериментальных данных по рассеянию частиц с заданной энергией E – связана с решением интегрального уравнения [2] (см. §11.6 книги [3]). Проще всего эта задача формулируется в малоугловом приближении. Пусть потенциальная энергия частицы в поле рассеивающего центра $U(r) < 0$, монотонно возрастает по мере удаления от него

и исчезает на бесконечности: $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда связь между углом рассеяния θ и прицельным параметром x выражается формулой [1]

$$\theta(x) = \frac{x}{E} \int_x^\infty \frac{dU}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \quad (11.2.2)$$

Формула эта представляет собой правостороннюю полупроизводную Капуто по переменной x^2 :

$$\Theta(x) \equiv \frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{E} \int_{x^2}^\infty \frac{dU}{dr^2} \frac{dr^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{E} {}^{1/2}D_\infty U(x^2).$$

Обращение этого соотношения дает полуинтеграл

$$U(r) = \frac{E}{\sqrt{\pi}} r^2 I_\infty^{1/2} \Theta(r^2) = \frac{2E}{\pi} \int_r^\infty \frac{\theta(x) dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad (11.2.3)$$

совпадающий с формулой (11.16) книги Ю. Павленко [3]. Находя из уравнения

$$\frac{1}{2} \frac{dx^2}{d \cos \theta} = \left[\frac{d\sigma}{d\Omega} \right]_{\text{ЭКСП}}$$

функцию $x(\theta)$, обращая ее и подставляя в формулу (11.2.3), получаем искомую функцию $U(r)$.

11.3 Пластина в вязкой жидкости

По горизонтальной поверхности $z = 0$ вязкой несжимаемой жидкости по заданному закону $V(t)$ вдоль оси Ox движется больших размеров пластина, увлекая за собой слой жидкости (Рис. 11.4). Движение жидкости описывается уравнением Навье-Стокса

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad 0 < t < \infty, \quad -\infty < z < 0.$$

Здесь ρ – плотность жидкости, η – ее вязкость, $v(z, t)$ – скорость жидкости вдоль оси Ox на глубине $z < 0$ в момент t .

Предположив, что в далеком прошлом жидкость покоилась, так что интегралы Фурье

$$\tilde{v}(z, \omega) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} v(z, t) dt$$

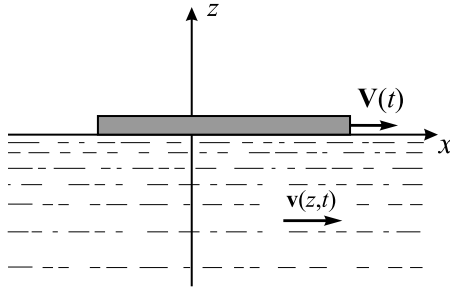


Рис. 11.4: К задаче о пластине на поверхности вязкой жидкости.

сходятся при всех z , и что на бесконечной глубине жидкость все время покоится, для трансформанты Фурье получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(-i\omega)\rho \tilde{v}(z, \omega) = \eta \frac{d^2 \tilde{v}(z, \omega)}{dz^2}$$

с граничными условиями

$$\tilde{v}(0, \omega) = \tilde{V}(\omega), \quad \tilde{v}(-\infty, \omega) = 0.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение имеет вид

$$\tilde{v}(z, \omega) = \hat{V}(\omega) \exp\left(\sqrt{-i\omega\rho/\eta}z\right).$$

Дифференцируя его по z и вводя сдвиговое напряжение (силу трения, действующую на единицу площади плоскости) $\sigma(z, t) = \eta \partial v(z, t) / \partial z$, получим:

$$\tilde{\sigma}(z, \omega) = \eta d\tilde{v}(z, \omega) / dz = (-i\omega)^{1/2} \sqrt{\eta\rho} \tilde{v}(z, \omega).$$

Это означает, что

$$\sigma(z, t) = \sqrt{\eta\rho} \int_{-\infty}^t \Phi_{1/2}(t - \tau) \frac{\partial v(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sqrt{\eta\rho} \infty v_t^{(1/2)}(z, t) \quad (11.3.1)$$

(в такой постановке производные Капуто и Римана-Лиувилля совпадают).

Физическая интерпретация этого результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени t в точке (x, z) напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя (x', z) , где они находились, скажем, в момент $t' < t$. В силу трансляционной инвариантности решения относительно x ,

такое же распределение скоростей в этот момент (t') имело место и в точке наблюдения (x, z). Это и есть простейший механизм эрдитарности – «механическая» память.

Пусть теперь к этой пластине массой m и площадью S приложена постоянная по направлению и переменная по величине горизонтальная сила $F(t)$, а сама скорость пластины $V(t)$ подлежит определению. Она удовлетворяет уравнению движения, содержащему обе силы: внешнюю $F(t)$ и внутреннюю – силу трения, в пренебрежении краевыми эффектами имеющую вид $-S\sigma(0, t) = -S\sqrt{\eta\rho} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau$:

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) - S\sqrt{\eta\rho} \int_{-\infty}^t V(\tau) d\tau.$$

В книге Подлюбногo [4] со ссылкой на работу [5] уравнение это названо уравнением Бэгли-Торвика, однако выведено оно было еще в середине прошлого века. (см. книгу [6], с. 114).

11.4 Дробно-дифференциальное уравнение Ньютона

Аналогичное уравнение для движения шара массой m и радиуса a под действием внешней силы $F(t)$ в вязкой среде (жидкости, газе, плазме) имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = F(t) + W(t), \quad (11.4.1)$$

где сила сопротивления $W(t)$ дается формулой Буссинеска:

$$W(t) = -6\pi\eta a V(t) - \frac{2}{3}\pi\rho a^3 \frac{dV(t)}{dt} - 6\pi\eta a^2 \sqrt{\frac{\rho}{\pi\eta}} \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \frac{dV(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (11.4.2)$$

Первый член здесь представляет формулу Стокса, второй – инерционную составляющую сопротивления, соответствующую наличию присоединенной массы шара, третий пропорционален дробной производной порядка $1/2$ [7]. Подставляя (11.4.2) в (11.4.1), получаем уравнение движения. Если до начального момента $t = 0$ тело покоилось, нижний предел в последнем интеграле можно заменить нулем и записать это уравнение с использованием дробной полупроизводной Капуто:

$$\left(m + \frac{2}{3}\pi\rho a^3\right) \frac{dV(t)}{dt} + 6\pi a^2 \sqrt{\rho\eta} \, {}_0^{\beta}D_t V + 6\pi\eta a V(t) = F(t), \quad \beta = 1/2. \quad (11.4.3)$$

Как следует из тауберовой теоремы, главная асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть его решения $v(t) \equiv V^{\text{as}}(t)$ удовлетворяет укороченному уравнению с единственной производной дробного порядка

$$m_\beta {}_0^{\beta}D_t v + bv(t) = F(t), \quad (11.4.4)$$

где m_β , b и β – положительные постоянные. Заметим, что при $\beta \rightarrow 1$ уравнение (11.4.4) превращается в обычное ньютоново уравнение движения тела под действием активной силы $F(t)$ и силы сопротивления $-bv$.

11.5 Дробно-дифференциальное падение

В [8] рассматривается задача о падении тела в атмосфере, описываемое дробно-дифференциальным аналогом уравнения Ньютона

$$m_\beta {}_0^{\beta}D_t v + bv = mg.$$

Начав с простейшего случая – отсутствия силы сопротивления,

$$m_\beta {}_0^{\beta}D_t v = mg, \quad (11.5.1)$$

автор получает

$$v(t) = v_0 + \frac{mgt^\beta}{m_\beta \Gamma(1 + \beta)} \quad (11.5.2)$$

и

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{mgt^{\beta+1}}{m_\beta \Gamma(2 + \beta)}, \quad (11.5.3)$$

где v_0 – начальная скорость, x_0 – начальная координата. Видно, что при малых t ($t < 1$) дробная производная дает бóльшую скорость, чем первая ($t^\beta > t$ при $\beta < 1$), тогда как при больших – наоборот, скорость меньше, чем в классическом случае.

Полная энергия записывается в виде суммы

$$E_\beta = K_\beta + U, \quad (11.5.4)$$

кинетическая составляющая которой выражается через «импульс» обычным соотношением

$$K_\beta = \frac{p^2}{2m_\beta}. \quad (11.5.5)$$

Постоянная m_β не имеет размерности массы. Чтобы K_β имела размерность энергии, а импульс был пропорционален производной координаты по времени, были использованы выражения

$$p_\beta = m_\beta {}_0^\nu D_t x, \quad K_\beta = \frac{m_\beta}{2} [{}_0^\nu D_t x]^2. \quad (11.5.6)$$

Скорость изменения энергии, найденная с использованием формул (11.5.2)-(11.5.6) имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_\beta \mu v_0^2 t^{-\beta}}{[\Gamma(1 + \mu)]^2} + \frac{mgv_0}{\Gamma(1 + \mu)\Gamma(1 + \nu)} + \frac{m^2 g^2 t^\beta}{m_\beta \nu [\Gamma(\nu)]^2} - mgv, \quad (11.5.7)$$

где

$$\mu = \frac{1 - \beta}{2}, \quad \nu = \frac{1 + \beta}{2}.$$

Заметим, что кинетическая энергия тела возрастает, а скорость возрастания полной энергии тела не пропорциональна скорости его движения, за исключением случая, когда в начальный момент времени тело покоилось:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m^2 g^2}{m_\beta} \left[\frac{1}{\nu [\Gamma(\nu)]^2} - \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \right] t^\beta, \quad v_0 = 0.$$

При $\beta \rightarrow 1$ и $m_1 = m$ формулы (11.5.2), (11.5.3) и (11.5.7) переходят в хорошо известные выражения классической механики:

$$v(t) = v_0 + gt,$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

$$E = \frac{mv^2}{2} - mgx = \text{const.}$$

Учет силы сопротивления приводит к следующим выражениям для скорости и координаты падающего по дробно-дифференциальному закону тела:

$$v(t) = v_0 E_{\beta,1}(-b/m_\beta t^\beta) + \frac{mg}{m_\beta} t^\beta E_{\beta,1+\beta}(-b/m_\beta t^\beta),$$

и

$$x(t) = x_0 + v_0 t E_{\beta,2}(-b/m_\beta t^\beta) + \frac{mg}{m_\beta} t^{1+\beta} E_{\beta,2+\beta}(-b/m_\beta t^\beta).$$

Проанализировав эксперименты с падением шести человек с высоты 31 400 футов, автор статьи пришел к выводу, что дробно-дифференциальный подход при $\beta = 0,998$ и $m/m_\beta = 1,457$ не хуже описывает экспериментальные зависимости $x(t)$, чем классический. Причины этого автор не поясняет.

11.6 Дробно-дифференциальный осциллятор

Перейдя в уравнении (11.4.3) от скорости к координате, опустив стоксово слагаемое и добавив квазиупругую силу, получим уравнение

$$[D_t^2 + a {}_0^{\alpha}D_t + b]x(t) = f(t), \quad a, b > 0, \quad \alpha = 1 + \beta,$$

описывающее движение осциллятора, находящегося под действием упругой силы и силы трения дробного типа, характерной для вязкоупругих сред. Его функция Грина $G(t)$ выражается через функции типа Миттаг-Леффлера (9.9.3). В [9] найдено другое ее представление, более удобное для анализа:

$$G(t) = G_1(t) + G_2(t),$$

где

$$G_1(t) = Ce^{-\sigma t} \sin(\Omega t + \Phi),$$

$$G_2(t) = \frac{a \sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^{\alpha} e^{-rt} dr}{(r^2 + ar^{\alpha} \cos(\pi\alpha) + b)^2 + (ar^{\alpha} \sin(\pi\alpha))^2}.$$

Сравним получаемые при этом результаты с классическими ($\nu = 1$) [10]. При $a^2 - 4b > 0$ и $\nu \neq 1$ классическое экспоненциальное затухание дополняется более медленной компонентой степенного типа

$$G_2(t) \sim \frac{a \sin(\pi\alpha)}{\pi b^2} \Gamma(\alpha + 1) t^{-\alpha-1}, \quad t \rightarrow \infty,$$

порождаемой дробной производной.

При $a^2 - 4b < 0$ в классическом случае имеют место колебания с убывающей по экспоненциальному закону амплитудой. В случае осциллятора дробного типа доминирование степенной асимптотики на больших временах приводит к тому, что решение перестает быть знакопеременным: осциллятор совершает только конечное число колебаний, после чего монотонно приближается к точке равновесия $x = 0$ – справа, если $0 < \alpha < 1$, или слева, если $1 < \alpha < 2$ (Рис. 11.5). Максимальная скорость затухания наблюдается в классическом случае ($\alpha = 1$); по мере отклонения порядка производной от единицы затухание ослабевает, а при $\alpha = 0$ и $\alpha = 2$ исчезает вовсе: осциллятор становится гармоническим.

11.7 Жидкая капля в акустическом поле

В работе [14] дробное уравнение движения было использовано для анализа колебательного движения взвешенной капли в поле акустической волны. Отмечая, что в приближенном решении задачи ограничиваются

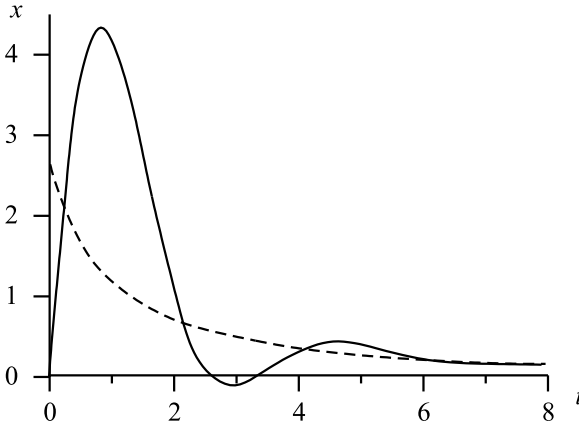


Рис. 11.5: Дробно-дифференциальный осциллятор (сплошная кривая) и его асимптотика (штриховая кривая).

лишь учетом вязкости и пренебрегают членами, учитывающими предысторию движения и присоединенную массу, и что это проявляется при сравнении результатов расчетов с экспериментальными данными [15, 16], авторы решают задачу с учетом влияния предыстории.

Полагая скорость газа

$$v_2(t) = v_0 + A\omega \sin \omega t,$$

и переходя к ускорению $W(t) = \dot{V}(t)$, они приводят уравнение движения к дробно-интегральному уравнению Вольтерры II рода относительно:

$$W(t) + \alpha^2 \int_0^t W(\tau) d\tau + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{W(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f(t)$$

с правой частью

$$f(t) = \alpha^2(v_0 + A\omega \sin \omega t) + A\omega^2 \cos \omega t + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{A\omega^2 \cos \omega \tau d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Постоянные α и β связаны с радиусом частицы a , ее плотностью ρ , плотностью и вязкостью газа ρ_0 и η соотношениями

$$\alpha^2 = \frac{9\eta}{2a^2(\rho + \rho_0/2)}, \quad \beta = \frac{9\sqrt{\eta\rho_0}}{4a(\rho + \rho_0/2)}.$$

Преобразование Лапласа

$$\hat{W}(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} W(t) dt$$

приводит к трансформанте вида

$$\hat{W}(\lambda) = \frac{\lambda \hat{f}(\lambda)}{\lambda + 2\beta\sqrt{\lambda} + \alpha^2} = A(\lambda) \hat{f}(\lambda),$$

где

$$A(\lambda) = \frac{\lambda_1 + \alpha^2}{\lambda_1 - \lambda_2} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} - \frac{\lambda + \alpha^2}{\lambda - \lambda_1} \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_1} - \frac{2\beta}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1 \sqrt{\lambda}}{\lambda - \lambda_1} - \frac{\lambda_2 \sqrt{\lambda}}{\lambda - \lambda_2} \right).$$

Здесь $\lambda_{1,2}$ – корни трехчлена $(\lambda + \alpha^2)^2 - 4\beta\lambda$, равные

$$\lambda_{1,2} = [\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}]^2.$$

Окончательное выражение для скорости частицы, неподвижной в начальный момент времени,

$$V(t) = \int_0^t W(\tau) d\tau,$$

имеет вид

$$V(t) = \left[\frac{1}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \left(\frac{e^{\lambda_1 t} \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda_1 t})}{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} - \frac{e^{\lambda_2 t} \operatorname{erf}(\sqrt{\lambda_2 t})}{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \right] f(t).$$

Это решение далее было использовано для оценки предельного радиуса капель, устойчивых к колебаниям. Капля сохраняет свою плотность за счет действия внутренних молекулярных сил. Внутреннее давление в ней p пропорционально поверхностному натяжению σ ,

$$p = 2\sigma/a.$$

За счет действия силы сопротивления при движении капли относительно газообразной среды она разрушается. Допуская, что сила сопротивления действует лишь на половину поверхности капли и ее численное значение определяется максимальными величинами перегрузок, из условия равенства действующих на каплю сил следует, что критический радиус капли a_{kp} дается соотношением

$$a_{kp} = \sqrt[4]{\frac{27}{8} \frac{\eta\sigma}{A\omega^2\rho^2}}. \quad (11.7.1)$$

Оценка эта удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. Так, при частоте 12 кГц и звуковом давлении 154 дБ формула (11.7.1) дает критический радиус капли 40 мкм, тогда как эксперимент показывал 55 мкм.

11.8 Вариационная задача с дробными производными

Общеизвестно, какую важную роль играют вариационные принципы в современной теоретической физике. Введение дробных производных позволяет еще более расширить сферу их применения, включив в рассмотрение неконсервативные системы. Это особенно необходимо в свете проблемы интерпретации динамических переменных переменных в дробно-дифференциальной механике.

Простейшая вариационная задача выглядит следующим образом. Пусть функция $L(q, u, v, t)$ непрерывна вместе со своими первыми и вторыми частными производными по всем своим аргументам, а $\{q(t)\}$ – множество функций на $[a, b]$ с непрерывными левыми и правыми производными порядков $\alpha \in (0, 1]$ и $\beta \in (0, 1]$ соответственно, удовлетворяющих граничным условиям

$$q(a) = q_a, \quad q(b) = q_b.$$

Требуется найти такую функцию из этого семейства, на которой функционал

$$S[q(\cdot)] = \int_a^b L(q(t), {}_a q_t^{(\alpha)}, {}_t q_b^{(\beta)}, t) dt, \quad {}_t q_b^{(\beta)} \equiv {}_t D_b^\beta q, \quad (11.8.1)$$

принимает экстремальное значение.

Обозначим через $\bar{q}(t)$ искомую функцию и представим $q(t)$ в виде

$$q(t) = \bar{q}(t) + \epsilon \eta(t), \quad (11.8.2)$$

где ϵ – постоянная, соответствующая выбранной функции семейства, а $\eta(t)$ – удовлетворяющая тем же условиям, что и $q(t)$, функция с нулевыми граничными условиями $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Выполняя дробное дифференцирование функции (11.8.2) и подставляя результат в выражение для функционала, получим его как функцию параметра ϵ :

$$S(\epsilon) = \int_a^b L(\bar{q} + \epsilon \eta, {}_a \bar{q}_t^{(\alpha)} + \epsilon {}_a \eta_t^{(\alpha)}, {}_t \bar{q}_b^{(\beta)} + \epsilon {}_t \eta_b^{(\beta)}, t) dt.$$

Необходимое условие экстремума этой функции

$$\frac{dS(\epsilon)}{d\epsilon} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} \eta + \frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha)}} {}_a \eta_t^{(\alpha)} + \frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta)}} {}_t \eta_b^{(\beta)} \right] dt = 0. \quad (11.8.3)$$

Интегрированием по частям преобразуем второй и третий интегралы к виду

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha)}} {}_a \eta_t^{(\alpha)} dt = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha)}} \right) {}_a D_t^\alpha \eta dt = \int_a^b {}_t D_b^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha)}} \right) \eta dt,$$

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta)}} {}_t \eta_b^{(\beta)} dt = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta)}} \right) {}_t D_b^\beta \eta dt = \int_a^b {}_a D_t^\beta \left(\frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta)}} \right) \eta dt.$$

Подставляя полученные выражения в (11.8.3),

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial q} + {}_t D_b^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha)}} \right) + {}_a D_t^\beta \left(\frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta)}} \right) \right] \eta dt = 0,$$

и учитывая произвол в выборе η , приходим к дробному аналогу уравнения Эйлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial y} + {}_t D_b^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha)}} \right) + {}_a D_t^\beta \left(\frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta)}} \right) = 0. \quad (11.8.4)$$

При $\alpha = \beta = 1$ оно превращается в обычное уравнение Эйлера-Лагранжа (напомним, что ${}_a D_t^1 = d/dt$, но ${}_t D_b^1 = -d/dt$).

Уравнение (11.8.4) легко обобщается на случай функции Лагранжа, зависящей от нескольких производных координаты,

$$\frac{\partial L}{\partial q} + \sum_{j=1}^n {}_t D_b^{\alpha_j} \left(\frac{\partial L}{\partial {}_a q_t^{(\alpha_j)}} \right) + \sum_{k=1}^m {}_a D_t^{\beta_k} \left(\frac{\partial L}{\partial {}_t q_b^{(\beta_k)}} \right) = 0.$$

В случае нескольких степеней свободы $q_j(t)$

$$S[q_j(\cdot)] = \int_a^b L \left(q_1, \dots, q_n; {}_a q_{1,t}^{(\alpha)}, \dots, {}_a q_{n,t}^{(\alpha)}, {}_t q_{1,b}^{(\beta)}, \dots, {}_t q_{n,b}^{(\beta)} \right),$$

уравнение Эйлера-Лагранжа принимает вид системы уравнений [10]

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} + {}_t D_b^\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial {}_a q_{j,x}^{(\alpha)}} \right) + {}_a D_t^\beta \left(\frac{\partial L}{\partial {}_t q_{j,b}^{(\beta)}} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.8.5)$$

11.9 Гамильтониан дискретной системы

Следуя работе [12], определим обобщенные импульсы рассматриваемой нами одномерной системы с лагранжианом, удовлетворяющим уравнению (11.8.5), соотношениями

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial_a q_t^{(\alpha)}}, \quad p_\beta = \frac{\partial L}{\partial_t q_b^{(\beta)}} \quad (11.9.1)$$

и введем гамильтониан

$$H = p_\alpha \, {}_a q_t^{(\alpha)} + p_\beta \, {}_t q_b^{(\beta)} - L.$$

Его полный дифференциал имеет вид

$$\begin{aligned} dH = & p_\alpha d_a q_t^{(\alpha)} + {}_a q_t^{(\alpha)} dp_\alpha + p_\beta d_t q_b^{(\beta)} + {}_t q_b^{(\beta)} dp_\beta - \\ & - \frac{\partial L}{\partial_a q_t^{(\alpha)}} \, {}_a q_t^{(\alpha)} - \frac{\partial L}{\partial_t q_b^{(\beta)}} \, {}_t q_b^{(\beta)} - \frac{\partial L}{\partial q} dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Подставляя сюда импульсы из (11.9.1) и пользуясь уравнением Эйлера – Лагранжа (11.8.5) предыдущего пункта, получим:

$$dH = {}_a q_t^{(\alpha)} dp_\alpha + {}_t q_b^{(\beta)} dp_\beta + \left[{}_a p_{\beta,t}^{(\beta)} + {}_t p_{\alpha,b}^{(\alpha)} \right] dq - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (11.9.2)$$

Сопоставляя этот результат с дифференциалом гамильтониана как функции переменных q, p_α, p_β, t

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} dp_\alpha + \frac{\partial H}{\partial p_\beta} dp_\beta + \frac{\partial H}{\partial t} dt,$$

приходим к следующей системе гамильтоновых уравнений дробно-дифференциального движения одномерной системы:

$$\begin{aligned} {}_a q_t^{(\alpha)} &= \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, & {}_t q_b^{(\beta)} &= \frac{\partial H}{\partial p_\beta}, \\ {}_a p_{\beta,t}^{(\beta)} + {}_t p_{\alpha,b}^{(\alpha)} &= \frac{\partial H}{\partial q}, & \frac{\partial H}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t}. \end{aligned}$$

Как видно из (11.9.2), дробно-дифференциальный гамильтониан не является интегралом движения даже в случае, если лагранжиан не зависит от времени явно.

Два примера приведены в [12]. Первый – одномерная система лагранжианом $L = [{}_0 q_t^{(\alpha)}]^2/2$, $0 \leq t \leq 1$. В этом случае обобщенные

импульсы $p_\alpha = {}_0q_t^{(\alpha)}$, $p_\beta = 0$, гамильтониан $H = p_\alpha^2/2$, канонические уравнения ${}_0q_t^{(\alpha)} = p_\alpha$, ${}_tq_1^{(\beta)} = 0$. Здесь β произвольно, поэтому окончательный результат можно записать в виде ${}_tD_1^{(\alpha)} {}_0q_t^{(\alpha)}$.

Второй пример: $L = [{}_0q_t^{(\alpha)}]^2/2 + [{}_tq_1^{(\alpha)}]^2/2 + {}_0q_t^{(\alpha)} {}_tq_1^{(\alpha)}$. Здесь $p_\alpha = {}_0q_t^{(\alpha)} + {}_tq_1^{(\beta)}$, $p_\beta = {}_tq_1^{(\beta)} + {}_0q_t^{(\alpha)}$, $H = p_\alpha^2/2 = p_\beta^2/2$ и уравнение движения имеет вид

$$\left({}_0D_t^{(\beta)} + {}_tD_1^{(\alpha)} \right) \left({}_0q_t^{(\alpha)} + {}_tq_1^{(\beta)} \right) = 0.$$

11.10 Гамильтонов формализм для поля

В [12] рассмотрен и случай непрерывной среды – классического поля $\phi(x, t)$, $a \leq t \leq b$, $c \leq x \leq d$. Его лагранжиан (точнее, плотность лагранжиана, но слово «плотность» мы для краткости опускаем) содержит в качестве аргументов частные производные от ϕ как по координатам, так и по времени:

$$L = L(\phi, {}_a\phi_t^{(\alpha)}, {}_t\phi_b^{(\beta)}, {}_c\phi_x^{(\alpha)}, {}_x\phi_d^{(\alpha)}).$$

Соответствующий ему гамильтониан имеет вид

$$H = \pi_\alpha {}_a\phi_t^{(\alpha)} + \pi_\beta {}_t\phi_b^{(\beta)} - L, \quad \pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial {}_a\phi_t^{(\alpha)}}, \quad \pi_\beta = \frac{\partial L}{\partial {}_t\phi_b^{(\beta)}}.$$

Беря от него полный дифференциал, подставляя плотности импульсов и используя уравнения Эйлера – Лагранжа, приходим к следующей системе канонических уравнений для классического поля дробно-дифференциального типа:

$$\begin{aligned} {}_a\phi_t^{(\alpha)} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}, & {}_t\phi_b^{(\beta)} &= \frac{\partial H}{\partial \pi_\beta}, & \frac{\partial L}{\partial t} &= -\frac{\partial H}{\partial t}, \\ \frac{\partial L}{\partial {}_c\phi_x^{(\alpha)}} &= -\frac{\partial H}{\partial {}_c\phi_x^{(\alpha)}}, & \frac{\partial L}{\partial {}_x\phi_d^{(\beta)}} &= -\frac{\partial H}{\partial {}_x\phi_d^{(\beta)}}, \\ {}_a\pi_{\beta,t}^{(\beta)} + {}_t\pi_{\alpha,b}^{(\alpha)} &= \frac{\partial H}{\partial \phi} + {}_cD_x^\alpha \frac{\partial H}{\partial {}_x\phi_d^{(\alpha)}} + {}_x D_d^\beta \frac{\partial H}{\partial {}_c\phi_x^{(\beta)}}. \end{aligned}$$

Взяв лагранжиан поля в виде

$$L = {}_a\phi_t^{(\alpha)} {}_a\phi_t^{*(\alpha)} - c_0^2 {}_c\phi_x^\alpha {}_c\phi_x^{*\alpha} - \mu_0^2 c_0^2 \phi \phi^*,$$

и найдя канонически сопряженные импульсы

$$\pi_a = {}_a\phi_t^{*(\alpha)}, \quad \pi_\beta = 0, \quad \pi_a^* = {}_a\phi_t^{(\alpha)}, \quad \pi_\beta^* = 0,$$

приходим к гамильтониану

$$H = \pi_\alpha {}_a\phi_t^{(\alpha)} + \pi_\alpha^* {}_a\phi_t^{*(\alpha)} - L = \pi_a \pi_a^* + c_0^2 {}_a\phi_x^{(\alpha)} {}_a\phi_x^{*(\alpha)} + \mu_0^2 c_0^2 \phi \phi^*.$$

Подстановка его в канонические уравнения приводит к уравнениям движения

$$\pi_\alpha^* = {}_a\phi_t^{(\alpha)}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_\beta} = 0, \quad \pi_\alpha = {}_a\phi_t^{*(\alpha)}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi_\beta^*} = 0,$$

$${}_tD_b^\alpha {}_a\phi_t^{*(\alpha)} - c_0^2 {}_x D_d^\beta {}_a\phi_x^{*(\beta)} = \mu_0^2 c_0^2 \phi^*$$

и

$${}_tD_b^\alpha {}_a\phi_t^{(\alpha)} - c_0^2 {}_x D_d^\beta {}_a\phi_x^{(\beta)} = \mu_0^2 c_0^2 \phi.$$

Два последних уравнения можно рассматривать как дробно-дифференциальные обобщения *уравнений Клейна-Гордона* [12].

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. – М.: Наука, 1988.
2. Vuck U. Rev. Mod. Phys. **46**, 369 (1974).
3. Павленко Ю. Г. Лекции по теоретической механике. – М.: Физматлит, 2002.
4. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – New York – London: Academic Press, 1999.
5. Bagley R. L., Torvik P. J. J. Appl. Mech. **51**, 294 (1984).
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. – М.: ГИТТЛ, 1954, с. 120.
7. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Гостехиздат, 1955.
8. Fa K. S. Physica A **350**, 199 (2005).
9. Schafer I., Kempfle S. Nonlinear Dynamics **38**, 61 (2004).
10. Gorenflo R. In: Proceedings of Second International Workshop «Transform Methods and Special Functions». – Varna, 1986, P. 589.

11. *Agrawal O. P.* J. Math. Anal. Appl. **272**, 368 (2002).
12. *Rabei E. M., Nawafleh K. I., Hijawi R. S., Muslih S. I., Baleanu D. J.* of Math. Analysis and Appl. **327**, 891 (2007).
13. *Рехвиашвили С. Ш.* Письма ЖТФ **30**, 33 (2004).
14. *Куц П. С., Гринчик Н. Н., Самсонок В. К.* Инженерно-физический журнал **69**, 753 (1996).
15. *Медников Е. П.* Акустическая коагуляция и осаждение аэрозолей. – М., 1968.
16. *Herrige R. A.* Chem. Eng. J. **11**, 673 (1976).

Глава 12

Вязкоупругость

12.1 Постановка задачи

В числе первых работ, в которых использовался аппарат дробных производных для описания вязкоупругости, следует указать работу А. Н. Герасимова [1], начинающуюся со ссылки на уравнение Больцмана. Далее он пишет:

«Экспериментальные исследования показывают, что особого внимания заслуживает частный вид этого уравнения, соответствующий только наследственной части напряжения,

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} G(\tau)\varepsilon(t - \tau)d\tau.$$

Не меньший интерес представляет также тот случай, когда напряжение $\sigma(t)$ зависит от всех предшествующих, надлежащим образом взвешенных значений скоростей деформации, но не деформаций. Для таких процессов деформирования зависимость между σ и ε

$$\sigma(t) = \int_0^{\infty} K(\tau)\dot{\varepsilon}(t - \tau)d\tau,$$

если ограничиваться только наследственной частью напряжения.»

Отметим, что именно это уравнение позволяет наглядно представить связь между напряжением и деформацией, если интерпретировать ядро $K(\tau)$ как реакцию (отклик) напряжения в момент времени t на ступенчатую деформацию единичной величины $1(t - \tau)$ в момент времени

$t - \tau$. Приближая плавную зависимость $\varepsilon(t)$ ступенчатой функцией, заданной скачкообразными приращениями $\Delta\varepsilon(t_j)$ в моменты времени t_j и пользуясь принципом линейности, получим интегральную сумму

$$\sigma(t) = \sum_{t_j < t} K(t - t_j) \Delta\varepsilon(t_j),$$

при $\Delta t_j \rightarrow 0$ принимающую вид

$$\sigma(t) = \int_0^t K(t - t') d\varepsilon(t') = \int_0^t K(\tau) \dot{\varepsilon}(t - \tau) d\tau.$$

Продолжим цитирование работы Герасимова (мне представляется это важным, потому что обычно приоритет в создании и развитии дробно-дифференциальной модели вязкоупругости приписывают авторам более поздних публикаций).

«Наследственная функция для некоторых материалов (волокнистой структуры) должна иметь вид

$$K(\tau) = \frac{A}{\tau^\alpha},$$

где постоянная $A > 0$ и α лежит между нулем и единицей. Положив еще

$$A = \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

где постоянная $\kappa_\alpha > 0$ зависит от свойств вещества и Γ есть эйлеров интеграл второго рода, получим

$$\sigma(t) = \frac{\kappa_\alpha}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^\infty \frac{\dot{\varepsilon}(t - \tau)}{\tau^\alpha} = \kappa_\alpha {}_0^{\alpha} D_t \varepsilon(t), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Это линейное соотношение между ε и σ при $\alpha = 0$ обращается в закон Гука, при $\alpha = 1$ – в закон Ньютона для внутреннего трения» [1].

Таким образом, вязкоупругая среда в определенном отношении занимает промежуточное положение между вязкой неупругой и абсолютно упругой невязкой материями,

$$\sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon(t), & \text{(закон Гука);} \\ \eta d\varepsilon(t)/dt, & \text{(закон Ньютона),} \end{cases} \quad (12.1.1)$$

и формула

$$\sigma(t) = \kappa_\alpha {}_0^{\alpha} D_t \varepsilon(t) \quad (12.1.2)$$

может рассматриваться как возможный способ интерполяции между ними. При $\alpha = 1$ она дает закон Ньютона, при $\alpha = 0$ – закон Гука. Конечно, это не единственный способ интерполяции, и тот факт, что степенной закон Нуттинга связан с решением уравнения с дробной производной, играет здесь решающую роль.

Дробно-дифференциальный подход, развитие которого в реологии связано с именами Скотта-Блэра, Бэгли и Торвика, Горенфло и Майнарди, Фридриха и Шисселя, Блюмена и Метцлера, Нонненмейкера и Глекля, Клафтера и Шлесингера, был успешно применен для описания реологического поведения органических стекол, эластомеров, полиуретана, полиизобутилена, монодисперсного полибутадиена, твердых аморфных полимеров в широкой области температур (см, например, работу [2] и библиографию в ней). Мы подробнее остановимся на дробно-дифференциальных моделях вязкоупругости, а затем рассмотрим пару стандартных для гидродинамики задач в простейшей модели такого типа.

12.2 Дробно-дифференциальная модель Максвелла

Важную эвристическую роль в реологии со времен Максвелла и Кельвина играют механические модели, составляемые из элементов двух типов – упругого элемента (пружины) и вязкого элемента (демпфера) (12.1.1).

Комбинируя эти элементы в различном порядке, подобно тому, как это делается с сопротивлениями, емкостями и индуктивностями в электрических цепях, можно получить различные схемы вязкоупругостей, приводящие к различным видам дифференциальных уравнений. Первые закон Гука для упругого тела и Ньютона для вязкой жидкости были объединены Максвеллом в одно конститутивное (определяющее) уравнение вязкоупругой среды.

$$\sigma(t) + \tau D_t \sigma(t) = E \tau D_t \varepsilon(t), \quad \tau > 0,$$

положившее начало современной феноменологии вязкоупругости. Уравнение это описывает поведение системы, состоящей из последовательно соединенных упругого (с модулем упругости E) и вязкого (с вязкостью $\eta = E\tau$) элементов (пружины и демпфера) (Рис. 12.1). Формальное обобщение этой модели на дробно-дифференциальный тип [3, 4] достигается заменами

$$\tau D_t \sigma \mapsto \tau^\alpha {}_0 D_t^\alpha \sigma(t), \quad \tau D_t \varepsilon \mapsto \tau^\beta {}_0 D_t^\beta \varepsilon(t); \quad 0 < \alpha, \beta < 1 :$$

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E\tau^\beta {}_0D_t^\beta \varepsilon(t), \quad (12.1.1)$$

Решение этого уравнения относительно напряжения $\sigma(t)$ при заданной зависимости деформации $\varepsilon(t)$ от времени ($\varepsilon(t)$ при $t < 0$) согласно (9.9.1) имеет вид

$$\sigma(t) = cG(t) + E\tau^\beta \int_0^t G(t-z) {}_0D_z^\beta \varepsilon(z) dz,$$

где

$$G(t) = (t^{\alpha-1}/\tau^\alpha) E_{\alpha,\alpha}(-t^\alpha/\tau^\alpha).$$

При $\alpha = \beta = 1$

$$G(t) = (1/\tau) E_{1,1}(-t/\tau) = (1/\tau) e^{-t/\tau}. \quad (12.2.1)$$

Если деформация $\varepsilon(t)$ в момент времени $t = 0$ скачкообразно меняется от нуля до величины ε_0 и остается затем постоянной, функция Грина (12.2.1) дает обычную (дебаевскую) релаксацию напряжения:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-t/\tau}.$$

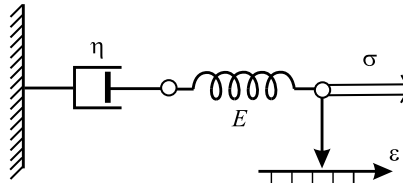


Рис. 12.1: Модель Максвелла.

12.3 Дробно-дифференциальное обобщение модели Кельвина

Другая популярная классическая модель – *модель Кельвина* – основана на параллельном соединении пружины и демпфера (Рис. 12.2). Ее конститутивное уравнение имеет вид

$$\sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \tau D_t \varepsilon(t)]$$

и обобщается на дробно-дифференциальную модель следующим образом [5]:

$$\sigma(t) = E \left[\tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t) + \tau^\beta {}_0D_t^\beta \varepsilon(t) \right], \quad 0 \leq \alpha < \beta \leq 1.$$

Частное решение этого уравнения

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E\tau^\beta} \int_0^t (t-z)^{\beta-1} E_{\beta-\alpha, \beta} [-\tau^{\alpha-\beta}(t-z)^{\beta-\alpha}] \sigma(z) dz.$$

Подстановка сюда $\alpha = 0$, $\beta = 1$ возвращает нас в рамки стандартной модели Кельвина, в которой скачкообразно (в момент времени $t = 0$) возникшее напряжение σ_0 вызывает деформацию

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-t/\tau}),$$

экспоненциально приближающуюся к гуковскому пределу σ_0/E , при $t \rightarrow \infty$.

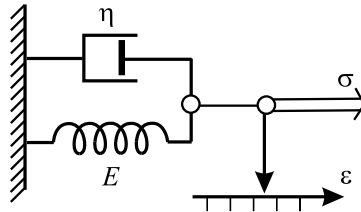


Рис. 12.2: Модель Кельвина.

12.4 Стандартная модель и ее обобщение

Качества обеих классических моделей удачно сочетаются в схеме Зенера, конститутивное уравнение в которой имеет симметричный относительно напряжений и деформаций вид:

$$\sigma(t) + \tau D_t \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta D_t \varepsilon(t)], \tag{12.4.1}$$

Эта трех-параметрическая модель носит название *стандартной модели*. Ее дробно-дифференциальное обобщение (*четырёх-параметрическая модель*) [6], описывается конститутивным уравнением с дробными производными одинакового порядка α (четвертый параметр):

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t)], \quad 0 < \alpha < 1. \tag{12.4.2}$$

Интерпретируя параметры τ и θ как времена температурных релаксаций при постоянном напряжении и постоянной деформации соответственно, а E как изотермический модуль, Зенер дал термодинамическое

обоснование стандартной модели в рамках теории термоупругости твердых тел (металлов) [7]. Два основных уравнения термоупругости связывают отклонение температуры δT от ее равновесного значения с напряжением и деформацией. Первое из них связано с тепловым расширением тела

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma + \lambda\delta T \quad (12.4.3)$$

(λ – линейный коэффициент теплового расширения). Второе отражает две причины изменения температуры: термодиффузию (температурная релаксация)

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{diff}} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon}\delta T, \quad (12.4.4)$$

и адиабатическое изменение деформации

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{adiab}} = -\gamma\frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $\gamma = (\partial T/\partial \varepsilon)_{\text{adiab}}$. В результате получаем:

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right) = \left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{diff}} + \left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{\text{adiab}} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon}\delta T - \gamma\frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (12.4.5)$$

Полагая $1 + \lambda\gamma = \tau_\sigma/\tau_\varepsilon$ и исключая из уравнений (12.4.3) и (12.4.4) член с изменением температуры δT , Зенер и пришел к уравнению (12.4.2).

Заменяя уравнение (12.4.4) дробно-дифференциальным уравнением субдиффузионной релаксации

$${}_0D_t^\alpha \delta T = -\frac{1}{\tau^\alpha}\delta T, \quad 0 < \alpha < 1,$$

Ф. Майнарди получил вместо (12.4.5) уравнение

$${}_0D_t^\alpha \delta T = -\frac{1}{\tau^\alpha}\delta T - \gamma {}_0D_t^\alpha \varepsilon,$$

что и привело к дробно-дифференциальному обобщению стандартной модели (12.4.2), в котором использовано соотношение

$$1 + \lambda\gamma = (\theta/\tau)^\alpha.$$

Уравнение типа (12.4.2) вместе с вытекающими из него функциями релаксации и ползучести, впервые предложено Капуто и Майнарди в 1971 г с использованием дробных производных Капуто [6, 8] как эмпирическая модель, позволяющая более аккуратно воспроизвести данные эксперимента. Функция Миттаг-Леффлера была предложена Гроссом в 1947 году в качестве уточнения степенной функции при аппроксимации экспериментальных данных по функции ползучести [9].

12.5 Модель Бэгли-Торвика

Продолжив развитие дробно-дифференциальной феноменологии за пределами описанного выше обобщения стандартной модели, Бэгли и Торвик взяли уравнение с различными порядками дробных производных деформации и напряжения:

$$\sigma(t) + \tau^\beta {}_0D_t^\beta \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t)]. \quad (12.5.1)$$

Следуя работе [10], воспользуемся преобразованием Лапласа с мнимым параметром $\lambda = i\omega$:

$$\hat{f}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

В результате такого преобразования получим:

$$\hat{\sigma}(i\omega) = \hat{E}(i\omega) \hat{\varepsilon}(i\omega),$$

где

$$\hat{E}(i\omega) = \frac{1 + (i\omega\theta)^\alpha}{1 + (i\omega\tau)^\beta} E$$

– комплексный модуль. При очень низких частотах $\hat{E}(i\omega) \rightarrow E$ и материал ведет себя как абсолютно упругая, идеальная резина. При высоких частотах трансформанта $\hat{E}(i\omega) \sim (\theta^\alpha/\tau^\beta)(i\omega)^{\alpha-\beta}$ имеет конечный предел только в случае $\alpha = \beta$, и тот же самый материал ведет себя подобно стеклу. Наличие такой переходной области подтверждается экспериментальными данными, приведенными в [10].

Параметры модели должны быть вещественными, но и при этом они не могут быть произвольными: основанные на этом конститутивном уравнении вычисления должны давать неотрицательную внутреннюю работу и неотрицательную скорость диссипации энергии. Чтобы установить вытекающие отсюда *термодинамические ограничения* на параметры модели, Бэгли и Торвик рассмотрели синусоидальную деформацию

$$\varepsilon(t) = \sin(\omega_0 t),$$

производящую напряжение

$$\sigma(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t).$$

Внутренняя работа, совершаемая в единице объема в единицу времени, дается выражением:

$$\sigma(t)\dot{\varepsilon}(t) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t) \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos^2(\omega_0 t). \quad (12.5.2)$$

При постоянной температуре это выражение эквивалентно термодинамическому соотношению

$$\dot{p} = \dot{\Psi} + \dot{\epsilon}, \quad (12.5.3)$$

утверждающему, что скорость производства механической работы внутренними силами \dot{p} равна скорости приращения свободной энергии $\dot{\Psi}$ плюс скорость диссипации энергии $\dot{\epsilon}$. Сопоставление этих двух уравнений и позволяет прояснить ситуацию с термодинамическими ограничениями на параметры модели. Действительно, чтобы гарантировать неотрицательность скорости диссипации энергии $\dot{\epsilon} \geq 0$, необходимо потребовать неотрицательности B . В свою очередь, для неотрицательности B достаточно, чтобы для всех частот выполнялось неравенство

$$\text{Im } \widehat{E}(i\omega) \geq 0, \quad 0 < \omega < \infty.$$

Аналогичным образом налагается ограничение неотрицательности внутренней работы: проинтегрировав уравнения (12.5.2) и (12.5.3) по времени и учитывая неотрицательность B , достаточно потребовать неотрицательности A , чтобы гарантировать неотрицательность работе внутренних сил. Неотрицательность A достигается условием

$$\text{Re } \widehat{E}(i\omega) \geq 0, \quad 0 < \omega < \infty.$$

Разлагая комплексный модуль на вещественную и мнимую части и используя приведенные выше ограничения на них, авторы [10] получают следующие ограничения на параметры модели:

$$1) E \geq 0, \quad 2) \alpha = \beta, \quad 3) \theta \geq \tau. \quad (12.5.3)$$

Ограничения эти гарантируют термодинамическую согласованность дробно-дифференциальной модели вязкоупругости и образуют основу для дальнейшего развития семейства таких моделей.

12.6 Петля гистерезиса

Выше мы видели, что термодинамические ограничения свели 5-параметрическую модель к 4-параметрической с конститутивным уравнением

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = E [\varepsilon(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t)]. \quad (12.6.1)$$

Разложим напряжение $\sigma(t)$ на две составляющих,

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t),$$

определяемых уравнениями

$$\sigma_0(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_0(t) = E\varepsilon(t), \quad (12.6.2)$$

и

$$\sigma_1(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_1(t) = E\theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t). \quad (12.6.3)$$

Поддействовав на обе части уравнения (12.6.2) оператором $\theta^\alpha {}_0D_t^\alpha$ и сопоставив результат с уравнением (12.6.3), можно увидеть, что введенные компоненты связаны соотношением

$$\sigma_1(t) = \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_0(t),$$

так что результирующее напряжение полностью определяется инициирующей компонентой $\sigma_0(t)$:

$$\sigma(t) = \sigma_0(t) + \theta^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma_0(t). \quad (12.6.4)$$

Пусть эта компонента, равная нулю до момента времени $t = 0$, далее изменяется по синусоиде с частотой ω_0 :

$$\sigma_0(t) = 1(t)\sigma_0 \sin(\omega_0 t).$$

Подставляя это выражение в формулу (12.6.4), получим

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & \sigma_0 \sin(\omega_0 t) + \\ & + \frac{\sigma_0 \omega_0 \theta^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\cos(\omega_0 t) \int_0^t \cos(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz + \sin(\omega_0 t) \int_0^t \sin(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz \right). \end{aligned}$$

Аналогичным образом, из уравнения (12.6.2) находим:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & \frac{\sigma_0}{E} \sin(\omega_0 t) + \\ & + \frac{\sigma_0 \omega_0 \tau^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)E_0} \left(\cos(\omega_0 t) \int_0^t \cos(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz + \sin(\omega_0 t) \int_0^t \sin(\omega_0 z) z^{-\alpha} dz \right). \end{aligned}$$

В окрестности начального момента эти функции возрастают по степенному закону с показателем $1 - \alpha$,

$$\sigma(t) \sim \frac{\sigma_0 \omega_0 \theta^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)E} t^{1-\alpha}, \quad \varepsilon(t) \sim \frac{\sigma_0 \omega_0 \tau^\alpha}{\Gamma(2-\alpha)E} t^{1-\alpha}, \quad t \rightarrow 0,$$

в асимптотике больших времен превращаются в гармонические колебания с заданной частотой ω_0 :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left\{ \left[1 + (\omega_0 \theta)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \sin(\omega_0 t) + \left[(\omega_0 \theta)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \cos(\omega_0 t) \right\},$$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_0} \left\{ \left[1 + (\omega_0 \tau)^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \sin(\omega_0 t) + \left[(\omega_0 \tau)^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right] \cos(\omega_0 t) \right\}.$$

Петля гистерезиса при этом становится эллиптической, а тангенс угла потерь дается выражением

$$\eta = \operatorname{tg}(\varphi_\sigma - \varphi_\varepsilon),$$

где

$$\varphi_\sigma = \operatorname{arctg} \left(\frac{(\omega_0 \theta)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + (\omega_0 \theta)^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \right)$$

и

$$\varphi_\varepsilon = \operatorname{arctg} \left(\frac{(\omega_0 \tau)^\alpha \sin(\alpha\pi/2)}{1 + (\omega_0 \tau)^\alpha \cos(\alpha\pi/2)} \right).$$

Пользуясь известной тригонометрической формулой, получаем:

$$\eta = \frac{\omega_0^\alpha (\theta^\alpha - \tau^\alpha) \sin(\alpha\pi/2)}{1 + \omega_0^\alpha (\theta^\alpha + \tau^\alpha) \cos(\alpha\pi/2) + \omega_0^{2\alpha} (\tau\theta)^\alpha}.$$

Из термодинамического ограничения следует, что потери положительны при любой частоте.

Дальнейшее развитие дробно-дифференциального направления в реологии связано с изучением многопараметрических моделей, конститутивные уравнения которых имеют вид

$$\sigma(t) + \sum_{j=1}^m \tau_j^{\nu_j} {}_0 D_t^{\nu_j} \sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^m \theta_k^{\mu_k} {}_0 D_t^{\mu_k} \varepsilon(t) \right].$$

12.7 Модель Работнова

В основу своей модели наследственной механики твердых тел [11] Ю. Н. Работнов положил определяющее уравнение

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t \mathcal{D}_\alpha(-\beta, t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (12.7.1)$$

где $\alpha \in (-1, 0]$, $\beta \neq 0$, а функция \mathcal{D}_α задается степенным рядом

$$\mathcal{D}_\alpha(\beta, x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n x^{n(\alpha+1)}}{\Gamma((n+1)(1+\alpha))}. \quad (12.7.2)$$

Подставляя (12.7.2) в (12.7.1) и пользуясь формулой дробного интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E \left[\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^{n+1}}{\Gamma[(\alpha+1)(n+1)]} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-(\alpha+1)(n+1)}} \right] = \\ &= E \left[\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) \right] = \\ &= E \left[\varepsilon(t) + {}_0D_t^{-(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right]. \end{aligned} \quad (12.7.3)$$

Следуя работе [12], применим к обеим частям этого равенства оператор ${}_0D_t^{\alpha+1}$:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{\alpha+1} \sigma(t) &= E \left[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right] = \\ &= E \left[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right] = \\ &= E \left[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t) - \beta \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) \right]. \end{aligned}$$

Найдя из последнего равенства

$$E\beta \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) = E[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t)] - {}_0D_t^{\alpha+1} \sigma(t)$$

и подставив это вместо последнего слагаемого в (12.7.3), приходим к уравнению

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + (E/\beta)[{}_0D_t^{\alpha+1} \varepsilon(t) - \beta \varepsilon(t)] - (1/\beta) {}_0D_t^{\alpha+1} \sigma(t),$$

которое после элементарных преобразований принимает вид

$$\sigma(t) + \tau {}_0D_t^{\rho} \sigma(t) = \tau E {}_0D_t^{\rho} \varepsilon(t),$$

где $\tau = 1/\beta$, а $\rho = \alpha + 1$. Таким образом, модель Работнова является частным случаем 4-параметрической модели Бэгли-Торвика. При $\alpha = 0$ она совпадает с определяющим уравнением Максвелла.

12.8 Составные механические модели

Естественно поставить вопрос: можно ли с помощью стандартных элементов двух типов (упругого и вязкого) построить вязкоупругую модель дробно-дифференциального типа?

Такая модель была построена Гроссом и Марвином для $\alpha = 1/2$ (см. [13]) по аналогии с ее электротехническим прообразом, изложенным в книге [14], и обобщена Шисселем и Блюеном на произвольное $\alpha \in (0, 1)$ [15]. Она представляет собой структуру лестничного типа, составленную из бесконечной последовательности элементов с выбранными определенным образом параметрами (см. рис. 12.3.).

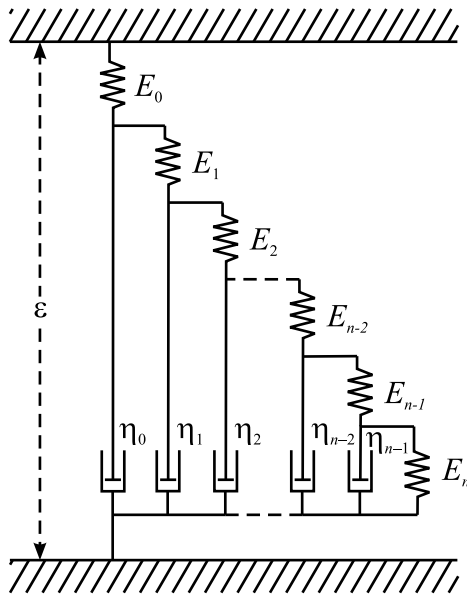


Рис. 12.3: Модель Гросса-Марвина [13].

Обозначим через ε_k^e и ε_k^d удлинение k -й пружины (с модулем упругости E_k) и смещение k -го демфера (с вязкостью η_k) соответственно. Аналогичные обозначения введем для соответствующих компонент напряжения. Подобно электротехническим, механические цепи рассчитываются с использованием определенного набора правил (эти вопросы превосходно описаны в книге [16]). Перечислим их.

1. Аддитивность последовательных деформаций:

$$\varepsilon_k^d = \varepsilon_{k+1}^e + \varepsilon_{k+1}^d, \quad k = 0, 1, \dots, n - 2. \tag{12.8.1}$$

На верхнем конце

$$\varepsilon = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^d,$$

на нижнем

$$\varepsilon_{n-1}^d = \varepsilon_n^e.$$

2. Аддитивность параллельных напряжений:

$$\sigma_k^e = \sigma_{k+1}^e + \sigma_k^d, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12.8.2)$$

На конце лестницы

$$\sigma = \sigma_0^e.$$

3. Компоненты деформаций и напряжений связаны между собой соотношениями:

$$\varepsilon_k^e = \frac{1}{E_k} \sigma_k^e, \quad (12.8.3)$$

и

$$\sigma_k^d = \eta_k \frac{d\varepsilon_k^d}{dt}. \quad (12.8.4)$$

4. Предполагается, что

$$\varepsilon(t) = 0, \quad t \leq 0,$$

и

$$\sigma(t) = 0, \quad t \leq 0.$$

Подставляя (12.8.3) в (12.8.1) и переходя к трансформантам Лапласа, получим:

$$E_{k+1} \widehat{\varepsilon}_k^d(\lambda) = \widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) + E_{k+1} \widehat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \quad (12.8.5)$$

Аналогично, подставляя (12.8.4) в (12.8.2), приходим к уравнению

$$\widehat{\sigma}_k^e(\lambda) = \widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) + \lambda \eta_k \widehat{\varepsilon}_k^d(\lambda), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (12.8.6)$$

Разделив обе части уравнения (12.8.5) на $\widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda)$, подставив в него найденное из формулы (12.8.6) напряжение

$$\widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) = \widehat{\sigma}_{k+2}^e(\lambda) + \lambda \eta_{k+1} \widehat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda)$$

и произведя некоторые сокращения, представим результат в виде:

$$E_{k+1} \frac{\widehat{\varepsilon}_k^d(\lambda)}{\widehat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda)} = 1 + \frac{E_{k+1}}{\eta_{k+1}} \frac{1}{\lambda + \frac{1}{\eta_{k+1}} \frac{\widehat{\sigma}_{k+2}^e(\lambda)}{\widehat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda)}},$$

$$E_{n-1} \frac{\widehat{\varepsilon}_{n-2}^d(\lambda)}{\widehat{\sigma}_{n-1}^e(\lambda)} = 1 + \frac{E_{n-1}}{\eta_{n-1}} \frac{1}{\lambda + \frac{E_n}{\eta_{n-1}}}.$$

Многочратное повторение этой процедуры ведет к представлению отношения $\widehat{\varepsilon}(\lambda)/\widehat{\sigma}(\lambda)$ в виде цепной дроби [17]

$$E_0 \frac{\widehat{\varepsilon}(\lambda)}{\widehat{\sigma}(\lambda)} = 1 + \frac{\lambda^{-1} E_0 / \eta_0}{1 +} \frac{\lambda^{-1} E_1 / \eta_0}{1 +} \dots \frac{\lambda^{-1} E_{n-1} / \eta_{n-1}}{1 +} \frac{\lambda^{-1} E_n / \eta_{n-1}}{1}.$$

Сопоставляя полученное выражение с разложением

$$x(x+1)^{\alpha-1} = \frac{x}{1+} \frac{(1-\alpha)x}{1+} \frac{1 \cdot (0+\alpha)}{1 \cdot 2} \frac{1 \cdot (2-\alpha)}{2 \cdot 3} \frac{1 \cdot (1+\alpha)}{3 \cdot 4} \frac{1 \cdot (3-\alpha)}{4 \cdot 5} \dots,$$

можно увидеть, что при подходящем выборе параметров,

$$E_1 / \eta_0 = (1 - \alpha)c_0, \quad E_1 / \eta_1 = \frac{1 \cdot (0 + \alpha)}{1 \cdot 2} c_0, \quad \dots,$$

исследуемое отношение имеет предел

$$E_0 \frac{\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)} \Big|_{n \rightarrow \infty} = 1 + (c_0/\lambda)(c_0/\lambda + 1)^{\alpha-1}.$$

В асимптотике малых λ , соответствующих большим временам t ,

$$E_0 \frac{\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)} \sim (c_0/\lambda)^\alpha.$$

Во временной области этому соотношению соответствует выражение с дробной производной

$$\sigma(t) = \eta_0^\alpha E_0^{1-\alpha} {}_0D_t^\alpha \varepsilon(t).$$

Некоторое усложнение конструкции модели ведет к дробно-дифференциальному обобщению модели Максвелла

$$\sigma(t) + \tau^\alpha {}_0D_t^\alpha \sigma(t) = \tau^\beta E {}_0D_t^\beta \varepsilon(t).$$

Построения подобного сорта весьма любопытны и продолжаются в ряде работ, хотя их отчетливый формализм и отстраненность от физики явлений не позволяют принять их как физическую интерпретацию дробно-дифференциальной модели.

12.9 Теория Рауса

Физическое объяснение дробно-дифференциальному соотношению между деформацией и напряжением было дано на основе статистической теории Рауса для вязкоупругости растворов полимеров в ньютоновской жидкости. Разлагая скорость каждой из N молекул полимерной цепочки на скорость движения центра тяжести цепочки, совпадающую со скоростью течения жидкости, и относительную скорость, описывающую возвращение деформированной цепочки к равновесной форме, и выполняя необходимые вычисления, Раус получил для *сдвигового модуля* $\tilde{G}(\omega)$ выражение

$$\tilde{G}(\omega) = nkT \sum_{j=1}^N \frac{\tau_j^2 \omega^2}{1 + \tau_j^2 \omega^2} + i \left\{ \mu_s \omega + nkT \sum_{j=1}^N \frac{\tau_j \omega}{1 + \tau_j^2 \omega^2} \right\}. \quad (12.9.1)$$

Здесь T – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана, n – число молекул в единице объема раствора, и τ_j – характеристические времена релаксаций, имеющие (при $j < N/5$ и $\omega\tau_1 < N^2/250$) вид

$$\tau_j \simeq \frac{\tau_1}{j^2}, \quad (12.9.2)$$

$$\tau_1 \simeq \frac{6(\mu_0 - \mu_s)}{n\pi^2 kT}, \quad (12.9.3)$$

где μ_0 и μ_s – стационарные вязкости раствора и растворителя соответственно. Подставляя (12.9.2) в (12.9.1), приходим к выражению

$$\tilde{G}(\omega) \simeq i\mu_s \omega + nkT \sum_{j=1}^{[N/2]} [1 - ij^2/(\tau_1 \omega)]^{-1}.$$

Переходя от суммирования к интегрированию с использованием формулы

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{\infty} [1 - i(j\Delta x)^2] \Delta x = \int_0^{\infty} (1 - i\xi^2)^{-1} d\xi = i^{1/2} \pi/2$$

при $\Delta x = (\tau_1 \omega)^{-1/2}$ и $[N/5] \gg \tau_1 \omega \geq 25$, получаем:

$$\tilde{G}(\omega) \simeq i\mu_s \omega + nkT(\pi/2) \sqrt{i\tau_1 \omega} = i\mu_s \omega + \sqrt{(3/2)(\mu_0 - \mu_s)nkT} \sqrt{i\omega}.$$

Обратное преобразование Фурье соотношения

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{G}(\omega) \tilde{\varepsilon}(\omega)$$

и ведет к искомому результату:

$$\sigma(t) = \mu_s D_t \varepsilon(t) + \sqrt{(3/2)(\mu_0 - \mu_s)nkT} {}_0D_t^{1/2} \varepsilon(t).$$

Из найденного выражения видно, что напряжение в полимерном растворе складывается из двух частей, одна из которых характеризует растворитель (ньютоновскую жидкость), а вторая дает вклад полимерных цепочек, который зависит от их предыстории, а следовательно, и от предыстории всего течения. Теория Рауса дает форму этой зависимости, обеспечивая тем самым физическое обоснование применению дробных производных к описанию рассматриваемого процесса. Заметим, что при мгновенно (при $t = 0$) созданной постоянной деформации

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon_0, & t > 0 \end{cases}$$

ее производная при $t > 0$ равна нулю, тогда как полупроизводная отлична от нуля и спадает со временем по степенному закону:

$$\sigma(t) = \sqrt{(3/2\sqrt{\pi})(\mu_0 - \mu_s)nkT\varepsilon_0} t^{-1/2}.$$

Таким образом, расчет Рауса ведет к конститутивному уравнению с *полупроизводной*,

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 {}_0D_t^{1/2} \varepsilon(t),$$

представляющему собой частный случай модели Бэгли и Торвика. Эксперименты с многочисленными твердыми полимерами показали, однако, что существует широкий разброс значений α в интервале $(0, 1)$, объяснение которого требует более общей модели, чем полимерные молекулы в растворе. Мы остановимся на одной из работ, выполненных в этом направлении [15].

12.10 Динамический подход

Пусть A – динамическая переменная однородной динамической системы и $V(t)$ – внешнее поле, возмущающее равновесное состояние системы, после включения которого система начинает релаксацию – переход в равновесное состояние, соответствующее новым условиям. Гамильтониан такой системы имеет вид суммы невозмущенного гамильтониана и гамильтониана возмущения,

$$H = H_0 + H_{\text{int}},$$

который связан с потенциалом внешнего поля. Связь эта предполагается линейной с коэффициентом пропорциональности b , зависящем (как и сама динамическая переменная A) через обобщенные координаты и импульсы от времени:

$$H_{\text{int}} = -b(p(t), q(t))V(t).$$

Эволюция возмущенной системы описывается известной формулой Кубо:

$$\langle A(t) \rangle = \langle A(0) \rangle + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (12.10.1)$$

где G – запаздывающая функция Грина (термодинамическая корреляционная функция) системы,

$$G(t - t') = -1(t - t') \langle \{b(t'), A(t)\} \rangle_{\text{eq}} \equiv \langle \langle b(t') A(t) \rangle \rangle,$$

а $\{\dots\}$ – скобки Пуассона.

На основе этого формализма рассматривается система запутанных полимерных цепочек (клубочков) различной длины. Размеры их предполагаются много меньше макроскопических, но много больше размеров мономера. Под действием внешнего поля клубочки эти могут деформироваться, скользить, рваться, рекомбинировать. Пусть x_1 и x_2 – две точки такой цепочки, взятые в направлении натяжения. Расстояние между ними гораздо меньше длины участка цепочки, соединяющей эти точки. Разность этих длин называют запасенной длиной. Если одна из этих точек приходит в движение, то первым делом выпрямляется сам участок цепочки между этими точками, а затем уже приходит в движение другая точка. Диссипация энергии в соседних участках происходит с запаздыванием, вот это запаздывание и порождает закон демпфирования, содержащий дробную производную. Возмущение системы заключается в ее деформации, $V(t) = \varepsilon(t)$, а отклик системы – напряжение $\sigma(t)$ – представляется в виде суммы упругой (обратимой) $\sigma_e = E\varepsilon$ и неупругой (диссипативной, необратимой) $\sigma_d = A$ составляющих.

Автор [15] далее пишет: «Прямой расчет функции Грина для случайного потенциала очень труден. Поэтому мы заменим гамильтониан взаимодействия его усредненным значением»:

$$\bar{H}_{\text{int}}(p, q, t) = -\bar{b}(p, q)V(t).$$

Усреднение осуществляется по дискретизированному времени запаздывания n -го мономера nt_0 с распределением вероятностей

$$P(nt_0) = \frac{t_0 N_0}{(nt_0)^{\nu+1}}, \quad n > N = \theta/t_0, \quad N_0 = (\nu + 2)\theta^{\nu+2}, \quad 0 < \nu < 1.$$

и приводит к выражению

$$G(t-t') = \left\langle \left\langle \sum_{n=N}^{\infty} P(nt_0) b(t' - nt_0) \sigma_d(t) \right\rangle \right\rangle = N_0 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\langle \langle b(t' - nt_0) \sigma_d(t) \rangle \rangle}{t_0^\nu n^{\nu+1}}.$$

Далее автор пренебрегает термодинамическими корреляциями между $b(t')$ и $\sigma_d(t)$,

$$G(t-t') = \begin{cases} -N_0 \sum_{n=N}^{\infty} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \delta(t-t'-nt_0), & t > t', \\ 0, & t \leq t' \end{cases}$$

и находит трансформанту Фурье функции Грина:

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\omega) &= -N_0 \sum_{n=N}^{\infty} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \exp(-i\omega t_0 n) = \\ &= -N_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \exp(-i\omega t_0 n) - \sum_{n=1}^{N-1} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \exp(-i\omega t_0 n) \right]. \end{aligned} \quad (12.9.2)$$

Выполняя прямое и обратное преобразования Меллина функции $\exp(-i\omega t_0 n)$, $\omega > 0$, можно проверить тождество

$$\exp(-i\omega t_0 n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) (\omega t_0 n)^{-s} \exp(-is\pi/2) ds, \quad 0 < c < 1.$$

Подстановка его в формулу (12.9.2) с использованием теоремы о вычетах ведет к выражению

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\omega) &= -N_0 \Gamma(-\nu) \omega^\nu e^{i\nu\pi/2} - \\ &- N_0 \sum_{n=0}^{\infty} t_0^{n-\nu} \left[\zeta(1+\nu-n) - \sum_{m=1}^{N-1} m^{-n\nu-1+n} \right] [(-1)^n / n!] \omega^n e^{i\nu\pi/2}, \end{aligned}$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана,

$$\operatorname{res}_{z=-\nu} \zeta(1+z+\nu) = 1.$$

При $\omega < 0$ изменяется знак перед мнимой единицей.

В пределе при $t_0 \rightarrow 0$ все слагаемые в квадратных скобках исчезают за исключением первого ($n=0$), который находится с использованием эрмитова представления обобщенной дзета-функции $\zeta(\nu+1, \theta/t_0)$:

$$\lim_{t_0 \rightarrow 0} \tilde{G}(\omega) = -N_0 [\Gamma(-\nu)(i\omega)^\nu + (\nu\theta^\nu)^{-1}].$$

Подставляя этот результат в формулу Кубо (12.9.1), приходим к конститутивному уравнению

$$\langle \sigma_d \rangle = -N_0 \Gamma(-\nu) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^\nu \tilde{\varepsilon}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega - N_0 (\nu \theta^\nu) \varepsilon(t) = \eta_\nu {}_a D^\nu \varepsilon(t) + \xi_\nu \varepsilon(t),$$

$$\eta_\nu = -N_0 \Gamma(-\nu), \quad \xi_\nu = -N_0 (\nu \theta^\nu)^{-1},$$

содержащему дробную производную ν -го порядка.

12.11 Течение вязкоупругой среды

12.11.1 Плоское течение

Первой задачей, решенной Герасимовым в простейшей дробно-дифференциальной реологической модели с конститутивным уравнением

$$\sigma(t) = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \varepsilon(t),$$

была задача о течении вязкоупругой среды с указанными свойствами, заключенной между двумя параллельными плоскостями. Нижняя плоскость ($x = 0$) неподвижна, верхняя ($x = a$) движется в направлении оси ОУ по заданному закону $\varphi(t)$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Начальное и граничное условия для y -координаты жидкой частицы $y(x, t)$ имеют вид:

$$y(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad y(0, t) = 0, \quad y(a, t) = \varphi(t).$$

Выделим элементарный параллелепипед жидкости, ограниченный двумя горизонтальными гранями единичной площади с расстоянием dx между ними. Уравнение движения центра масс этого элемента имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости. Принимая во внимание, что

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \sigma = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \varepsilon = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \frac{\partial y}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \varepsilon) = \kappa_\alpha {}_0^\alpha D_t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

получаем уравнение движения в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = {}_0^\alpha D_t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad c_\alpha^2 = \frac{\rho}{\kappa_\alpha}.$$

Для решения этой задачи Герасимов использовал операционный метод Хэвисайда. Переход от функции $y(x, t)$ к ее изображению $\hat{y}(x, p)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению 2-го порядка

$$\frac{d^2 \hat{y}}{dx^2} = c_\alpha^2 p^{2-\alpha} \hat{y}$$

с граничными условиями

$$\hat{y}(0, p) = 0, \quad \hat{y}(a, p) = \hat{\varphi}(p).$$

Его решение имеет вид

$$\hat{y}(x, p) = \hat{K}(p) \hat{\varphi}(p),$$

где

$$\hat{K}(p) = \frac{\text{sh}(c_\alpha p^{1-\alpha/2} x)}{\text{sh}(c_\alpha p^{1-\alpha/2} a)}.$$

Обратное преобразование было выполнено для трех случаев.

1. Ньютонова жидкость ($\alpha = 1$):

$$y(x, t) = \frac{2}{(\pi c_1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \int_0^t \exp\left\{-\left(\frac{k\pi}{c_1 a}\right)^2 (t-\tau)\right\} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$0 \leq x < a.$$

2. Упругая среда ($\alpha = 0$):

$$y(x, t) = \frac{2}{c_0 a} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \int_0^t \sin\left\{\left(\frac{k\pi}{c_0 a}\right) (t-\tau)\right\} \varphi(\tau) d\tau,$$

$$0 \leq x < a.$$

3. Промежуточный случай – вязкоупругая среда с $\alpha = 1/2$.

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \int_0^t \dot{\phi}_n(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq x < a,$$

$$\phi_n(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{c_{1/2} a}\right) \frac{(-1)^k \tau^{3k/2}}{\Gamma(3k/2 + 1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Для равномерного движения верхней плоскости

$$\varphi(t) = vt, \quad v = \text{const} > 0$$

Герасимов нашел напряжение на верхней поверхности при произвольном α в виде двойного ряда:

$$\sigma(a, t) = \kappa c_{1/2} v \left\{ \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha/2)} t^{-\alpha/2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-(2k+2)c_{\alpha}a]^j}{j! \Gamma((1-j)(1-\alpha/2))} t^{-j(1-\alpha/2)-\alpha/2} \right\}.$$

При $t = 0$ оно обращается в бесконечность порядка $\alpha/2$: в вязкой жидкости нельзя мгновенно сообщить граничной плоскости $x = a$ конечную скорость, применяя усилие конечной величины.

12.11.2 Цилиндрическое течение

Вторая задача, решенная Герасимовым – движение вязкоупругой жидкости между коаксиальными цилиндрическими поверхностями $r_1 < r < r_2$, вращающимися по заданным законам $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$. Уравнение движения для углового смещения $\varphi(r, t)$ получено в виде

$$\rho r^3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \kappa \frac{\partial}{\partial r} \left[r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left({}^{\alpha} D_t \varphi(r, t) \right) \right], \quad r_1 \leq r \leq r_2.$$

Его решение должно удовлетворять начальным условиям

$$\varphi(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

и граничным условиям

$$\varphi(r_1, t) = \varphi_1(t), \quad \varphi(r_2, t) = \varphi_2(t),$$

выражающим прилипание частиц на стенках. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ в начальный момент времени $t = 0$ предполагаются равными нулю вместе со своими производными.

В частном случае, когда $r_2 - r_1 = \delta_0$ мало по сравнению с r_1 (подшипник скольжения),

$$\sigma(r, t) = \frac{\kappa r_1 r_2}{r \delta_0} {}^{\alpha} D_t \psi(t), \quad \psi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t),$$

напряжения на поверхностях даются выражениями

$$\sigma(r_1, t) = \frac{\kappa r_2}{\delta_0} {}^{\alpha} D_t \psi(t), \quad \sigma(r_2, t) = \frac{\kappa r_2}{\delta_0} {}^{\alpha} D_t \psi(t). \quad (12.11.1)$$

Заметим, что напряжение на внешней поверхности меньше напряжения на внутренней в r_2/r_1 раз. Причина этого чисто геометрическая:

по закону действия и противодействия обе силы должны быть равны, но распределены они по разным площадям, и концентрация силы (напряжение) должна быть выше на поверхности с меньшей площадью. При $\alpha = 1$ уравнение (12.11.1) дает закон Кулона – напряжение пропорционально относительной скорости вращения поверхностей; при $\alpha = 0$ оно превращается в закон Гука: напряжение пропорционально относительному смещению поверхностей. В случае гармонических колебаний поверхностей

$$\psi(t) = A \sin(\omega t)$$

напряжение тоже имеет гармонический вид

$$\sigma(r_1, t) = \frac{\kappa r_2}{\delta_0} A \sin\left(\omega t + \frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

со сдвигом фазы, зависящем от α . Напряжения в чисто упругой среде колеблются синфазно с движением поверхностей, в чисто вязкой среде сдвиг фаз составляет $\pi/2$.

12.12 Акустика термовязкой среды

12.12.1 Излучение звука

В §74 книги [19] рассматривается излучение звука бесконечным круглым цилиндром с переменной площадью его сечения $S(t)$. На расстоянии r от оси, много большем диаметра цилиндра и много меньшем длины волны, потенциал расходящейся в однородной среде волны определяется выражением

$$\varphi(r, t) = -\frac{c}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t') dt'}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}},$$

где c – скорость звука. В волновой зоне основную роль играет область значений $t - t' \sim r/c$, так что можно считать

$$(t - t')^2 - \frac{r^2}{c^2} \simeq 2\frac{r}{c} \left(t - t' - \frac{r}{c}\right).$$

В результате получаем потенциал

$$\varphi(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c}{2r}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\dot{S}(t') dt'}{\sqrt{t - r/c - t'}} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi r}} \Big|_{-\infty}^{1/2} S(t - r/c)$$

и скорость

$$v(r, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \simeq \frac{1}{2\pi\sqrt{2cr}} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{\ddot{S}(t')dt'}{\sqrt{t-r/c-t'}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi cr}} {}_{-\infty}^{3/2} S(t-r/c).$$

12.12.2 Поглощение звука

Важной задачей акустики является расчет прохождения звуковых волн с учетом поглощения и рассеяния их в среде. Известно, что амплитуда плоской волны, распространяющейся вдоль оси z , убывает за счет поглощения по экспоненциальному закону

$$A(z) = A(0)e^{-\gamma z},$$

где коэффициент поглощения γ зависит от частоты звуковой волны, $\gamma = \gamma(\omega)$. Стандартная форма соотношения между волновым числом (длиной волнового вектора) k , частотой и коэффициентом поглощения имеет вид

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i\gamma(\omega),$$

где $\gamma(\omega) = a_2\omega^2$ [19]. Эта квадратичная зависимость, однако, имеет место лишь в условиях малого поглощения, что фактически всегда справедливо для газов, но для других, более плотных сред, зависимость $\gamma(\omega)$ может оказаться отличной от квадратичной. В частности, в вязкой среде с очень высокой теплопроводностью коэффициент поглощения квадратично возрастает при низких частотах и приближается к постоянной величине при высоких:

$$\gamma(\omega) \sim \begin{cases} a_2\omega^2, & \omega \rightarrow 0, \\ a_0, & \omega \rightarrow \infty. \end{cases}$$

В работе [20] предложена более общая степенная аппроксимация, подкрепляемая рядом экспериментальных данных (п. 2.3.1, табл. 2.1):

$$\gamma(\omega) = a_\nu |\omega|^\nu, \nu \in [0, 2].$$

Объединим эти аппроксимации в единую формулу

$$\gamma(\omega) = a_0 + a_\nu |\omega|^\nu,$$

приводящую к соотношению

$$k = \frac{\omega}{c_0} + i[a_0 + a_\nu |\omega|^\nu].$$

Умножив обе части его на $-i\tilde{p}_\nu(k, \omega)$, где

$$\tilde{p}_\nu(k, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(kx - \omega t)} p_\nu(x, t),$$

– трансформанта Фурье (по обоим переменным) давления в звуковой волне, мы увидим образ Фурье уравнения в частных производных

$$\frac{\partial p_\nu}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{\partial p_\nu}{\partial t} - [a_0 + a_\nu (-\Delta_1)^{\nu/2}] p_\nu(x, t), \quad \Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Введя новые переменные $\tau = t - x/c_0$ и $f_\nu(x, \tau) = e^{a_0 x} p_\nu(x, \tau)$, приходим к одномерному дробно-дифференциальному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial f_\nu(x, \tau)}{\partial x} = -a_\nu (-\Delta_1)^{\nu/2} f_\nu(x, \tau).$$

Полагая источник звука находящимся в плоскости $x = 0$, запишем граничное условие в виде $f_\nu(0, \tau) = p_\nu(0, \tau) = p_0(\tau)$, тогда соответствующее ему решение выразится через одномерную симметричную устойчивую плотность $g_1(\tau; \nu)$ интегралом

$$p_\nu(x, \tau) = (ax)^{-1/\nu} e^{-a_0 x} \int_{-\infty}^{\infty} g_1\left((\tau - \tau')(ax)^{-1/\nu}; \nu\right) p_0(\tau') d\tau'.$$

В случае импульсного источника, или на большом расстоянии от источника ограниченной длительности решение принимает вид

$$p_\nu(x, \tau) = (ax)^{-1/\nu} e^{-a_0 x} g_1\left(\tau(ax)^{-1/\nu}; \nu\right) Q_0, \quad Q_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_0(\tau') d\tau'.$$

По мере распространения импульса его длительность растет пропорционально $x^{1/\nu}$, где x – пройденное волной расстояние, амплитуда же волны убывает пропорционально обратной величине, $x^{-1/\nu}$.

Литература

1. *Герасимов А. Н.* Прикладная математика и механика **12**, 251 (1948).
2. *Alcoutlabi M., Martinez-Vega J. J.* Journal of Materials Science **34**, 2361 (1999).
3. *Friedrich C.* Rheol. Acta **30**, 151 (1991).
4. *Nonnenmacher T. F.* Rheological Modelling: Thermodynamical and Statistical Approaches. Lecture Notes in Physics **381**, Ed. by Casas-Vazquez J., Jou D. – Berlin: Springer, 1991.
5. *Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T. F.* J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 6567 (1995).
6. *Caputo M., Mainardi F.* Pure and Applied Geophysics **91**, 134 (1971).
7. *Zener C.* Elasticity and Anelasticity of Metals. – Chicago: University of Chicago Press, 1948.
8. *Caputo M., Mainardi F.* Riv. Nuovo. Cimento (II) **1**, 161 (1971).
9. *Gross B. J.* Applied Phys. **18**, 212 (1947).
10. *Bagley R. L., Torvik P. J.* J. of Reology **30**, 133 (1986).
11. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977.
12. *Нарушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2000.
13. *Tschoegl N. W.* The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior. – Berlin: Springer, 1989.
14. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – New York: Academic Press, 1974.
15. *Shiessel H., Blumen A.* J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 5057 (1993).
16. *Гарднер М. Ф., Бэрнс Дж. Л.* Переходные процессы в линейных системах. – М.: ГИФМЛ, 1961.
17. *Хинчин А. Я.* Ценные дроби. – М.: Наука, Физматлит, 1973.
18. *Pfizenreiter T. Z.* Angew. Math. Mech. **84**, 284 (2004).
19. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988.
20. *Chen W.* Chin. Phys. Lett. **22**, 2601 (2005).

Глава 13

Диффузия в пористых средах

13.1 Два подхода

Широкое применение теория диффузии находит в геологических и геофизических задачах, где объектами моделирования являются процессы движения грунтовых вод, газа и нефти в нефтеносных слоях, радиоактивных и токсичных отходов производства в подземных хранилищах. Рассматривается распространение сохраняющейся химической субстанции через полностью или частично насыщенную водой геологическую формацию. Неоднородности формации проявляются в наличии разломов и трещин, линз и пор, заполненных другими минералами (кварцем, глиной, карбонатами). Сквозь эту среду, со всеми своими неоднородностями представляющую одну случайную реализацию некоторого статистического ансамбля сред, под действием силы тяжести и градиента давления движется диффундирующая субстанция, частицы которой обтекают непроницаемые включения, переносятся на большие расстояния подземными потоками, надолго застревают в порах и проницаемых включениях. Траектория каждой такой частицы представляется весьма нерегулярной линией, этакой нитью со множеством узелков в местах, где частица находилась долгое время и длинных ровных участков (пробегов), где она двигалась, подхваченная подземным потоком. Разумеется, пробеги эти не являются прямолинейными отрезками, равно как и узелки не являются точечными образованиями, но если, скажем, в первом приближении пренебречь отклонением пробегов от прямых отрезков, а узелков – от точек, то мы получим некоторые основания для обращения к модели СБНВ.

В простейшем варианте этой модели траектория каждой частицы на пространственно-временной диаграмме представляется в виде ломаной линии, каждый сегмент которой параллелен оси координат (бесконечно быстрое движение, «полет») или оси времен (пребывание в ловушке). Длины этих сегментов и времена пребывания независимы в простейшей модели: эти две функции суть все, что требуется знать для описания (в статистическом смысле) такого движения.

Обсуждая плотности распределения $\psi_T(t)$ случайных времен T пребывания в ловушках, авторы [1] начинают с утверждения, что существуют лишь две простые формулы для таких распределений – показательное

$$\psi_T(t) \propto e^{-\mu t}$$

и степенное,

$$\psi_T(t) \propto t^{-\omega-1}. \quad (13.1.1)$$

Конечно, тот факт, что эти функции легко дифференцировать и интегрировать, не может служить физическим основанием модели. Более существенным является то, что именно такой (степенной) вид имеет асимптотика распределения времени первого достижения заданной точки диффундирующей частицы, при этом $\omega = 1/2$. Аналогичный результат был получен для времени захвата кубической броуновской ловушкой [2].

Но не следует видеть в степенной функции (13.1.1) только следствие диффузионных процессов, хотя на этой основе построена целая теория релаксационных явлений, описываемых законом Кольрауша-Уильяма-Ватса.

Простой пример, данный в [1], показывает, что такой тип распределения возникает и в простейшей гидродинамической задаче – течение Пуазейля в круглой трубе. Рассмотрим отрезок трубы радиуса R длиной L . Профиль скорости имеет параболический вид

$$v(r) = v_0(1 - r^2/R^2), \quad 0 < r < R.$$

Частица с такой скоростью проходит данный отрезок за время

$$T = \frac{L}{v(r)} = \frac{L}{v_0}(1 - r^2/R^2)^{-1}.$$

Для частиц, для которых $T > t$,

$$P(T > t) = P\left(\frac{r^2}{R^2} > 1 - \frac{L}{v_0 t}\right) = \frac{L}{v_0 t},$$

и, следовательно,

$$\psi_T(t) = -\frac{dP(T > t)}{dt} = \frac{L}{v_0} t^{-1-\omega}, \quad \omega = 1.$$

Примеры, однако, не заменяют доказательства, да и вряд ли последнее может быть получено для таких систем, как геологические структуры. Но вот что, на мой взгляд, важно здесь: поскольку в рамках простейшей (с независимыми пробегами R и временами T пребывания в ловушках) модели СБНВ только две функции $\psi_R(r)$ и $\psi_T(t)$ полностью определяют процесс, то существование автомоделльной асимптотики возможно лишь в следующих четырех случаях:

$$\int_0^{\infty} r\psi_R(r)dr < \infty, \quad \int_0^{\infty} t\psi_T(t)dt < \infty;$$

$$\int_r^{\infty} \psi_R(r)dr \propto r^{-\alpha}, \quad \int_0^{\infty} t\psi_T(t)dt < \infty;$$

$$\int_0^{\infty} r\psi_R(r)dr < \infty, \quad \int_t^{\infty} \psi_T(t)dt \propto t^{-\omega};$$

$$\int_r^{\infty} \psi_R(r)dr \propto r^{-\alpha}, \quad \int_t^{\infty} \psi_T(t)dt \propto t^{-\omega}.$$

В первом случае асимптотическая часть решения СБНВ удовлетворяет обычному диффузионному уравнению, во втором – супердиффузионному с дробной степенью Лапласиана, в третьем – субдиффузионному с дробной производной по времени, и, наконец, в четвертом – дробно-дифференциальному по координатам и времени уравнению аномальной диффузии. Проблема, таким образом, сводится к вопросу: действительно ли данная ситуация удовлетворяет условию автомоделльности, хотя бы в качестве промежуточной асимптотики?

Наряду с этим (назовем его *первым*) подходом, в котором случайность приписывается частицам диффундирующей субстанции, сама же среда полагается однородной (ее материальные коэффициенты типа коэффициента диффузии не зависят от координат), существует и другой, более физический подход. В этом *втором* подходе случайность, точнее, нерегулярная неоднородность, приписывается среде, жидкость в которой движется детерминированным образом по случайно расположенным прихотливой формы каналам (модель случайной среды). За некоторым исключением, любая модель переноса в пористой среде может быть легко отнесена к тому или иному типу. Конкретизация же модели осуществляется свойствами и параметрами процесса блуждания в первом случае, и статистического ансамбля случайно-неоднородной среды – во втором.

13.2 Гранулированная пористость

В работе [3] предложен метод, позволяющий (в статистическом смысле) связать эти два типа описания. Рассмотрим полубесконечный цилиндр, заполненный гранулами, пустоты между которыми и создают эффект пористости: жидкость просачивается через пустоты. Повторно заполняя этот отрезок цилиндра гранулами мы будем получать различные пространственные распределения ω , каждому из которых будет соответствовать своя *функция пористости*

$$\varepsilon_\omega(x) = [S_{nop}(x)/S_{цил.л}]_\omega,$$

равная отношению площади не занятой гранулами части сечения цилиндра и площади полного сечения (Рис. 13.1). Множество $\Omega = \{\omega\}$ образует статистический ансамбль таких сред, а $\varepsilon_\omega(x) \in [0, 1]$ может рассматриваться как случайная реализация некоторого процесса.

Обозначив через $u_\omega(x,t)$ концентрацию диффундирующей жидкости в данной реализации среды $\omega \in \Omega$, запишем для нее диффузионное уравнение

$$\varepsilon_\omega(x) \frac{\partial u_\omega}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u_\omega}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (13.2.1)$$

с граничными условиями

$$u_\omega(0, t) = u_0 = \text{const}, \quad u_\omega(x, 0) = 0, \quad u_\omega(x, \infty) = 0.$$

Вывод этого уравнения основан на следующих соображениях. Согласно закону Фика количества жидкости, проходящей за время dt через поперечные сечения цилиндра $x = x_1$ и $x = x_2$, соответственно равны

$$dQ_1 = -K_\omega(x_1) \frac{\partial u_\omega(x_1, t)}{\partial x_1} S dt,$$

$$dQ_2 = -K_\omega(x_2) \frac{\partial u_\omega(x_2, t)}{\partial x_2} S dt.$$

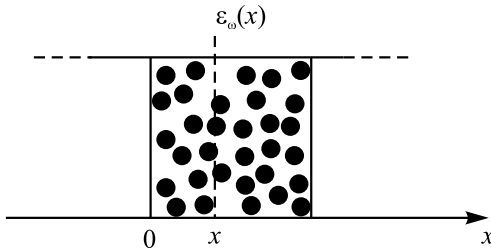


Рис. 13.1: Модель гранулированной пористости.

Изменение количества жидкости в слое (x_1, x_2) за время dt дается разностью

$$dQ_1 - dQ_2 = \left[K_\omega(x_2) \frac{\partial u_\omega(x_2, t)}{\partial x_2} - K_\omega(x_1) \frac{\partial u_\omega(x_1, t)}{\partial x_1} \right] S dt,$$

а за интервал времени (t_1, t_2) – интегралом

$$\Delta Q(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \left[K_\omega(x_2) \frac{\partial u_\omega(x_2, t)}{\partial x_2} - K_\omega(x_1) \frac{\partial u_\omega(x_1, t)}{\partial x_1} \right] S dt.$$

По закону сохранения массы (теореме непрерывности)

$$\Delta Q(t_1, t_2) = \int_{x_1}^{x_2} [u_\omega(x, t_2) - u_\omega(x, t_1)] \varepsilon_\omega(x) S dx.$$

Приравнивая эти выражения, полагая $(t_1, t_2) = (t, t + \delta t)$, $(x_1, x_2) = (x, x + \delta x)$ и устремляя $\delta t \rightarrow 0$, $\delta x \rightarrow 0$, приходим к уравнению

$$\varepsilon_\omega(x) \frac{\partial u_\omega}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_\omega(x) \frac{\partial u_\omega}{\partial x} \right).$$

При малых концентрациях жидкости K_ω можно заменить эффективным постоянным коэффициентом диффузии K , откуда и следует уравнение (13.2.1).

13.3 Телеграфная модель

Запишем теперь случайную пористость $\varepsilon_\omega(x)$ в виде суммы не зависящей от координат средней пористости $\bar{\varepsilon}$ и случайной флуктуации пористости $\tilde{\eta}_\omega(x)$:

$$\varepsilon_\omega(x) = \bar{\varepsilon} + \eta_\omega(x), \quad (13.3.1)$$

Уравнение (13.2.1) в этом случае примет вид

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial u_\omega}{\partial t} + \eta_\omega \frac{\partial u_\omega}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u_\omega}{\partial x^2}.$$

В [13] показано, что в результате просачивания жидкости через пористую среду происходит *самоусреднение*: на выходе из цилиндра длиной $L \gg 1 \gg r$ (r – размер гранул) экспериментатор наблюдает усредненную концентрацию u_ω , удовлетворяющую уравнению

$$\bar{\varepsilon} \frac{\partial \langle u_\omega \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \langle \eta_\omega u_\omega \rangle = K \frac{\partial^2 \langle u_\omega \rangle}{\partial x^2}. \quad (13.3.2)$$

Представим флуктуирующую компоненту пористости $\eta_\omega(x)$ в виде телеграфного процесса

$$\eta_\omega(x) = (-1)^{N(x)} A,$$

где $N(x)$ – пуассоновский процесс,

$$P(N(x) = k) = \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и A – не зависящая от него случайная величина с двумя равновероятными значениями $\pm a$:

$$\langle A \rangle = 0, \quad \langle A^2 \rangle = a^2.$$

В результате условного (при $A = a$) и безусловного усреднений получим:

$$\langle \eta_\omega(x) | A = a \rangle = a \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\mu x)^k}{k!} e^{-\mu x} = a e^{-2\mu x},$$

$$\langle \eta_\omega(x) \rangle = 0, \quad \langle \eta_\omega^2(x) \rangle = a^2.$$

Аналогичным образом, для корреляционной функции при $x_2 > x_1$ находим:

$$\begin{aligned} \langle \eta_\omega(x_1) \eta_\omega(x_2) \rangle &= \langle a(-1)^{N(x_1)} a(-1)^{N(x_2)} \rangle = \\ &= a^2 \langle (-1)^{2N(x_1) + N(x_2 - x_1)} \rangle = a^2 \langle (-1)^{N(x_2 - x_1)} \rangle = \\ &= a^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{[\mu(x_2 - x_1)]^k}{k!} e^{-\mu(x_2 - x_1)} = a^2 e^{-2\mu(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема о дифференцировании [4]:

Если $\phi_x[\eta_\omega(\cdot)]$ есть некоторый линейный функционал от марковского процесса $\eta_\omega(x')$, $x' < x$, с нулевым математическим ожиданием ($\langle \eta_\omega \rangle = 0$), то

$$\frac{d}{dx} \langle \eta_\omega(x) \phi_x[\eta_\omega(\cdot)] \rangle = \left\langle \eta_\omega(x) \frac{d}{dx} \phi_x[\eta_\omega(\cdot)] \right\rangle - 2\mu \langle \eta_\omega(x) \phi_x[\eta_\omega(\cdot)] \rangle. \quad (13.3.3)$$

13.4 Вывод дробно-дифференциального уравнения

Вернемся теперь к уравнению (13.3.2). Выполним преобразование Лапласа по времени,

$$\bar{\varepsilon} \lambda \hat{u}_\omega + \eta_\omega \lambda \hat{u}_\omega = K \frac{d^2 \hat{u}_\omega}{dx^2}, \quad \hat{u}_\omega(0) = \frac{u_0}{\lambda},$$

усредним его по $\omega \in \Omega$ и A :

$$\bar{\varepsilon}\lambda\langle\hat{u}_\omega\rangle + \lambda\langle\eta_\omega\tilde{u}_\omega\rangle = K\frac{d^2\langle\hat{u}\rangle}{dx^2}, \quad \langle\hat{u}(0)\rangle = \frac{u_0}{\lambda}. \quad (13.4.1)$$

Используя теорему о дифференцировании (13.3.3), получим

$$\frac{d}{dx}\langle\eta_\omega\hat{u}_\omega\rangle = -2\mu\langle\eta_\omega\hat{u}_\omega\rangle + \left\langle\eta_\omega\frac{d\hat{u}_\omega}{dx}\right\rangle, \quad (13.4.2)$$

$$\frac{d}{dx}\left\langle\eta_\omega\frac{d\hat{u}_\omega}{dx}\right\rangle = -2\mu\left\langle\eta_\omega\frac{d\hat{u}_\omega}{dx}\right\rangle + \left\langle\eta_\omega\frac{d^2\hat{u}_\omega}{dx^2}\right\rangle. \quad (13.4.3)$$

Подставив в (13.4.3) вторую производную по x , найденную из (13.4.2), после несложных преобразований получим для функции

$$\hat{W}(x, \lambda) = \langle\eta_\omega\hat{u}_\omega\rangle$$

следующее уравнение

$$\frac{d^2\hat{W}}{dx^2} + 4\mu\frac{d\hat{W}}{dx} + \left(4\mu^2 - \frac{\bar{\varepsilon}\lambda}{K}\right)\hat{W} = \frac{a^2\lambda}{K}\langle\hat{u}_\omega\rangle,$$

с начальным условием

$$\hat{W}(0, \lambda) = 0.$$

В асимптотике больших x решение этого уравнения

$$\begin{aligned} \widehat{W}(x, \lambda) &\approx -\frac{a^2\lambda}{2K}\int_0^x d\xi\sqrt{K/\bar{\varepsilon}\lambda}\langle\hat{u}(\xi, \lambda)\rangle \exp\left[-\left(2\mu + \sqrt{\bar{\varepsilon}\lambda/K}\right)(x - \xi)\right] \sim \\ &\sim \frac{a^2}{4\mu\sqrt{\pi\bar{\varepsilon}K}}\lambda^{1/2}, \quad \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Выполнив обратное преобразование Лапласа, авторы [3] нашли корреляции

$$\langle\eta_\omega u_\omega\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{\lambda t}\hat{W}(x, \lambda)d\lambda,$$

подставляя которые в (13.3.2), пришли к уравнению

$$\bar{\varepsilon}\frac{\partial\langle u_\omega\rangle}{\partial t} = K\frac{\partial^2\langle u_\omega\rangle}{\partial x^2} + \frac{a^2}{4\mu\sqrt{\pi\bar{\varepsilon}K}}{}_0D_t^{3/2}\langle u_\omega\rangle.$$

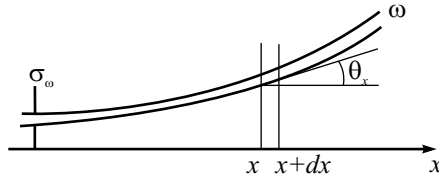


Рис. 13.2: Трубка диффузии

13.5 Волоконная пористость

В работе [5], развивающей по сути то же направление, рассматривается несколько иная структура среды: трехмерное пространство заполнено беспорядочным множеством перепутанных гибких волокон (трубок), по которым идет процесс нормальной диффузии. В целом, трубки эти имеют тенденцию ориентироваться вдоль оси x . Пусть ω – одна из таких трубок (Рис. 13.2), σ_ω – площадь ее поперечного сечения, $\theta_\omega(x)$ – угол между направлением оси x и осью элемента трубки. Предположим, что трубки заполнены неподвижной жидкостью. В момент времени $t = 0$ в плоскости $x = 0$ вводится во все трубки раствор, диффундирующий по ним в соответствии с законом Фика. Тогда

$$\frac{\partial u_\omega(x, t) \sigma_\omega dx}{\partial t} = q_\omega(x, t) \sigma_\omega \cos[\theta_\omega(x)] - q_\omega(x + dx, t) \sigma_\omega \cos[\theta_\omega(x + dx)]$$

и соотношение непрерывности между концентрацией диффундирующей субстанции и ее плотностью тока $q_\omega(x, t)$ в данной трубке ω запишется в виде

$$\frac{\partial u_\omega(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial [q_\omega(x, t) \cos \theta_\omega(x)]}{\partial x}.$$

Добавим сюда закон Фика:

$$q_\omega(x, t) = -K_0 \frac{\partial u_\omega(x, t)}{\partial l} = -K_0 \cos[\theta_\omega(x)] \frac{\partial u_\omega(x, t)}{\partial x}.$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим уравнение нормальной диффузии вдоль трубки:

$$\frac{\partial u_\omega(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K_0 \cos^2[\theta_\omega(x)] \frac{\partial u_\omega(x, t)}{\partial x} \right\}. \quad (13.5.1)$$

Следуя цитируемой работе, предположим, что

$$\sqrt{K_0} \cos[\theta_\omega(x)] = \bar{\varepsilon} + \eta_\omega(x)$$

– случайный процесс, например, стационарный гауссов процесс со средним значением $\bar{\varepsilon}$ и корреляционной функцией

$$\langle \eta_\omega(x_1) \eta_\omega(x_2) \rangle = a^2 e^{-\mu|x_2-x_1|}.$$

Здесь a и $1/\mu$ предполагаются малыми.

13.6 Второй вывод дробно-дифференциального уравнения

Усредним теперь (13.5.1) по ω , полагая σ_ω статистически независимой от $\theta_\omega(x)$:

$$\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \langle u \rangle}{\partial x^2} = 2\bar{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x} \langle \eta_\omega(x) \partial u(x, t) / \partial x \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle \eta_\omega^2(x) \partial u(x, t) / \partial x \rangle.$$

Концентрация $u_\omega(x, t)$ является функционалом от $\eta_\omega(x)$. Применяя формулу Новикова-Фуруцу [14, 15]

$$\left\langle \eta_\omega \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathbb{R}} dx_1 \dots \int_{\mathbb{R}} dx_k \left\langle \frac{\delta^k [\partial u(x, t) / \partial x]}{\delta \eta_\omega(x_1) \dots \delta \eta_\omega(x_k)} \right\rangle \Psi_k(x, x_1, \dots, x_k),$$

где $\Psi_k(x, x_1, \dots, x_k)$ – плотность $k+1$ -й кумулянты случайного поля $\eta_\omega(x)$. Для заданного $\eta_\omega(x)$

$$\Psi_1(x, x_1) = \langle \eta_\omega(x) \eta_\omega(x_1) \rangle = a^2 e^{-\mu|x-x_1|}$$

и

$$\Psi_k = 0, \quad k \neq 1.$$

В результате получим

$$\langle \eta_\omega \partial u(x, t) / \partial x \rangle = a^2 \int_{\mathbb{R}} [\partial \langle f(x, x', t) \rangle / \partial x] e^{-\mu|x-x'|} dx',$$

где

$$f(x, x', t) = \delta u_\omega(x, t) / \delta \eta_\omega(x').$$

Далее,

$$\langle \eta_\omega^2 \partial u(x, t) / \partial x \rangle = \langle \eta_\omega (\eta_\omega \partial u(x, t) / \partial x) \rangle = a^2 \int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{\delta (\eta_\omega \partial u(x, t) / \partial x)}{\delta \eta_\omega(x_1)} \right\rangle e^{-\mu|x-x_1|} dx_1,$$

следовательно,

$$\left\langle \frac{\delta(\eta_\omega \partial u(x, t)/\partial x)}{\delta \eta_\omega(x_1)} \right\rangle = \delta(x - x_1) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a^2 \int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{\delta^2 \partial u(x, t)/\partial x}{\delta \eta_\omega(x_1) \delta \eta_\omega(x_2)} \right\rangle e^{-\mu|x-x_2|} dx_2,$$

и, наконец,

$$\left\langle \varepsilon^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right\rangle = a^2 \frac{\partial \langle u(x, t) \rangle}{\partial x} + a^4 \int_{\mathbb{R}} \left\langle \frac{\delta^2 \partial u(x, t)/\partial x}{\delta \varepsilon(x_1) \delta \varepsilon(x_2)} \right\rangle e^{-\mu(|x-x_2|+|x-x_1|)} dx_1 dx_2.$$

Применяя функциональное дифференцирование к уравнению (13.5.1),

$$\frac{\partial f_\omega(x, x', t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left[(\varepsilon + \eta_\omega)^2 \frac{\partial}{\partial x} f_\omega(x, x', t) \right] = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(\varepsilon + \eta_\omega) \delta(x - x') \frac{\partial}{\partial x} u_\omega(x, t) \right]$$

и пренебрегая членами, содержащими a^2 и a^4 , получим

$$\frac{\partial \langle f(x, x', t) \rangle}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \langle f(x, x', t) \rangle}{\partial x^2} = 2\varepsilon \frac{\partial [\delta(x - x') \partial \langle u(x, t) \rangle / \partial x]}{\partial x} \quad (13.6.1)$$

и

$$\frac{\partial \langle u(x, t) \rangle}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \langle u(x, t) \rangle}{\partial x^2} + 2\varepsilon a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \langle f(x, x', t) \rangle}{\partial x} e^{-\mu|x-x'|} dx'. \quad (13.6.2)$$

После довольно громоздких вычислений система (13.6.1)-(13.6.2) приводится к дробно-дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \langle u(x, t) \rangle}{\partial t} = K' \frac{\partial^2 \langle u(x, t) \rangle}{\partial x^2} + \eta_0 \mathbf{D}_t^{1/2} \frac{\partial^2 \langle u(x, t) \rangle}{\partial x^2},$$

где

$${}_0\mathbf{D}_t^{1/2} v = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_0^t (t - \tau)^{-1/2} \frac{dv(\tau)}{d\tau} d\tau + v(0)t^{-1/2} \right].$$

13.7 Фильтрация

Один из методов математического описания процесса нестационарной фильтрации сжимаемой жидкости в полубесконечной пористой среде с характерным для нее наличием проточных (1) и застойных (2) зон основывается на системе феноменологических уравнений для соответствующих давлений $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$ ($x \geq 0$, $t \geq 0$) [16].

$$\epsilon \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + (1 - \epsilon) \frac{\partial p_2(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial p_2(x, t)}{\partial t} = \gamma(p_1 - p_2)$$

с краевыми условиями

$$p_1(+0, t) = P_s(t), \quad p_1(x, 0) = p_1(\infty, t) = p_2(x, 0) = p_2(\infty, t) = 0.$$

В этих уравнениях ϵ – объемная доля проточных зон, γ – постоянная теплообмена между зонами, K – коэффициент диффузии, $P_s(t)$ – заданная зависимость давления на поверхности от времени. Требуется найти градиент давления на этой поверхности $p'(t) \equiv \partial p_1(x, t) / \partial x|_{x=0}$.

Решая второе из уравнений системы и подставляя результат в первое, получим:

$$(\mathbf{L}^2 - K\mathbf{D}_x^2)p_1(x, t) = 0, \quad (13.7.1)$$

где оператор \mathbf{L}^2 определен соотношением

$$\mathbf{L}^2 p_1(x, t) \equiv [\epsilon \mathbf{D}_t + (1 - \epsilon)\gamma - (1 - \epsilon)\gamma^2 e^{-\gamma t} {}_0\mathbf{D}_t^{-1}]p_1(x, t).$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\mathbf{L}^2 p_1(x, t) \equiv \{e^{-\gamma t} [\epsilon \mathbf{D}_t + (1 - 2\epsilon)\gamma - (1 - \epsilon)\gamma^2 {}_0\mathbf{D}_t^{-1}]e^{\gamma t}\} p_1(x, t)$$

и

$$\begin{aligned} & \mathbf{L}p_1(x, t) = \\ & = \left\{ e^{-\gamma t} \sqrt{\epsilon \mathbf{D}_t + (1 - 2\epsilon)\gamma - (1 - \epsilon)\gamma^2 {}_0\mathbf{D}_t^{-1}} e^{\gamma t} \right\} p_1(x, t). \end{aligned} \quad (13.7.2)$$

В результате факторизации уравнения (13.7.1) имеем

$$(\mathbf{L} - \sqrt{K}\mathbf{D}_x)(\mathbf{L} + \sqrt{K}\mathbf{D}_x)p_1(x, t) = 0,$$

откуда искомый градиент

$$\begin{aligned} p'(t) &= -\sqrt{1/K} \mathbf{L}p_1(0, t) = \\ &= -\sqrt{1/K} e^{-\gamma t} \sqrt{\epsilon \mathbf{D}_t + (1 - 2\epsilon)\gamma - (1 - \epsilon)\gamma^2 {}_0\mathbf{D}_t^{-1}} e^{\gamma t} P_s(t). \end{aligned}$$

В предельном случае сплошной проточной зоны ($\epsilon = 1$) отсюда следует обычное решение для диффузии в вязкой жидкости

$$p'(t) = -\sqrt{1/K} {}_0\mathbf{D}_t^{1/2} P_s(t).$$

В другом предельном случае – сплошной застойной зоны – $\epsilon = 0$

$$p'(t) = -\sqrt{1/K} e^{-\gamma t} \sqrt{\gamma - \gamma^2 {}_0\mathbf{D}_t^{-1}} e^{\gamma t} P_s(t) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\sqrt{\gamma/K} e^{-\gamma t} {}_0D_t^{-1/2} \sqrt{D_t - \gamma} e^{\gamma t} P_s(t) = \\
&= -\sqrt{\gamma/K} e^{-\gamma t} {}_0D_t^{-1/2} e^{\gamma t} {}_0D_t^{1/2} P_s(t).
\end{aligned}$$

Наконец, в случае отсутствия массообмена между зонами $\gamma = 0$ и

$$p'(t) = -\sqrt{1/K} \sqrt{\epsilon} {}_0D_t^{1/2} P_s(t).$$

Мы имеем здесь тот же результат, что и в первом случае, но с увеличенным коэффициентом диффузии $K' = K/\epsilon$.

13.8 Волны

В работе [17], посвященной анализу распространения звуковых волн в слоистой пористой среде методом дробных производных, отмечается, что преимущество временного представления процесса над частотным заключается в способности причинно-следственного описания, в равной степени пригодного для решения прямой и обратной задач теории рассеяния.

Следуя этой работе, рассмотрим слой однородного пористого материала, заключенного между плоскостями $x = 0$ и $x = l$, на который падает плоская волна, приходящая со стороны отрицательных x перпендикулярно его поверхности. Структура насыщенной воздухом пористой среды полагается неподвижной, акустическая волна распространяется только в воздухе, насыщающем поры. Это распространение описывается в модели эквивалентной жидкости, характеризуемой двумя обобщенными характеристиками: динамической извилистостью (tortuosity) самой среды $\tilde{\alpha}(\omega)$ и динамической сжимаемостью включенного в нее воздуха $\tilde{\beta}(\omega)$. Эти комплексные функции, существенно зависящие от частоты, характеризуют отклонение от поведения жидкости в свободном пространстве с увеличением частоты. Их теоретические выражения характеризуются асимптотиками

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(-i\omega) &\sim \alpha_\infty [1 + (i\omega\tau_\alpha)^{-1/2}], \\
\hat{\beta}(-i\omega) &\sim 1 + (i\omega\tau_\beta)^{-1/2},
\end{aligned}$$

где τ_α и τ_β – физические постоянные, характеризующие свойства модели. Преобразование из частотной во временную области определения дает:

$$\begin{aligned}
\alpha(t) &= \alpha_\infty \left[\delta(t) + a(t/\tau_\alpha)^{-1/2} \right], \\
\beta(t) &= \delta(t) + b(t/\tau_\beta)^{-1/2}.
\end{aligned}$$

Первый член в правой части каждого из этих выражений дает мгновенный отклик среды, тогда как второй член отражает ее память. Основные уравнения распространения акустической волны при этом имеют вид

$$\rho\alpha \star \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\beta \star \frac{\partial p}{\partial t} = -K_a \frac{\partial v}{\partial x},$$

где K_a – объемный модуль упругости воздуха, p – акустическое давление, v – скорость частицы. Исключая из этих уравнений давление, приходим к разновидности дробного телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + A \int_0^t \frac{\partial^2 v / \partial t'^2}{\sqrt{t-t'}} dt' - B \frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

где A и B – физические постоянные, $c = c_0 / \sqrt{\alpha_\infty}$ – скорость в пористой среде, $c_0 = \sqrt{\rho / K_a}$ – скорость волны в свободном пространстве. Дробные телеграфные уравнения исследовались в работах [18, 19] и др.

13.9 Гребешковая модель

Термин *перколяция* (*просачивание*) был введен в работе [20] в противовес понятию диффузии. В то время как диффузия представляется как случайное блуждание частицы в регулярной (однородной детерминированной) среде, перколяция мыслится как регулярное движение (жидкости, тепла, электричества) в случайной среде. В качестве модели такой среды обычно используют периодическую решетку, каждый узел которой предполагается занятым с вероятностью p и свободным с вероятностью $1-p$. Совокупность занятых соседних друг с другом узлов образуют кластер. Стандартными задачами теории перколяции являются изучение распределения кластеров по размерам и другим геометрическим характеристикам, определение так называемого порога протекания – вероятности $p = p_c$, при которой кластер становится бесконечным, и др. Наряду с узлами изучаются и свойства связей, которые могут быть как проводящими, так и тупиковыми («мертвыми концами»). Такие модели используются, в частности, для изучения электрической проводимости случайных электрических цепей.

Простейшей моделью проводящего кластера с мертвыми концами является так называемая гребешковая модель (Рис. 13.3). Если «мертвые

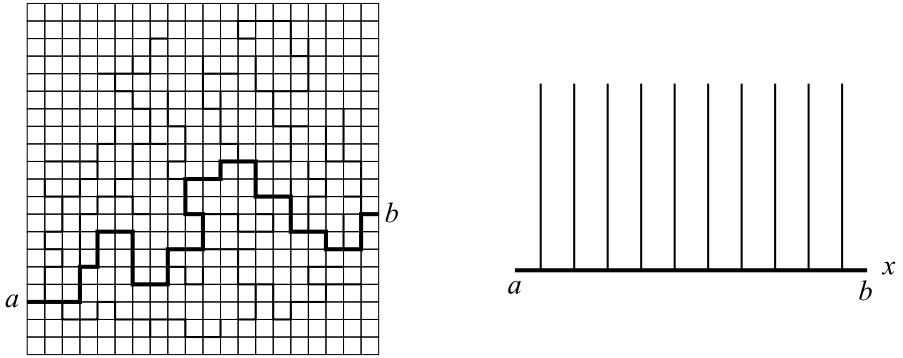


Рис. 13.3: Перколяционный кластер и его гребешковая модель.

концы» достаточно длинные, их можно считать бесконечными. Движение диффундирующей субстанции удобно представлять себе в виде движения независимых материальных точек, управляемого диффузионными вероятностями. В каждом узле проводящей связи ab частица уходит (или с определенной вероятностью может уйти) в боковую тупиковую ветвь («зуб» гребешка) и возвратиться оттуда через случайное время, распределенное, как известно из теории броуновского движения, с плотностью

$$q(t) \propto t^{-3/2}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Впервые дробно-дифференциальное уравнение диффузии было связано с гребешковой моделью в работе Р. Р. Нигматуллина [21]. Мы выведем это уравнение, следуя более поздней работе В. Е. Архинчеева и Э. М. Баскина [22].

Предполагая множество зубьев гребешка, направленных вдоль оси y , бесконечно густым, и принимая, что диффузия по ним носит обычный характер, а диффузия в направлении оси x происходит только на самой этой оси, представим стандартное диффузионное уравнение для функции Грина

$$\frac{\partial G}{\partial t} - K \Delta G = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$$

в виде

$$\frac{\partial G}{\partial t} - K_x \delta(y) \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x)\delta(y)\delta(t),$$

соответствующем диффузии в рассматриваемой неоднородной анизотропной среде с коэффициентами диффузии K_x и K_y вдоль соответствующих осей. Выполнив преобразование Лапласа по времени и Фурье по координатам

нате x , получим

$$\left(\lambda + K_x k^2 \delta(y) - K_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \tilde{G}(k, y, \lambda) = \delta(y).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{G}(k, y, \lambda) = \frac{\exp[-(\lambda/K_y)^{1/2}|y|]}{2(K_y \lambda)^{1/2} + K_x k^2}.$$

На самой оси x оно принимает вид

$$\left(\lambda^{1/2} + \frac{K_x}{2K_y^{1/2}} k^2\right) \tilde{G}(k, 0, \lambda) = 1,$$

соответствующее дробно-дифференциальному уравнению субдиффузии:

$${}_0D_t^{1/2} G(x, 0, t) - \left(K_x/2K_y^{1/2}\right) \frac{\partial^2 G(x, 0, t)}{\partial x^2} = \delta(x)\delta(t). \quad (13.9.1)$$

Уравнение это описывает распределение диффундирующих частиц, находящихся на оси x , поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x, 0, t) dx < 1$$

и с течением времени убывает по степенному закону: все большая доля частиц в момент измерения оказывается вне этой оси, то есть имеет координату $y \neq 0$. Если же интересоваться координатой x безотносительно к другой, то есть рассматривать все частицы, включая находящиеся на зубьях гребешка, следует пользоваться уравнением

$${}_0D_t^{1/2} G(x, t) - (K_x/2K_y^{1/2}) \frac{\partial^2 G(x, t)}{\partial x^2} = \delta(x) \frac{t^{-1/2}}{\Gamma(1/2)}. \quad (13.9.2)$$

Подчеркнем, что своим дробным характером эти уравнения обязаны особой неоднородной анизотропии среды, в которой происходит диффузия. Не будь ее, то есть имей частицы вероятность перемещаться вдоль x , находясь вне этой оси (при $y \neq 0$) уравнение диффузии имело бы обычный вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} - K_x \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - K_y \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = \delta(x)\delta(y)\delta(t).$$

Здесь среда тоже анизотропна (коэффициенты диффузии K в разных направлениях разные), но анизотропия эта однородна: K_x и K_y не зависят от координат.

Легко представить себе дальнейшее развитие этой модели ведением зубьев ограниченной длины, приданием этой длине случайного характера, изменением плотности зубьев с ростом x , использованием случайно распределенных (в том числе и по дробному пуассоновскому закону) зубьев вдоль оси x , включением внешних сил, обеспечивающих снос частиц вдоль x , вдоль y , вдоль x и y , введение корреляций на основе, например, дробного броуновского движения и т. д. Отчасти эта программа выполнена в работах Архинчеева (см. также книгу [23] и статью [24]).

Литература

1. Margolin G., Berkowitz B. J. Phys. Chem. B **104**, 3492 (2000).
2. Учайкин В. В., Учайкин Д. В. Обзор. прикл. и пром. математики **9**, 477 (2002).
3. Erochenkova G., Lima R. Chaos **11**, 495 (2001).
4. Shapiro V. E., Loginov M. V. Physica A **91**, 563 (1978).
5. Logvinova K., Neel M.-C. Chaos **14**, 982 (2004).
6. Saffman P. G. J. Fluid Mech. **6**, 321 (1959).
7. Varadhan S. R. S. Diffusion Problems and Partial Differential Equations. – Berlin: Springer-Verlag, 1980.
8. Derrida B., Luck J. M. Phys. Rev. B **28**, 7183 (1983).
9. Uchaikin V. Physica A **255**, 65 (1998).
10. Koch D. L., Brady J. F. Phys. Fluids **31**, 965 (1988).
11. Legentilhomme P., Legrand J., Comiti J. J. Appl. Electrochem. **19**, 263 (1989).
12. Erochenkova G. V., Volkov S. A., Sakodinskii K. I. J. Chromatogr **262**, 19 (1983).
13. Erochenkova G., Lima R. Physica A **275**, 297 (2000).
14. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980.
15. Рытов С. М., Кравцов В. А., Татарский В. И. Стохастические случайные поля. – М.: Наука, 1978.

16. *Бабенко Ю. Н.* Тепло- и массоперенос. – Ленинград: Химия, 1986.
17. *Depollier C., Fellah Z., Fellah M.* Nonlinear Dynamics **38**, 181 (2004).
18. *Нануга А., Рок В. J.* Acoust. Soc. Amer. **107**, 2965 (2000).
19. *Cascaval R. C., Eckstein E. C., Frota C. L., Goldstein J. A.* J. Math. An. Appl. **276**, 145 (2002).
20. *Broadbent S. R., Hammersley J. M.* Proc. Cambridge Phil. Soc. **53**, 629 (1957).
21. *Nigmatullin R. R.* Phys. Stat. Sol. **133**, 425 (1986).
22. *Архинчеев В. Е., Баскин Э. М.* ЖЭТФ **100**, 292 (1991).
23. *Ben-Avraham D., Havlin S.* Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems. – Cambridge University Press, 2000.
24. *Zahran M. A., Abulwafa E. M., Elwakil S. A.* Physica A **323**, 237 (2003).

Глава 14

Термодинамика

14.1 Нагревание стержня

Развитие дробно-дифференциальной термодинамики происходит в нескольких направлениях. Мы коснемся в этой главе двух из них – теплопереноса и теории фазовых переходов.

Простейшая задача теплопереноса выглядит следующим образом. Рассматривается полубесконечный стержень с изолированной боковой поверхностью, расположенный на полуоси $x \geq 0$ и до момента $t = 0$ всюду имеющий одинаковую температуру (примем ее в качестве нулевой). Требуется найти тепловой ток (точнее, его x -проекцию) $q(t) \equiv j(0, t)$, который должен подводиться к стержню через его конец, чтобы температура конца $f(0, t)$ менялась со временем по заданному закону $T(t)$ ($T(0+) = 0$).

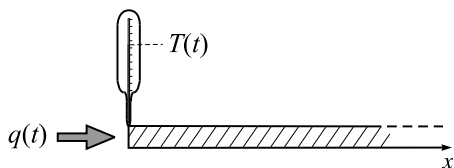


Рис. 14.1: К задаче о нагревании стержня.

Для ответа на этот вопрос необходимо найти соответствующее данным условиям решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (14.1.1)$$

для распределения температуры $f(x, t)$ и дифференцированием по координате вычислить искомую величину

$$q(t) = -K \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \sqrt{\frac{K}{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{T(t') dt'}{\sqrt{t-t'}}. \quad (14.1.2)$$

Результат (14.1.2), представляющий искомую величину в виде полупроизводной, может быть получен и иным путем.

Представив уравнение (14.1.1) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - K \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) f(x, t) = \left({}_0D_t^{1/2} - \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left({}_0D_t^{1/2} + \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) = 0, \quad (14.1.3)$$

и учтя, что решение уравнения

$$\left({}_0D_t^{1/2} + \sqrt{K} \frac{\partial}{\partial x} \right) f(x, t) = 0$$

во всяком случае удовлетворяет и уравнению (14.1.1), получим:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{K}} {}_0D_t^{1/2} f(x, t).$$

Умножая это равенство на $-K$ и полагая $x = 0$, приходим к соотношению (14.1.2)

$$q(t) = \sqrt{K} {}_0D_t^{1/2} T(t).$$

Отдавая должное авторам [1], чьи теоретические работы стимулировали проникновение «полуинтегральных» методов в прикладные области, нельзя не отметить, что уравнения эти (без «дробно-дифференциальной» терминологии, правда) можно встретить еще в первых изданиях «Механики сплошных сред» Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица. Уравнение (14.2.1), в частности, будучи дополненным начальным условием, совпадает с уравнением (52.16) цитируемой книги (с. 246), которое я привожу в обозначениях оригинала:

$$q(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{\pi\chi}} \int_{-\infty}^t \frac{dT_0(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Там же подчеркивается, что формула эта представляет собой обращение интегрального соотношения

$$\kappa T_0(t) = \int_{-\infty}^t \sqrt{\frac{\chi}{\pi(t-\tau)}} q(\tau) d\tau.$$

Заметим, что в обоих случаях благодаря условиям $T(0+) = 0$ и $T(-\infty) = 0$ производные Римана-Лиувилля и Капуто эквивалентны.

Но вернемся к современности. В книге [2] этот метод обобщен на процесс, описываемый уравнением

$$[D_t - \alpha(x, t)D_x^2 - \beta(x, t)D_x + \gamma(x, t)]T(x, t) = 0.$$

Факторизации этого уравнения приводит к следующей *основной формуле* метода:

$$A(0, t)q_x(0, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(0, t) {}_0D_t^{(1-j)/2}.$$

В частности, для случая постоянных коэффициентов α , β , γ и $T(0, t) = T_0 = \text{const}$ получаем:

$$\begin{aligned} q_x(0, t) &= (1/\sqrt{\alpha}) \left({}_0D_t^{1/2} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta}{2} {}_0D_t^{-1/2} - \frac{\delta^2}{8} {}_0D_t^{-3/2} + \dots \right) T_0 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\beta}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\delta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{t} - \frac{\delta^2}{6\sqrt{\pi}} t \sqrt{t} + \dots \right) T_0. \end{aligned}$$

14.2 Теплообмен (диффузия) через сферическую границу

Более интересной с физической точки зрения является задача о тепловом (диффузионном) потоке на границе шара $r = R$. В этом случае

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - K \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] T(r, t) = 0, \quad r > 0, \quad t \geq 0,$$

и

$$q_r(R, t) = ({}_0D_t^{1/2} + 1/R)T(R, t)$$

(коэффициент теплопроводности принят здесь равным единице).

В теории поляризации рассматривается диффузия вещества из сферической капли жидкости в окружающее пространство, заполненное другой жидкостью, при условии, что радиус капли растет со временем по известному закону $R = R(t)$. Задана также концентрация вещества капли на ее поверхности $C_s(t)$. Изменение концентрации диффундирующего вещества $c(r, t)$ описывается уравнением

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - K \left(\frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{R^2 \dot{R}}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right] c(r, t) = 0, \quad r > 0, \quad t \geq 0$$

с краевыми условиями

$$c(R, t) = C_s(t); \quad c(\infty, t) = 0; \quad c(r, 0) = 0, \quad r > R(0) \equiv R_0.$$

Полученное в [2] методом факторизации выражение для плотности потока на поверхности капли имеет вид:

$$j_r(R(t), t) = \sqrt{K} \left[{}_0D_t^{1/2} + \frac{\sqrt{K}}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)}{2R(t)} {}_0D_t^{-1/2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3\dot{R}^2(R)}{8R^2(t)} - \frac{\ddot{R}(t)}{4R(t)} \right) {}_0D_t^{-3/2} + \dots \right] C_s(t).$$

При постоянной концентрации на поверхности

$$j_r(R(t), t) = \sqrt{K} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\sqrt{K}}{R(t)} + \frac{\dot{R}(t)}{2R(t)} \frac{2\sqrt{t}}{\pi} + \right. \\ \left. + \left(\frac{3\dot{R}^2(R)}{8R^2(t)} - \frac{\ddot{R}(t)}{4R(t)} \right) \frac{4t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} + \dots \right] C_s(t).$$

Первые два члена полученных разложения описывают процесс в случае неподвижной границы, остальные представляют собой поправки, учитывающие расширение капли.

В некотором смысле обратным рассмотренному выше процессу является процесс растворения газа в жидкости при его сжатии: заполненный газом сферический объем окружен жидкостью, давление в которой медленно повышается. В результате объем и масса газа уменьшаются, уменьшение массы происходит за счет растворения газа в жидкости, которое можно рассматривать как диффузию его молекул через поверхность. Как показано в [2], давление в полости также удовлетворяет уравнению с дробными производными.

14.3 Уравнение Орнштейна-Цернике

Теория критических явлений Орнштейна-Цернике основана на трех положениях [3]. Первое – соотношение между зависящей от температуры *изотермической сжимаемостью* $\chi(T)$ и флуктуациями числа молекул N в большом (по сравнению с корреляционной длиной) объеме V системы:

$$\chi(T) = -\frac{\langle N \rangle}{nV^2} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \frac{\delta^2}{nk_B T},$$

где $n = \langle N \rangle / V$ – средняя концентрация молекул, а $\delta^2 = (\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2) / \langle N \rangle$ – отношение дисперсии числа N к пуассоновской дисперсии при той же концентрации. Формула эта означает, что в системах с высокой сжимаемостью (например, в разреженных газах) большие флуктуации числа частиц более вероятны, чем в твердых телах. Выражая эти флуктуации через интеграл от корреляционной функции *по всему пространству*

$$\delta^2 = 1 + n \int C(\mathbf{r}, T) d\mathbf{r},$$

приходим к формуле

$$nk_{\text{B}}T\chi(T) = 1 + n \int C(\mathbf{r}; T) d\mathbf{r},$$

связывающей корреляционную функцию с температурой.

Известно, что для всех устойчивых систем $(\partial V / \partial P)_T < 0$, в окрестности же критической точки фазового перехода T_c производная от объема по давлению $(\partial P / \partial V)_T$ обращается в нуль, а $\chi(T) \rightarrow \infty$, $T \rightarrow T_c$. Это свидетельствует об экстремально больших флуктуациях плотности в критической области, порождающих явления критической опалесценции, рассеяния света, плазменных колебаний и т. п. Возникающая при этом расходимость интеграла от корреляционной функции

$$\int C(\mathbf{r}; T_c) d\mathbf{r} = \infty$$

указывает на бесконечный радиус корреляций, обусловленный наличием длинного хвоста корреляционной функции $C(\mathbf{r}; T_c)$. Теоретический анализ показывает, что хвост этот имеет степенной вид:

$$C(\mathbf{r}; T_c) \propto r^{-(d-2)}, \quad r \rightarrow \infty,$$

где d – размерность пространства. Численное же моделирование и некоторые эксперименты показывают, что

$$C(\mathbf{r}, T_c) \propto r^{-(d-2+\eta)},$$

где η – положительное число, меньшее единицы.

Второе положение отражается *интегральным уравнением Орнштейна-Цернике*, позволяющим перейти от функции $C(\mathbf{r}; T)$ к другой функции $c(\mathbf{r}; T)$, более удобной для анализа критических явлений:

$$C(\mathbf{r}_{12}, T) = c(\mathbf{r}_{12}, T) + n \int C(\mathbf{r}_{23}, T) c(\mathbf{r}_{13}, T) d\mathbf{r}_3.$$

Уравнение это разлагает *полную корреляционную функцию* $C(\mathbf{r}, T)$ на *прямую часть* $c(\mathbf{r}, T)$, описывающую взаимодействие $1 \rightarrow 2$ с ближайшим окружением и потому короткодействующую, и *непрямую часть*, выражаемую интегралом. Непрямая часть относится к взаимодействиям $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$, \dots , $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 2$ и поэтому определяет корреляции на больших расстояниях. Обе корреляционные функции безразмерны. В критической точке роль малых расстояний, где прямые корреляции отрицательны, мала. Пренебрегая ими, и надлежащим образом нормируя $c(\mathbf{r}, T)$, можно придать ей смысл трехмерной плотности вероятностей, а само интегральное уравнение может быть интерпретировано как уравнение случайных блужданий.

14.4 Дробно-дифференциальный аналог уравнения Орнштейна-Цернике

Третье положение теории Орнштейна-Цернике заключается в том, что функция $\tilde{c}(\mathbf{k}, T)$ предполагается четной аналитической функцией $k = |\mathbf{k}|$ в окрестности $k = 0$ для всех температур, включая T_c :

$$\tilde{c}(\mathbf{k}, T) - \tilde{c}(0, T) \propto k^2, \quad k \rightarrow 0.$$

Этим обеспечивается конечность дисперсии «пробега» и диффузионный (броуновский) характер асимптотики корреляционной функции

$$C^{as}(\mathbf{r}, T_c) = Ar^{-1},$$

удовлетворяющей стационарному уравнению нормальной диффузии:

$$-\Delta C^{as}(\mathbf{r}, T_c) = 4\pi A\delta(\mathbf{r})$$

В стандартной теории используется оборванное на втором члене разложение, представленное в виде

$$\tilde{c}(\mathbf{k}, T) = \tilde{c}(0, T) - (R^2/n)k^2,$$

где $R(T)$ – *дебаевская длина затухания*. Структурная функция принимает в этом случае лоренцевский вид

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{1}{1 - nc(0, T) + R^2k^2} = \frac{R^{-2}}{\xi^{-2} + k^2},$$

где зависящая от температуры и плотности величина ξ называется *длинной корреляции*. При $T \rightarrow T_c$ она обращается в бесконечность. Обратное

преобразование Фурье в рассматриваемом приближении дает следующий результат для полной корреляционной функции:

$$C(\mathbf{r}, T) \propto \begin{cases} (R^2 r)^{-1} \exp(-r/\xi), & T < T_c, \\ r^{-1}, & T = T_c. \end{cases}$$

Следует подчеркнуть, однако, что в случае двумерной системы рассматриваемый подход приводит к абсурду: корреляционная функция *логарифмически растет*. Кроме того, численное моделирование и ряд экспериментов с магнитными системами показывает, что в критической точке корреляционная функция d -мерной системы лучше аппроксимируется формулой, предложенной Фишером:

$$C(\mathbf{r}, T_c) \propto r^{-(d-2+\eta)}, \quad (14.4.1)$$

где η – положительное число, меньшее единицы. Эта формула фактически ослабляет третье положение теории, заменяя его требованием

$$\tilde{c}(\mathbf{k}, T) - \tilde{c}(0, T) \propto k^\alpha, \quad 0 < \alpha < 2 \quad k \rightarrow 0.$$

Как следует из нашей работы [4], асимптотическая часть решения в этом случае характеризуется трансформантой Фурье $\tilde{C}^{as}(\mathbf{k}, T_c)$, удовлетворяющей уравнению

$$|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{C}^{as}(|\mathbf{k}|, T_c) = A(\alpha).$$

Оно является Фурье-образом уравнения с лапласианом в дробной степени

$$(-\Delta)^{\alpha/2} C^{as}(\mathbf{r}, T_c) = A(\alpha) \delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом, в этой дробно-дифференциальной модели критического состояния среды при $T \rightarrow T_c$ нарушается аналитичность трансформанты прямой корреляционной функции, вследствие чего описывающее асимптотический член C^{as} уравнение Пуассона превращается в дробное уравнение Пуассона. Это свидетельствует о фрактальной структуре случайных возбуждений среды при фазовом переходе [5].

14.5 Классификация фазовых переходов

В работах Р. Хильфера [6-9], развивающих новый взгляд на теорию фазовых переходов, дробные производные играют более фундаментальную роль, чем в рассмотренных выше задачах: на их основе обновляется эренфестовская классификационная схема с расширением в область непрерывных фазовых переходов. Обновленная (обобщенная) схема

привела к предположению о существовании фазовых переходов дробного (меньше 1) порядка, названного в [7] *неравновесными переходами*.

Согласно основным постулатам термодинамическая внутренняя энергия системы $U = U(S, V, N)$ должна быть однозначной, выпуклой, монотонно возрастающей, (почти всюду) дифференцируемой и однородной (первого порядка) функцией относительно своих аргументов – энтропии S , объем V и числа частиц N . В классической модели

$$0 < V < \infty, \quad 0 < N < \infty, \quad -\infty < S < \infty, \quad -\infty < U < \infty,$$

тогда как в квантовой схеме S и U должны быть ограниченными снизу. Условия эти с необходимостью и достаточностью обеспечивают термодинамическую устойчивость.

Классификация фазовых переходов обычно формулируется в понятиях плотности свободной энергии или давления, поскольку другие термодинамические потенциалы непрерывны для широкого класса взаимодействий. Давление $p = p(T, \mu)$ есть сопряженная выпуклая по отношению к плотности энергии $u(S, \rho) = U(S/V, 1, N/V)/V$ как функции плотности энтропии $s = S/V$ и плотности числа частиц $\rho = N/V$:

$$p(T, \mu) = \sup_{s, \rho} [\mu\rho + Ts - u(s, \rho)],$$

где μ – химический потенциал, T – абсолютная температура.

Анализ фазового перехода требует использования соответствующего термодинамического предела. Рассмотрим термодинамический процесс $C: \mathbb{R} - \mathbb{R}^2$, $\sigma \mapsto (T(\sigma), q(\sigma))$, такой, что $T(0) = T_c$ и $\mu(0) = \mu_c$ соответствуют критической точке. Разложим $p = p(T(\sigma), \mu(\sigma))$ на регулярную и сингулярную составляющие

$$p = p_{reg} + p_{sng}.$$

В классификации Эренфеста фазовый переход относился к переходам порядка n в том и только в том случае, если

$$J(C, n; \sigma) \equiv D_{\sigma}^n p_{sng}(T(\sigma), \mu(\sigma)) \sim A l(\sigma) + B, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14.5.1)$$

для $\sigma \approx 0$, где $A, B \in \mathbb{R}$ и $l(\sigma)$ – ступенчатая функция Хэвисайда. Условие (14.5.1) отражает конечный разрыв n -й производной давления в точке $\sigma = 0$. Оно может быть представлено и в несколько более общем виде

$$\lim_{\sigma \pm 0} \frac{J(C, n; b\sigma)}{J(C, n; \sigma)} = 1, \quad b > 0. \quad (14.5.2)$$

Это означает, что $J(C, n; \sigma)$ является медленно меняющейся функцией аргумента σ при $\sigma \rightarrow 0$. Условие (14.5.2) и положено в основу дробно-дифференциальной классификации фазовых переходов, предложенной

в [8]: *фазовый переход называется фазовым переходом порядка ν , если и только если*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^\pm} \frac{J(C, \nu; b\sigma)}{J(C, \nu; \sigma)} = 1$$

при любом положительном b . Здесь

$$J(C, \nu; \sigma) = {}_0D_\sigma^\nu p_{sng}(T(\sigma), \mu(\sigma)).$$

Чтобы понять, могут ли фазовые переходы дробного порядка быть термодинамически разрешенными, Р. Хильфер рассмотрел модельные термодинамические системы, для которых

$$u(s) = as + b\sqrt{s^2 + c^2}, \quad (14.5.3)$$

где $a, b, c > 0$ и $a > b$. Очевидно, $T(s) = \partial u / \partial s > 0$ и $\partial^2 u / \partial s^2 > 0$, так что $u(s)$ – выпуклая и монотонно возрастающая функция. Она демонстрирует переходы порядка $\nu_u = 1$ в критической точке $s_c = \pm\infty$. Заметим, что система (14.5.3) характеризуется ограниченной областью возможных температур

$$a - b = T_{min} < T < T_{max} = a + b.$$

Давление в данной системе

$$p(T) = c\sqrt{b^2 - (T - a)^2}, \quad (14.6.4)$$

указывая на существование фазового перехода порядка

$$\nu_p = 1/2$$

при $T = T_{min}$ и $T = T_{max}$.

Простой пример системы (14.6.3) показывает, что термодинамика разрешает два принципиально различных типа фазовых переходов: обычные фазовые переходы целых порядков $\nu_p \geq 1$ и необычные (аномальные) переходы дробных порядков $\nu_p < 1$ с ограниченной областью допустимых равновесных температур. Интерес к этому обстоятельству обусловлен тем фактом, что равновесная термодинамика формально допускает ситуацию, когда ограничивающие эту область температуры T_{min} и T_{max} не могут достигаться в квазистатических термодинамических процессах. Квазистатический процесс есть последовательность изменений состояния, бесконечно медленных по сравнению с процессом установления равновесия. Резонно задать вопрос: остается ли справедливым отождествление такой температурной шкалы с температурной шкалой идеального газа, когда $\nu < 1$. В таких системах T_{min} играет роль абсолютного нуля, а T_{max} – роль $T = \infty$. В [8] было предложено обойти это самоограничение

областью конечных температур путем введения многозначных термодинамических потенциалов для интерпретации переходов порядка $\nu < 1$. Позднее Хильфер вернулся к однозначным потенциалам [10].

Плотность энтропии $s(T) = (\partial p / \partial T)_\mu$, вытекающая из (14.5.4) стремится к $-\infty$ при $T \rightarrow T_{min}$, третий же закон термодинамики предполагает существование особой температуры T_0 , при которой плотность энтропии изучает:

$$s(T_0) = 0.$$

В силу квантово-механического происхождения третьего закона значение T_0 можно рассматривать как минимальную температуру квантово-механической системы, тогда как T_{min} – минимальная температура классической системы ($T_0 > T_{min}$).

Литература

1. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus. – New-York – London: Academic Press, 1974.
2. *Бабенко Ю. И.* Тепло- и массоперенос. – Ленинград: Химия, 1986.
3. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1. – М.: Мир, 1978.
4. *Uchaikin V. V., Gusev G. G.* J. Math. Phys. **38**, 2453 (1997).
5. *Учайкин В. В.* Обзор. прикл. и пром. математики **12**, 195 (2005).
6. *Hilfer R.* Phys. Scr. **44**, 321 (1991).
7. *Hilfer R.* Phys. Rev. Lett. **68**, 190 (1992).
8. *Hilfer R.* Mod. Phys. Lett. **B6**, 773 (1992).
9. *Hilfer R.* Phys. Rev. E **48**, 2466 (1993).
10. *Hilfer R.* In: Application of Fractional Calculus in Physics. – Singapore: World Scientific, 2000, p. 429.

Глава 15

Диэлектрики

15.1 Феноменология релаксации

Феноменологический подход предполагает, что поляризация диэлектрика $P(t)$, помещенного в переменное электрическое поле $E(t)$, складывается из двух частей – мгновенной $P_1(t)$, пропорциональной значению напряженности поля в тот же момент времени

$$P_1(t) = \chi_1 E(t),$$

и запаздывающей

$$P_2(t) = \int_{-\infty}^t K(t-t')E(t')dt'.$$

Обозначим через $\chi_2 E$ предельное значение P_2 при постоянной E и $t \rightarrow \infty$. В классической теории релаксации принимается, что скорость изменения запаздывающей составляющей пропорциональна остающейся разности между предельным и текущим ее значениями:

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{1}{\tau}(\chi_2 E - P_2).$$

Если первоначально электрическое поле и поляризация равны нулю, а в момент времени $t = 0$ мгновенно прилагается постоянное поле E_0 , то

$$\frac{dP_2}{dt} + \frac{1}{\tau}P_2 = \frac{1}{\tau}\chi_2 E_0,$$

откуда

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) = [\chi_1 + \chi_2(1 - e^{-t/\tau})]E_0,$$

где τ – время релаксации.

В случае установившегося режима в переменном гармоническом поле

$$E(t) = E_0 e^{i\omega t}$$

имеет место соответствие

$$D_t \Leftrightarrow i\omega, \quad (15.1.1)$$

приводящее к соотношению

$$P(t) = P_1(t) + P_2(t) = \left[\chi_1 + \frac{\chi_2}{1 + i\omega\tau} \right] E(t).$$

Переходя к комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ и вводя обозначения

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = 1 + 4\pi(\chi_1 + \chi_2)$$

и

$$\varepsilon_\infty = \varepsilon(\infty) = 1 + 4\pi\chi_1,$$

получим

$$\frac{\varepsilon(\omega) - \varepsilon_\infty}{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty} = \frac{1}{1 + i\omega\tau}.$$

Рассматривая полученную функцию как трансформанту Лапласа с мнимым аргументом

$$\widehat{f}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} f(t) dt$$

некоторой функции $f(t)$,

$$\widehat{f}(i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau},$$

представим это соотношение в виде

$$i\omega\tau \widehat{f}(i\omega) + \widehat{f}(i\omega) = 1.$$

Возвращаясь к временной переменной, приходим к дифференциальному уравнению дебаевской релаксации

$$\tau \frac{df}{dt} + f(t) = \delta(t),$$

решение которого имеет экспоненциальный вид

$$f(t) = e^{-t/\tau}.$$

Обобщая операционное соотношение (15.1.1) на случай дробной степени,

$$-\infty D_t^\alpha \Leftrightarrow (i\omega)^\alpha, \alpha \in (0, 1), \tag{15.1.2}$$

можно ожидать справедливость соотношений, приведенных в Табл. 15.1:

Таблица 15.1.

Процесс	Фурье образ	Уравнение
Коула-Коула	$\widehat{f}(i\omega) = [1 + (i\omega\tau)^\alpha]^{-1}$	$[\tau^\alpha -\infty D_t^\alpha + 1] f(t) = \delta(t)$
Коула-Дэвидсона	$\widehat{f}(i\omega) = [1 + i\omega\tau]^{-\beta}$	$[\tau D_t + 1]^\beta f(t) = \delta(t)$
Гаврильяка-Негами	$\widehat{f}(i\omega) = [1 + (i\omega\tau)^\alpha]^{-\beta}$	$[\tau^\alpha -\infty D_t^\alpha + 1]^\beta f(t) = \delta(t)$

Приведем теперь менее формальный вывод этих уравнений.

15.2 Процесс Коула-Коула: макроскопическая интерпретация

Простейшим макроскопическим способом введения дробной производной в задачу о релаксации является дробно-дифференциальное обобщение классического соотношения между током $i(t)$ и напряжением $u(t)$ для идеального конденсатора – *дробно-дифференциальный аналог закона Ома*:

$$i(t) = K_\alpha {}_a D_t^\alpha u(t), t > 0, 0 < \alpha < 1. \tag{15.2.1}$$

Соотношение это описывает элемент цепи, являющийся в некотором смысле промежуточным между идеальным диэлектриком с емкостью $C = K_1$ (когда $\alpha = 1$) и обыкновенным проводником с сопротивлением $R = 1/K_0$ (когда $\alpha = 0$)

Дробно-дифференциальное обобщение закона Ома (15.2.1) опирается на уже упоминавшийся выше эмпирический закон Кюри-фон Швайцлера [1, 2], утверждающий, что возникающий под действием скачкообразного напряжения $\Delta u(t')$ ток в конденсаторе изменяется по закону

$$i(t) = A \Delta u(t')(t - t')^{-\alpha}, t > t'. \tag{15.2.2}$$

Переписав (15.2.2) для произвольного вида $u(t)$ и выполнив элементарные преобразования, видим, что

$$i(t) = \frac{K_\alpha \Delta u(t_j)}{\Gamma(1 - \alpha)} \frac{d}{dt} \int_{t_j}^t \frac{dt'}{(t - t')^\alpha} = A \Delta u(t_j)(t - t_j)^{-\alpha}, A = K_\alpha / \Gamma(1 - \alpha).$$

Если $u(t')$ меняется непрерывно и достаточно быстро стремится к нулю при $t' \rightarrow -\infty$, то выражение (15.2.2) примет вид

$$i(t) = A \int_{-\infty}^t \frac{du(t')}{(t-t')^\alpha} = K_\alpha {}_{-\infty}D_t^\alpha u(t) = K_\alpha {}_{-\infty}D_t^\alpha u(t). \quad (15.2.3)$$

(производные Римана-Лиувилля и Капуто здесь совпадают).

Принимая во внимание наличие в контуре активного сопротивления, запишем уравнение Кирхгофа

$$i(t)R + u(t) = E(t),$$

где $E(t)$ – ЭДС источника питания. Из последнего уравнения и соотношения (15.2.3) следует дробно-дифференциальное уравнение

$$[\tau^\alpha {}_{-\infty}D_t^\alpha + 1] u(t) = E(t),$$

где

$$\tau^\alpha = K_\alpha R.$$

Функция Коула-Коула $\hat{f}_\alpha(i\omega)$ есть решение этого уравнения при $E(t) = e^{i\omega t}$:

$$[(i\omega\tau)^\alpha + 1] \hat{f}_\alpha(i\omega) = 1, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (15.2.4)$$

15.3 Микроскопическая интерпретация

Наглядной микроскопической моделью газообразного или жидкого диэлектрика является представление о нем как о совокупности полярных молекул, свободно плавающих и вращающихся в кипящем бульоне, имитирующем влияние теплового движения окружающих молекул. Каждая молекула обладает собственным дипольным моментом, на который действует внешнее поле, внутренние силы вязкости и силы инерции. Важнейшим свойством этой модели является взаимная независимость диполей: молекулы «не видят» друг друга. В отсутствие внешнего поля их дипольные моменты распределены изотропно. Включение внешнего поля слегка поворачивает каждый из них, создавая суммарный наведенный дипольный момент, который по выключении этого поля начинает «рассасываться», в чем и состоит, собственно, процесс релаксации. Изображая вектор момента каждой молекулы точкой на сфере фиксированного радиуса, и учитывая взаимную независимость движения молекул, мы можем описать процесс релаксации в угловых переменных ϑ , φ как *броуновское движение по сфере*. Уравнение этого процесса получается из обычного

диффузионного уравнения, записанного в сферической системе координат, вычеркиванием радиальной координаты и члена с радиальной производной:

$$\frac{\partial p(\vartheta, \varphi, t)}{\partial t} = K \Delta_{\vartheta, \varphi} p(\vartheta, \varphi, t) + \frac{\delta(\cos \vartheta - 1)}{2\pi} \delta(t),$$

где $p(\vartheta, \varphi, t)$ – плотность вероятности положения точки на сфере в момент времени t , K – коэффициент диффузии в пространстве направлений, а $\Delta_{\vartheta, \varphi}$ обозначает угловую часть лапласиана. Умножая обе части этого уравнения на $f_0 \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и интегрируя по сфере, получаем :

$$\frac{df(t)}{dt} = -2Kf(t) + f_0\delta(t). \quad (15.3.1)$$

Это уравнение ведет к дебаевскому закону релаксации.

Что же можно изменить в этой модели, чтобы получить качественно другое поведение процесса: степенное убывание вместо экспоненциального?

Обсуждая причины отличия процесса релаксации в твердых телах от того, что наблюдается в газах, Джоншер справедливо замечает, что носители дипольных моментов здесь уже не могут считаться ни свободными, ни независимыми друг от друга. Естественно предположить, что в неупорядоченном твердом теле они «мешают друг другу», что им придется выжидать, пока в результате теплового движения освобождается место для такого поворота, который уменьшит потенциальную энергию данного носителя. Диполь как бы попадает в ловушку (в пространстве направлений) и пребывает там некоторое случайное время T , после чего совершает мгновенный скачок (поворот) в другое близкое к прежнему направление. Вероятность, первоначально сосредоточенная на «полюсе» сферы, растекается по сфере в соответствии с законом субдиффузии

$${}_0D_t^\alpha p(\vartheta, \varphi, t) = K \Delta_{\vartheta, \varphi} p(\vartheta, \varphi, t) + \frac{\delta(\cos \vartheta - 1)}{2\pi} \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

и в пределе $t \rightarrow \infty$ равномерно распределяется по ней. При этом среднее значение z -проекции дипольного момента удовлетворяет уравнению

$${}_0D_t^\alpha f(t) = -2Kf(t) + f_0 \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)},$$

обобщающему (15.3.1) на субдиффузионный процесс.

15.4 Феномен памяти

Известно, что в случае $\alpha = 1$, $f_\alpha(t) = f_1(t)$ убывает экспоненциально независимо от своей предыстории $f_1(t)$, $t < 0$, но в случае $\alpha < 1$

$f_\alpha(t)$ убывает по степенному закону в зависимости от предыстории процесса. Другими словами, мы наблюдаем некоторый тип *памяти*. Эффект памяти был отмечен несколькими авторами теоретических и экспериментальных работ, один из которых дал своей статье выразительное название «Dead matter has memory!»¹ [3]. В статье этой приводится описание следующего эксперимента.

Три идентичных конденсатора были накоротко замкнуты по меньшей мере 19 минут до момента, когда их разомкнули, подали на каждый из них скачок напряжения $U_0 = 100$ В и начали измерение тока. Однако, предыстории этих конденсаторов были различны. Конденсатор 1 находился под напряжением $+500$ В в течение 16,7 часов и был накоротко замкнут за 15 минут до измерений. Конденсатор 2 находился под напряжением -500 В в течение 16,7 часов и был закорочен за 10 минут до измерений. Конденсатор 3 не подвергался действию напряжения перед экспериментом. Измеренные токи спустя примерно 10 секунд стали заметно отличаться друг от друга, а к 20-й секунде они уже в 2-3 раза отличались от контрольного 3-го конденсатора, находясь по обе стороны от его кривой $I_3(t)$. На 187-й секунде график нижней кривой $I_1(t)$ пересек нулевой уровень и появился отрицательный ток, достигший максимальной амплитуды вблизи 10^3 секунд, после чего его амплитуда стала затухать. Автор сообщает, что такое поведение согласуется с решением дробно-дифференциального уравнения.

В наших работах [4, 5] исследовано поведение решения при малом отклонении порядка производной от единицы с целью проследить, каким образом осуществляется качественный переход от процесса марковского ($\alpha = 1$) к немарковскому ($\alpha \neq 1$), другими словами, как появляется память.

Рассмотрим процесс зарядки и разрядки конденсатора, происходящий по следующей схеме. ЭДС зарядки включается в момент $t = -\theta < 0$, остается постоянным до $t = 0$, и выключается в момент $t = 0$, с которого и наблюдается релаксация:

$$E(t) = \begin{cases} 0, & t < -\theta; \\ E_0, & -\theta \leq t < 0; \\ 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Выражая решение уравнения с этой правой частью через функцию Грина в форме Миттаг-Леффлера и представив последнюю в виде степенного ряда, получим

$$u(t) = E_0 \int_{-\theta}^0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t')^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \left[-\left(\frac{t-t'}{\tau}\right)^\alpha \right]^j dt', \quad t \geq 0.$$

¹ «Неживая материя обладает памятью!»

Изменим порядок интегрирования и суммирования и, воспользовавшись свойством гамма-функции, получим:

$$u(t) = \tau^\alpha E_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha + 1)} \left[\left(\frac{t + \theta}{\tau} \right)^{\alpha j + \alpha} - \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\alpha j + \alpha} \right]. \quad (15.4.1)$$

Перейдя к суммированию по $k = j + 1$ и приняв во внимание соотношение

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (t/\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 1 - E_\alpha(-(t/\tau)^\alpha),$$

приходим к следующему выражению для отношения $u(t)/u(0)$, $t > 0$:

$$u(t)/u(0) = \frac{E_\alpha(-t^\alpha/\tau^\alpha) - E_\alpha[-(t + \theta)^\alpha/\tau^\alpha]}{1 - E_\alpha[-\theta^\alpha/\tau^\alpha]}. \quad (15.4.2)$$

Каждому значению параметра α здесь соответствует семейство кривых, относящихся к различным временам зарядки θ , и только одному значению α ($\alpha = 1$) соответствует одна кривая, не зависящая от θ . Действительно:

$$\begin{aligned} |u(t)/u(0)|_{\alpha=1} &= \frac{E_1(-t/\theta) - E_1[-(t + \theta)/\tau]}{1 - E_1(-\theta/\tau)} = \\ &= \frac{1 - \exp(-\theta/\tau)}{1 - \exp(-\theta/\tau)} \exp(-t/\tau) = \exp(-t/\tau), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

В области больших времен $t \gg \theta$ разность и время зарядки θ в сумме (15.4.2) можно считать дифференциалами. Тогда из выражений (15.4.1-15.4.2) следует

$$u(t) \sim \theta E_0 t^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(\alpha j + \alpha)} \left(\frac{t}{\tau} \right)^{\alpha j} = \theta E_0 t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-(t/\tau)^\alpha], \quad t \gg 0.$$

Известно, что эта функция имеет степенной «хвост»: $f_\alpha(t) \propto t^{-\alpha-1}$, при $t \rightarrow \infty$. В случае если $t \ll \theta$, второй член в формуле (15.4.1) становится пренебрежимо малым для $t \gg \tau$: $f_\alpha(t) \propto t^{-\alpha}$ ($\tau \ll t \ll \theta$).

Кривые зарядки-разрядки, построенные с использованием выражения (15.4.1) для $\alpha = 0.998$ представлены на Рис. 15.1. Времена зарядки $\theta = 10$ с (верхняя линия), 7.5 с; 5.0 с и 2.5 с (нижняя линия). Длительное время напряжение спадает согласно экспоненциальному закону Дебая, но после некоторого момента мы наблюдаем расщепление кривых для различных значений θ и переход в недебаевский степенной закон. Это выглядит так, как будто память возвращается в систему после некоторого

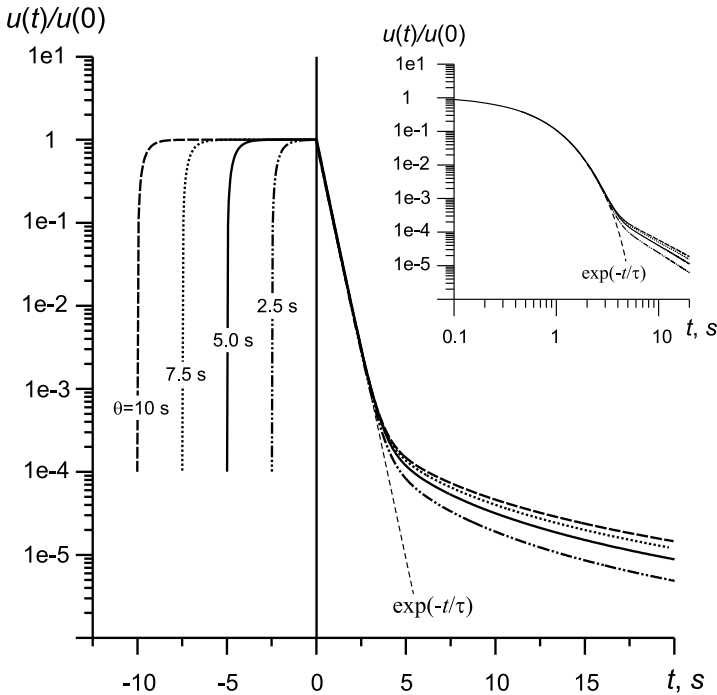


Рис. 15.1: Рассчитанные кривые зарядки-разрядки для различных значений θ .

интервала времени. Такое поведение было названо *эффектом восстановления памяти* [4]. При $\alpha = 1$ релаксация следует дебаевскому закону независимо от θ : память отсутствует.

Экспериментальные измерения проводились следующим образом [6]. Сначала конденсатор был шунтирован с помощью резистора и амперметра. Затем с блока питания подавалось необходимое напряжение смещения и конденсатор заряжался в течение времени θ . По истечении времени θ конденсатор снова шунтировался. Измерения проводились над конденсатором Российского производства, состоящего из технической бумаги и масла. Его постоянная емкость равна $2 \cdot 10^{-6}$ Ф. Для измерения тока был выбран резистор с сопротивлением $2 \cdot 10^5$ Ом. Напряжение источника питания 200 В. Результаты, представленные на Рис. 15.2 подтверждают теоретические предположения, изображенные на Рис. 15.1. Релаксация не зависит от зарядки на протяжении некоторого времени, но после процесс продолжается в зависимости от способа зарядки.

На Рис. 15.3 сравниваются вычисленные кривые разрядки (точки) с экспериментальными данными (сплошные линии) с использованием единственного подгоночного параметра α . Видно неплохое согласие теоретиче-

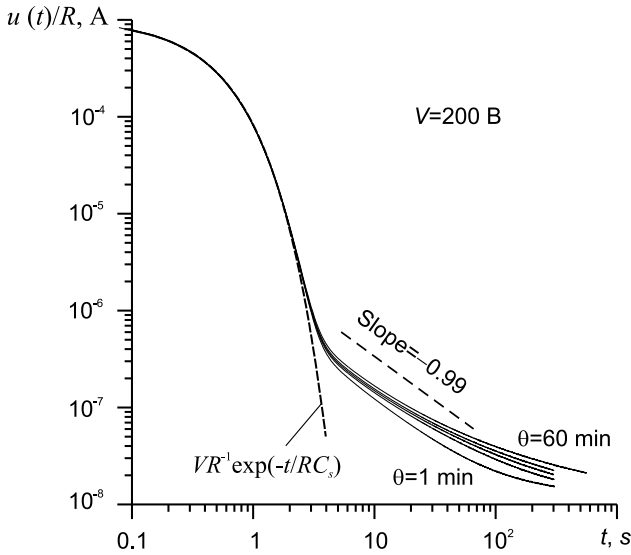


Рис. 15.2: Экспериментальные кривые разрядки бумажного конденсатора.

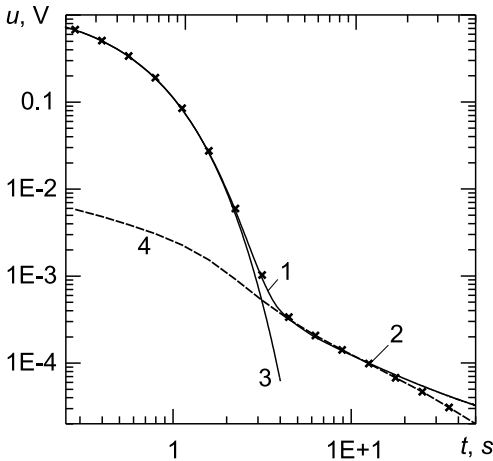


Рис. 15.3: Сравнение численных результатов (2) с экспериментальными данными (1) для бумажного конденсатора $\theta = 300 \text{ с}$, $\tau \approx 0,4 \text{ с}^{-1}$. Параметр α выбран равным 0,998. 3 – экспоненциальная функция; 4 – разница между теоретической кривой и экспоненциальной функцией.

ского решения и экспериментальных данных, хотя наблюдается некоторое различие на больших временах. При больших θ , для процесса зарядки-

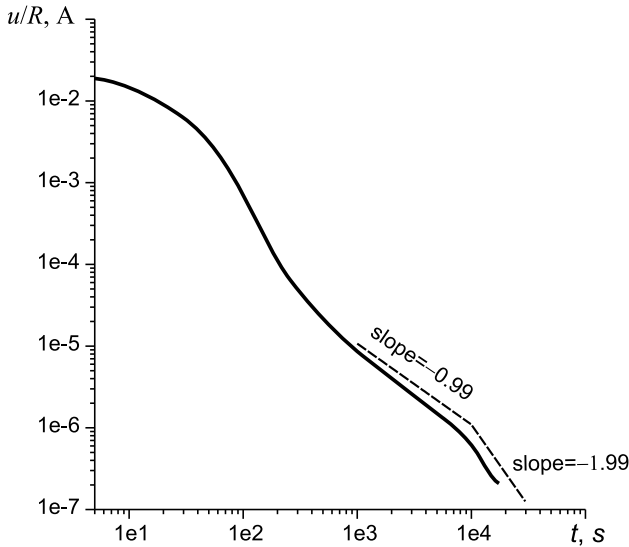


Рис. 15.4: Экспериментальная кривая разрядки для электролитического конденсатора ($\theta = 3600$ с).

разрядки был теоретически предсказан переход от одного убывающего степенного закона ($t^{-\alpha}$) к другому ($t^{-\alpha-1}$). Такое изменение показателя степенного закона было действительно обнаружено в опытах с электролитическим конденсатором (Рис. 15.4).

В заключение мы должны сказать несколько слов о значении результатов. Термин «восстановление» не должен вводить в заблуждение: никакого физического механизма восстановления нет, речь идет об *относительных вкладах двух компонент*

$$u(t)/u(0) = e^{-t/\tau} + \eta_{\alpha}(t),$$

первая из которых не зависит от предыстории, а вторая – зависит. Обе они убывают со временем, но первое (экспоненциальное) слагаемое, поначалу много большее второго, убывает быстрее. В результате, второе слагаемое, пренебрежимо малое по сравнению с первым, становится доминирующим при больших временах, где расщепление кривых становится ясно различимым.

15.5 Процесс Коула-Дэвидсона

Следуя работе [7], рассмотрим другой тип релаксации – Коула-Дэвидсона. Чтобы перейти к описанию этого типа, Р. Нигматуллин пред-

ставляет обычное уравнение экспоненциальной релаксации в виде

$$\exp(-\Omega_0 t) D_t \exp(\Omega_0 t) f(t) = 0, \quad (15.5.1)$$

где Ω_0 – постоянная, описывающая взаимодействие макроскопического диполя с термостатом [8]. В частности уравнению (15.5.1) подчиняется функция $f(t)$ для систем, релаксация которых на микроуровне может быть описана моделью глубокой потенциальной ямы с двумя положениями равновесия (релаксатор Фрелиха) [8-11]. В этой модели процесс релаксации начинается после того, как с помощью внешнего поля создается разница в энергии для этих двух положений равновесия. Известно, что модель релаксатора Фрелиха справедлива для широкого класса диэлектриков и существуют работы, авторы которых предпринимали попытки модифицировать эту модель, используя модели прыжкового переноса заряда и ионной проводимости [9, 10], так, чтобы с ее помощью можно было описать неэкспоненциальную релаксацию. Однако в конечном счете все такие попытки базируются на концепции распределенных времен релаксации (РВР), согласно которой недебаевский закон релаксации $f(t)$ представляется в виде суперпозиции дебаевских с плотностью распределения времен $p(\tau)$:

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} p(\tau) d\tau. \quad (15.5.2)$$

В статье [7] модель релаксатора Фрелиха модифицируется исходя из других соображений.

Рассмотрим функцию $G(t) = \exp(\Omega_0 t) f(t)$. Если $f(t)$ – решение уравнения (15.5.1), то тогда $G(t) = f(0)$ – константа и

$$D_t G(t) = 0. \quad (15.5.3)$$

Предположим теперь, что в некоторые моменты времени система находится в состоянии равновесия. Другими словами, в эти моменты времени $G(t) = 0$, а не $f(0)$ и вместо неравновесной картины существует равновесное состояние. Причиной этого могут быть, например, тепловые флуктуации локальных полей в диэлектрике, приводящие к экранировке внешнего поля.

Кроме того, предположим, что моменты времени когда $G(t) = f(0)$ распределены по самоподобному (фрактальному) множеству. Иначе говоря, в моменты времени, совпадающие с точками некоторого самоподобного множества, $G(t) = f(0)$, а в моменты, совпадающие с пустотами этого множества, $G(t) = 0$. Тогда, интегрируя функцию $G(t)$ и осуществляя

усреднение по различным реализациям построения самоподобного множества, можно получить [12]

$${}_0D_t^{-1}G(t) = A {}_0D_t^{-\beta}[f(0)]. \quad (15.5.4)$$

Здесь A – постоянная, определяемая структурой фрактального множества, на котором распределена $G(t)$, $\beta \in (0, 1]$ – его фрактальная размерность.

Используя свойства операторов дробного интегрирования и дифференцирования, выражение (15.5.1) можно переписать в виде

$${}_0D_t^\beta[G(t)] = 0. \quad (15.5.5)$$

Иначе говоря, если мы рассматриваем релаксацию, при которой взаимодействие с внешним полем носит прерывистый самоподобный характер, то тогда уравнение (15.5.3) для функции $G(t)$ заменяется уравнением (15.5.5).

Принимая во внимание $G(t)$, уравнение для функции релаксации $f(t)$ можно записать в виде

$$\exp(-\Omega_0 t) {}_0D_t^\beta[\exp(\Omega_0 t)f(t)] = 0 \quad (15.5.6)$$

или с использованием операторного соотношения [12]

$$\exp(-\Omega u) {}_0D_t^{1-\varepsilon} {}_0D_t^\alpha \exp(\Omega u) {}_0D_t^{1-\varepsilon} = ({}_0D_t^\varepsilon + \Omega\varepsilon)^{\alpha/\varepsilon},$$

$$0 < \varepsilon \leq 1, \quad \alpha \leq \varepsilon,$$

придать ему более наглядную форму Коула – Дэвидсона:

$${}_0(D_t + \Omega_0)^\beta f(t) = 0. \quad (15.5.7)$$

Следующие выводы сделаны в конце цитируемой работы.

1) Процесс Коула-Дэвидсона может иметь место в системах, к которым применима модель релаксатора Фрелиха в сочетании с недебаевской релаксацией. Возможно, такие условия выполняются в сегнетоэлектриках, кристаллах с ионной проводимостью, а также в жидких и пластических кристаллах.

2) Функция релаксации таких систем удовлетворяет уравнению

$$[D_t + \Omega_0]^\beta f(t) = 0,$$

и имеет вид

$$f(t) = C \frac{t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\Omega_0 t}.$$

3) Параметр β «имеет смысл фрактальной размерности множества, на котором статистически распределены моменты времени, ответственные за взаимодействие между элементарной составляющей физической системы и внешним полем».

15.6 Процесс Гаврильяка-Негами

Более общая аппроксимация, охватывающая все три рассмотренных выше дается двухпараметрической формулой Гаврильяка-Негами

$$\tilde{f}_\alpha^\beta(i\omega) = \frac{1}{[1 + (i\omega\tau)^\alpha]^\beta}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 < \beta < 1. \quad (15.6.1)$$

Решение соответствующего дробно-дифференциального уравнения

$$[1 + (\tau \, {}_0D_t)^\alpha]^\beta f(t) = \delta(t),$$

основанное на разложении дробной степени операторной суммы в бесконечный ряд Ньютона

$$[1 + (\tau \, {}_0D_t)^\alpha]^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\beta}{n} (\tau \, {}_0D_t)^{\alpha(\beta-n)},$$

получено в работе [13] и имеет вид:

$$f(t) = -\frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta)}{n! \Gamma(\alpha(n+\beta))} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha(n+\beta)}.$$

Поскольку параметр α , как мы видели в модели Коула-Коула, связан со степенным распределением времени удержания в ловушке, а параметр β характеризовал фрактальное распределение моментов релаксации в модели Коула-Дэвидсона, то естественно предположить, что рассматриваемому процессу Гаврильяка-Негами присущи обе эти особенности.

Иной подход к моделированию процесса Гаврильяка-Негами использован в работе [14].

15.7 Универсальный закон релаксации Джоншера

Нетрудно видеть, что все перечисленные выше модели недебаевской диффузии удовлетворяют критериям универсального отклика Джоншера:

$$f(t) = A[(t/\tau)^{\mu+1} + (t/\tau)^\nu]^{-1} \sim \begin{cases} A(t/\tau)^{-\mu-1}, & t \gg \tau, \quad 0 \leq \mu \leq 1; \\ A(t/\tau)^{-\nu}, & t \ll \tau, \quad 0 \leq \nu \leq 1 \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}(\omega) \sim \begin{cases} B(\omega\tau)^\mu, & \omega\tau \ll 1, \\ B(\omega\tau)^{\nu-1}, & \omega\tau \gg 1. \end{cases}$$

«Универсальность» в данном контексте означает, что тип релаксации многих (автор [15] считает – всех) материалов может быть охарактеризован заданием одной точки в плоскости α, β . Действительно, проведенный в [9, 15] анализ экспериментальных данных по релаксации поляризации полярных и неполярных диэлектриков, магнетиков в магнитном поле, прыжковой проводимости в полупроводниках, проводимости ионных проводников, замедленному спаду люминесценции, поверхностной проводимости изоляторов, кинетике химических реакций, механической релаксации упруго-пластичных материалов в основном подтверждает это предположение.

Выше мы уже обсуждали физические предпосылки такого поведения сложных систем. В работе [16] эта картина дополнена представлением о кластерах коррелированных диполей и выглядит следующим образом.

На микроскопическом уровне: имеется случайное число активных диполей, которые следуют за изменениями внешнего поля; их индивидуальные скорости релаксации определяются взаимодействием с их пассивными соседями, формирующими вокруг них кластеры случайных размеров.

На мезоскопическом уровне: появляются кластеры, содержащие связанные друг с другом молекулы; коллективная скорость релаксации в таких мезоскопических областях (доменах) коррелирует с числом активных диполей в домене и со стохастическими свойствами индивидуального поведения, отражая как пространственные, так и временные масштабы корреляций.

На макроскопическом уровне: усреднение в процессе суммирования вкладов всех доменов системы ведет к универсальному степенному поведению релаксации системы в целом.

В рамках концепции Джоншера, эффективность экранирования зависит от соотношения между плотностью термо-активированных диполей с энергией W ,

$$n_d \propto \exp\{-W/k_B T\}$$

и «критической» плотностью

$$n_c \propto k_B T / \mu^2,$$

где μ – дипольный момент экранируемой молекулы. Согласно этой концепции, при $n_d \ll n_c$ число диполей в окружении каждого диполя возрастает почти экспоненциально, так что их поведение является коллективным и определяет универсальный тип релаксации системы в целом.

Противоположный же случай $n_d \gg n_c$ характеризуется эффективным экранированием, вследствие которого диполи перестают «видеть» своих соседей и ведут себя независимо, определяя тем самым дебаевский тип релаксации (см. Табл. 15.2).

Табл. 15.2. Дебаевская и недебаевская релаксация [15]

Признаки	Дебаевский закон	Универсальный закон
Концентрации	$n_d \gg n_c$	$n_d \ll n_c$
Экранирование	эффективное	неэффективное
Взаимодействие	слабое	сильное
Поведение	индивидуальное	коллективное

Наконец, в заключение главы приведем релаксацию Гавриляка-Негами в представлении распределенных времен релаксации [17]

$$f_\alpha^\beta(t) = \int_0^\infty e^{-t/\tau} p_\alpha^\beta(\tau) d\tau,$$

$$p_\alpha^\beta(\tau) = \frac{1}{\pi} \left| \frac{10^{s\alpha\beta} \sin(\beta\theta)}{[10^{2s\alpha} + 2 \cdot 10^{s\alpha} \cos(\alpha\pi) + 1]^{\beta/2}} \right|,$$

где $s = \log(\tau/\bar{\tau})$, $\bar{\tau}$ – наивероятное значение τ , а

$$\theta = \arctg \left[\frac{\sin(\alpha\pi)}{10^{s\alpha} + \cos(\alpha\pi)} \right].$$

Сопоставление этих формул с (15.6.1) дает, как мне представляется, убедительный аргумент в пользу временного подхода к поиску физической интерпретации недебаевской релаксации.

Литература

1. Curie M. J. Annales de chimie at de physique, ser.6, **18**, 203 (1889).
2. Von Schweidler E. R. Ann.der Physik **24**, 711 (1907).
3. Westerlund S. Physica Scripta **43**, 174 (1991).
4. Учайкин В. В., Учайкин Д. В. Ученые записки Ульяновского гос. университета. Серия «Физическая» 1(17), 14 (2005).
5. Uchaikin V. V., Uchaikin D. V. In: Chaos, Complexity and Transport – New Jersey: World Scientific, 2008, p. 337.

6. *Учайкин В. В., Амброзевич С. А., Сибатов Р. Т.* Материалы XI межд. конференции «Физика диэлектриков». – Санкт-Петербург, 2008, с. 129.
7. *Nigmatullin R. R., Ryabov Ya. E.* Phys. Solid State **39**, 87 (1997).
8. *Fröhlich H.* Theory of Dielectrics. – Oxford: Clarendon Press, 1958.
9. *Jonscher A. K.* Dielectric Relaxation in Solids. – London: Chelsea Dielectric Press, 1983.
10. *Jonscher A. K.* J. Mater. Sci. **16**, 2037 (1981).
11. *Губкин А. Н.* Изв. вузов. Физика **200**, 56 (1979).
12. *Нигматтуллин Р. Р., Рябов Я. Е.* ФТТ **39**, 101 (1997).
13. *Novikov V. V., Wojciechowski K. W., Komkova O. A., Thiel T.* Material Science – Poland **23**, 977 (2005).
14. *Uchaikin V. V.* Int. J. Theor. Phys. **42**, 121 (2003).
15. *Jonscher A. K.* Universal Relaxation Law. – London: Chelsea Dielectric Press, 1996.
16. *Jonscher A. K., Jurlewicz A., Weron K.* Contemporary Physics, 100456 (2003).
17. *Tuncer E.* ArXiv: cond-mat/0503750v1[cond-mat.dis], 31 Mar (2005).

Глава 16

Полупроводники

16.1 Диффузия в полупроводниках

Плотность тока $j_x(x, t)$, проходящего через р-п-переход в плоскости $x = 0$, выражается через концентрацию дырок $\rho(x, t)$ соотношением

$$j(t) = [eKD_x - e\mu E(0)] \rho(x, t) \Big|_{x=0},$$

где e – заряд электрона, K , μ , и τ – коэффициент диффузии, подвижность и среднее время жизни дырок, E – напряженность электрического поля нескомпенсированных зарядов. Сама же концентрация удовлетворяет уравнению:

$$[D_t - KD_x^2 + \mu E(x)D_x + 1/\tau] \rho(x, t) = 0, \quad x \geq 0, \quad t > 0$$

с краевыми условиями:

$$\rho(x, 0) = \rho(\infty, t) = 0.$$

Пусть плотность тока $j(t)$ – легко измеряемая величина – известна, требуется найти концентрацию дырок $\rho(0, t)$ в плоскости р-п-перехода $x = 0$. Значение этой величины определяет, в частности, момент запира-ния перехода при инверсии тока с положительного направления на обратное. Ограничимся здесь простейшим случаем $E = \text{const}$. Полагая для простоты $K = 1$ и вводя обозначения $\beta = \mu E$, $\gamma = 1/\tau$, $\delta = \beta^2/4 + \gamma$, методом факторизации получаем:

$$j(t) = e^{-\delta t} ({}_0D_t^{1/2} + \delta/2)e^{\delta t} \rho(0, t).$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\rho(0, t) = \frac{1}{e} \int_0^t \left[\frac{e^{-\delta(t-\theta)}}{\sqrt{\pi(t-\theta)}} - \frac{\beta}{2} e^{-\gamma(t-\theta)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\beta\sqrt{t-\theta}}{2} \right) \right] j(\theta) d\theta. \quad (16.1.1)$$

В действительности, конечно, напряженность поля, а следовательно, и коэффициент β , зависит от x . В частности, для умножительных СВЧ-диодов

$$\beta(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}l} \frac{\exp(-x^2/l^2)}{1 + \operatorname{erfc}(x/l)}.$$

В этом случае концентрация дырок записывается в виде ряда

$$\rho(0, t) = (1/e) \exp[-(l^2/\pi + \gamma)t] ({}_0D_t^{-1/2} + \pi^{-1/2}l^{-1} {}_0D_t^{-1} + \\ + 2\pi^{-1}l^{-2} {}_0D_t^{-3/2} + \dots) j(t).$$

Продолжение решения этой задачи можно найти в [1]. Мы отметим только, что дробные производные (полуинтегралы) выступают здесь как инструмент решения уравнения и не связаны с физикой процесса. В остальной же части главы появление дробных производных обусловлено физическими особенностями процессов переноса в неупорядоченных полупроводниках.

16.2 Дисперсионный перенос

Дисперсионный перенос (ДП) и субдиффузия носителей заряда наблюдается в различных по своей микроскопической структуре неупорядоченных полупроводниках: аморфных, органических, пористых, наноструктурных, поликристаллических, жидких, сильнолегированных и др. [2,3]. ДП считается альтернативой гауссова переноса, впрочем существуют попытки (см. например [4]) описать дисперсионную диффузию с помощью обычного диффузионного уравнения и гауссовой формы пакета частиц. Недавно было предложено использовать для описания ДП уравнения с дробными производными [5-9]. Формализм дробных производных часто упрекают в том, что предлагаемые уравнения не «подкреплены физическим содержанием» (см. например [10]). Перечислим основные способы вывода дробно-дифференциального субдиффузионного уравнения.

Уравнения с дробной производной по времени были получены Нигматуллиним при рассмотрении диффузии на фрактальных структурах, моделирующих пористые и неупорядоченные среды [11, 12].

Один из способов вывода уравнений основан на асимптотическом переходе от интегральных уравнений случайных блужданий модели Шера и Монтролла [13] со степенным распределением времен ожидания к дробно-дифференциальным (подробнее см. [14, 15]). Модель Шера и Монтролла, как известно, хорошо описывает основные особенности ДП.

Основываясь на уравнении Ланжевена, Метцлер и Клафтер [16] развили трехуровневое описание субдиффузии с переходом к макроскопической дробно-дифференциальной динамике. В [16] исследовалось немарковское обобщение уравнения Чэпмена-Колмогорова для случайных процессов с непрерывным временем, управляемое распределением времен ожидания. Асимптотически степенное распределение (с «тяжелыми хвостами») времен ожидания приводит к дробному уравнению Клейна-Крамерса, из которого выводятся дробные обобщения уравнений Релея и Фоккера-Планка.

Дробные уравнения можно получить из балансных уравнений захвата-эмиссии модели многократного захвата с экспоненциальной плотностью локализованных состояний (подробнее см. [7, 9]).

Часто дробно-дифференциальные уравнения получают простой заменой производных целых порядков в классических кинетических уравнениях производными дробных порядков, и лишь потом пытаются дать физическое обоснование такой замены (см. например [6]). Приходилось встречать и такое «обоснование»: «Вследствие сложности и запутанности траекторий движения частиц можно сказать, что градиент (производная по координате) становится фрактальным и $j \sim \partial^{2\gamma} n / \partial t^{2\gamma}$ ».

Все перечисленные способы основаны на предположениях относительно механизма переноса. Эти предположения приходится обосновывать при рассмотрении каждого отдельного случая: для конкретного материала и для конкретных условий эксперимента. Встает вопрос: нельзя ли непосредственно из набора экспериментальных данных сделать однозначный вывод о дробно-дифференциальном характере уравнения переноса?

16.3 Автомоделность

В нашей работе [17] дан феноменологический вывод дробно-дифференциальных уравнений ДП на основе экспериментально установленных фактов, без использования предположений относительно механизма переноса. Вывод этот важен не только с методической стороны, он указывает на то, что дробно-дифференциальные уравнения являются *универсальными* уравнениями дисперсионного переноса в неупорядоченных полупроводниках.

Рассмотрим классический «время-пролетный» эксперимент по определению дрейфовой подвижности носителей заряда, схема которого представлена на Рис. 16.1. Электроны и дырки генерируются в образце обычно световым импульсом лазера со стороны полупрозрачного электрода. К электродам прикладывается напряжение такое, что соответствующее электрическое поле внутри образца значительно превышает поле неравновесных носителей заряда. Электроны (или дырки, в зависимости от знака напряжения) уходят в полупрозрачный электрод, дырки (или, соответственно, электроны) дрейфуют к противоположному электроду. В случае нормального переноса дрейфующие без захвата в поле E носители формируют прямоугольный импульс фототока

$$I(t) \propto \begin{cases} \text{const}, & t < t_T, \\ 0, & t > t_T, \end{cases} \quad (16.3.1)$$

где *время пролета* t_T определяется скоростью дрейфа v и длиной образца L : $t_T = L/v$. В действительности, рассеяние делокализованных носителей в процессе дрейфа, захват в локализованные состояния и термическое высвобождение носителей приводят к размытию пакета. Этот пакет носителей имеет гауссову форму со средним значением $\langle x(t) \rangle \propto t$ и шириной $\Delta x(t) \propto \sqrt{t}$. В этом случае переходный ток $I(t)$ остается постоянным, пока передний фронт гауссова пакета не достигает другого края образца. Спад тока происходит в течение времени $\Delta x/\langle v \rangle$. Как результат, мы наблюдаем сглаженный правый край импульса фототока. Такая картина наблюдается в большинстве упорядоченных материалов.

Однако в некоторых неупорядоченных полупроводниках (в аморфных, пористых, неупорядоченных органических, сильно легированных и др.) наблюдается специфический сигнал переходного тока $I(t)$, состоящий из двух областей со степенным поведением $I(t)$ и промежуточной

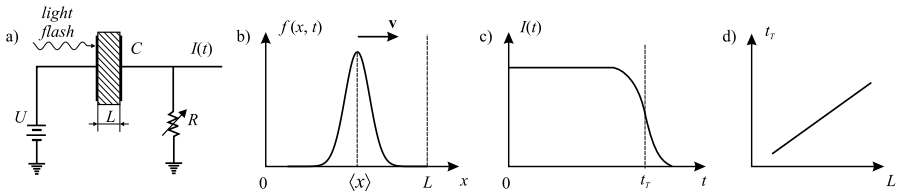


Рис. 16.1: Методика экспериментов по определению дрейфовой подвижности: а) электрическая схема эксперимента, б) распределение носителей заряда при нормальном переносе, в) кривая переходного тока при нормальном переносе, д) линейная зависимость времени пролета от толщины образца.

области:

$$I(t) \propto \begin{cases} t^{-1+\alpha}, & t < t_T, \\ t^{-1-\alpha}, & t > t_T, \end{cases} \quad \alpha < 1. \quad (16.3.2)$$

Показатель α , называемый *дисперсионным параметром*, зависит от характеристик среды и может зависеть от температуры. По аналогии с нормальными переходными процессами параметр t_T называется временем пролета, хотя имеет несколько иной физический смысл. Экспериментально установлено [13], что при дисперсионном переносе

$$t_T \propto (L/U)^{1/\alpha}, \quad (16.3.3)$$

где U – напряжение.

Форма сигнала переходного тока в приведенных координатах $\lg[I(t)/I(t_T)] - \lg(t/t_T)$ практически не зависит от величины приложенного напряжения и размеров образца (подробнее см. [2, 3]). Это свойство присуще многим материалам и названо *свойством универсальности формы кривых переходного тока*. Распространенность этих особенностей для различных неупорядоченных материалов подтверждает *универсальность* свойств переноса.

Если наблюдаются зависимости (16.3.2, 16.3.3), то кривые переходного тока автоматически обладают *асимптотическим свойством универсальности*. Действительно, перепишем (16.3.2) в виде

$$I(t) \sim \begin{cases} A(L, E, \alpha, \dots) t^{-1+\alpha}, & t < t_T, \\ B(L, E, \alpha, \dots) t^{-1-\alpha}, & t > t_T, \end{cases} \quad (16.3.4)$$

Время пролета t_T определяется по пересечению асимптотик:

$$I_T = A(L, E, \alpha, \dots) t_T^{-1+\alpha} = B(L, E, \alpha, \dots) t_T^{-1-\alpha}.$$

Откуда $t_T = (B/A)^{1/2\alpha}$. Свойство асимптотической универсальности означает, что функция $I(\tau t_T)/I_T$ для $\tau \ll 1$ и $\tau \gg 1$ не зависит от t_T . Нетрудно заметить, что для функций с асимптотиками (16.3.4) это свойство справедливо:

$$I(\tau t_T)/I_T \sim \begin{cases} \tau^{-1+\alpha}, & \tau < 1, \\ \tau^{-1-\alpha}, & \tau > 1, \end{cases} \quad \alpha < 1.$$

Отметим, что значение $I(t_T)$ не равно I_T . Точка (t_T, I_T) определяется по пересечению асимптотик переходного тока при малых и больших временах.

Схема измерения во время-пролетных экспериментах выполняется таким образом, что плотность переходного фототока в образце толщиной L определяется как усредненная по толщине плотность тока

проводимости

$$I(t) = \frac{1}{L} \int_0^L j(x, t) dx. \quad (16.3.5)$$

Очевидно, что на начальном этапе $t \ll t_T$ интеграл в последней формуле не зависит от L . Согласно (16.3.3), $t_T \propto L^{1/\alpha}$. Значит, для A , B и I_T можно записать:

$$A \propto L^{-1}, \quad B \propto A t_T^{2\alpha} \propto L, \quad I_T \propto L^{-1/\alpha}.$$

Таким образом, универсальность формы кривых переходного тока представляет собой в математическом смысле свойство автомодельности (самоподобия) на временных масштабах

$$I(t; L_2) \approx (L_2/L_1)^{-1/\alpha} I\left(t(L_2/L_1)^{-1/\alpha}; L_1\right), \quad (16.3.6)$$

где $I(t; L_1)$ и $I(t; L_2)$ – временные зависимости переходного тока в образцах толщиной L_1 и L_2 соответственно.

Плотность тока проводимости $j(x, t)$ пропорциональна плотности распределения времени первого достижения $p(t|x)$

$$j(x, t) = eNp(t|x),$$

где e – элементарный заряд, N – число фотоинжектированных носителей, приходящееся на единицу площади освещаемого электрода. Произведение $p(t|x)dt$ представляет собой вероятность того, что блуждающая частица (в нашем случае, носитель заряда) достигнет координаты x , за время, лежащее в интервале $[t, t + dt)$. Плотность распределения координаты блуждающей частицы $p(x|t)$ и поток вероятности $p(t|x)$ связаны уравнением сохранения вероятности

$$\frac{\partial p(x|t)}{\partial t} + \frac{\partial p(t|x)}{\partial x} = \delta(x)\delta(t). \quad (16.3.7)$$

Согласно (16.3.2) асимптотика переходного тока и плотности распределения времени первого достижения на больших временах является степенной с показателем α . Из (16.3.6) и (16.3.7) следует самоподобие функции $p(t|x)$ на временных масштабах:

$$p(t|x_2) = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-1/\alpha} p\left(t\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{-1/\alpha} \middle| x_1\right). \quad (16.3.8)$$

16.4 Устойчивость как следствие автомодельности

Время достижения координаты $2x$ является случайной величиной и представляет собой сумму двух слагаемых – независимых случайных времен, за которые носитель проходит слои $(0, x)$ и $(x, 2x)$. Соответствующее распределение выражается сверткой распределений времен прохождения каждого слоя:

$$p(t|2x) = 2^{-1/\alpha} p(2^{-1/\alpha}t|x) = \int_0^t dt p(t-t'|x) p(t'|x) = p^*(t|x). \quad (16.4.1)$$

Первое равенство в (16.4.1) следует из автомодельности (16.3.6). Решением уравнения (16.4.1) является односторонняя устойчивая плотность с характеристическим показателем α :

$$p(t|x) = \left(\frac{x}{K}\right)^{-1/\alpha} g_+ \left(t \left(\frac{x}{K}\right)^{-1/\alpha}; \alpha \right). \quad (16.4.2)$$

Таким образом, плотность распределения времени первого достижения представляет собой одностороннюю устойчивую плотность с характеристическим показателем, равным дисперсионному параметру.

Подставив плотность тока проводимости $j(x, t) = eNp(t|x)$ в формулу (16.3.5), приходим к выражению для переходного тока:

$$I(t) = \frac{eKN\alpha}{L} t^{\alpha-1} \int_{\zeta_0}^{\infty} \zeta^{-\alpha} g_+(\zeta; \alpha) d\zeta. \quad (16.4.3)$$

Здесь $\zeta_0 = t(L/K)^{-1/\alpha}$. Кривые переходного тока (16.4.3) в приведенных координатах для различных значений α показаны на рис. 16.2. Сравнение фототока (16.4.3) с экспериментальными данными и результатом, полученным с помощью «основного уравнения ДП» Архипова-Руденко [18], представлено на рис. 16.3. Рисунок показывает, что решение дробно-дифференциального уравнения ближе к экспериментальным данным, чем решение «основного уравнения ДП» Архипова-Руденко. При выводе своего уравнения авторы [19] использовали приближение, согласно которому большинство носителей захвачены на достаточно глубокие ловушки (ниже демаркационного уровня), освобождение с которых к моменту t остается маловероятным. Условие это не выполняется при значениях α , близких к единице, и не обеспечивает переход при $\alpha \rightarrow 1$ к режиму нормального переноса.

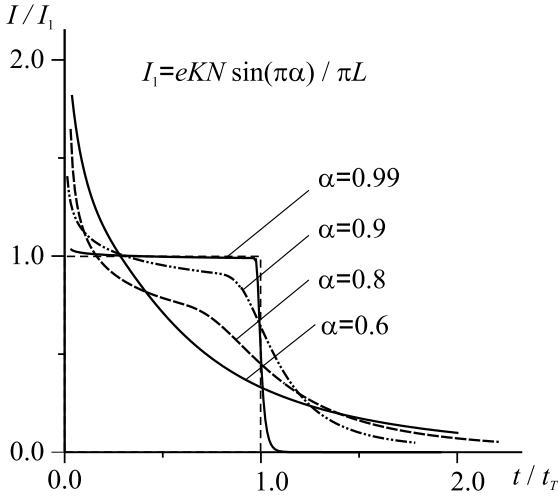


Рис. 16.2: Теоретические кривые переходного тока (16.4.3), для различных значений дисперсионного параметра.

Плотность распределения параллельной полю координаты фотоинжектированных носителей $f(x, t)$, как следует из (16.3.7) и (16.4.2), равна

$$f(x, t) = p(x|t) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^t p(t|x) dt = \frac{t}{\alpha K} \left(\frac{x}{K}\right)^{-1/\alpha-1} g_+ \left(t \left(\frac{x}{K}\right)^{-1/\alpha}; \alpha \right). \quad (16.4.4)$$

Графики этой плотности представлены на рис. 16.4.

16.5 Дробно-дифференциальные уравнения как следствие устойчивости

Функции (16.4.2) и (16.4.4) являются решением уравнений с дробными производными:

$$K^{-1} {}_0D_t^\alpha p(t|x) + \frac{\partial}{\partial x} p(t|x) = \delta(x)\delta(t),$$

$${}_0D_t^\alpha f(x, t) + K \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \delta(x). \quad (16.5.1)$$

Здесь рассматривалось одностороннее движение носителей. В случае наличия потока в отрицательном направлении и/или рассеяния носителей

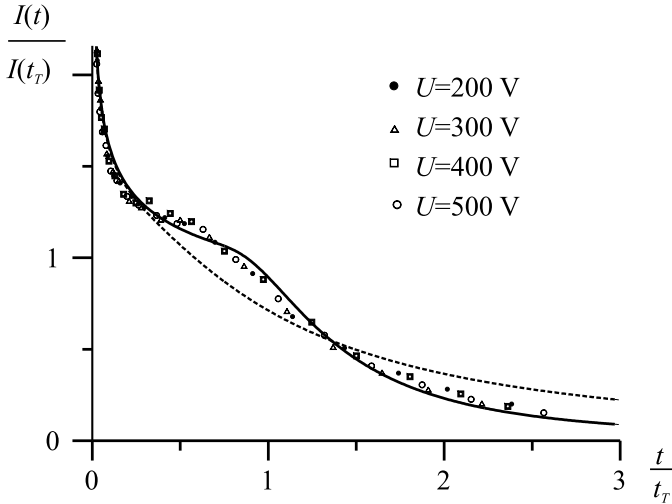


Рис. 16.3: Кривые переходного тока. Точки – экспериментальные данные для органического комплекса ТНФ-ПВК [13]; пунктир – результат, полученный с помощью «основного уравнения ДП» Архипова-Руденко [18]; сплошная линия – переходный ток (16.1.2). Дисперсионный параметр $\alpha = 0.8$.

в последнем уравнении добавится диффузионное слагаемое:

$${}_0D_t^\alpha f(x, t) + K \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} - D \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \delta_\alpha(t) \delta(x), \quad (16.5.2)$$

где $\delta_\alpha(t) = t^{-\alpha} / \Gamma(1 - \alpha)$.

При устремлении дисперсионного параметра α к единице фундаментальные решения уравнения (16.5.2) переходят в гауссову плотность, при этом само уравнение переходит в классическое одномерное уравнение Фоккера-Планка.

Таким образом, проведенный выше анализ позволяет констатировать следующее:

- из экспериментально установленных фактов (свойства универсальности кривых переходного тока и степенной зависимости времени пролета от толщины образца) необходимо следует, что концентрации неравновесных носителей при дисперсионном переносе выражаются через *устойчивые плотности* и удовлетворяют *дробно-дифференциальным* уравнениям;
- в отличие от решений, полученных с помощью «основного уравнения дисперсионного переноса» Архипова-Руденко, решения дробно-дифференциальных уравнений удовлетворяют *принципу соответ-*

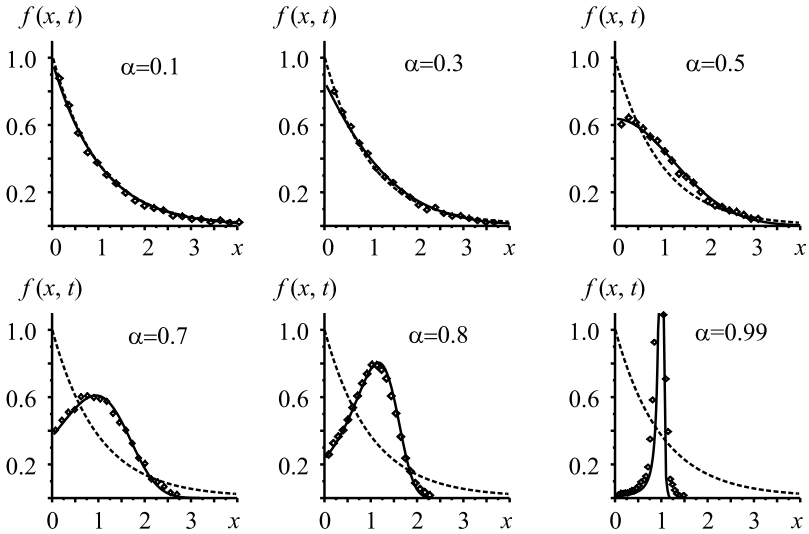


Рис. 16.4: Нормированная на единицу полная концентрация носителей. Точки – результат моделирования методом Монте-Карло в рамках схемы блужданий Шера-Монтролла, пунктир – результат, полученный с помощью «основного уравнения ДП» Архипова-Руденко [19], сплошные линии – плотности (16.4.4).

ствия, т. е. при устремлении дисперсионного параметра α к единице переходят в решения для нормального переноса, при этом сами уравнения переходят в классическое уравнение Фоккера-Планка;

- *устойчивая плотность* потока вероятности при дисперсионном дрейфе доказывает справедливость гипотезы Шера и Монтролла о степенном распределении времен ожидания.
- дробно-дифференциальная модель согласуется с теорией Шера и Монтролла и моделью многократного захвата, но при этом дробно-дифференциальная модель позволяет в рамках *единого формализма* описывать нормальный и дисперсионный перенос;
- дробно-дифференциальное уравнение может служить феноменологической основой для описания дисперсионного переноса в неупорядоченных полупроводниках.

Литература

1. *Бабенко Ю. И.* Тепло- и массоперенос. – Ленинград: Химия, 1986.
2. *Меден А., Шо М.* Физика и применение аморфных полупроводников. – М.: Мир, 1991.
3. *Звягин И. П.* Кинетические явления в неупорядоченных полупроводниках.– М.: Мир, 1984.
4. *Какалиос Дж., Джексон У.* В кн.: Аморфный кремний и родственные материалы. – Под ред. Х. Фрицше – М.:Мир, 1991.
5. *Barkai E.* Phys. Rev. E **63**, 046118 (2001).
6. *Bisquert J.* Phys. Rev. Lett. **91**, 010602 (2003).
7. *Bisquert J.* Phys. Rev. E **72**, 011109 (2005).
8. *Uchaikin V. V., Sibatov R. T.* In.: Nonlinear Science and Complexity – Edited by A. C. J. Luo et al. – World Scientific, Singapore, 2007.
9. *Сибатов Р. Т., Учайкин В. В.* Физика и техника полупроводников **41**, 346 (2007).
10. *Дыхне А. М., Кондратенко П. С., Матвеев Л. В.* Письма ЖЭТФ **80**, 464 (2004).
11. *Nigmatullin R. R.* Phys. Status Solidi B **123**, 739 (1984).
12. *Nigmatullin R. R.* Phys. Status Solidi B **124**, 389 (1984).
13. *Scher H., Montroll E. W.* Phys. Rev. B **12**, 2455 (1975).
14. *Saichev A. I., Zaslavsky G. M.* Chaos **7**, 753 (1997).
15. *Учайкин В. В.* ЖЭТФ **115**, 2113 (1999).
16. *Metzler R., Klafter J.* Phys. Rev. E **61**, 6308 (2000).
17. *Учайкин В. В., Сибатов Р. Т.* Письма в ЖЭТФ **86**, 584 (2007).
18. *Arkhipov V. I., Rudenko A. I.* Philos. Mag. B **45**, 189 (1982).
19. *Архипов В. И., Казакова Л. П., Лебедев Э. А., Руденко А. И.* ФТП **22**, 723 (1988).

Глава 17

Электротехника

17.1 Полубесконечная электрическая линия

Рассмотрим однородную электрическую линию передач длиной l [1]. Пусть L , C и R – самоиндукция, емкость и сопротивление единицы длины линии. К одному концу линии (с координатой $x = 0$) приложена электродвижущая сила $E_0(t)$, а другой конец замкнут на обобщенное сопротивление $Z(p)$ (Рис. 17.1). Обозначим через $U(x, t)$ разность потен-

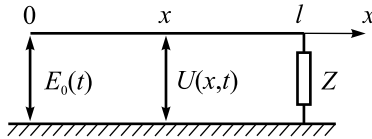


Рис. 17.1: К выводу телеграфного уравнения.

циалов между точкой x линии и землей (напряжение), а через $I(x, t)$ – ток в этой точке в момент времени t . Падение напряжения на единице длины складывается из падения, создаваемого самоиндукцией, и омического падения напряжения:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} - RI. \quad (17.1.1)$$

Перепад тока на этом участке равен сумме токов утечки через емкость ($C\partial U/\partial t$) и через изоляцию (GU):

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial U}{\partial t} - GU. \quad (17.1.2)$$

Если исключить ток, получим уравнение

$$LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + (RC + LG) \frac{\partial U}{\partial t} + RGU = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

называемое *телеграфным*.

Вернемся к системе уравнений (17.1.1)-(17.1.2) и выполним преобразование Лапласа по времени:

$$\frac{d\widehat{U}}{dx} = -L(L\lambda + R)\widehat{I}(x, \lambda), \quad (17.1.3)$$

$$\frac{d\widehat{I}}{dx} = -(C\lambda + G)\widehat{U}(x, \lambda).$$

Эта система двух уравнений первого порядка приводится к одному уравнению второго порядка, которое может быть записано как для напряжения

$$\frac{d^2\widehat{U}}{dx^2} - \mu^2\widehat{U}(x, \lambda) = 0, \quad (17.1.4)$$

так и для тока

$$\frac{d^2\widehat{I}}{dx^2} - \mu^2\widehat{I}(x, \lambda) = 0,$$

где

$$\mu^2 = (C\lambda + G)(L\lambda + R).$$

Общее решение уравнения (17.1.4)

$$\widehat{U}(x, \lambda) = Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}. \quad (17.1.5)$$

Из уравнения (17.1.3) следует

$$\widehat{I}(x, \lambda) = \sqrt{(C\lambda + G)/(L\lambda + R)}(Be^{-\mu x} - Ae^{\mu x}).$$

Постоянные A и B определяются граничными условиями:

$$\widehat{U}(0, \lambda) = A + B, \quad (17.1.6)$$

$$\widehat{U}(l, \lambda) = Ae^{\mu l} + Be^{-\mu l}. \quad (17.1.7)$$

Очевидно,

$$\widehat{U}(0, \lambda) = \widehat{E}_0(\lambda).$$

Введя обобщенное сопротивление $\widehat{Z}(\lambda)$ соотношением

$$\widehat{U}(l, \lambda) = \widehat{I}(l, \lambda)\widehat{Z}(\lambda),$$

запишем второе условие в виде

$$Ae^{\mu l} + Be^{-\mu l} = \widehat{Z}(\lambda) \sqrt{(C\lambda + G)/(L\lambda + R)} (Be^{-\mu l} - Ae^{\mu l}).$$

Положив

$$\gamma = \widehat{Z}(\lambda) \sqrt{(C\lambda + G)/(L\lambda + R)},$$

мы получим для определения постоянных два уравнения:

$$A + B = \widehat{E}_0(\lambda),$$

$$(\gamma + 1)Ae^{\mu l} = (\gamma - 1)Be^{-\mu l}.$$

Замкнем теперь конец линии на обобщенное сопротивление, равное *характеристическому сопротивлению линии* $\widehat{Z}_c = \sqrt{(L\lambda + R)/(C\lambda + G)}$, тогда $\gamma = 1$ и из уравнений (17.1.6), (17.1.7) имеем $A = 0$, $B = E_0(\lambda)$ и

$$\widehat{I}(\lambda) = \frac{\widehat{U}(\lambda)}{\widehat{Z}_c(\lambda)},$$

где

$$\widehat{U}(\lambda) = \widehat{E}_0(\lambda) \exp \left[-\sqrt{(L\lambda + R)(C\lambda + G)} x \right].$$

Этот случай соответствует полубесконечной линии: в ней нет отраженной волны. Это видно из выражения (17.1.5): чтобы оно сохраняло физический смысл при $x \rightarrow \infty$, в частности, оставалось ограниченным по величине, постоянная A должна быть равна нулю.

Если взять теперь случай, когда самоиндукция линии мала по отношению к емкости (в смысле влияния на процесс), а изоляция очень хорошая (пример, подземный кабель), то

$$\widehat{Z}_c = \sqrt{\frac{L\lambda + R}{C\lambda + G}} \simeq \sqrt{\frac{R}{C}} \lambda^{-1/2},$$

и мы приходим к соотношению

$$\widehat{I}(\lambda) = \sqrt{\frac{C}{R}} \lambda^{1/2} \widehat{U}(\lambda),$$

эквивалентному уравнению с дробной производной

$$I(t) = \sqrt{\frac{C}{R}} {}_0D_t^{1/2} U(t).$$

17.2 Электрохимия

На основе дробного исчисления в 70-х годах прошлого века были развиты новые методы анализа в электрохимии – полуинтегральный и полудифференциальный методы [2, 3]. Основная задача электрохимического анализа – определение концентрации $\rho(x, t)$ электроактивных элементов на поверхности электрода $x = 0$. Непосредственное измерение $\rho(0, t)$ затруднительно, гораздо легче определяется в эксперименте плотность тока на поверхности

$$j_x(0, t) = -K \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Использование этой формулы, однако, требует решения диффузионного уравнения в правом полупространстве (внутри электрода)

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x^2}.$$

В работе [4] было предложено «извлечь квадратный корень» из операторов, стоящих в обеих частях этого уравнения и подставить в полученное уравнение $x = 0$:

$${}_0D_t^{1/2} \rho(0, t) = K^{1/2} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = -K^{-1/2} j_x(0, t)$$

Это соотношение в обращенном виде

$$\rho(0, t) = -K^{-1/2} {}_0D_t^{-1/2} j_x(0, t) = -K^{-1/2} {}_0I_t^{1/2} j(0, t) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{j_x(0, \tau) d\tau}{\sqrt{t - \tau}}$$

и легло в основу нового метода электрохимии. Все физические характеристики здесь взяты только на границе $x = 0$, никакой избыточной информации больше не используется. По-существу, это было первое применения метода факторизации с использованием производных дробных порядков.

17.3 Импеданс шероховатой поверхности

Характеристики электрохимических устройств и протекающих в них процессов во многом определяются свойствами поверхности металлического электрода, находящейся в контакте с жидким или твердым электролитом. В классической теории влияние границы на прохождение

переменного тока через систему описывается граничной емкостью, включенной параллельно с омическим сопротивлением электролита. При этом действительная часть импеданса не зависит от частоты, а мнимая обратно пропорциональна ей. Многие эксперименты (начиная с работы [5]) однако показывают в большинстве случаев иной характер поведения: по крайней мере, в ограниченном диапазоне частот частотная зависимость импеданса характеризуется добавочным членом степенного вида $A(i\omega)^{-\eta}$ с показателем η , лежащим между нулем и единицей, $0 < \eta < 1$. Этот член называют *элементом постоянной фазы* (ЭПФ). Наличие ЭПФ связывается с шероховатостью поверхности: чем более гладкой является поверхность, тем ближе η к единице. В работе [6] показано, что имитация шероховатости порами действительно приводит к степенной зависимости, правда с определенным значением показателя $\eta = 1/2$, если только не предполагать специальной пространственной структуры распределения сопротивления и емкости.

Основанием для построения таких структур служат исследования поверхностей с помощью электронных микроскопов. Отсутствие естественного масштаба длины, проявляющееся в том, что различные увеличения дают приблизительно одну и ту же картину распределения неоднородностей, позволяет использовать фрактальную концепцию. В качестве фрактальной модели в работе [7] было взято канторово множество, на каждой стадии построения которого из каждого отрезка удаляется средняя часть, так что остаются два отрезка, длина каждого из которых составляет $1/a$ ($a < 2$) от длины исходного. Как отмечают авторы, модель эта навеяна наблюдениями де Леви, показавшими, что на полированной поверхности твердого тела имеется множество царапин с зазубренными краями; им оставалось только «сделать царапины самоподобными».

На Рис. 17.2 приведена эквивалентная электрическая схема полученной описанным образом поверхности. Входной импеданс этой цепи можно записать в виде бесконечной цепной дроби:

$$Z(i\omega) = R + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{aR + \frac{1}{i\omega C + \frac{1}{a^2 R + \dots}}}}$$

Практически вычисления производятся для конечных цепных дробей с числом рекурсий n и отслеживается поведение решения с возрастанием n . На низких частотах действительная часть импеданса выходит на плато, высота которого для каждой последующей рекурсии увеличивается в $a/2$ раз. На высоких частотах предельное значение импеданса равно R . Между этими двумя пределами система обладает свойством ЭПФ с

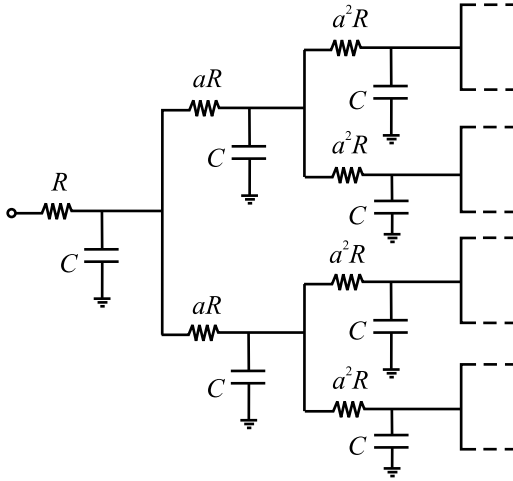


Рис. 17.2: Эквивалентная схема шероховатой поверхности электрода.

показателем $\eta = 1 - D$, где $D = \ln 2 / \ln a$ – фрактальная размерность канторова множества. Мнимая часть $Z(i\omega)$ обратно пропорциональна частоте на высоких и низких частотах и соответствует ЭПФ в промежуточной области. Таким образом, обобщенный закон Ома для шероховатой поверхности в частотном представлении имеет вид

$$\hat{I}(\omega) = [\hat{Z}(i\omega)]^{-1} \hat{U}(i\omega) = A^{-1}(i\omega)^\eta \hat{U}(i\omega),$$

а во временном – содержит дробную производную:

$$I(t) = A^{-1} {}_0D_t^\eta U(t).$$

Как отмечается в работе [7], степенная зависимость импеданса от частоты и, следовательно, дробный порядок производной связаны с конкуренцией резистивного и емкостного путей протекания тока. Сигнал более низкой частоты распространяется по цепи дальше, прежде чем он сможет уйти через поверхностную емкость, поэтому импеданс на низких частотах больше. Разумеется, реальные поверхности являются самоподобными лишь в ограниченном интервале масштабов, что в конечном итоге определяет и диапазон частот, в котором имеет место постоянство фазы (угла потерь).

Литература

1. *Анго А.* Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1964.
2. *Oldham K. B., Spanier J. J.* Electroanal. Chem. and Interfacial Electrochem. **26**, 331 (1970).
3. *Oldham K. B., Spanier J.* The Fractional Calculus – New-York – London: Academic Press, 1974.
4. *Goto M., Ishii D.* Electroanal. Chem. and Interfacial Electrochem. **61**, 361 (1975).
5. *Wolf I.* Phys. Rev. **27**, 755 (1926).
6. *De Levie R.* Electrochimica Acta **10**, 113 (1965).
7. *Луу С., Каплан Т., Грэй П.* В сб.: Фракталы в физике. Под ред. *Пьетронеро Л., Тозатти Э.* – М.: Мир, 1988, с. 543.

Глава 18

Турбулентность

18.1 Турбулентная диффузия

Согласно колмогоровской модели однородной изотропной турбулентности скорость относительного движения точек турбулентной среды, находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad (18.1.1)$$

в инерциальной области рассматривается как случайная переменная, средний квадрат которой растет с расстоянием пропорционально $r^{2/3}$:

$$\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle = C_0 \varepsilon^{2/3} r^{2/3}, \quad l < r < L. \quad (18.1.2)$$

Здесь C_0 – безразмерная постоянная, ε – скорость диссипации кинетической энергии на единицу массы, $l = (\varepsilon^3/\nu)^{1/4}$ – колмогоровская длина. Соответствующий этой модели энергетический спектр дается *законом трех пятых*

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (18.1.3)$$

где k – волновое число, а C – колмогоровская постоянная.

С другой стороны, известно, что относительная диффузия (диффузия вектора расстояния между двумя помеченными частицами) удовлетворяет закону Ричардсона (*закону трех вторых*)

$$\langle r^2 \rangle = C_1 \varepsilon (\Delta t)^3, \quad (18.1.4)$$

то есть, существенно более быстрым по сравнению с нормальной диффузией процессом. Если в формуле (18.1.1) подразумевать разность скоростей помеченной пары частиц, переменная r станет случайной и формулу

(18.1.2) станет возможным интерпретировать как

$$\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle = C_0 \varepsilon^{2/3} \langle r^2 \rangle^{1/3}.$$

Подставляя сюда средний квадрат относительного расстояния из (18.1.4), находим

$$\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle = C_2 \varepsilon \Delta t, \quad C_2 = C_0 C_1^{1/3}. \quad (18.1.5)$$

Специфика диффузии в турбулентной среде, называемой, для краткости, *турбулентной диффузией* (ТД), обусловлена действием на частицу вихрей разных размеров, существующих в турбулентной среде. Расстояние между двумя пробными частицами может существенно измениться за короткое только под действием вихря, размеры которого сравнимы с этим расстоянием. Чем дальше друг от друга эти частицы, тем больше размеры вихрей, разносящих их друг от друга, тем с большей скоростью растёт расстояние l между ними. В рамках классической теории диффузии такой эффект может быть достигнут введением зависимости коэффициента диффузии D от относительных координат, т.е. от расстояния: $D = D(r)$. Этот подход был использован в пионерской работе Ричардсона [1], записавшего уравнение для плотности распределения $p(r, t)$ случайного расстояния между парой частиц примеси, находившихся в момент $t = 0$ в одной точке, в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left[D(r) \frac{\partial p}{\partial r} \right]$$

с коэффициентом диффузии $D(r) \propto r^{4/3}$, соответствующим увеличению ширины диффузионного пакета $\Delta(t)$ по закону

$$\Delta(t) \propto t^{3/2},$$

существенно отличающемся от нормального диффузионного закона $\Delta(t) \propto t^{1/2}$. Теоретически такое поведение нашло обоснование в известных работах А. Н. Колмогорова и А. М. Обухова как следствие гипотезы о самоподобии локально изотропной турбулентности, определяемой единственным размерным параметром – скоростью диссипации турбулентной энергии ε [2-4].

Соотношения (18.1.4) и (18.1.5) показывают, что в то время, как поведение относительной скорости двух частиц совместимо с броуновской моделью нормальной диффузии в однородной стационарной среде (лабораторные исследования в [5] подтверждают это), расстояние между ними ведёт себя иначе: его средний квадрат пропорционален третьей степени. Если речь вести о линейном размере r диффундирующего в турбулентной среде облака, то он пропорционален $t^{3/2}$, тогда как в нормальном случае этот размер растёт пропорционально $t^{1/2}$: ТД является ускоренной диффузией (супердиффузией).

18.2 Уравнение турбулентной диффузии

Качественно полученные выше результаты согласовались с экспериментом, однако тот факт, что в однородной в среднем среде коэффициент диффузии должен зависеть от расстояния между частицами, создавал определенные проблемы в физической интерпретации получаемых результатов.

Способ совместить ускоренный характер ТД с постоянством коэффициента, характеризующего среду, нашел А.С.Монин [6, 7], с работ которого началось применение негауссовых устойчивых распределений и уравнений с производными дробного порядка в теории ТД (терминологии этой он, однако, не использовал). В слегка измененном по сравнению с оригинальной работой виде этот способ обосновывается следующим образом.

Возьмем за основу марковский скачкообразный процесс, аппроксимирующий ТД частицы, находившийся в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Случайное время между двумя последовательными скачками распределено с экспоненциальной плотностью

$$q(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t > 0.$$

Плотность вероятности $p(x, t)$ случайной координаты частицы подчиняется уравнению Эйнштейна-Смолуховского

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu \int K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [p(\mathbf{x}', t) - p(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x}',$$

с начальным условием $p(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x})$, которое удобнее включить в правую часть уравнения, положив $p(\mathbf{x}, t) = 0$ при $t < 0$:

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mu \int K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [p(\mathbf{x}', t) - p(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x}' + \delta(\mathbf{x})\delta(t).$$

Соответствующее уравнение для трансформанты Фурье, т.е. характеристической функции (ХФ)

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}$$

имеет решение

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, t) = \exp \left\{ -\mu \left[1 - \tilde{K}(\mathbf{k}) \right] t \right\}.$$

Введя новые переменные соотношениями $\mathbf{z} = \mathbf{k}t^{1/\alpha}$ и $\tilde{P}(\mathbf{z}, t) = \tilde{p}(\mathbf{z}t^{-1/\alpha}, t)$, можно убедиться, что характерная для диффузионных процессов асимптотическая автомодельность решения, т.е. существование ненулевого предела $\tilde{P}(\mathbf{z}, \infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{P}(\mathbf{z}, t)$ требует выполнения условия

$$|1 - \tilde{K}(\mathbf{k})| \propto |\mathbf{k}|^\alpha, \quad \mathbf{k} \rightarrow 0.$$

$\tilde{K}(\mathbf{k})$ будет ХФ при $\alpha \in (0, 2]$ (вне этих пределов одно из обязательных для ХФ условий $\tilde{K}(0) = 1$ и $\int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \tilde{K}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \geq 0$ нарушается).

В случае изотропной диффузии

$$1 - \tilde{K}(\mathbf{k}) \sim B|\mathbf{k}|^\alpha, \quad \mathbf{k} \rightarrow 0,$$

и главный асимптотический член

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) \equiv \tilde{P}(\mathbf{k}t^\nu, \infty)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tilde{f}(\mathbf{k}, t)}{dt} = -B|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}(\mathbf{k}, t) + \delta(t).$$

Его решение

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \exp\{-B|\mathbf{k}|^\alpha t\}$$

представляет собой ХФ изотропного устойчивого распределения с показателем α .

При $\alpha = 2$ обращение этого уравнения имеет вид обычного диффузионного уравнения ($-|\mathbf{k}|^2$ – преобразование Фурье оператора Лапласа Δ_3), при $\alpha \neq 2$ появляется дробная степень лапласиана:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -B(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x})\delta(t). \quad (18.2.1)$$

Решение его выражается через 3-мерную плотность изотропного устойчивого распределения (распределения Леви-Фельдгейма) $g_3(\mathbf{x}; \alpha)$ соотношением

$$f(\mathbf{x}, t) = (Bt)^{-3/\alpha} g_3((Bt)^{-1/\alpha} \mathbf{x}; \alpha), \quad \alpha \in (0, 2].$$

Дисперсия этого распределения бесконечна,

$$\langle \mathbf{X}^2 \rangle = \infty,$$

и для характеристики расплывания диффузионного пакета со временем следует выбрать другую меру его ширины, например, ширину на высоте h Δ_h , или радиус сферы R_p , содержащей заданную вероятность p . Будучи пропорциональными друг другу, меры эти растут со временем пропорционально $t^{1/\alpha}$, что согласуется с законом Ричардсона при $\alpha = 2/3$.²

²В силу этого при классификации типов диффузии по скорости расплывания диффузионного пакета следует пользоваться не дисперсией, которая не всегда существует, а одной из приведенных выше мер, которые существуют всегда и могут быть выбраны таким образом, чтобы в пределе $\alpha \rightarrow 2$ совпадать с дисперсией. Это касается $\langle r^2 \rangle$, $\langle (\Delta \mathbf{u})^2 \rangle$ и др. характеристик.

Физическая интерпретация роли дробной степени лапласиана в этих уравнениях сводится к тому, что случайные траектории частиц, соответствующих этим процессам, в отличие от броуновских траекторий ($\alpha = 2$) не являются непрерывными, а представляют собой сгустки (кластеры), хаотически разбросанные в пространстве, являются случайными фракталами. Выполняющая такое движение частица некоторое время как бы «топчется» в окрестности относительно небольших размеров, затем внезапно «улетает» на большое расстояние и начинает «топтаться» там. Такой тип движения и называют «полетами Леви».

18.3 Турбулентная диффузия с учетом вязкости

Лежащие в основе дробно-дифференциального уравнения турбулентной диффузии (18.2.1) соотношения (18.1.2)-(18.1.4) относятся к развинутой однородной турбулентности при достаточно высоких (формально – бесконечных) числах Рейнольдса и отражают статистическое самоподобие, характерное для инерционного интервала частот. По этой причине уравнение (18.2.1) представляет «крупнозернистое» описание диффузионного процесса. В области же малых расстояний сказываются отклонения от модели движения Леви, обусловленные влиянием вязкости – об этом свидетельствует как лабораторные исследования, так и численное моделирование [8, 9]. Включение в уравнение слагаемого с вязкостью

$$\frac{\partial f}{\partial t} + B(-\Delta)^{1/3} f(\mathbf{x}, t) - \eta \Delta f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (18.3.1)$$

учитывает молекулярную диффузию, ответственную за явления перемежаемости при конечных числах Рейнольдса.

Дополнив его начальным условием

$$f(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}),$$

выполним преобразование Фурье по пространственной переменной

$$\frac{d\tilde{f}}{dt} + [B|\mathbf{k}|^{2/3} + \eta k^2] \tilde{f} = 0, \quad \tilde{f}(\mathbf{k}, 0) = 1. \quad (18.3.2)$$

Решение преобразованного уравнения

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = e^{-B|\mathbf{k}|^{2/3}t} \cdot e^{-\eta k^2 t}$$

имеет вид произведения двух характеристических функций – Леви-Фельдгейма с $\alpha = 2/3$ и гауссовой функции. При малых k (большие расстояния) главную роль в (18.4.2) играет слагаемое, соответствующее турбулентной супердиффузии с $\alpha = 2/3$, при больших k (малые расстояния)

– гауссово слагаемое, описывающий молекулярную диффузию. Общее решение имеет вид свертки двух распределений

$$\psi(\mathbf{x}, t) = (Kt)^{-9/2} g_3 \left((Kt)^{-3/2} \mathbf{x}; 2/3 \right)$$

и

$$\chi(\mathbf{x}, t) = (\eta t)^{-3/2} g_3 \left((\eta t)^{-1/2} \mathbf{x}; 2 \right) :$$

$$f(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) \chi(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}'.$$

Качественно похожая оценка роли молекулярной диффузии в турбулентности получена Р. Крайчнаном в рамках значительно более сложного в математическом плане формализма [10]. Настоящий, основанный на применении дробных производных, подход, предложенный В. Ченом, более прозрачен в стохастическом смысле и прост в вычислительном отношении.

18.4 Дробно-дифференциальное обобщение уравнения Навье-Стокса

По существу, колмогоровский закон $5/3$, характеризующий статистическое самоподобие турбулентного движения на малых масштабах, основывается на локально однородной изотропной модели. До некоторой степени, этот закон подтверждается многочисленными экспериментами и численным моделированием [11, 12] при достаточно высоких числах Рейнольдса. Однако недавние эксперименты [8], выполненные с использованием высокоскоростной оптической техники, обнаружили, что статистика лагранжевых ускорений характеризуется распределениями с длинными степенного типа хвостами. Негауссов характер этих распределений противоречит представлению о гауссовом характере турбулентности, разделяемому многими авторами [13].

Гауссово распределение принадлежит к классу устойчивых распределений, занимающих центральное положение в современной теории вероятностей благодаря их свойству быть единственно возможными пределами распределений нормированных сумм независимых случайных величин. Оно – единственное распределение этого класса, обладающее конечной дисперсией, дисперсии остальных членов устойчивого семейства бесконечны, а хвосты их распределений (по крайней мере один из них) характеризуется степенной асимптотикой. Вполне можно искать обобщение турбулентной модели на основе всего класса устойчивых распределений.

Распределения же этого класса, отличные от нормального, удовлетворяют уравнениям с дробными производными, а многомерные изотропные устойчивые распределения – уравнениям с лапласианом в дробной степени. В этом и состоит логика развития дробно-дифференциальных моделей турбулентности. Два таких обобщения мы уже рассмотрели. Третьим будет дробно-дифференциальное уравнение Навье-Стокса.

Дробно-дифференциальное уравнение Навье-Стокса записывается в виде [14]:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \nabla \bar{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} (-\Delta)^{\alpha/2} \bar{u}, \quad \alpha \in (0, 2], \quad (18.4.1)$$

где Re – аналог числа Рейнольдса, равный ему при $\alpha = 2$ (заметим, что размерность оператора $\Delta^{\alpha/2}$ есть длина в степени $-\alpha$). Отличие показателя α от классического значения 2 означает, что определяющее (конститутивное) уравнение турбулентной среды отличается от классического ньютонова закона градиента.

Размерностный анализ уравнения (18.4.1) приводит к энергетическому спектру

$$E(k) = \bar{C} \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-\gamma},$$

показатель

$$\gamma = (9 - 2\alpha)/3$$

которого лежит теперь в интервале $[5/3, 3]$.¹ Левая граница соответствует стандартной колмогоровской модели турбулентности, но следует отметить, что и близкие к правой границе значения также наблюдались в экспериментах с мыльными пленками [15] и плазмой [17]. Более того, обычная ньютонова жидкость ($\alpha = 2$, $\gamma = 5/3$) в пристеночном слое турбулентности проявляет существенное отличие от стандартной модели и характеризуется значениям $\alpha = 1/2$, $\gamma = 8/3$ [18].

В работе [19] рассмотрен также и другой путь обобщения колмогоровского закона $5/3$, основанный на введении в уравнение Навье-Стокса дробной производной по времени:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} {}_0 D_t^\mu \Delta \mathbf{u}, \quad \mu \in [0, 1).$$

Он приводит к спектру

$$E(k) = \bar{C} \bar{\varepsilon}^{2/3} k^{-\gamma}$$

с показателем

$$\gamma = (5 - 3\mu)/(3 - \mu),$$

¹Мандельброт указывал, что негауссово свойство турбулентности – перемежаемость – вызывается спектром, наклон которого превышает $5/3$.

область значений которого $(1, 5/3]$ лежит теперь слева от стандартного значения $5/3$. Комбинируя эти два подхода, автор приводит вариант обобщенного уравнения Навье-Стокса, содержащего дробные производные как по времени, так и по координатам:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\text{Re}} {}_0 D_t^\mu (-\Delta)^{\alpha/2} \mathbf{u}, \quad (18.4.2)$$

где $\alpha \in (0, 2]$ при $\mu = 0$, $\mu \in [0, 1)$ при $\alpha = 2$ и Re соответствует перенормированному на дробные размерности времени и длины числу Рейнольдса. Перенос энергии в такой модели от больших масштабов к меньшим расщепляется на три фазы: замедленный перенос (субдиффузия) в доколмогоровской области ($\gamma < 5/3$), нормальный перенос в колмогоровской области ($\gamma = 5/3$), и ускоренный перенос в области Колмогорова-Леви ($\gamma > 5/3$).

В качестве примера системы, описываемый уравнением (18.4.2), автор цитируемой работы ссылается на статью [20], посвященную турбулентному движению вязкоупругой среды, образованной раствором полимера. Движение это отличается от обычного турбулентного движения ньютоновой жидкости нелокальным характером взаимодействий, порождающим дробную степень лапласиана, и наличием эффекта памяти, порождающим дробную производную по времени. Оба эти эффекта являются следствием динамики длинных полимерных молекул в растворе. Автор отмечает, что при $\alpha = 2$ и $\mu \neq 0$ показатель γ такой среды не совпадает с колмогоровским значением $5/3$ даже в пределе бесконечного числа Рейнольдса.

18.5 Дробно-дифференциальное уравнение Рейнольдса

Напомним, что *уравнение Рейнольдса* в классической теории турбулентности получается из уравнения Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}$$

и условия несжимаемости жидкости

$$\nabla \mathbf{u} = 0$$

путем разложения полей \mathbf{u} и p на средние компоненты и пульсации (флуктуации)

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{v}, \quad p = \bar{p} + \tilde{p}.$$

Она имеет вид

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i v_j \rangle, \quad (18.5.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0.$$

Процесс расплывания пульсации v_i , возникшей в некоторой малой области среды, грубо можно описать уравнением диффузии

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = K \Delta (v_i + \bar{u}_i), \quad (18.5.2)$$

сопоставляя которое с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = 0,$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = -K \Delta (v_i + \bar{u}_i). \quad (18.5.3)$$

Обобщая уравнение (18.5.2) на турбулентную супердиффузию,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -K (-\Delta)^{\alpha/2} (v_i + \bar{u}_i)$$

вместо (18.5.3) получим

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (v_i v_j) = K (-\Delta)^{\alpha/2} (v_i + \bar{u}_i),$$

что после усреднения по пульсациям дает

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \langle v_i v_j \rangle = K (-\Delta)^{\alpha/2} \bar{u}_i.$$

В результате вместо (18.5.1) получаем дробно-дифференциальный аналог уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \nabla \bar{\mathbf{u}} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + \nu \Delta \bar{\mathbf{u}} - K (-\Delta)^{\alpha/2} \bar{\mathbf{u}}. \quad (18.5.4)$$

Предпоследнее слагаемое в этом уравнении относится к молекулярной диффузии, отражающей физические свойства жидкости, тогда как последний член, содержащий дробный лапласиан (напомним, $\alpha = 2/3$), характеризует свойства инерционной диффузии неньютоновской жидкости, далекие корреляции, спонтанно возникающие в ее нерегулярном турбулентном движении. Приводимый в [19] численный пример показывает, что коэффициент инерционной диффузии может на три порядка превышать коэффициент молекулярной диффузии.

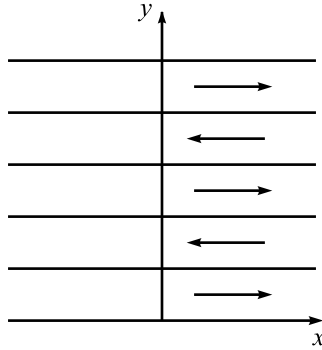


Рис. 18.1: Полосовые течения.

18.6 Диффузия в полосовых течениях

В некоторых случаях сложный процесс нерегулярного турбулентного движения удобно представить в виде диффузионного движения в детерминированной среде с зависящей от координат скоростью. К числу таких моделей принадлежит модель Дрейзина и Дыхне [21], цитируемая в обзоре О. Г. Бакунина [22].

Пространство заполнено плоскими слоями одинаковой толщины a , движущимися в противоположных направлениях оси x с одинаковой и постоянной по абсолютной величине скоростью (Рис. 18.1). В этой среде и диффундирует пробная частица. Скорость среды достаточно велика, так что продольные (вдоль x) перемещения частицы определяются просто ее сносом движущимися слоями, тогда как в поперечном направлении (вдоль y) она выполняет обычную диффузию (с коэффициентом K_y), за счет которой она переходит из слоя в слой, изменяя x -составляющую скорости на противоположную. Сделаем следующие предположения:

- 1) среднее число пересеченных частицей слоев за время t равно

$$\langle N \rangle = \sqrt{2K_y t} / a;$$

- 2) смещение частицы Δx вдоль оси x определяется долей нескомпенсированных пульсаций $P \sim \delta N / N$:

$$K_x \approx \frac{(\Delta x)^2}{t} = \frac{(V_0 t)^2 P^2}{t};$$

- 3) случайная величина δN подчиняется гауссовой статистике

$$\left\langle \left(\frac{\delta N}{N} \right)^2 \right\rangle \sim \frac{1}{\langle N \rangle}$$

авторы пришли к выводу, что определенный обычным образом коэффициент диффузии вдоль x

$$K_x = \frac{V_0^2 t}{\langle N \rangle} = \frac{V_0^2 t a}{\sqrt{2K_y t}} = \frac{V_0^2 a}{\sqrt{2K_y}} t^{1/2}$$

возрастает со временем, как \sqrt{t} , то есть, имеет место супердиффузионный режим.

Сделанные предположения, однако, легко подвергнуть критике. Если τ – среднее время, которое проводит частица в одном слое, то число посещенных ею слоев за время t

$$\langle N(t) \rangle = t/\tau$$

просто *должно быть* пропорционально t . Формула

$$\langle N(t) \rangle \propto t^{1/2}$$

имеет место лишь в случае, когда $\tau = \infty$, а это возможно лишь при бесконечной толщине слоев. Далее, в выражении

$$X = \sum_{i=1}^N \Delta X_i$$

последовательные смещения ΔX_i не являются независимыми (из-за чередующести знака). Чтобы перейти к статистике независимых событий, надо объединить последовательные смещения $\Delta X, \Delta X'$ в одно $\Delta Z = \Delta X + \Delta X'$. Тогда

$$X \approx \sum_{i=1}^{N/2} \Delta Z_i,$$

и

$$K_x = \frac{\langle X^2 \rangle}{t} = \frac{\langle N \rangle}{2} \frac{\langle (\Delta Z)^2 \rangle}{t} = \frac{\langle (\Delta Z)^2 \rangle}{2\tau}.$$

Таким образом, мы приходим к постоянному коэффициенту диффузии вдоль x , свидетельствующему о том, что диффузия в данной модели является нормальной.

Рассмотрим теперь случай движения в противоположные стороны двух полубесконечных (в направлении y) слоев. В этом случае время T между переменами направления движения частицы (время возврата к границе раздела слоев) распределено по степенному закону

$$p_T(t) \propto At^{-3/2}, \quad t \rightarrow \infty,$$

среднее значение не существует, процесс оказывается супердиффузионным, подчиняющимся в асимптотике дробно-дифференциальному уравнению.¹

Интересная модель рассмотрена в работе К. В. Чукбара [24]: В узкой полоске вдоль оси x течет с большой скоростью поток, содержащий примесь, которая может покидать эту полоску и вне ее выполнять обычную диффузию с коэффициентом K . Уравнение диффузии со сносом в потоке несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla n = K\Delta n, \quad \Delta \mathbf{v} = 0,$$

за пределами полоски имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} = K \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

а все влияние потока сводится к граничному условию

$$\left(\frac{P}{2} \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} \right)_{y=0} = 0, \quad (18.6.1)$$

где P – число Пекле, равное отношению характерного значения функции тока течения Ψ_0 ($v(y) = d\Psi/dy$) к коэффициенту диффузии K . Такая задача возникает при описании быстрого проникновения магнитного поля в замагниченную плазму вдоль хорошо проводящего электрода [25].

Преобразование Лапласа по времени переводит уравнение (18.6.1) в уравнение

$$\lambda \hat{n} = K \frac{d^2 \hat{n}}{dy^2} + n_0(x, y), \quad (18.6.2)$$

где n_0 – начальное распределение примеси. Решение (18.6.2) с учетом граничного условия

$$\hat{n}|_{y \rightarrow \infty} = 0$$

имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{n}(x, y, \lambda) = & \\ = C \exp\left(-\sqrt{\lambda/K}y\right) + \exp\left(-\sqrt{\lambda/K}y\right) \int_0^y \exp\left(\sqrt{\lambda/K}y'\right) \frac{n_0(x, y')}{2\sqrt{K\lambda}} dy' + & \\ + \exp\left(\sqrt{\lambda/K}y\right) \int_y^\infty \exp\left(\sqrt{\lambda/K}y'\right) \frac{n_0(x, y')}{2\sqrt{K\lambda}} dy', & \end{aligned} \quad (18.6.3)$$

¹Общее решение задачи об одномерном блуждании частицы с заданным законом распределения пробега читателям может найти в [23].

где $\sqrt{\lambda}$ положителен и действителен при положительных и действительных λ , а C – произвольная постоянная, определяемая граничным условием при $y = 0$. Находя из (18.6.3) $\partial \hat{n} / \partial y|_{y=0}$ и подставляя результат в преобразованное по Лапласу условие (18.6.1), получим для $n_1 = n(x, 0, t)$

$$\sqrt{\lambda/K} \hat{n}_1 + (P/2) \frac{d\hat{n}_1}{dx} = \frac{1}{K} \int_0^{\infty} \exp(-\sqrt{\lambda/K}y) n_0(x, y) dy.$$

В координатно-временных переменных уравнение это имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{n_1(x, t')}{\sqrt{\pi K(t-t')}} dt' + \frac{P}{2} \frac{\partial n_1}{\partial x} = - \int_0^{\infty} \frac{n_0(x, y)}{\sqrt{\pi Kt}} \frac{d}{dy} \exp\left(-\frac{y^2}{4Kt}\right) dy. \quad (18.6.4)$$

В левой части мы видим дробную производную.

Общее решение уравнения (18.6.4), описывающего диффузию смеси вдоль узкого потока, выражается через его функцию Грина

$$G(x, y, t) = \frac{l(x)}{PKt\sqrt{\pi Kt}} \left(\frac{2x}{P} + y\right) \exp\left(-\frac{(2xP + y)^2}{4Kt}\right)$$

соотношением

$$n_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_0^{\infty} dx' n_0(x', y) G(x - x', y, t).$$

18.7 Луч света в турбулентной среде

В теории многократного рассеяния света в турбулентной оптически прозрачной среде используется кинетическая модель, в рамках которой поток света рассматривается как поток частиц (фотонов). Дифференциальное сечение рассеяния на единице длины пути $w(\theta)$ выражается через спектральную плотность (трансформанту Фурье) корреляционной функции диэлектрической постоянной $\varepsilon(\mathbf{r})$

$$\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \langle [\varepsilon(\mathbf{r}_1) - \bar{\varepsilon}][\varepsilon(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) - \bar{\varepsilon}] \rangle d\mathbf{r}.$$

В статистически однородной и изотропной турбулентной среде спектральная плотность зависит только от абсолютной величины векторного аргумента $q = |\mathbf{q}|$, и эта связь выражается соотношением

$$w(\theta) = (1/2)\pi k_0^4 \Phi_{\varepsilon}(q)$$

где $q = 2k_0 \sin(\theta/2)$, а k_0 – волновое число в однородной среде с диэлектрической постоянной $\bar{\epsilon}$. В инерционном интервале волновых чисел, согласно колмогоровскому закону двух третей,

$$\Phi_\epsilon(q) = Cq^{-11/3}, \quad C = \text{const}$$

(уравнение (26.31) книги [26]). Наиболее вероятно рассеяние на малые углы, для которых

$$w(\theta) = (1/2)\pi k_0^4 C [2k_0 \sin \theta/2]^{-11/3} \sim A\theta^{-\alpha-2}, \quad (18.7.1)$$

$$\theta \rightarrow \infty, \quad A = \text{const}, \quad \alpha = 5/3.$$

Пусть в начале координат находится точечный мононаправленный источник света. Выберем координатную ось Z совпадающей с этим первичным направлением Ω_0 . В малоугловом приближении теории рассеяния координата z фотона отождествляется с пройденным им путем, а для характеристики отклонения его от первоначального направления используется двумерный вектор $\mathbf{u} = \{\Omega_x, \Omega_y\}$, область изменения которого расширяется на всю плоскость: $-\infty < u_x < \infty$, $-\infty < u_y < \infty$, 0 . Соответствующее данному приближению кинетическое уравнение для углового распределения имеет вид [27]:

$$\frac{\partial f(z, \mathbf{u})}{\partial z} = \int_{\mathbb{R}^2} [f(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') - f(z, \mathbf{u})] w(|\mathbf{u}'|) d\mathbf{u}', \quad f(0, \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u}).$$

Оно подобно уравнению, описывающему многократное рассеяние заряженных частиц в веществе. Разлагая уменьшаемое в ряд по \mathbf{u}' и выполняя интегрирование (то есть, усредняя по углу рассеяния), приходят к известному уравнению типа Фоккера-Планка для главной асимптотической части решения $f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})$:

$$\frac{\partial f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = \frac{\langle u^2 \rangle}{2} \Delta_2 f^{\text{as}}(z, \mathbf{u}),$$

где $\Delta_2 = \partial^2 / \partial u_x^2 + \partial^2 / \partial u_y^2$ и $\langle u^2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} w(|\mathbf{u}|) u^2 d\mathbf{u}$ – средний квадрат угла рассеяния на единице длины пути.

В рассматриваемой же задаче этот интеграл расходится, и вместо разложения в ряд мы воспользуемся асимптотической подстановкой (18.7.1):

$$\frac{\partial f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = AJ(\mathbf{u}), \quad J(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}^2} [f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') - f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})] |\mathbf{u}'|^{-\alpha-2} d\mathbf{u}'.$$

При $\alpha \geq 1$ интеграл столкновений расходится, и для устранения этой расходимости воспользуемся процедурой регуляризации Адамара, заменяющей расходящийся интеграл $J(\mathbf{u})$ его конечной (в смысле Адамара) частью

$$\text{p.f. } J(\mathbf{u}) \equiv \int_{\mathbb{R}^2} [f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - 2\mathbf{u}') - 2f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') + f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})] |\mathbf{u}'|^{-\alpha-2} d\mathbf{u}'$$

Регуляризованный таким образом интеграл выражается через дробную степень двумерного лапласиана соотношением

$$\int_{\mathbb{R}^2} [f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - 2\mathbf{u}') - 2f^{\text{as}}(z, \mathbf{u} - \mathbf{u}') + f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})] |\mathbf{u}'|^{-\alpha-2} d\mathbf{u}' = -c(\alpha)(-\Delta_2)^{\alpha/2},$$

$$c(\alpha) = \frac{\pi^2(1 - 2^{1-\alpha})}{[\Gamma(1 - \alpha/2)]^2 \sin(\alpha\pi/2)}.$$

Следовательно, асимптотическое поведение углового распределения $f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})$ фотонов, прошедших путь x в турбулентной среде, описывается уравнением с двумерным лапласианом дробного порядка:

$$\frac{\partial f^{\text{as}}(z, \mathbf{u})}{\partial z} = -c(\alpha)A(-\Delta_2)^{\alpha/2} f^{\text{as}}(z, \mathbf{u}), \quad f(0, \mathbf{u}) = \delta(\mathbf{u}).$$

Решение этого уравнения выражается через двумерную изотропную устойчивую плотность Леви-Фельдгейма с характеристическим показателем $\alpha = 5/3$

$$g_2(r; \alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-k^\alpha} J_0(kr) k dk$$

соотношением:

$$f^{\text{as}}(z, \mathbf{u}) = [c(\alpha)Az]^{-2/\alpha} g_2([c(\alpha)Az]^{-1/\alpha} |\mathbf{u}|; \alpha).$$

Отметим три характерных отличия рассеяния в турбулентной среде от аналогичного процесса в среде с мелкомасштабными флуктуациями коэффициента преломления: ширина углового распределения рассеянных фотонов растет с глубиной пропорционально $z^{3/5}$, а не $z^{1/2}$, хвосты распределения имеют степенной, а не гауссов вид, и проекции вектора \mathbf{u} на оси x и y не являются независимыми [28].

Литература

1. *Richardson L. F.* Proc. Roy Soc. London, Ser A **110**, 709 (1926).
2. *Колмогоров А. Н.* Дан СССР **31**, 538 (1941).
3. *Обухов А. М.* ДАН СССР **32**, 22 (1941).
4. *Обухов А. М.* Известия АН СССР, сер. геофиз. **5**, 453 (1941); **13**, 58 (1949).
5. *Jullien M. C., Paret J., Tabeling P.* Phys. Rev. Lett. **82**, 2872 (1999).
6. *Монин А. С.* ДАН СССР **105**, 256 (1955).
7. *Монин А. С.* Известия АН СССР, сер. геофиз. **3**, 327 (1956).
8. *Porta A. L., Voth G. A., Crawford A. M. et al.* Nature **409**, 1017 (2001).
9. *Sreenivasan K. R., Antonia R. A.* Ann. Rev. Fluids Mech. **29**, 435 (1997).
10. *Kraichan R.* Phys. Fluids **11**, 945 (1968).
11. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика. Часть I. – М.: Наука, 1965; Часть II. – М.: Наука, 1967.
12. *Бэтчелор Дж. К.* Теория однородной турбулентности. – М.: ИЛ, 1955.
13. *Shlesinger M. F., West B. J., Klafter J.* Phys. Rev. Lett. **58**, 1100 (1987).
14. *Chen W., Holm S. J.* Acoust. Soc. Am. **115**, 1424 (2004).
15. *Martin B. K., Wu X. L., Gordburg W. I.* Phys. Rev. Lett. **80**, 3964 (1998).
16. *Del-Castillo-Negrete D., Carreras B. A., Lynch V. E.* ArXiv: physics/0403039 (2004).
17. *Duran I., Stockel J., Hron M. et al.* ECA **24B**, 1693 (2000).
18. *Blockstock D. T. J.* Acoust. Sci. Am. **77**, 2050 (1985).
19. *Chen W.* Chaos, Solitons and Fractals **28**, 923 (2006).
20. *Groisman A., Steinberg V.* Nature **405**, 53 (2000).

21. *Дрейзин Ю. Н., Дыкне А. М.* ЖЭТФ **63**, 242 (1972).
22. *Бакунин О. Г.* УФН **173**, 757 (2003).
23. *Учайкин В. В.* Обзорение прикл. и пром. математики **13**, 397 (2006).
24. *Чукбар К. В.* ЖЭТФ **109**, 1335 (1996).
25. *Гордеев А. В., Гречиха А. В., Калда Я. Л.* Физика плазмы **10**, 95 (1990).
26. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику. Том 2. – М.: Наука, 1978.
27. *Кольчужкин А. М., Учайкин В. В.* Введение в теорию прохождения частиц через вещество. – М.: Атомиздат, 1978.
28. *Учайкин В. В.* Обзорение прикл. и пром. математики **14**, 841 (2007).

Глава 19

Плазма

19.1 Дробно-дифференциальная феноменология

Естественным состоянием плазмы является турбулентное состояние, движение частиц в котором происходит по законам аномальной диффузии. Аномальный характер диффузии наблюдается в лабораторной плазме [1-3], замагниченных вихревых потоках [4, 5], в космической электродинамике [6-8], в прохождении космических лучей в Галактике (см. п. 21.4).

Характерной особенностью движения частиц в плазме является наличие неоднородного и постоянно меняющегося магнитного поля. В областях повышенной неоднородности движение зарядов в поперечных по отношению к силовым линиям направлениях, сопровождаемое интенсивным вращением вокруг линий, замедляет их перемещение в пространстве, создает эффект ловушки. Случайные совпадения скорости заряженной частицы с направлением длинной и гладкой силовой линии позволяет совершать ей далекие переходы практически без рассеяния. Времена пребывания в ловушках и длины пробегов от одной ловушки в другую являются случайными и есть основания полагать, что и те и другие распределены по степенным законам [1]. В предположении о взаимной независимости этих переменных плотность распределения помеченной частицы $f(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет интегральному уравнению, преобразование Лапласа по времени и Фурье по координатам которого приводит к трансформанте

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, \lambda) \equiv \int_0^{\infty} dt \int_{R^d} d\mathbf{x} e^{-\lambda t + i\mathbf{k}\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda[1 - \tilde{q}(\lambda)\tilde{p}(\mathbf{k})]},$$

где $\tilde{q}(\lambda)$ и $\tilde{p}(\mathbf{k})$ – трансформанты Лапласа и Фурье плотностей вероятностей случайных времен $q(t)$ и смещений $p(\mathbf{x})$, соответственно. Степенной характер их распределений в случае изотропной диффузии приводит к уравнению

$$\lambda^\beta \tilde{f}(k, \lambda) = -|\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}(\mathbf{k}, \lambda) + \lambda^{\beta-1}. \quad (19.1.1)$$

К этому же уравнению мы придем, опираясь на принцип асимптотической автомодельности. В пространственно-временном алгебраическом уравнении (19.1.1) соответствует дробно-дифференциальное уравнение аномальной диффузии

$${}_0D_t^\beta f(\mathbf{x}, t) = -(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) + \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \delta(\mathbf{x}), \quad (19.1.2)$$

являющееся логическим обобщением уравнения Монина. Решением уравнения (19.1.2) является дробно-устойчивое распределение.

Напомним эти принципы аномальной диффузии, мы приведем ниже несколько примеров их конкретных реализаций на физическом уровне рассуждений, обладающих большей наглядностью и более тесной связью с основными характеристиками рассматриваемого процесса.

19.2 Гидродинамический подход

Заканчивая изложение вывода Р. Балеску эрдитарного уравнения плазмы в п. 1.12, мы отметили, что в пределе слабой турбулентности эрдитарность исчезает, и процесс становится марковским. При рассмотрении сильной турбулентности ($Ku \gg 1$) необходимо учесть вид функции запаздывания $\Lambda(\tau)$. Это удобнее сделать, перейдя к лапласовским образам:

$$\lambda \hat{n}(\mathbf{x}, \lambda) = \hat{\Lambda}(\lambda) \Delta_2 \hat{n}(\mathbf{x}, \lambda) + \hat{S}(\mathbf{x}, \lambda) + \delta(\mathbf{x})$$

(предполагается, что в начальный момент времени частица находилась в начале координат).

Следуя принципу автомодельности, подтверждаемому численным моделированием, выберем трансформанту ядра в виде степенной функции

$$\Lambda(\lambda) = K\lambda^{1-\beta}, \quad 0 < \beta \leq 1,$$

и умножим обе части уравнения на $\lambda^{\beta-1}$. Обратное преобразование Лапласа приводит к уравнению субдиффузии

$${}_0D_t^\beta n(\mathbf{x}, t) = K\Delta_2 n(\mathbf{x}, t) + Q(\mathbf{x}, t).$$

Его решение выражается через дробно-устойчивую плотность $q_2(\mathbf{x}; 2, \beta, 0)$, ширина диффузионного пакета растет пропорционально $t^{\beta/2}$.

Таким образом, влияние памяти замедляет процесс диффузии. В рамках теории Балеску предельный случай $\beta \rightarrow \infty$ соответствует нормальной диффузии, что в определенной степени противоречит модели Монины, дающей при том же предположении о марковости супердиффузионный режим. Очевидным обобщением двух этих подходов является уравнение

$${}_0D_t^\beta n(\mathbf{x}, t) = -K(-\Delta_2)^{\alpha/2} n(\mathbf{x}, t) + Q(\mathbf{x}, t),$$

фундаментальные решения которых (то есть, решения при $Q(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x})\delta(t)$) выражаются через дробно-устойчивые распределения и охватывают как субдиффузионные ($\beta < \alpha/2$), так и супердиффузионные ($\beta > \alpha/2$) режимы.

19.3 Неравновесные стационарные распределения

А. В. Чечкин и В. Ю. Гончар [10] использовали дробное уравнение Фоккера-Планка для описания трехмерного движения заряда в магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$ с учетом силы трения $-\eta m\mathbf{v}$ и случайного электрического поля \mathbf{E} . Последнее было представлено однородным, изотропным, стационарным белым Леви-шумом с интенсивностью K и показателем α . Леви-шум – это последовательность независимых стационарных приращений движения Леви подобно тому, как белый гауссов шум есть последовательность приращений броуновского движения. Характеристическая функция приращения

$$\tilde{p}(\mathbf{k}, \Delta t) = e^{-K|\mathbf{k}|^\alpha \Delta t}, \quad 0 < \alpha \leq 2.$$

При $\alpha \rightarrow 2$ Леви-шум переходит в гауссов.

Соответствующее данной модели уравнение для плотности распределения скорости $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ заряженной частицы имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}[\mathbf{v}, \mathbf{e}_z] \nabla_{\mathbf{v}} f = \eta \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{v} f) - K(-\Delta_{\mathbf{v}})^{\alpha/2} f.$$

Преобразованием Фурье

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \int d\mathbf{v} e^{i\mathbf{k}\mathbf{v}} f(\mathbf{v}, t)$$

оно приводится к виду

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + (\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{k}, \mathbf{B}] + \eta \mathbf{k}) \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{f} = -K |\mathbf{k}|^\alpha \tilde{f}.$$

Решение последнего (при начальном условии $\mathbf{v}(0) = 0$) дается формулой

$$\tilde{f}(\mathbf{k}, t) = \exp \left\{ -(K/\alpha\eta) (1 - e^{-\alpha\eta t}) |\mathbf{k}|^\alpha \right\},$$

так что распределение скорости выражается через изотропную устойчивую плотность Леви-Фельдгейма:

$$f(\mathbf{v}, t) = [(K/\alpha\eta) (1 - e^{-\alpha\eta t})]^{-3/\alpha} g_3([(K/\alpha\eta) (1 - e^{-\alpha\eta t})]^{-1/\alpha} \mathbf{v}; \alpha).$$

При малых временах

$$f(\mathbf{v}, t) \sim (Kt)^{-3/\alpha} g_3((Kt)^{-1/\alpha} \mathbf{v}; \alpha),$$

и мы имеем дело с движением Леви, в пределе больших времен зависимость от времени исчезает и мы приходим к стационарному распределению по скоростям

$$f(\mathbf{v}, \infty) = (K/\alpha\eta)^{-3/\alpha} g_3((K/\alpha\eta)^{-1/\alpha} \mathbf{v}; \alpha).$$

При $\alpha = 2$ оно совпадает с равновесным максвелловым распределением, при других значениях показателя оно существенно отличается от равновесного перераспределением вероятности из промежуточной области скоростей в области их малых и больших значений, образуя асимптотические хвосты степенного типа:

$$f(\mathbf{v}, \infty) \propto |\mathbf{v}|^{-\alpha-d}, \quad |\mathbf{v}| \rightarrow \infty.$$

19.4 Диффузия резонансных фотонов

Главной особенностью переноса резонансного излучения в плазме (см. п. 2.3.18) является пропорциональность линейного коэффициента поглощения $k(\omega)$ коэффициенту излучения в спектральной линии, в результате чего подавляющее большинство фотонов резонансного излучения тут же поглощаются, снова переизлучаются, вновь поглощаются и т.д. до тех пор, пока случайная частота излученного фотона не окажется вдали от центра линии, на ее крыле. Вероятность этого мала, но и вероятность поглощения такого фотона мала, и если уж он приобрел такую частоту, то и пробег его до следующего взаимодействия будет аномально

большим. В наиболее популярной в расчетах модели полного перераспределения частот, частота переизлученного фотона не зависит от частоты поглощенного, и уравнение для концентрации $N \equiv N(\mathbf{x}, t)$ возбужденных атомов плазмы, известное как уравнение Бибермана-Холстейна, имеет вид

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \gamma \int d\mathbf{x}' K(\mathbf{x} - \mathbf{x}') [N(\mathbf{x}', t) - N(\mathbf{x}, t)],$$

где γ – вероятность радиационного девозбуждения атома в единицу времени, $K(\mathbf{x})$ – усредненное по частоте ядро переноса фотона

$$K(\mathbf{x}) = \left\langle k(\omega) \frac{e^{-k(\omega)|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|^2} \right\rangle.$$

В асимптотическом ($|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$) приближении

$$K(\mathbf{x}) = \frac{A}{4\pi|\mathbf{x}|^{\alpha+3}}$$

и уравнение Бибермана-Хольстейна принимает вид

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \gamma A \int \frac{N(\mathbf{x}', t) - N(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^{\alpha+3}} d\mathbf{x}',$$

Преобразование Фурье по координатам дает

$$\frac{\partial \tilde{N}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -\gamma A^* |k|^\alpha \tilde{N}(\mathbf{k}, t),$$

где

$$A^* = A \int_0^\infty (z - \sin z) z^{-\alpha-2} dz$$

– новая постоянная. Таким образом, уравнение БХ эквивалентно уравнению с дробным лапласианом [11]

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\gamma A^* (-\Delta)^{\alpha/2} N(\mathbf{x}, t).$$

Для лоренцовской или фойгтовской форм спектральной линии $\alpha = 1/2$.

19.5 Ударное уширение спектральной линии

Рассматривая в п. 2.3.18 формирование симметричной линии излучения в плазме, мы отметили как важный фактор влияния столкновения излучающего атома с другими атомами. В классическом представлении волновой пуг электромагнитного излучения с частотой ω_0 (естественное уширение не учитывается ввиду того, что излучательное время

жизни $\tau_R = 1/A$, где A – коэффициент Эйнштейна, велико по сравнению с типичным временем между столкновениями) непрерывно испускается атомом до тех пор, пока не произойдет столкновения. Во время столкновения энергетические уровни излучающего атома сдвигаются, затем снова восстанавливаются. При этом восстанавливаются и все характеристики волны, за исключением фазы. Если длительность столкновения достаточно мала, то излучением, испущенным за время столкновения, можно пренебречь, и использовать модель, в которой каждый возбужденный атом всегда излучает на частоте ω_0 , однако каждое столкновение изменяет его фазу на случайную величину $\Delta\varphi_j$. Наблюдаемое распределение частот (форма линии) обусловлено тем, что волна разбивается на конечные цуги, фурье-компоненты которых содержат частоты, отличные от ω_0 . Согласно стандартной кинетической теории, случайное время между столкновениями характеризуется экспоненциальным распределением $\psi_1(t)$ с коэффициентом

$$\mu = 4d^2 n \sqrt{\pi k_B T / m},$$

где d – среднее расстояние между центрами атомов в момент столкновения, n – концентрация атомов, m – масса отдельного атома. Пусть $N(t)$ – случайное число столкновений, испытанных атомом за время излучения t , тогда комплексная амплитуда излучаемого атомом поля запишется в виде

$$E(t) = E_0 \exp(-i\omega_0 t + i\varphi(t)),$$

где $\varphi(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} \Delta\varphi_j$, а $\Delta\varphi_j$ – попарно независимые равномерно распределенные в $[0, 2\pi)$ случайные величины. Спектр излучения j -го свободно пробега атома, испускаемого в промежутке времени $(t_j, t_{j+1} = t_j + T_j)$, где $\varphi(t) = \varphi_j$,

$$\begin{aligned} I_j(\omega, T_j) &\sim |E(\omega)|^2 = \left(\frac{E_0}{2\pi}\right)^2 \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp(-i\omega_0 t + i\varphi_j + i\omega t) dt \right|^2 = \\ &= \left(\frac{E_0}{\pi}\right)^2 \frac{\sin^2[(\omega - \omega_0)T_j/2]}{(\omega - \omega_0)^2}. \end{aligned}$$

Полный спектр, создаваемый атомом за все время излучения τ ,

$$I(\omega) \sim \left\langle \sum_{j=1}^{N(\tau)} I_j(\omega, T_j) \right\rangle.$$

В стандартном предположении об экспоненциальном распределении интервала времени между столкновениями, то есть, о том, что случайная последовательность моментов столкновений образует стандартный пуассоновский процесс ($\psi(t) = \psi_1(t) = \mu e^{-\mu t}$ и $\langle N(t) \rangle = \mu t$), получаем классический результат:

$$\begin{aligned} I(\omega, \tau) &\sim \langle N(t) \rangle \int_0^{\infty} I_1(\omega, t) \psi(t) dt \sim \\ &\sim \frac{\mu \tau}{(\omega - \omega_0)^2} \left(\frac{E_0}{\pi} \right)^2 \int_0^{\infty} \sin^2[(\omega - \omega_0)t/2] e^{-\mu t} \mu dt = \\ &= \left(\frac{E_0}{\pi} \right)^2 \left(\frac{\mu \tau}{2} \right) \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \mu^2}. \end{aligned}$$

В предположении же о дробном порядке пуассоновского процесса ($\psi(t) = \psi_\nu(t)$ и $\langle N(t) \rangle = \mu t^\nu / \Gamma(\nu + 1)$) получаем:

$$I_\nu(\omega, \tau) \sim \frac{\mu \tau^\nu}{4\Gamma(\nu + 1)} \left(\frac{E_0}{\pi} \right)^2 \phi_\nu(\Delta), \quad \phi_\nu(\Delta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(\Delta \cdot t/2)}{(\Delta \cdot t/2)^2} \psi_\nu(t) dt.$$

Литература

1. *Zaslavsky G. M., Edelman M. et al.* Phys. Plasmas **7**, 3691 (2000).
2. *Carreras B. A. et al.* Phys. Rev. Lett. **80**, 4438 (1998).
3. *Carreras B. A. et al.* Phys. Rev. Lett. **83**, 3653 (1999).
4. *Nielsen A. H., Pécseli H. L., Rasmussen J. J.* Phys. Plasmas **3**, 1530 (1996).
5. *Naulin V., Nielsen A. H., Rasmussen J. J.* Phys. Plasmas **6**, 4575 (1999).
6. *Milovanov A. V., Zelenyi L. M., Zimbardo G. J.* Geophys. Res. **101**, 19903 (1996)
7. *Chiaravalloti F., Milovanov A. V., Zimbardo G.* Arxiv: cond-mat/0404648 (2004).
8. *Milovanov A. V., Zelenyi L. M.* Phys. Fluids B **5**, 2609 (1993).

9. *Balescu R.* Plasma Phys. Control. Fusion **42**, B1 (2000).
10. *Chechkin A. V., Gonchar V. Yu.* Physics of Plasmas **9**, 78 (2002).
11. *Учайкин В. В., Захаров А. Ю.* Обозрение прикл. и пром. математики **12**, 540 (2005).

Глава 20

Нанозфизика¹

20.1 Фрактоны

Неупругое рассеяние нелокализованных состояний, представляемых бегущими волнами (фононами) давно и хорошо исследовано (см. напр. [1]). Аналогичные процессы для локализованных (в определении Андерсона [2]) вибрационных состояний (фрактонов) начали исследоваться лишь с 80-х годов. Примерами таких вибраций являются коллективные гармонические колебания сгустков турбулентного магнитного поля (магнитных доменов) относительно общего положения равновесия. Фрактоны играют важную роль в механизме образования куперовских пар в сверхпроводящих органических полимерах и керамических соединениях, а также в других физических системах и процессах [3]. Фрактоны характеризуются фрактонной размерностью $d_f < 2$. В механической модели с преобладанием скалярной упругости $1 < d_f < 2$, в чисто изотропной (инвариантной относительно вращений) $d_f < 1$. Плотность фрактонных состояний степенным образом зависит от частоты [4]

$$\rho(\omega) \propto \omega^{d_s-1},$$

где $d_s = d_f/\sigma$ – спектральная размерность ансамбля, а постоянная σ определяется индексом связности фрактальной структуры θ [5]:

$$\sigma = 1 + \theta/2.$$

Он равен нулю для любых «гладких» множеств и положителен для фрактальных множеств, содержащих внутренние пустоты. Для фракталов,

¹Глава 20 написана в соавторстве с Р. Т. Сибатовым

вложенных в двумерное пространство, $0,75 \lesssim \sigma \lesssim 1,42$, для фракталов в трехмерном пространстве $0,75 \lesssim \sigma \lesssim 2,23$.

Фрактальные возбуждения характеризуются нелинейным дисперсионным соотношением степенного вида [6]

$$\omega = \Lambda |k|^\sigma = \Lambda (k^2)^{\sigma/2}. \quad (20.1.1)$$

Более подробное представление об этих понятиях читатель может получить из замечательного обзора [3], к которому я неоднократно обращался при написании этой и предыдущей глав.

20.2 Слабые фрактонные возбуждения

Следуя обычным в квантовой механике рецептам, умножим (20.1.1) на волновую функцию $\Psi(x, t)$ и произведем замену

$$\omega \mapsto i\partial/\partial t, \quad k \mapsto -i\partial/\partial x, \quad k^2 \mapsto -\Delta.$$

В результате получаем линейное уравнение Шредингера дробного порядка

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -i^{-\sigma} \Lambda (-\Delta_1)^{\sigma/2} \Psi(x, t). \quad (20.2.1)$$

Пространственный множитель $\psi(x)$ волновой функции

$$\Psi(x, t) = \psi(x) e^{i\omega t}$$

удовлетворяет дробному аналогу стационарного уравнения Шредингера

$$-(-\Delta)^{\sigma/2} \psi(x) = \lambda \psi(x), \quad \lambda \equiv i^\sigma \omega / \Lambda.$$

В [3] приведены приближенные выражения для центральной части $(\omega|x|^\sigma \lesssim \Lambda)$

$$\psi(x) \sim \exp\left(-\frac{\omega(i|x|)^\sigma}{\Lambda \Gamma(1+\sigma)}\right)$$

и асимптотики:

$$\psi(x) \sim \left(\frac{\Lambda}{\omega \Gamma(-\sigma)}\right)^{1/2} x^{-(\sigma+1)/2}, \quad x \rightarrow \infty,$$

решения этого уравнения. Медленное затухание фрактонной волновой функции при $x \rightarrow \infty$ указывает на большую вероятность обнаружить фрактон за пределами центральной части распределения.

20.3 Нелинейное дробно-дифференциальное уравнение Шредингера

Линейное дробно-дифференциальное уравнение (20.2.1), выведенное из соотношения (20.1.1), справедливо лишь в той мере, в которой зависимостью частоты ω от интенсивности фрактонной волны можно пренебречь. С увеличением амплитуды $|\Psi(x, t)|$ необходимо вводить соответствующие поправки. В первом приближении соотношение (20.1.1) заменяется соотношением

$$\omega = \Lambda|k|^\sigma - \zeta|\Psi(x, t)|^2, \quad \zeta > 0,$$

показывающим, что частота колебаний уменьшается с ростом амплитуды. Соответствующие этой связи дробно-дифференциальное уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -i^{-\sigma} \Lambda (-\Delta)^{\sigma/2} \Psi(x, t) - \zeta |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t). \quad (20.3.1)$$

Согласно данной в [3] интерпретации, это уравнение отражает явление самосжатия (самофокусировки) фрактонного возбуждения, когда колебания в ядре усиливаются, а в хвосте – ослабевают. Конкурентом этому процессу выступает дифракция, вызывающая «расплывание ядра». Включение аномальной турбулентной диффузии фрактонных возбуждений дополняет уравнение (20.3.1) еще одним дробным лапласианом, ответственным за этот процесс:

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -i^{-\sigma} \Lambda (-\Delta)^{\sigma/2} \Psi(x, t) - K_\beta (-\Delta)^\beta \Psi(x, t) - \zeta |\Psi(x, t)|^2 \Psi(x, t),$$

$$0 < \beta \leq 1.$$

20.4 Дробный аналог уравнения Гинзбурга-Ландау

На основе развиваемых положений дробно-дифференциальной динамики фрактонов авторы [3] предсказывают интересный эффект *самоделокализации* фрактонов.

«Суть эффекта заключается в следующем. Нелинейная зависимость частоты фрактона от амплитуды приводит к изменению фазы осцилляций от ядра к хвосту возбуждения. С течением времени начальные

фазовые неоднородности нарастают, и в какой-то момент времени фрактон «распадается» на осцилляторы, фазы которых в значительной степени перемешаны. Фазовое перемешивание отражается на взаимном расположении структурных элементов фрактала, участвующих в колебаниях. При этом нарушаются отношения элементов как ближайших соседей: первоначально близкие элементы могут разойтись в поле волны, а далекие сблизиться».

И далее: «При сильном перемешивании ... индекс θ обращается в нуль ..., снимаются условия, требующие локализации возбуждений, и фрактон обретает долгожданную свободу. Волна как бы создает себе нечто вроде коридора с евклидовой связностью, вдоль которого она беспрепятственно проходит сквозь среду. Явление можно рассматривать как *странный солитон* для которого фрактальное распределение оказывается прозрачным».

Для волновых полей, устойчивых относительно самосжатия, авторы [3] выводят уравнения

$$K_{\beta}(-\Delta)^{\beta}\psi(x) + \omega\psi(x) + \zeta|\psi(x)|^2\psi(x) = 0, \quad (20.4.1)$$

являющегося дробным аналогом уравнения Гинзбурга-Ландау,

$$-K\Delta\psi(x) + \omega\psi(x) + \zeta|\psi(x)|^2\psi(x) = 0.$$

Они ассоциируют дробный характер операторов в уравнении (20.4.1) с когерентным формированием нелинейного волнового поля – например, конденсатной волновой функции ниже точки перехода в сверхпроводящее состояние – под влиянием долгодействующих корреляций, вносящих существенную нелокальность в поведение системы как целого.

20.5 Лазерное охлаждение атомов

Лазерным охлаждением и пленением атомов называют новый технологический процесс получения атомов с температурами в диапазоне нанокельвинов (то есть со скоростями порядка мм/с), существенно обогативший широкую область нанофизических исследований – от спектроскопии сверхвысокого разрешения и атомных часов до атомной интерферометрии и конденсации Бозе-Эйнштейна [7, 8]. Вследствие обмена импульсами и фотонами лазерного излучения и приобретения импульсов отдачи при спонтанном излучении процесс эволюции атомного импульса выглядит как случайное блуждание в импульсном пространстве. Идея нового метода охлаждения состоит в создании в окрестности начала координат импульсного пространства ($\mathbf{p} = 0$) небольших размеров «ловушки», куда атомы могут попадать в результате случайных блужданий и

оставаться там продолжительное время. Охлаждение, характеризуемое в импульсном пространстве возрастанием концентрации атомов в окрестности $\mathbf{p} = 0$ и уменьшением ее за пределами ловушки, в математическом плане обусловлено конкуренцией двух процессов: импульсной диффузией и обращением в нуль вероятности выхода из точки $\mathbf{p} = 0$. История каждого атома характеризуется последовательностью взаимно независимых случайных величин $T_1, \Theta_1, T_2, \Theta_2, T_3, \Theta_3, \dots$, где Θ_j – случайная продолжительность j -го пленения, T_j – случайная продолжительность диффузии между j -м и $j + 1$ -м пленением, называемая временем рециркуляции. Плотности распределения этих случайных величин обозначим $q_T(t)$ и $q_\Theta(t)$.

Если частота перескока в окрестности $\mathbf{p} = 0$ ведет себя по закону

$$R(\mathbf{p}) \simeq \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^\alpha, \quad p < p_0,$$

то

$$P(\Theta_j > \theta) \sim A\theta^{-\nu}, \quad \theta \rightarrow \infty,$$

где показатель ν связан с α и размерностью импульсного пространства D соотношением $\nu = D/\alpha$.

Концентрация охлажденных атомов $N_0(t)$ пропорциональна вероятности обнаружить атома в начале координат $f_0(t)$. Последняя функция выражается с помощью интеграла

$$f_0(t) = \int_0^t [F(t') - F'(t')] dt'$$

через разность скоростей переходов $F(t)$ и $F'(t)$, удовлетворяющих системе интегральных уравнений (при условии, что движение начинается с освобождения из ловушки):

$$F(t) = q_T(t) + \int_0^t F'(t-t') q_T(t') dt',$$

$$F'(t) = \int_0^t F(t-t') q_\Theta(t') dt'.$$

Применив преобразование Лапласа и решив алгебраическую систему, получим

$$\hat{f}_0(\lambda) = \frac{\hat{q}_T(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{1 - \hat{q}_\Theta(\lambda)}{1 - \hat{q}_T(\lambda)\hat{q}_\Theta(\lambda)}.$$

Как следует из физических положений

$$1 - \widehat{q}_\Theta(\lambda) \sim A\lambda^\alpha, \quad 1 - \widehat{q}_T(\lambda) \sim B\lambda^\beta,$$

где $0 < \alpha, \beta < 1$. В области малых значений λ функция $\widehat{f}_0(\lambda)$ удовлетворяет уравнению

$$A\lambda^\alpha \widehat{f}_0(\lambda) + B\lambda^\beta \widehat{f}_0(\lambda) = A\lambda^{\alpha-1}.$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим:

$$[{}_0D_t^\alpha + b_0 D_t^\beta] f_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}.$$

Решение, полученное с помощью метода функций Грина имеет вид:

$$f_0(t) = t^{\alpha-\beta} E_{\alpha-\beta, \alpha+1-\beta}(-bt^{\alpha-\beta}).$$

Это решение согласуется с результатами численного моделирования с помощью системы интегральных уравнений.

20.6 Флуоресценция нанокристаллов

20.6.1 Бинарная модель

Как отмечалось в п. 2.3.19, флуоресценция полупроводниковых нанокристаллов, облучаемых лазером, имеет мерцательный характер: периоды излучения (on-состояния) чередуются с off-состояниями, в которых наночастица не излучает.

Эксперименты показывают, что длительности пребывания в этих состояниях случайны и в первом приближении могут рассматриваться как независимые случайные величины $T_1 \equiv T_{\text{он}}$ и $T_0 \equiv T_{\text{офф}}$, распределенные по степенным законам

$$P(T_1 > t) \equiv \Psi_1(t) \propto t^{-\alpha}, \quad P(T_0 > t) \equiv \Psi_0 \propto t^{-\beta}, \quad 0 < \alpha, \beta < 1.$$

С вероятностной точки зрения мерцающая флуоресценция может быть представлена в виде последовательности переходов системы между двумя указанными состояниями, происходящими в случайные моменты времени [9, 10]. Пример траектории такого типа приведен на Рис. 20.1(а). В рамках этой модели в работах [9, 10] вычислены корреляционные функции и параметр Мандела. В действительности ситуация, конечно, сложнее, тем не менее модель двух состояний (*бинарная модель*) качественно предсказывает некоторые статистические закономерности.

Будем отсчитывать продолжительность времени наблюдения t от момента изменения состояния (перехода) и рассматривать процесс

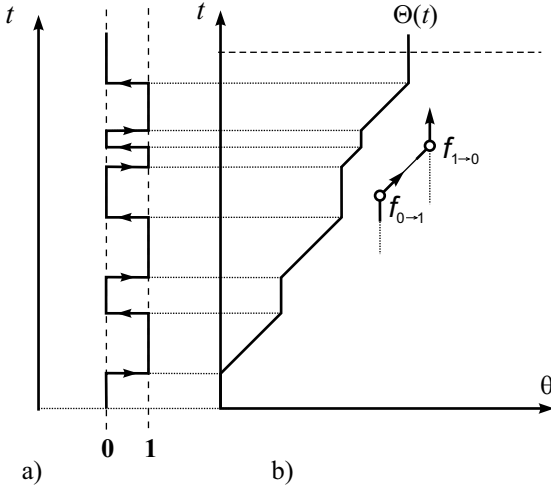


Рис. 20.1: Стохастическая модель мерцающей флуоресценции. а) случайная траектория и б) ее представление в координатах.

$\Theta(t)$, равный суммарной длительности излучения за время наблюдения (Рис. 20.1(b)). Введем следующие обозначения:

1 и 0 – состояния on и off, соответственно;

ε_1 – вероятность того, что начальным переходом является $0 \rightarrow 1$;

ε_2 – вероятность того, что начальным перехода является $1 \rightarrow 0$;

$p_1(\theta|t)d\theta = \mathbb{P}(\Theta(t) \in d\theta)$ – вероятность того, что суммарная продолжительность излучения за время наблюдения t принадлежит интервалу $(\theta, \theta + d\theta)$;

$f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t)d\theta dt$ – среднее число переходов $1 \rightarrow 0$ из $(\theta, \theta + d\theta)$ за время $(t, t + dt)$;

$f_{0 \rightarrow 1}(\theta, t)d\theta dt$ – среднее число переходов $0 \rightarrow 1$ в интервал $(\theta, \theta + d\theta)$ за время $(t, t + dt)$,

$$\Psi_n(t) = \int_t^\infty \psi_n(t') dt' = \mathbb{P}(T_n > t), \quad n = 0, 1.$$

Интегральные уравнения, связывающие введенные выше плотности, имеют вид:

$$p_1(\theta|t) = \int_0^\theta f_{0 \rightarrow 1}(\theta - t', t - t') \Psi_1(t') dt' + \int_0^t f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t - t') \Psi_0(t') dt', \quad (20.6.1)$$

$$f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t) = \int_0^\theta f_{0 \rightarrow 1}(\theta - t', t - t') \psi_1(t') dt' + \varepsilon_0 \delta(\theta) \delta(t), \quad (20.6.2)$$

$$f_{0 \rightarrow 1}(\theta, t) = \int_0^t f_{1 \rightarrow 0}(\theta, t - t') \psi_0(t') dt' + \varepsilon_1 \delta(\theta) \delta(t). \quad (20.6.3)$$

Применив двойное преобразование Лапласа

$$\hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) = \int_0^\infty dt \int_0^t d\theta e^{-\lambda t - \lambda_1 \theta} p_1(\theta | t)$$

получаем

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) &= \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) \hat{\Psi}_1(\lambda + \lambda_1) + \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) \hat{\Psi}_0(s), \\ \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) &= \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) + \varepsilon_0, \\ \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) &= \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) \hat{\psi}_0(s) + \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Разрешая эту систему, приходим к трансформантам частот переходов

$$\begin{aligned} \hat{f}_{1 \rightarrow 0}(\lambda_1, \lambda) &= \frac{\varepsilon_1 \hat{\psi}_1(\lambda_1 + \lambda) + \varepsilon_0}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)}, \\ \hat{f}_{0 \rightarrow 1}(\lambda_1, \lambda) &= \frac{\varepsilon_0 \hat{\psi}_0(\lambda) + \varepsilon_1}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)}, \end{aligned}$$

и выражению для трансформанты искомой плотности:

$$\begin{aligned} \hat{p}_1(\lambda_1 | \lambda) &= \frac{\varepsilon_0 \hat{\psi}_0(\lambda) + \varepsilon_1}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)} \frac{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1)}{\lambda + \lambda_1} + \\ &+ \frac{\varepsilon_1 \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) + \varepsilon_0}{1 - \hat{\psi}_1(\lambda + \lambda_1) \hat{\psi}_0(\lambda)} \frac{1 - \hat{\psi}_0(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (20.6.4)$$

Последнее выражение с точностью до обозначений совпадает с результатом, полученным в [9] для характеристической функции плотности распределения интенсивности макроскопической флуоресценции. В [9] эта трансформанта используется для асимптотического анализа параметра Манделя. Мы, обратив трансформанту с помощью дробно-устойчивых распределений, получим в явном виде выражение для самой асимптотической плотности распределения $p_1(\theta | t)$ и покажем, что эта плотность удовлетворяет дробно-дифференциальному уравнению.

20.6.2 Дробно-дифференциальные уравнения процесса

В работе [12] предложен механизм мерцания, основанный на модели диффузионно-контролируемых электронных переходов, который приводит к плотностям распределения он- и офф-интервалов в виде «дробных экспонент»:

$$\psi_1(t) = c_1^\alpha t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-c_1^\alpha t^\alpha), \quad \psi_0(t) = c_0^\beta t^{\beta-1} E_{\beta,\beta}(-c_0^\beta t^\beta).$$

При $\alpha < 1$ и $\beta < 1$ у этих плотностей распределения имеются «тяжёлые» степенные хвосты. При $\alpha \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow 1$ «дробные экспоненты» переходят в обычные экспоненты. Таким образом, изменение всего одного параметра в каждой из плотностей $\psi_1(t)$ и $\psi_0(t)$ позволяет моделировать как степенные, так и экспоненциальные распределения он- и офф-интервалов.

Подставляя трансформанты Лапласа этих функций:

$$\widehat{\psi}_1(\lambda) = \frac{1}{1 + (\lambda/c_1)^\alpha}, \quad \widehat{\psi}_0(\lambda) = \frac{1}{1 + (\lambda/c_0)^\beta} \quad (20.6.5)$$

в выражение (20.6.4), получаем:

$$\widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) = \frac{c_1^{-\alpha}(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + c_0^{-\beta}\lambda^{\beta-1} + c_1^{-\alpha}c_0^{-\beta}\lambda^\beta(\lambda + \lambda_1)^\alpha [\varepsilon_1(\lambda + \lambda_1)^{-1} + \varepsilon_0\lambda^{-1}]}{c_1^{-\alpha}(\lambda + \lambda_1)^\alpha + c_0^{-\beta}\lambda^\beta + c_1^{-\alpha}c_0^{-\beta}(\lambda + \lambda_1)^\alpha\lambda^\beta}. \quad (20.6.6)$$

Перепишем последнее соотношение в виде:

$$\begin{aligned} \lambda^\beta \widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) + C(\lambda + \lambda_1)^\alpha \widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) + c_1^{-\alpha}(\lambda + \lambda_1)^\alpha \lambda^\beta \widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) = \\ = C(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + \lambda^{\beta-1} + c_1^{-\alpha}\lambda^\beta(\lambda + \lambda_1)^\alpha [\varepsilon_1(\lambda + \lambda_1)^{-1} + \varepsilon_0\lambda^{-1}]. \end{aligned}$$

Здесь $C = c_0^\beta/c_1^\alpha$. Выполняя двойное обратное преобразование Лапласа и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma} d\lambda \int_{\Gamma'} d\lambda_1 \exp(\lambda t + \lambda_1 \theta) (\lambda + \lambda_1)^\alpha \widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\lambda \exp(\lambda t) \exp(-\lambda \theta) {}_0D_\theta^\alpha \exp(\lambda \theta) \widehat{p}_1(\theta|\lambda) = \mathbb{T}_t^{-\theta} {}_0D_\theta^\alpha \mathbb{T}_t^\theta p_1(\theta|t), \end{aligned}$$

где \mathbb{T}_t^a – оператор сдвига по времени t на величину a :

$$\mathbb{T}_t^a p_1(\theta|t) = p_1(\theta|t + a),$$

приходим к дробно-дифференциальному уравнению для плотности распределения суммарной длительности оп-интервалов:

$$\begin{aligned} & {}_0D_t^\beta p_1(\theta|t) + C \mathbb{T}_t^{-\theta} {}_0D_\theta^\alpha \mathbb{T}_t^\theta p_1(\theta|t) + c_1^{-\alpha} {}_0D_t^\beta \mathbb{T}_t^{-\theta} {}_0D_\theta^\alpha \mathbb{T}_t^\theta p_1(\theta|t) = \\ & = C \delta(t - \theta) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \delta(\theta) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)} - \frac{c_1^{-\alpha} \theta^{-\alpha} (t - \theta)^{-\beta}}{\Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1 - \beta)} \left(\frac{\alpha \varepsilon_0}{\theta} + \frac{\beta \varepsilon_1}{t - \theta} \right). \end{aligned}$$

Пусть процесс мерцания изучается с момента перехода из off- в on-состояние. Тогда $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_0 = 0$. Из тауберовой теоремы следует, что выражение (20.6.6) в асимптотике больших времен ($t \gg c_1^{-1}$, c_0^{-1}) имеет вид:

$$\widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) \sim \frac{C(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + \lambda^{\beta-1}}{C(\lambda + \lambda_1)^\alpha + \lambda^\beta}, \quad C = c_0^\beta / c_1^\alpha. \quad (20.6.7)$$

Перепишем последнее выражение в виде:

$$[C(\lambda + \lambda_1)^\alpha + \lambda^\beta] \widehat{p}_1(\lambda_1|\lambda) = C(\lambda + \lambda_1)^{\alpha-1} + \lambda^{\beta-1}.$$

Выполняя двойное обратное преобразование Лапласа, приходим к асимптотическому дробно-дифференциальному уравнению для плотности распределения суммарной длительности оп-интервалов:

$${}_0D_t^\beta p_1(\theta|t) + C \mathbb{T}_t^{-\theta} {}_0D_\theta^\alpha \mathbb{T}_t^\theta p_1(\theta|t) = C \delta(t - \theta) \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \delta(\theta) \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1 - \beta)}. \quad (20.6.8)$$

Известно (см. например [11]), что выражение

$$\frac{\lambda^{\beta-1}}{C\lambda_1^\alpha + \lambda^\beta}$$

является двойным преобразованием Лапласа функции:

$$(Ct^\beta)^{-1/\alpha} q_+ \left(\theta (Ct^\beta)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta \right),$$

где $q_+(t; \alpha, \beta)$ – дробно-устойчивая плотность, выражающаяся через односторонние устойчивые плотности $g_+(t; \alpha)$ и $g_+(t; \beta)$:

$$q_+(t; \alpha, \beta) = \int_0^\infty d\tau g_+(\tau; \beta) g_+(t\tau^{-\beta/\alpha}; \alpha) \tau^{\beta/\alpha}.$$

Находя оригинал трансформанты (20.6.7)

$$p(\theta|t) = [C(t - \theta)^\beta]^{-1/\alpha} q_+ \left(\theta [C(t - \theta)^\beta]^{-1/\alpha}; \alpha, \beta \right)$$

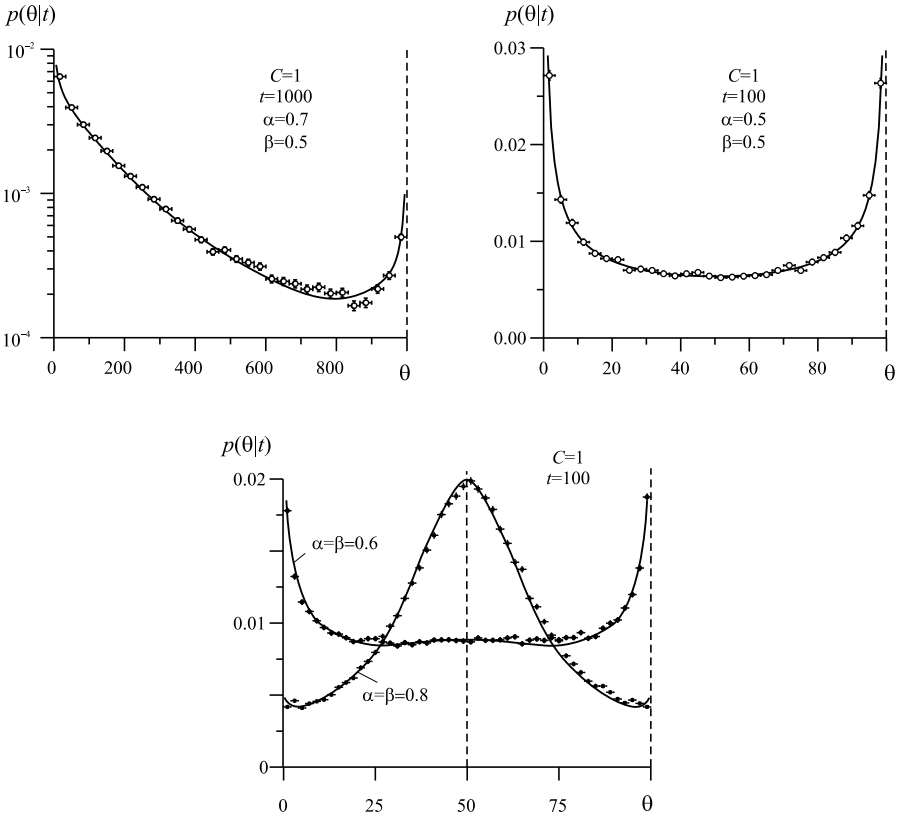


Рис. 20.2: Сравнение с результатами моделирования методом Монте-Карло.

$$+(C^{-1}\theta^\alpha)^{-1/\beta} q_+ \left((t - \theta)(C^{-1}\theta^\alpha)^{-1/\beta}; \beta, \alpha \right). \quad (20.6.9)$$

и учитывая соотношение для функций дробно-устойчивых распределений

$$Q_+ \left(\xi(C\tau^\beta)^{-1/\alpha}; \alpha, \beta \right) = 1 - Q_+ \left(\tau(C^{-1}\xi^\alpha)^{-1/\beta}; \beta, \alpha \right),$$

перепишем (20.6.9) в виде:

$$p_1(\theta|t) = \left[1 + \frac{\alpha(t - \theta)}{\beta} \right] (C\theta^\alpha)^{-1/\beta} q_+ \left((t - \theta)(C\theta^\alpha)^{-1/\beta}; \beta, \alpha \right). \quad (20.6.10)$$

Сравнение решения (20.6.10) с результатами моделирования процесса методом Монте-Карло, представленное на Рис. 20.2, показывает хорошее согласие.

Литература

1. *Займан Дж.* Электроны и фононы. – М.: ИЛ, 1962.
2. *Anderson P. W.* Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
3. *Зеленый Л. М., Милованов А. В.* УФН **174**, 809 (2004).
4. *Aharony A. et al.* Phys. Rev. Lett. **58**, 132 (1987).
5. *Milovanov A. V., Rasmussen J. J.* Phys. Rev. B **66**, 134505 (2002).
6. *Nakayama T., Yakubo K., Orbach R. L.* Rev. Mod. Phys. **66**, 381 (1994).
7. *Осадько И. С.* Селективная спектроскопия одиночных молекул. – М.: Физматлит, 2000.
8. *Барду Ф., Бушо Ж.-Ф., Аспе А., Коэн-Таннуджи К.* Статистика Леви и лазерное охлаждение. – М.: Физматлит, 2005.
9. *Jung Y., Barkai E., Silbey R. J.* Chem. Physics **284**, 181 (2002).
10. *Margolin G., Barkai E. J.* Chem. Phys. **121**, 1566 (2004).
11. *Учайкин В. В.* УФН **173**, 847 (2003).
12. *Tang J., Marcus R. A.* The Journal of Chemical Physics **123**, 054704 (2005).

Глава 21

Космофизика

21.1 Крупномасштабная структура: модель Мандельброта

Накопленные к настоящему времени базы данных астрономических наблюдений распределения видимой материи во Вселенной сосредоточены в обзорах, содержащих разнообразную информацию о миллионах и миллионах космических объектов: планет, звезд, галактик, скоплений галактик, скоплений скоплений галактик; объектов специальных типов: квазаров, пульсаров, радиогалактик и др. Строго говоря, современная космология (наука о возникновении и эволюции Вселенной) должна опираться на всю эту информацию, однако это представляется сегодня невозможным, как невозможен учет всех индивидуальных координат и скоростей молекул газа или жидкости, заключенных в сосуде. Вместо этого в статистической физике используется сжатие информации и представление ее в виде некоторой последовательности функций с возрастающим числом аргументов. Функция с нулевым числом аргументов (то есть, просто число) ρ представляет собой плотность массы (или плотность числа молекул), функция одной переменной $\xi(r)$ – корреляционную функцию и т.д. Подобный подход широко используется и при описании вещества в космических масштабах (космографии). Хорошо известно, в частности, что корреляционная функция распределения галактик в широком диапазоне расстояний имеет степенной вид

$$\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma},$$

где $\gamma = 1.77 \pm 0.04$ и r_0 – *корреляционная длина*. Известно также, что скопления галактик (кластеры) и скопления скоплений (суперкластеры),

рассматриваемые как точечные объекты, положения которых определяются координатами центров масс, характеризуются корреляциями того же самого степенного типа. Следующие особенности дают повод для поиска новой концепции, альтернативной классической (согласно последней с уменьшением масштаба, то есть, с увеличением глубины обзора, распределение видимой материи выглядит все более однородным).

1. Для галактик r_0 оказывается равным $5h^{-1}$ Мпс, тогда как для кластеров $r_0 \simeq 25h^{-1}$ Мпс и значительно больше для суперкластеров. Это озадачивает: кластеры представляются более коррелированными структурами, чем галактики, из которых они состоят! Другими словами, распределение галактик можно ожидать близким к однородному на расстояниях $10-15 h^{-1}$ Мпс, тогда как кластеры и суперкластеры наблюдаются на существенно больших расстояниях [1, 2].

2. Корреляционная длина возрастает с размером выборки (глубиной обзора) [3, 4].

3. Глубокие обзоры [5-7] не свидетельствуют о достижении однородности, а скорее всего наводят на мысль о самоподобии наблюдаемых распределений.

Концепция самоподобия и была реализована Б. Мандельбротом в его фрактальной модели распределения галактик, основанной на блужданиях Леви [8, 9]. Используя в качестве определяющего свойство масштабной инвариантности (самоподобия), можно сказать, что *фрактал – это геометрическая структура, которая всегда выглядит одинаково* (по крайней мере, в статистическом смысле), *независимо от разрешения, с каким она наблюдается* [10, стр. 49].

Более формальное определение фрактального множества, данное Мандельбротом [9], – это *математический объект, чья фрактальная (Хаусдорфова) размерность D_H строго больше, чем его топологическая размерность D_T* . Таким образом, для фрактального точечного распределения в d -мерном пространстве, названного Мандельбротом *фрактальной пылью*, $D_T = 0$ и $0 < D_H \leq d$. Фрактальная размерность $D_H = d$ характеризует однородное распределение, заполняющее пространство. В качестве примера последнего можно рассмотреть однородный пуассоновский ансамбль, для которого

$$\langle N(R) \rangle = (4/3)\pi\rho R^3.$$

Заметим, что в этом случае не имеет значения, помещается ли центр сферы, в которой производится подсчет, в любую точку множества или в любую другую точку пространства.

Анализ процедуры измерения глобальной плотности массы Вселенной привел Б. Мандельброта к другому определению фрактальной раз-

мерности. Он пишет в главе «Существует ли глобальная плотность материи?», касающейся распределения галактик во Вселенной:

«Чтобы определить и измерить плотность, начинают с массы $M(R)$ в сфере радиуса R , центр которой помещен на Земле. Затем вычисляют приближенную плотность, определяемую как

$$M(R)/[(4/3)\pi R^3].$$

После этого величину R устремляют к бесконечности, и глобальную плотность определяют как предел, к которому сходится приближенная плотность.

Но, действительно ли глобальная плотность должна сходиться к положительному или конечному пределу? Если так, то скорость сходимости оставляет желать лучшего. Далее, оценки предельной плотности ведут себя весьма странно. По мере увеличения глубины мира, доступного телескопам, приближенная плотность уменьшается удивительно систематическим образом. Согласно де Вакулеру (см. [11]), она меняется пропорционально R^{D-3} . Наблюдаемый показатель D много меньше, чем 3, а наилучшая оценка на основе косвенных наблюдений составляет $D = 1.23$.

Тезис де Вакулера заключается в том, что поведение приближенной плотности отражает реальность, означающую, что $M(R) \propto R^D$. Эта формула напоминает классический результат, в котором шар радиуса R в евклидовом пространстве размерности d имеет объем $\propto R^d$. В главе 6 мы встретили такую же формулу для кривой Коха, с основным отличием в том, что показатель является не евклидовой размерностью $E = 2$, а дробной фрактальной размерностью D . А в главе 8 выводилась зависимость $M(R) \propto R^D$ для канторовской пыли на временной оси (для которой $d = 1$).

Все эти факты наводят на мысль, что показатель де Вакулера D является фрактальной размерностью» [9, стр. 85].

Именно фрактальная концепция позволяет примирить наблюдаемое неравномерное (изотропно-степенное относительно нашей галактики) распределение других галактик с космологическим принципом, согласно которому Вселенная должна выглядеть одинаково во всех связанных с ней системах отсчета [12]. Это значит, что переменяя точку, взятую в качестве начала координат, мы должны вновь получить изотропное относительно нового начала координат распределение с плотностью числа окружающих ее галактик, убывающей относительно нее по тому же степенному закону. Возможно ли это? Нет, если речь идет о «застывшем» детерминированном распределении: центр симметрии останется на прежнем месте, не совпадающим с новым началом координат. Да, если под плотностью понимать *среднюю плотность*, то есть, плотность, усредненную по статистическому ансамблю таких распределений, а космологический

принцип заменить его слабой формой: усредненное таким образом распределение вещества во Вселенной должно выглядеть одинаково в любой системе координат, центр которой совпадает с одной из галактик. Введенный Б. Мандельбротом, слабый космологический принцип [8] восстановил (в ограниченном виде) идею равноправия различных систем координат ценой нарушения эквивалентности пустых и занятых веществом точек Вселенной (заметим, что в случае равномерного пуассоновского распределения эта эквивалентность восстанавливается и слабый космологический принцип совпадает с его обычной формой).

Для моделирования фрактальных распределений Б. Мандельброт использовал модель блужданий с асимптотически степенной переходной плотностью и получил качественное согласие с наблюдательными данными.

«Моя модель распределения галактик воспроизводит любую желаемую фрактальную размерность $D < 2$ используя пыль, т.е., множество точек топологической размерности $D_T = 0$. Для достижения этой цели я использую случайное блуждание, при котором математическое ожидание $\langle U^2 \rangle$ бесконечно, поскольку $U (= |\Delta \mathbf{X}|)$ - гиперболическая случайная величина, с обрезанием при $u = 1$. Таким образом, для $u \leq 1$, $P(U > u) = 1$, при $u > 1$ $P(U > u) \propto u^{-D}$, для $0 < D < 2$.

Основное следствие из этого – это то, что $\langle M(R) \rangle \propto R^D$ для $R \gg 1$. Это соотношение, выполнение которого и нужно было установить. Оно допускает любую размерность, которую может допустить факт или теория» [9, стр. 289].

Математическое описание этой модели с использованием дробно-дифференциального аппарата уже дано нами в п. 4.5. Здесь мы рассмотрим распространение луча света в такой структуре, отклоняющегося гравитационным полем вблизи галактик, которые можно считать точечными образованиями.

21.2 Статистика в узком луче

Каталоги галактик и скоплений галактик содержат выборки из приближенно конических объемов с относительно широкими углами раскрытия, до 90° . Существуют, однако, другие наборы данных, относящиеся к очень узким телесным углам, около 1° . По этим данным, с поправкой на коническую геометрию, можно исследовать поведение локальной плотности вдоль очень тонких и длинных цилиндров, получить так называемые *лучевые обзоры* (*pencil beam surveys*).

Численные эксперименты с использованием описанной выше методики построения точечных распределений фрактального типа [13] приве-

ли к следующим выводам, подтвержденным более поздними исследователями [14, 15]:

(i) распределение случайного расстояния R от одной галактики до ближайшей к ней в данном луче (узком цилиндре) характеризуется длинным хвостом степенного типа

$$P(R > t) \sim Ct^{-\omega}, \quad 0 < \omega < 1$$

с показателем $\omega = \omega(D)$, зависящим от фрактальной размерности распределения галактик в пространстве $D = \alpha$ (Рис. 21.1);

(ii) распределение длины следующего интервала между галактиками в цилиндре слабо зависит от предыдущего и приближенно может считаться не зависящим от него .

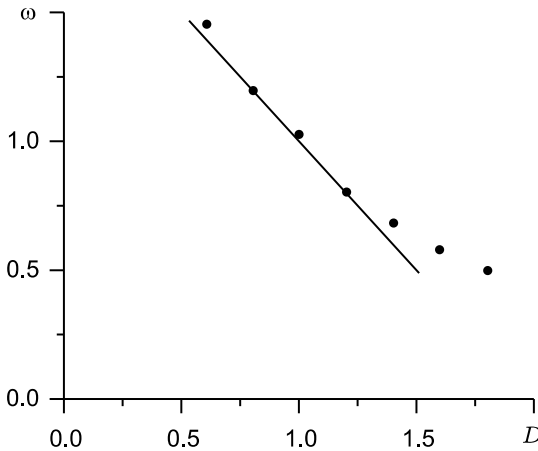


Рис. 21.1: Связь между фрактальной размерностью D и лучевым показателем ω (точки – расчеты методом Монте-Карло [13], прямая – формула $\alpha = 2 - D$ работы [14]).

Выводы эти позволяют применить для асимптотического описания лучевой статистики на больших расстояниях t модель пуассоновского процесса дробного порядка ω . В частности, для вероятности $w(n; t) \equiv P\{N(t) = n\}$ получим

$$w(n; t) \sim G_+ \left([(n + 1)C\Gamma(1 - \omega)]^{-1/\omega} t; \omega \right) - G_+ \left([nC\Gamma(1 - \omega)]^{-1/\omega} t; \omega \right) \sim \\ \sim \frac{t}{\omega n} [nC\Gamma(1 - \omega)]^{-1/\omega} g_+ \left([nC\Gamma(1 - \omega)]^{-1/\omega} t; \omega \right), \quad t \rightarrow \infty,$$

где

$$G_+(t; \omega) = \int_0^t g(t'; \omega, 1) dt'$$

– односторонняя устойчивая функция распределения.

Используя выражение для моментов отрицательных порядков

$$\int_0^{\infty} g_+(t; \omega) t^{-\nu} dt = \frac{\Gamma(1 + \nu/\omega)}{\Gamma(1 + \nu)},$$

найдем моменты числа отсчетов в интервале $(0, t)$:

$$\langle N^k(t) \rangle = \frac{k! t^{k\omega}}{[\Gamma(1 - \omega)]^k \Gamma(1 + k\omega)}.$$

Легко видеть, что $\langle N(t) \rangle \propto t^\omega$ и моменты случайной величины $\zeta = N / \langle N(t) \rangle$ не зависят от t . Как отмечалось выше, это – специфическое свойство стохастических фракталов. Такое самоподобие стохастической структуры означает *отсутствие эффекта самоусреднения*: не существует такого расстояния t_1 , что при $t > t_1$ статистическими флуктуациями $N(t)$ можно пренебречь, и ни при каком t нельзя заменить среднее значение гладкой функции $f(N)$ случайной переменной $N(t)$ ее значением от усредненной переменной

$$\langle f(N(t)) \rangle \neq f(\langle N(t) \rangle), \quad t \rightarrow \infty.$$

Более того, на всех масштабах наблюдаются пробелы, не содержащие точек, и, в отличие от обычного пуассоновского распределения, нет такого масштаба, в котором распределение точек выглядело бы равномерным (свойство *перемежаемости*, п. 4.4).

21.3 Рассеяние света гравитационными полями

Распространяясь от источников (звезд, галактик), свет испытывает рассеяние в нерегулярных гравитационных полях Вселенной. В работе [16] была рассмотрена задача о многократном рассеянии луча света в гравитационном поле, создаваемом случайным распределением точечных масс, образуемых пуассоновский ансамбль. Расчеты проведены в

рамках стандартного малоуглового приближения, когда отклонение частицы (в данном случае, фотона) от первоначального направления описывается двумерным вектором \mathbf{u} , а отклонением траектории от прямой пренебрегается. Пусть $\sigma(\mathbf{u})$ – угловое распределение фотона при рассеянии в гравитационном поле отдельного источника (галактики), $\int \sigma(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 1$ тогда распределение фотона, испытавшего n рассеяний, дается многократной сверткой таких распределений:

$$\sigma^{(n+1)}(\mathbf{u}) = \int \sigma(\mathbf{u}') \sigma^{(n)}(\mathbf{u} - \mathbf{u}') d\mathbf{u}',$$

где $\sigma^{(0)}(\mathbf{u}) \equiv \delta(\mathbf{u})$. Угловое распределение фотонов, прошедших путь x , запишется в виде

$$f(\mathbf{u}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \sigma^{(n)}(\mathbf{u}),$$

где $p_n(x)$ – вероятность того, что на пути x фотон испытает ровно n рассеяний. Последняя и характеризует среду. Она связана с плотностью распределения длины свободного пробега $q(x)$ соотношением

$$p_n(x) = \int_0^x Q(x-x') q^{(n)}(x') dx',$$

где

$$Q(x) = \int_x^{\infty} q(x') dx'$$

есть вероятность того, что случайный пробег превысит значение x , а $q^{(n)}(x)$ – многократная свертка распределений $q(x)$, описывающая распределение координаты точки n -го столкновения. В этих обозначениях распределение

$$f(\mathbf{u}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}) \int_0^x Q(x-x') q^{(n)}(x') dx'.$$

В классической теории многократного рассеяния рассеивающие центры предполагаются расположенными независимо друг от друга с постоянной (в случае однородной среды) средней плотностью. Распределение свободного пробега в этом случае имеет вид

$$q_0(x) = \mu \exp(-\mu x),$$

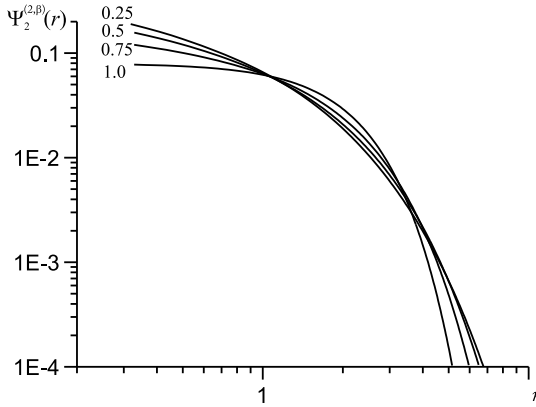


Рис. 21.2: Двумерные дробно-устойчивые плотности распределения $\Psi_2^{(2, \beta)}(r) \equiv q_2(r; 2, \omega = \beta)$.

где μ — линейный коэффициент рассеяния, обратный среднему пробегу. Поскольку $q_0^{(n)}(x) = \mu(\mu x)^{n-1} \exp(-\mu x)/(n-1)!$ и $Q_0(x) = \exp(-\mu x)$, угловое распределение описывается обобщенным распределением Пуассона

$$f_0(\mathbf{u}, x) = \exp(-\mu x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!} \sigma^{(n)}(\mathbf{u}).$$

При $x \rightarrow \infty$ среднее значение случайного числа слагаемых растет как μx , а его относительные флуктуации убывают $\sim (\mu x)^{-1/2}$. Поскольку при больших n

$$\sigma^{(n)}(\mathbf{u}) \sim \frac{1}{2\pi n \langle \Theta^2 \rangle} \exp\{-\mathbf{u}^2/[2n \langle \Theta^2 \rangle]\},$$

где

$$\langle \Theta^2 \rangle = \int \mathbf{u}^2 \sigma(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

— средний квадрат угла однократного рассеяния, угловое распределение частиц на больших глубинах x имеет гауссов вид

$$f_0(\mathbf{u}, x) \sim \frac{1}{2\pi \mu x \langle \Theta^2 \rangle} \exp\{-\mathbf{u}^2/[2\mu x \langle \Theta^2 \rangle]\}, \quad x \rightarrow \infty,$$

полученный Э. Ферми в задаче о многократном кулоновском рассеянии заряженных частиц. Распределение это получено путем решения уравнения

$$\frac{\partial f_0(\mathbf{u}, x)}{\partial x} = K \Delta_{\mathbf{u}} f_0(\mathbf{u}, x) + \delta(\mathbf{u}) \delta(x).$$

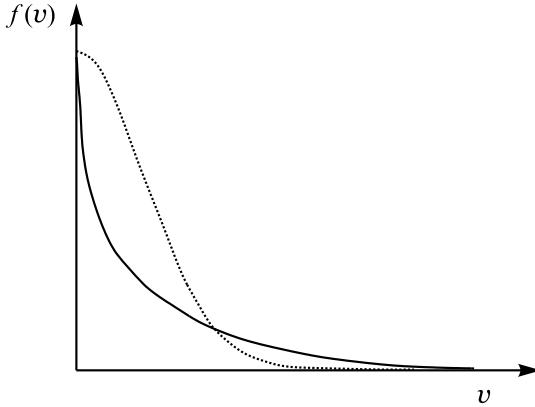


Рис. 21.3: Угловые распределения в однородной (пунктирная линия) и фрактальной (сплошная) средах в единицах среднеквадратичного угла: $v = u/\sqrt{\mathbf{u}^2}$. Показатель $\omega = 0,66$.

Обобщение этого результата на фрактальную модель среды, выполненное в работах [17, 18], привело к замене первой производной по координате производной дробного порядка, и дельта-функции – ее дробным аналогом:

$${}^0D_x^\omega f(\mathbf{u}, x) = K \Delta_{\mathbf{u}} f(\mathbf{u}, x) + \delta(\mathbf{u}) \frac{x^{-\omega}}{\Gamma(1 - \omega)}.$$

Решение этого уравнения выражается через двумерное дробно-устойчивое распределение с параметрами $\alpha = 2, \beta = \omega$:

$$f(\mathbf{u}, x) \sim (4Dx^\omega)^{-1} q_2 \left(|\mathbf{u}|/\sqrt{4Kx^\omega}; 2, \omega \right), \quad x \rightarrow \infty,$$

где

$$K = \frac{\langle \Theta^2 \rangle \Gamma(1 + \omega)}{2B[\Gamma(1 - \omega)]^2}.$$

Результаты численных расчетов для нескольких показателей ω , включая предельный случай $\omega = 1$, представлены на рис. 21.2.

Среднеквадратичный угол многократного рассеяния вычисляется аналитически

$$\int f(\mathbf{u}, x) \mathbf{u}^2 d\mathbf{u} = \frac{4}{\Gamma(\omega + 1)} K x^\omega.$$

Угловое распределение многократно рассеянных частиц во фрактальной среде по сравнению с однородной отличается более медленным ростом ширины $\propto x^{\omega/2}$ вместо $\propto x^{1/2}$. Его форма отличается от нормальной

более высокой концентрацией вероятности в области малых и больших углов (рис. 21.3).

Начиная с работ Рибейро [1] пушен в обиход термин «фрактальная космология» для обозначения модели неоднородной (степенного типа) Вселенной. В остальном используется обычный математический аппарат, и это представляется некорректным. Использование дифференциального аппарата предполагает дифференцируемость, и стало быть гладкость используемых для описания модели функций. В представлении точечных распределений такую гладкость можно было бы обеспечить усреднением наблюдаемых характеристик по областям достаточно больших размеров (как это обычно и делается в статистической физике). Но фрактал – *структура самоподобная*: если он обладает статистическими флуктуациями, он обладает ими в любых масштабах. По этой же причине к фрактальной модели не подходит стандартное корреляционное описание: флуктуации нельзя считать малыми. Стало быть, фрактальная космология должна быть стохастической космологией, и первое, что следует в этом направлении сделать – это развить статистические методы описания таких структур.

21.4 Диффузия космических лучей

Распространение космических лучей в галактике обычно описывается в рамках диффузионного приближения [19, 20]. В пренебрежении потерями энергии частиц и ядерными взаимодействиями уравнение диффузии для скалярного (проинтегрированного по направлениям) потока частиц космического излучения с энергией E от распределения источников с плотностью $S(\mathbf{r}, t, E)$ записывается в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = K(E) \Delta \Phi(\mathbf{r}, t, E) + S(\mathbf{r}, t, E),$$

где $K(E)$ – зависящий от энергии частиц коэффициент диффузии. Уравнение это выведено в предположении, что флуктуации межзвездных магнитных полей, являющихся основной причиной хаотичности траекторий заряженных частиц и придающих им специфический броуновский характер, характеризуют и определенным пространственным размером и с уменьшением масштаба (то есть, с увеличением «поля обзора») выглядят все более однородными и мелкомасштабными.

В течение последних десятилетий, однако, получены свидетельства того, что неоднородности эти носят многомасштабный (фрактальный) характер [21]. Анализ остатков сверхновой показывает наличие в этой области газовых компонентов с различными физическими параметрами

($T_e \sim 5 \div 10^6$ К, $n_e \sim 0.1 \div 10^3$ м⁻³), что может быть следствием чрезвычайной неоднородности межзвездной среды. Эти и другие данные о неоднородности плотности вещества ρ и напряженности магнитного поля $H \propto \rho^q$, $q \sim 1/3 \div 1/2$ [22] в диапазоне длин 100-150 пс, порождающие сомнения в применимости диффузионной модели к описанию переноса космических лучей, стимулировали развитие новых моделей переноса космических лучей, в частности, модели супердиффузии, основанной на применении дробной степени лапласиана:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -K(E)(-\Delta)^{\alpha/2} \Phi(\mathbf{r}, t, E) + S(\mathbf{r}, t, E). \quad (21.4.1)$$

Модель эта была использована для объяснения наблюдаемого в эксперименте излома энергетического спектра, то есть возрастания показателя η в степенном представлении спектра $E^{-\eta}$ при переходе из области $\sim 10^2$ Гэв/нуклон в область $\sim 10^5$ Гэв/нуклон. Объяснение связано с наличием аномально больших свободных пробегов частиц («полетов Леви») в областях, свободных от полей. Отсутствие определенных масштабов, ограничивающих эти области, открывает путь к использованию гипотезы о самоподобии, вполне естественной для среды турбулентного типа, а из нее в свою очередь вытекают степенной характер распределения пробегов, который и проявляется в полетах Леви.

Решение уравнения (21.4.1) выражается через функцию Грина $G(\mathbf{r}, t, E; \mathbf{r}_0, t_0, E_0)$,

$$\Phi(\mathbf{r}, t, E) = \int \int \int G(\mathbf{r}, t, E; \mathbf{r}_0, t_0, E_0) S(\mathbf{r}_0, t_0, E_0) d\mathbf{r}_0 dt_0 dE_0,$$

которая в свою очередь удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -K(E)(-\Delta)^{\alpha/2} G(\mathbf{r}, t, E; \mathbf{r}_0, t_0, E_0) + \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) \delta(t - t_0) \delta(E - E_0)$$

с нулевыми условиями на бесконечности. Его решение выражается через трехмерные изотропные распределения Леви-Фельдгейма $g_3(r, \alpha)$ соотношением

$$G(\mathbf{r}, t, E; \mathbf{r}_0, t_0, E_0) = \\ = \delta(E - E_0) [K(E)(t - t_0)]^{-3/2} g_3 \left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| [K(E)(t - t_0)]^{-1/\alpha} \right) \theta(t - t_0),$$

где

$$\theta(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0, \\ 0, & t < t_0. \end{cases}$$

При $\alpha = 2$ мы имеем классический результат нормальной (гауссовой) диффузии.

Важно отметить, что при переходе от нормального значения $\alpha = 2$ к аномальным $\alpha < 2$ не только форма распределений меняется (появляются и усиливаются степенные хвосты), но изменяется (возрастает) скорость расширения диффузионного пакета: его ширина растет со временем $\tau = |t - t_0|$ по закону $\tau^{1/\alpha}$, $\alpha < 2$, тогда как в нормальном случае ширина пакета пропорциональна $\tau^{1/2}$.

Для точечного источника со степенным спектром

$$S(\mathbf{r}, t, E) = S_0 E^{-p} \delta(\mathbf{r}) \theta(T - t) \theta(t),$$

качественно моделирующего взрыв сверхновой, решение супердиффузионного уравнения имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}, t, E) = S_0 E^{-p} [K(E)]^{-3/\alpha} \int_{\max[0, t-\tau]}^t \tau^{-3/\alpha} g_3 \left(r [K(E)\tau]^{-1/\alpha} \right) d\tau.$$

Выполняя численное интегрирование с учетом зависимости

$$K(E) = K_0 (E/Z)^\delta,$$

где Z – заряд частицы (в единицах заряда протона), $\delta > 0$ – показатель зависимости коэффициента диффузии частиц от их энергии, можно представить наблюдаемый в окрестности Земли спектр космических лучей в виде

$$\Phi(E) = \Phi_0 E^{-\eta},$$

где

$$\eta = p + (\delta/\alpha)\xi, \quad (21.4.2)$$

$$\xi(E) = 3 - \frac{2\pi r^2}{[K(E)]^2/\alpha} \frac{\int_{\max[0, t-\tau]}^t \tau^{-5\alpha} g_5 \left(r [K(E)\tau]^{-1/\alpha} \right) d\tau}{\int_{\max[0, t-\tau]}^t \tau^{-3\alpha} g_3 \left(r [K(E)\tau]^{-1/\alpha} \right) d\tau}. \quad (21.4.3)$$

Здесь использовано соотношение

$$\frac{dg_m(r; \alpha)}{dr} = -2\pi r g_{m+2}(r, \alpha).$$

Пусть E_0 – решение уравнения $\xi(E) = 0$. Из уравнений (21.4.2) и (21.4.3) видно, что при $E = E_0$ показатель наблюдаемого спектра η равен показателю излучаемого сверхновой спектра p , тогда как при $E \ll E_0$ мы имеем $\eta \equiv \eta_{<} \approx p - \delta$, а при $E \gg E_0$ – $E \gg E_0$ – $\eta \equiv \eta_{>} \approx p + \delta$. Другими словами, показатель наблюдаемого спектра при переходе через

энергию E_0 возрастает на величину 2δ . Отметим, что этот эффект имеет место только при $\alpha < 2$; в нормальной модели диффузии он отсутствует. Но именно подобного типа эффект наблюдается в эксперименте, из которого мы можем найти основные параметры модели. Так, находя из экспериментальных данных $E_0 = 3 \cdot 10^4$ ГэВ, $\eta_{<} \approx 2,65$ и $\eta_{>} \approx 3,15$ [20, 23] мы получаем, что наилучшее согласие с экспериментальными данными прямых измерений ядер H, He, CNO, Ne-Si и Fe – групп получается при $\alpha = 5/3$, $\delta = 0,25$ и $p \approx 2,9$ ($r \sim 200$ пс, $t \sim 10^5$ лет, $T \sim t$).

На основании этих расчетов в нашей работе [24] сделаны следующие выводы.

1. Наблюдаемый излом в спектре космических лучей находит объяснение в рамках предположения о фрактальном характере неоднородностей межзвездной среды.

2. Показатель спектра измерения взорвавшейся сверхновой $p \approx 2.9$.

3. Результаты расчета не противоречат гипотезе, что источниками частиц с энергией $E \leq 10^{18}$ эВ являются взрывы сверхновых в течение последних 10^5 лет.

Дальнейшее развитие дробно-дифференциального подхода к решению данной задачи можно проследить по работам [25, 26].

Литература

1. *Ribeiro M. B., Miguelote A. Y.* Braz. J. Phys. **28**, 132 (1998).
2. *Pietronero L.* Physica **144A**, 257 (1987).
3. *Einasto J., Klypin A. A., Saar E.* MNRAS **219**, 457 (1986).
4. *Davis M. et al.* ApJ **333**, L9 (1988).
5. *Saunders W. et al.* Nature **349**, 32 (1991).
6. *Geller M.* In: Astronomy, Cosmology and Fundamental Physics. – Ed. by Caffo M. et al. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1989, p. 83.
7. *Coleman P. H., Pietronero L.* Phys. Rep. **213**, 313 (1992).
8. *Mandelbrot B. B.* Comptes Rendus **280A**, 1551 (1975).
9. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. – New York: W.H.Freeman, 1983.
10. *Borgani S.* Phys. Rep. **251**, 1 (1995).

11. *Peebles P. J. E.* The Large-Scale Structure of the Universe. – Princeton: Princeton University Press, 1980.
12. *Kourganoff V.* Introduction to Advanced Astrophysics. – Dordrecht (Holland): D. Reidel Publishing Company, 1980.
13. *Учайкин В. В., Коробко Д. А.* Ученые записки УлГУ, сер. физ. вып. 1(4), 3 (1998).
14. *Islaker H., Vlahos L.* Phys. Rev. E **67**, 026413 (2003).
15. *Лагутин А. А., Райкин Р. И., Тюменцев А. Г.* Известия Алтайского государственного университета **5**, 27 (2004).
16. *Пирагас К. А., Жданов В. И., Жук И. Т.* Известия ВУЗов, Физика **12**, 79 (1986).
17. *Учайкин В. В., Коробко Д. А.* Письма в ЖТФ **11**, 34 (1999).
18. *Учайкин В. В., Коробко Д. А.* ЖТФ **74**, 12 (2004).
19. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* Происхождение космических лучей. – М.: Изд-во АН СССР, 1963.
20. *Березинский В. С., Буланов С. В., Гинзбург В. Л. и др.* Астрофизика космических лучей. – М.: Наука, 1990.
21. *Молчанов С. А., Рuzмайкин А. А., Соколов Д. Д.* В сб.: Нелинейные волны: физика и астрофизика. – М.: Наука, 1993, с. 47.
22. *Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D., Shukurov A. M.* Magnetic fields of Galaxies. – Dordrecht: Kluwer, 1988.
23. *Yoshida S., Hayashida N., Honda K. et al.* Astropart. Phys. **3**, 105 (1995).
24. *Lagutin A. A., Nikulin Ya. A., Uchaikin V. V.* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **97**, 267 (2001).
25. *Lagutin A. A., Uchaikin V. V.* Nucl. Instr. and Meth. in Physics Research B **201**, 212 (2003).
26. *Лагутин А. А., Тюменцев А. Г.* Известия Алтайского государственного университета **5**, 4; 22 (2004).

Глава 22

Заключение

22.1 Проблема интерпретации

В заключение книги остановимся на вопросе, изложение которого доверчивый читатель, вероятно, ожидал от благопристойного автора в самом начале книги: вопросе об интерпретации дробной производной.

С самого зарождения интегро-дифференциального исчисления важнейшую роль играли геометрическая и физическая интерпретации:

Операция	Геометрическая интерпретация	Физическая интерпретация
$D_t f(t)$	Тангенс угла наклона касательной	Скорость точки с координатой $x = f(t)$
$a _t f(t)$	Площадь криволинейной трапеции	Координата точки, работа силы

В силу рекуррентного характера операций высших целых порядков n эти интерпретации несложно распространить на произвольные n получить конструкции типа «тангенс угла наклона тангенса угла наклона...» и «площади криволинейной трапеции под графиком площади криволинейной трапеции...», но наглядность при этом исчезает. Дело несколько поправляется введением понятий «выпуклость», «вогнутость», «кривизна», «ускорение», но в целом это проблемы не решает.

В статье [1] И. Подлюбный отмечает, что проблема интерпретации дробных операторов, существующая более 300 лет, то-есть, столько же времени, что и сами эти операторы, неоднократно формулировалась как

нерешенная задача.¹ В последние годы усилился интерес к этой проблеме, и некоторые из работ мы отметим ниже, однако в поисках смысла дробных производных и интегралов как-то упускается из виду, что задача эта не решена ещё для целых порядков. Я имею в виду, что мы не можем *общей фразой* дать интерпретацию оператору D_t^n , справедливую для всех $n = \dots -2, -1, 0, 1, 2$, и даже просто для трёх $n = -1, 0, 1$. Для каждого целого значения n мы вынуждены давать собственную интерпретацию. Таких значений – счётное множество, столько же соответствующих интерпретаций. Но если речь идет о производной вещественного порядка ν , то таких производных на любом интервале ν несчётное множество...

Впрочем, это не помешает нам перечислить наиболее распространенные подходы к этой задаче.

22.2 Геометрическая интерпретация дробных интегралов

Следуя работе [1] представим левосторонний интеграл Римана-Лиувилля порядка $\mu > 0$

$${}_0I_x^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x f(\xi)(x - \xi)^{\mu-1} d\xi$$

в виде интеграла Стильеса

$${}_0I_x^\mu f(x) = \int_0^x f(\xi) dg_x(\xi),$$

где

$$g_x(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} [x^\mu - (x - \xi)^\mu]. \quad (22.2.1)$$

Возьмем трехмерную декартову систему координат, построим в горизонтальной плоскости график g_x как функции ξ , $\xi \in [0, x]$, и на этом криволинейном основании построим трапецию, образуемую множеством отрезков переменной высоты $f(\xi)$. Спроектируем полученный таким образом «забор» на вертикальные координатные плоскости (Рис. 22.1). Можно представить себе, что это – тени забора, освещаемого фарами далекого автомобиля, на перпендикулярных лучам стенах. Площадь тени OxA на

¹Об этом говорилось на круглых столах конференций по дробному исчислению 1996 г. в Варне [2] и 2008 г. в Анкаре

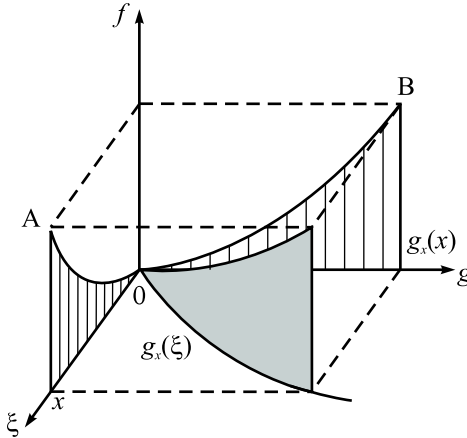


Рис. 22.1: К геометрической интерпретации дробного интеграла.

стене (ξ, f) равна обычному интегралу

$${}_0I_x^1 f(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi,$$

тогда как площадь тени $Og_x(x)B$ на другой стене (g, f) даётся значением дробного интеграла. Первое утверждение есть геометрическая интерпретация обычного интеграла, второе относится к дробному интегралу. Существенное различие в том, что с изменением (например, возрастанием) x тень на первой стене не изменяется, и приращение площади обусловлено только расширением области интегрирования, тогда как тень, падающая на вторую стену, меняется с изменением x , что вносит дополнительный вклад в изменение значения дробного интеграла. Эта особенность, разумеется, усложняет геометрическую интерпретацию как дробного интеграла, так и выражающейся через него дробной производной как, например, тангенса угла наклона касательной к графику зависимости площади этой тени от переменного предела x .

Аналогичная интерпретация правостороннего интеграла и соответствующей производной основывается на правостороннем интеграле Стильтеса

$${}_0I_x^\mu f(x) = \int_x^b f(\xi) dh_x(\xi) d\xi$$

по функции

$$h_x(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} [x^\mu + (\xi - x)^\mu].$$

Отличие от предыдущего случая лишь в том, что с изменением x перемещаются все точки забора (его конец движется по прямой $\xi = b$ в плоскости (ξ, h) тогда как в первом случае его конец был фиксирован в точке $\xi = 0$).

Представим одномерный оператор Рисса в виде суммы левосторонней и правосторонней дробных производных Римана-Лиувилля:

$$\begin{aligned} {}_0R_x^\mu f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^b f(\xi) |\xi - x|^{\mu-1} d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^b f(\xi) (x - \xi)^{\mu-1} d\xi + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^b f(\xi) (\xi - x)^{\mu-1} d\xi. \end{aligned}$$

Он тоже может быть представлен в виде интеграла Стильеса от $f(x)$ по функции

$$r_x(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} [x^\mu + \text{sign}(x - \xi)(x - \xi)^\mu],$$

представляющей собой форму «забора» для данного оператора. Он состоит теперь из двух частей, соответствующих левостороннему ($g_x(\xi)$, $0 < \xi < x$) и правостороннему ($h_x(\xi)$, $x < \xi < b$) интегралам Римана-Лиувилля. Площадь тени этого забора на первой стене даёт обычный определённый интеграл в постоянных пределах от 0 до b :

$${}_a|_b f(t) = \int_0^b f(\xi) d\xi.$$

Оператор Феллера также представляется в виде линейной комбинации левостороннего и правостороннего интегралов Римана-Лиувилля дробного порядка:

$$|_{u,v}^\mu f(x) = u {}_a|_x^\mu f(x) + v {}_x|_b^\mu f(x).$$

Теперь забор имеет разрыв в точке $\xi = x$. Его тень на первую плоскость по-прежнему соответствует обычному интегралу первого порядка, тогда как тень на другую стену состоит, вообще говоря, из двух кусков, которые могут налагаться один на другой в зависимости от значений коэффициентов c и d .

22.3 Механическая интерпретация дробных операторов

Представим себе движущийся по шоссе автомобиль. Водитель контролирует его движение по спидометру и зависимость скорости от време-

ни $v(\tau)$ по собственным часам. Часы эти, однако, не очень верно показывают время: их показания связаны с истинным временем θ соотношением $\theta = g(\tau)$. Следовательно, интервалу времени водителя $d\tau$ соответствует истинный интервал продолжительностью $d\theta = dg(\tau)$. Выехав в полночь ($\tau_A = 0$) из пункта A и приехав в момент времени $\tau_B = t$ в пункт B , водитель вычислит длину пути как интеграл

$$S_{AB} = \int_0^t v(\tau) d\tau.$$

Действительный же путь выражается интегралом Стилтеса с интегрирующей функцией $g(\tau)$:

$$L_{AB} = \int_0^t v(\tau) dg(\tau).$$

Если принять в качестве $g(\tau)$ функцию (22.2.1), то этот путь и будет выражаться дробным интегралом

$$L_{AB} = {}_0I_t^\mu v(t).$$

Производная же от этого выражения по времени t , равная скорости движения u в момент $\tau = t$, вычисленной по времени водителя (действительный путь в единицу его собственного времени) и есть производная дробного порядка $1 - \mu$ от истинной скорости $v(t)$, даваемой спидометром:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{v(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{1-\mu}}.$$

Заметим, что если водитель исправит свои часы, то μ станет равным единице и обе эти скорости совпадут: $u(t) = v(t)$.

22.4 Фрактальная интерпретация дробного интеграла

В 1992 г. Р. Р. Нигматуллин предложил интерпретировать дробное интегрирование как интегрирование по фрактальному канторову множеству [3]. Представив эволюцию состояния физической системы с помощью эрдитарного уравнения

$$J(t) = \int_0^t K(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

он предположил, что ядро памяти $K(t, \tau)$ отлично от нуля лишь на фрактальном множестве Кантора, и дал этому следующее пояснение.

«Пусть в системе с заданной пространственной геометрией в процессе эволюции «выживает» только часть состояний, а другая часть состояний от их общего числа теряется в процессе эволюции. Потеря части состояний понимается в том смысле, что они необратимо теряются и становятся недоступными для системы. Множество Кантора устроено таким образом, что оно учитывает недоступность части состояний автоматически.» Далее автор декларирует намерение «показать, что множество Кантора в пределе $N \rightarrow \infty$ (N – номер этапа разбиения) сходится к ДИ (дробному интегралу), причём показатель у ДИ указывает на долю сохранившихся состояний и совпадает с фрактальной размерностью множества.»

Для построения множества Кантора произвольной фрактальной размерности берётся временной интервал $(0, t)$ и удаляется средняя его часть так, чтобы осталось два интервала длиной ξt ($\xi < 1/2$) каждый. Эредитарное ядро принимается постоянным на этих интервалах и равным нулю вне их и перенормируется так, чтобы интеграл от него (полное число оставшихся состояний) был равен 1. На следующем этапе каждый из сохранившихся отрезков подвергается той же самой процедуре и т.д. Полагая ядро памяти отличным от нуля только в точках множества Кантора и пользуясь преобразованием Лапласа, Р. Нигматуллин приходит к предельному соотношению, позволяющему интерпретировать его как преобразование Лапласа интеграла дробного порядка фрактальной размерности множества Кантора $\nu = \ln 2 / \ln(1/\xi)$.

Рутман подверг критике эти результаты [4] и сделал заключение, что «прямой связи между дробным исчислением и фракталами еще не установлено» [5]. Нигматуллин признал, что критика Рутмана имела основания и заставила его пересмотреть свои расчёты, не отказавшись от самой идеи связи дробных производных с фракталами. Результаты были изложены в книге [6] (см. также [7]). В этом новом варианте логика рассуждений выглядит следующим образом.

Предположим, что некоторая физическая величина $J(t)$ связана с другой, представляемой гладкой функцией $f(t)$ величиной эредитарным соотношением

$$J(t) = \int_0^t K(t - \tau) f(\tau) d\tau \equiv K \star f(t),$$

где ядро памяти $K(t)$ определено соотношением

$$K(t) = [1(t) - 1(t - T)]/T, \quad t > 0,$$

где $1(t)$ – ступенчатая функция Хэвисайда. Ядро $K_{T,\nu}^{(N)}(t)$, соответствующее N -му этапу построения канторова множества фрактальной размерности $\nu = \ln 2 / \ln(1/\nu)$ на отрезке $[0, T]$, определяется рекуррентным соотношением

$$K_{T,\nu}^{(N)}(t) = \left[K_{\xi T,\nu}^{(N-1)}(t) + K_{\xi T,\nu}^{(N-1)}(t - (1 - \xi)T) \right] / 2, \quad K_{T,\nu}^{(0)}(t) \equiv K(t).$$

Здесь $\xi \in [0, 1]$ – масштабный параметр, характеризующий степень сжатия множества при переходе на следующий этап. Высота канторова «гребешка» на N -м этапе построения в соответствии с нормировкой равна $1/(2\xi)^N T$. Преобразование Лапласа рекуррентного соотношения приводит к следующему результату:

$$\widehat{K}_{T,\nu}^{(N)}(\lambda) = \frac{1 + \exp(-\lambda T(1 - \xi))}{2} \widehat{K}_{\xi T,\nu}^{(N-1)}(\lambda) = \frac{1 - \exp(-\lambda T \xi^N)}{\lambda T \xi^N} Q_N(\lambda T(1 - \xi))$$

где

$$Q_N(z) = 2^{-N} \prod_{n=0}^{N-1} [1 + \exp(-z \xi^n)].$$

При $N \rightarrow \infty$

$$\widehat{J}_N(\lambda) \rightarrow \widehat{J}(\lambda) = K_\nu[\lambda T(1 - \xi)] \widehat{f}(\lambda), \quad K_\nu(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(z) = \frac{\pi_\nu(\ln z)}{z^\nu},$$

где $\pi(\ln z)$ – периодическая функция с периодом $\ln \xi$:

$$\pi_\nu(\ln z \pm \ln \xi) = \pi_\nu(\ln z).$$

Функция эта отсутствовала в первоначальном варианте вычислений. Чтобы «справиться» с появившейся дополнительной зависимостью, было предложено усреднить результат по периоду: вместо

$$J(t) = K_\nu \star f(t),$$

принять новое определение

$$J(t) = \langle K_\nu \rangle \star f(t),$$

которое и приводит к интегралу дробного типа

$$J(t) = \frac{C(\nu)}{T^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} f(\tau) d\tau,$$

где

$$C(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} \pi_\nu(\ln z + x \ln \xi) dx.$$

Дальнейшее развитие этих идей, основанное на разложении периодической функции π_ν в ряд Фурье

$$\pi_\nu \left(\frac{\ln z}{\ln \xi} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{\ln z}{\ln \xi} \right),$$

привело к выражению

$$K_\nu(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp [(-\nu + i\Omega_n) \ln z].$$

Предположив далее, что этот ряд можно аппроксимировать суммой трех слагаемых,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp [(-\nu + i\Omega_n) \ln z] \cong C_0 z^{-\nu} + A_n z^{-\nu+i\langle\Omega\rangle} + A_n^* z^{-\nu-i\langle\Omega\rangle},$$

$$\langle\Omega\rangle = 2\pi\langle n\rangle / \ln \xi,$$

два последних из которых исчезают в результате усреднения, авторы вновь приходят к результату первой работы [1].

Аналогичные результаты были получены в работах Рена с соавторами [8-10]. Интерпретация практически оставалась той же самой. Физическая система, которая может быть описана в терминах дробных производных, должна характеризоваться наличием медленных (диффузионного типа, как в гребешковой или перколяционной моделях) каналов, создающих феномен остаточной памяти. Процессы с остаточной памятью соответствуют *принципу энергии*, сформулированному Джоншером для релаксации в диэлектриках [11]. К этому классу авторы относят перенос в перколяционных кластерах, фрактальных деревьях, пористых системах и им подобных неоднородных структурах.

Другой класс процессов, которые легко интерпретируются в терминах дробных производных, это процессы с потерями памяти в столкновениях. Представив уравнение движения Ньютона в интегральном виде

$$\Delta \mathbf{v} = \frac{1}{m} \int_0^t \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) d\tau,$$

авторы пишут: «Если взаимодействие частицы с самоподобной или обобщённо самоподобной фрактальной структурой имеет столкновительную природу, то силу можно представить в виде

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) \sum_k 1(t_k < \tau < t_{k+1}) \rho_k,$$

где $1(t_k < \tau < t_{k+1})$ – индикатор интервала (t_k, t_{k+1}) , ρ_k – плотность состояний. Для силы, действующей только определённое время, мы получим:

$$m\Delta\mathbf{v} = A[\Gamma(\nu)]^{-1} \int_0^t (t - \tau)^{\nu-1} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \tau) d\tau.$$

Это уравнение может быть использовано для описания броуновского движения и потерь в столкновениях», завершают авторы предпоследний раздел своей статьи. Заметим, однако, что до описания реальных процессов с помощью этого уравнения ещё довольно далеко. Прежде всего, надо убедиться в наличии фрактальной структуры, установить причину её появления и определить основные её характеристики.

Однако, чем более сложной становится *модель*, поясняющая структуру дробной производной, тем меньше пользы от неё в плане *интерпретации* такого оператора, долженствующей облегчить интуитивное обращение с ним. Что это за «потерянные состояния системы», в чём их физический смысл, почему они обязательно характеризуются фрактальным распределением во времени, как их связать с совершенно разными по природе процессами, допускающими корректное описание в терминах дробных производных? Эти вопросы посложнее математических преобразований, которые мы встречаем в этих работах.

Другой подход к интерпретации дробных операторов, основанный на процедуре крупнозернистого усреднения по времени, аналогичного боголюбовскому усреднению, развит Р. Хильфером [12] (см. также статьи [13-23]).

22.5 Сложные системы и скрытые переменные

Существует точка зрения, согласно которой простые системы (включая разложимые на простые) описываются производными целых порядков, тогда как сложные (не разложимые на простые) описываются дробными производными. На первый взгляд в этом есть зерно истины, особенно если иметь ввиду самоподобные сложные системы, такие,

как фракталы. Действительно, разбивая простую неоднородную нестационарную среду на элементарные объемы, рассматриваемые в течение элементарных времен, мы переходим к однородным стационарным элементам, отклонения свойств реальных элементов от которых имеют тот же порядок малости или его целую степень (площадь, объем). В случае неоднородной самоподобной среды разбиение на элементы представляет собой просто размножение исходной среды на ей подобные: ничто не упрощается. Часть фрактала подобна целому. Но дробные операторы основаны на концепции непрерывности, тогда как фрактальные структуры разрывны на всех масштабах (нельзя перейти к асимптотике, в которой фрактал виделся бы непрерывным). Только усреднением по ансамблю фракталов можно вернуть непрерывность, следовательно рассматриваемые системы и процессы должны быть случайными (стохастическими). С этого мы и начинали книгу. Там же, в начале мы говорили о скрытых переменных как причине эрдитарности.

Дополнительное требование самоподобия превращает эту эрдитарность в степенную, а эрдитарные интегралы – в дробные интегралы. Скорости изменения дробных интегралов или дробные интегралы от скоростей и суть дробные производные Римана-Лиувилля и Капуто, соответственно.

В заключение приведем пример физического обоснования дробно-дифференциальной модели высокоэластичных полимерных тел, данной в работе Г. Л. Слонимского [24], в котором четко прослеживается неразложимость рассматриваемого процесса на сумму упругой и вязкой компонент. Отмечая, что важнейшей особенностью, отличающей высокоэластичную деформацию от деформаций обычных упругих тел, «является настолько ярко выраженный комплекс релаксационных явлений, что применение закона Гука или любой другой зависимости между напряжениями и деформациями, не учитывающей временных режимов механических взаимодействий, оказывается невозможным даже в грубом приближении». Во многих работах запаздывание деформации связывалось с наличием внутреннего трения и строились модели упругих тел с внутренним трением и вязких тел, обладающих упругостью. Однако, для количественного или хотя бы полуколичественного описания деформации высокоэластичных тел потребовалось построение весьма сложных механических моделей, состоящих из большого числа различных пружин и различных демпферов. Учет молекулярной динамики аморфных полимеров, согласно которой релаксационные процессы в них связаны с медленными процессами перегруппировок длинных и гибких молекул и клубков (кластеров) таких молекул, проявляющихся в отставании изменения деформаций от изменения напряжений. Вследствие исключительно большой длины цепной молекулы одновременное передвижение всех ее отдельных ча-

стей (сегментов) при деформации невозможно, так как необходимая для преодоления межмолекулярных взаимодействий энергия намного превышает энергии химических связей. Движение такой молекулы осуществляется последовательным движением ее сегментов, возможным вследствие гибкости высокоэластичной молекулы. Изучив закономерности движения сегментов, можно понять законы перемещения цепных молекул, изменения их формы и, в конечном итоге, законы деформации высокоэластичных тел. Согласно Г. Л. Слонимскому, новый путь определения законов деформации высокоэластичных тел заключается в отказе от представления о высокоэластичности как результате суммирования упругости и внутреннего трения. Основание такого отказа видится в редком отличии высокоэластичности от упругости обычных тел низкими (на 2-3 порядка ниже обычных) значениями модулей упругости, громадными величинами (до 1000 % и выше) обратимых деформаций, обратными знаками тепловых эффектов деформации и температурного модуля упругости. Отличие это Г. Л. Слонимский объясняет тем, что высокоэластичная деформация обусловлена лишь изменением формы гибких длинных цепных молекул полимерных веществ без изменения энергии их (или их подвижных частей-сегментов) взаимодействия. При изотермической высокоэластичной внутренней энергии полимерного тела не изменяется, и вся работа деформации превращается в тепло, поэтому сопротивление тела деформации обусловлено только уменьшением энтропии. Таким образом, высокоэластичную деформацию следует рассматривать как самостоятельный тип обратимой деформации и не пытаться разлагать ее на упругость и вязкую составляющие. Математическим символом такой самостоятельности и представляется Г. Л. Слонимскому как дробная производная, «которая сочетает многие черты упругой и пластической деформации, но не является их комбинацией».

Как бы то ни было, а свести интерпретацию дробной производной к одной фразе, как это имеет место в случае первой производной, по-видимому не удастся.¹ Ее смысл скрыт во множестве работ, посвященных реальным физическим процессам. Собрать их всех вместе и взглянуть на них «с высоты птичьего полета» – тогда, может быть, и откроется он, этот таинственный смысл. И эта книга моя станет одной из ступенек, ведущих к этой цели ...

¹Трудно себе представить, как картинка с «забором» может стимулировать введение дробной производной в формулировку конкретной задачи.

Литература

1. *Podlubny I.* Fractional Calculus and Appl. Analysis **5**, 367 (2002).
2. *Rusev P., Dimovsky I., Kiryakova V.* (eds.) Transform Methods and Special Functions, Varna'96. Sofia – Singapore: Sci. Cult. Technol., 1996.
3. *Нигматуллин Р. Р.* Теоретическая и математическая физика **90**, 354 (1992).
4. *Рутман Р. С.* Теоретическая и математическая физика **100**, 476, 1154 (1994).
5. *Рутман Р. С.* Теоретическая и математическая физика **105**, 393, 1509 (1995).
6. *Le Mehaute A., Nigmatullin R. R., Nivanen L.* Fleches du temps et geometrie fractale. – Paris: Hermez, 1998.
7. *Nigmatullin R. R., Le Mehaute A.* Intern. J. of Sci. Georesources **1**, 2 (2004).
8. *Ren F.-Y., Yu Z.-G., Su F.* Phys. Lett. A **219**, 59 (1996).
9. *Yu Z.-G., Ren F.-Y., Zhou J. J.* Phys. A.: Math. Gen. **30**, 5569 (1997).
10. *Ren F. Y., Liang J.-R.* Physica A **286**, 45 (2000).
11. *Jonscher A. K.* Dielectric Relaxation in Solids. – London: Chelsea Dielectric Press, 1983.
12. *Hilfer R.* In: Applications of Fractional Calculus in Physics. – Singapore: World Scientific, 2000, p. 87.
13. *Bisquert J.* Phys. Rev. E **72**, 011109 (2005).
14. *Frisch U., Matsumoto T.* ArXiv:nlin.CD/0107057, 25 Jun, 2002.
15. *Grigolini P., Rocco A., West B.* Phys. Rev. E **59**, 2603 (1999).
16. *Xu M., Tan W.* Science in China. Series G Physics, Mathematics and Astronomy **49**, 257 (2006).
17. *Qiu W.-Y., Lu J.* Phys. Lett. A **272**, 353 (2000).
18. *Stanislavsky A., Weron K.* Annals of Physics doi:10.1016/j.aop.2007.04.011 (2007).

19. *Frisch U., Khanin K., Matsumoto T.* J. Stat. Phys. ArXiv: nlin.CD/0309068, 10 Apr (2004).
20. *Moshrefi-Torbati M., Hammond J. K.* J. Franklin Inst. **335B**, 1077 (1998).
21. *Nigmatullin R. R., Le Mehaute A.* J. Non-Cryst. Solids **351**, 2888 (2005).
22. *Nigmatullin R. R.* Physica A **363**, 282 (2006).
23. *Stanislavsky A., Weron K.* Physica A **303**, 57 (2002).
24. *Слонимский Г. Л.* Доклады АН СССР **140**, 343 (1961).

Приложение. Некоторые специальные функции

1. Гамма-функция

Гамма-функция вещественной переменной. Гамма-функция обобщает понятие факториальной функции

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

продолжая её в область нецелых, отрицательных и даже комплексных значений аргумента. Отправной точкой такого обобщения может служить интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = n!.$$

Для $x > 0$ функция $\Gamma(x)$ *определяется* посредством интеграла Эйлера второго рода:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{x-1} d\xi.$$

Из самого определения видно, в частности, что $\Gamma(n+1) = n!$ для $n = 1, 2, 3, \dots$ и

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

для всех положительных x .

Существует удобная формула, позволяющая вычислять гамма-функцию в отрицательной области аргумента по ее значениям в положительной, называемая формулой дополнения:

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Гамма-функция комплексного аргумента z определяется как аналитическое продолжение $\Gamma(x)$ на всю комплексную плоскость:

$$\Gamma(x) \rightarrow \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{z-1} d\xi.$$

По существу, дело сводится к продолжению показательной функции ξ^{x-1} в комплексную плоскость,

$$\xi^{x-1} \rightarrow \xi^{z-1} = e^{(z-1) \ln \xi}$$

(выбирается ветвь, где функция $\ln \xi$ вещественна) и доказательству сходимости несобственного интеграла. Единственными особенностями $\Gamma(z)$ в конечной части комплексной плоскости являются простые полюсы с вычетами $(-1)^n/n!$ при $z = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Основные соотношения. Следующие соотношения имеют место для $\Gamma(z)$:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z), \\ \Gamma(z)\Gamma(1-z) &= \frac{\pi}{\sin \pi z}, \\ \Gamma(1/2+z)\Gamma(1/2-z) &= \frac{\pi}{\cos \pi z}, \\ \Gamma(nz) &= (2\pi)^{(1-n)/2} n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma(z+k/n). \end{aligned}$$

Асимптотические формулы. Применением метода перевала к вычислению интеграла Эйлера выводится следующая асимптотическая формула (формула Стирлинга)

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}, \quad z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi.$$

Следующее асимптотическое соотношение также имеет место:

$$\Gamma(z+a)/\Gamma(z+b) \sim z^{a-b}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

при условии, что z не принимает значения $z = -a, -a-1, -a-2, \dots$ и $z = -b, -b-1, -b-2, \dots$

Три интеграла. Вернемся к формуле

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-\xi} \xi^{x-1} d\xi, \quad x > 0.$$

Повернув луч интегрирования до мнимой оси, что в силу леммы Жордана возможно при $0 < x < 1$, приходим к формуле

$$\int_0^{\infty} e^{-i\xi} \xi^{x-1} d\xi = e^{-i\pi x/2} \Gamma(x).$$

Отделяя действительную часть от мнимой, получаем:

$$\int_0^{\infty} \xi^{x-1} \cos \xi d\xi = \Gamma(x) \cos(\pi x/2),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-i\xi} \xi^{x-1} d\xi = \Gamma(x) \sin(\pi x/2).$$

По принципу аналитического продолжения эти формулы остаются справедливыми и после замены x на z (комплексную переменную) всюду, где входящие в них интегралы равномерно сходятся:

$$\int_0^{\infty} e^{-i\xi} \xi^{z-1} d\xi = e^{-i\pi z/2} \Gamma(z), \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1,$$

$$\int_0^{\infty} \xi^{z-1} \cos \xi d\xi = \Gamma(z) \cos(\pi z/2), \quad 0 < \operatorname{Re} z < 1,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-i\xi} \xi^{x-1} d\xi = \Gamma(x) \sin(\pi x/2), \quad -1 < \operatorname{Re} z < 1.$$

2. Функции Миттаг-Леффлера

Однопараметрическая функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha}(z)$ с положительным параметром $\alpha > 0$ определяется рядом

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)},$$

на всей комплексной плоскости. Она представляет собой одно из обобщений экспоненциальной функции

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

и превращается в неё при $\alpha = 1$:

$$E_1(z) = e^z.$$

Несложно проверить также, что

$$E_2(z^2) = \cosh(z), \quad E_2(-z^2) = \cos(z)$$

и

$$E_{1/2}(\pm\sqrt{z}) = e^z \operatorname{erfc}(\mp\sqrt{z}) = e^z \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\mp\sqrt{z}} e^{-\zeta^2} d\zeta \right].$$

Под \sqrt{z} здесь понимается главное значение квадратного корня из z в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси.

Свойства функций $E_\alpha(x)$.

1) При $0 \leq \alpha \leq 1$ функция $E_\alpha(-x)$ положительна и вполне монотонна, то есть

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} E_\alpha(-x) \geq 0, \quad x \geq 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad n \in N.$$

2) При $1 < \alpha < 2$ функция $E_\alpha(-x)$ имеет нечетное число нулей, тогда как $E_2(-x) = \cos(\sqrt{x})$ имеет бесконечное число нулей.

3) При $0 < \alpha < 1$ и $1 < \alpha < 2$ справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$E_\alpha(-x) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{-n}}{\Gamma(1 - \alpha n)}, \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 < \alpha < 2.$$

4) Преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L}\{E_\alpha(-(\omega t)^\alpha)\}(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{\lambda^\alpha + \omega^\alpha}.$$

5) Формула удвоения:

$$E_\alpha(z) = (1/2)[E_{\alpha/2}(\sqrt{z}) + E_{\alpha/2}(-\sqrt{z})].$$

6) Интегральная формула удвоения:

$$\int_0^\infty \exp(-x^2/(4t)) E_\alpha(x^\alpha) dx = \sqrt{\pi t} E_{\alpha/2}(t^{\alpha/2}), \quad t > 0.$$

Двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z)$ получается из однопараметрической функции заменой аддитивной единицы в аргументе гамма-функции произвольным комплексным параметром β [3]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta \in C.$$

Ее асимптотическое поведение определяется выражением

$$E_{\alpha,\beta}(z) \sim - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{\Gamma(\beta - \alpha n)},$$

справедливым при $|\arg z| < (1 - \alpha/2)\pi$ и $z \rightarrow \infty$.

Имеют место следующие функциональные соотношения:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + zE_{\alpha,\alpha+\beta}(z),$$

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \beta E_{\alpha,\beta+1}(z) + \alpha z \frac{d}{dz} E_{\alpha,\beta+1}(z),$$

$$\frac{d^n}{dz^n} [z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(z^\alpha)] = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(z^\alpha), \quad n = 1, 2, \dots$$

Частные случаи:

$$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z),$$

$$E_{1,1}(z) = E_1(z) = e^z,$$

$$E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$E_{2,2}(z) = \frac{\sinh(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}.$$

Преобразование Лапласа двухпараметрической функции

$$\mathcal{L} \{ x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\pm ax^\alpha) \} (\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-\beta}}{(\lambda^\alpha \mp a)}, \quad \operatorname{Re} \lambda > |a|^{1/\alpha},$$

и её производной

$$\mathcal{L} \{ x^{\alpha n + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(n)}(\pm ax^\alpha) \} (\lambda) = \frac{n! \lambda^{\alpha-\beta}}{(\lambda^\alpha \mp a)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} \lambda > |a|^{1/\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обобщённая двухпараметрическая функция Миттаг-Леффлера определяется рядом

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\alpha n + \beta)\Gamma(\rho)} \frac{x^n}{n!}.$$

С этим рядом связано полезное соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\rho)n!} x^n = \frac{1}{(1-x)^\rho},$$

а трансформанта Лапласа этой функции имеет вид

$$\mathcal{L} \left\{ x^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\rho(\pm ax^\alpha) \right\} (\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha\rho-\beta}}{(\lambda^\alpha \mp a)^\rho}.$$

3. Функции $E_x(\nu, a)$ и $\mathcal{E}(\nu, x)$

Функция

$$E_x(\nu, a) = x^\nu E_{1,\nu+1}(ax) = x^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\nu+n+1)}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D_x E_x(\nu, a) - a E_x(\nu, a) = \frac{x^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)}, \quad \operatorname{Re} \nu > 0$$

и связана с двухпараметрической функцией Миттаг-Леффлера соотношением:

$$E_x(\nu, a) = x^\nu E_{1,1+\nu}(ax).$$

Частные случаи:

$$E_x(0, a) = e^{ax},$$

$$E_0(\nu, a) = 0, \quad \operatorname{Re} \nu > 0,$$

$$E_x(-1, a) = a E_x(0, a),$$

$$E_x(-m, a) = a^m E_x(0, a), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$E_x(1, a) = \frac{E_x(0, a) - 1}{a},$$

$$E_x(1/2, a) = a^{-1/2} e^{ax} \operatorname{Erf}[(ax)^{1/2}],$$

$$E_x(-1/2, a) = a E_x(1/2, a) + (\pi x)^{-1/2},$$

$$E_x(\nu, 0) = \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)}.$$

Рекуррентные соотношения:

$$E_x(\nu, a) = a^m E_x(\nu+m, a) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^n x^{\nu+n}}{\Gamma(\nu+n+1)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

$$E_x(\nu, a) - E_x(\nu, b) = a^m E_x(\nu + m, a) - b^m E_x(\nu + m, b) + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(a^n - b^n)x^{\nu+n}}{\Gamma(\nu + n + 1)},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Производные:

$$D_x^m E_x(\nu, a) = E_x(\nu - m, a) = a^m E_x(\nu, a) + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a^n x^{\nu+n-m}}{\Gamma(\nu + n + 1 - m)},$$

$$D_x^m [x^\mu E_x(\nu, a)] = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\mu - n + 1)} x^{\mu-n} E_x(\nu + n - m, a), \quad m = 0, 1, \dots$$

Интегралы:

$$\int_0^x E_\xi(\nu, a) \xi^\mu d\xi = \Gamma(\mu + 1) E_x(\nu + \mu + 1, a), \quad \operatorname{Re} \mu, \operatorname{Re} \nu > -1,$$

$${}_0 I_x^m E_x(\nu, a) = E_x(\nu + m, a), \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Re} \nu > -1.$$

Преобразования Лапласа:

$$\mathcal{L}\{E_x(\nu, a)\}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\nu (\lambda - a)}, \quad \operatorname{Re} \nu > -1.$$

Вторая функция:

$$x^{-\nu} E_x(\nu, a) = \mathcal{E}(\nu, ax).$$

Частные случаи:

$$\mathcal{E}(\nu, 0) = \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)},$$

$$\mathcal{E}(0, x) = e^x,$$

$$\mathcal{E}(1, x) = x^{-1}(e^x - 1),$$

$$\mathcal{E}(2, x) = x^{-1}[\mathcal{E}(1, x) - 1]$$

и т.д.

Рекуррентная формула:

$$x^m \mathcal{E}(\nu + m, x) = \mathcal{E}(\nu, x) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{x^n}{\Gamma(\nu + n + 1)}.$$

Асимптотическое разложение:

$$\mathcal{E}(\nu, x) - x^{-n\nu} e^x \sim - \left[\frac{1}{x\Gamma(\nu)} + \frac{1}{x^2\Gamma(\nu - 1)} + \frac{1}{x^3\Gamma(\nu - 2)} + \dots \right], \quad x \rightarrow \infty.$$

4. Функции Райта

Функция Райта определяется рядом

$$W_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n! \Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad z \in C.$$

Частные случаи:

$$W_{0,\beta}(z) = \frac{e^z}{\Gamma(\beta)},$$

$$(z/2)^\nu W_{1,\nu+1}(\mp z^2/4) = \begin{cases} J_\nu(z), \\ I_\nu(z). \end{cases}$$

Рекуррентные соотношения:

$$\alpha z W_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = W_{\alpha,\beta-1}(z) + (1-\beta)W_{\alpha,\beta}(z).$$

Дифференциальные уравнения:

$$\frac{d}{dz} W_{\alpha,\beta}(z) = W_{\alpha,\alpha+\beta}(z).$$

Преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L}\{W_{\alpha,\beta}(\pm x)\}(\lambda) = \lambda^{-1} E_{\alpha,\beta}(\pm \lambda^{-1}), \quad \alpha > 0,$$

$$\mathcal{L}\{W_{\alpha,\beta}(-x)\}(\lambda) = E_{-\alpha,\beta-\alpha}(-\lambda), \quad -1 < \alpha < 0.$$

5. Функции Майнарди

Две функции Райта оказались особенно важными в задачах с дробными производными, а именно – функция

$$F(z; \alpha) = W_{-\alpha,0}(-z)$$

и функция

$$M(z; \alpha) = W_{-\alpha,1-\alpha}(-z)$$

при $0 < \alpha < 1$. Они были подробно изучены Ф. Майнарди с соавторами и часто называются его именем.

Эти функции связаны друг с другом соотношением

$$F(z; \alpha) = \alpha z M(z; \alpha)$$

и могут быть представлены в виде рядов

$$F(z; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\alpha n)} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} \Gamma(\alpha n + 1) \sin(\alpha n \pi),$$

и

$$M(z; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n! \Gamma(-\alpha n + (1 - \alpha))} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma(\alpha n) \sin(\alpha n \pi).$$

Частные случаи:

$$M(z; 1/2) = 1/\sqrt{\pi} \exp(-z^2/4),$$

и

$$M(z; 1/3) = 3^{3/2} \text{Ai}(z/3^{1/3}),$$

где $\text{Ai}(z)$ обозначает функцию Эйри.

Моменты и асимптотические выражения на R^+ :

$$\int_0^{\infty} M(x; \alpha) x^{\mu} dx = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\alpha \mu + 1)}, \quad \mu > 0,$$

$$M(x/\alpha; \alpha) \sim \frac{z^{(\alpha-1/2)/(1-\alpha)}}{\sqrt{2\pi(1-\alpha)}} \exp(-(1/\alpha - 1)z^{1/(1-\alpha)}), \quad z \rightarrow \infty.$$

Преобразования Лапласа:

$$\mathbf{L}\{F(x^{\alpha}; \alpha)\}(\lambda) = \exp(-\lambda^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$\mathbf{L}\{M(x, \alpha)\}(\lambda) = E_{\alpha}(-\lambda), \quad 0 < \alpha < 1.$$

$$\mathbf{L}\{x^{-1}F(x^{-\alpha}; \alpha)\}(\lambda) = \mathbf{L}\{\alpha x^{-\alpha-1}M(x^{-\alpha}; \alpha)\}(\lambda) = \exp(-\lambda^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Библиография.

Дробно-дифференциальные модели в физике

Abdel-Rehim E. A., Gorenflo R. Simulation of the continuous time random walk of the space-fractional diffusion equation // *J. Comp. Appl. Math.* doi: 10.1016/j.cam-2007.10.052 (2007)

Addison P. S., Qu B., Nisbet A., Pender G. A non-Fickian particle-tracking diffusion model based on fractional Brownian motion // *Int. J. Numer. Methods Fluids* **25**, 1373-1384 (1997).

Addison P. S., Ndumu A. S. Engineering applications of the fractional Brownian motion: self-affine and self-similar random processes // *Fractals* **7**, 151-157 (1999).

Afanasiev V. V., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. Chaotic jets with multifractal space-time random walk // *Chaos* **1**, 143-159 (1991).

Agrawal O. P. A general solution for the fourth-order fractional diffusion-wave equation // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **3**, 1-12 (2000).

Agrawal O. P. A new Lagrangian and a new Lagrangian equation of motion for fractionally damped systems // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* **68**, 339-341 (2001).

Agrawal O. P. Stochastic analysis of dynamic systems containing fractional derivatives // *J. of Sound and Vibration* **247**, 927-938 (2001).

Agrawal O. P. Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems // *J. Math. Anal. Appl.* **272**, 368-379 (2002).

Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // *Nonlinear Dynamics* **29**, 145-155 (2002).

Agrawal O. P. Response of a diffusion-wave system subjected to deterministic and stochastic fields // *Z. Angew. Math. Mech.* **83**, 265-274 (2003).

Agrawal O. P. Application of fractional derivatives in thermal analysis of disk brakes // *Nonlinear Dynamics* **38**, 191-206 (2004).

Al-Shammery A. H., Kalla S. L., Khajah H. G. A fractional generalization of the free electron laser equation // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **2**, 501-508 (1999).

Alemamy P. A. Fractional diffusion equation for fractal-time-continuous-time random walks // *Chaos, Solitons and Fractals* **6**, 7-10 (1995).

Allegrini P., Buiatti M., Grigolini P., West B. J. Fractional Brownian motion as a nonstationary process: An alternative paradigm for DNA sequences // *Phys. Rev. E* **57**, 558-567 (1998).

Allegrini P., Grigolini P., West B. J. Dynamical approach to Lévy processes // *Phys. Rev. E* **54**, 4760-4767 (1996).

Alós E., Mazet O., Nualart D. Stochastic calculus with respect to fractional

Brownian motion with Hurst parameter less than $1/2$ // *Stoch. Proc. Appl.* **86**, 121-139 (2000).

Amaral R. L., Marino E. C. Canonical quantization of theories containing fractional powers of the d'Alambertian operator // *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 5183-5200 (1992).

de Andrade M. F., Lenzi E. K., Evangelista L. R., Mendes R. S., Malacarne L. C. Anomalous diffusion and fractional diffusion equation: anisotropic media and external forces // *Physics Lett. A* **347**, 160-169 (2005).

Anh V. V., Angulo J. M., Ruiz-Medina M. D. Possible long-range dependence in fractional random fields // *J. Stat. Plan. Infer.* **80**, 95-110 (1999).

Anh V. V., Leonenko N. N. Non-Gaussian scenarios for the heat equation with singular initial conditions // *Stoch. Proc. Appl.* **84**, 91-114 (1999).

Anh V. V., Leonenko N. N. Spectral analysis of fractional kinetic equations with random data // *J. Stat. Phys.* **104**, 1349-1387 (2001).

Anh V. V., Leonenko N. N., Mcvinish R. Models for fractional Riesz-Bessel motion and related processes // *Fractals* **9**, 329-346 (2001).

Aquino G., Bologna M., Grigolini P., West B. J. Aging and rejuvenation with fractional derivatives // *Phys. Rev. E* **70**, 036105 (2004).

Arkhincheev V. E., Nomoev A. V. About nonlinear drift in Levy flight diffusion: analytical solution and numerical simulation // *Physica A* **269**, 293-298 (1999).

Arkhincheev V. E. Anomalous diffusion and charge relaxation on comb model: exact solutions // *Physica A* **280**, 304-314 (2000).

Arkhincheev V. E. Nonlinear relation between diffusion and conductivity for Levy flights // *AIP Proceedings* **553**, 231-235 (2001).

Arkhincheev V. E. Diffusion on random comb structure: effective medium approximation // *Physica A* **307**, 131-141 (2002).

Atanackovic T. M. On a distributed derivative model of a viscoelastic body // *Comptes Rendus Mecanique* **331**, 687-692 (2003).

Atanackovic T. M., Budincevic M., Pilipovic S. On a fractional distributed-order oscillator // *J. of Physics A* **38**, 6703-6713 (2005).

Atanackovic T. M., Pilipovic S., Zorica D. A diffusion wave equation with two fractional derivatives of different order // *J. of Physics A* **40** 5319-5333 (2007).

Atanackovic T. M., Spasic D. T. On viscoelastic compliant contact-impact models // *J. Appl. Mech.* **71**, 134-138 (2004).

Atanackovic T. M., Stankovic B. Dynamics of a viscoelastic rod of fractional derivative type // *Z. Angew. Math. Mech.* **82**, 377-386 (2002).

Atanackovic T. M., Stankovic B. On a system of differential equations with

- fractional derivatives arising in rod theory // J. of Physics A **37**, 1241-1250 (2004).
- Atanackovic T. M., Stankovic B.* Stability of an elastic rod on a fractional derivative type of foundation // J. of Sound and Vibration **277**, 148-161 (2004).
- Aydiner E.* Anomalous rotational relaxation: A fractional Fokker-Planck equation approach // Phys. Rev. E **71**, 6103-6107 (2005).
- Baeumer B., Kovacs M., Meerschaert M. M.* Fractional reproduction-dispersal equations and heavy tail dispersal kernels // Bulletin of Mathematical Biology **69**, 2281-2297 (2007).
- Baeumer B., Meerschaert M. M.* Fractional diffusion with two time scales // Physica A **373**, 237-251 (2007).
- Bagley R. L.* Power law and fractional calculus model of viscoelasticity // AIAA J. **27**, 1412-1417 (1989).
- Bagley R. L., Calico R. A.* Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures // J. of Guidance, Control and Dynamics **14**, 304-311 (1991).
- Bagley R. L., Torvik P. J.* A generalized derivative model an elastomer damper // Shock Vibr. Bull. **49**, 135-143 (1979).
- Bagley R. L., Torvik P. J.* Fractional calculus – a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. **21**, 741-748 (1983).
- Bagley R. L., Torvik P. J.* A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity // J. of Reology **27**, 201-210 (1983).
- Bagley R. L., Torvik P. J.* On the appearance of the fractional derivative in the behaviour of real materials // J. Appl. Mech. **51**, 294-298 (1984).
- Bagley R. L., Torvik P. J.* Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures // AIAA J. **23**, 918-925 (1985).
- Bagley R. L., Torvik P. J.* On the fractional calculus model of viscoelastic behavior // J. of Reology **30**, 133-155 (1986).
- Bakunin O. G.* Scaling law and fractality concepts in models of turbulent diffusion // Plasma Phys. Control. Fusion **45**, 1909-1929 (2003).
- Bakunin O. G.* Nonlocal equation for the symmetric part of the electron distribution function in an inhomogeneous plasma // Plasma Physics Rep. **29**, 785 -788 (2003).
- Bakunin O. G.* Long-range correlations and percolation regimes in the system with drift flows // J. Plasma Physics **71**, 1-13 (2004).
- Bakunin O. G.* Quasi-diffusion and correlations in models of anisotropic transport // Physica A **337**, 27-35 (2004).
- Balakrishnan V.* Anomalous diffusion in one dimension // Physica A **132**, 569-580 (1985).

Balberg I., Berkowitz B., Drachler G. E. Application of a percolation model to flow in fractured hard rocks // *J. Geophys. Res.* **B96**, 10015 (1991).

Baleanu D. Fractional Hamiltonian analysis of irregular systems // *Signal Processing* **86**, 2632-2636 (2006).

Baleanu D., Avkar T. Lagrangians with linear velocities within Riemann-Liouville fractional derivatives // *ArXiv:math-ph/0405012v1*, 4 May (2004).

Baleanu D., Muslih S. I. On fractional variational principles // In: *Advances in Fractional Calculus*. Ed. by Sabatier J., Agraval O. P., Tenreiro Machado J. A. – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, 115-126.

Balescu R. Anomalous transport in turbulent plasmas and continuous time random walks // *Phys. Rev. E* **51**, 807-822 (1995).

Balescu R. Memory effects in plasma transport theory // *Plasma Phys. Contr. Fusion* **42**, B1-B13 (2000).

Balescu R. V-Langevin equations, continuous time random walks and fractional diffusion // *Chaos, Solitons and Fractals* **34**, 62-80 (2007).

Barkai E. Fractional Fokker-Planck equation, solution, and application // *Phys. Rev. E* **63**, 6111 (2001).

Barkai E. CTRW pathways to the fractional diffusion equation // *Chem. Phys.* **284**, 13-27 (2002).

Barkai E. Aging in subdiffusion generated by a deterministic dynamical system // *Phys. Rev. Lett.* **90**, 104101 (2003).

Barkai E. Stable equilibrium based on Lévy statistics: a linear Boltzmann equation approach // *J. Stat. Phys.* **115**, 1537-1565 (2004).

Barkai E., Fleurov V. N. Lévy walks and generalized stochastic collision models // *Phys.Rev. E* **56**, 6355-5361 (1997).

Barkai E., Fleurov V. N. Generalized Einstein relation: A stochastic modelling approach // *Phys.Rev. E* **58**, 1296-1310 (1998).

Barkai E., Fleurov V. N., Klafter J. One-dimensional stochastic Lévy-Lorents gas // *Phys.Rev. E* **61**, 1164-1169 (2000).

Barkai E., Metzler R., Klafter J. From continuous-time random walks to the fractional Fokker-Planck equation // *Phys. Rev. E* **61** 132-138 (2000).

Barkai E., Silbey R. J. Fractional Kramer equation // *J. Phys. Chem. B* **104**, 3866-3874 (2000).

Barkai E., Sokolov I. M. On Hilfer's objection to the fractional time diffusion equation // *Physica A* **373**, 231-236 (2007).

Barpi F., Valente S. Creep and fracture in concrete: a fractional order rate approach // *Engineering Fracture Mechanics* **70**, 611-623 (2002).

Battaglia J. L., Cois O., Puigsegur L., Oustaloup A. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model // *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **44**, (2001).

Battaglia J. L., Le Lay L., Bastale J.-C., Oustaloup A., Cois O. Heat flow estimation through inverted non integer identification models // *Int. J. of Thermal Science* **39**, 374-389 (1999).

Baule A., Friedrich R. A fractional diffusion equation for two-point probability distributions of a continuous-time random walk // *Europhys. Lett.* **77**, 10002 (2007).

Bazzani A., Bassi G., Turchetti G. Diffusion and memory effects for stochastic processes and fractional Langevin equations // *Physica A* **324**, 530-550 (2003).

Beghin L., Orsingher E. The distribution of the local time for «pseudoprocesses» and its connection with fractional diffusion equations // *Stochastic Processes and their Applications* **115**, 1017-1040 (2005).

Ben Adda F., Cresson J. Fractional differential equations and the Schroedinger equation // *Applied Math. and Comp.* **161**, 323-345 (2005).

Benchellal A., Poinot T., Trigeassou J. C. Approximation and identification of diffusive interfaces by fractional models // *Signal Processing* **86**, 2712-2727 (2006).

Benchellal A., Poinot T., Trigeassou J. S. Modelling and identification of diffusive systems using fractional models // In: *Advances in Fractional Calculus*. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Tenreiro Machado J. A.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 213-226.

Bening V. E., Korolev V. Yu., Sukhorukova T. A., Gusarov G. G., Saenko V. V., Uchaikin V. V., Kolokol'tsov V. N. Fractionally stable distributions // In: *Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence*. Ed. by *Korolev V. Yu., Skvortsova N. N.* – Leiden, Boston: VSP, 175-244 (2006).

Benson D. A., Wheatcraft S. W., Meerschaert M. M. Application of a fractional advection-dispersion equation // *Water Resources Res.* **36**, 1403-1412 (2000).

Berens H., Westphal U. A Cauchy problem for a generalized wave equation // *Acta Sci. Math.* **29**, 93-106 (1968).

Berkowitz B., Klafter J., Metzler R., Scher H. Physical pictures of transport in heterogeneous media: Advection-dispersion, random-walk, and fractional derivative formulations // *Wat. Resources Res.* **38**, 1191-1203 (2002).

Biler P., Funaki T., Woyczinski W. A. Fractal Burgers equation // *J. Diff. Equations* **147**, 1-38 (1998).

Biler P., Funaki T., Woyczinski W. A. Interacting particle approximation for nonlocal quadratic evolution problems // *Probab. Math. Stat.* **19**, 267-286 (1999).

Biler P., Karch G., Woyczinski W. A. Critical nonlinearity exponent and self-

similar asymptotic for Lévy conservation laws // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Nonlinéaire **18**, 613-637 (2001).

Bisquert J. Fractional diffusion in the multiple-trapping regime and revision of the equivalence with continuous-time random walk // Phys Rev Lett **91**, 010602-1-4 (2003).

Bisquert J. Chemical diffusion coefficient in nanostructured semiconductor electrodes and dye-sensitized solar cells // J. Phys. Chem. B **108**, 2323-2332 (2004).

Bisquert J. Interpretation of a fractional diffusion equation with nonconserved probability density in terms of experimental systems with trapping or recombination // Phys. Rev. E **72** 011109-1-011109-6 (2005).

Bisquert J., Cahen D., Rühle S., Hodes G., Zaban A. Physical chemical principles of photovoltaic conversion with nanoparticulate, mesoporous dye-sensitized solar cells // J. Phys. Chem. B **108**, 8106-8118 (2004).

Bisquert J., Compte A. Theory of the electrochemical impedance of anomalous diffusion // J. of Electroanalyt. Chemistry **499**, 112-120 (2001).

Blumen A., Gurtovenko A. A., Jespersen S. Anomalous dynamics of model polymer systems // J. Lumin. **94**, 437-440 (2001).

Blumen A., Gurtovenko A. A., Jespersen S. Anomalous diffusion and relaxation in macromolecular systems // J. Non-Crystalline Solids **305**, 71-80 (2002).

Bogdan K., Byczkowski T. Potential theory for the α -stable Schrodinger operator on bounded Lipschitz domains // Studia Mathematica **133**, 53-92 (1999).

Bologna N., Grigolini P., Riccardi J. Lévy diffusion as an effect of sporadic randomness // Phys. Rev. E **60**, 6435-6442 (1999).

Bologna M., Tsallis C., Grigolini P. Anomalous diffusion associated with nonlinear fractional derivative Fokker-Planck-like equation: Exact time-dependent solutions // Phys. Rev. E **62**, 2213-2218 (2000).

Bologna M., Grigolini P., Karagiorgis M., Rosa A. Trajectory versus probability density entropy // Phys. Rev. E **64**, 016223 (2001).

Bologna M., Grigolini P., West B. J. Strange kinetics: conflict between density and trajectory description // Chem. Phys. **284**, 115-128 (2002).

Bonilla B., Rivero M., Rodriguez-Germa L., Trujillo J. J. Fractional differential equations as alternative models to nonlinear differential equations // Applied Math. and Comp. **187**, 79-88 (2007).

Bouchaud J.-P., Georges A. Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanics, models and physical applications // Phys. Rep. **195**, 127-293 (1990).

Bouchaud J.-P., Georges A., Koplik J., Provata A., Redner S. Superdiffusion in random velocity fields // Phys. Rev. Lett. **64**, 2503 (1990).

- Boyadjev L., Dobner H. J.* On the solution of a fractional free electron laser equation // *Pract. Calc. Appl. Anal.* **1**, 385-400 (1998).
- Boyadjev L., Dobner H. J.* Fractional free electron laser equations // *Integral Transm. Spec. Funct.* **11**, 113-136 (2001).
- Brandolese L., Karch G.* Far field asymptotics of solutions to convection with anomalous diffusion // *arXiv: 0801.1884v1[math.AP]*, 12 Jan (2008).
- Brockmann D., Sokolov I. M.* Lévy flights in external force fields: from models to equations // *Chem. Phys.* **284**, 409-421 (2002).
- Buchen P. W., Mainardi F.* Asymptotic expansions for transient viscoelastic waves // *J. de Mécanique* **14**, 597-608 (1975).
- Butzer P. L., Westphal U.* An Introduction to Fractional Calculus // In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Ed. by *Hilfer R.* – Singapore: World Scientific, 2000, pp. 1-85.
- Camargo R. F., Chiaccho A. O., de Oliveira E. C.* Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation // *J. Math. Phys.* **49**, 033505 (2008).
- Caputo M.* Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent II // *Geophys. J. R. Astr. Soc.* **13**, 529-539 (1967).
- Caputo M.* Vibrations of an infinite viscoelastic layer with a dissipative memory // *J. Acoustic Soc. Am.* **56**, 897-904 (1974).
- Caputo M.* Vibrations of an infinite plate with a frequency independent Q // *J. Acoustic Soc. Am.* **60**, 634-639 (1976).
- Caputo M.* A model for the fatigue in elastic materials with frequency independent Q // *J. Acoust. Soc. Amer.* **66**, 176-179 (1979).
- Caputo M.* Generalized rheology and geophysical consequences // *Tectonophysics* **116**, 163-172 (1985).
- Caputo M.* Modern rheology and electric induction: multivalued index of refraction, splitting of eigenvalues and fatigues // *Ann. di Geofis.* **39**, 941-966 (1996).
- Caputo M.* Mean fractional-order-derivatives differential equations and filters // *Ann. University Ferrara. Sez. VII* **41**, 73-84 (1997).
- Caputo M.* Models of flux in porous media with memory // *Water Resources Research* **36**, 697-705 (2000).
- Caputo M.* Distributed order differential equations modelling dielectric induction and diffusion // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **4**, 421-442 (2001).
- Caputo M., Mainardi F.* A new dissipation model based on memory mechanism // *Pure and Appl. Geophysics* **91**, 134-147 (1971).
- Caputo M., Mainardi F.* Linear models of dissipation in anelastic solids // *Riv. Il Nuovo Cimento* **1**, 161-198 (1971).

- Carcione J. M., Cavallini F., Mainardi F., Hanyga A.* Time-domain seismic modelling of constant-Q wave propagation using fractional derivatives // *Pure and Appl. Geophys* **159**, 1719-1736 (2002).
- Carpinteri A., Mainardi F.* (eds). *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics* – Vienna – New York: Springer Verlag, 1997.
- Carpinteri A., Chiaia B.* Power scaling laws and dimensional transitions in solid mechanics // *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 1343-1364 (1996).
- Carpinteri A., Cornetti P., Kolwankar K. M.* Calculation of the tensile and flexural strength of disordered materials using fractional calculus // *Chaos, Solitons and Fractals* **21**, 623-632 (2004).
- Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P.* Numerical modelization of disordered media via fractional calculus // *Computational Materials Science* **30**, 155-162 (2004).
- Carpinteri A., Chiaia B., Cornetti P.* A disordered microstructure material model based on fractal geometry and fractional calculus // *Z. Angewandte Math. Mech.* **84**, 128-135 (2004).
- Carreras B. A., Lynch V. E., Newman D. E., Zaslavsky G. M.* Anomalous diffusion in a running sandpile model // *Phys. Rev. E* **60**, 4770-4778 (1999).
- Del-Castillo-Negrete D., Carreras B. A., Lynch V. E.* Fractional diffusion in plasma turbulence // *Physics of Plasmas* **11**, 3854-3864 (2004).
- del-Castillo-Negrete D.* Fractional diffusion models of nonlocal transport // *Physics of Plasmas*, doi:10.1063/1.2336114 (2006).
- Cecconi F., Cencini M., Falcioni M., Vulpiani A.* Brownian motion and diffusion: From stochastic processes to chaos and beyond // *Chaos* **15**, 026102-1-9 (2005).
- Chaves A. S.* Fractional diffusion equation to describe Lévy flights // *Phys. Lett. A* **239**, 13 (1998).
- Chechkin A. V., Gonchar V., Klafter J., Metzler R., Tanatanov L.* Stationary states of non-linear oscillators driven by Lévy noise // *Chem. Phys.* **284**, 233-251 (2002).
- Chechkin A. V., Gonchar V. Yu., Klafter J., Metzler R.* Natural cutoff in Lévy flights caused by dissipative nonlinearity // *Phys. Rev. E* **72**, 010101-1-4 (2003).
- Chechkin A. V., Gonchar V. Yu., Klafter J., Metzler R., Tanatarov L. V.* First passage and arrival time densities for Lévy flights and the failure of the method of images // arXiv:cond-mat/0309449v1 (2003).
- Chechkin A., Gonchar V., Szydłowski M.* Fractional kinetics for relaxation and superdiffusion in a magnetic field // *Physics of Plasmas* **9**, 78-88 (2002).
- Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M.* Retarding subdiffusion and accelerating superdiffusion governed by distributed-order fractional diffusion equations // *Phys. Rev. E* **66**, 046129-1-046129-6 (2002).

Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M., Gonchar V. Yu. Distributed order time fractional diffusion equation // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **6**, 259-279 (2003).

Chechkin A. V., Klafter J., Sokolov I. M. Fractional Fokker-Planck equation for ultraslow kinetics // *Europhys. Lett.* **63**, 326-332 (2003).

Chechkin A. V., Gonchar V. Yu., Klafter J., Metzler R., Tanatarov L. V. Lévy flights in a steep potential well // *J. Stat. Phys.* **115**, 1505-1535 (2004).

Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M. Retarding subdiffusion and accelerating superdiffusion governed by distributed-order fractional diffusion equations // *Phys. Rev. E* **66**, 046129/1-6 2002.

Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M., Gonchar V. Yu. Distributed order time fractional diffusion equation // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **6**, 259-279 (2003).

Chechkin A. V., Gorenflo R., Sokolov I. M. Fractional diffusion in inhomogeneous media // *J. of Physics A: Mathematical and General* **38**, L679-L684 (2005).

Chen W., Holm S. Fractional Laplacian time-space models and Levy stable distribution for linear and nonlinear frequency-dependent lossy media // *Research Report Simula Research Lab* **9**, (2002).

Chen W., Holm S. Fractional Laplacian time-space model for linear and nonlinear lossy media, exhibiting arbitrary frequency dependency // *J. Acoust. Soc. Am.* **115**, 1424-1430 (2004).

Chen W., Holm S. Levy stable distribution and [0,2] power dependence on the absorption coefficient on the frequency // *Chin. Phys. Lett.* **22**, 2601-2603 (2004).

Chen Q., Suki B., An K. Dynamic mechanical properties of agarose gels modeled by a fractional derivative model // *J. of biomechanical engineering* **126**, 666-671 (2004).

Chen J., Liu F., Anh V. Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables // *J. Math. Anal. Appl.* **338**, 1364-1377 (2008).

Chen C. M., Liu F., Turner I., Anh V. A Fourier method for the fractional diffusion equation describing sub-diffusion // *J. of Computational Physics* **227**, 886-897 (2007).

Chow C. W., Liu K. L. Fokker-Planck equation and subdiffusive fractional Fokker-Planck equation of bistable systems with sinks // *Physica A* **341**, 87-106 (2004).

Chukbar K. V., Zaburdaev V. Yu. Comment on «Towards deterministic equations for Levy walks: the fractional material derivative» // *Phys. Rev. E* **68**, 033101 (2003).

Chukbar K. V., Zaburdaev V. Yu. Subdiffusion in random compressible flows // *Phys. Rev. E* **71**, 061105-1-6 (2005).

- Coffey W. T.* Dielectric relaxation: an overview // *J. Molec. Liq.* **114**, 5-25 (2004).
- Coffey W. T., Crothers D. S. F., Holland D., Titov S. V.* Green function for the diffusion limit of one-dimensional continuous time random walks // *J. Molec. Liq.* **114**, 165-171 (2004).
- Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Titov S. V.* Anomalous dielectric relaxation in the context of the Debye model of noninertial rotational diffusion // *J. Chem. Phys.* **116**, 6422-6426 (2002).
- Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Titov S. V.* Anomalous diffusion and dielectric relaxation in an N-fold cosine potential, *Phys. Rev. E* **67**, 061115 (2003).
- Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Titov S. V.* Inertial effects in anomalous dielectric relaxation // *J. Molec. Liq.* **114**, 35-41 (2004).
- Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Titov S. V.* Anomalous dielectric relaxation in a double-well potential // *J. Molec. Liq.* **114**, 43-49 (2004).
- Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Titov S. V.* Anomalous nonlinear dielectric and Kerr effect relaxation steady state responses in superimposed ac and dc electric fields // *J. Chem. Phys.* **126**, 084502 (2007).
- Coffey W. T., Kalmykov Y. P., Titov S. V., Vij J. K.* Fractional rotational diffusion of rigid dipoles in an asymmetrical double-well potential // *Phys. Rev. E* **72**, 011103 (2005).
- Compte A.* Stochastic foundations of fractional dynamics // *Phys. Rev. E* **53**, 4191-4193 (1996).
- Compte A.* Continuous time random walks on moving fluids // *Phys. Rev. E* **55**, 6821-6831 (1997).
- Compte A., Cáceres M. O.* Fractional dynamics in random velocity fields // *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3140-3143 (1998).
- Compte A., Jou D.* Non-equilibrium thermodynamics and anomalous diffusion // *J. Phys. A: Math. Gen.* **29**, 4321-4329 (1996).
- Compte A., Jou D., Katayama Y.* Anomalous diffusion in linear shear flows // *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 1023-1030 (1997).
- Compte A., Metzler R., Camacho J.* Biased continuous random walks between parallel plates // *Phys. Rev. E* **56**, 1445-1454 (1997).
- Comte F.* Simulation and estimation of long-memory continuous time models // *J. Time Series Anal.* **17**, 19-36 (1996).
- Cosson P., Michon J. C.* Identification by a non integer order model of the mechanical behavior of an elastometer // *Chaos, Solitons and Fractals* **7**, 1807-1824 (1996).
- Craiem D., Armentano R. L.* A fractional derivative model to describe arterial

viscoelasticity // *Biorheology* **44**, 251-263 (2007).

Crothers D. S. F., Holland D., Kalmykov Yu. P., Coffey W. T. The role of Mittag-Leffler function in anomalous relaxation // *J. Molec. Liquids* **114**, 27-34 (2004).

Dai W., Heyde C. C. Ito's formula with respect to fractional Brownian motion and its application // *J. Appl. Stoch. Anal.* **9**, 439-448 (1996).

Darwish M. A., El-Bary A. A. Existence of fractional integral equation with hysteresis // *Applied Math. and Comp.* **176**, 684-687 (2006).

Das S. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls.* – Berlin: Springer, 2008.

Debbi L. Explicit solutions of some fractional partial differential equations via stable subordinators // *J. Appl. Math. and Stoch. Analysis* ID93502, 1-18 (2006).

Debbi L., Dozzi M. On the solutions of nonlinear stochastic fractional partial differential equations in one spatial dimension // *Stochastic Processes and their Applications* **115**, 1764-1781 (2005).

Debnath L. Fractional integral and fractional differential equations in fluid mechanics // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **6**, 119-156 (2003).

Debnath L. Recent applications of fractional calculus to Science and Engineering // *Int. J. Math. Appl. Sci.* **54**, 3413-3442 (2003).

Decreusefond L., Uestuene A. S. Stochastic analysis of the fractional Brownian motion // *Potential Analysis* **10**, 117-214 (1998).

Dejardin J.-L. Fractional dynamics and nonlinear harmonic responses in dielectric relaxation of disordered liquids // *Phys. Rev. E* **68**, 031108-1-8 (2003).

Delbourgo D., Elliot D. On the approximate evaluation of Hadamard finite-part integrals // *IMA Journ. of Numer. Analysis* **14**, 485-500 (1994).

Del Castillo-Negrete D., Carreras B. A., Lynch V. E. Front dynamics in reaction-diffusion systems with Levy flights: A fractional diffusion approach // *Phys. Rev. Lett.* **91**, 8302-8309 (2003).

Deng R., Davies P., Bajaj A. K. A nonlinear fractional derivative model for large uni-axial deformation behavior of polyurethane foam // *Signal Processing* **86**, 2728-2743 (2006).

Depollier C., Fella Z. E. A., Fella M. Propagation of transient acoustic waves in layered porous media: Fractional equation for scattering operators // *Nonlinear Dynamics* **38**, 181-190 (2004).

Dieterich W., Maass F. Non-Debye relaxations in disordered ionic solids // *Chem. Phys.* **284**, 439-467 (2002).

Diethelm K., Freed A. D. On the solution of nonlinear fractional differential

equations used in the modelling of viscoelasticity // In: Scientific Computing in Chemical Engineering II. Computational Fluid Dynamics Reaction Engineering, and Molecular Properties, Keil F., Mackens W., Vob H., and Werther J. (Eds.), Springer-Verlag, Heidelberg, 1999, pp. 217-224.

Diethelm K., Weilbeer M. Initial-boundary value problems for time-fractional diffusion-wave equations and their numerical solution // in: Proceedings of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications. Le Mehaute A., Tenreiro-Machado J. A., Trigeassou, J. C., and Sabatier, J. (Eds.), ENSEIRB, Bordeaux, 2004, pp. 551-557.

Douglas J. F. Polymer science applications of path-integration, integral equations, and fractional calculus // In: Applications of Fractional Calculus in Physics, World Scientific, Singapore, 2000, pp. 241-330.

Draganescu G. E. Application of a variational iteration method to linear and nonlinear viscoelastic models with fractional derivatives // J. of Mathematical Physics doi:10.1063/1.2234273 (2006).

Duarte Ortigueira M., Tenreiro Machado J. A. Fractional signal processing and applications // Signal Processing **83**, 2285-2286 (2003).

Dubkov A. A., Spagnolo B. Generalized Wiener Process and Kolmogorov's Equation for Diffusion Induced by Non-Gaussian Noise Source // Fluctuation and Noise Lett. **5**, L267-L274 (2005).

Dubkov A. A., Spagnolo B. Langevin Approach to Anomalous Diffusion in fixed potentials: exact results for stationary probability distributions // Acta Physica Polonica B **38**, 1745-1758 (2007). *Dubkov A. A., Spagnolo B., Uchaikin V. V.* Lévy flight superdiffusion: an introduction. // Int. J. Bifurcation and Chaos **18**, 2649-2672, (2008).

Eab C. H., Lim S. C. Path integral representation of fractional harmonic oscillator // Physica A **371**, 303-316 (2006).

Eab C. H., Lim S. C., Teo L. P. Finite temperature Casimir effect for a massless fractional Klein Gordon field with fractional Neumann conditions // J. Math. Phys. **48**, 082301 (2007).

Eidelman S. D., Kochubei A. N. Cauchy problem for fractional diffusion equations // J. of Differential Equations **199**, 211-255 (2004).

Eldred L. B., Baker W. P., Palazotto A. N. Numerical application of fractional derivative model constitutive relations for viscoelastic materials // Computers & Structures **60**, 875-882 (1996).

El-Nabulsi R.-A. Fractional description of super and subdiffusion // Phys Lett A **340**, 361-368 (2005).

El-Sayed A. M. A. Fractional order diffusion-wave equation // Int. J. of Theor. Phys. **35**, 311-322 (1996).

- El-Shahed M.* MHD of a fractional viscoelastic fluid in a circular tube // *Mechanics Res. Comm.* **33**, 261-268 (2006).
- Etwakil S. A., Zahran M. A.* Fractional integral representation of master equation // *Chaos, Solitons and Fractals* **10**, 1545-1548 (1999).
- Etwakil S. A., Zahran M. A.* Fractional Fokker-Planck equation // *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 791-798 (2000).
- Etwakil S. A., Zahran M. A.* Fractional representation of Fokker-Planck equation // *Chaos, Solitons and Fractals* **12**, 1929-1935 (2001).
- Etwakil S. A., Elhanbaly A., Zahran M. A.* Fractional (space-time) Fokker-Planck equation // *Chaos, Solitons and Fractals* **12**, 1035-1040 (2001).
- Etwakil S. A., Zahran M. A., Abdou M. A.* The operator method for solving the fractional Fokker-Planck equation // *J. Quantit. Spectres, and Radiat. Transfer* **77**, 317-327 (2003).
- Etwakil S. A., Zahran M. A., Abulwafa E. M.* The diffusion-drift equation on comb-like structure // *Physica A* **303**, 27-34 (2002).
- Etwakil S. A., Zahran M. A., Abulwafa E. M.* Fractional (space-time) diffusion equation on comb-like model // *Chaos, Solitons and Fractals* **20**, 1113-1120 (2004).
- Enelund M., Fenander A., Olsson P.* Fractional integral formulation of constitutive equations of viscoelasticity // *AIAA J.* **35**, 1356-1362 (1997).
- Enelund M., Josefson B. L.* Time-domain finite element analysis of viscoelastic structures with fractional derivatives constitutive equations // *AIAA J.* **35**, 1630-1637 (1997).
- Enelund M., Olsson P.* Damping described by fading memory-analysis and application to fractional derivative models // *Int. J. of Solids and Structures* **36**, 939-970 (1999).
- Enggheta N.* On the role of non-integral (fractional) calculus in electrodynamics // *Digest of the 1992 IEEE AP-S/URSI Int. Symposium – URSI Digest, Chicago, 1992*, pp. 163-175.
- Enggheta N.* On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism // *IEEE Trans. on Antennas and Propagations* **44**, 554-566 (1996).
- Enggheta N.* Electrostatic «fractional» image methods for perfectly conducting wedges and cones // *IEEE Trans. on Antennas and Propagations* **44**, 1565-1574 (1996).
- Enggheta N.* Use of fractional integration to propose some «fractional» solutions for the scalar Helmholtz equation // *Progr. in Electromagnetic Res.* **12**, 107-132 (1996).
- Enggheta N.* On the role of fractional calculus in electromagnetic theory // *IEEE Antenn. Propag.* **39**, 35-46 (1997).

Engheta N. Fractional curl operator in electromagnetics // Microwave Opt. Tech. Lett. **17**, 86-91 (1998).

Engheta N. On Fractional paradigm and intermediate zones in electromagnetism, I: Planar observation // Microw. Optim. Tech. Lett. **22**, 236-241 (1999).

Engheta N. On Fractional paradigm and intermediate zones in electromagnetism. II: Cylindrical and spherical observations // Microwave Optim. Tech. Lett. **23**, 100-103 (1999).

Engheta N. Phase and amplitude of the fractional-order intermediate wave // Microwave Optim. Tech. Lett. **21**, 338-343 (1999).

Engheta N. Fractional paradigm in electromagnetic theory // In: Frontiers in Electromagnetics. Werner H. and Mittra R. (Eds.), IEEE Press, 2000, pp. 523-552.

Erochenkova G., Lima R. A fractional diffusion equation for a marker in porous media // Chaos **11**, 495-499 (2001).

Erochenkova G., Lima R. Erratum: «A fractional diffusion equation for a marker in porous media» [Chaos **11**, 495 (2001)] // Chaos **12**, 264 (2001).

Escudero C. The fractional Keller-Segel model // Nonlinearity **19**, 2909-2918 (2008).

de Espindola J. J., da Silva Neto J. M., Lopes E. M. O. A generalised fractional derivative approach to viscoelastic material properties measurement // Applied Math. and Computation **164**, 493-506 (2005).

Fa K. S. A falling body problem through the air in view of the fractional derivative approach // Physica A **350**, 199-206 (2005).

Fa K. S. Generalized Langevin equation with fractional derivative and long-time correlation function // Phys. Rev. E **73**, 061104 (2006).

Feeny B. F., Lin B. F. Fractional derivatives applied to phase-space reconstructions // Nonlinear Dynamics **38**, 85-99 (2004).

Felber F. S. New exact solutions of differential equations derived by fractional calculus // Applied Math. and Computation **170**, 1261-1270 (2005).

Feldman Yu., Puzenko A., Ryabov Ya. Non-Debye dielectric relaxation in complex materials // Chem. Phys. **284**, 139-168 (2002).

Fellah M., Fellah Z. E. A., Depollier C. Transient wave propagation in inhomogeneous porous materials: Application of fractional derivatives // Signal Processing **86**, 2658-2667 (2006).

Fenander A. A fractional derivative railpad model included in a railway track model // J. of Sound and Vibration **212**, 889-903 (1998).

Ferdi Y., Herbeuval J. P., Charef A., Boucheham B. R wave detection using fractional digital differentiation // ITBM-RBM (RBM) **24**, 273-280 (2003).

- Ferrari R., Manfredi A. J., Young W. R.* Strong and weakly self-similar diffusion // *Physica D* **154**, 111 (2001).
- Fogedby H.* Langevin-equations for continuous time Levy flights // *Phys. Rev. E* **50**, 1657-1660 (1994).
- Fogedby H. C.* Lévy flights in quenched random force fields // *Phys. Rev.* **58**, 1690-1712 (1998).
- Frederico G. S. F., Torres D. F. M.* A formulation of Noether's theorem for fractional problems of the calculus of variations // *J. of Math. Anal. and Appl.* **334**, 834-846 (2007).
- Freed A. D., Diethelm K.* Fractional calculus in biomechanics: a 3D viscoelastic model using regularized fractional derivative kernels with application to the human calcaneal fat pad // *Biomechanics and modeling in mechanobiology* **5**, 203-215 (2006).
- Friedrich Ch.* Relaxation and retardation functions of the Maxwell model with fractional derivatives // *Rheologica Acta* **30**, 151-158 (1991).
- Friedrich Ch.* Rheological material functions for associating comb-shaped or H-shaped polymers: a fractional calculus approach // *Phil. Mag. Lett.* **66**, 287-292 (1992).
- Friedrich Ch.* Mechanical stress relaxation in polymers: fractional integral model versus fractional differential model // *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **46**, 307-314 (1993).
- Friedrich Ch.* Linear viscoelastic behaviour of branched polybutadiene: a fractional calculus approach // *Acta Polymer.* **46**, 385-390 (1995).
- Friedrich Ch., Braun H.* Linear viscoelastic behavior of complex polymer materials: a fractional mode representation // *Colloid and Polymer Science* **272**, 1536-1546 (1994).
- Frisch U., Matsumoto T.* On multifractality and fractional derivatives // *arXiv:nlin/0107057v3[nlin.CD]*, 25 June (2002).
- Frisch U., Khanin K., Matsumoto T.* Multifractality of the Feigenbaum attractor and fractional derivatives // *arXiv:nlin/0309068v2*, 10 Apr (2004).
- Fujita Y.* Cauchy problems of fractional order and stable processes // *Japan J. Appl. Math.* **7**, 459-476 (1990).
- Fujita Y.* Integro-differential equations which interpolates the heat equation and the wave equation // *Osaka J. Math.* **27**, 309-321 (1990).
- Fujita Y.* Integro-differential equations which interpolate the heat equation and the wave equation. II // *Osaka J. Math.* **27**, 797-804 (1990).
- Fukunaga M., Shimizu N.* Role of prehistories in the initial value problems of fractional viscoelastic equations // In: *Special Issue of Fractional Order*

Derivatives and their Applications, Nonlinear Dynamics. Ed. by *Duarte M., Tenreiro Machado J. A.* **38**, 207-220 (2004).

Funaki T., Woyczynski W. A. Interacting particle approximation for fractal Burgers equation // In: Stochastic Processes and Related Topics, Birkhauser-Boston, 1998, pp. 1-27.

Furati K. M., Tatar N.-e. Power-type estimates for a nonlinear fractional differential equation // Nonlinear Analysis **62**, 1025-1036 (2005).

Furati K. M., Tatar N.-e. Long time behavior for a nonlinear fractional model // J. of Math. Anal. Appl. **332**, 441-454 (2007).

Gafiychuk V. V., Datsko B. Y. Pattern formation in a fractional reaction-diffusion system. // Physica A **365**, 300-306 (2006).

Gafiychuk V. V., Datsko B. Y. Stability analysis and oscillatory structures in time-fractional reaction-diffusion systems // Phys. Rev. E **75**, 055201 (2007).

Gafiychuk V., Datsko B. Inhomogeneous oscillatory structures in fractional reaction-diffusion systems // Physics Lett. A **372**, 619-622 (2008).

Gafiychuk V., Datsko B., Meleshko V. Analysis of fractional order Bonhoeffer-van der Pol oscillator // Physica A **387**, 418-424 (2008).

Gaies A., El-Akrimi A. Fractional variational principle in microscopic picture // Physica Scripta **70**, 7-10 (2004).

Galiyarova N. M., Gorin S. V., Dontsova L. I. Fractality and dielectric spectra of ferroic materials // Mat. Res. Innovat. **3**, 30-41 (1999).

Gao X., Yu J. Chaos in the fractional order periodically forced complex Duffing's oscillators // Chaos, Solitons and Fractals **24**, 1097-1104 (2005).

Garbaczewski P. Lévy processes and relativistic quantum dynamics // In: Chaos - The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour, (Eds. P.Garbaczewski, M.Wolf, A.Weron), Springer, Berlin, 1995, pp. 75-86.

Gaul L., Kempfle S., Klein P. Transientes Schwingungsverhalten bei der Dämpfungsbeschreibung mit nicht ganzzahligen Zeitableitung Z. angew. Math. Mech. **70**, T139-T141 (1990). *Gaul L., Klein P., Kempfle S.* Damping description involving fractional operators // Mech. Syst. Signal Process. **5**, 81-88 (1991).

Gemant A. A method of analyzing experimental results obtained from elastoviscous bodies // Physics **7**, 311-317 (1936).

Gemant A. On Fractional Differentials // Philos. Mag. Lett. **25**, 540-549 (1938).

Gerolymatou E., Vardoulakis I., Hilfer R. Modelling infiltration by means of a nonlinear fractional diffusion model // J. of Physics D: Applied Physics **39**, 4104-4110 (2006).

Giannantoni C. The problem of the initial conditions and their physical meaning

in linear differential equations of fractional order // *Appl. Math. and Computation* **141**, 87-102 (2003).

Giona M., Roman H. E. A theory of transport phenomena in disordered systems // *Chem. Engineering J.* **49**, 1-10 (1992).

Giona M., Roman H. E. Fractional diffusion equation for transport phenomena in random media // *Physica A* **185**, 82-97 (1992). *Giona M., Roman H. E.* Fractional diffusion equation on fractals: One-dimensional case and asymptotic behaviour // *J. Phys. A: Math. Gen.* **25**, 2107-2117 (1992).

Giona M., Gerbelli S., Roman H. E. Fractional diffusion equation and relaxation in complex viscoelastic materials // *Physica A* **191**, 449-453 (1992).

Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional integral operators and Fox functions in the theory of viscoelasticity // *Macromolecules* **24**, 6426-6436 (1991).

Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fox function representation of non-Debye relaxation processes // *J. Stat. Phys.* **71**, 755-770 (1993).

Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional relaxation and the time-temperature superposition principle // *Reologica Acta* **33**, 337-343 (1994).

Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. A fractional calculus approach to self-similar protein dynamics // *Biophys. J.* **68**, 46-53 (1995).

Go J.-Y., Pyun S.-I. A review of anomalous diffusion phenomena at fractal interface for diffusion-controlled and non-diffusion-controlled transfer processes // *J. Solid State Electrochem.* **11**, 323-334 (2007).

Goldfain E. Derivation of the fine structure constant using fractional dynamics // *Chaos, Solitons and Fractals* **17**, 811-818 (2003).

Goldfain E. Fractional dynamics, Cantorian space-time and the gauge hierarchy problem // *Chaos, Solitons and Fractals* **22**, 513-520 (2004).

Goldfain E. Fractional dynamics and the TeV regime of field theory // *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **13**, 666-676 (2008).

Goldfain E. Fractional dynamics and the Standard Model for particle physics // *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **13**, 1397-1404 (2008).

Gorenflo R. Abel integral equations: application-motivated solution concepts // *Methoden Verfahren Math. Phys.* **34**, 151-174 (1987).

Gorenflo R. Fractional calculus: some numerical methods // In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Carpinteri A, Mainardi F (eds) – Springer Verlag, Vienna – New York, 1997, pp. 277-290.

Gorenflo R., De Fabritiis G., Mainardi F. Diskrete random walk models for symmetric Lévy-Feller diffusion processes // *Physica A* **269**, 79-89 (1999).

Gorenflo R., Iskenderov A., Luchko Yu. Mapping between solutions of fractional

diffusion-wave equations // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **3**, 75-86 (2000).

Gorenflo R., Luchko Yu., Mainardi F. Wright functions as scale-invariant solutions of the diffusion-wave equation // *J. Comput. Appl. Math* **118**, 175-191 (2000).

Gorenflo R., Mainardi F. Fractional oscillations and Mittag-Leffler functions // Preprint No. A-14/96, Freie Universität Berlin, Serie A Mathematik, 1996, p. 22.

Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus: integral and differential equations of fractional order // In: *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*. Ed. by *Carpinteri A., Mainardi F.* – Vienna – New York: Springer Verlag, 1997, pp. 223-276.

Gorenflo R., Mainardi F. Random walk models for space-fractional diffusion processes // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **1**, 167-191 (1998).

Gorenflo R., Mainardi F. Fractional calculus and stable probability distribution // *Arc. Mech.* **50**, 377-388 (1998).

Gorenflo R., Mainardi F. Approximation of Lévy-Feller diffusion by random walk // *J. Analysis and its Applications*, (ZAA) **18**, 231-246 (1999).

Gorenflo R., Mainardi F. Random walk models approximating symmetric space fractional diffusion processes // In: *Problems in Mathematical Physics*, Elshner J., Gohberg I., Silbermann B. (Eds) – Birkhauser Verlag, Basel, 2001, pp. 120-145.

Gorenflo R., Mainardi F. Fractional diffusion processes: probability distributions and continuous time random walk // In: *Processes with Long Range Correlations*. Ed. by *Rangarajan G., Ding M.* – Berlin: Springer Verlag, 148-166 [Lecture Notes in Physics, No.621.] (2003).

Gorenflo R., Mainardi F. Simply and multiply scaled diffusion limits for continuous time random walks // *Journ. of Physics: Conf. Series* **7**, 1-16 (2005).

Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G., Paradisi P. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion // *Chem. Physics* **284**, 521-544 (2002).

Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G., Paradisi P. Fractional diffusion: probability distributions and random walk models // *Physica A* **305**, 106-112 (2002).

Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Pagnini G., Paradisi P. Time fractional diffusion: a discrete random walk approach // in: *Special Issue of Fractional Order Calculus and Its Applications, Nonlinear Dynamics* **29**, Tenreiro-Machado J. A. (Ed.), 129-143 (2002).

Gorenflo R., Mainardi F., Srivastava H. M. Special functions in fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // In: *The Eighth Int. Colloquium on Differential Equations (Plovdiv, 1997)*, VSP Publishing Company, Utrecht, 1998, pp. 195-202.

Gorenflo R., Mainardi F., Vivoli A. Continuous-time random walk and parametric subordination in traditional diffusion // *Chaos, Solitons and Fractals* **34**, 87-103 (2007).

Gorenflo R., Rutman R. On ultraslow and on intermediate processes // In: *Transform Methods and Special Functions*. Ed. by *Rusev P., Dimovsky I., Kiryakova V.* – Singapore: Science Culture Technology, 1995, pp. 61-81.

Gorenflo R., Vessela S. Abel integral equations: analysis and applications // *Lecture Notes in Mathematics* 1461 – Berlin: Springer-Verlag, 1991.

Gorenflo R., Vivoli A. Fully discrete random walks for space-time fractional diffusion equations // *Signal Processing* **83**, 2411-2420 (2003).

Gorenflo R., Vivoli A., Mainardi F. Discrete and continuous random walk models for space-time fractional diffusion // *Nonlinear Dynam.* **38**, 101-116 (2004).

Gorenflo R., Abdel-Rehim E. A. Convergence of the Grunwald-Letnikov scheme for time-fractional diffusion // *J. of Comp. Appl. Math.* **205**, 871-881 (2007).

Goto M., Ishii D. Semidifferential electroanalysis // *J. Electroanal. Chem. and Interfacial Electrochem.* **61**, 361-365 (1975).

Goto M., Oldham K. B. Semiintegral electroanalysis: studies on the neopolarographic plateau // *Anal. Chem.* **46**, 1522-1530 (1973).

Goto M., Oldham K. B. Semiintegral electroanalysis: the shape of irreversible neopolarograms // *Anal. Chem.* **48**, 1671-1676 (1976).

Goutas A., Ferdi Y., Herbeval J. P., Boudraa M., Boucheham B. Digital fractional order differentiation-based algorithm for P and T-waves detection and delineation // *ITBM-RBM* **26**, 127-132 (2005).

Grenness M., Oldham K. B. Semiintegral electroanalysis: theory and verification // *Anal. Chem.* **44**, 1121-1129 (1972).

Grigolini P. Anomalous diffusion, spontaneous localizations and the correspondence principle // In: *Chaos – The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour*. Ed. by *Garbaczewski P., Wolf M., Weron A.* – Berlin: Springer, 1995, pp. 101-119.

Grigolini P., Palatella L., Raffaelli G. Asymmetric anomalous diffusion: an efficient way to detect memory in time series // *Fractals* **9**, 439-449 (2001).

Grigolini P., Rocco A., West B. J. Fractional calculus as a macroscopic manifestation of randomness // *Phys. Rev. E* **59**, 2303-2306 (1999).

Grigorenko I., Grogorenko E. Chaotic dynamics of the fractional Lorentz system // *Phys. Rev. Lett.* **91**, 034101 (2003).

Guo X., Xu M. Some physical applications of fractal Schroedinger equation // *J. Math. Phys.* **47**, 082104 (2006).

Guyomar D., Ducharne B., Sebald G. Dynamical hysteresis model of ferroelectric ceramics under electric field using fractional derivatives // *J. of Physics D* **40**, 6048-6054 (2007).

Hanneken J. W., Narahari Achar B. N., Vaught D. M., Harrington K. L. A random walk simulation of fractional diffusion // *J. Molec. Liq.* **114**, 153-157 (2004).

Hanyga A. Wave propagation in media with singular memory // *Math. Comput. Modelling* **34**, 1399-1421 (2001).

Hanyga A. Multi-dimensional solutions of space-time-fractional diffusion-wave equations // *Proc. Roy. Soc. London A* **458**, 429-450 (2002).

Hanyga A. Multidimensional solutions of time-fractional diffusion-wave equations // *Proc. of the Royal Society A* **458**, 933-957 (2002).

Hanyga A. Wave propagation in poroelasticity: Equations and solutions // In: *Theoretical and Computational Acoustics*, Shanq E. C, Li Q. and Gao T. F. (Eds.), World Scientific, River Edge, 310-318 (2002).

Hanyga A. Internal variable models of viscoelasticity with fractional relaxation laws // In: *Proc. of DETC 2003/VIB*, 48395, ASME, Chicago, USA, 2003.

Haschka M., Krebs V. A direct approximation of fractional Cole-Cole systems by ordinary first-order processes // In: *Advances in Fractional Calculus*. Ed. by *Sabatier J., Agrawal O. P., Tenreiro Machado J. A.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 257-270.

Hayakawa H. Fractional dynamics in phase ordering processes // *Fractals* **1**, 947-953 (1993).

Hayat T., Nadeem S., Asghar S. Periodic unidirectional flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model // *Applied Math. Comp.* **151**, 153-161 (2004).

Hayot F. Lévy walk in lattice-gas hydrodynamics // *Phys. Rev. A* **43**, 806-810 (1991).

He G. L., Zhou S. P. What is the exact condition for fractional integrals and derivatives of Besicovitch functions to have exact box dimension? // *Chaos, Solitons and Fractals* **26**, 867-879 (2005).

Heimans N., Bauwens J. C. Fractal rheological models and fractional differential equations for viscoelastic behavior // *Rheologica Acta* **33**, 210-219 (1994).

Heinsalu E., Patriarca M., Goychuk I., Hanggi P. Fractional diffusion in periodic potentials // *J. of Physics: Condensed Matter* **19**, 065114 (2007).

Henri B. I., Wearne S. L. Fractional reaction-diffusion // *Physica A* **276**, 448-455 (2000).

Henry B. I., Langlands T. A. M., Wearne S. L. Anomalous diffusion with linear reaction dynamics: from continuous time random walks to fractional reaction-diffusion equations // *Phys. Rev. E* **74**, 031116 (2006).

Heymans N., Bauwens J. C. Fractal rheological models and fractional differential-equations for viscoelastic behavior // *Rheol. Acta* **33**, 210-219 (1994).

Herrmann R. The fractional symmetric rigid rotor // *J. of Physics G: Nuclear and Particle Physics* **34**, 607-625 (2007).

Hilfer R. Thermodynamic scaling derived via analytic continuation from the classification of Ehrenfest // *Physica Scripta* **44**, 321-322 (1991).

Hilfer R. Multiscaling and the classification of continuous phase transitions // *Phys. Rev. Lett.* **68**, 190-192 (1992).

Hilfer R. Classification theory for anequilibrium phase transitions // *Phys. Rev. E* **48**, 2466-2475 (1993).

Hilfer R. On a new class of phase transitions // In: *Random Magnetism and High-Temperature Superconductivity*. Ed. by *Beyermann W., Huang-Liu N., MacLaughlin D.* – Singapore: World Scientific, 85-99 (1994).

Hilfer R. Exact solution for a class of fractal time random walks // *Fractals* **3**, 211-216 (1995).

Hilfer R. Foundation of fractional dynamics // *Fractals* **3**, 549-556 (1995).

Hilfer R. An extension of the dynamical foundation for the statistical equilibrium concept // *Fractals* **3**, 549-556 (1995).

Hilfer R. Fractional dynamics, irreversibility and ergodicity breaking. *Chaos, Solitons and Fractals* **5**, 8, 1475-1484 (1995).

Hilfer R. Fractional derivatives in static and dynamic scaling // In: *Scale Invariance and Beyond*, B Dubrille, F Graner, D Sornette (eds.), Springer, Berlin, 53-63 (1997).

Hilfer R. On fractional diffusion and its relation with continuous time random walks // In: *Anomalous Diffusion: From Basis to Applications*. Ed. by *Kutner R., Pekalski A., Sznajd-Weron K.* – Berlin: Springer Verlag, 1999, pp. 77-82.

Hilfer R. (Ed.), 2000 *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Sci. Publishing, New York (2000).

Hilfer R. Fractional calculus and regular variation in thermodynamics // In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Ed. by *Hilfer R.* – Singapore: World Scientific, 2000, pp. 429-463.

Hilfer R. Fractional time evolution // In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Ed. by *Hilfer R.* – Singapore: World Scientific, 2000, pp. 87-130.

Hilfer R. Fractional diffusion based on Riemann-Liouville fractional derivatives // *J. Phys. Chemistry B* **104**, 3914-3917 (2000).

Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials // *Chem. Phys.* **284**, 399-408 (2002).

Hilfer R. On fractional diffusion and continuous time random walks // *Physica A*

329, 35-39 (2003).

Hilfer R. On fractional relaxation // *Fractals* **11** Suppl., 251-257 (2003).

Hilfer R., Anton L. Fractional master equations and fractal time random walks // *Phys. Rev. E* **51**, R848-R851 (1995).

Hill R. M., Dissado L. A., Nigmatullin R. R. Invariant behavior classes for the response of simple fractal circuits // *J. Phys.: Condens. Matter* **3**, 9773-9790 (1991).

Hoffman K. H., Essex C., Schulzky. Fractional diffusion and entropy production // *J. Non-Equilibrium Thermod.*, **23**, 166-175 (1998).

Hotzel R., Fliess M. On linear system with a fractional derivation: introductory theory and examples // *Math. and Computers in Simulation* **45**, 385-395 (1998).

Hsieh T.-M., Lin S.-d., Srivastava H. M. Some relationships between certain families of ordinary and fractional differential equations // *Computers and Math. with Applications* **46**, 1483-1492 (2003).

Hu Y., Woyczynski W. A. Large-scale structure of the Universe and asymptotics of Burgers' turbulence with heavy-tailed dependent data // In: *Chaos – The Interplay Between Stochastic and Deterministic Behaviour*, eds., P.Garbaczewski, M.Wolf, A.Weron, Springer, Berlin, 135-149 (1995).

Hu Y., Kallianpur G. Schroedinger equation with fractional Laplacians // *Appl Math Optim* **42**, 281-290 (2000).

Hu Y. Heat equations with fractional white noise potentials // *Appl. Math. Optim.* **43**, 221-243 (2001).

Huang F., Liu F. The time fractional diffusion equation and the advection-dispersion equation // *ANZIAM J.* **46**, 317-330 (2005).

Huang F., Liu F. The space-time fractional diffusion equation with Caputo derivatives // *J. Appl. Math. Computing* **19**, 179-190 (2005).

Hurst H. E. Long-term storage capacity of reservoirs // *Tr. Am. Soc. Civil Engineers* **116**, 770-808 (1951).

Hwang J. S., Wang J. C. Seismic response prediction of HDR bearings using fractional derivative Maxwell model // *Engineering Structures* **20**, 849-856 (1998).

Ichise M., Nagayanagi Y., Kojima T. An analog simulation of non integer order transfer functions for analysis of electrode processes // *J. of Electroanalyt. Chemistry* **33**, 253-265 (1971).

Ignaccolo M., Grigolini P., Rosa A. Sporadic randomness: the transition from the stationary to the non-stationary condition // *Phys. Rev. E* **64**, 026210 (2001).

Ingman D., Suzdalnitsky J. Control of damping oscillations by fractional differential operator with time-dependent order // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**, 5585-5595 (2004).

- Iomin A.* Accelerator dynamics of a fractional kicked rotor // Phys. Rev. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics **75**, 037201 (2007).
- Iomin A., Baskin E.* Negative superdiffusion due to the inhomogeneous convection, arXiv:cond-mat/0405089v1 [cond-mat.dis-nn] (2004).
- Iomin A., Zaslavsky G. M.* Quantum manifestation of Lévy-type flights in a chaotic system // Chem. Physics **284**, 3-11 (2002).
- Isichenko M. B.* Percolation, statistical topography, and transport in random media // Rev. Mod. Phys. **64**, pp. 961-1043 (1992).
- Ivakhnychenko M. V., Veliev E. I., Ahmedov T. V.* Fractional operators approach in electromagnetic wave reflection problems // J. of Electromagn. Waves and Appl., **21**, 1787-1802 (2007).
- Ivakhnychenko M. V., Veliev E. I., Ahmedov T. M.* Scattering Properties of the Strip with Fractional Boundary Conditions and Comparison with the Impedance Strip // Progress In Electromagn. Res. C **2**, pp. 189-205 (2008).
- Jaffard S.* The multifractal nature of Lévy processes // Prob. Theory Relat. Fields **114**, 207-227 (1999).
- Jafari H., Daftardar-Gejji V.* Solving linear and nonlinear fractional diffusion and wave equations by Adomian decomposition. // Applied Math. and Comp. **180**, 488-497 (2006).
- Jafari H., Momani S.* Solving fractional diffusion and wave equations by modified homotopy perturbation method // Physics Lett. A **370**, 388-396 (2007).
- Jespersen S., Metzler R., Fogedby H. C.* Levy flights in external force fields: Langevin and fractional Fokker-Planck equations and their solutions // Phys. Rev. E **59**, 2736-2745 (1999).
- Jost C.* Transformation formulas for fractional Brownian motion // Stochastic Processes and their Applications **116**, 1341-1357 (2006).
- Jourdain B., Méléard S., Woyczynski W.* A probabilistic approach for nonlinear equations involving the fractional Laplacian and a singular operator // Potential Analysis **23**, 55-81 (2005).
- Jumarie G.* A Fokker-Planck equation of fractional order with respect to time // J. Math. Phys. **33**, 3536-3542 (1992).
- Jumarie G.* A new approach to complex-valued fractional Brownian motion via rotating white noise // Chaos, Solitons and Fractals, **9**, 881-893 (1998).
- Jumarie G.* Fractional master equation: non-standard analysis and Liouville-Riemann derivative // Chaos, Solitons and Fractals **12**, 2577-2587 (2001).
- Jumarie G.* New results on Fokker-Planck equations of fractional orders // Chaos, Solitons and Fractals **12**, 1873-1886 (2001).

Jumarie G. Schroedinger equation for quantum fractal space-time of order n via complex-valued fractional Brownian motion // *Int. J. Mod. Phys.* **16**, 5061-5084 (2002).

Jumarie G. Fractional Brownian Motions via random walk in a complex plane and via fractional derivative. Comparison and further results on their Fokker-Planck equations // *Chaos, Solitons and Fractals* **22**, 907-925 (2004).

Jumarie G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results // *Computers and Math. with Appl.* **51**, 1367-1376 (2006).

Jumarie G. Path integral for the probability of the trajectories generated by fractional dynamics subject to Gaussian white noise // *Applied Math. Lett.* **20**, 846-852 (2007).

Jung J. J., Barkai E., Silbey R. J. Lineshape theory and photon counting statistics for blinking quantum dots: a Lévy walk process // *Chem. Phys.* **284**, 181-194 (2002).

Kalmykov Y. P., Coffey W. T., Crothers D. S. F., Titov S. V. Microscopic models for dielectric relaxation in disordered systems // *Phys. Rev. E* **70**, 041103 (2004).

Kharintsev S. S., Nigmatullin R. R., Salahov M. Kh. Influence of self-similar collisions on the Doppler broadening // *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **33**, 2525-2538 (2000).

Kharintsev S. S., Salakhov M. K. A simple method to extract spectral parameters using fractional derivative spectrometry // *Spectrochimica Acta Part A: Molecular and Biomolecular Spectroscopy* **60**, 2125-2133 (2004).

Kilbas A. A., Pierantozzi T., Trujillo J. J., Vazquez L. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation // In: *Proc. of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, ENSEIRB, Bordeaux*, 128-131 (2004).

Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J. Fractional differential equations: An emergent field in applied and mathematical sciences // In: *Factorization, Singular Operators and Related Problems* Samko S., Lebre A. and Dos Santos A.F. (Eds.), Kluwer Acad. Publ., London, 2003, pp. 151-173.

Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Elsevier, 2006.

Kim K., Kong Y. S. Anomalous behaviors in fractional Fokker-Planck equation // *J. Korean Phys. Soc.* **40**, 979-982.

Kimmich R. Strange kinetics, porous media, and NMR // *Chem. Phys.* **284**, 253-285 (2002).

Kirane M. A wave equation with fractional damping // *Zeit. Anal. Anw.* **22**, 609-617 (2003).

- Kirane M., Laskri Y.* Nonexistence of global solutions to a hyperbolic equation with a space-time fractional damping // *Applied Math. and Comp.* **167**, 1304-1310 (2005).
- Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications // *Pitman Research Notes in Mathematics* **301**, Longman, Harlow (1994).
- Klafter J., Blumen A., Shlesinger M. F.* Stochastic pathway to anomalous diffusion // *Phys. Rev. A* **35**, 3081-3085 (1987).
- Klafter J., Shlesinger M. F., Zumofen G.* Beyond Brownian motion // *Physics Today* **49**, 33-39 (1996).
- Klimek M.* Fractional sequential mechanics - models with symmetric fractional derivative // *Czechoslovak J. of Physics* **51**, 1348-1354 (2001).
- Kobelev V., Romanov E.* Fractional Langevin equation to describe anomalous diffusion // *Progress of Theoretical Physics, Supplement* **139**, 470-476 (2000).
- Kober H.* On fractional integrals and derivatives // *Quart J Math Oxford* **11**, 193-215 (1940).
- Kochubei A. N.* Distributed order calculus and equations of ultraslow diffusion // *J. of Mathematical Analysis and Applications* **340**, 252-281 (2008).
- Kochura A. I., Didenko A. V.* On the solution of the differential equation of fractional order with piecewise constant coefficients // *NIINTI, Dep. in Ukrain., Odessa* **855**, 1-13 (1985).
- Koeller R. C.* Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity // *Trans. ASME – J. Appl. Mech.* **51**, 299-307 (1984).
- Koeller R. C.* Polynomial operators, Stieltjes convolution and fractional calculus in hereditary mechanics // *Acta Mech.* **58**, 251-264 (1986).
- Koh C. G., Kelly J. M.* Application of fractional derivatives to seismic analysis of base-isolated models // *Earthq. Engrg. Struct. Dynam.* **19**, 229-241 (1990).
- Kohandel M., Sivaloganathan S., Tenti G., Darvish K.* Frequency dependence of complex moduli of brain tissue using a fractional Zener model // *Physics in Medicine and Biology* **50**, 2799-2805 (2005).
- Kolokoltsov V., Korolev V., Uchaikin V.* Fractional stable distributions // *J. Math. Sciences* **105**, 2569-2576 (2001).
- Kolwankar K. M., Gangal A. D.* Fractional differentiability of nowhere differentiable functions and dimensions // *Chaos* **6**, 505-513 (1996).
- Kolwankar K. M., Gangal A. D.* Local fractional Fokker-Planck equation // *Phys. Rev. Lett.* **80**, 214-217 (1996).
- Kondrashin M. P., Schaufler S., Schleich W. P., Yakovlev V. P.* Anomalous kinetics of heavy particles in light media // *Chem. Phys.* **284**, 319-330 (2002).

Korabel N., Zaslavsky G. M., Tarasov V. E. Coupled oscillators with power-law interaction and their fractional dynamics analogues // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation **12**, 1405-1417 (2007).

Korosak D., Cvikel B., Kramer J., Jecl R., Prapotnik A. Fractional calculus applied to the analysis of spectral electrical conductivity of clay-water system // J. of Contaminant Hydrology **92**, 1-9 (2007).

Kosztolowicz T., Dworecki K., Mrowczynski St. Measuring subdiffusing parameters // Phys. Rev. E **71**, 041105 (2005).

Kotulski M. Asimptotic distributions of continuous-time random walks: a probabilistic approach // J. Stat. Phys. **81**, 777-792 (1995).

Krempf P. V. Semi-integrals and semi-derivatives in particle physics // In: Advances in Fractional Calculus. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Machado J. A. T.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 139-154 (2007).

Krepysheva N., Di Pietro L., Neel M. C. Fractional diffusion and reflective boundary condition // Physica A **368**, 355-361 (2006).

Krepysheva N., Di Pietro L., Neel M. C. Enhanced tracer diffusion in porous media with an impermeable boundary // In: Advances in Fractional Calculus, J. Sabatier, O. P. Agraval, J. A. Tenreiro Machado (eds), Springer, Dordrecht, the Netherlands, 171-184 (2007).

Kun Y., Li L., Jiaxiang T. Stochastic seismic response of structures with added viscoelastic dampers modeled by fractional derivative // Earthquake Engineering and Engineering Vibration, **2**, 133-140 (2003).

Kupferman R. Fractional kinetics in Kac-Zwanzig heat bath models // J. Stat. Phys., 114(1-2), 291-326 (2004).

Kusnezov D., Bulgac A., Dung G. D. Quantum Levy processes and fractional kinetics // Phys.Rev.Lett. **82**, 1136-1139 (1999).

Kutner R. Spatio-temporal coupling in the continuous-time Levy flights // Solid State Ionics **119**, 323-329 (1999).

Kuznetsov L., Zaslavsky G. M. Passive particle transport in three-vortex flow // Phys Rev E **61**, 3777 (2000).

Lagutin A. A., Nikulin Yu. A., Uchaikin V. V. The «knee» in the primary cosmic ray spectrum as consequence of the anomalous diffusion of the particles in the fractal interstellar medium // Nuclear Physics B **97**, 267-270 (2001).

Lagutin A. A., Osadchiy K. I., Strelnikov D. V. Propagation of cosmic ray electrons in the Galaxy // Proc. of Int. Cosm. Ray Conf. 2001, 1-4.

Lagutin A. A., Uchaikin V. V. Anomalous diffusion equation: application to cosmic ray transport // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research **201**, 212-216.

- Langlands T. A. M.* Solution of a modified fractional diffusion equation // *Physica A* **367**, 136-144 (2006).
- Langlands T. A. M., Henry B. I., Wearne S. L.* Turing pattern formation with fractional diffusion and fractional reactions // *J. of Physics: Condensed Matter* **19**, 065115 (2007).
- Laskin N.* Fractals and quantum mechanics // *Chaos* **10**, 780-790 (2000).
- Laskin N.* Fractional quantum mechanics and Levy path integrals // *Phys. Lett. A* **268**, 298-305 (2000).
- Laskin N.* Fractional Schroedinger equation // *Phys. Rev. E* **66**, 056108 (2002).
- Laskin N.* Fractional Poisson process // *Comm. Nonlinear Science and Numerical Simulation* **8**, 201-213 (2003).
- Laskin N., Zaslavsky G.* Nonlinear fractional dynamics on a lattice with long range interactions // *Physica A* **368**, 38-54 (2006).
- Lazopoulos K. A.* Non-local continuum mechanics and fractional calculus // *Mechanics Res. Comm.* **33**, 753-757 (2006).
- Lee C.-Y., Srivastava H. M., Yueh W.-C.* Explicit solutions of some linear ordinary and partial fractional differintegral equations // *Applied Math. and Comp.* **144**, 11-25 (2003).
- Leith J. R.* Fractal scaling of fractional diffusion processes // *Signal Processing* **83**, 2397-2409 (2003).
- Le Mehaute A., Crepy G.* Introduction to transfer and motion in fractal media: the geometry of kinetics // *Solid State Ionics* **9**, 17-30 (1983).
- Le Mehaute A., Heliodore F.* Introduction to fractional derivatives in electromagnetism: fractal approach of waves/fractal interface interactions // In: *Proc. of Progress in Electromagnetics Research Symposium (PIERS'89)*, 183-194 (1989).
- Lenzi E. K., Malacarne L. C., Mendes R. S., Pedron I. T.* Anomalous diffusion, nonlinear fractional Fokker-Planck equation and solutions // *Physica A* **319**, 245-252 (2003).
- Lenzi E. K., Mendes R. S., Andrade J. S. et al.* N-dimensional fractional diffusion equation and Green function approach: Spatially dependent diffusion coefficient and external force // *Phys. Rev. E* **71**, 052101 (2005).
- Lenzi E. K., Mendes R. S., Fa K. S., Malacarne L. C., da Silva L. R.* Anomalous diffusion: Fractional Fokker-Planck equation and its solutions // *J. Math. Phys.* **44**, 2179-2185 (2003).
- Lenzi E. K., Mendes R. S., Fa K. S., da Silva L. R., Lucena L. S.* Solutions for a fractional nonlinear diffusion equation: Spatial time dependent diffusion coefficient and external forces // *J. of Math. Physics* doi:10.1063/1.1768619 (2004).

- Lenzi E. K., Mendes R. S., Goncalves G., Lenzi M. K., da Silva L. R.* Fractional diffusion equation and Green function approach: Exact solutions // *Physica A* **360** 215-226 (2006).
- Leoncini X., Kuznetsov L., Zaslavsky G. M.* Evidence of fractional transport in point vortex flow // *Chaos, Solitons and Fractals* **19**, 259-273 (2004).
- Lévy Y.-E., Souillard B.* Superlocalization of electrons and waves in fractal media // *Europhys. Lett.* **4**, 233-237 (1987).
- Li C., Peng G.* Chaos in Chen's system with a fractional order // *Chaos, Soliton and Fractals* **22**, 443-450 (2004).
- Li C., Chen G.* Chaos in the fractional order Chen system and its control // *Chaos, Soliton and Fractals* **22**, 549-554 (2004).
- Li C. P., Deng W. H., Xu D.* Chaos synchronization of the Chua system with a fractional order // *Physica A* **360**, 171-185 (2006).
- Li C., Deng W.* Remarks on fractional derivatives // *Applied Math. and Comp.* **187**, 777-784 (2007).
- Li B., Wang J., Wang L., Zhang G.* Anomalous heat conduction and anomalous diffusion in non-linear lattices, single walled nanotubes, and billiard gas channels // *Chaos* **15**, 015121-1-13 (2005).
- Li G., Zhu Z., Cheng C.* Dynamical stability of viscoelastic column with fractional derivative constitutive relation // *Appl. Math. Mech.* **22**, 294-303 (2001).
- Liang J., Chen Y., Fullmer R.* Boundary stabilization and disturbance rejection for time fractional order diffusion-wave equations // *Nonlinear Dynamics* **38**, 339-354 (2004).
- Liang J. R., Ren F. Y., Qiu W. Y., Xiao J. B.* Exact solutions for nonlinear fractional anomalous diffusion equations // *Physica A* **385**, 80-94 (2007).
- Lin S. J.* Stochastic analysis of fractional Brownian motions // *Stoch. Stoch. Report* **55**, 121-140 (1995).
- Lion A.* On the thermodynamics of fractional damping elements // *Contin. Mech. Thermodyn.* **9**, 83-96 (1997).
- Lion A., Kardelky C.* The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales // *Int. J. Plasticity* **20**, 1313-1345 (2004).
- Liu F., Anh V., Turner I.* Numerical solution of the space fractional Fokker-Planck equation // *J. of Computational and Applied Math.* **166**, 209-219 (2004).
- Liu G., Han R. S.* Dynamic behaviour of vortex matter, memory effect and Mittag-Leffler relaxation // *Chinese Phys. Lett.* **18**, 269-271 (2001).
- Liu F., Zhuang P., Anh V., Turner I., Burrage K.* Stability and convergence of

the difference methods for the space-time fractional advection-diffusion equation // Applied Math. and Comp. **191**, 12-20 (2007).

Logvinova K., Neel M.-C. A fractional equation for anomalous diffusion in a randomly heterogeneous porous medium // Chaos doi:10.1063/1.1796211 (2004).

Logvinova K., Neel M. C. Solute spreading in heterogeneous aggregated porous media // In: Advances in Fractional Calculus. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Machado J. A.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 185-198.

Lowen S. B., Teich M. C. Fractal shot noise // Phys. Rev. Lett. **63**, pp. 1755-1759 (1989).

Lu S. L., Molz F. J., Fix G. J. Possible problems of scale dependency in applications of the three-dimensional fractional advection-dispersion equation to natural porous media // Water Resources Research **38**, 1165 (2002).

Lu S., Molz F. J., Hui H. L. An efficient, three-dimensional, anisotropic, fractional Brownian motion and truncated fractional Levy motion simulation algorithm based on successive random additions // Computers and Geosciences **29**, 15-25 (2003).

Lu J. G. Chaotic dynamics and synchronization of fractional-order Arneodo's systems // Chaos, Solitons and Fractals **26**, 1125-1133 (2005).

Luchko Y., Freed A., Diethelm K. Fractional-order viscoelasticity (FOV): Constitutive development using the fractional calculus: First annual report // NASA/TM 2002-211914, NASA's Glenn Research Center, Brook Park, Ohio, December, 2002.

Lutz E. Fractional Langevin equation // Phys. Rev. E, **64**, 1106 (2001).

Machado J. A. T., Jesus I. S., Galhano A., Cunha J. B. Fractional order electromagnetics // Signal Processing **86**, 2637-2644 (2006).

Machado J. A. T., Jesus I. S., Calhano A. et al. Electrical skin phenomena: A fractional calculus analysis // In: Advances in Fractional Calculus. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Machado J. A. T.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 323-332.

Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering // Critical reviews in biomedical engineering **32**, 1-104 (2004).

Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering, part 2 // Critical reviews in biomedical engineering **32**, 105-193 (2004).

Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering, part 3 // Critical reviews in biomedical engineering **32**, 195-377 (2004).

Magin R. L., Abdullah O., Baleanu D., Zhou X. J. Anomalous diffusion expressed through fractional order differential operators in the Bloch-Torrey equation // J. of Magnetic Resonance **190**, 255-270 (2008).

Mainardi F. Fractional relaxation and fractional diffusion equations of fractional

order // In: ISth IMACS World Congress, vol. 1, Atlanta, Ames, W. F. (Ed.), 329-333 (1994).

Mainardi F. On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation // In: Waves and Stability in Continuous Media, eds: S.Rionero, T. Ruggeri, World Scientific, Singapore, 246-251 (1994).

Mainardi F. Fractional relaxation in unelastic solids // J. Alloys and Compounds 211/212, 534-538 (1994).

Mainardi F. Fractional diffusive waves in viscoelastic solids // In: Nonlinear Waves in Solids J.L. Wegner and F.R. Norwood (Editors), ASME book No AMR **137**, Fairfield NJ, 93-97 (1995).

Mainardi F. The time-fractional diffusion-wave equation // Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofizika **38**, (1-2), 20-36 (1995). *Mainardi F.* Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena // Chaos, Solitons and Fractals **7**, 1461-1477 (1996).

Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Applied Math. Lett. **9**, 23-28 (1996).

Mainardi F. Fractional calculus: some basic problems in continuum and statistical mechanics // In: Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics, Carpinteri A, Mainardi F (eds), Springer Verlag, Vienna – New York, 291-348 (1997).

Mainardi F. Applications of fractional calculus in mechanics // In: Transform Method and Special Functions, Varna'96, Bulgarian Academy of Sciences. Ed. by Rusev P., Dimovski I., Kiryakova V. – Sofia, 1998, pp. 309-334.

Mainardi F. Linear viscoelasticity, Chapter 4 // In: Acoustic Interactions with Submerged Elastic Structures, Part IV: Nondestructive Testing, Acoustic Wave Propagation and Scattering, A. Guran, A. Boström, O. Leroy and G. Maze (Editors), World Scientific, Singapore, 2002, 97-126.

Mainardi F. Applications of integral transforms in fractional diffusion processes // Integral Transform. Spec. Functions **15**, 477-484 (2004).

Mainardi F., Bonetti E. The application of real-order derivatives in linear viscoelasticity // Rheologica Acta **26** Suppl., 64-67 (1988).

Mainardi F., Gorenflo R., Moretti D., Paradisi P. Random walks models for time-fractional diffusion // Emergent Nature. Patterns, Growth and Scaling in the Sciences, ed. M.M.Novak, World Scientific, Singapore, 2001, pp. 185-195.

Mainardi F., Luchko Yu., Pagnini G. The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation // Frac. Cal. Appl. Anal. **4**, 153-192 (2001).

Mainardi F., Pagnini G. Space-time fractional diffusion: exact solutions and probability interpretation // In: «WASCOM 2001» – 11th Conference on Waves and Stability in Continuous Media, World Sci. Publishing, River Edge, New Jersey,

2002, pp. 296-301.

Mainardi F., Pagnini G. The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation // *Applied Math. and Comp.* **141**, 51-62 (2003).

Mainardi F., Pagnini G. The role of the Fox-Wright functions in fractional sub-diffusion of distributed order // *J. of Comp. and Applied Math.* **207**, 245-257 (2007).

Mainardi F., Pagnini G., Gorenflo R. Mellin transform and subordination laws in fractional diffusion processes // *Frac. Cal. Appl. Anal.* **6**, 441-459 (2003).

Mainardi F., Pagnini G., Gorenflo R. Some aspects of fractional diffusion equations of single and distributed order // *Applied Math. and Comp.* **187**, 295-305 (2007).

Mainardi F., Pagnini G., Saxena R. K. Fox H-functions in fractional diffusion // *J. of Comp. and Applied Math.* **178**, 321-331 (2005).

Mainardi F., Paradisi P. Fractional diffusive waves // *J. Comp. Acoustics* **9**, 1417-1436 (2001).

Mainardi F., Paradisi P., Gorenflo R. Probability distributions generated by the fractional diffusion equation // In: *Int. Workshop on Econophysics*. Ed. by *Kertesz J., Kondor I.* – Dordrecht: Kluwer Acad Publishers, 1998.

Mainardi F., Raberto M., Gorenflo R., Scalas E. Fractional calculus and continuous-time finance II: the waiting time distribution // *Physica A* **287**, 468-481 (2000).

Mainardi F., Servizi G., Turchetti G. On the propagation of seismic pulses in a porous elastic solid // *J. Geophys.* **43**, 83-94 (1977).

Mainardi F., Tomirotti M. On a special function, arising in the time fractional diffusive-wave equation // In: *Transform methods and Special Functions* (eds. *P.Rusev, I.Dimovsky and V.Kiryakova*), Science Culture Technology, Singapore, 1995, pp. 171-183.

Mainardi F., Tomirotti M. Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions // *Ann. Geofis.*, **40**, 1311-1328 (1997).

Makris N., Constantinou M. C. Fractional derivative Maxwell model for viscous dampers // *J. Struct. Engrg. ASCE*, **117**, 2708-2724 (1991).

Makris N., Constantinou M. C. Spring-viscous damper systems for combined seismic and vibration isolation // *Earthq. Engrg. Struct. Dynam.* **21**, 649-664 (1992).

Makris N., Constantinou M. C. Models of viscoelasticity with complex-order derivatives // *J. Engrg. Mech. ASCE* **119**, 1453-343 (1993).

Makris N., Dargush G. F., Constantinou M. C. Dynamic analysis of generalized viscoelastic fluids // *ASCE J. Engrg. Mech.* **119**, 1663-1679 (1993).

Malacarne L. C., Mendes R. S., Lenzi E. K., Lenzi M. K. General solution of the

diffusion equation with a nonlocal diffusive term and a linear force term // *Phys. Rev. E* **74**, 042101 (2006).

Malti R., Sabatier J. Time-domain system identification using fractional models: a benchmark // IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications, FDA'04, EN-SEIRB, Bordeaux, 19-21 July, 2004.

Mancinelli R., Vergni D., Vulpiani A. Front propagation in reactive systems with anomalous diffusion // *Physica D* **185** 175-195 (2003).

Matsuuchi K. Description of arbitrary deformation of deep water waves with fractional derivatives // *Fluid Dynamics Research* **25**, 113-128 (1999).

Matsuzaki T., Nakagawa M. A chaos neuron model with fractional differential equation // *J. Phys. Soc. Japan* **72**, 2678-2684 (2003).

Meerschaert M. M., Benson D. A., Baumer B. Multidimensional advection and fractional dispersion // *Phys. Rev. E* **59**, 5026-5028 (1999).

Meerschaert M. M., Benson D. A., Baeumer B. Multidimensional advection and fractional dispersion // *Phys. Rev. E* **59**, 5026-5028 (1991).

Meerschaert M. M., Benson D. A., Baeumer B. Operator Levy motion and multiscaling anomalous diffusion // *Phys. Rev. E* **63**, 021112 (2001).

Meerschaert M. M., Benson D. A., Scheffler H. P., Baeumer B. Stochastic solution of space-time fractional diffusion equations // *Phys. Rev. E* **65**, 1103/1-4 (2002).

Meerschaert M. M., Benson D. A., Scheffler H. P., Becker-Kern P. Governing equations and solutions of anomalous random walk limits // *Phys. Rev. E* **66**, 060102/1-4 (2002).

Meerschaert M. M., Mortensen J., Wheatcraft S. W. Fractional vector calculus for fractional advection-dispersion // *Physica A* **367**, 181-190 (2006).

Meerschaert M. M., Scheffler H. P. Stochastic model for ultraslow diffusion // *Stochastic Processes and their Applications* **116**, 1215-1235 (2006).

Meerschaert M. M., Scheffler H. P., Tadjeran C. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation // *J. of Computational Physics* **211**, 249-261 (2006).

Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection-dispersion flow equations // *J. of Comp. and Applied Math.* **172**, 65-77 (2004).

Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // *Applied Numerical Math.* **56**, 80-90 (2006).

Mendes G. A., Lenzi E. K., Mendes R. S., da Silva L. R. Anisotropic fractional diffusion equation // *Physica A* **346**, 271-283 (2005).

Metzler R., Barkai E., Klafter J. Anomalous diffusion and relaxation close to thermal equilibrium: A fractional Fokker-Planck equation approach // *Phys.Rev.Lett.* **82**, 3563-3567 (1999).

Metzler R., Barkai E., Klafter J. Anomalous transport in disordered systems under the influence of external fields // *Physica A* **266**, 343-350 (1999).

Metzler R., Barkai E., Klafter J. Deriving fractional Fokker-Planck equations from a generalised master equation // *Europhys. Lett.* **46**, 431-436 (1999).

Metzler R., Compte A. Stochastic foundation of normal and anomalous Cattaneo-type transport // *Physica A* **268**, 454-468 (1999).

Metzler R., Compte A. Generalized diffusion-advection schemes and dispersive sedimentation: A fractional approach // *J. Phys. Chem. B* **104**, 3858-3865 (2000).

Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion // *Physica A* **211**, 13-24 (1994).

Metzler R., Gloeckle W. G., Nonnenmacher T. F., West B. J. Fractional tuning of the Riccati equation // *Fractals* **5**, 597 (1997).

Metzler R., Klafter J. Accelerating Brownian motion: A fractional dynamics approach to fast diffusion // *Europhys. Lett.*, **51**, 492-498 (2000).

Metzler R., Klafter J. The fractional Fokker-Planck equation: Dispersive transport in an external force field // *J. Molec. Liquids*, **86**, 219-228 (2000).

Metzler R., Klafter J. From a generalized Chapman-Kolmogorov equation to the fractional Klein-Kramers equation // *J. Phys. Chem. B* **104**, 3851-3857 (2000).

Metzler R., Klafter J. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach // *Phys. Reports* **339**, 1-77 (2000).

Metzler R., Klafter J. Boundary value problem for fractional diffusion equations // *Physica A* **278**, 107-125 (2000).

Metzler R., Klafter J. Kramers' escape problem with anomalous kinetics: non-exponential decay of the survival probability // *Chem. Phys. Lett.* **321**, 238-242 (2000).

Metzler R., Klafter J. Subdiffusion transport close to thermal equilibrium: From the Langevin equation to fractional diffusion // *Phys. Rev. E* **61**, 6308-6311 (2000).

Metzler R., Klafter J. Levy meets Boltzmann: strange initial conditions for Brownian and fractional Fokker-Planck equations // *Physica A* **302**, 290-296 (2001).

Metzler R., Klafter J. From stretched exponential to inverse power-law: fractional dynamics, Cole-Cole relaxation processes, and beyond // *J. Non-Crystalline Solids* **305**, 81-87 (2002).

Metzler R., Klafter J. The restaurant at the end of the random walk: recent

developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics // *Physics A: Math. Gen.* **37**, 161-208 (2004).

Metzler R., Klafter J., Sokolov I. M. Anomalous transport in external fields: Continuous time random walks and fractional diffusion equations extended // *Phys. Rev. E* **58**, 1621-1633 (1998).

Metzler R., Nonnenmacher T. F. Fractional diffusion: exact representations of spectral functions // *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 1089-1093 (1997).

Metzler R., Nonnenmacher T. F. Fractional diffusion, waiting-time distributions, and Cattaneo-type equations // *Phys. Rev. E* **57**, 409-414 (1998).

Metzler R., Nonnenmacher T. F. Space- and time-fractional diffusion and wave equations, fractional Fokker-Planck equations, and physical motivation // *Chem. Physics* **284**, 67-90 (2002).

Metzler R., Nonnenmacher T. F. Fractional relaxation processes and fractional rheological models for the description of a class of viscoelastic materials // *Int. J. Plasticity* **19**, 941-959 (2003).

Metzler R., Schick W., Kilian H.-G., Nonnenmacher T. F. Relaxation in filled polymers: a fractional calculus approach // *J. Chem. Phys.* **103**, 7180-7186 (1995).

Metzler R., Sokolov I. M. Superdiffusive Klein-Kramers equation: Normal and anomalous time evolution and Levy walk moments // *Europhys. Lett.* **58**(4), 482-488 (2002).

Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

Milovanov A. V. Stochastic dynamics from the fractional Fokker-Planck-Kolmogorov equation: Large-scale behavior of the turbulent transport coefficient // *Phys. Rev. E* **63**, 047301/1-4 (2001).

Milovanov A. V., Rasmussen J. J. Fractional generalization of the Ginzburg-Landau equation: an unconventional approach to critical phenomena in complex media // *Phys. Lett. A* **337**, 75-80 (2005).

Milovanov A. V., Rasmussen J. J., Pypdal K. Stretched exponential decay functions from a self-consistent model of dielectric relaxation // *Phys. Lett. A*, doi:10.1016/j.physleta.2007.11.025 (2007).

Mo D., Lin Y. Y., Tan J. H., Yu Z. X., Zhou G. Z., Gong K. C., Ghang G. P., He X.-F. Ellipsometric spectra and fractional derivative spectrum analysis of polyaniline films // *Thin Solid Films* **234**, 468-470 (1993).

Molchanov S. A., Surgailis D., Woyczynski W. A. The large-scale structure of the universe and quasi-Voronoi tessalation of shock fronts in forced Burgers turbulence in Rd // *The Annals of Applied Probability* **7**, 200-228 (1997).

Molz F. J., Fix G. J., Lu S. A physical interpretation for the fractional derivative

- in Levy diffusion // *Appl. Math. Lett.* **15**, 907-911 (2002).
- Momani S.* An explicit and numerical solutions of the fractional KdV equation // *Math. and Computers in Simulation* **70**, 110-118 (2005).
- Momani S., Odibat Z.* Analytical solution of a time-fractional Navier-Stokes equation by Adomian decomposition method // *Applied Math. and Comp.* **177**, 488-494 (2006).
- Momani S., Odibat Z.* Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics // *Physics Lett. A* **355**, 271-279 (2006).
- Momani S., Odibat Z., Erturk V. S.* Generalized differential transform method for solving a space- and time-fractional diffusion-wave equation // *Physics Lett. A* **370**, 379-387 (2007).
- Momani S., Qaralleh R.* Numerical approximations and Pade approximants for a fractional population growth model // *Applied Mathematical Modelling* **31**, 1907-1914 (2007).
- Momani S.* An algorithm for solving the fractional convection-diffusion equation with nonlinear source term // *Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **12**, 1283-1290 (2007).
- Moshrefi-Torbati M., Hammond J. K.* Physical and geometrical interpretation of fractional operators // *J. Franklin Inst.* **335B**, 1077-1086 (1998).
- Muslih S. I., Baleanu D.* Hamiltonian formulation of systems with linear velocities within Riemann-Liouville fractional derivatives // *J. of Mathematical Analysis and Applications* **304**, 599-606 (2005).
- Muslih S. I., Baleanu D.* Fractional multipoles in fractional space // *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **8**, 198-203 (2007).
- Muslih S. I., Baleanu D., Rabei E. M.* Gravitational potential in fractional space // *Central European J. of Physics* **5**, 285-292 (2007).
- Muslih S. I., Baleanu D., Rabei E. M.* Fractional Hamilton's equations of motion in fractional time // *Central European J. of Physics* **5**, 549-557 (2007).
- Naber M.* Distributed order fractional sub-diffusion // *Fractals* **12**, 23-32 (2004).
- Naber M.* Time fractional Schrodinger equation // *J. of Mathematical Physics* doi:10.1063/1.1769611 (2004).
- Nadeem S.* General periodic flows of fractional Oldroyd-B fluid for an edge // *Physics Lett. A* **368**, 181-187 (2007).
- Naqvi S. A., Naqvi Q. A., Hussain A.* Modelling of transmission through a chiral slab using fractional curl operator // *Optics Comm.* **266**, 404-406 (2006).
- Narahary Achar B. N., Hanneken J. W.* Dynamic response of the fractional relaxor-oscillator to a harmonic driving force // In: *Advances in Fractional*

Calculus. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Machado J. A. T.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 243-256.

Nasuno H., Shimizu N., Fukunaga M. Fractional derivative consideration on non-linear viscoelastic statical and dynamical behavior under large pre-displacement // In: *Advances in Fractional Calculus*. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Machado J. A. T.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, Dordrecht, the Netherlands, 2007, pp. 363-376.

Nigmatullin R. R. To the theoretical explanation of the «universal response» // *Phys. Stat. Sol.(b)* **123**, 739-745 (1984).

Nigmatullin R. R. On the theory of relaxation for systems with «remnant memory» // *Phys. Stat. Sol.(b)* **124**, 389-393 (1984).

Nigmatullin R. R. The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // *Phys. Stat. Sol.(b)* **133**, 425-430 (1986).

Nigmatullin R. R. Theory of dielectric relaxation in non-cristalline solids: from a set of micromotions to the averaged collective motion in the mesoscale region // *Physica B* **358**, 201-215 (2005).

Nigmatullin R. R. Fractional kinetic equations and universal decoupling of a memory function in mesoscale region // *Physica A* **363**, 282-298 (2006).

Nigmatullin R. R., Alekhin A. P. Quasi-fractals: New possibilities in description of disordered media // In: *Advances in Fractional Calculus*, *J. Sabatier, O. P. Agraval, J. A. Tenreiro Machado* (eds), Springer, Dordrecht, the Netherlands, 377-388 (2007).

Nigmatullin R. R., Dissado L. A., Soutougin N. N. A fractal pore model for Archie's law in sedimentary rocks // *J. Phys. D: Appl. Phys.* **25**, 32-37 (1992).

Nigmatullin R. R., Le Mehaute A. The geometrical and physical meaning of the fractional integral with complex exponent // *Int. J. of Science. Georesources* **1**, 2-9 (2004).

Nigmatullin R. R., Le Mehaute A. Is there geometrical/physical meaning of the fractional integral with complex exponent? // *J. of Non-Crystalline Solids* **351**, 2888-2899 (2005).

Nigmatullin R. R., Nelson S. O. Recognition of the "fractional"kinetics in complex systems: Dielectric properties of fresh fruits and vegetables from 0.01 to 1.8 GHz // *Signal Processing* **86**, 2744-2759 (2006).

Nigmatullin R. R., Osokin S. I. Signed processing and recognition of the true kinetic equations containing non-integer derivatives from raw dielectric data // *Signal Processing* **83**, 2433-2453 (2003).

Nigmatullin R. R., Osokin S. I., Smith G. The justified data-curve fitting approach: recognition of the new type of kinetic equations in fractional derivatives from analysis of raw dielectric data // *J. of Physics D: Applied Physics* **36**, 2281-2294 (2003).

Nigmatullin R. R., Toboev V. A., Smith G., Butler P. Statistical detection of the hidden distortions in diffusive spectra // *J. Phys. D: Appl. Phys.* **36**, 1044-1052 (2003).

Nigmatullin R. R., Trujillo J. J. Mesoscopic fractional kinetic equations versus a Riemann-Liouville integral type // In: *Advances in Fractional Calculus*, J. Sabatier, O. P. Agraval, J. A. Tenreiro Machado (eds), Springer, Dordrecht, the Netherlands, 2007, pp. 155-168.

Niklasson G. A. A fractal description of the dielectric response of disordered materials // *J. Phys.: Condens. Matter* **5**, 4233-4242 (1993).

Nishimoto K. *Fractional Calculus: Integration and Differentiation of Arbitrary Order*, vols. I-IV, Descartes Press, Koriyama, 1984-1996.

Nonnenmacher T. F. Fractional integral and differential equations for a class of Lévy-type probability densities // *J. of Physics A: Math. and Gen.* **23**, L697S-L700S (1990).

Nonnenmacher T. F. Fractional relaxation equations for viscoelasticity and related phenomena // *Lect. Notes in Physics* 381 Springer-Verlag, Berlin, 309-320 (1991).

Nonnenmacher T. F., Glöckle W. G. A fractional model for mechanical stress relaxation // *Phil. Mag. Lett.* **64**, 89-93 (1991).

Nonnenmacher T. F., Metzler R. On the Riemann-Liouville fractional calculus and some recent applications // *Fractals* **3**, 557-566 (1995).

Nonnenmacher T. F., Metzler R. Applications of fractional calculus techniques to problems in biophysics // In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 377-428 (2000).

Nonnenmacher T. F., Nonnenmacher D. J. F. Towards the formulation of a non-linear fractional extended irreversible thermodynamics // *Acta Physica Hungarica* **66**, 145-154 (1989).

Novikov V. V., Privalko V. P. Temporal fractal model for the anomalous dielectric relaxation in inhomogeneous media with chaotic structure // *Phys. Rev. E* **64**, 031504-1-11 (2001).

Novikov V. V., Wojciechowski K. W., Privalko V. P. Anomalous dielectric relaxation of inhomogeneous media with chaotic structure // *J. Phys.: Condens. Matter* **12**, 4869-4879 (2000).

Novikov V. V., Wojciechowski K. W., Komkova O. A., Thiel T. Anomalous relaxation in dielectrics. Equations with fractional derivatives // *Materials Science - Poland* **23**, 977-984 (2005).

Odibat Z. M. Rectangular decomposition method for fractional diffusion-wave equations // *Applied Math. and Comp.* **179**, 92-97 (2006).

Odibat Z. M., Momani S. Approximate solutions for boundary value problems of

- time-fractional wave equation // Applied Math. and Comp. **181**, 767-774 (2006).
- Odiat Z. M.* Solitary solutions for the nonlinear dispersive $K(m,n)$ equations with fractional time derivatives // Physics Lett. A **370**, 295-301 (2007).
- Odiat Z., Momani S.* Numerical solution of Fokker-Planck equation with space- and time-fractional derivatives // Physics Lett. A **369**, 349-358 (2007).
- Oldham K. B.* Diffusive transport to planar, cylindrical, and spherical electrodes // J. Electroanal. Chem. **41**, 351-360 (1973).
- Oldham K. B.* Interrelation of current and concentration on electrodes // J. Appl. Electrochem. **21**, 1068-1072 (1991).
- Oldham K. B., Spanier J.* The replacement of Fick's law by a formulation involving semidifferentiation // J. Electroanal. Chem. and Interfacial Electrochem. **26**, 331-341 (1970).
- Oldham K. B., Spanier J.* A general solution of the diffusion equation for semi-infinite geometries // J. Math. Anal. Appl. **39**, 655-669 (1972).
- Oldham K.B., Spanier J.* The Fractional Calculus, Academic Press, New York – London, 1974.
- Olemskoi A. I.* Fractals in condensed matter physics // Physics Reviews **18**, 1-173 (1995).
- Olemskoi A. I.* Fractional-differential equations of motion. arXiv:cond-mat/9906367v1[cond-mat.stat-mech] 24 June (1999).
- Olemskoi A. I., Klepikov V. F.* The theory of spatiotemporal pattern in nonequilibrium systems // Physics Reports **338**, 571-677 (2000).
- Ord G. N.* Fractal space-time and the statistical mechanics of random walks // Chaos, Solitons and Fractals **7**, 821-843 (1996).
- Orsingher E., Beghin L.* Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with brownian time // Probab. Theory Relat. Fields **128**, 141-160 (2004).
- Paradisi P., Chesari R., Mainardi F., Tampieri F.* The fractional Fick's law for non-local transport processes // Physica A **293**, 130-142 (2001).
- Paradisi P., Cesari R., Mainardi F., Maurizi A., Tampieri F.* A generalized Fick's law to describe non-local transport processes // Phys. Chem. Earth **26**, 275-279 (2001).
- Park Y.* Diffusion of a passive impurity through a porous media: fractal model // Fractals **9**, 375-378 (2001).
- Pekalski A., Sznajd-Weron K.* Anomalous Diffusion from Basics to Applications, Springer-Verlag, Berlin (1999).
- Perri S., Zimbaro G.* Levy walks for energetic electrons detected by the Ulysses spacecraft at 5 au // In: Chaos, Complexity and Transport: Theory

and Applications, C. Chandre, X. Leoncini, G. Zaslavsky (eds) World Scientific, Singapore., 309-317.

Picozzi S., West B. J. Fractional Langevin model of memory in financial markets // *Phys. Rev. B* **66**, 6118 (2002).

Pierantozzi T., Vazquez L. An interpolation between the wave and diffusion equations through the fractional evolution equations Dirac like // *J. of Math. Physics* **46**, 113512 (2005).

Piryatinska A., Saichev A. I., Woyczynski W. A. Models of anomalous diffusion: the subdiffusive case // *Physica A* **349**, 375-420 (2005).

Podlubny I. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York – London, 1999.

Podlubny I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation // *Fract. Calc. Appl. Anal.* **5**, 367-386 (2002).

Poinot T., Trigeassous J. C. Parameter estimation of fractional models, application to the modeling of diffusive systems // In: *Proc. 15th IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.

Popov A. V. Fractal motion of electrons with variable weak memory and nonlocality // *Russian Physics J.* **48**, 947-953 (2005).

Povstenko Y. Z. Fractional heat conduction equation and associated thermal stress // *J. Thermal Stresses* **28**, 83-102 (2005).

Povstenko Y. Z. Stresses exerted by a source of diffusion in a case of a non-parabolic diffusion equation // *Int. J. of Engn. Sci.* **43**, 977-991 (2005).

Povstenko Y. Z. Two-dimensional axisymmetric stresses exerted by instantaneous pulses and sources of diffusion in an infinite space in a case of time-fractional diffusion equation // *Int. J. of Solids and Structures* **44**, 2324-2348 (2007).

Povstenko Y. Z. Fractional radial diffusion in a cylinder // *J. of Molecular Liquids* **137**, 46-50 (2008).

Povstenko Y. Z. Fundamental solutions to central symmetric problems for fractional heat conduction equation and associated thermal stresses // *J. Thermal Stresses* **31**, 1-22 (2008).

Povstenko Y. Z. Time-fractional radial diffusion in a sphere // *Nonlinear Dynamics* **53**, 55-65 (2008).

Povstenko Y. Z. Fundamental solutions to three-dimensional diffusive-wave equation and associated diffusive stresses // *Chaos, Solitons and Fractals* **36**, 961-972 (2008).

Povstenko Y. Z. Signalling problem for time-fractional diffusive-wave equation in a half-plane // *FCAA* **11**, 2008.

Pritz T. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials // *J. of Sound and Vibration* **195**, 103-115 (1996).

Pritz T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials // *J. of Sound and Vibration* **265**, 935-952 (2003).

Qi H., Xu M. Unsteady flow of viscoelastic fluid with fractional Maxwell model in a channel // *Mechanics Res. Comm.* **34**, 210-212 (2007).

Qiu W.-Y., Lu J. Fractional integrals and fractal structure of memory sets // *Phys. Lett. A* **272**, 353-358 (2000).

Rabei E. M., Almayteh I., Muskih I. S., Baleanu D. Hamilton-Jacobi formulation of systems within Caputo's fractional derivative // *Phys. Ser.* **77**, 015101 (2008).

Rabei E. M., Nawafleh K. I., Hijjawi R. S., Mustih S. I., Baleanu D. The Hamilton formalism with fractional derivatives // *J. of Mathematical Analysis and Applications* **327**, 891-897 (2007).

Ragot B. R., Kirk J. G. Anomalous transport of cosmic ray electrons // *Astron. Astrophys.* **327**, 432-440 (1997).

Ramrakhiani D. S., Lesieutre G. A., Smith E. C. Modeling of elastomeric materials using nonlinear fractional derivative and continuously yielding friction elements // *Int. J. of Solids and Structures* **41**, 3929-3948 (2004).

Rangarajan G., Ding M. Z. Anomalous diffusion and the first passage time problem // *Phys. Rev. E* **62**, 120-133 (2000).

Ray S. S., Bera R. K. Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition method // *Appl. Math. and Comp.* **168**, 398-410 (2005).

Ray S. S., Chaudhuri K. S., Bera R. K. Application of modified decomposition method for the analytical solution of space fractional diffusion equation // *Applied Math. and Comp.* **196**, 294-302 (2008).

Reis C., Tenreiro Machado J. A., Cunha J. B. A fractional calculus perspective in the evolutionary design of combinational circuits // In: *Advances in Fractional Calculus*, J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado (eds), Springer, Dordrecht, the Netherlands, 2007, pp. 305-322.

Ren F. Y., Liang J. R., Qiu W. Y., Wang X. T., Xu Y., Nigmatullin R. R. An anomalous diffusion model in an external force fields on fractals // *Phys. Lett. A* **312**, 187-197 (2003).

Ren F. Y., Liang J. R., Qiu W. Y., Xu Y. Fractional Fokker-Planck equation on heterogeneous fractal structures in external force fields and its solutions // *Physics A: Stat. Mech. Appl.* **326**, 430-440 (2003).

Ren F. Y., Liang J. R., Qiu W. Y., Xu Y. Universality of stretched Gaussian asymptotic behaviour for the fractional Fokker-Planck equation in external force fields // *Physics A: Math. Gen.* **36**, 7533-7543 (2003).

- Ren F.-Y., Liang J.-R., Wang X.-T., Qiu W.-Y.* Integrals and derivatives on net fractals // *Chaos, Solitons and Fractals* **16**, 107-117 (2003).
- Ren F.-Y., Qiu W.-Y., Liang J. R., Wang X.-T.* Determination of memory function and flux on fractals // *Phys. Lett. A* **288**, 79-83 (2001).
- Ren F. Y., Qiu W. Y., Xu Y., Liang J. R.* Answer to an open problem proposed by E Barkai and J Klafter // *Physics A: Math. Gen.* **37**, 9919-9922 (2003).
- Ren F. Y., Liang J. R., Qiu W. Y., Xiao J. B.* Asymptotic behavior of a fractional Fokker-Planck-type equation // *Physica A* **373**, 165-173 (2007).
- Ren F.-Y., Yu Z.-G., Su F.* Fractional integral associated to the self-similar set or the generalized self-similar set and its physical interpretation // *Phys. Lett. A* **219**, 59-68 (1996).
- Ren F. Y., Yu Z. G., Zhou J., Le Mehaute A., Nigmatullin R. R.* The relationship between the fractional integral and the fractal structure of a memory set // *Physica A* **246**, 419-429 (1997).
- Reti'ere N., Ivanos M.* Modeling of electric machines by implicit derivative half-order systems // *IEEE Power Engineering Review* **18**, 62-64 (1998).
- Reyes-Melo E., Martinez-Vega J., Guerrero-Salazar C., Ortiz-Mendez U.* Application of fractional calculus to the modeling of dielectric relaxation phenomena in polymeric materials // *J. Appl. Polym. Science* **98**, 923-935 (2005).
- Riande E., Compan V., Diaz-Calleja R.* Analysis of dielectric α relaxation of supercooled liquids using Extended Irreversible Thermodynamics // *J. Molec. Liquids* **121**, 115-120 (2005).
- Rida S. Z., El-Sherbiny H. M., Arafa A. A. M.* On the solution of the fractional nonlinear Schroedinger equation // *Phys. Lett. A* **372**, 553-558 (2008).
- Riewe F.* Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics // *Phys. Rev. E* **53**, 1890-1899 (1996).
- Riewe F.* Mechanics with fractional derivatives // *Phys. Rev. E* **55**, 3581-3592 (1997).
- Rocco A., West B. J.* Fractional calculus and the evolution of fractal phenomena // *Physica A* **265**, 535-546 (1999).
- Rogers L.* Operators and fractional derivatives for viscoelastic constitutive equations // *J. of Rheology* **27**, 351-372 (1983).
- Roman H. E.* Structure of random fractals and the probability distribution of random walks // *Phys. Rev. E* **51**, 5422-5425 (1995).
- Roman H. E., Alemany P. A.* Continuous-time random walks and the fractional diffusion equation // *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 3407-3410 (1994).
- Roman H. E., Giona M.* Fractional diffusion equation on fractals: three-dimensional

case and scattering function // J. Phys. A **25**, 2107-2117 (1992).

Roman H. E. How does the diffusion equation on fractals look? // Fractals **12**, 149-156 (2004).

Roop J. P. Computational aspects of FEM approximation of fractional advection dispersion equations on bounded domains in \mathbb{R}^2 // J. of Comp. and Applied Math. **193**, 243-268 (2006).

Rossato R., Lenzi M. K., Evangelista L. R., Lenzi E. K. Fractional diffusion equation in a confined region: surface effects and exact solutions // Phys. Rev. E **76**, 032102 (2007).

Rosenblatt M. Fractional integrals and stationary processes and the central limit theorems // J. Appl. Prob. **13**, 723-732 (1976).

Ross B. A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus // Lecture Notes in Mathematics 457, Springer-Verlag, New York, 1975, pp. 1-36.

Ross B. (ed.) Fractional Calculus and its Applications // Lecture Notes in Mathematics 457, Springer Verlag, Berlin, 1975.

Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Appl. Mech. Rev. **50**, 15-67 (1997).

Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional derivatives to the analysis of damped vibrations of viscoelastic single mass system // Acta Mech. **120**, 109-125 (1997).

Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. A new method for solving dynamic problems of fractional derivative viscoelasticity // Int. J. of Engineering Science **39**, 149-176 (2001).

Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Analysis of damped vibrations of linear viscoelastic plates with damping modeled with fractional derivatives // Signal Processing **86**, 2703-2711 (2006).

Rousan A. A., Malkawi E., Rabei E. M., Widyan H. Applications of fractional calculus to gravity // FCAA **5**, 155-168 (2002).

Rubin B. Fractional Integrals and Potentials. – Harlow: Longman, Edinburgh Gate, 1996.

Rudinger F. Tuned mass damper with fractional derivative damping // Engineering Structures **28**, 1774-1779 (2006).

Ruge P., Trinks C. Representation of radiation damping by fractional time derivatives // Earthquake Engng. and Struct. Dynamics **32**, 1099-1116 (2003).

Ruge P., Trinks C. Consistent modelling of infinite beams by fractional dynamics // Nonlinear Dynamics **38**, 267-284 (2004). *Ryabov Y. E.* Behaviour of fractional

diffusion at the origin // *Phys. Rev. E* **68**(13), 102 (2003).

Ryabov Y. E., Feldman Y. Novel approach to the analysis of the non-Debye dielectric spectrum broadening // *Physica A* **314**, 370-378 (2002).

Ryabov Y. E., Puzenko A. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation // *Phys. Rev. B* **66**, 184201 (2002).

Sahimi M., Tajer S. E. Self-affine fractal distributions of the bulk density, elastic moduli, and seismic wave velocities of rock // *Phys. Rev. E* **71**, 046301 (2005).

Saichev A. I., Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equations: solutions and applications // *Chaos* **7**, 753-764 (1997).

Saichev A. I., Woyczynsky W. A. Distributions in the Physical and Engineering Sciences. Volume 2: Linear, Nonlinear, Random and Fractal Dynamics in Continuous Media, Birkhaeser, Boston, 2004.

Sajed E. A. Anomalous diffusion on fractal objects: additional analytic solutions // *Chaos, Solitons and Fractals* **11**, 1369-1376, 2000.

Sakakibara S. Relaxation properties of fractional derivative viscoelasticity models // *Nonlinear Analysis* **47**, 5449-5454 (2004).

Muslih S. I., Baleanu D., Rabei E. Hamiltonian formulation of classical fields within Riemann-Liouville fractional derivatives // *Physica Scripta* **73**, 436-438 (2006).

Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Fractional Integrals and Derivatives – Theory and Applications, Gordon and Breach, New York, 1993.

San Jose Martinez F., Pachepsky Y. A., Rawls W. J. Fractional advective-dispersive equation as a model of solute transport in porous media // In: *Advances in Fractional Calculus*. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Machado J. A. T.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 199-212.

Sanchez R., Carreras B. A., van Milligen B. Ph. Fluid limit of nonintegrable continuous-time random walks in terms of traditional differential equations // *Phys. Rev. E* **71**, 011111 (2005).

Sanches R., Carreras B. A., Garsia L., Mier J. A., van Milligen B. Ph., Newman D. E. Non-diffusive transport in numerical simulations of magnetically-confined turbulent plasmas // In: *Chaos, Complexity and Transport: Theory and Applications*. Ed. by *Chandre C., Leoncini X., Zaslavsky G.* – Singapore: World Scientific, 2008, pp. 189-206.

Santanu S. R. Exact solutions for time-fractional diffusion-wave equations by decomposition method // *Physica Scripta* **75**, 53-61 (2007).

Saxena R. K., Mathai A. M., Haubold H. J. Unified fractional kinetic equation and a fractional diffusion equation // *Astrophys. Space Science* **290**, 299-310 (2004).

Scalas E., Gorenflo R., Mainardi F., Raberto M. Revising the derivation of the fractional diffusion equation // *Fractals* **11**, 281-289 (2003).

Schaefer I., Kempfle S. Impulse response of fractional damped systems // *Nonlinear Dynamics* **38**, 61-68 (2004).

Schaefer I., Kruger K. Modelling of coils using fractional derivatives // *J. of Magnetism and Magnetic Materials* **307**, 91-98 (2006).

Scher H., Margolin G., Metzler R., Klafter J., Berkowitz B. The dynamical foundation of fractal stream chemistry: The origin of extremely long retention times // *Geophys. Research Lett.* **29**, 1029 (2002).

Schertzer D., Larcheveque M., Duan J., Yanovsky V. V., Lovejoy S. Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Levy stable noises // *J. Math. Phys.*, **42**, 200-212 (2001).

Schiessel H., Friedrich Chr., Blumen A. Applications to problems in polymer physics and rheology // In: *Applications of Fractional Calculus in Physics*. Singapore: World Scientific, 2000, pp. 331-376.

Schiessel H., Metzler R., Blumen A., Nonnenmacher T. F. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions // *J. Phys. A: Math. Gen.* **28**, 6567-6584 (1995).

Schneider W. R. Fractional diffusion // In: *Dynamics and Stochastic Processes*, vol. 355 of *Lect. Notes in Phys.*, Springer-Verlag, Lisbon, 1988, pp. 276-286.

Schmidt M. G. M., Sagues F., Sokolov I. M. Mesoscopic description of reactions for anomalous diffusion: a case study // *J. of Physics: Condensed Matter* **19**, 065118 (2007).

Schneider W. R., Wyss W. Fractional diffusion and wave equations // *J. Math. Phys.* **30**, 134-144 (1989).

Schot A., Lenzi M. K., Evangelista L. R., Malacarne L. C., Mendes R. S., Lenzi E. K. Fractional diffusion equation with an absorbent term and a linear external force: Exact solution // *Physics Lett. A*, **366**, 346-350 (2007).

Schumer R., Benson D. A., Meerschaert M. M., Wheatcraft S. W. Eulerian derivation of fractional advection-dispersion equation // *J. Contain. Hydrol.* **48**, 69-88 (2001).

Schumer R., Benson D. A., Meerschaert M. M., Baeumer B. Fractal mobile/immobile solute transport // *Water Resources Res.*, **39**, 1296 (2003).

Schumer R., Benson D. A., Meerschaert M. M., Baeumer B. Multiscaling fractional advection-dispersion equations and their solutions // *Water Resources Res.* **39**, 1022 (2003).

Sebaa N., Fellah Z. E. A., Lauriks W., Depollier C. Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone // *Signal Processing* **86**, 2668-2677 (2006).

Seki K., Wojcik M., Tachiyi M. Dispersive-diffusion-controlled distance-dependent

recombination in amorphous semiconductors // J. of Chem. Physics **124**, 044702 (2006).

Seki K., Shushin A. I., Wojcik M., Tachiya M. Specific features of the kinetics of fractional-diffusion assisted geminate reactions // J. of Physics: Condensed Matter **19**, 065117 (2007).

Seredynska M., Hanyga A. Nonlinear Hamiltonian equations with fractional damping // J. Math. Phys. **4**, 1291-2156 (2000).

Serrier P., Moreau X., Oustaloup A. Limited-bandwidth fractional differentiator: synthesis and application in vibration isolation // In: Advances in Fractional Calculus. Ed. by *Sabatier J., Agrawal O. P., Tenreiro Machado J. A.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 287-302.

Seshadri V., West B. J. Fractal dimensionality of Lévy processes // Proc.Natl.Acad.Sci.USA **79**, 4501-4505 (1982). *Shen F., Tan W., Zhao Y., Masuoka T.* The Rayleigh-Stokes problem for a heated generalized second grade fluid with fractional derivative model // Nonlinear Analysis: Real World Applications **7**, 1072-1080 (2006).

Shimizu N., Zhang W. Fractional calculus approach to dynamic problems of viscoelastic materials // JSME Int. J. C, **42**, 825-837 (1999).

Shinbrot M. Fractional derivatives of solutions of Navier-Stokes equations // Arch. Rational Mech. Anal. **40**, 139-154 (1971).

Shlesinger M. F., Klafter J., Zumofen G. M. Above, below and beyond Brownian motion // Am. J. Phys **67**, 1253-1259 (1999).

Shlesinger M. F., West B. J., Klafter J. Lévy dynamics of enhanced diffusion: an application to turbulence // Phys. Rev. Lett. **58**, 1100-1103 (1987).

Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J. Strange kinetics // Nature **363**, 31-37 (1993).

Silva A. T., Lenzi E. K., Evangelista L. R., Lenzi M. K., da Silva L. R. Fractional nonlinear diffusion equation, solutions and anomalous diffusion // Physica A **375**, 65-71 (2007).

Sjoberg M., Kari L. Non-linear behavior of a rubber isolator system using fractional derivatives // Vehicle Syst. Dynam. **37**, 217-236 (2002).

Skvortsova N. N., Batanov G. M., Petrov A. E., Pshenichnikov A. A., Sarksyan K. A., Kharchev N. K., Khohlov Yu. V., Bening V. E., Korolev V. Yu., Saenko V. V., Uchaikin V. V. Structural plasma turbulence and anomalous non-Brownian diffusion // In: Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence. Ed. by *Korolev V. Yu., Skvortsova N. N.* – Leiden, Boston: VSP, 2006, pp. 37-62.

Smírnov I. P., Virovlyansky A. L., Zaslavsky G. M. Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics // Phys. Rev. E **64**, 6221 (2001).

Smit W., de Vries H. Rheological models containing fractional derivatives // *Rheologica Acta* **9**, 525-534 (1970).

Smit W., de Vries H. Rheological models containing fractional derivatives // *Rheologica Acta* **9**, 525-534 (1970).

So F., Liu K. L. A study of the subdiffusive fractional Fokker-Planck equation of bistable systems // *Physica A* **331**, 378-390 (2004).

Sokolov I. M. Lévy flights from a continuous-time process // *Phys. Rev. E* **63**, 011104(10 pages) (2001).

Sokolov I. M. Thermodynamics and fractional Fokker-Planck equations // *Phys.Rev. E* **63**, 056111 (2001).

Sokolov I. M., Blumen A., Klafter J. Dynamic of annealed systems under external fields: CTRW and the fractional Fokker-Planck equations // *Europhys. Lett.* **56**, (2) 175-180 (2001).

Sokolov I. M., Blumen A., Klafter J. Linear response in complex systems: CTRW and the fractional Fokker-Planck equation // *Physica A* **302**, 268-278 (2001).

Sokolov I. M., Chechkin A. V., Klafter J. Distributed-order fractional kinetics // *Acta Physica Polonica B* **35**, 1323-1341 (2004).

Sokolov I. M., Chechkin A. V., Klafter J. Fractional diffusion equation for a power-law-truncated Lévy process // *Physica A* **336**, 245-251 (2004).

Sokolov P. T., Kauffmann H. F. Excitation trapping in dynamically disordered polymers // *Macromolecules* **31**, 2521 (1999).

Sokolov I. M., Klafter J. From diffusion to anomalous diffusion: A century after Einstein's Brownian motion // *Chaos* **15**, 026103 (2005).

Sokolov I. M., Klafter J., Blumen A. Do strange kinetics imply unusual thermodynamics? // *Phys. Rev. E* **64**, 021107 (2001).

Sokolov I. M., Klafter J., Blumen A. Fractional kinetics // *Physics Today* **55**, 48-54 (2002).

Sokolov I. M., Mai J., Blumen A. Paradoxal diffusion in chemical space for nearest-neighbor walks over polymer chains // *Phys. Rev.Lett.* **79**, 857-860 (1997).

Sokolov I. M., Metzler R. Towards deterministic equations for Levy walks: the fractional material derivative // *Phys. Rev. E* **67**, 010101 (2003).

Sokolov I. M., Metzler R. Non-uniqueness of the first passage time density of Levy random processes // *Physics A: Math. Gen.* **37**, L609-L615 (2004).

Solomon T. H., Weeks E. R., Swinney H. L. Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow // *Phys.Rev.Lett.* **71**, 3975-3978 (1993).

Solomon T. H., Weeks E. R., Swinney H. L. Chatic advection in a two-dimensional

flow: Lévy flights and anomalous diffusion // *Physica D* **76**, 70 (1994).

Solteiro E. J., Tenreiro-Machado J. A., Moura P. B. Fractional order dynamics in a GA planner // *J. Signal Proces.*, **83**, 2377-2386 (2003).

Sommacal L., Melchior P., Cabelguen J. M., Oustaloupe A., Ijspeert A. Fractional multimodels of the gastrocnemius muscle for tetanus pattern // In: *Advances in Fractional Calculus*. Ed. by *Sabatier J., Agraval O. P., Tenreiro Machado J. A.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 271-286.

Song L., Zhang H. Application of homotopy analysis method to fractional KdV-Burgers-Kuramoto equation // *Physics Lett. A* **367**, 88-94 (2007).

Sorrentino S., Fasana A. Finite element analysis of vibrating linear systems with fractional derivative viscoelastic models // *J. of Sound and Vibration* **299**, 839-853 (2007).

Spasic A. M., Lazarevic M. P. Electroviscoelasticity of liquid/liquid interfaces: fractional-order model // *J. of Colloid and Interface Science* **282**, 223-230 (2005).

Srivastava H. M. Fractional calculus and its applications, *Cubo Math. Ed.* **5**, 33-48 (2003).

Srivastava H. M., Saxena R. K. Operators of fractional integration and their applications // *Appl. Math. Comput.* **118**, 1-52 (2001).

Stanislavsky A. A. Memory effects and macroscopic manifestation of F randomness // *Phys. Rev. E* **61**, 4752-4759 (2000).

Stanislavsky A. A. Fractional dynamics from the ordinary Langevin equation // *Phys. Rev. B* **67**, 1111-1122 (2003).

Stanislavsky A. A. Subordinated Brownian motion and its fractional Fokker-Planck equation // *Physica Scripta* **67**, 265-268 (2003).

Stanislavsky A. A. Nonlinear reaction with fractional dynamics // *Applied Math. and Comp.* **174**, 1122-1134 (2006).

Stanislavsky A. A., Weron K. Exact solution of averaging procedure over the Cantor set // *Physica A* **303**, 57-66 (2002).

Stiassnie M. On the application of fractional calculus for the formulation of viscoelastic models // *Appl. Math. Modell.* **3**, 300-302 (1979).

Sugimoto N. Generalized Burgers equations and fractional calculus // In: *Nonlinear wave motion* (ed. A. Jeffrey), Longman Scientific and Technical, 1989, pp. 162-179.

Sugimoto N. Burgers equation with a fractional derivative; hereditary effects on non-linear acoustic waves // *J. Fluid Mech.* **225**, 631-653 (1991).

Sugimoto N. Propagation of nonlinear acoustic waves in a tunnel with an array of Helmholtz resonators // *J. Fluid Mech.* **244**, 55-78 (1992).

Sugimoto N., Kakutani T. Generalized Burgers equation for nonlinear viskoelastic

waves // Wave Motion **7**, 447-459 (1985).

Sung Y. M., Barkai E., Silbey R. J., Lee S. Fractional dynamics approach to diffusion-assisted reactions in disordered media // J. Chem. Phys. **116**, 2338-2341 (2002).

Suzuki N., Biyajima M. Fractional Fokker-Planck equation and oscillatory behavior of cumulant moments // Phys. Rev. E **65**, (2002)

Tarasov V. E. Fractional generalization of Liouville equations // Chaos **14**, 123-127 (2004).

Tarasov V. E. Dynamics of fractal solids // Int. J. of Mod. Physics B **19**, 4103-4114 (2005).

Tarasov V. E. Electromagnetic field of fractal distribution of charged particles // Physics of Plasmas **12**, 082106 (2005).

Tarasov V. E. Fractional Fokker-Planck equation for fractal media // Chaos **15**, 123102 (2005).

Tarasov V. E. Fractional systems and fractional Bogoliubov hierarchy equations // Phys. Rev. E **71**, 011102 (2005).

Tarasov V. E. Fractional generalization of gradient and Hamiltonian systems // J. Phys. A: Math Gen **38**, 5929-5943 (2005).

Tarasov V. E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media // Ann. Phys. **318**, 286-307 (2005).

Tarasov V. E. Wave equation for fractal solid string // Modern Physics Lett. B **19**, 721-728 (2005).

Tarasov V. E. Fractional statistical mechanics // Chaos, **16**, 033108 (2006).

Tarasov V. E. Gravitational field of fractal distribution of particles // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy **94**, 1-15 (2006).

Tarasov V. E. Liouville and Bogoliubov equations with fractional derivatives // Modern Physics Lett. B **21**, 237-248 (2006).

Tarasov V. E. Magnetohydrodynamics of fractal media // Physics of Plasmas **13**, 052107 (2006).

Tarasov V. E. Psi-series solution of fractional Ginzburg–Landau equation // J. of Physics A: Mathematical and General **39**, 8395-8407 (2006).

Tarasov V. E. Fractional variations for dynamical systems: Hamilton and Lagrange approaches // J. of Physics A: Mathematical and General **39**, 8409-8425 (2006).

Tarasov V. E. Fractional derivative as fractional power of derivative // Int. J. of Math. **18**, 281-299 (2007).

Tarasov V. E. Fractional stability, arXiv:0711.2117v1 [physics.class-ph] 14 Nov

(2007).

Tarasov V. E. Fractional equations of Curie-von Schweidler and Gauss law // J. Phys.: Condens. Matter. **20**, 145212 (2008).

Tarasov V. E. Universal electromagnetic waves in dielectric // J. Phys.: Condens. Matter. **20**, 175223 (2008).

Tarasov V. A., Zaslavsky G. M. Fractional Ginzburg-Landau equation for fractal media // Physica A **354**, 249-261 (2005).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction. Chaos doi:10.1063/1.2197167 (2006).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Fractional dynamics of systems with long-range interaction // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation **11**, 885-898 (2006). *Tarasov V. E., Zaslavsky G. M.* Nonholonomic constraints with fractional derivatives // J. of Physics A: Mathematical and General **39**, 9797-9815 (2006).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction // Chaos **16**, 023110 (2006).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Dynamics with low-level fractionality // Physica A **368**, 399-415 (2006).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Conservation laws and Hamilton's equations for systems with long-range interaction and memory, arXiv:math-ph/0703048v1 14 Mar (2007).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Fractional dynamics of systems with long-range space interaction and temporal memory // Physica A **383**, 291-308 (2007).

Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Fractional generalization of Kac integral // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation **13**, 248-258 (2008).

Tatar N. E. The decay rate for a fractional differential equation // J. of Math. Anal. and Appl. **295**, 303-314 (2004).

Tatar N. E. Nonexistence results for a fractional problem arising in thermal diffusion in fractal media // Chaos, Solitons and Fractals **36**, 1205-1214 (2008).

Tatom F. B. The application of fractional calculus to the simulation of stochastic processes // AIAA 89-0792, 27th Aerospace Science Meeting, Reno, Nevada, 1989.

Tatom F. B. The relationship between fractional calculus and fractals // Fractals **3**, 217-229 (1995).

Tiedje T., Rose A. A physical interpretation of dispersive transport in disordered semiconductors // Solid State Comm. **37**, 49 (1981).

Tofghi A. The intrinsic damping of the fractional oscillator // Physica A **329**, 29-34 (2003).

Tofghi A., Pour H. N. ε -expansion and the fractional oscillator // Physica A **374**,

41-45 (2007).

Torvik P. J., Bagley R. L. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials // *J. Appl. Mech.* **51**, 294-298 (1984).

Trinks C., Ruge P. Treatment of dynamic systems with fractional derivatives without evaluating memory-integrals // *Computat. Mech.* **29**, 471-476 (2002).

Tsallis C., Lenzi E. K. Anomalous diffusion: non-linear fractional Fokker-Planck equation // *Chem. Phys.* **284**, 241-347 (2002).

Tsallis C., Lenzi E. K. Anomalous diffusion: Nonlinear fractional Fokker-Planck equation // *Chem. Physics* **287**, 295-295 (2003).

Turchetti G., Usero D., Vazquez L. M. Hamiltonian systems with fractional time derivative // *Tamsui Oxford J. Math. Sci.*, **18**, 31-44 (2002).

Turski A. J., Atamaniuk B., Turska E. Fractional derivative analysis of Helmholtz and paraxial-wave equations, arXiv:physics/0203047v1[physics.optics] (2002).

Uchaikin V. V. Anomalous transport equations and their application to fractal walking // *Physica A* **255**, 65-92 (1998).

Uchaikin V. V. Evolution equations for Levy stable processes // *Int. J. Theor. Physics* **38**, 2377-2388 (1999).

Uchaikin V. V. Small-angle multiple scattering on a fractal system of point scatterers // In: *Paradigms of Complexity*, editor M. Novak, World Scientific, Singapore, 41-49 (2000).

Uchaikin V. V. Montroll-Weiss' problem, fractional equations and stable distributions // *Int. J. Theor. Phys.* **39**, 2087-2105 (2000).

Uchaikin V. V. Subordinated Levy-Feldheim motion as a model of anomalous self-similar diffusion // *Physica A* **305**, 205-208 (2002).

Uchaikin V. V. Multidimensional symmetric anomalous diffusion // *J. Chem. Phys* **88**, 1141-1155 (2002).

Uchaikin V. V. Anomalous diffusion on a one-dimensional fractal Lorentz gas with trapping atoms // In: *Emergent Nature*, Editor M. Novak, World Scientific, New Jersey, 411-421 (2002).

Uchaikin V. V. Relaxation processes and fractional differential equations // *Int. J. Theor. Phys.* **42**, 121-134 (2003).

Uchaikin V. V. The mesofractal universe driven by Rayleigh-Levy walks // *General Relativity and Gravitation* **36**, 1689-1717 (2004).

Uchaikin V. V. If the universe were a Levy-Mandelbrot fractal... // *Gravitation and Cosmology* **10**, 5-24 (2004).

Uchaikin V. V., Zolotarev V. M. Chance and Stability. Stable Distributions and their Applications // Netherlands, Utrecht, VSP, 1999, 570 p.

Uchaikin V. V., Zakharov A. Yu. Monte-Carlo simulations of resonance radiation transport in plasma // In: Stochastic Models of Structural Plasma Turbulence. Ed. by *Korolev V. Yu., Skvortsova N. N.* – Leiden, Boston: VSP, 2006, pp. 167-174.

Uchaikin V. V., Sibatov R. T. Fractional theory for transport in disordered semiconductors // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulations **13**, 715-727 (2008).

Uchaikin V. V., Cahoy D. O., Sibatov R. T. Fractional processes: from Poisson's to branching ones // Int. J. Bifurcation and Chaos **18**, 2717-2725, (2008).

Uchaikin V. V., Sibatov R. T. Fractional calculus for transport in disordered semiconductors // In: Nonlinear Science and Complexity. Ed. by *Luo A. C. J., Dai L., Hamidzadeh H. R.* – Singapore: World Scientific, 2007, pp. 43-54.

Uchaikin V. V., Uchaikin D. V. Memory regeneration phenomenon in fractional depolarization of dielectrics // In: Chaos, Complexity and Transport: Theory and Applications. Ed. by *Chandre C., Leoncini X., Zaslavsky G.* – Singapore: World Scientific, 2008, pp. 337-345.

Usero D., Vazquez L. Fractional derivative. A new formulation for damped systems // In: Localization and Energy Transfer in Nonlinear System – World Scientific, 296-303 (2003).

Valdes-Parada F. J., Alberto Ochoa-Tapia J., Alvarez-Ramirez J. Effective medium equation for fractional Cattaneo's diffusion and heterogeneous reaction in disordered porous media // Physica A **369**, 318-328 (2006).

Valdes-Parada F. J., Alberto Ochoa-Tapia J., Alvarez-Ramirez J. Effective medium equations for fractional Fick's law in porous media // Physica A **373**, 339-353 (2007).

Valerio D., da Costa Sa J. Identification of of fractional models from frequency data // In: Advances in Fractional Calculus. Ed. by *Sabatier J., Agrawal O. P., Tenreiro Machado J. A.* – Dordrecht, the Netherlands: Springer, 2007, pp. 229-242.

Van De Lagemaat J., Kopidakis N., Neale N. R., Frank A. J. Effect of nonideal statistics on electron diffusion in sensitized nanocrystalline TiO_2 // Phys. Rev. B **71**, 5304 (2005).

Van Arsdale W. E. Fractional rates of deformation // J. of Rheology **29**, 851-857 (1985).

Veliev E. I., Ivakhnychenko M. V., Ahmedov T. M. Fractional boundary conditions in plane waves diffraction on a strip // Progress In Electromagnetics Research, PIER **79**, 443-462 (2008).

Vinagre B. M., Chen Y. Q. Lecture notes on fractional calculus: applications in automatic control and robotics // 41 st IEEE CDC'2002 Tutorial Workshop 2 Las Vegas, 2002.

Vinagre B. M., Chen Y. Q., Petras I. Two direct Tustin methods for fractional

order differentiator/integrator // J. of the Franklin Institute **340**, 349-362 (2003).

Vinagre B. M., Petras I., Podlubny I., Chen Y. Q. Using fractional order adjustment rules and fractional order reference models in models-reference adaptive control // Nonlinear Dynamics **29**, 269-279 (2002).

Vlad M. O., Ross J., Schneider F. W. Levy diffusion in a force field, Huber relaxation kinetics, and nonequilibrium thermodynamics: H theorem for enhanced diffusion with Levy white noise // Phys. Rev. E **62**, 1743-1763 (2000).

Wahi P., Chatterjee A. Averaging oscillations with small fractional damping and delayed terms // Nonlinear Dynamics **38**, 3-22 (2004).

Wang S., Xu M., Li X. Green's function of time fractional diffusion equation and its applications in fractional quantum mechanics // Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2007.

Wang Q. Homotopy perturbation method for fractional KdV equation // Applied Math. and Comp. **190**, 1795-1802 (2007).

Wang X.-T., Wen Z.-X., Zhang S.-Y. Fractional Poisson process (II) // Chaos, Solitons and Fractals **28**, 143-147 (2006).

Wang X. T., Zhang S. Y., Fan S. Nonhomogeneous fractional Poisson processes // Chaos, Solitons and Fractals **31**, 236-241 (2007).

Weiss G. H. Aspects and Applications of the Random Walk, North-Holland, Amsterdam, 1994.

Weitzner H., Zaslavsky G. M. Directional fractional kinetics // Chaos **11**, 384-396 (2001).

Weitzner H., Zaslavsky G. M. Some applications of fractional equations // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation **8**, 273-281 (2003).

Wenchang T., Wenxiao P., Mingyu X. A note on unsteady flows of a viscoelastic fluid with the fractional Maxwell model between two parallel plates // Int. J. of Non-Linear Mechanics **38**, 645-650 (2003).

West B. J. Quantum Levy propagators // J. Phys. Chem. B **104**, 3830-3832 (2000).

West B. J., Bologna M., Grigolini P. Physics of Fractal Operators, Springer, New York, 2003.

West B. J., Grigolini P. Fractional differences, derivatives and fractal time series // In: Applications of Fractional Calculus in Physics, ed. R. Hilfer, World Scientific, Singapore, 2000, pp. 171-202.

West B. J., Latka M. Fractional Langevin model of gait variability // J. of NeuroEngineering and Rehabilitation **2**, 24 (2005).

West B. J., Nonnenmacher T. An ant in a gurge // Phys. Lett. A **278**, 255 (2000).

Westerlund S. Dead matter has memory! // Physica Scripta **43**, 174-179 (1991).

Wiener K. On solutions of a differential equation of nonintegral order that occurs in the theory of polarography // *Wiss. Z. Martin-Luther-University Halle Wittenberg Math. -Natur. Reihe*, **32**, 41-46 (1983).

Wiener K. On the asymptotic behavior of the solutions of differential equation of nonintegral order from polarography // *Wiss. Z. Martin-Luther-University Halle-Wittenberg Math. -Natur. Reihe* **32**, 75-86 (1983).

Wiener K. On the number of solutions for differential equations of nonintegral order // *Wiss. Z. Martin-Luther-University Halle- Wittenberg Math.-Natur. Reihe* **34**, 112-120 (1985).

Wiener K. On the solutions of homogeneous differential equations of nonintegral order // *Wiss. Z. Martin-Luther-University Halle Wittenberg Math.-Natur. Reihe* **34**, 54-58 (1983).

Wiener K. Solutions of inhomogeneous differential equations with derivatives of nonintegral order I // *Wiss. Z. Martin-Luther-University Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe*, **36**, 22-29 (1987).

Woyczynski W. A. Burgers-KPZ turbulence, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1998.

Wyss W. The fractional diffusion equation // *J. Math. Phys.* **27**, 2782-2785 (1986).

Wyss W. Fractional noise // *Found. Phys. Lett.* **4**, 235-246 (1991).

Wyss M. M., Wyss W. Evolution, its fractional extension and generalization // *Fractional Calculus Appl. Anal.* **4**, 273-284 (2001).

Xiaoyi Guo, Mingyu Xu. Some physical applications of fractional Schrodinger equation // *J. of Math. Physics* doi:10.1063/1.2235026 (2006).

Xiaoyun J., Mingyu X. Analysis of fractional anomalous diffusion caused by an instantaneous point source in disordered fractal media // *Int. J. of Non-Linear Mechanics* **41**, 156-165 (2006).

Xicheng Li, Mingyu Xu, Shaowei Wang. Analytical solutions to the moving boundary problems with space-time-fractional derivatives in drug release devices // *J. of Physics A: Mathematical and Theoretical Physics* **40**, 12131-12141 (2007).

Xu M., Tan W. Intermediate processes and critical phenomena: Theory, method and progress of fractional operators and their applications to modern mechanics // *Science in China: Series G Phys., Math., Astr.* **49**, 257-272 (2006).

Yan J., Li C. On chaos synchronization of fractional differential equations // *Chaos, Solitons and Fractals* **32**, 725-735 (2007).

Yanovsky V. V., Chechkin A. V., Schertzer D., Tur A. V. Levy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation // *Physica A* **282**, 13-34 (2000).

Yao K., Su W. Y., Zhou S. P. On the connection between the order of fractional calculus and the dimensions of a fractal function // *Chaos, Solitons and Fractals*

23, 621-629 (2005).

Yin Y., Zhu K. Q. Oscillating flow of a viscoelastic fluid in a pipe with the fractional Maxwell model // *Applied Math. and Comp.* **173**, 231-242 (2006).

Yu Z.-G. Flux and memory measure on net fractals // *Phys. Lett. A* **257**, 221-225 (1999).

Yu Z.-G., Ren F.-Y., Zhou J. Fractional integral associated to generalized cookie-cutter set and its physical interpretation // *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 5569-5577 (1997).

Yu R., Zhang H. New function of Mittag-Leffler type and its application in the fractional diffusion-wave equation // *Chaos, Solitons and Fractals* **30**, 946-955 (2006).

Yuste S. B. Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations // *J. of Computational Physics* **216**, 264-274 (2006).

Yuste S. B., Lindenberg K. Subdiffusion-limited reactions // *Chem. Phys.* **284**, 169-180 (2002).

Yuste S. B., Lindenberg K. Subdiffusive target problem: Survival probability // *Phys. Rev. E* **76**, 051114 (2007). *Zabadal J., Vilhena M. T., Segatto C. F., Pazos R. P.* Determination of a closed-form solution for the multidimensional transport equation using a fractional derivative // *Annals of Nuclear Energy* **29**, 1141-1150 (2002).

Zachle M. Riesz potentials and Liouville operators on fractals // *Potential Analysis* **21**, 193-208 (2004).

Zanette D. H., Alemany P. A. Thermodynamics of anomalous diffusion // *Phys. Rev. Lett.* **75**, 366-369 (1995).

Zaslavsky G. M. Anomalous transport and fractional kinetics // In: *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas. Ed. by Moffatt H. K., Zaslavsky G. M. et al.* – Kluwer, Netherlands, 1992, pp. 481-491.

Zaslavsky G. M. Anomalous transport in systems with Hamiltonian chaos // In: *Transport, Chaos and Plasma Physics (Conference Marseille 1993; Ed. by Bencadda S., Doveil F., Eiskens V.)* – Singapore: World Scientific, 1994.

Zaslavsky G. M. Renormalization group theory of anomalous transport in systems with Hamiltonian chaos // *Chaos* **4**, 25-33 (1994).

Zaslavsky G. M. Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos // *Physica D* **76**, 110-122 (1994).

Zaslavsky G. M. From Hamiltonian chaos to Maxwell's demon // *Chaos*, **5**, 653-661 (1995).

Zaslavsky G. M. From Lévy flights to the fractional kinetic equation for dynamical chaos // In: *Lévy Flights and Related Topics in Physics. Ed. by Shlesinger M. F.,*

Zaslavsky G. M., Frisch U. – Berlin: Springer, 1995, pp. 216-238.

Zaslavsky G. M. Physics of Chaos in Hamiltonian Dynamics. – London: Imperial College Press, 1998.

Zaslavsky G. M. Chaotic dynamics and the origin of statistical laws // Phys. Today **8**, 39-45 (1999).

Zaslavsky G. M. Multifractional kinetics // Physica A **288**, 431 (2000).

Zaslavsky G. M. Chaos, fractional kinetics and anomalous transport, // Phys. Rep. **371**, 461-580 (2002).

Zaslavsky G. M. Chaos and Fractional Dynamics, vol. 511 of Lect. Notes in Phys. – Oxford University Press, 2005.

Zaslavsky G. M. Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics. – Oxford University Press, 2005.

Zaslavsky G. M. Fractional kinetics in pseudochaotic systems and its applications // In: Advances in Fractional Calculus, J. Sabatier, O. P. Agrawal, J. A. Tenreiro Machado (eds.) – Springer, Dordrecht, the Netherlands, 2007, pp. 127-138.

Zaslavsky G. M., Abdullaev S. S. Scaling properties and anomalous transport of particles inside the stochastic layer // Phys. Rev. E **51**, 3901-3910 (1995).

Zaslavsky G. M., Benkadda M. Chaos, Kinetics and Nonlinear Dynamics in Fluids and Plasmas, vol. 511 of Lect. Notes in Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1998.

Zaslavsky G. M. Hierarchical structures in the phase space and fractional kinetics: 1. Classical systems // Chaos **10**, 135-145 (2000).

Zaslavsky G. M., Edelman M. A. Fractional kinetics: from pseudochaotic dynamics to Maxwell's demon // Physica D **193**, 128-147 (2004).

Zaslavsky G. M., Edelman M., Niasov B. A. Self-similarity, renormalization, and phase space nonuniformity of Hamiltonian chaotic dynamics // Chaos **7**, 159-181 (1997).

Zaslavsky G. M., Edelman M., Weitzner H., Carreras B., McKee G., Bravenec R., Fonck R. Large-scale behavior of tokamak density fluctuations // Physics of Plasmas **7**, 3691-3697 (2000).

Zaslavsky G. M., Guzdar P. N., Edelman M., Sitnov M. I., Sharma A. S. Selfsimilarity and fractional kinetics of solar wind-magnetosphere coupling // Physica A **373**, 11-20 (2007).

Zaslavsky G. M., Guzdar P. N., Edelman M., Sitnov M. I., Sharma A. S. Multiscale behavior and fractional kinetics from the data of solar wind-magnetosphere coupling // Comm. in Nonlinear Science and Numerical Simulation **13**, 314-330 (2008).

Zaslavsky G. M., Niyazov B. A. Fractional kinetics and accelerator modes //

Physics Rep. **283**, 73-93 (1997).

Zaslavsky G. M., Stanislavsky A. A., Edelman M. Chaotic and pseudochaotic attractors of perturbed fractional oscillator. Chaos (Woodbury, N.Y.) **16**, 013102 (2006).

Zaslavsky G. M., Stevens D., Weitzner H. Self-similar transport in incomplete chaos // Phys Rev E **48**, 1683 (1993).

Zavada T., Südländ N., Kimmich R., Nonnenmacher T. F. Propagator representation of anomalous diffusion: The orientational structure factor formalism in NMR // Phys Rev. E **60**, 1292-1298 (1999).

Zeng O., Li H., Liu De. Anomalous fractional diffusion equation for transport phenomena // Comm. Nonlinear Sci. and Numeric Simulation **4**, 99-104 (1999).

Zhang H., Liu F., Anh V. Numerical approximation of Levy-Feller diffusion equation and its probability interpretation // J. of Comp. and Applied Math. **206**, 1098-1115 (2007).

Zhang W., Shimizu N. Damping properties of the viscoelastic material described by fractional Kelvin-Voigt model // JSME Int. J. C. **42**, 1-9 (1990).

Zhou T., Li C. Synchronization in fractional-order differential systems // Physica D: Nonlinear Phenomena **212**, 111-125 (2005).

Zolotarev V. M. One-dimensional Stable Distributions, Transl. Math. Monographs, Vol. 65, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1986.

Zou Fu, Ren F.-Y., Qiu W.-Y. Fractional diffusion equations involving external forces in the higher dimensional case // Chaos, Solitons and Fractals **21**, 679-687 (2004).

Архинчев В. Е. О релаксации заряда на фрактальных структурах // Письма в ЖЭТФ **52**, 1007-1009 (1990).

Архинчев В. Е. Аномальная диффузия и дрейф в гребешковой модели перколяционных кластеров // ЖЭТФ **100**, 292-300 (1991).

Архинчев В. Е. О связи проводимости и диффузии при блуждании по самоподобным кластерам // Письма в ЖЭТФ **67**, 518-520 (1998).

Архинчев В. Е. О дрейфе при случайном блуждании по самоподобным кластерам // ЖЭТФ **115**, 1016-1023 (1999).

Архинчев В. Е. Случайные блуждания на иерархических гребешковых структурах // ЖЭТФ **115**, 1285-1296 (1999).

Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести // Прикладная математика и механика **23**, 901-924 (1959).

Бабенко Ю. И. Тепло- и массоперенос. Ленинград: Химия (1986).

Бакутин О. Г. Корреляционные и перколяционные свойства турбулентной диффузии // УФН **173**, 757-768 (2003).

Батанов Г. Н., Петров А. Е., Пшеничников А. А., Учайкин В. В. и др. Структурная плазменная турбулентность и аномальная неброуновская диффузия // В сб.: Стохастические модели структурной плазменной турбулентности. Под ред. В. Ю. Королева и Н. Н. Скворцовой. – Москва: МГУ, 2003, с. 148-182.

Бегли Р. Л., Торвик П. Дж. Дифференциальное исчисление, основанное на производных дробного порядка, – новый подход к конструкции с вязко-упругим демпфированием // Аэрокосмическая техника **2**, 84-93 (1984).

Белавин В. А., Нигматуллин Р. Ш., Мирошников А. И., Луцкая Н. К. Дробное дифференцирование осциллографических полярограмм // Труды Казанского авиационного института **5**, 144-145 (1964).

Бенинг В. Е., Королев В. Ю., Сухорукова Т. А., Учайкин В. В. и др. Дробно-устойчивые распределения // В сб.: Стохастические модели структурной плазменной турбулентности. Под ред. Королева В. Ю., Скворцовой Н. Н. – Москва: МГУ, 2003, с. 291-360.

Герасимов А. Н. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения // Прикладная математика и механика **ХII**, 251-260 (1948).

Дубков А. А., Спаньоло Б. Стационарные вероятностные характеристики супердиффузии // Актуальные проблемы статистической радиофизики **5**, 55-65 (2006).

Дубинов А. Е., Селемир В. Д. Обобщенные волновые уравнения для описания динамики электромагнитных волн в стационарных фрактальных средах // В кн.: Фракталы в прикладной физике / Под ред. Дубинова А. Е. – Арзамас: ВНИИЭФ (1995) с. 1-19.

Забурдаев В. Ю., Чужбар К. В. Ускоренная супердиффузия и конечная скорость полетов Леви // ЖЭТФ **121**, 299-307 (2002).

Забурдаев В. Ю., Чужбар К. В. Эффекты «памяти» в стохастическом транспорте // Письма в ЖЭТФ **77**, 654-658 (2003).

Забурдаев В. Ю. Теория переноса тепла в замагниченной высокотемпературной плазме // Физика плазмы **31**, 1146-1152 (2005).

Зеленый Л. М., Милованов А. В. Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики // УФН **174**, 809-852 (2004).

Золотарев В. М., Учайкин В. В. Многомерные устойчивые распределения как решения дифференциальных уравнений дробного порядка // Теория вероятностей и ее применение **44**, 176-177 (1999).

Золотарев В. М., Учайкин В. В., Саенко В. В. Супердиффузия и устойчивые

законы // *ЖЭТФ* **115**, 1411-1425 (1999).

Кобелев В. Л., Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Кобелева О. Л. О диффузии через фрактальную поверхность // *Доклады Академии наук* **355**, 326-327 (1997).

Кобелев В. Л., Кобелев Я. Л., Романов Е. П., Кобелев Л. Я. Релаксационные и диффузионные процессы в фрактальных пространствах // *Известия РАН. Физика* **12**, 2401-2408 (1998).

Кобелев В. Л., Кобелев Я. Л., Романов Е. П., Кобелев Л. Я. Недебаевская релаксация и диффузия в фрактальном пространстве // *Доклады Академии наук* **361**, 755-758 (1998).

Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Романов Е. П. Автоволновые процессы при нелинейной фрактальной диффузии // *Доклады Академии наук* **369**, 332-333 (1999).

Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Романов Е. П. Кинетические уравнения для больших систем с фрактальными структурами // *Доклады Академии наук* **372**, 177-180 (2000).

Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Кобелев В. Л., Романов Е. П. Диффузия в фрактальных средах на основе кинетического уравнения Климонтовича в фрактальном пространстве // *Доклады Академии наук* **385**, 612-614 (2002).

Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Климонтович Ю. Л. Аномальная диффузия с памятью, зависящей от времени и координат // *Доклады Академии наук* **390** (2003).

Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Климонтович Ю. Л. Статистическая физика динамических систем с переменной памятью // *Доклады Академии наук* **390** (2003).

Кобелев Л. Я., Кобелев Я. Л., Климонтович Ю. Л. Равновесная статистическая физика в фрактальных средах с постоянной и переменной памятью // *Доклады Академии наук* **391** (2003).

Кобелев Я. Л., Кобелев Л. Я., Романов Е. П. Уравнения Ландау-Лифшица для магнитных систем с постоянной и переменной памятью // *Доклады Академии наук* **391**, (2003).

Кочубей А. Н. Диффузия дробного порядка // *Дифференциальные уравнения* **26**, 660-670 (1990).

Лагутин А. А., Тюменцев А. Г. Спектр, массовый состав и анизотропия космических лучей во фрактальной Галактике // *Известия Алтайского государственного университета* **5**, 4-21 (2004).

Лагутин А. А., Тюменцев А. Г. Спектр электронов в Галактике // *Известия Алтайского государственного университета* **5**, 22-26 (2004).

Лагутин А. А., Райкин Р. И., Тюменцев А. Г. Распределение первого пробега в галактической среде фрактального типа // Известия Алтайского госуниверситета **5**, 27-31 (2004).

Лагутин А. А., Тюменцев А. Г., Юшков А. В. Энергетический спектр и массовый состав космических лучей в районе излома в модели с двумя типами источников // Известия РАН, сер. физ. **71**, 605-607 (2007).

Монин А. С. Уравнения турбулентной диффузии // Доклады АН СССР **105**, 256-259 (1955).

Монин А. С. Горизонтальное перемешивание в атмосфере // Известия АН СССР, сер. геофиз. **3**, 327-345 (1956).

Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 2 – СПб.: Гидрометеиздат, 1996.

Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003.

Нахушев А. М., Нахушева В. А. Об одном классе дифференциальных уравнений состояния дробного порядка в сплошных средах с памятью // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук **2**, 52-55 (1996) .

Нигматуллин Р. Р. Дробный интеграл и его физическая интерпретация // Теор. и мат. физика **90**, 242-251 (1992).

Нигматуллин Р. Р., Рябов Я. Е. Диэлектрическая релаксация Коула-Дэвидсона как самоподобный процесс // Физика твердого тела **39**, 101-105 .

Потапов А. А. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005.

Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики // Письма в ЖТФ **30**, 33-37 (2004).

Ретин О. Н., Саичев А. И. Дробный пуассоновский закон // Известия ВУЗов, Радиофизика **43**, 738-741 (2000).

Рутман Р. С. К статье Нигматуллина Р. Р. «Дробный интеграл и его интерпретация» // Теор. и мат. физика **100**, 476-478 (1994).

Рутман Р. С. О физической интерпретации дробного интегрирования и дифференцирования // Теор. и мат. физика **105**, 393-404 (1995).

Саичев А. И., Уткин С. Г. Модели дробной диффузии // Актуальные проблемы статистической радиофизики **1**, 5-43 (2002).

Саичев А. И., Уткин С. Г. Законы аномальной диффузии // В кн.: Нелинейные волны. Под ред. А. В. Гапонов-Грехов и В. И. Некоркин. – Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2002, с. 416-431.

Саичев А. И., Уткин С. Г. Асимптотические законы супердиффузии // ЖТФ **73**, 1-6 (2003).

Саичев А. И., Уткин С. Г. К вопросу об обобщенном процессе Орнштейна-Уленбека // Известия ВУЗов, Радиофизика **47**, 163-166 (2004).

Саичев А. И., Уткин С. Г. Случайные блуждания с промежуточной аномально-диффузионной асимптотикой // ЖЭТФ **126**, (2004).

Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

Сибатов Р. Т. Дробно-дифференциальное диффузионное уравнение в теории переноса заряда в двухслойных структурах «неупорядоченный полупроводник – кристаллический полупроводник» // Обзорные прикладн. и промышл. математики **13**, 544-546 (2006).

Сибатов Р. Т., Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная модель диффузии водорода в неупорядоченных полупроводниках и диэлектриках // Обзорные прикладн. и промышл. математики **14**, 749-751 (2006).

Сибатов Р. Т., Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная кинетика переноса заряда в неупорядоченных полупроводниках // Физика и техника полупроводников **41**, 346-351 (2007).

Слонимский Г. Л. О законе деформации высокоэластичных полимерных тел // ДАН СССР **140**, 343-346 (1961).

Станиславский А. А. Вероятностная интерпретация интеграла дробного порядка // Теор. и мат. физика **138**, 418-431 (2004).

Тельковская О. В., Чукбар К. В. Нелокальность относительной диффузии // ЖЭТФ **112**, 163-166 (1997).

Учайкин В. В., Коробко Д. А. К теории многократного рассеяния в среде фрактального типа // Письма в ЖТФ **11**, 34-40 (1999).

Учайкин В. В. Субдиффузия и устойчивые законы // ЖЭТФ **115**, 2113-2132 (1999).

Учайкин В. В. Фрактальная мезоскопика // Известия вузов, Физика **43**, 11-14 (2000).

Учайкин В. В. Изотропные распределения в процессах аномальной диффузии // Обзорные прикладн. и промышл. математики, **8**, 810-811 (2001).

Учайкин В. В., Сасенко В. В. Одномерные блуждания на фрактальном газе с атомами-ловушками // Обзорные прикладн. и промышл. математики, **8**, 705 (2001).

Учайкин В. В. Эта странная кинетика // «Природой здесь нам суждено» Сб. научно-популярных статей. Под ред. Скулачева В. П. – М.: Изд-во «Октопус», 2003, с. 24-33.

Учайкин В. В. Аномальная диффузия и дробно-устойчивые распределения // ЖЭТФ **124** 903-920 (2003).

Учайкин В. В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // УФН **173**, 847-876 (2003).

Учайкин В. В., Коробко Д. А. Фрактальная модель переноса: малоугловое приближение // ЖТФ **74**, 12-19 (2004).

Учайкин В. В. Фрактальные блуждания и блуждания на фракталах // ЖТФ **74**, (2004).

Учайкин В. В., Сибатов Р. Т. Одномерные фрактальные блуждания с конечной скоростью свободного движения // Письма в ЖТФ **30**, 27-33 (2004).

Учайкин В. В. Дробные производные в теории фазовых переходов // Обзорное прикладн. и промышл. математики **12**, 538-540 (2005).

Учайкин В. В., Сибатов Р. Т. Дробные производные в теории полупроводников // Обзорное прикладн. и промышл. математики **12**, 540-542 (2005).

Учайкин В. В., Учайкин Д. В. Дробные производные в теории диэлектриков // Обзорное прикладн. и промышл. математики **12**, 195-196 (2005).

Учайкин В. В., Захаров А. Ю. Дробные производные в теории плазмы // Обзорное прикладн. и промышл. математики **12**, 540 (2005).

Учайкин В. В., Сибатов Р. Т. Дробно-дифференциальная модель рекомбинации в неупорядоченных полупроводниках // Обзорное прикладн. и промышл. математики **14**, 938-940 (2007).

Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная модель рассеяния светового луча в турбулентной среде // Обзорное прикладн. и промышл. математики **14**, 841-843 (2007).

Учайкин В. В. Дробно-дифференциальная модель динамической памяти // РФФИ. Сб. научно-популярных статей. Вып. 10. – М.: Изд-во «Октопус», 2007, с. 25-40.

Учайкин В. В., Сибатов Р. Т. Дробно-дифференциальная кинетика дисперсионного переноса как следствие его автомодельности // Письма в ЖЭТФ **86**, 584-588 (2007).

Черных В. А. Применение операторов А. В. Летникова в моделях популяционной динамики // Нелинейный мир, № 9, т. 6, 500-506 (2008). *Чужбар К. В.* К теории турбулентной диффузии // Письма в ЖЭТФ **58**, 87-90 (1993).

Чужбар К. В. Стохастический перенос и дробные производные // ЖЭТФ **108**, 1875-1884 (1995).

Чужбар К. В. Квазидиффузия пассивного скаляра // ЖЭТФ **109**, 1335-1348 (1996).

Чужбар К. В. Нелокальность относительной диффузии // ЖЭТФ **112**, 163-166 (1997).