

И. Е. Тарапов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

МЕХАНИКА НЕВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТИ

«Нет, никогда не было и не может быть в нашем мире страны, которая бы построила эффективную экономику, создала устойчивую государственную и политическую систему без достижения современного уровня образованности и культуры народа, без развития научных исследований необходимого государственного масштаба».

На распутье.
Не попасть в тупик
истории
(Х.: Фолио, 1995)

В трех частях
Часть 3

И. Е. Тарапов

3

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
МЕХАНИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

3 | И. Е. Тарапов МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

И. Е. Тарапов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В трех частях
Часть 3

И.Е. Тарапов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

ЧАСТЬ 3

И.Е. Тарапов

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

В ТРЕХ ЧАСТЯХ

Часть 3

**МЕХАНИКА НЕВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТИ**

Библиотека кафедры
гидромеханики МГУ

Харьков

«Золотые страницы»

2005

УДК 531.531.3
ББК 22.25
Т19

Тарапов И.Е.

Т19 **Механика сплошной среды. В 3 ч. Ч. 3: Механика невязкой жидкости.** — Харьков: Золотые страницы, 2005. — 332 с.

ISBN 966-8494-88-1

Книга является третьей частью трехтомного издания «Механика сплошной среды» и содержит некоторые главы гидромеханики.

В книге излагаются общие вопросы гидроаэромеханики, гидростатика и некоторые задачи и методы динамики невязкой несжимаемой жидкости. Теоретический материал сопровождается подборкой задач с решениями и упражнениями для самостоятельной работы, которые размещены в конце каждого параграфа. Приведены также сведения об ученых, внесших большой вклад в создание и развитие механики сплошной среды.

Книга предназначена студентам, аспирантам, преподавателям, научным сотрудникам университетов и высших технических учебных заведений.

УДК 531.531.3
ББК 22.25

ISBN 966-8494-88-1

© Тарапов И.Е., 2005
© ООО «Золотые страницы», 2005

Часть III

МЕХАНИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Механику жидкости и газа обычно объединяют одним словом — гидроаэромеханика (чаще — гидромеханика).

В гидроаэромеханике изучается движение жидкостей и газов и взаимодействие этих сред с твердыми телами, частично или полностью помещенными в среду.

В связи с математическими сложностями нелинейной системы основных дифференциальных уравнений движения жидкостей и газов в гидроаэромеханике рассматриваются отдельные приближения этой системы. В соответствии с этим обычно различают следующие области этой обширной части механики сплошной среды:

- динамика невязкой несжимаемой жидкости;
- динамика невязкого идеального газа (газовая динамика);
- динамика вязких жидкостей и газов.

После рассмотрения особенностей и интегралов основных уравнений гидромеханики, а также сил, действующих на твердые тела в потоках жидкости и газа, изучаются основные законы гидростатики — равновесия жидкостей и газов.

Последующие главы посвящены динамике невязкой несжимаемой жидкости.

Глава 1

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ

В этой главе мы вернемся к системе дифференциальных уравнений гидроаэромеханики и рассмотрим основные случаи их интегрирования.

§ 1.1. Основные уравнения движения и их интегралы

Система дифференциальных уравнений движения. Граничные и начальные условия

Исходной для исследования задач гидроаэромеханики является система дифференциальных уравнений (см. ч. 2, § 14)

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial x_k} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{p}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} + \lambda \Delta T \equiv -p \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu v_{ik}^0 v_{ik}^0 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \lambda \Delta T, \quad (1.3)$$

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T). \quad (1.4)$$

Таким образом, рассматриваются ньютоновские жидкости и газы, для которых компоненты тензора напряжений p_{ik} связаны с компонентами тензора скоростей деформации v_{ik} следующими линейными соотношениями (формула Навье-Стокса)

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu v_{ik}^0 + \zeta \delta_{ik} v_{ll} = -p\delta_{ik} + p'_{ik}, \quad (1.5)$$

где p'_{ik} — компоненты тензора вязких напряжений.

В этих уравнениях: $v_{ik}^0 = v_{ik} - (1/3)\delta_{ik}v_{ll}$ — девиатор тензора скоростей деформации; $v_{ik} = (1/2)(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i)$; μ, ζ, λ — постоянные коэффициенты первой и второй вязкости, коэффициент теплопроводности соответственно; p — давление, e — удельная внутренняя энергия. Уравнения записаны в ковариантной форме. В случае необходимости, используя аппарат тензорного анализа (см., например, [1], [3]), можно записать основную систему в любых криволинейных координатах.

Вместо внутренней энергии $e = e(\rho, T)$ иногда удобно ввести удельную энтропию $s = s(\rho, T)$. Принимая принцип локального равновесия (см. ч. 2, § 12), имеем для каждой частицы жидкости и газа

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (1.6)$$

Тогда вместо (1.3) и (1.4) можно рассматривать следующие уравнения:

$$\rho T \frac{ds}{dt} = 2\mu v_{ik}^0 v_{ik}^0 + \zeta (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 + \lambda \Delta T, \quad (1.7)$$

$$p = p(\rho, T), \quad s = s(\rho, T). \quad (1.8)$$

Заметим, что на основании (1.1)

$$p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Операция полного (материального) дифференцирования по времени имеет выражение

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla,$$

и поэтому система (1.1)–(1.4) представляет собой нелинейную систему уравнений в частных производных относительно пяти скалярных функций p, T и v_i , зависящих от времени t и координат пространства. О типе этой системы в различных частных случаях было сказано в ч. 2, § 14, а граничные и начальные условия подробно обсуждались в ч. 2, § 15. Поэтому дадим лишь сводку начальных и граничных условий.

а) Начальные условия

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t_0) = \mathbf{f}_v(\mathbf{r}); \quad p(\mathbf{r}, t_0) = f_p(\mathbf{r}); \quad T(\mathbf{r}, t_0) = f_T(\mathbf{r}).$$

б) Граничные условия (на неподвижной непроницаемой твердой поверхности):

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = 0 \quad (\text{для идеальной жидкости});$$

$$v_n = 0, \quad v_\tau = 0 \quad (\text{для вязкой жидкости});$$

$$T|_S = T_s(t) \quad \text{или} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{\lambda} Q_n(t).$$

Что касается давления p , то на твердых поверхностях эта величина, как правило, не задается; в то же время известно, что на контактных разрывах напряжения непрерывны, так что давление должно быть задано на свободных поверхностях, вид которых обычно определяется в процессе решения задачи.

Во внешних задачах необходимо задать условия в бесконечно удаленной точке:

$$\mathbf{v}|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{v}_\infty(t); \quad p|_{r \rightarrow \infty} = p_\infty(t); \quad T|_{r \rightarrow \infty} = T_\infty(t).$$

Необходимо подчеркнуть, что эти условия должны быть согласованы с начальными условиями.

Основные интегралы уравнения изменения количества движения

Интегралы системы (1.1)–(1.4), как конечные соотношения между p (или ρ), и T , получаются путем интегрирования уравнения изменения количества движения (1.2). Выделяя в (1.2) слагаемые с вязкостью, получаем

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{v^2}{2} + \frac{\nabla p}{\rho} - \mathbf{f} = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}'_k}{\partial x_k}. \quad (1.9)$$

Здесь использовано векторное соотношение $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \nabla(v^2/2) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$ и выражение $d\mathbf{v}/dt = \partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ для ускорения. Для идеальных сред из (1.7) имеем

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0, \quad (1.10)$$

т. е. движение среды изэнтропично, так что энтропия в каждой частице остается неизменной. Поскольку $\delta Q = Tds$, то в такой среде все процессы и адиабатны.

Пусть рассматриваемая среда баротропна, т. е. $p = p(\rho)$, а массовые силы имеют потенциал ($\mathbf{f} = -\nabla\Pi$). Тогда (1.9) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi \right) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}'_k}{\partial x_k}, \quad (1.11)$$

где $\mathcal{P}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp(\rho)}{\rho}$, а $\partial \mathbf{p}'_k / \partial x_k = \mu \Delta v + (\zeta + \mu/3) \nabla \text{div } \mathbf{v}$ — для ньютоновских жидкостей и газов.

Заметим, что баротропная среда является обобщением несжимаемой среды, для которой плотность каждой частицы остается постоянной: при $\rho = \text{const}$ имеем $\mathcal{P}(\rho) = p/\rho$. Политропный идеальный газ также представляет собой баротропную среду, если его движение изэнтропично ($s = \text{const}$); в этом случае, как известно, $s = c_v \ln p \rho^{-\kappa}$ и, следовательно, $p = p(\rho) =$

$$= \rho^{\kappa} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right) = \text{const } \rho^{\kappa}. \text{ При этом}$$

$$\mathcal{P}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \kappa p^{\kappa-1} \exp\left(\frac{s}{c_v}\right) \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \text{const}.$$

Существуют и другие примеры газовых потоков, в которых $p = p(\rho)$; такие случаи рассматриваются в газовой динамике.

Пусть M и M_0 — две точки в потоке, причем точка M — текущая, а в M_0 известны характеристики потока. Интегрируя (1.11) по некоторой кривой M_0M , элемент которой обозначим через dL , получаем

$$\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi \right]_{M_0}^M = \int_{M_0}^M (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) dL - \int_{M_0}^M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot dL + \int_{M_0}^M \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}'_k}{\partial x_k} dL. \quad (1.12)$$

Из этого соотношения при некоторых дополнительных условиях следует ряд интегралов.

Предварительно отметим физический смысл трехчлена в левой части. Он представляет собой в случае адиабатических процессов сумму полной энтальпии единицы массы среды и потенциальной энергии внешних массовых сил (П).

Будем в дальнейшем рассматривать такие вязкие среды, для которых последний интеграл в правой части соотношения (1.12) пропадает. Это означает, что равнодействующая сил вязкости $\partial \mathbf{p}'_k / \partial x_k$, действующих на единицу объема, либо равна нулю, либо перпендикулярна все время к элементу пути интегрирования $d\mathbf{L}$. Эти ограничения не столь жестки, как требования, чтобы сами поверхностные силы вязкости \mathbf{p}'_k всюду равнялись нулю: напряжения трения p'_{ik} могут присутствовать в потоке, но их объемная равнодействующая должна обладать определенными свойствами (см. также задачу 1.1).

Так, например, если ньютоновская жидкость несжимаема, то $\partial \mathbf{p}'_k / \partial x_k = \mu \Delta \mathbf{v} = -\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v}$. Таким образом, в поле скоростей вязкой жидкости, удовлетворяющем уравнению Лапласа $\Delta \mathbf{v} = 0$, в выражении (1.12) последнее слагаемое справа пропадает, хотя в этом поле скоростей напряжения трения не равны нулю ($p'_{ik} = 2\mu v_{ik} \neq 0$). Подобным полем скорости вязких потоков является поле с потенциальной завихренностью $\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, т. е. когда $\operatorname{rot} \Omega = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. Частный случай такого поля — поле с постоянной завихренностью. Для случая диффузии прямолинейного вихря (см. ч. 2, § 17) имеем $\Omega = \mathbf{i}_z \Omega(r, t)$, где r — полярная координата в плоскости $z = \text{const}$. Тогда при интегрировании по любому из радиусов $\partial \mathbf{p}'_k / \partial x_k \cdot d\mathbf{L} = -\mu (\partial \Omega / \partial r) dr$, так что интеграл справа в (1.12) дает $\mu (\Omega(r_0, t) - \Omega(r, t)) = -\mu \Omega|_{M_0}^M$ и, следовательно, он может быть включен в левую часть соотношения (1.12), если M и M_0 находятся на одном радиусе.

Таким образом, в дальнейшем мы будем пользоваться соотношением (1.12) в виде

$$\left[\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi \right]_{M_0}^M = \int_{M_0}^M (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) d\mathbf{L} - \int_{M_0}^M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{L}, \quad (1.13)$$

предполагая, что в случае вязкой среды последний интеграл справа либо равен нулю, либо его конечное значение включено в левую часть (1.13).

По поводу существования основных интегралов для вязких сред см. задачу 1.1.

1. Интеграл Лагранжа-Коши имеет место для безвихревых потоков ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$). В этом случае $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ и из (1.13) получаем

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(t), \quad (1.14)$$

где $C(t)$ — произвольная функция времени, одинаковая для всех точек области потока. Чтобы ее определить, достаточно знать значение левой части (1.14) в какой-то точке потока, например, в бесконечно удаленной, где известны $v_\infty(t)$, $p_\infty(t)$ и Π_∞ . Если угодно, можно считать, что в правой части (1.14) стоит нуль, поскольку вместо потенциала φ можно ввести потенциал $\varphi^* = \varphi - \int C(t) dt$, причем это не изменит значения поля скоростей ($\mathbf{v} = \nabla \varphi = \nabla \varphi^*$).

Этот интеграл можно использовать как для невязких, так и для вязких сред: лишь бы всюду $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ (для несжимаемых вязких жидкостей это условие приводит к $(\partial p'_{ik})/(\partial x_k) = 0$, хотя $p'_{ik} \neq 0$, см. задачу 1.1).

Приведем значение интеграла Лагранжа-Коши в неинерциальной системе координат.

Если \mathbf{v}_r — скорость среды в неинерциальной системе координат, движущейся относительно абсолютной системы со скоростью $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + (\boldsymbol{\omega} \mathbf{r})$ (скорость переносного движения), то абсолютная скорость среды равна \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e,$$

причем $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ — вектор мгновенной угловой скорости неинерциальной системы. Пусть абсолютное движение потенциально, т. е. $\mathbf{v} = \nabla \varphi$. Тогда, записывая $\varphi = \varphi(t, x'_i)$, где x'_i — координаты частиц относительно подвижной системы координат, имеем, вычисляя в этой системе производную $(\partial' \varphi / \partial t)$:

$$\frac{\partial' \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \varphi,$$

поскольку $\partial x_i / \partial t = v_{e,i}$, а $\partial \varphi / \partial x_i = (\nabla \varphi)_i$.

Тогда, подставляя $\partial \varphi / \partial t$ и $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ в (1.14), получаем

$$\mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + \frac{\partial' \varphi}{\partial t} - (\mathbf{v}_e \cdot \nabla \varphi) = C(t). \quad (1.15)$$

Учитывая, что

$$\nabla \varphi = \mathbf{v}_r + \mathbf{v}_e,$$

можно получить выражение этого интеграла через относительную и переносную скорости. Поскольку

$$\frac{(\nabla \varphi)^2}{2} - (\mathbf{v}_e \cdot \nabla \varphi) = \frac{(\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r)^2}{2} - \mathbf{v}_e \cdot (\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r) = \frac{v_r^2}{2} - \frac{v_e^2}{2}.$$

имеем

$$\mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{v_r^2 - v_c^2}{2} + \frac{\partial' \varphi}{\partial t} = C(t). \quad (1.16)$$

В случае, когда переносное движение представляет собой вращение ($v_0 = 0$), отсюда имеем

$$\mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{v_r^2}{2} - \frac{(\omega \times r)^2}{2} + \frac{\partial' \varphi}{\partial t} = C(t).$$

Этот интеграл несколько иным способом был получен для стационарного относительного движения несжимаемой жидкости в задаче 13.7 (ч. 2, § 13).

2. Интеграл Громеки существует для стационарных винтовых потоков идеальной жидкости, т. е. когда $\partial v / \partial t = 0$ и $v \parallel \text{rot } v$. При таком движении линии тока совпадают с вихревыми линиями, так что частицы, перемещаясь, вращаются вокруг осей, касательных к траекториям. В этом случае из (1.13) получаем

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi = C_0, \quad (1.17)$$

где постоянная C_0 имеет одно и то же значение для всех точек области потока. Винтовое движение имеет место в вихревой пелене, помещенной в однородный поток; соотношение (1.17) позволяет найти в ней распределение давления, если известно распределение скоростей.

3. Интеграл Бернулли¹. Этот интеграл справедлив для стационарных потоков идеальной жидкости вдоль определенных кривых, совпадающих либо с линиями тока, либо с вихревыми линиями.

В этом случае из ($\partial v / \partial t = 0$, $dL \parallel v$ или $dL \parallel \text{rot } v$) (1.13) имеем

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi = C(L), \quad (1.18)$$

¹ Бернулли (Bernoulli) Даниил I (1700–1782) — швейцарский физик, математик, механик и физиолог. Окончил Базельский университет, получил блестящую подготовку под руководством своего отца Бернулли Иоганна I (1667–1748), учителя Лопитала, Эйлера и сыновей Даниила I и Николая II. Работал в Петербургской АН на кафедре физиологии (1725–1728) и профессором математики (1728–1733). Вернулся в Базель и был назначен профессором физиологии, а в 1750 г. — профессором механики Базельского университета. Основные труды относятся к гидродинамике, кинетической теории газов и теории колебаний. В ряду научных мемуаров — «Гидродинамика, или изъяснение сил и движений жидкости», где изложил гипотезу сохранения «живых сил» и вывел уравнение стационарного движения жидкости (уравнение Бернулли, интеграл Бернулли). Заложил основы кинетической теории газов, обосновал закон Бойля-Мариотта. Предложил принцип сложения скоростей, рассмотрел задачи колебаний некоторых систем. Разработал основы теории уравнений с частными производными; работы по теории вероятностей, по численным методам и др. Один из ярких представителей семьи швейцарских ученых Бернулли, из которой известны, по крайней мере, тринадцать математиков, физиков, механиков.

где стоящая справа постоянная различна для разных кривых интегрирования, вдоль которых выполняется этот интеграл.

Интеграл Бернулли справедлив для любого, в том числе и вихревого ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$), стационарного движения, и поэтому имеет фундаментальное значение во многих практических задачах. Он позволяет в любой точке линии тока (или вихревой линии) найти значение давления по значению скорости, если они известны в какой-либо точке этой линии.

Отметим принципиальную разницу между интегралом Бернулли и интегралом Лагранжа-Коши для стационарных потоков. По виду они совпадают, но постоянная C в правой части (1.14) одинакова для всех точек потока, а постоянная в интеграле (1.18) имеет одно и то же значение лишь для каждой отдельной линии тока или вихревой линии. Только в случае $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ эти постоянные совпадают и имеют одинаковое значение для всех точек области потока.

В случае *прямолинейного движения* можно говорить об интеграле Бернулли для нестационарного движения, а именно, если $d\mathbf{L}$ направлено вдоль прямой линии M_0M , то из (1.13) имеем

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi + \int_{M_0}^M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} d\mathbf{L} = C(L). \quad (1.19)$$

Если ускорение не зависит от точек прямолинейного пути (движение невязкой жидкости по трубе постоянного поперечного сечения, когда скорость одинакова во всех сечениях), то интеграл Бернулли имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{L} = C(L).$$

4. Обобщенный интеграл для баротропной невязкой среды. Рассмотрим случай стационарных потоков баротропной среды и выясним вопрос существования других типов интегралов уравнений движения, кроме вышеописанных. В случае установившихся движений из (1.11) имеем

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} + \Pi \right) = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

Поскольку отсюда следует

$$\text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0, \quad (1.20)$$

то существует некоторая функция $F(\mathbf{v})$ такая, где

$$\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\nabla F,$$

и тогда справедлив интеграл

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\mathcal{P}}{\rho} + \Pi + F(\mathbf{v}) = \text{const.} \quad (1.21)$$

Заметим, что условие (1.20) означает сохраняемость поля вихря $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$ по Фридману для стационарного движения (см. ч. 2, § 10, пример 1). При этом поверхность $F(\mathbf{v}) = \text{const}$, содержащая линии тока и вихревые линии, существует в силу (1.20). Можно показать [4], что поверхность $F(\mathbf{v}) = \text{const}$ имеет нулевую гауссову кривизну и в рассматриваемом случае эта развертывающаяся поверхность может быть только цилиндром. Это приводит к заключению, что интеграл (1.21) при $F(\mathbf{v}) = \text{const}$ может существовать только в двух случаях:

а) в прямолинейном потоке (по образующим цилиндра), когда он имеет вид

$$\Pi + \mathcal{P} = \text{const};$$

б) в движении по простым винтовым линиям, когда интеграл имеет вид

$$\Pi + \mathcal{P} - \int \frac{v^2(x)}{2} dx + v_0^2 \ln x = \text{const},$$

где $v_0 = \cos(\mathbf{v}, \Omega)$ — постоянная скорость поступательного движения, накладываемого на круговое со скоростью $v(x)$, причем x — координата, отсчитываемая по нормали к поверхности $F(\mathbf{v}) = \text{const}$. В частном случае этого движения — круговом движении — имеем $v_0 = 0$, $\sin(\mathbf{v}, \Omega) = 1$. Других случаев существования интеграла вида (1.20) при $F = F(\mathbf{v})$ нет.

5. Обобщенный интеграл для изэнтропических потоков невязкой жидкости. Основная система уравнений для такого движения, как это следует из (1.1)–(1.4), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) &= -\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + W \right) + T \nabla s, \\ \frac{ds}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $W = e + p/\rho$ — энтальпия среды.

Если скорость можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \nabla \lambda_1 + s \nabla \lambda_2 + \sum_{k=3}^n \mu_k \nabla \lambda_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_3, \dots, \mu_n$ — произвольные функции (t, \mathbf{r}) , подчиненные условиям

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -T \frac{d\lambda_3}{dt} = \frac{d\lambda_4}{dt} = \dots = \frac{d\lambda_n}{dt} = \frac{d\mu_3}{dt} = \dots = \frac{d\mu_n}{dt} = 0,$$

то уравнение изменения количества движения имеет интеграл, справедливый для вихревых потоков ($\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$) вида

$$\frac{v^2}{2} + \Pi + W + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \sum_{k=3}^n \mu_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial t} = f(t), \quad (1.21a)$$

где $f(t)$ определяется из граничных условий.

Действительно, если подставить в уравнение изменения количества движения принятое выражение для \mathbf{v} (частный случай этого выражения был использован Клебшем (см., например, [5]) для преобразований уравнений движения несжимаемой жидкости), то после ряда громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned} \nabla \left(\frac{v^2}{2} + \Pi + W + \frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + s \frac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \sum_{k=3}^n \mu_k \frac{\partial \lambda_k}{\partial t} \right) = \\ = \left(T + \frac{d\lambda_2}{dt} \right) \nabla s + \sum_{k=3}^n \left(\frac{d\lambda_k}{dt} \nabla \mu_k - \frac{d\mu_k}{dt} \nabla \lambda_k \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Отсюда, при указанных ограничениях на $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, \mu_3, \dots, \mu_n$, следует интеграл (1.21a). Число n может быть любым.

В качестве функций λ_k, μ_k ($k \geq 3$) могут быть выбраны любые лагранжевы координаты частицы. Частные виды интеграла (1.21a) исследовались в ч. 2, § 16 при рассмотрении вариационного принципа Херивела-Лина.

Выражение (1.22) позволяет сформулировать и другие условия существования интеграла (1.21a) (например, $s = s(t)$, $\mu_k = \mu_k(t)$, $\lambda_k = \lambda_k(t)$ для $k \geq 3$, так что $\mathbf{v} = \nabla \lambda_1(t, x_k) + s(t) \nabla \lambda_2(t, x_k)$).

Интегрирование уравнения энергии. Теорема Бернулли Дифференциальное уравнение энергии, получаемое непосредственно из закона изменения полной энергии (см. ч. 2, § 13), имеет вид

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e \right) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v}) + \text{div}(\lambda \nabla T). \quad (1.23)$$

Это уравнение можно получить, если умножить (1.2) скалярно на \mathbf{v} и сложить с уравнением (1.3).

При определенных условиях уравнение (1.23) можно проинтегрировать. Пусть $\mathbf{f} = -\nabla \Pi$ и $p_{ik} = -p \delta_{ik} + p'_{ik}$. Тогда имеем

$$\mathbf{f} \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \Pi = -\frac{d\Pi}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(-p\delta_{ik} + p'_{ik}) v_i \right] = -\frac{\partial}{\partial x_k} (p v_k) + \frac{\partial}{\partial x_k} (p'_{ik} v_i).$$

Используя уравнение неразрывности (1.1), получаем

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (p v_k) = \frac{\mathbf{v} \cdot \nabla p}{\rho} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \mathbf{v} \cdot \nabla p - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}.$$

В силу этих преобразований, (1.23) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \Pi \right) = \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p'_{ik} v_i + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \quad (1.24)$$

Отсюда, если движение стационарно, а вязкость и теплопроводность отсутствуют, то в каждой частице, вдоль линий тока, которые в данном случае совпадают с траекториями, имеет место соотношение:

$$\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} + \Pi \equiv H = \text{const}. \quad (1.25)$$

Этот факт, состоящий в постоянстве вдоль линий тока суммы энтальпии, потенциальной и кинетической энергий в поле внешних сил единицы массы невязкой и нетеплопроводной жидкости, движущейся стационарно, носит название *теоремы Бернулли*. Она была сформулирована Даниилом Бернулли еще в 1738 году для несжимаемой жидкости.

Левые части выражения (1.25) и интеграла Бернулли (1.18) совпадают, поскольку, отбрасывая диссипативные члены, мы рассматриваем изэнтропическое движение, для которого $ds/dt = 0$. Но тогда из (1.6) получаем:

$$\frac{de}{dt} = -p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{d}{dt} \mathcal{P}(\rho).$$

Отсюда следует: $e + p/\rho = \mathcal{P}(\rho) + \text{const}$.

Заметим, что константа $C(L)$ в интеграле Бернулли равна H лишь для изэнтропического движения.

Таким образом, интеграл Бернулли (1.18), установленный независимо от уравнения энергии, носит гораздо более общий характер, поскольку справедлив и вдоль вихревых линий. В то же время, уравнение энергии имеет самостоятельное значение и из него можно определить распределение температуры.

Для стационарного движения невязких и нетеплопроводных сред из (1.11) имеем

$$\nabla \left(\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi \right) \equiv \nabla H = \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}.$$

Отсюда следует:

- а) вектор $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}$ образует потенциальное поле с потенциалом H ;
- б) через каждую точку пространства можно провести изоэнергетическую поверхность (поверхность уровня), на которой $H = \text{const}$ и которая ортогональна к вектору¹ $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{a}$, а касательная плоскость к этой поверхности содержит векторы \mathbf{v} и $\text{rot } \mathbf{v}$. Вектор \mathbf{a} вследствие равенства $\text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0$ удовлетворяет условию Громеки (см. задачу 4.7, ч. 2, § 4).

Поверхность уровня $H = H_0 = \text{const}$ можно построить, взяв, например, какую-то линию тока и проведя через нее все пересекающие ее вихревые линии, на которых, как и на взятой линии тока, постоянные интегрирования равны H_0 . Тогда вихревая поверхность из этих вихревых линий будет поверхностью уровня $H = H_0 = \text{const}$. Аналогично поверхностью уровня $H = H_0 = \text{const}$ будет поверхность тока, образованная всеми линиями тока, проходящими через вихревую линию, на которой $H = H_0 = \text{const}$.

Если всюду $\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = 0$, то в таком поле поверхностей уровня не существует (винтовое движение).

Несколько иным путем, чем это сделано выше, можно получить интеграл уравнения энергии (1.3) для частного случая неизэнтропического течения. Изложенный ниже подход может оказаться полезным в усложненных моделях сплошной среды, например, при учете сил взаимодействия с электромагнитным полем.

Будем исходить из дивергентной формы уравнений неразрывности и энергии стационарных движений (см. ч. 2, § 13, формулы (2.52), (2.54)), а именно

$$\text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \mathbf{N} = 0,$$

где $\mathbf{N} = \left(\frac{v^2}{2} + e \right) \rho \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{v} - \lambda \nabla T$ — вектор плотности потока энергии.

Проинтегрируем эти уравнения по объему элементарной трубки тока с боковой поверхностью S_s и ориентированными поперечными сечениями δS_1 и δS_2

$$(\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S})_1 + (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S})_2 = 0, \tag{1.26}$$

¹ Этот вектор вследствие $\text{rot}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = 0$ удовлетворяет условию Громеки (см. задачу 4.7, ч. 2, § 4).

$$\begin{aligned} & \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S})_1 + \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S})_2 = \\ & = \left(p'_{ik} v_k + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) (\delta S_i)_1 + \left(p'_{ik} v_k + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) (\delta S_i)_2 + \int_{S_\delta} \left(p'_{ik} v_k + \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) (\delta S_i)_\delta. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь использовано для тензора \hat{p} его выражение через тензор вязких напряжений \hat{p}' и, кроме того, учтено, что на боковой поверхности трубки тока нормальная компонента скорости равна нулю, т. е. $\mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S}_\delta = 0$.

Предположим, что температура в потоке меняется лишь вдоль линий тока, т. е.

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \delta S_i \right)_{S_\delta} = \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{S_\delta} \delta S_\delta = 0,$$

так что $\nabla T = \frac{\mathbf{v}}{v} \frac{\partial T}{\partial l}$, где l — координата вдоль линии тока, а \mathbf{n} — любое нормальное направление к ней.

Допустим также, что напряжения трения таковы, что нормальные компоненты вектора $p'_{ik} v_k$ на боковой поверхности равны нулю. Это на первый взгляд искусственное требование может выполняться в ряде привычных потоков. Так, для ньютоновских жидкостей (газов) имеем

$$\begin{aligned} p'_{ik} v_k &= (2\mu v_{ik}^0 + \zeta v_{ii} \delta_{ik}) v_k = 2\mu v_{ik} v_k + \left(\zeta + \frac{2}{3} \mu \right) v_{ii} v_i = \\ &= \mu \frac{\partial}{\partial x_k} (v_i v_k) + \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\zeta - \frac{5}{3} \mu \right) v_{ii} v_i. \end{aligned}$$

В случае чисто сдвигового течения ($v_i = v_i(x_2)$, $v_2 = v_3 = 0$) имеем лишь одну компоненту этого вектора, отличную от нуля, а именно

$$p'_{21} v_1 = 3\mu \frac{d}{dx_2} \left(\frac{v_1^2}{2} \right) = 3\mu v_1 \frac{dv_1}{dx_2},$$

так что $p'_{ik} v_k|_{S_\delta} = 0$, поскольку $v_i|_{S_\delta} = 0$.

При этих условиях из (1.27) получаем

$$\left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} - \lambda \frac{\partial T}{\partial l} - A_i \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S})_1 + \left(\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} - \lambda \frac{\partial T}{\partial l} - A_i \right) (\rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{S})_2 = 0.$$

Отсюда в силу (1.26) и произвольности выбранных поперечных сечений трубки тока имеем интеграл уравнения энергии:

$$\frac{v^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho v} \frac{\partial T}{\partial l} - A_i = \text{const}, \quad (1.28)$$

где

$$A_i = \frac{p'_{ik} v_k v_i}{\rho v}.$$

Конечно, это выражение нельзя назвать в полном смысле интегралом, поскольку оно включает производные. Но в некоторых задачах оно может быть полезным. Так, например, при рассмотрении течения вязкой теплопроводной жидкости (газа) между двумя бесконечными параллельными пластинами, когда можно считать $\mathbf{v} = (v_1(x_2), 0, 0)$, $T = T(x_1)$, так что $A_i = 0$ из (1.28) имеем

$$\frac{v_1^2}{2} + e + \frac{p}{\rho} - \frac{\lambda}{\rho v_1} \frac{dT}{dx_1} = \text{const}.$$

Изменение механической энергии жидкости (газа) Рассмотрим скорость изменения механической энергии жидкой среды в потенциальном поле массовых сил. Имеем, если V — материальный объем,

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \Pi \right) dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + \Pi \right) dV = \int_V \rho \left(\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \Pi \right) dV. \quad (1.29)$$

Пусть потенциал Π не зависит явно от времени; тогда из (1.29), учитывая (1.2), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \Pi \right) dV = \int_V \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_k}{\partial x_k} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v}) dV - \int_V \mathbf{p}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} dV.$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского к первому интегралу справа, получим:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v}) dV = \int_S (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{v}) n_k dS = \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS,$$

где \mathbf{p}_n — напряжение на поверхности S , т. е. плотность внешних по отношению к рассматриваемой системе — среде в объеме V — поверхностных сил. В то же время во втором интеграле фигурируют внутренние для системы поверхностные силы — напряжения внутри объема V .

Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \Pi \right) dV = \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS - \int_V \mathbf{p}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} dV, \quad (1.30)$$

и это равенство составляет закон об изменении механической энергии:

Скорость изменения механической энергии материального односвязного объема жидкости (газа) равна сумме мощностей внешних поверхностных сил, приложенных к границе объема, и внутренних поверхностных сил, действующих внутри объема.

Если массовые силы не имеют потенциала, то закон (1.30) формулируется как закон изменения кинетической энергии («закон живых сил») в виде (см. ч. 2, § 13)

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho v^2}{2} dV = \int_V \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dV + \int_S \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{v} dS - \int_V \mathbf{p}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_k} dV.$$

Здесь справа первые два интеграла представляют собой мощность внешних массовых и поверхностных сил, приложенных к объему V .

Для случая невязких жидкостей (газов), когда $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$ из (1.30) имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + \Pi \right) dV = - \int_S p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_V p \operatorname{div} \mathbf{v} dV.$$

Здесь мощность внутренних поверхностных сил в единице объема представляет собой произведение гидростатического давления p на скорость относительного изменения объема $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

В частном случае несжимаемой среды ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) ее механическая энергия в объеме, ограниченном неподвижной непроницаемой поверхностью ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = 0$), не меняется.

Применения интегралов уравнений движения Интегралы уравнений движения, особенно интеграл Бернулли, настолько часто применяются на практике, что стоит привести несколько характерных случаев их использования.

Интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости в поле массовых сил тяжести ($\mathbf{f} = -i_z g$; $\Pi = gz$) имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = C(L). \quad (1.31)$$

Отсюда, в частности, следует, что в текущей горизонтально струйке жидкости давление меньше там, где больше скорость. При сужении канала, по которому течет жидкость, давление ее на стенки падает. Об этом

очень образно пишет А. Зоммерфельд¹: «Жидкость ведет себя гораздо разумнее толпы людей, которой надо пройти через узкий проход. Их скорость при этом убывает, а давление друг на друга растет, в противоположность тому, что происходит при движении жидкости».

В газовой динамике, в сверхзвуковом потоке сжимаемого газа наблюдается обратная картина: в расширяющемся канале скорость растет, хотя давление также падает.

Пример 1. Мерные шайбы. Трубка Пито. Трубка Вентури.

Для измерения гидродинамического давления в любом месте M потока можно подвести к нему так называемую мерную шайбу — плоскую пластинку, в которой имеется вывод в трубку манометра A (рис. 1.1). Шайба должна быть как можно меньше, чтобы не вносить в поток возмущение. Если P_M — показание манометра, а z_M — высота точки M , то, зная, что эта струйка пришла из некоторой области (например, достаточно удаленной, где скорость,

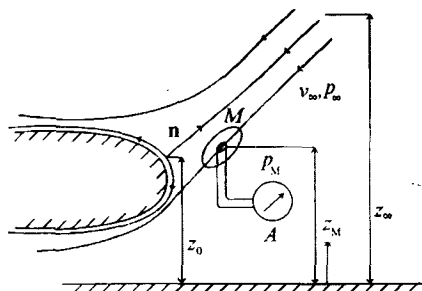


Рис. 1.1

давление и высота равны соответственно v_∞ , P_∞ , z_∞), можно найти величину скорости v_M в точке M из соотношения (1.31), записанного для двух точек струйки:

$$\frac{v_M^2}{2} + \frac{P_M}{\rho} + gz_M = \frac{v_\infty^2}{2} + \frac{P_\infty}{\rho} + gz_\infty.$$

Отсюда

$$v_M = \sqrt{v_\infty^2 + 2 \left(\frac{P_\infty - P_M}{\rho} + g(z_\infty - z_M) \right)}.$$

Одна из струек потока подойдет к обтекаемому телу по его нормали \mathbf{n} и, в силу граничных условий, ее скорость в точке встречи с телом обратится в нуль (критическая точка). Соотношение (1.31) позволяет найти давление p_0 в критической точке, имеющей высоту z_0 :

$$p_0 = \sqrt{p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} + \rho g(z_\infty - z_0)}.$$

¹ Зоммерфельд (Sommerfeld) Арнольд (1865–1951) — немецкий физик и математик. Окончил Кенигсбергский университет, работал в Геттингенском (1891–1897), в Мюнхенском (1908–1940) университетах. Научные работы в области квантовой теории атома (уточнил модель Бора), спектроскопии, квантовой теории металлов, математической физики. Автор учебников и монографий в областях теоретической физики, в том числе механики и механики сплошных сред.

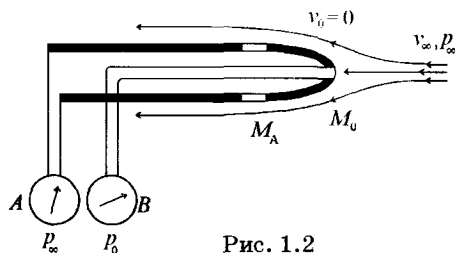


Рис. 1.2

Объединив мерную шайбу и область критической точки в одном устройстве, получим принципиальную схему *трубки Пито*, устройства, позволяющего замерять скорость полета самолета (рис. 1.2).

Если v_∞, p_∞ — скорость и давление набегающего на трубку Пито потока (скорость самолета, на котором укреплена трубка Пито, и давление на высоте полета), то манометр А покажет p_∞ , ибо он соединен с мерной шайбой M_A — отверстием во внешней оболочке трубки. В то же время манометр В покажет p_0 — давление в критической точке обтекаемой трубки. Тогда из (1.31) имеем

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p_\infty)} \quad (z_0 = z_\infty).$$

Проградуировав соответствующим образом на единой шкале разность показаний двух манометров, получают шкалу скорости полета самолета. Трубка Пито должна быть тщательно сконструирована, чтобы как можно меньше влиять на измеряемый поток. Современные трубки Пито позволяют измерять величины скорости с точностью до 0,5 %.

Для измерения скоростей полета, сравнимых со скоростью звука, расчет трубки Пито производится с учетом сжимаемости газа (см., например, [7], [8]).

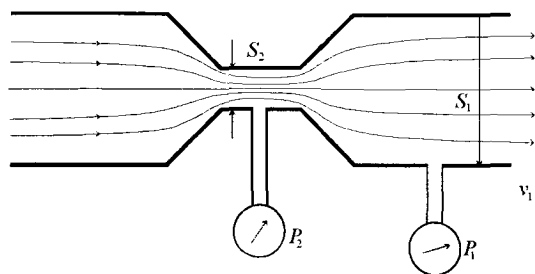


Рис. 1.3

Трубка Вентури (рис. 1.3) используется для измерения параметров течения в трубах. Величину скорости v_1 в сечении S_1 трубки можно получить на основании показаний манометров, подсоединенных к узкому сечению S_2 трубки и сечению S_1 . Тогда из (1.31) имеем

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}.$$

Кроме того, на основании уравнения неразрывности (через каждое сечение протекает одинаковый объем жидкости) $v_1 S_1 = v_2 S_2$. Таким образом, получаем значение скорости жидкости в трубе, выраженное через показания манометров.

Пример 2. Истечение из отверстия. Рассмотрим истечение жидкости из отверстия площадью S_0 в баке (рис. 1.4). Если p_1 — давление на поверхности жидкости в баке, h — высота этой поверхности над отверстием, то согласно уравнению (1.31) для любой струйки тока, начинающейся у свободной поверхности, площадь которой равна S_1 , имеем

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gh = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho},$$

где p_0 — давление снаружи, у отверстия в баке. Кроме того, из уравнения неразрывности имеем $v_1 S_1 = v_0 S_0$. Тогда, исключая из этих двух уравнений v_1 , получаем скорость истечения жидкости из отверстия

$$v_0 = \sqrt{\frac{p_1 - p_0}{\rho} + 2gh} \left(1 - \left(\frac{S_0}{S_1} \right)^2 \right)^{-1/2}. \quad (1.32)$$

Если $S_0 \ll S_1$ и бак открыт ($p_1 = p_0$), то отсюда следует формула, полученная Торричелли, учеником Галилея, еще за 100 лет до формулировки теоремы Бернулли, а именно

$$v_0 = \sqrt{2gh}.$$

Торричелли сформулировал этот результат на основании выражения для скорости свободного падения частичек жидкости.

Пример 3. Поток в спиральной камере.

Пусть в плоскую спиральную камеру поступает невязкая среда со скоростью w . Будем приближенно считать, что в каждом витке спирали частицы движутся по окружности (рис. 1.5), так что скорость имеет компоненты $v_r = 0$; $v_\varphi = v_\varphi(r)$.

Тогда в цилиндрических координатах уравнение неразрывности удовлетворяется, а из уравнения изменения количества движения получаем

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr}, \quad p = p(r). \quad (1.33)$$

Из уравнения Бернулли для спиральной линии тока имеем

$$p + \frac{\rho v_\varphi^2}{2} = C(L).$$

Поскольку на всех линиях тока на входе скорость w и давление одинаковы, то $C(L)$ не зависит от линий тока, т. е. $C(L) = C = \text{const}$. Поэтому, дифференцируя уравнение Бернулли, получим

$$\frac{dp}{dr} + \rho v_\varphi \frac{dv_\varphi}{dr} = 0.$$

Подставляя сюда dp/dr из (1.33), получаем дифференциальное уравнение для $v_\varphi(r)$:

$$\frac{dv_\varphi}{dr} + \frac{v_\varphi}{r} = 0.$$

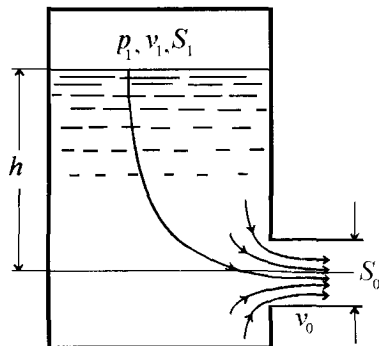


Рис. 1.4

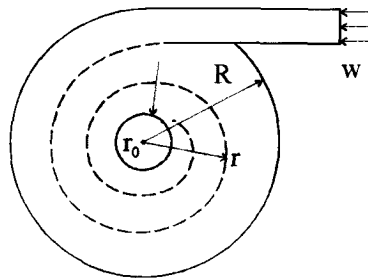


Рис. 1.5

Отсюда $v_\varphi = \frac{\text{const}}{r} = \frac{\omega R}{r}$, поскольку на входе ($r = R$) скорость равна ω . Тогда для изменения давления в камере имеем зависимость

$$p + \frac{\rho \omega^2 R^2}{2r^2} = C.$$

Таким образом, давление понижается к центру спиральной камеры.

Если в центре камеры сделать отверстие с радиусом r_0 и соединить его с внешней средой, где давление равно p_0 , то определяя из этого условия постоянную C , получим

$$p(r) = p_0 + \frac{\rho \omega^2 R^2}{2r^2} \left(\frac{r^2}{r_0^2} - 1 \right).$$

Таким образом, максимальное давление должно быть на входе в камеру, т. е. при $r = R$:

$$p_{\max} = p(R) = p_0 + \frac{\rho \omega^2}{2} \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1 \right),$$

и оно тем больше, чем меньше r_0 .

Если $p(r_0)$ — давление в центре камеры, а $p(R)$ — на входе, то понижение давления от входа к центру равно

$$p(R) - p(r_0) = \frac{\rho \omega^2}{2} \left(\frac{R^2}{r_0^2} - 1 \right).$$

Пример 4. Одномерное нестационарное движение.

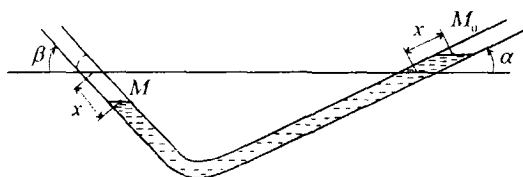


Рис. 1.6

Рассмотрим колебание столба несжимаемой жидкости в трубке (рис. 1.6) в предположении, что трубка открыта с обоих концов в атмосферу, скорость распределена по сечению трубки равномерно, длина столба жидкости в трубке равна l .

Тогда из (1.19), выбирая точки M и M_0 на концах столба жидкости, отклонившегося по оси трубки на x от положения равновесия, получаем

$$\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_{M_0} + gx \sin \alpha = \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)_M - gx \sin \beta - \int_{M_0}^M \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dL.$$

Поскольку $v = \partial x / \partial t$ и $v = v(t)$ не зависит ни от координат по сечению трубки, ни от положения сечения, то

$$\int_{M_0}^M \frac{\partial v}{\partial t} \cdot dL = \int_{M_0}^M \frac{\partial v}{\partial t} dx = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} l.$$

Вследствие того, что в точках M и M_0 одинаковы и давления, и величины скоростей, мы имеем:

$$xg(\sin \alpha + \sin \beta) + l \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0.$$

Решением этого уравнения является

$$x = A \cos(\omega t + \gamma), \quad \omega = \sqrt{\frac{g(\sin \alpha + \sin \beta)}{l}},$$

так что, действительно, жидкость в трубке находится в колебательном движении с периодом

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(\sin \alpha + \sin \beta)}}.$$

Задачи с решениями

Задача 1.1. Найти условия существования и вид интегралов Лагранжа, Громеки и Бернулли для вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости ($\rho, \mu = \text{const}$).

Решение. По условиям задачи $p'_k = 2\mu v_{ik}$, так что вместо (1.13) из (1.12) имеем

$$\left[\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi \right]_{M_0}^M = \int_{M_0}^M (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{L} - \int_{M_0}^M \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{L} - \mu \int_{M_0}^M \text{rot rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}. \quad (1)$$

Отсюда получаем:

1. Интеграл Лагранжа-Коши — для безвихревого течения вязкой несжимаемой жидкости ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$, $\mu \neq 0$) существует при тех же условиях, что и для невязкой жидкости, и в том же виде (см. (1.14)). При этом вязкие силы, действующие на элемент объема $\partial p'_k / \partial x_k$, равны нулю ($\text{rot rot } \mathbf{v} = -\Delta \mathbf{v} = 0$), хотя поверхностные напряжения трения (p'_k) могут присутствовать.

2. Интеграл Громеки для стационарных винтовых потоков вязкой несжимаемой жидкости ($\text{rot } \mathbf{v} = k\mathbf{v}$, $k = \text{const}$) существует вдоль линий, ортогональных к линиям тока (или к вихревым линиям), т. е. когда $d\mathbf{L} \perp \mathbf{v}$. Он имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \mathcal{P}(\rho) + \Pi = C_0(L),$$

где постоянная интегрирования C_0 зависит от линии, вдоль которой берется интеграл.

При этом вязкие силы, действующие на единицу объема ($\mu \Delta \mathbf{v}$) отличны от нуля и направлены в сторону, обратную скорости, а по величине пропорциональны скорости:

$$\frac{\partial p'_k}{\partial x_k} = \mu \Delta \mathbf{v} = -\mu \text{rot rot } \mathbf{v} = -\mu k^2 \mathbf{v}.$$

Интеграл Громеки, когда C_0 — тождественная постоянная, существует для потенциального поля завихренности $\Omega = \text{rot } \mathbf{v}$. Но при этом вязкие объемные силы равны нулю, ибо $\text{rot } \Omega = 0$.

3. Интеграл Бернулли существует для стационарного движения вязкой несжимаемой жидкости вдоль линий тока или вихревых линий в случае потенциальности *объемных вязких сил*, т. е. когда

$$\mu \Delta \mathbf{v} = -\mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mu \nabla \Phi, \quad (2)$$

и имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \Pi - \mu \Phi = C(L).$$

Поскольку из (2) следует $\Delta \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, то отличные от нуля потенциальные вязкие силы существуют в поле вихря $\boldsymbol{\Omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, удовлетворяющем уравнению Лапласа.

В остальных случаях интеграл Бернулли существует, когда вектор равнодействующей объемных сил вязкости $\partial \mathbf{p}'_k / \partial x_k$ перпендикулярен в каждой точке линии тока или вихревой линии. Если это не так, то можно отметить любопытное энергетическое соотношение.

Проектируя для стационарного движения уравнение (1.11) на направление линии интегрирования \mathbf{i}_L ($\mathbf{i}_L = \mathbf{v}/v$ или $\mathbf{i}_L = \operatorname{rot} \mathbf{v} / |\operatorname{rot} \mathbf{v}|$), получаем для ньютоновских сред

$$\frac{\partial}{\partial L} \left(\frac{v^2}{2} + \rho(\rho) + \Pi \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{p}'_k}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_L = \left(v \Delta \mathbf{v} + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{v}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{i}_L.$$

Если правая часть этого соотношения отрицательна, то сумма полной энтальпии и потенциальной энергии единицы массы вдоль линии интегрирования уменьшается. Так, в случае винтового движения несжимаемой жидкости ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = k\mathbf{v}$, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) имеем

$$v \Delta \mathbf{v} = -v \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = -vk \operatorname{rot} \mathbf{v} = -vk^2 \mathbf{v}.$$

Таким образом, при перемещении вдоль линий тока сумма полной энтальпии и потенциальной энергии массы вязкой среды всегда убывает, но при $k < 0$ (левый винт) вдоль *вихревых линий* — возрастает.

Задача 1.2. *Определить скорость истечения баротропной жидкости из отверстия, находящегося на расстоянии h ниже уровня жидкости в баке, где давление равно p_1 (наружное давление — p_0). Уравнение состояния жидкости $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^{\kappa}$, $\kappa > 1$.*

Решение. Для рассматриваемого случая функция $\mathcal{P}(\rho)$ равна

$$\mathcal{P}(\rho) = \int \frac{dp(\rho)}{\rho} = \frac{\kappa p}{(\kappa - 1)\rho}.$$

Поэтому интеграл Бернулли имеет вид

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{\kappa p_1}{(\kappa - 1)\rho_1} + gh = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\kappa p_0}{(\kappa - 1)\rho_0},$$

а из уравнения неразрывности имеем: $\rho_0 v_0 S_0 = \rho_1 v_1 S_1$, где S_0 — площадь отверстия и S_1 — площадь поверхности жидкости в баке.

Из этих двух соотношений получаем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\alpha^{\frac{\kappa-1}{2}} - 1 \right) + 2gh \left(1 - \left(\beta \alpha^{-\frac{1}{\kappa}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}},$$

где обозначено $\alpha = p_1/p_0$; $\beta = S_0/S_1$.

При $\beta \ll 1$ и $\alpha \approx 1$ получаем формулу Торричелли.

Задача 1.3. Показать, что стационарный поток газа, у которого плотность меняется с давлением по закону $p = C\rho^\kappa$ ($\kappa > 1$), будет ускоряться в сужающейся трубке только при $v^2 < \kappa p/\rho$.

Решение. Для рассматриваемого случая уравнение Бернулли (см. предыдущую задачу) можно записать в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa C \rho^{\kappa-1}}{\kappa-1} = C_0, \quad (1)$$

причем $C_0 = \text{const}$, если считать, что в каком-то сечении трубы все величины имеют одинаковое значение для всех струек потока (однородный по каждому поперечному сечению поток). Тогда, дифференцируя (1), получаем

$$v dv + \kappa C \rho^{\kappa-2} d\rho = 0. \quad (2)$$

Поскольку через каждое сечение S трубы протекает одно и то же количество среды, то

$$\rho v S = \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0.$$

Определяя отсюда $d\rho$ и подставляя в (2), имеем

$$\left(v^2 - \kappa \frac{p}{\rho} \right) \frac{dv}{v} = \kappa \frac{p}{\rho} \frac{dS}{S}.$$

Это соотношение показывает, что газ ускоряется в сужающейся трубке (dv и dS имеют разные знаки) только тогда, когда $v < \sqrt{\kappa(p/\rho)}$, если же $v > \sqrt{\kappa(p/\rho)}$, то необходимо иметь расширяющуюся трубу, чтобы в ней газ ускорился.

Величина $a = \sqrt{\kappa(p/\rho)}$ является известной из газодинамики скоростью распространения звука в газе с давлением p , плотностью ρ и отношением теплоемкостей $\kappa = c_p/c_v$.

Задача 1.4. Найти форму сосуда вращения, употребляемого для водяных часов, исходя из требования равномерного изменения уровня жидкости в верхней части (см. рис. 1.7).

Решение. Считая жидкость несжимаемой и принимая давление в сечении S (верхний уровень) и в сечении S_0 (наименьшее сечение) равными, из уравнения (1.31) имеем

$$\frac{v^2}{2} + g y = \frac{v_0^2}{2},$$

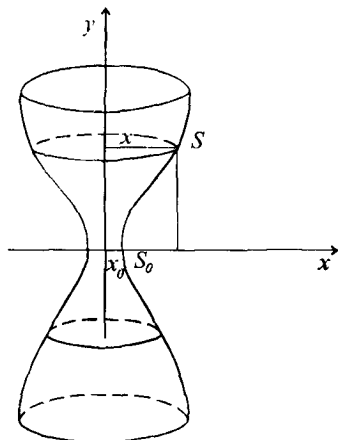


Рис. 1.7

где v — скорость опускания уровня в часах, она должна быть постоянной и соответствовать градуировке часов, а $v_0 = vS/S_0 = vx^2/x_0^2$ в силу уравнения неразрывности для круглых сечений с радиусами x и x_0 .

Подставляя выражение для v_0 в вышеприведенное равенство, получаем уравнение образующей кривой

$$\frac{x}{x_0} = \sqrt[4]{1 + \frac{y}{y_0}},$$

где x_0 — радиус наименьшего отверстия $y_0 = \frac{v^2}{2g}$, — постоянная (если $v = \text{const}$) торричеллева высота уровня жидкости.

Задача 1.5. Показать, что при течении несжимаемой жидкости в открытом канале с прямоугольным сечением (a — ширина канала, h — глубина, т. е. высота свободной поверхности) плавное увеличение ширины канала вызывает повышение его уровня h только в случае, если скорость в канале удовлетворяет неравенству $v^2 < gh$.

Решение. На основании уравнения Бернулли для струек на поверхности

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = \text{const}.$$

Поскольку на поверхности $p = p_{\text{атм}} = \text{const}$ и предполагается, что скорость v постоянна по сечению канала, то

$$v^2 + 2gh = \text{const}. \quad (1)$$

Кроме того, из уравнения неразрывности имеем

$$vha = \text{const}. \quad (2)$$

Дифференцируя (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned} vdv + gdh &= 0, \\ \frac{dv}{v} + \frac{dh}{h} + \frac{da}{a} &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$a(gh - v^2)dh = v^2 h da.$$

Таким образом, при расширении канала ($da > 0$) его глубина будет увеличиваться ($dh > 0$) только в том случае, если $v^2 < gh$.

Величина \sqrt{gh} определяет скорость распространения длинных волн в канале.

Задача 1.6. Подводный взрыв. Примером использования нестационарного интеграла Лагранжа является задача о подводном взрыве.

Пусть в начальный момент времени в несжимаемой жидкости образовалась сферическая полость (пузырь) с радиусом R_0 , заполненная газом при давлении p_0 . Под действием большого давления в ней пузырь начинает расширяться, сохраняя форму шара, так что в момент времени t радиус сферы равен $R(t)$, а давление в ней — $p_R = p(R, t)$. Считая изменение состояния газа в полости адиабатическим, т. е. $p_R / p_0 = (\rho / \rho_0)^{\kappa} = (R_0 / R)^{3\kappa}$ (масса газа внутри полости не меняется), а давление жидкости вдали от полости равным p_∞ , определить зависимость $R = R(t)$ как на стадии расширения полости ($p_0 \gg p_\infty$), так и на стадии схлопывания ($p_0 \ll p_\infty$).

Решение. Поскольку движение жидкости предполагается чисто радиальным, то оно, являясь безвихревым, может быть описано потенциалом точечного источника некоторой мощности, а именно

$$\varphi(r, t) = -\frac{Q}{2\pi r}.$$

При этом радиальная скорость движения сферы равна

$$v_R = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R} = \frac{Q}{2\pi R^2}.$$

С другой стороны $v_R = \frac{dR}{dt} \equiv \dot{R}$, так что

$$\varphi(r, t) = -\frac{v_R R^2}{r} = -\frac{\dot{R} R^2}{r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\ddot{R} R^2 + 2R\dot{R}^2}{r}.$$

Для определения изменения давления в жидкости используем интеграл Лагранжа (1.14) (силой тяжести пренебрегаем):

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(t).$$

Подставляя сюда значения $v^2 = (\partial \varphi / \partial r)^2$, $\partial \varphi / \partial t$ и значение $C(t) = p_\infty / \rho$, определенное из этого уравнения при $r = \infty$, получаем

$$\frac{p(r, t) - p_\infty}{\rho} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{R} R^2}{r^2} \right)^2 - \frac{\ddot{R} R^2 + 2R\dot{R}^2}{r} = 0.$$

Поскольку $r = R$ и учитывая, что $p(R, t) = p_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa}$, получаем дифференциальное уравнение для определения зависимости $R(t)$ в виде

$$\ddot{R} + \frac{3}{2} \dot{R}^2 = \frac{p(R, t) - p_\infty}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - \frac{p_\infty}{p_0} \right]. \quad (1)$$

Из этой формулы, в частности, следует такой результат: если задан закон расширения пузыря $R = R(t)$ в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности, то давление на его поверхности $p(R, t)$ определяется следующей формулой

$$p(R, t) = p_{\infty} + \rho \left(\ddot{R}R + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \right) = p_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left[\frac{d^2(R^2)}{dt^2} + \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right],$$

где p_{∞} — давление в жидкости на бесконечности.

Движение полости имеет две стадии: расширение до некоторого максимального значения радиуса R_m под действием давления взрыва и затем сжатие полости до возможности ее полного исчезновения под действием давления в воде p_{∞} (схлопывание сферической полости).

Эти две стадии мы рассмотрим ниже.

На стадии интенсивного расширения пузыря ($0 < R \leq R_m$) под действием большого внутреннего давления ($p_0 \gg p_{\infty}$), когда в радиальное движение приводится вся масса воды, можно считать $p_{\infty}/p_0 \approx 0$. Умножая обе части уравнения (1), где принято $p_{\infty}/p_0 = 0$, на $2\dot{R}R^2$, получаем

$$\frac{d}{dt} (R^3 \dot{R}^2) = \frac{2p_0 R_0^{3\kappa}}{\rho} \cdot \frac{\dot{R}}{R^{3\kappa-2}}.$$

Интегрируя один раз, после определения постоянной интегрирования из условия $\dot{R} = 0$ при $R = R_0$ имеем

$$\dot{R}^2 = \frac{2c_0^2}{3(\kappa-1)} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^3 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} \right], \quad (2)$$

где обозначено $c_0^2 = p_0/\rho$.

Из (1) и (2) определяем максимальное значение скорости расширения полости \dot{R}_m и значение R/R_0 при $\dot{R} = \dot{R}_m$, причем $\ddot{R}|_{R=R_m} = 0$:

$$\dot{R}_m^2 = \frac{2c_0^2}{3\kappa^{(\kappa-1)}} \cdot \left(\frac{R}{R_0} \right)_{\dot{R}=\dot{R}_m} \equiv \frac{R_m}{R_0} = \kappa^{\frac{1}{3(\kappa-1)}}. \quad (3)$$

Значение времени достижения \dot{R}_m можно представить простой формулой для случая $\kappa = 4/3$. Это близко к значению $\kappa = 1,4$ для воздуха, а вообще κ зависит от состава газа, образующегося при взрыве. Для $\kappa = 4/3$, вводя переменную $n(t) = (R(t) - R_0)/R_0$, являющуюся относительным увеличением радиуса полости взрыва, из (2) интегрированием получаем

$$\frac{c_0 t}{R_0} = \sqrt{2n} \left(1 + \frac{2}{3}n + \frac{1}{5}n^2 \right). \quad (4)$$

Из формулы (3) при $\kappa = 4/3$ имеем $R_m/R_0 = 4/3$, причем расширение от R_0 до R_m происходит за весьма краткий промежуток времени. Так при $n = 1/3$, $p_0 = 1000$ атм, $R_0 = 100$ см, $c_0 = 3,16 \cdot 10^4$ см/сек получаем из (4): $t \approx 0,0016$ сек. При этом $\dot{R}_m \approx 145$ м/сек что составляет 0,1 скорости звука в воде. При давлении, скажем $p_0 \sim 10000$ атм, пренебрегать сжимаемостью воды уже нельзя.

По мере расширения полости давление в ней начинает падать (по адиабатическому закону): $p(R, t)/p_0 = (R_0/R(t))^{3\kappa}$. На поздних стадиях расширения пузыря, когда его радиус превосходит равновесное значение, давление в нем падает до величин $p(R, t) \ll p_\infty$. Говорят, что полость «становится пустой», и начинается обратный процесс — сжатие пузыря. Для этого случая из $(p_0/p_\infty \ll 1)$ (1) имеем

$$\ddot{R}R + \frac{3}{2}\dot{R}^2 = -\frac{p_\infty}{\rho}.$$

Умножая это уравнение на $2\dot{R}R^2$, интегрируя один раз и определяя постоянную интегрирования из условия $\dot{R} = 0$ при $R(t) = R_m$ (начальное (максимальное) значение R_m расширившейся полости, от которой начинается сжатие), получаем

$$R^3\dot{R}^2 = \frac{2}{3}\frac{p_\infty}{\rho}(R_m^3 - R^3). \quad (5)$$

Отсюда можно получить зависимость $t(R)$ в виде

$$C_\infty |t - t_m| = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{R(t)}^{R_m} \frac{dR}{\sqrt{(R_m/R)^3 - 1}}, \quad (6)$$

где $C_\infty = \sqrt{p_\infty/\rho}$, — начальный момент времени, при котором $R = R_m$.

Это выражение определяет также и разность $t_1 - t_m$ — время полного исчезновения пузыря, когда $R = 0$. Вводя в (6) переменную $R/R_m = x^{1/3}$, получаем

$$C_\infty |t - t_m| = \frac{R_m}{\sqrt{6}} \int_{0}^1 x^{-1/6} (1-x)^{-1/2} dx.$$

Таким образом, пустая полость при сжатии от R_m исчезает полностью за промежуток $t_1 - t_m$, равный

$$|t_1 - t_m| = \frac{R_m}{C_\infty \sqrt{6}} \int_0^1 x^{-1/6} (1-x)^{-1/2} dx = \frac{R_m}{C_\infty \sqrt{6}} \frac{\Gamma(5/6)\Gamma(1/2)}{\Gamma(4/3)} \approx 0,915 \frac{R_m}{C_\infty}. \quad (7)$$

Заметим, что уравнение (1) умноженное на $4\pi\rho R^2\dot{R}$ и записанное в виде

$$2\pi\rho \frac{d}{dt} R^3\dot{R}^2 = (p(R, t) - p_\infty) 4\pi R^2\dot{R}, \quad (8)$$

можно интерпретировать как уравнение энергии, поскольку полная кинетическая энергия жидкости, приводимой в движение взрывом, равна

$$T = \frac{\rho}{2} \int_R^{\infty} v^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{\rho}{2} 4\pi \int_R^{\infty} \left(\frac{\dot{R}R^2}{r^2} \right) r^2 dr = 2\pi\rho R^3\dot{R}^2.$$

Мощность сил давления, действующих на жидкость, равна правой части (8).

Рассматривая работу, производимую давлением p_∞ при расширении полости от $R = 0$ до R_m , за время t_m , получим

$$p_\infty \int_0^{t_m} 4\pi r^2 \cdot v dt = p_\infty \int_0^{t_m} 4\pi \dot{R} R^2 dt = 4\pi p_\infty \int_0^{R_m} R^2 dR = 4\pi p_\infty \frac{R_m^3}{3}. \quad (9)$$

Если пренебречь потерями кинетической энергии взрыва (теплопроводность, теплоизлучение и др.), то эту работу можно приравнять к энергии взрыва и использовать для экспериментального определения R_m .

Наблюдения показывают, что соотношения (6) и (9) по определению t_m и R_m хорошо согласуются с опытом, если только R_m мало по сравнению с глубиной взрыва, когда можно пренебречь влиянием сил тяжести, т. е. $R_m \ll p_\infty / \rho g$. Эта оценка следует из того, что максимальное ускорение на границе полости при $R = R_m$, когда $\dot{R} = 0$ в силу (4), равно $p_\infty / \rho R_m$, а ускорение подъема газового пузыря (см. пример в § 2 о поступательном движении шара) равно $2g$, и если этим пренебрегать, то должно быть $g \ll p_\infty / \rho R_m$.

Упражнения

1. Определить давление в критической точке потока баротропного газа, если $p = C\rho^\kappa$ ($\kappa > 1$, C — постоянная).
2. Найти величину скорости в самом узком месте трубки Вентури, если с ее помощью измеряют скорость в потоке газа с постоянной температурой ($p = C\rho$, где $C = RT$, R — газовая постоянная).
3. Найти поправку для градуировки трубки Пито, если учесть, что для воздуха $p = C\rho^\kappa$.
4. Вычислить скорость истечения воды из маленького отверстия в баке, в котором поддерживается давление в 100 атм, а внешнее давление равно 1 атм. Сколько воды вытечет за 1 час?

§ 1.2. Силковое взаимодействие тела и потока жидкости (газа)

Пусть твердое тело, ограниченное поверхностью S , произвольным образом движется в жидкости (газе), имея у каждого элемента dS поверхности нормаль \mathbf{n} , скорость элемента поверхности $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t)$ и напряжение поверхностных сил \mathbf{p}_n (рис. 1.8).

Тогда главный вектор \mathbf{P} сил, действующих на тело со стороны жидкости, и главный момент этих сил \mathbf{L} относительно начала координат O_1 имеют выражения

$$\mathbf{P} = \int_S \mathbf{p}_n dS, \quad \mathbf{L} = \int_S (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n) dS. \quad (1.34)$$

Подъемная сила и сила сопротивления. Касательное, профильное и индуктивное сопротивления движению тела

Сделаем несколько замечаний относительно полной силы \mathbf{P} , записав ее выражение (см. рис. 1.8) в виде

$$\mathbf{P} = \int_S \mathbf{p}_n dS = \int_S p_{nn} \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{p}_{n\tau} dS \equiv \mathbf{P}_n + \mathbf{P}_\tau,$$

где $\mathbf{p}_{n\tau}$ — касательная к поверхности тела составляющая напряжений, действующих на тело со стороны жидкости, а p_{nn} — нормальная компонента напряжений. Соответственно с этим будем различать:

\mathbf{P}_τ — сила сопротивления трения, она возникает только за счет сил вязкости и равна нулю в невязкой жидкости;

\mathbf{P}_n — сила сопротивления за счет действия на тело нормальных к его поверхности напряжений в жидкости.

Сила \mathbf{P}_n имеет более сложную природу взаимодействия движущегося твердого тела с покоящейся на бесконечности жидкостью. Обычно в \mathbf{P} , прежде всего, различают подъемную силу ($\mathbf{P}_n^{\text{под}}$) и силу сопротивления ($\mathbf{P}_n^{\text{сопр}}$), так что

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^{\text{под}} + \mathbf{P}_n^{\text{сопр}}.$$

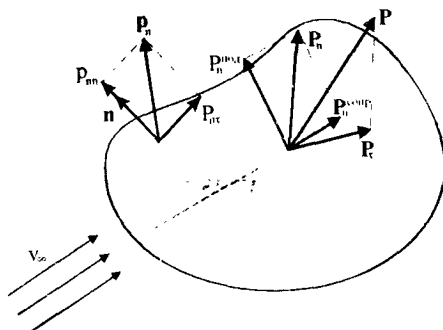


Рис. 1.8

При этом принято, что $\mathbf{P}_n^{\text{под}}$ является компонентой, перпендикулярной направлению мгновенной скорости движения тела (скорости обтекания неподвижного тела); она обязана своим происхождением, в первую очередь, возникновению и дальнейшей эволюции завихренности у твердых стенок тела.

Компонента силы $\mathbf{P}_n^{\text{сопр}}$ параллельна (и противоположно направлена) скорости движения тела в потоке. В ней обычно различают две составляющие:

а) индуктивное сопротивление, которое возникает за счет постоянно образования завихренности у движущегося тела, а также роста размера области этой завихренности (оторвавшийся пограничный слой, отдельные вихри и др., относимые от тела). В результате этого затрачивается кинетическая энергия, определяющая работу, которую тело должно совершить для преодоления этой части полного сопротивления. Сила индуктивного сопротивления будет подробно рассмотрена в теории крыла конечного размаха;

б) профильное сопротивление (или сопротивление формы) представляет собой оставшуюся (за вычетом индуктивного сопротивления) часть общего сопротивления $\mathbf{P}_n^{\text{сопр}}$ тела. Это наиболее плохо поддающаяся теории составляющая силы (даже в схеме обтекания с отрывом струй); обычно ее определяют экспериментальными методами. Профильное сопротивление зависит от формы и положения тела в потоке жидкости. Известно, что каплевидные тела, поставленные параллельно потоку, имеют минимальное профильное сопротивление.

В дальнейшем будут изучены различные случаи движения в жидкости твердого тела, рассматриваемого в том или ином приближении. Будет показано, что, например:

1) при установившемся поступательном движении тела, не вызывающем вихрей в невязкой жидкости, полное сопротивление тела равно нулю, т. е. $\mathbf{P}_\tau = 0$ и $\mathbf{P}_n^{\text{сопр}} = 0$ (парадокс Д'Аламбера);

2) в невязкой жидкости $\mathbf{P}_\tau = 0$;

3) при безотрывном обтекании тела, когда завихренность локализована в тонком пограничном слое, толщиной которого можно пренебречь, $\mathbf{P}_n^{\text{сопр}} = 0$, а $\mathbf{P}_n^{\text{сопр}}$ определяется по теореме Жуковского на основе допущения

о существовании постоянной циркуляции скорости вокруг профиля (двумерного). При этом сила сопротивления трения $P_t \neq 0$ и может быть рассчитана с учетом течения в пограничном слое;

4) при обтекании крыльев бесконечного размаха (двумерные потоки) индуктивное сопротивление равно нулю;

5) при обтекании тел с отрывом струй (двумерные задачи) профильное сопротивление тела отлично от нуля и поддается теоретическому анализу.

Эти и другие выводы относительно главного вектора P содержатся в последующем изложении гидромеханики.

Метод контрольной поверхности

Для вычисления усилий, действующих на тело со стороны жидкости, как это следует из (1.34), необходимо из уравнений движения определить вектор p_n на поверхности тела S .

В то же время оказывается возможным избежать этой стандартной, зачастую трудоемкой процедуры, если ввести в рассмотрение так называемую *контрольную поверхность* S_0 . Это оправдано, когда не интересуются структурой потока у твердого тела, а лишь силами взаимодействия между ними. Будем считать, что рассматриваемое тело имеет конечные размеры.

Контрольная поверхность S_0 — геометрическая неподвижная поверхность, проведенная так, чтобы в рассматриваемый момент времени она охватывала S — поверхность движущегося тела; в остальном эта поверхность произвольна.

В общем случае движения твердого тела в безграничном объеме жидкости, покоящейся в бесконечности, метод контрольной поверхности позволяет выразить усилия через интегральные параметры потока (p_n , p и v) на контрольной поверхности и через скорость изменения количества движения жидкости в объеме между S и S_0 (см. (1.35) и (1.36)). Затем, удаляя S_0 на бесконечность, можно свести задачу к частным случаям движения тела (см. (1.41) и (1.42)).

В случае поступательного движения тела с постоянной скоростью можно довольно просто решить ряд важных в приложении задач, сводя

их к обтеканию тела стационарным потоком жидкости путем подходящего выбора контрольной поверхности. Этот прием известен, как применение теоремы импульсов.

Метод контрольной поверхности эффективен в применении к безвихревому движению невязкой несжимаемой жидкости, т. е. когда $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$, а при помощи интеграла Лагранжа-Коши p можно простейшим образом выразить через v^2 .

Рассмотрим применение метода контрольной поверхности при изучении произвольного движения твердого тела в жидкости.

Общий случай движения тела в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности. Присоединенные массы

Пусть твердое тело с поверхностью S движется произвольным образом. Применим к геометрическому объему V_w между S и S_0 формулу (2.47) из ч. 2, § 13, учитывая, что внешняя к области V_w нормаль на поверхности S равна \mathbf{n} (рис. 1.9).

Поскольку для геометрической поверхности $S_w = S + S_0$, имеем: $\mathbf{w}|_{S_0} = 0$ в силу неподвижности поверхности S_0 , $\mathbf{w}|_S = \mathbf{v}_S$, где \mathbf{v}_S — скорость движения тела. В случае непроницаемой поверхности

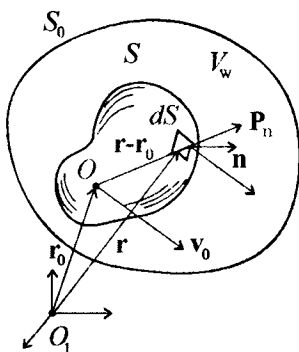


Рис. 1.9.

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_S = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}|_S \cdot \mathbf{n},$$

т. е. $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}|_S = 0$, где \mathbf{v} — скорость жидкости. Таким образом, из (2.47), учитывая (1.34), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \mathbf{v} dV &= \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS - \\ &- \int_{S_0} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{V_w} \rho \mathbf{f} dV - \int_S \mathbf{p}_n dS + \int_{S_0} \mathbf{p}_n dS = \\ &= - \int_{S_0} \rho \mathbf{v} v_n dS + \int_{V_w} \rho \mathbf{f} dV - \mathbf{P} + \int_{S_0} \mathbf{p}_n dS. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathbf{P} = - \frac{d}{dt} \int_{V_w} \rho \mathbf{v} dV + \int_{V_w} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_0} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n) dS. \quad (1.35)$$

Аналогично, применяя общую формулу (2.45) из ч. 2, § 13 (для $\Phi = (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v})$, $\mathbf{F} = (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f})$ и $\mathbf{P} = (\mathbf{r} \times \mathbf{p}_n)$), получаем

$$\mathbf{L} = -\frac{d}{dt} \int_{V_n} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v}) dV + \int_{V_n} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}) dV + \int_{S_n} \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n) dS. \quad (1.36)$$

Рассматривая общий случай нестационарного движения твердого непроницаемого тела в безграничной жидкости, предположим, что произвольное движение тела в несжимаемой невязкой жидкости ($\rho = \text{const}$, $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$) вызывает *безвихревое движение жидкости* ($\text{rot} \mathbf{v} = 0$). Тогда считая, что массовые силы потенциальны ($\mathbf{f} = -\nabla \Pi$), мы можем воспользоваться интегралом Лагранжа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Pi = C(t), \quad (1.37)$$

где $C(t)$ — функция только времени.

Преобразуем для рассматриваемого случая общее выражение (1.35).

Применяя формулу Гаусса-Остроградского и учитывая, что S_0 — неподвижная поверхность, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_n} \rho \mathbf{v} dV &= \rho \frac{d}{dt} \int_{V_n} \nabla \varphi dV = \rho \frac{d}{dt} \left(\int_{S_0} \varphi \mathbf{n} dS - \int_S \varphi \mathbf{n} dS \right) = \\ &= \rho \int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{n} dS - \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \mathbf{n} dS. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Тогда, подставляя в (1.35) выражение для p из (1.37) и, учитывая (1.38), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= -\rho \int_{S_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{n} dS + \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \mathbf{n} dS - \\ &- \int_{S_0} \left(\rho \mathbf{v} v_n - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \mathbf{n} - \rho \frac{v^2}{2} \mathbf{n} - \rho \Pi \mathbf{n} + C(t) \mathbf{n} \right) dS. \end{aligned}$$

Отбрасывая интегралы, обращающиеся в нуль, окончательно имеем:

$$\mathbf{P} = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \mathbf{n} dS + \rho \int_{S_0} \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} + \Pi \mathbf{n} - v_n \mathbf{v} \right) dS. \quad (1.39)$$

Учитывая (1.37) и преобразовывая первый интеграл в (1.36) по теореме Гаусса-Остроградского, аналогично получим

$$L = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi(\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS + \rho \int_{S_0} \left(\mathbf{r} \times \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} + \Pi \mathbf{n} - v_n \mathbf{v} \right) \right) dS. \quad (1.40)$$

По поводу ограничения применимости выражений (1.39) и (1.40) в связи с требованиями потенциальности потока в невязкой жидкости напомним, что при $Re \gg 1$, все влияние вязкости сосредоточено в области тонкого пограничного слоя у поверхности твердых тел (см. ч. 2, § 14). Вне пограничного слоя поток можно рассматривать как невязкий. Поэтому, пренебрегая толщиной пограничного слоя, формулы (1.39) и (1.40) можно использовать и в случае вязких потоков при $Re \gg 1$.

Следует также отметить, что и класс безвихревых (потенциальных) потоков в идеальной жидкости отнюдь не пустой. Так, например, любое движение идеальной баротропной среды из состояния покоя (массовые силы потенциальны) на основании теоремы Лагранжа о сохранении циркуляции (см. ч. 2, § 14) будет оставаться безвихревым, поскольку в начальный момент $\Gamma_0 = 0$. Следовательно, и произвольное движение твердого тела в покоящейся на бесконечности идеальной баротропной среде также не вызывает образования вихрей.

В случае движения тела в безграничной жидкости, интегралы по контрольной поверхности S_0 можно не учитывать. Действительно, пользуясь произволом выбора S_0 , возьмем ее в виде сферы с радиусом R и перейдем к пределу в (1.39) и (1.40) при $R \rightarrow \infty$.

Тогда, поскольку потенциал φ является гармонической функцией, то на поверхности S_0 при больших R имеем (см. ч. 2, § 5): $\varphi|_{S_0} = O(1/R^\alpha)$, где $\alpha > 1$. Так как площадь поверхности расширяющейся сферы увеличивается как R^2 , значения интегралов по S_0 в (1.39) и (1.40) стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$.

Таким образом, для произвольно движущегося тела с поверхностью S , в предположении, что его движение вызывает безвихревые потоки в невязкой несжимаемой среде, покоящейся на бесконечности, получаем

$$\mathbf{P} = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi \mathbf{n} dS, \quad (1.41)$$

$$\mathbf{L} = \rho \frac{d}{dt} \int_S \varphi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS. \quad (1.42)$$

Удобно представить шесть компонент \mathbf{P} и \mathbf{L} через шесть решений задачи

$$\Delta \varphi = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}, \quad (1.43)$$

где \mathbf{v}_S — скорость любой точки непроницаемой поверхности движущегося тела, которая, как известно, может быть записана в виде

$$\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(t)$ — скорость полюса, $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ — вектор мгновенной угловой скорости тела; $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ — радиус-вектор точки поверхности относительно полюса O (см. рис. 1.9).

Граничное условие (1.43) задачи можно переписать в следующем виде, используя декартовы прямоугольные координаты:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = v_{0k} n_k + \varepsilon_{ikj} \omega_k (x_j - x_{0j}) n_i. \quad (1.44)$$

В силу линейности задачи (1.43), ее решение можно искать в виде

$$\varphi = v_{0k} \varphi_k + \omega_k \varphi_{k+3} \quad (k=1, 2, 3), \quad (1.45)$$

причем функции $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ удовлетворяют в соответствии с (1.44) условиям

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = n_k; \quad \frac{\partial \varphi_{k+3}}{\partial n} = \varepsilon_{ikj} (x_j - x_{0j}) n_i \quad (k=1, 2, 3). \quad (1.46)$$

Такое представление удобно еще и тем, что функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_6$, как это следует из граничных условий, не зависят от t . Введем шестимерные векторы $\mathbf{U} = (U_1, U_2, \dots, U_6)$ и $\mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_6)$ следующим образом:

$$\varphi = \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k, \quad A_i = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS \quad (i=1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (1.47)$$

Здесь $\partial \varphi_i / \partial n$ определяются выражениями (1.46), так что компоненты векторов равны

$$U_k = v_{0k}, \quad U_{k+3} = \omega_k, \quad A_k = -\rho \int_S \varphi n_k dS, \quad (1.48)$$

$$A_{k+3} = -\rho \varepsilon_{ikj} \int_S \varphi (x_j - x_{0j}) n_i dS \quad (k=1, 2, 3).$$

Введем в рассмотрение величины

$$\lambda_{ik} \equiv -\rho \int_S \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \varphi_k dS \quad (i, k=1, 2, 3, 4, 5, 6). \quad (1.49)$$

Тогда

$$A_i = -\rho \int_S \varphi \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = -\rho \sum_{k=1}^6 \int_S U_k \varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \sum_{k=1}^6 U_k \lambda_{ik} \quad (i=1, 2, \dots, 6). \quad (1.50)$$

Величины λ_{ik} носят название *коэффициентов присоединенных масс тела*, движущегося в жидкости.

Через присоединенные массы выражается кинетическая энергия жидкости, приведенной в движение перемещающимся в ней телом. Вычисления дают (см. первую формулу Грина из ч. 2 для $\psi = \varphi$ и $\psi = 0$).

$$T = \frac{\rho}{2} \int_V v^2 dV = \frac{\rho}{2} \int_V \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi dV = \frac{\rho}{2} \int_{S_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS. \quad (1.51)$$

При удалении S_0 на бесконечность первый интеграл обращается в нуль, а поскольку $\varphi = \sum_{k=1}^6 U_k \varphi_k$, то имеем

$$T = -\frac{\rho}{2} \int_S \left(\sum_{i=1}^6 U_i \varphi_i \sum_{k=1}^6 U_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{k=1}^6 \lambda_{ik} U_i U_k, \quad (1.52)$$

где U_1, \dots, U_6 имеют значения (1.48), а λ_{ik} определены формулами (1.49). При этом коэффициенты A_i получаются из выражения для T дифференцированием:

$$A_i = \frac{\partial T}{\partial U_i}.$$

Коэффициенты A_i называются *присоединенными импульсами* движущегося тела. Они непосредственно входят в уравнения движения твердого тела, на которое со стороны жидкости действуют сила \mathbf{P} и момент \mathbf{L} и, кроме этого, внешние усилия с главным вектором \mathbf{F} и главным моментом \mathbf{M} . Если \mathbf{K}^T — количество движения твердого тела, а \mathbf{L}^T — его кинетический момент, то уравнения движения тела в неподвижной системе координат имеют вид

$$\frac{d\mathbf{K}^T}{dt} = \mathbf{P} + \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{L}^T}{dt} = \mathbf{L} + \mathbf{M},$$

или

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{K}^T - \rho \int_S \varphi \mathbf{n} dS \right) = \mathbf{F}, \quad \frac{d}{dt} \left(\mathbf{L}^T - \rho \int_S \varphi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS \right) = \mathbf{M}. \quad (1.53)$$

Учитывая равенства (1.48), можно записать

$$\frac{d}{dt} (K_i^T + A_i) = F_i, \quad \frac{d}{dt} (L_i^T + A_{i+3}) = M_i \quad (i=1, 2, 3). \quad (1.54)$$

Если угодно, можно эти две формулы объединить, введя шестимерные векторы и для динамических характеристик твердого тела.

Присоединенные массы λ_{ik} симметричны, т. е. $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$; это следует из гармоничности φ_k . Действительно, применяя вторую формулу Грина к области V для гармонических функций φ_i и φ_k , получаем

$$\int_V (\varphi_k \Delta \varphi_i - \varphi_i \Delta \varphi_k) dV = \int_{S_0} \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS - \int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS.$$

Левая часть этого выражения равна нулю, а в правой первый интеграл при удалении S_0 на бесконечность тоже стремится к нулю, поэтому

$$\int_S \left(\varphi_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right) dS = 0,$$

т. е. $\lambda_{ik} = \lambda_{ki}$.

Таким образом, из 36 величин λ_{ik} независимыми будут только 21.

При поступательном движении тела ($\omega = 0$) число величин λ_{ik} сокращается до 9, и в этом случае они образуют симметричный тензор второго ранга, причем независимых величин остается только 6. Такое же число независимых λ_{ik} будет и при чистом вращении твердого тела в жидкости ($\mathbf{v}_0 = 0$).

Если тело и вызываемое им движение жидкости обладают свойствами симметрии, то некоторые из λ_{ik} обращаются в нуль.

Так, например, если движение жидкости симметрично относительно плоскости $(x_1 O x_2)$, то в соответствии с (1.46) можно получить, что в симметричных точках M и M'

$$\varphi_k(M) = \varphi_k(M'); \quad \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right)_M = \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right)_{M'} \quad (k=1, 2, 6),$$

$$\varphi_i(M) = -\varphi_i(M'); \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right)_M = - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right)_{M'} \quad (i = 3, 4, 5).$$

Тогда, поскольку $\left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right)_M = - \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \right)_{M'}$, для $i = 3, 4, 5$ и $k = 1, 2, 6$,

имеем для этих же значений индексов i и k : $\lambda_k = \lambda_{ki} = 0$. Таким образом, в этом случае симметрии движения отличны от нуля лишь присоединенные массы

$$\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}, \lambda_{12}, \lambda_{16}, \lambda_{26}, \lambda_{34}, \lambda_{35}, \lambda_{45}.$$

Если, $(x_1 O x_2)$ и $(x_1 O x_3)$ являются плоскостями симметрии, то отличны от нуля лишь $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}, \lambda_{26}, \lambda_{35}$. Если же все три координатные плоскости являются плоскостями симметрии, например, при движении эллипсоида, то отличны от нуля лишь $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, \lambda_{44}, \lambda_{55}, \lambda_{66}$. В случае шара, движущегося поступательно, не равны нулю только $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$.

Уравнения (1.54) записаны для неподвижной системы координат (K) , так что именно к этой системе относятся производные по времени при вычислении dA_i/dt . Если ввести подвижную, жестко связанную с телом систему координат (K') с началом в полюсе O (в начальный момент совпадающую с (K')), то, как известно из курса механики, производная по времени в системе (K') от некоторого вектора \mathbf{a} (обозначим ее $d'\mathbf{a}/dt$) равна

$$\frac{d'\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}. \quad (1.55)$$

Что касается применимости этой формулы к компонентам A_1, A_2, \dots, A_6 , то следует иметь ввиду, что ее можно применять в этом виде к первым трем компонентам; при этом, учитывая, что в выражении для φ от времени могут зависеть лишь коэффициенты при φ_k , удобно вместо $d'A_i/dt$ писать частную производную по времени $\partial A_i/\partial t$.

При вычислении dA_{i+3}/dt необходимо учитывать зависимость A_{i+3} от вектора \mathbf{r}_0 , определяющего положение полюса O (см. рис. 1.9), так что

$$\frac{dA_{i+3}}{dt} = \frac{d'A_{i+3}}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j A_{k+3} + \frac{\partial A_{i+3}}{\partial x_{0k}} \frac{dx_{0k}}{dt}.$$

Так как $dx_{0k}/dt = v_{0k}$, а $\frac{\partial A_{i+3}}{\partial x_{0k}} = -\rho \int_S \varphi \varepsilon_{ijk} n_j dS$, то

$$\frac{dA_{i+3}}{dt} = \frac{d'A_{i+3}}{dt} + \varepsilon_{ijk} \omega_j A_{k+3} - \rho \varepsilon_{ijk} v_{0k} \int_S \varphi n_j dS.$$

Таким образом, для вектора $\mathbf{A} = \rho \int_S \varphi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS$, имеющего компоненты $-A_4, -A_5, -A_6$, получаем

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d'\mathbf{A}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} + \mathbf{v}_0 \times \mathcal{A},$$

где в третьем слагаемом справа вектор \mathcal{A} имеет компоненты $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ (см. (1.48)).

Итак, в окончательном виде, заменяя производную в подвижной системе координат частной производной по времени, уравнения движения твердого тела (1.54) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{dK_i^T}{dt} &= F_i - \frac{\partial A_i}{\partial t} - \varepsilon_{ijk} \omega_j A_k, \\ \frac{dL_i^T}{dt} &= M_i - \frac{\partial A_{i+3}}{\partial t} - \varepsilon_{ijk} \omega_j A_{k+3} - \varepsilon_{ijk} v_{0j} \mathcal{A}_k \quad (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Здесь A_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) определяются по формулам (1.47), (1.48).

Иногда равенства (1.56) предпочитают писать в векторной форме через трехмерные векторы, а именно

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}^T}{dt} &= \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}) \equiv \mathbf{F} + \mathbf{P}, \\ \frac{d\mathbf{L}^T}{dt} &= \mathbf{M} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}) - (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{J}) \equiv \mathbf{M} + \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\rho \int_S \varphi \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{Q} = -\rho \int_S \varphi (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS, \quad \mathbf{P} \equiv -\partial \mathbf{J} / \partial t - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}), \\ \mathbf{L} &\equiv -\partial \mathbf{Q} / \partial t - (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q}) - (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{J}). \end{aligned}$$

Таким образом, \mathbf{P} является главным вектором, а \mathbf{L} — главный момент поверхностных сил, действующих со стороны покоящейся на бесконечности жидкости на движущееся в ней тело.

Парадокс Даламбера при равномерном поступательном движении тела конечных размеров

Из полученных выражений (1.57) следует утверждение, получившее название парадокса Даламбера¹: *если тело конечных размеров движется в жидкости поступательно с постоянной скоростью, то сила, действующая на это тело со стороны жидкости, равна нулю.*

Действительно, если $\omega = 0$ и $v_0 = \text{const}$, и поскольку в этом случае φ не зависит от времени, то $dJ/dt = 0$. Тогда из (1.57) имеем $P = 0$. При этом моментное воздействие на тело может быть отлично от нуля, так как $L = -(v_0 \times J)$. При $v_0 \parallel J$ этот момент обращается в нуль (см. последующий пример).

Пример. Поступательное движение шара.

Как известно, потенциал φ движения несжимаемой жидкости, вызываемого поступательным движением шара радиусом a со скоростью V_0 , может быть получен из потенциала точечного диполя заменой его момента m на величину $2\pi a^3 v_0$ (см. задачу 4.5, ч. 2). Поэтому имеем

$$\varphi = -\frac{v_0 \cdot r}{2r^3} a^3 = -v_0 \frac{a^3}{2r^2} \cos \theta,$$

где θ — угол между осью (x_1) , вдоль которой движется шар, и радиусом-вектором r точек его поверхности. Вследствие симметрии $\lambda_{ik} = 0$, для $i \neq k$, а

$$\lambda_{11} = -\rho \int_{S_k} \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} dS = \frac{\rho a^3}{2} \cdot 2\pi \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \pi \rho a^3.$$

Аналогично этому имеем

$$\lambda_{22} = \lambda_{33} = \frac{2}{3} \pi \rho a^3.$$

Поскольку в рассматриваемом случае поступательного движения шара $\omega = 0$, т. е. $U_4 = U_5 = U_6 = 0$ и $A_4 = A_5 = A_6 = 0$ (см. (1.50)), то в (1.57), поскольку все остальные $\lambda_{ik} = 0$, мы должны положить

¹ Даламбер (D'Alembert) Жан Лерон (1717–1783) — выдающийся французский математик, механик и философ-просветитель. В Коллеж Мазарини (1735) изучал право. Самостоятельно занимался математикой. Сформулировал (1743) общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем (принцип Д'Аламбера). Его «Трактат о равновесии и движении жидкостей» (1744) — одно из первых сочинений по гидродинамике; в нем он использует принцип равновесия, исследует законы сопротивления при движении тел в жидкостях, вихреобразование и др. Провел ряд опытов, став одним из основоположников экспериментальной гидродинамики и прикладной механики. Изучал движение планет, в частности, отклонения их орбит от эллиптической. Математические исследования, вместе с работами Л. Эйлера и Д. Бернулли, явились основой математической физики. Впервые применил функции комплексной переменной в гидродинамике: установил связь аналитических и гармонических функций. Работы по теории пределов, рядов, в алгебре. В 1751–1757 гг. вместе с Д. Дидро редактировал «Энциклопедию или Толковый словарь наук, искусств и ремесел».

$$\mathbf{Q} = 0; \quad \mathbf{J} = \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \mathbf{v}_0.$$

При этом \mathbf{L} в силу коллинеарности \mathbf{J} и \mathbf{v}_0 также равен нулю, тогда сила, действующая со стороны жидкости на движущийся шар, равна

$$\mathbf{P} = -\frac{d\mathbf{J}}{dt} = -\frac{2}{3} \pi \rho a^3 \frac{d\mathbf{v}_0}{dt}.$$

Таким образом, если масса шара равна m , так что $\mathbf{K}^r = m\mathbf{v}_0$, и на него действует внешняя сила \mathbf{F} , приложенная в центре шара, то согласно (1.57) имеем

$$\left(m + \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \right) \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{F}.$$

Отсюда следует, что поступательное движение шара в жидкости происходит так, как если бы оно совершалось в пустоте с массой шара, увеличенной на присоединенную массу, которая в этом случае равна половине массы жидкости в объеме шара.

Если шар массой m движется в поле силы тяжести, то $\mathbf{F} = \left(m - \frac{4}{3} \pi \rho R^3 \right) \mathbf{g}$, где \mathbf{F} — сила, направленная вертикально и равная силе тяжести минус архимедова сила выталкивания (см. гл. 2, (2.16)). Тогда, подставляя в предыдущую формулу выражение для \mathbf{F} , имеем

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \left(\frac{m - m_0}{m + m_0/2} \right) \mathbf{g}, \quad \text{где } m_0 = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

При $m \gg m_0$ жидкость оказывает малое влияние на движение тяжелого шарика.

Но при $m \gg m_0$ (воздушный пузырек в воде) имеем $\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \approx -2\mathbf{g}$, так что пузырьки газа в жидкости поднимаются вверх с ускорением $2\mathbf{g}$ и сохраняют это ускорение до тех пор, пока не деформируются. Полученная формула может быть использована и для оценки ускорения подъема воздушного шара.

Теорема импульсов

В гидромеханике установившихся потоков при отсутствии массовых сил (или их потенциальности) широко применяется теорема импульсов для определения сил, действующих на расположенные в потоке твердые тела.

В случае установившегося движения, если можно пренебречь действием массовых сил ($\mathbf{f} = 0$), из закона изменения количества движения среды, записанного в дивергентной форме, (ч. 2, § 13, (2.50)), имеем

$$\int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}}) dV = 0. \quad (1.58)$$

Отсюда, в случае односвязного объема среды V , переходя по формуле Гаусса-Остроградского к интегралу по поверхности S , ограничивающей геометрический объем, получаем

$$\int_S (\rho v_i v_k - p_{ik}) n^k dS \equiv \int_S \pi_{ik} n^k dS = 0, \quad (1.59)$$

где $\pi_{ik} = \rho v_i v_k - p_{ik}$ — ковариантные компоненты тензора плотности потока импульса.

В этой записи заключается теорема импульсов, которую можно сформулировать следующим образом: *в стационарном потоке жидкости (газа) при отсутствии массовых сил тензор плотности потока импульса соленоиденен, так что поток его через любую замкнутую материальную поверхность равен нулю.*

Из теоремы импульсов и выражения для силы \mathbf{P} , действующей на любую материальную поверхность S движущейся среды, получаем

$$P_i \equiv \int_S p_{ik} n^k dS = \int_S \rho v_i v_k n^k dS,$$

или

$$\mathbf{P} = \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Эта формула дает выражение для силы, действующей на любой материальный объем *жидкости (газа)* V , ограниченный поверхностью S , со стороны остального установившегося потока жидкости при отсутствии массовых сил. Она позволяет получить силу \mathbf{P} непосредственно по состоянию жидкости на поверхности S , нужно знать только плотность и скорость в каждой точке этой поверхности, и можно обойтись без решения дифференциальных уравнений движения. Если материальная поверхность S частично совпадает с поверхностью твердого тела в потоке, то теорема импульсов может быть использована для определения силы, действующей на твердое тело. Это будет разъяснено на примерах (см. задачи 2.2–2.5).

Применение теоремы импульсов, как и формул общего случая нестационарного движения тела, наиболее эффективно в случае невязких потоков.

Заметим, что теорему импульсов нетрудно сформулировать и для случая потенциальных массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla\Pi$); но это имеет смысл тогда, когда изменение потенциала Π существенно для точек поверхности S (см. (1.62)).

Отметим, что кроме теоремы импульсов (1.58), воспользовавшись уравнением изменения момента количества движения (см. ч. 2, § 13, (2.37)) для случая $\mathbf{l} = \mathbf{M} = \mathbf{m}_n = \mathbf{f} = 0$, можно получить равенство нулю *момента нормальной компоненты тензора потока импульса*, действующего на поверхность S , ограничивающую любой геометрический объем в стационарном потоке, а именно

$$\int_S \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{v} v_n - \mathbf{p}_n) dS = 0. \quad (1.60)$$

Эта теорема используется для определения линии действия силы \mathbf{P} .

Силы, действующие на тело в стационарном потоке невязкой несжимаемой жидкости

Теорема импульсов и метод контрольной поверхности позволяют получить для усилий выражения, весьма эффективные в практических применениях. остано-

вимся на этих формулах вначале для тел конечных размеров, а затем — полутел или полубесконечных тел.

1. Тело конечных размеров. Пусть тело, ограниченное поверхностью S , часть которой S_* может быть проницаемой для среды, помещено в стационарный поток несжимаемой жидкости со скоростью \mathbf{v}_∞ вдали от тела (рис. 1.10).

Применим теорему импульсов, когда $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$, для области V между поверхностью тела S и контрольной поверхностью S_0

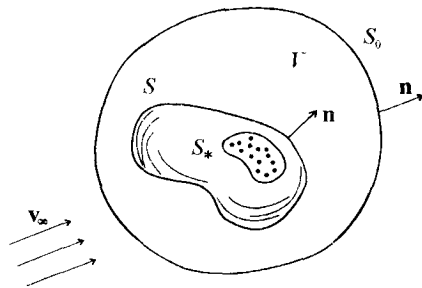


Рис. 1.10

$$\int_V \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{g}}) \rho \Pi dV = 0. \quad (1.61)$$

Здесь: $\hat{\mathbf{p}}$ — тензор напряжений, $\hat{\mathbf{g}}$ — единичный тензор, Π — потенциал массовых сил.

Переходя теперь к поверхностным интегралам, получаем

$$\mathbf{P} = \int_{S_0} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS - \int_{S_*} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS + \int_{S-S_*} \rho \Pi \mathbf{n} dS. \quad (1.62)$$

Здесь: $\mathbf{P} = \int_{S-S_*} \mathbf{p}_n dS$ — сила, действующая со стороны потока на непро-

ницаемую часть поверхности тела, где $v_n = 0$. В случае полностью непро-
ницаемого тела ($S_* = 0$) второй интеграл в (1.62) равен нулю.

Как и в случае произвольно движущегося тела, применение общего выражения (1.62) наиболее эффективно для случая безвихревых потоков идеальной несжимаемой среды, т. е. когда

$$\rho = \text{const}, \quad \mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}, \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0.$$

В этом случае из интеграла Лагранжа получаем

$$p = -\frac{\rho v^2}{2} - \rho \Pi + \text{const}.$$

Тогда, предполагая, что это соотношение справедливо и для потока у S_* , из (1.62) будем иметь

$$\mathbf{P} = \rho \int_{S_0} \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v} v_n \right) dS - \rho \int_{S_*} \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v} v_n \right) dS + \rho \int_{S-S_*} \Pi \mathbf{n} dS. \quad (1.63)$$

Последний интеграл мы в дальнейшем учитывать не будем, пренебрегая влиянием массовых сил.

Переходя в первом интеграле к относительной скорости $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ и замечая, что $\int_{S_0} \mathbf{n} dS = 0$, $\int_{S_0} v'_n dS = \int_{S_0} v_n dS \equiv Q$, где Q — объемный расход среды через пронизаемую часть поверхности тела, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} = \rho \int_{S_0} [(\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{v}') \mathbf{n} - (\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}'] dS + \rho \int_{S_0} \left[\frac{v'^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v}' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}) \right] dS - \\ - \rho \mathbf{v}_\infty Q - \rho \int_{S_*} \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v} v_n \right) dS. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Выберем в качестве поверхности S_0 сферу достаточно большого радиуса R . Тогда, учитывая асимптотику (при наличии источников и вихрей внутри S_0) вектора \mathbf{v}' (см. ч. 2, § 5), а именно $|\mathbf{v}'| = O\left(\frac{1}{R^2}\right)$, видим,

что второй интеграл убывает как R^{-2} при увеличении R . Преобразуя первый интеграл согласно формуле двойного векторного произведения, выражение (1.64) запишем в виде:

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \int_{S_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}') dS + O\left(\frac{1}{R^2}\right) - \rho \mathbf{v}_\infty Q - \rho \int_{S_*} \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v} v_n \right) dS.$$

Так как $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}' = 0$ в области V , то имеем

$$\int_{S_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{v}') dS = \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{v}') dS.$$

Обозначим $\mathbf{n} \times \mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}'_\tau$ — скорость, лежащую в касательной к S плоскости, и, устремляя $R \rightarrow \infty$, получаем

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \int_S \mathbf{v}'_\tau dS - \rho \mathbf{v}_\infty Q - \rho \int_{S_*} \left(\frac{v^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v} v_n \right) dS.$$

Будем считать, что на пронизаемой поверхности задан «вдвиг-отсос» по нормали, т. е. компонента $v_n \equiv \alpha(\mathbf{r}_s)$ считается величиной заданной. Тогда, подставляя в последний интеграл $\mathbf{v} = \alpha \mathbf{n} + \mathbf{v}_\tau$, получаем окончательно

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \int_S \mathbf{v}'_\tau dS - \rho \mathbf{v}_\infty Q - \rho \int_{S_*} \left(\frac{v_\tau^2 - \alpha^2}{2} \mathbf{n} - \alpha \mathbf{v}_\tau \right) dS. \quad (1.65)$$

Совершенно аналогичным путем из выражения для момента \mathbf{L} сил, действующих на среду в области V , из формулы (2.37) (см. ч. 2, § 13) в случае стационарного движения получаем

$$\mathbf{L} = \int_{S_0} \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n) dS - \int_{S_*} \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n) dS,$$

где $\mathbf{L} = \int_{S-S_*} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dS$ — момент сил, действующих со стороны потока на непроницаемую часть тела.

Для $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$, $\rho = \text{const}$ и $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ имеем

$$\mathbf{L} = \rho \int_S \mathbf{r} \times [\mathbf{v}_\infty \times \mathbf{v}'_\tau - \mathbf{v}_\infty v_n] dS - \rho \int_{S_*} \mathbf{r} \times \left(\frac{v_\tau^2 - \alpha^2}{2} \mathbf{n} - \alpha \mathbf{v}_\tau \right) dS. \quad (1.66)$$

При этом интегралы с квадратами относительной скорости \mathbf{v} имеют порядок $O\left(\frac{1}{R^\beta}\right)$ и исчезают при $R \rightarrow \infty$ ($\beta > 0$).

В случае плоского контура L , лежащего в плоскости $(x_1 O x_2)$, имеем $\mathbf{n} dS \equiv \mathbf{n} dL = d\mathbf{L} \times \mathbf{i}_3$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{v}'_\tau dS &= \int_S (\mathbf{n} \times \mathbf{v}') dS = \oint_L (d\mathbf{L} \times \mathbf{i}_3) \times \mathbf{v}' = \mathbf{i}_3 \oint_L \mathbf{v}' \cdot d\mathbf{L} = \\ &= \mathbf{i}_3 \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \mathbf{i}_3 \Gamma = \Gamma, \end{aligned}$$

где Γ — циркуляция по контуру L , а контур при интегрировании обходится против часовой стрелки. Таким образом, вместо (1.65) имеем

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \Gamma - \rho \mathbf{v}_\infty Q - \rho \int_{L_*} \left(\frac{v_\tau^2 - \alpha^2}{2} \mathbf{n} - \alpha \mathbf{v}_\tau \right) dL, \quad (1.67)$$

где $\Gamma = \mathbf{i}_3 \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}$, $Q = \oint_{L_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dL = \oint_{L_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dL$, L_0 — замкнутый контрольный контур.

В случае непроницаемого контура $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_L = 0, L_* = 0)$ отсюда следует теорема Н.Е. Жуковского о подъемной силе плоского контура

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \Gamma. \quad (1.68)$$

В случае непроницаемых тел общие формулы для любой жидкой среды с вектором напряжений \mathbf{p}_n имеют вид

$$\mathbf{P} = \int_{S_0} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS, \quad (1.69)$$

$$\mathbf{L} = \int_{S_0} \mathbf{r} \times (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS. \quad (1.70)$$

Если жидкость (газ) несжимаемая и невязкая, то для непроницаемой твердой поверхности и контура формулы (1.65), (1.66) и (1.67) приводят к виду

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \int_S \mathbf{v}'_\tau dS; \quad \mathbf{L} = \rho \int_S \mathbf{r} \times (\mathbf{v}_\infty \times \mathbf{v}'_\tau) dS,$$

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_\infty \times \Gamma = \rho \mathbf{v}_\infty \times \mathbf{i}_3 \oint_L \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L}.$$

Для плоского контура достаточно знать лишь значение циркуляции по контуру, чтобы получить значение силы \mathbf{P} . В случае пространственного тела необходимы сведения о касательной скорости \mathbf{v}_τ на поверхности этого тела, и это, если отбросить возможность экспериментального замера \mathbf{v}_τ , не позволяет эффективно использовать теорему импульсов.

Применение формул (1.65), (1.66) и (1.67) при рассмотрении обтекания конечного тела с пронизаемой поверхностью требует знания скорости \mathbf{v}_τ на поверхности обтекаемого тела. Сведения об этой скорости (если невозможно ее определить экспериментально) можно получить из некоторых теоретических предпосылок. Точное значение \mathbf{v}_τ получается из решений внешней краевой задачи Неймана для гармонической функции, нормальная производная которой на границе S принимает заданные значения $\alpha(\mathbf{r}_S)$. Но нахождение точного решения этой задачи для произвольного контура сводит «на нет» идею использования теоремы импульсов, поскольку приводит к необходимости определения всего поля скоростей. Приблизненно $\mathbf{v}_\tau(\mathbf{r}_S, \alpha)$ можно принимать равным $\mathbf{v}_\tau(\mathbf{r}_S, \alpha) \approx \mathbf{v}_\tau(\mathbf{r}_S, 0)$, если считать $|\alpha|$ малым.

2. Бесконечное полутело. Пусть полутело (рис. 1.11) обтекается однородным стационарным потоком со скоростью $\mathbf{v}_\infty = v_\infty \mathbf{i}_x$.

Выберем в качестве контрольной поверхности S_0 сферу с радиусом r_0 , пересекающую поверхность полутела по некоторой кривой L_S , так что часть S поверхности полутела попадает внутрь сферы.

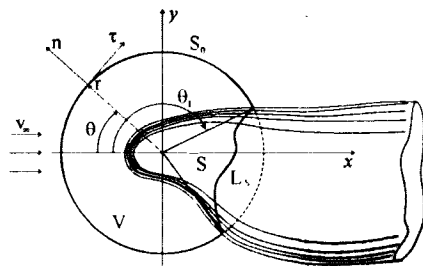


Рис. 1.11

Тогда, применяя теорему импульсов к области V между S_0 и S , получаем

$$\int_{S_0} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS = \int_S (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS,$$

где Π — потенциал массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla \Pi$), S_0 — часть сферы, находящаяся вне тела.

Считая полутело непроницаемым ($v_n|_S = 0$), отсюда получаем силу, действующую на часть полутела с поверхностью S :

$$\mathbf{P}_S = \int_{S_0} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) dS. \quad (1.71)$$

Выбирая сферические координаты (r, φ, θ) и считая известным уравнение $r = r(\varphi, \theta)$ — поверхности полутела, получаем для интеграла по S_0 :

$$\mathbf{P}_S = r_0^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_1} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) \sin \theta d\theta,$$

где $\theta_1 = \theta_1(\varphi)$ определяет положение радиус-вектора точки на L_S (см. рис. 1.11).

Тогда силу \mathbf{P} , действующую на полутело со стороны потока жидкости можно определить следующим образом (здесь и далее вместо r_0 пишем r):

$$\mathbf{P} = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{P}_S = \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta_1 \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_1} (\mathbf{p}_n - \rho \mathbf{v} v_n - \rho \Pi \mathbf{n}) \sin \theta d\theta. \quad (1.72)$$

В случае безвихревого потока невязкой несжимаемой среды, когда

$$\rho = \text{const} \text{ и } \mathbf{p}_n = -p\mathbf{n} = \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho \Pi - p_\infty - \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \rho \Pi_\infty \right) \mathbf{n}, \text{ считая, что при } v_\infty = 0$$

сила $\mathbf{P} = 0$, из (1.72) получаем

$$\mathbf{P} = \rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta_1 \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_1} \left(\frac{v^2 - v_\infty^2}{2} \mathbf{n} - \mathbf{v} v_n \right) \sin \theta d\theta. \quad (1.73)$$

Переходя к относительной скорости $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\infty$ и учитывая, что (в силу равенства $\text{div } \mathbf{v} = 0$ всюду между S_0 и S)

$$\int_{S_0} \mathbf{v}_\infty v_n dS = \mathbf{v}_\infty \int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{v}_\infty \left(\int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \right) = \mathbf{v}_\infty \int_V \text{div } \mathbf{v} dV = 0,$$

получаем

$$\mathbf{P} = \rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta_1 \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_1} \left[(\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{v}') \mathbf{n} + \frac{1}{2} v'^2 \mathbf{n} - (\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}' - \mathbf{v}' (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{n}) \right] \sin \theta d\theta. \quad (1.74)$$

Эта формула позволяет оценить значение \mathbf{P} , если известно $\mathbf{v}' = \mathbf{v}'(r(\varphi, \theta))$ на поверхности полутела. Хотя $|\mathbf{v}'| = O(r^{-2-\alpha})$, отбрасы-

вать интегралы в этом выражении нельзя, поскольку при $r \rightarrow \infty$ остается влияние характера зависимости $r = r(\varphi, \theta)$, т. е. формы поверхности полутела.

В случае осесимметричного полутела ($r = r(\theta)$) из (1.74), записывая $\mathbf{v}' = v'_r \mathbf{n} + v'_\theta \boldsymbol{\tau}$, получаем

$$\mathbf{P} = 2\pi\rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^\theta \left[\left(v_\infty v'_\theta \sin \theta - \frac{v_r'^2 - v_\theta'^2}{2} \right) \mathbf{n} + (v_\infty \cos \theta - v'_r) v'_\theta \boldsymbol{\tau} \right] \sin \theta d\theta. \quad (1.75)$$

Отсюда сила сопротивления симметричного полутела равна ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_x = -\cos \theta$; $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{i}_x = \sin \theta$)

$$P_x = \pi\rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^\theta \left[(v_r'^2 - v_\theta'^2) \cos \theta - 2v'_r v'_\theta \sin \theta \right] \sin \theta d\theta. \quad (1.76)$$

Вследствие симметрии для осесимметричного полутела $P_y = 0$. Если же рассматривать течение у половины осесимметричного полутела, расположенной над плоскостью xOz , то можно подсчитать силу $P_y/2$, как силу «прижимающую» и «оттягивающую» эту плоскость (рис. 1.12). Для этого случая из (1.75) получаем

$$P_y/2 = \pi\rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^\theta \left[2v'_\theta (v'_r \cos \theta - v_\infty \cos 2\theta) - (v_r'^2 - v_\theta'^2) \sin \theta \right] \sin \theta d\theta. \quad (1.77)$$

В случае двумерных полутел вместо (1.75) имеем

$$\mathbf{P} = 2\pi\rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^\theta \left[\left(v_\infty v'_\theta \sin \theta - \frac{v_r'^2 - v_\theta'^2}{2} \right) \mathbf{n} + (v_\infty \cos \theta - v'_r) v'_\theta \boldsymbol{\tau} \right] \sin \theta d\theta \quad (1.78)$$

и соответственно выражения для P_x и P_y .

Заметим, что формулой (1.74) можно пользоваться и для конечных тел, для которых $r|_{\theta_1 \rightarrow \pi} = r_1$ — конечная величина.

Следует отметить, что силы, действующие на тело в установившемся однородном потоке жидкости, вычисленные при помощи тео-

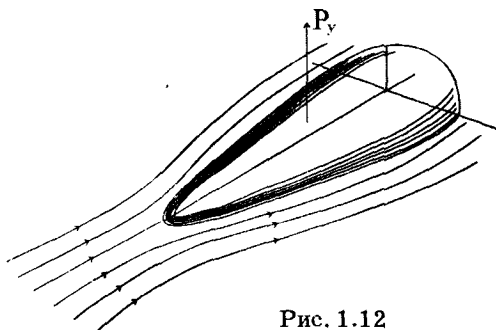


Рис. 1.12

ремы импульсов, могут быть получены как частный случай решения общей задачи о движении тела в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности.

Парадокс Даламбера для конечных тел и бесконечных полутел

Теорема импульсов позволяет проиллюстрировать парадокс Д'Аламбера при стационарном обтекании конечных тел и бесконечных полутел потоком невязкой несжимаемой жидкости.

Пусть тело (полутело) с поверхностью S , вообще говоря, несимметричное, находится в однородном установившемся потоке жидкости, имеющем далеко вверх по потоку скорость V_∞ и давление p_∞ (рис. 1.13).

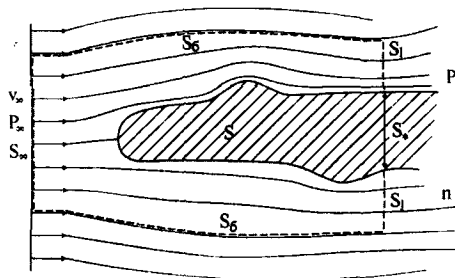


Рис. 1.13

Выберем контрольную поверхность $S_0 = S_\infty + S_\sigma + S_1$ так, как показано на рис. 1.13. Тогда на основании (1.71) имеем ($p_n = -pn$, $\Pi = 0$)

$$P_S = - \int_{S_0} (pn + \rho v v_n) dS.$$

Вычисляя этот интеграл в предположении, что по сечениям S_∞ и S_1 скорости и давления распределены равномерно и скорости в сечении S_1

направлены вдоль Ox (что, безусловно, накладывает ограничения на форму тела), а S_∞ и S_1 выбраны так, что S_σ проведено по линиям (поверхностям) тока, получаем

$$P_S = (p_\infty + \rho v_\infty^2) S_\infty n - \int_{S_\sigma} p n dS - (p_1 + \rho v_1^2) S_1 n.$$

Проектируя это равенство на ось Ox , получаем силу сопротивления P_{xS} участка полутела между S_∞ и S_1 :

$$P_{xS} = (p_\infty - p_1) S_\infty + \rho v_\infty^2 S_\infty - \rho v_1^2 S_1 + \int_{S_\sigma} p n_x ds + p_1 (S_\infty - S_1). \quad (1.79)$$

Поскольку из теоремы Бернулли следует $p_\infty - p_1 = -\frac{\rho v_\infty^2}{2} + \frac{\rho v_1^2}{2}$, а из уравнения неразрывности $v_\infty S_\infty = v_1 S_1$, то из (1.79) получаем

$$P_{xS} = \frac{\rho S_\infty}{2} (v_\infty - v_1)^2 - \int_{S_\sigma} p n_x dS + p_1 (S_\infty - S_1).$$

Введем коэффициент $k = \frac{S_\infty - S_1}{S_\infty} \equiv \frac{S_*}{S_\infty}$, отражающий характер изменения поперечного сечения S_* на бесконечности. Тогда получим

$$P_{xS} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} S_* \frac{k}{(1-k)^2} - \int_{S_\sigma} p n_x dS + p_1 (S_\infty - S_1).$$

Отсюда, удаляя S_0 на бесконечность, так что на S_0 давление $p = p_\infty$ и $n_x = 0$, получаем силу сопротивления P_{∞} полутела:

$$P_{\infty} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} \lim_{S_\infty \rightarrow \infty} \frac{k S_*}{(1-k)^2}; \quad k = \frac{S_*}{S_\infty} < 1. \quad (1.80)$$

При этом мы считаем, что тело испытывает сопротивление лишь при $v_\infty \neq 0$, так что последнее слагаемое в P_{∞} , которое в пределе равно $p_\infty S_*$ и представляет собой некомпенсированное внешнее давление на переднюю часть тела, отброшено.

Из (1.80) следует:

1. Сила сопротивления конечного тела ($S_*|_\infty = 0$) равна нулю (парадокс Даламбера для тел конечных размеров).
2. Сила сопротивления полутела, у которого на бесконечности площадь поперечного сечения конечна ($S_*|_\infty = \text{const}$), так что при расширении контрольной поверхности $\lim_{S_\infty \rightarrow \infty} k = 0$, равна нулю (парадокс Даламбера для полутел).

Задачи с решениями

Задача 2.1. Неравенство С.А. Чаплыгина¹. Показать, что сила сопротивления P_x , действующая со стороны установившегося потока со скоростью $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{i}_x v_\infty$ несжимаемой невязкой жидкости на симметричный относительно оси x контур, удовлетворяет неравенству (неравенство Чаплыгина)

$$P_x < \frac{\rho}{2} h v_\infty^2,$$

где h — наибольший поперечный размер контура (рис. 1.14), а давление в потоке может быть найдено из интеграла Бернулли.

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} (v_\infty^2 - v^2),$$

причем на L_2 (в застойной зоне) $p = p_\infty$, $\mathbf{v} = 0$.

Решение. Если $L = L_1 + L_2$ — контур поперечного сечения бесконечного цилиндра с осью Oz , то полная сила, действующая со стороны потока на единицу длины этого цилиндра, равна

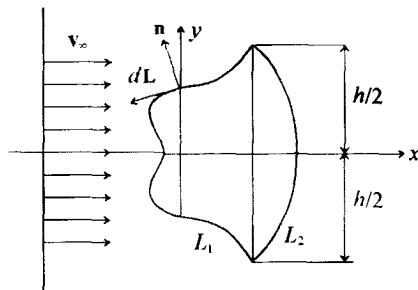


Рис. 1.14

¹ Чаплыгин Сергей Александрович (1862–1942) — выдающийся советский ученый в области теоретической механики, один из основоположников современной гидроаэромеханики. Окончил Московский университет в 1890 г., работал с 1894 г. там же и одновременно в Московском техническом училище, а с 1918 г. — в ЦАГИ. Основные работы относятся к гидроаэромеханике, теории дифференциальных уравнений, неголономной механике. Впервые (1897) вывел общее уравнение неголономных систем. Заложил основы (1902) газодинамики, основы плоских задач аэродинамики струйных движений газа, сформулировал постулат об обтекании (постулат Чаплыгина-Жуковского). Решил ряд важных задач теории авиации (подъемная сила при неустановившемся полете, механизированное крыло и др.). Разработал приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений.

$$\mathbf{P} = \int_L \mathbf{p}_n dL = - \int_L p \mathbf{n} dL = - \int_L (p - p_\infty) \mathbf{n} dL.$$

Используя выражение для p , силу P_i можно представить в виде

$$P_i = - \int_L (p - p_\infty) n_i dL = - \int_{L_1} (p - p_\infty) n_i dL - \int_{L_2} (p - p_\infty) n_i dL = \int_{-h}^{h/2} \frac{\rho}{2} (v_\infty^2 - v^2) dy,$$

поскольку $n_x dL = dy$, а $p = p_\infty$ на L_2 .

Отсюда получаем

$$P_x < \frac{\rho}{2} h v_\infty^2.$$

Задача 2.2. Определить силу реакции \mathbf{P} на трубопровод с изгибом (колени трубопровода) со стороны установившегося потока жидкости внутри трубопровода (рис. 1.15). Рассмотреть случай невязкой несжимаемой жидкости ($p_{ik} = -\rho \delta_{ik}$; $\rho = \text{const}$).

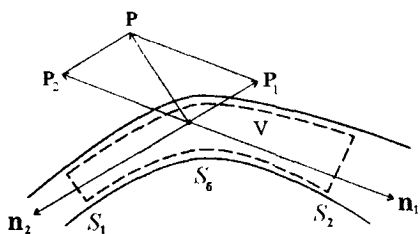


Рис. 1.15

Решение. Выберем два сечения трубы S_1 и S_2 вне изгиба, в которых можно измерить скорость и давление в среде, считая, что они там распределены равномерно. Пусть S_6 — поверхность трубы между этими сечениями. Выберем объем V так, как показано пунктиром на рисунке и применим к нему теорему импульсов (1.58). Получим

$$\int_{S_6} (p_{ik} - \rho v_i v_k) n_k dS + \int_{S_1} (p_{ik} - \rho v_i v_k) n_k dS + \int_{S_2} (p_{ik} - \rho v_i v_k) n_k dS = 0. \quad (1)$$

Поскольку труба непроницаема ($v_k n_k|_{S_6} = 0$, где n_k — компоненты единичной нормали, внешней по отношению к объему V), а сила, действующая со стороны жидкости на трубу, равна

$$P_i = - \int_{S_6} p_{ik} n_k dS,$$

то из (1) получаем

$$P_i = \int_{S_1} (p_{ik} - \rho v_i v_k) n_k dS + \int_{S_2} (p_{ik} - \rho v_i v_k) n_k dS. \quad (2)$$

Если жидкость несжимаемая и невязкая, т. е. $\rho = \text{const}$ и $p_{ik} = -\rho \delta_{ik}$, а давление и скорость потока равномерно распределены по каждому поперечному сечению трубы, причем скорости направлены по нормали к сечению, то из (2) имеем

$$\mathbf{P} = -\mathbf{n}_1 S_1 (p_1 + \rho v_1^2) - \mathbf{n}_2 S_2 (p_2 + \rho v_2^2) \equiv \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2,$$

где p_1, v_1 — давление и скорость в сечении S_1 , а p_2, v_2 — то же в сечении S_2 .

Для этого случая не обязательно замерять скорость и давление в двух сечениях трубы, ибо существует интеграл Бернулли, используя который можно выразить, скажем, p_2 и v_2 через p_1 и v_1 , а из постоянства расхода трубы — v_2 через v_1 . Отсюда имеем

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}; \quad v_2 S_2 = v_1 S_1.$$

Тогда получаем

$$\mathbf{P}_2 = -\mathbf{n}_2 S_2 (p_2 + \rho v_2^2) = -\mathbf{n}_2 S_2 \left(p_1 + \frac{\rho}{2} (v_1^2 + v_2^2) \right) = -\mathbf{n}_2 S_2 \left(p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} \left(1 + \frac{S_1^2}{S_2^2} \right) \right),$$

так что величина \mathbf{P}_2 целиком определяется характеристиками потока в сечении S_1 и отношением S_1 / S_2 .

Задача 2.3. Найти силу \mathbf{P} , действующую на стенку, при растекании по ней плоской струи невязкой, несжимаемой жидкости, направленной под углом к стенке и имеющей вдали от нее скорость, равную \mathbf{v}_∞ , и сечение S_∞ . Плотность жидкости постоянная, скорость жидкости вне области растекания можно принять равной \mathbf{v}_∞ , в силу постоянства давления p_∞ вне струи.

Определить распределение струи по стенке — соотношение между площадями поперечных сечений S_1 и S_2 (рис. 1.16), расположенных достаточно далеко от места растекания.

Решение. Выберем поверхность $S = S_\infty + S_\delta + S_1 + S_2 + S_{\text{ст}}$ (см. рисунок, где она отмечена пунктирной линией) и применим теорему импульсов (1.58), учитывая, что $p_{ik} = -p\delta_{ik}$ и давление всюду на S , кроме участка $S_{\text{ст}}$ твердой стенки, равно p_∞ . Тогда, поскольку $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{S_\infty} = 0$, получим

$$\int_{S_\infty} p \mathbf{n} dS + \int_{S-S_\infty} p_\infty \mathbf{n} dS + \int_{S_\infty} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_1} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_2} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (1)$$

Учтем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \int_S p_\infty \mathbf{n} dS &= p_\infty \int_S \mathbf{n} dS = 0, \quad \mathbf{P} = \mathbf{N} \int_{S_\infty} (p - p_\infty) dS, \\ \mathbf{v}|_{S_1} &= \mathbf{n}_1 v_\infty, \quad \mathbf{v}|_{S_2} = \mathbf{n}_2 v_\infty = -\mathbf{n}_1 v_\infty, \quad \mathbf{v}|_{S_\infty} = -\mathbf{n}_\infty v_\infty. \end{aligned}$$

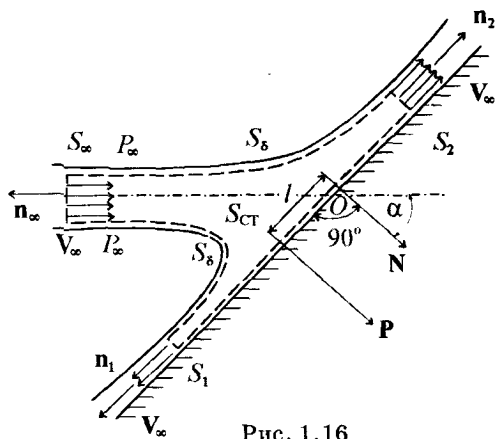


Рис. 1.16

Тогда из (1) имеем

$$\mathbf{P} = p\mathbf{N} = -\rho v_\infty^2 S_\infty \mathbf{n}_\infty + \rho v_\infty^2 \mathbf{n}_1 (S_2 - S_1). \quad (2)$$

Отсюда, умножив скалярно на \mathbf{N} , получаем величину силы P

$$P = \rho v_\infty^2 S_\infty \cos \alpha,$$

где α — угол между направлением струи и нормалью к стенке (см. рис. 1.16).

Из закона сохранения массы имеем

$$S_\infty = S_1 + S_2,$$

а умножая (2) скалярно на \mathbf{n}_1 , получим

$$S_\infty \sin \alpha = S_2 - S_1.$$

Таким образом, определяя S_1 и S_2 , получаем характерные сечения при растекании струи по стенке в виде

$$S_1 = \frac{S_\infty}{2}(1 - \sin \alpha), \quad S_2 = \frac{S_\infty}{2}(1 + \sin \alpha).$$

Точка приложения силы \mathbf{P} не совпадает с O . Вычисляя согласно (1.60) момент нормальной компоненты тензора потока импульса относительно точки O и приравнявая его к нулю, получим

$$L = \rho v_\infty^2 S_2 \frac{S_2}{2} - \rho v_\infty^2 S_1 \frac{S_1}{2} = \frac{\rho v_\infty^2}{2} (S_2^2 - S_1^2).$$

Поэтому центр давления на стенку располагается на расстоянии l ниже точки O , причем

$$l = \frac{L}{P} = \frac{1}{2} S_\infty \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, струя стремится повернуть стенку вокруг O и поставить ее перпендикулярно основному потоку.

Стоит отметить, что эта задача имеет отношение к теории кумулятивного заряда (см. [9], стр. 491).

Задача 2.4. Глиссирование. Определить силу, действующую на глиссирующую под углом α полубесконечную пластину AB , движущуюся по несжимаемой жидкости глубиной H со скоростью $\mathbf{v}_0 = v_0 \mathbf{i}_x$ (рис. 1.17).

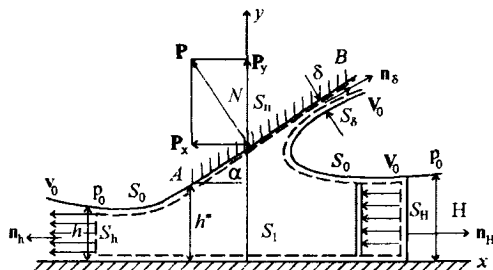


Рис. 1.17

Решение. Рассмотрим движение жидкости в подвижной системе координат, движущейся со скоростью \mathbf{v}_0 и жестко связанной с пластиной. Тогда задача будет состоять в определении силы, действующей на покоящуюся пластину со стороны потока жидкости шириной H , набегающего на пла-

стину со скоростью $\mathbf{v}_0 = -v_0 \mathbf{i}_x$ (см. рис. 1.17), причем можно считать, что вдали от пластины скорость потока не зависит от y . Часть натекающего на пластину потока толщиной δ устремится вверх по пластине, а другая основная часть пройдет под пластиной, имея толщину h вдали от места глиссирования. В силу уравнения неразрывности выполняется равенство

$$H = h + \delta.$$

Из уравнения импульсов (1.58), примененного к материальному объему жидкости, ограниченному поверхностью $S = S_h + S_l + S_H + S_0 + S_\delta + S_\Pi$, которая отмечена на рисунке пунктиром, причем сечения S_h , S_H и S_δ берутся вдали от центра глиссирования, а на свободной поверхности S_0 скорость направлена по касательной к ней, получаем

$$\begin{aligned} \int_{S-S_\Pi} p_0 \mathbf{n} dS + \int_{S_\Pi} p \mathbf{n} dS + \int_{S_h} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_h} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \\ + \int_{S_\delta} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_l} p \mathbf{n} dS = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь принято, что давление всюду на S , кроме S_Π и S_l , равно постоянному давлению p_0 . Поскольку

$$\begin{aligned} \int_S p_0 \mathbf{n} dS = p_0 \int_S \mathbf{n} dS = 0, \quad \int_{S_\Pi} (p - p_0) \mathbf{n} dS = \mathbf{P} = P \mathbf{n}, \\ \mathbf{v}|_{S_h} = v_0 \mathbf{n}_h, \quad \mathbf{v}|_{S_H} = v_0 \mathbf{n}_H, \quad \mathbf{v}|_{S_\delta} = v_0 \mathbf{n}_\delta, \end{aligned}$$

то из (1) имеем

$$\mathbf{P} = P \mathbf{n} = -\rho v_0^2 h \mathbf{n}_h - \rho v_0^2 H \mathbf{n}_H - \rho v_0^2 \delta \mathbf{n}_\delta + \int_{S_l} p \mathbf{n}_l dS.$$

Учитывая, что $\mathbf{n}_H = -\mathbf{n}_h$, получаем

$$P \mathbf{n} = -\rho v_0^2 \delta \mathbf{n}_\delta + \rho v_0^2 \delta \mathbf{n}_h + \mathbf{n}_l \int_{S_l} p dS. \quad (2)$$

Чтобы исключить составляющую силы от давления на дне, умножим скалярно (2) на \mathbf{n}_h :

$$\begin{aligned} P (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_h) &= -\rho v_0^2 \delta (\mathbf{n}_\delta \cdot \mathbf{n}_h) + \rho v_0^2 \delta, \\ P \sin \alpha &= \rho v_0^2 \delta \cos \alpha + \rho v_0^2 \delta, \end{aligned}$$

так что

$$P = \rho v_0^2 \delta \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \rho v_0^2 \delta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

При этом сила сопротивления и подъемная сила глиссирования равны

$$\begin{aligned} P_x &= P \sin \alpha = \rho v_0^2 \delta (1 + \cos \alpha), \\ P_y &= P \cos \alpha = \rho v_0^2 \delta \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, сила при глссировании выражена через толщину δ , которая, вообще говоря, зависит от α , H и h^* , т. е. $\delta = \delta(\alpha, H, h^*)$.

Полное решение задачи показывает (см. [10], ч. II), что при заданных H и h^* и при малых α толщина струи δ имеет порядок α , так что величина силы P имеет порядок α .

Задача 2.5. Сила действующая на колесо турбины. Показать, что сила, действующая со стороны каналов турбины, не зависит от скорости вращения колеса турбины (рис. 1.18).

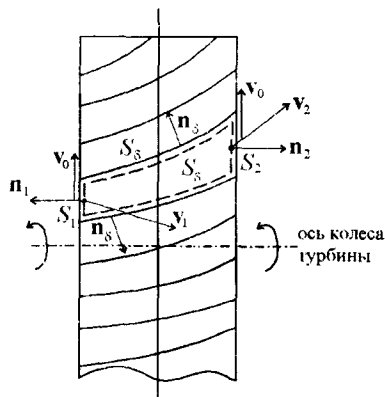


Рис. 1.18

Решение. Выделяя в канале объем (показан пунктиром) и применяя к нему теорему импульсов (1.58), получаем

$$\int_{S_8} p n dS + \int_{S-S_8} p_0 n dS + \int_{S_1} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{S_2} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = 0,$$

где p_0 — внешнее постоянное давление, так что сила, действующая на колесо турбины со стороны одного канала, равна

$$\mathbf{P} = \int_{S_8} (p - p_0) n dS.$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{P} = - \int_{S_1} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{S_2} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \rho_1 \mathbf{v}_1 (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1) S_1 - \rho_2 \mathbf{v}_2 (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2) S_2,$$

где ρ_1 , ρ_2 — средние по сечениям S_1 и S_2 плотности, а \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 — абсолютные скорости среды на входе и выходе канала. Поскольку $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_e$, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_e$, где — скорости среды относительно колеса, причем $\mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, $\mathbf{v}'_1 \cdot \mathbf{n}_1 \equiv \mathbf{v}'_{1n}$, $\mathbf{v}'_2 \cdot \mathbf{n}_2 \equiv \mathbf{v}'_{2n}$, то имеем

$$\mathbf{P} = \rho_1 \mathbf{v}'_{1n} S_1 \mathbf{v}_1 - \rho_2 \mathbf{v}'_{2n} S_2 \mathbf{v}_2 = -m (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = -m (\mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}'_1),$$

где $m = \rho_2 \mathbf{v}'_{2n} S_2 = -\rho_1 \mathbf{v}'_{1n} S_1$ (угол между \mathbf{n}_1 и \mathbf{v}'_1 — тупой) — масса среды, прогоняемой по каналу за единицу времени.

Таким образом, \mathbf{P} зависит только от относительных скоростей \mathbf{v}'_1 и \mathbf{v}'_2 .

Задача 2.6. Насадок Борда. Получить коэффициент сжатия струи при истечении через наружный насадок и через внутренний насадок (насадок Борда).

Решение. Полученное в примере 2, § 1 значение скорости истечения v_0 не всегда позволяет вычислить расход жидкости через отверстие. Дело в том, что струйки, сближаясь перед отверстием, продолжают сходиться и после выхода из бака на расстоянии нескольких диаметров отверстия (предположительно круглого). Таким образом, происходит сжатие струи, и коэффициент сжатия — отношение площади поперечного сечения

сформировавшейся свободной струи S_0 к площади отверстия S_1 (см. рис. 1.19) — не может быть определен только при помощи интеграла Бернулли. Опыты показывают, что для круглого отверстия в тонкой стенке коэффициент сжатия S_0/S_1 имеет величину 0,61–0,64.

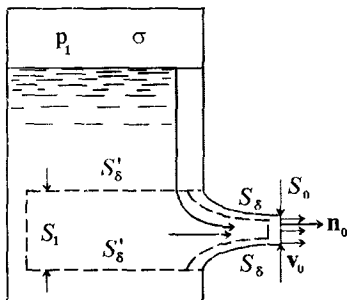


Рис. 1.19

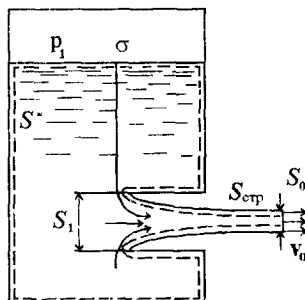


Рис. 1.20

Если к отверстию площадью S_1 в баке пристроен насадок (цилиндрическая трубка), то выходную струю жидкости можно определенным образом сформировать.

В случае наружного насадка (см. рис. 1.19), применяя теорему импульсов к объему внутри сосуда (обозначен на рисунке пунктиром), получим

$$\int_{S_1} p \mathbf{n} dS + \int_{S_j + S'_j} p \mathbf{n} dS + \int_{S_0} p \mathbf{n} dS + \int_{S_1} \rho \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) dS = 0.$$

Умножая скалярно это равенство на \mathbf{n}_0 — орт, перпендикулярный плоскости S_0 выходного отверстия в патрубке, и считая, что давление внутри бака всюду равно p_1 (силами тяжести пренебрегаем), а патрубок плавно сужается и почти всюду горизонтален (так что $\int_{S_j} p (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS \approx 0$), получаем

$$-p_1 S_1 + p_0 S_0 + \rho v_0^2 S_0 = 0.$$

Здесь также принято, что давление и скорости распределены равномерно по сечениям.

Кроме этого, в пренебрежении силами тяжести из уравнения Бернулли для струйки, начинающейся у поверхности σ жидкости в баке, при $S_0 \ll \sigma$ имеем

$$p_1 = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}.$$

Тогда, из последних двух соотношений получим

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{p_1}{p_0 + \rho v_0^2} = \frac{p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}}{p_0 + \rho v_0^2} > \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при правильно спроектированном наружном насадке, удовлетворяющем сделанным предположениям, коэффициент сжатия струи (отношение S_0/S_1) больше половины. При небольших значениях ρv_0^2 по сравнению с p_0 коэффициент сжатия струи равен почти единице.

Иная картина получается в случае внутреннего насадка (насадок Борда), который вдается внутрь бака, и струя жидкости формируется при наружном давлении p_0 .

Применение теоремы импульсов к объему (отмечен на рис. 1.20 пунктиром), включающему всю жидкость в баке и объем струи, дает

$$\int_{S^*} p \mathbf{n} dS + \int_{S_{\text{стр}}} p_0 \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \rho \mathbf{v}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{n}) dS = 0,$$

причем $S = S^* + S_{\text{стр}}$ — полная поверхность жидкого объема, $S_{\text{стр}}$ — поверхность свободной струи, а S^* — поверхность стенок плюс свободная поверхность σ .

Проектируя это равенство на направление скорости истечения \mathbf{v}_0 , получаем

$$\rho v_0^2 S_0 = - \int_S (p - p_0) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS.$$

Примем, что всюду внутри бака на поверхности S^* давление постоянно и равно p_1 , скорость направлена вдоль стенок, а на поверхности σ — пренебрежимо мала ($S_0 \ll \sigma$). Кроме этого, не будем учитывать влияние силы тяжести. Тогда

$$\int_S (p - p_0) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS = \int_{S_1} (p - p_0) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS.$$

Для замкнутой поверхности $S^* + S_1$ имеем

$$\int_{S^* + S_1} (p_1 - p) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS = 0,$$

так что отсюда следует

$$\int_{S^*} (p_1 - p) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS = - \int_{S_1} (p_1 - p) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0) dS = -(p_1 - p) S_1,$$

поскольку на S_1 внешняя нормаль равна \mathbf{n}_0 .

Объединяя полученные соотношения и учитывая, что $S = S^* + S_{\text{стр}}$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0|_{S_{\text{стр}}} \approx 0$, имеем

$$\rho v_0^2 S_0 = (p_1 - p_0) S_1.$$

Из уравнения Бернулли следует

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2}.$$

Таким образом, из последних двух соотношений имеем

$$\frac{S_0}{S_1} = \frac{1}{2},$$

так что в насадке Борда сжатие струи равно половине.

Задача 2.7. Обтекание профиля и течение через решетку. Пусть непроницаемый профиль обтекается однородным плоским потоком несжимаемой и невязкой жидкости со скоростью \mathbf{v}_∞ , плотностью $\rho = \text{const}$ и давлением p_∞ вдали от тела вверх по потоку, а за телом в следе этот поток приобретает скорость $\mathbf{v}(y)$ и давление $p(y)$ (см. рис. 1.21). При этом оказывается, что линии тока у тела достаточно быстро стано-

влятся параллельными при удалении по оси y -ов. Пусть решетка из одинаковых малых твердых профилей, расположенных близко (на расстояниях порядка размера профилей) друг к другу, обтекается таким же потоком (рис. 1.22). Как показывает наблюдение за такой решеткой очень скоро скорость становится равной v_∞ , хотя давление в потоке меняется по сравнению с p_∞ , оставаясь независимым от y . Найти выражение для силы сопротивления профиля и решетки по данным задачи.

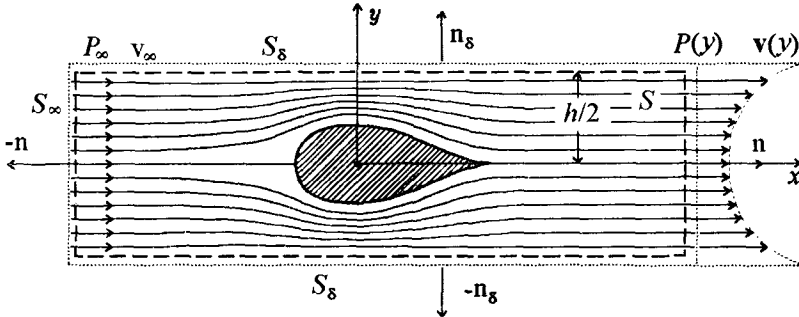


Рис. 1.21

Решение. Выберем контрольную поверхность, как указано пунктиром на рис. 1.21, и запишем выражение для силы \mathbf{P} (см (1.64) при $\Pi = 0$, $S_\delta = 0$), считая $\mathbf{p}_n = -p\mathbf{n}$,

$$\mathbf{P} = - \int_{S_0} [p\mathbf{n} + \rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] dS.$$

Применительно к $S_0 = S_\infty + S_\delta + S$ получаем, проектируя на ось x -ов:

$$\begin{aligned} P_x &= - \int_{S_\infty} [pn_x + \rho v_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] dS - \int_S [pn_x + \rho v_x(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})] dS = \\ &= (p_\infty + \rho v_\infty^2)h - \int_{-h/2}^{h/2} [p(y) + \rho v^2(y)] dy. \end{aligned}$$

Этой формулой часто пользуются в экспериментальной аэродинамике: замеряя $p(y)$ и $v(y)$ в следе за обтекаемым телом, получают силу сопротивления.

Переходя к обтеканию решетки и выбирая h , так чтобы охватить достаточное число мелких профилей, составляющих решетку, получаем

$$P_x = (p_\infty - p)/h, \quad (2)$$

поскольку на S : $v = v_\infty$ и $p = \text{const}$.

Таким образом, по этой формуле можно вычислить либо силу сопротивления решетки (замерив p), либо давление за решеткой, (замерив P_x).

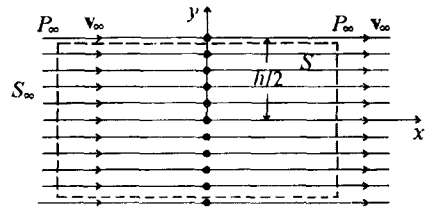


Рис. 1.22

Задача 2.8. Течение в трубе с внезапным расширением поперечного сечения. Пусть труба сечением S_1 , по которой течет невязкая несжимаемая жидкость со скоростью v_1

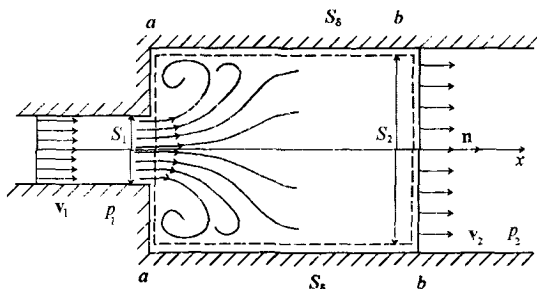


Рис. 1.23

и давлением p_1 (см. рис. 1.23), внезапно расширяется до сечения $S_2 > S_1$; после участка беспорядочного течения, в котором нельзя гарантировать ламинарность и существование непрерывных линий тока, а тем более — отсутствие вихрей, поток по трубе становится в сечении bb вновь равномерным со скоростью v_2 , и давление в нем выравнивается до p_2 .

Определить разность давлений $\delta p = p_2 - p_1$ и сравнить с разностью давлений δp_0 при плавном расширении трубы от S_1 до S_2 , когда потери при внезапном расширении потока отсутствуют и можно гарантировать на всем протяжении потока существование непрерывных линий тока.

Решение. Применяя теорему импульсов (1.58) к объему среды, указанному на рис. 1.23 пунктиром, и принимая, что всюду по сечению aa давление равно p_1 , а на его участке вне отверстия S_1 , как и на боковой поверхности S_δ , нормальная скорость равна нулю, получаем

$$-\int_{aa} (p_1 \mathbf{n} + \rho v_n \mathbf{v}) dS + \int_{bb} (p_2 \mathbf{n} + \rho v_n \mathbf{v}) dS = 0$$

или

$$-p_1 S_2 - \rho v_1^2 S_1 + (p_2 + \rho v_2^2) S_2 = 0.$$

Отсюда

$$\delta p \equiv p_2 - p_1 = \rho v_1^2 \frac{S_1}{S_2} - \rho v_2^2.$$

Поскольку из уравнения неразрывности (или равенства расходов жидкости через сечения S_1 и S_2) следует $v_1 S_1 = v_2 S_2$, получаем

$$\delta p = \rho v_1^2 k (1 - k),$$

где $k = \frac{S_1}{S_2} < 1$, $\frac{1}{k}$ — коэффициент расширения потока.

При постепенном (плавном) расширении потока из уравнения Бернулли следует, что изменение давления δp_0 равно

$$\delta p_0 = \frac{\rho v_1^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \frac{\rho v_1^2}{2} (1 - k^2).$$

Нетрудно видеть, что

$$\delta p_0 - \delta p = \frac{\rho v_1^2}{2} (1 - k)^2 > 0,$$

так что потери от внезапного расширения потока приводят к понижению давления в расширенном сечении (по сравнению со случаем плавного расширения трубы).

Задача 2.9. Показать, что сила сопротивления цилиндрического полутела, образованного линией тока при обтекании однородным потоком изолированного плоского источника, равна нулю.

Решение. Уравнение линии тока (см. задачу 3.1, ч. 2, § 3), определяющей контур полутела, в принятых в этом параграфе обозначениях r, θ имеет вид

$$r(\theta) = \frac{Q}{2\pi v_\infty} \frac{\theta}{\sin \theta} \equiv r_0 \frac{\theta}{\sin \theta},$$

а компоненты относительной скорости \mathbf{v}' :

$$v'_r = v_r + v_\infty \cos \theta = \frac{Q}{2\pi r}; \quad v'_\theta = v_\theta - v_\infty \sin \theta.$$

Тогда согласно формуле (1.78), имеем

$$\begin{aligned} P_x &= \pi \rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^\theta v'^2_r \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi \rho \left(\frac{Q}{2\pi} \right)^2 \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} \frac{1}{r} \int_0^\theta \cos \theta d\theta = \\ &= \pi \rho \left(\frac{Q}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r_0} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{\theta} \int_0^\theta \cos \theta d\theta = \frac{\pi \rho}{r_0} \left(\frac{Q}{2\pi} \right)^2 \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin \theta}{\theta} \sin \theta = 0. \end{aligned}$$

Напомним, что на бесконечности это полутело имеет конечное поперечное сечение $h = \lim_{\theta \rightarrow \pi} r \sin \theta = \pi r_0$, так что результат задачи подтверждает выводы, сделанные в конце § 2.

Задача 2.10. Показать, что сила сопротивления параболоида вращения в однородном потоке бесконечно велика.

Решение. Потенциал потока у параболоида в наших обозначениях имеет вид (см. также [8], гл. 15)

$$\varphi = -v_\infty r \cos \theta + v_\infty r_0 \ln \frac{r(1 + \cos \theta)}{2}.$$

Функция тока имеет выражение

$$\psi = -\frac{v_\infty r_0}{2} \left(r - \frac{2r_0}{1 + \cos \theta} \right) \sin^2 \theta.$$

Эта функция обращается в нуль на оси абсцисс ($\theta = 0, \theta = \pi$) и на параболе $r(\theta) = \frac{2r_0}{1 + \cos \theta}$, у которой параметр равен $2r_0$ и которая при вращении вокруг оси x образует поверхность полутела в виде параболоида вращения.

Относительная скорость потока имеет компоненты

$$v'_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + v_\infty \cos \theta = v_\infty \frac{r_0}{r};$$

$$v'_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - v_\infty \sin \theta = -v_\infty \frac{r_0}{r} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}.$$

Вычисляя по формуле P_x (1.76), получаем

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi\rho \lim_{\substack{\theta \rightarrow \pi \\ r \rightarrow \infty}} r^2 \int_0^\theta \left\{ \left[v_\infty^2 \frac{r_0^2}{r^2} - v_\infty^2 \frac{r_0^2}{r^2} \frac{\sin^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2} \right] \cos \theta + 2 \frac{v_\infty^2 r_0^2}{r^2} \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right\} \sin \theta d\theta = \\ &= 4\pi\rho v_\infty^2 r_0^2 \lim_{\theta \rightarrow \pi} \int_0^\theta \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} d\theta = -4\pi\rho v_\infty^2 r_0^2 \lim_{\theta \rightarrow \pi} \ln \frac{1 + \cos \theta}{2} \Rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отметим, что в параболоиде вращения при $\theta \rightarrow \pi$ поперечное сечение неограниченно растет, что приводит к бесконечной силе сопротивления.

Задача 2.12. Определить подъемную силу двумерного профиля в решетке.

Решение. Пусть решетка состоит из бесконечного числа одинаковых профилей, расположенных на оси NN (см. рис. 1.24), шаг решетки равен l , а вектор шага \mathbf{t} — (величина $|\mathbf{t}|$ равна шагу, а направление — перпендикулярно оси NN).

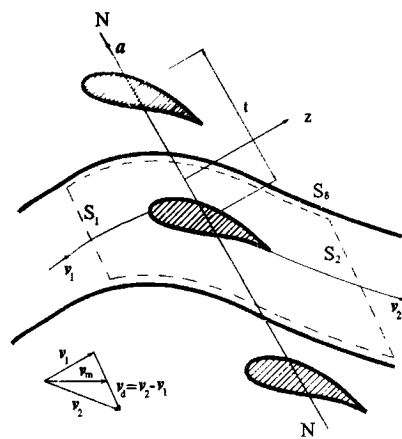


Рис. 1.24

Примем как опытный факт, что решетка профилей меняет скорость набегающего потока как по величине, так и по направлению. Таким образом, решетка не только меняет величину скорости потока, но и поворачивает его.

Пусть \mathbf{v}_1 — скорость потока перед решеткой, а \mathbf{v}_2 — после нее; соответствующие давления — p_1 и p_2 , а плотность $\rho = \text{const}$.

В качестве контрольной поверхности, к которой применим теорему импульсов, выберем поверхность ячейки, содержащей профиль (см. рис. 1.24) $S = S_1 + S_2 + S_\delta$, причем S_δ проходит по линиям тока, разделяющим соседние ячейки, а сечения S_1 и $S_2 = S_1$ проведены параллельно оси решетки и настолько от нее далеко, что можно считать поток через них однородным со скоростями \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 , соответственно. Весь поток у решетки можно разбить на ряд таких ячеек. Тогда, применяя формулу (1.69), получаем

$$\mathbf{P} = (p_1 - p_2)\mathbf{t} + \rho(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{t})\mathbf{v}_1 - \rho(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{t})\mathbf{v}_2. \quad (1)$$

Считая поток безвихревым, воспользуемся интегралом Лагранжа

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{\rho}{2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2).$$

Тогда соотношение (1) можно записать в виде

$$\mathbf{P} = \rho(\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_d)\mathbf{t} + \rho(\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = \rho(\mathbf{v}_m \cdot \mathbf{v}_d)\mathbf{t} - \rho\mathbf{v}_d(\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_m). \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}_m = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)/2$ — средняя скорость потока, $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ — скорость девиации потока, использовано условие равенства расходов через сечения S_1 и S_2 , а именно

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_2.$$

Выражение в правой части (2) можно записать в виде двойного векторного произведения, так что окончательно получаем

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_m \times (\mathbf{t} \times \mathbf{v}_d). \quad (3)$$

Поскольку $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_m$, то $\mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_d = \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = 0$, так что вектор скорости девиации перпендикулярен \mathbf{t} . Поэтому величина силы, действующей на профиль в решетке, равна

$$P = \rho v_m v_d t.$$

Из (3) следует, что вектор \mathbf{P} лежит в плоскости течения и направлен по перпендикуляру к \mathbf{v}_m в сторону, определяемую векторным произведением (3).

Если \mathbf{a} — орт оси решетки NN и \mathbf{i}_z — оси (z), перпендикулярной плоскости потока, то из $\mathbf{v}_d = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ следует $\mathbf{v}_d = (v_{2a} - v_{1a})\mathbf{a}$. Поэтому циркуляция скорости по ячейке, охватывающей профиль, равна (S_1 и S_2 — выбраны параллельными вектору \mathbf{a} , т. е. оси решетки): $\Gamma = (v_{2a} - v_{1a})t$, поскольку интегралы $\int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}_S$ по двум одинаковым частям контура одинаковы по модулю и противоположны по знаку.

Таким образом, $\mathbf{t} \times \mathbf{v}_d = \mathbf{i}_z \Gamma$, а формулу (3) можно записать в виде, соответствующем теореме Жуковского,

$$\mathbf{P} = \rho \mathbf{v}_m \times \mathbf{\Gamma},$$

где $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{i}_z \Gamma = \mathbf{i}_z (v_{2a} - v_{1a})t$ — вектор циркуляции скорости.

Упражнения

1. Найти коэффициенты R присоединенных масс кругового цилиндра с радиусом R и написать уравнение его поступательного движения под действием внешней силы \mathbf{F} в несжимаемой невязкой жидкости с плотностью ρ , если потенциал скорости движения жидкости, вызванного движением этого цилиндра со скоростью $\mathbf{v}_0 = (v_{01}, v_{02})$, имеет вид

$$\varphi = \frac{R^2}{x^2 + y^2} (v_{01}x + v_{02}y).$$

Ответ: присоединенные массы равны $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \rho\pi R^2$, а остальные $\lambda_{ik} = 0$.

2. Найти коэффициенты присоединенных масс эллиптического цилиндра, если потенциал скорости движения жидкости, вызванного поступательным движением со скоростью v_0 этого цилиндра вдоль большой оси a , имеет вид

$$\varphi = v_0 b \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} \cos \eta,$$

где ξ, η — эллиптические координаты ($x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$).

Глава 2

ГИДРОАЭРОСТАТИКА

Гидроаэростатика (или гидростатика) рассматривает законы равновесия и взаимодействия жидкостей и газов, находящихся в механическом покое с твердыми телами.

Уравнения равновесия

Если в жидкости (газе) всюду $\mathbf{v} = 0$, то из уравнений (1.1)–(1.4) имеем основную систему уравнений гидростатики:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0; \rho \mathbf{f} = \nabla p; \rho \frac{\partial e}{\partial t} = \lambda \Delta T, \quad p = p(\rho, T); \quad e = e(\rho, T). \quad (2.1)$$

Эти уравнения составляют *условия механического равновесия жидкостей (газов)*.

Условия равновесия (2.1) являются не только необходимыми, но и достаточными, поскольку тензор напряжений ($p_{ik} = -p\delta_{ik}$) в состоянии равновесия остается симметричным, так что сумма моментов всех сил относительно любого центра равна нулю.

Рассмотрим некоторые следствия из системы (2.1).

Механическое равновесие возможно лишь в безвихревом поле объемных сил $\rho \mathbf{f}$. Это следует из второго уравнения (2.1):

$$\text{rot } \rho \mathbf{f} = 0. \quad (2.2)$$

Что касается массовых сил, то их поле в общем случае должно быть винтовым, поскольку

$$\text{rot } \rho \mathbf{f} = \rho \text{rot } \mathbf{f} + \nabla \rho \times \mathbf{f} = 0, \quad (2.3)$$

так что

$$\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{f} = 0. \quad (2.4)$$

Последнее соотношение справедливо, когда существует поверхность $F(x, y, z) = \text{const}$, в каждой точке которой силовая линия поля \mathbf{f} направлена по нормали к поверхности. Действительно, если $\mathbf{f} = \lambda \nabla F$, то $\text{rot } \mathbf{f} = \nabla \lambda \times \nabla F$ и $\mathbf{f} \cdot \text{rot } \mathbf{f} = 0$.

К числу массовых сил \mathbf{f} , удовлетворяющих условию (2.4) относятся силы, имеющие потенциал Π . Для них из (2.3) следует $\nabla \rho \times \nabla \Pi = 0$, а из второго уравнения (2.1) имеем $\nabla p \times \nabla \Pi = 0$.

Таким образом, *при равновесии жидкости (газа) в поле потенциальных массовых сил изопотенциальные поверхности ($\Pi = \text{const}$) совпадают с изобарическими ($p = \text{const}$)*. Так, скажем, поверхность контактного разрыва, на которой $p = \text{const}$ совпадает с поверхностью уровня $\Pi = \text{const}$.

Таково положение и в равновесной земной атмосфере, для которой $\mathbf{f} = -\mathbf{i}_z g$ и $\Pi = -gz$ (ось z направлена от поверхности Земли).

Для баротропной среды, когда $p = p(\rho)$ и существует функция

$$\mathcal{P}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp(\rho)}{\rho}, \text{ имеем}$$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \mathcal{P}(\rho).$$

Следовательно, равновесие баротропной среды возможно только в поле потенциальных массовых сил.

Устойчивость равновесия Из уравнений (2.1) следует, что в состоянии **жидкости (газа)** равновесия стационарное поле плотности ($\partial \rho / \partial t = 0$) вместе с массовой силой \mathbf{f} целиком определяет давление в среде (с точностью до аддитивной постоянной).

Что касается температуры, то она и для газа ($e = c_v T$) и для жидкости ($e = c_p T$) определяется из третьего уравнения (2.1), так что среда, находясь в механическом равновесии $\mathbf{v} = 0$, может и не пребывать в состоянии теплового равновесия, ибо $T = T(t, \mathbf{r})$. При этом возникает вопрос об *устойчивости* механического равновесия, которое может быть нарушено конвекционными потоками, стремящимися перемешать среду так, чтобы в ней установилась постоянная температура. Таким образом, условие

отсутствия конвекции может быть названо условием сохранения устойчивости равновесия среды.

Рассмотрим условие устойчивости равновесия среды, находящейся в поле сил тяжести, т. е. когда $\mathbf{f} = -\mathbf{i}_z g$ (ось z направлена вверх).

Будем исходить (см. [11]) из того, что при устойчивом равновесии плотности нижележащих слоев больше, чем находящихся выше слоев, т. е.

$$\rho(z) > \rho(z+h),$$

если $h > 0$.

Пусть элемент из положения на высоте z , где равновесные значения энтропии и давления равны s и p , поднялся на высоту $z+h$, где равновесные значения этих параметров равны s' и p' . Тогда этот элемент, приобретя давление p' и имея плотность $\rho(p', s)$, чтобы не нарушать устойчивость равновесия среды, должен опуститься на свое место, т. е. весить больше, чем вытесняемый им элемент с плотностью $\rho(p', s')$. Иными словами, условие устойчивости имеет вид

$$\rho(p', s) > \rho(p', s') \text{ или } \rho(p', s') - \rho(p', s) < 0.$$

Разлагая $\rho(p', s') - \rho(p', s)$ по степеням $s' - s = (ds/dz)h$, получаем для главного члена разложения

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p \frac{ds}{dz} h < 0.$$

Но $(\partial \rho / \partial s)_p = (\partial \rho / \partial T)_p (\partial T / \partial s)_p = (\partial \rho / \partial T)_p (T / c_p)$ и поскольку $(dp / dT)_p < 0$, то условие устойчивости приобретает вид неравенства

$$\frac{ds}{dz} > 0. \quad (2.5)$$

Это условие применимо для таких однородных полей, которые расслаивают среду по плотности.

В силу того, что $s = s(p, T)$, в поле силы тяжести $\left(\frac{dp}{dz} = -\rho g \right)$ имеем

$$\frac{ds}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T \rho g.$$

Согласно одному из соотношений Максвелла (см. ч. 2, § 12, формула (2.25))

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right)_p = - \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T,$$

и, кроме того, $(\partial s / \partial T)_p = c_p / T$, так что условие (2.5) приобретает вид

$$\frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right)_p \rho g > 0.$$

Вводя температурный коэффициент расширения среды β , получаем

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g\beta T}{c_p}, \text{ где } \beta = \rho \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{1}{\rho} \right)_p.$$

Для идеального газа ($1/\rho = RT/p$) имеем $\beta T = 1$. Таким образом, условие устойчивости в поле сил тяжести имеет вид

$$-\frac{dT}{dz} < \frac{g}{c_p}.$$

При нарушении этого условия наступает конвекция воздушных масс.

Для воздуха ($c_p = 0,2347$ кал/г·град) имеем

$$\frac{g}{c_p} \approx 0,98 \cdot 10^{-2} \text{ град/м.}$$

Таким образом, если температура падает с высотой, причем ее уменьшение превышает по абсолютной величине один градус на сто метров, возникают конвективные потоки, перемешивающие холодные и теплые слои атмосферы.

В метеорологии, однако, известно и явление инверсии, когда $dT/dz > 0$, т.е. при возрастании высоты температура растет, более легкие слои воздуха находятся над тяжелыми — наступает, как говорят, устойчивое расслоение. Явление инверсии наступает ночью при охлаждении нижних слоев атмосферы поверхностью воды. Нагревание почвы днем, наоборот, вызывает неустойчивое расслоение атмосферы.

Барометрическая формула. В предположении, что воздух представляет собой идеальный газ, в условиях земной атмосферы ($\mathbf{f} = -\mathbf{i}_z g$) из (2.1) имеем

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho = -\frac{gp(z)}{RT(z)}, \quad (2.6)$$

откуда, интегрируя, получаем

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g}{R} \int_{z_0}^z \frac{dz}{T(z)}\right). \quad (2.7)$$

Эта зависимость давления от высоты называется *барометрической формулой*. С ее помощью строят различные модели земной атмосферы.

1. Однородная атмосфера, когда полагают воздух средой, в которой $\rho = \rho_0 = \text{const}$. Тогда из (2.6) имеем

$$p = p_0 - g\rho_0(z - z_0); \quad T = T_0 - \frac{g}{R}(z - z_0),$$

т. е. давление и температура в однородной атмосфере линейно убывает с высотой. Эта атмосфера имеет конечную высоту h_0 , которая определяется из условия $p(h_0) = 0$, так что

$$h_0 = \frac{p_0}{g\rho_0} \approx 8000 \text{ м (если принять } p_0 = p_{\text{н.т.м}} = 10^5 \text{ Па, } \rho_0 \approx 1,2 \text{ кг/м}^3\text{)}.$$

В однородной атмосфере падение температуры с высотой составляет

$$\frac{g}{R} = \frac{1}{29,27} \frac{\text{град}}{\text{м}} = 3,4 \cdot 10^{-2} \frac{\text{град}}{\text{м}} \quad (\text{для воздуха}).$$

2. Изотермическая атмосфера, для которой считают $T = T_0 = \text{const}$. Для нее из (2.7) имеем

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{g(z - z_0)}{RT_0}\right); \quad \rho = \frac{p}{RT_0} = \rho_0 \exp\left(-\frac{g(z - z_0)}{RT_0}\right).$$

Высота изотермической атмосферы, на которой $p = 0$, оказывается бесконечной

$$h_{\text{изот}} = \infty.$$

3. Политропная атмосфера. В этом случае связь между давлением и плотностью берется в виде $p = p_0 (\rho / \rho_0)^n$, где n — показатель политропы. Тогда из (2.6) имеем

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho = -g\rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Отсюда, интегрируя, получаем

$$z - z_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g} \frac{n}{(n-1)} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \right].$$

Таким образом, считая $z_0 = 0$ и учитывая, что $p_0 / \rho_0 g = h_0$ — высота однородной атмосферы, имеем зависимости $p(z)$, $T(z)$ и $\rho(z)$ для политропной атмосферы следующего вида

$$\begin{aligned} p(z) &= p_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{h_0} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \\ T(z) &= T_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{h_0} \right), \\ \rho(z) &= \rho_0 \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{z}{h_0} \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Измерения дают показатель политропы $n=1,2$. Это соответствует следующему значению высоты $h_{\text{пол}}$, на которой $p=0$

$$h_{\text{пол}} = \frac{n}{n-1} h_0 = 6 h_0 \approx 48 \text{ км.}$$

Заметим, что для всех трех моделей земной атмосферы принята линейная зависимость температуры от высоты, так что $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$, при этом из (2.1) следует $\partial T / \partial t = 0$, так что сохраняется тепловое равновесие атмосферы.

Что касается соответствия рассмотренных моделей действительной атмосфере, то следует учесть, что в ней различают тропосферу высотой в 11 км (у экватора ≈ 14 км, у полюсов ≈ 7 км). Именно в ней $n=1,2$, и падение температуры происходит по линейному закону, причем

$$dT / dz = -T_0 \left((n-1) / n h_0 \right) \approx -0,6 \cdot 10^{-2} \text{ град/м.}$$

Выше тропосферы располагается стратосфера, где принята постоянная температура (около -50°C). При этом тропосферу можно рассматривать как политропную атмосферу с $n=1$; тропосфера плавно переходит в стратосферу.

Равновесие больших масс жидкости (газа) под действием сил притяжения

В отличие от равновесия атмосферы, когда ее толщина и масса намного меньше, соответственно, радиуса и массы Земли, так что гравитационное поле массовой силы можно считать однородным, рассмотрим равновесие больших изолированных масс газа, удерживаемых силами гравитационного притяжения, действующими на любой элемент этих сред (газообразные звезды).

В случае самотяготеющей среды $\mathbf{f} = -\nabla\Pi$, где гравитационный (ньютонов) потенциал имеет вид $\Pi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ (G — гравитационная постоянная), так что $d\Pi$ — потенциал ньютоновой силы притяжения между единичной массой и частицей с массой $dm = \rho dV$.

Как известно, этот потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta\Pi = 4\pi G\rho$. Так как $\nabla\Pi = -\mathbf{f} = -\nabla p / \rho$, то это уравнение можно переписать в виде

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) = -4\pi G\rho. \quad (2.8)$$

Поскольку среда находится в состоянии равновесия, то, как было отмечено, необходимо, чтобы поверхности одинакового уровня функций Π , ρ и p совпадали. Это накладывает довольно строгие ограничения на решение уравнения (2.8). Для случая отсутствия вращения массы газа такое решение можно получить, предполагая сферическую симметрию звезды, так что $p = p(r)$ и $\rho = \rho(r)$. Тогда из (2.8) имеем в сферических координатах

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho. \quad (2.9)$$

В реальных звездах плотность зависит не только от давления. Однако, в предположении, например,

$$p = C \rho^{\frac{n+1}{n}} \quad (n \geq 0)$$

уравнение (2.9) можно проинтегрировать.

Для $n = 0$, т. е. когда жидкость имеет постоянную плотность ($\rho = \rho_0$), получаем решение (p , конечно, в центре звезды)

$$p = \frac{2}{3} \pi G \rho_0^2 (R^2 - r^2),$$

где $r = R$ — внешняя граница звезды.

Интересным является случай $n = 5$, когда

$$p = C \rho^{6/5} = \frac{27 R^3 C^{5/2}}{(2\pi G)^{3/2} (R^2 + r^2)^3},$$

так что p и ρ обращаются в нуль только при $r = \infty$, т. е. звезда не имеет внешней границы, хотя масса звезды $M = 4\pi \int_0^{\infty} \rho(r) r^2 dr$ остается конечной.

Равновесие жидкости (газа) Если жидкость покоится относительно относительно неинерциальной системы координат (см. ч. 2, § 13), имеем

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} - \rho \mathbf{w}_e, \quad (2.10)$$

где переносное ускорение имеет выражение

$$\mathbf{w}_e = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Таким образом, если бак с несжимаемой жидкостью движется горизонтально с ускорением $d\mathbf{v}_0/dt$, то в поле сил тяжести его свободная поверхность, на которой $p = p_0$, будет иметь вид плоскости, составляющей угол α с горизонтальной плоскостью, причем $\operatorname{tg} \alpha = (1/g) \cdot |d\mathbf{v}_0/dt|$, а глубина будет больше у задней по движению стенки. Это следует из проекции (2.10) на оси (z) и (x); поскольку $\mathbf{f} = -g\mathbf{i}_z$; $\mathbf{w}_e = \mathbf{i}_x |d\mathbf{v}_0/dt|$, то интегрируя, имеем

$$p = p_0 - \rho g z - \rho |d\mathbf{v}_0/dt| x.$$

В случае покоя жидкости относительно равномерно вращающейся системы координат $\mathbf{w}_e = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, так что в системе цилиндрических координат, где ось (z) совпадает с осью вращения, имеем $\mathbf{w}_e = -\mathbf{i}_r \omega^2 r = -\nabla((\omega^2 r^2)/2)$. Тогда уравнение (2.10) приобретает вид

$$\frac{\nabla p}{\rho} = -\nabla \left(g z - \frac{\omega^2 r^2}{2} \right)$$

и имеет следующий интеграл (в случае баротропной жидкости)

$$\mathcal{P}(\rho) + g z - \frac{\omega^2 r^2}{2} = \text{const.} \quad (2.11)$$

Он совпадает с интегралом (1.16) для относительного механического покоя

($v_r = 0$; $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$; $v_e = \omega r$). В случае несжимаемой жидкости из него получаем

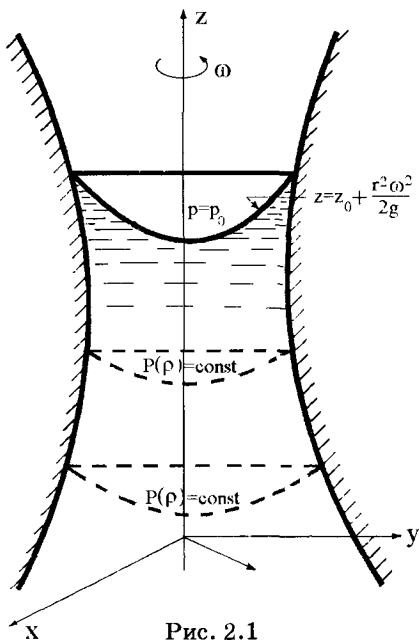


Рис. 2.1

где p_0 — давление на поверхности
$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Поверхности постоянного уровня функции $P(\rho)$ являются одинаковыми (получающимися друг из друга путем параллельного смещения по оси (z)) параболоидами вращения с вертикальными осями (см. рис. 2.1). Для равновесия необходимо, чтобы на каждом из этих параболоидов плотность ρ была постоянна, тогда давление p на них тоже будет постоянным. Это обеспечено интегралом (2.11).

Центрифугирование

Уравнение (2.11) может быть положено в основу описания явления сепарации смеси или центрифугирования. Для изотермического процесса ($T = T_0 = \text{const}$) в идеальном газе из (2.11) имеем

$$\rho(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} = RT_0 \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = RT_0 \ln \frac{p}{p_0}.$$

Поэтому, если p_0 — давление на поверхности параболоида $z = \frac{\omega^2 r^2}{2g}$, то из (2.11) имеем

$$p = p_0 \exp \frac{1}{RT_0} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz \right).$$

Если $R_0 = R/\mu$ — универсальная газовая постоянная, а $\mu = Lm$ — масса одного моля (m — масса молекулы, $L = 6,8 \cdot 10^{23}$ — число Лошмидта): то получаем

$$p = p_0 \exp \frac{mL}{R_0 T_0} \left(\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz \right). \tag{2.12}$$

В случае смеси газов с массами молекул $m_1 > m_2 > \dots > m_n$, получаем парциальное давление $p_1 > p_2 > \dots > p_n$, причем $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$. Парциальное давление p_1 , соответствующее большему весу молекул газа m_1 , наиболее интенсивно возрастает к периферии. Поэтому именно на периферии будет скапливаться газ с большим молярным весом, поскольку при $T = \text{const}$ плотность ρ , пропорциональна давлению p .

Обычно скоростные центрифуги вращаются, совершая сотни тысяч оборотов в минуту, так что центробежная сила превосходит силу тяжести чуть ли не в миллион раз. В этом случае вместо (2.12) имеем

$$p = p_0 \exp \frac{mL}{2R_0T_0} \omega^2 r^2,$$

где p_0 — давление на оси (z) (при $r = 0$).

Центрифугирование широко применяется в биологии, химии для разделения жидкостных смесей. Как показывают расчеты (см. [12]), в случае смеси газов отношение давлений на периферии незначительно отличается от отношения на оси, так что разделение газов или изотопов центрифугированием неэффективно. Эффект достигается в многофазных средах.

Гидростатическое давление на погруженную поверхность Пусть на некоторой глубине под свободной поверхностью покоящейся жидкости, совпадающей с плоскостью xOy , помещена поверхность S . Тогда сила и момент давления жидкости на поверхность S имеют выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \int_S \mathbf{p}_n dS = - \int_S p \mathbf{n} dS, \\ \mathbf{L} &= \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p}_n dS = - \int_S p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

В частном случае несжимаемой жидкости в поле сил тяжести имеем (ось z направлена вниз)

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} = \mathbf{i}_z \rho g; \quad p = p_0 + \rho g z.$$

Превышение давления над атмосферным p_0 обычно называют *давлением* жидкости, так что давление $p - p_0$ обращается в нуль на свободной

поверхности. Тогда сила и момент сил давления $(p - p_0)$ жидкости на поверхности S равны

$$\mathbf{P} = -\rho g \int_S z \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{L} = -\rho g \int_S z (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS. \quad (2.13)$$

Для идеального газа, находящегося в изотермическом равновесии при $T = T_0$ ($p = \rho R T_0$), получаем

$$\nabla \mathcal{P}(\rho) = \mathbf{i}_z g, \quad \text{где } \mathcal{P}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{p}{p_0}.$$

Тогда $\partial \mathcal{P} / \partial z = g$ и, следовательно, $p = p_0 \exp(g \rho_0 z / p_0)$.

Таким образом, формулы для давления и момента сил давления в такой среде на поверхность S имеют вид

$$\mathbf{P} = p_0 \int_S \left(1 - \exp \frac{g \rho_0 z}{p_0} \right) \mathbf{n} dS; \quad \mathbf{L} = p_0 \int_S \left(1 - \exp \frac{g \rho_0 z}{p_0} \right) (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS.$$

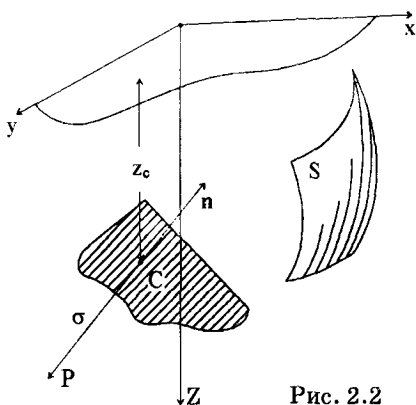


Рис. 2.2

Если поверхность S — плоская площадка σ , как угодно наклоненная к свободной поверхности (см. рис. 2.2), то из (2.13) имеем

$$\mathbf{P} = -\rho g \mathbf{n} \int_{\sigma} z dS = -\rho g \mathbf{n} \sigma z_c,$$

где z_c — координата центра тяжести площадки.

Таким образом, главный вектор сил давления жидкости на любую плоскую площадку нормален к ней, а по величине равен весу столба жидкости, имеющему в основании данную площадку, а высотой — глубину центра тяжести площадки.

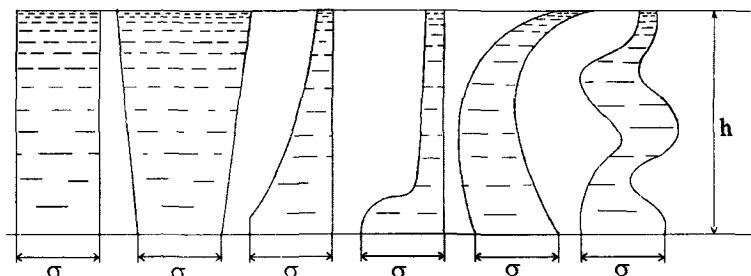


Рис. 2.3

Это, в частности, означает, что сила давления жидкости на одинаковое по площади дно у всех сосудов, изображенных на рис. 2.3, будет одинаковой, равной по величине $P = \gamma h \sigma$, где γ — удельный вес жидкости.

Это явление, открытое Паскалем, получило название *гидростатического парадокса*. Эффект гидростатического давления используется в таких технических устройствах, как гидравлический пресс, схема которого приведена на рис. 2.4. Действуя на малый поршень площадью S_1 в прессе силой P_1 , можно на поршне с поверхностью $S_2 > S_1$ получить силу давления $P_2 = P_1 (S_2 / S_1)$, поскольку гидростатическое давление p в жидкости всюду примерно одинаково.

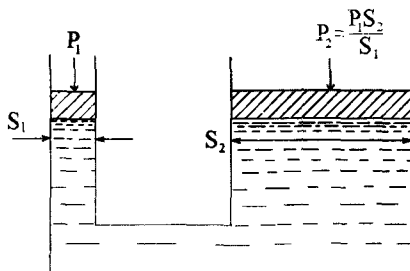


Рис. 2.4

Сила и момент, действующие на тело, плавающее в покоящейся тяжелой жидкости (газе). Закон Архимеда

Если тело, занимающее объем V и ограниченное поверхностью S , полностью погружено в покоящуюся жидкость, то, применяя теорему Гаусса-Остроградского к области V , имеем:

$$\mathbf{P} = - \int_S p \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla p dV, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{L} = - \int_S p (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) dS = \int_S (\mathbf{n} \times p \mathbf{r}) dS = \int_V \text{rot } p \mathbf{r} dV = - \int_V (\mathbf{r} \times \nabla p) dV.$$

Конечно, в области V жидкости нет. Но если мысленно поместить в нее жидкость с распределением давления, удовлетворяющим уравнению равновесия $\nabla p = \rho \mathbf{f}$, то силовое воздействие на погруженное в эту жидкость тело выражается через физические характеристики покоящейся жидкости в области V , фактически занимаемой телом. Тогда получаем

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}_A = - \int_V \rho \mathbf{f} dV; \quad \mathbf{L} = \mathbf{L}_A = - \int_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{f}) dV. \quad (2.15)$$

Эти формулы дают выражение для \mathbf{P} и \mathbf{L} через плотность жидкости и интенсивность массовых сил в ней, в том случае, когда она заполняет область, занятую твердым телом.

Если массовые силы — это силы тяжести, то тогда из (2.15) имеем

$$\mathbf{P}_A = - \int_V \rho g dV = -\mathbf{G}_ж, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{L}_A = - \int_V \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{g}) dV = - \int_V \rho g \left(\mathbf{r} \times \frac{\mathbf{G}_ж}{G_ж} \right) dV = -\mathbf{r}_{C_ж} \times \mathbf{G}_ж = \mathbf{r}_{C_ж} \times \mathbf{P}_A. \quad (2.17)$$

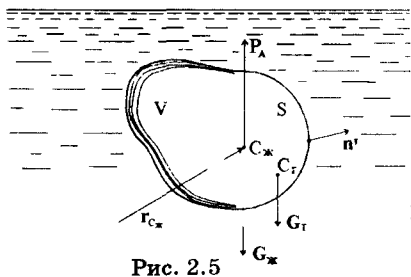


Рис. 2.5

Здесь (см. рис 2.5): $G_ж$ — вес жидкости, помещенной в область V и находящейся в условиях равновесия; он приложен в точке $C_ж$ — центре тяжести этой жидкости, положение которого, как известно, определяется с помощью формулы

$$\mathbf{r}_{C_ж} = \frac{1}{\tilde{N}_ж} \int_V \mathbf{r} \rho g dV.$$

Заметим, что $C_ж$ не совпадает с точкой C_T — центром тяжести самого тела, где приложен вес тела G_T .

При этом \mathbf{P}_A и \mathbf{L}_A — главный вектор и главный момент сил давления жидкости на погруженное в нее твердое тело.

Формула (2.16) выражает закон, установленный Архимедом.

Главный вектор сил давления на тело со стороны покоящейся в поле сил тяжести жидкости равен по величине весу жидкости в объеме тела и направлен в сторону, обратную силе веса.

Вектор \mathbf{P}_A называется *архимедовой силой* или гидростатической подъемной силой. Закон Архимеда может быть прочитан так: «всякое тело, полностью погруженное в тяжелую жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость».

Формула (2.17) свидетельствует о том, что *линия действия архимедовой силы проходит через центр тяжести вытесненного телом объема жидкости.*

Вычисляя силу, действующую на погруженное во вращающуюся жидкость тело с поверхностью S , получаем на основании равенств (2.10) и $\mathbf{W}_c = -\mathbf{i} \omega^2 r$

$$\mathbf{P}_A = - \int_S p \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla p dV = - \int_V (\rho \mathbf{f} + \rho \omega^2 \mathbf{r}_r) dV. \quad (2.18)$$

Эту формулу можно рассматривать как закон Архимеда для вращающейся жидкости. Заметим, что формулы (2.15)–(2.18) справедливы и для сжимаемого газа, лишь бы удовлетворялись уравнения (2.1).

Если архимедова сила по величине меньше силы веса тела ($G_T > G_{\text{ж}}$), то тело тонет; если $G_{\text{ж}} > G_T$, то тело всплывает на поверхность, пока вес вытесненной погруженной частью тела жидкости не сравняется с весом тела. При этом $G_{\text{ж}}$ вычисляется для объема, ограниченного замкнутой поверхностью $\Sigma = \sigma + S_c$, где S_c — смоченная жидкостью поверхность тела, а σ — сечение плавающего тела плоскостью, совпадающей с верхним уровнем жидкости.

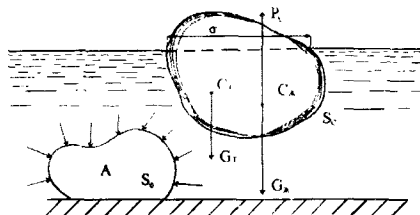


Рис. 2.6

Заметим, что существенным в законе Архимеда является предположение о замкнутости поверхности S . Если тело A (см. рис. 2.6), частью своей поверхности S_0 не соприкасается с жидкостью, лежа на дне, то на него может действовать гидростатическая сила, прижимающая тело к поверхности дна.

Устойчивость плавающих тел Очевидно, что плавающее тело, изображенное на рис. 2.6, не будет находиться в равновесии, если не скомпенсировать момент

силы \mathbf{P}_A , относительно центра тяжести тела C_T . Поэтому, равновесие погруженных — полностью или частично — в жидкость тел, требует исследования на устойчивость. Так, например, погруженная в жидкость тяжелая однородная пирамида (рис. 2.7) всегда будет плавать так, чтобы центр тяжести ее C_T занимал самое низкое положение.

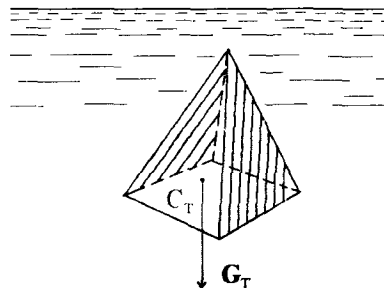


Рис. 2.7

Рассмотрим схему расчета устойчивости плавающего тела (судна) при боковой

качке. В состоянии покоя (рис. 2.8, а) $G_T = -P_A = G_{\text{ж}}$, где G_T — вес судна, приложенный в центре тяжести судна C_T , $G_{\text{ж}}$ — вес вытесненной судном жидкости, приложенный в точке $C_{\text{ж}}$, центре тяжести этой жидкости.

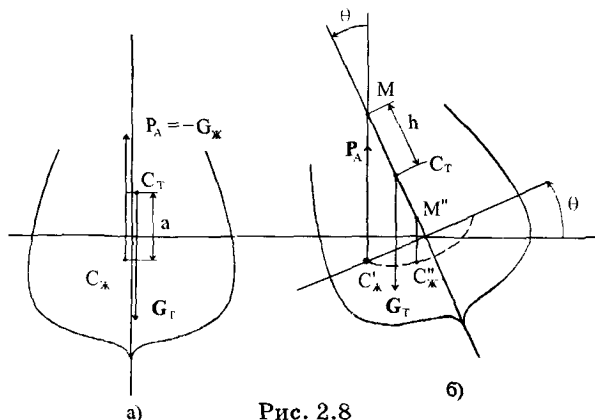


Рис. 2.8

Предполагается, что точки C_T и $C_{\text{ж}}$ находятся на одной вертикали. Пусть при отклонении оси судна от вертикали на малый угол θ (боковая качка судна вокруг центра тяжести C_T) точка $C_{\text{ж}}$ сместилась в положение $C'_{\text{ж}}$. Тогда (см. рис. 2.8, б) линия действия архимедовой силы P_A

пересечет наклоненную ось судна в точке M (метацентр), которая находится выше центра тяжести C_T и отстоит от него на расстоянии h (метацентрическая высота). При этом момент силы P_A относительно C_T , равный по величине $|P_A| h \sin \theta = G_T h \sin \theta \approx G_T h \theta$, будет восстанавливающим, поскольку стремится уменьшить угол θ . Если же точка $C_{\text{ж}}$ сместится в положение $C'_{\text{ж}}$ (см. рис 2.8, б), то точка M расположится в M'' , т. е. ниже центра тяжести C_T , и возникающий при качке момент архимедовой силы теперь стремится увеличить угол θ . Устойчивость равновесия судна будет немедленно нарушена.

При устойчивом равновесии во время качки судно будет совершать малые колебания согласно уравнению

$$J\ddot{\theta} = -G_T h \theta,$$

где J — момент инерции судна относительно продольной оси, проходящей через центр тяжести C_T . Круговая частота колебаний, равная $\sqrt{G_T h / J}$, тем больше, чем больше метацентрическая высота, так что чем больше h , тем более устойчиво равновесие судна. При расположении метацентра ниже центра тяжести тела, как уже было отмечено, равновесие плавающего тела неустойчиво.

Подъемная сила и устойчивость равновесия газонаполненных аэростатов

Архимедову силу для газонаполненного аэростата, внутри которого находится газ с параметрами p_Γ , ρ_Γ , T_Γ , а снаружи — воздух

с параметрами p_B , ρ_B , T_B (рис. 2.9), можно вычислить, исходя из общих формул равновесия и давления на поверхности аэростата S имеем

$$\mathbf{P}_A = - \int_S (p_B - p_\Gamma) \mathbf{n} dS = - \int_V \nabla (p_B - p_\Gamma) dV.$$

Поскольку воздух и газ находятся в состоянии равновесия в поле сил тяжести ($\mathbf{f} = -\mathbf{i}_z g = \mathbf{g}$), то, в силу равенства $\nabla p = \rho \mathbf{f}$, имеем

$$\mathbf{P}_A = -\mathbf{g} \int_V (\rho_B - \rho_\Gamma) dV = \mathbf{i}_z (G_B - G_\Gamma),$$

где G_B — вес вытесненной массы воздуха, G_Γ — вес газа.

В предположении, что газ и воздух — идеальные газы, подчиняющиеся уравнению $p = \rho RT$, то, вводя в рассмотрение средние по объему V плотности ρ_B и ρ_Γ , вычисляемые при постоянном давлении p , получаем

$$\mathbf{P}_A = \mathbf{i}_z V (\rho_B - \rho_\Gamma) g = \mathbf{i}_z G_B \left(1 - \frac{\rho_\Gamma}{\rho_B} \right) = \mathbf{i}_z G_B \left(1 - \frac{\sigma T_B}{T_\Gamma} \right),$$

где $\sigma = R_B / R_\Gamma$ — отношение газовых постоянных.

Эта формула является основной для расчета газонаполненных аэростатов. Так, например, подогревая горелкой газ внутри аэростата, т. е. увеличивая T_Γ , мы увеличиваем подъемную силу \mathbf{P}_A .

Условие устойчивости полета аэростата можно получить из неравенства

$$\frac{dP_A}{dz} < 0.$$

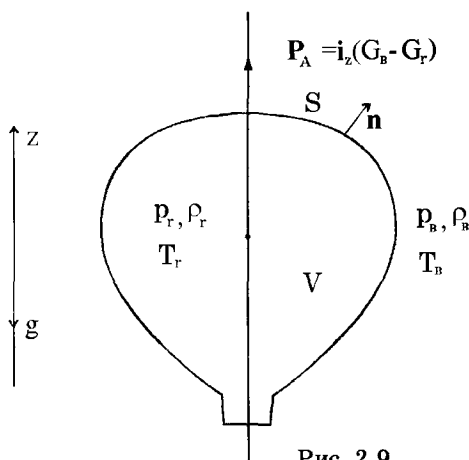


Рис. 2.9

Оно означает, что при подъеме аэростата из положения равновесия подъемная сила должна уменьшаться, а при снижении — увеличиваться. Имеем

$$\frac{dP_A}{dz} = \frac{d}{dz}(G_B - G_\Gamma) = gV \frac{d}{dz}(\rho_B - \rho_\Gamma) = gV \frac{dp}{dz} \frac{d}{dp}(\rho_B - \rho_\Gamma).$$

Считая, что газ и воздух следуют уравнению политропы ($\rho_B = C_B p^{1/n_B}$, $\rho_\Gamma = C_\Gamma p^{1/n_\Gamma}$), а $dp/dz = -\rho_B g$, получаем

$$\frac{dP_A}{dz} = -\rho_B V g^2 \left(\frac{\rho_B}{n_B p} - \frac{\rho_\Gamma}{n_\Gamma p} \right) = -\frac{V g^2 \rho_B}{p} \left(\frac{\rho_B}{n_B} - \frac{\rho_\Gamma}{n_\Gamma} \right),$$

так что полет аэростата устойчив при $\rho_B > (n_B / n_\Gamma) \rho_\Gamma$.

Поверхностное натяжение. Равновесие поверхности раздела между жидкостями, жидкостью и газом

Специальный раздел гидростатики изучает явления, возникающие на поверхности раздела жидкости и какой-то другой среды, в частности — на свободных поверхностях жидкостей.

Опыт свидетельствует о том, что свободная поверхность жидкости стремится уменьшить свою площадь. Капли жидкости в воздухе, пузырьки воздуха в жидкости принимают сферическую (минимальную) форму; мыльная пленка со свободной границей деформирует эту границу в окружность и т. д. Причиной этого является то, что каждая поверхностная молекула имеет «недостаток соседей» с одной стороны, и поэтому на нее действует сила, втягивающая ее внутрь жидкости. Эти силы проявляются для тех молекул, которые находятся на расстояниях, меньших радиуса взаимодействия (порядка 10^{-7} см) от границы, так что такие явления относят к *поверхностным*, т. е. захватывающим весьма тонкий слой («поверхностную фазу» по терминологии Гиббса, построившего термодинамику поверхностных явлений). Тенденция поверхностных молекул к движению внутрь жидкости приводит к стягиванию свободной поверхности, когда на ней остается минимальное число молекул, обеспечивающее существование поверхностей фазы. Такое напряженное состояние свободной поверхности называется *поверхностным натяжением* и за-

ставляет ввести в рассмотрение *силу поверхностного натяжения*: на любую линию свободной поверхности жидкости действует сила величиной α на единицу длины, направленная по нормали к линии и по касательной к поверхности раздела.

Явление поверхностного натяжения возникает также и на границах, разделяющих несмешивающиеся жидкости, жидкости и твердые тела.

Величина α называется коэффициентом поверхностного натяжения и зависит, в основном, от природы сред, которые разделяет поверхность. Так, например, для поверхностей, разделяющих воздух и воду, $\alpha = 73$ дин/см, воздух и ртуть $\alpha = 487$ дин/см, воздух и глицерин $\alpha = 63$ дин/см, воду и ртуть $\alpha = 375$ дин/см, воду и оливковое масло $\alpha = 20$ дин/см. В то же время, для некоторых пар сред (вода и этиловый спирт, вода и глицерин) поверхность раздела неустойчива и разрушается: для них $\alpha < 0$, так что вместо натяжения существует «сдавливание» пленки.

Обычно α убывает с увеличением температуры; если жидкость соприкасается со своим паром, то, согласно эмпирической зависимости, α пропорциональна разности $T_{кр} - T$, где $T_{кр}$ — критическая температура.

Введение силы поверхностного натяжения позволяет найти ее взаимосвязь с другими силами, действующими на поверхность раздела. Эта связь выражается формулой Лапласа, которая может быть получена как из закона термодинамического равновесия (см., например, [11]), так и при помощи рассмотрения условий равновесия участка поверхности (см. задачу 2.2).

Рассмотрим термодинамическую систему, состоящую из элементарного объема dV , включающего поверхность раздела σ в качестве элемента термодинамической системы. Параметру α соответствует обобщенная сила поверхностного натяжения, так что ее элементарная работа равна $-\alpha d\sigma$. Тогда для изменения свободной энергии F такой системы при изменении параметров T , V и σ из второго начала термодинамики имеем (см. ч. 2, § 2)

$$dF = -SdT - \delta W = -SdT - pdV + \alpha d\sigma, \quad (2.19)$$

поскольку в этой системе элементарная работа δW , производимая «против действующих сил», равна сумме работ сил давления и сил натяжения.

Пусть поверхность σ разделяют две фазы (жидкость и пар, жидкость и газ, две несмешивающиеся жидкости) с объемами V_1 и V_2 , так что $V_1 + V_2 = V$. Тогда условием механического равновесия этой системы при постоянном объеме и температуре ($T = \text{const}$, $V = \text{const}$) является равенство $dF = 0$, а из (2.19) имеем

$$0 = -p_1 dV_1 + p_2 dV_1 + \alpha d\sigma,$$

где p_1 — давление в жидкости, p_2 — в газе, а $dV_2 = -dV_1$, поскольку $V = \text{const}$. Отсюда получаем

$$p_1 - p_2 = \alpha \frac{d\sigma}{dV_1} \equiv \alpha k,$$

где $k = 1/R_I + 1/R_{II}$ — удвоенная средняя кривизна поверхности раздела, а R_I, R_{II} — главные радиусы кривизны.

Формула

$$p_1 - p_2 = \alpha \left(\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) \quad (2.20)$$

называется *формулой Лапласа* для добавочного давления. Из нее, в частности, следует, что если R_I и R_{II} положительны, то $p_1 > p_2$. Это значит, что давление больше в той из соприкасающихся фаз, поверхность которой выпукла.

Формула Лапласа определяет скачок давления на свободной поверхности (поверхности раздела двух фаз). Для сферической поверхности с радиусом R раздела (капля) имеем

$$p_1 - p_2 = \frac{2\alpha}{R},$$

где p_1 — давление внутри сферы; а для плоской поверхности $R_I = R_{II} = \infty$ скачок давления равен нулю.

Поверхность раздела в поле сил тяжести. Краевой угол (угол смачивания). Капиллярность

Пусть две несмешивающиеся жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 находятся в равновесии в поле сил тяжести, так что давления в них

$$p_1 = p_0 - \rho_1 g z; \quad p_2 = p_0 - \rho_2 g z,$$

где p_0 — значение давления при $z = 0$.

Тогда удвоенная кривизна поверхности раздела равна (см. (2.20))

$$\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{\alpha} z.$$

Таким образом, уравнение поверхности раздела $z = \zeta(x, y)$ имеет вид

$$\zeta(x, y) = \frac{\alpha}{g(\rho_2 - \rho_1)} \left(\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) \equiv \frac{\alpha}{g(\rho_2 - \rho_1)} k(x, y). \quad (2.21)$$

Для поверхности раздела между жидкостью и газом ($\rho_1 \ll \rho_2$) имеем

$$\zeta(x, y) = \frac{\alpha}{g\rho} \left(\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right), \quad (2.22)$$

где ρ — плотность жидкости.

В рассматриваемой задаче есть единственный характерный размер $l \equiv \sqrt{\alpha/(g\rho)}$ с размерностью длины; если $l \approx 1$, то силы поверхностного натяжения сравнимы с силами тяжести.

Поверхности, исследуемые при помощи уравнения (2.21), часто представляют собой поверхности раздела в случае трех сред — например, капля жидкости в воздухе на твердой поверхности. Свойства линий такого тройного контакта, получаемые из физических свойств вещества и определяющие, в частности, углы между поверхностями раздела, служат граничными условиями при интегрировании уравнения (2.21). Так, например, в случае тройного контакта углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ между векторами сил натяжения α_{12}, α_{23} и α_{13} (см. рис. 2.10, а) зависят от свойств соприкасающихся сред, и они обеспечиваются при равновесии поверхностей раздела векторным равенством

$$\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{12} = 0.$$

Если одна из фаз — твердое тело, имеющее плоскую поверхность (см. рис. 2.10, б), то имеем $\alpha_{23} = -\alpha_{13} - \alpha_{12} \cos \theta$, и отсюда мо-

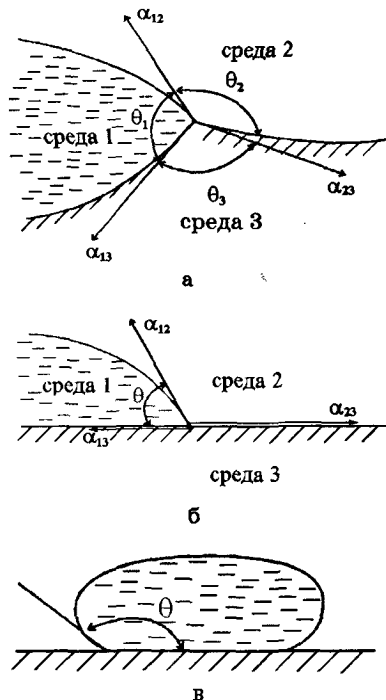


Рис. 2.10

жет быть найден угол θ (краевой угол смачивания). Если $\theta < \pi/2$, то среду 1 называют смачивающей твердое тело (среду 3); если $\theta > \pi/2$ (для ртути на многих твердых телах $\theta \sim 150^\circ$), то говорят об отсутствии смачивания жидкостью твердого тела (см. рис. 2.10, в).

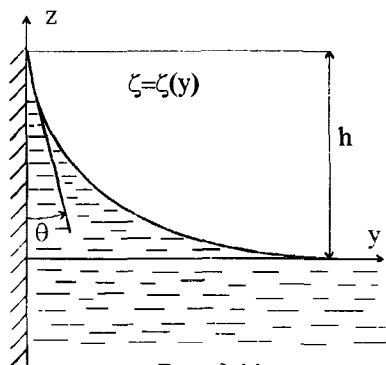


Рис. 2.11

Если $\theta < \pi/2$, то радиус кривизны осевого сечения жидкости в трубке можно считать постоянным и равным $R_1 = R_2 = a / \cos \theta$. Подставив это значение в (2.22), получим высоту H подъема жидкости плотности ρ в трубке

$$H = \frac{2\alpha \cos \theta}{g\rho a} = \frac{2l^2 \cos \theta}{a}. \quad (2.23)$$

Отсюда следует, что величина H может быть достаточно большой в очень тонких каналах ($a \ll l$) пористых структур (кирпич, почва, промокашка и т. п.). Если жидкость не смачивает стенки трубки ($\theta > \pi/2$), то $H < 0$, что соответствует опусканию свободной поверхности в трубке.

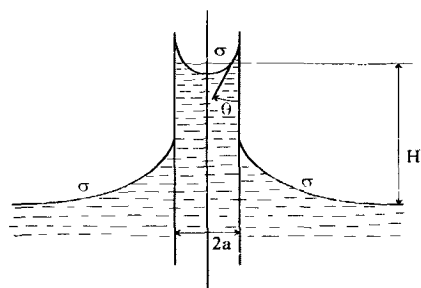


Рис. 2.12

Если жидкость не смачивает стенки трубки ($\theta > \pi/2$), то $H < 0$, что соответствует опусканию свободной поверхности в трубке.

Задачи с решениями

Задача 2.1. Найти фигуру равновесия вращающегося объема однородной жидкости, тяготеющей к неподвижному центру с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Применить полученный результат к определению формы Земли.

Решение. На основании интеграла (1.16) в неинерциальной системе координат для стационарного вращения имеем

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0; \quad \Pi = -\frac{G}{R}; \quad P(\rho) = \frac{p}{\rho}; \quad v_c = \omega r$$

и, следовательно,

$$\frac{p}{\rho} - \frac{G}{R} - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \text{const}, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная.

Отсюда уравнение свободной поверхности, на которой $p = \text{const}$, ограничивающей вращающийся объем, имеет вид (рис. 2.13)

$$\frac{G}{R} + \frac{\omega^2 r^2}{2} = C_0 = \text{const}; \quad r = R \sin \theta = \text{const}.$$

Применим полученный результат для определения формы Земли, задавая g_0 — ускорение силы тяжести на полюсе, отстоящем от центра Земли на R_0 . Тогда $G/R^2 = g_0$. Определяя C_0 из условий на полюсе ($R = R_0$, $r = 0$), получаем окончательно

$$\frac{g_0 R_0^2}{R} + \frac{\omega^2 R^2 \sin^2 \theta}{2} = g_0 R_0.$$

Если бы Земля не вращалась ($\omega = 0$), то ее фигурой равновесия была бы сфера $R = R_0$. За счет вращения с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ сек}}$$

Земля приобретает форму сфероида. Поскольку

$$\frac{\omega^2 R_0}{g_0} = \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \right)^2 \cdot \frac{6,37 \cdot 10^6}{9,83} \approx \frac{1}{300},$$

то приближенно, с точностью до слагаемых порядка первой степени этой величины, уравнение сфероида можно записать в виде

$$R = R_0 \left(1 + \frac{\omega^2 R_0}{2g_0} \sin^2 \theta \right).$$

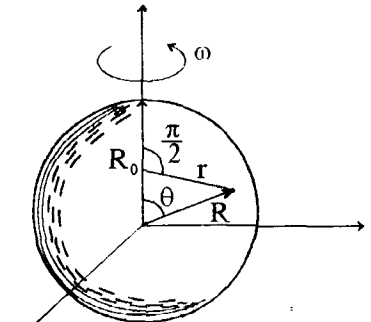


Рис. 2.13

При этом относительная сплюснутость Земли равна

$$\varepsilon = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\min}} = \frac{\omega^2 R_0}{2g_0} \approx \frac{1}{600}.$$

Это вдвое больше действительного значения, и расхождение является следствием предположения об однородности массы Земли и пренебрежения взаимным притяжением ее частиц.

Если p_0 давление на поверхности Земли (при $R = R_0$), то из интеграла (1) имеем закон изменения давления с удалением от поверхности вглубь

$$p = p_0 + \frac{\rho G}{R_0} \left(\frac{R_0}{R} - 1 \right) - \frac{1}{2} \rho \omega^2 R_0^2 \left(1 - \frac{R^2}{R_0^2} \right) \sin^2 \theta,$$

так что давление в центре Земли, в рамках рассматриваемой модели, бесконечно большое.

Задача 2.2. Исходя из определения силы натяжения пленки, вывести формулу Лапаса (2.20).

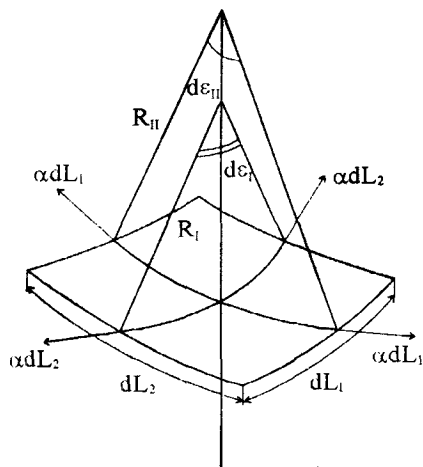


Рис. 2.14

Решение. Рассмотрим равновесие прямоугольного участка поверхности, вырезанного линиями dL_1 и dL_2 , проведенными параллельно плоскостям ее главных сечений (рис. 2.14).

На стороны прямоугольника длиной dL_1 действуют силы натяжения, равные по величине αdL_1 и образующие между собой угол $d\epsilon_{II}$, а на стороны длиной dL_2 — силы величиной αdL_2 с углом между ними $d\epsilon_I$. Нетрудно видеть, что $d\epsilon_I$ — угол между главными радиусами кривизны R_1 , а $d\epsilon_{II}$ между главными радиусами R_{II} , взятыми в конце участков dL_1 и dL_2 . Поэтому

$$d\epsilon_{II} = \frac{dL_2}{R_{II}}; \quad d\epsilon_I = \frac{dL_1}{R_1}.$$

На поверхность действует нормальная сила, равная по величине $(p_1 - p_2) dL_1 dL_2$ и направленная ($p_1 > p_2$) в сторону выпуклости поверхности. Проектируя на нормаль все силы, действующие на выделенный участок поверхности, получаем

$$(p_1 - p_2) dL_1 dL_2 = 2\alpha dL_2 \sin \frac{d\epsilon_I}{2} + 2\alpha dL_1 \sin \frac{d\epsilon_{II}}{2}.$$

В силу малости углов $d\epsilon_I$, $d\epsilon_{II}$ и их выражений через главные радиусы кривизны, сокращая на $dL_1 dL_2$, получаем формулу Лапласа.

Задача 2.3. Найти уравнение цилиндрической поверхности раздела, образующейся у плоской вертикальной стенки между смачивающей ее жидкостью и воздухом в поле сил тяжести (см рис. 2.11).

Решение. Из уравнения (2.21) при $\rho_2 = \rho \gg \rho_1$ и $R_{II} = \infty$ имеем

$$\zeta(y) = \frac{\alpha}{g\rho} \frac{1}{R_I} = \frac{\alpha}{g\rho} \frac{\zeta''}{(1+\zeta'^2)^{3/2}}$$

(здесь учтено, что далеко от стенки $\zeta = \zeta' = \zeta'' = 0$).

Умножая на ζ' и интегрируя, получаем

$$\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\alpha}{g\rho} \frac{1}{(1+\zeta'^2)^{1/2}} = C_1, \quad (2)$$

причем $C_1 = \alpha/g\rho$ в силу того же граничного условия вдали от стенки.

Отсюда следует, что высота h , на которую поднимется смачивающая стенку жидкость ($\theta < \pi/2$) определяется формулой (при $\zeta = h$ имеем $\zeta' = -\text{ctg}\theta$):

$$h^2 = 2 \frac{\alpha}{\rho g} (1 - \sin \theta).$$

Заметим, что эта величина представляет собой погрешность измерения уровня жидкости при помощи смачиваемой линейки.

Используя граничные условия $\zeta(0) = h$, после окончательного интегрирования уравнения (2), находим

$$\frac{y}{l} = \text{arccch} \frac{2l}{\zeta} - \text{arccch} \frac{2l}{h} + \left(4 - \frac{h^2}{l^2}\right)^{1/2} - \left(4 - \frac{\zeta^2}{l^2}\right)^{1/2},$$

где $l^2 = \alpha/g\rho$.

Отметим, что определение высоты подъема жидкости между двумя близко расположенными пластинами (см. [11]) приводит к эллиптическим интегралам, но при расстоянии между пластинками значительно меньшими $l = \sqrt{\alpha/g\rho}$, получаем высоту подъема, совпадающую с (2.23) (при диаметре трубки, равном расстоянию между пластинками).

Упражнения

1. Определить центр давления и силу давления на вертикальный прямоугольник со сторонами a и b , если сторона b совпадает с горизонтальной свободной поверхностью, где давление равно p_0 .

2. Определить положение центра давления на круг, помещенный под углом в 45° к горизонту, на глубине его центра равной h .

3. Определить положение центра давления на вертикальный щит шлюза, если глубина его нижнего ребра равна H . Как изменится момент сил давления относительно нижнего ребра, если с другой стороны имеется подпор воды глубиной $h = H/2$?

4. (Парадокс Жуковского) Определить силу, действующую на половину $(-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$ круглого бесконечного цилиндра с радиусом r , помещенного полностью в жидкость на глубину оси цилиндра h ; другая половина изолирована от жидкости. Почему цилиндр не вращается, хотя сила давления на элемент его поверхности зависит от глубины погружения элемента?

5. Тяжелая однородная жидкость вращается вокруг вертикальной оси в цилиндрическом сосуде с радиусом R со скоростью ω . Если в состоянии покоя жидкость имела уровень H , то:

- а) вычислить силу давления на дно сосуда при вращении;
- б) найти скорость вращения, когда свободная поверхность коснется дна сосуда.

6. Найти форму поверхности раздела двух несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 , помещенных во вращающийся с угловой скоростью ω вертикальный стакан.

7. Замкнутый сосуд, наполненный тяжелой жидкостью, вращается с угловой скоростью ω вокруг горизонтальной оси. Найти поверхности равного давления.

8. Рассматривая баланс сил, действующих на частицу воздуха при ее смещении в политропной атмосфере $\left(p(z) = p_0 \left(\rho(z)/\rho_0\right)^n\right)$, доказать, что относительно адиабатических смещений равновесие $(p/\rho^\kappa = \text{const})$ устойчиво, если $n < \kappa$.

Глава 3

ДИНАМИКА НЕВЯЗКОЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В этой главе рассматривается движение невязкой несжимаемой среды (жидкостей и газов) с постоянной плотностью.

Практическое значение модели несжимаемой невязкой жидкости Ранее (см. ч. 2, § 14) уже обсуждались теоретические ограничения на применение этой простейшей модели сплошной среды.

Что касается пренебрежения силами вязкости, то из полной системы уравнений движения, записанных в безразмерной форме, следует, что все слагаемые с вязкостью становятся малыми при числах $Re \gg 1$. Большинство потоков жидкостей и газов отвечают этому условию. Действительно, для воздуха ($\nu \sim 10^{-4}$ м²/сек) числа $Re \sim 10^3$ достигаются уже при $v_0 l_0 \sim 10^{-1}$ м/сек т. е. для тел с характерным размером $l_0 \sim 1$ м при характерной скорости 3–4 км/час; для воды ($\nu \sim 10^{-5}$ м²/сек) такие же числа Re достигаются для тех же тел уже при скорости 0,4 км/час. Так что можно считать, что все летательные аппараты и суда движутся при $Re \gg 1$.

Но это не значит, что во всей области потока, можно пренебречь силами вязкости, которые определяются не только величиной ν , но и градиентами скорости. Есть область, прилегающая к твердым стенкам, где градиенты скорости велики, и поэтому в ней силами вязкости пренебрегать нельзя. Тем не менее эта область имеет очень малый поперечный размер. Дело в том, что только прилегающий к стенке слой жидкости (газа) толщиной порядка длины свободного пробега молекулы прилипает к стенке, а все остальные — лишь подтормаживаются. При этом сила трения,

подтормаживающая слой, быстро спадает при удалении от стенок, поскольку она пропорциональна уменьшающемуся при этом поперечному градиенту скорости. Поэтому, толщина такого пристеночного *пограничного слоя*, где силы трения сравнимы с силами инерции, мала и тем меньше, чем больше число Re .

Оценим толщину пограничного слоя δ (см. рис. 3.1), исходя из того, что силы вязкости в нем сравнимы по величине с инерционными силами, т. е.

$$|\nu \Delta \mathbf{v}| \sim |(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}|.$$

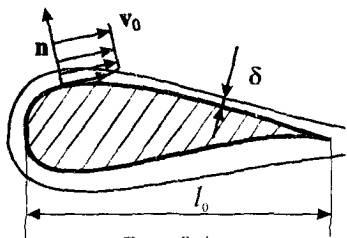


Рис. 3.1

Для компонентов этого соотношения в направлении основного потока (вдоль стенки), имеющего характерную скорость v_0 (например, скорость на границе пограничного слоя), получим

$$\mu_0 \frac{v_0}{\delta^2} \sim \rho_0 v_0 \frac{v_0}{l_0}.$$

Здесь при оценке сил вязкости взято их максимальное значение, соответствующее градиенту скорости по нормали к стенке, который равен по порядку величины v_0 / δ , причем l_0 — характерный продольный размер (например, радиус кривизны стенки, длина профиля и т. п.), μ_0 , ρ_0 — характерные значения коэффициента вязкости и плотности.

Из этой оценки имеем

$$\frac{\delta}{l_0} \sim \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 l_0}} = \frac{1}{\sqrt{Re}},$$

так что $\delta / l_0 \ll 1$ при $Re \gg 1$.

Итак, во всей области потока реальной (вязкой) среды, кроме тонких областей пограничных слоев у стенок твердых тел, можно пользоваться при $Re \gg 1$ моделью идеальной (невязкой) среды.

Если же пограничные слои разрушаются в силу каких-то причин, то область применения модели идеальной среды значительно сужается.

Отрыв и разрушение пограничного слоя — не единственный пример, когда реальные течения не могут быть исследованы при помощи модели идеальной среды. Так, например, невозможно в рамках идеальной среды объяснить возникновение циркуляции вокруг цилиндра, вращающегося в реальной жидкости (газе); нельзя представить себе и образование вихрей внутри среды (например, так называемых вихревых дорожек Кармана), которые согласно теории в идеальной среде могут возникать

только на границах потока. Нельзя, наконец, объяснить наличие силы сопротивления при безотрывном обтекании тел (парадокс Даламбера).

В связи с этими и другими эффектами проявления вязкости всегда следует обращать внимание на то, в каких случаях явление в реальной среде можно с достаточной точностью изучать, оставаясь в рамках простейшей модели идеальной среды. На основании наблюдений, экспериментов, теоретических оценок и др. необходимо всякий раз устанавливать границы применимости модели идеальной среды.

Что касается предположения о несжимаемости идеальной среды, то достаточно подробные оценки были уже проведены (см. ч. 2, § 14) и нет нужды к ним здесь возвращаться.

Движение невязкой несжимаемой среды может быть разбито на два класса: *безвихревое движение*, когда всюду $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, и *вихревое движение*, когда допускаются области, где $\text{rot } \mathbf{v} \neq 0$. И тот, и другой класс имеет прямое отношение к потокам реальных жидкостей и газов.

Так, например, если воспользоваться теоремой Лагранжа (ч. 2, § 14), то станет понятным, что обтекание твердого тела однородным невязким потоком с постоянной скоростью \mathbf{v}_∞ можно считать безвихревым, поскольку оно равнозначно движению невязкой жидкости у тела, которое из состояния покоя (тела и жидкости) приобрело постоянную скорость $-\mathbf{v}_\infty$.

С другой стороны, локализация областей завихренности в потоке при $Re \gg 1$ (область пограничного слоя, вихревая пелена и др.) позволяет специально рассматривать область вихревых движений.

Исходная система дифференциальных уравнений, ее интегралы, граничные условия

Для тех областей движения реальных жидкостей (газов), где можно пренебречь силами вязкости, теплопроводностью и сжимаемостью среды ($\rho = \text{const}$), из общей системы (см. ч. 2, § 14, уравнения (2.117a) – (2.120)) имеем

$$\text{div } \mathbf{v} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (3.2)$$

$$\frac{de}{dt} = 0, \quad e = e(\rho, T). \quad (3.3)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) образуют замкнутую систему для определения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ и $p = p(t, \mathbf{r})$.

Уравнение (3.3) в предположении, что для несжимаемых сред $e = cT$ (c — постоянная теплоемкость), свидетельствует о том, что температура каждой частицы остается неизменной (индивидуальная производная $dT/dt = 0$). При этом в движущейся среде допускается стационарное поле температуры, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla T) = 0. \quad (3.4)$$

Это уравнение, в частности, означает, что в стационарных потоках температура вдоль линий тока постоянна.

Граничные условия на неподвижных непроницаемых поверхностях имеют вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S \equiv v_n|_S = 0. \quad (3.5)$$

Если поток включает бесконечно удаленную точку ($|\mathbf{r}| = \infty$), то в ней должны быть заданы

$$\mathbf{v}|_{r=\infty} = \mathbf{v}_\infty(t), \quad p|_{r=\infty} = p_\infty(t). \quad (3.6)$$

На свободных поверхностях σ , подверженных поверхностному натяжению, имеем

$$p|_\sigma = p_0 + \alpha \left(\frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right) \quad (3.7)$$

где p_0 — наружное давление, причем $p|_\sigma - p_0$ положительно со стороны выпуклости свободной поверхности.

Для большинства задач условие (3.7) ставится в пренебрежении силами поверхностного натяжения, т. е. в виде отсутствия скачка давления на свободных поверхностях

$$p|_\sigma = p_0.$$

В качестве начальных условий должны быть заданы функции $\mathbf{f}_v(\mathbf{r})$ и $f_p(\mathbf{r})$ такие, при которых

$$\mathbf{v}|_{t=t_0} = \mathbf{f}_v(\mathbf{r}), \quad p|_{t=t_0} = f_p(\mathbf{r}).$$

При этом вид функции $f_v(\mathbf{r})$ должен определяться граничными условиями (3.5), (3.6).

Основные интегралы уравнения изменения количества движения (3.2), как было показано в § 1, имеют вид:

а) интеграл Лагранжа-Коши для безвихревого движения в потенциальном поле сил

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Pi = C(t); \quad (3.8)$$

б) интеграл Бернулли (вдоль линий тока или вихревых линий) для стационарных потоков:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \Pi = C(L). \quad (3.9)$$

§ 3.1. Безвихревые движения. Общие сведения

Постановка гидромеханической задачи Задача о безвихревом движении несжимаемой невязкой жидкости и ее взаимодействии с твердыми телами состоит в решении уравнений относительно скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (3.10)$$

в области V потока жидкости вне твердых тел при граничных условиях (3.5) и (3.6).

Задача эта, таким образом, сводится к определению гармонической функции — потенциала скорости $\varphi = \varphi(t, \mathbf{r})$, которую можно ввести на основании уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, так что $\mathbf{v} = \nabla \varphi$, и тогда условие соленоидальности поля скорости дает

$$\Delta \varphi = 0. \quad (3.11)$$

Давление в жидкости $p = p(t, \mathbf{r})$ можно найти при помощи интеграла Лагранжа-Коши

$$p + \frac{\rho(\nabla \varphi)^2}{2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho \Pi = C(t), \quad (3.12)$$

где Π — потенциал массовых сил, а функция времени $C(t)$ определяется из граничных условий для p и \mathbf{v} .

Отметим, что задача определения потенциала поля скорости \mathbf{v} одинакова как для установившихся, так и не установившихся потоков. В дальнейшем, если это специально не требуется, мы зависимость от времени отмечать не будем, рассматривая t как параметр, так что все выводы относительно $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ будут справедливы также к мгновенным значениям скорости.

Уравнение Лапласа (3.11) в ортогональных криволинейных координатах x^i с коэффициента Ламэ $H_i (\equiv \sqrt{g_{ii}})$ имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (3.13)$$

причем физические компоненты скорости в этой системе имеют вид:

$$v_1 = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \quad v_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \quad v_3 = \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x^3}.$$

В частности, для сферических координат (r, θ, ε) имеем $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin \theta$, а для цилиндрических координат (ρ, ε, z) : $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$, $H_3 = 1$.

Граничное условие для потенциала φ состоит в задании его нормальной производной на поверхности твердых тел (вообще говоря, движущихся произвольным образом), т. е.

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = f(t, \mathbf{r}_S). \quad (3.14)$$

Обычно, орт нормали \mathbf{n} на поверхности тела направляется в поток жидкости (см. рис. 3.2).

Это условие обеспечивает свободное проскальзывание лишенной вязкости жидкости по поверхности непроницаемых тел, но требует равенства нормальных компонент скорости поверхности тела и жидкости. Таким образом, оно исключает отрыв частиц жидкости от поверхности или проникновение их внутрь тела. Для тел с проницаемой поверхностью скорость частиц жидкости на поверхности тела задается в зависимости как от движения поверхности, так и от законов проницаемости поверхности.

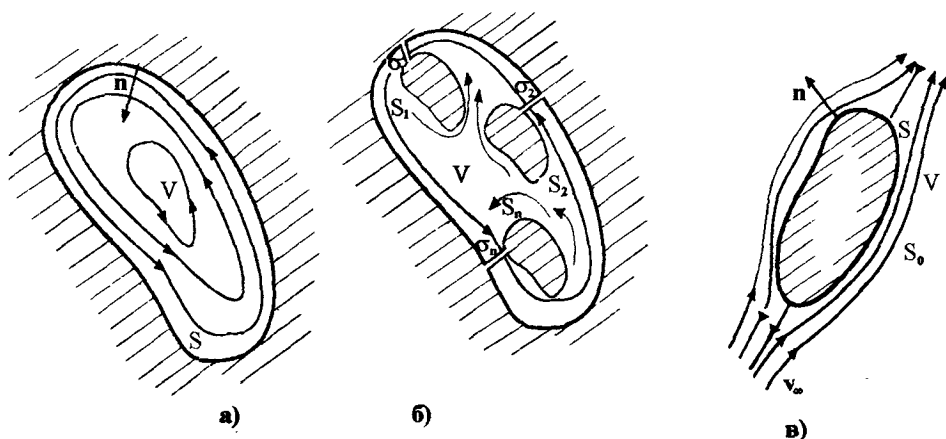


Рис. 3.2

Если область V включает бесконечно удаленную точку, то кроме условия (3.14) для тел, произвольным образом движущихся в жидкости, необходимо предположить, что сама жидкость покоится на бесконечности, т. е.

$$\mathbf{v}|_{r \rightarrow \infty} = \nabla \phi|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (3.15)$$

Это условие означает, что никакое движение конечных твердых тел в безграничном объеме жидкости не может вызвать ее движение в точках, достаточно удаленных (теоретически — бесконечно удаленных) от движущихся тел. Условие (3.15), как будет показано дальше, обеспечивает единственность решения. Физически оно означает конечность энергии среды, приводимой в движение твердыми телами.

Для задач обтекания твердых тел однородным потоком со скоростью \mathbf{v}_∞ , достаточно рассмотреть поступательное движение тела со скоростью $-\mathbf{v}_\infty(t)$ в инерциальной системе координат, не связанной с телом. Тогда для покоящегося в этой системе тела условие в бесконечно удаленной точке приобретает вид

$$\mathbf{v}|_{r \rightarrow \infty} = \nabla \phi|_{r \rightarrow \infty} = \mathbf{v}_\infty, \quad (3.16)$$

а картина движения жидкости у тела будет соответствовать обтеканию его однородным потоком.

Внутренняя и внешняя задачи гидромеханики. Единственность решения

Если область V ограничена замкнутой поверхностью S , то *внутренняя задача гидромеханики* формулируется как внутренняя задача Неймана (см. (3.11) и (3.14)).

Если область V односвязная (см. рис. 3.2, а), то для разрешимости внутренней задачи необходимо в дополнение к (3.14) выполнение условия

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_S f dS = 0, \quad (3.17)$$

Это условие является следствием односвязности области V и того, что в каждой ее внутренней точке $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, так что оно является следствием теоремы Гаусса-Остроградского. Оно означает, что суммарный поток жидкости через границу области равен нулю (если $f = 0$, то граница вообще непроницаема для жидкости).

Если же ограниченная поверхностью S область V содержит внутри либо изолированные особенности поля \mathbf{v} (источники, стоки, вихревые нити или изолированные вихри (двумерная область), диполи), либо какие-то области S_1, S_2, \dots, S_n (см. рис. 3.2, б), нарушающие связность V , то условие (3.17) должно соблюдаться, если под S подразумевать прежнюю границу S плюс S_1, S_2, \dots, S_n и плюс перегородки $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ — разрезы (см. рис. 3.2, б), исключающие существование замкнутых нестягиваемых контуров. В случае наличия изолированных особенностей поле \mathbf{v} определено всюду, кроме точек их местоположения. При наличии вихрей потенциал φ становится неоднозначной функцией. При источниках (стоках) надо следить за выполнением условий (3.17).

Внешняя задача гидромеханики, как это видно из (3.11) и (3.14), формулируется как внешняя задача Неймана для области V , внешней по отношению к заданной границе S (поверхности твердого тела) и включающей бесконечно удаленную точку (см. рис. 3.2, в).

Для внешней односвязной области не обязательно выполнение условия (3.17). Важно только, чтобы значение интеграла

$$\int_S (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.18)$$

сохранялось для любой поверхности S_0 , охватывающей заданную поверхность S : поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ всюду в области между S и S_0 .

Если внешняя область V многосвязна, то интеграл (3.18) может меняться в зависимости от того, какие особенности или области, нарушающие связность V , располагаются между S и S_0 .

В случае многосвязной области V поверхность S дополняется перегородками, которые могут включать и бесконечно удаленную точку.

Поскольку внутренняя и внешняя гидродинамические задачи формулируются как соответствующие задачи Неймана, то можно считать единственность гидромеханических задач установленной: для задач Неймана единственность решения хорошо известна.

Тем не менее, при доказательстве единственности обнаруживается ряд важных гидромеханических интерпретаций, на которые следует обратить внимание. Поэтому далее излагаются необходимые условия единственности решения внутренней и внешней задач гидромеханики.

Единственность решения внутренней задачи для односвязной области V , ограниченной поверхностью S , устанавливается при помощи теоремы Гаусса-Остроградского для функции $\varphi \mathbf{v} = \varphi \nabla \varphi$, где φ — решение задачи. Так как $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ то

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

и, следовательно, воспользовавшись теоремой Гаусса-Остроградского, имеем

$$\int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dV = \int_V \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) dV = \int_S \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (3.20)$$

где под S подразумевается суммарная граница области V .

Пусть φ и φ^* — гармонические функции, определяющие два различных решения \mathbf{v} и \mathbf{v}^* задачи определения скорости. В силу линейности уравнения (3.11) функция $\varphi - \varphi^*$ — тоже решение, и тогда, поскольку $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0$, имеем

$$\int_V (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)^2 dV = \int_S (\varphi - \varphi^*) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Отсюда следует, что необходимым условием совпадения \mathbf{v} и \mathbf{v}^* во всех внутренних точках области V является выполнение равенства

$$\int_S (\varphi - \varphi^*) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS = 0. \quad (3.20a)$$

Этот интеграл в силу произвольности области V обращается в нуль, если $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}|_S$, т. е.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = \left. \frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right|_S.$$

Таким образом, то что нормальная производная $\partial \varphi / \partial n$ на границе области V принимает заданное значение, является необходимым условием единственности решения

внутренней задачи, т. е. решения уравнения (3.11) для ограниченной односвязной области потока.

Заметим, что единственность решения будет так же обеспечена, если $\varphi = \varphi^*$ всюду на S или на ее части, а на остальной части $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}$. Задачи, когда на границе потока задан потенциал скорости, не столь распространены в гидромеханике (см., например, задачи об импульсивном движении). Поэтому большинство гидромеханических задач относительно потенциала φ формулируются как задачи Неймана.

В то же время в двумерных потоках несжимаемой жидкости, может быть введена функция тока (см. ч. 2, § 4), которая удовлетворяет уравнению Лапласа, а на твердых непроницаемых контурах принимает постоянное значение. Для функции тока формулируется задача Дирихле и единственность ее решения обеспечена заданием значения функции тока на границе области.

Для установления единственности решения внешней гидромеханической задачи воспользуемся представлением гармонической функции в любой внутренней точке односвязной области V , полученным ранее (см. ч. 2, § 4, формула (1.98) при $\Delta\varphi = 0$):

$$4\pi\varphi(\mathbf{r}) = - \int_{S_j} \left\{ \varphi(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nabla \varphi(\mathbf{r}') \right\} \cdot \mathbf{n} dS', \quad (3.21)$$

где \mathbf{r}' определяет переменную точку интегрирования на границе области V , а dS' и \mathbf{n}' — элемент поверхности и нормаль в этой точке.

Пусть V' — односвязная область (см. рис. 3.3) между сферой S_a с радиусом a и центром в рассматриваемой точке $M(\mathbf{r})$ поля, и S — суммарной поверхностью тел, движущихся в жидкости и не нарушающих связности V' . Тогда, обозначая для краткости $\mathbf{R} \equiv \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\varphi(\mathbf{r}') \equiv \varphi'$ и учитывая, что $S_j = S_a + S$, получаем из (3.21):

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} \varphi' dS' + \frac{1}{4\pi a} \int_{S_a} \nabla \varphi' \cdot \mathbf{n}' dS' + \frac{1}{4\pi} \int_S \left[\varphi' \nabla_{\mathbf{r}'} \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \nabla \varphi' \right] \cdot \mathbf{n}' dS', \quad (3.22)$$

где \mathbf{n}' на S совпадает с внутренней к V' нормалью, а на S_a : $\mathbf{n}' = \mathbf{n} = \mathbf{a}/a$.

Первый интеграл в этом выражении представляет собой $\bar{\varphi}$ — среднее значение $\bar{\varphi}$ по сфере S_a , а второй равен Q — расходу жидкости через поверхность сферы S_a . Поскольку в области V' отсутствуют источники и стоки, то величина Q одинакова для всех замкнутых поверхностей, охватывающих S . Поэтому, вводя телесный угол ω , получаем

$$\int_S \nabla \varphi' \cdot \mathbf{n}' dS = -a^2 \int_{\omega} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial R} \right)_{R=a} d\omega = a^2 \frac{\partial}{\partial a} \int_{\omega} (\varphi')_{R=a} d\omega = Q = \text{const.}$$

Интегрируя уравнение

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{\omega} (\varphi')_{R=a} d\omega = \frac{Q}{a^2},$$

получаем

$$\int_{\omega} (\varphi')_{R=a} d\omega = -\frac{Q}{a} + 4\pi C,$$

где C — не зависит от a . Тогда

$$\bar{\varphi}(\mathbf{r}, a) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{S_a} \varphi' dS' = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (\varphi')_{R=a} d\omega = -\frac{Q}{4\pi a} + C. \quad (3.23)$$

Заметим, что вообще говоря, величина C может зависеть от координат (x_1, x_2, x_3) точки, в которой находится центр сферы S_a , поскольку из (3.21) имеем:

$$\nabla C = \nabla \bar{\varphi}(\mathbf{r}, a) = \bar{\nabla} \varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} (\nabla \varphi)_{R=a} d\omega = \bar{\mathbf{v}}, \quad (3.24)$$

где $\bar{\mathbf{v}}$ — среднее по сфере значение скорости.

Возвращаясь теперь к (3.22), заменяя в первом слагаемом подынтегрального выражения дифференцирование по \mathbf{r}' на дифференцирование по \mathbf{r} , получим

$$\varphi(\mathbf{r}) = C - \frac{1}{4\pi a^2} \int_S \left[\varphi' \nabla_r \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \nabla \varphi' \right] \cdot \mathbf{n}' dS', \quad (3.25)$$

где \mathbf{n}' — внешняя к области, ограниченной S , нормаль.

Это выражение, как и формула (3.21), примечательно тем, что дает явное представление гармонической функции в каждой внутренней точке области через значения на границе области самой функции и значения ее нормальной производной — совместно. Это, как будто бы, противоречит условию единственности задач Неймана и Дирихле. Объяснение состоит в том, что значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ на внутренней границе области не являются независимыми, и, в принципе, одно из них может быть выражено через другое.

Переходя к доказательству единственности решения внешней задачи, будем считать, что V включает бесконечно удаленную точку, т. е. предположим что сфера S_a бесконечно расширяется и $V \rightarrow V_{\infty}$.

Тогда первый вывод из (3.25) таков

$$\varphi(\infty) \equiv \varphi_{\infty} = C, \quad (3.26)$$

т. е. потенциал потока в бесконечно удаленной точке равен C .

Предположим теперь, что жидкость, занимающая безграничную область, покоится в бесконечно удаленной точке, т. е.

$$\mathbf{v}(\infty) \equiv \mathbf{v}_{\infty} = 0. \quad (3.27)$$

Это предположение обеспечивает единственность решения внешней задачи.

Действительно, в этом случае и среднее значение скорости $\bar{\mathbf{v}}$ по сфере S_a равно нулю, так что из (3.24) следует, что C — аддитивная постоянная (не зависит от x_1, x_2, x_3 для каждого решения задачи $\varphi(\mathbf{r})$).

Кроме того, в безграничной односвязной области V_∞ для каждого решения, как и в случае внутренней задачи, из (3.19) имеем

$$\int_V (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dV = - \int_S \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{S_\infty} \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_S (\varphi - C) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{S_\infty} (\varphi - C) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

иборасходы Q через S и S_∞ одинаковы. Таким образом, для разности функций $(\varphi - C) - (\varphi^* - C^*)$ получаем

$$\int_{V_\infty} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) dV = - \int_S (\varphi - \varphi^*) (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} dS + (C - C^*) Q, \quad (3.28)$$

где φ и φ^* — потенциалы (C и C^* — их значение на бесконечности) двух различных решений \mathbf{v} и \mathbf{v}^* системы уравнений (3.10).

Отсюда следует, что единственность решения второй внешней задачи, для которой $\mathbf{v}_\infty = (\nabla \varphi)_\infty = 0$, будет обеспечена, если задана нормальная производная $\partial \varphi / \partial n$ на границе S движущихся тел, поскольку $C = C^*$ при $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{v}^*_\infty = 0$.

В случае неодносвязности областей V и V_∞ внутренней и внешней гидромеханических задач, при формулировке условий единственности следует исходить из формулы Грина для многосвязных областей (см. ч. 2, § 6) в случае равенства гармонических функций $\varphi = \psi$. Тогда вместо (3.19) имеем, например, для двухсвязной области

$$\int_V v^2 dV = \int_S \varphi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS + \kappa \int_\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS,$$

где σ — площадь поверхности перегородки, превращающей двухсвязную область V в односвязную, а κ — циклическая постоянная в случае многосвязности φ .

К необходимым условиям единственности, сформулированным ранее для односвязных областей, добавляется еще условие одинаковости ($\kappa = \kappa^*$) циклических постоянных для многозначных функций φ и φ^* .

Для двумерных потоков единственность решения будет обеспечена, если для $\varphi(x, y)$ и $\mathbf{v}(x, y)$ выполнены условия

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_L = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = f(t, \mathbf{r}_S),$$

$$\nabla \varphi|_\infty = \mathbf{v}|_\infty = 0,$$

где L — твердый контур в плоскости потока.

Условие для значения потенциала на бесконечности должно быть изменено, и теперь оно имеет вид

$$\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r \rightarrow C \quad (\text{при } r \rightarrow \infty).$$

Это следует из представления гармонической на плоскости функции через ее значение и значение ее нормальной производной на твердом контуре, которое, как (3.21), (3.22),

(3.25), может быть получено из формулы Грина для фундаментального решения $\ln r$, и имеет вид (сравнить с (3.22))

$$\varphi(\mathbf{r}) = \bar{\varphi} - \frac{Q}{2\pi} \ln a - \frac{1}{2\pi} \int_L (\varphi' \nabla' \cdot \ln R - \ln R \nabla \varphi') \cdot \mathbf{n} dL, \quad (3.29)$$

где

$$R = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2}, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2\pi a} \int_{L_a} \varphi' dL' = C + \frac{Q}{2\pi} \ln a,$$

где C — аддитивная (в случае $\mathbf{v}|_{\infty} = 0$) постоянная, L_a — окружность с радиусом a .

Однако при $a \rightarrow \infty$ убывает до нуля только функция

$$\varphi(\mathbf{r}) - C - \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{1}{2\pi} \int_L \left\{ \ln \frac{R}{r} \nabla \varphi' + \varphi' \frac{\mathbf{R}}{R^2} \right\} \cdot \mathbf{n} dL \rightarrow 0.$$

Тем не менее функцию $\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r$ можно рассматривать как однозначный потенциал нового двумерного плоского течения, стремящегося к C на бесконечности. Тогда из формулы Гаусса-Остроградского следует, что градиент этой функции определяется однозначно всюду, если задана его нормальная компонента на границе твердого контура. При этом известна и величина Q (поток через внутреннюю границу), а это значит, что однозначно определяется скорость $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ (сравнить с (3.28)).

Резюмируя вышеизложенное, сформулируем основные выводы, касающиеся внутренней и внешней гидромеханических задач о безвихревом движении несжимаемой невязкой жидкости.

1. Обе задачи имеют единственное решение системы уравнений $\text{rot } \mathbf{v} = 0$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$ в виде гармонической функции φ — потенциала скорости ($\Delta \varphi = 0$), если:

а) Заданы нормальные компоненты скорости на поверхности произвольным образом движущихся тел, а именно

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_S = \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = f(t, \mathbf{r}_S).$$

На функцию $f(t, \mathbf{r}_S) = \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S$, как и на функцию $\mathbf{n} \times \nabla \varphi|_S$, накладываются ограничения в зависимости от связности области и характера задачи (внешняя или внутренняя).

б) Для внешней задачи выполнено условие

$$\nabla \varphi|_{\infty} = \mathbf{v}_{\infty} = 0,$$

т. е. условие неподвижности на бесконечности жидкости, занимающей безграничную область.

При этом, сам потенциал скорости в бесконечно удаленной точке равен постоянной, одинаковой для всех точек области потока, т. е.

$$\varphi|_{\infty} = C,$$

а для двумерных потоков —

$$\left(\varphi - \frac{Q}{2\pi} \ln r \right)_{\infty} = C.$$

В случае задачи обтекания неподвижных тел однородным потоком (что соответствует поступательному движению твердых тел в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности) условие на бесконечности, обеспечивающее единственность решения, имеет вид

$$\nabla \varphi|_{\infty} = \mathbf{v}_{\infty}(t).$$

в) В многосвязных областях требуется задание одинаковых циклических постоянных для каждой из многозначных функций, определенных по отдельности (φ и φ^*).

2. Каких-либо ограничений на характер движения тел в жидкости нет; лишь бы вызванные ими потоки были безвихревыми ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$).

При этом поле течения однозначно определяется мгновенной скоростью поверхности тел (и их формой) и не зависит ни от ускорения тел, ни от предыдущих их положений (в частности, если тела неподвижны, то в этот момент вся жидкость покоится).

Этот важный для практического использования вывод следует из того, что основные уравнения задачи ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$, $\text{div } \mathbf{v} = 0$, $\Delta \varphi = 0$) не содержат явно времени, а в граничные условия входят лишь мгновенные значения величин.

Таким образом, *поле скоростей жидкости целиком определяется нормальными компонентами мгновенных скоростей на поверхности твердых тел и значением скорости в бесконечно удаленной точке.*

Некоторые свойства безвихревых течений

Существование скалярного потенциала у безвихревых потоков определяет ряд существенных особенностей этих движений.

Во-первых, скорость и потенциал безвихревых движений, являясь гармоническими функциями, определяются из линейного уравнения.

Поэтому справедлив принцип суперпозиции: если φ_1 и φ_2 являются потенциалами, то $\varphi_1 + \varphi_2$ представляет потенциал нового безвихревого потока. Следует заметить, что в силу нелинейного характера зависимости p от v давление p не подчиняется принципу суперпозиции.

Во-вторых, скорость v безвихревого течения несжимаемой жидкости, будучи гармоническим вектором, обладает всеми свойствами гармонического поля, а его потенциал — свойствами гармонических функций (см. ч. 2, § 4). Из свойств безвихревого движения несжимаемой среды отметим следующие, к которым так или иначе придется в дальнейшем обращаться.

1. Потенциал скорости и величина скорости во всех внутренних точках области безвихревого потока несжимаемой жидкости не могут иметь ни максимума, ни минимума.

Эти факты имеют значение для таких явлений в несжимаемой жидкости как кавитация (см. дальше), которая, начинаясь в местах минимального давления, развивается не внутри потока, а на твердых стенках, ограничивающих поток.

2. В неограниченном пространстве непрерывное безвихревое движение несжимаемой жидкости невозможно, т. е. $v \equiv 0$, если скорость на бесконечности равна нулю ($v_\infty = 0$).

Это следует из теоремы Стокса-Гельмгольца (см. ч. 2, § 5) для поля $\mathbf{A} = \mathbf{v}$.

3. Потенциал скорости безвихревого пространственного потока несжимаемой жидкости в бесконечно удаленной точке равен постоянной.

4. В окрестности критической точки, где $v = 0$, безвихревое течение несжимаемой жидкости является чисто деформационным без изменения объема.

Докажем это свойство. Пусть точка M — критическая (см. рис. 3.4), так что $v(M) = 0$. Поскольку в ней потенциал φ имеет конечные и непрерывные производные (если только точка M не является особой точкой граничной поверхности), то можно разложить $\varphi(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора в окрестности M . Это разложение в прямоугольной декартовой системе координат с началом в точке M имеет вид

$$\varphi = \varphi(0) + b_i x_i + \frac{1}{2} b_{ik} x_i x_k + \dots$$

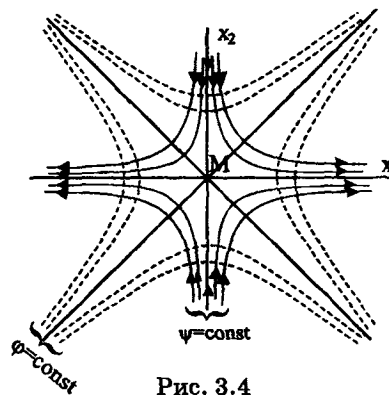


Рис. 3.4

Так как $\mathbf{v} = \nabla \varphi|_{r=0} = 0$, то все $b_i = 0$, а так как $\operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \varphi|_{r=0} = 0$, то $b_{ii} \equiv b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0$.

Сравнивая теперь разложение для $\mathbf{v} = \nabla \varphi$ (с точностью до малых первого порядка), а именно $v_i = b_{ik} x_k$ с разложением, полученным по теореме Гельмгольца (см. ч. 2, § 7), видим, что рассматриваемое движение является чисто деформационным без изменения объема, причем коэффициенты разложения b_{ik} являются компонентами тензора скоростей деформации, т. е.

$$b_{ik} = v'_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Если выбрать координатные оси x_1, x_2, x_3 совпадающими с главными осями тензора b_{ik} , то получим

$$v_1 = b_{(1)} x_1, \quad v_2 = b_{(2)} x_2, \quad v_3 = b_{(3)} x_3 = - (b_{(1)} + b_{(2)}) x_3,$$

где $b_{(1)}, b_{(2)}, b_{(3)}$ — главные значения тензора b_{ik} , причем в силу $b_{ii} = 0$ имеем $b_{(1)} + b_{(2)} + b_{(3)} = 0$.

В случае двумерного течения имеем

$$v_1 = b_{(1)} x_1, \quad v_2 = b_{(2)} x_2 = -b_{(1)} x_2,$$

так что потенциал скорости равен $\varphi = \frac{1}{2} b_{(1)} (x_1^2 - x_2^2)$, а функция тока, получаемая из уравнения $\frac{dx_1}{b_{(1)} x_1} = -\frac{dx_2}{b_{(1)} x_2}$, в окрестности M имеет вид $\psi = b_{(1)} x_1 x_2$.

Таким образом, линии тока в окрестности критической точки в плоском безвихревом потоке несжимаемой жидкости являются равнобочными гиперболами с асимптотами по главным осям тензора скоростей деформации. Экипотенциальные линии (показаны на рис. 3.4 пунктиром) образуют идентичное семейство с асимптотами-биссектрисами координатных углов. Стрелками показаны линии тока у точки M при $b_{(1)} > 1$.

5. Потенциал φ безвихревого движения несжимаемой жидкости, вызванного поступательным движением со скоростью $\mathbf{w}(t)$ твердого тела с поверхностью S , может быть представлен в виде (см. задачу 4.5, ч. 2, § 4):

$$\varphi = \mathbf{w} \cdot \Phi(\mathbf{r}),$$

где $\Phi(\mathbf{r})$ — гармонический вектор, определяемый из задачи

$$\Delta \Phi = 0, \quad [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \Phi - \mathbf{n}]_S = 0, \quad \Phi_\infty \rightarrow \text{const.}$$

6. Кинетическая энергия безвихревого движения несжимаемой жидкости в односвязной области V с границей S имеет выражение (см. задачу 4.4, ч. 2, § 4)

$$T = \frac{\rho}{2} \int_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS.$$

7. Единственным возможным состоянием несжимаемой жидкости в односвязной области при отсутствии вихрей является покой, если на границе области нормальная компонента скорости обращается в нуль.

Это свойство потока следует из предыдущего, поскольку $T = \frac{\rho}{2} \int_V (\mathbf{v})^2 dV = 0$ при $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = 0$, так что $\mathbf{v} \equiv 0$.

Сферические и цилиндрические функции в гидромеханических задачах

Естественным образом в задачах гидромеханики появляются сферические функции $Y(\theta, \varepsilon)$, если для уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$, записанного в сферических (r, θ, ε) , координатах а именно

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} = 0, \quad (3.30)$$

отыскивать решение (по предложению Лапласа) в виде однородной функции по r^n , т. е.

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = r^n Y_n(\theta, \varepsilon). \quad (3.31)$$

Тогда для функции $Y_n(\theta, \varepsilon)$ из (3.30) имеем

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_n}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_n}{\partial \varepsilon^2} + n(n+1) Y_n = 0. \quad (3.32)$$

Так как $n(n+1)$ не меняется, если заменить n на $-(n+1)$, то функция

$$\varphi = r^{-(n+1)} Y_n(\theta, \varepsilon) \quad (3.33)$$

также является решением уравнения Лапласа.

Функция $Y_n(\theta, \varepsilon)$, удовлетворяющая уравнению (3.32), называется сферической функцией n -ой степени¹.

Заметим, что шаровой функцией иногда называют (см. [13], гл. IV, §1) однородные степени n относительно x, y, z решения уравнения Лапласа в прямоугольных декартовых координатах.

¹ Здесь приведены некоторые основные сведения из теории сферических и цилиндрических функций. Более подробный материал содержится в монографиях [13], [14], [15] и др.

В этих определениях степень n может быть целой, дробной и даже любой комплексной.

Продолжая решение уравнения (3.30) методом разделения переменных, ищем сферическую функцию в виде $Y_m(\theta, \varepsilon) = U_n^m(\theta) \mathcal{Y}_m'(\varepsilon)$. Тогда для $\mathcal{Y}_m'(\varepsilon)$ получаем (m — произвольное число)

$$\frac{d^2 \mathcal{Y}_m'}{d\varepsilon^2} + m^2 \mathcal{Y}_m' = 0, \quad (3.34)$$

а для $U_n^m(\theta)$, полагая $\cos \theta = \mu$, и $U_n^m(\theta) = P_n^m(\mu)$ имеем уравнение

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} \right] + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P_n^m(\mu) = 0. \quad (3.35)$$

Из (3.34) для $\mathcal{Y}_m'(\varepsilon)$ следуют два независимых решения $\sin m\varepsilon$, $\cos m\varepsilon$, которые при целых m однозначны и непрерывны на единичной окружности.

Таким образом, нормальная форма решения уравнения Лапласа, т. е. решение $R(r)\Theta(\theta)E(\varepsilon)$, имеет вид

$$r^n P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos}{\sin} m\varepsilon; \quad r^{-(n+1)} P_n^m(\cos \theta) \frac{\cos}{\sin} m\varepsilon. \quad (3.36)$$

Важно отметить, что эта нормальная форма получена для любых действительных и комплексных значений m и n . В этом случае говорят об обобщенных сферических функциях (см. [13], гл. V).

В наиболее важных приложениях используется нормальная форма (3.36), в которой m и n — целые числа. В этом случае n или $-(n+1)$ называется степенью, m — порядком нормальной формы решения.

В дальнейшем, если особо не оговаривается, будем считать m и n целыми и положительными.

Функции $P_n^m(\mu)$, удовлетворяющие уравнению (3.35), называются присоединенными функциями (полиномами) Лежандра степени n и порядка m .

Присоединенные функции Лежандра нулевого порядка P_n^0 являются полиномами Лежандра $P_n(\mu)$ степени n , которые, как известно (см., например, [13] гл. II, § 2), удовлетворяют уравнению

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{dP_n(\mu)}{d\mu} \right] + n(n+1) P_n(\mu) = 0. \quad (3.37)$$

Но это уравнение совпадает с (3.35) при $m = 0$, поэтому $P_n^0(\mu) \equiv P_n(\mu)$.

Уравнение (3.37) носит название уравнения Лежандра.

Для полиномов Лежандра известна формула Родрига (см., например, [13], гл. II, § 5)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n, \quad (3.38)$$

которая может быть получена из уравнения Лежандра (3.37).

Аналогично, с помощью уравнения (3.35) можно получить (см. [15], гл. VII, § 12) формулу подобного строения для присоединенных полиномов Лежандра

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(\mu)}{d\mu^m} = \frac{1}{2^n n!} (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^{m+n}}{d\mu^{m+n}} (\mu^2 - 1)^n. \quad (3.39)$$

Из нее, в частности, следует, что присоединенные функции Лежандра P_n^m являются также полиномами, причем

$$P_n^m(\mu) = 0 \text{ для } m > n.$$

Итак, для каждого n имеется $(n+1)$ частных решений уравнения (3.35):

$$P_n(\mu), P_n^1(\mu), \dots, P_n^n(\mu),$$

а вместе с решениями уравнения (3.34) получаем $2n+1$ линейно независимых сферических функций, а именно

$$P_n(\mu), P_n^m(\mu) \cos m\varepsilon, P_n^m(\mu) \sin m\varepsilon,$$

для $m = 1, 2, \dots, n$.

Любую сферическую функцию $Y_n(\theta, \varepsilon)$ всегда можно представить в виде линейной комбинации найденных $2n+1$ линейно независимых решений, так что

$$Y_n(\theta, \varepsilon) = a_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_{mn} \cos m\varepsilon + b_{mn} \sin m\varepsilon) P_n^m(\cos \theta). \quad (3.40)$$

В теории сферических функций доказывается (см., например, [13], гл. VII), что функцию $f(\theta, \varepsilon)$, абсолютно интегрируемую на сфере единичного радиуса и имеющую на ней ограниченное изменение, можно разложить в равномерно сходящийся ряд по сферическим функциям

$$f(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varepsilon). \quad (3.40a)$$

Этот ряд называется *рядом Лапласа*.

Уравнение Лежандра (3.37), как уравнение 2-го порядка, имеет второе решение, линейно независимое от полиномов Лежандра $P_n(\mu)$. Это решение под названием *функции Лежандра второго рода* $Q_n(\mu)$ имеет вид (см. [13], гл. VI, § 143):

$$Q_n(\mu) = \frac{1}{2} P_n(\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \sum_{k=1}^N \frac{2n-4k+3}{(2k-1)(n-k+1)} P_{n-2k+1}(\mu),$$

где $N = n/2$ при n четном и $N = \frac{1}{2}(n+1)$ — при нечетном.

Таким образом, общее решение уравнения Лежандра (3.37) имеет вид

$$Y = C_1 P_n(\mu) + C_2 Q_n(\mu),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Аналогично, уравнение (3.35) имеет второе линейно-независимое от $P_n^m(\mu)$ решение в виде *присоединенной функции Лежандра второго рода* $Q_n^m(\mu)$, которое можно записать (см. [13], гл. III, § 14)

$$Q_n^m = (1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m Q_n(\mu)}{d\mu^m}.$$

$$Q_n^m = (-1)^n \frac{2^n (n+m)!}{(2n)!} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{d\mu^m} \left[(1-\mu)^{n-m} (1+\mu)^{n+m} \int_0^\mu \frac{d\mu}{(1-\mu)^{n-m+1} (1+\mu)^{n+m+1}} \right]$$

Функции Лежандра $P_n^m(\mu)$, $Q_n^m(\mu)$ могут быть представлены через гипергеометрическую функцию $F(\alpha, \beta; \gamma, z)$ в следующем виде (см. [13], гл. V, § 16; [14], § 3.4)

$$P_n^m(\mu) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \left(\frac{\mu+1}{\mu-1} \right)^{m/2} F(-n, n+1; 1-m; (1-\mu)/2),$$

$$Q_n^m(\mu) = \frac{e^{m\pi i} \Gamma(m+n+1) \Gamma(1/2)}{2^{n+1} \Gamma(n+3/2)} (\mu^2 - 1)^{m/2} (-\mu)^{-(m+n+1)} F\left(\frac{m+n+2}{2}, \frac{m+n+1}{2}; n+\frac{3}{2}; \frac{1}{\mu^2}\right),$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а для F существует представление при $|\mu| < 1$ (см. [14]):

$$F(\alpha, \beta; \gamma; \mu) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{A}(\alpha+n) \tilde{A}(\beta+n)}{\tilde{A}(\gamma+n)} \frac{\mu^n}{n!}.$$

Приведем некоторые рекуррентные формулы, которые будут нами использованы в дальнейшем и которые годятся для любых действительных и комплексных значений m и n (см. [13], гл. V, § 35; [14], § 3.8)

$$(2n+1)\mu P_n^m(\mu) - (n-m+1)P_{n+1}^m(\mu) - (n+m)P_{n-1}^m(\mu) = 0, \quad (3.41)$$

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_n^m(\mu)}{d\mu} = (n-m)\mu P_n^m(\mu) - (n+m)P_{n-1}^m(\mu).$$

Функция $Q_n^m(\mu)$ также подчинена этим формулам.

В частном случае ($m=0$) отсюда следует

$$(2n+1)\mu P_n = nP_{n-1} + (n+1)P_{n+1},$$

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_n}{d\mu} = n(\mu P_n - P_{n-1}).$$

Полезными часто оказываются следующие соотношения, которые получаются из двух предыдущих

$$(\mu^2 - 1) \frac{dP_n}{d\mu} = (n+1)(P_{n+1} - \mu P_n) = \frac{n(n+1)}{2n+1} (P_{n+1} - P_{n-1}),$$

$$(2n+1)\mu P_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}, \quad nP_n = \mu \frac{dP_n}{d\mu} - \frac{dP_{n-1}}{d\mu}, \quad (3.42)$$

$$(2n+1)P_n = \frac{dP_{n+1}}{d\mu} - \frac{dP_{n-1}}{d\mu}, \quad \frac{dP_{n+1}}{d\mu} - \mu \frac{dP_n}{d\mu} = (n+1)P_n.$$

Аналогичные соотношения можно получить и из формул для $P_n^m(\mu)$ и $Q_n^m(\mu)$. Приведем некоторые полезные для практики соотношения, касающиеся полиномов Лежандра (см. [13], [14], [16]).

1) Полином Лежандра n -ой степени — это ограниченная функция той же четности, что и n :

$$P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu), \quad |P_n(\mu)| \leq 1.$$

При этом

$$P_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \quad (n > 0),$$

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad P_n^m = P_{-(n+1)}^m(\mu).$$

$$P_n^{-m}(\mu) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu) \quad (n \geq m \geq 0).$$

Все корни полиномов Лежандра вещественны, различны и расположены в интервале $-1, 1$.

2) Некоторые частные значения полиномов Лежандра, присоединенных полиномов Лежандра и функций Лежандра второго рода равны:

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1), \quad P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu), \dots;$$

$$P_n^m(\mu) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) (1-\mu^2)^{n/2}, \quad P_n^m = 0, \text{ если } m > n.$$

$$Q_0(\mu) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu}, \quad Q_1(\mu) = \frac{\mu}{2} \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - 1, \quad Q_2(\mu) = \frac{1}{4}(3\mu^2 - 1) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} - \frac{3}{2}\mu,$$

$$Q_3(\mu) = \frac{1}{4}(5\mu^3 - 3\mu) \ln \frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2}\mu^2, \dots$$

Для действительных $n \geq 1$ не обязательно целых, существуют оценки

$$|P_n(\cos \theta)| < 2(\pi n \sin \theta)^{-1/2}, \quad |Q_n(\cos \theta)| < \sqrt{\pi} (n \sin \theta)^{-1/2}.$$

Графики некоторых функций Лежандра приведены на рис. 3.5.

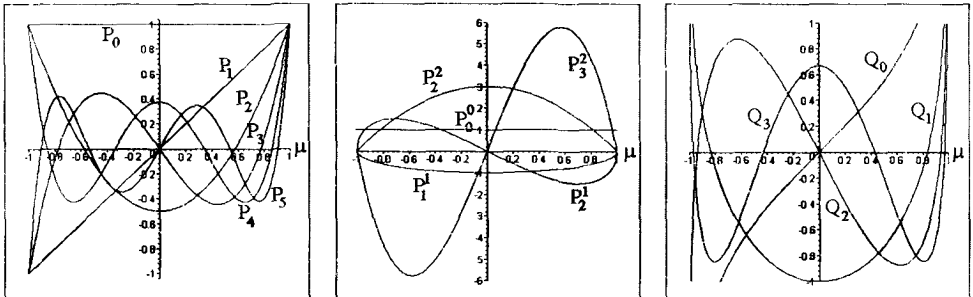


Рис. 3.5

Из формул (3.41) можно получить:

$$\int_0^1 P_n(\mu) d\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n = 2k, k > 0, \\ (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k+1} k! (k+1)!} & \text{при } n = 2k+1 \end{cases}$$

$$\int_0^1 \mu P_n(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2k+1, k > 0, \\ \frac{(-1)^k (2k-2)!}{2^{2k} (k-1)! (k+1)!} & \text{при } n = 2k, k > 0. \end{cases}$$

Отметим производящую функцию для полиномов Лежандра, которые являются коэффициентами ее разложения в степенной ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\mu z+z^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) z^n, & \text{при } |z| < 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) z^{-(n+1)}, & \text{при } |z| > 1, \end{cases} \quad (3.43)$$

Это разложение справедливо при $-1 \leq \mu \leq 1$.

Сферические функции ортогональны на поверхности любого шара с центром в начале координат. Это означает, что для любых сферических функций имеем

$$\int_S Y_m(\theta, \varepsilon) Y_k(\theta, \varepsilon) dS = 0, \text{ если } m \neq k, \quad (3.44)$$

где S — поверхность сферы, так что если ее радиус a , то $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\varepsilon$.

Кроме того, имеем

$$\int_S Y_n(\theta, \varepsilon) P_k(\cos \gamma) dS = \delta_{nk} \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_n(\theta_0, \varepsilon_0), \quad (3.45)$$

где γ — угол между радиусами-векторами точек на сфере $(a, \theta_0, \varepsilon_0)$ и переменной точки (a, θ, ε) .

Отсюда, в частности, имеем

$$\int_S [P_n(\cos \theta)]^2 dS = \frac{4\pi a^2}{2n+1},$$

$$\int_S [P_n^m(\cos \theta) \cos m\varepsilon]^2 dS = \int_S [P_n^m(\cos \theta) \sin m\varepsilon]^2 dS = \frac{2\pi a^2 (n+m)!}{2n+1 (n-m)!}, \quad (3.45a)$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}.$$

Таким образом, если функция $f(\theta, \varepsilon)$ разложена в ряд Лапласа по сферическим функциям, то учитывая (3.40), имеем

$$f(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_{0n} \cos m\varepsilon + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn} \cos m\varepsilon + b_{mn} \sin m\varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \right\}.$$

при этом коэффициенты a_{mn} этого разложения выражаются через функцию $f(\theta, \varepsilon)$ согласно формулам, следующим из (3.45) и (3.45а)

$$\begin{aligned} a_{0n} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_S f(\theta, \varepsilon) P_n(\cos \theta) dS, \\ a_{mn} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_S f(\theta, \varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varepsilon dS, \\ b_{mn} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_S f(\theta, \varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varepsilon dS. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Здесь интегралы берутся по сфере единичного радиуса, так что $dS = \sin \varepsilon d\theta d\varepsilon$.

Итак, решение внутренней задачи гидромеханики можно отыскивать в виде бесконечного ряда

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n Y_n(\theta, \varepsilon) \quad (r < 1), \quad (3.47)$$

а внешней —

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} Y_n(\theta, \varepsilon) \quad (r > 1), \quad (3.48)$$

где a_n, b_n — коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий.

Следует заметить, что такое решение может быть конструктивным только для границы потока в виде сферы, поскольку в этом случае

$$\varphi|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \bigg|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \bigg|_{r=\text{const}} \quad \text{условие позволит представить коэффициенты из-}$$

вестной функции $\left(\varphi \text{ или } \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)$ на сфере. Как это осуществляется на практике, мы покажем на одном из примеров в этом разделе.

В случае симметрии задачи ($\partial \varphi / \partial \varepsilon = 0$) из (3.39) имеем $Y_n = P_n(\cos \theta)$, так что решения для φ представляют собой степенные по r бесконечные ряды из полиномов Лежандра. Так, например, для внешней задачи имеем

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta). \quad (3.49)$$

Отыскивая гармоническую функцию в виде ряда по целым степеням r^{-1} , каждый член которого удовлетворяет уравнению Лапласа, а именно

$$\varphi(\mathbf{r}) = C + \frac{c}{r} + c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + c_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{1}{r} \right) + c_{ikl} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (3.50)$$

можно получить еще одно выражение для полиномов Лежандра. Покажем как это сделать.

Ряд (3.50) сходится для всех $r > r'$, т. е. вне сферы с радиусом r' с центром в точке (x_1, x_2, x_3) . Разлагая в ряд Тейлора по переменным x'_i функцию $1/R \equiv 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r} + x'_i \frac{\partial}{\partial x'_i} \left(\frac{1}{R} \right)_{r'=0} + \frac{1}{2} x'_i x'_k \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \left(\frac{1}{R} \right)_{r'=0} + \dots = \\ &= \frac{1}{r} - x'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} x'_i x'_k \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_k} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.51)$$

Подставляя этот ряд в представление (3.50) и производя почленное интегрирование, получим ряд, в котором коэффициенты теперь имеют явное выражение через значения

φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на поверхности:

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \nabla \varphi' \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{Q}{4\pi}, \\ c_i &= -\frac{1}{4\pi} \int_S \left(x'_i (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi') - n_i \varphi' \right) dS, \\ c_{ik} &= \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{2} x'_i x'_k (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi') + x'_i n_k \varphi' \right) dS. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Конечно, в таком виде ряд (3.50) не может быть использован в качестве решения гидромеханической задачи, поскольку его коэффициенты содержат значения φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на граничной поверхности. Однако, выражение (3.50) может быть полезным при анализе решения внешней задачи, особенно при наличии симметрии потока.

Если течение имеет ось симметрии (предположим, что эта ось совпадает с осью $x_1 \equiv x$), то тогда в разложении (3.50) могут существовать только слагаемые, для которых все индексы i, k, l, \dots имеют значение, соответствующее направлению оси симметрии, т. е.

$$\varphi(\mathbf{r}) = C + \frac{c}{r} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) + c_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) + c_{111} \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{r} \right).$$

С другой стороны, для симметричной внешней задачи представление решения (3.48) в силу (3.40) имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = C + \sum_{n=0}^{\infty} b_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta).$$

Из сравнения этих рядов имеем

$$P_n(\cos \theta) = k_n r^{(n+1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{r} \right).$$

Коэффициент k_n может быть определен, если производящую для полиномов Лежандра функцию разложить в ряд Тейлора.

Действительно, пусть \mathbf{i}_λ — орт оси симметрии (x), а $\mathbf{R} = \mathbf{i}_\lambda - \mathbf{r}$, $\cos \theta \equiv \mu$ — угол между радиусом-вектором \mathbf{r} и осью симметрии. Тогда, заменяя в (3.43) z на r , имеем ряд Тейлора

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-2\mu r+r^2}} &= \frac{1}{|\mathbf{i}_\lambda - \mathbf{r}|} = \frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial X^n} \left(\frac{1}{R} \right)_{R=r} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (3.43) имеем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{(-1)^n}{n!} r^{(n+1)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (3.53)$$

так что $k_n = \frac{(-1)^n}{n!}$

Для симметричных потоков в сферических координатах (r, θ, ε) получаем компоненты скорости потока в виде

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \quad v_\varepsilon = 0.$$

Как известно, для такого потока можно ввести (см. ч. 2, § 4) функцию тока $\psi(r, \theta)$ такую, что

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Отсюда имеем связь между производными функций φ и ψ , переходя к переменной $\mu = \cos \theta$:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mu} = -r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = (1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu}. \quad (3.54)$$

Подставляя сюда выражения (3.31) и (3.33), получаем путем интегрирования выражения для функции тока симметричных потоков внутренней и внешней задач соответственно

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{n+1} r^{n+1} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu}, \quad \varphi = r^n P_n(\mu), \\ \psi &= -\frac{1}{n+1} r^{-n} (1 - \mu^2) \frac{dP_n}{d\mu}, \quad \varphi = r^{-(n+1)} P_n(\mu). \end{aligned} \quad (3.55)$$

При интегрировании использованы рекуррентные соотношения.

Рассмотрим два примера решения гидродинамических задач с помощью сферических функций.

Пример 1. Движение проникаемой сферы в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности.

Пусть сфера с радиусом a движется со скоростью $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{i}_x v_0$. Часть сферы S_* проникаема, так что на этой части задана нормальная скорость $\alpha(\theta, \varepsilon) \equiv v_n$. Тогда граничное условие на поверхности сферы примет вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{r=a} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}|_{r=a} = v_0 \cos \theta + \alpha(\theta, \varepsilon) \equiv f(\theta, \varepsilon), \quad (3.56)$$

где θ — угол между осью z и радиусом-вектором точки.

При этом интеграл $\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{S_*} f dS = Q$ не обязательно равен нулю, но сохраняет одно и то же значение для всех замкнутых поверхностей, охватывающих сферу.

Решение уравнения Лапласа $\Delta \varphi = 0$ для области $r > 0$, исчезающее на бесконечности, ищем как сумму частных решений вида (3.33)

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} Y_n(\theta, \varepsilon).$$

Удовлетворяя граничному условию (3.56) и подставляя в него разложение (3.40), получаем

$$\begin{aligned} f(\theta, \varepsilon) = & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a} Y_n(\theta, \varepsilon) = - \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \{ a_{0n} P_n(\cos \theta) + \\ & + \sum_{m=0}^{\infty} (a_{nm} \cos m\varepsilon + b_{nm} \sin m\varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \}. \end{aligned}$$

Это уравнение служит для определения коэффициентов a_{0n}, a_{nm}, b_{nm} , через которые выражается искомая функция $\varphi(r, \theta, \varepsilon)$. Используя свойство ортогональности функций Лежандра (3.44), (3.45) и формулы (3.45), получаем

$$\begin{aligned} - \frac{n+1}{a} a_{0n} &= \frac{2n+1}{4\pi} \int_S f(\theta, \varepsilon) P_n(\cos \theta) dS, \\ - \frac{n+1}{a} a_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_S f(\theta, \varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varepsilon dS, \\ - \frac{n+1}{a} b_{nm} &= \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_S f(\theta, \varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varepsilon dS, \end{aligned} \quad (3.57)$$

причем $dS = \sin \theta d\theta d\varepsilon$, $S = S_0 + S_*$, где S_0 — непроницаемая часть сферы, а $\alpha(\theta, \varepsilon) \neq 0$ только на S_* .

Отсюда, как частный случай непроницаемой сферы ($S_* = 0$), имеем

$$\begin{aligned} a_{mn} &= b_{mn} = 0, \quad (m \neq 0), \\ a_{0n} &= \frac{v_0 a (2n+1)}{2(n+1)} \int_0^\pi \cos \theta P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{v_0 a (2n+1)}{2(n+1)} \int_{-1}^1 P_1(\mu) P_n(\mu) d\mu = \\ &= \frac{v_0 a (2n+1)}{2(n+1)} \frac{2}{2n+1} \delta_{1n}, \quad a_{01} = \frac{v_0 a}{2}, \end{aligned}$$

так что потенциал движущейся поступательно со скоростью $\mathbf{v} = -v_0 \mathbf{i}_z$ сферы с радиусом a равен

$$\varphi(r, \theta) = \frac{v_0 a^3}{2r^2} \cos \theta.$$

Если $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$ на секторе S_* , определяемом $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, то формулы (3.56) в силу соотношений (3.41) и (3.42) приобретают удобный вид для анализа влияния S_* и величины α_0 на силу, действующую на проницаемую сферу. Выкладки предлагается провести читателю.

Аналогичным образом можно получить решение внутренней задачи, но следует учесть, что в этом случае должно быть выполнено условие

$$\int_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_{S_*} f(\theta, \varepsilon) dS = 0.$$

Один из примеров внутренней задачи, связанный с импульсивным движением, будет рассмотрен далее.

Пример 2. Обтекание осесимметричных тел и полутел однородным потоком [17]. Потенциал обтекания однородным потоком $\mathbf{v}_\infty = v_\infty \mathbf{i}_x$ семейства осесимметричных тел и полутел можно получить с помощью решения уравнения Лапласа в виде

$$\varphi_n(r, \theta) = -v_\infty r \cos \theta + A_n r^n P_n(\cos \theta), \quad (3.58)$$

где A_n — постоянная, n может принимать действительные значения, а угол θ отсчитывается от отрицательного направления оси x .

Скорости такого потока имеют значения

$$\begin{aligned} v_r &= -v_\infty \cos \theta + A_n n r^{n-1} P_n(\mu), \\ v_\theta &= v_\infty \sin \theta - A_n n r^{n-1} P_n'(\mu) \sin \theta, \end{aligned}$$

где $\mu = \cos \theta$.

Поскольку $v|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow v_\infty$, то значения n , которые можно рассматривать в (3.58), ограничены $n < 1$.

Выразим постоянную A_n через значения $r = r_0$ в критической точке, где $\theta = 0$. Имеем

$$0 = -v_\infty + A_n n r_0^{n-1} P_n(1), \quad A_n = \frac{v_\infty}{n r_0^{n-1}},$$

Функцию тока находим, пользуясь соотношениями (3.55) (принято $\psi_n(r_0, \theta_0) = 0$)

$$\begin{aligned} \psi_n(r, \theta) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial \theta} \right) d\theta + \int_{r_0}^r \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial r} \right)_{\theta=\theta_0} dr = \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta} r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} d\theta - \int_{r_0}^r \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi_n}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta_0} dr = \\ &= -\frac{v_\infty r^2 \sin^2 \theta}{2} - A_n n r^{n+1} \int_{\mu_0}^{\mu} P_n(\mu) d\mu - \frac{v_\infty}{2} (\mu^2 - 1) + \\ &= A_n \frac{r^{n+1}}{n+1} (1 - \mu_0^2) P'_n(\mu_0) - A_n \frac{r_0^{n+1}}{n+1} (1 - \mu_0^2) P'_n(\mu_0). \end{aligned}$$

Отсюда, используя выражение для $P'_n(\mu)$ и $P_n(\mu)$ из (3.42), подставляя A_n , окончательно получаем

$$\begin{aligned} \psi_n(r, \mu) &= -\frac{v_\infty r^2 (1 - \mu^2)}{2} - \frac{v_\infty r^{n+1}}{r_0^{n-1} (2n+1)} [P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu)] = \\ &= -\frac{v_\infty r^{n+1}}{2 r_0^{n-1}} (1 - \mu^2) \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} - \frac{2(P_{n-1}(\mu) - P_{n+1}(\mu))}{(2n+1)(1 - \mu^2)} \right] = \\ &= -\frac{v_\infty r^{n+1}}{2 r_0^{n-1}} (1 - \mu^2) \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^{n-1} - \frac{2P'_n(\mu)}{n(n+1)} \right], \\ \varphi_n(r, \mu) &= -v_\infty r \mu + \frac{v_\infty}{n r_0^{n-1}} r^n P_n(\mu) = -v_\infty r \mu \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \frac{P_n(\mu)}{n \mu} \right]. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Таким образом, поверхность вращения, образуемая кривой

$$\frac{r_\psi}{r_0} = \left[\frac{n(n+1)}{2P'_n(\cos \theta)} \right]^{\frac{1}{n-1}} = \left[\frac{(2n+1) \sin^2 \theta}{2[P_{n-1}(\cos \theta) - P_{n+1}(\cos \theta)]} \right]^{\frac{1}{n-1}},$$

является поверхностью тока $\psi_n = 0$ вместе с осью x ($\mu \neq \pm 1$).

Рассмотрим некоторые значения $n < 1$ и соответствующие поверхности осесимметричных тел, обтекаемых однородным потоком.

1. $n = 0$:

$$\frac{r_\psi(\theta)}{r_0} = \left[\frac{\sin^2 \theta}{2(P_{-1} - P_{+1})} \right]^{-1} = \frac{2(1 - \cos \theta)}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2}{1 + \cos \theta}.$$

Таким образом, при $n = 0$ имеем обтекание параболоида вращения.

Его функция тока имеет вид

$$\psi_0 = -\frac{v_\infty r}{2r_0^{-1}} \sin^2 \theta \left(\frac{r}{r_0} - \frac{2}{1 + \cos \theta} \right) = -\frac{v_\infty r \sin^2 \theta}{2} \left(r - \frac{2r_0}{1 + \cos \theta} \right).$$

Потенциал обтекания параболоида может быть получен из $\psi_0(r, \theta)$ и уравнений (3.58) и имеет вид

$$\varphi_0 = -v_\infty r \cos \theta + v_\infty r_0 \ln \frac{r(1 + \cos \theta)}{2}.$$

2. $n = -1$:

$$\frac{r_\psi}{r_0} = \left[\frac{-\sin^2 \theta}{2(P_{-2}(\cos \theta) - P_0(\cos \theta))} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{-1 + \cos^2 \theta}{2(P_1 - P_0)} \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \theta}}.$$

Эта кривая дает поверхность тока, отделяющую однородный поток от потока источника мощностью $Q = 2\pi v_\infty / r_0^2$ (см. § 6), расположенного в начале координат.

Для функции тока и потенциала имеем

$$\psi_0 = -\frac{v_\infty r^2 \sin^2 \theta}{2} \left(1 - \frac{2r_0^2}{r^2(1 + \cos \theta)} \right); \quad \varphi_0 = -v_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2 \cos^2 \theta} \right).$$

Заметим, что поперечное сечение этого полутела при $r \rightarrow \infty$ стремится к постоянной величине:

$$S_\infty = \pi \lim_{\theta \rightarrow \pi} r_\psi^2(\theta) \sin^2 \theta = 4\pi r_0^2.$$

3. $n = -2$:

$$\begin{aligned} \frac{r_\psi}{r_0} &= \left[\frac{-3\sin^2 \theta}{2(P_{-3}(\cos \theta) - P_{-1}(\cos \theta))} \right]^{\frac{1}{3}} = \\ &= \left[\frac{-3\sin^2 \theta}{2(P_2 - P_0)} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{-3\sin^2 \theta}{2\left(\frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) - 1\right)} \right]^{\frac{1}{3}} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае имеем обтекание сферы

$$\varphi_{-2} = -v_\infty r \left(1 + \frac{r_0^3}{2r^3} \right) \cos \theta, \quad \psi_{-2} = -\frac{v_\infty r^2}{2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) \sin^2 \theta.$$

4. Далее, рассматривая случай $n = -3$, получаем

$$\frac{r_\psi(\theta)}{r_0} = \left[\frac{-5 \sin^2 \theta}{2(P_4 - P_3)} \right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{-5 \sin^2 \theta}{2(P_3 - P_1)} \right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{-5(1 - \mu^2)}{2 \left[\frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu) - \mu \right]} \right]^{\frac{1}{4}}.$$

Эта кривая существует лишь при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ и при вращении вокруг своей оси x дает

симметричное тело конечных размеров. Однако, в кормовой его кромке $\left(\theta = \frac{\pi}{2} \right)$ условия плавного обтекания нарушаются, поскольку

$$\begin{aligned} v_r &= -v_\infty \cos \theta + \frac{v_\infty}{nr_0^{n-1}} P_n(\mu) \Big|_{r=r_\psi, n=-3} = -v_\infty \cos \theta - \frac{v_\infty}{3} \left(\frac{r_\psi}{r_0} \right)^{-4} P_{-3}(\psi) = \\ &= -v_\infty \cos \theta - \frac{v_\infty P_2}{3 \cos \theta} = -v_\infty \cos \theta - \frac{v_\infty (3 \cos^2 \theta - 1)}{6 \cos \theta}, \end{aligned}$$

так что $v_\infty \rightarrow \infty$ при $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Итак, подводя итоги рассмотрения потоков, заданных потенциалом и функцией тока (3.59) при различных n , можно заключить (см. рис. 3.6):

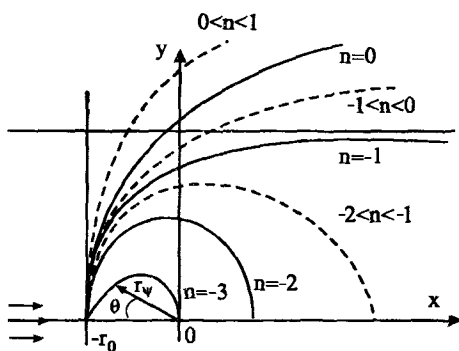


Рис. 3.6

1) при $0 < n < 1$ существуют кривые, определяемые дробными значениями n , которые дают осесимметричные полутела, безгранично расширяющие свое поперечное сечение при $x \rightarrow \infty$;

2) при $n = 0$ имеем параболоид вращения, а дробные значения $-1 < n < 0$ также отвечают телам вращения, безгранично расширяющимся на бесконечности;

3) при $n = -1$ получаем бесконечное полутело вращения, образующееся при обтекании источника однородным потоком, имеющее конечное поперечное сечение на бесконечности;

4) при $-2 < n < -1$ имеем обтекание конечных тел вращения (при дробных отрицательных n), причем граничными телами является сфера ($n = -2$) и бесконечное полутело ($n = -1$);

5) при $n = -3$ условия плавного обтекания конечного тела нарушаются. Используя теорему импульсов и следующую из нее формулу (1.67) (см. § 2), вычислим силу сопротивления рассмотренного семейства.

Имеем

$$P_x = 2\pi\rho \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow \pi}} r^2 \int_0^\theta \left[(v_r'^2 - v_\theta'^2) \cos \theta - 2v_r' v_\theta' \sin \theta \right] \sin \theta d\theta.$$

Подставляя сюда

$$v_r' = v_r + v_\infty \cos \theta = v_\infty \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} P_n(\cos \theta),$$

$$v_\theta' = v_\theta - v_\infty \sin \theta = -\frac{v_\infty}{n} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{n-1} P_n'(\cos \theta) \sin \theta,$$

переходя к $\mu = \cos \theta$, получаем:

$$P_x = -2\pi\rho v_\infty^2 r_0^{-2n} \lim_{\mu \rightarrow -1} \frac{r^{2n}}{n^2} \int_1^\mu \left[n^2 P_n^2 \mu + \mu (\mu^2 - 1) P_n'^2 - 2n(\mu^2 - 1) P_n P_n' \right] d\mu.$$

Используя рекуррентные формулы (3.42), это выражение можно преобразовать к виду

$$P_x = \rho\pi v_\infty^2 r_0^{-2n} n \lim_{\mu \rightarrow -1} r^{2n} (P_{n-1}^2 - P_n^2).$$

При $\mu \rightarrow -1$ известны (см. [15], гл. V, § 14) асимптотические формулы

$$P_n'(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow -1} \frac{\sin \pi n}{\pi(1+\mu)}, \quad P_n(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow -1} \frac{\sin \pi n}{\pi} \ln \frac{1+\mu}{2}.$$

Используя эти асимптотики, получаем

$$P_x \rightarrow 2\pi\rho v_\infty^2 r_0^2 \left[\frac{2^{(1+n)} \sin^2 \pi n}{\pi^{(1+n)} (1+n)^{2n} n^2 (1+\mu)^{2n}} \right]^{\frac{1}{1-n}} \ln \frac{2}{1+\mu}.$$

Отсюда следует, что при $-2 \leq n < -1$ сопротивление $P_x = 0$; этот диапазон n охватывает все конечные тела и бесконечное полутело с $n = -1$.

При $1 > n \geq -1$ (в том числе и для параболоида вращения) $P_x = \infty$.

Цилиндрические функции.

Все изменения предыдущих формулировок, касающиеся *двумерных потоков*, связаны с формой уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (r, ε, x) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (3.60)$$

причем $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}$, $v_\varepsilon = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}$, $v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$.

Нормальная форма решения уравнения (3.60) записывается в виде

$$\varphi(r, \varepsilon, x) = e^{\pm kx} \chi(r) \begin{cases} \cos m\varepsilon \\ \sin m\varepsilon \end{cases},$$

так что для $\chi(r)$ имеем уравнение

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \chi(r) = 0. \quad (3.61)$$

Это известное дифференциальное уравнение для Бесселевых функций порядка m , так что $\chi(r) = C J_m(kr)$, где $J_m(kr)$ — функция Бесселя первого рода m -того порядка, представляемая в виде ряда

$$J_m(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2n}, \quad (|\arg z| < \pi). \quad (3.62)$$

Для этих функций справедливы рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} J_{m+1} &= \frac{2m}{z} J_m - J_{m-1} = \frac{m}{z} J_m(z) - \frac{d}{dz} J_m(z) = -z^m \frac{d}{dz} (z^{-m} J_m(z)), \\ \frac{dJ_m}{dz} &= \frac{m}{z} J_m - J_{m+1} = \frac{1}{2} (J_{m-1} - J_{m+1}) = J_{m-1} - \frac{m}{z} J_m. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Если m не является целым, то за основные решения уравнения Бесселя можно принять J_m и J_{-m} , и тогда общее решение уравнения Бесселя имеет вид

$$C_1 J_m(z) + C_2 J_{-m}(z).$$

Если же m — целое, то $J_m = (-1)^m J_{-m}$ и тогда надо иметь другое независимое решение уравнения Бесселя.

Для нецелых значений m вторым независимым решением уравнения (3.61) является так же функция Бесселя второго рода $N_m(z)$ — функция Неймана. Она имеет выражение

$$N_m(z) = \frac{1}{\sin m\pi} (J_m(z) \cos m\pi - J_{-m}(z)), \quad (m \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

При целом m она заменяется предельным выражением правой части.

Таким образом, при всяком m — дробном и целом — общее решение уравнения Бесселя имеет вид $C_1 J_m(z) + C_2 N_m(z)$.

Функции $J_m(z)$ и $N_m(z)$ действительны при действительном положительном z , но если J_m остается конечной, то N_m стремится к бесконечности, когда $z \rightarrow 0$ (см. рис. 3.7).

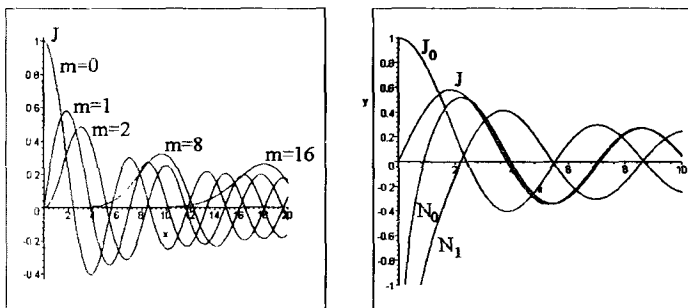


Рис. 3.7

Для функций Неймана (иногда их называют функциями Вебера) справедливы также соотношения (3.63).

Функции Ганкеля (первого и второго рода) определяются соотношениями

$$H_m^{(1)} = J_m(z) + iN_m(z), \quad H_m^{(2)}(z) = J_m(z) - iN_m(z).$$

Функции Бесселя, Неймана и Ганкеля — наиболее часто встречающиеся *цилиндрические функции*; все они удовлетворяют дифференциальному уравнению (3.61).

Цилиндрические функции, порядок которых равен половине нечетного целого числа ($m = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$) выражаются через элементарные функции:

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin z}{\sqrt{z}}, \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos z}{\sqrt{z}},$$

$$J_{k+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} z^{k+1/2} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^k \frac{\sin z}{z}.$$

Свойство ортогональности функций Бесселя выражается следующей формулой

$$\int_0^1 z J_m(k_i z) J_m(k_j z) dz = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \frac{1}{2} [J'_m(k_i)]^2, & \text{если } i = j. \end{cases} \quad (3.64)$$

Отметим, что решение двумерного уравнения Лапласа

$$\varphi = \begin{cases} e^{\pm kx} J_m(kr) \cos m\varepsilon, \\ e^{\pm kx} J_m(kr) \sin m\varepsilon, \end{cases} \quad (3.65)$$

могут быть получены как предельный случай решения для пространственных течений (3.36), если воспользоваться разложением φ в ряд по степеням r при $\mu = \cos\theta = 1$.

В случае, когда двумерные потоки обладают симметрией относительно оси x и, следовательно, не зависят от ε , решение уравнения (3.61) при $m = 0$ дают функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$, $N_0(kr)$, причем

$$J_0^{(z)} = 1 - \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^4 \cdot 4^4} - \dots$$

Таким образом, в этом случае решение внутренней задачи, соответствующее $\varphi = r^n P_n(\mu)$, имеет для двумерных симметричных потоков вид

$$\varphi = e^{\pm kx} J_n(kr).$$

Этому решению соответствует функция тока

$$\psi = \mp r e^{\pm kx} \frac{dJ_0'(kr)}{d(kr)} = \pm r e^{\pm kx} J_1(kr). \quad (3.66)$$

Гармоническую функцию двух переменных можно представить в виде ряда, подобного (3.50), который теперь будет выглядеть следующим образом

$$\varphi(\mathbf{r}) - C - c \ln r = c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \ln r + c_{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \ln r + \dots, \quad (3.67)$$

где

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2\pi} \int_L \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi' dL = \frac{Q}{2\pi}, \\ c_i &= \frac{1}{2\pi} \int_L (-x'_i (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi') + n_i \varphi') dL, \\ c_{ik} &= \frac{1}{2\pi} \int_L \left(\frac{1}{2} x'_i x'_k (\mathbf{n} \cdot \nabla \varphi') - x'_i n_k \varphi' \right) dL. \end{aligned}$$

Ряд сходится вне окружности радиуса $r' = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}$.

Импульсивное движение. Интересным примером безвихревых течений жидкости является импульсивное движение. Если в течение очень короткого промежутка времени происходит резкое изменение ускорения границ жидкости при малом изменении их скорости, то в жидкости возникает так называемое *импульсивное движение*. При этом резко увеличиваются силы внутреннего давления, и поскольку изменение давления распространяется в несжимаемой жидкости теоретически мгновенно, то во всей жидкости возникает особый вид движения, в котором главную роль играет локальное ускорение dv/dt и градиенты давления ∇p .

Импульсивное движение можно наблюдать, когда граница жидкого объема испытывает удар: например, от падения тела на свободную поверхность. Такое движение может возникнуть, если внутри жидкости в частицах среды происходят «точечные» взрывы, приводящие к резкому и мгновенному увеличению давления во всей области, а, значит, — и локальному ускорению среды.

Оказывается, *импульсивное движение — это безвихревое движение*, и это позволяет дать физическую интерпретацию потенциала безвихревых движений.

Пусть в течение короткого промежутка времени давление в среде в некоторый момент t возросло во много раз, так что можно считать, что $p(t, \mathbf{r}) = \infty$. Однако это возрастание давления не приводит к разрушению жидкости, оставляя конечным переносимое количество движения каждой частицы в жидкости. Поэтому импульс давления за бесконечно малый промежуток времени остается конечным, т. е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} p(\tau, \mathbf{r}) d\tau = \pi(t, \mathbf{r}). \quad (3.68)$$

Здесь функция $\pi(t, \mathbf{r})$, характеризующая в каждый момент времени распределение «взрывов» по пространству, может быть названа импульсом давления (за бесконечно малый промежуток времени).

В уравнении движения среды

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \mathbf{p}_{,k}^k \equiv \mathbf{F}$$

все объемные величины, стоящие в правой части и обозначенные вектором \mathbf{F} , пренебрежимо малы по сравнению с локальным ускорением и градиентом давления, резко увеличивающимся в течение малого промежутка времени $(-\varepsilon, +\varepsilon)$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p \right) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathbf{F}(\tau, \mathbf{r}) d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{F}(\bar{\tau}, \mathbf{r}) \cdot 2\varepsilon = 0,$$

где $\mathbf{F}(\bar{\tau}, \mathbf{r})$ — конечное значение вектора \mathbf{F} в некоторой средней точке промежутка $(t - \varepsilon, t + \varepsilon)$.

Тогда, в силу предположения (3.68) имеем

$$\mathbf{v}(t + 0, \mathbf{r}) - \mathbf{v}(t - 0, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \pi(t, \mathbf{r}). \quad (3.69)$$

Здесь: $\mathbf{v}(t + 0, \mathbf{r})$ — скорость среды после начала импульсивного движения (после взрыва), $\mathbf{v}(t - 0, \mathbf{r})$ — до взрыва, а

$$\int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \frac{1}{\rho} \nabla p d\tau = \frac{1}{\rho} \nabla \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} p d\tau = \frac{1}{\rho} \nabla \pi(t, \mathbf{r}),$$

если считать $\rho = \text{const}$.

Из этого равенства следует, что если импульсивное движение, имеющее скорость $\mathbf{v}(t + 0, \mathbf{r}) \equiv \mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, началось из состояния покоя ($\mathbf{v}(t - 0, \mathbf{r}) = 0$)

или из состояния безвихревого движения ($\mathbf{v}(t-0, \mathbf{r}) = \nabla \phi(t-0, \mathbf{r})$), то оно в дальнейшем будет всюду безвихревым. Потенциал этого движения (при $\mathbf{v}(t-0, \mathbf{r}) = 0$), как это следует из (3.69), равен

$$\phi(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho} \pi(t, \mathbf{r}). \quad (3.70)$$

Это соотношение позволяет дать следующее истолкование потенциала скорости: *потенциал скорости безвихревого движения несжимаемой жидкости пропорционален импульсу давления, требуемому для возникновения этого движения из состояния покоя.*

Из (3.69) следует, что никакое вихревое движение не может возникнуть из состояния покоя под действием импульса давления. Иными словами, *импульсивное движение может быть только безвихревым.*

Отметим, что в случае сжимаемой жидкости импульсивное движение может быть и вихревым, ибо вместо (3.69) имеем $\mathbf{v}(t, \mathbf{r}) = -\frac{1}{\rho(t, \mathbf{r})} \nabla \pi(t, \mathbf{r})$. В случае безвихревого импуль-

сивного движения сжимаемой среды ($\mathbf{v} = \nabla \phi$), для потенциала имеем $\phi(t, \mathbf{r}) = -\int \frac{\nabla \pi \cdot d\mathbf{L}}{\rho}$.

Если среда баротропна $\left(\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \mathcal{P}(\rho) \right)$, то можно говорить об импульсе потенциала сил давления, т. е. о $\pi(t, \mathbf{r}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \mathcal{P}(\rho(t, \mathbf{r})) dr$. В этом случае импульсивное движение потенциально.

Если задано распределение импульса давления, то само давление выражается через $\pi(t, \mathbf{r})$ при помощи δ -функции Дирака, а именно

$$p(\tau, \mathbf{r}) = \delta(\tau - t) \pi(t, \mathbf{r}).$$

При этом, как известно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\tau, \mathbf{r}) \tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - t) \pi(\tau, \mathbf{r}) d\tau = \pi(t, \mathbf{r}).$$

Рассмотрим примеры использования теории импульсивного движения для решения практических задач.

Пример 1. Соотношение (3.70) может быть использовано для расчета направленных взрывов, когда, например, необходимо массу грунта из области D переместить в место D' (см. рис. 3.8). Разбив область D на участки δD и зная массу каждого участка, нетрудно подсчитать по законам механики начальную скорость $\mathbf{v}(x, y)$, необходимую для

того, чтобы эта масса при свободном полете, получив начальный импульс в виде взрыва, переместилась в место M' .

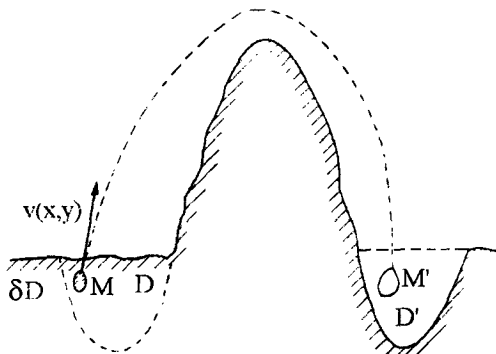


Рис. 3.8

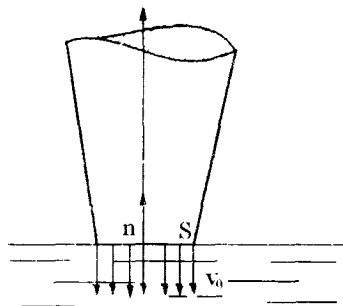


Рис. 3.9

Тогда по полю скоростей $v(x, y)$ можно получить значение потенциала при импульсивном движении,

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x v_y(x, y) dx + \int_{y_0}^y v_x(x_0, y) dy,$$

а после этого рассчитать мощность и распределение по области D взрывных зарядов согласно соотношению $\pi(x, y) = -\rho\varphi(x, y)$.

Пример 2. Пусть некоторое тело своей плоской поверхностью S наносит удар со скоростью v_0 по плоской границе полубесконечного пространства несжимаемой жидкости (см. рис. 3.9). Удар совершается в течение очень короткого времени, но импульс его конечен, так что можно считать, что сразу после удара в жидкости возникает безвихревое импульсивное движение с потенциалом φ . Требуется определить распределение скорости в жидкости после удара.

Задача состоит в определении $\varphi(\mathbf{r})$ в полубесконечном пространстве $y < 0$ при следующих граничных условиях:

$$1) \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi|_S = -v_0;$$

2) $\varphi = 0$ на свободной поверхности вне S (поскольку $\varphi = -\pi / \rho$, а $\pi = 0$ на поверхности жидкости, не подвергающейся удару);

$$3) \nabla \varphi|_{r=\infty} = 0 \text{ — вдали от места удара жидкость покоится.}$$

Таким образом, задача эквивалентна задаче о безвихревом движении среды, создаваемом твердой пластинкой заданной формы, движущейся по нормали к своей плоскости со скоростью v_0 , причем эта плоскость в жидкости является плоскостью антисимметрии потенциала $\varphi(x, y) = -\varphi(x, -y)$, ибо $\varphi(x, 0) = 0$.

К решению таких задач мы вернемся в § 3.

Пример 3. Связь между импульсом давления и потенциалом скорости вызываемого им движения позволяет рассмотреть задачу о движении жидкости у сферы, на которой задан импульс давления $\pi(t, \mathbf{r})$.

В этом случае, потенциал скорости $\varphi(t, \mathbf{r})$ возникающего у сферы с радиусом a безвихревого движения удовлетворяет в силу (3.70) граничному условию

$$\varphi(t, \mathbf{r}) \Big|_{r=a} = -\frac{1}{\rho} \pi(t, \theta, \varepsilon).$$

Отыскивая потенциал $\varphi(t, \tau, \theta, \varepsilon)$ в области $r < a$ в виде ряда по сферическим функциям (см. (3.31))

$$\varphi(t, r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a} \right)^n Y_n(t, \theta, \varepsilon), \quad (r < a), \quad (3.70a)$$

получаем, используя (3.40), из граничного условия

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \pi(t, \theta, \varepsilon) &= \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(t, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \{ a_{0n}(t) P_n(\cos \theta) + \\ &+ \sum_{m=1}^n (a_{mn}(t) \cos m\varepsilon + b_{mn}(t) \sin m\varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \}. \end{aligned}$$

Теперь коэффициенты a_{mn} и b_{mn} всегда могут быть найдены по формулам (3.46), поскольку $\pi(t, \theta, \varepsilon)$ — задано. Следовательно, задача для области $r < a$ может считаться решенной.

Для области $r > a$, предполагая, что жидкость на бесконечности покоится, решение уравнения $\Delta \varphi = 0$ согласно (3.33) можно записать в виде

$$\varphi(t, r, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} Y_n(t, \theta, \varepsilon), \quad (r > a). \quad (3.70b)$$

И в этом случае можно считать, что решение задачи на этом заканчивается, поскольку функции $Y_n(\theta, \varepsilon)$ в силу граничного условия имеют тот же вид, что и в предыдущем случае.

На сфере решения (3.70a) и (3.70b) совпадают. В то же время нормальные скорости импульсивного движения при $r = a$ терпят разрыв. Действительно, вычисляя производную $\partial \varphi / \partial n$ на сфере изнутри (обозначим ее индексом $(-)$) и снаружи (индекс $(+)$), получаем из (3.70a) и (3.70b)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_- = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_- = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{a} Y_n; \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_+ = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_+ = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{a} Y_n.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_- - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{a} Y_n.$$

Таким образом, движение во всей области может рассматриваться как возникшее от распределения по сфере источников (простого слоя, см. ч. 2, § 5) с поверхностной плотностью

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{a} Y_n(\theta, \varepsilon).$$

Если считать, что вместо импульса давлений на сфере заданы нормальные компоненты скорости, то приходим к задаче о движении жидкости от двойного слоя на сфере (см. задачу 3.1.5).

Возникновение кавитации в жидкости. Число кавитации. Стационарные каверны

Под *кавитацией* понимается появление в жидкости полостей (каверн), заполненных парами жидкости. Размер этих полостей сравним или больше размеров макродифференциала, так что они нарушают сплошность жидкости и их образование существенно меняет картину потока.

Как было уже отмечено (см. ч. 2, § 12), кавитация возникает в тех местах, где давление p в жидкости становится сравнимым с давлением парообразования p_n этой жидкости. Поскольку в жидкостях $p > p_n$, то места кавитации связаны с минимальным значением давления p в рассматриваемом потоке.

Для безвихревых потоков несжимаемой жидкости, когда существует интеграл Лагранжа, кавитация может возникать только на *границах потока*, поскольку максимального значения величина скорости $|\mathbf{v}|$ может достигать лишь на границе потока, т.е. на поверхности твердых тел (см. свойство 1 гармонического потенциала скорости). При этом, как следует из (2.11), места минимума p совпадают с местами максимальной скорости лишь в случае стационарного потока, в котором влиянием массовых сил можно пренебречь.

Можно показать, что в условиях, несколько более общих, чем необходимые для существования интеграла Лагранжа, давление может достигать своего минимального значения только на поверхности твердых тел. Действительно, из уравнения стационарного движения несжимаемой жидкости имеем

$$\nabla p = \rho \mathbf{f} - \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}.$$

Окружим некоторую внутреннюю точку M потока малой поверхностью ΔS_M и рассмотрим интеграл

$$\int_{\Delta S_M} \mathbf{n} \cdot \nabla p dS = \rho \int_{\Delta V} \{ \mathbf{f} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \} \mathbf{n} dS = \rho \int_{\Delta S_M} (\operatorname{div} \mathbf{f} - \operatorname{div} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}]) dV,$$

где ΔV — область внутри ΔS_M .

В силу несжимаемости $\left(\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \right)$ имеем в декартовых прямоугольных координатах

динамах

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div} [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x_i} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = \int_{\Delta V} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dV = \int_{\Delta V} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 dV.$$

Поэтому, предполагая $\operatorname{div} \mathbf{f} \leq 0$, получаем

$$\int_{\Delta S_M} \mathbf{n} \cdot \nabla p dS < 0.$$

Если бы в точке M давление p принимало минимальное значение, то $(\mathbf{n} \cdot \nabla p) > 0$ во всех точках достаточно малой поверхности, окружающей точку M , выполнялось неравенство

$$\int_{\Delta S_M} \mathbf{n} \cdot \nabla p dS > 0,$$

что противоречит неравенству, следующему из уравнений движения.

Таким образом, ни в одной из внутренних точек потока давление не может достигать минимума.

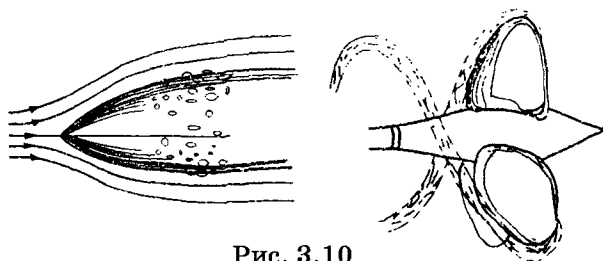


Рис. 3.10

На рис. 3.10, выполненном по фотографиям из [9], схематически показаны кавитационные каверны, образующиеся в зоне минимального давления на поверхности обтекаемого тела, и шлейф, состоящий из каверн, срывающийся с лопастей гребного винта.

Для характеристики явления кавитации в гидромеханике широко используют так называемое *число кавитации*, которое вводится на основании следующих соображений.

Пусть в некоторой точке $M(\mathbf{r})$ на границе пограничного слоя, где поток, обтекающий тело, можно считать невязким и безвихревым и в то же время считать точку M принадлежащей границе тела, давление равно $p = p(M)$, а скорость $\mathbf{v}(M)$, величину которой можно представить через v_∞ в виде $|\mathbf{v}(M)| = |v_\infty| \alpha(\mathbf{r})$, где коэффициент α зависит от точки M , а также от формы и ориентации тела в потоке.

Тогда в случае стационарного потока из уравнения Бернулли имеем

$$p = p_\infty + \rho(\Pi_\infty - \Pi) + \frac{\rho v_\infty^2}{2} - \frac{\rho v_\infty^2}{2} \alpha^2.$$

Если бы тела в потоке не было, то в той же точке давление p приняло бы значение p_0 , причем, так как в этом случае $\alpha = 1$, то

$$p_0 = p_\infty + \rho(\Pi_\infty - \Pi).$$

Таким образом, имеем

$$p = p_0 - \frac{\rho v_\infty^2}{2} (\alpha^2 - 1). \quad (3.71)$$

Критерием оценки появления локальной кавитации служит разность $p - p_n$, где p_n — давление парообразования.

Из (3.71) имеем

$$\frac{p - p_n}{1/2 \rho v_\infty^2} = \frac{p_0 - p_n}{1/2 \rho v_\infty^2} + (1 - \alpha^2). \quad (3.72)$$

Второе слагаемое справа в (3.72) зависит от выбранной точки M , формы и ориентации тела, влияние которых отражено в значении $\alpha = |\mathbf{v}(\mathbf{r})|/|v_\infty|$. Первое слагаемое в (3.72) называется *числом кавитации* K :

$$K \equiv K(\mathbf{r}) = \frac{p_0(\mathbf{r}) - p_n}{1/2 \rho v_\infty^2}. \quad (3.73)$$

Число кавитации носит локальный характер — оно свое для каждой точки потока — и зависит от внешних условий (значений p_∞ и потенциала массовых сил, которые входят в p_0).

Для тела заданной формы и ориентации в потоке критерием отсутствия где-либо у тела явления кавитации служит неравенство

$$K(\mathbf{r}) \geq K_{\text{крит}}.$$

где $K_{\text{крит.}}$ — наиболее опасные значения $K(\mathbf{r})$ у данного обтекаемого тела. Так, например, если массовые силы в пределах размеров тела можно считать постоянным, то $p_0 = p_\infty$, и тогда $K_{\text{крит.}}$ — величина постоянная

$$K_{\text{крит.}} = \frac{p_\infty - p_{\text{п.}}}{1/2\rho v_\infty^2}.$$

При этом ограничение, накладываемое на характеристики потока при недопущении кавитации и состоящее в том, чтобы давление в жидкости было всюду больше давления парообразования ($p > p_{\text{п.}}$), на основании (3.72) и (3.73) приводит к неравенству:

$$K_{\text{крит.}} > \alpha^2 - 1.$$

Следовательно, если α_{max} — максимальное значение коэффициента формы и ориентации, то

$$K_{\text{крит.}} \geq \alpha_{\text{max}}^2 - 1.$$

Пример [9]. Для воды при скорости тела в 20 м/сек (72 км/час) на глубине H_M имеем $p_0 - p_{\text{п.}} \approx (1 + 0,1H)$ атм, $1/2\rho v_\infty^2 = 2$ атм; тогда кавитация будет отсутствовать, если

$$\frac{1 + 0,1H}{2} \geq \alpha_{\text{max}}^2 - 1,$$

т. е. на глубинах $H \geq 10(2\alpha_{\text{max}}^2 - 3)$. Таким образом, на всех глубинах для таких тел, которые в воде могут достигать скорость около 70 км/час, кавитация будет существовать, если

$\alpha_{\text{max}} < \sqrt{\frac{3}{2}}$, т. е. скорость на поверхности при обтекании такого тела не превышает более

чем в $\sqrt{1,5} \approx 1,23$ раза скорости движения тела.

В некоторых режимах установившегося течения несжимаемой жидкости у поверхности обтекаемых тел образуются кавитационные зоны, размеры которых сравнимы с размерами тела. О таких зонах часто говорят как о *стационарных кавернах*. Они существенно изменяют картину обтекания тел и являются одной из основных областей рассматриваемого потока. Так, например, в схеме струйного обтекания (см. §1.2), стационарные каверны выступают как области, где можно принять давление постоянным, скорость движения равной нулю (ибо каверна заполнена парами жидкости, или, вообще говоря, газом), а сама граница каверны является поверхностью, образованной свободными струями.

В области, занятой стационарными кавернами, которые в естественных условиях заполнены парами жидкости, можно искусственно подавать какой-либо газ или воздух, чем изменять, и давление, и размеры каверн.

Поэтому, при обтекании каверн удобно ввести новый параметр — давление в каверне p_k — и число кавитации каверны будет иметь вид

$$K_k = \frac{p_0 - p_k}{1/2 \rho v_\infty^2}. \quad (3.74)$$

Если $K_k > 0$, то $p_0 > p_k$ и, следовательно, каверна не может простираяться до бесконечности, где давление равно $p_\infty \approx p_0$ и, следовательно, $p_k = p_0$. В § 5 при рассмотрении разрывных течений, ограниченных свободными струями, будет принята схема Гельмгольца-Кирхгофа, при которой $K_k = 0$ и каверна обращается в застойную зону, где $p = p_\infty$ и нет движения жидкости.

При $K_k \neq 0$, как показывают вычисления (см. [21], глава V), размеры конечных каверн, в которых допускаются возвратные потоки, зависят от числа кавитации. Так, для плоской пластинки, отношение ширины каверны к ширине пластины при $K_k = 0$ бесконечно велико, но быстро спадает с возрастанием K_k и уже при $K_k = 5$ равно почти единице, стремясь к ней при $K_k \rightarrow \infty$. Аналогично, отношение длины каверны к ее ширине при $K_k = 0$ равно бесконечности, а при $K_k \rightarrow \infty$ стремится к конечной величине, меньшей единицы (см. [21]).

Некоторые источники (см. [8]) утверждают, что ширина плоских каверн имеет порядок $1/K_k$, а длина $1/K_k^{-2}$, так что при увеличении K_k каверна сжимается. Если подавать в каверну газ, т. е. увеличивать p_k и уменьшать K_k , то можно регулировать размер и форму каверны. При падении тел в воду, деформирующаяся в первый момент свободная поверхность воды затем захватывает в себя воздух, так что давление p_k будет определяться этим явлением удара тела о воду. Конечно, устойчивость каверн здесь оставлена вне рассмотрения.

Задачи с решениями

Задача 3.1. Определить движение жидкости между двумя концентрическими сферами с радиусами a и $b > a$, если внутренняя движется поступательно со скоростью \mathbf{u} , а внешняя — со скоростью \mathbf{v} . Жидкость несжимаемая, невязкая, движение безвихревое.

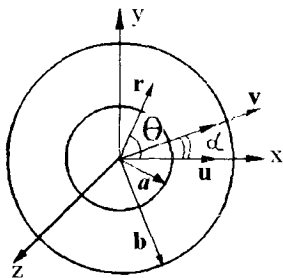


Рис. 3.11

Решение. Выберем декартову систему координат с началом в центре сфер и осью x , направленной по вектору \mathbf{u} (см. рис. 3.11). Пусть угол между \mathbf{u} и \mathbf{v} равен α , причем вектор \mathbf{v} лежит в плоскости (x, y) .

Если θ — угол, который составляет радиус-вектор \mathbf{r} с осью x , то граничные условия для потенциала φ имеют вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = u \cos \theta, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=b} = -v \cos(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \Big|_{r=b}. \quad (1)$$

В сферических координатах (r, θ, ε) вектор \mathbf{r} имеет компоненты $r \cos \theta$, $r \sin \theta \cos \varepsilon$, поэтому

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = \frac{v_x x + v_y y}{v r} = \frac{x}{r} \cos \alpha + \frac{y}{r} \sin \alpha = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \varepsilon.$$

Ищем решение уравнения $\Delta \varphi = 0$ в области между сферами, исходя из вида граничных условий (1), в форме (см. (3.50))

$$\varphi = ax + by + c_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{r} \right) = ax + by - c_1 \frac{x}{r^2} - c_2 \frac{y}{r^2} = \left(Ar + \frac{B}{r^2} \right) \cos \theta + \left(Cr + \frac{D}{r^2} \right) \sin \theta \cos \varepsilon.$$

Коэффициенты A, B, C, D определяем из граничных условий (1), которые дают уравнения

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{2B}{a^3} \right) \cos \theta + \left(C - \frac{2D}{a^3} \right) \sin \theta \cos \varepsilon &= u \cos \theta, \\ \left(A - \frac{2B}{b^3} \right) \cos \theta + \left(C - \frac{2D}{b^3} \right) \sin \theta \cos \varepsilon &= -v (\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha \cos \varepsilon). \end{aligned}$$

Поскольку эти соотношения должны выполняться при любых θ и ε , то, положив в них $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$, найдем коэффициенты и выражение для потенциала движения, которое имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{b^3 - a^3} \left\{ \left[(va^3 + vb^3 \cos \alpha) r + \frac{(u + v \cos \alpha) a^3 b^3}{2r^2} \right] \cos \theta + b^3 v \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) \sin \alpha \sin \theta \cos \varepsilon \right\}.$$

Отсюда можно получить различные частные случаи взаимного движения сфер и соотношений их радиусов.

Так, например, если $b \rightarrow \infty$ и $v = 0$, то получаем

$$\varphi = -\frac{ua^3}{2r^2} \cos \theta$$

— потенциал поступательного движения сферы с радиусом a , со скоростью u в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности.

Если внешняя сфера покоится ($v = 0$), то имеем

$$\varphi = -\frac{ua^3}{b^3 - a^3} \left(r + \frac{b^3}{2r^2} \right) \cos \theta.$$

Вычисляя кинетическую энергию T жидкости, приведенной в движение внутренней сферой, получаем

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^\pi \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} 2\pi a^2 \sin \theta d\theta = \frac{\pi \rho v^2 a^3 (b^3 + 2a^3)}{3(b^3 - a^3)}.$$

Таким образом, присоединенные массы (см. § 1.2) внутренней сферы равны

$$\lambda_{xx} = \lambda_{yy} = \lambda_{zz} = \frac{2}{3} \pi a^3 \rho \frac{b^3 + 2a^3}{b^3 - a^3},$$

так что введение сферической преграды на пути движения сферы увеличивает ее присоединенную массу и тем больше, чем ближе к другой сфере она расположена.

Задача 3.2. Скорость больших газовых пузырей в жидкости.

Решение. По наблюдениям (см. [9], §§ 5.14, 6.11) если объем газовых пузырей в воде не превышает $6 \cdot 10^{-4} \text{ см}^3$ поверхностное натяжение полностью обеспечивает их сферическую форму. При увеличении объема газовые пузыри сплющиваются, а при объемах более 5 см^3 принимают форму сферического сегмента (зонтика), у которого нижняя часть нестационарна, прерывиста, в то время как верхняя сохраняет почти сферическую форму (см. рис. 3.12). Это позволяет *рассчитать скорость подъема таких пузырей в поле сил тяжести.*

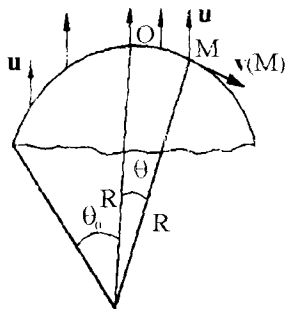


Рис. 3.12

Считая форму зонтика сферической с радиусом R , запишем уравнение Бернулли для какой-либо линии тока на поверхности пузыря. Поскольку давление на поверхности пузыря постоянно, имеем для критической точки O и точки M (в окрестности O)

$$\frac{v^2}{2} + \Pi(M) = \Pi(O),$$

где $\Pi = gh$ — потенциал силы тяжести. Отсюда

$$v^2 = 2gR(1 - \cos \theta). \quad (1)$$

Как мы видели (см. свойство 4 безвихревого движения), скорость в окрестности критической точки линейно зависит от расстояния: поскольку $\psi = b_{(1)}x_1x_2$, то $v_1 = b_{(1)}x_1$, $v_2 = -b_{(1)}x_2$. В силу этого можно считать, что $v = \alpha u\theta$, где α — безразмерный коэффициент, зависящий от формы пузыря, а u — величина скорости подъема пузыря (см. рис. 3.12).

Если пузырь имеет сферическую форму, то, учитывая, что потенциал сферы, движущейся со скоростью u в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности, имеет в системе координат, связанной со сферой, вид

$$\varphi = -\frac{uR^3}{2r^2} \cos \theta - ur \cos \theta,$$

получаем выражение для скорости обтекания на сфере

$$v = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)_{r=R} = \frac{3}{2} u \sin \theta \approx \frac{3}{2} u \theta, \quad (2)$$

так что $a = 3/2$. Подставляя значение (2) в (1) и ограничиваясь малыми порядками θ^2 имеем

$$u = \frac{2}{3} \sqrt{gR}. \quad (3)$$

Эта формула хорошо подтверждается экспериментами для ряда жидкостей при объемах пузырей, больших 2 см^3 . По наблюдениям, угол θ_0 , ограничивающий сферический гладкий сегмент, меняется в интервале $46-64^\circ$. Формула (3) находит приложение в определении скорости облака сильно нагретого газа, возникающего при взрыве атомной бомбы (когда облако поднимется, и скорость подъема станет стационарной).

Задача 3.3. Пусть в области V находится сплошная среда, частицы которой взаимодействуют по закону Ньютона. Тогда (см. [16]) поле этих сил взаимодействия имеет потенциал (объемный потенциал) вида

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

где $\rho(\mathbf{r}')$ — плотность распределения масс.

Найти разложение этого потенциала по степеням r , вне области V , так что $r > r'$.

Решение. Воспользуемся рядом (3.43) для производящей функции полиномов Лежандра, тогда имеем

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + r'^2}} = \frac{1}{r\sqrt{1 + (r'/r)^2 - 2(r'/r)\cos\gamma}} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\gamma) \cdot \left(\frac{r'}{r}\right)^n,$$

где $\cos\gamma = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'}$, P_n — полином Лежандра. Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V \rho(\mathbf{r}') (r')^n P_n(\cos\gamma) dV'. \quad (1)$$

Рассмотрим первые члены полученного разложения

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \int_V \rho' dV' + \frac{1}{r^2} \int_V \rho' r' P_1(\cos \gamma) dV' + \frac{1}{r^3} \int_V \rho' (r')^2 P_2(\cos \gamma) dV' + \dots$$

Первый интеграл справа равен массе M среды в области V . Второй интеграл можно считать равным нулю, если выбрать начало системы координат в центре тяжести объема V . Действительно

$$\int_V \rho' r' P_1(\cos \gamma) dV' = \int_V \rho' r' \cos \gamma dV' = \int_V \rho' \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} dV' = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \int_V \rho' \mathbf{r}' dV' = 0,$$

ибо $\int_V \rho' \mathbf{r}' dV'$ представляет собой векторный статический момент массы M относительно центра тяжести (начала координат).

Выбирая в качестве координатной системы (x, y, z) главные центральные оси инерции массы M , можно после несложных, хотя и громоздких выкладок (см. [16], § 138), получить

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) = & \frac{M}{r} + \frac{J_{xx} + J_{yy} - 2J_{zz}}{2r^3} P_2(\cos \gamma) + \frac{3(J_{yy} - J_{xx})}{4r^5} \sin^2 \gamma \cos 2\varepsilon + \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V \rho'(\mathbf{r}') (r')^n P_n(\cos \gamma) dV'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — центральные моменты инерции массы относительно координатных осей.

В случае симметрии $J_{xx} = J_{yy}$ имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{M}{r} + \frac{J_{xx} - J_{zz}}{r^3} P_2(\cos \gamma) + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int_V \rho'(\mathbf{r}') (r')^n P_n(\cos \gamma) dV'. \quad (3)$$

Формулы (2) и (3) находят широкое применение в геофизике.

Задача 3.4. Найти разложение функции потенциала простого слоя на сфере с радиусом a в ряд по степеням r

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = \int_{S_a} \frac{q(\theta', \varepsilon')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS_a = a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{q(\theta', \varepsilon')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sin \theta' d\theta' d\varepsilon'.$$

Решение. Воспользовавшись разложением (3.43) имеем

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|_{r=a}} = \begin{cases} a^{-(n+1)} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) r^n, & r < a, \\ a^n \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\cos \gamma) r^{-(n+1)}, & r > a, \end{cases}$$

где $\cos \gamma = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'}$.

Таким образом, получаем

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{a^{(n+1)}} \int_{S_a} q(\theta', \varepsilon') P_n(\cos \gamma) dS_a, & r < a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{r^{n+1}} \int_{S_a} q(\theta', \varepsilon') P_n(\cos \gamma) dS_a, & r > a. \end{cases} \quad (1)$$

Считая, что плотность слоя представима в виде ряда Лапласа (3.40а), получаем, подставляя этот ряд в (1):

$$\int_{S_a} q(\theta', \varepsilon') P_n(\cos \gamma) dS_a = \sum_{m=0}^{\infty} \int_{S_a} Y_m(\theta', \varepsilon') P_n(\cos \gamma) dS_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_n(\theta, \varepsilon).$$

Здесь использовано свойство ортогональности сферических функций (3.45). Таким образом, получаем

$$\varphi(r, \theta, \varepsilon) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi r^n}{(2n+1)a^{n+1}} Y_n(\theta, \varepsilon), & r < a, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4\pi a^{n+2}}{(2n+1)r^{n+1}} Y_n(\theta, \varepsilon), & r > a. \end{cases} \quad (2)$$

Значение потенциала на сфере равно

$$\varphi(a, \theta, \varepsilon) = 4\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} Y_n(\theta, \varepsilon).$$

Задача 3.5. Пусть сфера $r = a$ помещена в безграничную несжимаемую жидкость, покоящуюся на бесконечности, и на ней заданы нормальные компоненты скорости $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{r=a} = \alpha(t, \theta, \varepsilon)$. Предполагая возникающее движение безвихревым, найти его потенциал $\varphi(t, r, \theta, \varepsilon)$.

Решение. В соответствии с (3.31) и (3.33) ищем решение в виде

$$\begin{aligned} \varphi^-(t, r, \theta, \varepsilon) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n Y_n(t, \theta, \varepsilon) \quad \text{для } r < a, \\ \varphi^+(t, r, \theta, \varepsilon) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n+1} \left(\frac{r}{a} \right)^{n+1} Y_n(t, \theta, \varepsilon) \quad \text{для } r > a. \end{aligned}$$

Тогда, вычисляя нормальные компоненты скорости изнутри и снаружи сферы, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{r=a} &= \left(\frac{\partial \varphi^-}{\partial r} \right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t, \theta, \varepsilon), \\ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{r=a} &= \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial r} \right)_{r=a} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t, \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Поскольку в силу граничного условия

$$\alpha(t, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_{n0}(t) \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} (a_{nm}(t) \cos m\varepsilon + b_{nm}(t) \sin m\varepsilon) P_n^m(\cos \theta) \right\},$$

так что коэффициенты $a_{nm}(t)$ и $b_{nm}(t)$ всегда могут быть выражены через $\alpha(t, \theta, \varepsilon)$ по формулам (3.46), то решение задачи на этом заканчивается.

Отметим, что полученное движение можно рассматривать как безвихревое движение от диполей, распределенных по сфере; их плотность v равна скачку потенциала, т. е.

$$v = \varphi^+ \Big|_{|r|=a} - \varphi^- \Big|_{|r|=a} = -a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Y_n(t, \theta, \varepsilon).$$

Поскольку масса жидкости неизменна, то интеграл, взятый по сфере от $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, должен быть равен нулю, т. е.

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(t, \theta, \varepsilon) \sin \theta d\theta d\varepsilon = 0.$$

Это условие, безусловно, выполнено.

Упражнения

- Используя решение задачи 3.1, исследовать движение сфер, для случаев, когда
 - сферы движутся в одном направлении;
 - сферы движутся в противоположных направлениях. Для них
 - определить значения потенциалов и присоединенные массы сфер;
 - определить значения ударных импульсов давления, которые должны быть приложены к поверхностям сфер, чтобы получить импульсивное движение с этими потенциалами;
 - найти функцию тока этого осесимметричного течения.
- Исходя из вида решения (2) задачи 3.4. найти скачок нормальной производной $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на поверхности сферы.
- Доказать, что $\int_{-1}^{+1} P_n(\mu) d\mu = 0$ при $n \neq 0$.
- Найти вид потенциала и функции тока в окрестности критической точки в цилиндрических координатах (x, r, θ) в случае осесимметричного потока (ось x — по оси симметрии, r — в меридиональной плоскости).

§ 3.2. Двумерные безвихревые течения

Постановка двумерных гидромеханических задач Двумерные (плоские) течения среды являются определенным приближением реальных потоков у твердых тел.

Более всего это приближение годится при рассмотрении обтекания длинных цилиндрических тел (см. рис. 3.13), крыльев самолетов, когда длина l (размах) в несколько раз превосходит поперечный размер h (хорду) профиля, чей контур является направляющей цилиндра.

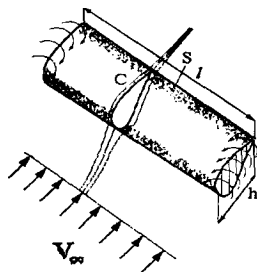


Рис. 3.13

Если длина l бесконечна, то тогда любой профиль крыла будет находиться в условиях двумерного обтекания. Но поскольку l конечна, то двумерный поток будет существовать, строго говоря, только в срединной плоскости S_0 , и чем дальше к краям от нее рассматривается плоскость, тем менее применима схема двумерного потока: все сильнее чувствуется влияние краев крыла, через которые всегда есть перетекание сре-

ды — поперечный поток из области повышенного давления под крылом (см. рис. 3.13) через боковые кромки.

Направляющая цилиндра — контур C — вообще говоря, произвольна. Но нас в первую очередь будут интересовать удобообтекаемые профили — контуры каплевидной формы с заостренной задней кромкой. Именно для таких контуров, как мы увидим далее, на практике можно осуществить, так называемое, плавное обтекание, когда линии тока не отрываются от поверхности, а задняя кромка цилиндра представляет собой совокупность точек, где верхняя и нижняя струи потока сходятся и плавно покидают твердый контур.

Несколько необычен пример возникновения двумерных потоков в относительном движении при вращении жидкости в условиях, когда кориолисова сила инерции значительно больше сил инерции стационарного относительного движения.

Уравнения стационарного движения несжимаемой невязкой жидкости в относительной системе координат, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω имеют вид (см. ч. 2, § 13)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}_r &= 0, \\ (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r &= \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla (\omega \times \mathbf{r})^2 - 2(\omega \times \mathbf{v}_r). \end{aligned}$$

Если силы \mathbf{f} потенциальны, то уравнение движения можно записать в виде

$$(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r = -\nabla \left(\Pi + \frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 \right) - 2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r).$$

Предположим, что кориолисова сила инерции велика, так что

$$|(\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \mathbf{v}_r| \ll |(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r)|.$$

Или, если v_0 — характерная скорость относительного движения; L_0 — характерный размер задачи,

$$\frac{v_0}{\omega L_0} \ll 1.$$

Безразмерный параметр $\frac{v_0}{\omega L_0}$ носит название *числа Россби*.

Тогда, отбрасывая левую часть и беря операцию rot , из предыдущего уравнения получаем

$$\text{rot} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r) = 0.$$

Или

$$0 = (\mathbf{v}_r \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{v}_r) \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \text{div} \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_r \text{div} \boldsymbol{\omega}.$$

В силу несжимаемости среды и постоянства $\boldsymbol{\omega}$, откуда имеем

$$(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{v}_r = 0.$$

Это означает, что во всех плоскостях, перпендикулярных $\boldsymbol{\omega}$, скорость \mathbf{v}_r одинакова, так что если $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}_z \omega$, то $\frac{\partial \mathbf{v}_r}{\partial z} = 0$. При этом, движение в этих плоскостях никак не связано с движением вдоль оси z (если последнее существует). Поэтому, если v_{rx}, v_{ry} — компоненты скорости в плоскости xOy , то $v_{rx} = v_{rx}(x, y)$, $v_{ry} = v_{ry}(x, y)$, что и указывает на следующий факт: *в плоскостях, перпендикулярных к оси постоянного вращения среды, при малых числах Россби течение жидкости двумерно.*

Для описания двумерных безвихревых потоков несжимаемой невязкой жидкости достаточно знать одну скалярную функцию: либо скалярный потенциал $\phi(x, y)$ поля скоростей $\mathbf{v}(v_x(x, y), v_y(x, y))$, либо функцию тока $\psi(x, y)$.

Существование функции $\phi(x, y)$ обусловлено тем, что всюду в потоке

$$\text{rot} \mathbf{v} = \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0, \text{ а функция тока } \psi(x, y) \text{ существует для всякого}$$

двумерного соленоидального поля, когда $\text{div} \mathbf{v} = 0$, т. е. $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$.

Обе эти функции являются гармоническими, ибо в силу $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, потенциал $\varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Поскольку плоское поле \mathbf{v} может быть представлено через ψ в виде $\mathbf{v} = \nabla \psi \times \mathbf{i}_z$, то из уравнения $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ следует

$$\operatorname{rot}(\nabla \psi \times \mathbf{i}_z) = -\mathbf{i}_z \Delta \psi = 0, \text{ т. е. } \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Функции φ и ψ могут быть выражены одна через другую при помощи формул

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) - \varphi(x_0, y_0) &= \int_{x_0}^x \frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{x=x_0} dy = \\ &= - \int_{y_0}^y \frac{\partial \psi}{\partial x} dy + \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_{y=y_0} dx, \\ \psi(x, y) - \psi(x_0, y_0) &= - \int_{x_0}^x \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \int_{y_0}^y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=x_0} dy = \\ &= \int_{y_0}^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \int_{x_0}^x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=y_0} dx. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Эти формулы следуют из того, что

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.75)$$

Если известно поле скоростей $\mathbf{v}(v_x(x, y), v_y(x, y))$, то функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ могут быть определены при помощи криволинейных интегралов

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \varphi(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \varphi(x_0, y_0) + \int_{x_0}^x v_x(x, y) dx + \int_{y_0}^y v_y(x, y) dy, \\ \psi(x, y) &= \psi(x_0, y_0) + \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL = \psi(x_0, y_0) + \int_{y_0}^y v_x(x, y) dy - \int_{x_0}^x v_y(x, y) dx. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Эквипотенциальные линии $\varphi(x, y) = \text{const}$ и линии тока $\psi(x, y) = \text{const}$ образуют два взаимно-ортогональных семейства плоских кривых, ибо в силу (3.75)

$$\nabla \varphi \cdot \nabla \psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -v_x v_x + v_x v_x = 0.$$

Наконец, отметим, что гармоническая функция $\varphi(x, y)$ обычно определяется из задачи Неймана

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{C_k} = 0, \quad (3.77)$$

а функция $\psi(x, y)$ — из задачи Дирихле

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad \psi \Big|_{C_k} = \text{const}, \quad (3.78)$$

где C_k — твердые (непроницаемые контуры). Если эти задачи поставлены как внешние, то должен быть задан еще вектор \mathbf{v}_∞ так, чтобы $\nabla \varphi \Big|_\infty = \mathbf{v}_\infty$ и $\nabla \psi \Big|_\infty = -\mathbf{i}_x v_{y,\infty} + \mathbf{i}_y v_{x,\infty}$.

При рассмотрении импульсивного движения (см. § 1), как мы видели, функция φ определяется из задачи Дирихле.

Как уже отмечалось ранее, функция потенциала и функция тока могут быть введены и для нестационарных потоков, если t рассматривать как параметр, так что все предыдущие соотношения справедливы для поля $\mathbf{v}(x, y)$ и функций $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ для каждого момента времени t . Нестационарность потока скажется лишь при использовании интеграла Лагранжа.

Наиболее важные выводы для построения гидромеханики двумерных безвихревых потоков невязкой несжимаемой жидкости на основе теории аналитических функций следуют из формул (3.75), а именно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.79)$$

Прежде, чем переходить к применению теории функций комплексного переменного, к изучению плоских потоков жидкости, напомним некоторые сведения из теории аналитических функций и конформных ото-

бражений. Наиболее полный материал по этим вопросам можно найти в многочисленных монографиях (см., например, [5], [8], [18]).

Аналитические функции и конформные отображения

Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* (регулярной, голоморфной) в области D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Аналитическая в точке $z = z_0$ функция всегда представима в виде ряда $f(z) =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \text{ сходящегося в окрестности точки } z_0 \text{ (ряд Тейлора).}$$

Функция $f(z)$ называется *аналитической в бесконечности*, если функция $F(z) = f(1/z)$ аналитическая в точке $z = 0$. Аналитическая в бесконечности функция $f(z)$ представима в виде ряда $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$, сходящегося для достаточно больших $|z|$ (ряд Лорана).

Если функция $f(z)$ аналитична в кольце между двумя концентрическими окружностями C_1 и C_2 с центром в точке $z = a$ ($a \neq \infty$) и радиусами R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), то существует единственное разложение в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z - a)$ (общий ряд Лорана):

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k (z - a)^k, \quad b_k = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta,$$

где C — любая окружность, расположенная между C_1 и C_2 . При этом сумма по отрицательным степеням $z - a$ носит название главной части общего ряда Лорана.

Производная от аналитической функции комплексного переменного $z = x + iy$, представленной в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, вычисляется по одной из формул

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (3.80)$$

полученных из условия независимости производной от пути, по которому приращение стремится к нулю: первые две из них получаются при $\Delta z = \Delta x$ и $\Delta z = i\Delta y$, а остальные являются следствием условий Коши-Римана¹:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Все производные высших порядков от аналитической функции $f(z)$ существуют и являются аналитическими функциями.

¹ Некоторые авторы не без оснований называют их условиями Даламбера-Эйлера, поскольку они впервые были получены Даламбером в 1752 г. и Эйлером в 1755 г. в работах по гидромеханике, картографии и интегральному исчислению (Эйлер).

Любая комплексная функция от x и y в силу формул $x = (z + \bar{z})/2$, $y = i(\bar{z} - z)/2$, может быть представлена в виде $u(x, y) + iv(x, y) = f(z, \bar{z})$. С другой стороны

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}.$$

Но $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$ является неопределенным.

Следовательно, определенная производная $\frac{df}{dz}$ может существовать только при

$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Таким образом, *аналитическая функция комплексного переменного не может зависеть от \bar{z}* . Так, например, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ не является аналитической функцией.

Если $f(z)$ — аналитическая функция, то $f'(z) = f'(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Сопряженная ей функция обозначается $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$. Таким образом,

$$f(z) + \bar{f}(z) = 2u(x, y), \quad f(z) - \bar{f}(z) = 2iv(x, y).$$

В односвязной области интеграл от аналитической функции $\int_0^z f(\zeta) d\zeta$ зависит от контура интегрирования, при этом

$$\frac{d}{dz} \int_0^z f(\zeta) d\zeta = f(z).$$

Аналитическая функция $f(z)$ может быть неоднозначной, т. е. для каждого z могут быть несколько значений $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., которые представляют собой однозначные непрерывные функции (ветви) в области их определения.

Точка $z = a$ называется *точкой ветвления* многозначной функции $f(z)$, определенной в некоторой окрестности точки $z = a$, исключая, быть может, ее саму, если при обходе по замкнутой кривой в этой окрестности точки $z = a$, функция переходит от одной своей ветви к другой. Если после n -кратного обхода по замкнутой кривой в одном направлении вокруг точки $z = a$, мы вновь впервые вернемся на первоначальную ветвь, то число $n - 1$ называется *порядком* точки ветвления.

Пример 1. Функция $f(z) = \sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\arg z}{n} + i \sin \frac{\arg z}{n} \right)$ имеет три различные вет-

ви, определенные в секторах, ограниченные лучами $\arg z = \frac{2n\pi}{3}$ ($n = 0, 1, 2, 3$), так что

углы θ_k определения ветвей суть: $0 < \theta_1 < \frac{2}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi < \theta_2 < \frac{4}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi < \theta_3 < 2\pi$. Все три вет-

ви принимают значение нуль в точке ветвления, порядок которой равен двум.

Пример 2. Функция $f(z) = z^{\frac{1}{3}}$ имеет три ветви с теми же областями определения и с тем же порядком точек ветвления $z = 0$, но в этой точке ветви не определены.

Пример 3. Функция $f(z) = \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{1/n}$ имеет две точки ветвления ($z = a$ и $z = b$) порядка $n-1$; эта функция имеет n ветвей, определенных в углах, ограниченных лучами $\arg z = \frac{2\pi k}{n}$ ($k = 0, 1, \dots, n$) с вершиной в начале координат.

Пример 4. Функция $f(z) = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ имеет две ветви (функция двузначная) и четыре точки ветвления: $z = \pm 1$, $z = \pm \frac{1}{k}$, если ветви определяются во всей области комплексного переменного z с границей в виде двух отрезков: $-\frac{1}{k} \leq x \leq -1$ и $1 \leq x \leq \frac{1}{k}$, то эти ветви имеют вид: $f_1(z) = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ и $f_2(z) = -\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$; заметим, что при обходе вдоль замкнутой кривой, заключающей внутри только две точки ветвления, значение функции не меняется.

Пример 5. Функция $w = \ln z = \ln|z| + i \arg z$ имеет точку ветвления $z = 0$ бесконечного порядка, поскольку эта функция — бесконечнозначная ($\arg z$ принимает бесконечное множество значений, различающихся попарно на целые кратные 2π).

Если $f(z)$ — аналитическая функция в некоторой области, а C — замкнутый контур, принадлежащий этой области, то $\oint_C f(\zeta) d\zeta = 0$ (интегральная теорема Коши).

Если точка z лежит внутри контура C , то

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.81)$$

(интегральная формула Коши).

Если точка z находится вне контура C , то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0. \quad (3.82)$$

Кроме того, для произвольной функции $f(z)$ имеет место представление (точка z — внутри контура C)

$$\frac{d^n f}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Если контур C — окружность с радиусом a , то производя в (3.81) замену $\zeta - z = a e^{i\theta}$, получим

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \oint_C f(z + a e^{i\theta}) d\theta.$$

Если аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке $z = a$ изолированную особенность (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ функция $f(z)$ аналитична в области $0 < |z - a| < \varepsilon$, но не в самой точке $z = a$), то вычетом $\text{Res} f(a)$ функции $f(z)$ в точке $z = a$ называется коэффициент при $(z - a)^{-1}$ в главной части разложения Лорана $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - a)^{-k}$, или $\text{Res} f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\zeta) d\zeta = b_1$, где C — контур, окружающий точку $z = a$ и не содержащий других особенностей.

Интеграл Шварца-Кристоффеля

$$w = A \int (z - x_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (z - x_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} \dots (z - x_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} dz + B, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2)\pi \quad (3.83)$$

отображает конформно верхнюю полуплоскость $y > 0$ во внутренность многоугольника w -плоскости, а контур многоугольника переводит в действительную ось; вершины w_1, w_2, \dots, w_n соответствуют точкам x_1, x_2, \dots, x_n оси x -ов; внутренний угол при вершине w_i равен α_i .

В приложениях теории функций комплексного переменного очень часто возникает потребность отображения некоторой области D изменения комплексного переменного z на область D^* , где меняется комплексное переменное ζ . Если это отображение совершается при помощи аналитической функции $\zeta = \zeta(z)$, то существует связь между отображаемыми кривыми, которую можно кратко выразить так: *любая замкнутая кривая малых размеров из области D переходит в кривую такой же формы (с точностью до линейных размеров первого порядка малости включительно) в области D^** . Такое преобразование, сохраняющее форму кривых в малом или малых элементах кривых, называется *конформным*.

Свойства конформного отображения следуют из свойств производной аналитической функции $\zeta = \zeta(z)$, не зависящей от того, по какому пути приращение аргумента Δz идет к нулю.

Пусть $|\Delta z|$ — расстояние между какими-то двумя близкими точками (z и $z + \Delta z$) в области D , а $|\Delta \zeta|$ — расстояние между их изображениями ($\zeta(z)$ и $\zeta(z + \Delta z)$) в области D^* , (см. рис. 3.14). Тогда при стремлении этих точек друг к другу имеем $\lim_{|\Delta z| \rightarrow 0} \frac{|\Delta \zeta|}{|\Delta z|} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$,

так что с точностью до бесконечно малых первого порядка $|\Delta\zeta| = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |\Delta z|$. А это означает, что модуль производной $\left(\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| \right)$ характеризует изменение линейных размеров в каждой точке z отображаемой области независимо от направления элементов.

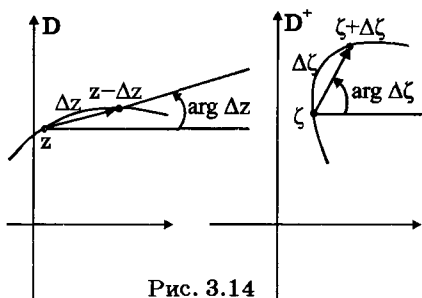


Рис. 3.14

Кроме того, поскольку $\arg \Delta\zeta - \arg \Delta z$ — это угол между векторами $\Delta\zeta$ и Δz , а с другой стороны $\arg \Delta\zeta - \arg \Delta z = \arg \frac{\Delta\zeta}{\Delta z}$, так что в пределе $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta\zeta}{\Delta z} = \arg \frac{d\zeta}{dz}$, то аргумент производной $\left(\arg \frac{d\zeta}{dz} \right)$ определяет угол поворота элемента произвольной кривой в данной точке z независимо от направления элемента.

Поскольку для любой кривой, проходящей через точку z , этот угол поворота будет одним и тем же, то преобразование (области D и D^*), совершаемое при помощи регулярной функции $\zeta = \zeta(z)$, сохраняет углы во всех точках, где производная $\frac{d\zeta}{dz}$ отлична от нуля. А это означает, что отображение любой кривой из D в D^* будет конформным, поскольку форма малых кривых не меняется.

Необходимо отметить основную теорему теории конформных отображений (теорема Римана), суть которой состоит в следующем (см. [18]):

как бы ни были заданы точки z_0 и ζ_0 в двух областях D и D^* , существует одно и только одно однозначное конформное отображение области D в D^* , осуществляемое с помощью аналитической функции $\zeta = \zeta(z)$, такое, что $\zeta_0 = \zeta(z_0)$ и $\left(\frac{d\zeta}{dz} \right)_{z=z_0} = \alpha_0$.

Иными словами, для однозначности конформного отображения необходимо задать соответствие двух точек в отображаемых областях и направление элементов в них.

Комплексный потенциал. Комплексная скорость

Соотношения (3.79) представляют собой условия Коши-Римана для функции тока и потенциальной функции. Они представляют собой необходимые и достаточные условия существования функции

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (3.84)$$

как функции комплексного переменного $z = x + iy$. Эта функция при выполнении условия (3.79) будет дифференцируемой, так что существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} \equiv \frac{dw}{dz},$$

не зависящий от пути, по которому приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ стремится к нулю.

Функция (3.84) получила в гидромеханике название *комплексного потенциала потока*.

Эта функция, как имеющая производную, является аналитической функцией.

Функция $\frac{dw}{dz} \equiv \bar{v}(z)$ называется *комплексно-сопряженной скоростью потока*.

В силу формул (3.80) для производной аналитической функции имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.85)$$

так что на основании (3.75)

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v}(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y). \quad (3.86)$$

Комплексная величина, сопряженная $\frac{dw}{dz}$, а именно

$$\overline{\frac{dw}{dz}} \equiv v(z) = v_x(x, y) + iv_y(x, y) \equiv \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}$$

называется *комплексной скоростью потока*.

Здесь и в дальнейшем в этой главе абсолютную величину $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}| = |\bar{\mathbf{v}}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v\bar{v}}$ будем обозначать как $|\mathbf{v}|$.

В полярных координатах r, θ условия Коши-Римана (3.79) и комплексная скорость (3.86) имеют выражения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad (3.87)$$

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + i \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{ie^{-i\theta}}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + i \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) = e^{-i\theta} (v_r - iv_\theta), \quad (3.88)$$

так что $v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$, $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$.

Возможность соотнесения аналитической функции комплексного переменного определенному потоку жидкости является основой использования теории аналитических функций для изучения двумерных безвихревых потоков несжимаемой невязкой жидкости.

Всякий раз, когда задан такой поток, его можно изучать при помощи подходящей аналитической функции комплексного переменного. В дальнейшем мы увидим, что это относится не только к кинематике потока, но и к силам взаимодействия его с твердыми двумерными телами (контурами).

И наоборот, всякий раз, когда задана какая-либо аналитическая функция $w(z)$, ее реальная часть ($\operatorname{Re} w \equiv \varphi$) может рассматриваться как функция потенциала скорости подходящего двумерного потока, а мнимая часть ($\operatorname{Im} w(z) \equiv \psi$) — как функция тока того же потока. Более того, поскольку $i w(z)$ — тоже аналитическая функция, то одному комплексному потенциалу можно сопоставить два потока, у которых изопотенциальные линии и функции тока меняются местами. При этом особый интерес представляют те аналитические функции $w(z)$, которые позволяют удовлетворить граничным условиям на заданных твердых контурах C_k , а именно (см. (3.77) и (3.78))

$$\left. \frac{\partial}{\partial n} \operatorname{Re} w(z) \right|_{C_k} = 0, \quad \operatorname{Im} w(z)|_{C_k} = 0.$$

Отметим значение криволинейного интеграла

$$\int_{M_0}^M \bar{v} dz = \int_{M_0}^M (v_x - i v_y)(dx + i dy) = \int_{M_0}^M (v_x dx + v_y dy) + i \int_{M_0}^M v_x dy - v_y dx.$$

Но поскольку $dx = dl_x = -n_y dl$ и $dy = dl_y = n_x dl$, то

$$\int_{M_0}^M \bar{v} dz = \int_{M_0}^M \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} + i \int_{M_0}^M (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dl, \quad (3.89)$$

где \mathbf{n} — нормаль к кривой, причем $\mathbf{n} \times d\mathbf{l} = i_- dl$.

Таким образом, мнимая часть рассматриваемого криволинейного интеграла равна объемному расходу жидкости через кривую, определяющую путь интегрирования.

Если контур C — замкнутый, то

$$\oint_C \bar{v} dz = \Gamma + iQ, \quad (3.90)$$

где Γ — циркуляция скорости по контуру, а Q — объемный расход жидкости через контур C .

Если внутри контура C находятся вихри и источники (стоки), то функции φ и ψ — неоднозначны; так что на основании (3.90) можно говорить, что Γ , Q — суммарные интенсивности вихрей и мощности источников (стоков), находящихся внутри замкнутого контура C .

Комплексный потенциал $w(z)$ можно рассматривать как аналитическую функцию, осуществляющую конформное отображение области физического потока жидкости из плоскости z в плоскость w , — область изменения кинематических характеристик φ и ψ этого потока. В тех точках, где производная $\frac{dw}{dz}$ не равна нулю и не обращается в бесконечность,

существует аналитическая функция $z = z(w)$, осуществляющая обратное конформное преобразование областей. Для этой функции условия Коши-Римана имеют вид

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

Так как $\frac{dw}{dz} = v_x - iv_y$, то

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{v_x - iv_y} = \frac{v}{|v|^2} = \frac{e^{i\theta}}{|v|}. \quad (3.91)$$

Функцию $\zeta(w) = \frac{dz}{dw}$ называют *функцией Кирхгофа*. Она играет основную роль при изучении разрывных течений со свободными струями (см. § 5).

Заметим, что $|\zeta(w)| = \frac{1}{|v|}$, причем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|v|^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 = \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\varphi, \psi)}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Эта формула дает отношение величины элементарной площадки в плоскости (x, y) к величине площадки в плоскости (φ, ψ) .

Наряду с широким использованием комплексного потенциала $w = w(z)$, иногда в гидродинамике двумерных потоков бывает удобно обратиться к функции $z = z(w)$ (см. ниже пример 7).

Простейшие течения. Их комплексные потенциалы В нижеследующих примерах, проиллюстрированных на рис. 3.15, эквипотенциальные линии определяются уравнениями $\operatorname{Re} w = \varphi = C_1$,

а линии тока $\operatorname{Im} w = \psi = C_2$, где C_1, C_2 — постоянные. Комплексная сопряженная скорость $\bar{v} = \frac{dw}{dz}$.

На Рис. 3.15 линии тока изображены сплошными линиями, а эквипотенциальные линии — пунктирными.

1. Однородный поток:

$$w = az, \quad (a = a_1 + ia_2), \quad \bar{v} = a,$$

$$\operatorname{Re} w = \varphi = a_1 x - a_2 y = C_1, \quad \operatorname{Im} w = \psi = a_1 y + a_2 x = C_2.$$

2. Диполь в точке z_0 с моментом, равным по величине m и направленным под углом α к оси x :

$$w = -\frac{me^{i\alpha}}{2\pi(z-z_0)}, \quad \bar{v} = \frac{me^{i\alpha}}{2\pi(z-z_0)^2},$$

$$\varphi = \operatorname{Re} w = C_1 = -\frac{m[(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\sin\alpha]}{2\pi[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]},$$

или

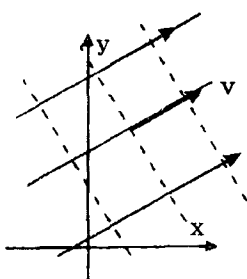
$$\left(x - x_0 + \frac{m}{4\pi C_1} \cos\alpha \right)^2 + \left(y - y_0 + \frac{m}{4\pi C_1} \sin\alpha \right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi C_1} \right)^2.$$

Линии тока определяются уравнением

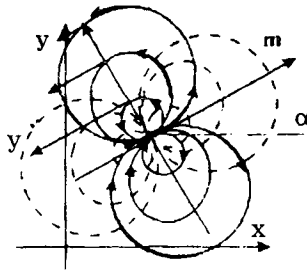
$$\psi = \text{Im } w = C_2$$

или

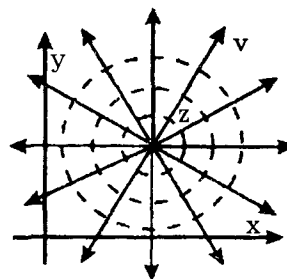
$$\left(x - x_0 + \frac{m}{4\pi C_2} \sin \alpha\right)^2 + \left(y - y_0 - \frac{m}{4\pi C_2} \cos \alpha\right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi C_2}\right)^2.$$



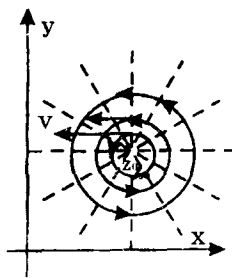
1. Однородный
поток



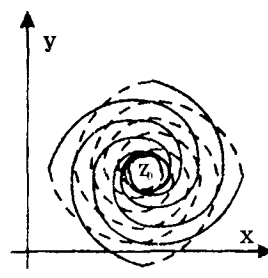
2. Диполь в точке z_0
с моментом m



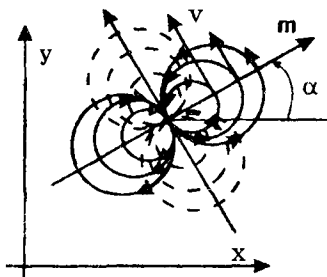
3. Источник ($Q > 0$)
в точке z_0



4. Вихрь ($\Gamma > 0$)
в точке z_0



5. Вихреисточник
в точке z_0



6. Вихревой диполь в
точке z_0 с моментом m

Рис. 3.15

3. *Источник* ($Q > 0$) или *сток* ($Q < 0$) мощностью Q , расположенный в точке z_0 :

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad \bar{v} = \frac{Q}{2\pi(z - z_0)},$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln|z - z_0| = C_1 \quad \text{или} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \exp\left(\frac{4\pi C_1}{Q}\right),$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi} \arg(z - z_0) = C_2 \text{ или } \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2\pi C_2}{Q}.$$

Величина Q равна объемному расходу жидкости через любой замкнутый контур C , охватывающий точку z_0 . Действительно:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dL = \oint_C d\psi = \frac{1}{i} \oint_C \frac{dw}{dz} dz = \frac{1}{i} \oint_C \frac{Q dz}{2\pi(z - z_0)} = Q.$$

Здесь использована однозначность функции φ , так что $\oint_C d\varphi = 0$, и интегральная формула Коши (3.81).

4. *Вихрь* интенсивности Γ , расположенный в точке z_0 :

$$w = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad \bar{v} = -\frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)},$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arg(z - z_0) = C_1 \text{ или } \operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{2\pi C_1}{\Gamma},$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln|z - z_0| = C_2 \text{ или } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \exp\left(\frac{4\pi C_2}{Q}\right).$$

Величина Γ равна циркуляции скорости по любому замкнутому контуру, охватывающему точку z_0 . Действительно:

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \oint_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{L} = \oint_C d\varphi = \oint_C dw = \oint_C \frac{dw}{dz} dz = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \Gamma.$$

Здесь использована однозначность функции ψ , и интегральная формула Коши (3.81).

5. *Вихреисточник* (вихрь и источник (сток), расположенные в одной точке) в точке z_0 :

$$w = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0), \quad \bar{v} = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi(z - z_0)},$$

$$\varphi = \frac{1}{2\pi} (Q \ln|z - z_0| + \Gamma \arg(z - z_0)) = C_1 \text{ или } r = C_3 e^{\frac{\Gamma}{Q}\theta},$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} (\Gamma \ln|z - z_0| - Q \arg(z - z_0)) = C_2 \text{ или } r = C_4 e^{\frac{Q}{\Gamma}\theta}.$$

Здесь: $r = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$; $\theta = \arg(z - z_0)$; $C_3 = e^{\frac{2\pi C_1}{Q}}$.

Эквипотенциальные линии и линии тока представляют собой два ортогональных семейства логарифмических спиралей.

6. *Вихревой диполь* с моментом, по величине равным m и составляющим угол α с осью x :

$$w = \frac{ime^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)}, \quad \bar{v} = -\frac{ime^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)^2}, \quad \varphi = \operatorname{Re} w = C_1$$

или

$$\left(x - x_0 + \frac{m}{4\pi C_1} \sin \alpha\right)^2 + \left(y - y_0 - \frac{m}{4\pi C_1} \cos \alpha\right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi C_1}\right)^2.$$

Линии тока поменялись местами с эквипотенциальными линиями диполя.

7. *Течение вблизи угла с твердыми стенками.*

$$w = Az^n, \quad (\operatorname{Im} A = 0), \quad \bar{v} = Anz^{n-1}, \quad z = x + iy = re^{i\theta},$$

$$\varphi = Ar^n \cos n\theta, \quad \psi = Ar^n \sin n\theta.$$

В связи с важностью для дальнейшего проанализируем этот пример потока более подробно.

При $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{n}$ функция $\psi = 0$ для всех r . Поэтому рассматриваемый комплексный потенциал описывает поток между двумя прямыми границами, пересекающимися под углом $\frac{\pi}{n}$, или поток у угла с величиной раствора $\frac{\pi}{n}$, имеющего твердые непроницаемые стенки. При этом, для $n > 1$ величина угла меньше π («внутренний угол»), а при $n < 1$ — больше π («внешний угол»); при $n \approx 1/2$ величина угла максимальна и равна 2π , так что в этом случае имеем перетекание потока с одной стороны пластины на другую. Линии тока для характерных значений n представлены на рис. 3.16.

Следует отметить, что при течении у внутренних углов с раствором $\frac{\pi}{n}$ меньшим, чем $\frac{\pi}{2}$, т. е. когда $n > 2$, существует два типа потоков: 1) в области между θ_k и θ_{k+1} — двумя последовательными лучами $\left(\theta_k = \frac{k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots\right)$; 2) в области между θ_k и θ_{k+2} (твердые стенки), когда луч θ_{k+1} служит линией тока потока, не совпадающей с твердой стенкой. Эти два типа потоков изображены на фигуре 8 рис. 3.16.

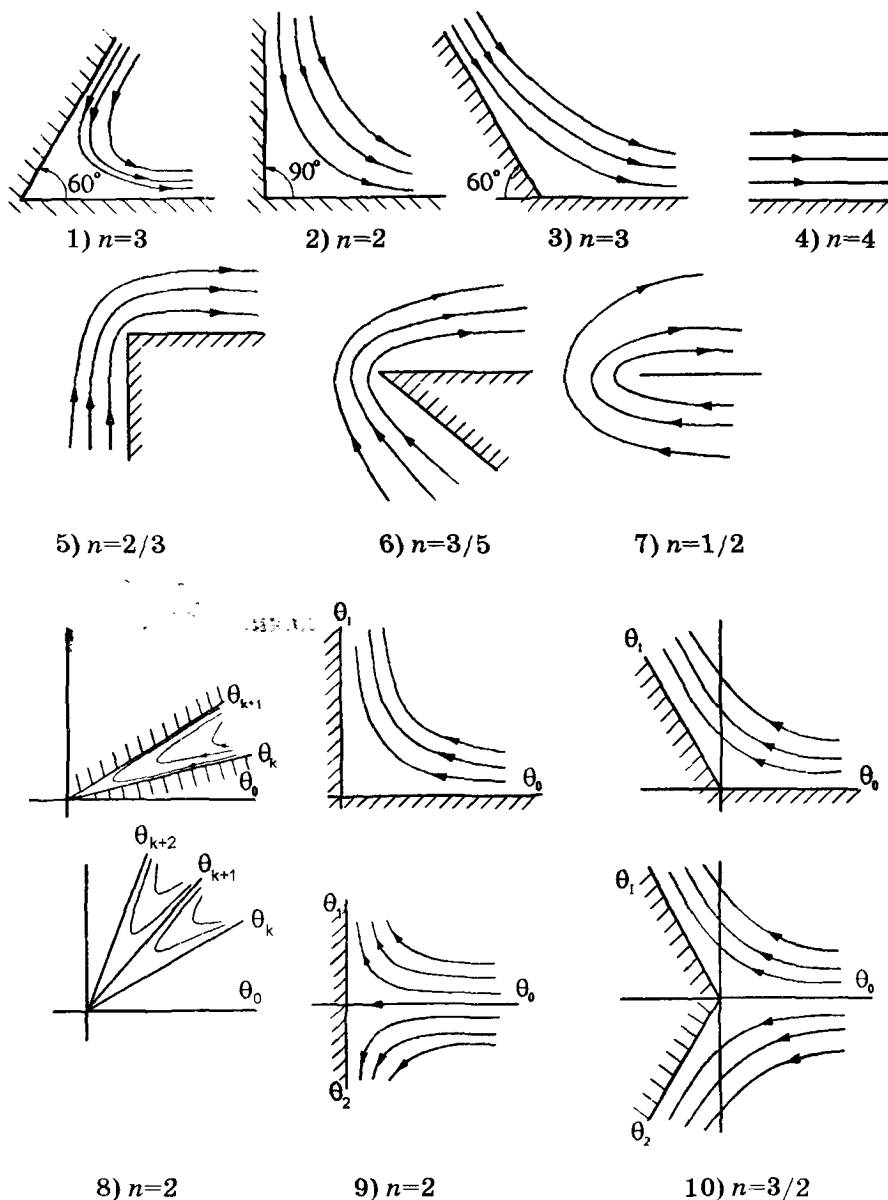


Рис. 3.16

При течениях во внутренних углах, больших $\frac{\pi}{2}$ и меньших π , т. е. когда $1 < n < 2$, а $\frac{\pi}{2} < \pi n < \pi$, такая «двойная» картина потоков существует лишь для углов раствора $\pi n = \frac{\pi}{2}$ и $\pi n = \frac{3\pi}{2}$, т. е. когда $n = \frac{k}{2}$, ($k=0, 1, 2, 3, 4$). Эти течения представлены на фиг. 9 и 10, рис. 3.16.

При обтекании внешних углов $\left(\frac{1}{2} < n < 1\right)$ существует лишь один поток, изображенный на фиг. 5–7 рис. 3.16.

Комплексная сопряженная скорость имеет величину

$$|\bar{v}| = |v| = |A| n r^{n-1}.$$

Таким образом, во всех случаях величина скорости постоянна на окружности с центром в вершине угла.

Однако, при $n > 1$ величина скорости в вершине угла ($r = 0$) обращается в нуль, а при $r \rightarrow \infty$ бесконечно возрастает; при $n = 1$ (однородный поток) величина скорости всюду равна $|A|$; при $1/2 \leq n < 1$ (обтекание внешнего угла) величина скорости в вершине угла обращается в бесконечность, а вдали от угла спадает до нуля.

Такие места, где возникают очень большие скорости, являются особыми не только для преобразования плоскостей z и $w(z)$, но и с точки зрения гидродинамики, поскольку в них возникают отрицательные давления и, следовательно, нарушается сплошность среды. Этот вопрос рассматривался в ч. 2, § 12 и в § 3.1 этой части, когда анализировалось явление кавитации.

Поскольку из интеграла Лагранжа для стационарных потоков у внешних углов следует: $p = p_\infty - \frac{\rho |v|^2}{2}$, где p_∞ — давление вдали от угла, то у вершин углов $\pi < \theta \leq 2\pi$ давление $p \rightarrow -\infty$ и переходит через давление парообразования.

Подобные точки должны исключаться из рассмотрения в рамках течения идеальной среды, исходя из действительной картины движения реальной жидкости. Поэтому, например, при рассмотрении обтекания контуров с угловыми точками вводятся дополнительные условия, так называемого, плавного обтекания, когда требуется, чтобы угловая точка была точкой схода струй потока (см. дальше постулат Жуковского-Чаплыгина): в этом случае величина скорости в ней становится конечной.

В связи с граничным условием на твердых контурах $\psi|_{C_k} = \text{const}$, вообще говоря, любую кривую $\text{Im } w(z) = \text{const}$ в случае аналитической функции $w(z)$ можно рассматривать как границу потока, т. е. как твердый контур (или его часть).

Так, например, для $w = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0)$ любые две прямые, исходящие из точки z_0 , можно рассматривать как твердые стенки, и тогда этот потенциал в области $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ и $0 < R = |z - z_0| < \infty$ будет описывать движение от источника (стока), расположенного в точке z_0 (см. рис. 3.17) внутри плоского угла $\theta_2 - \theta_1$.

Аналогично функция $w = A\sqrt{z}$, когда $\psi = A\sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ для каждого значения $\psi = \psi_0 = \text{const}$ дает параболу $r = 2\left(\frac{\psi_0}{A}\right)^2 (1 - \cos\theta)^{-1}$. Таким образом, поток для $\psi \geq \psi_0$ представляет собой течение у параболы с параметром $2\left(\frac{\psi_0}{A}\right)^2$, изображенное на рис. 3.18.

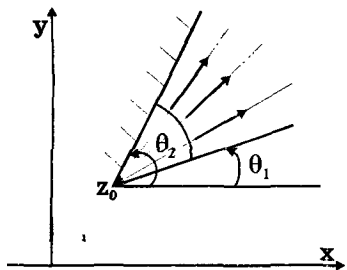


Рис. 3.17

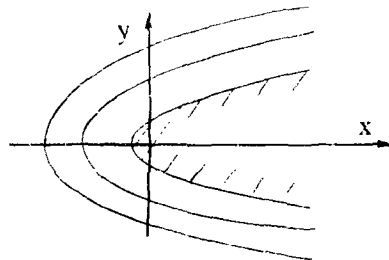


Рис. 3.18

8. Течение у отверстия в стенке. Рассмотрим функцию $z = chw$. Отделяя действительную и мнимую часть, имеем $x = bch\varphi\cos\psi$, $y = bsh\varphi\sin\psi$.

Линиями тока ($\psi = \text{const}$) служат гиперболы $\frac{x^2}{b^2 \cos^2 \psi} - \frac{y^2}{b^2 \sin^2 \psi} = 1$, а эквипотенциальные функции ($\varphi = \text{const}$) — определяют софокусные им эллипсы $\frac{x^2}{b^2 \text{ch}^2 \psi} + \frac{y^2}{b^2 \text{sh}^2 \psi} = 1$.

Общие фокусы этих кривых расположены в точках ($x = \pm b$, $y = 0$) (см. рис. 3.19). Любая пара этих кривых (например, MN и $M'N'$) может быть принята за твердые стенки гиперболических цилиндров (заштрихованы на рисунке); тогда остальные, находящиеся снаружи, определяют поток среды через отверстие между цилиндрами. В предельном случае, когда гиперболы вырождаются в отрезки оси x -ов ($\psi = 0$, $\psi = \pi$), получаем перетекание жидкости через отверстие в стенке шириной $2b$ с одной стороны стенки на другую. Здесь обтекаются острые кромки, где скорость потока стано-

вится бесконечной. Действительно, $\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{b \operatorname{sh} w}$, но из $\operatorname{ch}(\varphi + i\psi) = \frac{x + iy}{b}$ следует, что в точках $x = \pm b, y = 0$ потенциал $w = 0$, ($\psi = 0, \varphi = 0$;) ($\psi = \pi, \varphi = 0$) так что в них $\bar{v} = \infty$.

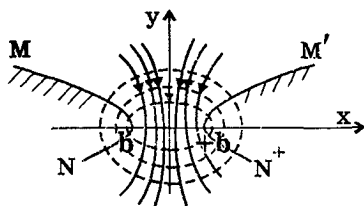


Рис. 3.19

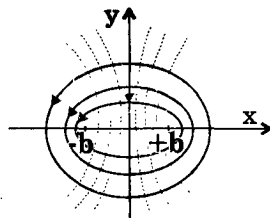


Рис. 3.20

Если рассмотреть функцию $z = b \operatorname{ch} w = b \cos w$, где $x = -b \cos \varphi \operatorname{ch} \psi$, $y = -b \sin \varphi \operatorname{sh} \psi$, то линии тока и эквипотенциальные линии из предыдущего примера $z = z(w)$ поменяются местами. Эта функция может быть соотнесена потоку жидкости, вращающейся вокруг любого из неподвижных эллипсов (в пределе у пластинки $(-b, +b)$ (см. рис. 3.20)) или внутри этого эллипса (эллиптического цилиндра).

Гидродинамические особенности в однородном потоке. Обтекание кругового цилиндра

Исходя из свойств аддитивности комплексного потенциала, можно строить сложные (составные) гидродинамические потоки, — т. е. образованные сложением

простейших потоков, поскольку их потенциал будет равен сумме комплексных потенциалов слагаемых потоков. Приведем несколько примеров таких «сложных» потоков.

1. *Источник и сток равной по величине мощности.* Пусть однородный поток имеет скорость v_∞ , направленную по оси x , а источник и сток мощностью Q расположены в точках $x = \pm x_0, y = 0$ (см. рис. 3.21). Тогда суммарный поток имеет потенциал ($Q > 0$):

$$w = w_1 + w_2 + w_3 = |v_\infty| z + \frac{Q}{2\pi} \ln(z + x_0) - \frac{Q}{2\pi} \ln(z - x_0) = |v_\infty| z + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{z + x_0}{z - x_0}.$$

При этом $\bar{v} = |v_\infty| + \frac{Q}{2\pi} \left(\frac{1}{z+x_0} - \frac{1}{z-x_0} \right) = |v_\infty| - \frac{Qx_0}{\pi(z^2 - x_0^2)}$.

Координаты z_* критических точек, где $v = 0$, определяются из уравнения

$$|v_\infty| - \frac{Qx_0}{\pi(z^2 - x_0^2)} = 0.$$

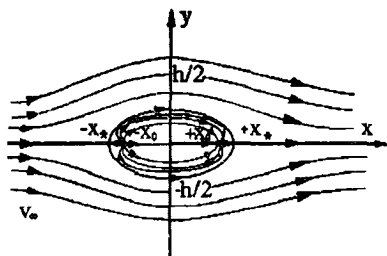


Рис. 3.21

Отсюда имеем $x_* = \pm x_0 \sqrt{1 + \frac{2}{\varepsilon}}$, $y_* = 0$,

где $\varepsilon = \frac{2\pi|v_\infty|x_0}{Q}$.

Функция тока составного потока имеет вид

$$\psi = |v_\infty|y + \frac{Q}{2\pi} (\arg(z+x_0) - \arg(z-x_0)).$$

Введем безразмерные координаты $y' = \frac{y}{x_0}$, $x' = \frac{x}{x_0}$, так что в этих координатах имеем

$$\psi = y' + \frac{1}{\varepsilon} (\arg(z'+1) - \arg(z'-1)); x_* = \pm \sqrt{1 + \frac{2}{\varepsilon}}.$$

Линия тока $\psi = 0$ включает ось x -ов и замкнутую линию тока, представляющую собой симметричный овал с уравнением

$$y' = \frac{1}{\varepsilon} (\arg(z'-1) - \arg(z'+1)). \quad (3.93)$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{tg} \varepsilon y' = \frac{2y'}{x'^2 + y'^2 - 1}. \quad (3.94)$$

Наибольший поперечный размер овала h' (при $x' = 0$ имеем $y' = \frac{h'}{2}$) является корнем трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon h'}{2} = \frac{h'}{(h'/2)^2 - 1}$.

При $\varepsilon \ll 1$ из (3.94) имеем

$$x'^2 + y'^2 - 1 = \frac{2y'}{\varepsilon y' + \frac{\varepsilon^3 y'^3}{3} + \dots} = \frac{2}{\varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon^2 y'^2}{3} + \dots \right)} = \frac{2}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 y'^2}{3} + O(\varepsilon^3) \right)$$

и с точностью до ε :

$$x'^2 + y'^2 \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon \right) = 1 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

В этом случае овал представляет собой эллипс с полуосями $\sqrt{1 + \frac{2}{\varepsilon}}$ (по оси x') и $\left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon \right)^{-1} \sqrt{1 + \frac{2}{\varepsilon}}$ по оси y' .

Поскольку ε мало, то эти полуоси мало отличаются друг от друга и значительно больше единицы; в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ овал вырождается в окружность бесконечно большого радиуса.

При $\varepsilon \gg 1$ точки x'_* приближаются к единице, $x_* \rightarrow x_0$, т. е. овал стягивается к местам расположения источника и стока и сплющивается к оси x' -ов. На рис. 3.22 показаны овалы для $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 10$.

Заметим, что в области $|x| \leq x_*$, $|y| \leq h/2$ рассматриваемый потенциал $w(z)$ соответствует потоку внутри твердого контура овальной формы от источника в точке $x = -x_0$ и стока в точке $x = +x_0$.

Таким образом, этим потенциалом можно описать не только обтекание бесконечного овального цилиндра потоком со скоростью \bar{v}_∞ , но и поток внутри бесконечно длинной трубы овального сечения от источников и стоков, равномерно распределенных по прямым $x = \pm x_0$, параллельным оси трубы.

2. Источник и равномерно распределенные по прямой стоки. Как было показано, поток от одного источника в однородном потоке дает незамкнутую линию тока, которая может рассматриваться как граница полубесконечного тела (см. задачу 1.3.1, ч. 2). Предыдущий пример дает картину обтекания овала, когда источник и сток равной по ве-

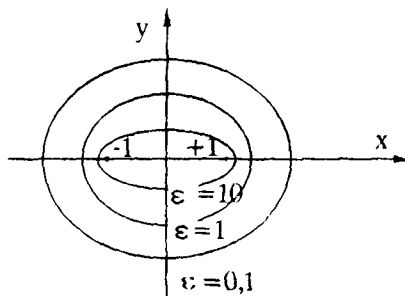


Рис. 3.22

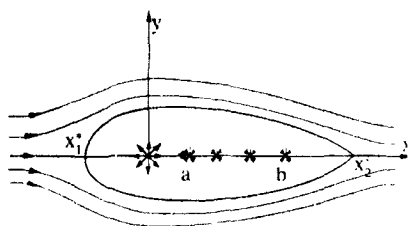


Рис. 3.23

личине мощности помещены в однородный поток. Рассмотрим составное течение от источника и равномерно распределенных по прямой стоков, помещенных в однородный поток, суммарная мощность которых равна мощности источника (см. рис. 3.23). Комплексный потенциал такого сложного потока имеет вид

$$w = |\bar{v}_\infty| z + \frac{Q}{2\pi} \ln z - \frac{Q}{2\pi(b-a)} \int_a^b \ln(z-\zeta) d\zeta. \quad (3.95)$$

Здесь однородный поток со скоростью \bar{v}_∞ направлен по оси x -ов; источник мощностью Q находится в начале координат, а стоки с линейной интенсивностью $-Q(b-a)$ равномерно распределены на отрезке (a, b) оси x .

После интегрирования получаем из (3.95)

$$w(z) = |\bar{v}_\infty| z + \frac{Q}{2\pi} \left\{ \ln z + \frac{1}{b-a} \left[(z-b) \ln(z-b) - (z-a) \ln(z-a) \right] \right\}. \quad (3.96)$$

Комплексная сопряженная скорость

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = |\bar{v}_\infty| + \frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{b-a} \ln \frac{z-b}{z-a} \right\}$$

обращается в нуль в точках x_1^* и x_2^* на оси x , координаты которых являются корнями уравнения

$$|\bar{v}_\infty| + \frac{Q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{x^*} + \frac{1}{b-a} \ln \frac{x^*-b}{x^*-a} \right\} = 0.$$

Значения x_1^* и x_2^* могут быть определены численным методом. При этом сказывается, что $x_1^* < 0$, а $x_2^* > b > a$.

Функция тока комплексного потенциала (3.96) имеет вид

$$\psi(x, y) = |\bar{v}_\infty| y \left\{ 1 + \frac{Q}{2\pi |\bar{v}_\infty|} \left[\frac{\arg z}{y} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{x-b}{y} \arg(z-b) - \frac{x-a}{y} \arg(z-a) + \ln \left| \frac{z-b}{z-a} \right| \right) \right] \right\}.$$

Линия тока $\psi(x, y) = 0$ включает ось x -ов ($y = 0$) и кривую $\left(\varepsilon = \frac{Q}{2\pi |\bar{v}_\infty|} \right)$

$$\psi_1(x, y) = 1 + \varepsilon \left\{ \frac{\arg z}{y} + \frac{1}{b-a} \left(\frac{x-b}{y} \arg(z-b) - \frac{x-a}{y} \arg(z-a) + \ln \left| \frac{z-b}{z-a} \right| \right) \right\} = 0,$$

которая проходит через критические точки $(x_{1*}, 0)$ и $(x_{2*}, 0)$. Эта кривая имеет вид симметричного удобообтекаемого профиля (см. рис. 3.23).

Исследуя свойства этой кривой, можно показать, что в задней критической точке радиус кривизны этой кривой конечен при любых значениях параметра ε , хотя и уменьшается при увеличении ε .

3. *Диполь и вихрь в однородном потоке. Обтекание кругового цилиндра.* Этот пример наиболее важен в приложениях, поэтому остановимся на нем более подробно.

Пусть в направленном по оси x однородном потоке расположены в начале координат вихрь и диполь, у которого вектор момента направлен против потока. Суммарное движение описывается потенциалом

$$w = |v_\infty| z + \frac{m}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Функция тока течения имеет вид

$$\psi = |v_\infty| y - \frac{my}{2\pi(x^2 + y^2)} - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Введем величину R при помощи равенства $m = 2\pi R^2 |v_\infty|$. Тогда функция тока, на которой $\psi = \psi_0 \equiv -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$, описывается уравнением

$$y - \frac{R^2}{x^2 + y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi |v_\infty|} \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{R} = 0$$

и включает окружность $x^2 + y^2 = R^2$ $\left(R = \sqrt{\frac{m}{2\pi |v_\infty|}} \right)$.

Потенциал скорости потока имеет вид

$$\varphi = |v_\infty| x + \frac{m}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = |v_\infty| x \left(1 + \frac{R^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Хотя функция тока однозначна, но φ в неодносвязной области вне круга с радиусом R представляет собой неоднозначную функцию, причем циклическая постоянная κ_Γ равна $\oint_C \nabla \varphi \cdot d\mathbf{L} = \Gamma$, где C — любая замкнутая кривая, охватывающая круг (в том числе и его окружность).

Действительно, в полярных координатах $\varphi = |v_\infty| \cos \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$,

так что

$$\nabla \varphi = \mathbf{i}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \mathbf{i}_r \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) |v_\infty| \cos \theta + \left[-|v_\infty| \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right] \mathbf{i}_\theta,$$

и интеграл от $\nabla \varphi$ по окружности с радиусом $r (\geq R)$ равен

$$\kappa_\Gamma = \int_0^{2\pi} \left[-|v_\infty| \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right] r d\theta = \Gamma.$$

Окружность с радиусом R разбивает поток на две области:

1) $r \leq R$ — течение внутри окружности от диполя с моментом $m = 2\pi R^2 |v_\infty|$ и от вихря интенсивностью Γ , расположенных в начале координат; потенциал этого потока равен

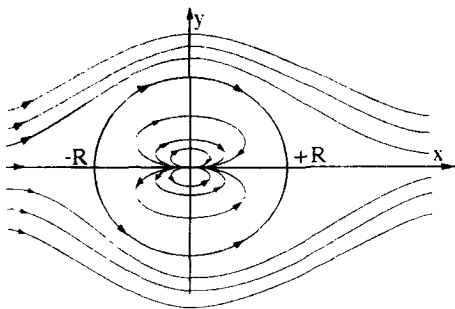


Рис. 3.24

$$w(z) = \frac{m}{2\pi R^2} \left(z + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Линия тока $\psi = \psi_0 \equiv -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$ вклю-

чает окружность с радиусом R .

Остальные линии тока могут быть построены на основании уравнения :

$$\psi = \frac{my}{2\pi R^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.}$$

Их симметричный относительно оси x вид (при $\Gamma = 0$) показан на рис. 3.24, а при $\Gamma \neq 0$ они деформируются так, как показано на рис. 3.25.

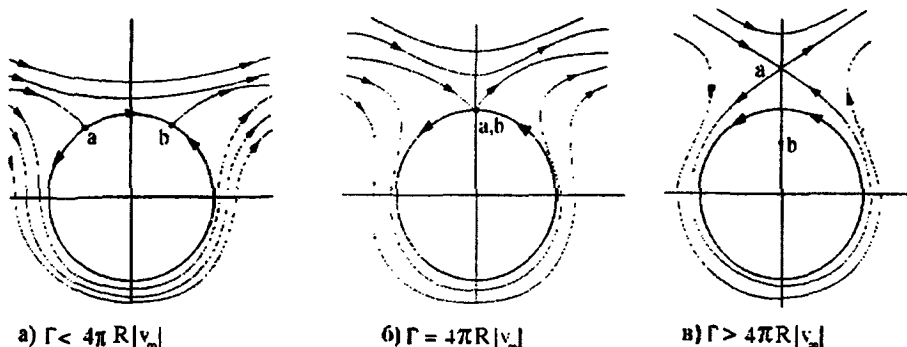


Рис. 3.25

2) $r \geq R$ — течение вне окружности, образуемое однородным потоком со скоростью $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{i}_x |v_\infty|$ и циркуляционным (но безвихревым!) потоком от вихря, помещенного в центре цилиндра, так что функция тока от него имеет вид

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

а все потенциальное течение от этого вихря рассматривается при $\sqrt{x^2 + y^2} > R$.

Для этого потока вид $v(z)$ и $\psi(x, y)$ таков же, как и для потока в области $r \leq R$.

Линия тока $\psi = \psi_0$ также включает окружность с радиусом R . Вид линий тока при $\Gamma \neq 0$ на рис. 3.25 указан для характерных соотношений между параметрами потока, определяющих положение критических точек потока.

Из уравнения

$$\frac{dw}{dz} = \bar{v} = |v_\infty| \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi iz} = 0$$

имеем квадратное уравнение для определения координат критических точек, а именно

$$z^2 + \frac{\Gamma}{2\pi i |v_\infty|} z - R^2 = 0.$$

Выкладки показывают, что

1) при $\Gamma < 4\pi R|v_\infty|$ корни этого уравнения комплексные и критические, точки a и b расположены на окружности симметрично относительно оси y (см. рис. 3.25, а),

$$z = \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2|v_\infty|^2}} + \frac{\Gamma}{4\pi|v_\infty|}i;$$

2) при $\Gamma = 4\pi R|v_\infty|$ критические точки совпадают на окружности (см. рис. 3.25, б);

3) при $\Gamma > 4\pi R|v_\infty|$ оба корня квадратного уравнения мнимые, но лишь одна критическая точка располагается в потоке, а вторая — внутри круга; здесь величина скорости на цилиндре от вихря ($\Gamma/2\pi R$) больше скорости от однородного потока ($2|v_\infty|$), так что частицы движутся после критической точки a вспять основному потоку (см. рис. 3.25, в).

Найдем силу, действующую со стороны потока на цилиндр. Для закона распределения давления по цилиндру воспользуемся интегралом Бернулли, найдя предварительно значение скорости на цилиндре. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}|_{z=Re^{i\theta}} &= \frac{dw}{dz}\bigg|_{z=Re^{i\theta}} = |v_\infty|(1 - e^{-2i\theta}) + \frac{\Gamma}{2\pi i R}e^{-i\theta} = \\ &= ie^{-i\theta}\left(2|v_\infty|\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Из интеграла Бернулли $p = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2}\left(1 - \frac{|v|^2}{|v_\infty|^2}\right)$, для принятого в тех-

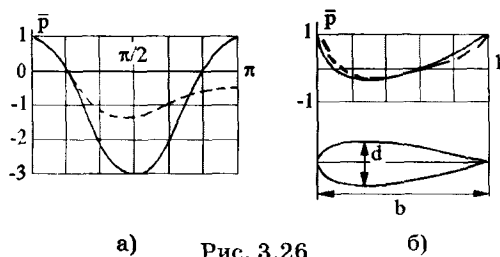
нической гидромеханике коэффициента давления $\bar{p} \equiv \frac{p - p_\infty}{(1/2)\rho|v_\infty|^2}$ на по-

верхности цилиндра имеем

$$\bar{p} = 1 - \left(2\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi R|v_\infty|}\right)^2.$$

Рассмотрим, насколько величина \bar{p} соответствует данным эксперимента (графики заимствованы из [7]).

Поскольку величина Γ неизвестна и трудно воспроизводится в эксперименте, сравнивались теоретические и экспериментальные значения для бесциркуляционного обтекания (см. рис. 3.26, а). Как видно из графиков, удовлетворительное совпадение эксперимента, (пунктирная кривая) и теории наблюдается лишь в передней части цилиндра $|\theta| < \pi/6$, где $\bar{p} > 0$; там где давление начинает понижаться, плавность, безотрывность обтекания нарушаются — разрушается пограничный слой и за цилиндром образуется область, так называемого следа, заполненная турбулизированным потоком с отдельными сорвавшимися вихрями (см. § 3.3). Цилиндр относится к плохо обтекаемым телам, но в случае хорошо обтекаемых тел, в частности, тел каплевидной формы, согласование теории с экспериментом значительно лучше. Это представлено на графике (рис. 3.26, б), где дано экспериментальное (пунктиром) и теоретическое значения \bar{p} для одного из семейств симметричных профилей (относительная толщина 15 %; контур профиля дан в нижней части рисунка).



а) Рис. 3.26

б)

Зная \bar{p} , нетрудно вычислить силу, действующую на цилиндр

$$\mathbf{P} = - \int_0^{2\pi} p \mathbf{n} R d\theta = - \frac{\rho |v_\infty|^2}{2} R \int_0^{2\pi} \bar{p}(\theta) \mathbf{n} d\theta.$$

Компоненты силы равны

$$P_x = - \frac{\rho |v_\infty|^2}{2} R \int_0^{2\pi} \bar{p}(\theta) \cos \theta d\theta = 0,$$

$$P_y = - \frac{\rho |v_\infty|^2}{2} R \int_0^{2\pi} \bar{p}(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{\rho |v_\infty|^2}{2} R \int_0^{2\pi} 2 \frac{\Gamma}{\pi R |v_\infty|} \sin^2 \theta d\theta = \rho |v_\infty| \Gamma.$$

Таким образом, при циркуляционном обтекании цилиндра, сила сопротивления P_x равна нулю, но возникает поперечная сила (подъемная сила), равная в соответствии с теоремой Жуковского $P_y = \rho |v_\infty| \Gamma$.

Циркуляционные движения в реальной вязкой жидкости можно наблюдать у вращающихся тел, вовлекающих в круговое движение реаль-

ную (вязкую) жидкость. Эффект возникновения боковой силы известен как эффект Магнуса. На практике он наблюдается в виде изменения траектории вращающихся артиллерийских снарядов, отклонения траекторий полета сильно закрученных мячей и др. Была предпринята попытка даже создания тяги у судов путем вращения больших цилиндров (роторов Флетнера). Если же не выходить из рамок теории потоков невязкой жидкости, то значение циркуляции Γ остается неопределенным.

Если центр окружности с радиусом R располагается в точке z_0 , а вектор \mathbf{v}_∞ составляет с действительной осью угол α_∞ ($\bar{v}_\infty = |v_\infty| e^{-i\alpha_\infty}$, $v_\infty = |v_\infty| e^{i\alpha_\infty}$), то комплексный потенциал течения у такого цилиндра имеет вид

$$w(z) = \bar{v}_\infty (z - z_0) + v_\infty \frac{R^2}{z - z_0} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0). \quad (3.98)$$

При этом

$$\begin{aligned} \varphi = & \left[v_{\infty x} (x - x_0) + v_{\infty y} (y - y_0) \right] \left(1 + \frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \arg(z - z_0), \\ \psi = & \left[v_{\infty y} (y - y_0) - v_{\infty x} (x - x_0) \right] \left(1 - \frac{R^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \right) - \\ & - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

В полярных координатах имеем

$$\varphi = |v_\infty| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \cos(\theta + \alpha_\infty) \left(1 + \frac{R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad (3.100)$$

$$\psi = |v_\infty| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \sin(\theta - \alpha_\infty) \left(1 - \frac{R^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|,$$

где θ — полярный угол вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$, проведенного из центра круга, причем \mathbf{r} — радиус-вектор точки в потоке, \mathbf{r}_0 — центра окружности.

Рассмотренные примеры показывают, что комбинации слагаемых комплексных потенциалов можно подобрать так, чтобы получились замкнутые линии токов суммарного потока, которые можно рассматривать как контуры обтекаемых твердых тел. Эти контуры могут быть весьма любопытными, но с точки зрения непосредственного использования в практике — часто бесполезными.

Гораздо важнее прямая задача: *найти комплексный потенциал потока у заданного контура C* . Один из наиболее распространенных методов решения этой задачи состоит в применении конформного отображения потока у этого контура на область такого потока, потенциал которого известен. Эти вопросы рассмотрены в следующем параграфе этой главы.

Теорема Милна-Томсона В 1940 г. Милн-Томсон опубликовал довольно общую теорему, которая позволяет решить ряд задач [19].

Теорема. *Если в безграничный поток с комплексным потенциалом $w_0(z)$ поместить окружность C_a с центром в начале координат и радиусом a , то комплексный потенциал $w(z)$ нового течения имеет вид*

$$w(z) = w_0(z) + \bar{w}_0\left(\frac{a^2}{z}\right), \quad (3.100a)$$

причем предполагается, что все особенности функции $w_0(z)$ удалены от начала координат на расстояние, большее a .

Доказательство. Так как на окружности C_a

$$\left. \frac{a^2}{z} \right|_{C_a} = \frac{a^2}{ae^{i\theta}} = ae^{-i\theta} = \bar{z} \Big|_{C_a},$$

то

$$\operatorname{Im} w(z) \Big|_{C_a} = \operatorname{Im} w_0(z) \Big|_{C_a} + \operatorname{Im} \bar{w}_0(\bar{z}) \Big|_{C_a} = a.$$

Таким образом, окружность C_a является функцией тока течения, определяемого потенциалом $w(z)$.

Далее, поскольку — по предположению — все особые точки $w_0(z)$ находятся вне окружности C_a , то особые точки $\bar{w}(a^2/z)$ расположены внутри

C_a (точки $|z| > a$ соответствуют точкам $\left|\frac{a^2}{z}\right| < a$). Поэтому, функция

$w(z)$ имеет те же особенности, что и $w_0(z)$, а поскольку показано, что $\text{Im } w(z)|_{C_a} = a$, то $w(z)$ — комплексный потенциал суммарного потока.

Простейшим примером применения этой теоремы является потенциал обтекания окружности, когда $w_0(z) = \bar{v}_\infty z$ (однородный поток), а $\bar{w}_0(a^2/z) = v_\infty a^2/z$, так что

$$w(z) = w_0(z) + \bar{w}_0\left(\frac{a^2}{z}\right) = \bar{v}_\infty z + v_\infty \frac{a^2}{z}$$

(сравн. 3.98 при $z_0 = \Gamma = 0$, $a = R$).

Задачи с решениями

Задача 3.2.1. Построение линий тока сложного потока по линиям тока слагаемых потоков (графический прием Максвелла). Выяснить, какому условию должны удовлетворять $\Delta\psi_1$ и $\Delta\psi_2$, чтобы две пары смежных линий тока складываемых потоков $(\psi_1, \psi_1 + \Delta\psi_1, \psi_2, \psi_2 + \Delta\psi_2)$ и пересекающихся под некоторым углом, давали элемент $\Delta\psi$ линии тока сложного потока ($\psi = \psi_1 + \psi_2$) в виде диагонали криволинейных параллелограммов со сторонами $\Delta\psi_1$ и $\Delta\psi_2$ (см. рис. 3.27).

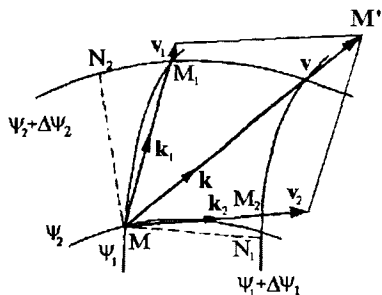


Рис. 3.27

Решение. Пусть k_1 , k_2 , и k — орты векторов v_1 , v_2 и v соответственно, направленных по сторонам MM_1 , MM_2 и диагонали MM' ячейки, образованной двумя парами смежных линий тока. Исходя из того, что $v = v_1 + v_2$, имеем

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 = kv$$

или

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{MM_1}} v_1 + \frac{\overline{MM_2}}{\overline{MM_2}} v_2 = kv.$$

Поскольку, $MN_1 \cdot v_1 = \Delta\psi_1$, $MN_2 \cdot v_2 = \Delta\psi_2$ — расходы жидкости между смежными линиями тока слагаемых потоков, причем MN_1 и MN_2 — высоты параллелограмма, $MM_1 M' M_2$ то из предыдущего соотношения имеем

$$\frac{\overrightarrow{MM_1}}{MM_1 \cdot MN_1} \Delta\psi_1 + \frac{\overrightarrow{MM_2}}{MM_2 \cdot MN_2} \Delta\psi_2 = kv.$$

Так как $MM_1 \cdot MN_1 = MM_2 \cdot MN_2$ — площадь параллелограмма, то отсюда имеем

$$\overrightarrow{MM_1} \Delta\psi_1 + \overrightarrow{MM_2} \Delta\psi_2 = \overrightarrow{MM'} \frac{v \cdot MM_1 \cdot MN_1}{MM'} = \overrightarrow{MM'} \frac{v \cdot MM_2 \cdot MN_2}{MM'}.$$

Из подобия векторного параллелограмма и параллелограмма $MM_1M'M_2$ получаем

$$\frac{v}{MM'} = \frac{v_1}{MM_1} = \frac{v_2}{MM_2},$$

так что

$$\frac{v \cdot MM_2}{MM'} = v_2; \quad \frac{v \cdot MM_1}{MM'} = v_1.$$

Тогда, учитывая $v_1 \cdot MN_1 = \Delta\psi_1$; $v_2 \cdot MN_2 = \Delta\psi_2$, имеем

$$\overrightarrow{MM_1} \Delta\psi_1 + \overrightarrow{MM_2} \Delta\psi_2 = \overrightarrow{MM'} \Delta\psi_1 = \overrightarrow{MM'} \Delta\psi_2.$$

Отсюда, чтобы из $v = v_1 + v_2$ следовало $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2}$ необходимо и достаточно выполнение равенства $\Delta\psi_1 = \Delta\psi_2$. Это условие, конечно, не означает, что ячейки должны быть равносторонними: все зависит от вида функций $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$.

Задача 3.2.2. Метод отражения. Определить течение от источника мощностью Q , расположенного на оси x в точке $x = a$, у твердой стенки $x = 0$ (см. рис. 3.28). Найти давление потока от источника на стенку.

Решение. Эту задачу можно решить, если использовать решение задачи о потенциале двух источников равной мощности, расположенных в точках $x = \pm a$, а именно

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z+a)(z-a) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z^2 - a^2). \quad (1)$$

В этом потоке есть линия тока $x = 0$.

Таким образом, если рассматривать этот комплексный потенциал в полуплоскости $x > 0$, то это и будет искомое решение задачи. Для нее имеем

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{Q}{\pi} \frac{z}{z^2 - a^2},$$

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln|z^2 - a^2|, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \left(\arctg \frac{y}{x+a} + \arctg \frac{y}{x-a} \right)$$

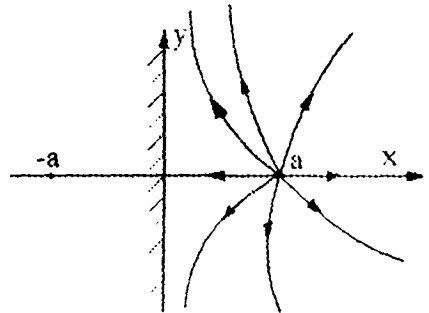


Рис. 3.28

или

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{(x^2 - y^2 - a^2 - 2xy)(x^2 - y^2 - a^2 + 2xy)}, \quad x^2 - y^2 - a^2 = 2xy \operatorname{tg} \frac{2\pi\psi}{Q}.$$

Это решение можно интерпретировать, как полученное *методом отражения*: суммарный поток у стенки получен как сумма источника и его отражения в стенке, как в зеркале.

Критическая точка потока $z = 0$, а обе оси координат являются линиями тока (для $\psi = Q/2$ получаем $x = 0$, для $\psi = 0$ имеем $y = 0$).

Согласно уравнению Бернулли имеем на стенке ($x = 0$)

$$\frac{p}{\rho} = -\Pi - \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 = -\Pi - \frac{Q^2}{2\pi^2} \frac{y^2}{(y^2 + a^2)^2},$$

где Π — потенциал массовых сил ($\mathbf{f} = -\nabla\Pi$).

Сила давления на стенку от источника выражается интегралом, представляющим собой избыточную (по сравнению с состоянием покоя) силу:

$$P = -\int_{-\infty}^{+\infty} (p + \rho\Pi) dy = \frac{pQ^2}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{(y^2 + a^2)^2} dy = \frac{pQ^2}{4\pi a}.$$

При этом, наибольшая скорость на стенке достигается в точках $y = \pm a$.

Задача 3.2.3. В верхней полуплоскости ($y > 0$) в жидкости находится система источников и стоков с мощностями Q_1, Q_2, \dots, Q_n в точках z_1, z_2, \dots, z_n . Найти поток от них, если ось x -ов представляет собой твердую стенку.

Решение. Используя метод отражения (см. задачу 3.2.2), получаем комплексный потенциал искомого течения

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \ln(z - z_k)(z - \bar{z}_k).$$

Задача 3.2.4. В углу $\frac{\pi}{n}$ между двумя твердыми стенками в точке z_0 находится источник мощностью Q . Найти комплексный потенциал течения.

Решение. Пусть z — комплексная переменная в области течения. Перейдем в плоскость комплексного переменного $\zeta = z^n$. Поскольку $\arg \zeta = n \cdot \arg z$, то область угла переходит в верхнюю полуплоскость переменной ζ , где местоположение источника определяется координатой $\zeta_0 = z_0^n$. Комплексный потенциал потока в области переменной ζ согласно методу отражений записывается в виде

$$w(\zeta) = \frac{Q}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \bar{\zeta}_0),$$

а в области z — для течения в углу $\frac{\pi}{n}$ между двумя стенками — имеем

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z'' - z_0'') \overline{(z'' - z_0'')}.$$

Задача 3.2.5. Пусть в жидкости, заполняющей пространство вне цилиндра с радиусом a и центром в начале координат, в точку $(+b, 0)$ помещен источник мощностью Q , причем $b > a$. Найти комплексный потенциал течения от источника у цилиндра.

Решение. Согласно теореме Милна-Томсона об окружности (см. (3.100а)), имеем

$$w_0(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - b),$$

причем $b > 0$.

Поэтому, искомый потенциал имеет вид

$$w(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - b) + \frac{Q}{2\pi} \ln \overline{\left(\frac{a^2}{z} - b \right)}$$

Задача 3.2.6. Написать комплексный потенциал течения в правой полуплоскости $x > 0$ у стенки $x = 0$, образованного диполем с моментом m ($m_x = m \cos \alpha$), расположенным в точке z_0 .

Решение. Поскольку диполь представляет собой предельный случай системы источников, то, применяя метод отражения, имеем искомый потенциал течения

$$w(z) = -\frac{me^{i\alpha}}{2\pi(z - z_0)} + \frac{me^{-i\alpha}}{2\pi(z + \bar{z}_0)},$$

ибо у отраженного диполя угол, который составляет вектор момента с осью x равен $\pi - \alpha$ (см. рис. 3.29).

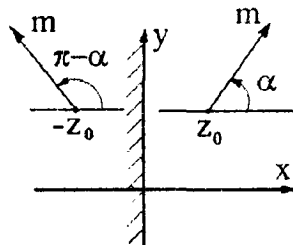


Рис. 3.29

Упражнения

1. Показать, что функция $\varphi = C(x^2 - y^2)$ может служить потенциалом скорости двумерного потока во внутреннем углу $\alpha = \pi/2$. Найти уравнения линий тока.

2. Для течения с потенциалом скорости $\varphi = ax + \frac{bx}{x^2 + y^2}$ найти функцию тока. Показать, что одна из линий тока образует окружность с радиусом \sqrt{b} .

3. Исследовать течения, заданные комплексными потенциалами $w = a \ln(z - z^{-1})$, $w = e^z$, $z = w + e^w$.

4. Показать, что интеграл по любому замкнутому контуру $C: \oint_C \bar{v} dz = \Gamma + iQ$, где \bar{v} —

комплексная скорость, а $\Gamma = \oint_C v_x dx + v_y dy$, $Q = \oint_C v_x dy - v_y dx$.

5. Показать, что если M_1 и M_2 — точки на двух линиях тока $\psi(x, y) = \text{const}$, то

$$\psi(M_2) - \psi(M_1) = Q,$$

где Q — расход через любую кривую, соединяющую точки M_1 и M_2 .

Если эти точки находятся на двух разных эквипотенциальных кривых $\phi(x, y) = \text{const}$, то показать, что

$$\phi(M_2) - \phi(M_1) = \Gamma.$$

где Γ — циркуляция скорости по кривой, соединяющей точки M_1 и M_2 .

6. Показать, что комплексная сопряженная скорость от системы источников и стоков, находящихся в точках z_k в жидкости, занимающей полуплоскость $x > 0$, у стенки $x = 0$ имеет вид

$$\bar{v} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \frac{z - i y_k}{(z - z_k)(z + \bar{z}_k)}.$$

Указание: Использовать метод отражений (см. задачу 3.2.2.) относительно мнимой оси.

7. Вычислить силу P , действующую на стенки угла в потоке $w = az^n$ (см. пример 7 простейших гидродинамических течений) для различных n . При $n > 1$ рассмотреть конечную длину l сторон угла и выяснить зависимость $P(l)$. Показать, что при $n = 1$ эта сила равна нулю. При $\frac{1}{2} \leq n < 1$ исключить окрестность $(r > r_0)$ вершины угла и определить зависимость $P(r_0)$.

§ 3.3. Метод конформного отображения в задачах плавного обтекания замкнутых контуров

Основная идея использования конформных отображений в гидромеханике двумерных течений состоит в следующем.

Пусть в области D вне замкнутого контура (см. рис. 3.30) комплексного переменного $z = x + iy$ требуется найти комплексный потенциал $w(z)$, удовлетворяющий условиям

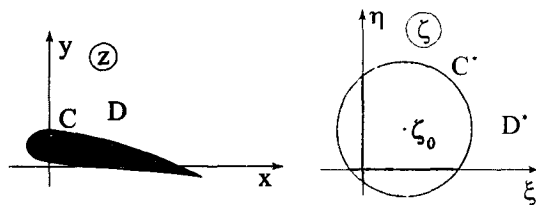


Рис. 3.30

$$\operatorname{Im} w(z)|_C = \text{const},$$

$$\left. \frac{dw}{dz} \right|_{z=\infty} = \bar{v}_\infty,$$

причем циркуляция скорости по контуру C может быть отличной от нуля, поскольку область D неодносвязна.

Отыскание комплексного потенциала $w(z)$ проводится путем конформного отображения области вне контура C на область D^* комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, вне некоторого контура C^* , являющегося отображением контура C , где комплексный потенциал $w^*(\zeta)$ известен, причем

$$\operatorname{Im} w^*(\zeta)|_{C^*} = \text{const}, \quad \left. \frac{dw}{dz} \right|_{C^*} = \bar{v}_\infty^*.$$

Отметим, что область z может содержать несколько замкнутых контуров C_1, C_2, \dots, C_n , так что связность области D увеличивается.

Отображение на внешность круга

В качестве контура C^* обычно выбирается окружность, обтекаемая однородным потоком, так что согласно (3.98)

$$w^*(\zeta) = \bar{v}_\infty^* (\zeta - \zeta_0) + v_\infty^* \frac{R^2}{\zeta - \zeta_0} + \frac{\Gamma^*}{2\pi i} \ln(\zeta - \zeta_0), \quad (3.101)$$

где ζ_0 — координаты центра окружности, R — ее радиус, $\Gamma^* = \oint_{C^*} \bar{v}^* d\zeta$ — циркуляция скорости по окружности.

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — аналитическая функция, осуществляющая преобразование области D в D^* , причем $\frac{d\zeta}{dz}$ отлична от нуля во всех точках. Тогда, как уже отмечалось, такое отображение будет конформным.

Согласно теореме Римана (см. § 3.2), чтобы $\zeta = \zeta(z)$ была определена единственным образом, необходимо задать соответствие двух точек в областях D и D^* и направления в этих точках. В качестве таких точек выберем бесконечно удаленные точки в D и D^* и будем считать, что в них направления не меняются, т.е.

$$\zeta(\infty) = \infty, \quad \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{\infty} = 1. \quad (3.102)$$

Покажем, что в этом случае функция $w(z)$, образующаяся при подстановке в $w^*(\zeta)$ отображающей функции, т.е. $w(z) = w^*(\zeta(z))$, является комплексным потенциалом потока в области D у контура C , так что $\text{Im } w(z)|_C = \text{const}$, причем $\Gamma = \Gamma^*$ и $\bar{v}_\infty^* = \bar{v}_\infty$.

Действительно, точкам z на окружности C соответствуют значения переменной ζ на контуре C^* , являющимся линией тока в области D^* , поэтому

$$\text{Im } w^*|_{\zeta \in C^*} = \text{const} = \text{Im } w^*(\zeta(z)) = \text{Im } w(z)|_{z \in C}.$$

Таким образом, $w(z)$ — комплексный потенциал потока в области D . В силу того же соответствия точек контуров C и C^* имеем

$$\Gamma^* = \oint_{C^*} \frac{dw^*}{d\zeta} d\zeta = \oint_{C^*} dw^*(\zeta) = \oint_C dw^*(\zeta(z)) = \oint_C dw(z) = \oint_C \frac{dw}{dz} dz = \Gamma.$$

Наконец, поскольку выполнены условия (3.102), то

$$\bar{v}_\infty^* = \left. \frac{dw^*}{d\zeta} \right|_{\infty} = \left. \frac{dw}{dz} \right|_{\infty} \left. \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\infty} = \bar{v}_\infty.$$

Таким образом, отыскиваемый комплексный потенциал $w(z)$ потока в области D , обтекающего заданный контур C , может быть записан в

$$w(z) = \bar{v}_\infty (\zeta(z) - \zeta_0) + v_\infty \frac{R^2}{\zeta(z) - \zeta_0} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(\zeta(z) - \zeta_0). \quad (3.103)$$

При этом скорость $\bar{v}(z)$ потока в любой точке области определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) &= \frac{dw(z)}{dz} = \frac{dw^*(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \bar{v}^*(\zeta(z)) \frac{d\zeta(z)}{dz} = \\ &= \left\{ \bar{v}_\infty - v_\infty \frac{R^2}{(\zeta(z) - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i (\zeta(z) - \zeta_0)} \right\} \frac{d\zeta(z)}{dz}. \end{aligned} \quad (3.104)$$

Таким образом, поставленная задача нахождения потенциала $w(z)$, определяющего поток жидкости у контура C , сведена к нахождению аналитической функции $\zeta = \zeta(z)$, конформно отображающей область D^* вне круга на область D вне контура C , а окружность C^* — в заданный контур C . Заметим, однако, что циркуляция вокруг обоих контуров, хотя и одинакова, но ее значение остается неопределенным.

Выясним некоторые важные свойства функции $\zeta(z)$.

Эта функция в силу условий (3.102) может быть записана в виде бесконечного ряда Лорана,

$$\zeta(z) = z + \frac{a'_{-1}}{z} + \frac{a'_{-2}}{z^2} + \dots = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a'_{-n}}{z^n}, \quad (3.105)$$

который обеспечивает ограниченность скорости во всей внешней по отношению к контуру C области.

Поскольку преобразование областей взаимнооднозначное, то, учитывая (3.105), можно написать обратную функцию, переводящую область D^* в D , которая также аналитична и имеет выражение

$$z(\zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{\zeta^n}. \quad (3.106)$$

Вид этих функций позволяет, в частности, вычислить значение скорости \bar{v} на контуре C . Из (3.104) имеем

$$\bar{v}(z)|_{z \in C} = \bar{v}^*(\zeta)|_{\zeta \in C^*} \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z \in C}. \quad (3.107)$$

При этом, поскольку на окружности $\zeta - \zeta_0 = R e^{i\theta}$, то дифференцируя (3.101), получаем

$$\bar{v}^*(\zeta)|_{\zeta=C^*} = \bar{v}_\infty - v_\infty e^{-2i\theta} - \frac{\Gamma}{2\pi i R} e^{-i\theta}, \quad (3.108)$$

где $\theta = \arg(\zeta - \zeta_0)|_{\zeta \in C^*}$.

Из (3.107) следует, что критические точки на окружности ($\zeta = a$, $\zeta = b$), где скорость равна нулю ($\bar{v}^*(a) = \bar{v}^*(b) = 0$) переходят в критические точки на контуре $C(z = A, z = B)$, где $\bar{v}(A) = \bar{v}(B) = 0$, если только эти точки контура не являются особыми точками преобразования, т. е. если

$$\left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=A} \neq \infty, \quad \left. \frac{d\zeta}{dz} \right|_{z=B} \neq \infty.$$

Особые точки конформного отображения

Особыми точками конформного преобразования являются угловые точки и точки возврата контура C . Действительно, пусть точка M

на контуре C является угловой, (см. рис. 3.31) так что угол между касательными в ней равен δ (при $\delta = 0$ эта точка является точкой возврата).

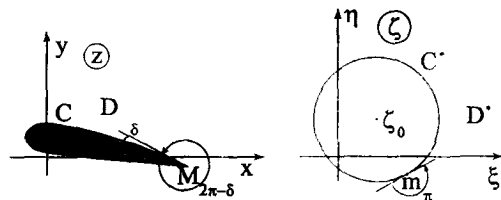


Рис. 3.31

Пусть m — изображение M на окружности C^* . В этих точках нарушается конформность преобразования, поскольку угол π у точки m переходит в угол $2\pi - \delta$ у точки M . В окрестности функции $\zeta(z)$ может быть представлена в виде

$$\zeta - \zeta_m = N(z - z_M)^{\frac{\pi}{2\pi - \delta}} + \dots, \quad (3.109)$$

где N действительное число, следовательно, $\arg(\zeta - \zeta_m) = \frac{\pi}{2\pi - \delta} \arg(z - z_M)$,

так что изменению угла между касательными к C^* у точки m на π отвечает изменение угла на $2\pi - \delta$ у точки M .

Тогда в окрестности точки M имеем

$$\frac{d\zeta}{dz} = N_1(z - z_M)^{\frac{\delta - \pi}{2\pi - \delta}} + \dots \quad (3.110)$$

и, поскольку $\delta < \pi$, то, следовательно,

$$\frac{d\zeta}{dz} \rightarrow \infty \text{ при } z \rightarrow M.$$

В этом случае

$$\bar{v}(M) = \bar{v}^*(m) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_M \rightarrow \infty, \quad (3.111)$$

если только $\bar{v}^*(m) \neq 0$.

Бесконечно большая скорость в угловой точке M соответствует ранее рассмотренной картине обтекания внешнего угла (см. в § 3.2 пример комплексного потенциала $w = az^n$ при $n < 1$). Так что, если поток перетекает через угловую точку с одной стороны контура на другую (см. рис. 3.32),

то у точки M возникают очень большие (теоретически бесконечно большие) скорости. Это приводит к бесконечно большим отрицательным давлениям, что нарушает сплошность среды, совершенно меняет реальную картину

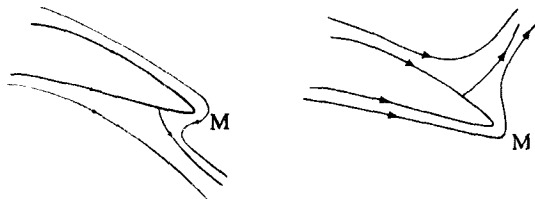


Рис. 3.32

обтекания (срывы потока, образование вихрей и др.): происходит, как говорят, нарушение условий плавного (безотрывного) обтекания и кризис всей теоретической схемы.

Избежать нарушения безотрывного обтекания в угловой точке профиля можно, если предположить, что она является отображением критической точки круга, т. е. $\bar{v}^*(m) = 0$. Тогда на основании (3.107) можно считать, что $\bar{v}(M)$ будет конечной величиной.

Действительно, из выражения (см. (3.101))

$$\frac{dw^*}{d\zeta} = \bar{v}^*(\zeta) = \bar{v}_\infty - v_\infty \frac{R^2}{(\zeta - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i(\zeta - \zeta_0)}$$

следует, что в окрестности точки $\zeta = m$ функцию $\bar{v}^*(\zeta)$ можно разложить в ряд Тейлора вида

$$\bar{v}^*(\zeta) = C_1(\zeta - \zeta_m) + C_2(\zeta - \zeta_m)^2 + \dots$$

Тогда, подставляя это разложение в (3.107) и учитывая (3.109) и (3.110), имеем для представления $\bar{v}(z)$ в окрестности точки $z = M$:

$$\begin{aligned}\bar{v}(z) &= (C_1(\zeta - \zeta_m) + \dots) \left(N_1(z - z_M)^{\frac{\delta - \pi}{2\pi - \delta}} + \dots \right) = \\ &= \left(C_1 N(z - z_M)^{\frac{\pi}{2\pi - \delta}} + \dots \right) \left(N_1(z - z_m)^{\frac{\delta - \pi}{2\pi - \delta}} + \dots \right) = \\ &= D(z - z_M)^{\frac{\delta}{2\pi - \delta}} (1 + O(z - z_m)),\end{aligned}$$

где D — постоянная.

Таким образом, если угловая точка M контура является изображением критической точки m на круге, то

$$\bar{v}(M) = \text{const, если } \delta = 0; \bar{v}(M) = 0, \text{ если } \delta > 0. \quad (3.112)$$

Постулат Жуковского-Чап- лыгина и определение значе- ния циркуляции. Первая ось профиля

Это обстоятельство явилось основанием для постулата Жуковского-Чаплыгина, предло- женного в качестве опытного факта С.А. Чап- лыгиным в 1909 г. по докладу Н.Е. Жу- ковского. Этот постулат можно сформулировать следующим образом.

Среди, всех теоретически возможных плавных безотрывных безвих- ревых потоков у профиля с угловой точкой на задней кромке в реальнос- ти (в рамках идеальной несжимаемой среды) осуществляется тот, ко- торый имеет, конечную скорость в угловой точке.

Это возможно, как было показано выше, лишь в том, случае, если уг- ловая точка является точкой схода струй, т.е. изображением одной из критических точек на отображенном круге.

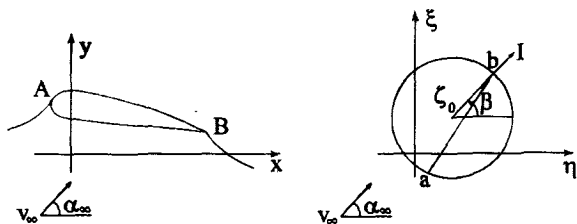


Рис. 3.33

Принятие постулата Жу- ковского-Чаплыгина позволяет однозначно определить значе- ние циркуляции Γ .

Действительно, пусть уг- ловая точка B на контуре C пе- реходит в точку b на окружно- сти C^* (см. рис. 3.33).

Тогда условием того, что b — критическая точка на круге, является уравнение

$$\bar{v}^*(\zeta_b) = \bar{v}_\infty - v_\infty \frac{R^2}{(\zeta_b - \zeta_0)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i (\zeta_b - \zeta_0)} = 0.$$

Отсюда, в силу $\zeta_b - \zeta_0 = R e^{i\beta}$, имеем

$$|v_\infty| e^{-i\alpha_\infty} - |v_\infty| e^{i\alpha_\infty} e^{-2i\beta} + \frac{\Gamma}{2\pi i R} e^{-i\beta} = 0.$$

Определяя из этого уравнения циркуляцию, получаем

$$\Gamma = -4\pi R |v_\infty| \sin(\alpha_\infty - \beta). \quad (3.113)$$

Прямая, проведенная из центра круга в заднюю критическую точку, носит название *первой оси профиля* (ось нулевой подъемной силы). При скорости, направленной по первой оси $\alpha_\infty = \beta$, циркуляция (и подъемная сила) равна нулю.

Таким образом, после однозначного определения Γ поставленная задача определения конформного отображения может считаться принципиально решенной.

Обосновать образование циркуляции вокруг контура, находящегося в стационарном потоке невязкой жидкости, невозможно, поскольку она связана с завихренностью в пограничном слое, обязанным своим существованием исключительно свойствам вязкости.

Однако, если обратиться к начальному, нестационарному периоду движения профиля, когда его скорость возрастает от нуля до постоянной величины, то можно объяснить, как скорость в угловой точке профиля становится конечной и при этом появляется циркуляция вокруг профиля, значение которой соответствует постулату Жуковского-Чаплыгина.

В начальной фазе движения профиля из состояния покоя (или — что одно и то же — появления однородного потока, обтекающего профиль) скорости в потоке всюду малы, а движение всюду безвихревое, поскольку оно возникло из состояния покоя (теорема Лагранжа). Таким образом, в этой фазе и циркуляция вокруг контура равна нулю. Начальное положение кормовой критической точки B (см. рис. 3.34), являющейся точкой схода струй с контура, профиля не совпадает с положением угловой точки M профиля, которая начинает обтекаться потоком.

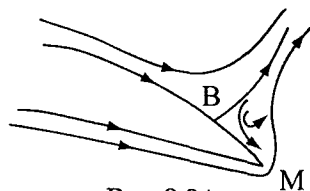


Рис. 3.34

В следующей фазе движения профиля скорость в точке M , как угловой точке обтекания внешнего угла, сильно (теоретически бесконечно) возрастает и, в связи с этим, давление в ней становится значительно меньше, чем в B , т. е. $p_M \ll p_B$. Это приводит к возвратному течению от точки B к точке M , которое, складываясь с основным, вызывает формирование вихря, так называемого начального вихря. Фак-

тически этот вихрь образуется из завихренности в пограничном слое профиля, отслаивающемся от контура. Формирование вихря оканчивается, когда давления в точках B и M сравняются, профиль достигнет постоянной скорости стационарного движения, а точка схода струй из B переместится в M .

При этом скорость в точке M станет уже конечной, поскольку она стала линией схода струй, т. е. критической точкой обтекания, а образовавшийся и оторвавшийся от профиля начальный вихрь интенсивности Γ будет снесен вниз по потоку (см. рис. 3.35). Однако, если рассмотреть контур, охватывающий контур C_0 профиля C и оторвавшийся вихрь, то согласно теореме Лагранжа, циркуляция по нему всегда остается равной нулю. Это приводит к тому (при достижении стационарности потока, когда оторвавшийся вихрь будет снесен на бесконечность), что появляется циркуляция вокруг контура профиля C , равная интенсивности снесенного начального вихря

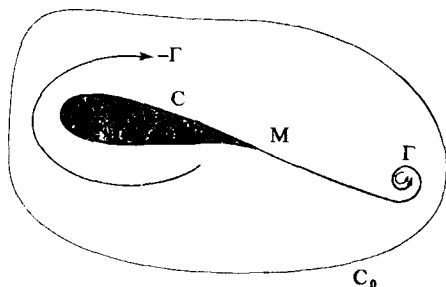


Рис. 3.35

и противоположная по знаку, т. е. $-\Gamma$. Величина этой циркуляции, согласно постулату Жуковского-Чаплыгина, определяется из условия перемещения критической точки обтекания в угловую точку профиля.

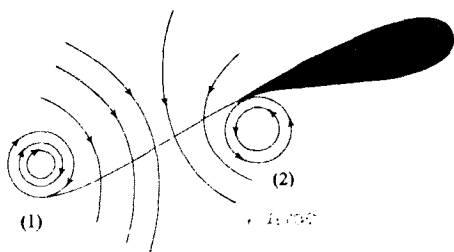


Рис. 3.36

Оторвавшийся вихрь после того, как закончился начальный «разгон» профиля, наблюдали Прандтль и Титъенс (см. [10]): они же отмечали и вихрь, который образовывался у профиля при остановке его. Схема фотографий этих вихрей представлена на рис. 3.36, где профиль начал движение направо, сбросил «разгонный» вихрь (1), а при остановке у него образовался «остановочный» вихрь (2).

Примеры применения метода конформных отображений. Отображающая функция Жуковского

Рассмотрим примеры конформного отображения окружности C^* и внешней по отношению к ней области D^* на контур C и его внешность при помощи функции

$$z = \zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta}, \quad (3.114)$$

где λ — действительная константа.

Эта функция является простейшим частным случаем общего преобразования (3.106).

Вид контура C , получающегося из окружности C^* , зависит от того, где располагается центр окружности и каков ее радиус. Различные контуры C , получающиеся при помощи отображающей функции (3.114), которая известна в литературе под названием функции Жуковского, получили наименование семейства профилей Жуковского.

Пример 1. Эллипс и пластинка.

Пусть центр окружности C^* совпадает с началом координат. Тогда функция (3.114) переводит семейство окружностей C^* , C_1^* , C_2^* , ... в софокусные эллипсы. Предельный из них является отрезком прямой, расположенной по оси x -ов; концы этого отрезка совпадают с фокусами семейства эллипсов (см. рис. 3.37). Покажем это.

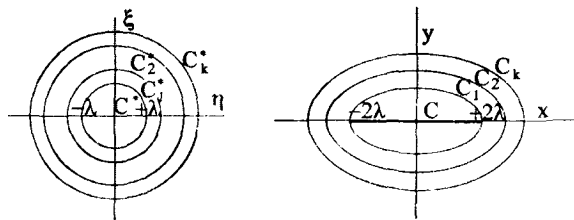


Рис. 3.37

Возьмем любую из окружностей C_1^* , C_2^* , ... с радиусом R , причем $R > \lambda$. Тогда, если ζ принадлежит этой окружности, то z находится из выражения

$$z = R e^{i\theta} + \frac{\lambda^2}{R} e^{-i\theta}.$$

Находя отсюда

$$x = \left(R + \frac{\lambda^2}{R} \right) \cos \theta, \quad y = \left(R - \frac{\lambda^2}{R} \right) \sin \theta,$$

получаем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (3.115)$$

где длины полуосей эллипса равны $a = R + \frac{\lambda^2}{R}$, $b = R - \frac{\lambda^2}{R}$ причем

$$a^2 - b^2 = 4\lambda^2, \quad a + b = 2R. \quad (3.116)$$

Таким образом, любая из окружностей C_k с радиусом R , преобразованием (3.114) переводится в эллипс (3.115).

Комплексный потенциал потока у эллипса определяется уравнениями (3.103) и (3.114). Находя из (3.114)

$$\zeta = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - \lambda^2}$$

(знак (+) выбран на основании условий (3.102)), получаем из (3.103)

$$w(z) = \frac{\bar{v}_\infty}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right) + \frac{2v_\infty R^2}{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)} \right), \quad (3.117)$$

где a и b — полуоси эллипса, а $R = \frac{a+b}{2}$.

Отсюда, в частности, при $a = b = R$, имеем тождественное преобразование окружности с центром в начале координат, т. е.

$$w(z) = \bar{v}_\infty z + v_\infty \frac{R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z.$$

Поскольку при $R = |\zeta| > \lambda$ производная $\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \frac{\lambda^2}{\zeta^2}$ нигде на контуре C_k^* не обращается в нуль (производная $\frac{d\zeta}{dz}$ — в бесконечность), то особых точек конформного отображения окружности на эллипс C_k нет; нет и угловых точек на контуре C_k^* .

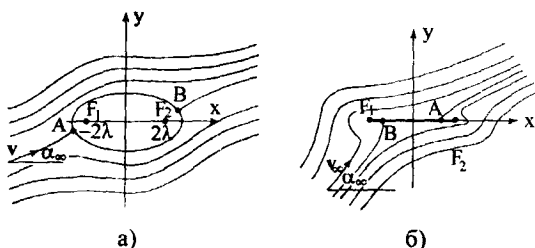


Рис. 3.38

Картина обтекания эллипса имеет вид, показанный на рис. 3.38, а.

Нулевая линия тока состоит из эллипса и двух отрезков софокусной с ним гиперболы, начинающихся в критических точках A и B на эллипсе.

Скорость в критических точках A и B на эллипсе, как и в их образах a и b на окружности, равна нулю.

Теперь рассмотрим предельный случай — отображение окружности C^* , имеющей радиус λ , в контур плоскости z . Из (3.114) следует, что если ζ принадлежит окружности C^* , имеющей радиус λ , то $\zeta = \lambda e^{i\theta}$ и $z = \lambda e^{i\theta} + \lambda e^{-i\theta} = 2\lambda \cos \theta$.

Таким образом, когда ζ пробегает окружность C^* , z движется по отрезку $(-2\lambda, 2\lambda)$ оси x . Следовательно, изображением окружности C^* с радиусом λ является пластинка длиной 4λ .

При $b = 0$, $a = 2\lambda$ получаем из (3.117) комплексный потенциал обтекания пластины длиной 4λ

$$w(z) = \frac{\bar{v}_\infty}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) + \frac{v_\infty}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right). \quad (3.118)$$

При этом, комплексная сопряженная скорость у пластины

$$\begin{aligned} \bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{\bar{v}_\infty}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}} \right) + \frac{v_\infty}{2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}} \right) + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}} = \bar{v}_{\infty x} - \frac{iv_{\infty y} z}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Картина обтекания пластины (см. рис. 3.38, б), будет существенно отличаться от обтекания эллипсов, поскольку здесь есть две особые точки конформного преобразования, а именно $z = \pm 2\lambda$, соответствующие точкам $\zeta = \pm\lambda$ на окружности с радиусом λ . Эти точки на пластинке являются точками возврата. В них $\bar{v} = \infty$, что следует из (3.119), если Γ не подчинена постулату Жуковского-Чаплыгина.

Заметим, что для профиля в виде пластинки угол $\beta = 0$, так что первая ось направлена по пластинке. Положение критических точек A и B на пластине зависит от значения циркуляции Γ . Если выбрать Γ согласно формуле постулата (3.113), т. е.

$$\Gamma = -4\pi R |v_\infty| \sin \alpha_\infty = -4\pi\lambda v_{\infty y}, \quad (3.120)$$

то формула (3.119) приобретает вид

$$\bar{v} = v_{\infty x} - iv_{\infty y} \frac{z - 2\lambda}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}}. \quad (3.121)$$

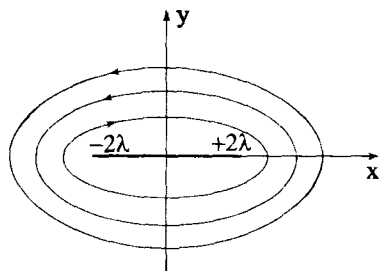
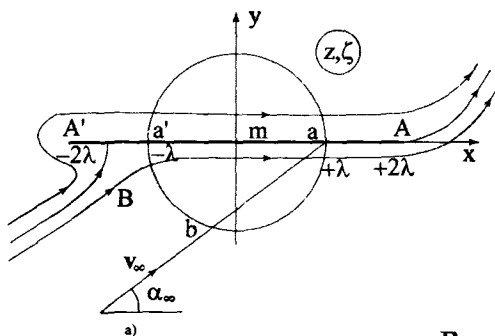


Рис. 3.39

Теперь скорость на задней кромке ($z = 2\lambda$) конечна и равна $v_{\infty x}$, а на передней ($z = -2\lambda$) остается бесконечно большой. Пластина имеет две точки возврата, и только в задней из них при $\Gamma = -4\pi\lambda v_{\infty y}$ выполнены условия плавного обтекания. Линии тока при таком циркуляционном потоке у пластины показаны на рис. 3.39, а, где плоскости z и ζ совмещены. Критическая точка на круте при отображении переместилась в заднюю кромку пластины A , которая стала точкой разделения линий тока. Передняя острая кромка A' обтекается потоком так, что в ней скорость бесконечно большая.

Отметим еще одну важную особенность обтекания пластины чисто циркуляционным потоком, когда $\bar{v}_\infty = 0$ (см. рис. 3.39, б). Потенциал и скорость этого потока, имеют вид

$$w_{\Gamma}(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right), \quad \bar{w}_{\Gamma}(z) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - z^2}}. \quad (3.122)$$

Скорость на верхней поверхности пластинки ($y = 0, -2\lambda \leq x \leq 2\lambda$) имеет только x -овую компоненту и равна (знак у корня положительный)

$$v_{\Gamma}^{+} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - x^2}},$$

и на нижней поверхности (корень имеет отрицательное значение):

$$v_{\Gamma}^{-} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - x^2}}.$$

Заметим, что различный знак у корня обусловлен многозначностью функции $\sqrt{4\lambda^2 - x^2}$.

Разрыв скорости на пластинке равен

$$v_{\Gamma}^{-} - v_{\Gamma}^{+} = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 - x^2}}. \quad (3.123)$$

Этот разрыв может быть интерпретирован как разрыв касательных компонент поля у вихревой пелены (см. ч. 2, § 5) с переменной по величине интенсивностью. Можно показать, что для плоской вихревой пелены формула (1.137) (ч. 2, § 5) даст компоненты скорости, соответствующие формуле (3.123). Итак, чисто циркуляционное течение у пластины может быть получено путем расположения в ее плоскости присоединенного вихревого слоя с интенсивностью

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma}{\pi \sqrt{4\lambda^2 - x^2}}.$$

При этом суммарная завихренность присоединенного слоя равна

$$\int_{-2\lambda}^{2\lambda} \gamma(x) dx = \frac{\Gamma}{\pi} \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \frac{dx}{\sqrt{4\lambda^2 - x^2}} = \Gamma.$$

В условиях плавного обтекания задней кромки, когда согласно постулату Жуковского-Чаплыгина Γ имеет значение (3.120), получаем из (3.119) для суммарного (циркуляционный плюс однородный) потока

$$\gamma(x) = v_{\infty}^{-} - v_{\infty}^{+} = -2 \frac{v_{\infty} x - 2\lambda v_{\infty}}{\sqrt{4\lambda^2 - x^2}} = -2 |v_{\infty}| \sqrt{\frac{2\lambda - x}{2\lambda + x}} \sin \alpha_{\infty}. \quad (3.124)$$

Вихревая интенсивность присоединенных вихрей на пластинке у передней кромки ($x = -2\lambda$) обращается (при $\beta \neq 0$) в бесконечность, а на задней кромке, являющейся точкой разделения струй, она равна нулю.

Пример 2. Дужка окружности.

1. Пусть центр окружности C^* смещен по мнимой оси в точку $(0, i_{\delta})$ (см. рис. 3.40), где плоскости (ζ) и (z) совмещены. Запишем преобразование (3.114) в виде

$$\frac{z-2\lambda}{z+2\lambda} = \left(\frac{\zeta-\lambda}{\zeta+\lambda} \right)^2. \quad (3.125)$$

Отсюда

$$\arg \frac{z-2\lambda}{z+2\lambda} = 2 \arg \frac{\zeta-\lambda}{\zeta+\lambda} = 2 \{ \arg(\zeta-\lambda) - \arg(\zeta+\lambda) \} \equiv 2\theta_0, \quad (3.126)$$

где θ_0 — угол, под которым из любой точки ζ окружности C^* виден отрезок $(-\lambda, \lambda)$, причем, как известно, для всех точек окружности $\theta_0 = \text{const}$ (см. рис. 3.40, а).

С другой стороны $\arg \frac{z-2\lambda}{z+2\lambda}$ — это угол, под которым из любой точки контура C виден отрезок $(-2\lambda, 2\lambda)$, а в силу (3.126) этот угол для всех точек контура C остается постоянным. Поэтому контур C , который проходит через точки $z = \pm 2\lambda$, является дужкой окружности с радиусом $\frac{\lambda^2 + \delta^2}{\delta}$. Эти точки, являясь особыми точками конформного преобразования, суть точки возврата. Действительно, преобразующая функция (3.114) в окрестности, например, точки $z = 2\lambda$ имеет разложение вида

$$z - 2\lambda = (\zeta - \lambda)^2 + \dots$$

Отсюда следует, что в этой окрестности $\arg(z - 2\lambda) = 2 \arg(\zeta - \lambda)$, так что угол π между касательными у точки $\zeta = \lambda$ переходит в 2π между касательными у точки $z = 2\lambda$. Поскольку угол $\angle a'ta$ как центральный, вдвое больше θ_0 , как угла, вписанного в окружность C^* , то из подобия треугольников $a'ta$ и $A'DA$ (см. рис. 3.40, а) следует, что прогиб дужки $h = 2\delta$. Первая ось профиля проходит через точки m и a , следовательно, $\text{tg} \beta = -\frac{\delta}{\lambda}$, а радиус окружности C^* равен $R = \sqrt{\lambda^2 + \delta^2}$.

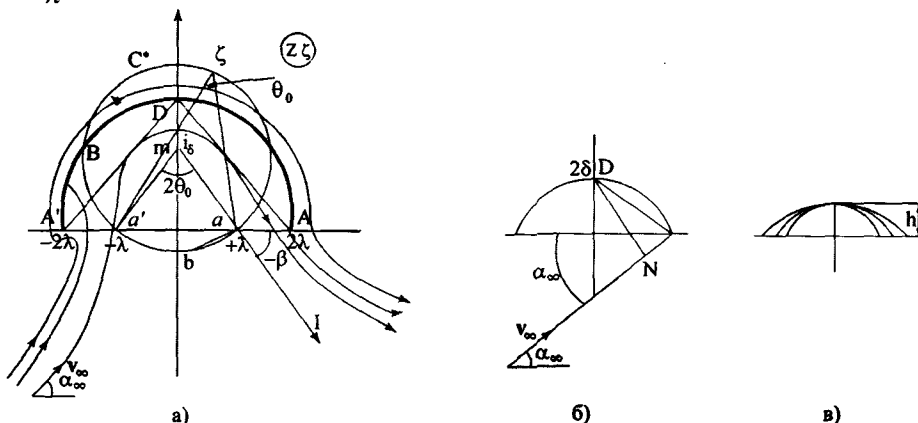


Рис. 3.40

В условиях плавного обтекания задней острой кромки дужки, циркуляция Γ вокруг дужки, согласно (3.113) равна

$$\Gamma = -4\pi\sqrt{\lambda^2 + \delta^2} |v_\infty| \sin\left(\alpha_\infty + \arctg \frac{\delta}{\lambda}\right). \quad (3.127)$$

Таким образом, подъемная сила у дужки больше, чем у стягиваемой пластинки длинной, поскольку больше величина циркуляции.

С.А. Чаплыгин заметил, что некоторое семейство дужек окружностей имеет одинаковую подъемную силу при определенном их обтекании.

Действительно, пусть H — длина перпендикуляра DN (см. рис. 3.40, б), опущенного на прямую, параллельную v_∞ и проходящую через точку A .

Тогда

$$H = DA \sin\left(\alpha_\infty + \arctg \frac{\delta}{\lambda}\right) = 2\sqrt{\lambda^2 + \delta^2} \sin\left(\alpha_\infty + \arctg \frac{\delta}{\lambda}\right),$$

так что подъемная сила у всех дужек, имеющих задние кромки на этой прямой и середину в точке D , одинакова, поскольку согласно (3.127)

$$\Gamma = -2\pi |v_\infty| H.$$

К частному случаю $\alpha_\infty = 0$, когда $H = h$, где h — высота (прогиб дужки), можно применить теорему Чаплыгина (см. рис. 3.40, в): *подъемная сила всех дужек окружностей, имеющих одинаковую высоту H , одинакова при обтекании вдоль стягивающей хорды.*

Рассмотрим второй частный случай положения центра M окружности C^* .

Пример 3. Симметричный руль Жуковского.

Пусть центр окружности C^* смещен по действительной оси в точку $(-\epsilon\lambda, 0)$ (см. рис. 3.41), так, что величина ее радиуса равна $R = \lambda(1 + \epsilon)$.

Тогда точка $\zeta = \lambda$ переходит в точку $z = 2\lambda$ и в окрестности этой точки угол π между касательными на C^* переходит в угол 2π на C , так что точка A на профиле является точкой возврата.

Точка a' окружности C^* , где $\zeta = -\lambda(1 + 2\epsilon)$, переходит в точку профиля $z = -\lambda(1 + 2\epsilon) - \frac{\lambda}{1 + 2\epsilon} = -\lambda \frac{(1 + 2\epsilon)^2 + 1}{1 + 2\epsilon}$, где $\frac{dz}{d\zeta} \neq 0$ и, следовательно, она не является особой точкой преобразования.

Поскольку контур C^* симметричен относительно оси x -ов, то контур C также симметричен. Этот профиль носит название симметричного руля Жуковского, ибо находит применение в рулевых устройствах самолетов.

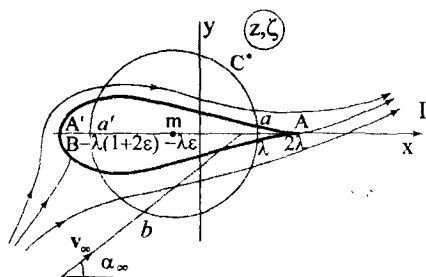


Рис. 3.41

Циркуляция в условиях плавного обтекания единственной острой кромки в точке $A(2\lambda, 0)$ равна

$$\Gamma = -4\pi\lambda(1+\varepsilon)|v_\infty|\sin\alpha_\infty, \quad (3.128)$$

а поскольку $\beta = 0$, то первая ось профиля совпадает в осью x -ов.

Параметрическое уравнение кривой, описывающей профиль, можно получить из формул преобразования, учитывая, что $\zeta = -\lambda\varepsilon + R e^{i\theta}$:

$$x(\theta) + iy(\theta) = -\lambda\varepsilon + R e^{i\theta} + \frac{\lambda^2}{-\lambda\varepsilon + R e^{i\theta}}.$$

Отсюда

$$x(\theta) = \frac{\lambda}{(1+\varepsilon)^2} \left(\cos\theta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right) \left[(1+\varepsilon)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta + \left(\cos\theta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2} \right],$$

$$y(\theta) = \frac{\lambda}{1+\varepsilon} \sin\theta \left[(1+\varepsilon)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta + \left(\cos\theta - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2} \right].$$

Поэтому величина хорды равна

$$L = x(0) - x(\pi) = \lambda + \lambda \frac{(1+2\varepsilon)^2 + 1}{1+2\varepsilon}.$$

Уравнение $\frac{dy}{d\theta} = 0$ дает значение θ , соответствующее максимальной толщине, и определяет величину относительной толщины профиля.

Пример 4. Общий случай профиля Жуковского. Общий вид семейства профилей Жуковского получается, если центр круга помещен в произвольную точку плоскости ζ , так что

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m.$$

Тогда на круге

$$\zeta = \zeta_m + R e^{i\theta}.$$

Из формулы преобразования получаем параметрическое уравнение кривой, описывающей профиль Жуковского

$$x(\theta) = \lambda \left[1 - k(\cos\theta - \cos\beta) \right] \left[1 + \frac{1}{[1 - k(\cos\theta + \cos\beta)]^2 + (\sin\theta - \sin\beta)^2} \right],$$

$$y(\theta) = k\lambda(-\sin\beta + \sin\theta) \left[1 - \frac{1}{[1 - k(\cos\theta + \cos\beta)]^2 + (\sin\theta - \sin\beta)^2} \right].$$

Здесь $k = \frac{R}{\lambda}$, $\beta = -\arcsin \frac{\eta_m}{R}$, $R = \sqrt{\eta_m^2 + (\lambda + \xi_m)^2}$.

Эти формулы могут быть использованы для построения любого профиля семейства профилей Жуковского. Его прогиб определяется величиной $|\eta_m| = R \sin \beta$ — смещением центра образующей окружности по мнимой оси, а толщина — величиной ξ_m — смещения по действительной оси.

Существует простой графический способ построения контура C , основанный на построении дополнительной окружности C_1 , в которую переводит окружность C^* дробно-

линейное преобразование $\zeta_1 = \frac{\lambda^2}{\zeta}$. Тогда общее преобразование окружности C^* в контур C имеет вид:

$$z = \zeta + \zeta_1 \quad \text{где} \quad \zeta_1 = \frac{\lambda^2}{\zeta}.$$

Окружность C_1 изнутри касается окружности C^* в точке $\zeta = \lambda$, ибо $\zeta_1|_{\zeta=\lambda} = \lambda$ и $\left. \frac{d\zeta_1}{d\zeta} \right|_{\zeta=\lambda} = -1$.

Радиус окружности C_1 может быть найден из уравнений

$$\xi + i\eta = \frac{\lambda^2 (\xi_1 - i\eta_1)}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad (\xi - \xi_m)^2 + (\eta - \eta_m)^2 = R^2.$$

Подставляя во второе уравнение выражение для ξ и η через ξ_1 и η_1 , получаем уравнение окружности C_1

$$\left(\xi_1 - \frac{\lambda^2 \xi_m}{R^2 - \xi_m^2 - \eta_m^2} \right)^2 + \left(\eta_1 - \frac{\lambda^2 \eta_m}{R^2 - \xi_m^2 - \eta_m^2} \right)^2 = \frac{\lambda^4 R^2}{(R^2 - \xi_m^2 - \eta_m^2)^2}.$$

Отсюда определяем положение центра и величину радиуса окружности C_1 .

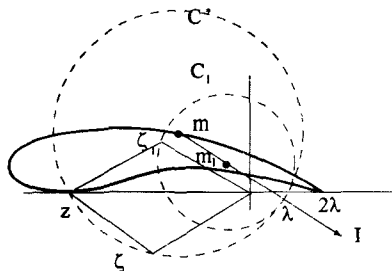


Рис. 3.42

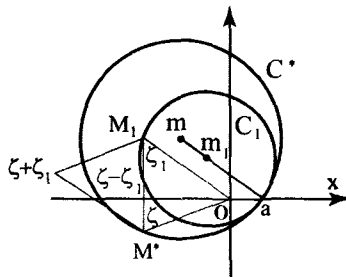


Рис. 3.43

Поскольку $\arg \zeta_1 = -\arg \zeta$, то для любой точки $\zeta \in C^*$ находим соответствующую точку $\zeta_1 \in C_1$ с обратным по знаку аргументом и, складывая по правилу параллелограмма ζ и ζ_1 , находим соответствующую точку C (см. рис. 3.43)

Можно также графически найти величину скорости в каждой точке контура C , основываясь на выражении (см. рис. 3.43)

$$|\bar{v}| = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{dw^*}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|.$$

Имеем

$$\left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = \frac{1}{\left| \frac{dz}{d\zeta} \right|} = \frac{1}{\left| 1 - \frac{\lambda^2}{\zeta^2} \right|} = \frac{|\zeta|}{|\zeta - \zeta_1|} = \frac{OM^*}{M^*M_1},$$

$$\left| \frac{dw^*}{d\zeta} \right| = \left| v_\infty e^{-i\alpha_\infty} - v_\infty e^{i(\alpha_\infty + 2\theta)} + \frac{\Gamma}{2\pi i} e^{i\theta} \right|.$$

В условиях плавного обтекания задней кромки

$$\Gamma = -4\pi R |v_\infty| \sin(\alpha_\infty - \beta),$$

так что

$$\begin{aligned} \left| \frac{dw^*}{d\zeta} \right| &= \left| v_\infty e^{-i\alpha_\infty} - v_\infty e^{i(\alpha_\infty + 2\theta)} + i2 |v_\infty| \sin(\alpha_\infty - \beta) \right| = \\ &= 2 |e^{-i\alpha_\infty}| |v_\infty| \left| \sin(\alpha_\infty - \beta) - \sin(\alpha_\infty + \theta) \right| = 2 |v_\infty| \left| \sin(\alpha_\infty + \theta) - \sin(\alpha_\infty - \beta) \right|. \end{aligned}$$

Из рис. 3.44 следует

$$\begin{aligned} \frac{N_1 N_2}{R} &= \frac{N_1 N_3 - N_2 N_3}{R} = \frac{N_1 N_3 - ad}{R} = \\ &= \sin(\alpha_\infty + \theta) - \sin(\alpha_\infty - \theta). \end{aligned}$$

Поэтому

$$|\bar{v}| = \left| \frac{dw^*}{d\zeta} \right| \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| = 2 |v_\infty| \frac{OM^*}{OM_1} \frac{N_1 N_2}{R}.$$

Комплексный потенциал обтекания любого профиля из семейства Жуковского при условии плавного обтекания задней кромки может быть записан в виде

$$\begin{aligned} w(z) = \bar{v}_\infty \left(\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) - \zeta_m \right) + \frac{v_\infty R}{\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) - \zeta_m} + \\ + 2R |v_\infty| \left(\ln \left(\frac{1}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) - \zeta_m \right) \right) \sin(\alpha_\infty - \beta), \end{aligned}$$

где ζ_m — комплексная координата центра образующей окружности C_0^* .

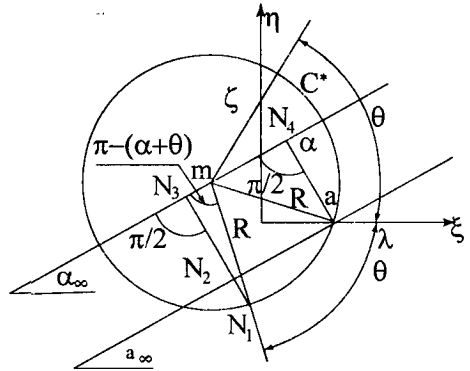


Рис. 3.44

Пример 5. Обобщенный профиль Жуковского (профиль Кармана-Трефтца) получается из круга C^* при помощи преобразования

$$\frac{z - \sigma\lambda}{z + \sigma\lambda} = \left(\frac{\zeta - \lambda}{\zeta + \lambda} \right)^\sigma, \text{ где } \sigma = 2 - \frac{\delta}{\pi}. \quad (3.130)$$

У этого профиля также есть особая точка при таком конформном преобразовании, но эта точка является угловой, а не точкой возврата, как в предыдущих примерах.

Действительно, вблизи точки круга $\zeta = \lambda$ преобразование (3.130) можно представить в виде

$$z - \sigma\lambda = (\zeta - \lambda)^\sigma + \dots$$

Отсюда следует, что угол π у точки $\zeta = \lambda$ окружности переходит в угол $\sigma\pi = 2\pi - \delta$. Таким образом, угол между касательными к контуру C в задней кромке $z = \sigma\lambda$ равен δ , т. е. эта точка является угловой. С точки зрения конструкции крыла, такие профили, являются более удобными, ибо задняя кромка становится более прочной.

Произвольный профиль. Отображающая функция общего вида

Для заданного профиля произвольной формы функцию, конформно отображающую его на окружность, следует искать в виде общего ряда Лорана (3.106)

$$z(\zeta) = \zeta + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots \quad (3.131)$$

Если коэффициенты этого ряда, каким-то способом удастся определить для исходного отображения, то сопряженная скорость $\bar{v}(z)$ в области D , внешней к профилю C , находится по формуле

$$\bar{v}(z) = \frac{dw^*(\zeta(z))}{d\zeta} \cdot \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} = \left(\bar{v}_\infty - v_\infty \frac{R^2}{\zeta^2(z)} + \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta(z)} \right) \times \\ \times \left(1 + \frac{a_{-1}}{\zeta^2(z)} + \frac{2a_{-2}}{\zeta^3(z)} - \dots \right),$$

где центр окружности C^* помещен в начало координат, а значение Γ определяется из условия плавного обтекания острой кромки на профиле.

С другой стороны, поскольку $\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz}$ является аналитической функцией вне контура C , то она может быть представлена в этой области в виде ряда Лорана

$$\bar{v}(z) = b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3} + \dots, \quad (3.132)$$

где $b_0 = \bar{v}(\infty) = \bar{v}_\infty$, а коэффициенты b_{-k} определяются при помощи интеграла Коши

$$b_{-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \bar{v}(z) z^{k-1} dz, \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

При этом, например, первые два коэффициента имеют вид

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \bar{v}(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dw(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}, \\ b_{-2} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C z \bar{v}(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\zeta + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \dots \right) \left(\bar{v}_\infty - v_\infty \frac{R^2}{\zeta^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i \zeta} \right) d\zeta = \\ &= (a_{-1} \bar{v}_\infty - v_\infty R^2) = a_{-1} \bar{v}_\infty - v_\infty R^2, \end{aligned} \quad (3.133)$$

так что

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi i z} + \frac{a_{-1} \bar{v}_\infty - v_\infty R^2}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3} + \dots, \quad (3.134)$$

где $z = \zeta + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots$

Коэффициенты этого ряда для контуров C общего вида (3.131) могут быть определены численным методом. Разработано несколько таких методов [20], на которых мы здесь специально останавливаться не будем.

Формулы Чаплыгина для главного вектора и главного момента сил давления, действующих на профиль

Согласно общим формулам для величины главного вектора и главного момента имеем

$$\mathbf{P} = -\oint_C p \mathbf{n} dl,$$

$$L_0 = -\oint_C \mathbf{i}_z \cdot [\mathbf{r}, p \mathbf{n}] dl,$$

где момент сил берется относительно начала координат.

С.А. Чаплыгин в 1910 г. получил выражение этих величин через комплексный потенциал потока.

Имеем для комплексной величины $\bar{P} = P_x - iP_y$

$$\bar{P} = -\oint_C p (n_x - in_y) dl. \quad (3.135)$$

Если для элемента dz , взятого на контуре C , ввести угол θ (см. рис. 3.45), причем $|dz| = dl$ и $\theta = \arg dz$, то $dz = e^{i\theta} dl$, $n_x - in_y = \sin(\pi - \theta) - i \cos(\pi - \theta) = \sin \theta + i \cos \theta = ie^{-i\theta}$.

Поэтому имеем

$$\bar{P} = -i \oint_C p e^{-2i\theta} dz.$$

Подставляя сюда значения p из интеграла Лагранжа

$$p = \text{const} - \frac{\rho |v|^2}{2},$$

получаем

$$\bar{P} = \frac{\rho i}{2} \oint_C |\bar{v}|^2 e^{-2i\theta} dz = \frac{i\rho}{2} \oint_C \bar{v}^2 dz = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^2 dz.$$

Далее для L_0 имеем

$$L_0 = \oint_C p (yn_x - xn_y) dl. \quad (3.136)$$

Но

$$yn_x - xn_y = -\text{Re} iz (n_x - n_y) = \text{Re} (ze^{-i\theta}).$$

Тогда

$$L_0 = \oint_C p \text{Re} (ze^{-i\theta}) dl = \text{Re} \oint_C \left(\text{const} - \frac{\rho |v|^2}{2} \right) ze^{-2i\theta} dz = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \oint_C \bar{v}^2 z dz.$$

Формулы

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz, \quad L_0 = -\frac{\rho}{2} \text{Re} \oint_C \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz \quad (3.137)$$

носят название первой и второй формул Чаплыгина.

Эти формулы замечательны и тем, что дают выражение силового воздействия на контур C лишь через три первых коэффициента b_0 , b_{-1} , b_{-2} ряда Лорана (3.132). Остальные коэффициенты определяют лишь кинематику потока и не вносят никакого вклада ни в силу, ни в момент, действующие на контур.

Действительно, подставляя (3.132) в (3.137) и пользуясь теоремой о вычетах аналитической функции, имеем

$$\begin{aligned}\bar{P} &= \frac{i\rho}{2} \oint_c \left(b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \dots \right)^2 dz = i\rho \cdot i\pi 2b_0b_{-1} = -2i\pi\rho b_0b_{-1}, \\ L_0 &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_c \left(b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \dots \right)^2 z dz = \\ &= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i (b_{-1}^2 + 2b_0b_{-2}) \right\} = -\pi\rho \operatorname{Re} \left\{ i(b_{-1}^2 + 2b_0b_{-2}) \right\}.\end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (3.133) и $b_0 = \bar{v}_\infty$, получаем

$$\begin{aligned}\bar{P} &= -i\rho\Gamma\bar{v}_\infty, \\ L_0 &= -2\pi\rho \operatorname{Re} \{ i\bar{v}_\infty b_{-2} \} = -2\pi\rho \operatorname{Re} \{ i\bar{v}_\infty (a_{-1}\bar{v}_\infty - v_\infty R^2) \} = \\ &= 2\pi\rho \operatorname{Re} \{ i[a_{-1}\bar{v}_\infty^2 - |v_\infty|^2 R^2] \} = -2\pi\rho \operatorname{Re} \{ ia_{-1}\bar{v}_\infty^2 \}.\end{aligned}\tag{3.138}$$

Первая из этих формул выражает известную теорему Н.Е. Жуковского, установленную в 1906 г. для профиля любой формы¹.

Эта формула может быть получена из теоремы импульсов (см. § 1.2).

В некоторых задачах удобно пользоваться формулами Чаплыгина, выраженными через $\varphi = \varphi(z, \bar{z})$ или $\psi = \psi(z, \bar{z})$.

Прежде всего найдем выражения для оператора $\Delta\Phi$, если $\Phi = \Phi(z, \bar{z})$, где $z = x + iy$, $\bar{z} = z = x - iy$.

Переходя к дифференцированию по z и \bar{z} в выражении $\Delta\Phi$, заметим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \Phi.$$

Но поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right),\tag{3.138a}$$

то

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Поэтому общее решение уравнения $\Phi(z, \bar{z})$ Лапласа $\Delta\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi = f_1(z) + f_2(\bar{z}),$$

¹ Некоторые исследователи считают, что теорему о подъемной силе впервые опубликовал немецкий ученый Кутта в 1902 г. Следует, однако, иметь в виду, что исследования Кутта относятся к частному виду крыловых профилей, предложенных Отто Лилиенталем.

где f_1, f_2 — произвольные функции. Общее действительное решение уравнения $\Delta\Phi = 0$ имеет вид

$$\Phi = f(z) + \bar{f}(\bar{z}).$$

Если $\varphi = \varphi(z, \bar{z})$ и $\psi = \psi(z, \bar{z})$, то используя (3.138а), получаем

$$\begin{aligned}\bar{v} &= v_x - iv_y = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}\right) = 2\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \\ \bar{v} &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\right) - i\left(\frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial\bar{z}}\right) = -2i\frac{\partial\psi}{\partial z}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.137) имеем

$$\begin{aligned}\bar{P} &= 2i\rho\oint_c \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 dz = -2i\rho\oint_c \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 dz, \\ L_0 &= -2\rho\operatorname{Re}\oint_c \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 z dz = -2\rho\operatorname{Re}\oint_c \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 z dz.\end{aligned}\tag{3.138б}$$

Заметим, что эти формулы справедливы лишь в том случае, когда φ и ψ — гармонические функции, т. е. для безвихревых потоков.

Формулы Седова для главного вектора и главного момента сил давления при неустановившемся движении профиля

Эти формулы в 1935 г. были получены Л.И. Седовым (см. [21]). Пусть контур S движется нестационарным образом в несжимаемой невязкой жидкости; контур может с течением времени и деформироваться.

Будем исходить из общих формул силового воздействия потока на твердые тела, а именно выражений (3.135), (3.136) для комплексно-сопряженного главного вектора \bar{P} и главного момента L_0 сил давления.

Переходя в них к комплексной переменной и учитывая, что $dz = e^{\theta} dl$, получаем

$$\bar{P} = -i\oint_c p e^{-2\theta} dz, \quad L_0 = \operatorname{Re}\oint_c p z e^{-2\theta} dz.\tag{3.139}$$

В случае нестационарного безвихревого движения давление $p(t, r)$ определяется из интеграла Лагранжа, так что в пренебрежении влиянием массовых сил, имеем

$$p = p\left(f(t) - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{|v|^2}{2}\right).\tag{3.140}$$

Подставляя это выражение в (3.139), имеем

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2}\oint_c |v|^2 d\bar{z} + i\rho\oint_c \frac{\partial\varphi}{\partial t} d\bar{z}, \quad L_0 = -\frac{\rho}{2}\operatorname{Re}\oint_c \bar{v}^2 dz - \frac{\rho}{2}\operatorname{Re}\oint_c \frac{\partial\varphi}{\partial t} z d\bar{z}.$$

Замечая, что для точек профиля $z|_C = z(t)$ и $\frac{dz}{dt} = v|_C$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t, x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))}{dt} &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_x^2 + v_y^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + |v|^2. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Тогда

$$\bar{P} = -\frac{i\rho}{2} \oint_C |v|^2 d\bar{z} + i\rho \oint_C \frac{d\varphi}{dt} d\bar{z}. \quad (3.142)$$

Преобразуем второй интеграл следующим образом

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{d\varphi}{dt} d\bar{z} &= \oint_C \left\{ d\left(\bar{z} \frac{d\varphi}{dt}\right) - \bar{z} d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) \right\} = \oint_C d\left(\bar{z} \frac{d\varphi}{dt}\right) - \oint_C \bar{z} \frac{d}{dt}(d\varphi) = \\ &= \oint_C d\left(\bar{z} \frac{d\varphi}{dt}\right) - \oint_C \frac{d}{dt}(\bar{z} d\varphi) + \oint_C \bar{v} d\varphi. \end{aligned}$$

Здесь при $\frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{v} \, dl$: — элемент дуги контура C и $d\varphi$ берется вдоль контура, поэтому имеем

$$\frac{d}{dt} d\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\varphi}{ds} ds \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) ds = d \frac{d\varphi}{dt}.$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} 2\bar{v} d\varphi - |v|^2 d\bar{z} &= 2\bar{v} d\varphi - v \bar{v} d\bar{z} = \bar{v} (2d\varphi - v d\bar{z}) = \\ &= \bar{v} (2d\varphi - d\bar{w}) = \bar{v} (d\varphi + id\psi) = \bar{v} dw = \bar{v}^2 dz. \end{aligned}$$

Тогда из (3.142) получаем

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_C |\bar{v}|^2 dz + i\rho \oint_C d\left(\bar{z} \frac{d\varphi}{dt}\right) - i\rho \oint_C \frac{d}{dt}(\bar{z} dw) + \rho \oint_C \frac{d}{dt}(\bar{z} d\psi). \quad (3.143)$$

В этом выражении первый интеграл дает формулу Чаплыгина для \bar{P} при стационарном движении. Второй интеграл может быть переписан в виде

$$\oint_C d\left(\bar{z} \frac{d\varphi}{dt}\right) = \left(\bar{z} \frac{d\varphi}{dt}\right)_{M^+}^{M^-} = \bar{z}_M \frac{d}{dt}(\varphi(M^+) - \varphi(M^-)) = \bar{z}_M \frac{d\Gamma}{dt}.$$

Здесь: \bar{z}_M — координата задней кромки профиля (см. рис. 3.45), являющейся (в условиях постулата Жуковского-Чаплыгина) точкой схода струй, на которых в этой точке потенциал φ терпит разрыв, равный по величине циркуляции Γ вокруг профиля, т. е.

$$\varphi(M^+) - \varphi(M^-) = \Gamma. \quad (3.144)$$

Заметим, что в остальных двух интегралах, где не выделен элемент изменяющегося во времени контура, дифференцирование по времени может быть вынесено за знак интегрирования. Тогда выражение (3.143) может быть написано в виде

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \bar{v}^2 dz + i\rho \bar{z}_M \frac{d\Gamma}{dt} - i\rho \frac{d}{dt} \oint_C \bar{z} \bar{v} dz + \rho \frac{d}{dt} \oint_C \bar{z} d\psi.$$

В этом выражении последний интеграл имеет интересную гидродинамическую интерпретацию.

Координата центра тяжести \bar{z}_u площади S_C , ограниченной контуром C , определяется выражением

$$\bar{z}_u S_C = \oint_C \bar{z} dx dy. \quad (3.145)$$

Изменение комплексного статического момента $\int_{S_C} \bar{z} dx dy$ равно площади заштрихованных на рис. 3.46 участков между положением контура C_t в момент t и положением контура C_{t+dt} в момент $t + dt$.

Статический момент элемента этих участков равен (см. рис. 3.46) $\bar{z} dL_v dt$, а всех участков

$$\oint_{C_t} \bar{z} dL_v dt = dt \oint_{C_t} \bar{z} v_n dl = dt \oint_{C_t} \bar{z} d\psi.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt} \oint_C \bar{z} dx dy = \frac{d}{dt} (\bar{z}_u S) = \oint_C \bar{z} \bar{v} d\psi.$$

Учитывая это выражение, из (3.143) получаем формулу

Л.И. Седова

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_C \bar{v}^2 dz + i\rho \bar{z}_M \frac{d\Gamma}{dt} + \rho \frac{d^2}{dt^2} (\bar{z}_u S) - i\rho \frac{d}{dz} \oint_C \bar{z} \bar{v} dz. \quad (3.146)$$

Вторую формулу Л.И. Седова можно получить, проводя аналогичные преобразования для L_0 . Подставляя p из (3.140), учитывая (3.142), получаем

$$\begin{aligned} L_0 &= \operatorname{Re} \rho \oint_C \left(f(t) - \frac{d\varphi}{dt} + |v|^2 - \frac{|v|^2}{2} \right) z d\bar{z} = \\ &= \rho \operatorname{Re} \oint_C z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz - \rho \oint_C \frac{d\varphi}{dt} (z d\bar{z}) = \\ &= \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z |\bar{v}|^2 dz - \rho \oint_C \frac{d\varphi}{dt} \operatorname{Re} d \left(\frac{z\bar{z}}{2} \right). \end{aligned}$$

Второй интеграл преобразуем следующим образом

$$\oint_C \frac{d\varphi}{dt} d \left(\frac{z\bar{z}}{2} \right) = \frac{1}{2} \oint_C \frac{d\varphi}{dt} d(z\bar{z}) =$$

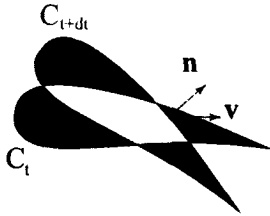


Рис. 3.46

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \oint_C d \left(\frac{d\varphi}{dt} z\bar{z} \right) - \frac{1}{2} \oint_C z\bar{z} d \left(\frac{d\varphi}{dt} \right) = \frac{1}{2} (z\bar{z})_M \frac{d\Gamma}{dt} - \frac{1}{2} \oint_C z\bar{z} \frac{d}{dt} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2} (z\bar{z})_M \frac{d\Gamma}{dt} - \frac{1}{2} \oint_C \frac{d}{dt} (z\bar{z} d\varphi) + \frac{1}{2} \oint_C d\varphi \frac{d}{dt} (z\bar{z}) = \\
 &= \frac{1}{2} (z\bar{z})_M \frac{d\Gamma}{dt} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \oint_C z\bar{z} d\varphi + \frac{1}{2} \oint_C d\varphi (v\bar{z} + \bar{v}z).
 \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$L_0 = \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z |\bar{v}|^2 dz - \frac{\rho}{2} (z\bar{z})_M \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z\bar{z} \frac{dw}{dz} dz - \frac{\rho}{2} \oint_C (v\bar{z} + \bar{v}z) d\varphi,$$

но

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{Re} \oint_C z |\bar{v}|^2 dz - \oint_C (v\bar{z} + \bar{v}z) d\varphi = \operatorname{Re} \oint_C z |\bar{v}|^2 dz - \oint_C 2(v_x x + v_y y) \operatorname{Re} dw = \\
 &= \operatorname{Re} \left[\oint_C z \bar{v} \frac{dw}{dz} dz - \oint_C 2(v_x x + v_y y) \bar{v} dz \right] = \operatorname{Re} \oint_C \left[z \bar{v} - 2(v_x x + v_y y) \right] dw = \\
 &= -\operatorname{Re} \oint_C v \bar{z} dw = -\operatorname{Re} \oint_C v \bar{v} \bar{z} dz = -\oint_C |v|^2 \operatorname{Re}(z d\bar{z}) = \\
 &= -\operatorname{Re} \oint_C |v|^2 z d\bar{z} = -\operatorname{Re} \oint_C |v|^2 e^{-2i\theta} z dz = -\operatorname{Re} \oint_C z |\bar{v}|^2 dz.
 \end{aligned}$$

Поэтому окончательно имеем выражение для L_0 в следующем виде

$$L_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \oint_C z \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz - \frac{\rho}{2} z_M \bar{z}_M \frac{d\Gamma}{dt} + \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \frac{d}{dt} \oint_C z\bar{z} \frac{dw}{dz} dz. \quad (3.147)$$

Другой подход к теории неустановившегося движения профиля в несжимаемой среде может быть развит на основе общих уравнений движения твердого тела в невязкой среде (см. § 1.2, а также [22] т. 1, гл. VII).

Зависимость момента сил давления от угла атаки профиля. Фокус профиля крыла. Парабола устойчивости

Вычислим момент сил давления относительно некоторой точки $F(x_F, y_F)$ в плоскости $z = x + iy$. Имеем

$$L_0 = L_F + x_F P_y - y_F P_x = L_F + \operatorname{Re}(iz_F \bar{P}).$$

Отсюда, подставляя выражения L_0 и \bar{P} из (3.138), получаем

$$L_F = -2\pi\rho \{ia_{-1} \bar{v}_\infty^2\} - \operatorname{Re}\{\rho \Gamma \bar{v}_\infty z_F\}.$$

Подставляя сюда из (3.113) значение Γ , обеспечивающее плавное обтекание задней кромки, в виде

$$\Gamma = 2\pi i R \left\{ e^{i(\alpha_\infty - \beta)} - e^{-i(\alpha_\infty - \beta)} \right\} |v_\infty|,$$

получаем после преобразований

$$\begin{aligned} L_F &= -2\pi\rho \operatorname{Re}\{ia_{-1}\bar{v}_\infty^2\} - \operatorname{Re}\left\{2\pi i R \bar{v}_\infty z_F \left(e^{i(\alpha_\infty - \beta)} - e^{-i(\alpha_\infty - \beta)}\right) |v_\infty|\right\} = \\ &= -2\pi\rho |v_\infty|^2 \operatorname{Re}\left\{i\left[Rz_F \left(e^{-i\beta} - e^{i(\beta - 2\alpha_\infty)}\right) + a_{-1}e^{-2i\alpha_\infty}\right]\right\} = \\ &= -2\pi\rho R |v_\infty|^2 \operatorname{Re}\left\{i\left[z_F e^{-i\beta} + e^{-2i\alpha_\infty + i\beta} \left(z_F - \frac{a_{-1}}{R} e^{-i\beta}\right)\right]\right\}. \end{aligned}$$

Из этого выражения следует, что если точку F выбрать так, чтобы

$$L_F = \frac{a_{-1}}{R} e^{-i\beta}, \quad (3.148)$$

то тогда

$$z_F = -2\pi\rho |v_\infty|^2 \operatorname{Re}\{ia_{-1}e^{-2i\beta}\}, \quad (3.149)$$

т. е. момент сил относительно точки F не зависит от угла атаки α_∞ . Такая точка в плоскости профиля называется фокусом профиля. При изменении α_∞ меняется направление вектора P (см. рис. 3.47), но его линия действия такова, что момент относительно точки F не меняет своей величины. Оказывается, что огибающая семейства (с параметром α_∞) линий действия вектора P является параболой, так что при любом α_∞ вектор P всегда направлен по касательной к этой параболы. Покажем это и найдем уравнение этой параболы. Она носит название *параболы устойчивости*.

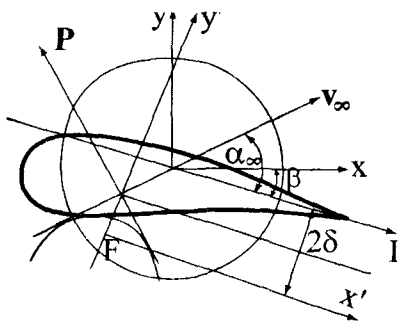


Рис. 3.47

Для построения линии действия подъемной силы нет нужды строить параболу устойчивости. Достаточно знать ее директрису (первую ось) и фокус профиля.

Как известно, первая ось проводится под углом β из центра образующего круга. Затем из фокуса достаточно провести прямую под углом α_∞ к оси x -ов и в середине ее отрезка между фокусом и пересечением с пер-

вой осью провести перпендикуляр к отрезку (см. рис. 3.47). Это и будет линия действия равнодействующей, поскольку она является одной из семейства прямых с параметром α_∞ .

Выведем уравнение параболы устойчивости.

Выберем систему прямоугольных координат (x', y') с началом в фокусе F и осью (x') параллельной первой оси профиля (см. рис. 3.47)

В системе (x', y') в формулах (3.147) и (3.148) надо положить $\beta = 0$ (ось x' — параллельна первой оси профиля). Кроме того

$$z'_F = z'_0 + \frac{a_{-1}}{R} = 0,$$

так что

$$a_{-1} = -Rz'_0 = -R(x'_0 + iy'_0).$$

Величина α_∞ является параметром семейства линий действия равнодействующих, а само уравнение этих линий следует из условия

$$x' P'_y - y' P'_x = L_F. \quad (3.149a)$$

Используя для \bar{P} и L_F общие формулы Чаплыгина (3.137) и записывая $\bar{P} = P'_x - iP'_y$ через компоненты в системе (x', y') , получаем

$$\begin{aligned} \bar{P} &= -i\rho\Gamma\bar{v}_\infty \left\{ 2\pi iR|v_\infty| \left(e^{i(\alpha_\infty - \beta)} - e^{-i(\alpha_\infty - \beta)} \right) \right\}_{\beta=0} = \\ &= 2\pi\rho|v_\infty|^2 R(1 - e^{-2i\alpha_\infty}) = 2\pi\rho|v_\infty|^2 R(1 - \cos 2\alpha_\infty + i \sin 2\alpha_\infty) = P'_x - iP'_y \end{aligned}$$

и

$$L_F = -2\pi\rho|v_\infty|^2 \operatorname{Re}(ia_{-1}) = 2\pi\rho|v_\infty|^2 \operatorname{Re}(iR(x'_0 + iy'_0)) = -2\pi\rho|v_\infty|^2 Ry'_0.$$

Обозначая $y'_0 = 2\delta$ — расстояние от фокуса F до первой оси профиля — и подставляя значения P'_x , P'_y и L_F , полученные из предыдущих двух формул, в (3.149a), получаем

$$x' \sin \alpha_\infty \cos \alpha_\infty + y' \sin^2 \alpha_\infty = \delta. \quad (3.150)$$

Дифференцируя по α_∞ , имеем

$$x' \cos 2\alpha_\infty + y' \sin 2\alpha_\infty = 0. \quad (3.151)$$

Исключая из (3.150) и (3.151) угол α_∞ , получаем уравнение огибающей семейства линий действия равнодействующей в виде

$$x'^2 = 4\delta(\delta - y').$$

Это уравнение параболы устойчивости в системе координат (x', y') . Директрисой этой параболы служит первая ось профиля, отстоящая от оси (x') на 2δ , фокусом — фокус профиля F , а параметр параболы равен 2δ .

Семейство прямых с огибающей, совпадающей с параболой устойчивости, можно получить, проводя из фокуса F прямую до пересечения с прямой $y' = \delta$ и восстанавливая из точки пересечения перпендикуляр к этой прямой; эти перпендикуляры и составляют такое семейство прямых (см. рис. 3.48).

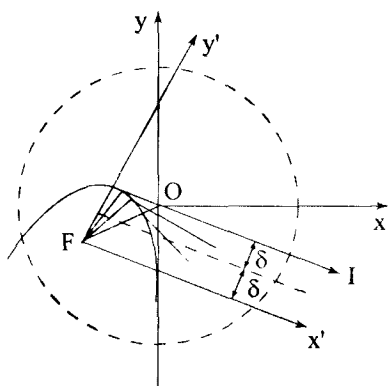


Рис. 3.48

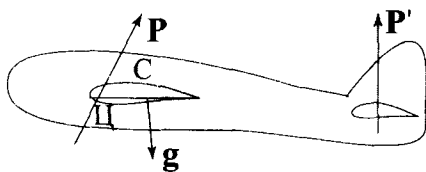


Рис. 3.49

Пересечение линии действия равнодействующей P с хордой профиля носит название *центра давления* (точка $Ц$ на рис. 3.49). Его положение может меняться с изменением режима полета (изменением угла α_∞). Это обстоятельство необходимо учитывать при анализе полета самолетов, у которых положение центра тяжести (точка $С$ на рис. 3.49) может в полете меняться (расход топлива из баков и др.).

При этом момент от подъемной силы относительно центра тяжести все время должен уравниваться моментом подъемной силы P' на хвостовом оперении. Таким образом, профили с неизменным центром давления мало пригодны для крыльев самолета. С другой стороны,

такие профили годятся для хвостового оперения (см. руль Жуковского), так как позволяют их крепить в неизменном центре давления и избежать момента кручения на узел крепления.

Рассмотрим положение фокуса профиля и вид параболы устойчивости для характерных представителей семейства профилей Жуковского.

В системе координат, начало которой не совпадает с центром образующего круга, имеем

$$z_F = z_m - \frac{a_{-1}}{R} e^{-i\beta} = z_m - \frac{\lambda^2}{R} e^{-i\beta},$$

где z_m — координаты центра круга, а $a_{-1} = \lambda^2$ для семейства профилей Жуковского.

1. *Пластика*: $z_m = 0$; $R = \lambda$; $\beta = 0$.

$$z_F = -\frac{\lambda^2}{R} = -\lambda.$$

Таким образом, у пластинки парабола устойчивости вырождается в точку (фокус лежит на первой оси профиля); равнодействующая \mathbf{P} всегда проходит через фокус, совпадающий с центром давления и расположенный на расстоянии четверти длины пластинки от передней кромки.

$$2. \text{ Дужка: } z_m = -i\lambda \operatorname{tg} \beta; \quad R = \frac{\lambda}{\cos \beta}; \quad \beta \neq 0.$$

$$z_F = -i\lambda \operatorname{tg} \beta - \lambda e^{-i\beta} \cos \beta,$$

так что

$$x_F = -\lambda \cos^2 \beta, \quad y_F = -\lambda (\operatorname{tg} \beta + \sin \beta \cos \beta).$$

Параметр парабола устойчивости равен

$$-\lambda \sin \beta (1 + 2 \cos^2 \beta).$$

3. Симметричный профиль Жуковского (руль Жуковского):

$$z_m = -\lambda \varepsilon, \quad R = \lambda (1 + \varepsilon), \quad \beta = 0.$$

Парабола вырождается в точку. Фокус лежит на действительной оси, поскольку

$$z_F = -\lambda \varepsilon - \frac{\lambda}{1 + \varepsilon} = -\lambda \left(\varepsilon + \frac{1}{1 + \varepsilon} \right).$$

Центр давления совпадает с фокусом и не меняется с изменением угла атаки профиля.

Задачи с решениями

Задача 3.3.1. Удар пластинки о свободную поверхность. Найти импульсивное движение, возникающее в несжимаемой невязкой жидкости, занимающей полупространство $y < 0$, от удара о ее поверхность бесконечной пластинки шириной 4λ с начальной скоростью v_0 .

Решение. Как было уже отмечено (см. § 3.1, импульсивное движение, пример 2), потенциал этого безвихревого движения может быть образован из комплексного потенциала пластинки (см. (3.118)), если положить в нем $\Gamma = 0$, добавить однородный поток $-\bar{v}_\infty z$ и считать $v_{\infty y} = v_0$, $v_{\infty x} = 0$.

Таким образом, для комплексного потенциала $w(z)$ искомого импульсивного движения в области $y < 0$, $|x| > 2\lambda$ имеем из (3.118)

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{\bar{v}_\infty}{2} \left(z + \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) + \frac{v_\infty}{2} \left(z - \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) - \bar{v}_\infty z = \\ &= iv_{\infty y} \left(z - \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right) = iv_0 \left(z - \sqrt{z^2 - 4\lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Отсюда, отделяя действительную и мнимую части, имеем следующие выражения для потенциала и функции тока

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= -v_0 \left(y + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right), \\ \psi(x, y) &= -v_0 \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a + \sqrt{a^2 + b^2}} \right), \end{aligned}$$

где $a = x^2 - y^2 - 4\lambda^2$, $b = 2xy$ и $xy > 0$ (для $xy < 0$ перед одним из внешних корней надо поставить минус).

Комплексно сопряженная скорость импульсивного движения равна

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = iv_0 \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}} \right).$$

Определяя отсюда скорость на свободной поверхности ($y = 0$, $|x| > 2\lambda$), имеем

$$v_x = 0, \quad v_y = v_0 \left(\frac{x}{\sqrt{z^2 - 4\lambda^2}} - 1 \right).$$

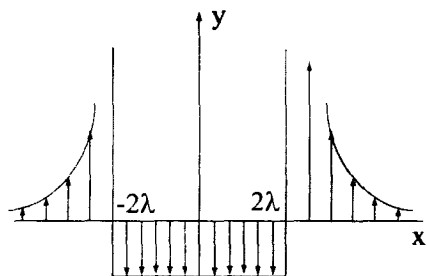


Рис. 3.50

На рис. 3.50 представлено распределение этой скорости, где видны интенсивные всплески жидкости у краев пластинки.

Сила P , действующая на пластинку при ее ударе о жидкость, определяется импульсивным давлением с обратным знаком, так что

$$P = - \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \pi(x, 0) dx = \rho \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \varphi(x, 0) dx.$$

Из (1) имеем для области $|x| < 2\lambda$

$$\varphi(x, 0) = \operatorname{Re} w(z)|_{y=0} = v_0 \sqrt{4\lambda^2 - x^2}.$$

Таким образом,

$$P = \rho v_0 \int_{-2\lambda}^{2\lambda} \sqrt{4\lambda^2 - x^2} dx = 2\pi \rho v_0 \lambda^2.$$

С другой стороны, если скорость пластинки с массой m после ее удара о воду равна v_1 , то $P = m(v_1 - v_0)$. Тогда, сравнивая это выражение с предыдущим, имеем

$$v_0 = \frac{mv_1}{m + 2\pi\rho\lambda^2}.$$

Таким образом, присоединенная масса пластинки равна $2\pi\rho\lambda^2$.

В [21] приведены более общие решения об импульсивном движении в ограниченном пространстве и др., а в [9] — при ударе круглой пластинки о поверхность жидкости.

Задача 3.3.2. Показать, что профили Кармана–Треффтца, получаемые путем конформного отображения (3.130), у которых задняя критическая точка ($\zeta = \lambda$) находится на действительной оси и соответствующая критическая точка на профиле ($z = \sigma\lambda$) является угловой, имеют одинаковую подъемную силу с соответствующими ($\delta = 0$) профилями Жуковского, а момент сил уменьшенный в $\frac{\sigma^2 - 1}{3}$ раз.

Решение. Переписывая формулу преобразования (3.130) в виде

$$z = \sigma\lambda \frac{\left(1 + \frac{\lambda}{\zeta}\right)^\sigma + \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta}\right)^\sigma}{\left(1 + \frac{\lambda}{\zeta}\right)^\sigma - \left(1 - \frac{\lambda}{\zeta}\right)^\sigma}$$

и раскладывая правую часть в ряд по степеням $\frac{\lambda}{\zeta}$, получаем

$$z = \zeta + \frac{\sigma^2 - 1}{3} \frac{\lambda^2}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots$$

Обращаясь к общим формулам (3.138) и учитывая, что в разложении (3.131) для профиля Кармана–Треффтца

$$a_{-1} = \frac{(\sigma^2 - 1)\lambda^2}{3},$$

получаем решение задачи.

Задача 3.3.3. Движение крыла у поверхности земли. Рассмотрим движение крыла с горизонтальной скоростью v_∞ на высоте h от поверхности земли $y = 0$ (см. рис. 3.51).

Решение. Для определения комплексного потенциала $w(z)$ течения в области $y > 0$ воспользуемся принципом отражения, когда потенциал во всей комплексной области $z = x + iy$ отыскивается в виде потенциала однородного потока со скоростью $\bar{v}_\infty = +v_\infty$, обтекающего два вихря: присоединенный к крылу вихрь интенсивности Γ и отраженный от поверхности земли вихрь интенсивности $-\Gamma$.

Таким образом имеем

$$w(z) = v_{\infty} z + \frac{\Gamma}{2\pi i} [\ln(z - ih) - \ln(z + ih)].$$

Следовательно,

$$v_x - iv_y = \frac{dw}{dz} = v_{\infty} + \frac{\Gamma h}{\pi(z^2 + h^2)}.$$

У поверхности земли ($y = 0$) летящее крыло вызывает поток со скоростью

$$v_x(x, 0) = v_{\infty} + \frac{\Gamma h}{\pi(x^2 + h^2)}.$$

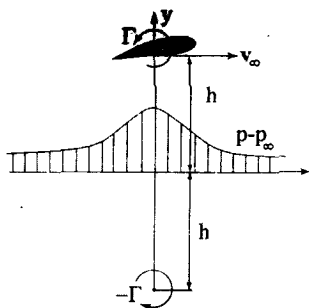


Рис. 3.51

Из уравнения Бернулли получаем увеличение давления у поверхности земли

$$p - p_{\infty} = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} - \frac{\rho v_x^2(x, 0)}{2} = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{\Gamma h}{\pi(x^2 + h^2)v_{\infty}} \right)^2 \right] = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} f(2 - f),$$

где $f(x) = -\frac{\Gamma h}{\pi v_{\infty}(x^2 + h^2)}$ — безразмерная функция от x .

Если крыло имеет подъемную силу, направленную по оси y -ов, то $\Gamma < 0$ и $f(x) > 0$.

Распределение давления на землю у крыла схематически показано на рис. 3.51, причем

$$(p - p_{\infty})_{\max} = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \frac{|\Gamma|}{\pi v_{\infty} h} \left(2 - \frac{|\Gamma|}{\pi v_{\infty} h} \right).$$

Влияние земли на подъемную силу профиля может быть получено при помощи теоремы Жуковского в «в малом» (см. гл. II, § 3)

$$\begin{aligned} P_y &= -\rho v_{\infty} \Gamma \Big|_{z=ih} = -\rho \Gamma \left(\frac{dw}{dz} - \frac{\Gamma}{2\pi i(z - ih)} \right) \Big|_{z=ih} = \\ &= -\rho \Gamma \left(v_{\infty} - \frac{\Gamma}{2\pi i 2ih} \right) = -\rho \Gamma v_{\infty} - \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h}. \end{aligned}$$

Здесь второе слагаемое выражает влияние земли на подъемную силу профиля. Если вычислить всю силу P , с которой вихрь действует на землю то

$$P = -\int_{-\infty}^{\infty} (p - p_{\infty}) dx = \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(2 \frac{\Gamma h}{\pi v_{\infty}(x^2 + h^2)} + \frac{\Gamma^2 h^2}{\pi^2 v_{\infty}^2 (x^2 + h^2)^2} \right) dx = \rho v_{\infty} \Gamma + \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi h},$$

т. е. $P = -P_y$, что и следовало ожидать из третьего закона Ньютона.

Упражнения

1. Найти угол, который образует с осью x -ов линия тока, сходящая с задней кромки профиля Жуковского. Тоже — для профиля Кармана-Треффтца.

2. Найти положение центра давления для профилей Кармана-Треффтца.

3. Показать, что если контур в плоскости z конформно отображается на окружность $|\zeta| = a$, с центром в начале координат с помощью преобразования

$$\zeta = z + \frac{a'^2_1}{z} + \frac{a'^2_2}{z^2} + \dots,$$

то комплексный потенциал потока имеет вид

$$w(\zeta(z)) = \bar{v}_\infty \zeta + v_\infty \frac{a^2}{\zeta} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{\zeta}{a},$$

где \bar{v}_∞ — комплексно сопряженная скорость обтекания окружности, а Γ — циркуляция скорости по ней.

4. Найти приближенную формулу конформного отображения тонкого симметричного профиля Жуковского (с точностью до отношения $\frac{\delta}{l}$, где δ — максимальная толщина, а l — хорда профиля) на окружность $|\zeta| = a$.

§ 3.4. Метод присоединенных особенностей.

Обтекание тонких профилей безвихревым потоком

Постановка задачи

Наличие замкнутых линий тока при обтекании гидродинамических особенностей (вихря, диполя, источника и др.) позволяет поставить обратную задачу, суть которой состоит в следующем.

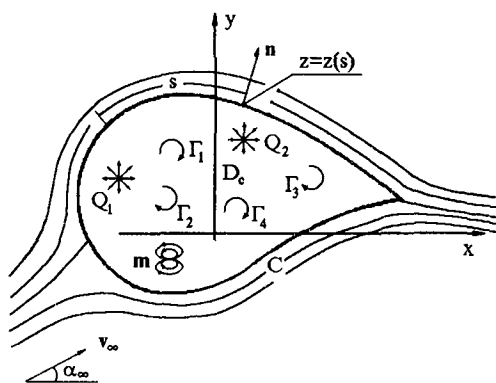


Рис. 3.52

Пусть в однородном двумерном потоке рассматривается неподвижный замкнутый контур C . Требуется во внутренней к C геометрической области найти такое распределение гидродинамических особенностей, чтобы суммарный поток от них — вместе с однородным потоком — имел замкнутую линию тока, совпадающую с заданным контуром (см. рис. 3.52).

При этом контур C отделяет внешний поток от внутреннего течения — потока от особенностей. Внешний поток можно рассматривать как поток, обтекающий *твердый* контур C , а внутреннюю к C область жидкости считать мгновенно затвердевшей (идея «жидкого крыла» Н.Е. Жуковского).

Гидродинамические особенности, размещаемые таким способом внутри C , называют *присоединенными* (к твердому контуру C) особенностями (см. ч. 2, § 5).

Метод отыскания параметров потока, обтекающего заданный твердый контур C , подходящим расположением внутри него гидродинамических особенностей (по существу фиктивных, воображаемых, как и само течение внутри твердого контура C) называют *методом присоединенных особенностей*.

Заметим, что присоединенные особенности могут носить не только дискретный характер (изолированный вихрь, источник и т.д.), но и быть распределенными по кривой, поверхности и т. п.

Этот метод может быть использован как при исследовании обтекания пространственных твердых тел, так и незамкнутых твердых поверхностей.

Пусть $w(z)$ — комплексный потенциал потока в области $z = x + iy$. Условием того, что контур C является линией тока, есть равенство нулю нормальной компоненты скорости на контуре C , т. е.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_C = 0.$$

Это условие через сопряженную скорость $\bar{v}(z)$ может быть выражено в виде

$$v_x n_x + v_y n_y|_C = -\operatorname{Re} \left\{ i \bar{v}(z) \frac{dz}{ds} \right\}_{z=z(s)} = 0, \quad (3.152)$$

где $z(s) = x(s) + iy(s)$ — параметрическое уравнение кривой контура C (s — дуга, отсчитываемая от некоторого начала M на контуре (см. рис. 3.52)),

$$\text{а } n_x = -\frac{dy}{ds}, n_y = \frac{dx}{ds}.$$

Пусть $\bar{v} = \bar{v}_\infty + \bar{v}_*(z)$, где $\bar{v}_*(z)$ — комплексная скорость от присоединенных особенностей, причем $\bar{v}_*|_{z \rightarrow \infty} = 0$, тогда условие (3.152) может быть записано в виде

$$|\bar{v}_\infty| \left(\frac{dx}{ds} \sin \alpha_\infty - \frac{dy}{ds} \cos \alpha_\infty \right) = -\operatorname{Re} \left\{ \left(i \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \right) \bar{v}_*(z) \right\}_{z=z(s)}, \quad (3.153)$$

где α_∞ — угол между вектором \mathbf{v}_∞ и осью x .

Если уравнение контура C задано в полярных координатах в виде $r = r(\theta)$, то уравнение (3.153) приобретает вид

$$|\bar{v}_\infty| \left[\frac{dr(\theta)}{d\theta} \sin(\alpha_\infty - \theta) - r \cos(\alpha_\infty - \theta) \right] = \operatorname{Re} \left\{ \left(r - i \frac{dr(\theta)}{d\theta} \right) e^{i\theta} \bar{v}_* \right\}_{z=r(\theta)e^{i\theta}}. \quad (3.154)$$

Пример 1. Пусть контур C — окружность с радиусом R . Поместим в ее центр присоединенные особенности: источник мощностью Q , диполь с моментом $m = |m|e^{-i\gamma}$ и вихрь интенсивностью Γ , и подберем их характеристики так, чтобы получить обтекание круга потоком со скоростью \bar{v}_∞ .

Условие (3.154) для круга ($r(\theta) = R = \text{const}$) приобретает вид

$$-|\bar{v}_\infty| \cos(\alpha_\infty - \theta) = \operatorname{Re} \{ e^{i\theta} \bar{v}_*(z) \}_{z=Re^{i\theta}}.$$

Здесь

$$\bar{v}_*(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{Q}{2\pi} \ln z + \frac{m}{2\pi z} + \frac{\Gamma \ln z}{2\pi i} \right) = \frac{Q}{2\pi z} - \frac{m}{2\pi z^2} + \frac{\Gamma}{2\pi iz}.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} -|\bar{v}_\infty| \cos(\alpha_\infty - \theta) &= \operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left(\frac{Q - i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta} - \frac{m}{2\pi R^2} e^{-2i\theta} \right) \right\} = \\ &= \frac{Q}{2\pi R} - \operatorname{Re} \left\{ \frac{m e^{-i\theta}}{2\pi R^2} \right\} = \frac{Q}{2\pi R} - \frac{|m|}{2\pi R^2} \operatorname{Re} e^{-(\theta + \gamma)i} = \\ &= \frac{Q}{2\pi R} - \frac{|m|}{2\pi R^2} \cos(\theta + \gamma). \end{aligned}$$

Отсюда получаем: $Q = 0$, $|m| = 2\pi R^2 |\bar{v}_\infty|$, $\gamma = -\alpha_\infty$.

Итак, диполь и вихрь, помещенные в начало координат в качестве присоединенных особенностей обеспечивают картину обтекания круга с радиусом R , если только момент диполя $m = |m| e^{i\gamma} = 2\pi R^2 |\bar{v}_\infty| e^{-i\alpha_\infty} = 2\pi R^2 \bar{v}_\infty$ (ср. (2.35)).

Метод присоединенных особенностей (вихрей), распределенных по некоторой линии, широко используется в задачах обтекания тонких профилей.

Пример 2. Пусть внутри произвольного контура C , помещенного в однородный поток, имеющий скорость v_∞ , в точках $z = z_k$ расположены присоединенные вихри интенсивностью Γ_k ($k = 1, 2, \dots, N$) соответственно. Рассмотрим уравнения, из которых можно определить Γ_k так, чтобы контур C был линией тока в результирующем потоке: однородный поток плюс поток от присоединенных вихрей.

Комплексная скорость результирующего потока имеет выражение

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{z - z_k}. \quad (3.155)$$

С другой стороны известно разложение

$$\bar{v}(z) = b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \frac{b_{-3}}{z^3} + \dots, \quad (3.156)$$

где $b_0 = \bar{v}_\infty$, $b_{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi i}$, $b_{-2} = a_{-1} \bar{v}_\infty - v_\infty R^2$. Здесь a_{-1} — коэффициент в разложении функции $z = \zeta + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots$, отображающей контур C на круг с радиусом R ; остальные

коэффициенты b_{-3}, b_{-4}, \dots должны находиться в соответствии с комплексными величинами z_k и интенсивностями Γ_k . При этом будет решена задача не только соответствия между подъемными силами в обоих потоках, но и картин обтекания.

Разлагая в ряд вне круга с достаточно большим радиусом

$$\frac{1}{z - z_k} = \frac{1}{z} \left(\frac{z_k}{z} + \frac{z_k^2}{z^2} + \dots \right),$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{z - z_k} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma_k z_k^l}{z^{l+1}}.$$

Тогда, требуя, чтобы функции (3.155) и (3.156) имели одинаковые коэффициенты разложения, имеем

$$b_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k, \quad b_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k z_k, \quad b_{-3} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k z_k^2, \dots$$

Из этой системы находим величины Γ_k , z_k , обеспечивающие совпадение первых коэффициентов в разложениях (3.155) и (3.156).

Напомним, что коэффициенты b_k могут быть представлены через коэффициенты a_k разложения функции, отображающей контур C на круг.

Многие авиационные профили, особенно у скоростных самолетов, имеют малую относительную толщину и слабую изогнутость. Эти обстоятельства можно использовать для построения теории, достаточно хорошо отражающей картину обтекания крыльев с подобными профилями: профиль заменяется средней его линией.

Присоединенные вихри, распределенные по средней линии профиля и по его контуру

Этот метод, наиболее ранний в разработке и применении, основан на замене обтекания тонкого профиля обтеканием его средней линии, уравнение которой имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2} (y^+(x) + y^-(x)),$$

где $y^+(x)$ и $y^-(x)$ — уравнения соответственно верхней и нижней кривых, образующих профиль (см. рис. 3.53). Предполагаем, что

$$|y^+(x)| \sim |y^-(x)| \ll b. \quad (3.157)$$

Обтекание средней линии профиля моделируется обтеканием системы присоединенных вихрей, распределенных на ней. Эта модель основана на том, что на любой линии, помещенной в поток невязкой жидкости, существует, вообще говоря, разрыв касательной к ней скорости — сверху и снизу. Этот разрыв в случае обтекания пластинки, расположенной по оси x был нами определен (см. (3.123), (3.124))

$$v_x^- - v_x^+ = \frac{\Gamma}{\pi \sqrt{x^2 - 4\lambda^2}} = 2|v_\infty| \sqrt{\frac{2\lambda - x}{2\lambda + x}} \sin \alpha_\infty,$$

где Γ — циркуляция скорости вокруг пластинки, имеющей длину 4λ .

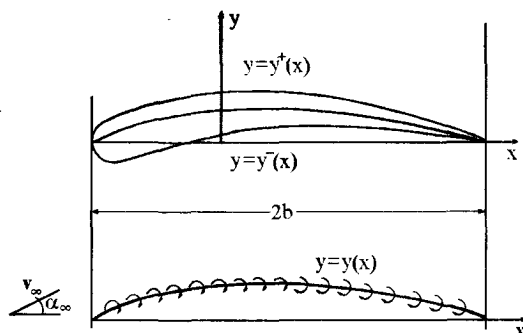


Рис. 3.53

присоединенных к этой кривой вихрей с интенсивностью, равной разности скоростей по разные стороны кривой. Для пластинки эта интенсив-

ность находится из потенциала плавного обтекания ее задней кромки. Для произвольной кривой она должна определяться из граничного условия (3.152) для скорости \bar{v} на этой кривой.

В рассматриваемом случае присоединенных вихрей, распределенных с интенсивностью $\gamma(s')$ по кривой C (замкнутой или линии, см. рис. 3.54), v_* в формуле (3.153) — суммарная скорость в точках кривой от присоединенных вихрей. Вихрь на элементе ds' этой кривой имеет

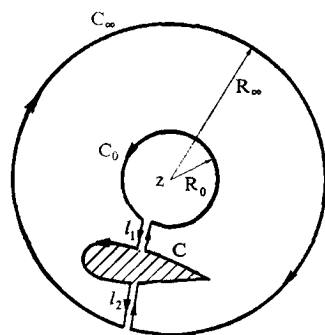


Рис. 3.54

у точки $s = s'$ циркуляцию, равную $\gamma(s')ds'$, и скорость $d\bar{v}_*$ от него в точках $z = z(s')$ равна

$$d\bar{v}_* = \frac{\gamma(s')ds'}{2\pi i(z - z(s'))},$$

а от всех присоединенных вихрей имеем

$$\bar{v}_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(s')ds'}{z - z(s')}.$$

Если точка z находится на кривой C и определяется координатой s , то рассматривается главное значение интеграла в смысле Коши, а именно

$$2\pi i \bar{v}_*(z(s)) = \int_C \frac{\gamma(s') ds'}{z(s) - z(s')} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{s-\varepsilon} + \int_{s+\varepsilon}^{s_0} \right\},$$

где s_0 определяет длину контура C . Физически это означает, что скорость от присоединенного вихря в точке его расположения не учитывается.

Скорость в однородном потоке, обтекающем твердый контур, моделируемый присоединенными вихрями с интенсивностью $\gamma(s)$, имеет выражение

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \bar{v}_*(z) = \bar{v}_\infty + \alpha_\infty \int_C \frac{\gamma(s') ds'}{z - z(s')}. \quad (3.158)$$

Теорема о вихревом слое, распределенном по замкнутому контуру

Может возникнуть вопрос, так ли уж исключительны присоединенные вихри, распределенные по контуру обтекаемого твердого профиля. На этот счет имеется достаточно общая теорема.

Теорема. Обтекание однородным потоком твердого замкнутого контура C может быть полностью представлено течением, состоящим из однородного потока и потока от вихревого слоя, распределенного по контуру C .

Доказательство. Пусть $\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz}$ — комплексная скорость обтекания твердого контура C однородным потоком со скоростью \bar{v}_∞ .

Опишем вокруг точки z окружности с радиусами R_0 и R_∞ и соединим их с контуром C «переходами» l_1 и l_2 , как показано на рис. 3.54. Контур $L = C_\infty + l_1 + C + l_2 + C_0$ — замкнутый, и точка z лежит вне него. На основании интегральной формулы Коши (см. 3.82), имеем в силу аналитичности $\bar{v}(z)$

$$\int_L \frac{\bar{v}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} \equiv - \int_{C_\infty} + \int_C + \int_{C_0} + \int_{l_1} + \int_{l_2} = 0. \quad (3.159)$$

На конуре C_∞ : $\zeta - z = R_\infty e^{i\theta} d\theta$, а на C_0 : $\zeta - z = R_0 e^{i\theta} d\theta$. Поэтому из (3.159) получаем

$$\int_C \frac{\bar{v}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_0^{2\pi} \frac{\bar{v}(\zeta)}{R_\infty e^{i\theta}} R_\infty e^{i\theta} id\theta - \int_0^{2\pi} \frac{\bar{v}(\zeta)}{R_0 e^{i\theta}} R_0 e^{i\theta} id\theta + \int_{l_1+l_2} \frac{\bar{v}(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

При $R_\infty \rightarrow \infty$: $\bar{v}(\zeta)|_{C_\infty} \rightarrow \bar{v}_\infty$, при $R_0 \rightarrow 0$, аналогично, $\bar{v}(\zeta)|_{C_0} \rightarrow \bar{v}(z)$, по разным берегам переходов l_1 и l_2 интегралы взаимно уничтожаются. Таким образом, приходим к формуле

$$\int_C \frac{\bar{v}(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = (\bar{v}_\infty - \bar{v}(z)) 2\pi i.$$

Отсюда, подставляя $\bar{v}(z) = \frac{dw}{d\zeta}$, имеем

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dw(\zeta)}{z - \zeta}.$$

Поскольку $dw = d\phi + i d\psi$ и $d\psi = 0$ на контуре C , являющемся линией тока, а $d\phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{L} = \gamma(s) ds$, получаем

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(s) ds}{z - \zeta(s)}. \quad (3.160)$$

Это выражение совпадает с (3.158) и теорема может считаться доказанной.

Главным в постановке этой задачи остается определение функции $\gamma(\zeta)$ для заданного контура C . Для этого служит общее условие (3.153), выражающее равенство нулю нормальной компоненты скорости суммарного потока в каждой точке твердого контура C .

Общее условие (3.153) для присоединенных вихрей, распределенных по контуру C , приобретает вид

$$\begin{aligned} |\bar{v}_\infty| \left(\frac{dx}{ds} \sin \alpha_\infty - \frac{dy}{ds} \cos \alpha_\infty \right) &= -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{dx}{ds} + i \frac{dy}{ds} \right) \int_C \frac{\gamma(s') ds'}{z(s) - z(s')} \right\} = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_C \gamma(s') \frac{(x - x(s')) dx/ds + (y - y(s')) dy/ds}{(x - x(s'))^2 + (y - y(s'))^2} ds'. \end{aligned} \quad (3.161)$$

где $x \equiv x(s)$, $y \equiv y(s)$ — параметризация контура C (вообще говоря, замкнутого), по которому от некоторой точки M_0 отсчитывается дуга s и распределены присоединенные вихри плотностью $\gamma(s)$ (см. рис. 3.55).

Относительно замкнутого контура C будем предполагать гладкость параметризации $x(s)$, $y(s)$, т. е. наличие в каждой точке s непрерывных по Гельдеру производных¹ dx/ds , dy/ds , при этом для любой из используемых

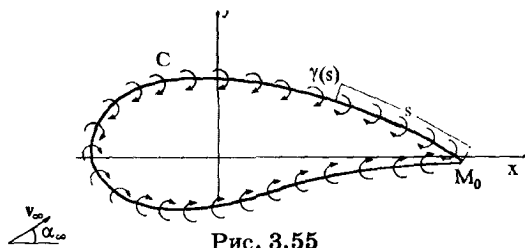


Рис. 3.55

функций $f(s)$ следует иметь в виду периодичность, т. е. $f(s) = f(s + s_0)$, где s_0 — длина контура C .

Основное интегральное уравнение, его свойства и методы решения

Соотношение (3.161) — интегральное уравнение для определения функции плотности $\gamma(s)$ присоединенных вихрей на контуре известной формы, помещенном в однородный поток со скоростью v_∞ .

Покажем, что ядро этого уравнения является сингулярным.

Введем для краткости обозначения $x' \equiv x(s')$ и перепишем ядро уравнения (3.161) в виде

$$\frac{(x - x')dx/ds + (y - y')dy/ds}{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \frac{1}{s - s'} F(s, s'),$$

где

$$F(s, s') = \left[\frac{x - x'}{s - s'} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{s - s'} \cdot \frac{dy}{ds} \right] \left[\left(\frac{x - x'}{s - s'} \right)^2 + \left(\frac{y - y'}{s - s'} \right)^2 \right]^{-1}.$$

Поскольку

$$\lim_{s' \rightarrow s} F(s, s') = \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right]^{-1} = 1,$$

¹ Функция $f(x)$ называется непрерывной по Гельдеру, если для всех x на замкнутом интервале $[0, l]$ выполнено условие $|f(x'') - f(x')| \leq M|x'' - x'|^\alpha$, где $0 \leq \alpha \leq 1$, а M — постоянная.

то в точке $s' = s$ ядро уравнения (3.161) имеет особенность, и, следовательно, уравнение (3.161) является *сингулярным интегральным уравнением*. При этом интеграл в (3.161) следует понимать в смысле главного его значения.

Введя новый параметр $\sigma = 2\pi s/s_0$, уравнение (3.161) можно переписать, выделяя в ядре сингулярную и регулярную части, в виде

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi|v_\infty|}{s_0} \left(\frac{dy}{d\sigma} \cos \alpha_\infty - \frac{dx}{d\sigma} \sin \alpha_\infty \right) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\sigma') \operatorname{ctg} \frac{\sigma' - \sigma}{2} d\sigma' + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\sigma') K(\sigma, \sigma') d\sigma'. \end{aligned}$$

Эта форма уравнения, в которой выделено ядро Гильберта и регулярное ядро $K(\sigma, \sigma')$, удобна в случае применения численных методов решения задачи. В последние годы численные методы решения сингулярных интегральных уравнений весьма интенсивно разрабатывались группой московских и харьковских математиков в ряде исследований по методу дискретных особенностей в задачах математической физики [23].

Использование уравнения (3.161) для решения задач по методу присоединенных вихрей, распределенных по гладкому контуру, проиллюстрируем на примере бесциркуляционного обтекания круга с радиусом R .

В этом случае имеем: $s_0 = 2\pi R$, $\sigma = \theta$, $x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$, так что из (3.161) получаем

$$\begin{aligned} & -|v_\infty| (\cos \theta \cos \alpha_\infty + \sin \theta \sin \alpha_\infty) = \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta') \frac{-(\cos \theta - \cos \theta') \sin \theta + (\sin \theta - \sin \theta') \cos \theta}{(\cos \theta - \cos \theta')^2 + (\sin \theta - \sin \theta')^2} d\theta', \end{aligned}$$

или

$$-2|v_\infty| \cos(\alpha_\infty - \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(\theta') \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta'.$$

Для этого уравнения известно (см., например, [24]) решение вида

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2|v_\infty| \cos(\alpha_\infty - \theta') \operatorname{ctg} \frac{\theta' - \theta}{2} d\theta',$$

при условии $\int_0^{2\pi} \gamma(\theta) d\theta = 0$.

Вычисляя интегралы, получаем

$$\gamma(\theta) = 2|v_\infty| \sin(\alpha_\infty - \theta).$$

Из задачи о бесциркуляционном обтекании цилиндра, рассмотренной ранее, имеем (см. (3.162)) выражение для сопряженной скорости на поверхности цилиндра

$$\bar{v} = 2ie^{-i\theta} |v_\infty| \sin \theta.$$

Поскольку $\bar{v} = e^{-i\theta} (v_r - i v_\theta)$, то касательная к поверхности цилиндра компонента скорости равна

$$v_\theta = -2|v_\infty| \sin \theta.$$

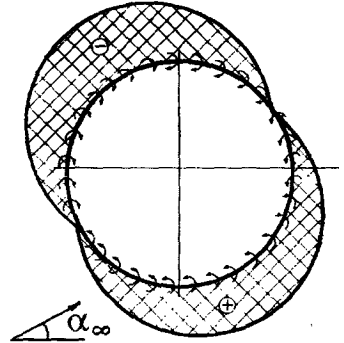


Рис. 3.56

С другой стороны эта компонента равна плотности присоединенных вихрей $\gamma(\theta) = v_\theta^+ - v_\theta^-$, поскольку $v_\theta^+ = v_\theta$, а $v_\theta^- = 0$ как скорость на внутренней стороне поверхности твердого обтекаемого контура. Поскольку задача об обтекании цилиндра рассматривалась при $\alpha_\infty = 0$, то полученное решение интегрального уравнения находится в полном согласии с результатом этой задачи.

На рис. 3.56 графически представлено распределение плотности присоединенных вихрей по поверхности цилиндра при его бесциркуляционном обтекании.

В случае тонкого профиля, когда всюду на контуре $|y(s)| \ll b$, где $y|_{x=-b} = y|_{x=+b} = 0$, можно приближенно принять

$$\frac{dx}{ds} \approx -1, \quad \frac{dy}{ds} \approx -\frac{dy}{dx},$$

причем $y = y(x)$ — уравнение срединной линии внутри контура C , на которой располагаются присоединенные вихри плотностью $\gamma(y(x)) \approx \gamma(x)$.

Тогда из уравнения (3.161) получаем, с точностью до малых величин $|y|/b$, считая $|\alpha_\infty| \ll 1$:

$$\alpha_\infty - y'_x(x) = \frac{1}{2\pi|v_\infty|} \int_{-b}^b \frac{\gamma(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (3.162)$$

Это соотношение представляет собой основное сингулярное (с ядром Коши) интегральное уравнение теории тонкого контура, замененного срединной линией.

Интегральное уравнение этого типа встречается в задачах теории упругости, электромагнетизма и др. Методы решения его разрабатывались рядом исследователей; подробную библиографию можно найти в книге [23].

В нашем случае в условиях плавного обтекания гладкой кривой $y = y(x)$, т. е. когда в ее передней точке $\gamma(x)$ обращается в бесконечность, как $1/\sqrt{x}$ при $x \rightarrow 0$, а в кормовой (при $x = b$) равно нулю, так что можно представить

$$\gamma(x) = \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} g(x),$$

где $g(x)$ не имеет особенностей на $[-b, b]$, решение уравнения (3.162) имеет вид [23]:

$$\gamma(x) = \frac{2|v_\infty|}{\pi} \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} \frac{y'_x(\xi) - \alpha_\infty}{\xi - x} d\xi. \quad (3.163)$$

Вычисляя циркуляцию Γ вокруг контура, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-b}^b \gamma(x) dx = \frac{2|v_\infty|}{\pi} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} (y'_x(\xi) - \alpha_\infty) \left\{ \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b-x}{b+x}} \frac{dx}{\xi - x} \right\} d\xi = \\ &= 2|v_\infty| \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} (y'_x(\xi) - \alpha_\infty) d\xi = 2b|v_\infty| \left(-\pi\alpha_\infty + \frac{1}{b} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} \frac{dy(\xi)}{d\xi} d\xi \right). \end{aligned} \quad (3.164)$$

Величина подъемной силы равна

$$P = \rho |v_\infty| |\Gamma|.$$

Момент сил давления M относительно средней точки профиля складывается из моментов подъемных сил на элементах вихревого слоя, равных $\rho |v_\infty| \gamma(x) x dx$, так что

$$\begin{aligned} M &= \rho |v_\infty| \int_{-b}^b \gamma(x) x dx = \frac{2\rho |v_\infty|^2}{\pi} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} (y'_x(\xi) - \alpha_\infty) \left\{ \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \frac{x dx}{\xi - x} \right\} d\xi = \\ &= 2\rho |v_\infty|^2 \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+\xi}{b-\xi}} \left(\alpha_\infty - \frac{dy(\xi)}{d\xi} \right) \pi (b - \xi) d\xi = \\ &= \rho b^2 |v_\infty|^2 \left\{ \pi \alpha_\infty - \frac{2}{b^2} \int_{-b}^b \frac{dy(\xi)}{d\xi} \sqrt{b^2 - \xi^2} d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (3.165)$$

Приведем наиболее известный в расчетной практике метод тригонометрических рядов решения уравнения (3.162), предложенный Глауэртом (1931 г.).

Переходя в (3.162) к переменной θ ($x = b \cos \theta$), имеем

$$\alpha_{\infty} - y'_x = \frac{1}{2\pi |v_{\infty}|} \int_0^{\pi} \frac{\gamma(\theta') \sin \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}. \quad (3.166)$$

При выборе тригонометрического ряда, представляющего функцию $\gamma(\theta)$, учитывается ее поведение в задней и передней кромках кривой $y = y(x)$, так что $\gamma(\theta)$ ищется в виде

$$\gamma(\theta) = 2|v_{\infty}| \left(A_0 \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta \right) = 2|v_{\infty}| \left(A_0 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \theta \right). \quad (3.167)$$

Подставляя (3.167) в (3.166), получаем

$$\alpha_{\infty} - y'_x(\theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ A_0 (J_0 - J_1) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n (J_{n-1} - J_{n+1}) \right\}, \quad (3.168)$$

где обозначено

$$J_n \equiv J_n(\theta) = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta',$$

причем, имеется в виду главное значение по Коши интеграла, так что, например,

$$J_0 = \int_0^{\pi} \frac{d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right|_{\theta'=\theta}^{\theta'=\theta-\epsilon} + \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} - \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right|_{\theta'=\theta+\epsilon}^{\theta'=\pi} \right\} = 0.$$

Имеем: $J_1 = \pi + J_0 \cos \theta = \pi$ и рекуррентное соотношение (для $n > 1$), следующее из выражения для J_n :

$$J_{n+1} + J_{n-1} = 2J_n \cos \theta.$$

Отсюда получаем

$$J_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} = \pi \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}.$$

Тогда формула (3.166) дает

$$y'_x(\theta) - \alpha_{\infty} = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(n-1)\theta - \sin(n+1)\theta}{\sin \theta} + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta,$$

и, следовательно:

$$A_0 + \alpha_{\infty} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y'_x(\theta) d\theta; \quad A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y'_x(\theta) \cos n\theta d\theta. \quad (3.169)$$

Используя (3.167), получаем выражение для циркуляции

$$\Gamma = \int_{-b}^b \gamma(x) dx = b \int_0^\pi \gamma(\theta) \sin \theta d\theta = b\pi \left(A_0 + \frac{A_1}{2} \right)$$

и для момента сил давления относительно точки $x = 0$:

$$\begin{aligned} M &= \rho |v_\infty|^2 \int_{-b}^b \gamma(x) x dx = \rho |v_\infty|^2 b^2 \int_0^\pi \gamma(\theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = \\ &= 2\rho |v_\infty|^2 b^2 \int_0^\pi \left(A_0 \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} + \sum_{n=1}^\infty A_n \sin n\theta \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = \rho b^2 |v_\infty|^2 \pi \left(-A_0 + \frac{A_2}{2} \right). \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения A_n из (3.169), получаем выражения (3.164) и (3.165).

Решение Л.И. Седовым задачи об обтекании тонкого профиля

Изыщное решение Л.И. Седова [21] основано на методе присоединенных особенностей, хотя в явном виде эти особенности не проявляются в построении решения. Решение не требует замены тонкого профиля средней линией, по которой распределены присоединенные вихри —

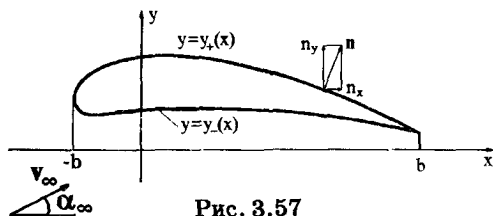


Рис. 3.57

в нем участвуют уравнения верхней кривой $y = y_+(x)$ и нижней кривой $y = y_-(x)$, ограничивающих тонкий профиль (см. рис. 3.57). При этом, условия

$$|y_+| \sim |y_-| \ll b, \left| \frac{dy_+}{dx} \right| \sim \left| \frac{dy_-}{dx} \right| \ll 1, \alpha_\infty \ll 1 \quad (3.170)$$

будут использованы в построении решения.

Если $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y)$ — скорость потока, то граничное условие для непроницаемого профиля имеет вид

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Big|_{y_+(x)} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \Big|_{y_-(x)} = 0.$$

Представим: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_*$, где второе слагаемое, исчезающее на бесконечности, отражает изменение однородного потока внесенным его контуром. Граничное условие для \mathbf{v}_* можно записать в виде

$$\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} \Big|_{y_+} = -\mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{n} \Big|_{y=y_+} = -|v_\infty| \left(n_x \cos \alpha_\infty + n_y \sin \alpha_\infty \right) \Big|_{y=y_+} \approx |v_\infty| \left(\alpha_\infty - \frac{dy_+}{dx} \right), \quad (3.171)$$

$$\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} \Big|_{y=y_{\pm}} \approx -|v_{\infty}| \left(\alpha_{\infty} - \frac{dy_{\pm}}{dx} \right).$$

Здесь граничные условия записаны с точностью до малых величин первого порядка $\left(n_y \Big|_{y=y_{\pm}} \approx \pm 1, n_x \Big|_{y=y_{\pm}} \approx \pm \frac{dy}{dx}, \cos \alpha_{\infty} \approx 1, \sin \alpha_{\infty} \approx \alpha_{\infty} \right)$.

Кроме того, поскольку $\mathbf{v}_* \cdot \mathbf{n} \Big|_{y=y_{\pm}} = v_{*x} n_x^{\pm} + v_{*y} n_y^{\pm} \approx \pm v_{*y}$, то окончательно имеем

$$v_{*y} \Big|_{y=y_{+}(x)} = |v_{\infty}| \left(\alpha_{\infty} - \frac{dy_{+}}{dx} \right); \quad v_{*y} \Big|_{y=y_{-}(x)} = |v_{\infty}| \left(\alpha_{\infty} - \frac{dy_{-}}{dx} \right).$$

Для комплексно-сопряженных скоростей, когда

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_{\infty} + \bar{v}_*(z)$$

имеем условие для мнимой части $\bar{v}_*(z)$:

$$\operatorname{Im} \bar{v}_*(z) \Big|_{y=y_{+}(x)} = |v_{\infty}| \left(\alpha_{\infty} - \frac{dy_{+}}{dx} \right), \quad (3.172)$$

$$\operatorname{Im} \bar{v}_*(z) \Big|_{y=y_{-}(x)} = |v_{\infty}| \left(\alpha_{\infty} - \frac{dy_{-}}{dx} \right). \quad (3.173)$$

Скорость $\bar{v}_*(z)$ ищется в виде

$$\bar{v}_*(z) = \bar{v}^{(1)}(z) + \bar{v}^{(2)}(z),$$

причем по переменной y первое слагаемое $\bar{v}^{(1)}(z)$ имеет антисимметричную действительную часть и симметричную мнимую, а $\bar{v}^{(2)}(z)$ — наоборот: симметричную действительную и антисимметричную мнимую, т. е.

$$\begin{aligned} v_x^{(1)}(x, y) &= -v_x^{(1)}(x, -y), \quad v_y^{(1)}(x, y) = v_y^{(1)}(x, -y), \\ v_x^{(2)}(x, y) &= v_x^{(2)}(x, -y), \quad v_y^{(2)}(x, y) = -v_y^{(2)}(x, -y). \end{aligned} \quad (3.174)$$

Таким образом, $\bar{v}^{(1)}$ представляет собой скорость от вихрей, расположенных на оси x , а $\bar{v}^{(2)}$ — скорость от особенностей типа диполей или источников (стоков) с суммарной мощностью равной нулю (см. рис. 3.58).

Граничное условие, имея в виду (3.172) и (3.173), можно записать в виде

$$\operatorname{Im} \bar{v}^{(1)} \Big|_{y=+0} + \operatorname{Im} \bar{v}^{(2)} \Big|_{y=+0} = |v_{\infty}| (\alpha_{\infty} - y'_+(x)), \quad (3.175)$$

$$\operatorname{Im} \bar{v}^{(1)} \Big|_{y=-0} + \operatorname{Im} \bar{v}^{(2)} \Big|_{y=-0} = |v_{\infty}| (\alpha_{\infty} - y'_-(x)).$$

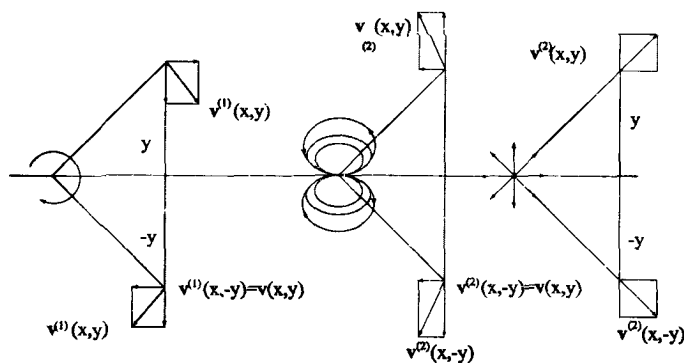


Рис. 3.58

Здесь условия на кривых $y_+(x)$ и $y_-(x)$ снесены на разные берега оси x , а именно $(+0)$ и (-0) , вследствие условий (3.170).

Складывая и вычитая равенства (3.172) и (3.173), получаем в силу (3.174)

$$\operatorname{Im} \bar{v}^{(1)} \Big|_{y=+0} = \operatorname{Im} \bar{v}^{(1)} \Big|_{y=-0} = \frac{|v_{\infty}|}{2} (2\alpha_{\infty} - y'_+(x) - y'_-(x)), \quad (3.176)$$

$$\operatorname{Im} \bar{v}^{(2)} \Big|_{y=+0} = \operatorname{Im} \bar{v}^{(2)} \Big|_{y=-0} = \frac{|v_{\infty}|}{2} (y'_-(x) - y'_+(x)).$$

Представим $\bar{v}^{(2)}(z)$ в виде интеграла Коши

$$\bar{v}^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\bar{v}^{(2)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

где точка z лежит внутри контура L (см. рис. 3.59). С другой стороны

$$\oint_{L'} \frac{\bar{v}^{(2)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

если точка z лежит вне контура L' .

Выберем контур $L' = L + l' + l'' + C_1 + C_2$ так, как показано на рис. 3.59, причем, учитывая указанные направления обхода, имеем

$$\oint_{L'} + \int_{L'} + \int_{l'} + \int_{l''} + \int_{C_1} + \int_{C_2} = 0. \quad (3.177)$$

В пределе, когда сходятся берега l' и l'' , контур C_1 отодвигается на бесконечность, а контур C_2 превращается в две стороны ($y = +0$ и $y = -0$) отрезка $(-b, b)$ оси x , из (3.177) получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{v}^{(2)}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-b}^b \left(\frac{\bar{v}^{(2)}(\zeta)}{\zeta - z} \right)_{y=+0} dx - \int_{-b}^b \left(\frac{\bar{v}^{(2)}(\zeta)}{\zeta - z} \right)_{y=-0} dx \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{-b}^b \left(\frac{i}{x - z} \right) v_{\infty} (y'_-(x) - y'_+(x)) dx \right\} = \frac{|v_{\infty}|}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{y'_-(x) - y'_+(x)}{x - z} dx. \end{aligned}$$

При определении $\bar{v}^{(1)}(z)$ с помощью интеграла Коши эта часть комплексной скорости от присоединенных особенностей домножается на некоторую функцию $g(z)$, причем $g(z)$ выбирается так, чтобы у $g(z)\bar{v}^{(1)}(z)$ мнимая часть была разрывной на отрезке $(-b, b)$ и чтобы сохранить предельный переход от профиля к пластинке, у которой в передней кромке $\bar{v}(z)$ обращается в бесконечность, а в условиях плавного обтекания в задней кромке — в нуль.

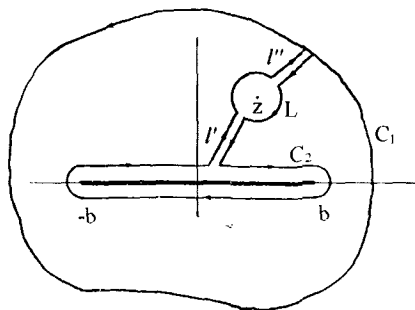


Рис. 3.59

В качестве такой функции выбирается $g(z) = \sqrt{\frac{z+b}{z-b}}$, причем знак плюс у корня берется при $y < 0$, а минус — при $y > 0$, так что

$$g(x+i0) = -\sqrt{\frac{x+b}{x-b}} = -i\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}, \quad g(x-i0) = \sqrt{\frac{b+x}{b-x}}.$$

Тогда

$$g(z)\bar{v}^{(1)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{\bar{v}^{(1)}(\zeta) g(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =$$

$$= \frac{|v_\infty|}{2\pi i} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \cdot \frac{2\alpha_\infty - y'_+(x) - y'_-(x)}{x-z} dx.$$

Определяя отсюда $\bar{v}^{(1)}(z)$, окончательно для $\bar{v}(z)$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{|v_\infty|}{2\pi i} \sqrt{\frac{z-b}{z+b}} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} \cdot \frac{2\alpha_\infty - y'_+(x) - y'_-(x)}{x-z} dx + \\ + \frac{|v_\infty|}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{y'_-(x) - y'_+(x)}{x-z} dx. \end{aligned} \quad (3.178)$$

Для вычисления главного вектора и главного момента сил давления, достаточно найти, исходя из (3.178), явное выражение для коэффициентов b_{-1} и b_{-2} в разложении

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + \dots$$

Так как

$$\sqrt{\frac{z-b}{z+b}} = 1 - \frac{b}{z} + \dots, \quad \frac{1}{x-z} = -\frac{1}{z} - \frac{x}{z^2} + \dots,$$

то

$$b_{-1} = \frac{|v_\infty|}{2\pi i} \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} (y'_+(x) - y'_-(x) - 2\alpha_\infty) dx + \frac{|v_\infty|}{2\pi} \int_{-b}^b \{y'_+(x) - y'_-(x)\} dx,$$

$$b_{-2} = -\frac{|v_\infty|}{2\pi i} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - x^2} (y'_+(x) + y'_-(x) - 2\alpha_\infty) dx - \frac{|v_\infty|}{2\pi} \int_{-b}^b \{y'_+(x) - y'_-(x)\} x dx.$$

Поскольку в выражении b_{-1} второе слагаемое равно нулю ($y_+(\pm b) = y_-(\pm b)$), то значения циркуляции Γ , величины подъемной силы P и момента L_0 согласно (3.137) и (3.138) имеют вид

$$\Gamma = |v_\infty| \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} (y'_+(x) + y'_-(x) - 2\alpha_\infty) dx,$$

$$P = \rho |v_\infty|^2 \int_{-b}^b \sqrt{\frac{b+x}{b-x}} (y'_+(x) + y'_-(x) - 2\alpha_\infty) dx,$$

$$L_0 = -2\pi\rho \operatorname{Re}\{i\bar{v}_\infty b_{-2}\} = \\ = \rho |v_\infty|^2 \left\{ \int_{-b}^b \sqrt{b^2 - x^2} (y'_+(x) + y'_-(x) - 2\alpha_\infty) dx + \alpha_\infty \int_{-b}^b (y'_+(x) - y'_-(x)) x dx \right\}.$$

Задачи с решениями

Задача 3.4.1. Найти выражение для силы и момента, действующих на твердый контур C со стороны безвихревого потока несжимаемой жидкости со скоростью v_∞ вдали от контура, если известно, что его обтекание может быть полностью заменено обтеканием следующих присоединенных особенностей внутри контура C : 1) n источников (стоков), мощностью Q_1, Q_2, \dots, Q_n , расположенных в точках a_1, a_2, \dots, a_n ; 2) S диполей с моментами m_1, m_2, \dots, m_S , расположенных в точках b_1, b_2, \dots, b_S ; 3) r вихрей с интенсивностью $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_r$, расположенных в точках C_1, C_2, \dots, C_r .

Решение. Комплексный потенциал суммарного (однородного и от присоединенных особенностей) потока равен

$$w(z) = \bar{v}_\infty z + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \ln(z - a_k) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^r \Gamma_k \ln(z - C_k) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^S \frac{m_k e^{i\alpha_k}}{z - b_k},$$

а комплексная скорость

$$\bar{v}(z) = \frac{dw}{dz} = \bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{z - a_k} - \frac{i}{2\pi} \sum_{k=1}^r \frac{\Gamma_k}{z - C_k} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^S \frac{m_k e^{i\alpha_k}}{(z - b_k)^2}.$$

Согласно формулам Чаплыгина (3.137) и теореме о вычетах, имеем

$$\bar{P} = \frac{i\rho}{2} \int_C \bar{v}^2(z) dz = \frac{i\rho}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \bar{v}^2(z),$$

$$\bar{L}_0 = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C \bar{v}^2 z dz = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} (z \bar{v}^2(z)) \right\}.$$

Разлагая $\bar{v}(z)$ в ряд Лорана, получаем

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots$$

Вычисления дают

$$A_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n Q_k - i \sum_{k=1}^r \Gamma_k \right),$$

$$A_2 = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^n Q_k a_k - i \sum_{k=1}^r \Gamma_k b_k + \sum_{k=1}^S m_k e^{i\alpha_k} \right).$$

Кроме того

$$\bar{v}^2(z) = \bar{v}_\infty^2 + \frac{2A_1\bar{v}_\infty}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_2\bar{v}_\infty}{z^2} + \dots$$

Таким образом,

$$\bar{P} = -2\pi\rho A_1\bar{v}_\infty,$$

$$\bar{L}_0 = -\rho\pi \operatorname{Re}\{i(A_1^2 + 2A_2\bar{v}_\infty)\}.$$

Поскольку $\bar{P}e^{i\alpha} = X - iY$, где X — сила сопротивления (проекция равнодействующей \mathbf{P} на направление \mathbf{v}_∞), а Y — подъемная сила, то отсюда имеем

$$X = -\rho|\mathbf{v}_\infty| \sum_{k=1}^n Q_k; \quad Y = \rho|\mathbf{v}_\infty| \sum_{k=1}^r \Gamma_k. \quad (1)$$

Таким образом, если контур испускает (поглощает) жидкость ($\sum_{k=1}^n Q_k \neq 0$), то на него

действует сила сопротивления; в случае непроницаемого контура ($\sum_{k=1}^r Q_k = 0$) остается отличной от нуля только подъемная сила, вычисляемая по формуле Жуковского $Y = \rho|\mathbf{v}_\infty|\Gamma$, где Γ — суммарная циркуляция скорости вокруг контура.

Для момента L_0 имеем выражение

$$L_0 = -\frac{\rho}{2\pi} \sum_{k=1}^n Q_k \cdot \sum_{k=1}^r \Gamma_k - \rho \operatorname{Re} \bar{v}_\infty \left(\sum_{k=1}^r \Gamma_k b_k + iM \right), \quad (2)$$

где обозначено $M = \sum_{k=1}^n Q_k a_k + \sum_{k=1}^s m_k e^{i\alpha_k}$ — суммарный момент присоединенных источников и диполей.

В случае непроницаемого контура первое слагаемое в этой формуле равно нулю.

Задача 3.4.2. Для произвольной твердой кривой $y = y(x)$, обтекаемой однородным потоком со скоростью \mathbf{v}_∞ , получить выражение подъемной силы через интенсивность $\gamma(x, y(x))$ присоединенных к этой кривой вихрей, распределенных по $y(x)$ (см. рис. 3.60).

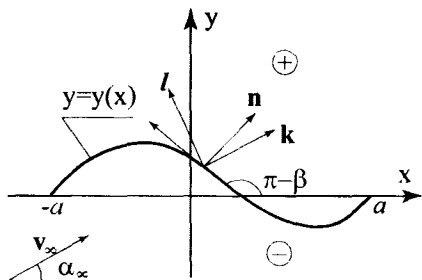


Рис. 3.60

Решение. Скорость в любой точке потока представим как сумму

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}^\gamma(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{v}^\gamma(\mathbf{r})$ — скорость от присоединенных вихрей.

При этом в любой точке с твердой кривой существует локальное соотношение (см. ч. 2, § 5,)

$$\mathbf{v}_+^{\gamma}(s) = -\mathbf{v}_-^{\gamma}(s), \quad \mathbf{v}_+^{\gamma}(s) - \mathbf{v}_-^{\gamma}(s) = \gamma \times \mathbf{n} = \tau \gamma(s), \quad (1)$$

где $\mathbf{v}_+^{\gamma}(s)$ — скорость от присоединенных вихрей с той стороны кривой, куда направлен орт нормали \mathbf{n} , а $\mathbf{v}_-^{\gamma}(s)$ — то же с противоположной стороны кривой.

Выражая силу, действующую на твердую кривую со стороны потока, через разность давлений по обе стороны кривой и используя интеграл Бернулли, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= - \int_0^{s_0} (p_+ - p_-) \mathbf{n} ds = \frac{\rho}{2} \int_0^{s_0} (v_+^2 - v_-^2) \mathbf{n} ds = \\ &= \frac{\rho}{2} \int_0^{s_0} (\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) \cdot (\mathbf{v}_+ + \mathbf{v}_-) \mathbf{n} ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Подставляя сюда значения скорости на кривой, а именно $\mathbf{v}_{\pm}(s) = \mathbf{v}_{\infty} + \mathbf{v}_{\pm}^{\gamma}(s)$, и учитывая (2), получаем

$$\mathbf{P} = \rho \int_0^{s_0} \gamma(s) (\tau \cdot \mathbf{v}_{\infty}) \mathbf{n} ds.$$

Вводя орты $\mathbf{k} = \mathbf{v}_{\infty} / v_{\infty}$, $\mathbf{l} = \mathbf{i}_z \times \mathbf{k}$, получаем выражение для подъемной силы $Y = \mathbf{P} \cdot \mathbf{l}$

$$\mathbf{P} = \rho v_{\infty} \int_0^{s_0} \gamma(s) (\tau \cdot \mathbf{k}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) ds. \quad (3)$$

Если кривая и однородный поток ориентированы относительно системы (xOy) так, как показано на рис. 3.60, то

$$k_x = l_y = \cos \alpha_{\infty}, \quad k_y = -l_x = \sin \alpha_{\infty}$$

$$n_x = \tau_y = -\frac{y'_x}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}, \quad n_y = -\tau_x = \frac{1}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}}.$$

Поэтому из (3) окончательно получаем, переходя от интегрирования по дуге кривой к интегрированию по x :

$$Y = \rho v_{\infty} \int_{-a}^a \gamma(x, y(x)) \frac{(y'_x \sin \alpha_{\infty} + \cos \alpha_{\infty})^2}{\sqrt{1 + (y'_x)^2}} dx.$$

Упражнения

1. Выразить относительную толщину симметричного профиля Жуковского (см. пример 3, § 3.3) через параметр ε , характеризующий сдвиг центра отображающего круга по действительной оси.

2. Найти значение подъемной силы и момента сил, пользуясь решением Л.И. Седова для тонкого профиля:

а) для дужки окружности (см. § 3.3, пример 2) с прогибом, равным 0,1 от хорды дужки;

б) для симметричного профиля Жуковского с 10 % относительной толщиной.

3. Найти вихревую интенсивность присоединенных вихрей для дужки окружности, получающейся из круга при помощи преобразования Жуковского (см. § 3.3, пример 2).

4. Для кривой $y(x) = 0,1a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right)$ найти величину подъемной силы, если она обтекается потоком со скоростью v_∞ , а угол атаки равен 5° , исходя из решения основного интегрального уравнения (3.159).

5. Задание упражнения 4 выполнить, исходя из решения Л.И. Седова. Сравнить результаты с результатом предыдущего упражнения.

6. Показать, что поле $\vec{v}_*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\gamma(s') ds'}{z - z(s')}$ может быть получено из соответствующей формулы для вихревой пелены (см. задачу 5.5 и упр. 8, ч. 2, § 5)

$$\mathbf{v}_*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_C \gamma(s') \frac{\mathbf{i}_z \times \mathbf{R}}{R^2} ds',$$

где $\mathbf{R} = (x - x')\mathbf{i}_x + (y - y')\mathbf{i}_y$.

§ 3.5. Разрывные течения со свободными линиями тока

Во всех предыдущих примерах гидродинамических потоков мы исходили из непрерывности поля скоростей и давлений. При обтекании твердых тел предполагалось, что линии тока не отрываются от поверхности тела, так что обтекание считалось плавным, а значения скорости во всех точках потока конечными и не приводящими к отрицательным давлениям.

Такая схема, однако, допускала парадокс Даламбера об отсутствии силы сопротивления у тела, обтекаемого однородным потоком.

«Я не вижу почему, но допускаю, что нельзя удовлетворительно объяснить сопротивление жидкости при помощи теории. Мне кажется, наоборот, что при применении и изучении этой теории с надлежащим вниманием сопротивление получается в большинстве случаев равным нулю. Странный парадокс, объяснение которого представляю математикам», — писал Даламбер в 1768 г.

В XIX веке практические применения гидродинамики уже не могли игнорировать силу сопротивления, «ученые стали искать видоизменения этой теории».

Гельмгольц был первым, который в 1858–1868 гг. предложил схему течения с разрывами непрерывности касательной компоненты скорости или схему обтекания тел с отрывом струй. Допуская существование вихревых движений в жидкости, Гельмгольц заметил, что в природе *невязких* жидкостей нет ничего, чтобы препятствовало конечному различию скоростей в сколь угодно близко прилегающих друг к другу слоях, ибо такое скольжение соседних слоев не приводит к возникновению сил между ними. При этом компоненты скорости и давления, направленные перпендикулярно к такой поверхности разрыва, должны быть равны.

Затем Кирхгоф (1869) и независимо от него Рэлей (1876), приняв гипотезу Гельмгольца, допустили, что «...у краев пластины, погруженной в поток, образуется поверхность разрыва, отделяющая жидкость, находящуюся сзади пластинки, от остальной, простирающейся в бесконечность, которая находится в состоянии покоя, под постоянным давлением», — писал Рэлей. Это позволило получить отличную от нуля силу сопротивления пластинки потоку.

Наконец, позже (1901) Леви-Чевита применил схему с поверхностями разрыва для изучения обтекания тел, у которых струи срываются не только с острых кромок. Эта схема, предложенная Леви-Чевита и принятая в основном при современном рассмотрении задач обтекания с отрывом струй, состоит в следующем.

Движение жидкости при установившемся обтекании тела образует сзади него поверхность разрыва, состоящую из свободных линий тока, сошедших с поверхности тела в точках некоторой кривой L и уходящих на бесконечность (см. рис. 3.61). Эта поверхность разрыва отделяет область I потока жидкости, от «мертвой, застойной области» II, где скорость равна нулю, а давление всюду постоянно и равно давлению далеко вверх по потоку (p_∞). Движение вне застойной зоны — безвихревое, удовлетворяющее обычным условиям на бесконечности, так что в области I (в плоских потоках) можно ввести функцию комплексного потенциала $w(z) = \varphi + i\psi$.

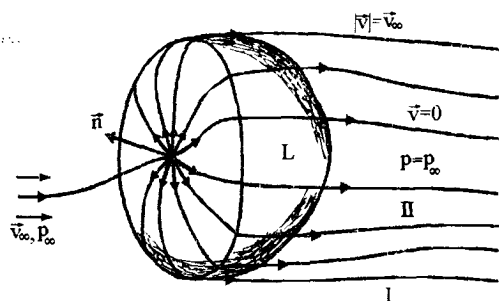


Рис. 3.61

На свободных линиях тока, или струях, составляющих поверхность разрыва, скорость постоянна и равна v_∞ , как это следует из уравнения Бернулли, а давление — всюду такое же, как и в застойной области, т. е. p_∞ . В этом их отличие от линий тока на твердом теле, где форма линий тока задана, а давление — не

постоянно и его значение определяет силовое воздействие потока на тело. Форма свободных линий тока неизвестна и определяется в ходе решения задачи. Известно только, что они сходят с поверхности твердых тел по касательной к поверхности.

Заметим, кроме того, что свободные линии тока выпуклы в сторону потока жидкости, поскольку давление p в жидкости меньше, чем в застойной зоне p_∞ и, следовательно, сила $(-\nabla p)$, действующая на частицы криволинейной свободной линии тока, направлена внутрь застойной зоны.

Эта схема, хотя и дает отличную от нуля силу сопротивления тела, но величина силы получается примерно вдвое меньше, чем при эксперименте. Это связано с упрощениями, принятыми в схеме, что видно из следующего рассмотрения ее физических оснований.

Основанием для принятия струйного обтекания послужило явление отрыва пограничного слоя от поверхности твердых тел. При этом отрыв может происходить, как в угловых точках поверхности, так и на гладких участках. Пограничный слой подробно изучается в специальном разделе гидромеханики, где рассматриваются течения при $Re \gg 1$. Сейчас нам важно отметить, что при пе-

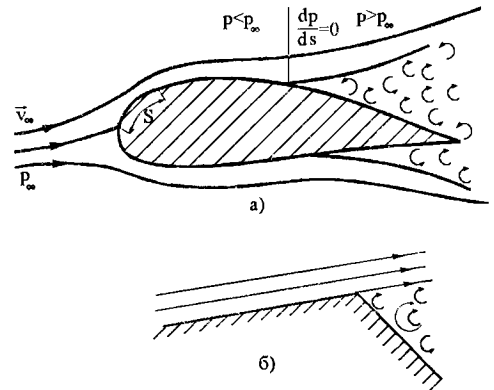


Рис. 3.62

реходе от передней части обтекаемого тела к кормовой, примерно в месте максимального поперечного сечения, где давление вне пограничного слоя начинает вниз по потоку повышаться, переходя через минимум, а скорость на внешней границе — уменьшаться, наблюдается отход линий тока от поверхности тела (см. рис. 3.62, а).

При этом в слое могут возникнуть возвратные течения, а за отошедшей от тела линией тока образуется зона беспорядочного вихревого движения. В некоторых случаях в этой зоне стабилизируются отдельные вихри, которые выстроятся в шахматном порядке в вихревую дорожку (см. рис. 3.62, б).

Как было замечено, близкие к гладкой поверхности тела линии тока отходят от нее при отрыве пограничного слоя почти по касательной.

Пограничный слой может отрываться у угловых точек, поскольку, как известно (см. § 3.3), если они не являются точками схода струй, скорость их обтекания очень большая (теоретически — бесконечно большая), и возле них возникает зона возвратного тока (см. рис. 3.62, б), заполненная вихрями. Так что при срыве свободных струй с угловых точек линии тока сходят с них также по касательной к стороне угла.

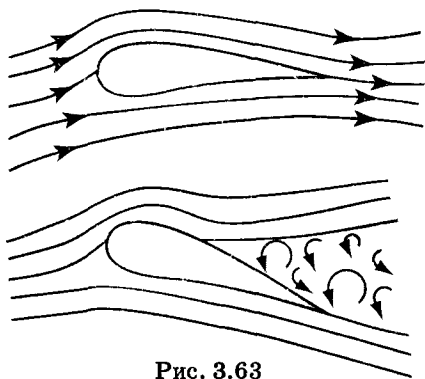


Рис. 3.63

Но наиболее ярко выраженный срыв потока и образование свободных струй, оторвавшихся от тела, происходит у острых кромок. Так, например, у плоской пластинки, помещенной

При обтекании крылового профиля в условиях плавного обтекания, т. е. когда угол атаки мал, пограничный слой почти следует контуру профиля (см. Рис. 3.63); но стоит увеличить угол атаки и пройти его критическое значение, пограничный слой отрывается от профиля и образуется зона вихревого течения между двумя сорвавшимися струями.

поперек потока (см. рис. 3.64), вначале (при малых числах Re) образуется зона, уходящая на бесконечность (рис. 3.64, а); движения в этой зоне почти нет. Затем, при увеличении числа Re , в застойной зоне образуется два вихря, симметрично расположенных (см. рис. 3.64, б). Наконец, эти вихри сносятся вниз по потоку (см. рис. 3.64, в), выстраиваясь в цепочку вихрей (вихревая дорожка Кармана).

Рис. 3.64 выполнен на основании фотографий, приведенных в [9].

В изложенной выше теоретической схеме не учитывается движение жидкости в застойной зоне и именно поэтому сопротивление тел, полученное теоретически, занижено.

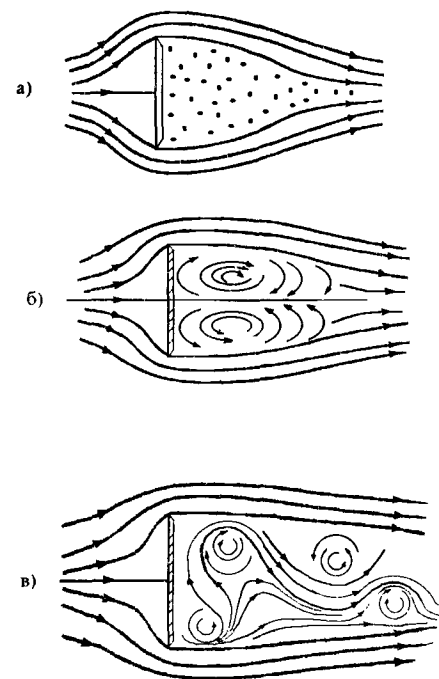


Рис. 3.64

Более близкой к действительности выглядит схема струйного обтекания в применении к изучению струйного истечения жидкости из отверстий и насадков в воздушную среду. Воздух, конечно, приводится истекающей жидкостью в движение, но оно незначи-

тельно, вследствие меньшей вязкости воздуха, так что этим движением действительно можно пренебречь.

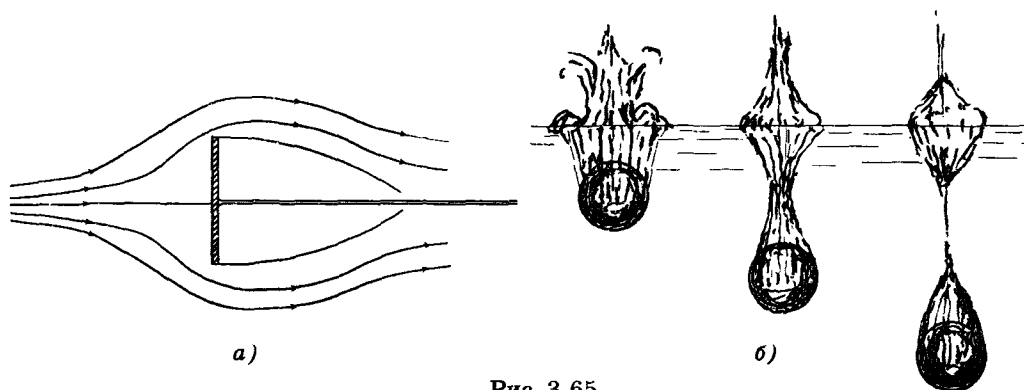


Рис. 3.65

Весьма интересное применение находит схема течений с разрывами непрерывности при изучении движения капельных жидкостей с кавернами-полостями, наполненными воздухом или парами жидкости. Так, если поставить диск нормально к потоку воды, то за диском возникает каверна-полость (см. рис. 3.65, а), заполненная парами воды. В эту каверну можно подавать искусственно воздух и увеличить ее протяженность вниз по потоку.

При падении в воду шарика, за ним образуется воздушная каверна, которая при дальнейшем погружении шарика в воду разрывается и становится конечной, движущейся за телом. Схематически образование каверн за телом изображено на рис. 3.64, б.

Интересные фотографии воздушных каверн и пузырей приведены в [9].

Так или иначе, но схема струйного обтекания нашла свое достаточно широкое использование в практике, и поэтому ее основные задачи воспроизводятся в этом разделе.

К сожалению, схема в применении к трехмерным потокам, даже осесимметричным, приводит к большим теоретическим затруднениям. Но, в двумерных потоках она является яркой иллюстрацией метода конформных отображений в гидромеханике. Целый ряд интересных задач струйного течения можно найти в [8], [9], [21], [25].

Обтекание пластины

Пусть пластинка AA' длиной l помещена в двумерный однородный поток со скоростью v_∞ вдали от нее. Выберем оси x и y в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ (физической плоскости) так, как показано на рис. 3.65, а. Линии AC и $A'C'$, начинающиеся на краях пластинки A и A' , имеющие в этих точках вертикальные касательные и уходящие в бесконечность, представляют *свободные линии тока*, линии разрыва скорости: на них, как и на пластинке $\psi = 0$, а скорость по величине равна $|v_\infty|$. Они отделяют область потока (заштрихована) от застойной зоны. Примем, что в середине пластинки — в точке O потенциал скорости равен нулю, т. е. $\varphi(0) = 0$.

Рассмотрим плоскость комплексного переменного $w = \varphi + i\psi$. В ней область потока занимает всю плоскость, кроме разреза по действительной оси (рис. 3.66, б).

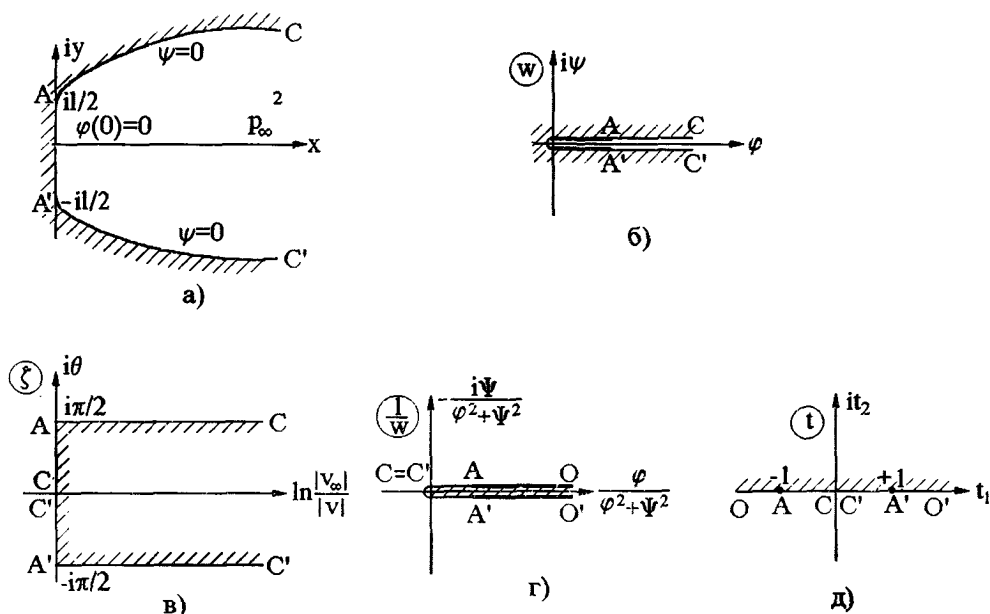


Рис. 3.66

Введем предложенную М. Планком и использованную Н.Е. Жуковским в рассмотрении задач струйного течения функцию

$$\zeta = \ln \left(\left| \mathbf{v}_\infty \right| \frac{dz}{dw} \right) = \ln \frac{|\mathbf{v}_\infty|}{\bar{v}}$$

(Кирхгоф рассматривал вместо функции ζ функцию $\frac{1}{\bar{v}} = \frac{dz}{dw}$).

В плоскости комплексного переменного $\zeta = \ln \frac{|\mathbf{v}_\infty|}{|\bar{v}|} + i\theta$ ($\theta = \arg \zeta = \arg v$, $\operatorname{Re} \zeta = \ln \frac{|\mathbf{v}_\infty|}{|\bar{v}|}$) область потока перейдет во внутренность полуплоскости, расположенной симметрично относительно действительной оси и простирающейся на бесконечность (см. рис. 3.66). Свободные струи, на которых $|\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_\infty|$, изображаются отрезками мнимой оси: сама же пластинка, где скорость \mathbf{v} направлена по мнимой оси физической плоскости и равна нулю в точке O , а ее направление до и в точке срыва определяется углами $\frac{\pi}{2}$ (в точке A) и $-\frac{\pi}{2}$ (в точке A') изображается отрезками AO и $A'O'$ (см. рис. 3.66, в).

Рассмотрим область изменения переменной $1/w$: она состоит из двух берегов действительной оси плоскости $1/w$ (см. рис. 3.66, г). Введем новую комплексную переменную $t = it_1 + t_2$ и отображим область $1/w$ на верхнюю полуплоскость t , причем так, чтобы точки A и A' попали соответственно в -1 и $+1$, а C и C' остались в начале координат. Для этого используем формулу Шварца-Кристоффеля (см. § 2, (3.83)). Поскольку в рассматриваемом случае¹ $n=1$, $x_1=0$, $\alpha_1=2\pi$, то полагая в формуле

$w \rightarrow \frac{1}{w}$ и $z \rightarrow t$, имеем

$$\frac{1}{w} = C_1 \int t dt + C_2 = \frac{C_1}{2} t^2 + C_2.$$

Поскольку при $t=0$ (в точках C и C') $w = \varphi = \infty$, то $C_2 = 0$ и $w = \frac{2}{C_1 t^2}$, причем C_1 — действительно.

Теперь при помощи формулы Шварца-Кристоффеля отображим полуполосу из области ζ , а именно $O'A'AO$, на верхнюю полуплоскость t .

¹ Фактически $n=2$; но вторая вершина, в которой точки O и O' совпадают, расположена на бесконечности, так что в формуле Шварца-Кристоффеля множитель с $x_2 = \infty$ не учитывается.

В этом случае имеем (третья вершина дает $x_3 = \infty$): $n = 2$, $x_1 = -1$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$,

$x_2 = +1$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, так что

$$\zeta = C_3 \int (t-1)^{\frac{1}{2}-1} (t+1)^{\frac{1}{2}-1} dt + C_4 = C_3 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + C_4 = C_3 \operatorname{arccht} t + C_4.$$

Но так как в точке A' : $\zeta = -\frac{\pi i}{2}$, $t = 1$, а в точке A имеем: $\zeta = \frac{\pi i}{2}$, $t = -1$ (см. рис. 3.66), то, определяя C_3 и C_4 , получаем

$$\zeta = \operatorname{arccht} t - \frac{i\pi}{2}$$

(при этом принято $\operatorname{arccht} 1 = 0$, а $\operatorname{arccht}(-1) = i\pi$).

Отсюда

$$t = \frac{i}{2} \left(\frac{|\mathbf{v}_\infty|}{\bar{v}} - \frac{\bar{v}}{|\mathbf{v}_\infty|} \right); \quad \left(\frac{\bar{v}}{|\mathbf{v}_\infty|} \right)^2 - 2it \left(\frac{\bar{v}}{|\mathbf{v}_\infty|} \right) - 1 = 0,$$

$$\frac{\bar{v}}{|\mathbf{v}_\infty|} = it \pm \sqrt{1-t^2} = it - i\sqrt{1-t^2}$$

(знак $-$) выбран, поскольку $\bar{v} = 0$ при $t \rightarrow \infty$).

Переходим к определению постоянной C_1 .

Имеем

$$\frac{l}{2} = \int_0^{1/2} dy = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} dt. \quad (3.179)$$

Рассматривая полученное равенство $w = \frac{2}{C_1 t^2}$ на половине пластинки OA , где $\psi = 0$, имеем

$$\varphi = \frac{2}{C_1 t^2}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{4}{C_1 t^3}.$$

Поскольку

$$\frac{dy}{d\varphi} = \left(\frac{d\varphi}{dy} \right)^{-1} = (-\operatorname{Im} \bar{v})^{-1} = -\left(t - \sqrt{t^2-1} \right)^{-1} |\mathbf{v}_\infty|^{-1} = -\frac{t + \sqrt{t^2-1}}{|\mathbf{v}_\infty|},$$

поэтому, из (3.179) получим

$$\frac{l}{2} = \int_{-\infty}^{-1} \left(-\frac{4}{C_1 t^3} \right) \left(-\frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{|\mathbf{v}_\infty|} \right) dt = \frac{4}{C_1 |\mathbf{v}_\infty|} \int_{-\infty}^{-1} \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{t^3} dt = \frac{4}{C_1 |\mathbf{v}_\infty|} \left(1 + \frac{\pi}{4} \right).$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{2(4 + \pi)}{l |\mathbf{v}_\infty|}.$$

Для вычисления силы сопротивления P_x , действующей на пластинку, воспользовавшись интегралом Бернулли, имеем

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \int_0^{1/2} (p - p_\infty) dy = \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 \int_0^{1/2} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}_\infty|^2} \right) dy = \\ &= \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 \int_{-\infty}^{-1} \left[1 - \left(1 - \sqrt{t^2 - 1} \right)^2 \right] \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} dt = \\ &= \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{4}{C_1 |\mathbf{v}_\infty|} \left[1 - \left(t - \sqrt{t^2 - 1} \right)^2 \right] \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{t^3} dt = \\ &= \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 \cdot \frac{2l}{4 + \pi} \cdot 2 \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^3} dt = \frac{4l \rho |\mathbf{v}_\infty|^2}{4 + \pi} \cdot \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P_x = \frac{\rho |\mathbf{v}_\infty|^2 l \pi}{\pi + 4}.$$

Эксперимент дает значение P_x почти вдвое больше полученного здесь в предположении, что в застойной области течения нет.

Для отыскания уравнения свободной линии тока AC исходим из того, что на ней $\psi = 0$, $|\bar{\mathbf{v}}| = |\mathbf{v}_\infty|$ и $\zeta = i\theta$. Рассматривая θ в качестве параметра, найдем параметрическое уравнение линии AC . Если S — дуга, отсчитываемая вдоль этой линии от точки A , то

$$y(\theta) - \frac{l}{2} = \int_0^S \frac{dy}{dS} dS = \int_{\pi/2}^\theta \frac{dy}{dS} \cdot \frac{dS}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} d\theta.$$

Но на свободной линии

$$\frac{dy}{dS} = \frac{y'_x}{\sqrt{1+y'^2_x}} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \theta}} = \sin \theta; \quad \frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{|\mathbf{v}_\infty|},$$

$$t|_{\zeta=i\theta} = \operatorname{ch} \left(\zeta + \frac{i\pi}{2} \right)_{\zeta=i\theta} = \operatorname{ch} i \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \theta,$$

так что

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = -\frac{2 \cos \theta}{C_1 \sin^3 \theta}.$$

Поэтому

$$y(\theta) - \frac{l}{2} = - \int_{\pi/2}^{\theta} \sin \theta \cdot \frac{1}{|\mathbf{v}_\infty|} \cdot \frac{2 \cos \theta}{C_1 \sin^3 \theta} d\theta =$$

$$= - \frac{l}{4 + \pi} \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = - \frac{l}{4 + \pi} (1 - \operatorname{cosec} \theta).$$

Определяя аналогичным образом

$$x(\theta) = \int_0^s \frac{dy}{dS} dS,$$

окончательно получаем

$$y(\theta) = \frac{l}{2} + \frac{l}{4 + \pi} (1 - \operatorname{cosec} \theta); \quad x(\theta) = \frac{l}{2(\pi + 4)} \left(\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} - \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right).$$

Уравнение линии тока $A'C'$ можно написать как уравнение линии, симметричной AC относительно оси x .

Истечение струи из отверстия в стенке

Пусть в физической плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ по действительной оси расположена бесконечная стенка AA' с отверстием BB' , причем в полуплоскости $y < 0$ (см. рис. 3.67) находится несжимаемая жидкость, которая вытекает в виде плоской струи в область $y > 0$.

Область двумерного безвихревого потока ограничена стенкой AA' и струями или свободными линиями тока BC и $B'C'$, начинающимися у краев отверстия и уходящими на бесконечность.

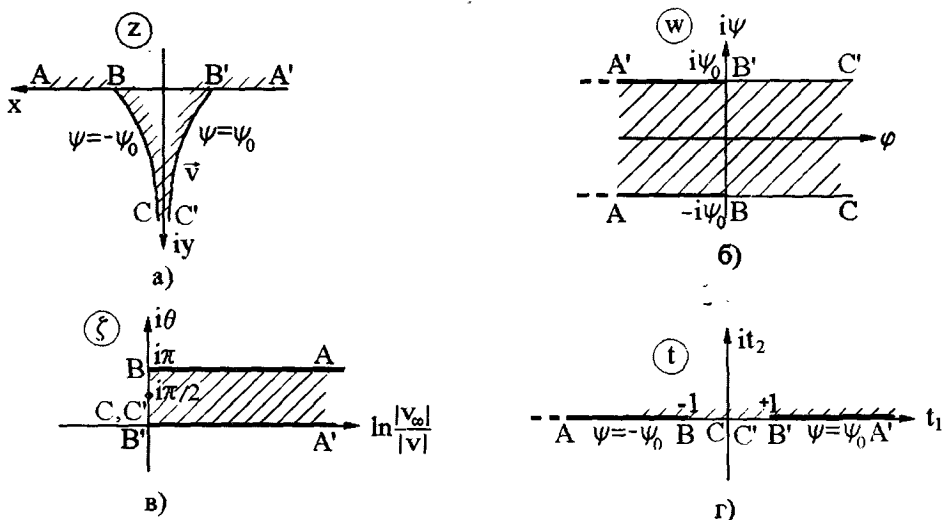


Рис. 3.67

Пусть на линии тока $A'B'C'$ функция тока $\psi = \psi_0$, а на симметричной линии тока $\psi = -\psi_0$. Примем, что в местах срыва струй $\phi(B) = \phi(B') = 0$. Тогда на плоскости $w = \phi + i\psi$ область течения (заштрихована на рис. 3.67, а) примет вид бесконечной полосы, симметричной относительно действительной оси (см. рис. 3.67, б), а на плоскости комплексного переменного

$\zeta = \ln |v_\infty| \frac{dz}{dw} = \ln \left(\frac{|v_\infty|}{\bar{v}} \right)$ получаем бесконечную полуполосу, ограниченную значениями $\theta = 0$ (в точке B' направление скорости совпадает с направлением от A' к B') и $\theta = \pi$ (направление скорости в точке B — от A к B).

Введем, как и в задаче об обтекании пластинки, плоскость комплексного переменного t и будем считать, что ее верхняя полуплоскость отображает поток в физической плоскости, причем B и B' переходят в точки ± 1 , а линии тока $\psi = \psi_0$ и $\psi = -\psi_0$ — соответственно в действительные полуоси.

Отображая при помощи интеграла Шварца-Кристоффеля полуполосу $A'B'BA$ из плоскости w на верхнюю полуплоскость t , получаем ($n = 1$, $x_1 = 0$, $\alpha_1 = 0$):

$$w = C_1 \int \frac{dt}{t} + C_2 = C_1 \ln t + C_2.$$

Отображение полуполосы из плоскости ζ на ту же верхнюю полуплоскость t осуществляется при помощи функции ($n = 2$, $x_1 = -1$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = 1$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$).

$$\zeta = C_3 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} + C_4 = C_3 \operatorname{arccch} t + C_4.$$

Принимая $\ln 1 = \operatorname{arccch} 1 = 0$ и $\ln(-1) = \operatorname{arccch}(-1) = i\pi$, определяем постоянные C_1 и из условия $w(B) = -i\psi_0$, $w(B') = i\psi_0$, так что

$$w = -\frac{2\psi_0}{\pi} \ln t + i\psi_0. \quad (3.180)$$

Из условий $\zeta(B) = i\pi$ и $\zeta(B') = 0$, находим $C_3 = 1$ и $C_4 = 0$. Окончательно получаем

$$\zeta = \operatorname{arccch} t. \quad (3.181)$$

Найдем параметрические уравнения свободных линий тока.

Для линии тока имеем

$$x(\theta) - x_0 = \int_0^\theta \frac{dx}{d\theta} d\theta = \int_0^\theta \frac{dx}{dS} \frac{dS}{d\theta} d\theta = \int_0^\theta \frac{dS}{d\theta} \cos \theta d\theta,$$

где S — дуга, отсчитываемая по свободной линии тока от точки B' .

На линии $B'C'$ (см. рис. 3.67, в), как следует из (3.181), выполняются равенства: $i\theta = \operatorname{arccch} t$; $\operatorname{ch} i\theta = t$, т. е. $t = \cos \theta$.

Поскольку, на основании (3.180),

$$\varphi + i\psi = -\frac{2\psi_0}{\pi} \ln t + i\psi_0,$$

то на линии тока $B'C'$ получаем

$$\varphi = -\frac{2\psi_0}{\pi} \ln \cos \theta.$$

Кроме того, на свободной линии тока скорость по величине постоянная, так что $\varphi = |\mathbf{v}_\infty| S$. Таким образом:

$$x(\theta) + x_0 = \int_0^\theta \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \cos\theta d\theta = \frac{1}{|\mathbf{v}_\infty|} \cdot \frac{2\psi_0}{\pi} \int_0^\theta \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \cos\theta d\theta = \\ \frac{2\psi_0}{\pi|\mathbf{v}_\infty|} (1 - \cos\theta) = \frac{4\psi_0}{\pi|\mathbf{v}_\infty|} \sin^2 \theta.$$

Для зависимости $y(\theta)$ на этой же свободной линии тока аналогично получаем:

$$y(\theta) = \int_0^\theta \frac{dy}{d\theta} d\theta = \int_0^\theta \frac{dS}{d\theta} \sin\theta d\theta = \frac{2\psi_0}{\pi|\mathbf{v}_\infty|} \int_0^\theta \frac{\sin^2 \theta}{\cos\theta} d\theta = \\ = \frac{2\psi_0}{\pi|\mathbf{v}_\infty|} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin\theta \right].$$

Эти формулы позволяют определить сжатие струи, т. е. изменение ее поперечного сечения при удалении на бесконечность от отверстия истечения. Эта характеристика важна для практики, поскольку позволяет определить действительный расход жидкости по сечению струи и скорости на бесконечности, которая предполагается известной (из интеграла Бернулли).

Сечение струи на бесконечности определяется величиной

$$-x_\infty = x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\psi_0}{\pi|\mathbf{v}_\infty|} - x_0, \quad (3.182)$$

а сжатие струи, по определению, равно

$$\frac{x_\infty}{x_0} = \frac{2\psi_0}{\pi|\mathbf{v}_\infty|} + 1.$$

Но $\psi_0 = x_\infty |\mathbf{v}_\infty|$, ибо разность значений функций тока на двух линиях тока равна расходу жидкости между ними. Тогда из (3.182) имеем

$$\frac{x_\infty}{x_0} = \frac{\pi}{2 + \pi} \approx 0,611.$$

Эта цифра близка к действительно наблюдаемым сжатиям плоской струи воды, истекающей в воздух.

Некоторые обобщения разрывных течений

Рассмотренные выше примеры разрывных течений обтекания пластинки и струйного течения из отверстия в стенке (см. также задачи 3.5.1 и 3.5.2)

могут быть получены как частные случаи из более общего вида зависимости $\frac{dz}{dw}(w)$.

Рассмотрим связь между координатами z физической плоскости и комплексным потенциалом вида $w(z)$

$$\frac{dz}{dw} = F(w) \pm \sqrt{F^2(w) - 1}, \quad (3.183)$$

где $F(w)$ — некоторая функция комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ безвихревого потока. Поскольку

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{v},$$

то

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{1}{v^2} = \frac{1}{|v|^2}.$$

Если есть свободные линии тока, на которых $|v|^2 = \text{const}$, то на них

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \text{const}. \quad (3.184)$$

Пусть на некоторых линиях тока $\psi = \text{const}$, функция $F(w) = F(\varphi)$ принимает только действительные значения. При этом, если $F^2(\varphi) \geq 1$, то из (3.183) следует

$$\frac{dx}{d\varphi} = F(\varphi) \pm \sqrt{F^2(\varphi) - 1} \neq \text{const}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = 0,$$

так что эти линии тока параллельны оси x и не могут удовлетворять условию (3.184), т. е. не могут быть свободными линиями тока.

Свободные линии тока получаются в том случае, если $F^2(\varphi) < 1$, и тогда на них

$$\frac{dx}{d\varphi} = F(\varphi); \quad \frac{dy}{d\varphi} = \pm \sqrt{1 - F^2(\varphi)}.$$

Можно показать (см. (40)), что если $F(w) = \frac{1}{\sqrt{w}}$, то (3.183) определяет струйное об-

текание пластины, а если $F(w) = e^{-w}$, то получаются различные струи течения жидкости через отверстие в стенке.

Задачи с решениями

Задача 3.5.1. (Задача Релея) Рассмотреть струйное обтекание пластинки, расположенной под углом атаки α к набегающему потоку (см. рис. 3.68).

Решение. В этом случае области потока (заштрихованные) в плоскостях переменных z , w , w^{-1} , ζ и t имеют вид, показанный на рис. 3.68. Давление в застойной зоне p_∞ , скорость на свободных линиях тока AC и $A'C'$ равна $|v_\infty|$, как и у набегающего на пластину потока. Положение точек A и A' на плоскости

$$\zeta = \ln \left(|v_\infty| \frac{dz}{dw} \right) = \ln \frac{|v_\infty|}{|v|} + i\theta$$

определится направлением скорости на пластинке от критической точки O к кромке A ($\arg v = \pi - \alpha$) и от точки O к кромке A' ($\arg v = -\alpha$). Точки A и A' переходят соответственно в точки ± 1 на плоскости t .

Соответствие между точками плоскостей ζ и t определяем, как и в случае пластинки с $\alpha = \frac{\pi}{2}$, из зависимости, полученной из интеграла Шварца-Кристоффеля

$$\zeta = C_3 \operatorname{arcch} t + C_4.$$

Принимая, что $\operatorname{arcch}(+1) = 0$, $\operatorname{arcch}(-1) = i\pi$, из соответствия точек A и A' имеем

$$i(\pi - \alpha) = C_3 i\pi + C_4.$$

Отсюда $C_4 = -i\alpha$, $C_3 = 1$ и, следовательно,

$$\zeta = \operatorname{arcch} t - i\alpha, \quad t = \operatorname{ch}(\zeta + i\alpha). \quad (1)$$

Положение двойной точки CC' на плоскости t определится из того условия, что в точках C и C' свободных линий тока скорость v совпадает с v_∞ не только по величине, но и по направлению. Так, в плоскости ζ точки C и C' попадают в начало координат, следовательно, в плоскости t имеем

$$t_{CC'} = \operatorname{ch}(0 + i\alpha) = \cos \alpha.$$

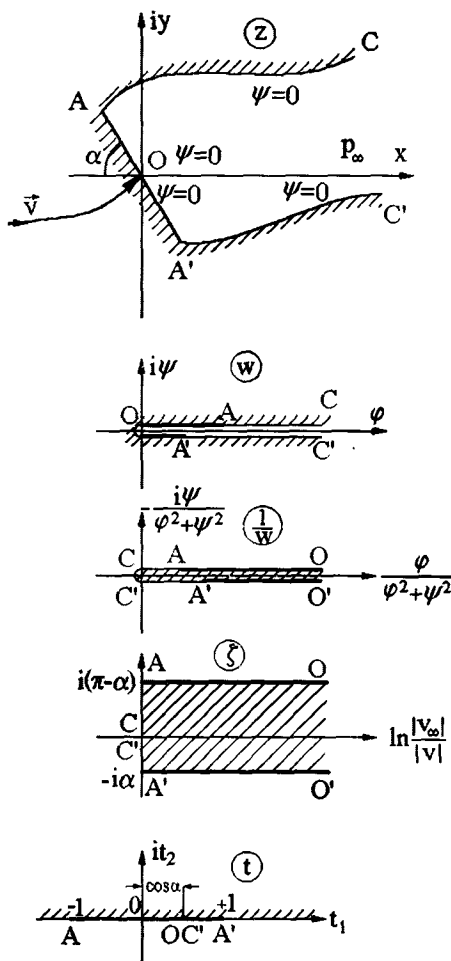


Рис. 3.68

В связи с этим формула Шварца-Кристоффеля, отображающая плоскость $1/w$ на верхнюю полуплоскость t , имеет вид

$$\frac{1}{w} = C_1 \int (t - t_{cc'}) dt + C_2.$$

Поскольку при $t = t_{cc'}$ $w = \infty$, то $C_2 = 0$ и

$$\frac{1}{w} = \frac{C_1}{2} (t - \cos \alpha)^2, \quad w = \frac{2}{C_1 (t - \cos \alpha)^2}. \quad (2)$$

Постоянная C_1 — действительная величина, ибо t на свободных линиях тока ($\psi = 0$) — действительно. Ее можно выразить через длину пластины $l = \int_0^l dS$, где S — координата вдоль пластины. Записывая

$$dS = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} dt$$

и замечая, что $\frac{dS}{d\varphi} = \frac{1}{|v|}$, а так же определяя на пластинке, где $\psi = 0$, $\varphi = \varphi(t)$ из (2), имен-

но $\varphi = \frac{2}{C_1 (t - \cos \alpha)^2}$, получаем

$$dS = -\frac{4}{C_1 (t - \cos \alpha)^3 |v|} dt.$$

В рассматриваемом случае на участке пластинки OA (обозначим его длину l_1) и на участке OA' длиной l_2 значения $|v|$ будут различными и их можно определить, рассматривая значения t и ζ , связанные соотношением (1)

$$t = \operatorname{ch}(\zeta + i\alpha) = \frac{1}{2} (e^{\zeta + i\alpha} + e^{-(\zeta + i\alpha)}).$$

На участке OA имеем $\zeta = \ln \frac{|v_\infty|}{|v|} + i(\pi - \alpha)$, а на участке OA' : $\zeta = \ln \frac{|v_\infty|}{|v|} - i\alpha$. Таким образом,

$$t|_{OA} = \frac{1}{2} \left(\frac{|v_\infty|}{|v|} e^{i\pi} + \frac{|v_\infty|}{|v|} e^{-i\pi} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + q \right),$$

$$t|_{OA'} = \frac{1}{2} \left(\frac{|v_\infty|}{|v|} + \frac{|v_\infty|}{|v|} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{q} + q \right),$$

где обозначено $q = \frac{|v|}{|v_\infty|}$.

Отсюда $q|_{OA} = -t + \sqrt{t^2 - 1}$, $q|_{OA'} = t - \sqrt{t^2 - 1}$, причем знаки у корня выбраны из условия равенства нулю скорости в критической точке O на пластинке, а именно $q|_{OA}(-\infty) = q|_{OA'}(+\infty) = 0$. Теперь определяем общую длину пластинки

$$\begin{aligned} l &= l_1 + l_2 = \int_{OA} \frac{1}{|v|} d\varphi + \int_{OA'} \frac{1}{|v|} d\varphi = \\ &= \frac{1}{|v_\infty|} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{-t - \sqrt{t^2 - 1}} \left(-\frac{4}{C_1 (t - \cos \alpha)^3} \right) dt + \frac{1}{|v_\infty|} \int_{-\infty}^1 \frac{1}{t - \sqrt{t^2 - 1}} \left(-\frac{4}{C_1 (t - \cos \alpha)^3} \right) dt = \\ &= \frac{4a^3}{C_1 |v_\infty|} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(1 + \cos \xi) \cos \xi}{(a + \sin \xi)^3} d\xi, \end{aligned}$$

где обозначено $a = \frac{1}{\cos \alpha} \geq 1$, а в интегралах сделана замена переменной интегрирования $1/t = -\sin \xi$.

Поскольку

$$\int \frac{(1 + \cos \xi) \cos \xi}{(a + \sin \xi)^3} d\xi = -\frac{1 + \cos x}{2(a + \sin \xi)^2} + \frac{a \cos \xi}{2(a^2 - 1)(a + \sin \xi)} + \frac{1}{(a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 1}} \arctg \frac{a \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + 1}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

то

$$l = \frac{4a^2}{C_1 |v_\infty|} \left\{ \frac{2a}{(a^2 - 1)^2} + \frac{\pi}{2(a^2 - 1)\sqrt{a^2 - 1}} \right\} = \frac{2}{C_1 |v_\infty|} \frac{\pi \sin \alpha + 4}{\sin^4 \alpha}.$$

Отсюда получаем выражение постоянной C_1 через длину пластинки

$$\frac{C_1}{2} = \frac{1}{l |v_\infty|} \frac{4 + \pi \sin \alpha}{\sin^4 \alpha}. \quad (3)$$

Выпишем уравнение линии тока (например, AC) в параметрической форме. Поскольку на ней $\psi = 0$, $|v| = |v_\infty|$, $\zeta = i\theta$ и, следовательно,

$$\frac{dS}{d\varphi}|_{AC} = \frac{1}{|v|_{AC}} = \frac{1}{|v_\infty|}; \quad t|_{AC} = \operatorname{ch}(\zeta|_{AC} + i\alpha) = \cos(\theta + \alpha),$$

то

$$\varphi|_{AC} = w|_{AC} = \frac{2}{C_1 (\cos(\theta + \alpha) - \cos \alpha)^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} y(\theta) - l_1 \sin \alpha &= \frac{2l \sin^4 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \sin(\theta + \alpha)}{(\cos(\theta + \alpha) - \cos \alpha)^3} d\theta, \\ x(\theta) + l_1 \cos \alpha &= \frac{2l \sin^4 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos \theta \sin(\theta + \alpha)}{(\cos(\theta + \alpha) - \cos \alpha)^3} d\theta. \end{aligned}$$

Интегралы, стоящие справа, выражаются через элементарные функции, но ввиду громоздкости их окончательный вид здесь не приводится.

Найдем выражение для силы P , действующей на пластинку и направленной по нормали к ней. Принимая равенство давления в застойной зоне величине p_∞ , так что из интеграла Бернулли, примененному к линии тока OAC и $OA'C'$, имеем

$$p - p_\infty = \frac{\rho |\mathbf{v}_\infty|^2}{2} \left(1 - \frac{|\mathbf{v}|^2}{|\mathbf{v}_\infty|^2} \right) = \frac{\rho |\mathbf{v}_\infty|^2}{2} (1 - q^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} P &= \int_0^l (p - p_\infty) dS + \int_{l_1}^l (p - p_\infty) dS = \frac{\rho |\mathbf{v}_\infty|^2}{2} \left[\int_{-\infty}^1 (1 - q^2) \frac{dS}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt + \int_{\infty}^1 (1 - q^2) \frac{dS}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} dt \right] = \\ &= -\frac{2\rho |\mathbf{v}_\infty|^2}{C_1} \left[\int_{-\infty}^1 \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{dt}{(t - \cos \alpha)^3} + \int_{\infty}^1 \left(\frac{1}{q} - q \right) \frac{dt}{(t - \cos \alpha)^3} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя сюда найденное ранее значение q на линиях OA и OA' и производя замену $1/t = -\sin \xi$, получаем

$$P = \frac{4\rho |\mathbf{v}_\infty|^2}{C_1 \cos^3 \alpha} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^2 \xi d\xi}{(a + \sin \xi)^3}.$$

Или, имея в виду (3) и вычисляя интеграл, имеем окончательно

$$P = \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 l \frac{\pi \sin \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}.$$

Эта формула была получена Рэлеем в 1876 г. и носит его имя.

Отсюда сила сопротивления P_x и подъемная сила P_y пластинки равны

$$\begin{aligned} P_x &= P \sin \alpha = \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 l \frac{\pi \sin^2 \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}, \\ P_y &= P \cos \alpha = \rho |\mathbf{v}_\infty|^2 l \frac{\pi \sin \alpha \cos \alpha}{4 + \pi \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Задача 3.5.2. Найти коэффициент сжатия струи, вытекающей из насадка в виде неограниченных плоских симметричных стенок (см. рис. 3.69).

Решение. Используя метод Кирхгофа (обозначения и выкладки такие же как в решении задачи о струе, вытекающей из отверстия в стенке), имеем (см. рис. 3.69):

$$\zeta = \ln |\mathbf{v}_\infty| \frac{dz}{dw} = C_3 \operatorname{arccch} t + C_4,$$

$$w = C_1 \ln t + C_2.$$

Определяя постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 из соответствия точек B и B' в плоскостях ζ и t , а также в плоскостях ζ и w , получаем

$$\begin{aligned} (\pi - \alpha)i &= C_3 i\pi + C_4, \quad i\alpha = C_3 0 + C_4, \\ -i\psi_0 &= C_1 i\pi + C_2, \quad i\psi_0 = C_1 0 + C_2. \end{aligned}$$

Здесь, как и ранее, для многозначных функций $\operatorname{arcsh} t$ и $\ln t$ принято:

$$\operatorname{arcsh} 1 = \ln 1 = 0; \quad \operatorname{arcsh}(-1) = \ln(-1) = i\pi.$$

Таким образом, имеем

$$\zeta = \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \operatorname{arcsh} t + i\alpha; \quad w = -\frac{2\psi_0}{\pi} \ln t + i\psi_0.$$

Учитывая, что на линии тока $\psi = \psi_0$ переменная t — действительна, имеем на участке $B'C'$ в плоскости ζ

$$i(\theta - \alpha) = \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) \operatorname{arcsh} t,$$

отсюда

$$t = \operatorname{ch} ik(\theta - \alpha) = \cos k(\theta - \alpha),$$

где обозначено $k = \frac{\pi}{\pi - 2\alpha}$.

Следовательно, параметрическое уравнение свободной линии тока $B'C'$, имеет вид

$$x(\theta) = -x_0 + \int_a^\theta \frac{dS(\theta)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}; \quad y(\theta) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{tg} \theta ds(\theta)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}}.$$

При этом, на линии тока меняется $\varphi = \varphi(\theta)$ и поскольку $dx = \frac{d\varphi}{v_x}$, $dy = \frac{d\varphi}{v_y}$, то $dS = \frac{d\varphi}{|v|}$.

На линии тока величина скорости постоянна и равна ее значению на бесконечности, так что

$dS(\theta) = \frac{d\varphi(\theta)}{|v_\infty|}$. Зависимость $\varphi(\theta)$ определяем из значения w на участке $B'C'$, а именно

$$\varphi(\theta) = -\frac{2\psi_0}{\pi} \ln t = -\frac{2\psi_0}{\pi} \ln \cos k(\theta - \alpha).$$

Таким образом, имеем

$$x(\theta) = -x_0 + \frac{1}{|v_\infty|} \int_a^\theta \frac{d\varphi(\theta)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = -x_0 + \frac{2\psi_0 k}{\pi |v_\infty|} \int_a^\theta \frac{\sin k(\theta - \alpha)}{\cos k(\theta - \alpha)} \cos \theta d\theta.$$

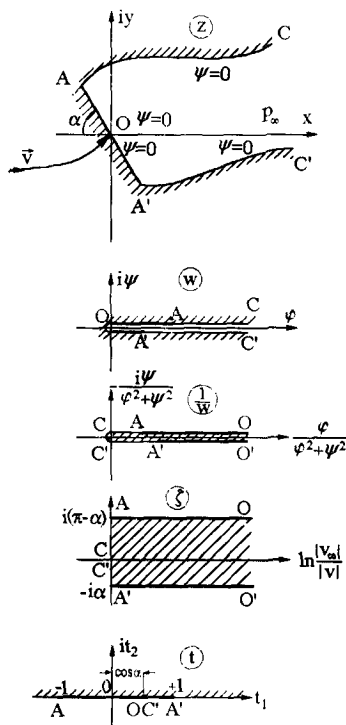


Рис. 3.69

$$y(\theta) = \frac{1}{|v_\infty|} \int_a^\theta \frac{\operatorname{tg} \theta d\varphi(\theta)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} = \frac{2\psi_0 k}{\pi |v_\infty|} \int_a^\theta \operatorname{tg} k(\theta - \alpha) \sin \theta d\theta.$$

Предельному значению $\theta = \pi/2$ (на бесконечности) соответствует предельное значение координаты x , равное $-x_\infty$, так что

$$-x_\infty = -x_0 + \frac{2\psi_0 k}{\pi |v_\infty|} \int_a^{\pi/2} \operatorname{tg} k(\theta - \alpha) \cos \theta d\theta. \quad (1)$$

Поскольку $\psi_0 = x_\infty |v_\infty|$, как величина расхода жидкости между линиями тока ($\psi = 0$ и $\psi = \psi_0$), то из (1) для коэффициента сжатия струи σ получаем

$$\sigma = \frac{x_\infty}{x_0} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{\pi} \int_a^{\pi/2} \operatorname{tg} k(\theta - \alpha) \cos \theta d\theta} = \left[1 + \frac{2k}{\pi} \int_a^{\pi/2} \operatorname{tg} k(\theta - \alpha) \cos \theta d\theta \right]^{-1}.$$

Отсюда, как частные случаи, следуют формулы:

1) коэффициент сжатия струи, свободно вытекающей из отверстия в стенке

$$\alpha = 0, k = 1, \sigma = \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_a^{\pi/2} \operatorname{tg}(\theta) \cos \theta d\theta \right]^{-1} = \left[1 + \frac{2}{\pi} \right]^{-1} = \frac{\pi}{2 + \pi};$$

2) коэффициент сжатия струи, вытекающей из насадка Борда (стенки AB и $A'B'$ заглублены в жидкость (см. рис. 3.70)):

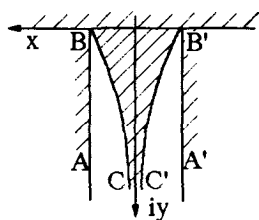


Рис. 3.70

$$\begin{aligned} \alpha = -\frac{\pi}{2}, k = \frac{1}{2}, \sigma &= \left[1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} \frac{\theta + \pi/2}{2} \cos \theta \right]^{-1} = \\ &= \left[1 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} \frac{u}{2} \cos \left(u - \frac{\pi}{2} \right) du \right]^{-1} = \\ &= \left[1 + \frac{2}{\pi} \int_a^\pi \sin^2 \frac{u}{2} du \right]^{-1} = \left[1 + \frac{1}{\pi} \int_a^\pi (1 - \cos u) du \right]^{-1} = 2^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, применение насадка Борда позволяет увеличить сжатие струи.

§ 3.6. Пространственные безвихревые течения

Осесимметричные потоки. Существенным отличием пространственных потоков от двумерных является то, что функция тока может быть введена лишь в определенных случаях, в частности, для осесимметричных пространственных потоков.

В случае наличия в потоке оси симметрии (например, ось z) линии тока в любой из меридиональных плоскостей σ (см. рис. 3.71), проходящих через ось симметрии, одинаковы и не зависят от полярного угла ε , фиксирующего положение плоскости σ . При этом линии тока (например, NN_1) путем вращения вокруг оси z описывают осесимметричную поверхность тока S .

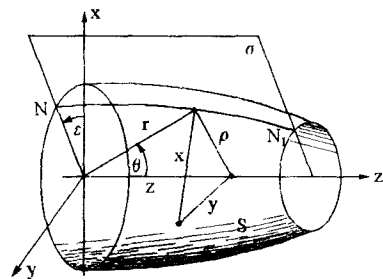


Рис. 3.71

Таким образом, положение частицы M в плоскости σ можно определить двумя либо цилиндрическими координатами $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, z$, либо сферическими r, θ (угол θ отсчитывается от оси симметрии). Соответственно этому, в пространственных симметричных потоках можно ввести стоксову функцию тока: $\psi(\rho, z)$ либо $\psi(r, \theta)$. При этом, как было показано (см. ч. 2, § 4), компоненты скорости в этих системах координат имеют выражения, полученные из $\mathbf{v} = \nabla \varphi = \frac{1}{r}(\nabla \psi \times \mathbf{a}_\varepsilon)$, где \mathbf{a}_ε — единичный вектор, касательный к координатным ε -линиям.

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho}; v_\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}; v_\varepsilon = 0;$$

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}; v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}; v_\varepsilon = 0. \quad (3.184)$$

Эти соотношения всегда позволяют выразить ψ через φ или наоборот.

Приведем вид уравнений $\Delta \varphi = 0$ и $\text{rot}_\varepsilon \frac{1}{r}(\nabla \psi \times \mathbf{a}_3) = 0$, которым удовлетворяют φ и ψ для рассматриваемых потоков:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right) = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = 0; \quad (3.185)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.186)$$

Простейшие пространственные потоки. Гидродинамические особенности

Рассмотрим несколько простейших пространственных потоков.

1. Однородный поток

$$\varphi = \mathbf{v}_\infty \cdot \mathbf{r} = v_{\infty x} x + v_{\infty y} y + v_{\infty z} z = v_{\infty \rho} \rho + v_{\infty z} z = v_\infty r \cos(\mathbf{v}_\infty, \mathbf{r}), \quad (3.187)$$

$$v_r = v_\infty \cos(\mathbf{v}_\infty, \mathbf{r}), \quad v_\rho = v_{\infty \rho},$$

$$v_\theta = \frac{d}{dt} \cos(\mathbf{v}_\infty, \mathbf{r}), \quad v_z = v_{\infty z}.$$

Если поток направлен по оси симметрии z , так что $\mathbf{v}_\infty = v_\infty \mathbf{a}_z$ и, следовательно,

$$\varphi(\rho, z) = v_\infty z; \quad \varphi(r, \theta) = v_\infty r \cos \theta,$$

то функцию тока найдем, используя соотношения (3.184). Проиллюстрируем это выкладками.

$$\begin{aligned} \psi(\rho, z) - \psi(\rho_0, z_0) &= \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) d\rho + \int_{z_0}^z \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_{\rho=\rho_0} dz = \\ &= \int_{\rho_0}^{\rho} \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\rho - \int_{z_0}^z \left(\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right)_{\rho=\rho_0} dz = v_\infty \frac{\rho^2}{2} - v_\infty \frac{\rho_0^2}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) - \psi(r_0, \theta_0) &= \int_{r_0}^r \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) dr + \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right)_{r=r_0} d\theta = \\ &= - \int_{r_0}^r \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dr + \int_{\theta_0}^{\theta} \left(r^2 \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=r_0} d\theta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= v_{\infty} \int_{r_0}^r r \sin^2 \theta dr + v_{\infty} \int_{\theta_0}^{\theta} r_0^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = v_{\infty} \sin^2 \theta \frac{r^2 - r_0^2}{2} + v_{\infty} r_0^2 \frac{\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0}{2} = \\
 &= \frac{v_{\infty} r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{v_{\infty} r_0^2}{2} \sin^2 \theta_0.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\psi(\rho, z) = \frac{v_{\infty} \rho^2}{2}; \quad \psi(r, \theta) = \frac{v_{\infty} r^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (3.188)$$

2. *Изолированный источник* мощностью Q имеет потенциал (см. ч. 2, § 5)

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}; \quad \varphi = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{Q}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}};$$

в сферических координатах:

$$v_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad v_{\theta} = 0, \quad v_{\varphi} = 0;$$

в цилиндрических координатах:

$$v_{\rho} = \frac{Q\rho}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \quad v_z = \frac{Qz}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \quad v_{\varphi} = 0.$$

Вид функций тока течения от источника:

$$\psi(r, \theta) = -\frac{Q}{4\pi} \cos \theta; \quad \psi(\rho, z) = -\frac{Qz}{4\pi \sqrt{\rho^2 + z^2}}. \quad (3.189)$$

3. *Замкнутая вихревая нить.*

Потенциал любой замкнутой вихревой нити, являющейся границей поверхности, имеет выражение (см. (1.134) в ч. 2, § 5):

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad (3.190)$$

где $\Gamma = d\sigma \cdot \text{rot } \mathbf{v}$ — вихревая интенсивность нити с ориентированным поперечным сечением $d\sigma$, а \mathbf{n}' — нормаль к поверхности S в текущей точке, образующая с положительным направлением обхода нити правый винт.

Для круговой нити с радиусом a , расположенной концентрически с осью z , имеем (см. задачу 5.1, ч. 2)

$$\varphi(\rho, z) = \frac{\Gamma z}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\rho' d\delta d\rho'}{(z^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \delta)^{3/2}}, \quad (3.191)$$

где нить расположена в плоскости $z=0$ цилиндрических координат (z, ρ, ε) , а $\delta = \varepsilon - \varepsilon'$.

Формула (3.190) определяет и выражение для $\varphi(r, \theta, \varepsilon)$ в сферической системе координат.

Компоненты скорости могут быть получены из выражения

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla_r \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS', \quad (3.192)$$

или из криволинейного интеграла по контуру L вихревой нити (см. (1.132), ч. 2, § 5)

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{L} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (3.193)$$

Выражение для функции тока осесимметричных потоков (ось z — ось симметрии) получаем из векторного потенциала \mathbf{B} (см. (1.104), ч. 2, § 5)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV', \quad (3.194)$$

где V — пространственная область, в которой определен вектор $\Omega(\mathbf{r})$.

Поскольку для осесимметричных потоков вектор \mathbf{B} имеет единственную компоненту, перпендикулярную меридиональной плоскости, имеем (см. рис. 3.71)

$$B = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(\mathbf{r}') (\mathbf{i}_\varepsilon \cdot \mathbf{i}'_\varepsilon)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV',$$

причем в случае цилиндрических координат, имеем $B = \psi / \rho$, а сферических $B = \psi / r \sin \theta'$. Поэтому, функция тока осесимметричных безвихревых потоков имеет вид (см. рис. 3.72):

— в цилиндрических координатах:

$$\psi(\rho, z) = \frac{\rho}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(\rho', z') \rho' \cos \delta d\rho' dz' d\delta}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \delta}}; \quad (3.195)$$

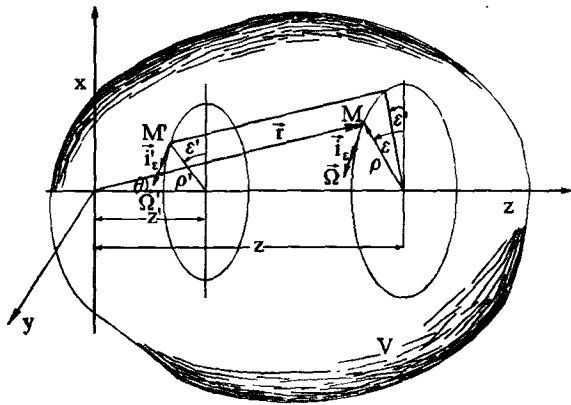


Рис. 3.72

— в сферических координатах:

$$\psi(\rho, \theta) = \frac{r \sin \theta}{4\pi} \int_V \frac{\Omega(r', \theta') r'^2 \cos \delta \sin \theta' dr' d\theta' d\delta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \delta)}}. \quad (3.196)$$

В случае круговой вихревой нити с радиусом a , полагая в (3.194) $\Omega(\rho', z') \times dz' d\rho' = \Gamma$, $z' = 0$, $\rho' = a$, имеем

$$\psi(\rho, z) = \frac{\rho a \Gamma}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \delta d\delta}{\sqrt{z^2 + \rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos \delta}} \quad (3.197)$$

Интегралы в (3.191) и (3.197) выражаются через полные эллиптические интегралы первого и второго рода (см. задачу 5.1, ч. 2).

4. *Изолированный диполь*, расположенный в точке, определяемой радиусом-вектором \mathbf{r}' , с моментом \mathbf{m} , имеет потенциал поля (см. (1.120) ч. 2, § 5))

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l_m} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right). \quad (3.198)$$

Здесь во второй записи выражения для потенциала использована производная по направлению вектора $\mathbf{l}_m = \mathbf{m}/m$. Она полезна при определении потенциала мультиполей (см. ниже).

Вектор скорости движения от диполя равен

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3(\mathbf{m} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right). \quad (3.199)$$

Это поле симметрично относительно оси, проходящей через вектор момента \mathbf{m} . Из (3.196) для диполя, находящегося в начале координат ($\mathbf{r}'=0$), имеем в сферических координатах (r, θ, ε)

$$v_r = \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})}{2\pi r^4} = \frac{m}{2\pi r^3} \cos \theta, \quad v_\theta = \frac{m}{4\pi r^3} \sin \theta, \quad v_\varepsilon = 0,$$

а в цилиндрических координатах (z, ρ, ε) (с моментом вдоль оси z)

$$\mathbf{v}(\rho, z) = \frac{1}{4\pi} \left(-\frac{\mathbf{m}}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{3mz(\rho \mathbf{i}_\rho + z \mathbf{i}_z)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right),$$

так что

$$v_\rho = \frac{3mz\rho}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{5/2}}; \quad v_z = \frac{m}{4\pi} \frac{2z^2 - \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}; \quad v_\varepsilon = 0.$$

Функцию тока находим, используя (3.184):

$$\psi(\rho, z) = \frac{m}{4\pi} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}; \quad \psi(r, \theta) = \frac{m}{4\pi r} \sin^2 \theta. \quad (3.200)$$

5. Изолированные мультиполи.

Возьмем у диполя с моментом $+\mathbf{m}_1$, расположенного в точке O и образованного слиянием источника $+Q$ и стока $-Q$, диполь в точке O_1 , отстоящей от O на небольшом расстоянии \mathbf{r}_2 с моментом $-\mathbf{m}_1$ (см. рис. 3.73).

Тогда суммарный потенциал этих двух диполей равен

$$\tilde{\varphi}_2 = -\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} + \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}_1}{4\pi R_1^3}.$$

Поскольку

$$-\frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{\mathbf{m}_1}{4\pi} \cdot \nabla_R \frac{1}{R} = \frac{m_1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l_1} \left(\frac{1}{R} \right),$$

где $\mathbf{l}_1 = \frac{\mathbf{m}_1}{m_1}$ — орт направления оси диполя,

то

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{m_1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l_1} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1} \right), \quad (3.201)$$

где $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R} - \mathbf{r}_2 \equiv \mathbf{i}_k X_k - \mathbf{i}_k x_{2k}$.

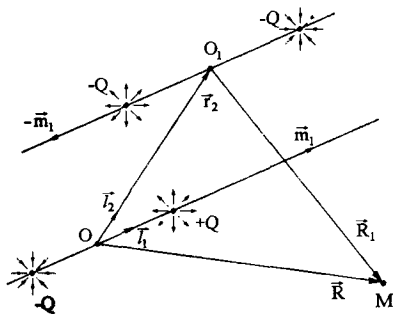


Рис. 3.73

Разлагая в ряд Тейлора $\frac{1}{R_1}$ в окрестности $\frac{1}{R}$, предполагая $r_2 = |\mathbf{r}_2|$ достаточно малым, получаем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{(\partial X_i)^k} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (3.202)$$

Заменяя дифференцирование по координатам \mathbf{R} дифференцированием по координатам \mathbf{r}_2 и учитывая, что $x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} = r_2 l_2 \frac{\partial}{\partial x_{2i}} = r_2 \frac{\partial}{\partial l_2}$, получаем, подставляя (3.202) в (3.201):

$$\tilde{\varphi}_2 = \frac{m_1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{\partial^k}{\partial l_2^k} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Предельное значение $\tilde{\varphi}_2$ при сближении двух диполей и одновременном возрастании величины их момента m_1 , причем так, что при $r_2 \rightarrow 0$ $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}_2$ остается конечным, представляет собой потенциал

$$\varphi_2(M) = \lim_{r_2 \rightarrow 0} \tilde{\varphi}_2 = \frac{m_2}{4\pi 2!} \frac{\partial^2}{\partial l_1 \partial l_2} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Это — потенциал новой изолированной особенности, которая получила название *квадруполья*, его момент равен \mathbf{m}_2 , а оси образуются направлениями \mathbf{l}_1 и \mathbf{l}_2 .

Аналогично, сближая два квадруполья по направлению \mathbf{l}_3 , придем к *октаполю* с потенциалом

$$\varphi_3(M) = \frac{m_3}{4\pi 3!} \frac{\partial^3}{\partial l_1 \partial l_2 \partial l_3} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Продолжая этот процесс, получаем потенциал *мультиполя* порядка n в виде

$$\varphi_n(M) = \frac{m_n}{4\pi n!} \frac{\partial^n}{\partial l_1 \partial l_2 \dots \partial l_n} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Мультиполь n -го порядка характеризуется $2n + 1$ параметрами: моментом m_n и $2n$ параметрами, определяющими n направлений дифференцирования.

В частном случае, когда оси мультиполя совпадают, имея некоторое одинаковое направление дифференцирования \mathbf{l}_0 , получаем потенциал осевого мультиполя

$$\varphi_n^0(M) = \frac{m_n}{4\pi n!} \frac{\partial^n}{\partial l_0^n} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (3.203)$$

При $n=1$ это выражение обращается в (3.198) — потенциал диполя. Этот потенциал можно записать через функции Лежандра.

Согласно (3.202) имеем, разлагая $\frac{1}{R_1}$ в ряд по полиномам Лежандра,

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{r_2} \left(\frac{r_2}{R} \right)^k P_k(\cos \theta).$$

В то же время из (3.185) имеем

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} r_2^k \frac{\partial^k}{\partial l_2^k} \left(\frac{1}{R} \right).$$

Сравнивая эти выражения, получаем

$$P_k(\cos \theta) = (-1)^k \frac{R^{k+1}}{k!} \frac{\partial^k}{\partial l_2^k} \left(\frac{1}{R} \right). \quad (3.204)$$

Возвращаясь к выражению (3.203), имеем

$$\varphi_n^0(M) = \frac{m_n}{4\pi R^{n+1}} (-1)^n P_n(\cos \theta),$$

причем θ — угол между осью диполя и вектором \mathbf{R} , определяющим направление из точки осевого мультиполя в точку M , где определяется значение потенциала.

Отсюда получаем компоненты скорости в сферической системе координат

$$v_r = \frac{\partial \varphi_n^0}{\partial r} = -\frac{m_n (-1)^n (n+1)}{4\pi r^{n+2}} P_n(\mu); \quad v_\theta = \frac{m_n (-1)^n}{4\pi r^{n+1}} P_n' \cdot \sin \theta, \quad (3.205)$$

где $P_n' = \frac{dP_n}{d\mu}$, $\mu = \cos \theta$.

Функцию тока мультиполя находим, используя (3.184):

$$\psi_n^0(r, \theta) = -\frac{m_n(-1)^n}{4\pi r^n} (P_{n-1} - \cos\theta P_n(\cos\theta)) = -\frac{m_n(-1)^n}{4\pi r^n} P'_n \sin^2\theta. \quad (3.206)$$

Здесь использовано соотношение $(1-\mu^2)P'_n = n(P_{n-1} - \mu P_n)$ и $P_n = \frac{1}{n} \times (\mu P'_n - P'_{n-1})$ так, что $\int P_n d\mu = \frac{1}{n} \int (\mu P'_n - P'_{n-1}) d\mu = \frac{1}{n+1} (\mu P_n - P_{n-1})$ — после интегрирования по частям первого интеграла.

В цилиндрических координатах (z, ρ, ε) имеем

$$\begin{aligned} \varphi_n^0(\rho, z) &= \frac{m_n(-1)^n}{4\pi(\rho^2 + z^2)^{n+1}} P_n(\mu), \\ \psi_n^0(\rho, z) &= \frac{m_n(-1)^n \rho^2}{4\pi n(\rho^2 + z^2)^{(n+2)/2}} P'_n(\mu), \end{aligned} \quad (3.207)$$

где $\mu = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$.

Гидродинамические особенности в однородном потоке. Обтекание и поступательное движение среды

Потенциальная функция $\varphi(\mathbf{r})$ и стоксова функция тока $\psi(\mathbf{r})$ удовлетворяют линейным уравнениям. Поэтому, как и в двумерных потоках становится возможным рассматривать суммы этих функций, которые

будут удовлетворять тем же уравнениям и, следовательно, определять некий составной, сложный поток, образуемый наложением простых. При этом всегда интересны те поверхности $\psi = \text{const}$, которые могут быть приняты за твердые, непроницаемые поверхности, а сложный поток будет определять обтекание тел с поверхностью, являющейся поверхностью тока (или ее частью).

Рассмотрим несколько характерных примеров сложных пространственных течений.

1. Источник в однородном потоке. Обтекание полутела.

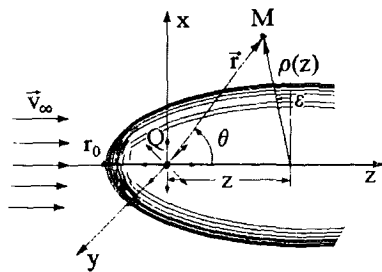


Рис. 3.74

Пусть на источник, расположенный в начале координат, набегают однородный поток, направленный по оси z (см. рис. 3.74). Тогда, согласно (3.188) и (3.189), имеем для составного потока (в сферических координатах)

$$\varphi = v_{\infty} r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi r},$$

$$\psi = \frac{v_{\infty} r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q \cos \theta}{4\pi}.$$

Однородный поток сносит поток от источника, и в результате такого взаимодействия эти потоки не смешиваются, а отделены поверхностью тока — поверхностью вращения, проходящей через критическую точку (r_0, π) . На этой разделительной поверхности значение функции тока есть

$$\psi|_{\substack{r=r_0 \\ \theta=\pi}} \equiv \psi_0 = \frac{Q}{4\pi}.$$

Поэтому для поверхности получаем уравнение

$$\frac{v_{\infty} r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q}{4\pi} (1 + \cos \theta) = \frac{v_{\infty} \sin^2 \theta}{2} \left(r^2 - \frac{2r_0^2}{1 - \cos \theta} \right) = 0, \quad (3.208)$$

где $r_0 = \sqrt{Q/4\pi v_{\infty}}$.

Таким образом, поверхность тока $\psi = \psi_0$ состоит из отрезка $(-\infty, r_0)$ оси z и поверхности вращения

$$r(\theta) = \frac{r_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \theta}}. \quad (3.209)$$

Эту разделительную поверхность можно рассматривать как поверхность твердого полутела, обтекаемого однородным потоком. Все характеристики потока у полутела относятся к области $r(\theta) \geq \frac{r_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \theta}}$.

С другой стороны, поверхность может рассматриваться как непроницаемая оболочка, простирающаяся на бесконечность, у вершины которой на расстоянии r_0 по оси симметрии находится источник. Картину дви-

жения от этого источника можно получить, если рассмотреть область

$$r(\theta) \leq \frac{r_0 \sqrt{2}}{\sqrt{1 - \cos \theta}}.$$

Форма разделительной поверхности зависит от соотношения Q и v_∞ или величины r_0 . Но характерно то, что площадь поперечного сечения полутела стремится на бесконечности к постоянной величине. Действительно, радиус поперечного сечения $\rho(z) = r \sin \theta$, так что из (3.209) имеем

$$\rho(z) = r_0 \sqrt{2} \sqrt{1 + \cos \theta}$$

$$\text{и, следовательно, } \rho(z) \Big|_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0}} = 2r_0 = \sqrt{\frac{Q}{\pi v_\infty}}.$$

Скорости потока имеют выражения

$$v_r = v_\infty \cos \theta + \frac{Q}{4\pi r^2}; \quad v_\theta = -v_\infty \sin \theta,$$

а на поверхности $\psi = 0$ получаем, учитывая (3.209):

$$v_r = \frac{v_\infty}{2} (1 + \cos \theta); \quad v_\theta = -v_\infty \sin \theta.$$

Распределение давления на поверхности полутела определяется при помощи интеграла Лагранжа

$$p(r(\theta)) = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{v^2}{v_\infty^2} \right) = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{v_\infty^2} \right) = p_\infty - \frac{\rho v_\infty^2}{8} (1 - \cos \theta)(1 + 3 \cos \theta).$$

Интересно отметить, что сопротивление этого полутела, как и в двумерной задаче, равно нулю, поскольку на бесконечности у полутела площадь поперечного сечения конечна. В качестве упражнения этот результат можно получить из теоремы импульсов (см. пример 2 в § 3.1).

2. Источник и сток равной мощности в однородном потоке. Обтекание оvoida Рэнкина.

Пусть источник и сток одинаковой мощности, расположенные соответственно в точках $z = -a$ и $z = +a$ на оси z , помещены в однородный поток $\mathbf{v} = v_\infty \mathbf{i}_z$ (см. рис. 3.75). Потенциал и функция тока сложного потока в соответствии с (3.188) и (3.189) имеют выражения

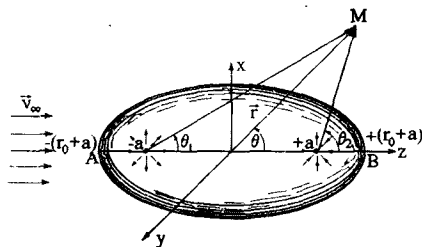


Рис. 3.75

$$\begin{aligned}\varphi &= v_{\infty} r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi |\mathbf{r} + a\mathbf{i}_z|} + \frac{Q}{4\pi |\mathbf{r} - a\mathbf{i}_z|}, \\ \psi &= \frac{v_{\infty} r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q}{4\pi} \cos \theta_1 + \frac{Q}{4\pi} \cos \theta_2.\end{aligned}\quad (3.210)$$

Поверхность тока $\psi = 0$ состоит из поверхности овоида и отрезков оси $z: (-\infty, r_0)$, (r_0, ∞) , поскольку $\psi = 0$ удовлетворяется значением $\theta = \theta_1 = \theta_2 = 0$ и $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \pi$. Положение критических точек A и B на овоиде можно определить, если найти скорость на овоиде. Чтобы избежать громоздких выкладок, заметим, например, что в критической точке A скорость обращается в нуль, поскольку скорость однородного потока складывается со скоростью по оси z от источника и стока, т. е.

$$v_{\infty} = \frac{Q}{4\pi r_0^2} - \frac{Q}{4\pi (r_0 - 2a)^2}.$$

Отсюда, обозначая $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{a}$, $\bar{Q} = \frac{Q}{\pi v_{\infty} a^2}$, имеем соотношение

$$\bar{r}_0^2 (\bar{r}_0 - 2)^2 + \bar{Q} (\bar{r} - 1_0) = 0.$$

Если задано \bar{Q} , то \bar{r}_0 является положительным корнем вышенаписанного уравнения четвертой степени и его значение определяет длину овоида $l = 2a + 2r_0 = 2a(1 + \bar{r}_0)$, а максимальная ширина $2h$ определяется из кубического уравнения

$$\frac{h^2}{a^2} \sqrt{1 + \frac{h^2}{a^2}} = \bar{Q}.$$

Это соотношение получается из уравнения кривой, определяющей овоид $\psi = 0$ в плоскости $y = 0$, т. е. (см. рис. 3.75)

$$x^2 = a^2 \bar{Q} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Полагая здесь $\theta_1 = \pi - \theta_2 = \arccos \frac{a}{\sqrt{h^2 + a^2}}$ и $x = h$, получаем выше приведенное уравнение для h .

При $\bar{Q} \ll 1$ имеем $\bar{r} \ll 1$ и $h \ll a$, т. е. в этом предельном случае овоид Рэнкина представляет собой тонкое сигарообразное тело вращения, концы которого близко расположены возле точек $z = \pm a$.

При $\bar{Q} \gg 1$ овоид превращается в чуть сплюснутую сферу, радиус которой \bar{r}_0 велик и приближается к значению $(\bar{Q})^{1/3}$, ибо $\bar{r}_0^3 \sim \bar{Q}$.

3. *Источник и стоки, распределенные по прямой, в однородном потоке. Обтекание дирижаблевидного тела.*

Пусть в однородном потоке $\mathbf{v} = v_\infty \mathbf{i}_z$ расположены точечный источник Q в точке $z = -b$ и стоки, распределенные

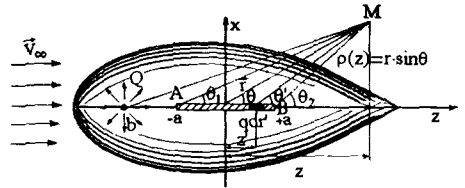


Рис. 3.76

по отрезку $(-a, a)$ оси z с плотностью $\frac{Q}{2a} q(z)$, причем общая их мощ-

ность равна Q , т. е. $\int_{-a}^a q(z) dz = 2a$, и $b > a > 0$.

Тогда потенциал (r, θ, ε) и функцию тока составного потока можно в сферических координатах (см. рис. 3.76) записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= v_\infty r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi |\mathbf{r} + b\mathbf{i}_z|} + \frac{Q}{8\pi a} \int_{-a}^a \frac{q(z') dz'}{|\mathbf{r} - z'\mathbf{i}_z|} = \\ &= v_\infty r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi \sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta}} + \frac{Q}{8\pi a} \int_{-a}^a \frac{q(z') dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}}, \\ \psi(r, \theta) &= \frac{v_\infty r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q}{4\pi} \cos \theta + \frac{Q}{8\pi a} \int_{-a}^a q(z') \cos \theta'(z') dz' = \\ &= \frac{v_\infty r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q}{4\pi} \frac{r \cos \theta + b}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta}} + \frac{Q}{8\pi a} \int_{-a}^a \frac{(z - z') q(z') dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}}. \end{aligned} \quad (3.211)$$

Подставляя сюда $r^2 = \rho^2 + z^2$, $\sin \theta = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$, получим выражения для $\varphi(\rho, z)$, $\psi(\rho, z)$, (в цилиндрических координатах z, ρ, ε).

Поверхность тока $\psi = 0$ содержит отрезки оси z ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) и удобообтекаемую поверхность, сужающуюся к кормовой части тем больше,

чем меньше безразмерный параметр $\frac{Q}{4\pi v_\infty a^2}$ (ср. пример 2, § 3.2). Эти поверхности обычно используются при проектировании дирижаблей.

Наиболее простые выражения (3.211) получаются при постоянной плотности распределения стоков, т. е. при $q(z') = 1$. В этом случае имеем

$$\int_{-a}^a \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}} = \frac{1}{2r \sin \theta} \left[\operatorname{arcsch} \frac{a - r \cos \theta}{r \sin \theta} + \operatorname{arcsch} \frac{a + r \cos \theta}{r \sin \theta} \right],$$

$$\int_{-a}^a \frac{(z - z') dz'}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}} = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta} + \sqrt{r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta} +$$

$$+ \operatorname{ctg} \theta \left[\operatorname{arcsch} \frac{a - r \cos \theta}{r \sin \theta} + \operatorname{arcsch} \frac{a + r \cos \theta}{r \sin \theta} \right],$$

так что не представляет труда численно построить обтекаемые поверхности для различных значений параметра $Q/4\pi v_\infty a^2$ и отношения b/a .

Стоит заметить, что для $r > a$ картину потока можно получить, если воспользоваться основным свойством производящей функции для полиномов Лежандра, а именно (см. § 3.1):

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta}} = \frac{1}{z'} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{z'} \right)^{-(n+1)} P_n(\cos \theta) \quad (r > z').$$

Тогда, подставляя это разложение в (3.211), получим

$$\varphi(r, \theta) = v_\infty r \cos \theta - \frac{Q}{4\pi} (r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta)^{-1/2} + \frac{Q}{8\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta),$$

$$\psi(r, \theta) = \frac{v_\infty r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{Q}{4\pi} \frac{r \cos \theta + b}{\sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta}} - \frac{Q}{8\pi a} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{r^{-n}}{n} P'_n(\cos \theta) \sin^2 \theta \quad (r > a),$$

где $c_n = \int_{-a}^a z'' q_n(z) dz$, $P'_n = dP_n/d(\cos \theta)$.

Кроме того, отмечая (см. рис. 3.72), что $z - z' = \rho \operatorname{ctg} \theta'$, имеем $dz' = \rho \frac{d\theta'}{\sin^2 \theta'}$, так что в выражении для ψ имеем (при $q(z') = 1$)

$$\int_{-a}^a \cos \theta' dz' = \rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta'}{\sin^2 \theta'} d\theta' = \frac{\rho}{\sin \theta_1} - \frac{\rho}{\sin \theta_2} = MA - MB.$$

Этим соотношением можно воспользоваться при построении линий тока, поскольку

$$\psi = \frac{v_\infty r^2 \sin^2 \theta}{2} - \frac{Q(r \cos \theta + b)}{4\pi \sqrt{r^2 + b^2 + 2rb \cos \theta}} + \frac{Q}{8\pi a} (MA - MB).$$

4. Диполь в однородном потоке. Обтекание и поступательное движение сферы.

Течение от диполя с вектором момента \mathbf{m} , направленным вдоль оси z , причем $\mathbf{m} = -m\mathbf{i}_z$, помещенного в однородном потоке $\mathbf{v} = v_\infty \mathbf{i}_z$ (см. рис. 3.77), имеет потенциал и функцию тока следующего вида:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= v_\infty r \cos \theta + \frac{m \cos \theta}{4\pi r^2}, \\ \psi(r, \theta) &= \frac{v_\infty r^2}{2} \sin^2 \theta - \frac{m}{4\pi r} \sin^2 \theta = \frac{v_\infty r^2}{2} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{m}{2\pi v_\infty r^3} \right).\end{aligned}\quad (3.212)$$

Если выбрать величину момента диполя так, чтобы $m = 2\pi v_\infty a^3$, где a имеет размерность длины, то тогда поверхность тока $\psi = 0$, помимо отрезков оси z ($\theta = 0, \theta = \pi$), будет включать еще сферу с радиусом a с центром в начале координат.

Таким образом, формулы (3.212) при $r > a$ можно рассматривать как потенциал и функцию тока обтекания сферы с радиусом a однородным потоком. При $r < a$ эти выражения определяют поток от диполя, помещенного в центр сферы.

Таким образом, потенциал, функция тока и составляющие скорости обтекания сферы с радиусом a в сферической системе координат (r, θ, ε) имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \theta) &= v_\infty \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right); \quad \psi(r, \theta) = \frac{v_\infty r^2}{2} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right); \\ v_r &= v_\infty \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right); \quad v_\theta = -v_\infty \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right); \quad v_\varepsilon = 0.\end{aligned}\quad (3.213)$$

Распределение давления по сфере ($r = a$) получаем из интеграла Лагранжа:

$$p = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{v_\infty^2} \right) = p_\infty + \frac{\rho v_\infty^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (3.214)$$

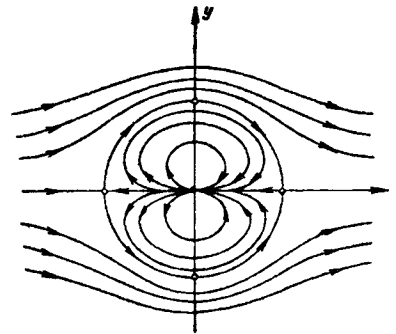


Рис. 3.77

Критические точки на сфере принадлежат оси z ($\theta = 0, \theta = \pi$ и $r = a$).

Максимальная скорость скольжения жидкости по сфере равна $|v_{\theta \max}| = \frac{3}{2} v_{\infty}$ и достигается во всех точках диаметрального сечения сферы, перпендикулярного направлению потока $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$. В точках этой окружности давление на сфере минимально и равно

$$p_{\min} = p_{\infty} - \frac{5}{8} \rho v_{\infty}^2,$$

так что условием безотрывного обтекания сферы (условием отсутствия кавитации) можно считать

$$p_{\infty} > \frac{5}{8} \rho v_{\infty}^2.$$

Рассмотрим поступательное движение сферы со скоростью в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности.

Потенциал и функция тока движения жидкости, вызванного перемещающейся сферой, в системе координат, начало которой находится в центре сферы, можно получить из (3.213), отбросив однородный поток и заменив v_{∞} на $-v_0(t)$. Таким образом, имеем

$$\varphi = -\frac{\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}}{2r^3} a^3 = -\frac{v_0(t)}{2r^2} a^3 \cos \theta, \quad \psi = \frac{v_0(t)}{2r} a^3 \sin^2 \theta.$$

Распределение давления по движущейся сфере теперь определяется интегралом Лагранжа

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = p_{\infty},$$

поскольку на бесконечности жидкость покоится.

Имеем (для любого r):

$$v^2 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 = \frac{v_0^2 a^5}{r^6} \left(\cos^2 \theta + \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a^3}{2r^3} \frac{dv_0}{dt} \cdot \mathbf{r} - \frac{a^3}{2r^3} \mathbf{v}_0 \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{3a^3}{2r^4} \frac{dr}{dt} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}).$$

Так как в системе, связанной с движущейся сферой $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{v}_0$, а $\frac{dr}{dt} = -\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}$, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{a^3}{2r^3} \frac{dv_0}{dt} \cdot \mathbf{r} + \frac{a^3}{2r^3} v_0^2 - \frac{3a^3}{2r^4} v_0^2 \cos^2 \theta.$$

Таким образом, получаем

$$p = p_\infty + \frac{\rho a^3}{2r^3} \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} - \frac{1}{8} \frac{v_0^2 a^6 \rho}{r^6} (3 \cos^2 \theta + 1) + \frac{1}{2} \frac{v_0^2 a^3 \rho}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1).$$

На поверхности движущейся сферы ($r = a$) имеем

$$p|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho}{2} a \frac{dv_0}{dt} \cos \theta + \frac{\rho v_0^2}{2} \left(1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right). \quad (3.215)$$

Следовательно, начало и место кавитации на движущейся сфере зависит не только от величины скорости v_0 , но и от величины ускорения $\frac{dv_0}{dt}$.

Теорема Вейса для сферы. Своеобразным обобщением теоремы об окружности (см. § 3.2) является следующая теорема [8].

Теорема. Если в пространственный поток с потенциалом скорости $\varphi(r, \theta, \varepsilon)$ поместить сферу с радиусом a , то потенциал нового течения $\Phi(r, \theta, \varepsilon)$ равен

$$\Phi(r, \theta, \varepsilon) = \varphi(r, \theta, \varepsilon) + \frac{1}{a} \int_0^{a^2/r} \frac{\partial \varphi(r', \theta, \varepsilon)}{\partial r'} r' dr', \quad (3.216)$$

причем предполагается, что все особенности функции $\varphi(r, \theta, \varepsilon)$ удалены от начала координат на расстояние, большее чем a .

Эта теорема применима для общего трехмерного движения (для осесимметричного существует аналогичная теорема Бутлера (см. [8], гл. 15)).

Доказательство. Обозначим $\tilde{\varphi}(r, \theta, \varepsilon) = \frac{1}{a} \int_0^{a^2/r} \frac{\partial \varphi(r', \theta, \varepsilon)}{\partial r'} r' dr'$ и, прежде всего, покажем, что $\Delta_r \tilde{\varphi} = 0$, ($\Delta_r \equiv r^2 \Delta$).

Обозначая $\frac{a^2}{r} \equiv R$, имеем:

$$\begin{aligned} a\tilde{\varphi} &= \int_0^R \frac{\partial \varphi(r', \theta, \varepsilon)}{\partial r'} r' dr' = \int_0^R \left\{ \frac{\partial}{\partial r'} (\varphi r') - \varphi \right\} dr' = \\ &= R\varphi(R, \theta, \varepsilon) - \int_0^R \varphi(r', \theta, \varepsilon) dr' = R\varphi(R, \theta, \varepsilon) - \varphi^*(r, \theta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Поскольку в силу теоремы Кельвина (см. [8]) $\Delta_r (R\varphi(R, \theta, \varepsilon)) = 0$, то нам остается доказать $\Delta_r \varphi^*(r, \theta, \varepsilon) = 0$, т. е.

$$\Delta_r \varphi^*(r, \theta, \varepsilon) \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial \varepsilon^2}, \quad (3.217)$$

где

$$\varphi^* = \int_0^R \varphi(r', \theta, \varepsilon) dr', \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta} = \int_0^R \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dr', \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial \varepsilon} = \int_0^R \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon} dr'.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} &= \varphi(R, \theta, \varepsilon) \cdot \frac{\partial R}{\partial r} = -\frac{a^2}{r^2} \varphi(R, \theta, \varepsilon), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi^*}{\partial r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(-a^2 \varphi(R, \theta, \varepsilon) \right) = -a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial r} = \frac{a^4}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial R} = R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R}. \end{aligned}$$

Тогда (3.217) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta_r \varphi^*(r, \theta, \varepsilon) &= \int_0^R \left[\frac{\partial}{\partial r'} \left(r'^2 \frac{\partial \varphi(r', \theta, \varepsilon)}{\partial r'} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi(r', \theta, \varepsilon)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \varphi(r', \theta, \varepsilon) \right] dr'. \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральная функция справа представляет собой оператор $\Delta_r \varphi(r', \theta, \varepsilon)$, который в силу гармоничности $\varphi(r', \theta, \varepsilon)$ равен 0, то отсюда имеем

$$\Delta_r \varphi^*(r, \theta, \varepsilon) = 0.$$

Таким образом $\Delta_r \tilde{\varphi} = 0$.

Во-вторых, заметим, что по условию теоремы все особенности $\varphi(r, \theta, \varepsilon)$ находятся вне сферы $r = a$. Поэтому из вида $\tilde{\varphi} = \frac{a^2}{r} \varphi\left(\frac{a^2}{r}, \theta, \varepsilon\right) - \int_0^{a^2/r} \varphi(r', \theta, \varepsilon) dr'$ следует, что $\tilde{\varphi}$ не содержит особенностей в области $\frac{a^2}{r} < r$, т. е. вне сферы, так что при $r > a$ эта функция гармоническая.

Наконец, из (1) следует

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{1}{a} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right|_{r=a} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} + \frac{1}{a} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial R}{\partial r} \right|_{r=a} = \\ &= \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} - \frac{a^2}{r^2} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right|_{r=a} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, сфера является непроницаемой поверхностью, теорема доказана.

Простейшим применением этой теоремы является определение потенциала сферы, обтекаемой однородным потоком со скоростью v_∞ . Для этого случая имеем $\varphi = v_\infty \cdot \mathbf{r} = v_\infty r \cos \theta$. Тогда (ср. 3.211)

$$\Phi = v_\infty r \cos \theta + \frac{1}{a} \int_0^{a^2/r} \frac{\partial \varphi}{\partial r'} r' dr' = v_\infty r \cos \theta + \frac{v_\infty \cos \theta}{a} \int_0^{a^2/r} r' dr' = v_\infty r \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{2r^3} \right).$$

Другие применения этой теоремы можно найти в [8].

Обтекание и движение трех-осных эллипсоидов

Безвихревое движение невязкой несжимаемой жидкости у эллипсоидов в общем случае обычно изучается с помощью потенциала потока $\varphi(\mathbf{r})$, рассматриваемого как функция эллипсоидальных координат λ , μ и ν . Одними из семейств координатных поверхностей ($\lambda = \text{const}$) являются софокусные эллипсоиды (см. рис. 3.78)

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1, \quad (3.218)$$

причем $+\infty > \lambda > -c^2$.

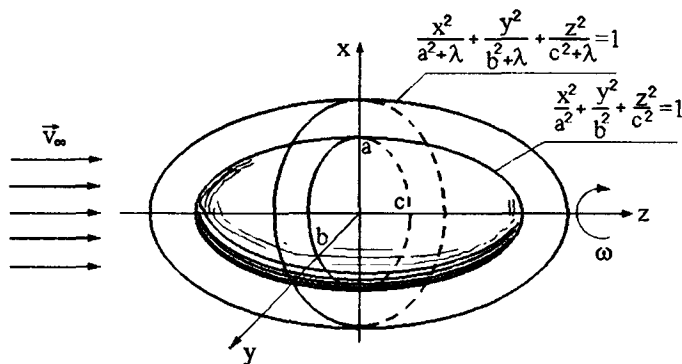


Рис. 3.78

Декартовы прямоугольные координаты связаны с эллипсоидальными следующими формулами:

$$x^2 = \frac{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}; \quad y^2 = \frac{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)};$$

$$z^2 = \frac{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Из этих формул, в частности, следуют соотношения

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \frac{x}{a^2 + \lambda}, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \frac{y}{b^2 + \lambda}, \quad \frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \frac{z}{c^2 + \lambda}, \quad (3.219)$$

которыми мы в дальнейшем будем пользоваться.

Уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах имеет вид (см. ч. 1)

$$\begin{aligned} (\mu - \nu)k_\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(k_\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right) + (\nu - \lambda)k_\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(k_\mu \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right) + \\ + (\lambda - \mu)k_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} \left(k_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (3.220)$$

где

$$\begin{aligned} k_\lambda^2 &= (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda), \quad k_\mu^2 = (a^2 + \mu)(b^2 + \mu)(c^2 + \mu), \\ k_\nu^2 &= (a^2 + \nu)(b^2 + \nu)(c^2 + \nu). \end{aligned}$$

При этом коэффициенты Ламэ для эллипсоидальных координат имеют вид

$$H_\lambda^2 = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}{4k_\lambda^2}, \quad H_\mu^2 = \frac{(\mu - \nu)(\mu - \lambda)}{4k_\mu^2}, \quad H_\nu^2 = \frac{(\nu - \mu)(\nu - \lambda)}{4k_\nu^2}.$$

Функции $\varphi(\lambda, \mu, \nu)$, удовлетворяющие уравнению (3.220), носят название *эллипсоидальных гармонических функций*.

Некоторые интересные с точки зрения приложений случаи движения жидкости у эллипсоидов можно получить при помощи частного решения уравнения (3.220) вида

$$\varphi = \alpha(\lambda, \mu, \nu) f(\lambda), \quad (3.221)$$

где α — гармоническая эллипсоидальная функция, а $f(\lambda)$ — функция, зависящая только от координаты λ , постоянной на софокусных эллипсоидах (3.218).

Подставляя (3.221) в (3.220) и учитывая, что $\Delta\alpha = 0$, получаем

$$\left(2k_{\lambda} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda} + \alpha \frac{dk_{\lambda}}{d\lambda} \right) \frac{df}{d\lambda} + \alpha k_{\lambda} \frac{d^2 f}{d\lambda^2} = 0$$

или

$$\frac{d}{d\lambda} \ln \left(k_{\lambda} \frac{df}{d\lambda} \right) = - \frac{2}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}. \quad (3.222)$$

Поскольку слева стоит функция только от λ , то $\alpha(\lambda, \mu, \nu) = \alpha_{\lambda}(\lambda) \times \alpha_0(\mu, \nu)$, и тогда, интегрируя (3.222), получаем

$$f(\lambda) = A \int \frac{d\lambda}{k_{\lambda} \alpha_{\lambda}^2} + B,$$

где A и B — постоянные.

Итак, предполагая, что $\varphi(\lambda, \mu, \nu)$ имеет вид (3.221), мы пришли к выводу, что это частное решение уравнения Лапласа представляется в форме

$$\varphi = \alpha(\lambda, \mu, \nu) \int \frac{d\lambda}{k_{\lambda} \alpha_{\lambda}^2} = \alpha_{\lambda}(\lambda) \alpha_0(\mu, \nu) \int \frac{d\lambda}{k_{\lambda} \alpha_{\lambda}^2}. \quad (3.223)$$

Таким образом, выбирая гармоническую функцию α так, чтобы удовлетворить граничным условиям и, соответственно, α_{λ} из представления $\alpha(\lambda, \mu, \nu) = \alpha_{\lambda}(\lambda) \alpha_0(\mu, \nu)$, можно получить практически интересные решения уравнения (3.220). Рассмотрим три вида частных решений:

1. $\alpha_{\lambda} = 1$; $\alpha = A = \text{const}$;
2. $\alpha_{\lambda} = \sqrt{c^2 + \lambda}$; $\alpha = A z$;
3. $\alpha_{\lambda} = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}$; $\alpha = A x y$.

1. Течение через эллиптическое отверстие в стенке.

Пусть в стенке $z = 0$ проделано эллиптическое отверстие с кромкой в виде эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Этот эллипс является предельным эллипсоидом (3.218) при $z^2 = 0$ и $\lambda = -c^2$. Поэтому, рассматривая потенциал φ для течения у отверстия и стенки, в области $z \neq 0$, нужно положить $c = 0$ так, что решение (3.223) для первого случая ($\alpha_{\lambda} = 1$; $\alpha = A$) имеет вид

$$\varphi = \pm A \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} \lambda}. \quad (3.224)$$

Здесь знак выбирается в зависимости от того, в какой области ($z > 0$ или $z < 0$) рассматривается решение, а верхний предел у интеграла является положительным корнем уравнения $x^2 / (a^2 + \lambda) + y^2 / (b^2 + \lambda) + z^2 / \lambda = 1$.

В области отверстия λ мало, поскольку $c = 0$. Пользуясь этим, можно получить приближенные формулы. Так, например, для скорости течения через отверстие имеем

$$v_z \approx \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{A}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda}} \frac{\partial \lambda}{\partial z}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} \right)^{1/2} \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} \right)^{1/2} + \\ &+ \frac{\sqrt{\lambda}}{2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} \right)^{-1/2} \left(\frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} \right), \end{aligned}$$

то с точностью до $\sqrt{\lambda}$ имеем

$$v_z = \frac{2A}{ab} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2}.$$

Постоянная A выражается через объемный расход жидкости через отверстие

$$\begin{aligned} Q &= \int_S v_z dS = \frac{2A}{ab} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} \left(1 - r^2 \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} \right) \right)^{-1/2} r dr = \\ &= \frac{2A}{ab} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{r(\theta)} \left(1 - \frac{r^2}{r^2(\theta)} \right)^{-1/2} r dr = \frac{2A}{ab} \int_0^{2\pi} \left[\sqrt{1 - \frac{r^2}{r^2(\theta)}} \right]_{r(\theta)}^0 r^2(\theta) d\theta = \\ &= \frac{2Ab}{a} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \frac{Ab\pi}{a\sqrt{1 - e^2}} \left(e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right). \end{aligned}$$

Отсюда $A = \frac{Qa\sqrt{1 - e^2}}{b\pi}$, так что

$$A(A + 0)(A + \infty) = 0$$

$$v_z = \frac{2Q\sqrt{1-e^2}}{b^2\pi} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)^{-1/2}. \quad (3.225)$$

В случае круглого отверстия ($a=b$) имеем

$$v_z = \frac{2Q}{\pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{-1/2} \quad (3.226)$$

Как и следовало ожидать, на острых краях отверстий $v_z = \infty$.

2. Поступательное движение эллипсоида можно описать, если рассмотреть частное решение во втором случае ($\alpha_\lambda = \sqrt{c^2 + \lambda}$; $\alpha = Az$). Пусть эллипсоид, на поверхности которого $\lambda = 0$, т. е.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.227)$$

движется со скоростью v_{0z} в направлении оси z . Граничное условие для потенциала имеет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right|_{\lambda=0} = v_{0z}, \text{ или } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = v_{0z} \left. \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}.$$

Принимая

$$\varphi = Az \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)k_\lambda},$$

получаем, удовлетворяя этому условию,

$$A \left\{ \left. \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)k_\lambda(\lambda)} - (z)_{\lambda=0} \frac{1}{c^2 k_\lambda(0)} \right\} = v_{0z} \left(\left. \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \right).$$

Из (3.219) имеем

$$\left(\left. \frac{\partial z}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \right) = \frac{(z)_{\lambda=0}}{2c^2},$$

так что

$$A = \frac{v_{0z}abc}{\gamma_0 - 2}; \quad \gamma_0 = abc \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)k_\lambda(\lambda)}. \quad (3.228)$$

Таким образом, потенциал движения жидкости (покоящейся на бесконечности), вызванного поступательным движением эллипсоида (3.227) со скоростью v_{0z} , вдоль оси z имеет вид

$$\varphi = \frac{v_{0z}abc}{\gamma_0 - 2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)^{3/2} \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}}. \quad (3.229)$$

Если эллипсоид (3.227) движется поступательно со скоростью $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$, то потенциал движения жидкости у такого эллипсоида имеет выражение

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{v_{0x}xabc}{\alpha_0 - 2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)k_{\lambda}(\lambda)} + \frac{v_{0y}yabc}{\beta_0 - 2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)k_{\lambda}(\lambda)} + \\ & + \frac{v_{0z}zabc}{\gamma_0 - 2} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)k_{\lambda}(\lambda)}, \end{aligned} \quad (3.230)$$

где $k_{\lambda}(\lambda) = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}$, а α_0, β_0 получаются из γ_0 (см. (3.228))

заменой в подынтегральной функции $c^2 + \lambda$ на $a^2 + \lambda$ и $b^2 + \lambda$ соответственно.

При этом потенциал обтекания этого эллипсоида однородным потоком со скоростью \mathbf{v}_{∞} образуется из (3.230) заменой \mathbf{v}_0 на $-\mathbf{v}_{\infty}$ и добавлением потенциала однородного потока $\mathbf{v}_{\infty} \cdot \mathbf{r}$. Так, например, в случае сферы ($a = b = c$) имеем $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \frac{2}{3}$, а поскольку $k_{\lambda} = (a^2 + \lambda)^{3/2}$, то из (3.230) получаем потенциал движения у сферы

$$\varphi = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \frac{a^3}{2r^3},$$

а потенциал обтекания сферы однородным потоком равен (ср. (3.213))

$$\varphi = (\mathbf{v}_{\infty} \cdot \mathbf{r}) \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right).$$

Используя соотношения (3.219), можно получить поле скоростей у эллипсоида. Так, например, для составляющей v_x в случае эллипсоида, движущегося вдоль оси z , имеем из (3.229) и (3.219):

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = - \frac{v_{0z} abc z}{(\gamma_0 + 2)x(c^2 + \lambda)^{3/2}} \sqrt{\frac{a^2 + \lambda}{b^2 + \lambda}}.$$

3. *Вращательное движение эллипсоида* описывается частным решением (3.223), когда в качестве гармонической функции α выбираются xy , xz , yz .

Если эллипсоид $\lambda = 0$ вращается вокруг оси z с угловой скоростью ω , то скорость его точек $\mathbf{v}|_S = \omega \times \mathbf{r}|_S = \omega(\mathbf{i}_z \times \mathbf{r})_S$. Поэтому граничное условие для потенциала скорости приобретает вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\lambda=0} = \omega(\mathbf{i}_z \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}|_{\lambda=0} = \omega(xn_y - yn_x)|_{\lambda=0}. \quad (3.231)$$

Так как $\nabla \lambda$ и \mathbf{n} на поверхности эллипсоида коллинеарны, то при $\lambda = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{H_\lambda} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}; \quad n_y = \frac{1}{H_\lambda} \frac{\partial y}{\partial \lambda}; \quad n_x = \frac{1}{H_\lambda} \frac{\partial x}{\partial \lambda},$$

где H_λ — коэффициент Ламе. Поэтому (3.231) можно записать в форме

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \omega \left(x \frac{\partial y}{\partial \lambda} - y \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0}. \quad (3.232)$$

Выбирая в качестве φ решение (вид третий)

$$\varphi = Axy \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{k_\lambda(\lambda)(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)},$$

из (3.232) получаем уравнение для определения A

$$\begin{aligned} A \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \lambda} y + \frac{\partial y}{\partial \lambda} x \right) \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{d\lambda}{k_\lambda(\lambda)(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - (xy)_{\lambda=0} \frac{1}{k_\lambda(0)a^2b^2} \right] = \\ = \omega \left(x \frac{\partial y}{\partial \lambda} - y \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0}. \end{aligned}$$

Отсюда, используя соотношения (3.219), получаем

$$A \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{k_\lambda(\lambda)(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} - \frac{1}{a^3b^3c} \right] = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$$

Поскольку (см. (3.228), (3.230))

$$\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{k_{\lambda}(\lambda)(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)} =$$

$$\frac{1}{a^2 - b^2} \left[\int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(b^2 + \lambda)k_{\lambda}} - \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)k_{\lambda}} \right] = \frac{\beta_0 - \alpha_0}{(a^2 - b^2)abc},$$

то

$$A = \frac{\omega abc(a^2 - b^2)^2}{2(b^2 - a^2) + (a^2 + b^2)(\beta_0 - \alpha_0)}. \quad (3.233)$$

Если твердый эллипсоид $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ вращается вокруг трех осей, т. е. $\omega = (\omega_{0x}, \omega_{0y}, \omega_{0z})$, то потенциал φ является суперпозицией решений, полученных аналогично предыдущему.

4. Вращение жидкого эллипсоида, заключенного в оболочку $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ и вращающегося, скажем вокруг оси x , может быть изучено с помощью частного решения того же вида, что и в предыдущем случае.

Граничное условие в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\lambda=0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} n_z \right) = \omega (n_z y - n_y z)_{\lambda=0}.$$

Учитывая значения проекций нормали к эллипсоиду, получаем

$$\left(\frac{x}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{\lambda=0} = \omega \left(\frac{zy}{c^2} - \frac{yz}{b^2} \right).$$

Этому условию удовлетворяет решение:

$$\varphi = Ayz, \quad A = \frac{\omega(b^2 - c^2)}{c^2 + b^2}.$$

Таким образом, если жидкий эллипсоид вращается с угловой скоростью $\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ вокруг трех осей и движется поступательно со скоростью $v = (v_x, v_y, v_z)$, то потенциал скорости внутри эллиптической оболочки имеет вид

$$\varphi = v_x x + v_y y + v_z z + \frac{(b^2 - c^2)\omega_x}{b^2 + c^2} yz + \frac{(c^2 - a^2)\omega_y}{a^2 + c^2} xz + \frac{(a^2 - b^2)\omega_z}{a^2 + b^2} xy. \quad (3.234)$$

Обтекание и движение эллипсоидов вращения

Потенциал обтекания и поле скоростей у эллипсоидов вращения всегда могут быть выписаны с помощью полученных

решений (3.230), (3.233), (3.234), если рассматривается их общий случай движения в безграничной жидкости, покоящейся на бесконечности, или обтекание однородным потоком. Для этого стоит приравнять в общих формулах величины двух полуосей. Однако, движение у эллипсоидов вращения обладает особенностями двумерных течений, и это позволяет использовать такие особенности для упрощения анализа.

Во-первых, очень часто вместо координат $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z в меридиональной плоскости, проходящей через ось симметрии эллипсоида вращения (ось z , так что $a = b$) вводят *эллиптические координаты* ξ и η соотношениями:

1) для вытянутого эллипсоида вращения ($c > a$; $a = b$)

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{a^2 + \lambda \sin \eta} = ec \operatorname{sh} \xi \sin \eta, \\ z &= \sqrt{a^2 + \lambda \cos \eta} = ec \operatorname{ch} \xi \cos \eta,\end{aligned}\tag{3.235}$$

где $e = \frac{\sqrt{c^2 - a^2}}{c}$ — эксцентриситет вытянутого в меридиональной плоскости вдоль оси z эллипса

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = \frac{\rho^2}{e^2 c^2 \operatorname{sh}^2 \xi} + \frac{z^2}{e^2 c^2 \operatorname{ch}^2 \xi} = 1,$$

который при вращении вокруг оси z описывает вытянутый эллипсоид вращения.

Таким образом, координатные линии $\xi = \text{const}$ образуют софокусные эллипсы в меридиональной плоскости;

2) для сплюснутого эллипсоида вращения ($c < a$; $a = b$)

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{c^2 + \lambda \sin \eta} = a\delta \operatorname{ch} \xi \sin \eta, \\ z &= \sqrt{c^2 + \lambda \cos \eta} = a\delta \operatorname{sh} \xi \cos \eta,\end{aligned}\tag{3.236}$$

где $\delta = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}$ — эксцентриситет сплюснутого в меридиональной плоскости вдоль оси z эллипса

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = \frac{\rho^2}{a^2 \delta^2 \operatorname{ch}^2 \xi} + \frac{z^2}{a^2 \delta^2 \operatorname{sh}^2 \xi} = 1.$$

И здесь координатные линии $\xi = \text{const}$ дают софокусные эллипсы, у которых, однако, полуось по оси вращения меньше перпендикулярной полуоси.

При этом, $0 \leq \eta \leq 2\pi$, $0 \leq \xi \leq \infty$, так что формулы в этих координатах более удобны для анализа.

Уравнение Лапласа в координатах (ξ, η, ε) может быть получено из общего уравнения (см. ч. 1) для ортогональных координат и имеет вид — для вытянутого эллипсоида:

$$\frac{1}{a^2 c^2 (\sigma^2 - \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left((\sigma^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left((1 - \tau^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) \right\} + \frac{\sigma^2 - \tau^2}{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} = 0,$$

(здесь $\sigma = \operatorname{ch} \xi$; $\tau = \cos \eta$); — для сплюснутого эллипсоида:

$$\frac{1}{e^2 \delta^2 (\sigma^2 - \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left((\sigma^2 + 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left((1 - \tau^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right) \right\} + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varepsilon^2} = 0$$

(здесь $\sigma = \operatorname{sh} \xi$; $\tau = \cos \eta$).

Коэффициенты Ламэ имеют выражения

$$\left. \begin{aligned} H_\xi &= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2} = ec \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \\ H_\eta &= \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2} = ec \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta} \end{aligned} \right\} \text{ — для вытянутого эллипсоида;}$$

$H_\xi = a\delta\sqrt{\text{sh}^2\xi - \cos^2\eta} = H_\eta$ — для сплюснутого эллипсоида.

Во-вторых, для потоков у эллипсоидов вращения можно ввести функцию тока, поскольку осесимметричный поток является двумерным и обеспечивает существование функции тока (см. ч. 2, § 4).

Выражение для функции тока $\psi(\rho, z)$ можно получить на основании объемного потенциала Ω для эллипсоида, который имеет для точек (x, y, z) , внешних по отношению к эллипсоиду, следующий вид

$$\Omega(x, y, z) = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}} d\lambda, \quad (3.237)$$

где нижний предел λ в интеграле является наибольшим корнем кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1. \quad (3.238)$$

Если точка (x, y, z) лежит вне эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.239)$$

то $\lambda > 0$ и является единственным положительным корнем уравнения (3.238); на поверхности эллипсоида $\lambda = 0$.

Если точка (x, y, z) лежит внутри эллипсоида (3.239), то в (3.237) следует положить $\lambda = 0$.

Можно показать, что потенциал $\Omega(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\Omega = -4\pi$, если точка (x, y, z) — внутри эллипсоида, и $\Delta\Omega = 0$, если эта точка лежит вне эллипсоида. Кроме того, функция $\Omega(x, y, z)$ в бесконечности обращается в нуль.

Кроме того, в цилиндрических координатах (z, ρ, ε) функция тока обтекания эллипсоида вращения ($a = b$) однородным потоком $\mathbf{v}_\infty = \mathbf{i}_z v_\infty$, направленным вдоль оси симметрии, имеет вид

$$\psi(\rho, z) = \frac{v_\infty \rho^2}{2} \left(1 + \frac{1}{\pi(2 - \gamma_0)\rho} \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} \right), \quad (3.240)$$

где

$$\Omega(\rho, z) = \pi a^2 c \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - \frac{\rho^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda) \sqrt{c^2 + \lambda}} d\lambda,$$

и γ_0 имеет выражение (3.228).

Заметим, что потенциал обтекания также может быть выражен через $\Omega(\rho, z)$:

$$\varphi(\rho, z) = v_{\infty} \left\{ z - \frac{1}{2\pi(2 - \gamma_0)} \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right\}. \quad (3.241)$$

Пользуясь этими формулами, вычислим функции тока и потенциалы скорости потоков в примерах течений, рассмотренных выше для эллипсоидов вращения.

1. *Сфера*. Полагая в (3.237) и (3.228) $a = b = c$ и $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, получаем

$$\Omega(r) = \pi a^3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - \frac{r^2}{a^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)^{3/2}} d\lambda = \pi a^3 \left[\frac{2}{\sqrt{a^2 + \lambda}} - \frac{2}{3} \frac{r^2}{(a^2 + \lambda)^{3/2}} \right],$$

$$\gamma_0 = a^3 \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)^{5/2}} = \frac{2}{3}.$$

Поскольку уравнение сферы с радиусом a в эллипсоидальных координатах имеет вид $r^2 = a^2 + \lambda$, то ньютонов потенциал сферы имеет вид

$$\Omega(r) = \pi a^3 \left[\frac{2}{r} - \frac{2}{3r} \right] = \frac{4\pi a^3}{3r}. \quad (3.242)$$

Учитывая, что $r^2 = \rho^2 + z^2$, получаем из (3.240) и (3.241)

$$\psi(\rho, z) = \frac{v_{\infty} \rho^2}{2} \left(1 - \frac{a^3}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \right),$$

$$\varphi(\rho, z) = v_{\infty} z \left(1 + \frac{a^3}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} \right).$$

Компоненты скорости обтекания сферы:

$$v_\rho = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{3v_\infty a^3 \rho z}{2(\rho^2 + z^2)^{5/2}},$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = v_\infty \left(1 + \frac{a^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3a^3 z^2}{2(\rho^2 + z^2)^{5/2}} \right). \quad (3.243)$$

2. *Вытянутый эллипсоид вращения.* Перепишем (3.240) и (3.241) в другой форме, предварительно вычислив частные производные от $\Omega(\rho, z)$. Имеем:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = -\pi a^2 c \left(\frac{1 - \frac{\rho^2}{a^2 + \lambda} - \frac{z^2}{a^2 + \lambda}}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}} \right) - \pi a^2 c 2\rho \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}}.$$

Но в силу (3.238) первое слагаемое обращается в нуль, так что

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = -\pi a^2 c 2\rho \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{c^2 + \lambda}} = -2\pi \rho \alpha_0(\lambda, a, c).$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \rho} = -2\pi z a^2 c \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{3/2}} \equiv -2\pi z \gamma_0(a, c).$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\rho, z) &= v_\infty z \left(1 - \frac{\gamma_0(\lambda, a, c)}{\gamma_0(\lambda, a, c) - 2} \right); \quad \gamma_0(\lambda, a, c) = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{3/2}}; \\ \psi(\rho, z) &= \frac{v_\infty \rho^2}{2} \left(1 + \frac{2\alpha_0(\lambda, a, c)}{\gamma_0(\lambda, a, c) - 2} \right); \quad \alpha_0(\lambda, a, c) = \int_\lambda^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.244)$$

Для вытянутого вдоль оси симметрии эллипсоида вращения ($c > a$) вычисления дают

$$\begin{aligned}\varphi &= v_{\infty} z \left\{ 1 - \frac{1-e^2}{(\gamma_0-2)e^3} \left[\ln \frac{\sqrt{1+\lambda/c^2}-e}{\sqrt{1+\lambda/c^2}+e} - \frac{2e}{\sqrt{1+\lambda/c^2}} \right] \right\}; \\ \psi &= \frac{v_{\infty} \rho^2}{2} \left\{ 1 - \frac{1-e^2}{(\gamma_0-2)e^3} \left[\ln \frac{\sqrt{1+\lambda/c^2}-e}{\sqrt{1+\lambda/c^2}+e} - \frac{2e\sqrt{1+\lambda/c^2}}{1+\lambda/c^2-e^2} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (3.245)$$

Здесь $\gamma_0 = \frac{1-e^2}{e^3} \left(\ln \frac{1-e}{1+e} - 2e \right)$, $e = \frac{\sqrt{c^2-a^2}}{c}$, а λ — положительный корень уравнения $\rho^2/(a^2+\lambda) + z^2/(c^2+\lambda) = 1$, причем $\lambda = 0$ на поверхности обтекаемого эллипсоида $\rho^2/a^2 + z^2/c^2 = 1$.

В случае очень вытянутого эллипсоида $((1-\lambda) \ll 1)$ имеем приближенные формулы

$$\begin{aligned}\varphi &= v_{\infty} z \left\{ 1 - 1 - e \left[\ln \frac{\sqrt{1+\lambda/c^2}-1}{\sqrt{1+\lambda/c^2}+1} - \frac{2}{\sqrt{1+\lambda/c^2}} \right] + O((1-e)^2) \right\}; \\ \psi &= \frac{v_{\infty} \rho^2}{2} \left\{ 1 + 1 - e \left[\ln \frac{\sqrt{1+\lambda/c^2}-1}{\sqrt{1+\lambda/c^2}+1} - \frac{2\sqrt{1+\lambda/c^2}}{\lambda/c^2} \right] + O((1-e)^2) \right\}.\end{aligned}\quad (3.246)$$

Отметим, что этими формулами практически пользоваться неудобно, вследствие непростой зависимости $\lambda = \lambda(\rho, z)$. При вычислении поля скоростей потребуются значения $\frac{\partial \lambda}{\partial \rho}$ и $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$, которые связаны соотношением

$$2 = \frac{\rho}{a^2 + \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} + \frac{z}{c^2 + \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z}$$

(это соотношение получается из тождества $1 = \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \lambda}$ с учетом

формул (3.219); второе соотношение для $\partial \lambda / \partial \rho$ и $\partial \lambda / \partial z$ получается из

требования $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \rho \partial z} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z \partial \rho}$).

В связи с этими обстоятельствами в случае эллипсоидов вращения удобно использовать эллиптические координаты ξ, η (см. (3.235)). В этих координатах имеем

$$\begin{aligned}\varphi(\xi, \eta) &= v_{\infty} e c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \left[1 - \frac{2(1-e^2)}{e^3(\gamma_0-2)} \left(\ln \operatorname{th} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\operatorname{ch} \xi} \right) \right], \\ \psi(\xi, \eta) &= \frac{v_{\infty} e^2 c^2}{2} \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \left[1 - \frac{2(1-e^2)}{e^3(\gamma_0-2)} \left(\ln \operatorname{th} \frac{\xi}{2} - \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.247)$$

В случае сильно вытянутого эллипсоида вращения $\xi = \operatorname{const}$ получаем

$$\begin{aligned}\varphi(\xi, \eta) &= v_{\infty} c \operatorname{ch} \xi \cos \eta \left[1 + 2(1-e) \left(\ln \operatorname{th} \frac{\xi}{2} - \frac{1}{\operatorname{ch} \xi} \right) + O((1-e)^2) \right], \\ \psi(\xi, \eta) &= \frac{v_{\infty} c^2}{2} \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta \left[1 + 2(1-e) \left(\ln \operatorname{th} \frac{\xi}{2} - \frac{\operatorname{ch} \xi}{\operatorname{sh}^2 \xi} \right) + O((1-e)^2) \right].\end{aligned}$$

В предельном случае ($e=1$) получаем обтекание отрезка оси z , т. е. равномерный поток.

Компоненты скорости в эллиптических координатах имеют вид

$$v_{\xi} = \frac{1}{H_{\xi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho H_{\eta}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; \quad v_{\eta} = \frac{1}{H_{\eta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho H_{\xi}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}.\quad (3.248)$$

Здесь $\rho = a \delta \operatorname{ch} \xi \operatorname{sh} \eta$, $H_{\xi} = H_{\eta} = e c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta}$.

3. *Сплюснутый эллипсоид вращения.* Если $c < a$, то значения интегралов в (3.244) меняются и выражения для φ и ψ следующие

$$\begin{aligned}\varphi(\rho, z) &= v_{\infty} z \left[1 - \frac{2\sqrt{1-\delta^2}}{\delta^2(\gamma_0-2)} \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2+\lambda/a^2}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-\delta^2+\lambda/a^2}}{\delta} - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \psi(\rho, z) &= \frac{v_{\infty} \rho^2}{2} \left[1 - \frac{2\sqrt{1-\delta^2}}{\delta^2(\gamma_0-2)} \left(\frac{\delta \sqrt{1-\delta^2+\lambda/a^2}}{1+\lambda/a^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{1-\delta^2+\lambda/a^2}}{\delta} - \frac{\pi}{2} \right) \right].\end{aligned}\quad (3.249)$$

$$\text{Здесь: } \gamma_0 = \frac{2\sqrt{1-\delta^2}}{\delta^3} \left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} - \frac{\pi}{2} \right); \quad \delta = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}.$$

В предельном случае $\delta = 1$, поскольку $\gamma_0 - 2 = -\pi\sqrt{1-\delta^2} + O(1-\delta)$, отсюда имеем потенциал и функцию тока обтекания кругового диска однородным потоком, перпендикулярным его плоскости

$$\varphi = \frac{2v_\infty z}{\pi} \left(\frac{a}{\sqrt{\lambda}} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \right); \quad \psi = \frac{v_\infty \rho^2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{a(1+\lambda/a^2)} + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\lambda}}{a} \right).$$

В эллиптических координатах для сплюснутого эллипсоида вращения имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= v_\infty a \delta \operatorname{sh} \xi \cos \eta \left[1 - \frac{2\sqrt{1-\delta^2}}{\delta^3(\gamma_0 - 2)} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \xi} + \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \xi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \psi(\xi, \eta) &= \frac{v_\infty a^2 \delta^2}{2} \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta \left[1 - \frac{2\sqrt{1-\delta^2}}{\delta^3(\gamma_0 - 2)} \left(\frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \xi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.250)$$

а для кругового диска с радиусом a , полагая здесь $\delta = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta) &= \frac{2v_\infty a}{\pi} \operatorname{sh} \xi \cos \eta \left(\frac{1}{\operatorname{sh} \xi} + \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \xi \right), \\ \psi(\xi, \eta) &= \frac{v_\infty a^2}{\pi} \operatorname{ch}^2 \xi \sin^2 \eta \left(\frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch}^2 \xi} + \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \xi \right). \end{aligned} \quad (3.251)$$

Линия тока $\psi = 0$ ($\xi = 0$) соответствует плоскости диска, на которой значение потенциала равно

$$\varphi(0, \eta) = \frac{2v_\infty a}{\pi} \cos \eta.$$

Задача 3.6.2. Показать, что функция тока ψ обтекания осесимметричного тела при конформном отображении меридиональной плоскости комплексного переменного $u = z + i\rho$ на плоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, осуществляемом с помощью аналитической функции $u = f(\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (1)$$

Решение. Заметим, что функция тока $\psi = \psi(\rho, z)$ рассматриваемая как функция переменных ρ, z удовлетворяет уравнению (см. 3.185)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) = 0, \quad (2)$$

которое по виду идентично (1).

Функцию тока $\psi(\rho, z)$ или $\psi(\xi, \eta)$ можно рассматривать как $\psi = \psi(u, \bar{u})$ или $\psi = \psi(\zeta, \bar{\zeta})$. Тогда, поскольку

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}}; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \rho} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \right) i,$$

имеем отсюда

$$2 \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial z} - i \frac{\partial \psi}{\partial \rho}; \quad 2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial \psi}{\partial z} + i \frac{\partial \psi}{\partial \rho}.$$

Рассмотрим

$$\frac{1}{4} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \right) = \operatorname{Re} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \left[\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + i \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) \right] \right\} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right). \quad (3)$$

С другой стороны

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \cdot \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{u}} \right) = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \right) = \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \right).$$

Поскольку $\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \zeta}{\partial u}$ — действительная величина, то

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \right) &= \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u} \operatorname{Re} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \right) = \\ &= \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{u}} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial u} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Поскольку уравнение (2) выполняется, то в силу (3) $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \bar{u}} \right) = 0$, а из (4) имеем (1).

Следует отметить, что функция $\varphi(\xi, \eta)$, комплексно сопряженная с $\psi(\xi, \eta)$, удовлетворяет уравнению аналогичному уравнению (1) (см. уравнение (3.125) для φ).

Компоненты скорости в системе координат (ξ, η) выражаются через функции $\varphi(\xi, \eta)$ и $\psi(\xi, \eta)$ следующим образом

$$v_{\xi} = \frac{1}{H_{\xi}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho H_{\eta}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}; \quad v_{\eta} = \frac{1}{H_{\eta}} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho H_{\xi}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad (5)$$

где $H_{\xi}^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \xi} \right)^2$, $H_{\eta}^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right)^2$, причем зависимости $z = z(\xi, \eta)$ и $\rho(\xi, \eta)$

определяются отображающей функцией $z + i\rho = f(\xi + i\eta)$.

Путем подбора подходящей аналитической функции $f(\xi + i\eta)$, в которой (ξ, η) составляют систему эллиптических координат, можно получить обтекание ряда конечных и полубесконечных тел вращения. Так, например:

1) $f(\xi, \eta) = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$ позволяет найти (см. [10], [44]) функцию тока $\psi(\xi, \eta)$ обтекания вытянутого эллипсоида ($a > b$);

2) $f(\xi, \eta) = \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$ доставляет функцию тока у сплюснутого эллипсоида;

3) $f(\xi, \eta) = Ce^{\xi} = Ce^{\xi + i\eta}$ описывает обтекание сферы.

Задача 3.6.3. Исходя из функции $f(\xi, \eta) = C(\xi + i\eta)^2$, отображающей плоскость $u = z + i\rho$ на плоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (см. предыдущую задачу), показать, что поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой параболоиды вращения. Найти функцию тока, определяющую обтекание параболоида $\xi = \xi_0$ однородным потоком.

Решение. Поскольку $z + i\rho = C(\xi + i\eta)^2$, то отсюда

$$z = C(\xi^2 - \eta^2); \quad \rho = 2C\xi\eta; \quad z - C\xi^2 = -\frac{\rho^2}{4C\xi^2}.$$

Таким образом, поверхности $\xi = \text{const}$ являются параболоидами вращения с фокусами в начале координат.

Функция тока $\psi(\xi, \eta)$ в силу уравнения (1) предыдущей задачи удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\xi\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0.$$

Отыскивая решение в виде $\psi(\xi, \eta) = \eta^2(\xi)$, получаем

$$\psi = (A\xi^2 + B)\eta^2,$$

где A и B — постоянные, значения которых определяем из условия обращения в нуль скорости на бесконечности. Из (5) получаем

$$H_{\xi} = H_{\eta} = 2C\sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad v^2 = v_{\xi}^2 + v_{\eta}^2 = \frac{A^2}{4C^4} + \frac{2AB\xi^2 + A^2}{4C^2\xi^2(\xi^2 + \eta^2)}.$$

При $\xi \rightarrow \infty$ $v \rightarrow 0$, так что $A = 0$. Тогда

$$\psi = B\eta^2. \quad (1)$$

Если тело вращения движется со скоростью v_0 вдоль оси симметрии z , то граничное условие имеет вид $v_n|_S = v_0 \cos \theta$. Так что, если $\xi = \text{const}$ — поверхность тела, то

$$v_n|_S = v_{\eta} = v_0 \cos \theta$$

или

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial s} = v_0 \cos \theta = \frac{d\rho}{ds} v_0,$$

где s — координата вдоль поверхности. Отсюда, интегрируя вдоль границы, получаем граничное условие для ψ

$$\psi = -\frac{1}{2} v_0 \rho^2 + \text{const}.$$

Таким образом, в нашем случае на границе параболоида $\xi = \xi_0$ должно быть выполнено условие

$$\psi = -\frac{1}{2} v_0 (2C\xi_0\eta)^2.$$

Сравнивая это выражение с (1) определяем значение постоянной B и вид функции тока

$$\psi = -2C^2 v_0 \xi_0 \eta^2.$$

Если параболоид обтекается однородным потоком, то

$$\psi = 2C^2 v_0 (\xi^2 - \xi_0^2) \eta^2.$$

§ 3.7. Волновые движения

Волновые движения среды характеризуются тем, что отдельные ее частицы совершают колебательные движения. Волны на поверхности водоемов, морские приливы и отливы, упругие волны в сжимаемых средах, состоящие в периодическом сжатии и расширении частиц, цунами, рябь на водной поверхности от ветра — все это характерные примеры волновых движений.

Причинами, вызывающими волновые движения, обычно являются отклонения от равновесного состояния среды (например, ее свободной поверхности) и последующие ее движения под действием сил тяжести, движения твердых тел в жидкости, изменения притяжения воды гравитационными силами Луны или Солнца и др.

Волновые движения возникают в результате начального возмущения, т. е. после того, как в начальный момент времени среда выведена из состояния равновесия и получила начальный импульс движения.

Волны в жидкостях, имеющих свободную поверхность, называют *поверхностными волнами*. Кроме них, рассматривают внутренние волны, появляющиеся в неоднородных средах ($\rho \neq \text{const}$).

Остановимся на рассмотрении поверхностных волн в однородных $\rho = \text{const}$ невязких несжимаемых средах. Если эти волновые движения обусловлены потенциальными массовыми силами и начальными возмущениями свободной поверхности, то тогда они являются безвихревыми.

Действительно, начальное состояние определяется возмущениями свободной поверхности и отличными от нуля скоростями частицы. Такое начальное состояние может быть получено с помощью импульса давления, приложенного к жидкости. Но это импульсное движение, как известно (см. § 3.1), является безвихревым. Согласно теореме Лагранжа движение не будет иметь вихрей и во все последующие моменты времени, если в начальный момент оно было потенциальным.

Таким образом, общая постановка задачи о волновых движениях в потенциальном поле сил тяжести включает уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.252)$$

для потенциала скорости ($\mathbf{v} = \nabla \varphi$) и интеграл Лагранжа

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 - gz, \quad (3.253)$$

в котором положено $\Pi = gz$ (ось z направлена вертикально вверх) и принято $C(t) = 0$.

Граничные условия задачи формулируются из условия для скорости на граничной поверхности S с уравнением $f(t, x, y, z) = 0$, а именно

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = v_n^S, \quad (3.254)$$

где v_n^S — скорость точек поверхности $f(t, x, y, z) = 0$ в направлении нормали.

Поскольку

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}^S \cdot \nabla f = 0 \quad (3.255)$$

и $v_n^S = \mathbf{v}^S \cdot \mathbf{n}_S = \mathbf{v}^S \cdot \frac{\nabla f}{|\nabla f|}$, то для (3.254) имеем

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = -\frac{1}{|\nabla f|} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f_t}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + f_z^2}}. \quad (3.256)$$

Если граничная поверхность S неподвижна, то

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (3.257)$$

Если граничной поверхностью S является свободная поверхность, уравнение которой можно представить в виде $f = z - \zeta(t, x, y) = 0$, то, принимая, что на ней задано давление $p(t, x, y, \zeta)$, из (3.253) получаем нелинейное граничное условие в виде

$$\left[\varphi_t + \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) \right]_{z=\zeta(t, x, y)} + g\zeta(t, x, y) + \frac{1}{\rho} p(t, x, y, \zeta) = 0. \quad (3.258)$$

Кроме этого имеется еще одно, также нелинейное, условие на свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$, следующее из (3.255), а именно

$$\zeta_t = \varphi_z|_{z=\zeta} - \zeta_y \varphi_y|_{z=\zeta} - \zeta_x \varphi_x|_{z=\zeta}. \quad (3.259)$$

Существование двух граничных условий на одной поверхности связано с тем, что вид свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$ не задан и должен определяться в ходе решения задачи.

Начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = F_1(x, y, z), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0} = F_2(x, y, z) \quad (3.260)$$

в общем виде могут быть назначены через импульсивное давление $\pi(0, x, y, z)$ и интеграл (3.253), если считать, что $p = 0$ в начальный момент времени. Итак, получаем

$$\varphi|_{t=0} = -\frac{1}{\rho} \pi(0, x, y, z); \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{t=0} = -\frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)|_{t=0} - g\zeta(0, x, y). \quad (3.261)$$

В такой общей постановке: линейного уравнения (3.252), линейного условия на неподвижных границах (3.257), двух нелинейных граничных условий (3.258), (3.259) на свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y)$, вид которой подлежит определению, начальных условий (3.261) — задача о волновых движениях представляет значительные математические трудности. Наиболее известные приближения этой задачи: 1) волны малой амплитуды; 2) теория мелкой воды.

1. Волны малой амплитуды.

В этом приближении считается, что $|\zeta(t, x, y)| \ll L$, где L — характерный масштаб задачи в плоскости xOy (например, длина волны). Это означает, что движение настолько медленное, что $|\nabla \varphi|^2 \ll |\varphi|$.

Тогда, ограничиваясь членами первого порядка малости в (3.258) и (3.259), имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t}|_{z=\zeta(t, x, y)} + g\zeta(t, x, y) = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \varphi_z(t, x, y, \zeta) = 0. \end{cases}$$

Наконец, беря значения функций при $z = 0$ вместо их значений при $z = \zeta$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x, y, 0)}{\partial t} + g\zeta(t, x, y) &= 0, \\ \frac{\partial \zeta(t, x, y)}{\partial t} - \varphi_z(t, x, y, 0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.261a)$$

Из этих двух уравнений получаем соотношение

$$\frac{\partial \varphi(t, x, y, 0)}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi(t, x, y, 0)}{\partial t^2}.$$

Итак, линеаризованная задача для волновых движений малой амплитуды состоит в определении функции $\varphi(t, x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.262)$$

на неподвижных поверхностях — условию

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = 0, \quad (3.263)$$

а на свободной поверхности $z = \zeta(t, x, y) \approx 0$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0. \quad (3.264)$$

При этом $\zeta(t, x, y) = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{z=0}$.

Что касается начальных условий, то должны быть известны функции F_1 и F_2 , в (3.260). В то же время для изучения волновых движений принят другой метод: решение уравнений (3.262)–(3.264) ищется в виде периодического по t решения

$$\varphi(t, x, y, z) = e^{i\omega t} \varphi_0(x, y, z). \quad (3.265)$$

Тогда получим

$$\Delta \varphi_0 = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right|_s = 0; \quad \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \varphi_0 \right]_{z=0} = 0; \quad \zeta(t, x, y) = -\frac{i\omega e^{i\omega t}}{g} \varphi_0(x, y, 0),$$

причем, из этой задачи подлежат определению функция $\varphi_0(x, y, z)$ и частота ω .

Решение этой задачи может помочь найти решение исходной задачи — определения волнового движения по заданным начальным условиям, поскольку частное решение (3.265) может быть рассматриваемо как одна из гармоник ряда Фурье, которым представляется общее решение.

Стационарные (стоячие) волны Рассмотрим двумерное волновое движение в плоскости xOz в приближении малых колебаний.

Пусть свободная поверхность в состоянии равновесия совпадает с плоскостью xOy , а в движении описывается уравнением $z = \zeta(t, x)$ (см. рис. 3.80). На глубине h под свободной поверхностью находится дно — неподвижная поверхность $z = -h$.

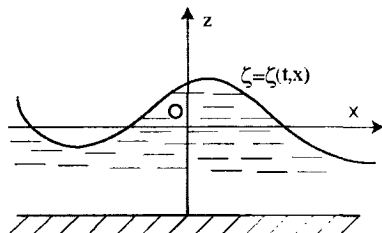


Рис. 3.80

Тогда постановка задачи согласно (3.262)–(3.264) выглядит следующим образом

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (3.266)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{z=-h} = 0, \quad (3.267)$$

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right]_{z=0} = 0, \quad (3.268)$$

а вид свободной поверхности согласно (3.261) выражается через потенциал $\varphi(t, x, z)$ следующим образом

$$\zeta(t, x) = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi(t, x, z)}{\partial t} \right]_{z=0}. \quad (3.269)$$

Рассмотрим решение задачи, определяемое простыми гармоническими функциями по x, t , а именно

$$\varphi(t, x, z) = u(z) e^{i(\omega t + \varepsilon)} \sin(kx + m), \quad (3.270)$$

где ε, m — постоянные, определяющие фазы временной и пространственной гармоник.

На основании решения такого вида может быть построено самое общее решение в виде ряда Фурье по этим переменным, поэтому его анализ имеет принципиальное значение.

Подставляя (3.270) в (3.266) получаем уравнение для определения функции $u(z)$, а именно

$$u'' - k^2 u = 0,$$

откуда, интегрируя и удовлетворяя граничному условию (3.267), получаем

$$u(z) = C \operatorname{ch} k(z + h), \quad (3.271)$$

где C — постоянная.

Кроме этого, из уравнения (3.268) получаем связь между частотами ω и k , а именно

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (3.272)$$

Подставляя теперь

$$\varphi(t, x, z) = C \operatorname{ch} k(z + h) e^{i(\omega t + \varepsilon)} \sin(kx + m)$$

в выражение (3.269) и оставляя в $\zeta(t, x)$ только действительную часть, получаем

$$\zeta(t, x) = \zeta_0 \sin(kx + m) \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (3.273)$$

где $\zeta_0 = \frac{\omega C}{g} \operatorname{ch} kh$.

Таким образом, для потенциала скорости имеем выражение

$$\varphi(t, x, z) = \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \operatorname{ch} k(z + h) \sin(kx + m) \cos(\omega t + \varepsilon). \quad (3.274)$$

Полученный вид волнового движения носит название *стоячих волн*. Название связано с тем, что свободная поверхность является синусоидой, не сдвигающейся по оси x -ов, а лишь периодически меняющей впадины на гребни той же высоты в точках $kx + m = \frac{\pi}{2}(2n + 1)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) (эти точки носят название пучностей), а в точках $kx + m = \pi n$ всегда $\zeta = 0$ (эти точки — узлы). Такое движение свободной поверхности, однако, не значит, что частицы жидкости движутся по вертикалям: по вертикалям перемещается лишь форма волны. Из (3.274), воспользовавшись соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

получим функцию тока

$$\psi(t, x, z) = \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \operatorname{sh} k(z+h) \cos(kx+m) \cos(\omega t + \varepsilon) \quad (3.275)$$

и, приравняв $\psi(t, x, z) = \psi_0(t)$, можно найти траектории частиц, которые для постоянного значения $t = t_*$ дадут соответствующие линии тока. Вид линий тока для фиксированной глубины схематически представлен на рис. 3.81, где показаны траектории частиц при изменении формы волны от (1) до (2).

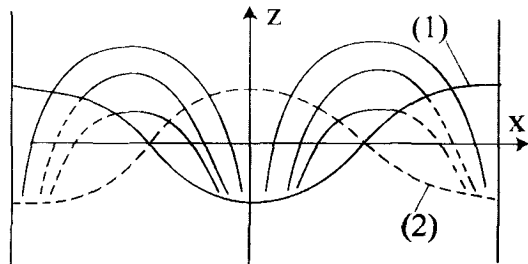


Рис. 3.81

За перемещением частиц жидкости можно проследить, если определить их малые смещения $\tilde{\mathbf{r}}$ из равновесного положения \mathbf{r}_0 в положение \mathbf{r} . Тогда в приближении малости смещений имеем

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} \approx \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v},$$

так что

$$\frac{dx}{dt} = v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \frac{dz}{dt} = v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Подставляя сюда выражения $\partial \phi / \partial x, \partial \phi / \partial z$ из (3.274) и интегрируя по t , получаем

$$\begin{aligned} x &= \zeta_0 \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \cos(kx_0 + m) \sin(\omega t + \varepsilon) + x_0, \\ z &= \zeta_0 \frac{\operatorname{sh} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \sin(kx_0 + m) \sin(\omega t + \varepsilon) + z_0, \end{aligned} \quad (3.276)$$

где x_0, z_0 , определяют положение частицы в равновесном положении.

Из этих выражений видно, что в пучностях $\left(kx + m = \frac{\pi}{2}(2n+1) \right)$ происходят периодические колебания частиц вдоль вертикалей, а в узлах

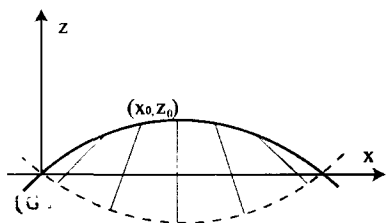


Рис. 3.82

$(kx + m = \pi n)$ — вдоль горизонталей. Из остальных мест (x, z) частицы перемещаются вдоль прямых (см. рис. 3.82)

$$z - z_0 = (x - x_0) \operatorname{th} k(z + h) \operatorname{tg}(kx + m).$$

Заметим, что в случае, когда длина волны $\lambda = 2\pi/k$ мала по сравнению с глубиной

h , т. е. $kh \gg 1$, то

$$\varphi = \frac{\zeta_0 g}{\omega} e^{kz} \sin(kx + m) \cos(\omega t + \varepsilon); \quad \psi = \frac{\zeta_0 g}{\omega} e^{kz} \cos(kx + m) \cos(\omega t + \varepsilon);$$

$$x = \zeta_0 e^{kz_0} \cos(kx_0 + m) \sin(\omega t + \varepsilon) + x_0; \quad z = \zeta_0 e^{kz_0} \sin(kx_0 + m) \sin(\omega t + \varepsilon) + z_0.$$

Наконец, отметим, что полученное решение годится и для волн в канале конечной длины (по x), если только подобрать определенные значения k и m ; так в канале длины L на стенках $x = 0$ и $x = L$ условие $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$

выполняется, если $m = \frac{\pi}{2}$ и $kL = \pi n$ ($n = 1, 2, \dots$).

Прогрессивные волны

Этот вид волнового движения получается из решения задачи (3.266)–(3.269) вида

$$\varphi(t, x, z) = u(z) e^{i(\omega t - kx + \gamma)}. \quad (3.277)$$

Здесь в качестве аргумента периодической функции рассматривается линейное по t и x выражение.

Для $u(z)$ из (3.15) и (3.267) имеем то же самое выражение (3.271), причем из (3.268) получаем соотношение (3.272). Подставляя полученное выражение для потенциала $\varphi(t, x, z) = C \operatorname{sh} k(z + h) e^{i(\omega t - kx + \gamma)}$ в уравнение для свободной поверхности (3.269) и сохраняя для выражения $\zeta(t, x)$ действительную часть $\varphi(t, x, z)$, получим

$$\zeta(t, x) = \zeta_0 \sin(\omega t - kx + \gamma), \quad (3.278)$$

где $\zeta_0 = \frac{\omega C \operatorname{ch} kh}{g}$.

Выражая потенциал через ζ_0 , получаем

$$\varphi(t, x, z) = \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \operatorname{ch} k(z+h) \cos(\omega t - kx + \gamma) \quad (3.279)$$

и, наконец, имеем функцию тока

$$\psi(t, x, z) = \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \operatorname{sh} k(z+h) \sin(\omega t - kx + \gamma).$$

Существенное отличие этого решения от (3.273)–(3.275) состоит в том, что, если ранее гребни и впадины сменяли друг друга в одном и том же месте (при одном и том же значении x), то теперь поверхность (3.278) представляет собой бесконечную цепь волн, которые движутся вдоль оси x . Действительно, из (3.278) следует, что, например, гребни располагаются в тех местах $x = \xi$ на оси x , для которых

$$\omega t - k\xi + \gamma = \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Но отсюда следует, что $\xi = \xi(t)$, так что эти места распространяются в положительном (при $\omega/k > 0$) направлении оси x с постоянной скоростью, которая имеет значение

$$c = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g \operatorname{th} kh}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{\lambda}}. \quad (3.280)$$

Здесь $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ — длина волны ($\zeta(t, x) = \zeta(t, x + \lambda)$).

Отметим, таким образом, как и в стационарных волнах, перемещается только форма волны, а не частицы: в стационарных волнах эта форма двигалась (изменяясь) по вертикали, а здесь — перемещается неизменной по горизонтали.

Как это следует из выражений $\psi(t, x, z)$ для стоячих и прогрессивных волн, линии тока, определяемые уравнением $\psi(t, x, z) = \text{const}$ при $t = \text{const}$, имеют один и тот же вид. В то же время траектории частиц жидкости совершенно различны. Если в стоячих волнах, как было показано, они являются отрезками прямых, то в прогрессивных волнах частицы движутся по эллипсам, совершая простые гармонические колебания.

Покажем это.

Подобно (3.276), из выражения (3.279) в случае прогрессивных волн имеем

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt = -\frac{\zeta_0 \operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \cos(\omega t - kx_0 + \gamma) + x_0, \\ z &= \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} dt = -\frac{\zeta_0 \operatorname{sh} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh} \sin(\omega t - kx_0 + \gamma) + z_0. \end{aligned} \quad (3.280a)$$

Отсюда получаем, что траекториями частиц являются эллипсы

$$\left(\frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left(\frac{z - z_0}{b} \right)^2 = 1, \quad a = \zeta_0 \frac{\operatorname{ch} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh}, \quad b = \zeta_0 \frac{\operatorname{sh} k(z_0 + h)}{\operatorname{sh} kh}.$$

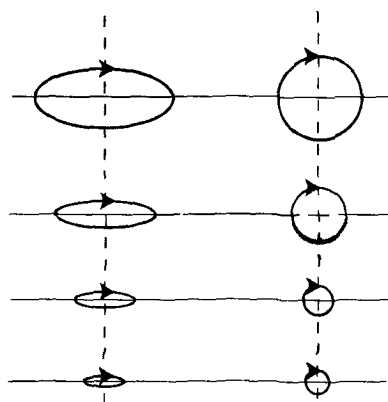


Рис. 3.83

Длины полуосей эллипсов убывают с удалением от свободной поверхности (см. рис. 3.83), причем на дне вертикальная полуось обращается в нуль, а горизонтальная, оставаясь все время больше вертикальной, — уменьшается до значения $\zeta_0 \operatorname{sh}^{-1} kh$ (расстояние между фокусами всех эллипсов).

Частицы совершают периодические движения по эллипсам с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Это — промежуток времени, за который возмущение

перемещается на длину волны, т. е.

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{2\pi}{kc} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Если глубина значительно больше длины волны, т. е. $kh \gg 1$, то в этом приближении

$$a = b = \zeta_0 e^{kz_0},$$

так что частицы в глубокой воде совершают периодические колебания по окружностям (см. рис. 3.83). Из равенства

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{z=0} = \frac{\zeta_0 \omega}{\operatorname{th} kh} \sin(\omega t - kx + \gamma)$$

следует, что частица, находящаяся на поверхности $\zeta = \zeta_0 \sin(\omega t - kx + y)$, движется в сторону распространения прогрессивной волны, если она находится на гребне ее, и в противоположную — когда находится во впадине.

На рис. 3.84 показаны траектории четырех различных частиц, находящихся в данный момент времени на свободной поверхности прогрессивной волны при $kh \gg 1$, движущейся вправо.

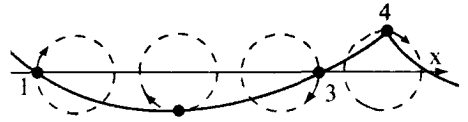


Рис. 3.84

Заметим, что угол при гребне прогрессивной волны равен 120° (см. задачу 17.1, ч. 2, § 17). Острый гребень соответствует предельной форме волны конечной амплитуды.

Совершенно аналогично предыдущему можно рассмотреть прогрессивные волны, распространяющиеся влево по оси x -ов. Их потенциал и свободная поверхность определяются выражениями

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, z) &= \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \operatorname{ch} k(z+h) \cos(\omega t + kx + \gamma), \\ \zeta(t, x) &= \zeta_0 \sin(\omega t + kx + \gamma),\end{aligned}\quad (3.281)$$

а все остальные характеристики имеют те же величины, что и для волны, бегущей вправо.

Заметим, что прогрессивные волны могут быть образованы сложением (вычитанием) двух типов стоячих волн, у которых впадины совпадают с гребнями.

Наконец, отметим, что общее решение для, например, прогрессивных волн может быть представлено в виде рядов Фурье

$$\begin{aligned}\varphi(t, x, z) &= g \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \zeta_{nm}^o \frac{\operatorname{ch} k_n(z+h) \cos(\omega_m t - k_n x + \varepsilon_m - \gamma_n)}{\operatorname{ch} k_n h \omega_m}, \\ \zeta(t, x) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \zeta_{nm}^o \sin(\omega_m t - k_n x + \varepsilon_m - \gamma_n).\end{aligned}\quad (3.282)$$

Групповая скорость

Отдельные слагаемые этих рядов Фурье представляют собой прогрессивные волны разной амплитуды и разных частот ω_n и k_n . Складываясь, они могут образовывать группы волн, между которыми свободная поверхность остается почти невозмущенной (см. рис. 3.85). Одиночные волны, перемеща-

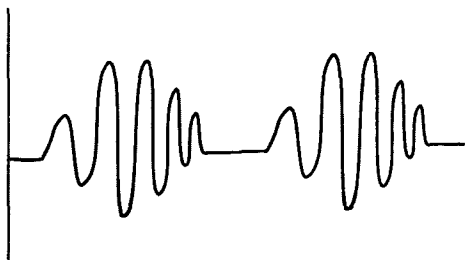


Рис. 3.85

ясь внутри группы, изменяют свою амплитуду. Простейшую подобную группу волн можно получить путем сложения двух прогрессивных волн, у которых амплитуды одинаковы, а длины мало отличаются друг от друга.

Итак, рассмотрим

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta_0 \sin(\omega t - kx) + \zeta_0 \sin(\omega' t - k' x) = \\ &= 2\zeta_0 \sin\left\{\frac{1}{2}(\omega + \omega')t - \frac{1}{2}(k + k')x\right\} \cos\left\{\frac{1}{2}(\omega - \omega')t - \frac{1}{2}(k - k')x\right\}.\end{aligned}$$

Если $k' \approx k$, то в этом выражении косинус почти не меняется с x , и поэтому профили отдельных волн в каждый момент времени представ-

ляют собой синусоиды с длиной волны $\lambda \sim \frac{2\pi}{k}$, амплитуды которых ме-

няются с течением времени от нуля до $2\zeta_0$. Таким образом, это движение разбивается на группы волн, которые разделены полосами почти невозмущенной поверхности. Группы движутся независимо, и поэтому имеет смысл говорить о *групповой скорости волн* U , которая определяется отношением расстояния между двумя последовательными группами (оно равно $2\pi/(k - k')$) ко времени, которое необходимо группе волн, чтобы пройти это расстояние (это время равно $2\pi/(\omega - \omega')$).

Таким образом

$$U = \frac{\omega - \omega'}{k - k'},$$

а при $\omega' \rightarrow \omega$ и $k' \rightarrow k$ имеем

$$U = \frac{d\omega}{dk}.$$

Вводя в рассмотрение скорость отдельной волны $c = \omega / k$, называемую фазовой скоростью, и длину волны $\lambda = 2\pi / k$, получаем

$$U = \frac{d}{dk}(ck) = c + k \frac{dc}{dk} = c + \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dc}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} = c - \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2\pi}{k^2} \frac{dc}{d\lambda} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (3.283)$$

Это соотношение было впервые указано Рэлеем. Оно может быть использовано для определения групповой скорости любого типа волн. Так, например, для волн в жидкости, имеющей глубину h , согласно (3.280), получаем

$$U = \frac{d}{dk}(ck) = \frac{d}{dk} \left(k \sqrt{\frac{g \operatorname{th} kh}{k}} \right) = \frac{1}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \right). \quad (3.284)$$

Таким образом, отношение групповой скорости к скорости распространения волн возрастает с уменьшением kh : при $kh \gg 1$ оно равно $1/2$ и при $kh \ll 1$ равно 1.

Групповая скорость имеет динамический смысл при рассмотрении энергий волн и волнового сопротивления.

Энергия волн. Поток энергии через поверхность

Рассмотрим энергию E волнового движения в поле сил тяжести внутри некоторого геометрического объема V_w , с поверхностью S_w .

Если T — кинетическая энергия, Π — потенциальная, то используя интеграл Лагранжа (3.253), получаем

$$E = \int_{V_w} (T + \Pi) dV = \rho \int_{V_w} \left[\frac{1}{2} v^2 + gz \right] dV = - \int_{V_w} \left(p + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) dV.$$

Вычислим изменение энергии в этой области, которая может произвольным образом передвигаться по среде со своей скоростью \mathbf{w} в каждой точке. Используя общую формулу изменения свойств среды внутри движущегося объема (см. ч. 2, § 8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \rho \frac{d}{dt} \int_{V_w} \left(\frac{1}{2} v^2 + gz \right) dV = \\ &= \rho \int_{V_w} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gz \right) dV + \int_{S_w} \left(\frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gz \right) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS. \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta\varphi = 0$, то имеем:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\varphi)^2 = \nabla\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla\varphi = \nabla\varphi \cdot \nabla \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} \nabla\varphi \right).$$

Подставляя $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla\varphi)^2$ в первый интеграл выражения $\frac{dE}{dt}$ и преобразуя его по формуле Гаусса-Остроградского, а во втором используя интеграл Лагранжа, получим

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{S_n} \frac{\partial\varphi}{\partial t} (\nabla\varphi \cdot \mathbf{n}) dS - \int_{S_w} \left(p + \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

Или

$$\frac{dE}{dt} = \int_{S_n} \left\{ \rho \frac{\partial\varphi}{\partial t} (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} - p (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) \right\} dS. \quad (3.285)$$

Если поверхность $S_w = S$ — материальная, т. е. содержит все время одни и те же частицы, то, поскольку в этом случае $\mathbf{w} = \mathbf{v}$, имеем

$$\frac{dE}{dt} = - \int_S p \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (3.286)$$

Отметим, что в этом случае скорость изменения энергии в материальном объеме равна мощности сил давления, приложенных к материальной границе S . Если материальная поверхность неподвижна, т. е. $\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_S = 0$, то

$\frac{dE}{dt} = 0$, т. е. энергия через эту поверхность не переносится.

Если *геометрическая* поверхность фиксирована в пространстве ($\mathbf{w} = 0$), то

$$\frac{dE}{dt} = \rho \int_{S_w} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS. \quad (3.287)$$

Энергия, переносимая через фиксированную поверхность S за время T , равна

$$E_T = -\rho \int_t^{t+T} dt \int_{S_w} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS, \quad (3.288)$$

а в среднем за единицу времени

$$E_{cp} = \frac{E_T}{T}.$$

Рассмотрим энергию, переносимую за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ двумерными стационарными и прогрессивными волнами через плоскость $x = \text{const}$ (в расчете на единицу длины по оси y).

В случае стационарных волн, когда для $\varphi(t, x, z)$ справедливо выражение (3.274), получаем

$$\begin{aligned} E_T &= -\rho \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} dt \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz = -\rho \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = \\ &= -\rho \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz \left\{ \varphi \left(t + \frac{2\pi}{\omega} \right) - \varphi(t) \right\} = 0. \end{aligned}$$

В случае прогрессивных волн, используя (3.279), имеем

$$\begin{aligned} E_T &= \rho \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} dt \int_{-h}^{\zeta} \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \omega k \operatorname{ch}^2 k(z+h) \sin^2(\omega t - kx + \gamma) dz = \\ &= \rho \omega k \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \frac{1}{4} \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega}} [1 - \cos 2(\omega t - kx + \gamma)] dt \int_{-h}^{\zeta} [1 + \operatorname{ch} 2k(z+h)] dz. \end{aligned}$$

Заменяя во внутреннем интеграле верхний предел на 0, получаем

$$E_T = \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \frac{2\pi \rho k h}{4} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} 2kh}{2kh} \right) = \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \frac{\rho k \omega h T}{4} \left(1 + \frac{\operatorname{sh} 2kh}{2kh} \right).$$

Таким образом, прогрессивные волны переносят отличную от нуля энергию. Если выразить ее среднее значение за период T через групповую

скорость (3.284) и учесть, что $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g \operatorname{th} kh}{k}}$, то приходим к формуле

$$E_{cp} \equiv \frac{E_T}{T} = \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \frac{\rho \omega^2}{2g} U \operatorname{ch}^2 kh = \frac{\rho g \zeta_0^2}{2} U. \quad (3.289)$$

Итак, энергия прогрессивных волн переносится в направлении распространения волны в среднем со скоростью U и пропорциональна квадрату амплитуды.

Волновое сопротивление Часть энергии движущегося в жидкости тела затрачивается на образование поверхностных волн. С этой энергией связана сила волнового сопротивления, действующая на тело.

Пусть тело, вызывая поверхностные волны, движется вдоль оси x со скоростью c . Проведем две плоскости $x = \text{const}$ — одну впереди тела, другую — позади. Пусть \tilde{E} — средняя энергия волн в единице длины области волнового движения, так что \tilde{E} имеет размерность силы. Тогда вся область между проведенными плоскостями $x = \text{const}$ получает (при $c > U$) в единицу времени от движущегося тела энергию, равную $c\tilde{E}$. Эта энергия частично обусловлена переносимой (со скоростью U) энергией волн через плоскость позади тела, которая равна $U\tilde{E}$, а остальная ее часть связана с преодолением телом волнового сопротивления, силу которого обозначим через R . Таким образом

$$c\tilde{E} = U\tilde{E} + Rc.$$

Отсюда

$$R = \left(1 - \frac{U}{c}\right) \tilde{E}. \quad (3.290)$$

Для рассмотренного вида волнового движения на основании (3.284) имеем

$$R = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2kh}{\text{sh } 2kh}\right) \tilde{E},$$

а поскольку $U\tilde{E} = E_{cp}$ (см. (3.289)), окончательно получаем

$$R = \frac{\rho g \zeta_0^2}{4} \left(1 - \frac{2kh}{\text{sh } 2kh}\right). \quad (3.291)$$

На мелкой воде ($kh \ll 1$) волновое возмущение носит местный характер и $R \approx 0$.

При возрастании глубины сопротивление быстро приближается к своему предельному (при $kh \rightarrow \infty$) значению

$$R = \frac{\rho g \zeta_0^2}{4} = \frac{\tilde{E}}{2}. \quad (3.292)$$

Если ряд волн опережает, как это бывает при ряби, движущееся тело, т. е. $U > c$, то область между плоскостями теряет энергию $c\tilde{E}$ и, так как дополнительная потеря энергии в результате переноса через переднюю плоскость равна $U\tilde{E}$, то

$$-c\tilde{E} = -U\tilde{E} + Rc$$

и, следовательно,

$$R = \left(\frac{U}{c} - 1 \right) \tilde{E} \quad (U > c). \quad (3.293)$$

Прогрессивные волны на поверхности раздела двух сред

Рассмотрим в приближении малых колебаний волновое движение на поверхности раздела двух сред (см. рис. 3.86) Эта задача имеет существенное значение при выяснении условий устойчивости такой поверхности раздела.

Пусть верхняя жидкость с плотностью ρ' , занимающая область $\zeta(t, x) < z < h'$, движется со скоростью V' вдоль оси x , а нижняя из области $\zeta(t, x) > z > -h$ имеет плотность ρ и скорость V . Тогда соответствующие потенциалы скорости движения с прогрессивными волнами в этих областях в согласии с (3.279) имеют вид

$$\phi = Vx + c \operatorname{ch} k(z+h) \cos(\omega t - kx + \gamma),$$

$$\phi' = V'x + c' \operatorname{ch} k(z-h') \cos(\omega t - kx + \gamma),$$

где $c = \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh}$, $c' = \frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh'}$.

Кроме того, уравнение поверхности раздела аналогично (3.278), записывается в виде

$$\zeta(t, x) = \zeta_0 \sin(\omega t - kx + \gamma).$$

Скорости частиц жидкостей на поверхности раздела $z = \zeta(t, x)$ могут быть определены следующим образом

$$v_z \Big|_{z=\zeta} = \frac{dz}{dt} \Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx}{dt} \Big|_{z=\zeta} \approx \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v_x \right] \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

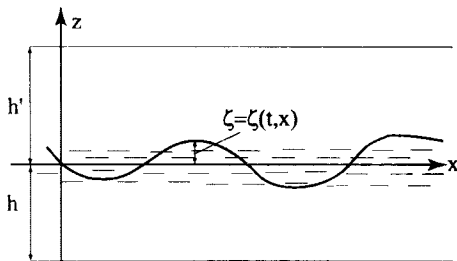


Рис. 3.86

$$v'_z \Big|_{z=\zeta} = \frac{dz}{dt} \Big|_{z=\zeta} \approx \left[\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} v'_x \right] \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V' \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Подставляя сюда $v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $v'_z = \frac{\partial \varphi'}{\partial z}$ и $\zeta = \zeta_0 \sin(\omega t - kx + \gamma)$, получаем

$$\begin{aligned} ck \operatorname{sh} kh &= \zeta_0 (\omega - kV), \\ -c'k \operatorname{sh} kh' &= \zeta_0 (\omega - kV'). \end{aligned} \quad (3.294)$$

Теперь в приближении волн малой амплитуды запишем равенство давлений на поверхности раздела, воспользовавшись интегралом Лагранжа. Имеем для нижней жидкости

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} \Big|_{z=\zeta} &= \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\varphi_x^2 + \varphi_z^2) - gz \right]_{z=\zeta} = \\ &= c\omega \operatorname{ch} k(\zeta + h) \sin(\omega t - kx + \gamma) - \frac{1}{2} \left[V + ck \operatorname{ch} kh(\zeta + h) \sin(\omega t - kx + \gamma) \right]^2 + \\ &\quad + c^2 k^2 \operatorname{sh}^2 k(\zeta + h) \cos^2(\omega t - kx + \gamma) - g\zeta(t, x) \approx \\ &\approx c\omega \operatorname{ch} kh \sin(\omega t - kx + \gamma) - \frac{1}{2} V^2 - \\ &\quad - cVk \operatorname{ch} kh \sin(\omega t - kx + \gamma) - g\zeta_0 \sin(\omega t - kx + \gamma) = \\ &= \left[c(\omega - kV) \operatorname{ch} kh - \frac{1}{2} V^2 - g\zeta_0 \right] \sin(\omega t - kx + \gamma). \end{aligned}$$

Точно так же получаем для верхней среды

$$\frac{p'}{\rho'} \Big|_{z=\zeta} \approx \left[c'(\omega - kV') \operatorname{ch} kh' - \frac{1}{2} V'^2 - g\zeta_0 \right] \sin(\omega t - kx + \gamma).$$

Приравнявая $p = p'$, получаем третье условие дополнительно к двум (3.294), а именно

$$c\rho(\omega - kV) \operatorname{ch} kh - \rho g\zeta_0 = c'\rho'(\omega - kV') \operatorname{ch} kh' - \rho' g\zeta_0. \quad (3.295)$$

Исключая из (3.294) и полученного соотношения (3.295) c и c' , получаем уравнение, определяющее связь между ω и k

$$\rho(\omega - kV)^2 \operatorname{cth} kh + \rho'(\omega - kV')^2 \operatorname{cth} kh' = (\rho - \rho')gk. \quad (3.296)$$

Отсюда находим в случае $kh \gg 1$, $kh' \gg 1$

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{\rho V + \rho' V'}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{k(\rho + \rho')} - \frac{\rho\rho'(V - V')^2}{(\rho + \rho')^2}}.$$

Чтобы скорость распространения волн на поверхности была вещественной, необходимо выполнение неравенства

$$(V - V')^2 \leq \frac{g(\rho^2 - \rho'^2)}{k\rho\rho'}. \quad (3.297)$$

Это условие можно рассматривать как *условие устойчивости* поверхности раздела между двумя несмешивающимися жидкостями. Действительно, малые случайные возмущения такой поверхности всегда присутствуют в природе. Эти возмущения не учитываются при рассмотрении положения равновесия двух жидкостей. Но они не могут разрушить поверхность, если она обладает устойчивостью. Следовательно, скорость c распространения гармонических прогрессивных волн, которые всегда можно рассматривать как составляющие этих случайных возмущений, должна быть действительной.

Заметим, что при $\rho > \rho'$ поверхность раздела абсолютно неустойчива, т. е. устойчивость нарушается возмущающими волнами любой длины (при любых k).

При длинных волнах (k — маленькое) устойчивость может сохраняться при значительных разностях скоростей $V - V'$. Однако, для каждого значения $(V - V')^2 \neq 0$ найдутся такие достаточно короткие волны (k — большое), что неравенство (3.297) будет нарушено. В этом причина появления ряби на поверхности воды даже при слабом дуновении ветра.

Нарушение устойчивости короткими волнами может быть компенсировано поверхностным натяжением (см. дальше).

В случае $V = V'$ условие устойчивости сводится к неравенству $\rho > \rho'$.

На поверхности раздела двух покоящихся сред, т. е. при $V = V' = 0$, скорость волн равна

$$c = \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{k(\rho + \rho')}} \quad (3.298)$$

так что, например, на поверхности покоящейся воды в воздухе

$\left(\frac{\rho'}{\rho} \sim \frac{1}{770}\right)$ прогрессивные волны в воде не испытывают влияния воздуха и распространяются со скоростью c , соответствующей $kh \gg 1$.

Капиллярные волны. Рябь При малых длинах поверхностных волн, когда они становятся сравнимыми по вели-

чине с характерным параметром $l = \sqrt{\frac{\alpha}{g\rho}}$ — поверхностного натяжения (см. гл. 2, (2.22)), начинает сказываться влияние сил поверхностного натяжения. Поверхностные волны, рассматриваемые с учетом сил поверхностного натяжения на свободной поверхности, получили наименование *капиллярных волн*.

Выпишем основную систему уравнений для двумерных капиллярных волн малой амплитуды (см. (3.252), (3.257), (3.258))

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=-h} = 0; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta(t, x) + \frac{1}{\rho} p(t, x, \zeta) = 0. \end{aligned} \quad (3.299)$$

Теперь давление на свободной поверхности должно быть равно лапласовой силе поверхностного давления:

$$p(t, x, \zeta) = -\alpha \frac{\zeta_{xx}}{(1 + \zeta_x^2)^{3/2}}.$$

Здесь α — коэффициент поверхностного натяжения, а знак выбран так, чтобы $p > 0$ при $\zeta_{xx} < 0$, т. е. давление в жидкости больше атмосферного на гребнях волн. Таким образом, имеем в рассматриваемом приближении

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta(t, x) - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0. \quad (3.300)$$

Продифференцировав это уравнение по t и заменив $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$ на $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ (см. (3.261a)), получаем

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial x^2} \right]_{z=0} = 0. \quad (3.301)$$

Отыскивая решение для прогрессивных волн (3.278), имеем

$$\omega^2 \operatorname{ch} kh - gk \operatorname{sh} kh - \frac{\alpha}{\rho} k^3 \operatorname{sh} kh = 0$$

или

$$\omega^2 = \left(gk + \frac{\alpha k^3}{\rho} \right) \text{th } kh.$$

Таким образом, влияние сил поверхностного натяжения отражается во втором слагаемом.

Скорость распространения капиллярных волн равна (при $kh \gg 1$)

$$c = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\alpha k}{\rho} \right) \text{th } kh} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda}}. \quad (3.302)$$

Функция $c^2(\lambda)$ имеет минимум при

$$\lambda = \lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}.$$

Соответствующее длине волны λ_m минимальное значение c_m^2 равно

$$c_m^2 = 2 \sqrt{\frac{\alpha g}{\rho}}.$$

Выражение (3.302) можно записать через λ_m и c_m в следующем виде

$$\frac{c^2}{c_m^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda_m} + \frac{\lambda_m}{\lambda} \right). \quad (3.303)$$

При $\lambda \gg \lambda_m$, имеем

$$c^2 \approx \frac{c_m^2}{2} \frac{\lambda}{\lambda_m} = \frac{g\lambda}{2\pi},$$

так что поверхностное натяжение в случае длинных (по сравнению с λ_m) волн не оказывает влияния на волновое движение.

Наоборот, при $\lambda \ll \lambda_m$, в случае достаточно коротких волн, имеем

$$c^2 \approx \frac{c_m^2}{2} \frac{\lambda_m}{\lambda} = \frac{2\pi\alpha}{\rho\lambda},$$

так что здесь главную роль играют силы поверхностного натяжения, при этом c^2 возрастает с уменьшением λ ($c^2(0) = \infty$).

Волны с малой длиной волны ($\lambda < \lambda_m$) называют рябью.

Отметим, что скорость распространения капиллярных волн всегда больше c_m . Рябь обычно образуется впереди тела, если оно движется со скоростью меньшей c_m .

В случае воды и воздуха ($\alpha = 74$ дин/см, $\rho = 1$ Г/см³ $g = 981$ см/с²) имеем $\lambda_m = 1,78$ см, $c_m = 23,5$ см/сек.

Групповая скорость капиллярных волн согласно (3.283) и (3.303) имеет вид

$$U = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = c \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\lambda_m^2 - \lambda^2}{\lambda_m^2 + \lambda^2} \right).$$

При ряби ($\lambda^2 / \lambda_m^2 \approx 0$) $U = \frac{3}{2}c$, так что групповая скорость больше скорости волны c .

Этим объясняется то, что рябь образуется обычно впереди тела.

Условие устойчивости поверхности раздела двух сред с учетом сил поверхностного натяжения можно получить, полагая

$$p - p' = -\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \alpha \zeta_0 k^2 \sin(\omega t - kx + \gamma).$$

Тогда вместо (3.295) получаем

$$\rho(\omega - kV)^2 \operatorname{cth} kh + \rho'(\omega - kV')^2 \operatorname{cth} kh' = (\rho - \rho')gk + \alpha k^3$$

и, следовательно

$$\frac{\omega}{k} = c = \frac{\rho V + \rho' V'}{\rho + \rho'} \pm \sqrt{\frac{g(\rho - \rho')}{k(\rho + \rho')} + \frac{\alpha k}{\rho + \rho'} - \frac{\rho \rho' (V - V')^2}{(\rho + \rho')^2}}.$$

Условие устойчивости (3.297) теперь приобретает вид

$$(V - V')^2 \leq \frac{g(\rho^2 - \rho'^2)}{k\rho\rho'} + \frac{\alpha k(\rho + \rho')}{\rho\rho'}.$$

Таким образом, поверхность будет устойчивой, только если правая часть этого неравенства будет положительной, т. е.

$$k^2 \alpha > g(\rho' - \rho). \quad (3.304)$$

Это неравенство может выполняться и для $\rho' > \rho$, т. е. тогда, когда внизу находится более легкая жидкость. Оно означает, что для устойчи-

ности поверхности раздела необходимо, чтобы при любой допустимой длине волны возмущения сила поверхностного натяжения была всегда больше разности потенциалов Π_r *объемных* сил тяжести (ρg), действующих у поверхности раздела $z = \zeta(t, x)$ на верхнюю и нижнюю среду соответственно, т. е.

$$\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} > \Pi'_r - \Pi_r,$$

а поскольку для несжимаемой жидкости $\Pi_r = \rho \Pi = \rho g \zeta$, то

$$\alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} > g \zeta (\rho' - \rho). \quad (3.305)$$

Подставляя сюда $\zeta = \zeta_0 \sin(\omega t - kx + \gamma)$, получаем условие устойчивости в виде (3.304).

Условие (3.305) выполняется тогда, когда сила поверхностного натяжения достаточно велика, чтобы преодолеть разность удельных весов сред. Так, например, если ячейки сетки не слишком велики, так что кривизны свободной поверхности в ячейках малы, то в ней задерживается определенное количество воды, и можно, как говорится, «носить воду в решете».

Волны на мелкой воде

Рассмотрим в поле силы тяжести двумерное волновое движение несжимаемой невязкой жидкости, когда глубина $h = h(x)$ (иначе говоря, переменная) всюду достаточно мала по сравнению с радиусом кривизны свободной поверхности (см. рис. 3.87), т. е.

$$h(x) \ll \left| \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right)^{3/2} \right|. \quad (3.306)$$

Такое приближение, называемое приближением мелкой воды, как будет видно из дальнейшего, приводит к нелинейной системе двух уравнений, которые описывают как вихревое, так и безвихревое движение.

Рассматриваемое приближение позволяет описать приливы в океанах, разрушение волн у пологих берегов, паводковые волны в реках, зыбь, одиночные волны, скачки свободной поверхности в каналах и др.

Исходной системой служат уравнение Эйлера и уравнение неразрывности:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}; \quad \rho \frac{dv_z}{dt} = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.307)$$

Граничные условия:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{z=-h(x)} = 0, \quad p|_{z=\zeta(t,x)} = p_0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v_z \right]_{z=\zeta(t,x)} = 0. \quad (3.308)$$

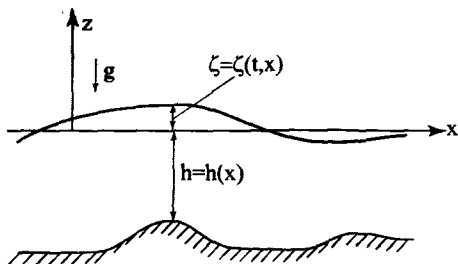


Рис. 3.87

Здесь: p_0 — давление на свободной поверхности, а третье условие уже обсуждалось ранее (см. (3.259)).

В дополнение к (3.306) примем еще одно допущение: вертикальные ускорения частиц по величине значительно меньше ускорения сил тяжести, т. е.

$$\left| \frac{dv_z}{dt} \right| \ll g. \quad (3.309)$$

Тогда, отбрасывая во втором уравнении (3.307) инерционное слагаемое, интегрируя и учитывая граничное условие для давления, получаем

$$p = p_0 + \rho g (\zeta(t, x) - z), \quad (3.310)$$

т. е. давление в жидкости равно гидростатическому давлению.

Основная система уравнений задачи формулируется относительно двух функций: $v_x = v_x(t, x)$ и $\zeta = \zeta(t, x)$. Исключаем $v_z(t, x, z)$, интегрируя уравнение неразрывности поперек слоя жидкости,

$$v_z|_{z=\zeta} - v_z|_{z=-h} = - \int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial v_x}{\partial x} dz.$$

Учитывая условия (3.308) и правило дифференцирования интеграла с переменным пределом, получаем

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right]_{z=\zeta} + \left[v_x \frac{dh}{dx} \right]_{z=-h} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\zeta(t,x)} v_x dz + [v_x]_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + [v_x]_{z=-h} \frac{dh}{dx}$$

или
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h(x)}^{\zeta(t,x)} v_x dz. \quad (3.311)$$

Подставляем $p(t, x, z)$ из (3.310) в первое уравнение (3.307) и получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Поскольку $\zeta = \zeta(t, x)$, то отсюда следует, что v_x не зависит от z , так что (3.311) дает

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta(t, x) + h(x)) v_x].$$

Таким образом, относительно $\zeta(t, x)$ и $v_x(t, x)$ имеем нелинейную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} [(\zeta + h) v_x]. \end{aligned} \quad (3.312)$$

Решением этой системы мы здесь заниматься не будем, поскольку она представляет собой частный случай системы движения баротропного газа и рассматривается в газовой динамике.

Действительно, если ввести «плотность газа» при помощи соотношения

$$\bar{\rho}(t, x) = (\zeta(t, x) + h(x)) \rho$$

и «давление» \bar{p} как

$$\bar{p}(t, x) = \int_{-h}^{\zeta} p dz = \frac{g\rho}{2} (\zeta + h)^2 = \frac{g}{2\rho} \bar{\rho}^2,$$

то, подставляя сумму $\zeta(t, x) + h$, выраженную через $\bar{\rho}$ и \bar{p} в (3.312), получим

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} v_x) = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + g \frac{dh}{dx}.$$

Если $h = \text{const}$ то таким образом приходим к уравнениям движения газа с законом баротропности $\bar{p} = c \bar{\rho}^2$.

Такая газо-гидродинамическая аналогия позволяет использовать решения газовой динамики в исследовании волнового движения на мелкой воде.

Длинные (приливные) волны на мелкой воде Если из волн на мелкой воде рассмотреть только такие, амплитуда которых остается значительно меньше средней глубины h_{cp} , т. е. $|\zeta(t, x)| \ll h_{cp}$, то в первом уравнении (3.312) можно отбросить нелинейные члены, а во втором — пренебречь ζ по сравнению с h . Эти волновые движения получили название *длинных волн*, или приливных, поскольку они достаточно хорошо описывают явление приливов. Таким образом, из (3.312) получаем основную систему уравнений длинных волн

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}(h(x)v_x). \end{aligned} \quad (3.313)$$

Из этой системы можно получить

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - g \frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x)v_x) = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(c^2(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = 0, \quad (3.314)$$

где $c^2(x) = gh(x)$.

В случае $h(x) = \text{const}$ имеем два волновых уравнения

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0, \quad (3.315)$$

где $c = \sqrt{gh}$ — скорость распространения волн на малой глубине ($kh \ll 1$, $h \ll \lambda$). Как известно, общие решения уравнений (3.315) имеют вид

$$v_x = f_1(x - ct) + f_2(x + ct); \quad \zeta = F_1(x - ct) + F_2(x + ct). \quad (3.316)$$

Между произвольными функциями f_1, f_2, F_1, F_2 существует связь, которую можно выяснить, подставив (3.315) в (3.313). Имеем

$$(f_2' - f_1')c = -g(F_1' + F_2'), \quad (F_2' - F_1')c = -h(f_1' + f_2'),$$

где штрихом обозначена производная по аргументам $x \pm ct$.

Выражая F_1, F_2 через f_1 и f_2 , получаем

$$v_x = f_1(x - ct) + f_2(x + ct); \quad \zeta = \sqrt{\frac{h}{g}}(f_1(x - ct) - f_2(x + ct)). \quad (3.317)$$

Вид функций f_1 и f_2 определяется из начальных условий

$$f_1 = \frac{1}{2} \left(v_x(x, 0) + \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta(x, 0) \right),$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \left(v_x(x, 0) - \sqrt{\frac{g}{h}} \zeta(x, 0) \right).$$

Из (3.316) следует, что функция $f_1(x - ct)$ определяет прогрессивную волну, распространяющуюся вправо по оси x , а $f_2(x + ct)$ — влево.

Стоячие длинные волны в каналах переменной глубины. Сейши

В озерах, мелких морях под действием сил тяжести возникают периодические колебания поверхности, которые называют *сейшами*.

Проиллюстрируем появление сейш на примере канала с параболическим дном, в котором рассмотрим стоячие волны.

Итак, пусть $h(x) = h_0(1 - x^2/a^2) = h_0(1 - \bar{x}^2)$, а функцию $v_x(x)$, удовлетворяющую системе (3.313), будем искать в виде

$$v_x = \frac{\omega h_0^2 P(\bar{x})}{h(x)} \sin(\omega t + \varepsilon) = \omega h_0 \frac{P(\bar{x})}{1 - \bar{x}^2} \sin(\omega t + \varepsilon), \quad (3.318)$$

где $P(\bar{x})$ — некоторая безразмерная функция от $\bar{x} = x/a$.

Тогда, подставляя (3.318) в первое уравнение (3.314), для $P(\bar{x})$ получаем дифференциальное уравнение:

$$(1 - \bar{x}^2) P''(\bar{x}) + \mu P(\bar{x}) = 0, \quad (3.319)$$

где штрихом отмечена производная по \bar{x} , а $\mu = \omega^2 a^2 / gh_0$.

Рассмотрим несколько частных решений этого уравнения в виде полиномов второй, третьей и т. д. степеней, делящихся на $1 - \bar{x}^2$.

$$1. P_1(\bar{x}) = \bar{x}^2 - 1.$$

Для этого решения из (3.319) следует взять $\mu = 2$, т. е. $\omega = \frac{\sqrt{2gh_0}}{a}$,

а период колебаний $T_1 = \frac{2\pi a}{\sqrt{2gh_0}}$.

Уравнение свободной поверхности получаем из второго соотношения (3.313), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -P'_1(\bar{x}) \frac{\omega h_0^2}{a} \sin(\omega t + \varepsilon),$$

так что

$$\zeta(t, x) = \frac{P'_1 h_0^2}{a} \cos(\omega t + \varepsilon) = \frac{2x h_0^2}{a^2} \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Таким образом, здесь свободная поверхность остается все время плоской и совершает вращательные колебания с периодом T_1 вокруг линии узлов $x = 0$, т. е. вокруг продольной оси канала — оси y . Положение уровня в канале в разные моменты времени показано на рис. 3.88.

2. Рассмотрим $P(\bar{x}) = P_2(\bar{x}) = (\bar{x}^2 - 1)(\bar{x} + a)$.

Тогда из (3.319) имеем

$$(1 - \bar{x}^2)(3\bar{x} + 2a) = \mu(1 - \bar{x}^2)(\bar{x} + a),$$

так что следует положить $\mu = 3$, $a = 0$. При этом

$$\zeta(t, x) = \frac{(3\bar{x}^2 - 1)h_0^2}{a} \cos(\omega t + \varepsilon).$$

В этом случае узловых линий две: $x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$, а свободная поверхность представляет собой параболу, все время проходящую через эти узлы (см. рис. 3.88).

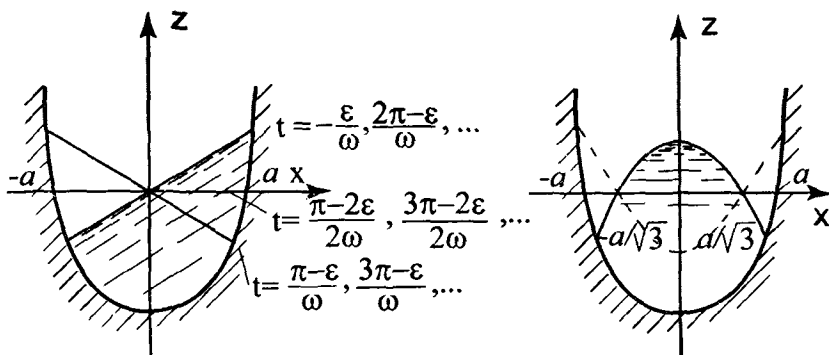


Рис. 3.88

Аналогичным образом можно получить трехузловые, четырехузловые и т. д. колебания. Вычисленные периоды неплохо совпадают с на-

блюдаемыми. Так на Леманском озере (Франция), имеющем ширину около 10 км и глубину около 200 м наблюдались сейши с периодом в 10 ми-

нут; по полученной формуле $T_1 = \frac{2\pi a}{\sqrt{2gh_0}} = 500 \text{ сек} = 8,3 \text{ мин}$. На Араль-

ском море, имеющем небольшую глубину при большой ширине, наблюдаются сейши с периодом 23 часа.

Статическая теория приливов

Рассмотрим основные положения и выводы статической теории приливов.

Пусть d — расстояние между центрами Земли массой M и Луны массой m , r — средний радиус Земли, h — высота (переменная) слоя воды, покрывающего Землю (см. рис. 3.89). Тогда потенциал силы лунного притяжения, действующей на океан можно записать в виде:

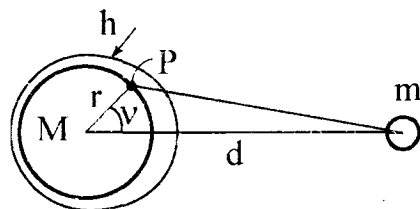


Рис. 3.89

$$\Pi_1 = -\frac{\gamma m}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos v)^{1/2}}.$$

Если рассматривать не абсолютное ускорение от силы лунного притяжения в точке P , а ускорение по отношению к Земле, причем его составляющую по линии центров Луна–Земля, то из этого потенциала надо вычесть потенциал, определяющий ускорение, которое сообщает Луна всей массе Земли, т. е. $\frac{\gamma m}{d^2} r \cos v$. Таким образом, суммарный потенциал, определяющий в точке P возмущающее действие Луны, равен

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{(r^2 + d^2 - 2rd \cos v)^{1/2}} + \frac{\gamma m}{d^2} r \cos v.$$

Разлагая, с точностью до r^2/d^2 , по степеням r/d (для Луны и Земли $r/d \approx 1,3 \cdot 10^{-2}$ имеем

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{d} + \frac{3\gamma m r^2}{2d^3} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 v \right).$$

Пусть Π_1 — потенциал сил, действующих на жидкость океана, когда возмущающих сил нет и действуют лишь силы притяжения Земли, тогда $\partial \Pi_1 / \partial r = g$ и, если h — возмущенные глубины океана, то $\Pi_1 = gh + \text{const}$.

Суммарный потенциал $\Pi + \Pi_1$ определяет силы, действующие на жидкую оболочку Земли, т. е. на свободной поверхности выполняется условие

$$gh + \frac{3\gamma m r^2}{2d^3} \left(\frac{1}{3} - \cos^2 \nu \right) = C = \text{const}. \quad (3.320)$$

Это уравнение известно как основное уравнение *статической теории приливов*.

Выражая гравитационную постоянную из равенства $g = \frac{\gamma M}{r^2}$, в пренебрежении малыми изменениями g и отличием формы Земли от сферы, из (3.320) имеем

$$h = H \left(\cos^2 \nu - \frac{1}{3} \right), \text{ где } H = \frac{3mr^4}{2d^3 M}. \quad (3.321)$$

Величина H определяет максимальную и минимальную высоту приливов. Максимальные приливы будут тогда, когда Луна находится в зените ($\nu = 0$) или в надире ($\nu = \pi$). Из (3.321) максимальная высота равна

$$h_{\max} = \frac{2}{3} H.$$

Для лунных приливов, когда $\frac{m}{M} = \frac{1}{81}$, $\frac{r}{d} = \frac{1}{60,3}$ и $d = 6370$ км, получаем $h_{\max} = 54$ см.

Если рассмотреть образование приливов на Земле под действием Солнца, когда $\frac{m}{M} = 333000$, $\frac{r}{d} = \frac{1}{23400}$, то получаем $h_{\max} = 25$ см, т. е. вдвое меньше, чем от Луны.

Пользуясь формулой (3.321), можно рассчитать высоту приливов в любом месте Земли.

Уединенная волна. Солитон

Еще в середине XIX века было отмечено существование особого рода волновых движений — так называемых уединенных волн. Эта

симметричная волна состоит из единственного возмущения, распространяющегося без изменений первоначальной формы с постоянной скоростью (см. рис. 3.90). Рэлей и Буссинеск получили в первом приближении, сохраняя часть нелинейных членов, уравнение уединенной

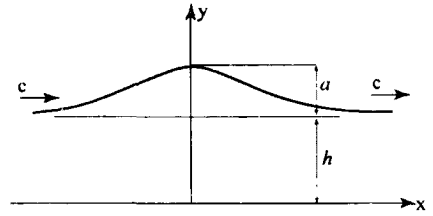


Рис. 3.90

волны, довольно хорошо совпадающее с наблюдениями. Кортевег и де Вриз модифицировали метод Рэля и проанализировали волны периодической формы (кноидальные волны), которые стремятся к уединенной волне.

Приведем исследование Рэля и Буссинеска (см. [5], [28]).

Предполагая установившееся плоское течение безвихревым, ищем комплексный потенциал в виде разложения

$$\varphi + i\psi = e^{iy \frac{d}{dx} F(x)} = \left(1 + iy \frac{d}{dx} - \frac{y^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{iy^3}{3!} \frac{d^3}{dx^3} + \dots \right) F(x),$$

где $F(x)$ — скалярная функция. Отсюда получаем

$$\varphi = F - \frac{y^2}{2!} F'' + \frac{y^4}{4!} F^{IV} + \dots$$

$$\psi = yF' - \frac{y^3}{3!} F''' + \frac{y^5}{5!} F^{V} - \dots$$

Таким образом

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F' - \frac{y^2}{2!} F''' + \frac{y^4}{4!} F^{V} + \dots \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -yF'' + \frac{y^3}{3!} F^{IV} - \dots \end{aligned} \quad (3.322)$$

Рассмотрим условие на свободной поверхности. Если c — постоянная скорость вдали от возмущения, то условие постоянства давления на поверхности $y = h$ выглядит следующим образом

$$v_x^2 + v_y^2 = c^2 - 2g(y - h). \quad (3.323)$$

Кроме этого, учтем, что свободная поверхность является линией тока, так что

$$yF' - \frac{y^3}{3!} F''' + \frac{y^5}{5!} F^{V} + \dots = \text{const} = ch. \quad (3.324)$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} F' &= \frac{ch}{y} + \frac{1}{6} y^2 F''' + \dots = \operatorname{ch} \left\{ \frac{1}{y} + \frac{y^2}{6} \left(\frac{1}{y} \right)'' + y^2 F''^2 + \dots \right\} = \\ &= ch \left\{ \frac{1}{y} + \frac{y^2}{6} \left(\frac{1}{y} \right)'' + y^2 \left(\frac{1}{y} \right)'{}^2 + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.325)$$

Подставляя в (3.323) значения (3.322) и учитывая (3.325), получаем

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{3} y \left(\frac{1}{y} \right)'' + y^2 \left[\left(\frac{1}{y} \right)' \right]^2 = \frac{1}{h^2} - \frac{2g(y-h)}{c^2 h^2}.$$

Умножая на y' и интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{y} + \frac{1}{3} \frac{y'^2}{y} = -\frac{1}{h} + \frac{y-h}{h^2} - \frac{g(y-h)^2}{c^2 h^2},$$

причем, постоянная интегрирования выбрана так, что $y' = 0$ при $y = h$.

Отсюда имеем

$$y'^2 = \frac{3(y-h)^2}{h^2} \left(1 - \frac{gy}{c^2} \right). \quad (3.325a)$$

Если перейти в систему, движущуюся с уединенной волной, то тогда c будет обозначать скорость движения волны по неподвижной среде. Сле-

довательно, $y' = 0$ не только при $y = h$, но и при $y = y_{\max} = \frac{c^2}{g}$, т. е. на гребне волны, поскольку правая часть в (3.325a) должна быть неотрицательна.

Скорость распространения волны по неподвижной среде связана с y_{\max} следующим образом

$$c = \sqrt{gy_{\max}}.$$

Из этого соотношения следует важный вывод: *уединенная волна существует лишь в том случае, когда $c > \sqrt{gh}$.*

Интегрируя (3.325a), получаем

$$y = h + a \operatorname{sech}^2 \frac{x}{2b}, \quad (3.326)$$

где
$$b^2 = \frac{h^2 (h + y_{\max})}{3y_{\max}}.$$

Длина волны бесконечна, а скорость ее распространения по неподвижной среде тем больше, чем больше ее максимальное возвышение y_{\max} .

Таким образом, если в покоящейся среде возникают две движущиеся уединенные волны, причем более высокая — спереди, то с течением времени они будут удаляться друг от друга. Если наоборот, то, как показывает исследование уравнения Кортевега-де Вриза, происходит их нелинейное взаимодействие, в результате которого более высокая волна выходит из этого «столкновения» с неизменной высотой и формой. Именно такие волны и были названы рядом исследователей *солитонами*.

Более детальный анализ (см. [5]) показывает, что формула (3.284) получена в пренебрежении четвертой степенью отношения $\frac{h + y_{\max}}{2b}$. Как уже говорилось, эти результаты хорошо совпадают с наблюдениями (до 25 %).

Солитоны составляют основу любого решения нелинейных гравитационных волн, в частности, и присутствуют во всех нелинейных динамических системах вообще. Дополнительные сведения о солитонах можно найти в [26], [27].

Внутренние волны в несжимаемой жидкости

До сих пор мы рассматривали волновые движения в несжимаемой жидкости ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) при неизменной плотности. Однако, в несжи-

маемых средах, стратифицированных под действием (например, сил тяжести) плотность, давление и энтропия зависят от высоты. Волны существующие в таких средах и не вызывающие конвективных движений, называются внутренними (см., например, [28]).

Будем считать, что длина внутренних волн мала по сравнению с расстояниями, на которых сила тяжести заметно меняет плотность среды. Кроме того, хотя это и не обязательно (см. например [5], гл. IX), будем считать, что основной эффект явления состоит в изменении плотности с тепловым расширением, так что уравнение состояния запишем в виде $\rho = \rho(s)$.

Пусть исходное состояние среды, параметры которого отмечаем индексом нуль, является состоянием механического равновесия ($\mathbf{v}_0 = 0$), так что

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}'; \quad p = p_0 + p'; \quad \rho = \rho_0 + \rho'; \quad s = s_0 + s', \quad (3.326)$$

причем отклонения от этого равновесия рассматриваются как малые величины.

Основная система уравнений задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s &= 0. \end{aligned} \quad (3.327)$$

Исходное состояние среды должно удовлетворять этой системе, так что

$$\frac{\nabla p_0}{\rho_0} = \mathbf{g}; \quad \frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \frac{\partial s_0}{\partial t} = 0; \quad \rho_0 + \rho' = \rho_0(s_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s'.$$

Учитывая эти соотношения и подставляя (3.326) в (3.327) получаем, отбрасывая малые второго порядка

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} &= -\nabla p_0 - \nabla p' + \mathbf{g} \rho_0 + \mathbf{g} \rho' = -\nabla p' + \mathbf{g} \rho', \\ \rho' &= \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s', \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla s_0 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, основные уравнения задачи приобретают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} = \frac{\mathbf{g}}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s' - \frac{\nabla p'}{\rho_0}; \quad \frac{\partial s'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla s_0 = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{v}' = 0. \quad (3.328)$$

Будем искать решение этой системы в виде плоской прогрессивной волны

$$\mathbf{v}' = \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (3.329)$$

и аналогично для p' и s' .

Здесь \mathbf{u}_0 — постоянный вектор амплитуды, а $\mathbf{k} = (k_x, k_z)$ — вектор частоты.

Подставляя (3.329) в уравнение несжимаемости, из (3.328) получаем

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}' = 0. \quad (3.330)$$

Таким образом, скорость среды всюду перпендикулярна волновому вектору; такие волны называются *поперечными* (см. ч. 2, § 5, задача 5.6).

Из остальных уравнений (3.328) имеем

$$i\omega s' = \mathbf{v}' \cdot \nabla_{s_0}; \quad -i\omega \mathbf{v}' = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s' \mathbf{g} - \frac{i\mathbf{k}}{\rho_0} p'.$$

Умножая второе равенство скалярно на \mathbf{k} , получим в силу (3.330)

$$ik^2 p' = \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p s' (\mathbf{g} \cdot \mathbf{k}). \quad (3.331)$$

Поэтому, если выразить s' через p' из предыдущих двух уравнений и подставить в (3.331), то окончательно получим

$$\omega^2 = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial s} \right)_p g \frac{ds_0}{dz} \sin^2 \theta,$$

где θ — угол между осью z , направленной вверх, и волновым вектором \mathbf{k} .

Положительность ω^2 обеспечена условием отсутствия конвекции (см. (2.5)). Величина частоты волны зависит только от направления волнового вектора, но не от его величины. Волны с волновым вектором, направленным вертикально ($\theta = 0$), невозможны.

Если среда находится не только в механическом, но и в тепловом равновесии ($T = \text{const}$), получаем

$$\frac{ds'}{dz} = \left(\frac{\partial s'}{\partial p} \right)_T \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \left(\frac{\partial s'}{\partial p} \right)_T.$$

Из термодинамических соотношений (см. ч. 2, § 12)

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad \text{и} \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial s'} \right)_p = \left(\frac{T}{c_p} \right) \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \frac{T \rho^2}{c_p} \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T$$

следует

$$\omega^2 = \frac{T g^2}{c_p \rho^2} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \right]^2 \sin^2 \theta.$$

Для идеального газа имеем

$$\omega = \frac{g}{\sqrt{c_p T}} \sin \theta.$$

Задачи с решениями

Задача 7.1. Вычислить кинетическую T_λ и потенциальную Π_λ энергии волнового движения, приходящиеся на длину волны $\lambda = 2\pi/k$, и показать, что если для стоячих волн T_λ и Π_λ меняются с течением времени, переходя друг в друга, причем $T_\lambda + \Pi_\lambda = \text{const}$, то для прогрессивных волн T_λ и Π_λ — постоянны.

Решение. Имеем (см. рис. 3.91), используя формулу Грина

$$T_\lambda = \frac{\rho}{2} \int_S (\nabla \varphi)^2 dS = \frac{\rho}{2} \int_{L_{ABCD}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h} dx. \quad (1)$$

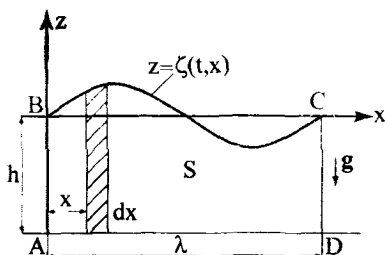


Рис. 3.91

Здесь учтено, что $\int_{AB+CD} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dL = 0$, ибо на AB и CD нормали отличаются лишь знаком, а также — малость амплитуды, так что $\left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{z=h+\zeta} \approx \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h}$.

Потенциальную энергию вычислим как сумму потенциальных энергий элементарных вертикальных столбиков, т. е.

$$\Pi_\lambda = \int_0^\lambda \rho g \zeta \frac{\zeta}{2} dx = \frac{\rho g}{2} \int_0^\lambda \zeta^2 dx. \quad (2)$$

Подставляя в (1) и (2) выражения (3.273), (3.274) и учитывая (3.272), получаем для стоячих волн

$$T_{\lambda c} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \int_0^\lambda k \operatorname{ch} kh \operatorname{sh} kh \sin^2(kx + m) \cos^2(\omega t + \varepsilon) dx = \frac{\rho g \zeta_0^2 \lambda}{4} \cos^2(\omega t + \varepsilon),$$

$$\Pi_{\lambda c} = \frac{\rho g}{2} \zeta_0^2 \int_0^\lambda \sin^2(kx + m) \sin^2(\omega t + \varepsilon) dx = \frac{\rho g \zeta_0^2 \lambda}{4} \sin^2(\omega t + \varepsilon).$$

Таким образом, $T_{\lambda c} + \Pi_{\lambda c} = \text{const} = \frac{\rho g \zeta_0^2 \lambda}{2}$, хотя в моменты времени $t_n = \frac{\pi n - \varepsilon}{\omega}$ кинетическая энергия максимальна, а потенциальная равна нулю, и наоборот, при

$$t_n = \frac{1}{\omega} \left((2n+1) \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right).$$

Аналогично, используя (3.278) и (3.279), получаем для прогрессивных волн

$$T_{\lambda \Pi} = \frac{\rho}{2} \left(\frac{\zeta_0 g}{\omega \operatorname{ch} kh} \right)^2 \int_0^\lambda k \operatorname{sh} kh \operatorname{ch} kh \cos^2(\omega t - kx + \gamma) dx = \frac{\rho g \zeta_0^2 \lambda}{4},$$

$$\Pi_{\lambda \Pi} = \frac{\rho g \zeta_0^2 \lambda}{4}.$$

Задача 7.2. Показать, что уравнения круговых траекторий частиц, подобные (3.280а) при $kh \gg 1$, а именно

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 + R e^{k\xi_2} \sin(\omega t + k\xi_1), \\ z &= \xi_2 - R e^{k\xi_2} \cos(\omega t + k\xi_1) \end{aligned} \quad (1)$$

являются решениями системы уравнений движения в лагранжевых переменных t, ξ_1, ξ_2 .

Это решение было найдено Герстнером и Рэнкиным и получило название трохоидальных волн Герстнера.

Решение. Вычисляя

$$J = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = \begin{vmatrix} 1 + k R e^{k\xi_2} \cos(\omega t + k\xi_1) & k R e^{k\xi_2} \sin(\omega t + k\xi_1) \\ k R e^{k\xi_2} \sin(\omega t + k\xi_1) & 1 - k R e^{k\xi_2} \cos(\omega t + k\xi_1) \end{vmatrix} = 1 - k^2 R^2 e^{2k\xi_2},$$

получаем, что уравнение неразрывности $\rho J = \rho_0$ удовлетворяется, если за функцию лагранжевых координат ρ_0 , не зависящую от времени, принять $\rho_0 = \rho(1 - k^2 R^2 e^{2k\xi_2})$.

Обращаемся к уравнениям движения

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z},$$

вычислим

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dz.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -R\omega^2 e^{k\xi_2} \sin(k\xi_1 + \omega t) = -\omega^2 (x - \xi_1), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= R\omega^2 e^{k\xi_2} \cos(k\xi_1 + \omega t) = -\omega^2 (z - \xi_2). \end{aligned}$$

Поэтому, используя (1), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} dz &= -\omega^2 [(x - \xi_1)d(x - \xi_1) + (x - \xi_1)d\xi_1] - \omega^2 [(z - \xi_2)d(z - \xi_2) + (z - \xi_2)d\xi_2] = \\ &= -\frac{\omega^2}{2} d[(x - \xi_1)^2 + (z - \xi_2)^2] - \omega^2 [R e^{k\xi_2} \sin(k\xi_1 + \omega t)d\xi_1 - R e^{k\xi_2} \cos(k\xi_1 + \omega t)d\xi_2] = \\ &= -\frac{\omega^2}{2} d(R^2 e^{2k\xi_2}) + \omega^2 d\left(R \frac{e^{k\xi_2}}{k} \cos(k\xi_1 + \omega t)\right) = \\ &= -d\left\{\frac{\omega^2 R^2 e^{2k\xi_2}}{2} - \frac{\omega^2 R}{k} e^{k\xi_2} \cos(k\xi_1 + \omega t)\right\}. \end{aligned}$$

Вследствие этого, уравнения движения имеют интеграл

$$\frac{p}{\rho} + gz - \frac{\omega^2 R^2 e^{2k\xi_2}}{2} + \frac{\omega^2 R e^{k\xi_2}}{k} \cos(k\xi_1 + \omega t) = C$$

или, подставляя сюда значение z из (1),

$$\frac{p}{\rho} = -g\xi_2 + \left(g - \frac{\omega^2}{k} \right) R e^{k\xi_2} \cos(k\xi_1 + \omega t) + \frac{\omega^2 R^2 e^{2k\xi_2}}{2} + C.$$

На свободной поверхности ($\xi_2 = 0$) давление p_0 должно быть постоянным, не зависящим от времени, т. е.

$$\frac{p_0}{\rho} = \left(g - \frac{\omega^2}{k} \right) R \cos(k\xi_1 + \omega t) + \frac{\omega^2 R^2}{2} + C = \text{const.}$$

Поэтому

$$\omega^2 = gk, \quad C = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\omega^2 R^2}{2}.$$

Итак, если $\omega^2 = gk$, а давление определяется формулой

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -g\xi_2 - \frac{\omega^2 R^2}{2} (1 - e^{2k\xi_2}),$$

где p_0 — давление на свободной поверхности ($\xi_2 = 0$), то система уравнений движения в форме Лагранжа удовлетворяется функциями (1).

Отличительной чертой трохоидаальных волн является наличие завихренности во всех точках потока. Действительно, вычисляя

$$\begin{aligned} \text{rot}_v \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial z} [-\omega(z - \xi_2)] - \frac{\partial}{\partial x} [\omega(x - \xi_1)] = -\omega \left(2 - \frac{\partial \xi_1}{\partial x} - \frac{\partial \xi_2}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

получаем после несложных выкладок

$$\text{rot}_v \mathbf{v} = \frac{2\omega k^2 R^2 e^{2k\xi_2}}{1 - k^2 R^2 e^{2k\xi_2}}.$$

Наибольшее значение вихрь имеет на поверхности волны ($\xi_2 = 0$), а при $\xi_2 \rightarrow -\infty$, т. е. при удалении вглубь жидкости, он убывает до нуля.

Список литературы

1. *Борисенко А.И., Тарапов И.Е.* Механика сплошной среды. ч.1. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – Харьков: Золотые страницы, 2003. – 317 с.
2. *Тарапов И.Е.* Механика сплошной среды. ч. 2. Общие законы кинематики и динамики. – Харьков: Золотые страницы, 2002. – 514 с.
3. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М., 1951.
4. *Тарапов И.Е.* Об одном новом интеграле вихревых стационарных движений в магнитной гидродинамике // Магнитная гидродинамика. – 1988, – № 2.
5. *Ламб Г.* Гидродинамика. – М; Л.: ОГИЗ, 1947.
6. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред: Пер. с нем. – М., 1954.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987.
8. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидромеханика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1964.
9. *Бетчелор Дж.* Введение в динамику жидкости: Пер. с англ. – М.: Мир, 1973.
10. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.2. – М.: Наука, 1983.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986.
12. *Корнфельд М.* Упругость и прочность жидкостей: Пер. с англ. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
13. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 476 с.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – М.: Наука, 1973. – 296 с.
15. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. – М.: ГИИТЛ, 1953. – 379 с.
16. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т.3, ч. 2. – М.: Наука, 1974. – 672 с.
17. *Гуревич М.И.* Обтекание осесимметричного полутела конечного сопротивления // ПММ – Т. XI. – Вып. 1. – 1947.
18. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

19. *Miln-Tomson*. Proc. Camb. Phil. Soc., 36, 1940.
20. *Нужин С.Г.* Построение потенциального потока несжимаемой жидкости около Крыловых профилей произвольной формы // ПММ – Т. XI. – Вып. 1. – 1947.
21. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.; Л.: ГИИТЛ, 1950. – 443 с.
22. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. – М.: ГИФМЛ, 1963. – 583 с.
23. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1999.
24. *Гандель Ю.В.* Введение в методы вычислений сингулярных и гиперсингулярных интегралов. – Харьков–Херсон: ООО «Атлант», 2000.
25. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.
26. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.
27. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Мори Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
28. *Бреховских Л.М., Гончаров В.В.* Введение в механику сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 335 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть III. МЕХАНИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ 5

**Глава 1. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ВОПРОСЫ
ГИДРОАЭРОМЕХАНИКИ 6**

§ 1.1. Основные уравнения движения и их интегралы 6

§ 1.2. Силовое взаимодействие тела и потока жидкости (газа) 33

Задачи с решениями 55

Упражнения 67

Глава 2. ГИДРОАЭРОСТАТИКА 68

Задачи с решениями 89

Упражнения 91

**Глава 3. ДИНАМИКА НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ
ЖИДКОСТИ 93**

§ 3.1. Безвихревые движения. Общие сведения 97

Задачи с решениями 136

Упражнения 141

§ 3.2. Двумерные безвихревые течения 142

Задачи с решениями 172

Упражнения 175

§ 3.3. Метод конформного отображения в задачах плавного
обтекания замкнутых контуров 177

Задачи с решениями 205

Упражнения 209

3.4. Метод присоединенных особенностей. Обтекание тонких
 профилей безвихревым потоком 210

Задачи с решениями 227

Упражнения 229

§ 3.5. Разрывные течения со свободными линиями тока 231

Задачи с решениями 245

§ 3.6. Пространственные безвихревые течения 251

Задачи с решениями 285

§ 3.7. Волновые движения 289

Задачи с решениями 324

Список литературы 327

Научное издание

Иван Евгеньевич Тарапов

МЕХАНИКА
сплошной среды
в трех частях

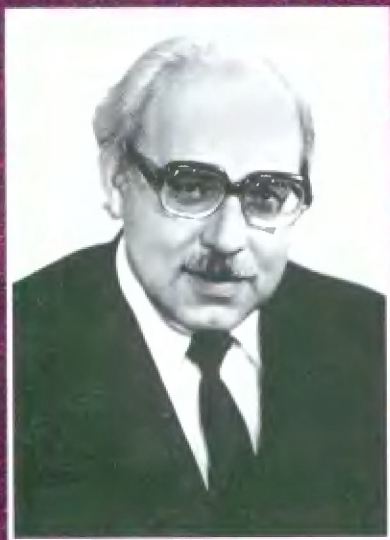
Часть 3
МЕХАНИКА НЕВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Корректор *Е.Г. Попко*
Компьютерный набор *В.И. Легейды*
Компьютерная верстка *Л.Е. Сагана*
Оформление обложки *С.М. Нурахметова*

Подп. к печати 29.08.2005. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBook.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,77. Уч.-изд. л. 24,52. Тираж 1000 экз. Зак. 453.

ООО «Золотые страницы»
Украина, 61145, г. Харьков, ул. Космическая, 26
Свидетельство серии ДК № 276 от 12.12.2000
Тел./факс (057) 701-0-701





**И. Е. Тарапов (1926–2002) —
доктор физико-математических
наук, профессор, заслуженный
работник высшей школы УССР**

Родился 20 июня 1926 года в с. Лука (Сумская обл.).

В 1950 году окончил с отличием Харьковский авиационный институт, затем аспирантуру при кафедре теоретической механики ХГУ. В 1953 году защитил кандидатскую диссертацию.

В 1958 году И. Е. Тарапов возглавил первый в Харькове вузовский вычислительный центр, в 1961 году — кафедру вычислительной математики ХГУ.

В 1967 году стал заведующим кафедрой механики ХГУ, которой руководил 33 года. За это время он основал на кафедре новое научное направление, связанное с механикой намагничивающихся и поляризующихся сплошных сред. Полученные И. Е. Тараповым и его учениками результаты позволили, в частности, обнаружить новые физические явления, а также решить ряд практически важных задач феррогидродинамики. Эти работы составили основу его докторской диссертации «Основные задачи гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред», которую он защитил в 1974 году. В созданной под руководством проф. И. Е. Тарапова при кафедре механики лаборатории электродинамики сплошных сред в ХГУ впервые в СССР была получена устойчивая проводящая ферромагнитная жидкость.

И. Е. Тарапов создал свою научную школу. Под его руководством было защищено 15 кандидатских и две докторских диссертации. На протяжении многих лет проф. И. Е. Тарапов читал разработанные им авторские курсы, был автором многих учебных пособий. Его книга «Векторный анализ и начала тензорного исчисления» (совместно с проф. А. И. Борисенко) выдержала пять изданий в нашей стране, неоднократно издавалась за рубежом и вошла в настоящее трехтомное издание (первая часть).

Важнейшим этапом жизни и деятельности И. Е. Тарапова была работа на посту ректора ХГУ в течение 18 лет (с 1975 по 1993 год). При его непосредственном участии в качестве ректора в ХГУ были открыты новые факультеты, кафедры, специальности и специализации. Кафедрами университета создано более десятка филиалов в крупнейших исследовательских институтах Харькова.

И. Е. Тарапов был награжден орденами Трудового Красного Знамени и Дружбы народов, медалями, грамотами Министерства высшего образования СССР.

В последние десять лет жизни И. Е. Тарапов, наряду с учебной и научной работой, вел большую научно-общественную и просветительскую работу в Украине.

В 1998 году И. Е. Тарапов основал научно-популярный журнал «UNIVERSITATES. Наука и просвещение», главным редактором которого он был до конца своей жизни.