В. В. ПОКРОВСКИЙ

ОБЩАЯ ФИЗИКА

МЕХАНИКА

методы решения задач

В. В. Покровский

МЕХАНИКА

методы решения задач

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

3-е издание (электронное)

Москва
БИНОМ. Лаборатория знаний
2015

УДК 531
ББК 22.2я73
П48

Покровский В. В.

П48 Механика. Методы решения задач [Электронный ресурс] : учебное пособие / В. В. Покровский. — 3-е изд. (эл.). — Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 256 с.). — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10".

ISBN 978-5-9963-2645-7

Пособие посвящено методам решения задач по курсу общей физики (раздел «Механика»). Большинство рассматриваемых задач взято из сборника задач И. Е. Иродова «Задачи по общей физике». Каждый раздел предваряется кратким изложением теоретических вопросов, приводятся основные формулы. Описывается методика решения задач, которая может быть применена в данном разделе.

Для студентов физических специальностей вузов.

УДК 531
ББК 22.2я73

Деривативное электронное издание на основе печатного аналога: Механика. Методы решения задач : учебное пособие / В. В. Покровский. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012. — 253 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-0175-1.

ISBN 978-5-9963-2645-7

Введение

Механика — одна из древнейших наук, занимающихся изучением простейшей формы движения тел в пространстве и во времени. Поэтому первым понятием механики является *движение*, под которым понимают изменение положения тела в пространстве. Для того чтобы охарактеризовать положение тела в пространстве, необходимо иметь какое-то другое тело, относительно которого мы и будем измерять положение изучаемого тела. Тело или систему тел, неподвижных друг относительно друга, мы будем называть *телом отсчета*. Для численных характеристик движения тела относительно тела отсчета с ним связывают какую-либо систему координат: декартову, сферическую, цилиндрическую и т. д. В процессе движения положение тела изменяется не только в пространстве, но и во времени — в любой закон механики явно или завуалированно входят расстояние и промежутки времени. Поэтому наряду с измерением расстояния необходимо измерение времени, которое производится с помощью часов. Тело отсчета, связанная с ним система координат и синхронизованные между собой часы образуют *систему отсчета*. Без системы отсчета описание движения невозможно.

Реальные объекты в природе настолько сложны, что многие их черты и связи приходится отсекать, иначе их количественное изучение невозможно. Поэтому при рассмотрении движения физических объектов используются идеализированные понятия:

- *материальная точка* — это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь;
- *абсолютно твердое тело* — это система материальных точек, расстояние между которыми не меняется в процессе движения.

Поскольку в природе не существует ни материальных точек, ни абсолютно твердых тел, а также невозможен абсолютно упругий или абсолютно неупругий удар и т. п., при описании каких-либо физических систем требуется решить, какие параметры системы мы можем идеализировать. Пусть, например, металлический шарик подвешен на вертикально висящей нити. Тогда, если нас интересует период колебаний этого маятника, мы можем рассматривать шарик как материальную точку. Если мы хотим рассчитать период крутильных колебаний этого шарика вокруг вертикальной оси, то мы должны рассматривать его как твердое тело с учетом его размеров и массы. Если же мы хотим вычислить частоту звуковых колебаний, которые будут совершаться шариком после того, как мы по нему ударили, то нам необходимо учитывать как размеры шарика, так и упругие свойства материала, из которого он изготовлен.

Из вышесказанного вытекает, что всякое описание физической системы охватывает лишь ее часть, а не всю ее целиком.

Механика ставит перед собой две основные задачи:

1. Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения — законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.
2. Отыскание общих теорем или принципов, присущих любой системе независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

Глава 1
Кинематика

Кинематика — раздел механики, где изучаются способы описания движений независимо от причин, обусловливающих эти движения. Эта глава в основном посвящена кинематике точки.

Для описания движения точки необходимо знать ее положение в любой момент времени. Это можно сделать разными способами.

Векторный способ. Положение интересующей нас точки задают радиусом-вектором $\overrightarrow{r}$, проведенным из начала координат O в точку. При этом проекции r_x, r_y, r_z радиуса-вектора на оси OX; OY; OZ совпадают с координатами x; y; z точки:

$$\overrightarrow{r} = r_x \overrightarrow{i} + r_y \overrightarrow{j} + r_z \overrightarrow{k} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} + z \overrightarrow{k}.$$

При движении материальной точки конец вектора $\overrightarrow{r}$ описывает линию, которая называется *траекторией* точки. Векторный способ описания движения точки проиллюстрирован на примере задачи 14.

Теперь введем понятие *вектора скорости* материальной точки.

Пусть за промежуток времени Δt точка A переместится из точки 1 в точку 2 (рис. 1). Тогда вектор скорости $\overrightarrow{v}$ может быть определен как

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt}. \qquad (1)$$

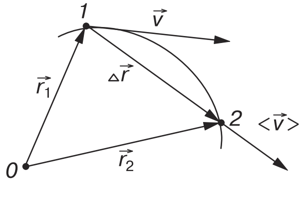


Рис. 1

Таким образом, вектор скорости $\overrightarrow{v}$ есть первая производная от $\overrightarrow{r}(t)$ и направлен в любой момент времени по касательной к траектории движения точки A. Модуль вектора скорости

$$v = |\overrightarrow{v}| = \left|\frac{d\overrightarrow{r}}{dt}\right|. \qquad (2)$$

Если тело движется с переменной скоростью, то такое движение характеризуется *ускорением*, т. е. скоростью изменения скорости

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}\,. \tag{3}$$

Средние векторы скорости и ускорения точки:

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\,, \tag{4}$$

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\,. \tag{5}$$

Теперь получим выражение для $\vec{v}$ и $\vec{r}$ для любого момента времени. Из (3) следует, что $d\vec{v} = \vec{a}\,dt$, откуда

$$\Delta \vec{v} = \int\limits_0^t \vec{a}\,dt = \vec{a}\,t.$$

Однако, чтобы найти $\vec{v}(t)$, необходимо знать скорость $\vec{v}_0$ в начальный момент времени, так как $\Delta\vec{v}$ — это приращение скорости, а не сама скорость $\vec{v}(t)$. Поэтому

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t. \tag{6}$$

Интегрируя (1) и проводя аналогичные рассуждения, легко получить выражение для $\vec{r}(t)$:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}\,t^2}{2}\,. \tag{7}$$

Координатный способ. Задается зависимость координат движущейся точки как функций времени. В рамках данного пособия мы будем рассматривать движение тел только в декартовых координатах, поэтому в любой момент времени t

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Зная эти зависимости и используя соотношения (1) и (3), легко получить

$$v_x = \frac{dx}{dt}\,; \quad v_y = \frac{dy}{dt}\,; \quad v_z = \frac{dz}{dt}\,;$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\,; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}\,; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}\,,$$

а также

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (8)$$

Координатный способ, как правило, используется в задачах, где требуется найти уравнение траектории, модули скорости и ускорения как функции t, угол между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{v}$ и т. д. Координатный способ проиллюстрирован на примерах решения задач 6; 12; 15; 19.

Естественный способ. Когда траектория точки известна заранее, координата точки определяется длиной дуги l, т. е. расстоянием от выбранного начала координат до точки (*дуговой координатой*). Знак координаты устанавливается произвольно. Движение точки определено, если известны ее траектория, начало координат, положительное направление отсчета, как правило указываемое стрелкой на рисунке, и закон движения точки, т. е. зависимость $l(t)$.

Определенные трудности в «естественном» способе вызывает введение понятия скорости и ускорения. Скорость точки

$$\overrightarrow{v} = v_\tau \overrightarrow{\tau}. \qquad (9)$$

Здесь $\overrightarrow{\tau}$ — единичный вектор, связанный с движущейся точкой и направленный по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты. Обратите внимание на то, что $\overrightarrow{\tau}$ — переменный вектор, зависящий от величины дуговой координаты l (рис. 2), а

$$v_\tau = \frac{dl}{dt}, \qquad (10)$$

v_τ — величина алгебраическая.

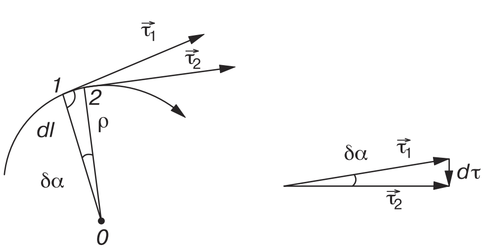


Рис. 2

Продифференцировав (9) по t, находим ускорение точки:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\,\vec{\tau} + v_\tau\,\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}\,\vec{\tau} + v_\tau\,\frac{d\vec{\tau}}{dl}\;\frac{dl}{dt} = \\ &= \frac{dv_\tau}{dt}\,\vec{\tau} + \vec{v}_\tau^{\,2}\,\frac{d\vec{\tau}}{dl}\,,\end{aligned} \tag{11}$$

где $dl/dt = v_\tau$.

Можно показать, что

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}\,,$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к траектории, ρ — радиус кривизны.

Тогда (11) приобретает вид

$$\vec{a} = \frac{dv_\tau}{dt}\,\vec{\tau} + \frac{dv_\tau}{\rho}\,\vec{n}. \tag{12}$$

Именно по такой формуле вычисляют ускорение, когда задача решается естественным способом. Первое слагаемое в (12) называется *тангенциальным ускорением*, а второе — *нормальным*. Отсюда модуль полного ускорения a равен

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2}, \tag{13}$$

где $\dot{v}$ — производная модуля скорости по времени. Естественный способ проиллюстрирован на примере решения задачи 20.

При решении задач на вращение материальных точек вокруг оси следует помнить, что в этом случае вместо скорости $\vec{v}$ используется понятие *угловой скорости* $\vec{\omega}$, определяемой как

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}\,, \tag{14}$$

где dt — время, за которое тело повернется на угол $d\vec{\varphi}$. Вместо ускорения $\vec{a}$ *угловое ускорение* $\vec{\beta}$

$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\,. \tag{15}$$

Связь между линейной и угловой скоростями устанавливается следующим соотношением:

$$v = \omega\rho, \tag{16}$$

где ρ — радиус окружности, по которой движется тело.

Задачи кинематики подразделяются на два класса.

Прямая задача — когда по заданному закону движения требуется определить скорость и ускорение тела. Например, задачи 11, 12, 13 и т. д.

Обратная задача — когда по заданному ускорению материальной точки $\overrightarrow{a}$, ее начальной скорости $\overrightarrow{v}_0$ и положению $\overrightarrow{r}_0$ в начальный момент времени $t = t_0$ требуется определить $\overrightarrow{v}$ и $\overrightarrow{r}$ в любой момент времени t. К обратным задачам относятся задачи 10; 14; 15 и т. д.

Рекомендации по решению задач

1. Внимательно ознакомьтесь с условиями задачи. Иногда после решения у студента остаются «лишние» данные. В этом случае можно гарантировать, что задача решена неверно. Лишних данных в условии задачи попросту не бывает. Наоборот, зачастую недостающие данные требуется получить из соответствующих таблиц или справочников.

2. Решайте задачу в общем виде, после чего проверьте размерность. Неверная размерность — свидетельство неверного решения, хотя правильная размерность не является гарантией верного решения.

3. Соотносите полученный ответ со здравым смыслом. Например, если вы рассчитываете расстояние, которое пролетает диск, брошенный спортсменом с какой-то начальной скоростью v_0 под углом α к поверхности Земли, и полученный результат составит около 1000 метров, то ответ явно неверен, даже если спортсмен — многократный чемпион мира и Олимпийских игр. Рассчитанная скорость движения какого-либо материального тела не может быть равна или превышать скорость света и т. п.

4. В задачах типа задачи 7 студенты часто путают перемещение $\Delta\overrightarrow{r}$ и путь тела S, а иногда считают, что речь идет об одной и той же величине. Поясним эти понятия на простом примере. Пусть тело подброшено вертикально вверх с начальной скоростью v_0 и находится в полете время t. За это время оно пройдет расстояние S_1 до наивысшей точки подъема и опустится вниз на расстояние S_2 (рис. 3). Тогда величиной перемещения является величина $\Delta r = S_1 - S_2$. В общем виде $\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t+\Delta t) - \overrightarrow{r}(t)$.

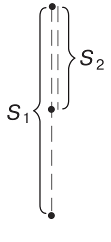


Рис. 3

Путь же тела складывается из пути максимального подъема S_1 и свободного падения S_2, т. е. $S = S_1 + S_2$.

5. Сравнительно большой класс задач в кинематике составляют задачи о переправе, когда известны какие-либо данные из набора: ширина и скорость течения реки, скорость передвижения пловца (лодки) относительно воды, а требуется найти либо минимальную скорость пловца (лодки) относительно воды, чтобы из точки A попасть в точку B, находящуюся на другом берегу, либо угол движения по направлению к течению, при котором пловца (лодку) снесет на минимальное расстояние.

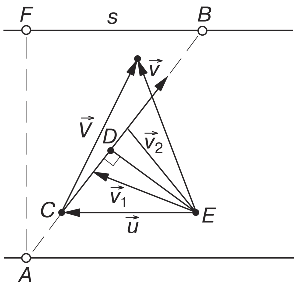


Рис. 4

Рассмотрим сначала движение лодки по реке с общих позиций. Для этого введем следующие обозначения: $\vec{v}$ — скорость лодки относительно воды, $\vec{u}$ — скорость течения реки. Тогда скорость лодки относительно берега

$$\vec{V} = \vec{v} + \vec{u}.$$

Как видно из рис. 4, лодка попадает из точки A в точку B, только если направление вектора $\vec{V}$ совпадет с направлением прямой AB, но это возможно при различных значениях вектора $\vec{v}$. Например, при значениях векторов $\vec{v} = \vec{v}_1$ или $\vec{v} = \vec{v}_2$. Однако из рисунка видно, что минимальное значение скорости $\vec{v}$ будет при условии, что треугольник CDE будет прямоугольным. Треугольники AFB и CDE подобны, поэтому можно записать

$$\frac{v_{\min}}{u} = \frac{l}{\sqrt{l^2 + S^2}} \quad \text{или} \quad v_{\min} = \frac{lu}{\sqrt{l^2 + S^2}}.$$

Интересна физическая интерпретация этого результата. Чтобы попасть из точки A в точку B, нам необходимо направить лодку перпендикулярно AB и обеспечить ее скорость движения относительно воды $\vec{v}_{\min}$. В результате за время движения лодку снесет на расстояние S, и она боком приблизится к намеченной цели.

Мы рассмотрели вопрос, с какой минимальной скоростью должна плыть лодка, чтобы из точки A на одном берегу попасть в точку B на другом. Теперь рассмотрим, на какое расстояние S снесет лодку при известном $|\vec{v}|$. Здесь возможны два случая: $v > u$ и $v < u$.

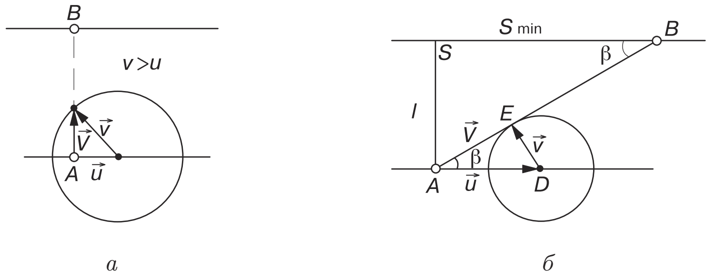


Рис. 5

В первом случае из конца вектора $\vec{u}$ проведем окружность с радиусом, равным $\vec{v}$ (рис. 5, *а*). Из рисунка видно, что лодка может причалить к любой точке противоположного берега и даже плыть против течения со скоростью $V = v - u$. Совсем другая картина наблюдается в случае $v < u$ (рис. 5, *б*).

Здесь на расстоянии ближе, чем $S_{\min}$, при определенном значении v причалить не удастся. Воспользовавшись подобием треугольников ABC и ADE, запишем

$$\frac{S_{\min}}{l} = \frac{V}{v} = \frac{\sqrt{u^2 - v^2}}{v}, \quad \text{откуда} \quad S_{\min} = \frac{l\sqrt{u^2 - v^2}}{v}.$$

Таким образом, мы связали все параметры движения лодки. Сообразите, куда может причалить лодка при $u = v$. Посмотрите внимательно решение задачи 4.

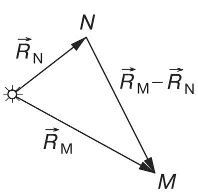


Рис. 6

Задачи к главе 1

Задача 1. Все звезды, в частности и некоторая звезда N_1, удаляются от Солнца со скоростями, пропорциональными их расстоянию до него. Как будет выглядеть эта картина с «точки зрения» звезды N?

Р е ш е н и е. Пусть радиус-вектор звезды N равен $\vec{R}_N$, а радиус-вектор звезды $M - \vec{R}_M$. Считая, что направления векторов скорости звезд совпадают с направлениями их радиусов-векторов и пропорциональны им, можно записать

$$\vec{v}_{NM} = \vec{v}_M - \vec{v}_n \sim \vec{R}_M - \vec{R}_N = \vec{R}_{MN},$$

где $\vec{v}_{NM}$ — вектор скорости звезды N относительно звезды M. Видно, что он пропорционален расстоянию между звездами, $|R_{MN}|$, т. е. с точки зрения наблюдателя, находящегося на звезде N, картина будет аналогичной, как, впрочем, и наблюдателя, находящегося на любой другой звезде.

Ответ: аналогично.

Задача 2. Точка прошла половину пути со скоростью v_0. На оставшейся части пути она половину времени двигалась со скоростью v_1, а последний участок прошла со скоростью v_2. Найти среднюю за все время движения скорость точки.

Решение. По определению средней скорости

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\,. \tag{17}$$

Весь путь точка прошла за время

$$\Delta t = \Delta t_0 + \Delta t_1, \tag{18}$$

где

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta r}{2v_0} \tag{19}$$

есть время прохождения первой половины пути, а Δt_1 — время прохождения второй, которое находится из условия

$$\frac{\Delta r}{2} = \frac{\Delta t_1 v_1}{2} + \frac{\Delta t_1 v_2}{2}\,,$$

откуда

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta r}{v_1 + v_2}\,. \tag{20}$$

Подставив (20) и (19) в (18), получим

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{2v_0} + \frac{\Delta r}{v_1 + v_2} = \Delta r\left[\frac{2v_0 + v_1 + v_2}{2v_0(v_1 + v_2)}\right].$$

Найдем среднюю скорость точки

$$\langle v \rangle = \frac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}\,.$$

Ответ: $\langle v \rangle = \dfrac{2v_0(v_1 + v_2)}{2v_0 + v_1 + v_2}$.

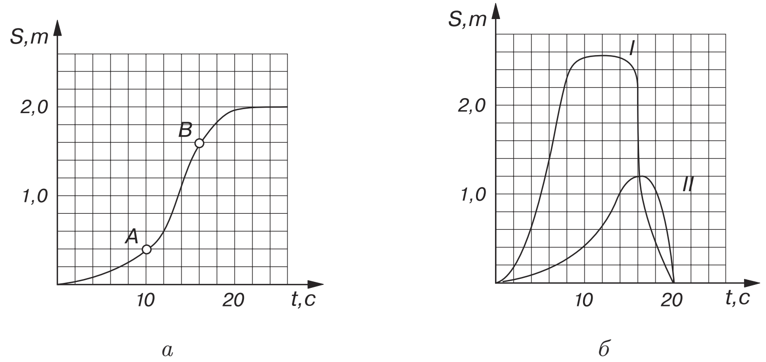


Рис. 7

Задача 3. Точка движется по прямой в одну сторону. На рис. 7, *а*, показан график пройденного ею пути в зависимости от времени t. Найти с помощью этого графика:

а) среднюю скорость точки за время движения;

б) максимальную скорость;

в) момент времени t_0, в который мгновенная скорость равна средней скорости за первые t_0 секунд.

Р е ш е н и е. а) Из рис. 7, *а*, видно, что через 20 с движение точки прекратилось: $\Delta r = S = \text{const} = 2$ м. Таким образом, средняя скорость точки

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t} = 10 \text{ см/с}.$$

б) Известно, что физическая интерпретация первой производной — скорость протекания какого-либо процесса — в нашем случае движения, а геометрическая — тангенс угла наклона, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси абсцисс. Напомним, что значение тангенса растет с увеличением величины угла. Из рис. 7, *а*, видно, что угол наклона максимален на участке AB. Учитывая, что цена деления по оси ординат 2 м, а по оси абсцисс 2 с, легко вычислить, что тангенс максимального угла наклона, а следовательно, и максимальная скорость равна 25 см/с.

в) Воспользовавшись рис. 7, *а*, построим зависимости мгновенной и средней скоростей от времени (соответственно, кривые I и II на рис. 7, *б*). Из рис. 7, *а*, следует, что мгновенная скорость растет в первые 10 с движения, достигает максимума и остается постоянной на интервале 10—15 с. Затем начинает снижаться и становится равной нулю при $t = 20$ с. Средняя же скорость достигает максимума при $t = 16$ с и начинает снижаться. Для нахождения времени (t_0) равенства средней и мгновенной скоростей построим обе эти кривые. Можно сделать это с помощью ПК. Из рис. 7, *б*, находим, что момент времени $t_0 = 16$ с.

Ответ: а) 10 см/с; б) 25 см/с; в) $t_0 = 16$ с.

Задача 4. Лодка движется относительно воды со скоростью, в $n = 2{,}0$ раза меньшей скорости течения реки. Под каким углом к направлению течения лодка должна держать курс, чтобы ее снесло течением как можно меньше?

Решение.

I способ

Сначала воспользуемся результатами, изложенными выше. Из рис. 8 сразу же следует:

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{v}{u} = \frac{1}{n},$$

$$\alpha = \arcsin\frac{1}{n},$$

$$\theta = \arcsin\frac{1}{n} + \frac{\pi}{2} = 120^\circ.$$

II способ

Попробуем решить задачу прямым способом.

Запишем координаты x и y для любого момента времени t:

$$x = (u - v\sin\alpha)t; \quad y = v\cos\alpha t.$$

Предположим, что лодка достигнет противоположного берега за время t_0. Тогда ее снесет на расстояние $S = (u - v\sin\alpha)t_0$.

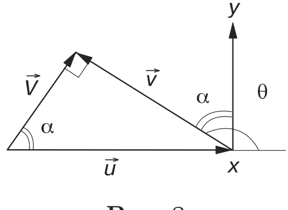


Рис. 8

Для ширины реки l можно записать

$$l = v \cos \alpha t_0,$$

откуда

$$t_0 = \frac{l}{v \cos \alpha}, \quad S = \frac{(u - v \sin \alpha) l}{v \cos \alpha}.$$

Для нахождения угла, под которым надо плыть лодке, чтобы ее снесло на минимальное расстояние, найдем экстремум функции $S(\alpha)$:

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = \left[\frac{(u - v \sin \alpha) l}{v \cos \alpha}\right]' =$$
$$= \frac{(ul - vl \sin \alpha)' v \cos \alpha - (v \cos \alpha)'(ul - vl \sin \alpha)}{v^2 \cos^2 \alpha} =$$
$$= \frac{-v^2 l \cos^2 \alpha + ulv \sin \alpha - v^2 l \sin^2 \alpha}{v^2 \cos^2 \alpha} = \frac{ulv \sin \alpha - v^2 l}{v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Приравнивая $\dfrac{dS(\alpha)}{d\alpha}$ к нулю, получаем

$$\frac{dS(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

при

$$u \sin \alpha - v = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{v}{u} = \frac{1}{n},$$

как и в первом способе.

О т в е т: $\theta = 120°$.

Задача 5. Две частицы, 1 и 2, движутся с постоянными скоростями $\overrightarrow{V}_1$ и $\overrightarrow{V}_2$. Их радиусы-векторы в начальный момент равны $\overrightarrow{r}_1$ и $\overrightarrow{r}_2$. При каком соотношении между этими четырьмя векторами частицы испытают столкновение друг с другом?

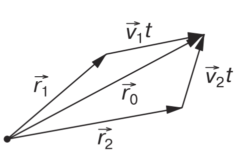


Рис. 9

Р е ш е н и е. Из рис. 9 следует, что условия столкновения можно записать в виде

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \vec{v}_1 t, \\ \vec{r}_0 = \vec{r}_2 + \vec{v}_2 t. \end{cases} \tag{21}$$

Решая систему уравнений (21), получаем

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = t(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Так как вектор $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ коллинеарен вектору $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$, то можно записать:

$$t = \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}.$$

Таким образом, условием столкновения двух частиц будет выполнение следующего соотношения:

$$\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}.$$

О т в е т: $\dfrac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \dfrac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}$.

Задача 6. Два шарика бросили одновременно из одной точки в горизонтальном направлении в противоположные стороны со скоростями $v_1 = 3{,}0$ м/с и $v_2 = 4{,}0$ м/с. Найти расстояние между шариками в момент, когда их скорости окажутся взаимно перпендикулярными.

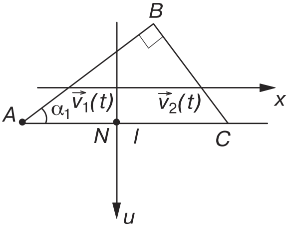


Рис. 10

Р е ш е н и е. Расположив систему координат, как показано на рис. 10, запишем уравнение движения шариков в параметрическом виде:

$$x(t) = vt; \quad y(t) = \frac{gt^2}{2}. \tag{22}$$

Отметим, что, поскольку координата y зависит только от t, в любой момент времени ординаты векторов $\vec{v}_1(t)$ и $\vec{v}_2(t)$ равны, а прямая l, искомое расстояние, будет параллельна оси абсцисс. Для прямоугольного треугольника ABC

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}\,; \quad \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\,.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}\,, \tag{23}$$

а также то, что $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не определен, т. е. знаменатель (23) равен нулю, получим:

$$1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2 = 0. \tag{24}$$

Поскольку геометрический смысл производной есть тангенс угла, образованного касательной к графику функции с положительным направлением оси абсцисс, а производная функции, заданной в параметрическом виде, равна

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\,,$$

где точкой обозначены производные функций по времени, дифференцируя (22), получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gt}{v}$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{dy}{dx_1} = -\frac{gt}{v_1}\,; \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{gt}{v_2}\,. \tag{25}$$

По условию задачи, шарики бросили в противоположные стороны, поэтому у dy/dx_1 появился знак «минус». Подставляя (25) в (24) и решая полученное уравнение относительно t, находим момент времени, когда векторы скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ окажутся взаимно перпендикулярными:

$$1 - \frac{g^2t^2}{v_1v_2} = 0,$$

откуда $t = \dfrac{\sqrt{v_1v_2}}{g}$.

Теперь вычислим расстояние l:

$$l = NA + NC = \frac{v_1\sqrt{v_1v_2}}{g} + \frac{v_2\sqrt{v_1v_2}}{g} = \frac{\sqrt{v_1v_2}}{g}\,(v_1 + v_2) = 2{,}5 \text{ м}.$$

О т в е т: $l = 2{,}5$ м.

Задача 7. Кабина лифта, у которой расстояние от пола до потолка 2,7 м, начала подниматься с ускорением $a = 1{,}2$ м/с^2. Через 2,0 с после начала подъема с потолка кабины стал падать болт.

Найти:

а) время свободного падения болта;

б) перемещение и путь болта за время свободного падения в системе отсчета, связанной с шахтой лифта.

Решение. а) Обозначим расстояние от пола до потолка лифта h, а ускорение болта в системе координат, связанной с лифтом, a'. Тогда $a' = g + a$, а время свободного падения болта t.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a'}} = 0{,}7 \text{ с.}$$

б) Учитывая, что ускорение болта относительно шахты равно g, перемещение Δr определим по формуле

$$\Delta r = v_0 t - \frac{gt^2}{2}\,,$$

где $v_0 = at_0$ — скорость движения лифта в момент отрыва болта, $t_0 = 2$ с — время отрыва болта. Таким образом,

$$|\Delta r| = \left| at_0 t - \frac{gt^2}{2} \right| = 0{,}7 \text{ м.}$$

Знак «минус» появляется из-за того, что начало координат расположено в точке отрыва болта, а в процессе движения болт оказывается ниже этой точки. Найдем теперь путь болта относительно шахты лифта. Как показано выше, он складывается из двух составляющих:

$$S = S_1 + S_2.$$

В нашем случае S_1 — величина максимального подъема болта относительно шахты. Болт будет подниматься до тех пор, пока величина gt_1 не станет равной v_0. Отсюда определяем время подъема болта t_1:

$$v_0 - gt_1 = 0, \quad t_1 = \frac{v_0}{t} = \frac{a}{g}\,t_0.$$

Теперь записываем формулу для расчета S_1:

$$S_1 = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{a^2 t_0^2}{g} - \frac{a^2 t_0^2}{2g} = \frac{a^2 t_0^2}{2g} \cong 0{,}3 \text{ м.}$$

В свободном падении болт будет находиться время t_2:

$$t_2 = t - t_1 = t - \frac{at_0}{g} = 0{,}46 \text{ с.}$$

Учитывая, что начальная скорость равна нулю,

$$S_2 = \frac{gt_2^2}{2} = 1 \text{ м.}$$

Отсюда $S \cong 1{,}3$ м.

О т в е т: 0,7 с; 0,3 м; 1,3 м.

Задача 8. Две частицы движутся с постоянными скоростями v_1 и v_2 по двум взаимно перпендикулярным прямым к точке их пересечения O. В момент $t = 0$ частицы находились на расстоянии l_1 и l_2 от точки O. Через сколько времени после этого расстояние между частицами станет наименьшим? Чему оно равно?

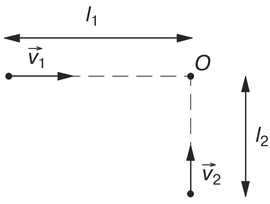


Рис. 11

Р е ш е н и е. В момент, когда расстояние между частицами станет наименьшим l_m, расстояния каждой из частиц до точки O будут равны $l_1 - v_1 t_m$ и $l_2 - v_2 t_m$, а расстояние между ними (рис. 11)

$$l(t) = \sqrt{(l_1 - v_1 t_m)^2 + (l_2 - v_2 t_m)^2}. \tag{26}$$

Исследуем функцию $l(t)$ на экстремум. Для этого возьмем первую производную и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dl(t)}{dt} = \frac{[(l_1 - v_1 t_m)^2 + (l_2 - v_2 t_m)^2]'}{2\sqrt{(l_1 - v_1 t_m)^2 + (l_2 - v_2 t_m)^2}} =$$

$$= -\frac{2v_1(l_1 - v_1 t_m) + 2v_2(l_2 - v_2 t_m)}{2\sqrt{(l_1 - v_1 t_m)^2 + (l_2 - v_2 t_m)^2}} = 0.$$

Дробь равна нулю, когда ее числитель равен нулю. Поэтому

$$v_1(l_1 - v_1 t_m) + v_2(l_2 - v_2 t_m) = 0.$$

Решая полученное уравнение относительно t_m, находим

$$t_m = \frac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\,. \tag{27}$$

Для нахождения наименьшего расстояния l_m подставляем (27) в (26) и, производя несложные преобразования, получаем выражение для l_m:

$$l_m = \frac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\,.$$

Ответ: $t_m = \dfrac{l_1 v_1 + l_2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$; $l_m = \dfrac{|l_1 v_2 - l_2 v_1|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

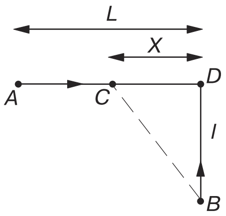


Рис. 12

Задача 9. Из пункта A, находящегося на шоссе (рис. 12), необходимо за кратчайшее время попасть на машине в пункт B, расположенный в поле на расстоянии l от шоссе. На каком расстоянии от точки D следует свернуть с шоссе, если скорость машины по полю в η раз меньше ее скорости по шоссе?

Решение. Время прихода машины из пункта A в B складывается из времени прохождения участка $AC(t_1)$ и времени прохождения участка $CB(t_2)$. Таким образом, общее время t

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L-x}{v} + \frac{\eta\sqrt{x^2+l^2}}{v} = \frac{L - x + \eta\sqrt{x^2+l^2}}{v}\,.$$

Исследуем функцию $t(x)$ на экстремум. Для этого приравняем нулю $\dfrac{dt}{dx}$:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{-\sqrt{x^2+l^2} + \eta x}{v\sqrt{x^2+l^2}} = 0,$$

откуда

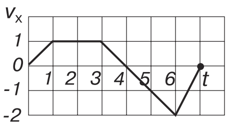
$$\eta x = \sqrt{x^2+l^2}$$

или

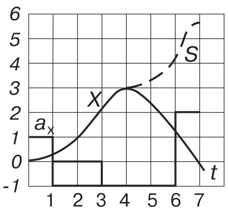
$$\eta^2 x^2 - x^2 = l^2, \quad x = \frac{l}{\sqrt{\eta^2 - 1}}\,.$$

Ответ: $x = \dfrac{l}{\sqrt{\eta^2-1}}$.

Задача 10. Точка движется вдоль оси x со скоростью, проекция которой v_x как функция времени описывается графиком на рис. 13, *а*. В момент $t = 0$ координата точки $x = 0$. Изобразить примерные графики зависимостей ускорения a_x, координаты x и пройденного пути S от времени.



а



б

Рис. 13

Р е ш е н и е. Согласно (3), $\overrightarrow{a} = d\overrightarrow{v}/dt$ или в скалярном виде по условию задачи $a_x = dv_x/dt$. По аналогии с геометрической интерпретацией скорости как первой производной пути по времени, ускорение представляет собой тангенс угла, образованного касательной к графику функции $v_x = f(t)$ (в нашем случае $v_x(t)$ представляет собой отрезки прямых линий) с положительным направлением оси абсцисс.

Из рис. 13, *а*, видно, что на участке от $t = 0$ до $t = 1$ ускорение положительно и равно единице, затем на участке $t = 1$ до $t = 3$ оно становится равным нулю, а v_x постоянна. На участке $t = 3$ до $t = 6$ ускорение меняет знак и становится равным минус единице, а в точке $t = 4$ скорость меняет направление на противоположное. В точке $t = 6$ ускорение опять меняет знак, становится равным двум, а в точке $t = 7$ движение вдоль оси x прекращается.

Геометрической интерпретацией пройденного пути в координатах t; v_x является площадь, ограниченная линией v_x и осью x, причем все численные значения площадей берутся по модулю, т. е.

$$S_x = |S_1| + |S_2|,$$

где S_x — общий путь, пройденный вдоль оси x; S_1 — путь, пройденный на участке от $t = 0$ до $t = 4$; S_2 — путь, пройденный на участке $t = 4$ до $t = 7$.

Воспользовавшись формулами для площадей трапеции и прямоугольника либо подсчитав число квадратов на рис. 13, *а*, находим, что $S_x = 6$. С учетом знаков площадей получаем, что перемещение точки $\Delta r_x = 0$, однако это не означает, что точка вернулась к началу движения, хотя исключить такую возможность нельзя, так как из условия задачи нам неизвестны ни координаты начала движения точки, ни зависимости v_y и v_z от t.

Ответ: см. рис. 13, *б*.

Задача 11. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{x}$, где α — положительная постоянная. В момент $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$. Найти:

а) ее скорость и ускорение как функцию времени;

б) среднюю скорость за время, в течение которого она пройдет первые S метров пути.

Решение. а) $v = \dfrac{dx}{dt} = \alpha\sqrt{x}$, откуда

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \alpha\, dt.$$

Интегрируя, возводя обе части уравнения в квадрат и решая полученное уравнение относительно x, находим

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4} + C.$$

Используя начальные условия $x = 0$ при $t = 0$, получаем $C = 0$. Таким образом,

$$x = \frac{\alpha^2 t^2}{4}.$$

Согласно (1),

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= \frac{\alpha^2}{2}\, t, \\ a = \ddot{x} &= \frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned} \tag{28}$$

б) Используем определение среднего вектора скорости

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{S}}{\Delta t}$$

или в скалярной форме

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \tag{29}$$

где $\Delta S = \dfrac{a\Delta t^2}{2}$, с учетом (28)

$$\Delta S = \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{4},$$

откуда

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{S}}{\alpha}\,. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (29), находим

$$\langle v\rangle = \frac{\alpha}{2}\sqrt{S}.$$

О т в е т: а) $v = \dfrac{\alpha^2 t}{2}$; $a = \dfrac{\alpha^2}{2}$; б) $\langle v\rangle = \dfrac{\alpha}{2}\sqrt{S}$.

Задача 12. Точка движется в плоскости xy по закону $x = \alpha t$, $y = \beta t^2$, где α и β — положительные постоянные.

Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$ и ее график;
б) модули скорости и ускорения точки как функцию t;
в) угол φ между векторами $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{v}$ как функцию t.

Р е ш е н и е. а)

$$x = \alpha t; \tag{31}$$

$$y = \beta t^2. \tag{32}$$

Из (31) находим t и, подставляя в (32), получаем уравнение траектории

$$y = \frac{\beta x^2}{\alpha^2}\,.$$

Поскольку $\beta > 0$, траектория представляет из себя параболу, направленную ветвями вверх и проходящую через начало координат (рис. 14, *а*).

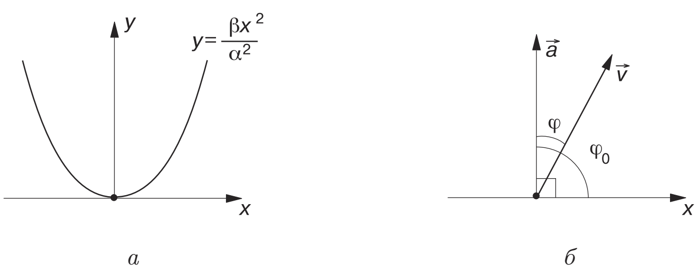


Рис. 14

б) $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = 2\beta t$, $\ddot{x} = 0$; $\ddot{y} = 2\beta$. Согласно (8),

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2},$$
$$\alpha = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 2\beta.$$

в) Тангенс угла между вектором $\overrightarrow{v}$ и положительным направлением оси абсцисс равен

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{2\beta t}{\alpha}.$$

Составляющая вектора ускорения по оси x равна нулю, следовательно, $\overrightarrow{\ddot{x}}$ параллелен оси y. Таким образом, угол φ между $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{v}$ равен $\varphi = 90 - \varphi_0$ (рис. 14, *б*) или

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(90^\circ - \varphi_0) = \operatorname{ctg}\varphi_0 = \frac{\alpha}{2\beta t}.$$

О т в е т: а) $y = \dfrac{\beta}{\alpha^2}x^2$; б) $v = \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2 t^2}$; $\alpha = 2\beta$; в) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\alpha}{2\beta t}$.

Задача 13. Частица движется в плоскости xy с постоянным ускорением $\overrightarrow{a}$, противоположным положительному направлению оси y. Уравнение траектории частицы имеет вид $y = \alpha x - \beta x^2$, где α и β — положительные постоянные. Найти скорость v_0 частицы в начале координат.

Р е ш е н и е. Для любого момента времени движения частицы можно записать (рис. 15)

$$v_x = v_0 \cos\varphi, \quad v_y = v_0 \sin\varphi - at.$$

Далее

$$v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 = v_0^2 - 2v_0 \sin\varphi at + a^2 t^2.$$

Отсюда находим

$$v_0 = \frac{at}{2\sin\varphi}. \tag{33}$$

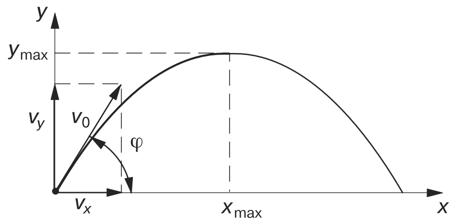


Рис. 15

Найдем величину t_m времени подъема на максимальную высоту из равенства нулю первой производной y' в высшей точке траектории

$$y' = (\alpha x - \beta x^2)' = \alpha - 2\beta x = 0.$$

Откуда находим координату $x_{\max} = \dfrac{\alpha}{2\beta}$ высшей точки подъема частицы.

Затем, подставляя значение $x_{\max}$ в уравнение траектории, из условия задачи находим координату $y_{\max}$:

$$y_{\max} = \frac{\alpha^2}{2\beta} - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{\alpha^2}{4\beta}\,. \tag{34}$$

Для $y_{\max}$ можно записать

$$y_{\max} = \frac{at_m^2}{2}\,.$$

Откуда с учетом (34) получаем

$$t_m = \sqrt{\frac{2y_{\max}}{a}} = \alpha\sqrt{\frac{1}{2a\beta}}. \tag{35}$$

Теперь для нахождения скорости частицы в начале координат остается определить $\sin\varphi$, где φ — угол наклона вектора $\overrightarrow{v_0}$ к положительному направлению оси X. Поскольку $y'(0) = \alpha$, воспользуемся известным соотношением

$$\sin\varphi = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\,.$$

Подставляя в это выражение значение $y'(0)$, находим выражение для $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2}}\,. \tag{36}$$

Подставляя в (33) $t = t_m$, т. е. (35), и $\sin\varphi$, т. е. (36), производя несложные преобразования, находим

$$v_0 = \sqrt{\frac{a(1 + \alpha^2)}{8\beta}}.$$

О т в е т: $v_0 = \sqrt{\dfrac{a(1 + \alpha^2)}{8\beta}}$.

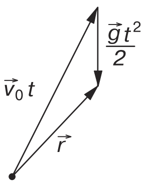


Рис. 16

Задача 14. Небольшое тело бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$.

Найти:

а) перемещение тела как функцию времени, $\vec{r}(t)$;

б) средний вектор скорости за первые t секунд и за все время движения.

Р е ш е н и е. а) Из рис. 16 видно, что в любой момент времени

$$\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}\,. \tag{37}$$

б) По определению средний вектор скорости

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\,.$$

С учетом (37) средний вектор скорости за первые t секунд

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_0 + \frac{\vec{g}t}{2}\,. \tag{38}$$

Для определения среднего вектора скорости за все время движения учтем, что полное время складывается из времени подъема тела на максимальную высоту и времени падения с максимальной высоты на Землю. Очевидно, что эти времена равны и мы можем записать

$$t = t_{\text{подъема}} + t_{\text{спуска}} = 2t_{\text{подъема}}, \tag{39}$$

где t — время полета тела.

Время подъема (спуска) найдем из условия минимальной скорости изменения вектора $\vec{r}$. Понятно, что это условие будет выполняться в точке максимальной высоты подъема, так как в этой точке $\vec{r}$ параллелен оси X. Поэтому, вычисляя производную по времени от величины $\vec{r}$ и приравнивая ее нулю, находим, что время подъема (спуска) с учетом того, что время — величина скалярная, равно

$$t_{\text{подъема}} = -\frac{(\vec{v}_0\,\vec{g})}{g^2}\,.$$

Определяем время нахождения тела в полете по формуле (39):

$$t = -\frac{2(\vec{v}_0\,\vec{g})}{g^2}\,. \tag{40}$$

Находим средний вектор скорости за все время полета, подставляя (40) в (38) и учитывая, что $(\vec{g}\,\vec{v}_0)$ скаляр,

$$\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_0 - \frac{\vec{g}\,(\vec{v}_0\,\vec{g})\,\vec{g}}{g^2}\,.$$

Ответ: а) $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \dfrac{\vec{g}\,t^2}{2}$; б) $\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{g}\,t}{2}$, $\langle\vec{v}\rangle = \vec{v}_0 - \dfrac{\vec{g}\,(\vec{v}_0\,\vec{g})}{g^2}$.

Задача 15. Шарик падает с нулевой начальной скоростью на гладкую наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Пролетев расстояние h, он упруго отразился от плоскости. На каком расстоянии от места падения шарик отразится второй раз?

Решение. Расположим систему координат так, чтобы ее начало находилось в месте первого соприкосновения тела с наклонной плоскостью, ось OX направлена вдоль наклонной плоскости, а ось OY перпендикулярно ей (рис. 17).

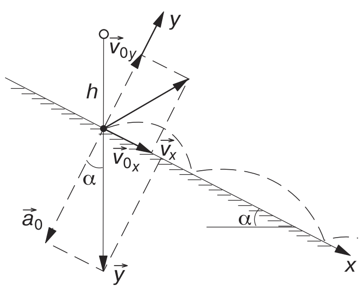


Рис. 17

Начальная скорость v_0 после соударения равна

$$v_0 = \sqrt{2gh}, \tag{41}$$

и вектор $\overrightarrow{v}_0$ образует угол α с осью OY.

Уравнение движения тела по оси OY представляет собой следующее выражение:

$$y = v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}, \tag{42}$$

где

$$v_{0y} = v_0 \cos\alpha$$

и

$$a_y = -g\cos\alpha. \tag{43}$$

В момент падения тела на наклонную плоскость $y = 0$. Подставляя $y = 0$ в (42) и учитывая (41) и (43), находим

$$t = \frac{2v_{0y}}{a_y} = \frac{2\sqrt{2gh}}{g}. \tag{44}$$

Обратите внимание на неочевидный результат — время полета шарика между двумя отражениями от плоскости не зависит от угла ее наклона и всегда постоянно.

Теперь по формуле

$$l = v_{0x}t + \frac{a_{0x}t^2}{2},$$

учитывая, что $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$, $a_{0x} = g\sin\alpha$, а также (41) и (44), определяем

$$l = 8h\sin\alpha.$$

О т в е т: $l = 8h\sin\alpha$.

Задача 16. Тело бросили с поверхности Земли под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0. Найти:

а) время движения;

б) максимальную высоту подъема и горизонтальную дальность полета; при каком α они равны друг другу;

в) уравнение траектории $y(x)$, где y и x — перемещение тела по вертикали и горизонтали соответственно.

Р е ш е н и е. а) Начнем решение задачи с нахождения проекций вектора начальной скорости $\overrightarrow{v}_0$ и вектора ускорения $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{g}$ на оси OX и OY, а затем составим уравнения движения вдоль каждого направления. Поместим начало координат в точку броска

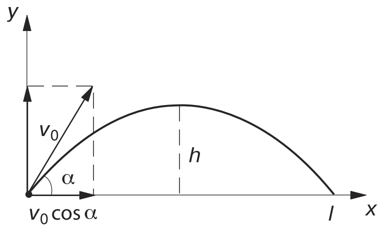


Рис. 18

(рис. 18), а ось OY направим параллельно вектору ускорения свободного падения $\overrightarrow{g}$.

Тогда $a_x = 0$; $a_y = -g$.

Поскольку сила трения о воздух не учитывается, то, согласно первому закону Ньютона, вдоль оси OX тело будет двигаться прямолинейно и равномерно, а вдоль оси OY первую половину пути равнозамедленно, а вторую половину — равноускоренно.

Поэтому можем записать

$$x = v_0(\cos\alpha)t, \tag{45}$$

$$y = v_0(\sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \tag{46}$$

На максимальной высоте, которую может достичь тело, $v_y = 0$. Исходя из этого найдем время подъема

$$v_y = \dot{y} = v_0 \sin\alpha - gt_{\text{под.}} = 0; \quad t_{\text{под.}} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{47}$$

Затем определим время движения тела — τ:

$$\tau = 2t_{\text{под.}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}. \tag{48}$$

б) Максимальную высоту подъема найдем, подставив (47) в (46):

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \tag{49}$$

Горизонтальную дальность полета определяем, подставив (48) в (45):

$$l = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \tag{50}$$

Для нахождения угла α, при котором $h = l$, приравниваем (49) и (50):

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

Заменяя

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

и производя несложные преобразования, вычисляем α:

$$\sin \alpha = 0{,}97,$$
$$\alpha = \arcsin 0{,}97 \cong 76^\circ.$$

в) Для нахождения уравнения траектории из (45) выражаем t:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

и, подставляя полученное выражение в (47), получаем искомое уравнение:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2.$$

Видно, что траектория представляет собой параболу, направленную ветвями вниз и проходящую через начало координат.

Задачу можно решить в обратном порядке. Сначала получить уравнение траектории. Затем взять первую производную, приравнять ее нулю и решить полученное уравнение относительно x. Это значение x будет соответствовать координате $x_{\max}$, при которой высота подъема $h_{\max}$ максимальна. Подставляя выражение для $x_{\max}$ в (46), определим время подъема на высоту $h_{\max}$. Затем выражение для $t_{\text{под.}}$ подставим в (47) и найдем $h_{\max}$. Горизонтальную дальность полета найдем из выражения

$$l = 2v_0(\cos \alpha)\tau,$$

где $\tau = 2t_{\text{под.}}$

Затем из условия $h = l$ находим угол α. Предоставляем читателю возможность решить задачу вторым способом самостоятельно.

Ответ: а) $\tau = \dfrac{2v_0 \sin \alpha}{g}$; б) $h = \dfrac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$; $l = \dfrac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$; $\alpha = 76^\circ$; в) $y = x \operatorname{tg} \alpha - \dfrac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}\, x^2$.

Задача 17. Пушка и цель находятся на одном уровне на расстоянии 5,1 км друг от друга. Через сколько времени снаряд с начальной скоростью 240 м/с достигнет цели?

Решение. Проводя рассуждения, аналогичные задаче 15 (рис. 18), записываем:

$$2v_0 \cos \alpha t = l, \tag{51}$$

$$v_0 \sin \alpha = gt. \tag{52}$$

Из (52) находим:

$$\sin \alpha = \frac{gt}{v_0}, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{v_0^2 - g^2 t^2}}{v_0}. \tag{53}$$

Подставляя (53) в (51), получаем:

$$2t\sqrt{v_0^2 - g^2 t^2} = l.$$

Возводим обе части в квадрат, далее подставляем численные значения v_0, g и l и приходим к уравнению

$$4t^4 - 2400t^2 + 27 \cdot 10^4 = 0.$$

После обозначения $t^2 = x$ уравнение приобретает вид:

$$4x^2 - 2400x + 27 \cdot 10^4 = 0.$$

Находим сначала x, а затем t:

$$x_1 = 449; \quad t_1 \approx 21 \text{ с} \approx 0{,}35 \text{ мин};$$

$$x_2 = 151; \quad t_2 = 12 \text{ с} \approx 0{,}2 \text{ мин}.$$

Памятуя о том, что, как и в задаче 15, t_1 и t_2 — это время подъема снаряда на максимальную высоту ($t_{\text{под.}}$), а время достижения снарядом цели (τ) будет в два раза большим, получим: $\tau_1 \approx 0{,}7$ мин; $\tau_2 \approx 0{,}4$ мин.

Ответ: $\tau_1 \approx 0{,}7$ мин; $\tau_2 \approx 0{,}4$ мин в зависимости от начального угла.

Задача 18. Из пушки выпустили последовательно два снаряда со скоростью $v_0 = 250$ м/с; первый под углом $\theta_1 = 60^\circ$ к горизонту, второй под углом $\theta_2 = 45^\circ$ (азимут один и тот же). Найти интервал времени между выстрелами, при котором снаряды столкнутся друг с другом.

Решение. В момент столкновения снарядов их координаты равны, т. е. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, а $\Delta t = t_1 - t_2$, где x_1, x_2, y_1, y_2 —

координаты первого и второго снарядов, а t_1 и t_2 — время полета первого и второго снарядов соответственно.

С учетом результатов решения задачи 15 записываем

$$x_1 = v_0 \cos\theta_1 t_1, \tag{54}$$

$$x_2 = v_0 \cos\theta_2 t_2, \tag{55}$$

$$y_1 = v_0 \sin\theta_1 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \tag{56}$$

$$y_2 = v_0 \sin\theta_2 t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \tag{57}$$

Приравнивая (54) и (55), (56) и (57), получаем:

$$\cos\theta_1 t_1 = \cos\theta_2 t_2, \tag{58}$$

$$v_0(\sin\theta_1 t_1 - \sin\theta_2 t_2) = \frac{g}{2}(t_1^2 - t_2^2). \tag{59}$$

Из (58) следует:

$$t_2 = \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} t_1. \tag{60}$$

Перепишем (59) с учетом того, что $\Delta t = t_1 - t_2$

$$v_0(\sin\theta_1 t_1 - \sin\theta_2 t_2) = \frac{g}{2}\Delta t(t_1 + t_2). \tag{61}$$

Подставляя (60) в (61), произведем алгебраические преобразования и, учитывая, что $\cos\theta_2 \neq 0$, находим

$$\Delta t = \frac{2v_0 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{g(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)} = 11 \text{ с}.$$

О т в е т: $\Delta t = 11$ с.

Задача 19. Частица движется в плоскости XY со скоростью

$$\vec{V} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j},$$

где $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — орты осей X и Y, α и β — положительные постоянные. В начальный момент частица находилась в начале координат. Найти:

а) уравнение траектории частицы $y(x)$;

б) радиус кривизны траектории как функцию x.

Р е ш е н и е. а) Запишем уравнения движения частицы в координатной форме. Из условия задачи следует, что

$$v_x = \dot{x} = \alpha. \tag{62}$$

Интегрируя (62), находим

$$x = \alpha t + C_1.$$

По условию задачи при $t = 0$ $x = 0$; следовательно, $C_1 = 0$, т. е.

$$x = \alpha t, \tag{63}$$

$$v_y = \dot{y} = \beta x = \alpha\beta t. \tag{64}$$

Далее, интегрируя уравнение (64), получаем:

$$y = \frac{\alpha\beta t^2}{2} + C_2.$$

Из начальных условий следует, что C_2 также равна нулю, т. е.

$$y = \frac{\alpha\beta t^2}{2}\,. \tag{65}$$

Выражая из (63)

$$t = \frac{x}{\alpha}$$

и подставляя в (65), приходим к уравнению траектории движения частицы

$$y = \frac{\beta}{2\alpha}\,x^2, \tag{66}$$

которая, как видим, представляет из себя параболу.

б) **I способ**

Радиус кривизны будем искать из соотношений

$$a_n = \frac{v^2}{R}\,, \quad R = \frac{v^2}{a_n}\,, \tag{67}$$

где нормальное ускорение a_n, которое мы находим из (13),

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2},$$

a и a_τ — полное и тангенциальное ускорение; v — скорость движения частицы; R — радиус кривизны.

Направление тангенциального ускорения совпадает с направлением скорости, поэтому, дифференцируя модуль скорости по t, находим a_τ

$$a_\tau = \frac{d}{dt}\sqrt{\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 t^2} = \frac{\alpha\beta^2 t}{\sqrt{1+\beta^2 t^2}}\,. \tag{68}$$

По условию задачи требуется определить кривизну траектории в зависимости от координаты x, поэтому в (68) произведем замену

$$t = \frac{x}{\alpha}\,,$$

после чего получаем

$$a_\tau = \frac{\alpha\beta^2 x}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2 x^2}}\,. \tag{69}$$

Полное ускорение a находим из (8):

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \tag{70}$$

Дифференцируя (63) и (65) дважды по времени и подставляя результаты в (70), находим

$$a = \alpha\beta. \tag{71}$$

Теперь, зная полное и тангенциальное ускорения, справедливо:

$$a_n = \sqrt{\alpha^2\beta^2 - \frac{\alpha^2\beta^4 x^2}{\alpha^2+\beta^2x^2}} = \alpha\beta\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2x^2-\beta^2x^2}{\alpha^2+\beta^2x^2}} = \frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2 x}}\,.$$

Запишем выражение для квадрата модуля скорости с учетом (8), (62) и (64), заменив $t = \dfrac{x}{\alpha}$.

Получаем

$$v^2 = \alpha^2 + \beta^2 x^2.$$

Далее

$$R = \frac{v^2}{\alpha_n} = \frac{(\alpha^2+\beta^2x^2)(\alpha^2+\beta^2x^2)^{1/2}}{\alpha^2\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\left[1+\left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2\right]^{3/2}.$$

II способ

Можно вычислить R проще, если из курса аналитической геометрии вспомнить формулу для радиуса кривизны

$$R = \frac{[1 - (y')^2]^{3/2}}{y''}\,. \tag{72}$$

Беря первую и вторую производные выражения (67)

$$y' = \frac{\beta}{\alpha}\,x, \quad y'' = \frac{\beta}{\alpha}$$

и подставляя полученные производные в (72), находим

$$R = \frac{\alpha}{\beta}\left[1 + \left(\frac{\beta x}{\alpha}\right)^2\right]^{3/2}.$$

О т в е т: а) $y = \dfrac{\beta}{2\alpha}\,x^2$; б) $R = \dfrac{\alpha}{\beta}\left[1 + \left(\dfrac{\beta x}{\alpha}\right)^2\right]^{3/2}$.

Задача 20. Точка движется, замедляясь, по окружности радиуса R так, что в каждый момент ее тангенциальное и нормальное ускорения одинаковы по модулю. В момент $t = 0$ скорость точки равна v_0. Найти зависимость:

а) скорости точки от времени и пройденного пути;

б) полного ускорения точки от v и s.

Р е ш е н и е. а) В условиях задачи сказано, что точка, двигаясь по окружности, замедляется, следовательно, $\vec{a}_\tau$ и $\vec{v}$ направлены в противоположные стороны, т. е.

$$a_\tau = -\dot{v} = \frac{v^2}{R}\,,$$

$$-\frac{dv}{dt} = \frac{v^2}{R}\,.$$

Решая это уравнение методом разделения переменных, находим

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + C.$$

Из начальных условий определяем

$$C = \frac{1}{v_0}\,.$$

Уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{v} = \frac{t}{R} + \frac{1}{v_0}$$

или

$$v = \frac{Rv_0}{R + v_0 t} = \frac{v_0}{1 + (v_0 t/R)}\,.$$

Для получения зависимости скорости движения точки от пройденного пути запишем дифференциал скорости с учетом того, что точка движется с замедлением, и $a_n = a_\tau$:

$$dv = -a_\tau\,dt = -a_n\,dt = -\,\frac{v^2}{R}\,dt = -\,\frac{v}{R}\,dS,$$

где $dS = v\,dt$.

Интегрируя полученное уравнение методом разделения переменных и определяя из начальных условий $C = v_0$, приходим к уравнению

$$v = v_0 e^{-S/R}. \tag{73}$$

б) Зависимость полного ускорения точки от v найдем, используя формулу для полного ускорения и равенство тангенциального и нормального ускорений:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{v^4}{R^2} + \frac{v^4}{R^2}} = \frac{\sqrt{2}v^2}{R}\,.$$

Для определения зависимости полного ускорения от пройденного пути опять воспользуемся равенством $a_\tau = a_n$ и выражением (73):

$$a_\tau = a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2 e^{-2S/R}}{R}\,.$$

Тогда

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \frac{\sqrt{2}v_0^2}{Re^{2S/R}}\,.$$

О т в е т: а) $v = v_0 e^{-S/R}$; б) $a = \dfrac{\sqrt{2}v_0^2}{Re^{2S/R}} = \dfrac{\sqrt{2}v^2}{R}$.

Задача 21. Точка движется по дуге окружности радиусом R. Ее скорость $v \sim \sqrt{S}$, где S — пройденный путь. Найти угол между векторами скорости и полного ускорения как функцию S.

Р е ш е н и е. Из рис. 19 ясно, что $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a_n}{a_\tau}$,

$$a_n = \frac{v^2}{R} \sim \frac{S}{R}\,. \tag{74}$$

Поскольку $v_\tau = v$,

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS}\,\frac{dS}{dt} = \frac{dv}{dS}\,v.$$

По условию задачи $v \sim \sqrt{S}$, тогда

$$\frac{dv}{dS} \sim \frac{1}{2\sqrt{S}}\,,$$

а $a_\tau = 1/2$. С учетом (74)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{S}{2R}\,.$$

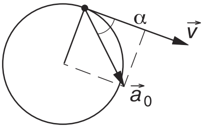


Рис. 19

О т в е т: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{S}{2R}$.

Задача 22. Колесо вращается вокруг неподвижной оси так, что угол φ его поворота зависит от времени как $\varphi = \beta t^2$, где $\beta = 0{,}20$ рад/с^2. Найти полное ускорение a точки A на ободе колеса в момент $t = 2{,}5$ с, если скорость точки A в этот момент $v = 0{,}65$ м/с.

Р е ш е н и е. По определению (14) и (16),

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\beta t,$$

$$v = \omega R.$$

Из этих соотношений находим радиус колеса

$$R = \frac{v}{2\beta t}\,.$$

Далее находим нормальное и тангенциальное ускорения:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 2\beta v t,$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = R\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{v}{2\beta t}\,2\beta = \frac{v}{t}\,.$$

Теперь, используя полученные результаты, легко найти полное ускорение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v}{t}\right)^2 + (2\beta vt)^2} = \frac{v}{t}\sqrt{1 + (2\beta t^2)^2} = 0{,}7 \text{ м/с}^2.$$

О т в е т: $a = 0{,}7$ м/с^2.

Задача 23. Точка A находится на ободе колеса радиусом $R = 0{,}50$ м, которое катится без скольжения по горизонтальной поверхности со скоростью $v = 1{,}00$ м/с. Найти:

а) модуль и направление ускорения точки A;

б) полный путь S, проходимый точкой A между двумя последовательными моментами ее касания поверхности.

Р е ш е н и е. а) При решении этой задачи полезно вспомнить, что в курсе аналитической геометрии траектория любой точки колеса, которое катится без проскальзывания по прямой, называется циклоидой. Обратим внимание на два факта, которые очень облегчат нам решение задачи:

— траектория любой точки на ободе колеса представляет собой циклоиду независимо от характера движения: равномерное оно, равноускоренное либо равнозамедленное — лишь бы качение осуществлялось без проскальзывания. Для простоты будем рассматривать равномерное движение;

— в любой инерционной системе отсчета материальная точка имеет одно и то же ускорение.

Следовательно, ускорение любой точки на ободе колеса, связанное только с его вращением вокруг оси, будет направлено по радиусу к центру колеса и определится выражением

$$a_A = \frac{v^2}{R} = 2 \text{ м/с}^2, \tag{75}$$

так как в высшей точке циклоиды линейная скорость движения точки A совпадает по величине и направлению со скоростью движения центра колеса v. Вообще же в любой точке колеса ее линейная скорость движения совпадает по модулю со скоростью движения центра колеса, а различается лишь направлением своего вектора, за исключением верхней точки (рис. 20).

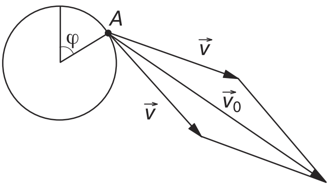


Рис. 20

Из приведенных рассуждений легко определить радиус кривизны циклоиды. Результирующий вектор скорости v_0 представляет собой векторную сумму скорости поступательного движения колеса и линейной скорости вращения вокруг оси. В верхней точке

$$v_0 = 2v \tag{76}$$

и

$$a = \frac{v_0^2}{\rho}\,, \tag{77}$$

где ρ — радиус кривизны циклоиды.

Приравнивая (75) и (77), с учетом (76) получаем

$$\rho = 4R.$$

Радиус кривизны циклоиды можно вычислить и вторым способом, так же как и в задаче 19. Предоставляем читателю сделать это самому.

б) Результирующий вектор скорости найдем с помощью теоремы косинусов и с учетом соотношений

$$\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos\varphi; \quad v_0 = \omega R; \quad \varphi = \omega t; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}\,.$$

Тогда, записывая теорему косинусов, получаем:

$$v_0 = \sqrt{2v^2 - 2v^2\cos(180^\circ - \varphi)} = \sqrt{2\omega^2R^2 + 2\omega^2R^2\cos\omega t} =$$
$$= \omega R\sqrt{2(1+\cos\omega t)} = 2\omega R\cos\frac{\omega t}{2}\,;$$

$$S = \int_0^T v_0\,dt = 2\int_0^{T/2} v_0\,dt = 4R\int_0^{T/2}\cos\frac{\omega t}{2}\,\frac{\omega}{2}\,dt = 8R,$$

где учтено, что $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

О т в е т: а) $a_A = v^2/R = 2{,}0$ м/с^2, вектор $\overrightarrow{a}_A$ направлен все время к центру колеса; б) $S = 8R = 4{,}0$ м.

Задача 24. Твердое тело вращается с угловой скоростью

$$\overrightarrow{\omega} = ati + bt^2\overrightarrow{j},$$

где $a = 5{,}0$ рад/с^2, $\overrightarrow{i}$ и $\overrightarrow{j}$ — орты осей X и Y. Найти угол α между векторами углового ускорения $\overrightarrow{\beta}$ и $\overrightarrow{\omega}$ в момент, когда $\beta = 10{,}0$ рад/с^2.

Р е ш е н и е. По определению скалярного произведения,

$$(\overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{\beta}) = a^2t + 2b^2t^3 = |\overrightarrow{\omega}||\overrightarrow{\beta}|\cos\alpha,$$

где

$$\dot{\overrightarrow{\omega}} = \overrightarrow{\beta} = a\overrightarrow{i} + 2bt\overrightarrow{j},$$
$$|\overrightarrow{\omega}| = \sqrt{a^2t^2 + b^2t^4},$$
$$|\overrightarrow{\beta}| = \sqrt{a^2 + 4b^2t^2}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{\omega}\,\overrightarrow{\beta})}{|\overrightarrow{\omega}||\overrightarrow{\beta}|} = \frac{a^2t + 2b^2t^3}{\sqrt{a^2t^2 + b^2t^4}\,\sqrt{a^2 + 4b^2t^2}} = \frac{a^2 + 2b^2t^2}{\sqrt{a^2 + b^2t^2}\beta} =$$
$$= \frac{2a^2 + 4b^2t^4}{\beta\sqrt{4a^2 + 4b^2t^2}} = \frac{a^2 + a^2 + 4b^2t^2}{\beta\sqrt{3a^2 + a^2 + 4b^2t^2}} = \frac{a^2 + \beta^2}{\beta\sqrt{3a^2 + \beta^2}},$$

откуда $\alpha = 19^\circ$.

О т в е т: $\alpha = 19^\circ$.

Глава 2

Основное уравнение динамики

В предыдущей главе мы учились описывать движение, не рассматривая, чем оно обусловлено. Динамика изучает движение тел в связи с теми причинами, которые вызывают это движение. Вся классическая механика базируется на трех законах, сформулированных Ньютоном.

Первый закон Ньютона. *Каждое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на тело силы не заставят его изменить это состояние.*

К понятию силы мы вернемся немного позже, а сейчас еще раз внимательно перечтем первый закон, он еще называется принципом Галилея или принципом инерции Галилея. Хотя Галилей сформулировал свой принцип раньше Ньютона, но он вывел его только как следствие из проведенных им опытов. Ньютон же сделал из него краеугольный камень классической механики.

Из первого закона Ньютона следует эквивалентность *состояния покоя и равномерного движения*. Но мы видим, что в природе далеко не все тела находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения. Тела могут двигаться по самым сложным траекториям, а также изменять свою скорость. Воздействие, под влиянием которого происходят эти изменения, называют *силой*. Сила — это количественная характеристика воздействия на какое-либо тело со стороны других тел. Под действием силы, как показывает опыт, тело в зависимости от ее направления будет изменять скорость своего движения, увеличивая или уменьшая ее, т. е. сила является причиной ускорения — понятия, введенного нами в первой главе. Таким образом, можно сказать, что ускорение, приобретаемое телом, пропорционально действующей силе, $a \sim F$.

Из опыта нам известно, что для того, чтобы придать разным телам одинаковое ускорение, необходимо приложить разную силу. Представим себе, что мы имеем свинцовый и деревянный шары одинакового диаметра. Для придания им одинакового ускорения необходимо приложить разную силу, большую для свинцового и меньшую для деревянного шара. То же самое будет, если мы захотим эти шары остановить. Для остановки свинцового шара требуется большая сила. Степень сопротивляемости тела изменению его скорости называется *инертностью*. Мерой инертности служит величина, называемая *массой* (m). Определим соотношение двух масс различных тел по обратному соотношению ускорений, приобретаемых этими телами под действием равных сил:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}\,. \tag{78}$$

Теперь снова вернемся к понятию силы. Перепишем (78) в виде

$$m_1 a_1 = m_2 a_2. \tag{79}$$

Поскольку сила является причиной ускорения тела, а ускорение зависит от массы тела, для определения понятия *силы* должно соблюдаться равенство (79) при различных соотношениях масс и ускорений (78). Естественно взять за определение силы величину ma. Так как ускорение есть величина векторная, то и сила $\overrightarrow{F}$ — также вектор, направление которого совпадает с направлением вектора ускорения.

Второй закон Ньютона. *Произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на нее силе:*

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}. \tag{80}$$

Сила — величина векторная, поэтому сложение нескольких сил осуществляется по правилу сложения векторов.

Единица силы в системе СИ называется ньютоном (Н), который равен силе, под действием которой тело с массой 1 кг приобретает ускорение 1 м/с^2.

В любом случае, когда одно тело массой m_1 действует на тело массой m_2, тогда и тело с массой m_2 действует на тело с массой m_1. Таким образом, правильнее говорить о взаимодействии двух тел. Ньютон сформулировал общий принцип взаимодействия.

Третий закон Ньютона. *Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

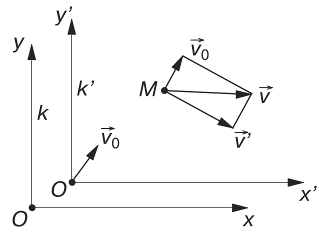


Рис. 21

Еще раз посмотрим на уравнение второго закона Ньютона. Мы видим, что оно не содержит скорости, а только ускорение. Чтобы лучше понять этот чрезвычайно важный факт, рассмотрим движение двух инерциальных систем отсчета. Пусть инерциальная система K' движется с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ относительно другой инерциальной системы K (рис. 21). Скорость точки M относительно системы K' обозначим $\vec{v}\,'$. Тогда скорость движения этой точки относительно системы K (обозначим ее $\vec{v}$) будет равна

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}\,'. \tag{81}$$

Перепишем (81) в виде:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_0.$$

Дифференцируя обе части по времени и учитывая, что $\vec{v}_0$ постоянная, получим

$$\frac{d\vec{v}\,'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

т. е. ускорение во всех инерциальных системах оказывается одинаковым, и, следовательно, *уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой*. Говорят, что уравнение $m\vec{a} = \vec{F}$ инвариантно относительно преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы к другой (преобразование Галилея).

Чтобы понять законы Ньютона и научиться сводить нахождение закона движения частиц к чисто математической задаче, необходимо обсудить *свойства сил. Сила трения скольжения* возникает при скольжении данного тела по поверхности другого тела. Природа силы трения скольжения весьма сложна. Раньше считалось, что механизм возникновения этой силы прост и заключается в зацеплении неровностей, присутствующих на обеих плоскостях скольжения.

Однако все гораздо сложнее. В точках соприкосновения плоскостей атомы сцепляются, при нажиме и движении тел друг относительно друга сцепка рвется, неровности сминаются, возникают колебания и движение атомов, выделяется тепло, что приводит к потерям энергии на трение. Несмотря на сложный механизм возникновения силы трения скольжения, ее величина в хорошем приближении может быть вычислена по следующей формуле:

$$\overrightarrow{F} = k\overrightarrow{R}_n, \tag{82}$$

где k — коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей; $\overrightarrow{R}_n$ — сила нормального давления, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу.

Сила $\overrightarrow{F}$ направлена в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого.

Другая сила, которую формально можно назвать силой трения, но имеющая другой механизм возникновения, называется *силой сопротивления*. Эта сила действует на тело при его поступательном движении в газе или жидкости и зависит от скорости $\overrightarrow{v}$ тела относительно среды, причем направлена она противоположно вектору $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{v}, \tag{83}$$

где k — положительный коэффициент, характерный для данного тела и данной среды. Этот коэффициент, вообще говоря, зависит от скорости v, однако при малых скоростях во многих случаях его можно считать постоянным.

Рассмотрим теперь *молекулярные силы*, которые действуют между атомами. Приблизительно эти силы можно изобразить так, как это показано на рис. 22. Механизм действия молекулярных сил изучается в курсе квантовой механики, а их особенностью является то, что атомы, образующие молекулы, притягиваются на больших расстояниях и отталкиваются на малых. Этим и объясняется существование твердых тел. При больших расстояниях их атомы притягиваются, но существует расстояние d, ближе которого включается механизм отталкивания. Эта величина d и является меж-

Рис. 22

атомным расстоянием. Когда молекулы лишь слегка начинают отклоняться от положения равновесия, имеющегося между ними на расстоянии d, возникает упругая сила $\overrightarrow{F}$, пропорциональная величине смещения и направленная к положению равновесия. Эта сила называется *упругой* и определяется выражением

$$\overrightarrow{F} = -\kappa\overrightarrow{r}, \tag{84}$$

где $\overrightarrow{r}$ — радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия; κ — положительный коэффициент, зависящий от конкретной силы.

В механике примером упругой силы является *закон Гука*

$$F = \kappa\Delta l, \tag{85}$$

где Δl — величина упругой деформации.

Рассмотрим теперь силы, называемые *фундаментальными*. Наиболее фундаментальная сила — это сила, хорошо нам известная из школьного курса физики, — *сила гравитационного притяжения*, действующая между двумя материальными точками в соответствии с законом всемирного тяготения и определяемая как

$$F = \gamma\,\frac{m_1m_2}{r^2}\,, \tag{86}$$

где $\gamma = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ м^3/(кг $\cdot$ с^2) называется гравитационной постоянной.

Обратите внимание на то, что во втором законе Ньютона (80) под массой понимается мера инерции тела, т. е. *инертная масса*, а в законе всемирного тяготения (86) — *гравитационная масса.* Опытным путем установлено равенство инертной и гравитационной массы, поэтому в дальнейшем мы будем говорить только о массе.

Обозначив в (86)

$$\frac{\gamma m_2}{r^2} = g$$

и подставив в это выражение вместо m_2 и r величину массы и радиуса Земли, получаем величину g, называемую *ускорением свободного падения*

$$g = 9{,}807 \text{ м/с}^2,$$

т. е. ускорение, приобретаемое телом массой 1 кг при свободном падении в гравитационном поле Земли, не слишком высоко над ее поверхностью. Тогда выражение (86) приобретает следующий вид:

$$\vec{F} = m\vec{g}, \tag{87}$$

где $\vec{F}$ называется *однородной силой тяжести*. Обращаем ваше внимание на различие понятия *веса* $\vec{P}$ и однородной силы тяжести $\vec{F}$. Вес $\vec{P}$ — это сила, с которой тело действует на *неподвижную* опору относительно данного тела. Например, груз массой m находится в лифте, неподвижном относительно Земли. Тогда вес и однородная сила тяжести совпадают. Если же лифт начинает подниматься вверх с ускорением $\vec{a}$, то вес

$$\vec{P} = m(\vec{g} + \vec{a}).$$

К другой фундаментальной силе относится *кулоновская сила*, действующая между двумя точечными зарядами q_1 и q_2

$$F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}\,,$$

где r — расстояние между зарядами; k — коэффициент пропорциональности.

Следует также уяснить, что гравитационная сила — это всегда сила притяжения, а кулоновская сила может быть как силой притяжения, так и силой отталкивания.

Перепишем второй закон Ньютона в следующем виде:

$$m\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \tag{88}$$

Выражение (87) называется *основным уравнением динамики*. Основное уравнение динамики позволяет решать два класса задач:

1) найти действующую на точку силу $\vec{F}$, если известны масса m точки и зависимость от времени ее радиуса-вектора $r(t)$;
2) найти закон движения точки и зависимость от времени ее радиус-вектора $\vec{r}(t)$, если известны масса m точки, действующая на нее сила $\vec{F}$ и начальные условия — скорость $\vec{v}_0$ и положение $\vec{r}_0$ точки в начальный момент времени.

При изучении движения механической системы, состоящей из материальной точки и твердых тел, в курсе общей физики студентов обучают описывать их движение с помощью второго закона Ньютона, а взаимодействие между элементами системы — с помощью третьего закона Ньютона. Однако при решении таких задач, особенно с большим числом элементов, более эффективным является принцип виртуальных работ. Рассмотрим коротко суть этого принципа, но сначала введем некоторые понятия, которые нам потребуются в дальнейшем. *Число степеней свободы* — это количество независимых параметров, которые необходимо знать для описания движения системы. Так, материальная точка имеет одну степень свободы, если она может перемещаться вдоль некоторой прямой или кривой, две степени свободы, если она перемещается в плоскости или какой-либо заданной поверхности, и три степени, если она перемещается в пространстве.

Две материальные точки, связанные между собой жестким стержнем, имеют пять степеней свободы, ибо первую точку можно считать свободной, тогда как вторая должна находиться на сферической поверхности, описанной вокруг первой точки радиусом, равным длине стержня.

Для определения степеней свободы какой-либо механической системы существует простое правило: число степеней свободы механической системы равно количеству точек, которое необходимо зафиксировать, чтобы всякое движение в системе прекратилось. Так, например, в задаче 32 система имеет одну степень свободы, а в задаче 42 — две. Иными словами, все перемещения в системе с одной степенью свободы можно выразить через один параметр, а в системе с двумя степенями свободы — через два и т. д.

Вторым понятием, имеющим важное значение для принципа виртуальных работ, является понятие *виртуального перемещения*. Под виртуальным перемещением понимается *произвольное*, *совместимое с условиями связи*, *бесконечно малое изменение положения системы*. Виртуальное перемещение будем обозначать δr_i. Обратите внимание, что виртуальные перемещения не имеют отношения к процессу движения: они вводятся пробным порядком для того, чтобы выявить имеющиеся в системе соотношения и силы, действующие на систему.

На механическую систему кроме внешних сил действуют силы реакции связей, т. е. нитей, стержней, поверхностей. При решении подавляющего большинства задач мы идеализируем реальные физические условия, т. е. считаем стержни невесомыми и несжимаемыми, нити невесомыми и нерастяжимыми, поверхности такими, где качение проходит без проскальзывания, и т. д. Обобщая эти идеализированные модели, можно сформулировать следующий принцип: *для каждой механической системы виртуальная работа реакций равна нулю*, т. е.

$$\delta A_R = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{R}_i \delta \overrightarrow{r}_i = 0, \tag{89}$$

где $\overrightarrow{R}_i$ — сила реакции связи, $\overrightarrow{r}_i$ — радиус-вектор i-й точки системы.

Запишем уравнение движения системы из N точек в виде

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{\ddot{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} (\overrightarrow{F}_i + \overrightarrow{R}_i), \tag{90}$$

где $\overrightarrow{F}_i$ — внешние силы.

Перепишем (90) с учетом (89):

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \overrightarrow{\ddot{r}} - \overrightarrow{F}_i) \delta \overrightarrow{r}_i = 0. \tag{91}$$

Как мы говорили выше, принцип виртуальной работы получен для идеализированных объектов, поэтому $\delta \overrightarrow{r}_i$ для всех точек одинаковы и в выражении (91) суммирование по всем точкам системы можно заменить на

$$(m \overrightarrow{\ddot{r}} - \overrightarrow{F}) \delta \overrightarrow{S}, \tag{92}$$

где m — масса тела, $\overrightarrow{\ddot{r}}$ — ускорение его центра масс, $\overrightarrow{F}$ — результирующая всех внешних сил, δS — виртуальное перемещение тела.

Перепишем теперь (91) в виде

$$\sum_{k=1}^{N} (m_k \overrightarrow{\ddot{S}} - \overrightarrow{F}_k) \delta \overrightarrow{S}_k = 0. \tag{93}$$

Заметьте, что теперь суммирование идет по всем телам, входящим в систему.

Рассмотрим простейший случай — систему с одной степенью свободы. Для ее описания достаточно ввести один параметр — перемещение какого-либо тела системы, через который могут быть выражены все остальные параметры всех тел, входящих в систему.

Запишем

$$\delta S_k = A_k \delta x, \tag{94}$$

где δx — виртуальное перемещение выбранного тела, δS_k — виртуальное перемещение k-го тела системы, A_k — постоянные коэффициенты, зависящие от конструктивных особенностей системы.

Учитывая, что коэффициенты A_k постоянные, можем записать

$$\ddot{S}_k = A_k \ddot{x}. \tag{95}$$

Подставляя (94) и (95) в (93), находим выражение для определения ускорения в системе с одной степенью свободы:

$$\ddot{x} = \frac{\sum\limits_k F_k A_k}{\sum\limits_k m_k A_k^2}\,. \tag{96}$$

Рассмотрим применение принципа виртуальной работы на примере задачи 29. Сначала определим число степеней свободы установки. Легко понять, что установка имеет одну степень свободы, так как для прекращения всякого движения системы достаточно зафиксировать один из грузов. В качестве основного перемещения δx выберем виртуальное перемещение тела m_0, ускорение которого надо найти. Тогда виртуальное перемещение всех грузов в силу конструктивной особенности установки также будет δx, а $\delta S = \delta x$, т. е., согласно (94), $A_k = 1$ $(k = 1, 2, 3)$. Для формализации расчета удобно все данные свести в таблицу:

Таблица 1

m_k	δS_k	A_k	A_k^2	F_k
m_0	δx	1	1	$m_0 g$
m_1	δx	1	1	$-m_1 g k$
m_2	δx	1	1	$-m_2 g k$

Далее, подставляя данные из табл. 1 в (96), получаем:

$$\ddot{x} = \overrightarrow{a} = \frac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}\,.$$

Рассмотрим более сложный случай — движение с двумя степенями свободы. Теперь любые перемещения в системе могут быть выражены через δx и δy, которые мы примем за основные. Тогда δS_k будет представлять собой линейную комбинацию этих двух виртуальных перемещений:

$$\delta S_k = A_k \delta x + B_k \delta y, \tag{97}$$

$$\ddot{S}_k = A_k \ddot{x} + B_k \ddot{y}. \tag{98}$$

Подставляя (97) и (98) в (93), приходим к

$$\sum_k (m_k \ddot{S}_k - F_k)\delta S_k = \sum [m_k(A_k\ddot{x} + B_k\ddot{y}) - F_k](A_k\delta x + B_k\delta y) =$$
$$= \sum_k (m_k A_k^2 \ddot{x}\delta x + m_k A_k B_k \ddot{y}\delta x - F_k A_k \delta x +$$
$$+ m_k A_k B_k \ddot{x}\delta y + m_k B_k^2 \ddot{y}\delta y - F_k B_k \delta y) = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_k m_k A_k^2 \ddot{x} + \sum\limits_k m_k A_k B_k \ddot{y} = \sum\limits_k F_k A_k, \\ \sum\limits_k m_k A_k B_k \ddot{x} + \sum\limits_k m_k B_k^2 \ddot{y} = \sum\limits_k F_k B_k. \end{cases} \tag{99}$$

Применяя теорему Крамера, находим решение системы (99) в общем виде:

$$\ddot{x} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum\limits_k F_k A_k & \sum\limits_k m_k A_k B_k \\ \sum\limits_k F_k B_k & \sum\limits_k m_k B_k^2 \end{vmatrix},$$
$$\ddot{y} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \sum\limits_k m_k A_k^2 & \sum\limits_k F_k A_k \\ \sum m_k A_k B_k & \sum\limits_k F_k B_k \end{vmatrix}, \tag{100}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \sum\limits_k m_k A_k^2 & \sum\limits_k m_k A_k B_k \\ \sum\limits_k m_k A_k B_k & \sum\limits_k m_k B_k^2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим применение принципа виртуальной работы на примере задачи 36.

В данной задаче система обладает двумя степенями свободы, так как для запрещения движения системы необходимо последовательно запретить перемещение двух ее точек.

Выберем в качестве виртуального перемещения δx — перемещение тела m_1 относительно блока, а в качестве δy перемещение блока относительно поверхности Земли. Тогда $\vec{\ddot{x}}_{\text{р}} = \vec{\ddot{x}} + \vec{\ddot{y}}$, где $\vec{\ddot{x}}_{\text{р}}$ —

Таблица 2

m_k	δS_k	A_k	A_k^2	B_k	B_k^2	F_k
m_1	$\delta y - \delta x$	-1	1	1	1	$m_1 g$
m_2	$\delta y + \delta x$	1	1	1	1	$m_2 g$
m_0	δy	0	0	1	1	0

результирующее ускорение тела m_1. Заполним табл. 2 и, воспользовавшись формулами (100), находим $\vec{\ddot{x}}_{\text{р}}$:

$$D = (m_1 + m_2)(m_1 + m_2 + m_3) + (m_2 - m_1)^2 =$$
$$= (m_1 + m_2)^2 + m_3(m_1 + m_2) - (m_2 - m_1)^2 =$$
$$= m_1^2 + 2m_1 m_2 + m_2^2 + m_3(m_1 + m_2) - m_2^2 + 2m_1 m_2 - m_1^2 =$$
$$= 4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2);$$
$$\ddot{x} = \frac{(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m_3)g - (m_1 + m_2)(m_2 - m_1)g}{D} =$$
$$= \frac{g}{D}(m_2 - m_1)(m_1 + m_2 + m_3 - m_1 - m_2) = \frac{m_3(m_2 - m_1)g}{D};$$
$$\ddot{y} = \frac{g}{D}\left[(m_1 + m_2)^2 - (m_2 - m_1)^2\right] = \frac{4m_1 m_2 g}{D};$$
$$\ddot{x}_{\text{р}} = a_1 = \ddot{x} + \ddot{y} = \frac{4m_1 m_2 + m_3(m_2 - m_1)}{4m_1 m_2 + m_3(m_1 + m_2)g}.$$

Рекомендации по решению задач

1. При решении задач на динамику материальных тел необходимо правильно изобразить все силы, действующие на тело. При этом мы не всегда имеем возможность определить направление движения, а следовательно, и направление силы трения, которая всегда направлена в противоположную движению сторону (задача 38). В таких случаях необходимо сначала решить задачу без учета силы трения и определить направление движения тела или системы тел. После этого становится ясным направление силы трения и появляется возможность сделать правильную запись основного закона динамики.

2. Если по условию задачи трением можно пренебречь, а определить движение тела или тел в силу кинематических особенностей установки невозможно, то направление векторов ускорения выбирается произвольно, а затем по их знаку, полученному в результате решения, определяется истинное направление движения.

3. В некоторых задачах необходимо выявить завуалированную идею, после чего задача решается без труда. Так, например, в задачах типа задачи 33 получается незамкнутая система уравнений. Здесь достаточно догадаться, что $a_1 = 2a_2$, а дальше дело математической техники на уровне средней школы.

В некоторых задачах, где сила, приложенная к телу, зависит от времени, основная трудность заключается в правильной расстановке пределов интегрирования. Так, например, в задаче 48 при определении пути, пройденного телом, нижний предел интегрирования равен не нулю, как это зачастую полагают студенты, а значению времени, когда сила трения станет равной приложенной силе, т. е. тому моменту, когда, собственно, и начнется движение. Достаточно это понять, и задача решается легко.

4. Правильный выбор направления осей координат очень часто облегчает решение задачи. Если тела движутся в разных плоскостях, то лучше взять несколько систем отсчета (задачи 37, 42). Как правило, одну из осей координат направляют вдоль вектора ускорения.

5. При решении задач динамики сначала, как правило, записывают второй закон Ньютона в векторной форме, а затем в проекциях на декартову систему координат, дополняя их кинематическими соотношениями. В задачах, где тело движется по сферической поверхности, решение значительно облегчается, если записывать проекции второго закона Ньютона на подвижные орты $\vec{n}$ и $\vec{\tau}$, задача 53.

6. При решении задач с помощью принципа виртуальных работ в качестве основного виртуального перемещения лучше всего выбрать перемещение того тела, ускорение которого надо найти.

Задачи к главе 2

Задача 25. Частица движется вдоль оси X по закону $x = \alpha t^2 - \beta t^3$, где α и β положительные постоянные. В момент $t = 0$ сила, действующая на частицу, равна F_0. Найти значение F_x силы в точках поворота и в момент, когда частица опять окажется в точке $x = 0$.

Решение. Определим вначале время, за которое частица достигнет точки поворота. Поскольку в этой точке скорость движения частицы равна нулю, взяв первую производную по времени от $x(t)$, приравняв ее нулю и решив полученное уравнение относительно t, определим искомое время:

$$\dot{x} = 2\alpha t - 3\beta t^2 = 0.$$

Отсюда $t(2\alpha - 3\beta t) = 0$.

Получаем два корня: $t_1 = 0$ и $t_2 = \frac{2}{3}\,\frac{\alpha}{\beta}$.

Корень $t_1 = 0$ соответствует началу движения частицы, а t_2 — времени, когда частица достигнет точки поворота. Теперь определим время возвращения частицы в начало координат. Для этого приравняем нулю x:

$$x = \alpha t^2 - \beta t^3 = 0$$

или

$$t^2(\alpha - \beta t) = 0,$$

откуда $t_3 = 0$; $t_4 = \frac{\alpha}{\beta}$.

Как и ранее, t_3 соответствует началу движения, а t_4 — времени возвращения в начало координат. Далее найдем выражение для силы F_x в любой момент движения.

Запишем второй закон Ньютона для частицы

$$F_x = m\ddot{x} = 2m(\alpha - 3\beta t) \tag{101}$$

и найдем выражение для F_x при $x = 0$ и $t = 0$, т. е. F_0:

$$F_x(t = 0) = F_0 = 2m\alpha. \tag{102}$$

Перепишем (101) с учетом (102):

$$F_x = 2m\alpha\left(1 - \frac{3}{2}\,\beta t\right) = F_0\left(1 - \frac{3\beta}{\alpha}\,t\right). \tag{103}$$

Подставляя в (103) значение t_2, т. е. время движения точки до поворота, находим

$$F_{\text{п}} = -F_0,$$

где $F_{\text{п}}$ — сила, действующая на частицу в точке поворота.

Найдем силу, действующую на частицу в момент ее возвращения в начало координат ($F_{\text{в}}$). Подставив в (103) значение t_4, получаем

$$F_{\text{в}} = -2F_0.$$

О т в е т: Значения силы в точках поворота и в момент, когда частица вновь оказывается в точке $x = 0$, составляют $-F_0$ и $-2F_0$ соответственно.

Задача 26. Найти модуль и направление силы, действующей на частицу массой m при ее движении в плоскости XY по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$.

Р е ш е н и е. Продифференцировав дважды по времени x и y, находим: $\ddot{x} = a_x = -A\omega^2\sin\omega t$; $\ddot{y} = a_y = -B\omega^2\cos\omega t$. Далее

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{a}_x + \vec{a}_y) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j}) = -m|a|\vec{e}_r =$$
$$= -m\omega^2\sqrt{A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t}\,\vec{e}_r = -m\omega^2\vec{r},$$

модуль силы $\vec{F}$ равен

$$|\vec{F}| = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2},$$

где $\vec{e}_r$ — единичный (базисный) вектор r; $\vec{r}$ — радиус-вектор частицы относительно начала координат.

О т в е т: $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$; $|\vec{F}| = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

Задача 27. На гладкой горизонтальной поверхности находятся два бруска с массой m_1 и m_2, которые соединены нитью. К брускам в момент $t = 0$ приложили силы, противоположно направленные и зависящие от времени как $F_1 = \alpha_1 t$ и $F_2 = \alpha_2 t$. Найти, через сколько времени нить порвется, если сила натяжения на разрыв равна $F_{\text{пр}}$.

Р е ш е н и е. Запишем основное уравнение динамики для первого и второго брусков. Условимся считать, что $\alpha_2 > \alpha_1$, и, следовательно, бруски движутся вдоль положительного направления оси X. Тогда для момента разрыва нити, когда ее сила натяжения достигнет величины $F_{\text{пр}}$, можно записать:

$$\begin{cases} F_{\text{пр}} - \alpha_1 t = m_1 a, \\ \alpha_2 t - F_{\text{пр}} = m_2 a, \end{cases}$$

где a — ускорение, с которым движутся бруски. Выражая из первого уравнения a и подставляя полученное выражение во второе уравнение, находим t — время, через которое нить порвется:

$$a = \frac{F_{\text{пр}} - \alpha_1 t}{m_1}, \quad \alpha_2 t - F_{\text{пр}} = \frac{m_2 F_{\text{пр}} - \alpha_1 m_2 t}{m_1}.$$

Отсюда находим t:

$$t = \frac{(m_1 + m_2)F_{\text{пр}}}{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}.$$

О т в е т: $t = \dfrac{(m_1 + m_2)F_{\text{пр}}}{m_1\alpha_2 + m_2\alpha_1}$.

Задача 28. Аэростат массой $m = 250$ кг начал опускаться с ускорением $a = 0{,}20$ м/с^2. Определить массу балласта, который следует сбросить за борт, чтобы аэростат получил такое же ускорение, но направленное вверх.

Р е ш е н и е. Запишем основное уравнение динамики при двух случаях: движение аэростата вниз с ускорением, равным $-a$, и движение аэростата вверх с ускорением a. Получаем:

$$\begin{cases} F_{\text{под}} - mg = -ma, \\ F_{\text{под}} - (m - \Delta m)g = ma, \end{cases}$$

где $F_{\text{под}}$ — подъемная сила, действующая на аэростат; Δm — масса сброшенного балласта.

Вычитая второе уравнение из первого и производя элементарные преобразования, находим величину Δm:

$$\Delta m = \frac{2ma}{g + a} = 10 \text{ кг}.$$

О т в е т: $\Delta m = 10$ кг.

Задача 29. В установке (рис. 23) массы тел равны m_0, m_1 и m_2, массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в блоке нет. Найти ускорение $\overrightarrow{a}$, с которым опускается тело m_0, и силу натяжения нити, связывающей тела массами m_1 и m_2, если коэффициент трения равен k.

Р е ш е н и е. Решение подобных задач с помощью принципа виртуальной работы было рассмотрено в теоретической части гл. 2. Теперь решим задачу классическим методом. Рассмотрим каждое тело отдельно. На тело m_0 действуют сила тяжести $m_0\overrightarrow{g}$ и сила натяжения нити $\overrightarrow{T}_1$. На тело m_1 действуют сила тяжести $m_1\overrightarrow{g}$, сила

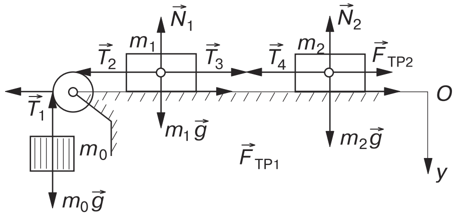


Рис. 23

реакции опоры $\overrightarrow{N}_1$, сила натяжения нити $\overrightarrow{T}_2$ и сила трения $\overrightarrow{F}_{\text{тр}1}$. На тело m_2 действуют сила тяжести $m_2\overrightarrow{g}$, сила реакции опоры $\overrightarrow{N}_2$, сила натяжения нити $\overrightarrow{T}_3$ и сила трения $\overrightarrow{F}_{\text{тр}2}$. Поскольку по условию задачи массы блока и нитей пренебрежимо малы и трения в них нет, тела массами m_0, m_1 и m_2 за одно и то же время проходят один и тот же путь

$$S_1 = S_2 = S_3 = S = \frac{at^2}{2}.$$

Следовательно, все тела движутся с одним и тем же ускорением a, и силы натяжения нити также одинаковы и равны T.

Запишем уравнение движения системы в скалярном виде с учетом

$$a_x = a_y = a, \quad T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T,$$
$$m_1 g - N_1 = m_2 g - N_2 = 0,$$
$$F_{\text{тр}\,1} = -km_1 g, \quad F_{\text{тр}\,2} = -km_2 g,$$
$$m_0 g - gk(m_1 + m_2) = (m_0 + m_1 + m_2)a,$$

откуда

$$a = \frac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}\, g.$$

Для нахождения T запишем уравнение движения тела m_2 (можно m_1 или же m_0 — результат будет тот же)

$$m_2 a = T - km_2 g.$$

Подставляя сюда выражение для a и произведя несложные алгебраические преобразования, находим T:

$$T = \frac{m_2[m_0 - k(m_1 + m_2)]}{m_0 + m_1 + m_2}\, g + km_2 g = \frac{m_0 m_2 (1 + k) g}{m_0 + m_1 + m_2}.$$

Ответ: $a = \dfrac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}\, g$; $T = \dfrac{m_0 m_2 (1 + k)}{m_0 + m_1 + m_2}\, g$.

Задача 30. На наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом, поместили два бруска: 1 и 2 (рис. 24). Массы брусков m_1 и m_2, коэффициент трения между плоскостью и этими брусками k_1 и k_2, причем $k_1 > k_2$.

Найти:

а) силу взаимодействия между брусками при движении;

б) угол α, при котором скольжения не будет.

Решение. а) Расположим оси координат, как показано на рис. 24. Из рисунка видно, что на каждое из тел действуют

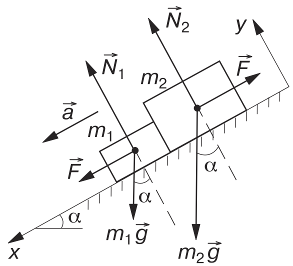


Рис. 24

четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и сила взаимодействия между брусками $\vec{F}$. Запишем уравнения движения брусков в векторном виде:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1},$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}1}.$$

Поскольку по условию задачи $k_1 > k_2$ и требуется найти силу взаимодействия между брусками, ясно, что система из двух брусков будет двигаться как единое целое с одинаковым ускорением $a_1 = a_2 = a$.

Проецируя эти силы на оси координат и учитывая, что

$$\begin{cases} 0 = N_1 - m_1 g\cos\alpha, \\ 0 = N_2 - m_2 g\cos\alpha, \end{cases}$$

получаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} m_1 g\sin\alpha - k_1 m_1 g\cos\alpha + F = m_1 a, \\ m_2 g\sin\alpha - k_2 m_2 g\cos\alpha - F = m_2 a. \end{cases}$$

Из ее решения находим F:

$$F = \frac{m_1 m_2(k_1 - k_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2}\, g.$$

б) Скольжение системы прекратится, когда сила трения бруска массой $m_1 + m_2$ станет меньше суммы сил трения брусков массой m_1

и m_2, т. е.

$$k_0(m_1 + m_2) < k_1 m_1 + k_2 m_2,$$

где k_0 — коэффициент трения бруска массой $m_1 + m_2$.

$$k_0 = \operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\alpha < \frac{k_1 m_1 + k_2 m_2}{m_1 + m_2}\,.$$

О т в е т: а) $F = \dfrac{m_1 m_2 (k_1 - k_2)\cos\alpha}{m_1 + m_2}$; б) $\operatorname{tg}\alpha < \dfrac{k_1 m_1 + k_2 m_2}{m_1 + m_2}$.

Задача 31. Шайбу поместили на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 10^\circ$ с горизонтом. Если шайбе сообщить некоторую начальную скорость вверх по плоскости, то она до остановки проходит путь S_1; если же сообщить ту же начальную скорость вниз, то путь до остановки равен S_2. Найти коэффициент трения, зная, что $S_2/S_1 = \eta = 4{,}0$.

Р е ш е н и е. Поскольку по условию задачи в обоих случаях тело останавливается, пройдя пути S_1 и S_2 соответственно, понятно, что оно двигалось равнозамедленно и сила торможения

$$\vec{F}_{\text{т}} = m\vec{g}\sin\alpha + km\vec{g}\cos\alpha$$

всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения. В случае движения тела вверх обе составляющие силы торможения направлены в одну сторону, совпадающую с положительным направлением оси OX. Запишем для этого случая второй закон

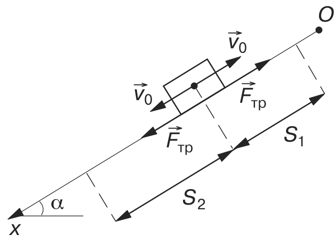


Рис. 25

Ньютона в проекции на ось OX:

$$ma_1 = mg(\sin\alpha + k\cos\alpha),$$

откуда

$$a_1 = g(\sin\alpha + k\cos\alpha).$$

Время движения t_1 до остановки определим из условия

$$v_0 - a_1 t_1 = 0,$$

откуда

$$t_1 = \frac{v_0}{a_1} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}\,.$$

Путь S_1, пройденный телом, определим из уравнения

$$S_1 = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + k\cos\alpha)}\,.$$

При движении тела вниз тормозящая сила направлена в сторону, противоположную положительному направлению оси OX, а составляющие силы тяжести $m\vec{g}\sin\alpha$ и силы трения $km\vec{g}\cos\alpha$ направлены в противоположные стороны, т. е.

$$ma_2 = -mg(\sin\alpha - k\cos\alpha),$$

откуда

$$a_2 = g(k\cos\alpha - \sin\alpha).$$

Как и в случае движения тела вверх, сначала находим t_2, а затем S_2:

$$S_2 = \frac{v_0^2}{2g(k\cos\alpha - \sin\alpha)}\,.$$

Далее с учетом того, что $\dfrac{S_2}{S_1} = \eta$, получаем

$$\eta = \frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{k\cos\alpha - \sin\alpha}\,.$$

Проводя несложные преобразования, находим k:

$$k = \frac{\eta + 1}{\eta - 1}\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0{,}3.$$

О т в е т: $k = 0{,}3$.

Задача 32. Через легкий блок перекинута невесомая нерастяжимая нить, на концах которой висят два одинаковых груза

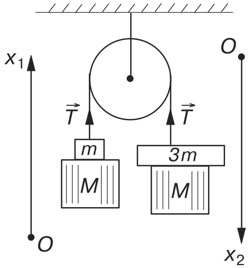


Рис. 26

массой M (рис. 26). Одновременно на каждый из этих грузов кладут по дополнительному грузу: справа массой $3m$ и слева массой m. Определить ускорение грузов и натяжение нити. Трения в оси блоков нет.

Решение.

I способ

Расположим ось OX, как показано на рис. 26. На каждый из грузов действует сила тяжести и сила натяжения нитей. Запишем второй закон Ньютона для обоих грузов в проекции на оси OX_1 и OX_2:

$$\begin{cases} T-(M+m)g=(M+m)a, \\ (M+3m)g-T=(M+3m)a. \end{cases} \tag{104}$$

Решая систему, находим:

$$a=g\,\frac{m}{M+2m}; \quad T=g\,\frac{(M+3m)(M+m)}{M+2m}.$$

II способ

Используем принцип виртуальных работ. Заполним табл. 3 и, подставляя данные в (96), найдем:

Таблица 3

m_k	δS_k	A_k	A_k^2	F_k
$M+m$	δx	1	1	$-(M+m)g$
$M+3m$	$-\delta x$	-1	1	$-(M+3m)g$

$$\ddot{x}=a=\frac{\sum\limits_k F_k A_k}{\sum\limits_k m_k A_k^2}=\frac{m}{M+2m}\,g.$$

Подставляя полученное выражение в первое уравнение системы (104), определяем T:

$$T=g\,\frac{(M+3m)(M+m)}{M+2m}.$$

Ответ: $a=g\,\dfrac{m}{M+2m}$; $T=g\,\dfrac{(M+3m)(M+m)}{M+2m}$.

Задача 33. Определить ускорение, с которым движется груз m_1 в установке, изображенной на рис. 27. Масса второго груза $m_2 = 4m_1$. Трением, массами блоков и нитей, а также растяжением нитей пренебречь. Нити вертикальны.

Решение.

I способ

В данной задаче без соответствующих расчетов невозможно сказать, какой из грузов будет двигаться вверх, а какой опускаться. Поэтому ось координат OX можно располагать произвольным образом, а после подстановки численных значений можно будет сказать, движение какого из грузов совпадает с положительным направлением оси OX.

Расположим ось OX, как показано на рис. 27, и запишем второй закон Ньютона для грузов m_1 и m_2:

$$m_1 a_1 = T - m_1 g, \quad m_2 a_2 = 2T - m_2 g,$$

где T — сила натяжения нити.

Мы получили два уравнения с тремя неизвестными. Из кинематической схемы установки видно, что ускорения a_1 и a_2 различны, поэтому если мы установим между ними связь, то получим недостающее третье уравнение. Из геометрических соображений ясно, что если груз m_1 пройдет путь S_1 вверх, то груз m_2 опустится вниз на расстояние S_2, которое равно $S_1/2$. Поскольку подъем первого груза и опускание второго происходят за одно и то же время, а пути, пройденные грузами, прямо пропорциональны их

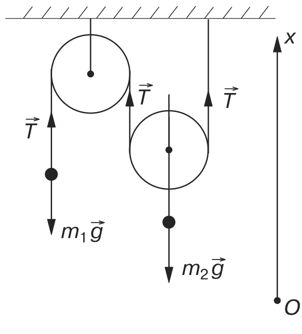


Рис. 27

ускорениям, можно записать

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 t^2/2}{a_2 t^2/2} = \frac{a_1}{a_2} = 2,$$

или $a_1 = 2a_2$.

Мы получили недостающее третье уравнение. Теперь наша система принимает вид

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - m_1 g, \\ m_2 a_2 = 2T - m_2 g, \\ a_1 = 2a_2. \end{cases}$$

Решение системы дает

$$a_1 = \frac{2(m_2 - 2m_1)}{4m_1 + m_2}\, g = \frac{2(4m_1 - 2m_1)}{4m_1 + 4m_1}\, g = \frac{g}{2} = 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Подставив выражение для a_1 в первое уравнение системы, можно найти также силу натяжения нити T.

II способ

Когда груз m_1 поднимется (опустится) на расстояние δx, груз m_2 опустится (поднимется) на расстояние в два раза меньшее, $\delta x/2$. Заполним табл. 4 с учетом этого и, подставляя данные в (96), найдем:

$$\ddot{x} = a_1 = \frac{\sum\limits_k F_k A_k}{\sum\limits_k m_k A_k^2} = \frac{2(m_2 - 2m_1)}{4m_1 + m_2}\, g = \frac{4m_1 - 2m_1}{4m_1}\, g = \frac{g}{2} = 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Таблица 4

m_k	δS_k	A_k	A_k^2	F_k
m_1	δx	1	1	$-m_1 g$
m_2	$-\dfrac{\delta x}{2}$	$-\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$	$-m_2 g$

Р е ш е н и е: $a_1 = 4{,}9$ м/с^2.

Задача 34. Шайбу положили на наклонную плоскость и сообщили направленную вверх начальную скорость v_0, коэффициент трения между шайбой и плоскостью равен k. При каком значении угла наклона α шайба пройдет вверх по плоскости наименьшее расстояние? Чему оно равно?

Решение. В задаче 31 мы уже получили выражение для пути S, которое тело пройдет вверх по наклонной плоскости, когда ему сообщили начальную скорость v_0:

$$S = \frac{v_0}{2g}\,\frac{1}{\sin\alpha + k\cos\alpha}\,. \tag{105}$$

Приравнивая нулю первую производную $\dfrac{dl}{d\alpha}$, находим $S_{\min}$

$$\frac{dS}{d\alpha} \sim \frac{\cos\alpha - k\sin\alpha}{(\sin\alpha + k\cos\alpha)^2} = 0,$$

откуда

$$k = \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\,. \tag{106}$$

Подставляя (106) в знаменатель (105), находим:

$$\sin\alpha + k\cos\alpha = \sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\,.$$

Тогда (105) принимает вид

$$S_{\min} = \frac{v_0^2}{2g}\sin\alpha.$$

Легко показать, что

$$\sqrt{1+k^2} = \frac{1}{\sin\alpha}\,, \tag{107}$$

и выражение для $S_{\min}$ в окончательном виде будет выглядеть следующим образом:

$$S_{\min} = \frac{v_0^2}{2g\sqrt{1+k^2}}\,.$$

Ответ: при $k = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, $S_{\min} = \dfrac{v_0^2}{2g\sqrt{1+k^2}}$.

Задача 35. Брусок массой m тянут за нить так, что он движется с постоянной скоростью по горизонтальной плоскости с коэффициентом трения k (рис. 28). Найти угол α, при котором натяжение нити минимально. Чему оно равно?

Решение. На движущийся брусок действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Поскольку в условии задачи о весе нити ничего не сказано, будем считать ее невесомой, следовательно, сила натяжения нити $\vec{T}$

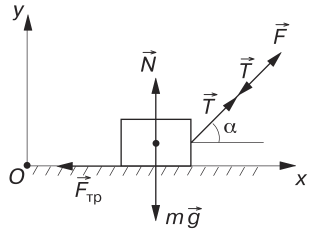


Рис. 28

равна $\overrightarrow{F}$. Кроме того, тело движется с постоянной скоростью, поэтому равнодействующая всех четырех сил равна нулю:

$$\overrightarrow{F} + m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F}_{\text{тр}} = 0,$$

где $\overrightarrow{F}_{\text{тр}}$ — сила трения.

В проекциях на оси OX и OY

$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0, & (108) \\ F\sin\alpha + N - mg = 0. & (109) \end{cases}$$

Поскольку $F_{\text{тр}} = kN$, а $N = mg - F\sin\alpha$,

$$F_{\text{тр}} = k(mg - F\sin\alpha). \tag{110}$$

Подставляя (110) в (108), получаем

$$F\cos\alpha - kmg + kF\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$F = T = \frac{kmg}{\cos\alpha + k\sin\alpha}. \tag{111}$$

Сила натяжения нити T будет тем меньше, чем больше знаменатель (111), поэтому исследуем его на экстремум:

$$(\cos\alpha + k\sin\alpha)' = -\sin\alpha + k\cos\alpha = 0.$$

Отсюда находим

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \tag{112}$$

Теперь необходимо убедиться, что условие (112) соответствует именно максимуму. Для этого возьмем вторую производную от знаменателя (111) и проверим ее знак

$$(-\sin\alpha + k\cos\alpha)' = -\cos\alpha - k\sin\alpha < 0.$$

Таким образом, значение $k = \operatorname{tg}\alpha$ соответствует максимальному значению знаменателя, а

$$T_{\min} = \frac{kmg}{\cos\alpha(1+k^2)}\,. \tag{113}$$

Подставив в (113)

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\,,$$

получим

$$T_{\min} = \frac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}\,.$$

О т в е т: $\operatorname{tg}\alpha = k$; $T_{\min} = \dfrac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}$.

Задача 36. В системе, показанной на рис. 29, массы тел равны m_0, m_1, m_2, трения нет, массы блоков пренебрежимо малы. Найти ускорение тела m_1.

Р е ш е н и е. Выберем положительное направление оси x вверх и запишем для грузов основное уравнение динамики в проекциях на ось OX (рис. 29):

$$\begin{cases} m_1 a_{1x} = T - m_1 g, & (114)\\ m_2 a_{2x} = T - m_2 g. & (115) \end{cases}$$

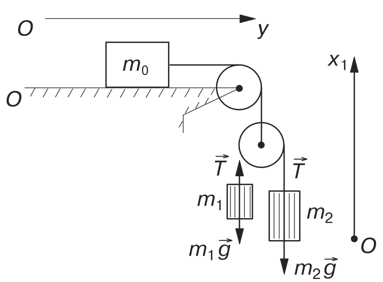


Рис. 29

Третье уравнение получаем исходя из кинематической связи между a_1 и a_2:

$$\begin{cases} \vec{a}_1 = \vec{a}_0 + \vec{a}'_x, & (116) \\ \vec{a}_2 = \vec{a}_0 - \vec{a}'_x, & (117) \end{cases}$$

где $\vec{a}_0$ — ускорение блока, a' — ускорение грузов относительно блока.

Переписав уравнения (116) и (117) в скалярной форме и складывая левые и правые части, получим:

$$a_{1x} + a_{2x} = 2a_0. \tag{118}$$

Для тела m_0 введем свою ось координат OY и запишем:

$$m_0 a_0 = 2T. \tag{119}$$

Решив совместно (116), (117), (118) и (119), находим:

$$a_{1x} = \frac{4m_1 m_2 + m_0(m_2 - m_1)}{4m_1 m_2 + m_0(m_1 + m_2)}\, g.$$

Методом виртуальных работ задача решена в кратном изложении теоретических положений, предшествующих данной главе.

Ответ: $a_{1x} = \dfrac{4m_1 m_2 + m_0(m_1 - m_2)}{4m_1 m_2 + m_0(m_2 + m_2)}\, g.$

Задача 37. В установке (рис. 30) известны угол α и коэффициент трения k между телом m_1 и наклонной плоскостью. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет. Вначале оба тела неподвижны. Найти отношение масс m_2/m_1, при котором тело m_2 начнет а) опускаться; б) подниматься.

Решение. Проводя рассуждения, аналогичные проводимым в задачах 30, 31, 35, запишем условия движения тела m_2 вниз

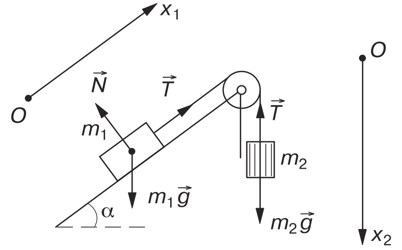


Рис. 30

в проекциях на оси OX_1 и OX_2:

$$\begin{cases} m_2 g - T > 0, \\ T - m_1 g \sin\alpha - m_1 g k \cos\alpha > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1} > \sin\alpha + k\cos\alpha.$$

Для движения тела m_2 вверх эти условия запишутся следующим образом:

$$\begin{cases} T - m_2 g > 0, \\ m_1 g \sin\alpha - T - k m_1 g \cos\alpha > 0, \end{cases}$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1} < \sin\alpha - k\cos\alpha.$$

О т в е т: а) $\dfrac{m_2}{m_1} > \sin\alpha + k\cos\alpha$; б) $\dfrac{m_2}{m_1} < \sin\alpha - k\cos\alpha$.

Задача 38. Наклонная плоскость (рис. 30) составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Отношение масс тел

$$\frac{m_2}{m_1} = \eta = \frac{2}{3}\,.$$

Коэффициент трения между телом m_1 и плоскостью $k = 0{,}10$. Массы блока и нити пренебрежимо малы. Найти модуль и направление ускорения тела m_2, если система пришла в движение из состояния покоя.

Р е ш е н и е. В задачах подобного типа для правильной записи основного уравнения динамики необходимо определить направление ускорения и, как следствие этого, направление силы трения, иначе задача будет неразрешима. Понятно, что сила трения не может изменить направление движения, она лишь уменьшает ускорение, поэтому если мы решим задачу в отсутствие силы трения, то сможем определить как направление ускорения, так и направление силы трения.

Запишем основное уравнение динамики в проекциях на оси OX_1 и OX_2:

$$\begin{cases} m_2 a_x = T - m_1 g \sin\alpha, \\ m_2 a_x = m_2 g - T, \end{cases}$$

где T — сила натяжения нити.

Решая полученную систему, находим:

$$a_x = \frac{\eta - \sin\alpha}{\eta + 1}\,g.$$

Подставив $\eta = \dfrac{2}{3}$ и $\alpha = 30°$, получаем:

$$a_x > 0,$$

т. е. тело движется вверх, а сила трения направлена вниз. Тогда

$$\begin{cases} m_1 a'_x = T' - m_2 g\sin\alpha - k m_1 g\cos\alpha, \\ m_2 a'_x = m_2 g - T', \end{cases}$$

откуда

$$a'_x = \frac{\eta - \sin\alpha - k\cos\alpha}{\eta + 1}\,g = 0{,}05\ g.$$

Ответ: $a'_x = 0{,}05\ g$.

Задача 39. С каким минимальным ускорением следует перемещать в горизонтальном направлении брусок A (рис. 31), чтобы тела 1 и 2 не двигались относительно него? Массы тел одинаковы, коэффициент трения между бруском и обоими телами равен k. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения в блоке нет.

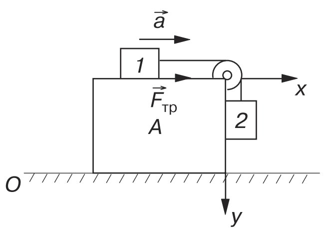


Рис. 31

Решение. Тела 1 и 2 не будут двигаться относительно бруска, если проекции всех сил на оси OX и OY равны. Опуская запись уравнений второго закона Ньютона в векторной форме, что мы неоднократно делали выше, сразу же запишем условие отсутствия движения тел относительно бруска в проекциях на оси OX и OY:

$$kmg + ma_{\min} = mg - kma_{\min},$$

откуда

$$a_{\min} = \frac{g(1-k)}{1+k}\,.$$

Ответ: $a_{\min} = \dfrac{g(1-k)}{1+k}$.

Задача 40. Призме 1, на которой находится брусок 2 массой m, сообщили влево горизонтальное ускорение a (рис. 32). При каком максимальном значении этого ускорения брусок еще будет оставаться неподвижным относительно призмы, если коэффициент трения между ними $k < \operatorname{ctg}\alpha$?

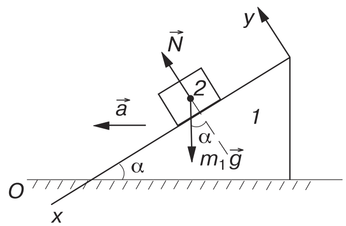


Рис. 32

Р е ш е н и е. Сначала выясним, при каких условиях брусок будет лежать неподвижно на наклонной плоскости при ее ускоренном движении. На брусок действуют сила тяжести $m\overrightarrow{g}$, сила реакции наклонной плоскости $\overrightarrow{N}$ и сила трения покоя $\overrightarrow{F}_{\text{тр}}$. Запишем второй закон Ньютона для движения бруска:

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}.$$

Теперь запишем его в проекциях на оси OX и OY:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha + kN = ma\cos\alpha, \\ N - mg\cos\alpha = ma\sin\alpha. \end{cases}$$

Решая систему уравнений относительно α, находим

$$a = g\,\frac{\sin\alpha + k\cos\alpha}{\cos\alpha - k\sin\alpha} = g\,\frac{1 + k\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - k}.$$

Обратите внимание на то, что при $k = \operatorname{ctg}\alpha$ $a = \infty$, т. е. брусок не будет двигаться вверх ни при каком значении a.

О т в е т: $a = g\,\dfrac{1 + k\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - k}$.

Задача 41. На тело массой m_1, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ начала действовать сила, зависящая от времени как $F = kt$, где k — постоянная. Направление этой силы все время составляет угол α с горизонтом (рис. 28). Найти:

а) скорость тела в момент отрыва от плоскости;

б) путь, пройденный телом к этому моменту.

Р е ш е н и е. а) Для отрыва тела от плоскости необходима сила mg. Условием отрыва будет

$$mg - F\sin\alpha = mg - kt\sin\alpha = 0,$$

откуда

$$t_{\text{отр.}} = \frac{mg}{2k\sin\alpha}\,. \tag{120}$$

Проекция второго закона Ньютона на ось OX будет иметь вид:

$$kt\cos\alpha = ma,$$

и

$$a = \frac{kt\cos\alpha}{m}\,. \tag{121}$$

Скорость тела в момент отрыва с учетом (120) и (121) будет равна

$$v_{\text{отр}} = \int\limits_0^{t_{\text{отр}}} \alpha\,dt = \frac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}\,.$$

б) Путь, пройденный телом до момента отрыва:

$$S = \int\limits_0^{t_{\text{отр}}} at\,dt. \tag{122}$$

Подставляя (120) и (121) в (122) и проводя интегрирование, находим

$$S = \frac{m^2g^3\cos\alpha}{3k^2\sin^3\alpha}\,.$$

О т в е т: а) $v_{\text{отр.}} = \dfrac{mg^2\cos\alpha}{2k\sin^2\alpha}$; б) $S = \dfrac{m^2g^3\cos\alpha}{3k^2\sin^3\alpha}$.

Задача 42. На горизонтальной поверхности находится призма 1 массой m_1 с углом α (рис. 33), а на ней брусок 2 массой m_2. Пренебрегая трением, найти ускорение призмы.

Р е ш е н и е.

I способ

Расположим систему координат, как показано на рис. 34. Брусок при движении по призме будет действовать на нее с силой

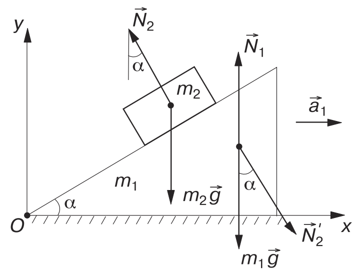


Рис. 33

$\overrightarrow{N}'_2 = -\overrightarrow{N}_2$. При этом ускорение бруска $\overrightarrow{a}_2$ относительно горизонтальной поверхности будет равно

$$\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{a}_1 + \overrightarrow{a}_{2\,\text{отн}},$$

где $\overrightarrow{a}_1$ — ускорение призмы относительно горизонтальной поверхности, а $\overrightarrow{a}_{2\,\text{отн}}$ — ускорение бруска относительно призмы.

Запишем в векторном виде второй закон Ньютона для движения бруска и призмы:

$$\begin{cases} m_2\overrightarrow{a}_2 = m_2\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N}_2, \\ m_1\overrightarrow{a}_1 = m_1\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N}_1 + \overrightarrow{N}'_2. \end{cases}$$

Теперь перепишем уравнения в проекциях на ось OX:

$$\begin{cases} m_2(a_1 - a_{2\,\text{отн.}}\cos\alpha) = -N_2\sin\alpha, & (123) \\ m_1a_1 = N_2\sin\alpha & (124) \end{cases}$$

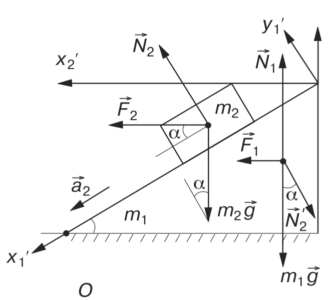


Рис. 34

и на ось OY:

$$-m_2 a_{2\,\text{отн.}} \sin\alpha = N_2 \cos\alpha - m_2 g. \tag{125}$$

При записи учтено, что $N_2 = N_2'$.

Выразим $a_{2\,\text{отн.}}$ из (125):

$$a_{2\,\text{отн.}} = \frac{m_2 g - N_2 \cos\alpha}{m_2 \sin\alpha}\,. \tag{126}$$

Далее, подставляя (126) в (123), получаем:

$$m_2\left(a_1 - \frac{m_2 g - N_2\cos\alpha}{m_2\sin\alpha}\cos\alpha\right) = -N_2 \sin\alpha.$$

Приводя выражение к общему знаменателю и решая полученное уравнение относительно N_2, находим:

$$N_2 = m_2(g\cos\alpha - a_1 \sin\alpha). \tag{127}$$

Теперь подставляем (127) в (124) и находим a_1:

$$a_1 = \frac{m_2 g \sin\alpha\cos\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha} = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \dfrac{m_1}{m_2}}\,.$$

II способ

Решим задачу, используя принцип виртуальных работ. Система обладает двумя степенями свободы, так как для прекращения в ней всякого движения необходимо зафиксировать две точки. Для удобства ось OX направим вправо, а ось OY — вниз. Обозначим через δX перемещение призмы. При нашем выборе направлений координатных осей можно записать, что перемещение бруска по горизонтали равно $\delta X - \cos\alpha\delta Y$, а перемещение по вертикали равно $\sin\alpha\delta Y$, где δY — перемещение бруска вдоль клина.

Заполним табл. 5.

Таблица 5

m_k	δS_k	A_k	A_k^2	B_k	B_k^2	F_k
m_2	$\delta x_1 = \delta X - \cos\alpha\delta Y$	1	1	$-\cos\alpha$	$\cos^2\alpha$	0
m_2	$\delta y_1 = \sin\alpha\delta Y$	0	0	$\sin\alpha$	$\sin^2\alpha$	mg
m_1	$\delta x_2 = \delta X$	1	1	0	0	0

Обратите внимание, что при решении задачи этим способом формально находится также и ускорение бруска относительно призмы, $a_{2\,\text{отн}}$.

Применяя формулы (100), находим:

$$\ddot{X} = a_1 = \frac{m_2 g \sin\alpha\cos\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha} = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \dfrac{m_1}{m_2}},$$

$$\ddot{Y} = a_{2\,\text{отн.}} = \frac{(m_1+m_2)g\sin\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha} = \frac{(1+(m_2/m_1))g\sin\alpha}{1+(m_2/m_1)\sin^2\alpha}.$$

III способ

Теперь используем при решении задачи неинерционные системы, связанные с призмой $X_1'O'Y_1'$ и $X_2'O'Y_2'$ (рис. 34). В этих системах отсчета движется только брусок m_2 с ускорением $\vec{a}_2$ относительно плоскости призмы, по которой он скользит.

Запишем уравнение движения бруска

$$m_2\vec{a}_{2\,\text{отн}} = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{ин}\,2}$$

и уравнение движения призмы

$$0 = m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2' + \vec{F}_{\text{ин}\,1}.$$

Тогда в проекции на ось $O'Y_1'$ уравнение движения бруска принимает вид

$$0 = -m_2 g\cos\alpha + N_2 + F_{\text{ин.}\,2}\sin\alpha,$$

а уравнение движения призмы в проекции на ось $O'X_2'$

$$0 = F_{\text{ин.}\,1} - N_2\sin\alpha.$$

Далее переписываем эти уравнения с учетом того, что

$$\vec{F}_{\text{ин.}\,1} = -m_1\vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{F}_{\text{ин.}\,2} = -m_2\vec{a},$$

или, в скалярном виде,

$$F_{\text{ин.}\,1} = -m_1 a \quad \text{и} \quad F_{\text{ин.}\,2} = -m_2 a.$$

Здесь $F_{\text{ин.}\,1}$ и $F_{\text{ин.}\,2}$ — силы инерции, действующие на призму и брусок соответственно.

Теперь приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 0 = -m_2 g\cos\alpha + N_2 + m_2 a_1 \sin\alpha, \\ 0 = m_1 a_1 - N_2 \sin\alpha, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$a_1 = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + (m_1/m_2)}\,.$$

О т в е т: $a_1 = \dfrac{g\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \dfrac{m_1}{m_2}}$.

Задача 43. Тело массой m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\overrightarrow{v}_0$. Найти приращение импульса $\Delta\overrightarrow{P}$ тела за первые t секунд движения и модуль приращения импульса тела за все время движения.

Р е ш е н и е. Движение тела, брошенного под углом к горизонту, подробно рассмотрено в задаче 16. Было показано, что вдоль оси OX тело движется равномерно со скоростью $v_x = v_0\cos\alpha$, а вдоль оси OY первую половину пути равнозамедленно, а вторую равноускоренно со скоростью

$$v_y = v_0\sin\alpha - gt.$$

Поэтому изменение импульса происходит только за счет v_y, которая за время t изменится на величину

$$\Delta\overrightarrow{v}_y = \overrightarrow{g}t,$$

а изменение импульса будет равно

$$\Delta\overrightarrow{P} = m\Delta\overrightarrow{v}_y = m\overrightarrow{g}t. \tag{128}$$

Для определения модуля приращения импульса за все время движения, достаточно в (128) вместо t подставить полное время движения тела, которое возьмем из задачи 14:

$$t = -\frac{2(\overrightarrow{v}_0\overrightarrow{g})}{g^2}\,.$$

Находим

$$|\Delta\overrightarrow{P}| = -\frac{2m(\overrightarrow{v}_0\overrightarrow{g})}{g}\,.$$

О т в е т: $\Delta\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}t$; $|\Delta\overrightarrow{P}| = -\dfrac{2m(\overrightarrow{v}_0\overrightarrow{g})}{g}$.

Задача 44. Частица массой m в момент $t = 0$ начинает двигаться под действием силы $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_0 \cos \omega t$, где $\overrightarrow{F}_0$ и ω — постоянные. Найти путь, пройденный частицей, в зависимости от t. Изобразить примерный график этой зависимости.

Р е ш е н и е. Запишем основное уравнение динамики:

$$dv = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \, dt.$$

Интегрируя его, получаем

$$v = \frac{F_0}{m} \int_0^t \sin \omega t \, dt = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos \omega t).$$

Воспользовавшись соотношением

$$S = \int v \, dt,$$

находим путь, пройденный частицей в зависимости от времени,

$$S = \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t (1 - \cos \omega t) dt = \frac{F_0}{m\omega_0^2} (\omega t - \sin \omega t).$$

О т в е т: $S = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2} (\omega t - \sin \omega t)$; рис. 35.

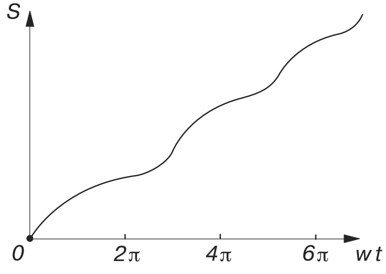


Рис. 35

Задача 45. В момент $t = 0$ частица массой m начинает двигаться под действием силы $F = F_0 \cos \omega t$, где F_0 и ω постоянные. Сколько времени частица будет двигаться до первой остановки? Какой путь она пройдет за это время? Какова максимальная скорость частицы на этом пути?

Р е ш е н и е. Запишем основное уравнение динамики в следующем виде:
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t.$$
Разделяя переменные и интегрируя по t, находим
$$v = \frac{F_0}{m}\int_0^t \cos\omega t\,dt = \frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t. \tag{129}$$

Частица будет двигаться до тех пор, пока ее скорость не станет равной нулю:
$$\frac{F_0}{m\omega}\sin\omega t = 0$$
или
$$\sin\omega t = 0.$$
Откуда $\omega t = \pi$ и $t = \dfrac{\pi}{\omega}$.

Путь, пройденный частицей за это время, будет равен
$$S = \int v\,dt = \frac{F_0}{m\omega}\int_0^{\pi/\omega} \sin\omega t\,dt = \frac{2F_0}{m\omega^2}\,.$$

Максимальную скорость найдем из условия равенства нулю первой производной
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos\omega t = 0,$$
откуда $\cos\omega t = 0$ и $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$.

Подставляя полученное выражение для времени в (129), находим
$$v_{\max} = \frac{F_0}{m\omega}\,.$$

О т в е т: $t = \dfrac{\pi}{\omega}$; $S = \dfrac{2F_0}{m\omega^2}$; $v_{\max} = \dfrac{F_0}{m\omega}$.

Задача 46. В момент $t = 0$ частице сообщили начальную скорость $\vec{v}_0$, и она начала двигаться под действием силы сопротивления среды, пропорциональной ее скорости как $\vec{F} = -r\vec{v}$. Найти:

а) время движения частицы под действием этой силы;

б) скорость частицы в зависимости от пройденного ею пути, а также полный путь до остановки.

Р е ш е н и е. а) Запишем основное уравнение динамики в скалярном виде:

$$m\,\frac{dv}{dt} = -rv$$

или

$$\frac{dv}{v} = -\,\frac{r}{m}\,dt. \tag{130}$$

Решая это уравнение, находим:

$$\ln v = -\,\frac{r}{m}\,t + \ln C.$$

Из начальных условий $t = 0$, $v = v_0$ определяем $C = v_0$.

Тогда

$$v = v_0 e^{-(r/m)t}.$$

Частица будет двигаться до тех пор, пока ее скорость не станет равной нулю, а это случится при $t \to \infty$.

б) Для нахождения скорости частицы в зависимости от пройденного пути перепишем (130) в виде

$$dv = -\,\frac{r}{m}\,v\,dt.$$

Отмечая, что $v\,dt = dS$, приходим к

$$dv = -\,\frac{r}{m}\,dS.$$

Интегрируя

$$\int\limits_{v_0}^{v} dv = -\,\frac{r}{m}\int\limits_{0}^{S} dS,$$

находим:

$$v - v_0 = -\,\frac{r}{m}\,S; \quad v = v_0 - \frac{r}{m}\,S.$$

Полный путь равен

$$S_{\text{пол.}} = v_0 \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(r/m)t}\,dt = \frac{v_0 m}{r}\,.$$

О т в е т: а) $v = v_0 \exp\left(-\dfrac{tr}{m}\right)$, $t \to \infty$; б) $v = v_0 - \dfrac{Sr}{m}$; $S_{\text{пол.}} = \dfrac{mv_0}{r}$.

Задача 47. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_0 до v. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

Р е ш е н и е. Запишем основное уравнение динамики как

$$m\,\frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

откуда, разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = -km \int\limits_{0}^{t} dt, \tag{131}$$

$$t = \frac{m(v_0 - v)}{kv_0 v}\,. \tag{132}$$

Теперь необходимо найти k. Для этого перепишем (131) в виде

$$\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\,\frac{k}{m}\int\limits_{0}^{t} v\,dt.$$

По условию задачи за время t пуля прошла путь h. Замечая, что

$$\int\limits_{0}^{t} v\,dt = h,$$

приходим к

$$\ln\frac{v}{v_0} = -\,\frac{k}{m}\,h,$$

откуда

$$k = -\,\frac{\ln(v/v_0)}{mh} = \frac{\ln(v_0/v)}{mh}\,.$$

Подставляя полученное выражение в (132), находим

$$t = \frac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln v_0/v}\,.$$

О т в е т: $t = \dfrac{h(v_0 - v)}{v_0 v \ln v_0/v}$.

Задача 48. На горизонтальной поверхности с коэффициентом трения k лежит тело массой m. В момент $t = 0$ к нему приложили горизонтальную силу, зависящую от времени как $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{b}\,t$, где $\overrightarrow{b}$ — постоянный вектор. Найти путь, пройденный телом за первые t секунд действия этой силы.

Р е ш е н и е. Запишем второй закон Ньютона в векторном виде

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}\,t + km\overrightarrow{g}$$

или в проекции на горизонтальную ось

$$m\,\frac{dv}{dt} = bt - kmg,$$

откуда

$$dv = \Big(\frac{bt}{m} - kg\Big)dt.$$

Интегрируя это уравнение, обратите внимание на нижний предел интегрирования по времени. Он равен t_0 (см. рекомендации по решению задач).

$$v = \int\limits_{t_0}^{t}\Big(\frac{bt}{m} - kg\Big)dt = \Big(\frac{bt^2}{2m} - lgt\Big)\Big|_{t_0}^{t} = \frac{bt^2}{2m} - kgt - \frac{bt_0^2}{2m} + kgt_0.$$

Далее:

$$S = \int\limits_{t_0}^{t}\Big(\frac{bt^2}{2m} - kgt - \frac{bt_0^2}{2m} + kgt_0\Big)dt = \Big(\frac{bt^3}{6m} - \frac{kgt^2}{2} - \frac{bt_0^2t}{2m} + kgt_0t\Big)\Big|_{t_0}^{t} =$$

$$= \frac{bt^3 - 3mkgt^2 - 3bt_0^2t + 6kmgt_0t - bt_0^3 + 3kmgt_0^2 + 3bt_0^3 - 6mkgt_0^2}{6m}. \quad (133)$$

Из равенства действующих на тело горизонтальной силы и силы трения находим t_0 — время начала движения

$$bt_0 = kmg,$$

откуда

$$t_0 = \frac{kmg}{b}. \quad (134)$$

Подставляя (134) в (133) и производя несложные преобразования, получаем:

$$S = \frac{b(t - t_0)^3}{6m}.$$

При $t \leqslant t_0$ сила трения превышает приложенную внешнюю силу, тело не движется, и путь $S = 0$.

О т в е т: $S = \dfrac{b(t - t_0)^3}{6m}$. При $t \leqslant t_0$ $\quad S = 0$.

Задача 49. Самолет делает «мертвую петлю» радиусом $R = 500$ м с постоянной скоростью $v = 360$ км/ч. Найти вес летчика массой $m = 70$ кг в нижней, верхней и средней точках петли.

Р е ш е н и е. При совершении «мертвой петли» или вообще при криволинейном движении на тело действуют несколько сил. В нашем случае это сила тяжести $\overrightarrow{P}$ и сила реакции $\overrightarrow{N}$, т. е. сила, с которой кресло давит на летчика, а летчик в соответствии с третьим законом Ньютона — на кресло.

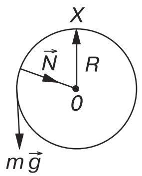


Рис. 36

Запишем второй закон Ньютона для любой точки «мертвой петли»:

$$m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{N} = m\overrightarrow{a}. \tag{135}$$

За систему координат возьмем ось OX, начало которой совпадает с центром «мертвой петли», а направление оси — с ее радиусом (рис. 36). Кроме того, ось вращается вместе с самолетом. Тогда проекция силы тяжести $m\overrightarrow{g}$ на ось OX в любой точке петли будет равна $mg\cos\alpha$, а ускорение $a = mv^2/R$, и (135) примет вид:

$$mg\cos\alpha + N = \frac{mv^2}{R},$$

откуда получаем:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\cos\alpha\right).$$

Подставляя численные значения m, v, R и g, а также $\alpha = \pi$ — нижняя точка, $\alpha = 0$ — верхняя точка и $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — средняя точка, находим соответственно 2,1, 0,7 и 1,5 кН.

О т в е т: 2,1; 0,7 и 1,5 кН.

Задача 50. Велосипедист едет по круглой горизонтальной площадке радиусом R. Коэффициент трения зависит только от расстояния r до центра O площадки как $k = k_0(1 - (2/R))$, где k_0 — постоянная. Найти радиус окружности с центром O, по которой велосипедист может ехать с максимальной скоростью. Какова эта скорость?

Р е ш е н и е. При движении велосипедиста по кругу его тангенциальное ускорение равно нулю. При изменении радиуса движения будет меняться нормальное ускорение, а также коэффициент трения. Радиус окружности и максимальная скорость, с которой по ней может двигаться велосипедист, определяются из условия:

$$\frac{mv^2}{r} = mgk_0\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Решая это уравнение относительно v, находим

$$v = \sqrt{\frac{gk_0}{R}\,(Rr - r^2)}. \tag{136}$$

Из равенства нулю $\dfrac{dv}{dr}$ получаем r:

$$\frac{dv}{dr} \sim R - 2r = 0,$$

$$r = \frac{R}{2}\,.$$

По знаку второй производной убеждаемся, что $r = R/2$ соответствует максимальному значению скорости:

$$\frac{d^2v}{dr^2} \sim -2 < 0.$$

Подставляем $r = \dfrac{R}{2}$ в (136) и определяем $v_{\max}$:

$$v_{\max} = \frac{\sqrt{k_0 gR}}{2}\,.$$

О т в е т: $r = \dfrac{R}{2}$; $v_{\max} = \sqrt{k_0 gR}/2$.

Задача 51. Автомашина движется равномерно по горизонтальному пути, имеющему форму синусоиды $y = b\sin(x/\alpha)$, где b и α — некоторые постоянные. Коэффициент трения между колесами и дорогой равен k. При какой скорости движение автомашины будет происходить без скольжения?

Р е ш е н и е. Автомашина будет двигаться без скольжения, пока нормальное ускорение будет обеспечиваться силой трения. Из решения задачи 49 следует, что в высшей точке траектории сила, действующая на автомобиль, а следовательно, и сила, с которой автомобиль действует на дорогу, будет при всех прочих равных условиях минимальна Это хорошо известно любому, кто хотя бы раз сидел за рулем транспортного средства. Поэтому максимально возможную скорость будем определять для горба синусоиды, которая имеет координату $x = \alpha\pi/2$. В этой точке автомашина начнет двигаться с проскальзыванием, когда центростремительное ускорение сравняется с ускорением, обеспечивающим силу трения, т. е.

$$kg = -\frac{v^2}{R}\,. \tag{137}$$

Знак «минус» указывает на то, что эти ускорения направлены в противоположные стороны. Остается найти величину R, равную радиусу кривизны синусоиды. Для этого воспользуемся формулой, которую мы уже применяли в задаче 19

$$R = \frac{[1-(y')^2]^{3/2}}{y''}\,. \tag{138}$$

Дважды берем производную от $y = b\sin x/\alpha$, подставляем полученные значения при $x = \alpha\pi/2$ в (138), результат — в (137) и, выражая оттуда v, находим

$$v \leqslant \alpha\sqrt{\frac{kg}{b}}.$$

О т в е т: $v \leqslant \alpha\sqrt{\frac{kg}{b}}$.

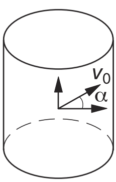


Рис. 37

Задача 52. Частица массой m движется ко внутренней гладкой поверхности вертикального цилиндра радиусом R. Найти силу давления частицы на стенку цилиндра, если в начальный момент ее скорость равна v_0 и составляет угол α с горизонтом.

Р е ш е н и е. Разложим v_0 на две составляющие: $v_0 \sin\alpha$ — параллельную оси цилиндра, $v_0\cos\alpha$ — параллельную основанию цилиндра. Понятно, что составляющая $v_0\sin\alpha$ обеспечивает движение частицы вертикально вверх, и никакого давления на стенку за счет этого движения частица не оказывает, а составляющая $v_0\cos\alpha$ вызывает движение частицы по окружности и, как следствие этого, возникновение центростремительной силы. Величина этой силы и равна силе давления, оказываемой частицей на стенку цилиндра

$$F = \left(\frac{mv_0^2}{R}\right)\cos^2\alpha.$$

О т в е т: $F = \left(\frac{mv_0^2}{R}\right)\cos^2\alpha$.

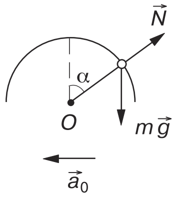


Рис. 38

Задача 53. Небольшое тело поместили на вершину гладкого шара радиусом R. Затем шару сообщили в горизонтальном направлении постоянное ускорение $\vec{a}_0$, и тело начало скользить вниз. Найти скорость тела относительно шара в момент отрыва.

Р е ш е н и е. Запишем основное уравнение динамики в проекциях на орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ (рис. 38):

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - ma\cos\theta, \tag{139}$$

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta + ma\sin\theta - N. \tag{140}$$

Учитывая, что

$$dt = \frac{dl}{v} = \frac{R\,dv}{v},$$

где dl — элемент пути, пройденный телом за время dt, перепишем (139) в виде

$$v\,dv = (g\sin\theta - a\cos\theta)R\,d\theta.$$

Проводя интегрирование

$$\int\limits_0^v v\,dv = R\int\limits_0^\theta (g\sin\theta - a\cos\theta)d\theta,$$

находим

$$\frac{v^2}{2} = -R[(g\cos\theta + a\sin\theta) - g].$$

Поскольку в момент отрыва $N = 0$, перепишем последнее уравнение с учетом (140):

$$\frac{v^2}{2} = -v^2 + Rg,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2Rg}{3}}.$$

Самостоятельно решите задачу 1.95 из [2] и сравните результаты.

О т в е т: $v = \sqrt{\dfrac{2Rg}{3}}$.

Глава 3

Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса

В физике существует несколько основополагающих принципов или законов, связанных с фундаментальными свойствами времени и пространства. Эти принципы играют в современной науке, и не только в физике, настолько важную роль, что носят название *основных законов сохранения*. Это *законы сохранения импульса, энергии и момента импульса*.

Закон сохранения импульса связан с однородностью пространства, закон сохранения энергии — с однородностью времени, закон сохранения момента импульса — с изотропностью пространства.

Действие этих законов далеко простирается за рамки классической механики. Это микро- и макромир, элементарные частицы и огромные массы, весь спектр скоростей от малых до субсветовых. Кроме того, эти законы находят широкое инженерно-техническое применение в прикладных науках. До сих пор учеными не обнаружено ни одного случая отклонения от них. Их роль в изучении физической картины мира обусловлена следующими причинами.

1. Законы сохранения не зависят ни от траекторий частиц, ни от характера действующих сил, поэтому они дают возможность с помощью уравнений динамики исследовать механические процессы, не вникая в их детальное рассмотрение.
2. Законы сохранения не зависят от характеристик действующих сил, поэтому могут быть использованы даже тогда, когда силы вообще неизвестны.
3. Даже в тех случаях, когда силы в точности известны, многие задачи, например задачу о движении многих частиц, лучше решать с помощью законов сохранения.

Закон сохранения импульса (количества движения). «Я принимаю, что во Вселенной есть известное количество движения, которое никогда не увеличивается, не уменьшается, и, таким образом, если одно тело приводит в движение другое, то теряет столько своего движения, сколько его сообщает. Так, если камень падает на землю <...> Я допускаю, что он <...> передает ей свое движение. Но так как часть Земли, приведенная в движение, содержит в себе в тысячу, например, раз более материи, чем сколько заключается в камне, то <...> он может сообщить только в тысячу раз меньшую скорость» (Рене Декарт — неизвестному адресату).

Вероятно, это был впервые сформулированный закон сохранения импульса (количества движения). Второе название, по мнению автора, более верно отражает суть.

По определению, импульс частицы определяется выражением

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v},$$

где m и $\overrightarrow{v}$ — ее масса и скорость.

Обратите внимание на то, что $\overrightarrow{P}$ величина векторная. Декарт же в своих расчетах полагал количество движения скалярной величиной, вследствие чего все его расчеты оказались неверными.

Для изолированной материальной точки закон сохранения импульса является следствием второго закона Ньютона, согласно которому при отсутствии действующих на частицу сил ее скорость, а следовательно, и импульс, не меняются. В случае большего количества частиц закон сохранения импульса справедлив лишь при некоторых ограничениях. Система, в которой ни на одно из ее тел не действуют другие тела, кроме включенных в систему, называется *замкнутой системой.*

Силы, действующие между телами, образующими замкнутую систему, называют *внутренними силами.*

Теперь установим связь между третьим законом Ньютона и законом сохранения импульса для замкнутой системы. Для этого перепишем основное уравнение динамики (88) в виде

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt} = \overrightarrow{F}, \tag{141}$$

т. е. *производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе.*

Рассмотрим две частицы, имеющие импульс соответственно $\overrightarrow{P}_1$ и $\overrightarrow{P}_2$. Тогда при их столкновении, согласно третьему закону Ньютона, можем записать

$$\frac{d\overrightarrow{P}_1}{dt} = -\frac{d\overrightarrow{P}_2}{dt}$$

или

$$\frac{d(\overrightarrow{P}_1 + \overrightarrow{P}_2)}{dt} = 0,$$

откуда

$$\overrightarrow{P}_1 + \overrightarrow{P}_2 = m_1\overrightarrow{v}_1 + m_2\overrightarrow{v}_2 = \text{const}.$$

Читатель самостоятельно может обобщить этот результат на любое число частиц. Таким образом, для замкнутой системы закон сохранения импульса запишется в виде

$$\overrightarrow{P} = \sum \overrightarrow{P}_i(t) = \text{const}. \tag{142}$$

Заметьте, что в (142) импульс любой частицы системы зависит от времени. Однако при убыли импульса какой-либо части системы у оставшейся части импульс вырастает ровно на такую же величину. Выражение (142) можно переписать для компонент x, y, и z в виде

$$\sum P_{ix}(t) = \text{const}, \quad \sum P_{iy}(t) = \text{const}, \quad \sum P_{iz}(t) = \text{const}.$$

Сформулируем закон сохранения импульса для замкнутой системы следующим образом: *полный импульс замкнутой системы есть величина постоянная.*

Рассмотрим теперь *незамкнутую систему*, т. е. такую систему, на каждую точку которой действуют внешние силы со стороны каких-либо других тел, не входящих в данную систему. В этом случае равенство (142) уже не будет выполняться, т. е. импульс системы не будет постоянным. Рассмотрим незамкнутую систему, на каждую точку которой действуют внешние силы, не входящие в нее. Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{d(m_1\overrightarrow{v}_1)}{dt} = F_{12} + F_{13} + \ldots + F_1, \\ &\frac{d(m_2\overrightarrow{v}_2)}{dt} = F_{21} + F_{31} + \ldots + F_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{143}$$

где F_{ij} — сила, действующая на i-ю частицу со стороны j-й; F_i — внешние силы, действующие на i-ю частицу.

Если мы сложим эти уравнения, то сумма всех $F_{ij} = 0$, так как для любой силы F_{ij} всегда найдется сила, равная по величине и противоположная по направлению, т. е. $-F_{ij}$. Таким образом, выражение (143) примет вид

$$\frac{d\sum(m_i\vec{v}_i)}{dt} = \sum \vec{F}_i \qquad (144)$$

или

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{\text{внешн.}}, \qquad (145)$$

где $\vec{P}$ — общий импульс системы; $\vec{F}_{\text{внеш.}}$ — результирующая всех внешних сил.

Разделяя переменные и проводя интегрирование, находим

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \int\limits_0^t \vec{F}_{\text{внеш.}}\, dt, \qquad (146)$$

т. е. *приращение импульса системы равно импульсу результирующей всех внешних сил за соответствующий промежуток времени.*

Центр масс (***Ц-система***)***.*** В любой системе частиц имеется одна точка C, называемая *центром масс*, которая обладает рядом интересных и важных свойств. Главным среди них является то, что *центр масс любой системы частиц движется так, как если бы вся масса системы была сосредоточена в этой точке и к ней были бы приложены внешние силы.*

Положение точки центра масс относительно начала координат характеризуется радиусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m}\sum m_i\vec{r}_i, \qquad (147)$$

где m_i и r_i — масса и радиус-вектор i-й частицы; m — масса всей системы.

Можно показать, что центр масс системы из двух частиц с массами m_1 и m_2 находится на прямой, их соединяющей, в точке C, которая делит расстояние между этими частицами в отношении $l_1 : l_2 = m_2 : m_1$. Продифференцировав (147) по времени, найдем *скорость* $\vec{V}_C$ *центра масс*

$$\vec{V}_C = \frac{1}{m}\sum m_i\vec{V}_i;$$

импульс же системы частиц равен

$$\vec{P} = m\vec{V}_C. \qquad (148)$$

Переписав уравнение (145) с учетом (148), получаем *уравнение движения центра масс*, которое по форме совпадает с основным уравнением динамики

$$m\,\frac{d\overrightarrow{V}_C}{dt} = \overrightarrow{F}_{\text{внеш.}}. \tag{149}$$

Здесь $\overrightarrow{F}_{\text{внеш.}}$ — результирующая всех внешних сил, действующих на систему.

Из (149) следует, что если $\overrightarrow{F}_{\text{внеш.}} = 0$, то $\overrightarrow{V}_C = \text{const}$, следовательно, $\overrightarrow{P} = \text{const}$. Таким образом, *если центр масс движется равномерно и прямолинейно, импульс системы сохраняется.*

Решение многих задач значительно упрощается, если пользоваться системой отсчета в которой центр масс покоится. Систему отсчета, связанную с центром масс, называют *Ц-системой.* В Ц-системе *полный импульс системы частиц всегда равен нулю.*

Работа. Одним из наиболее широко используемых понятий в физике является понятие *работы.* Если точка приложения силы $\overrightarrow{F}$ совершает элементарное перемещение Δr, то говорят, что сила $\overrightarrow{F}$ совершает элементарную работу

$$\delta A = \overrightarrow{F}\,d\overrightarrow{r}\cos\alpha = F_S\,dS, \tag{150}$$

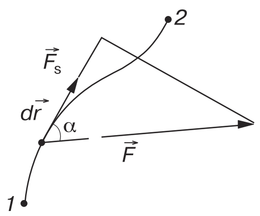


Рис. 39

где α — угол между векторами $\overrightarrow{F}$ и $d\overrightarrow{r}$, $dS = |dr|$ — элементарный путь, F_S — проекция $\overrightarrow{F}$ на $d\overrightarrow{r}$ (рис. 39). Отсюда следует важный вывод — *работа производится силой.*

Величина δA — алгебраическая. В зависимости от угла между векторами $\overrightarrow{F}$ и $d\overrightarrow{r}$ она может быть как положительной, так и отрицательной, в частности равной нулю (если $\overrightarrow{F} \perp d\overrightarrow{r}$, т. е. $\overrightarrow{F}_S = 0$).

Вообще говоря, понятие работы в физике и это же понятие в житейском смысле различны. Представьте себе, что вы удерживаете груз на вытянутых руках либо идете по горизонтальной поверхности. В первом случае $dS = 0$, во втором направление силы тяжести перпендикулярно направлению движения, и, согласно (150), $\delta A = 0$. Постарайтесь ответить на вопрос, в каком случае работа все же совершается.

Интегрируя (150) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, находим *работу силы* $\overrightarrow{F}$ на данном пути

$$A = \int\limits_1^2 \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = \int\limits_1^2 F_S\, dS. \tag{151}$$

Отметим один чрезвычайно важный факт, следующий из (151): если сила направлена в одну сторону, а тело движется в другую, то *работу совершает только составляющая силы в направлении перемещения.*

Допустим, тело под действием силы $\overrightarrow{F}$ сместилось на расстояние $\Delta\overrightarrow{r}$. Тогда, раскладывая $\Delta\overrightarrow{r}$ на составляющие Δr_x, Δr_y и Δr_z, а $\overrightarrow{F}$ — на составляющие F_x, F_y и F_z, можно сказать, что общая работа A будет равна

$$A = F_x\Delta r_x + F_y\Delta r_y + F_z\Delta r_z. \tag{152}$$

Еще одно важное обстоятельство: *выражение* (151) *справедливо не только для частицы, но и вообще для любого тела* (*или системы тел*). *При этом под* $d\overrightarrow{r}$ *и* dS *следует понимать перемещение точки приложения силы* $\overrightarrow{F}$.

Вспомним геометрический смысл определенного интеграла: площадь, ограниченная кривой, осью абсцисс и ординатами x_1 и x_2. Из рис. 40 легко видеть, что элементарная работа δA численно равна площади заштрихованной полоски, а работа на пути от точки 1 до точки 2 — площади фигуры, ограниченной кривой, ординатами 1 и 2 и осью S.

Поле. Одним из наиболее сложных понятий современной физики является понятие *поля.* Допустим, мы помещаем материальное тело

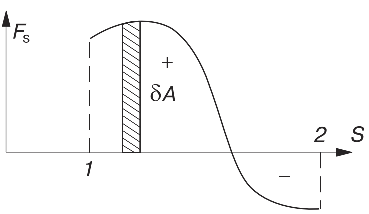


Рис. 40

в какую-либо точку пространства и замечаем, что на него действует сила, направленная по радиусу-вектору $\overrightarrow{R}$. Тогда можно сказать, что материальное тело находится в *поле сил тяжести*. Очевидно, что поле есть объективная реальность и существует независимо от того, имеется ли в точке с радиусом-вектором $\overrightarrow{R}$ материальное тело либо нет. А сила, начинающая действовать на помещенное в поле материальное тело, является индикатором наличия этого поля, т. е. его следствием. Если поле не зависит от времени, то оно называется *стационарным*. Имеются стационарные поля, в которых создаваемая ими сила, действующая на материальное тело, зависит только от положения тела. Такие силы называются *консервативными*.

В общем случае работа зависит от траектории. В случае же консервативных сил

$$\oint F_{\text{конс.}}\, ds = 0.$$

Отсюда следует важный вывод — *работа, совершаемая консервативными силами, зависит лишь от положения конечной и начальной точек траектории.*

К консервативным силам относятся сила тяжести, электростатическая сила и т. д. Все силы, не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными*. Это силы, работа которых зависит от пути, например силы трения и сопротивления.

Любое силовое поле вызывается действием определенных тел, поэтому взаимодействие материального тела через силовое поле есть взаимодействие с другим материальным телом. Силы, зависящие только от расстояния между взаимодействующими телами и направленные по прямой, проходящей через эти тела, называются *центральными*. К ним относятся гравитационные, упругие и кулоновские силы. *Центральные силы являются консервативными.*

Работа центральной силы на произвольном пути от точки 1 до точки 2 дается выражением

$$A_{12} = \int\limits_1^2 f(r)\, dr.$$

Предположим, что имеется центральное поле, создаваемое системой неподвижных тел, действующих на тело M с силами $\overrightarrow{F}_1$, $\overrightarrow{F}_2, \ldots$, каждая из которых является центральной. В этом случае работа результирующих сил при перемещении материального тела M из одной точки в другую равна алгебраической сумме работ отдельных сил. А так как работа каждой из этих сил не зависит от пути, то и работа результирующей силы не зависит от пути.

Следовательно: *поскольку центральные силы обладают такими свойствами, они являются консервативными.*

Мощность. Для характеристики эффективности работы механизма важно знать, как быстро он выполняет работу. Для этого вводится понятие *мощности.* Мощность — это работа, совершаемая силой за единицу времени. Если это отношение не остается постоянным, то необходимо перейти к пределу:

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{\overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{S}}{dt} = \overrightarrow{F}\,\overrightarrow{v}. \tag{153}$$

Следует отметить, что понятие мощности применимо не только к механическим системам, но и вообще к любой силе, совершающей работу.

Важно еще запомнить вот что: когда говорят о какой-либо работе (мощности), необходимо четко представлять себе, *какая именно сила (силы) эту работу совершает.*

Потенциальная энергия. Это понятие связано с особенностью консервативных сил, работа которых не зависит от траектории, а зависит лишь от координаты начальной и конечной точек траектории материального тела.

Перепишем выражение (151) в виде

$$A_{12} = \int\limits_1^2 F\, dr = -[U(2) - U(1)] = U(1) - U(2). \tag{154}$$

Величины $U(2)$ и $U(1)$ называются *потенциальной энергией.* Теперь понятно, что потенциальная энергия — это способность консервативных сил совершать работу, поэтому-то в (154) перед скобками и стоит знак «минус», так как из-за совершения работы на пути 1—2 потенциальная энергия убывает. Запишем выражение для элементарной работы δA на пути $d\overrightarrow{r}$:

$$\delta A = \overrightarrow{F}\, d\overrightarrow{r} = -dU,$$

откуда

$$F_S\, dS = -dU, \tag{155}$$

где $\vec{F}\,d\vec{r} = F_S\,dS$, $dS = |d\vec{r}|$ — элементарный путь, а F_S — проекция $\vec{F}$ на перемещение $d\vec{r}$.

Перепишем (155) в виде

$$F_S = -\frac{\partial U}{\partial S}\,.$$

Для трехмерного случая

$$\vec{F} = -\Big(\frac{\partial U}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\vec{k}\Big) = -\operatorname{grad} U = -\nabla U.$$

Рассмотрим вопрос о связи потенциальной энергии и состояния равновесия. Материальное тело пребывает в состоянии равновесия в том случае, если при отклонении его от этого состояния в ту или иную сторону возникают силы, возвращающие его в состояние равновесия. Эти силы совершают положительную работу, т. е. если это, например, гравитационные или упругие силы, они приводят к уменьшению потенциальной энергии. Отсюда понятно, что положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии. Вывод: *состояние равновесия устойчиво в том и только в том случае, когда ему соответствует минимум потенциальной энергии.*

Кинетическая энергия. Способность тел совершать работу, кроме всего прочего, определяется и скоростью их движения. Рассмотрим подробнее этот вопрос. Пусть частица массой m движется под действием силы F, которая может представлять собой результирующую некоторых сил. Тогда элементарная работа, совершаемая этой силой, равна

$$\delta A = \vec{F}\,d\vec{r}\,.$$

Учитывая, что $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$ и $\vec{F} = \dfrac{m\,d\vec{v}}{dt}$, имеем

$$\delta A = m\vec{v}\,d\vec{v}\,,$$

или, в скалярном виде,

$$\delta A = mv\,dv = d\Big(\frac{mv^2}{2}\Big).$$

Таким образом, работа силы $\vec{F}$ приводит к приращению величины $mv^2/2$, которая называется *кинетической энергией*

$$K = \frac{mv^2}{2}\,. \qquad (156)$$

При перемещении тела из точки 1 в точку 2

$$K_2 - K_1 = A_{12}, \tag{157}$$

т. е. приращение кинетической энергии частицы на некотором перемещении равно алгебраической сумме работ всех сил, действующих на частицу в направлении перемещения (см. задачу 83).

Обратите внимание: потенциальная и кинетическая энергии не являются абсолютными величинами и определяются с точностью до постоянной. Так, потенциальная энергия лежащего на столе тела может быть измерена относительно поверхности Земли, уровня моря, пола и т. д., а величина кинетической энергии зависит от относительной скорости системы отсчета.

Закон сохранения энергии. Как показано выше, работа сторонних сил идет на изменение кинетической и потенциальной энергии системы, т. е.

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = A_{\text{стор.}}. \tag{158}$$

Величина

$$E = K + U \tag{159}$$

называется *полной механической энергией* E. Из (159) следует, что полная механическая энергия может изменяться за счет приложения сторонних сил. В противном же случае она постоянна, т. е.

$$E = K + U = \text{const}. \tag{160}$$

Выражение (158) представляет один из самых, а возможно, и самый фундаментальный закон природы — *закон сохранения энергии.*

Момент импульса. Моментом импульса частицы A относительно точки O называют вектор $\overrightarrow{M}$, равный векторному произведению векторов $\overrightarrow{r}$ и $\overrightarrow{p}$

$$\overrightarrow{M} = [\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{p}] = rp\sin\alpha = lp, \tag{161}$$

где α — угол между $\overrightarrow{r}$ и $\overrightarrow{p}$, $l = r\sin\alpha$ — *плечо* (рис. 41).

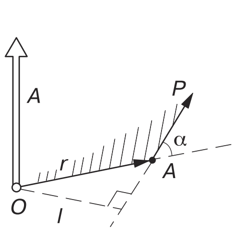


Рис. 41

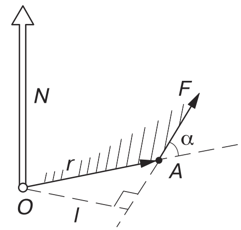


Рис. 42

Продифференцируем (161) по времени

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{r}}{dt}, \overrightarrow{P}\right] + \left[\overrightarrow{r}, \frac{d\,\overrightarrow{P}}{dt}\right].$$

Учитывая, что

$$\left[\overrightarrow{r}, \frac{d\,\overrightarrow{P}}{dt}\right] = 0,$$

и поскольку точка O неподвижна, а $d\,\overrightarrow{p}/dt = \overrightarrow{F}$, то, следуя второму закону Ньютона, получаем

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = [\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{F}].$$

Величину $[\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{F}]$ называют *моментом силы* F относительно точки O (рис. 42). Векторы $\overrightarrow{N}$ и $\overrightarrow{M}$ являются аксиальными и образуют правостороннюю систему. Модуль $N = lF$, где l — плечо вектора $\overrightarrow{F}$ относительно точки O (рис. 42).

Теперь мы подошли к очень важному выводу:

$$\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = N. \qquad (162)$$

Это *уравнение моментов*. Из него следует, что если $\overrightarrow{N} = 0$, то $\overrightarrow{M} = \text{const}$, т. е. *если относительно точки O выбранной системы отсчета момент всех действующих на частицу сил равен нулю в течение интересующих нас промежутков времени, то относительно этой точки момент импульса частицы остается постоянным в течение этого времени.* Это и есть *закон сохранения момента импульса.*

Рекомендации по решению задач

1. При решении задач на закон сохранения импульса необходимо разделить внутренние и внешние силы. Помните, что внутренние силы не могут изменить характер движения системы как целого, это могут сделать лишь внешние силы. Если вдоль какой-либо координатной оси или направления суммарная составляющая внешних сил равна нулю, то вдоль этого направления система оказывается замкнутой, и вдоль этой оси можно записать закон сохранения импульса.

2. Выбирайте расположение осей координат и их направление таким образом, чтобы проекции векторов скоростей, импульсов, сил тяжести, а также скалярная формула второго закона Ньютона имели наиболее простой вид (например, задачи 56, 61, 62).

3. При решении задач на разрыв снаряда, распад частицы и т. п., когда упавший под местом разрыва осколок имел какую-либо скорость либо достиг поверхности земли за определенное время (задача 64), очень удобно пользоваться параллелограммом импульсов (рис. 43). Строго говоря, в задачах такого типа считать систему замкнутой нельзя, так как на осколки действуют внешние силы: сила тяжести, сопротивление воздуха и т. д., однако время разрыва (распада) крайне мало, поэтому изменением импульса можно пренебречь, считая за этот промежуток времени систему замкнутой. Остается открытым вопрос о направлении вектора скорости $\vec{v}$, без чего решение невозможно. Для этого удобно пользоваться соотношением, полученным в задаче 16, где выведены все основные уравнения для тела, движущегося в гравитационном поле Земли. Так, если в условии задачи дано время падения осколка на Землю t под точкой разрыва, то необходимо рассчитать время t_0 по следующей формуле:

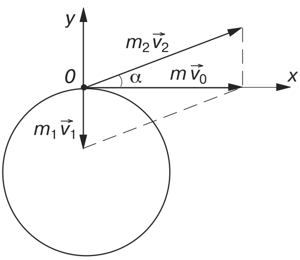


Рис. 43

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

где h — высота разрыва снаряда.

При $t < t_0$ вектор $\vec{v}_1$ направлен вниз, при $t > t_0$ вверх, а при $t = t_0$ $\vec{v}_1 = 0$.

4. В задачах типа 78 и 81, когда действующая на тело сила переменна, второй закон Ньютона неприменим. В этом случае следует пользоваться теоремой об изменении полной механической энергии системы.

5. Будьте внимательны при использовании формулы (154). Помните, что она применима только в случае консервативных стационарных полей.

6. При решении задач типа задачи 86, где пуля попадает в подвешенный груз и требуется определить либо скорость пули в момент попадания, либо угол, на который отклонится подвеска, либо высоту, на которую поднимается тело, студенты очень часто полагают, что кинетическая энергия пули перейдет в потенциальную энергию тела, поднявшегося на высоту h.

На самом же деле в потенциальную энергию перейдет не кинетическая энергия пули, а кинетическая энергия системы пуля—тело, а это далеко не одно и то же.

Задачи к главе 3

Задача 54. Через блок, укрепленный на потолке комнаты, перекинута нить, на концах которой подвешены тела массами m_1 и m_2. Массы блока и нити пренебрежимо малы, трения нет. Найти ускорение центра масс этой системы.

Р е ш е н и е. На оба тела m_1 и m_2 действуют внешние силы: сила тяжести и сила со стороны блока T (рис. 44). Поэтому уравнение движения центра масс (149) запишется в виде

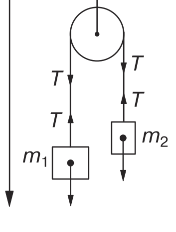


Рис. 44

$$m\,\frac{d\overrightarrow{V}_c}{dt} = \overrightarrow{F}_{\text{вн.}} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{g} - 2T. \qquad (163)$$

Теперь необходимо найти выражение для T. Выберем положительное направление оси OX вниз и запишем для обоих грузов основное уравнение динамики в проекциях на эту ось, предполагая, что направление движения груза m_1 совпадает с положительным направлением оси OX:

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a, \\ m_2 g - T = -m_2 a. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g.$$

Отсюда

$$F_{\text{вн.}} = (m_1 + m_2)g - \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, g = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_1 + m_2}\, g.$$

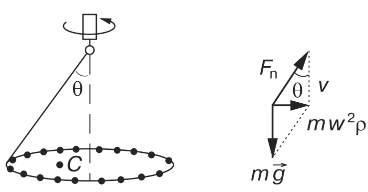
Учитывая, что в уравнении (162) $m = m_1 + m_2$, находим:

$$\vec{a}_c = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}\, \vec{g}.$$

О т в е т: $\vec{a}_c = \dfrac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2}\, \vec{g}$.

Задача 55. Замкнутая цепочка A массой $m = 0{,}36$ кг соединена нитью с концом вертикальной оси центробежной машины (рис. 45, *а*) и вращается с угловой скоростью $\omega = 35$ рад/с. При этом нить составляет угол $\theta = 45^\circ$ с вертикалью. Найти расстояние от центра масс цепочки до оси вращения, а также силу натяжения нити.

Р е ш е н и е. При равномерном вращении центр масс цепочки в вертикальном направлении не движется, следовательно, вертикальная составляющая силы натяжения нити $F_{\text{н}}$ компенсирует силу тяжести mg (рис. 45, *б*). Горизонтальная же составляющая силы натяжения нити постоянна по модулю и все время направлена к оси вращения. Радиус окружности, по которой вращается центр масс



а *б*

Рис. 45

(точка C), находим из выражения

$$m\omega^2\rho = mg\,\mathrm{tg}\,\theta,$$

откуда

$$\rho = \frac{g\,\mathrm{tg}\,\theta}{\omega^2} = 0{,}8 \text{ см}.$$

Находим силу натяжения нити $F_{\text{н}}$:

$$F_{\text{н}} = \frac{m\omega^2\rho}{\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta} = 5 \text{ Н}.$$

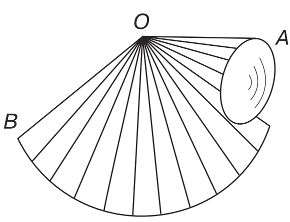
Ответ: $\rho = 0{,}8$ см; $F_{\text{н}} = 5$ Н.

Задача 56. Круглый конус A массой $m = 3{,}2$ кг и с углом полураствора $\alpha = 10°$ катится равномерно без скольжения по круглой конической поверхности B так, что его вершина O остается неподвижной (рис. 46, *а*). Центр масс конуса A находится на одном уровне с точкой O и отстоит от нее на $l = 17$ см. Ось конуса движется с угловой скоростью $\omega = 1{,}0$ рад/с. Найти силу трения покоя, действующую на конус A.

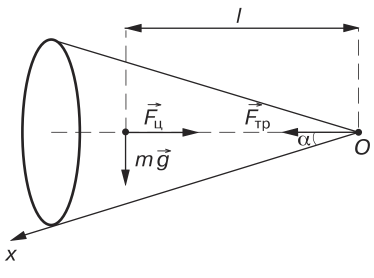
Решение. Расположим ось OX, как показано на рис. 46, *б*. Тогда сила трения покоя будет складываться из проекции силы тяжести на ось OX и проекции силы реакции, которая равна по величине и противоположна по направлению проекции центростремительной силы:

$$F_{\text{тр}} = mg\left[\sin\alpha + \left(\frac{\omega^2 l}{g}\right)\cos\alpha\right] = 6 \text{ Н}.$$

Ответ: $F_{\text{тр}} = 6$ Н.



а



б

Рис. 46

Задача 57. Мотоциклист едет по вертикальной цилиндрической стенке радиусом $R = 5{,}0$ м. Центр масс человека с мотоциклом расположен на $l = 0{,}8$ м от стенки. Коэффициент трения между колесами и стенкой $k = 0{,}34$. С какой минимальной скоростью может ехать мотоциклист по горизонтальной окружности?

Р е ш е н и е. Минимальная скорость движения мотоцикла по горизонтальной поверхности должна быть такой, чтобы сила трения покоя

$$F_{\text{тр}} = \frac{kmv^2}{R-l}$$

уравновешивала силу тяжести мотоцикла с мотоциклистом

$$F_{\text{тяж.}} = mg.$$

Отсюда

$$\frac{kv_{\min}^2}{R-l} = g$$

или

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{(R-l)g}{k}}.$$

О т в е т: $v_{\min} = \sqrt{\dfrac{(R-l)g}{k}}$.

Задача 58. Система состоит из двух шариков массами m_1 и m_2, которые соединены между собой пружинкой. В момент $t = 0$ шарикам сообщили скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, после чего система начала двигаться в однородном поле тяжести Земли. Найти зависимость от времени импульса этой системы в процессе движения и радиуса-вектора ее центра масс относительно его начального положения.

Р е ш е н и е. В момент $t = 0$ импульс системы, состоящей из двух шариков, равен

$$\vec{P}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2.$$

После начала движения в однородном поле тяжести Земли импульс за промежуток времени t возрастает на величину $m\vec{g}t$ и становится равным

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_0 + m\vec{g}t.$$

Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_c = \vec{v}_c t + \frac{\vec{g}t^2}{2},$$

где $\vec{v}_c$ — скорость движения центра масс

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m}\sum m_i \vec{v}_i = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $\vec{P}(t) = \vec{P}_0 + m\vec{g}t$.

Задача 59. Частица 1 столкнулась с частицей 2, в результате чего возникла составная частица. Найти ее скорость $\vec{v}$ и модуль v, если масса частицы 2 в $\eta = 2{,}0$ раза больше, чем частицы 1, а их скорости перед столкновением

$$\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$
$$\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 5\vec{j},$$

где компоненты скорости в СИ.

Решение. Запишем закон сохранения импульса для столкновения частиц 1 и 2

$$m\vec{v}_1 + \eta m\vec{v}_2 = (m + \eta m)\vec{v}, \tag{164}$$

где $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}$ — скорости первой, второй и составной частиц соответственно, откуда

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_1 + \eta\vec{v}_2}{1 + \eta}.$$

Перепишем (164) в виде

$$2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\eta\vec{i} - 5\eta\vec{j} = (1 + \eta)\vec{v}.$$

Подставляя $\eta = 2$, получаем

$$\frac{10}{3}\vec{i} - \frac{7}{3}\vec{j} = \vec{v},$$

откуда

$$v = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} \approx 4 \text{ м/с}.$$

Ответ: $\vec{v} = \dfrac{\vec{v}_1 + \eta\vec{v}_2}{1 + \eta}$; $v \approx 4$ м/с.

Задача 60. Ствол пушки направлен под углом $\theta = 45^\circ$ к горизонту. Когда колеса пушки закреплены, скорость снаряда, масса которого в $\eta = 50$ раз меньше массы пушки, $v_c = 180$ м/с. Найти скорость пушки сразу после выстрела, если колеса ее освободить.

Решение. Суммарный импульс системы снаряд—пушка $U(m + \eta m)$, где U — скорость пушки в момент вылета снаряда, m — масса снаряда.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$U(m + \eta m) = v_0 \cos\theta m,$$

откуда

$$U = \frac{v_0 \cos\theta}{1 + \eta} = 25 \text{ м/с}.$$

Ответ: $U = 25$ м/с.

Задача 61. Пушка массой M начинает свободно скользить вниз по гладкой плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Когда пушка прошла путь l, произвели выстрел, в результате которого снаряд вылетел с импульсом $\overrightarrow{p}$ в горизонтальном направлении, а пушка остановилась. Пренебрегая массой снаряда, найти продолжительность выстрела.

Решение. Расположим ось OX, как показано на рис. 47. К моменту выстрела орудие прошло путь l и достигло скорости v

$$v = at = g \sin\alpha t. \tag{165}$$

Из соотношения

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{g \sin\alpha t^2}{2}$$

находим

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \sin\alpha}}. \tag{166}$$

Подставляя (166) в (165), определяем скорость и импульс пушки в момент остановки

$$v = \sqrt{2lg \sin\alpha},$$
$$P_n = Mv = M\sqrt{2lg \sin\alpha}.$$

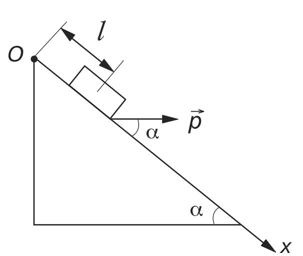


Рис. 47

Приращение проекции импульса на ось OX, которое незамкнутая система пушка—снаряд получает за время выстрела τ,

$$P\cos\alpha - P_n = P\cos\alpha - M\sqrt{2lg\sin\alpha} = Mg\sin\alpha\tau,$$

откуда

$$\tau = \frac{P\cos\alpha - M\sqrt{2lg\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}.$$

Ответ: $\tau = \dfrac{P\cos\alpha - M\sqrt{2lg\sin\alpha}}{Mg\sin\alpha}$.

Задача 62. Две небольшие муфточки с массами $m_1 = 0{,}10$ кг и $m_2 = 0{,}20$ кг движутся навстречу друг другу по гладкому горизонтальному проводу, изогнутому в виде окружности, с постоянными нормальными ускорениями $a_1 = 3{,}0$ м/с^2 и $a_2 = 9{,}0$ м/с^2. Найти нормальное ускорение составной муфты, образовавшейся после столкновения.

Решение. Предположим, что муфточка массой m_1 движется по часовой стрелке, и примем это направление за положительное. Поскольку по условию задачи они движутся с постоянным нормальным ускорением, из соотношения

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

находим скорость муфточек в момент столкновения

$$v_1 = \sqrt{Ra_1}; \quad v_2 = \sqrt{Ra_2}. \tag{167}$$

Запишем закон сохранения импульса с учетом знаков скоростей

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1 + m_2)v,$$

где v — скорость движения составной муфты. Учитывая (167), получаем

$$m_1\sqrt{Ra_1} - m_2\sqrt{Ra_2} = (m_1 + m_2)v = (m_1 + m_2)\sqrt{Ra_n}$$

или

$$m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2} = (m_1 + m_2)\sqrt{a_n},$$

где a_n — нормальное ускорение составной муфты, откуда

$$a_n = \frac{(m_1\sqrt{a_1} - m_2\sqrt{a_2})^2}{(m_1 + m_2)^2} = 2{,}0 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_n = 2{,}0$ м/с^2.

Задача 63. В момент, когда скорость падающего тела составила $v_0 = 4{,}0$ м/с, оно разорвалось на три одинаковых осколка. Два осколка разлетелись в горизонтальной плоскости под прямым углом друг к другу со скоростью $v = 5{,}0$ м/с каждый (рис. 48). Найти скорость третьего осколка сразу после разрыва.

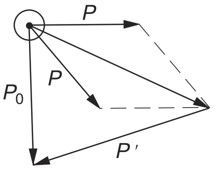


Рис. 48

Решение. Запишем закон сохранения импульса в векторном виде

$$\vec{P}_0 = \vec{P} + \vec{P} + \vec{P}', \qquad (168)$$

где $\vec{P}_0$ — импульс тела до разрыва; $\vec{P}$ — импульс осколков, разлетевшихся в горизонтальной плоскости; $\vec{P}'$ — импульс третьего осколка.

Перепишем (168) в скалярном виде

$$P' = \sqrt{P_0^2 + (2P\cos 45^\circ)^2} = \sqrt{9m^2v_0^2 + 2m^2v^2},$$

где m — масса каждого осколка.

Учитывая, что $P' = mv'$, находим

$$v' = \sqrt{9v_0^2 + 2v^2} \approx 14 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v' \approx 14$ м/с.

Задача 64. Снаряд, выпущенный со скоростью $v_0 = 100$ м/с под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту, разорвался в верхней точке O траектории на два одинаковых осколка. Один осколок упал на землю под точкой O со скоростью $v_1 = 97$ м/с. С какой скоростью упал на Землю второй осколок?

Решение. Для записи закона сохранения импульса необходимо выяснить направление вектора скорости v_1 осколка, упавшего на землю под точкой O в момент разрыва. Здесь возможны три варианта:

а) начальная скорость осколка была равна нулю, и он сразу же начал падать вертикально вниз, достигнув к концу падения скорости $v_1 = 97$ м/с;

б) начальная скорость была направлена вертикально вверх;

в) начальная скорость была направлена вертикально вниз.

Рассмотрим вариант (а). В задаче 16 мы нашли выражение для высоты подъема h

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \approx 450 \text{ м}.$$

Далее находим v_1

$$v_1 = \sqrt{2gh} \approx 97 \text{ м/с},$$

что говорит о том, что в нашем случае реализовался вариант (а). Поэтому закон сохранения импульса в проекции на ось OX запишется в виде

$$mv_0 \cos \alpha = \frac{m}{2} v_{2x},$$

откуда

$$v_{2x} = 2v_0 \cos \alpha,$$

где v_{2x} — проекция скорости v_2 на ось OX.

Результирующую скорость второго осколка при падении на Землю найдем из теоремы Пифагора (рис. 49)

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0{,}17 \text{ км/с}.$$

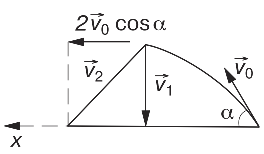


Рис. 49

О т в е т: $v_2 = 0{,}17$ км/с.

Задача 65. Плот массой M с человеком массой m покоится на поверхности пруда. Относительно плота человек совершает перемещение $\vec{l}\,'$ со скоростью $\vec{v}\,'(t)$ и останавливается. Пренебрегая сопротивлением воды, найти:

а) перемещение $\vec{l}$ плота относительно берега;

б) горизонтальную составляющую силы, с которой человек действует на плот в процессе движения.

Р е ш е н и е.

а) **I способ**

Запишем в векторном виде закон сохранения импульса системы человек—плот:

$$m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2 = 0, \qquad (169)$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ — скорости человека и плота относительно берега. С другой стороны, $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}\,'$, где $\vec{v}\,'$ — скорость человека относительно плота. Заменив $\vec{v}_1$ в (169), находим

$$\vec{v}_2 = -\frac{m}{m+M}\,\vec{v}\,'.$$

Умножая обе части на dt, получаем

$$l = -\frac{m}{m+M}\,l',$$

где l' — перемещение человека относительно плота.

II способ

Решим задачу, воспользовавшись понятием центра масс. Поскольку сопротивление воды пренебрежимо мало, результирующая всех внешних сил, действующих на систему человек—плот, равна нулю, т. е. положение центра масс данной системы в процессе движения человека остается неизменным, поэтому

$$m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 = \text{const},$$

где $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ — радиусы-векторы, характеризующие положения центра масс человека и плота относительно некоторой точки на берегу. Далее находим связь между приращениями векторов r_1 и r_2 и перемещением человека и плота относительно берега: $\Delta r_1 = l_1$, $\Delta r_1 = l_2$. Учитывая, что $l_1 = l_2 + l'$, где l' — перемещение человека относительно плота, получаем

$$l_2 = -\frac{m}{m+M}\,l'.$$

б) Горизонтальную составляющую силы $F_\text{г}$, с которой человек действует на плот в процессе движения, найдем из соотношения

$$\Delta\vec{P}_\text{пл.} = \vec{F}_\text{г}\Delta t,$$

где $\Delta P_\text{пл.}$ — изменение импульса плота за время Δt. Переходя к пределу, получаем

$$\vec{F}_\text{г} = \frac{d\vec{P}_\text{пл.}}{dt} = -\frac{mM}{m+M}\,\frac{d\vec{v}\,'}{dt}.$$

Ответ: а) $l_2 = -\dfrac{m}{m+M}\,l'$; б) $\vec{F}_\text{г} = -\dfrac{mM}{m+M}\,\dfrac{d\vec{v}\,'}{dt}$.

Задача 66. Две одинаковые тележки 1 и 2, на каждой из которых находится по одному человеку, движутся без трения по инерции навстречу друг другу по параллельным рельсам. Когда тележки поравнялись, они поменялись пассажирами, которые перепрыгнули с одной тележки на другую перпендикулярно движению тележек. В результате тележка 1 остановилась, а скорость тележки 2 стала $\overrightarrow{v}$. Найти первоначальные скорости тележек $\overrightarrow{v}_1$ и $\overrightarrow{v}_2$, если масса каждой тележки (без человека) M, а масса каждого человека m.

Р е ш е н и е. Направление направление движения первой тележки примем за положительное и запишем закон сохранения импульса для первой и второй тележки:

$$\begin{cases} M\overrightarrow{v}_1 - m\overrightarrow{v}_2 = 0, \\ -M\overrightarrow{v}_2 + m\overrightarrow{v}_1 = (M+m)v. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\overrightarrow{v}_1 = -\frac{m\overrightarrow{v}}{M-m};$$

$$\overrightarrow{v}_2 = \frac{M\overrightarrow{v}}{M-m}.$$

О т в е т: $\overrightarrow{v}_1 = -\dfrac{m\overrightarrow{v}}{M-m}$; $v_2 = \dfrac{M\overrightarrow{v}}{M-m}$.

Задача 67. Две одинаковые тележки движутся друг за другом по инерции (без трения) с одной и той же скоростью $\overrightarrow{v}_0$. На задней тележке находится человек массой m. В некоторый момент человек прыгнул в переднюю тележку со скоростью $\overrightarrow{u}$ относительно своей тележки. Имея в виду, что масса каждой тележки равна M, найти скорости, с которыми будут двигаться обе тележки после этого.

Р е ш е н и е. Импульс всей системы в результате того, что человек перепрыгнул в переднюю тележку, не изменился, поэтому

$$(2M+m)\overrightarrow{V}_0 = M\overrightarrow{V}_{\text{зад}} + (M+m)\overrightarrow{V}_{\text{пер}}, \tag{170}$$

где $\overrightarrow{V}_{\text{зад}}$ и $\overrightarrow{V}_{\text{пер}}$ — скорости задней и передней тележек после того, как человек прыгнул в переднюю тележку.

Запишем закон сохранения импульса для задней тележки:

$$(M+m)\overrightarrow{v}_0 = M\overrightarrow{v}'_{\text{зад}} + m(\overrightarrow{v}_{\text{зад}} + \overrightarrow{u}), \tag{171}$$

где $\overrightarrow{v}_{\text{зад}} + \overrightarrow{u}$ — скорость прыгнувшего человека относительно полотна дороги.

Решая совместно (170) и (171), находим:

$$\vec{v}_{\text{зад}} = \vec{v}_0 - \frac{\vec{u}m}{M+m}; \quad \vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + \frac{\vec{u}Mm}{(M+m)^2}.$$

О т в е т: $\vec{v}_{\text{зад}} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{u}m}{M+m}$; $\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_0 + \dfrac{\vec{u}Mm}{(M+m)^2}$.

Задача 68. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы с минимальным усилием переместить брусок массой m вдоль плоскости из начальной точки 1 в точку 2 (рис. 50), расстояние между которыми по горизонтали l, а по вертикали h. Коэффициент трения между бруском и плоскостью равен k, а приложенная сила $\vec{F}$ направлена под углом β к наклонной плоскости.

Р е ш е н и е. В задачах, посвященных втаскиванию грузов по наклонной плоскости, всегда оговаривается, что груз втаскивается медленно. Сила же, действующая на груз, направлена либо по касательной к траектории, либо под каким-либо углом к наклонной плоскости. На эти два обстоятельства учащиеся, как правило, не обращают внимания. На примере решения этой задачи дадим физическую интерпретацию этих условий.

При перемещении бруска на него действует четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{пр}}$ и сила $\vec{F}$. Работу совершает только составляющая силы в направлении перемещения, т. е. в нашем случае $F\cos\beta$. Далее последовательность решения такая же, как и при решении задач на закон сохранения импульса. Расположим систему координат, как показано на рис. 50, затем запишем уравнение движения бруска в векторном виде

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

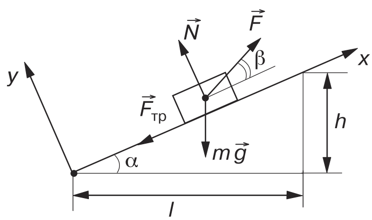


Рис. 50

Распишем уравнение движения бруска в проекциях на оси OX и OY:

$$\begin{aligned} ma &= F\cos\alpha - mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}, \\ 0 &= N + F\sin\alpha - mg\cos\alpha. \end{aligned} \tag{172}$$

Учитывая, что $F_{\text{тр}} = kN = kmg\cos\alpha$, решаем систему относительно F:

$$F = \frac{m(a + g\sin\alpha + kg\cos\alpha)}{\cos\beta + k\sin\alpha}\,. \tag{173}$$

Теперь становится ясной постановка двух условий в задачах подобного типа. Оказывается, что сила, а следовательно, и работа, зависят как от ускорения, с которым мы движем груз по наклонной плоскости, так и от угла β. Из (173) видно, что минимальная работа будет совершена при двух условиях: равномерном движении поднимаемого груза ($a = 0$), что соответствует условию задачи 74 «тело медленно втащили на горку», и оптимальном значении угла β, вопрос о котором не столь очевиден. Поскольку от β зависит лишь знаменатель (173), для того, чтобы F была минимальна, знаменатель $\varphi(\beta) = \cos\beta + k\sin\beta$ должен иметь максимальное значение. Исследуем функцию $\varphi(\beta)$ на экстремум с помощью теоремы Ферма и теоремы о второй производной в точках экстремума

$$\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} = -\sin\beta + k\cos\beta = 0; \qquad \frac{d^2\varphi(\beta)}{d\beta^2} = -\cos\beta - k\sin\beta < 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta = k, \qquad F_{\min} = \frac{mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{\sqrt{1 + k^2}}\,.$$

Работа силы $F\cos\beta$ на пути S при $F = F_{\min}$ равна

$$A = F\cos\beta S = \frac{mg(\sin\alpha + k\cos\alpha)}{\sqrt{1 + k^2}}\cos\beta S.$$

С учетом того, что

$$S\sin\alpha = h, \qquad S\cos\alpha = l, \qquad \frac{\cos\beta}{\sqrt{1 + k^2}} = \frac{1}{1 + k^2}\,,$$

получаем

$$A = \frac{mg(h + kl)}{1 + k^2}\,.$$

Ответ: $A = \dfrac{mg(h + kl)}{1 + k^2}$.

Задача 69. Однородный цилиндр находится на двух горизонтальных рельсах (рис. 51). На него намотана нить, к концу которой приложили постоянную силу F. Найти работу силы $\overrightarrow{F}$ за время, в течение которого ось цилиндра переместилась без скольжения на расстояние l, если сила:

а) горизонтальна — случай (а);

б) вертикальна — случай (б).

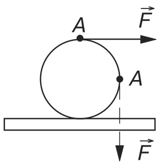


Рис. 51

Решение. Очевидно, что точка A движется относительно горизонтальных рельс со скоростью в два раза большей, чем ось цилиндра, поэтому в случае (а) $A = 2Fl$, поскольку при прохождении точкой A пути $2l$ ось цилиндра пройдет путь l. В случае (б) точка B движется относительно рельс с такой же скоростью, как и ось цилиндра, поэтому $A = Fl$.

Ответ: а) $A = 2Fl$; б) $A = Fl$.

Задача 70. Частица совершила перемещение по некоторой траектории в плоскости xy из точки 1 с радиусом-вектором $\overrightarrow{r}_1 = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$ в точку 2 с радиусом-вектором $\overrightarrow{r}_2 = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$. При этом на нее действовали некоторые силы, одна из которых $\overrightarrow{F} = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}$. Найти работу, которую совершила сила $\overrightarrow{F}$. Единицы измерения r_1, r_2 и F — в системе СИ.

Решение. По определению $A = \overrightarrow{F}\Delta\overrightarrow{r}$. В нашем случае

$$\Delta\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}_2 - \overrightarrow{r}_1 = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} = \overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}; \quad F = 3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j}.$$

Используя определение скалярного произведения, запишем:

$$A = (3\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j})(\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j}) = F_x r_x + F_y r_y = -17 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A = -17$ Дж.

Задача 71. Локомотив массой m начинает двигаться со станции так, что его скорость меняется по закону $v = \alpha\sqrt{S}$, где α — постоянная, S — пройденный путь. Найти суммарную работу всех сил, действующих на локомотив, за первые t секунд после начала движения.

Р е ш е н и е. Воспользуемся соотношением $A = T_2 - T_1$. В нашем случае $T_1 = 0$, т. е.

$$A = T_2 = \frac{mv^2}{2}\,, \tag{174}$$

где v — скорость движения локомотива после первых t секунд.

Запишем

$$S = \frac{at^2}{2}\,. \tag{175}$$

Используя известное соотношение

$$v = \sqrt{2Sa}, \tag{176}$$

с учетом $v = \alpha\sqrt{S}$ находим

$$a = \frac{v^2}{2S} = \frac{\alpha^2}{2}\,. \tag{177}$$

Подставляя (177) в (175), получаем

$$S = \frac{\alpha^2 t^2}{4}\,. \tag{178}$$

Подставляя (177) и (178) в (176), находим v^2 и, с учетом (174), суммарную работу всех сил, действующих на локомотив за первые t секунд после начала движения,

$$A = maS = \frac{m\alpha^4 t^2}{8}\,.$$

О т в е т: $A = \dfrac{m\alpha^4 t^2}{8}$.

Задача 72. Кинетическая энергия частицы, движущейся по окружности радиусом R, зависит от пройденного пути S по закону $K = \alpha S$, где α — постоянная. Найти модуль силы, действующий на частицу, в зависимости от S.

Р е ш е н и е. Поскольку из условия $K = \alpha S$ следует, что кинетическая энергия частицы зависит от пройденного пути, можно сделать вывод, что тело движется равноускоренно под действием какой-то силы $\vec{F}_{\text{внеш}}$. Для определения ускорения, действующего на тело, воспользуемся полученным в задаче 61 результатом:

$$v = \sqrt{2Sa}.$$

Отсюда с учетом

$$K = \alpha S = \frac{mv^2}{2} \tag{179}$$

находим

$$a = \frac{v^2}{2S} = \frac{\alpha}{m}$$

или

$$F_{\text{внеш.}} = ma = \alpha.$$

Поскольку частица движется по окружности, на нее действует еще и центростремительная сила. Из (179) находим

$$v^2 = \frac{2\alpha S}{m}$$

или

$$F_{\text{ц.с.}} = \frac{mv^2}{R} = \frac{2\alpha S}{R}\,.$$

Модуль силы, действующей на частицу:

$$F = \sqrt{F_{\text{внеш.}}^2 + F_{\text{ц.с.}}^2} = \alpha\sqrt{1 + \left(\frac{2S}{R}\right)^2}.$$

О т в е т: $F = \alpha\sqrt{1 + \left(\frac{2S}{R}\right)^2}$.

Задача 73. Частицы массой m попадают в область, где на них действует встречная тормозящая сила. Глубина x проникновения частиц в эту область зависит от импульса p частиц как $x = \alpha p$, где α — заданная постоянная. Найти зависимость модуля тормозящей силы от x.

Р е ш е н и е. Частица начинает терять свою кинетическую энергию, попадая в область, где на нее начинает действовать тормозящая сила F, и полностью теряет ее после проникновения на глубину x.

Запишем выражение $K_2 - K_1 = A$ для нашего случая:

$$-K_1 = A = -Fx$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = Fx. \qquad (180)$$

Из условия $x = \alpha p$ следует

$$v^2 = \frac{x^2}{\alpha^2 m^2}. \qquad (181)$$

Подставляя (181) в (180) и решая полученное уравнение относительно F, находим:

$$F = \frac{x}{2\alpha^2 m}.$$

Ответ: $F = \dfrac{x}{2\alpha^2 m}$.

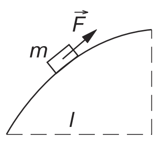


Рис. 52

Задача 74. Небольшое тело массой m медленно втащили на горку, действуя силой $\overrightarrow{F}$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории (рис. 52). Найти работу этой силы, если высота горки h, длина ее основания l и коэффициент трения k.

Решение. Гравитационное поле Земли создает центральные силы, которые являются консервативными. Работа действующей на тело силы $\overrightarrow{F}$ в поле таких сил не зависит от траектории, а определяется положением начальной и конечной точек движения тела. Учитывая это, а также определение работы $A = FS$, получим

$$A = mg(h + kl).$$

Ответ: $A = mg(h + kl)$.

Задача 75. Брусок массой $m = 2{,}0$ кг медленно подняли по шероховатой наклонной плоскости на высоту $h = 51$ см при помощи нити, параллельной этой плоскости. При этом совершили работу $A = 16{,}0$ Дж. На высоте h нить отпустили. Найти скорость бруска, достигшего первоначального положения.

Решение. При поднятии бруска часть работы расходуется на преодоление силы трения или, говоря по-другому, в общую работу входит работа сил трения. Эта часть равна $A - mgh$. При скатывании бруска в кинетическую энергию также перейдет не вся потенциальная энергия, а потенциальная энергия за вычетом расходов на преодоление сил трения. Таким образом, получаем:

$$mgh - (A - mgh) = 2mgh - A = \frac{mv^2}{2}\,.$$

Отсюда

$$v = \sqrt{2\left(2gh - \frac{A}{m}\right)} = 2{,}0\ \text{м/с}.$$

Ответ: $v = 2{,}0$ м/с.

Задача 76. К небольшому бруску массой $m = 50$ г, лежащему на горизонтальной плоскости, приложили постоянную горизонтальную силу $F = 0{,}10$ Н. Найти работу сил трения за время движения бруска, если коэффициент трения зависит от пройденного пути x как $k = \gamma x$, где γ — постоянная, равная 0,08.

Решения. Брусок будет двигаться до тех пор, пока сила трения не сравняется с постоянной силой F, т. е. $F = \gamma mgx$. Отсюда находим путь, пройденный бруском:

$$x = \frac{F}{\gamma mg}\,. \tag{182}$$

Определяем работу сил трения

$$A_{\text{тр}} = -\int\limits_0^x F_{\text{тр}}\,dx = -\int\limits_0^x mg\gamma x\,dx = -\frac{mg\gamma x^2}{2}\,, \tag{183}$$

где $F_{\text{тр}} = -mg\gamma x$.

Подставляя (182) в (183), получаем

$$A_{\text{тр}} = -\frac{F^2}{2\gamma mg} = -0{,}12\ \text{Дж}.$$

Ответ: $A_{\text{тр}} = -0{,}12$ Дж.

Задача 77. Шайба массой $m = 50$ г соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, и, пройдя по горизонтальной плоскости расстояние $l = 50$ см, останавливается. Найти работу сил трения на всем пути, считая всюду коэффициент трения $k = 0{,}15$.

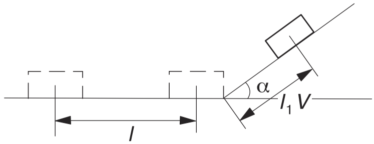


Рис. 53

Решение. Работа сил трения складывается из двух работ: работы на пути $l_1 - A_1$ и работы на пути $l - A$ (рис. 53). Общая работа A_0

$$A_0 = A_1 + A,$$

ускорения на пути l_1 и l

$$a_1 = g(\sin\alpha - k\cos\alpha), \tag{183}$$

$$a = -kg. \tag{184}$$

Скорость шайбы в конце пути l_1 и начале пути l

$$v = \sqrt{2a_1 l_1}, \quad v = \sqrt{2al},$$

откуда

$$a_1 l_1 = al$$

или

$$l_1 = \frac{a}{a_1}\, l. \tag{186}$$

Подставляя (183) и (184) в (186), получаем

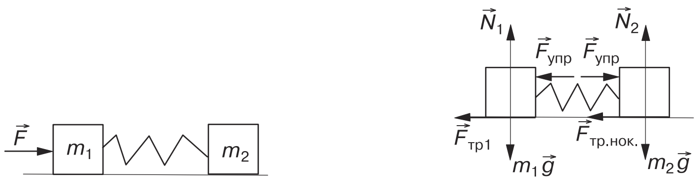
$$l_1 = \frac{kl}{\sin\alpha - k\cos\alpha}, \quad F_{\text{тр}\,1} = -kgm\cos\alpha, \quad F_{\text{тр}} = -kmg,$$

$$A_0 = A_1 + A = F_{\text{тр}\,1} l_1 + F_{\text{тр}} l = -\left(\frac{k^2 gm\cos\alpha l}{\sin\alpha - k\cos\alpha} + kgml\right) =$$

$$= -kgml\left(\frac{k}{\operatorname{tg}\alpha - k} + 1\right) = -\frac{kgml}{1 - k\operatorname{ctg}\alpha} = -0{,}05 \text{ Дж}.$$

Ответ: $A_0 = -0{,}05$ Дж.

Задача 78. Два бруска массами m_1 и m_2, соединенные недеформированной пружинкой, лежат на горизонтальной плоскости (рис. 54, a). Коэффициент трения между брусками и плоскостью равен k. Какую минимальную постоянную силу нужно приложить в горизонтальном направлении к бруску массой m_1, чтобы другой брусок сдвинуть с места?



а *б*

Рис. 54

Р е ш е н и е. Сразу после начала движения первого бруска пружина начнет сжиматься, и на оба бруска начнут действовать силы упругости $F_{\text{упр.}} = \kappa\Delta l$ (рис. 54, *б*), где κ — коэффициент жесткости пружины; Δl — сжатие пружины. Оно равно расстоянию, пройденному первым бруском, при условии, что второй покоится. При движении вправо первого бруска на него действует сила трения $F_{\text{тр1}} = kN_1 = km_1g$, а на второй брусок — сила трения покоя — $F_{\text{тр.пок.}}$.

Рассмотрим подробнее движение первого бруска. До тех пор, пока $F > F_{\text{упр.}}$, брусок будет двигаться ускоренно. По мере сжатия пружины сила упругости будет расти, и как только она превысит постоянную силу F, действующую на брусок в горизонтальном направлении, брусок m_1 начнет двигаться с замедлением до полной остановки. В этот момент $F_{\text{упр}}$ и Δl примут максимальные значения. Брусок же массой m_2 начнет движение с того момента, когда сила упругости достигнет максимального значения трения покоя, которое равно km_2g, т. е.

$$kgm_2 = \kappa\Delta l_{\max}. \tag{187}$$

Задача усложняется тем обстоятельством, что сила упругости зависит от степени сжатия пружины, поэтому она, а следовательно, и ускорение, являются переменными величинами, т. е. второй закон Ньютона в данном случае неприменим.

В предисловии к главе мы отметили, что изменение полной механической энергии системы равно работе сторонних сил, т. е.

$$\Delta E = A_{\text{ст.}}. \tag{188}$$

В нашем случае сторонними силами для первого бруска будут силы F и $F_{\text{тр.1}}$. Поскольку в начале и конце движения первого бруска его кинетическая энергия равна нулю, можно сказать, что изменение механической энергии системы равно изменению потенциальной энергии пружины.

С учетом вышесказанного, (188) запишется в виде

$$\Delta E = \Delta U = \frac{\kappa \Delta l_{\max}^2}{2} = F\Delta l_{\max} - F_T \Delta l_{\max} = F\Delta l_{\max} - k m_1 g \Delta l_{\max},$$

откуда

$$\Delta l_{\max} = \frac{2(F - k m_1 g)}{\kappa}\,. \tag{189}$$

Подставляя (189) в (187) и решая полученное уравнение относительно F, находим:

$$F_{\min} = \frac{m_1 + m_2}{2}\, kg.$$

О т в е т: $F_{\min} = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\, kg.$

Задача 79. Частица массы m движется по окружности радиусом R с нормальным ускорением, которое меняется по закону $a_n = \alpha t^2$, где α — постоянная. Найти зависимость от времени мощности всех сил, действующих на частицу, а также среднее значение этой мощности за первые t секунд после начала движения.

Р е ш е н и е. Рассмотрим параметры движения частицы. Из выражения $\alpha t^2 = v^2/R$ определяем

$$v = t\sqrt{\alpha R}. \tag{190}$$

Видим, что скорость зависит от времени, значит, на частицу действует какая-то сила с тангенциальной составляющей F_τ

$$F_\tau = m\,\frac{dv}{dt} = m\sqrt{\alpha R}. \tag{191}$$

Центростремительная сила $F_{\text{ц.с.}} = m\alpha t^2$ работы не совершает, так как всегда направлена перпендикулярно движению, поэтому при выводе зависимости мощности от времени она не учитывается. Подставляем (188) и (189) в выражение для мощности и получаем искомую зависимость:

$$P = Fv = mR\alpha t.$$

Поскольку скорость частицы зависит от времени, определим среднее значение мощности за первые t секунд после начала движения как

$$\langle P \rangle = \frac{A}{t} = \frac{F_\tau S}{t}\,,$$

где A — работа, совершаемая тангенциальной составляющей на пути S. Тогда

$$S = \int\limits_0^t v\,dt = \frac{\sqrt{\alpha R}t^2}{2}\,.$$

С учетом (191)

$$\langle P \rangle = \frac{\alpha Rmt}{2}\,.$$

Ответ: $P = \alpha mRt$; $\langle P \rangle = \dfrac{\alpha mRt}{2}$.

Задача 80. Брусок массой $m = 1{,}00$ кг находится на горизонтальной плоскости с коэффициентом трения $k = 0{,}027$. В некоторый момент ему сообщили начальную скорость $v_0 = 1{,}50$ м/с. Найти среднюю мощность силы трения за все время движения бруска.

Решение. Известно, что приращение полной механической энергии частицы на некотором пути равно алгебраической сумме работ всех сторонних сил, действующих на частицу на том же пути

$$E_2 - E_1 = A_{\text{ст.}}. \tag{192}$$

Поскольку в начальный момент тело покоилось, то $E_2 = 0$.

Кинетическая энергия расходуется на работу по преодолению сторонних сил:

$$-E_1 = -\frac{mv_0^2}{2} = -A_{\text{ст.}} \tag{193}$$

В нашем случае сторонней силой является сила трения, поэтому время движения бруска определяется из уравнений

$$ma = F_{\text{тр}} = -kmg,$$
$$v_0 - at = 0,$$

откуда

$$t = \frac{v_0}{kg}\,. \tag{194}$$

Записывая выражение для средней мощности и подставляя в него значение $A_{\text{ст.}}$ из (193) и t из (194), находим:

$$\langle P \rangle = -\frac{A_{\text{ст.}}}{t} = -\frac{kmgv_0}{2} = -2{,}0 \text{ Вт}.$$

Ответ: $\langle P \rangle = -2{,}0$ Вт.

Задача 81. Небольшому телу массой m, находящемуся на горизонтальной плоскости, сообщили скорость v_0. Коэффициент трения зависит от пройденного пути S по закону $k = \alpha S$, где α — постоянная. Найти максимальную мгновенную мощность силы трения.

Р е ш е н и е. Запишем выражение для мощности в виде

$$P = Fv, \tag{195}$$

где F — сила трения:

$$F = -kmg = -\alpha Smg. \tag{196}$$

Определим зависимость работы от пройденного пути, воспользовавшись соотношением

$$\Delta E = A_{\text{ст.}} = \frac{mv^2}{2} = \int\limits_0^S F\,dS = -\int\limits_0^S \alpha mgS\,dS = -\frac{\alpha mgS^2}{2} = \\ = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}\,,$$

откуда

$$v = \sqrt{v_0^2 - \alpha gS^2}. \tag{197}$$

Находим значение S, при котором мгновенная мощность силы трения максимальна, подставляя (196) и (197) в (195) и приравнивая нулю первую производную по пройденному пути:

$$P = -\alpha Smg\sqrt{v_0^2 - \alpha gS^2} = -\alpha mg\sqrt{v_0^2S^2 - \alpha gS^4}, \tag{198}$$

$$\frac{dP}{dS} \sim \left(\sqrt{v_0^2S^2 - \alpha gS^4}\right)' \sim Sv_0^2 - 2S^3\alpha g = 0.$$

Первый корень $S_1 = 0$ не имеет физического смысла, так как при $t = 0$, $S = 0$ сила трения еще не совершила работу, поэтому мощность силы трения также равна нулю. Второй корень

$$S = \frac{v_0}{\sqrt{\alpha g}}\,.$$

Подставляя его в (198) и проводя несложные алгебраические преобразования, находим максимальную мгновенную мощность силы трения

$$|P_{\max}| = \left(\frac{mv_0^2}{2}\right)\sqrt{\alpha g}.$$

О т в е т: $|P_{\max}| = \left(\frac{mv_0^2}{2}\right)\sqrt{\alpha g}.$

Задача 82. Система состоит из двух последовательно соединенных пружинок с жесткостями κ_1 и κ_2. Найти работу, которую необходимо совершить, чтобы растянуть эту систему на Δl.

Р е ш е н и е. Расположим начало координат C, как показано на рис. 55. При приложении к системе силы $\overrightarrow{F}$ первая спираль удлинится на величину Δl_1, а вторая на величину Δl_2. Запишем два очевидных равенства:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l,$$
$$\kappa_1 \Delta l_1 = \kappa_2 \Delta l_2.$$

Из них следует

$$\Delta l_1 = \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2}\,\Delta l, \quad \Delta l_2 = \frac{\kappa_1}{\kappa_1 + \kappa_2}\,\Delta l, \tag{199}$$

$$A_{\min} = A_1 + A_2, \tag{200}$$

где $A_{\min}$ — минимальная работа, необходимая для растяжения системы на Δl; A_1 и A_2 — работа упругой силы первой и второй пружин. Вычислим работу упругой силы при растяжении i-й пружины на величину Δl_i

$$dA_i = F\,dl_i = -\kappa_i l_i\,dl_i,$$
$$A_i = -\kappa_i \int\limits_0^{\Delta l_i} l_i\,dl_i = -\,\frac{\kappa_i \Delta l_i^2}{2}\,. \tag{201}$$

Поскольку нам необходимо найти работу, совершаемую приложенной к системе внешней силой $\overrightarrow{F}$, направленной против сил упругости, знак «минус» опускается.

Рис. 55

Подставляя (201) с учетом (199) в (200), получаем:

$$A_{\min} = A_1 + A_2 = \frac{\varkappa_1}{2}\left(\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 \Delta l^2 + \frac{\varkappa_2}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 \Delta l^2 =$$

$$= \frac{\varkappa_1\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\,\frac{\Delta l^2}{2} = \varkappa\,\frac{\Delta l^2}{2},$$

где $\varkappa = \dfrac{\varkappa_1\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}$.

Ответ: $A_{\min} = \varkappa\,\dfrac{\Delta l^2}{2}$.

Задача 83. Частица движется вдоль оси X под действием силы поля $F_x = \alpha x - \beta x^2$, где $\alpha = 8{,}0$ Н/м, $\beta = 6{,}0$ Н/м^2. Найти координату x_0 точки, в которой потенциальная энергия частицы такая же, как в точке $x = 0$.

Решение. Поскольку в точке $x = 0$ потенциальная энергия частицы равна нулю, интегрируя выражение (155) и приравнивая интеграл к нулю:

$$U = -\int\limits_0^{x_0} (\alpha x - \beta x^2)dx = -\left(\frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{x_0} = \frac{\beta x_0^3}{3} - \frac{\alpha x_0^2}{2} = 0,$$

получаем

$$x_0^2\left(\frac{\beta x_0}{3} - \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Первый корень $x_0 = 0$ соответствует началу координат, второй

$$\frac{\beta x_0}{3} - \frac{\alpha}{2} = 0,$$

откуда

$$x_0 = \frac{3}{2}\,\frac{\alpha}{\beta} = 2 \text{ м}.$$

Ответ: $x_0 = 2$ м.

Задача 84. Потенциальная энергия частицы в некотором поле имеет вид $U = \dfrac{a}{r^2} - \dfrac{b}{r}$, где a и b — положительные постоянные, r — расстояние от центра поля. Найти:

а) значение r_0, соответствующее равновесному положению частицы; выяснить, устойчиво ли это положение.

б) максимальное значение силы притяжения; изобразить примерные графики зависимостей $U(r)$ и $F_2(r)$.

Р е ш е н и е. а) Поскольку в положении равновесия потенциальная энергия частицы должна быть минимальной, для нахождения этого положения необходимо исследовать функцию $U(r)$ на экстремум:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{2a}{r^3} + \frac{b}{r^2} = \frac{1}{r^2}\left(b - \frac{2a}{r}\right) = 0,$$

откуда

$$r_0 = \frac{2a}{b}\,.$$

Теперь необходимо выяснить, устойчиво ли это положение. Как сказано выше, устойчивое положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, поэтому возьмем вторую производную от $U(r)$и подставим в нее значение r_0:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \left(\frac{6a}{r^4} - \frac{2b}{r^3}\right)_{r=r_0=\frac{2a}{b}} = \frac{b^4}{8a^3}\,.$$

Поскольку по условию задачи a и b положительные постоянные,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} > 0.$$

Следовательно, при $r = r_0 = 2a/b$ потенциальная энергия частицы минимальна, что соответствует устойчивому равновесному положению.

б) Согласно (156),

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\left(\frac{2a}{r} - b\right).$$

Исследуем эту функцию на экстремум:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \frac{2b}{r^3} - \frac{6a}{r^4}\,,$$

откуда расстояние $r_{\max}$, соответствующее максимальной силе притяжения, равно

$$r_{\max} = \frac{3a}{b}\,,$$

а сила притяжения

$$F_{\max} = \frac{b^3}{27a^2}\,.$$

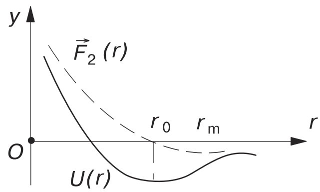


Рис. 56

Примерный вид функций $U(r)$ и $F(r)$ изображен на рис. 56.

О т в е т: а) $r_0 = \dfrac{2a}{b}$, устойчиво; б) $F_{\max} = \dfrac{b^3}{27a^2}$.

Задача 85. Пуля проникает в толстую доску на глубину $H = 0{,}15$ м. Скорость пули в момент соударения с доской $v_0 = 500$ м/с. С какой скоростью вылетит пуля, пробив доску из того же материала толщиной $h = 0{,}05$ м? Силу сопротивления материала доски считать постоянной, а движение пули прямолинейным.

Р е ш е н и е. Запишем выражение (158) применительно к условиям нашей задачи:

$$\Delta K = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -A. \tag{202}$$

Знак «минус» в (202) означает, что кинетическая энергия пули уменьшается, так как расходуется на совершение работы A против силы сопротивления ($F_{\text{сопр}}$). По условию задачи, вся кинетическая энергия была израсходована пулей при проникновении на глубину H. Отсюда и определим силу сопротивления:

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -F_{\text{сопр}}H; \quad F_{\text{сопр.}} = \frac{mv_0^2}{2H}.$$

Учитывая, что при проникновении пули на глубину h ей предстоит совершить работу против силы сопротивления $A = F_{\text{сопр}}h$, запишем уравнение работы:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -F_{\text{сопр}}h = -\frac{mv_0^2}{2H}\,h. \tag{203}$$

Отсюда

$$v = v_0\sqrt{1 - h/H} = 408 \text{ м/с}.$$

О т в е т: $v = 408$ м/с.

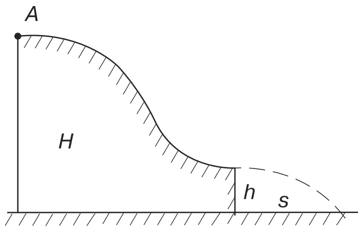


Рис. 57

Задача 86. Небольшая шайба A соскальзывает без начальной скорости с вершины гладкой горки высотой H, имеющей горизонтальный трамплин (рис. 57). При какой высоте h трамплина шайба пролетит наибольшее расстояние S?

Решение. Эта задача является одной из бесчисленных вариаций на тему движения тела в поле силы тяжести Земли. Кроме того, она иллюстрирует закон сохранения энергии.

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям, проводимым в задаче 16, можно записать:

$$S = vt, \tag{204}$$

где S — путь, пройденный шайбой после отрыва от платформы; v — скорость шайбы в момент отрыва.

Запишем также выражение для высоты трамплина h, на которую шайба опустится за время t, и закон сохранения энергии:

$$h = \frac{gt^2}{2}, \tag{205}$$

$$\frac{mv^2}{2} = mg(H - h). \tag{206}$$

Решая совместно систему (204)–(206), получаем

$$S = 2\sqrt{Hh - h^2}. \tag{207}$$

Исследуем функцию $S(h)$ на экстремум:

$$\frac{dS}{dh} = \frac{2(H - 2h)}{2\sqrt{Hh - h^2}} = 0,$$

откуда

$$h = \frac{H}{2}.$$

Подставляя $h = H/2$ в (207), находим наибольшее расстояние, которое пролетает шайба:

$$S_{\max} = H.$$

Ответ: $h = \dfrac{H}{2}$; $S_{\max} = H$.

Задача 87. Летящая горизонтально пуля массой m попала в тело массой M, которое подвешено на двух одинаковых нитях длиной l (рис. 58), и застряла в нем. В результате нити отклонились на угол θ. Считая $m \ll M$, найти:

а) скорость пули перед попаданием в тело;

б) относительную долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию.

Решение. а) После попадания пули массой m в тело массой M система пуля—тело массой $m + M$ приобретет кинетическую энергию K.

Скорость движения v системы пуля—тело в первый момент после попадания определяем из закона сохранения импульса

$$mv_0 = (m + M)v,$$

где v_0 — скорость пули перед попаданием в тело, откуда

$$v = \frac{m}{m + M}\, v_0.$$

Кинетическая энергия K, приобретенная системой пуля—тело:

$$K = \frac{(m + M)}{2}\, v^2 = \frac{(m + M)m^2}{2(m + M)^2}\, v_0^2 = \frac{m^2}{2(m + M)}\, v_0^2 = \frac{m}{m + M}\, K_0, \quad (208)$$

где K_0 — кинетическая энергия пули в момент попадания в тело.

Эта кинетическая энергия перейдет в потенциальную, когда тело поднимется на высоту h.

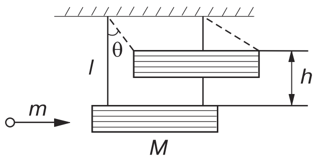


Рис. 58

Из рис. 58 видно, что

$$h = l - l\cos\theta = l(1-\cos\theta) = 2l\sin^2\frac{\theta}{2}\,.$$

Потенциальная энергия

$$U = (m+M)gh = 2l(m+M)g\sin^2\frac{\theta}{2}\,.$$

Запишем закон сохранения энергии $K = U$ или

$$\frac{m^2}{2(m+M)}\,v_0^2 = 2l(m+M)g\sin^2\frac{\theta}{2}\,.$$

Отсюда

$$v_0 = \frac{2(m+M)}{m}\sin\frac{\theta}{2}\sqrt{lg}$$

или с учетом $m \ll M$

$$v_0 = \frac{2M}{m}\sqrt{lg}\sin\frac{\theta}{2}\,.$$

б) Определим долю первоначальной кинетической энергии пули, которая перешла во внутреннюю энергию как

$$\eta = \frac{K_0 - K}{K_0}\,.$$

С учетом (208)

$$\eta = \frac{K_0 - K_0\,\dfrac{m}{m+M}}{K_0} = 1 - \frac{m}{m+M}\,.$$

Поскольку по условию задачи $m \ll M$,

$$\eta = 1 - \frac{m}{M}\,.$$

О т в е т: а) $v = \dfrac{2M}{m}\sqrt{lg}\sin\dfrac{\theta}{2}$; б) $\eta = 1 - \dfrac{m}{M}$.

Задача 88. Шайба A, двигаясь по гладкой горизонтальной плоскости, упруго отскакивает от гладкой вертикальной стенки (рис. 59, вид сверху). Найти точку, относительно которой момент импульса шайбы будет оставаться постоянным в этом процессе.

Р е ш е н и е. На шайбу действует сила тяжести, сила реакции со стороны горизонтальной плоскости и сила реакции R со стороны стенки в момент удара о нее. Первые две силы уравновешивают друг

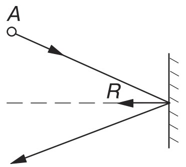


Рис. 59

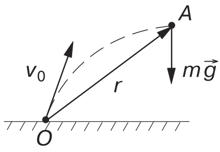


Рис. 60

друга, остается сила $\vec{R}$. Ее момент равен нулю относительно любой точки, лежащей на линии вектора $\vec{R}$, а значит, относительно любой из этих точек момент импульса шайбы будет оставаться постоянным в данном процессе.

Ответ: любая точка, лежащая на линии действия вектора $\vec{R}$.

Задача 89. Камень A массой m бросили под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}_0$. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти зависимость от времени момента импульса камня $\vec{M}(t)$ относительно точки бросания O (рис. 60).

Решение. За промежуток времени dt момент импульса камня относительно точки O получит приращение

$$d\vec{M} = \vec{N}\,dt = [\vec{r}, m\vec{g}]dt.$$

Поскольку $\vec{r} = \vec{v}_0 t + \vec{g}t^2/2$ (см. задачу 14), $d\vec{M} = [\vec{v}_0, m\vec{g}]t\,dt$. Учитывая, что в момент $t = 0$ $\vec{M}(0) = 0$, и интегрируя это выражение, находим:

$$\vec{M}(t) = \int\limits_0^t [\vec{v}_0, m\vec{g}]t\,dt = [\vec{v}_0, m\vec{g}]t^2/2.$$

Видно, что вектор $\vec{M}$ направлен за плоскость рисунка и остается неизменным в процессе движения.

Ответ: $\vec{M}(t) = [\vec{v}_0, m\vec{g}]t^2/2$.

Глава 4
Всемирное тяготение

Гравитационное взаимодействие является одним из четырех видов взаимодействий и играет чрезвычайно важную роль в природе. Оно описывается законом, открытым Ньютоном, и носит название закона всемирного тяготения, согласно которому *сила, с которой два тела притягиваются друг к другу, пропорциональна массам этих тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}\,. \tag{208}$$

Величина γ в формуле (208) называется гравитационной постоянной и равна

$$\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \text{м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2.$$

Если в (208) подставить m_1, m_2 и r равными единице, то γ будет численно равна силе, с которой притягиваются два шара массой 1 кг каждый, отстоящие друг от друга на расстоянии 1 м.

Читатель, вероятно, уже обратил внимание на сходство закона всемирного тяготения и закона Кулона — и в том, и в другом случае в знаменателе стоит r^2. До сих пор физики пытаются создать единую теорию поля, которая бы объединила теорию тяготение с теорией электричества. Пока эти попытки не увенчались успехом.

Другой загадкой этих двух фундаментальных законов природы является очень малая величина гравитационного взаимодействия по сравнению с электростатическим. Если мы рассмотрим отношение силы гравитационного притяжения к силе электростатического отталкивания двух электронов, то получим совершенно фантастическое число, названия которому в математике нет — $1/4{,}17 \cdot 10^{42}$. Этим и объясняется тот факт, что в квантовой физике гравитационное взаимодействие в силу его малости не играет существенной роли. В общей же теории относительности оно играет доминирующую роль, поскольку эта теория имеет дело с огромными массами. Конечно, весьма соблазнительно соединить квантовую физику с теорией относительности Эйнштейна, однако, несмотря на многолетние и многочисленные попытки физиков всего мира, сделать это пока не удалось.

Рассмотрим тело массой m_1, находящееся на поверхности Земли и притягивающееся к ней согласно закону всемирного тяготения. Перепишем (208) в виде

$$\gamma \frac{mM_З}{r^2} = ma,$$

где r — радиус Земли; $M_З$ — масса Земли.

Отсюда $a = \dfrac{\gamma M_З}{r^2} \approx 9{,}8$ м/с^2.

Величина a называется ускорением свободного падения и обозначается буквой g. Более точное значение $g = 9{,}807$ м/с^2.

Однако следует учесть, что Земля вращается относительно инерциальных систем отсчета с постоянной угловой скоростью ω, поэтому необходимо ввести центробежную силу инерции F_{in} (рис. 61, *б*)

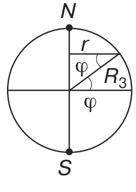
$$F_{\text{in}} = m\omega^2 r, \tag{209}$$

где m — масса тела, r — расстояние от земной оси (рис. 61, *а*). Из рис. 61, *а*, ясно, что φ является широтой расположения тела. Перепишем (209) в виде

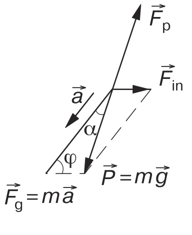
$$F_{\text{in}} = m\omega^2 R_З \cos\varphi.$$

Таким образом, вес тела $\overrightarrow{P}$ будет складываться из двух составляющих:

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{F}_g + \overrightarrow{F}_{\text{in}} = m\overrightarrow{g}. \tag{210}$$



а



б

Рис. 61

Из (210) следует, что величина $\overrightarrow{g}$ зависит от широты места. Однако даже на экваторе величина $\overrightarrow{F}_{\text{in}}$ незначительна (см. задачу 101) и поэтому в подавляющем количестве задач может не учитываться. Кроме того, величина $\overrightarrow{g}$ зависит от высоты над поверхностью Земли (см. задачу 111).

Пользуясь законом всемирного тяготения и таблицами положения планет, составленными за много лет астрономом Тихо Браге, Кеплер открыл чрезвычайно простые и изящные законы, которым подчиняются движения планет. Законы Кеплера таковы:

1) все планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце;
2) радиус-вектор от Солнца до планеты «заметает» равные площади в равные интервалы времени;
3) квадраты времен обращения двух планет пропорциональны кубам больших площадей их орбит: $T^2 \sim a^3$.

Закон всемирного тяготения позволяет рассчитать так называемые космические скорости. Первая космическая скорость v_1 — это скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно стало искусственным спутником Земли и вращалось вокруг нее по круговой орбите с радиусом $R_З$, мало чем отличающимся от радиуса Земли. Ее можно определить из равенства центростремительной силы весу тела массой m

$$\frac{mv_1^2}{R_З} = mg,$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{gR_З} \approx 8 \text{ км/с}. \tag{211}$$

Обладая такой скоростью, тело будет вращаться вокруг Земли по круговой орбите.

Второй космической скоростью называется скорость, при которой тело практически выходит из-под влияния притяжения Земли. Выше мы показали, что в поле центральных сил (а гравитационное поле Земли является именно таким полем) работа не зависит от пути, поэтому для элементарной работы на пути dr против сил тяготения можно записать

$$dA = F\,dr = \gamma\,\frac{mM_З}{r^2}\,dr.$$

Проводя интегрирование

$$A = \int F\,dr = \int\limits_{R_З}^{\infty} \gamma\,\frac{mM_З}{r^2}\,dr = \gamma\,\frac{mM_З}{R_З}\,,$$

запишем равенство работ, учитывая, что $g = \gamma \dfrac{M_З}{R_З^2}$:

$$mg = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}\,. \tag{212}$$

Перепишем (212) в виде

$$\gamma \frac{mM_З}{R_З} = mgR_З. \tag{213}$$

Отмечаем, что левая часть равенства (213) представляет из себя работу, которую необходимо совершить против сил притяжения Земли:

$$A = mgR_З.$$

Для совершения такой работы необходима кинетическая энергия, равная

$$\frac{mv_2^2}{2} = mgR_З,$$

где v_2 — минимально необходимая скорость для выхода из-под влияния гравитационного поля Земли, вторая космическая скорость:

$$v_2 = \sqrt{2gR_З} \approx 11 \text{ км/с}. \tag{214}$$

Рекомендации по решению задач

1. Решение задач типа задачи 99, когда внутри однородного шара имеются сферические полости, «напрямую» приводит во многих случаях к математическим сложностям, зачастую неразрешимым. Однако решение таких задач сильно упрощается при применении метода наложений. Этот метод практически без изменений может быть перенесен на аналогичные задачи электростатики [3], что связано с одинаковой математической конструкцией закона всемирного тяготения и закона Кулона.

2. При решении задач типа задачи 103 необходимо учитывать, что величина ускорения свободного падения g не равна 9,807 м/с^2, поскольку тело поднимается на значительную высоту, и величина g уменьшается.

В задачах такого типа применяется закон сохранения энергии. Надо только помнить, что в момент броска тело обладает начальной потенциальной энергией в системе «тело — Земля», и эта энергия возрастает до того момента, когда тело достигает наивысшей точки подъема.

Задачи к главе 4

Задача 90. Некоторая планета движется по окружности вокруг Солнца со скоростью $v = 34{,}9$ км/с (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Найти период обращения этой планеты вокруг Солнца.

Р е ш е н и е. Поскольку масса Солнца M много больше массы планеты m, мы приходим к задаче о движении материальной точки массой m в гравитационном поле Солнца. При $M \gg m$ Солнце можно считать неподвижным. В этом случае планета m движется по окружности радиусом a, центр которой совпадает с центром Солнца (рис. 62), равномерно с периодом обращения

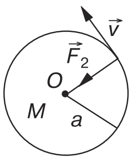


Рис. 62

$$T = \frac{2\pi a}{v}\,. \tag{215}$$

На планету массой m действует сила $\overrightarrow{F}$, направленная к центру Солнца. Запишем второй закон Ньютона в проекции на радиус a:

$$|\overrightarrow{F}| = \gamma\,\frac{mM}{a^2} = \frac{mv^2}{a}\,,$$

откуда находим a:

$$a = \gamma\,\frac{M}{v^2}\,. \tag{216}$$

Подставляя (216) в (215), получаем

$$T = \frac{2\pi\gamma M}{v^3} \approx 255 \text{ сут.}$$

О т в е т: $T \approx 255$ сут.

Задача 91. Период обращения Юпитера вокруг Солнца в 12 раз больше соответствующего периода для Земли. Считая орбиты планет круговыми, найти:

а) во сколько раз расстояние от Юпитера до Солнца превышает расстояние от Земли до Солнца;

б) скорость и ускорение Юпитера в гелиоцентрической системе отсчета.

Р е ш е н и е. а) Запишем третий закон Кеплера для орбит Юпитера и Земли:

$$\frac{T_{Ю}^2}{T_{З}^2} = \frac{a_{Ю}^3}{a_{З}^3},$$

где $T_{Ю}$ и $T_{З}$ — периоды обращения Юпитера и Земли вокруг Солнца; $a_{Ю}$ и $a_{З}$ — радиусы орбит Юпитера и Земли.

По условию задачи $T_{Ю} = 12T_{З}$, откуда

$$144 = \left(\frac{a_{Ю}}{a_{З}}\right)^3$$

или

$$\frac{a_{Ю}}{a_{З}} = \sqrt[3]{144} \approx 5{,}2.$$

б) Используя (216) из предыдущей задачи, находим скорость

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{a}} \approx 13 \text{ км/с},$$

где M — масса Солнца. Поскольку планета обладает только нормальным ускорением, рассчитываем ускорение:

$$a_n = \frac{v^2}{a} = 2{,}2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

О т в е т: а) в 5,2 раза; б) 13 км/с; $2{,}2 \cdot 10^{-4}$ м/с^2.

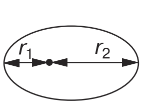


Рис. 63

Задача 92. Некая планета движется вокруг Солнца по эллипсу так, что минимальное расстояние между ней и Солнцем равно r_1, а максимальное — r_2. Найти с помощью третьего закона Кеплера период обращения ее вокруг Солнца.

Р е ш е н и е. Из третьего закона Кеплера следует, что квадрат периода обращения пропорционален кубу большой полуоси орбиты, представляющей эллипс. Эллипс можно заменить окружностью с радиусом, равным половине большой оси. Из рис. 63 видно, что величина большой полуоси равна $(r_1 + r_2)/2$. Из формулы (216) получаем

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{a}},$$

где

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2}.$$

Далее,

$$T = \frac{2\pi a}{v} = \frac{2\pi\,\dfrac{r_1 + r_2}{2}}{\sqrt{\dfrac{\gamma M}{\dfrac{r_1 + r_2}{2}}}} = \pi\sqrt{\frac{(r_1 + r_2)^3}{2\gamma M}}.$$

О т в е т: $T = \pi\sqrt{\dfrac{(r_1 + r)2)^3}{2\gamma M}}$.

Задача 93. Два спутника движутся вокруг Земли по касающимся траекториям. Один спутник движется по окружности радиусом r, другой — по эллипсу с периодом обращения, в η раз большим, чем у первого спутника (рис. 64). Найти с помощью третьего закона Кеплера максимальное расстояние между вторым спутником и центром Земли.

Р е ш е н и е. Запишем третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{\eta^2 T^2} = \frac{r^3}{a^3},$$

или

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{r^3}{a^3}. \tag{217}$$

Здесь T — период обращения спутника, движущегося по орбите радиуса r; a — большая полуось эллиптической орбиты, равная в нашем

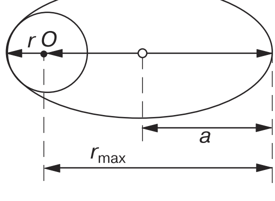


Рис. 64

случае

$$a = \frac{r + r_{\max}}{2}\,, \qquad (218)$$

где $r_{\max}$ — максимальное расстояние между вторым спутником и центром Земли.

Подставляя (218) в (217), находим

$$\frac{1}{\eta^2} = \frac{8r^3}{(r + r_{\max})^3}\,,$$

откуда

$$r_{\max} = r(2\eta^{2/3} - 1).$$

Ответ: $r_{\max} = r(2\eta^{2/3} - 1)$.

Задача 94. Спутник Луны, двигавшийся по круговой орбите радиусом r, после кратковременного торможения стал двигаться по эллиптической орбите, касающейся поверхности Луны (рис. 65). Найти с помощью третьего закона Кеплера время падения спутника на Луну.

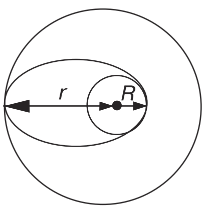


Рис. 65

Решение. Спутник упадет на Луну, когда

$$t = \frac{T_0}{2}\,, \qquad (219)$$

где T_0 — период вращения спутника по эллиптической орбите. Находим период обращения спутника по круговой орбите:

$$T = \frac{2\pi r}{v}\,.$$

Здесь $v = \sqrt{\gamma M/r}$, а M — масса спутника.

В этом случае

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}\,. \qquad (220)$$

Запишем третий закон Кеплера:

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{r^3}{\left(\dfrac{r + R}{2}\right)^3}\,,$$

где R — радиус Луны; $(r+R)/2$ — большая полуось эллипса (рис. 65).

Тогда

$$T_0 = T\sqrt{\left(\frac{r+R}{2r}\right)^3} = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}\sqrt{\left(\frac{r+R}{2r}\right)^3} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma M}}\left(\frac{r+R}{2}\right)^{3/2},$$

$$t = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\gamma M}}\left(\frac{r+R}{2}\right)^{3/2}.$$

Ответ: $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{\gamma M}}\left(\dfrac{r+R}{2}\right)^{3/2}$.

Задача 95. Представим себе, что мы создали модель Солнечной системы в η раз меньшую натуральной величины, но из материалов той же самой средней плотности, что у Солнца и планет. Как изменятся при этом периоды обращения моделей планет по своим орбитам?

Решение. Период обращения планеты в Солнечной системе

$$T_R = \frac{2\pi R}{v}, \tag{221}$$

где R — радиус орбиты планеты в Солнечной системе. Подставляя в (221) выражение $v = \sqrt{\gamma M/r}$, находим

$$T_R = \frac{2\pi R}{\sqrt{\gamma M/R}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}},$$

где M — масса планеты в Солнечной системе. В модели Солнечной системы, по условию задачи,

$$r = \frac{R}{\eta}, \tag{222}$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{\eta^3}\rho = \frac{M}{\eta^3}. \tag{223}$$

Здесь m — масса планеты в модели Солнечной системы, ρ — средняя плотность вещества модели.

Период обращения планеты в уменьшенной Солнечной системе с учетом (222) и (223):

$$T_r = \frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{\gamma m}} = \frac{2\pi R^{3/2}/\eta^{3/2}}{\sqrt{\gamma M/\eta^3}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}.$$

Видим, что $T_R = T_r$, т. е. период вращения планет не изменится.

Ответ: не изменятся.

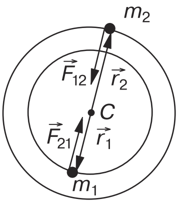


Рис. 66

Задача 96. Двойная звезда — это система из двух звезд, движущихся вокруг ее центра масс. Известны расстояние l между компонентами двойной звезды и период T ее вращения. Считая, что l не меняется, найти массу системы.

Р е ш е н и е. По условию задачи, расстояние между звездами l не меняется и вращаются они вокруг центра масс, поэтому можно сказать, что в любой момент времени звезды находятся на противоположных концах вектора $\vec r = \vec r_2 - \vec r_1$ (рис. 66), который проходит через центр масс.

Поскольку между звездами действуют гравитационные силы притяжения, они создают нормальные ускорения a_{n_1} и a_{n_2}, направленные к центру масс системы. Кроме того, известен период вращения системы, а $F_{12} = F_{21}$ и $m_1 r_1 = m_2 r_2$, поэтому угловые скорости звезд ω одинаковы. Запишем это в виде системы уравнений

$$\begin{cases} a_{n_1} = \dfrac{F_{21}}{m_1} = \omega^2 r_1, \\ a_{n_2} = \dfrac{F_{12}}{m_2} = \omega^2 r_2. \end{cases} \tag{224}$$

Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, перепишем (224) и добавим еще одно уравнение, связывающее r_1 и r_2 с l:

$$\begin{cases} \dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{F_{21}}{m_1 r_1} = \dfrac{\gamma m_1 m_2}{m_1 r_1 l^2} = \dfrac{\gamma m_2}{r_1 l^2}, \\ \dfrac{4\pi^2}{T^2} = \dfrac{F_{12}}{m_2 r_2} = \dfrac{\gamma m_1 m_2}{m_2 r_2 l^2} = \dfrac{\gamma m_1}{r_2 l^2}, \\ l = r_1 + r_2. \end{cases} \tag{225}$$

Решая систему (225), находим

$$m = m_1 + m_2 = \frac{4\pi^2 l^3}{\gamma T^2}.$$

О т в е т: $m = \dfrac{4\pi^2 l^3}{\gamma T^2}$.

Задача 97. Частица массой m находится вне однородного шара массой M на расстоянии r от его центра. Найти:

а) потенциальную энергию гравитационного взаимодействия частицы и шара;

б) силу, с которой шар действует на частицу.

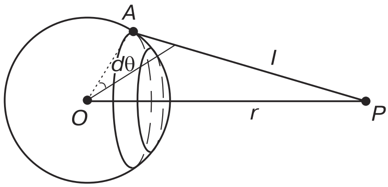


Рис. 67

Р е ш е н и е. а) Разобьем весь шар на элементарные слои. Рассмотрим какой-либо сферический слой радиусом ρ и массой δM (рис. 67). Потенциальная энергия взаимодействия частицы с элементарным пояском δS этого слоя равна

$$dU = -\gamma\left(\frac{m\delta M}{2l}\right)\sin\theta\, d\theta. \tag{226}$$

Из треугольника OAP, используя теорему косинусов, находим

$$l^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos\theta. \tag{227}$$

Дифференцируя (227), получаем

$$l\, dl = \rho r\sin\theta\, d\theta,$$

откуда

$$\sin\theta\, d\theta = \frac{l\, dl}{\rho r}\,. \tag{228}$$

Подставляем (228) в (226)

$$dU = -\gamma\left(\frac{m\delta M}{2\rho r}\right)dl \tag{229}$$

и проводим интегрирование по всему слою. Находим

$$\delta U = -\gamma\,\frac{m\delta M}{2r\rho}\int\limits_{r-\rho}^{r+\rho} dl = -\gamma\,\frac{m\delta M}{r}\,.$$

Интегрируя по всем слоям, получаем

$$U = -\gamma\,\frac{mM}{r}\,.$$

Интересно отметить, что потенциал гравитационного поля тонкого сферического слоя $\varphi = -\gamma\delta M/r$ таков, *как если бы вся масса этого слоя была сосредоточена в его центре*. Этот вывод чрезвычайно важен и интересен.

б) Воспользовавшись формулой (155), получаем

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\gamma M m}{r^2}\,.$$

О т в е т: а) $U = -\dfrac{\gamma M}{2}$; б) $F_r = -\dfrac{\gamma M m}{r^2}$.

Задача 98. Доказать, что сила тяготения, действующая на частицу A внутри однородного сферического слоя вещества, равна нулю.

Р е ш е н и е. Рассмотрим однородное сферическое тело и выберем в нем точку A, не приходящуюся на его центр (рис. 68).

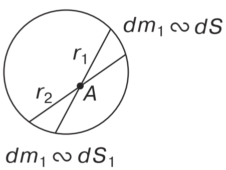


Рис. 68

На частицу A массой m со стороны площадки массой m_1 действует сила

$$|F_{m_1,m}| = \gamma\,\frac{m_1 m}{r_1^2}\,,$$

а со стороны площадки массой m_2 — сила

$$|F_{m_2,m}| = \gamma\,\frac{m_2 m}{r_2^2}\,.$$

Очевидно, что m_1 и m_2 пропорциональны площади каждой из элементарных площадок, которые, в свою очередь, пропорциональны квадрату расстояния от частицы A до площадки. С другой стороны, сила тяготения убывает обратно пропорционально квадрату этого же расстояния. Таким образом, если мы увеличим расстояние в два раза, то масса площадочки увеличится в четыре раза, но во столько же раз и уменьшится сила притяжения, т. е. результирующая сила со стороны двух площадок, расположенных на концах отрезка r_1+r_2, всегда будет равна нулю. Разбивая мысленно всю сферу на пары, приходим к выводу, что гравитационная сила, действующая на частицу A, равна нулю. Если бы природа была устроена так, что в законе всемирного тяготения показатель степени был больше двух, то площадка массой m_1 притягивала бы частицу A с большей силой, а если бы показатель степени был равен единице, то картина была бы обратной.

Задача 99. Имеется однородный шар массой M и радиусом R. Найти напряженность $\overrightarrow{G}$ и потенциал φ гравитационного поля этого шара как функции расстояния r от его центра (при $r < R$ и $r > R$). Изобразить примерные графики зависимости $G(r)$ и $\varphi(r)$.

Р е ш е н и е.

I способ

В задаче 98 показано, что сила гравитационного взаимодействия между сферической оболочкой и материальной точкой внутри шара равна нулю. Этот результат поможет нам рассчитать напряженность $\overrightarrow{G}$ и потенциал φ внутри однородного шара массой M.

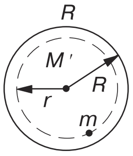


Рис. 69

Выделим в шаре массой M шар меньшего диаметра M' (рис. 69). Теперь можно считать, что большой шар массой M состоит из меньшего M' с радиусом r и оболочки, а частица массой m покоится на внешней стороне этого шара. В этом случае на частицу m будет действовать сила

$$F = |\overrightarrow{F}_{mM'}| = \gamma\,\frac{M'm}{r^2}\,. \tag{230}$$

Плотность вещества шара равна

$$\rho = \frac{M}{\dfrac{4}{3}\,\pi R^3}\,. \tag{231}$$

Тогда масса шара M', с учетом (231),

$$M' = \rho\,\frac{4}{3}\,\pi r^3 = \frac{Mr^3}{R^3}\,. \tag{232}$$

Силу взаимодействия частицы массой m и шара массой M', т. е. когда $r \leqslant R$, определим, подставив (232) в (230):

$$F(r) = \gamma\,\frac{Mmr}{R^3}\,.$$

Найдем потенциальную энергию частицы m, находящейся на поверхности шара массой M':

$$F = -\,\frac{\partial U}{\partial r} = -\,\frac{dU}{dr}\,.$$

Здесь частная производная заменена на полную, поскольку $U = f(r)$ и ни от чего больше не зависит. Отсюда

$$U = -\int\limits_0^r F\,dr = -\,\frac{\gamma Mm}{R^3}\int\limits_0^r r\,dr = -\,\frac{\gamma Mmr^2}{2R^3}\,.$$

Выражение для потенциала, создаваемого шаром массой M', запишем как

$$\varphi_1 = -\gamma \frac{Mr^2}{R^3},$$

учитывая при этом, что

$$U_{\text{соб.}} = \frac{1}{2} \sum U_i,$$

где $U_{\text{соб.}}$ — собственная потенциальная энергия системы пар частиц, а U_i — потенциальная энергия взаимодействия i-й частицы, в нашем случае частицы m, со всеми остальными элементами системы (в нашем случае — с шаром).

Кроме потенциала φ_1, создаваемого шаром массой M', есть еще потенциал, создаваемый оболочкой φ_2. В задаче 98 мы показали, что внутри сферической оболочки сила, действующая на частицу массой m, во всех точках тождественно равна нулю. Это означает, что φ_2 — постоянная величина, и это значительно облегчает нашу задачу, так как можно избежать математических трудностей, вычислив φ_2 в центре шара

$$\varphi_2 = -\gamma \int\limits_r^R \frac{dM}{r}. \tag{233}$$

Здесь dM — масса тонкого слоя, окружающего шар массой M:

$$dM = 4\pi r^2 \rho \, dr.$$

Используя (231), получаем

$$dM = 3\left(\frac{M}{R^3}\right) r^2 \, dr. \tag{234}$$

Затем, подставляя (234) в (233) и проводя интегрирование, находим

$$\varphi_2 = -\frac{3}{2} \frac{\gamma M}{R^3} (R^2 - r^2).$$

Применяя принцип суперпозиции, определяем потенциал φ_r как функцию расстояния от центра шара для случая $r \leqslant R$:

$$\varphi_{r \leqslant R} = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\gamma M}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{235}$$

Напряженность гравитационного поля

$$\overrightarrow{G}_{r \leqslant R} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \overrightarrow{r}} = -\frac{\gamma M}{R^3}\,\overrightarrow{r}. \tag{236}$$

Теперь рассчитаем φ и $\overrightarrow{G}_r$ когда $r \geqslant R$, т. е. точка находится вне шара M.

В задаче 97 мы пришли к важному выводу, что потенциал в точке, находящейся вне тонкого однородного сферического слоя, таков, как если бы вся масса этого слоя была сосредоточена в его центре. Этот же вывод легко обобщить на случай сплошного шара.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} U &= -\gamma\,\frac{Mm}{r}\,, \\ \varphi &= -\gamma\,\frac{M}{r}\,, \\ \overrightarrow{G}_r &= -\,\frac{\partial\varphi}{\partial\,\overrightarrow{r}} = -\gamma\,\frac{m}{r^3}\,\overrightarrow{r}\,, \end{aligned}\right\}\quad r \geqslant R,$$

где U, φ и $\overrightarrow{G}$ — потенциальная энергия, потенциал и напряженность гравитационного поля при $r \geqslant R$.

II способ

При решении задачи способом I мы пользовались результатами, полученными в задачах 97 и 98. Если же вы их не решали, то придем к этим выводам следующим образом. Сначала определим потенциал поля, создаваемого тонким однородным сферическим слоем вещества массой m и радиусом a (рис. 67, $\rho = a$). Для этого найдем потенциал $d\varphi$ в точке $P(r > a)$, который создает элементарный пояс dS данного слоя. Если масса этого пояса dm и его точки находятся на расстоянии x от точки P, то $d\varphi = -\gamma\, dm/x$. Учитывая, что

$$dm = \frac{1}{2}\,m\sin\theta\, d\theta,$$

получаем

$$d\varphi = -\,\frac{\gamma m}{2x}\sin\theta\, d\theta. \tag{237}$$

Далее из теоремы косинусов (для ΔOAP) следует, что

$$x^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta.$$

Взяв дифференциал этого выражения, найдем

$$x\, dx = ar\sin\theta\, d\theta. \tag{238}$$

Преобразуем (237) с помощью (238) к виду

$$d\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma m}{ar}\right)dx$$

и проинтегрируем это уравнение по всему слою. Тогда

$$\varphi_{a \geqslant R} = -\frac{\gamma m}{2ar}\int\limits_{r-a}^{r+a} dx = -\frac{\gamma m}{r}\,.$$

Таким образом, *потенциал в точке P вне тонкого однородного сферического слоя таков, как если бы вся масса этого слоя была сосредоточена в его центре.* Если же точка P находится внутри слоя ($r < a$), то предыдущие расчеты остаются в силе вплоть до интегрирования. Теперь пределы интегрирования по x будут от $a - 2r$ до $a + r$.

В результате получаем

$$\varphi_{a \leqslant R} = -\frac{\gamma m}{a}\,,$$

т. е. *потенциал внутри слоя не зависит от положения точки P, а следовательно, он одинаков во всех точках внутри слоя.*

Тогда

$$G_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} -\dfrac{\gamma m}{r^2} & \text{вне слоя,} \\ 0 & \text{внутри слоя.} \end{cases}$$

Графики зависимостей $\varphi(r)$ и $G(r)$ для тонкого однородного слоя приведены на рис. 70.

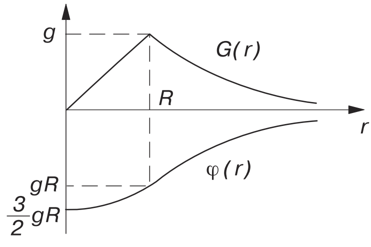


Рис. 70

О т в е т: $\overrightarrow{G}_{r\leqslant R} = -\dfrac{\gamma M}{R^3}\,\overrightarrow{r}$; $\overrightarrow{G}_{r\geqslant R} = -\dfrac{\gamma M}{r^3}\,\overrightarrow{r}$;

$\varphi_{r\leqslant R} = -3\left(1 - \dfrac{r^2}{3R^2}\right)\dfrac{\gamma M}{2R}$; $\varphi_{r\geqslant R} = -\dfrac{\gamma M}{r}$ (рис. 70).

Задача 100. Внутри однородного шара плотностью ρ имеется сферическая полость, центр которой находится на расстоянии $\overrightarrow{l}$ от центра шара (рис. 71). Найти напряженность $\overrightarrow{G}$ поля тяготения внутри полости.

Р е ш е н и е. Воспользуемся принципом наложения. Предположим, что внутри однородного шара массой M, радиусом R и плотностью ρ встроен шар меньшего радиуса r из гипотетического вещества массой m и плотностью $-\rho$. Это гипотетическое вещество не притягивает, а отталкивает обычное.

Вычислим напряженность гравитационного поля, создаваемого большим шаром в точке с координатами $\overrightarrow{l} - \overrightarrow{r}$, воспользовавшись формулой (236):

$$\overrightarrow{G}_M = -\frac{\partial\varphi}{\partial(\overrightarrow{l} - \overrightarrow{r})} = -\left(\frac{\gamma M}{R^3}\right)(\overrightarrow{l} - \overrightarrow{r}).$$

Аналогично для шара из гипотетического вещества запишем

$$\overrightarrow{G}_m = -\frac{\partial\varphi}{\partial\overrightarrow{r}} = -\left(\frac{\gamma m}{r^3}\right)\overrightarrow{r}.$$

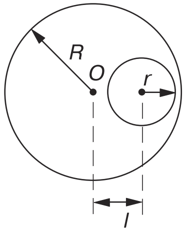


Рис. 71

Заменяя M/R^3 и m/r^3 на $(4/3)\pi\rho$, находим:

$$\overrightarrow{G}_M = -\frac{4}{3}\,\pi\rho(\overrightarrow{l} - \overrightarrow{r}),$$

$$\overrightarrow{G}_m = -\frac{4}{3}\,\pi\rho\overrightarrow{r}.$$

Определяем результирующую напряженность гравитационного поля, применяя принцип суперпозиции:

$$\overrightarrow{G}_0 = \overrightarrow{G}_M + \overrightarrow{G}_m = -\frac{4}{3}\,\pi\rho(\overrightarrow{l} - \overrightarrow{r}) - \frac{4}{3}\,\pi\rho\overrightarrow{r} = -\frac{4}{3}\,\pi\gamma\rho\overrightarrow{l}.$$

О т в е т: $\overrightarrow{G} = -\dfrac{4}{3}\,\pi\gamma\rho\overrightarrow{l}$. Поле внутри полости однородно.

Задача 101. Найти собственную потенциальную энергию гравитационного взаимодействия вещества, образующего:

а) тонкий однородный сферический слой массой m и радиусом R;

б) однородный шар массой m и радиусом R.

Р е ш е н и е. а) Разобьем сферический слой на малые элементы массой δm. Энергия взаимодействия каждого элемента со всеми остальными равна

$$\delta U = -\frac{\gamma m \delta m}{R}\,.$$

Суммируя по всем элементам и учитывая, что каждая пара взаимодействующих элементов войдет при этом дважды, получим

$$U = -\frac{\gamma m^2}{2R}\,.$$

б) Воспользуемся результатами, полученными в задаче 99, где выведено выражение для потенциала, создаваемого шаром радиусом R и массой m:

$$\varphi_{(r \leqslant R)} = -\gamma\,\frac{mr^2}{R^3}\,.$$

Тогда энергия взаимодействия элемента dm будет равна

$$dU = -\gamma\,\frac{mr^2}{R^2}\,dm. \qquad (239)$$

Запишем выражение для dm как функцию расстояния r от центра шара (задача 99):

$$dm = 3\,\frac{m}{R^3}\,r^2\,dr. \qquad (240)$$

Подставляя (240) в (239) и интегрируя, находим

$$U = -3\gamma\,\frac{m^2}{R^6}\int\limits_0^R r^4\,dr = -\frac{3\gamma m^2}{5R}\,.$$

О т в е т: а) $U = -\dfrac{\gamma m^2}{2R}$; б) $U = -\dfrac{3\gamma m^2}{5R}$.

Задача 102. Вычислить отношение следующих ускорений: ускорения a_1, вызываемого силой тяготения на поверхности Земли; ускорения a_2, обусловленного центробежной силой инерции на экваторе Земли; ускорения a_3, сообщаемого телам на Земле Солнцем.

Р е ш е н и е. Значение $a_1 = g$ было получено в теоретических сведениях, приведенных в начале главы. Ускорение a_2, обусловленное центробежной силой инерции на экваторе Земли,

$$a_2 = \omega^2 R_З = 0{,}034 \text{ м/с}^2, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

где $R_З$ — радиус Земли; T — продолжительность суток.

Ускорение a_3, обусловленное Солнцем,

$$a_3 = \frac{\gamma M_С}{r^2} = 0{,}0059 \text{ м/с}^2,$$

где $M_С$ — масса Солнца; r — расстояние между Солнцем и Землей.

Таким образом, $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 0{,}0034 : 0{,}0006$.

О т в е т: $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 0{,}0034 : 0{,}0006$.

Задача 103. На какой высоте над полюсом Земли ускорение свободного падения убывает на $\eta = 1{,}0\%$? в $n = 2$ раза?

Р е ш е н и е. Условие уменьшения ускорения свободного падения на один процент запишем в следующем виде:

$$\eta = \frac{g_0 - g}{g_0}, \tag{241}$$

где $g_0 = \gamma M/R^2$ — ускорение свободного падения вблизи поверхности Земли; M и R — масса и радиус Земли соответственно; $g = \gamma M/(R+h)^2$ — ускорение свободного падения на высоте h.

Подставляя выражение для $g = g_0$ в (241), получаем

$$\eta = \frac{\gamma M/R^2 - \gamma M/(R+h)^2}{\dfrac{\gamma M}{R^2}} = 1 - \frac{R^2}{(R+h)^2},$$

или

$$2Rh + h^2 = \eta R^2 + 2\eta Rh + \eta h^2.$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$2Rh = \eta R^2 + 2\eta h + h^2(\eta - 1).$$

Поскольку $2R\eta h$ и $h^2(\eta - 1) \ll \eta R^2$, то

$$h = \frac{\eta R}{2} \approx 32 \text{ км}.$$

Условие уменьшения ускорения свободного падения в $n = 2$ раза запишем следующим образом:

$$n = \frac{\gamma M/R^2}{\gamma M/(R+h)^2} = \frac{R^2 + 2Rh + h^2}{R^2},$$

откуда

$$h^2 + 2Rh + R^2(1-n) = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим

$$h = R(\sqrt{2} - 1) \approx 2640 \text{ км}.$$

Ответ: $h \approx 32$ км; $h = 2640$ км.

Задача 104. Телу сообщили на полюсе Земли скорость v_0, направленную вертикально вверх. Зная радиус Земли и ускорение свободного падения на ее поверхности, найти высоту, на которую поднимется тело.

Решение. Считая систему «тело—Земля» замкнутой и памятуя о том, что гравитационная сила относится к разряду консервативных, запишем закон сохранения энергии

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2.$$

Здесь $K_1 = mv_0^2/2$ — начальная кинетическая энергия тела; $K_2 = 0$ — кинетическая энергия тела в наивысшей точке подъема, соответствующей высоте h; $U_1 = -\gamma mM/R$ — потенциальная энергия системы «тело—Земля» в момент броска; $U_2 = -\gamma mM/(R+h)$ — потенциальная энергия в наивысшей точке подъема.

Таким образом, закон сохранения энергии в нашем случае выглядит следующим образом:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \gamma\frac{mM}{R} = -\gamma\frac{mM}{R+h}.$$

Сокращая на m и учитывая, что $\gamma M = gR^2$, получаем:

$$\frac{1}{2}v_0^2 = gR\left(\frac{R}{R+h}\right),$$

$$h = R\left(\frac{2gR}{v_0^2} - 1\right).$$

Ответ: $h = R\left(\dfrac{2gR}{v_0^2} - 1\right)$.

Задача 105. Найти период обращения спутника, движущегося вокруг некоторой планеты вблизи ее поверхности, если средняя плотность планеты $\rho = 3{,}3$ г/см^3.

Р е ш е н и е. Чтобы тело двигалось по круговой орбите с радиусом R, примерно равным радиусу планеты, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma\,\frac{mM}{R^2} = \gamma\,\frac{4m}{3}\,\frac{\pi R^3\rho}{R^2}\,,$$

откуда

$$v = 2R\sqrt{\frac{\pi\gamma\rho}{3}}. \tag{242}$$

Период обращения спутника

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

или, с учетом (242),

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\gamma\rho}} \approx 1{,}8\ \text{ч}.$$

О т в е т: $T \approx 1{,}8$ ч.

Задача 106. Спутник вывели на круговую орбиту со скоростью v над полюсом Земли. Найти расстояние от спутника до поверхности Земли.

Р е ш е н и е. Как и в предыдущей задаче, с учетом $g = \gamma M/R^2$, запишем:

$$\frac{mv^2}{R+h} = \gamma\,\frac{mM}{(R+h)^2} = \gamma\,\frac{mMR^2}{R^2(R+h)^2} = \frac{mgR^2}{(R+h)^2}\,,$$

откуда

$$v^2 = \frac{gR^2}{R+h}$$

или

$$h = R\left(\frac{gR}{v^2} - 1\right).$$

О т в е т: $h = R\left(\dfrac{gR}{v^2} - 1\right)$.

Задача 107. Спутник Земли массой m движется по круговой орбите, радиус которой вдвое больше радиуса Земли. Какой дополнительный импульс и в каком направлении следует кратковременно сообщить спутнику, чтобы плоскость его орбиты повернулась на угол α без изменения радиуса орбиты?

Решение. По условию задачи, после сообщения спутнику дополнительного импульса ΔP радиус его орбиты не должен измениться, следовательно, не изменятся ни скорость, ни импульс спутника (рис. 72).

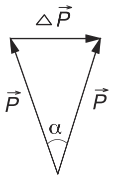


Рис. 72

Используя теорему косинусов, можно записать

$$|\Delta P| = \sqrt{2P^2 - 2P^2\cos\alpha} = 2P\sin\frac{\alpha}{2}\,. \tag{243}$$

Как и в двух предыдущих задачах, скорость v найдем из соотношения

$$\frac{mv^2}{2R} = \gamma\,\frac{mM}{4R^2}\,. \tag{244}$$

С учетом того, что ускорение свободного падения g равно $g = \gamma M/R^2$, выражение (244) принимает вид $Rv^2 = g/2$, откуда $v = \sqrt{gR/2}$. Импульс спутника

$$P = mv = m\sqrt{\frac{gR}{2}}. \tag{245}$$

Подставляя (245) в (243), получаем:

$$|\Delta\vec{P}| = m\sqrt{2gR}\sin\frac{\alpha}{2}\,.$$

Ответ: $|\Delta\vec{P}| = m\sqrt{2gR}\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Задача 108. Вычислить радиус круговой орбиты стационарного спутника Земли, который остается неподвижным относительно ее поверхности. Какова его скорость в инерциальной системе отсчета, сведенной в данный момент с центром Земли?

Решение. Спутник будет оставаться неподвижным относительно поверхности Земли, если угловая скорость его вращения будет равна угловой скорости вращения Земли. Запишем второй закон

Ньютона, а также выражение для линейной и угловой скоростей:

$$\begin{cases} \dfrac{mv^2}{r} = \gamma \dfrac{mM}{r^2}, \\ v = \omega r, \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T}. \end{cases} \tag{246}$$

Здесь r — радиус орбиты спутника; v — линейная скорость его движения; ω — угловая скорость вращения Земли и спутника; T — период вращения Земли вокруг своей оси.

Решая систему (246), находим

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M}{\omega^2}} = \sqrt[3]{\gamma M \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} = 4{,}2 \cdot 10^4 \text{ км},$$
$$v = \omega r \approx 3{,}1 \text{ км/с}.$$

Ответ: $r \approx 4{,}2 \cdot 10^4$ км; $v \approx 3{,}1$ км/с.

Задача 109. Найти массу Земли, если спутник, движущийся в ее экваториальной плоскости с запада на восток по круговой орбите радиусом $R = 2{,}00 \cdot 10^4$ км, появляется над некоторым пунктом на экваторе каждые $\tau = 11{,}6$ ч.

Решение. Как правило, спутники и ракеты запускают с запада на восток, чтобы использовать скорость вращения Земли, поэтому общая скорость v_0 движения спутника относительно поверхности Земли будет отвечать выражению $v_0 = v + v_З$, где v — скорость движения спутника относительно поверхности Земли; $v_З$ — скорость вращения Земли относительно своей оси.

Запишем второй закон Ньютона для нашего случая:

$$\gamma \frac{mM}{R^2} = \frac{mv_0^2}{R},$$

где m и M — массы спутника и Земли соответственно, откуда

$$M = \frac{v_0^2 R}{\gamma} = \frac{(v + v_З)^2 R}{\gamma}. \tag{247}$$

Далее

$$v = \omega_1 R = \frac{2\pi}{\tau} R,$$
$$v_З = \omega_2 R = \frac{2\pi}{T} R, \tag{248}$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости вращения Земли вокруг своей оси и спутника относительно Земли. Перепишем (247) с учетом (248):

$$M = \left(\frac{2\pi R}{\tau} + \frac{2\pi R}{T}\right)^2 R/\gamma = \frac{4\pi^2 R^3}{\gamma T^2}\left(1 + \frac{T}{\tau}\right)^2 = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг.}$$

О т в е т: $M = 6 \cdot 10^{24}$ кг.

Задача 110. Спутник движется в экваториальной плоскости Земли с востока на запад по круговой орбите радиусом $R = 1{,}00 \cdot 10^4$ км. Найти относительно поверхности Земли:

а) скорость спутника;

б) его ускорение.

Р е ш е н и е. а) Поскольку спутник движется в сторону, противоположную вращению Земли, его скорость относительно поверхности Земли равна

$$v' = v_З + v,$$

где $v_З$ — скорость вращения Земли относительно инерциальной системы координат с началом координат в центре Земли,

$$v_З = \omega R = \frac{2\pi}{T} R$$

(ω — угловая скорость вращения Земли относительно оси), а v — скорость спутника, находящегося на расстоянии $\vec{R}$ от начала координат, относительно этой же системы.

Выражение для v найдем из второго закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}.$$

Тогда

$$v' = \frac{2\pi R}{T} + \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} \approx 7 \text{ км/с.}$$

б) Рассчитаем ускорение:

$$a' = \frac{v'^2}{R} = \frac{\left(\dfrac{2\pi R}{T} + \sqrt{\dfrac{\gamma M}{R}}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} + \frac{4\pi}{T}\sqrt{\frac{\gamma M}{R}} + \frac{\gamma M}{R^2} =$$

$$= \frac{\gamma M}{R^2}\left(1 + \frac{4\pi R}{T}\sqrt{\frac{R}{\gamma M}} + \frac{4\pi^2 R^3}{T^2 \gamma M}\right) = \frac{\gamma M}{R^2}\left(1 + \frac{2\pi R}{T}\sqrt{\frac{R}{\gamma M}}\right)^2 \approx$$

$$\approx 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: а) $v' \approx 7$ км/с;
б) $a' \approx 4{,}9$ км/с.

Задача 111. Искусственный спутник Луны движется по круговой орбите, радиус которой в η раз больше радиуса Луны. Считая, что небольшая сила сопротивления, испытываемая спутником со стороны космической пыли, зависит от его скорости как $F = \alpha v^2$, где α — постоянная, найти время движения спутника до падения на поверхность Луны.

Решение. Пусть в момент времени τ спутник движется по орбите радиусом $r = \eta R$, где R — радиус Луны. В системе отсчета, связанной с Луной, полная энергия спутника E есть сумма его кинетической энергии и потенциальной энергии взаимодействия с Луной:

$$E = K + U.$$

Ускорение на поверхности Луны g (ускорение свободного падения на Луне) и ускорение g_r на расстоянии r от центра Луны массой M определяются выражениями:

$$g = \frac{\gamma M}{R^2} \quad \text{и} \quad g_r \, \frac{\gamma M}{r^2},$$

откуда

$$g_r = g\,\frac{R^2}{r^2}.$$

Потенциальная энергия взаимодействия с Луной

$$U = -m g_r r = -\frac{mgR^2}{r}.$$

Кинетическая энергия движения спутника $K = mgv^2/2$. Тогда выражение для полной энергии принимает вид:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{mgR^2}{r^2}. \tag{249}$$

Поскольку орбита спутника круговая, в любой момент времени

$$\frac{mv^2}{2} = mg_r = \frac{mgR^2}{r^2}\,,$$

откуда

$$v^2 = \frac{gR^2}{r}\,. \tag{250}$$

Подставляя (250) в (249), находим:

$$E(r) = -\frac{mgR^2}{2r} - \frac{mgR^2}{2} = -\frac{mgR^2}{2r}\,. \tag{251}$$

Уменьшение полной энергии спутника за время dt равно работе, совершенной против силы трения, создаваемой космической пылью,

$$-dE = dA = F\,dS = Fv\,dt = \alpha v^3\,dt. \tag{252}$$

После подстановки (250) в (252), имеем:

$$dE = -\alpha\left(\frac{gR^2}{r}\right)^{3/2} dt = -\frac{\alpha g^{3/2}R^3}{r^{3/2}}\,dt, \tag{253}$$

а дифференцируя (251) по r, получаем

$$\frac{dE}{dr} = \frac{mgR^2}{2r^2}\,,$$

или

$$dE = \frac{mgR^2}{2r^2}\,dr. \tag{254}$$

Приравниваем (253) и (254) и после несложных преобразований приходим к

$$\frac{m}{2\alpha R\sqrt{g}}\;\frac{dr}{\sqrt{r}} = -dt.$$

Интегрируем обе части выражения:

$$\frac{m}{2\alpha R\sqrt{g}}\int\limits_{\eta R}^{R}\frac{dr}{\sqrt{r}} = -\int\limits_{0}^{\tau} dt,$$

откуда

$$\tau = \frac{m(\sqrt{\eta} - 1)}{\alpha\sqrt{gR}}\,.$$

Ответ: $\tau = \dfrac{m(\sqrt{\eta} - 1)}{\alpha\sqrt{gR}}$.

Задача 112. Определить ускорение свободного падения на высоте $h = 20$ км над Землей.

Решение. Запишем выражения для ускорения свободного падения на поверхности Земли (g_0) и на высоте $h(g)$:

$$g_0 = \gamma\,\frac{M}{R^2}$$

и

$$g = \frac{\gamma M}{(R+h)^2}\,.$$

Отсюда, учитывая, что $h/R \ll 1$,

$$\frac{g_0}{g} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 \approx 1 + \frac{2h}{R}\,.$$

Таким образом,

$$g = g_0\left(\frac{R}{R+h}\right)^2 = \frac{g_0 R}{R+2h} \approx 9{,}75 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $g \approx 9{,}75$ м/с.

Задача 113. Вычислить первую и вторую космические скорости для запусков с Луны. Сравнить с соответствующими скоростями для Земли.

Решение. Первая космическая скорость спутника, согласно (211),

$$v_1 = \sqrt{gR}, \tag{255}$$

где $g = \gamma M/R^2$ — ускорение свободного падения на Луне, R — ее радиус, M — масса. Тогда

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}} \approx 1{,}67 \text{ км/с}.$$

Вторая космическая скорость v_2 в $\sqrt{2}$ раз больше v_1:

$$v_2 = \sqrt{2}v_1 \approx 2{,}37 \text{ км/с}.$$

Ответ: $v_1 \approx 1{,}67$ км/с; $v_2 \approx 2{,}37$ км/с.

Задача 114. Космический корабль подлетает к Луне по параболической траектории, почти касающейся ее поверхности. В момент максимального сближения с Луной на короткое время был включен тормозной двигатель, и корабль перешел на круговую орбиту. Найти приращение модуля скорости корабля при торможении.

Решение. При приближении к Луне космический корабль двигался по параболической траектории и имел вторую космическую скорость v_2. После включения тормозного двигателя его скорость уменьшается до первой космической скорости v_1 поскольку он переходит на круговую орбиту. Учитывая соотношения (211) и (214), запишем

$$\Delta v = v_1 - v_2 = v_1(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{\frac{\gamma M}{R}}(1 - \sqrt{2}) = -0{,}7 \text{ м/с},$$

где M и R — масса и радиус Луны.

Ответ: $|\Delta v| = 0{,}7$ м/с.

Задача 115. Космический корабль вывели на круговую орбиту вблизи поверхности Земли. Какую дополнительную скорость в направлении его движения необходимо кратковременно сообщить кораблю, чтобы он смог преодолеть земное тяготение?

Решение. Задача является обратной задаче 114. Если там требовалось снизить вторую космическую скорость до первой, то здесь наоборот — увеличить с первой до второй космической скорости. Поэтому ответ очевиден:

$$\Delta v = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{gR} = 3{,}27 \text{ км/с},$$

где R — радиус Земли.

Ответ: $\Delta v = 3{,}27$ км/с.

Задача 116. Космический корабль движется вокруг Земли по круговой орбите, радиус которой в $\eta = 2{,}5$ раза больше радиуса Земли. Какую дополнительную скорость надо кратковременно сообщить кораблю в направлении от центра Земли по ее радиусу, чтобы он смог покинуть поле тяготения Земли?

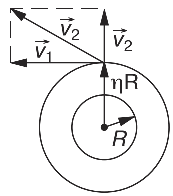


Рис. 73

Решение. Рассмотрим рис. 73. Дополнительная скорость v_r должна иметь такую величину, чтобы результирующая скорость корабля v была равна второй космической, т. е.

$$v = v_2 = \sqrt{\frac{2gR}{\eta}},$$

где R — радиус Земли.

Воспользовавшись теоремой Пифагора и соотношениями (211) и (214), запишем:

$$v_r^2 = \frac{2gR}{\eta} - \frac{gR}{\eta} = \frac{gR}{\eta},$$

$$v_r = \sqrt{\frac{gR}{\eta}} = 5 \text{ км/с}.$$

Ответ: $v_r = 5$ км/с.

Глава 5

Динамика твердого тела

В главе 3 мы уже коротко останавливались на понятии *момента*, когда рассматривали закон сохранения момента импульса. Теперь же уделим этому понятию больше внимания. В подавляющем большинстве задач, которые мы решали до сих пор, размеры и форма движущихся тел не играли существенной роли. При наших расчетах мы принимали тело за материальную точку. Кроме того, рассматриваемые нами задачи сводились либо к поступательному движению, либо к вращательному.

При поступательном движении любая точка тела за один и тот же промежуток времени проходит одно и то же расстояние, т. е. скорость и ускорение в любой момент времени одинаковы. Это позволяет заменить движение тела движением одной избранной точки, например движением центра масс.

При вращательном движении достаточно знать положение оси вращения и угловую скорость.

В механике твердого тела рассматривается движение, состоящее как из поступательного движения какой-либо точки, так и вращательного движения относительно какой-либо оси — например катящийся по поверхности цилиндр.

Обращаем внимание читателей на то, что в данной главе мы рассматриваем тело как абсолютно твердое. Таким образом, плоское движение тела можно представить как сумму двух движений — поступательного со скоростью $\vec{v}_0$ и вращательного с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Линейная скорость точки, вращающейся по окружности, может быть представлена как $\vec{v}\,' = [\vec{\omega}\,\vec{r}]$ (рис. 74), а полная скорость $\vec{v}$ как

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega}\,\vec{r}].$$

Из опыта известно, что угловое ускорение тела β зависит не только от приложенной силы $\vec{F}$, но также и от расстояния до оси или точки вращения $\vec{r}$. Поэтому при рассмотрении вращательного движения вводится величина, называемая *моментом*

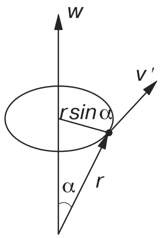


Рис. 74

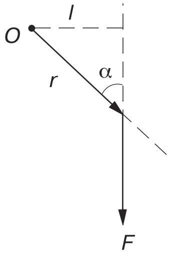


Рис. 75

силы $\overrightarrow{N}$. Моментом силы $\overrightarrow{N}$ относительно точки O называется вектор $\overrightarrow{N} = [\overrightarrow{r}\,\overrightarrow{F}]$ (рис. 75). Вектор $\overrightarrow{N}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\overrightarrow{r}$ и $\overrightarrow{F}$, и его направление определяется правилом правого винта. Величина l называется *плечом силы*. Результирующий момент есть величина аддитивная:

$$\overrightarrow{N} = \sum_i \overrightarrow{N}_i.$$

Сумма произведений элементарных масс на квадрат их расстояния от оси вращения называется *моментом инерции тела* относительно оси вращения

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2. \tag{256}$$

Момент инерции, так же как и момент силы, — величина аддитивная:

$$I = \sum_i I_i.$$

Основное уравнение динамики для вращательного движения относительно оси Z выглядит следующим образом:

$$I_Z \beta = N_Z,$$

где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси вращения; N_z — алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело относительно оси Z.

Фактически последнее уравнение является вторым законом Ньютона, где роль силы играет момент силы, роль массы — момент инерции и т. д. (табл. 6). Согласно формуле (256), момент инерции

Таблица 6

Поступательное движение	Вращательное движение
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\vec{\beta} = \vec{N}$
$\vec{F}$ — сила	$\vec{N}$ — момент силы
m — масса	I — момент инерции
$\vec{a}$ — линейное ускорение	$\vec{\beta}$ — угловое ускорение
$\vec{p}$ — импульс	$\vec{M}$ — момент импульса

определен как произведение элементарных масс на квадрат их расстояния от оси вращения. Если тело однородно, то

$$I = \int r^2\,dm = \rho \int r^2\,dV, \tag{257}$$

где ρ — плотность тела; r — расстояние до оси вращения; dV — элементарный объем.

Используя табл. 6, получаем выражение для кинетической энергии вращающегося тела

$$K = \frac{I\omega^2}{2}\,, \tag{258}$$

а также для работы внешних сил при вращении твердого тела

$$A = \int dA = \int_0^{\varphi} N\,d\varphi = \int_0^{t} N\omega\,dt. \tag{259}$$

При поступательном движении условием равновесия было равенство нулю алгебраической суммы всех внешних сил, приложенных к телу:

$$\sum_i F_i = 0. \tag{260}$$

Теперь же необходимо дополнить это условие равенством нулю результирующего момента внешних сил относительно любой неподвижной оси

$$\sum_i N_i = 0. \tag{261}$$

Как ясно из табл. 6, при вращательном движении масса заменяется моментом инерции, поэтому в табл. 7 приведены моменты инерции тел, наиболее часто встречающиеся в задачах по общей физике.

Таблица 7

Твердое тело	Ось Z_c	Момент инерции
Тонкий стержень длиной l	Перпендикулярна стержню	$\frac{1}{2}ml^2$
Сплошной цилиндр радиусом R	Совпадает с осью цилиндра	$\frac{1}{2}mR^2$
Тонкий диск радиусом R	Совпадает с диаметром диска	$\frac{1}{2}mR^2$
Шар радиусом R	Проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Все значения для моментов инерции получены в задачах, приводимых в этой главе.

Неоценимую помощь при расчете моментов инерции может оказать *теорема Штейнера*:

$$I_z = I_C + ma^2, \tag{262}$$

где I_z — момент инерции относительно произвольной оси Z; I_C — момент инерции относительно оси Z_C, которая параллельна оси z, но проходит через центр масс C тела; m — масса тела; a — расстояние между осями.

Рекомендации по решению задач

1. Если движение тела поступательно, то его момент импульса относительно центра масс равен нулю и остается неизменным в процессе движения.

2. При написании уравнения результирующего момента всех сил, действующих на тело, выбирайте такую ось, у которой хотя бы один момент был равен нулю (задачи 117, 118).

3. Работа сил трения равна изменению кинетической энергии системы со знаком «минус» (задача 145).

4. При решении задач типа 146 помните, что приращение и убыль какой-либо величины — разные вещи. Приращение определяется как $\Delta X_{\text{пр.}} = X_2 - X_1$ и убыль как $\Delta X_{\text{уб.}} = X_1 - X_2$.

Задачи к главе 5

Задача 117. Тонкий однородный стержень AB массой $m = 1{,}0$ кг движется поступательно с ускорением $a = 2{,}0$ м/с^2 под действием силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 76). Расстояние $b = 20$ см, сила $F_2 = 5{,}0$ Н. Найти длину стержня.

Решение. Поскольку по условию задачи стержень движется поступательно, моменты сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ относительно центра масс равны. Примем направление силы $\vec{F}_2$ за положительное. Тогда

$$\begin{cases} \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = ma, \\ \vec{F}_1 \dfrac{l}{2} = F_2\left(\dfrac{l}{2} - b\right). \end{cases}$$

Решая эту систему относительно F_1 и l, находим

$$l = \frac{2bF_2}{ma} = 1{,}0 \text{ м}.$$

Ответ: $l = 1{,}0$ м.

Задача 118. Однородная балка лежит на двух опорах (рис. 77). Определить реакции опор $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Решение. Равнодействующая сил тяжести равна весу балки $\vec{P}$ и приложена к ее центру инерции. Балка неподвижна, поэтому должно выполняться следующее условие (260):

$$P = F_1 + F_2. \tag{263}$$

Кроме того, должно выполняться условие (261): результирующий момент всех действующих на балку сил относительно любой оси должен быть равен нулю.

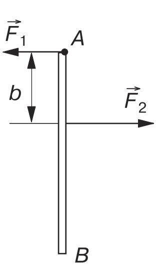


Рис. 76

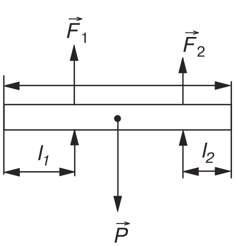


Рис. 77

Запишем это условие относительно левой точки опоры:

$$P\left(\frac{l}{2} - l_1\right) = F_2(l - l_1 - l_2). \tag{264}$$

Решая совместно (263) и (264), находим

$$F_1 = \frac{P}{2}\,\frac{l - 2l_2}{l - (l_1 + l_2)}\,, \quad F_2 = \frac{P}{2}\,\frac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}\,.$$

О т в е т: $F_1 = \dfrac{P}{2}\,\dfrac{l - 2l_2}{l - (l_1 + l_2)}$; $F_2 = \dfrac{P}{2}\,\dfrac{l - 2l_1}{l - (l_1 + l_2)}$.

Задача 119. В начальном положении середина горизонтального однородного стержня массой m и длиной l находится над упором A (рис. 78). Левый конец стержня начали медленно тянуть за нить. Какую работу надо совершить, чтобы стержень выскочил из-под упора B, если расстояние между упорами A и B равно a и коэффициент трения между стержнем и упорами k?

Р е ш е н и е. До того как стержень выскочит из-под упора B, он будет находиться в состоянии равновесия, поэтому запишем условия (260) и (261):

$$\begin{cases} P - F_A = F_B, \\ P(a + x) - F_A a = 0, \end{cases}$$

где F_A и F_B — силы реакции опор A и B соответственно; x — величина продвижения стержня влево; P — вес стержня.

Второе уравнение — это результирующий момент всех сил, действующих на стержень относительно опоры B. Отсюда

$$F_A = \frac{P(a + x)}{a}\,, \quad F_B = -\,\frac{Px}{a}\,.$$

Поскольку в опоре A и в опоре B сила трения направлена в одну сторону, т. е. против движения стержня, выражение для $F_{\text{тр}}$

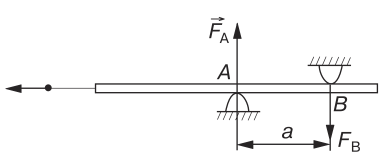


Рис. 78

имеет вид

$$F_{\text{тр}} = k(F_A + F_B) = kP\left(\frac{a+x}{a} + \frac{x}{a}\right) = \frac{kP}{a}\,(\alpha + 2x).$$

Запишем выражение для элементарной работы

$$dA = F_{\text{тр.}}\,dx = \frac{kP}{a}\,(a+2x)dx,$$

где k — коэффициент трения.

$$A = \frac{kP}{a}\int\limits_0^{(l/2)-a}(a+2x)\,dx = \left(\frac{l}{2a} - 1\right)\frac{kmgl}{2}\,.$$

Ответ: $A = \left(\dfrac{l}{2a} - 1\right)\dfrac{kmgl}{2}$.

Задача 120. Имеется тонкий однородный стержень массой m и длиной l. Найти его момент инерции относительно оси, проходящей через:

а) его конец и перпендикулярный самому стержню (рис. 79, *а*);

б) его центр и составляющей угол α со стержнем (рис. 79, *б*).

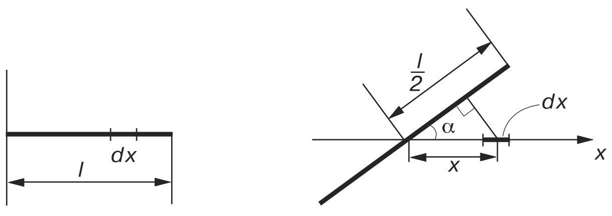
Решение. а)

$$dI = x^2\,dm, \tag{265}$$

$$dm = \lambda\,dx, \tag{266}$$

где λ — линейная плотность:

$$\lambda = \frac{m}{l}\,. \tag{267}$$



а *б*

Рис. 79

С учетом (266) и (267) перепишем (265):

$$dI = \frac{m}{l}\, x^2\, dx,$$

откуда

$$I = \frac{m}{l} \int\limits_0^l x^2\, dx = \frac{ml^2}{3}\,.$$

б)

$$dI = x^2 \sin^2\alpha\, dm = x^2 \sin^2\alpha\, \frac{m}{l}\, dx,$$

$$I = \int\limits_{-\frac{l}{2}}^{l/2} \frac{m \sin^2 \alpha x^2}{l}\, dx = \frac{ml^2 \sin^2\alpha}{12}\,.$$

О т в е т: а) $I = \dfrac{ml^2}{3}$; б) $I = \dfrac{ml^2 \sin^2\alpha}{12}$.

Задача 121. Найти момент инерции тонкой однородной прямоугольной пластинки относительно оси, проходящей через одну из вершин пластинки перпендикулярно ее плоскости, если стороны пластинки равны a и b, а ее масса m.

Р е ш е н и е.

$$dI = r^2\, dm,$$

$$dm = \sigma dS = \sigma\, dx\, dy,$$

где σ — поверхностная плотность материала пластинки:

$$\sigma = \frac{m}{ab}\,,$$

тогда

$$dI = \frac{m}{ab}\,(x^2 + y^2) dx\, dy,$$

откуда

$$I = \frac{m}{ab} \int\limits_0^a \int\limits_0^b (x^2 + y^2) dx\, dy = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}\,.$$

О т в е т: $I = \dfrac{m(a^2 + b^2)}{3}$.

Задача 122. Тонкая однородная пластинка массой $m = 0{,}60$ кг имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти ее момент инерции относительно оси, совпадающей с одним из катетов, длина которого $a = 200$ мм.

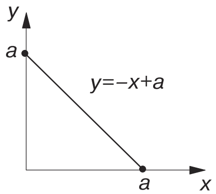


Рис. 80

Р е ш е н и е. Получим

$$dI = r^2\, dm,$$

$$dm = G\, ds = \sigma\, dx\, dy = \frac{2m}{a^2}\, dx\, dy,$$

$$r^2 = x^2,$$

$$I = \frac{2m}{a^2} \int_0^a \int_0^{-x+a} x^2\, dx\, dy = \int_0^a x^2\, dx \int_0^{-x+a} dy = \\ = \frac{ma^2}{6} = 4\ \text{г}\cdot\text{м}^2.$$

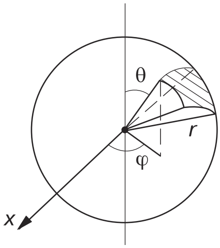


Рис. 81

Значение пределов интегрирования понятно из рис. 80.

О т в е т: $I = \dfrac{ma^2}{6} = 4\ \text{г}\cdot\text{м}^2$.

Задача 123. Вычислить момент инерции однородного шара радиусом R относительно оси, проходящей через его центр.

Р е ш е н и е. Будем решать задачу в сферической системе координат, для которой элементарный объем $dV = r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ (рис. 81). Тогда

$$dI = r^2 \sin^2\theta\, dm = \rho r^4\, dr \sin^3\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

где ρ — объемная плотность шара.

$$I = \rho \int_0^R r^4\, dr \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5}\, mR^2.$$

О т в е т: $I = \dfrac{2}{5}\, mR^2$.

Задача 124. Вывести формулу для момента инерции полого шара относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара равна m, внутренний радиус r, внешний R.

Р е ш е н и е. Воспользуемся принципом наложения. Предположим, что внутрь шара радиусом R и массой M_R помещен шар из гипотетической материи радиусом r и массой M_r. Учитывая, что момент инерции величина аддитивная, запишем:

$$I_0 = I_R + I_r, \tag{268}$$

где I_R — момент инерции шара радиусом R; I_r — момент инерции шара из гипотетического материала радиусом r.

Тогда

$$M_R = \rho_R V_R, \tag{269}$$

$$\rho = \frac{m}{V_{R-r}}\,, \qquad (270),$$

где ρ_R — плотность материала полого шара; V_{R-r} — объем оболочки.

$$dV_{R-r} = 4\pi r'^2\,dr',$$

$$V_{R-r} = 4\pi \int\limits_r^R r'^2\,dr' = \frac{4}{3}\,\pi(R^3 - r^3). \tag{271}$$

Подставляем (271) в (270), а затем (270) в (269). Учитывая, что объем шара определяется выражением

$$V_R = \frac{4}{3}\,\pi R^3,$$

находим:

$$M_R = \frac{mR^3}{R^3 - r^3}\,,$$

$$I_R = \frac{2}{5}\,M_R R^2 = \frac{2}{5}\,m\,\frac{R^5}{R^3 - r^3}\,.$$

Полагая, что $\rho_{M_R} = -\rho_{M_r}$, записываем:

$$I_r = -\,\frac{2}{5}\,m\,\frac{r^5}{R^3 - r^3}\,.$$

Подставляем I_R и I_r в (268):

$$I_0 = \frac{2}{5}\,m\,\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}\,.$$

О т в е т: $I_0 = \dfrac{2}{5}\,m\,\dfrac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$.

Задача 125. Исходя из формулы для момента инерции однородного шара найти момент инерции тонкого сферического слоя массой m и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр.

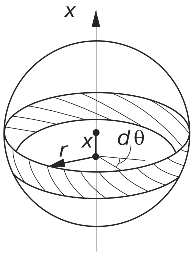


Рис. 82

Р е ш е н и е. Так как речь идет о тонкой сферической оболочке, запишем $I = \int R^2\,dm$. Разделим сферу на узкие кольца шириной dx (рис. 82) и найдем dS:

$$dS = 2\pi r\,dx.$$

Учитывая, что $r = R\sin\theta$,

$$dx = r\,d\theta, \quad dS = 2\pi R^2 \sin\theta\,d\theta,$$
$$dm = G\,ds = \sigma 2\pi R^2 \sin\theta\,d\theta,$$

где σ — поверхностная плотность.

Находим массу $m = 4\pi\sigma R^2$ и момент инерции

$$I = 2\pi\sigma R^4 \int\limits_0^\pi \sin^3\theta\,d\theta = \frac{2}{3}\,mR^2.$$

О т в е т: $I = \dfrac{2}{3}\,mR^2$.

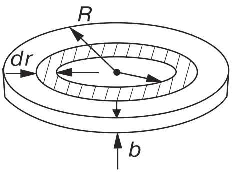


Рис. 83

Задача 126. Вычислить момент инерции:

а) медного однородного диска относительно его оси, если толщина диска $b = 2{,}0$ мм и радиус $R = 100$ мм;

б) однородного тонкого диска, для которого $b \ll R$.

Р е ш е н и е. а) Разобьем диск на элементарные кольца. Тогда объем такого кольца будет равен (рис. 83)

$$dV = b2\pi r\,dr.$$

Момент инерции диска

$$I = \int r^2\,dm = \rho \int\limits_0^R r^2 b2\pi r\,dr = 2\pi b\rho\,\frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2} = 2{,}8\ \text{г}\cdot\text{м}^2,$$

где ρ — объемная плотность; $m = \pi R^2 b\rho$ — масса диска.

б) Для тонкого диска

$$dS = 2\pi r\,dr, \quad dm = \sigma 2\pi r\,dr,$$

$$I = \sigma \int_0^R 2\pi r^3\,dr = \frac{\sigma 2\pi R^4}{4} = \frac{mR^2}{2},$$

где $m = \sigma\pi R^2$, σ — поверхностная плотность.

О т в е т: а) $I = \dfrac{mR^2}{2} = 2\pi b\rho\,\dfrac{R^4}{4} = 2{,}8$ г $\cdot$ м^2; б) $I = \dfrac{mR^2}{2}$.

Задача 127. Вычислить момент инерции однородного сплошного конуса относительно его оси, если радиус основания конуса R равен высоте h.

Р е ш е н и е. Разобьем конус на элементарные диски радиусом r и толщиной dh (рис. 84). Воспользовавшись результатом решения задачи 126, запишем выражение для момента инерции элементарного диска:

$$dI = \frac{r^2}{2}\,dm = \frac{r^2\rho\,dV}{2} = \frac{r^2\rho\pi r^2}{2}\,dr.$$

Здесь учтено, что, по условию задачи, $R = h$, и объем конуса с радиусом основания r

$$V = \frac{\pi r^3}{3},$$

откуда

$$dV = \pi r^2\,dr.$$

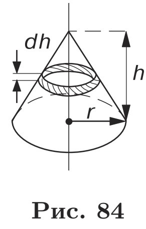


Рис. 84

Находим момент инерции

$$I = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^R r^4\,dr = \frac{\pi\rho R^5}{10}.$$

Учитывая, что $m = \dfrac{1}{3}\rho\pi R^3$, получаем

$$I = \frac{3mR^2}{10}.$$

О т в е т: $I = \dfrac{3mR^2}{10}$.

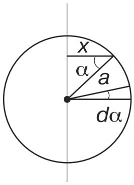


Рис. 85

Задача 128. Найти момент инерции тонкого проволочного кольца радиусом a и массой m относительно оси, совпадающей с его диаметром.

Решение. Как и ранее, записываем

$$I = \int x^2 \, dm.$$

Из рис. 85 следует:

$$x = a \cos \alpha, \quad dl = a \, d\alpha, \quad dm = m \, d\alpha / (2\pi).$$

С учетом этого

$$I = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \cos^2 \alpha m \, d\alpha}{2\pi} = \frac{2a^2 m}{\pi} \left[\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right] \Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2 m}{2} .$$

Ответ: $I = \dfrac{a^2 m}{2}$.

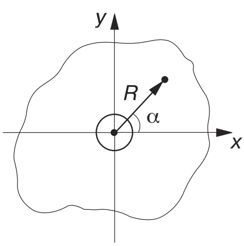


Рис. 86

Задача 129. Показать, что для тонкой пластинки произвольной формы имеется следующая связь между моментами инерции: $I_1 + I_2 = I_3$, где 1, 2, 3 — взаимно-перпендикулярные оси, проходящие через одну точку, причем оси 1 и 2 лежат в плоскости пластинки.

Используя эту связь, найти момент инерции тонкого круглого однородного диска радиусом R и массой m относительно оси, совпадающей с одним из его диаметров.

Решение. Проведем через точку O оси координат, как показано на рис. 86 (ось Z перпендикулярна плоскости чертежа). Тогда

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha,$$

$$I_x = \sum_i m_i R_i^2 \cos^2 \alpha,$$

$$I_y = \sum_i m_i R_i^2 \sin^2 \alpha,$$

$$I_z = \sum_k m_i R_i^2.$$

Из приведенных соотношений видно, что

$$I_x + I_y = I_z.$$

Найдем момент инерции тонкого однородного диска относительно одной из осей OX или OY. Очевидно, что $I_x = I_y$. Поскольку момент инерции тонкого диска I_z равен $I_z = mR^2/2$ (см. табл. 7),

$$2I_x = 2I_y = \frac{mR^2}{2}\,.$$

Отсюда

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}\,.$$

Ответ: $I_x + I_y = I_z$; $I_x = I_y = \dfrac{mR^2}{4}$.

Задача 130. Моменты инерции тела относительно взаимно параллельных осей 1 и 2 равны $I_1 = 1{,}0$ г$\cdot$м^2 и $I_2 = 3{,}0$ г$\cdot$м^2. Оси 1 и 2 расположены на расстояниях $x_1 = 100$ мм и $x_2 = 300$ мм от центра масс C тела. Найти момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через точку C и параллельной осям 1 и 2.

Решение. Воспользуемся теоремой Штейнера

$$\begin{cases} I_1 = I_C + mx_1^2, \\ I_2 = I_C + mx_2^2, \end{cases}$$

где I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной осям X_1 и X_2.

Решая систему уравнений, находим

$$I_C = \frac{I_1 x_2^2 - I_2 x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = 0{,}75 \text{ г} \cdot \text{м}^2.$$

Ответ: $I_C = \dfrac{I_1 x_2^2 - I_2 x_1^2}{x_2^2 - x_1^2} = 0{,}75$ г $\cdot$ м^2.

Задача 131. Определить момент инерции I кольца массой $m = 50$ г и радиусом $R = 10$ см относительно оси, касательной к кольцу.

Решение. Воспользуемся теоремой Штейнера:

$$I = I_C + ma^2.$$

Здесь I — момент инерции относительно произвольной оси; $I_C = mR^2/2$ — момент инерции относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр инерции тела (128); m — масса тела; a — расстояние между осями.

Момент инерции кольца

$$I = I_C + mR^2 = \frac{R^2 m}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}\,mR^2.$$

О т в е т: $I = \dfrac{3}{2}\,mR^2$.

Задача 132. Однородный диск радиусом R имеет круглый вырез (рис. 87, *а*). Масса оставшейся (заштрихованной) части диска равна m. Найти момент инерции такого диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей:

а) через точку O;

б) через его центр масс.

Р е ш е н и е. а) Обозначим I_0 момент инерции диска с круглым вырезом (рис. 87, *а*). Воспользовавшись принципом наложения, можем записать

$$I_0 = I_1 - I_2, \tag{272}$$

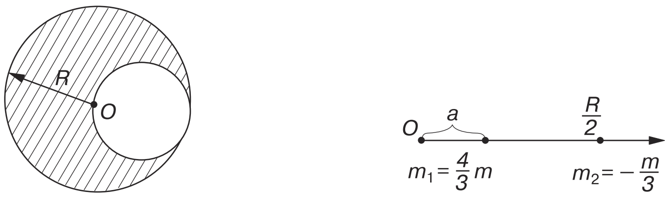
где I_1 — момент инерции диска радиусом R без вырезанного диска радиусом $R/2$; I_2 — момент инерции диска из «гипотетического» вещества с плотностью $-\rho$ и радиусом $R/2$.

Тогда

$$I_1 = \frac{m_1 R^2}{2}\,. \tag{273}$$

Получим I_2 с помощью теоремы Штейнера:

$$I_2 = -\frac{m_2 R^2}{8} - \frac{m_2 R^2}{4} = -\frac{3}{8}\,m_2 R^2. \tag{274}$$



а *б*

Рис. 87

Здесь m_1 и m_2 — масса диска радиусом R без выреза и масса диска из «гипотетического» вещества радиусом $R/2$, плотность которого по величине равна плотности вещества большого диска, но имеет отрицательный знак.

В условиях задачи нам дана масса оставшейся части диска m, поэтому необходимо установить связь между m_1, m_2 и m.

Очевидно, что масса диска пропорциональна квадрату его радиуса, поэтому легко получить следующие соотношения:

$$m_1 = \frac{4}{3}\,m, \tag{275}$$

$$m_2 = \frac{m}{3}\,. \tag{276}$$

Подставив эти выражения в (273) и (274), а полученные результаты в (272), находим

$$I_0 = \frac{13}{24}\,mR^2.$$

б) Для нахождения момента инерции диска относительно оси, проходящей через его центр масс I_C, воспользуемся теоремой Штейнера

$$I_C = I_0 - m_1 a^2,$$

где a — расстояние между осью диска и параллельной ей осью, проходящей через центр масс,

$$I_0 = \frac{13}{24}\,mR^2,$$

$$m_1 = \frac{4}{3}\,m.$$

Тогда

$$I_C = \frac{13}{24}\,mR^2 - \frac{4}{3}\,ma^2.$$

Чтобы найти расстояние a, найдем координаты центра масс. Заменим рис. 87, *а*, эквивалентным рис. 87, *б*, где массы обоих дисков, состоящих из обычного и «гипотетического» вещества, представляют собой точки с массами $(4/3)m$ и $-m/3$, расположенными на концах отрезка длиной $R/2$. Поскольку задача симметрична относительно оси Y, ордината центра масс $Y_C = 0$.

Для центра масс выполняется условие:

$$m_1 a = -m_2\left(\frac{R}{2} - a\right).$$

С учетом (275) и (276)

$$a = -\frac{R}{6}.$$

Применяя теорему Штейнера, определяем I_C:

$$I_C = I_0 - ma^2 = \frac{37}{72}\,mR^2.$$

Ответ: а) $I_0 = \frac{13}{24}\,mR^2$; б) $I_C = \frac{37}{72}\,mR^2$.

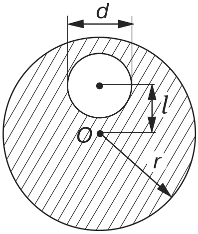


Рис. 88

Задача 133. В однородном диске массой $m = 1$ кг и радиусом $r = 30$ см вырезано круглое отверстие диаметром $d = 20$ см, центр которого находится на расстоянии $l = 15$ см от оси диска (рис. 88). Найти момент инерции I полученного тела относительно оси, проходящей перпендикулярно плоскости диска через его центр.

Решение. По своей постановке задача не имеет принципиальных отличий от предыдущей. Различие заключается лишь в исходных данных, поэтому, не повторяя приведенных выше рассуждений, сразу вычислим массу вырезанного диска m_1:

$$m_1 = m\,\frac{d^2}{4r^2}. \tag{277}$$

Запишем выражение для результирующего момента инерции I_0 относительно оси, проходящей через центр диска

$$I_0 = I - I_1 = \frac{mr^2}{2} - I_1, \tag{278}$$

где $I = mr^2/2$ — момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр; I_1 — момент инерции диска из «гипотетического» вещества относительно той же оси.

Для вычисления I_1 воспользуемся теоремой Штейнера, учитывая при этом (277):

$$I_1 = \frac{md^2}{2 \cdot 4 \cdot r^2}\ \frac{d^2}{4} + \frac{md^2}{4}\, l^2 = \frac{md^2}{32r^2}\,(d^2 + 8l^2).$$

Подставляя полученное выражение в (278), получаем

$$I = \frac{1}{2}\, mr^2 - \frac{md^2}{32r^2}\,(d^2 + 8l^2) = 4{,}19 \cdot 10^{-2}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

О т в е т: $$I = \frac{1}{2}\, mr^2 - \frac{md^2}{32r^2}\,(d^2 + 8l^2) = \\ = 4{,}19 \cdot 10^{-2}\ \text{кг} \cdot \text{м}^2.$$

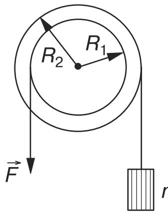


Рис. 89

Задача 134. На ступенчатый блок (рис. 89) намотаны в противоположных направлениях две нити. На конец одной нити действуют постоянной силой $\vec{F}$, а к концу другой прикреплен груз массой m. Известны радиусы R_1 и R_2 блока и его момент инерции I относительно оси вращения. Трения нет. Найти угловое ускорение блока.

Р е ш е н и е. Запишем второй закон Ньютона для установки, изображенной на рис. 89:

$$mgR_2 - FR_1 = I\beta + mR_2^2\beta,$$

где mR_2^2 — момент инерции груза m относительно оси, проходящей через центр блока параллельно движению груза.

Отсюда

$$\beta = \frac{mgR_2 - FR_1}{I + mR_2^2}\,.$$

О т в е т: $\beta = \dfrac{mgR_2 - FR_1}{I + mR_2^2}$.

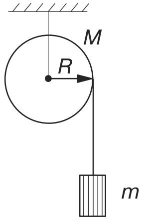


Рис. 90

Задача 135. На однородный сплошной цилиндр массой M и радиусом R плотно намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой m (рис. 90). В момент $t = 0$ система пришла в движение. Пренебрегая трением в оси цилиндра, найти зависимость от времени:

а) модуля угловой скорости цилиндра;
б) кинетической энергии всей системы;
в) углового ускорения.

Р е ш е н и е. а) Запишем выражение, связывающее линейное (тангенциальное) ускорение a точки, лежащей на поверхности цилиндра, с угловым ускорением β:

$$a = \beta R, \tag{279}$$

и выражение, связывающее угловое ускорение с вращающим моментом N_Z, действующим на цилиндр с моментом инерции I:

$$\beta = \frac{N_Z}{I}, \tag{280}$$

где

$$I = \frac{MR^2}{2}. \tag{281}$$

Вращающий момент, действующий на цилиндр:

$$N_Z = FR. \tag{282}$$

Запишем второй закон Ньютона для движения груза массой m:

$$mg - F = ma,$$

откуда

$$F = m(g - a). \tag{283}$$

Подставляя (283) в (282), а затем (282) и (281) в (280), находим β:

$$\beta = \frac{2m(g - a)}{MR}.$$

С учетом (279)

$$\beta = \frac{2m(g - \beta R)}{MR}.$$

Решая полученное уравнение относительно β, получаем

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{g}{R[1 + (M/2m)]},$$

откуда определяем модуль угловой скорости цилиндра:

$$\omega = \int\limits_0^t \frac{g\,dt}{R[1 + (M/2m)]} = \frac{gt}{R[1 + (M/2m)]}.$$

б) Кинетическая энергия системы, изображенной на рис. 90, складывается из энергии вращения цилиндра

$$K_1 = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{Mg^2t^2}{4[1 + (M/2m)]^2}$$

и энергии поступательного движения груза массой m

$$K_2 = \frac{mv^2}{2} = \frac{mg^2t^2}{2[1 + (M/2m)]^2}\,,$$

где учтено, что $v = \omega R$.

Тогда полная энергия системы

$$K = K_1 + K_2 = \frac{Mg^2t^2}{4[1 + (M/2m)]^2} + \frac{mg^2t^2}{2[1 + (M/2m)]^2} =$$
$$= \frac{Mg^2t^2 + 2mg^2t^2}{4[1 + (M/2m)]^2} = \frac{2mg^2t^2[1 + (M/2m)]}{4[1 + (M/2m)]^2} = \frac{mg^2t^2}{2[1 + (M/2m)]}\,.$$

Угловое ускорение β легко находится с помощью принципа виртуальных работ. Заполним таблицу

Таблица 8

m_K	δS_K	A_K	A_K^2	F_K
m	δx	1	1	mg
$\frac{MR^2}{2}$	$\delta\varphi = \frac{\delta x}{R}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R^2}$	0

и воспользуемся (96):

$$a = \frac{\sum F_K A_K}{\sum m_K A_k^2} = \frac{2mg}{M + 2m}\,,$$
$$\beta = \frac{2mg}{(M + 2m)R} = \frac{g}{R[1 + (M/2m)]}\,.$$

О т в е т: а) $\omega = \dfrac{gt}{R[1 + (M/2m)]}$; б) $K = \dfrac{mg^2t^2}{2[1 + (M/2m)]}$;
в) $\beta = \dfrac{g}{R[1 + (M/2m)]}$.

Задача 136. Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой m перекинута невесомая нить, к концам которой подвешены грузы m_1 и m_2. Пренебрегая трением в оси блока, определить:

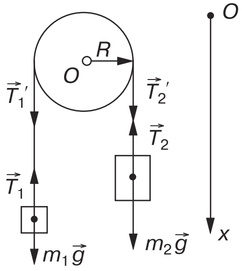


Рис. 91

1) ускорение a грузов;
2) силы натяжения T_1 и T_2.

Р е ш е н и е.

I способ

Решим сначала задачу классическим способом. Пусть положительное направление оси X будет сверху вниз. Из рис. 91 ясно, что груз m_2 обладает большей массой, поэтому его движение будет совпадать с положительным направлением оси X, а движение груза m_1 будет направлено в противоположную сторону. Кроме того, $T_2 > T_1$, иначе бы не было результирующего момента, обеспечивающего вращения блока.

Из третьего закона Ньютона следует, что

$$T_1 = T_1' \quad \text{и} \quad T_2 = T_2'. \tag{284}$$

Запишем уравнение второго закона Ньютона для грузов m_1 и m_2:

$$m_1 a = T_1 - m_1 g, \tag{285}$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2, \tag{286}$$

и уравнение основного закона механики для вращательного движения:

$$N_Z = I_Z \beta. \tag{287}$$

Учитывая (284), выражения момента цилиндра или диска

$$I_Z = \frac{mR^2}{2} \tag{288}$$

(см. табл. 7) и углового ускорения

$$\beta = \frac{a}{R}\,, \tag{289}$$

получаем последнее уравнение системы:

$$(T_2 - T_1)R = I_Z \beta = I_Z\,\frac{a}{R} = \frac{mR}{2}\,. \tag{290}$$

Решая совместно уравнения (285), (286) и (290), находим ускорение грузов

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + (m/2)}\, g,$$

а из уравнений (285) и (286) — силу натяжения нитей

$$T_1 = m_1(g + a), \quad T_2 = m_2(g - a).$$

II способ

Решим теперь задачу с помощью принципа виртуальных перемещений. Для этого заполним таблицу. Однако теперь необходимо учитывать, что цилиндрический блок имеет массу и, следовательно, момент инерции, поэтому таблица слегка усложняется. За основное виртуальное перемещение δx примем перемещение груза m_1, а за $\delta\varphi$ — угол, на который повернется блок при виртуальном перемещении грузов на расстояние δx.

Таблица 9

m_K	δS_K	A_K	A_K^2	F_K
m_1	$\delta x_1 = \delta x$	1	1	$-m_1 g$
m_2	$\delta x_2 = \delta x$	1	1	$m_2 g$
$I = \dfrac{mR^2}{2}$	$\delta\varphi = \dfrac{\delta x}{R}$	$\dfrac{1}{R}$	$\dfrac{1}{R^2}$	0

Подставляя табличные данные в формулу (96), получаем

$$\ddot{x} = a = \frac{\sum\limits_K F_K A_k}{\sum\limits_K m_K A_k^2} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}\, g.$$

Силу натяжения T_1 и T_2 находим, как и в первом способе.

О т в е т: $a = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m/2}\, g$; $T_1 = m_1(g + a)$, $T_2 = m_2(g - a)$.

Задача 137. На ступенчатый цилиндрический блок намотаны в противоположном направлении две нити с подвешенными к ним грузами массами m_1 и m_2. Найти ускорение грузов и силу натяжения нитей. Момент инерции блока I, радиус соответствующих участков блока R_1 и R_2.

Р е ш е н и е.

I способ

Выберем положительное направление оси X вниз (рис. 92). Запишем уравнение второго закона Ньютона для грузов m_1 и m_2

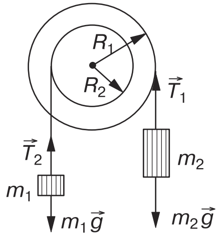


Рис. 92

и уравнение основного закона механики для вращательного движения:

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1, \tag{291}$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g, \tag{292}$$

$$N_Z = I_Z \beta. \tag{293}$$

В предыдущей задаче грузы висели на концах одной невесомой нити, поэтому $|a_1| = |a_2| = a$. Здесь же две нити намотаны в противоположном направлении на ступенчатый цилиндрический блок, где каждая ступень имеет свой радиус R_1 и R_2, поэтому $|a_1| \neq |a_2|$, и необходимо составить еще одно уравнение, иначе система (291)–(293) будет незамкнута. Собственно, в этом, если не считать довольно кропотливых, хотя и элементарных математических выкладок, и заключается «изюминка» задачи. Понятно, что угловое ускорение цилиндрического блока постоянно, а линейные ускорения грузов не равны, поскольку при повороте цилиндрического блока на угол $d\varphi$ грузу m_1 приходится проходить больший путь, чем грузу m_2, из-за того что $R_1 > R_2$ и $|a_1| > |a_2|$. Теперь нетрудно сообразить, что, поскольку пройденный путь линейно зависит как от ускорения, так и от радиуса блока соответствующего участка, справедливо

$$\frac{R_1}{R_2} = \left|\frac{a_1}{a_2}\right|$$

или

$$|a_1| = |a_2|\,\frac{R_1}{R_2}\,. \tag{294}$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему уравнений. Решение системы (291)–(294) с учетом

$$\beta = \frac{|a_1|}{R_1} = \frac{|a_2|}{R_2}$$

приводит к следующим выражениям:

$$a_1 = g\,\frac{(m_1R_1 - m_2R_2)R_1}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}\,, \qquad a_2 = -g\,\frac{(m_1R_1 - m_2R_2)R_2}{I + m_1R_1^2 + m_2R^2}\,,$$

$$T_1 = m_1 g\,\frac{I + m_2R_2(R_2 + R_1)}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}\,, \quad T_2 = m_2 g\,\frac{I + m_1R_1(R_2 + R_1)}{I + m_1R_1^2 + m_2R_2^2}\,.$$

II способ

Решим задачу с помощью принципа виртуальных перемещений. Для этого составим табл. 10, где за основное перемещение возьмем перемещение груза m_1.

Таблица 10

m_K	δS_K	A_K	A_K^2	F_K
m_1	$\delta x_1 = \delta x$	1	1	$m_1 g$
m_2	$\delta x_2 = \dfrac{R_2}{R_1}\,\delta x$	$\dfrac{R_2}{R_1}$	$\dfrac{R_2^2}{R_1^2}$	$-m_2 g$
I	$\delta\varphi = \dfrac{\delta x}{R}$	$\dfrac{1}{R_1}$	$\dfrac{1}{R_1^2}$	0

Воспользовавшись формулой (96), находим

$$\ddot{x}_1 = a_1 = \frac{\sum F_K A_K}{\sum m_K A_K^2} = \frac{m_1 g - m_2 g(R_2/R_1)}{(I/R_1^2) + m_1 + m2(R_3^2/R_1^2)} = \\ = g\,\frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)R_1}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}\,.$$

Читатель без труда сам вычислит a_2, для чего надо либо переписать таблицу, приняв перемещение груза m_2 за основное, либо воспользоваться соотношением (294). Силу натяжения нитей легко найти из соотношений (291) и (292).

О т в е т: $a_1 = g\,\dfrac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)R_1}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$; $a_2 = -g\,\dfrac{(m_1 R_1 - m_2 R_2)R_2}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$; $T_1 = m_1 g\,\dfrac{I + m_2 R_2(R_2 + R_1)}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$; $T_2 = m_2 g\,\dfrac{I + m_1 R_1(R_2 + R_1)}{I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2}$.

Задача 138. Горизонтальный тонкий однородный стержень AB массой m и длиной l может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его конец A. В некоторый момент на конец B начала действовать постоянная сила F, которая все время перпендикулярна первоначальному положению покоившегося стержня и направлена к горизонтальной плоскости (рис. 93). Найти угловую скорость стержня как функцию его угла поворота φ из начального положения.

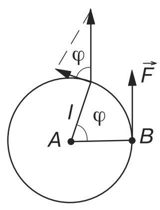


Рис. 93

Р е ш е н и е. Поскольку стержень в начальный момент времени и после воздействия на него внешней силы находится в горизонтальной плоскости, потенциальная энергия стержня не меняется. Изменение же механической энергии будет происходить за счет изменения кинетической энергии K, равной работе внешних сил при повороте стержня вокруг неподвижной оси на угол φ. В нашем случае в момент времени $t = 0$ кинетическая энергия $K_1 = 0$, а значит, можно записать

$$\Delta K = K_2 - K_1 = K_2 = dA_{\text{внеш.}}, \tag{295}$$

где $K_2 = \dfrac{I\omega^2}{2}$, $I = \dfrac{ml^2}{3}$, $dA_{\text{внеш.}} = N_Z\, d\varphi$, $N_Z = Fl\cos\varphi$ (рис. 93).

Таким образом, выражение (295) приобретает вид:

$$\frac{ml^2}{6}\,\omega^2 = Fl\cos\varphi\, d\varphi,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{6F}{ml}\int\limits_0^{\varphi}\cos\varphi\, d\varphi$$

или

$$\omega = \sqrt{\frac{6F\sin\varphi}{ml}}.$$

О т в е т: $\omega = \sqrt{\dfrac{6F\sin\varphi}{ml}}$.

Задача 139. В установке (рис. 91) известны масса m однородного сплошного цилиндра, его радиус R и массы тел m_1 и m_2. Скольжения нити и трения в оси цилиндра нет. Найти угловое ускорение цилиндра и отношение сил натяжения T_1/T_2 вертикальных участков нити в процессе движения. Убедиться, что $T_1 = T_2$ при $m \to 0$.

Р е ш е н и е. В задаче 136 было получено выражение для тангенциального ускорения тел. Подставим его в выражение для углового ускорения цилиндра:

$$\beta = \frac{a}{R} = \frac{|m_2 - m_1|g}{(m_1 + m_2 + m/2)R}\,. \tag{296}$$

В той же задаче было получено выражение для силы натяжения нитей T_1 и T_2. Подставляя в эти выражения значение a из (296), находим:

$$T_1 = \frac{m_1 g(m+4m_2)}{2(m_1+m_2+m/2)}, \quad T_2 = \frac{m_2 g(m+4m_1)}{2(m_1+m_2+m/2)},$$

откуда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1(m+4m_2)}{m_2(m+4m_1)}.$$

Легко убедиться, что $T_1 = T_2$ при $m \to 0$, т. е.

$$\lim_{m\to 0} \frac{m_1(m+4m_2)}{m_2(m+4m_1)} = 1.$$

Теперь определим β с помощью принципа виртуальных перемещений. Поскольку в условиях ничего не сказано о соотношении m_1 и m_2, то путем подстановки данных в табл. 11 в (96), находим:

$$a = \frac{|m_2 - m_1|g}{m_1+m_2+(m/2)}, \quad \beta = \frac{|m_2 - m_1|g}{(m_1+m_2+(m/2))R}.$$

Таблица 11

m_K	δS_K	A_K	A_K^2	F_K
m_1	δx	1	1	$-m_1 g$
m_2	δx	1	1	$m_2 g$
$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{\delta x}{R}$	$\frac{1}{R}$	0	0

О т в е т: $\beta = \dfrac{|m_2 - m_1|g}{(m_1+m_2+m/2)R}$; $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{m_1(m+4m_2)}{m_2(m+4m_1)}$.

Задача 140. В установке (рис. 94) известны массы тел m_1 и m_2, коэффициент трения k между телом m_1 и горизонтальной поверхностью, а также масса блока m, который можно считать однородным диском. Скольжения нити по блоку нет. В момент $t = 0$ тело m_2 начинает опускаться. Пренебрегая трением в оси блока, найти:

а) ускорение тела m_2;

б) работу силы трения, действующей на тело m_1, за первые t секунд после начала движения.

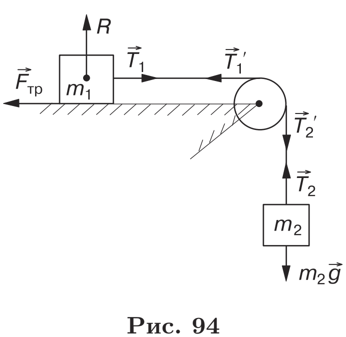


Рис. 94

Решение.

I способ

а) Запишем уравнение моментов и проекции второго закона Ньютона для грузов m_1 и m_2 на оси OY и OX соответственно:

$$\begin{cases} N = I_Z \beta = I_Z \dfrac{a}{r}\,, \\ m_2 g - T_2 = m_2 a, \\ T_1 - kR = m_1 a. \end{cases} \tag{297}$$

Учитывая, что $R = mg$, $I = mr^2/2$, $(T_2 - T_1)r = N$, где r — радиус блока, решаем систему (297) относительно ускорения тел:

$$a = \frac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 + (m/2)}\, g.$$

б) Работа силы трения

$$A = F_{\text{тр}} S = -\frac{m_1 gkat^2}{2}\, 2.$$

II способ

Заполним табл. 12 и по (96) вычислим $\ddot{x} = a$,

$$a = \frac{m_1 - km_1}{m_1 + m_2 + (m/2)g}\,.$$

Таблица 12

m_k	δS_k	A_k	A_k^2	F_k
m_1	δx	1	1	$-km_1 g$
$\dfrac{mr^2}{2}$	$\delta\varphi = \dfrac{\delta x}{r}$	$\dfrac{1}{r}$	$\dfrac{1}{r^2}$	0
m_2	δx	δx	1	$m_2 g$

Далее все как в первом способе.

Ответ: а) $a = \dfrac{m_2 - km_1}{m_1 + m_2 + (m/2)}\, g$; б) $A = -\dfrac{m_1 gkat^2}{2}$.

Задача 141. Маховик с начальной угловой скоростью ω_0 начинает тормозиться силами, момент которых относительно его оси пропорционален квадратному корню из его угловой скорости. Найти среднюю угловую скорость маховика за все время торможения.

Р е ш е н и е. По определению среднего,

$$\langle\omega\rangle = \int\limits_0^T \omega(t)\,\frac{dt}{T}\,, \tag{298}$$

где T — время вращения маховика. Согласно условию задачи, момент тормозных сил

$$N = k\sqrt{\omega} = -\beta I,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, можно считать

$$-\beta = \sqrt{\omega}$$

или

$$-\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\omega},$$

откуда

$$-\frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = dt. \tag{299}$$

Определим из этого выражения T:

$$-\int\limits_{\omega_0}^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int\limits_0^T dt, \quad T = 2\sqrt{\omega_0}. \tag{300}$$

Найдем зависимость $\omega(t)$. Снова воспользуемся выражением (299), но изменим пределы интегрирования:

$$-\int\limits_{\omega}^0 \frac{d\omega}{\sqrt{\omega}} = \int\limits_t^0 dT.$$

Отсюда

$$\omega(t) = \frac{t^2}{4}\,. \tag{301}$$

Подставляя (301) и (300) в (298), получаем среднюю угловую скорость маховика

$$\langle\omega\rangle = \frac{\omega_0}{3}\,.$$

О т в е т: $\langle\omega\rangle = \dfrac{\omega_0}{3}$.

Задача 142. Гладкий однородный стержень AB массой M и длиной l свободно вращается с угловой скоростью ω_0 в горизонтальной плоскости вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его конец A. Из точки A начинает скользить по стержню небольшая муфта массой m. Найти скорость v' муфты относительно стержня в тот момент, когда она достигнет его конца B.

Р е ш е н и е. Поскольку проекция момента всех внешних сил на ось вращения равна нулю, в системе стержень—муфта момент импульса сохраняется. Угловую скорость вращения стержня в тот момент, когда муфта достигает его конца B, обозначим ω' . Тогда закон сохранения момента импульса запишем в следующем виде:

$$I\omega_0 = I\omega' + ml^2\omega', \tag{302}$$

где $I = Ml^2/3$ — момент инерции стержня относительно оси вращения, проходящей через его конец (см. табл. 7); ml^2 — момент инерции в точке B.

Поскольку стержень гладкий и трения нет, для системы стержень—муфта выполняется закон сохранения механической энергии

$$\frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{I\omega'^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \tag{303}$$

где v — полная скорость муфты в точке B.

Решая совместно уравнения (302) и (303), находим:

$$\omega' = \frac{\omega_0}{1 + (3m/M)}, \tag{304}$$

$$v^2 = \frac{\omega_0^2 l^2}{[1 + (3m/M)]^2}, \left(2 + \frac{3m}{M}\right). \tag{305}$$

Полная скорость муфты v складывается из скорости движения муфты относительно стержня v' и угловой скорости вращения $\omega' l$.

Поскольку эти скорости взаимно перпендикулярны, искомую скорость v' найдем, используя теорему Пифагора:

$$v' = \sqrt{v^2 - (\omega' l)^2}.$$

С учетом (304) и (305):

$$v' = \frac{\omega_0 l}{\sqrt{1 + (3m/M)}}.$$

О т в е т: $v' = \dfrac{\omega_0 l}{\sqrt{1 + (3m/M)}}$.

Задача 143. Два горизонтальных диска свободно вращаются вокруг вертикальной оси, проходящей через их центры. Моменты инерции дисков относительно этой оси I_1 и I_2, угловые скорости ω_1 и ω_2. После падения верхнего диска на нижний оба диска из-за трения между ними начали некоторое время вращаться как единое целое. Найти:

а) установившуюся угловую скорость вращения дисков;

б) работу, которую совершили при этом силы трения.

Решение. а) Запишем закон сохранения импульса для абсолютно неупругого столкновения, где вместо массы m будет момент инерции I, а вместо скорости v — угловая скорость ω:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}.$$

б) Работа сил трения будет равна приращению кинетической энергии вращения этой системы:

$$A = \Delta K = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2 - \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\left(\frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}\right)^2 - \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2) =$$

$$= -\frac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

Ответ: а) $\omega = \dfrac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2}$; б) $A = -\dfrac{I_1 I_2}{2(I_1 + I_2)}(\omega_1 - \omega_2)^2$.

Задача 144. Тонкий стержень массой m и длиной l вращается с угловой скоростью ω_1 в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Продолжая вращаться в той же плоскости, стержень перемещается так, что ось вращения проходит через конец стержня. Найти угловую скорость вращения после перемещения стержня ω_2.

Решение. Система изолирована, и трение в ней отсутствует, поэтому для решения используем закон сохранения момента импульса:

$$\sum \vec{I}_i \vec{\omega}_i = \text{const}.$$

Поскольку в результате перемещения стержня происходит изменение момента импульса стержня, закон сохранения момента импульса запишем в следующем виде:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2. \tag{306}$$

Выражения для I_1 и I_2 берем из табл. 7:

$$I_1 = \frac{ml^2}{12}, \quad I_2 = \frac{ml^2}{3}.$$

Подставляя эти значения в (306) и решая полученное уравнение относительно ω_2, находим

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{4}.$$

О т в е т: $\omega_2 = \dfrac{\omega_1}{4}$.

Задача 145. Человек массой m_1 стоит на краю горизонтального однородного диска массой m_2 и радиусом R, который может свободно вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр. В некоторый момент человек начал двигаться по краю диска, совершил перемещение на угол φ' относительно диска и остановился. Пренебрегая размерами человека, найти угол φ, на который повернулся диск к моменту остановки человека.

Р е ш е н и е. Импульс человека при движении относительно диска определяется выражением

$$I_1\omega' = \frac{m_1R^2\varphi'}{t},$$

где $I_1 = m_1R^2$ — момент инерции человека относительно оси, проходящей через центр диска; t — время движения человека по краю диска.

Суммарный импульс системы человек—диск относительно поверхности Земли:

$$-(I_1 + I_2)\omega = -\left(m_1R^2 + \frac{m_2R^2}{2}\right)\frac{\varphi}{t},$$

где I_2 — момент инерции диска.

Записывая закон сохранения момента импульса

$$\frac{m_1 R^2 \varphi'}{t} = -\left(m_1 R^2 + \frac{m_2 R^2}{2}\right)\frac{\varphi}{t}$$

и решая полученное уравнение относительно φ, находим:

$$\varphi = -\frac{2m_1\varphi'}{2m_1 + m_2}\,.$$

О т в е т: $\varphi = -\dfrac{2m_1\varphi'}{2m_1 + m_2}$.

Задача 146. На гладкой горизонтальной плоскости лежит однородный диск радиусом r_0. На него осторожно опустили другой такой же диск, предварительно сообщив ему угловую скорость ω_0. Через сколько времени оба диска будут вращаться с одной и той же угловой скоростью, если коэффициент трения между дисками равен k?

Р е ш е н и е. Сначала найдем установившуюся угловую скорость вращения ω. Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$J\omega_0 = 2J\omega,$$

где J — момент инерции каждого диска относительно общей оси вращения. Отсюда $\omega = \omega_0/2$. Теперь рассмотрим поведение одного из дисков, например нижнего. Его угловая скорость меняется под действием момента N сил трения. Вычислим N. Для этого выделим на верхней поверхности диска элементарное кольцо с радиусами r, $r + dr$. Момент сил трения, действующих на данное кольцо, равен

$$dN = rk\left(\frac{mg}{\pi r_0^2}\right)2\pi r\,dr = 2k\left(\frac{mg}{r_0^2}\right)r^2\,dr,$$

где m — масса каждого диска.

Проинтегрировав это выражение по r от 0 до r_0, получим

$$N = \frac{2}{3}\,kmgr_0.$$

Из второго закона Ньютона для вращательного движения $N_Z = J_Z\beta$ находим, что приращение угловой скорости нижнего диска происходит на величину $d\omega$ за время

$$dt = \frac{J}{N}\,d\omega = \frac{3r_0}{4kg}\,d\omega.$$

Интегрируя это уравнение по ω от 0 до $\omega_0/2$, получим t:

$$t = 3r_0\,\frac{\omega_0}{8}\,kg.$$

О т в е т: $t = 3r_0\,\frac{\omega_0}{8}\,kg$.

Задача 147. Двум одинакового радиуса дискам сообщили одну и туже угловую скорость $\overrightarrow{\omega}_0$ (рис. 95, *а*), а затем их привели в соприкосновение, и система через некоторое время пришла в новое установившееся состояние движения. Оси дисков неподвижны, трения в осях нет. Моменты инерции дисков относительно их осей вращения равны I_1 и I_2. Найти:

а) приращение момента импульса системы;

б) убыль ее механической энергии.

Р е ш е н и е. а) Общий момент импульса системы из двух дисков до того, как они пришли в соприкосновение, равен $(I_1 - I_2)\omega_0$. Здесь учтено, что в будущей точке соприкосновения векторы линейных скоростей $\overrightarrow{v}$ направлены в противоположные стороны (рис. 95, *а*). Общий момент импульса после приведения дисков в соприкосновение и установления угловой скорости $\overrightarrow{\omega}$ равен $(I_1+I_2)\omega_1$ (рис. 95, *б*).

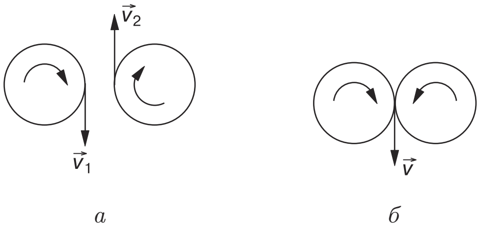


Рис. 95

Приравнивая моменты импульса, находим:

$$\omega_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\,\omega_0$$

и

$$\Delta M = M_2 - M_1 = \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 + I_2}\,\omega_0 - (I_1 + I_2)\omega_0 = -\,\frac{4I_1 I_2\omega_0}{I_1 + I_2}\,.$$

б) Убыль механической энергии составит

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{(I_1 + I_2)\omega_0^2}{2} - \frac{(I_1 + I_2)\omega_1^2}{2} =$$

$$= \frac{I_1 + I_2}{2}\,\omega_0^2\left[1 - \left(\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}\right)^2\right] = \frac{2I_1 I_2\omega_0^2}{I_1 + I_2}\,.$$

О т в е т: а) $\Delta M = -\,\dfrac{4I_1 I_2\omega_0}{I_1 + I_2}$; б) $\Delta E = E_1 - E_2 = \dfrac{2I_1 I_2\omega_0^2}{I_1 + I_2}$.

Задача 148. Однородный стержень длиной $l = 110$ см расположен под углом $\alpha = 60^\circ$ к гладкой горизонтальной поверхности, на которую он опирается своим нижним концом. Стержень без толчка отпустили. Найти скорость верхнего конца стержня непосредственно перед падением его на поверхность.

Р е ш е н и е. Так как стержень отпускали без толчка, его нижний конец в процессе падения остался неподвижен (сила реакции работы не совершает). Используем закон сохранения механической энергии. Потенциальная энергия центра масс стержня относительно горизонтальной поверхности $mgl\sin\alpha/2$, а кинетическая энергия

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6}\,.$$

Закон сохранения механической энергии

$$\frac{mgl\sin\alpha}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{6}\,.$$

Учитывая, что $v = \omega l$, находим

$$v = \sqrt{3gl\sin\alpha} = 5{,}3 \text{ м/с}.$$

О т в е т: $v = \sqrt{3gl\sin\alpha} = 5{,}3$ м/с.

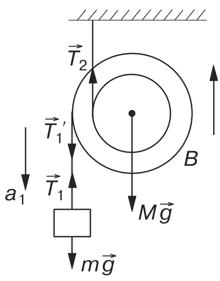


Рис. 96

Задача 149. В системе (рис. 96) известны масса m груза A, масса M ступенчатого блока B, момент инерции I последнего относительно его оси и радиусы ступени блока R и $2R$. Найти ускорение груза A.

Решение. Решим задачу с помощью принципа виртуальных работ.

Поскольку грузы m и M за одно и то же время проходят одинаковое расстояние, δS_k для m и M равны по модулю, но имеют разные знаки. Далее следует стандартная операция — подстановка значений из табл. 13 в (96).

Таблица 13

m_k	ΔS_k	A_k	A_k^2	F_k
m	δx	1	1	mg
M	$-\delta x$	-1	1	Mg
I	$\delta\varphi = \dfrac{\delta x}{R}$	$\dfrac{1}{R}$	$\dfrac{1}{R^2}$	0

Получим

$$\ddot{x} = a = \frac{g(m-M)}{m+M+(I/R^2)}.$$

Самостоятельно решите эту задачу стандартным методом, т. е. запишите уравнения:

— поступательного движения блока вверх с ускорением a_2;
— вращение блока с ускорением β;
— второго закона Ньютона для груза m;
— кинематической связи между ускорениями груза и блока.

Решение полученной системы уравнений приводит к такому же результату.

Ответ: $a = \dfrac{g(m-M)}{m+M+(I/R^2)}$.

Глава 6

Упругие деформации твердого тела

До сих пор мы рассматривали абсолютно твердые тела, т. е. тела, не подверженные деформации, считая, что элементы тела не движутся относительно друг друга. При рассмотрении же движения деформируемого тела такая идеализация неприемлема — нам необходимо рассматривать движение друг относительно друга элементов, из которых это тело состоит. Но так как все тела состоят из атомов, нам, строго говоря, необходимо рассматривать движение каждого атома. Понятно, что такая задача невыполнима, а кроме того, к отдельному атому законы классической механики неприменимы.

Чтобы обойти эти трудности, в механике сплошных сред тело разбивается на малые элементы, а силы, действующие на каждый малый элемент со стороны соседей, рассматриваются как внешние. При этом очень важно, сколько атомов содержит каждый элемент. Если число атомов мало, то элемент может обладать каким-то импульсом, отличным от нуля, так как атомы этого элемента совершают хаотическое тепловое движение. Поэтому выделенный элемент должен содержать достаточное количество атомов, чтобы их суммарный импульс был равен нулю.

Критерием для выбора размера элементов, на которые мы разбиваем тело, является среднее расстояние между атомами. Размеры элементов должны быть много больше среднего расстояния между атомами, но и не слишком большими, чтобы все смежные атомы этого элемента двигались одинаково, — только тогда мы сможем описать движение этого элемента с помощью законов классической механики. Соблюдение этих двух требований позволяет рассматривать реальные тела как сплошные.

Все виды деформаций можно свести к двум основным видам деформации — деформации *растяжения* (*сжатия*) и деформации *сдвига*.

Деформация растяжения (сжатия) характеризуется величиной *относительного удлинения* ε:

$$\varepsilon = \frac{l_1 - l}{l} = \frac{\Delta l}{l}\,, \tag{307}$$

где l — длина тела до растяжения; l_1 — длина тела после растяжения.

В зависимости от растяжения или сжатия величина ε либо положительна, либо отрицательна.

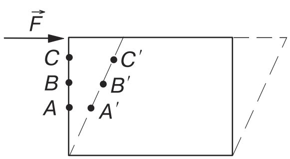


Рис. 97

Деформация сдвига определяется величиной относительного сдвига. Если мы подействуем на верхний край тела силой $\overrightarrow{F}$ (рис. 97), то точка A перейдет в A', B — в B', C — в C'. При этом будет выполняться условие

$$\gamma = \frac{AA'}{OA} = \frac{BB'}{OB} = \frac{CC'}{OC} = \operatorname{tg}\alpha. \tag{308}$$

Величина γ называется *относительным сдвигом.*

Всякое растяжение или сжатие сопровождается соответствующим уменьшением или увеличением поперечного сечения. Это изменение поперечных размеров называется *относительным поперечным расширением* или *сжатием*:

$$\varepsilon' = \frac{d_1 - d}{d} = \frac{\Delta d}{d}\,,$$

где d — поперечный размер тела до деформации, а d_1 — после.

При растяжении поперечные размеры тела уменьшаются и $\varepsilon' < 0$; при сжатии $\varepsilon' > 0$. Таким образом, ε и ε' всегда имеют противоположные знаки и связаны между собой соотношением

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \tag{309}$$

где μ — коэффициент Пуассона, имеющий для каждого материала свое значение.

При деформировании твердых тел в них возникают силы упругости. В абсолютно упругом теле силы однозначно связаны с деформацией. Если в таком теле под действием внешних сил возникают деформации, то после прекращения их действия тело снова принимает свою форму. В действительности же твердые тела не обладают такой способностью, о чем хорошо известно автолюбителям. Предел, до которого реальные тела ведут себя как абсолютно упругие, называется *пределом упругости.*

Рассмотрим упругие напряжения, возникающие в твердом теле под действием внешних сил. Пусть к закрепленному одним концом стержню сечением S приложена сила $\vec{F}(t)$, возрастающая со временем (рис. 98). Стержень начнет растягиваться, и в нем установятся силы, действующие с одной части стержня на другую. Мысленно разделим стержень на две части и рассмотрим силы, действующие друг на друга. Поскольку стержень не движется, то на верхнюю и нижнюю части стержня, согласно третьему закону Ньютона, действуют одинаковые, но противоположно направленные силы. Отношение силы к сечению, на котором она действует, при условии однородности материала твердого тела, называется *напряжением в данном сечении*:

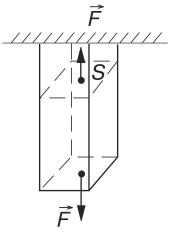


Рис. 98

$$\sigma = \frac{F}{S}\,. \tag{310}$$

Опытным путем установлено, что для стержней разного материала, независимо от их сечения и длины, справедливо следующее равенство:

$$E\varepsilon = \frac{F}{S}\,. \tag{311}$$

Здесь E — коэффициент пропорциональности, зависящий от вида вещества, или модуль Юнга. С учетом (310) выражение (311) принимает вид

$$\sigma = E\varepsilon \tag{312}$$

и называется *законом Гука.*

Поскольку модуль E характеризует упругие свойства тел, является константой и не зависит от того, деформировано уже тело или нет (разумеется, в пределах действия закона Гука), при расчетах неоценимую помощь нам оказывает *принцип суперпозиции.* Он заключается в следующем. Предположим, мы сжимаем брусок со всех шести граней. Провести расчет изменения объема тела при одновременном сжатии со всех трех пар граней весьма сложно. Принцип же суперпозиции позволяет осуществить последовательный расчет изменения объема тела при сжатии сначала с одной пары граней, затем со второй и после — с третьей. Суммирование всех трех изменений объема дает результирующую величину Δv. Величина, характеризующая сжатие тела при прикладывании силы со всех сторон, называется *коэффициентом сжимаемости* β,

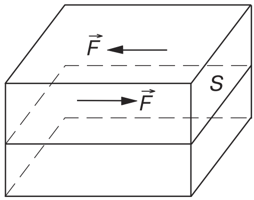


Рис. 99

или *модулем всестороннего сжатия* и определяется как

$$\beta = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\,. \tag{313}$$

Рассмотрим теперь возникновение напряжений при сдвиге. Закрепим нижнюю грань параллелепипеда неподвижно, а к верхней приложим силу $\vec{F}$, лежащую в плоскости этой грани (рис. 99). Мысленно разделим параллелепипед на две части сечением S. Для того, чтобы верхняя часть тела находилась в равновесии, на нее со стороны нижней части тела должна действовать сила $\vec{F}$, равномерно распределенная по всему сечению S. Тогда *тангенциальное напряжение* τ определим как

$$\tau = \frac{F}{S}\,. \tag{314}$$

Опыт показывает, что *относительный сдвиг* γ прямо пропорционален приложенной силе F и обратно пропорционален сечению S:

$$G\gamma = \frac{F}{S}\,. \tag{315}$$

С учетом (314)

$$\tau = G\gamma. \tag{316}$$

Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига* данного материала. Он так же, как и модуль Юнга, не зависит от формы образца, а только от свойств самого материала. Как и в случае поперечной деформации, при деформации сдвига применúм принцип суперпозиции.

Кроме разобранных выше основных деформаций рассмотрим *кручение круглого стержня*. Если круглый стержень закреплен одним концом неподвижно, а к другому концу приложен вращательный момент $\vec{N}$, имеющий направление вдоль оси стержня, то стержень получит такую деформацию, при которой его нижнее основание повернется по отношению к верхнему на угол φ (рис. 100).

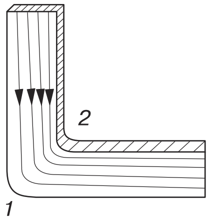


Рис. 100

Очевидно, что это деформация сдвига. Закон Гука при кручении имеет следующий вид:

$$\varphi = fN \quad \text{или} \quad N = k\varphi,$$

где $k = 1/f$. Коэффициент пропорциональности k сильно зависит от r — радиуса стержня:

$$k \sim \frac{1}{r^4}\,.$$

Энергия упругой деформации, а точнее, ее появление, связано с тем, что внешняя сила, деформируя тело, совершает работу. После же прекращения действия внешней силы тело само способно совершить работу, равную той, которая была затрачена внешней силой на его деформацию, если, конечно, тело абсолютно упругое. Можно сказать, что внутренняя потенциальная энергия абсолютно упругого деформированного тела увеличивается на величину работы, затраченной на его деформацию. Отметим, что наши рассуждения верны для *малых и медленных* деформаций, в противном случае картина получится сложнее.

Рассмотрим какое-либо тело, подвергнутое растяжению, и выделим внутри его объема элементарный куб со сторонами l. Тогда, с учетом (310) и (311), сила

$$F = \sigma l^2 = \varepsilon E l^2, \tag{317}$$

работа

$$A = \int\limits_0^l F\,dx = \int\limits_0^l \varepsilon E l^2\,dx.$$

После замены $dl = dx = l\,d\varepsilon$:

$$A = El^3 \int\limits_0^\varepsilon \varepsilon\,d\varepsilon = l^3\,\frac{E\varepsilon^2}{2}\,. \tag{318}$$

Эта работа и будет равна приращению потенциальной энергии деформированного тела

$$A = U = \frac{E\varepsilon^2}{2}\,l^3 = wv, \tag{319}$$

где $w = E\varepsilon^2/2$ — удельная потенциальная энергия деформированного тела, $v = l^3$ — объем тела.

Пользуясь соотношением (312), можно получить другие зависимости:

$$w = \frac{E\varepsilon^2}{2} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}\,. \tag{320}$$

Теперь вычислим энергию упругой деформации при сдвиге. На грань куба с ребрами l, лежащую в плоскости сдвига, действует сила

$$F = \tau l^2 = G\gamma l^2,$$

при этом верхняя грань перемещается на величину $dx = l\,d\gamma$. Находим работу силы F, энергию упругой деформации U и удельную потенциальную энергию деформированного тела w:

$$A = Gl^3 \int\limits_0^\gamma \gamma\,d\gamma = \frac{G\gamma^2}{2}\,l^3,$$

$$A = U = \frac{G\gamma^2}{2}\,l^3 = wv, \tag{321}$$

$$w = \frac{G\gamma^2}{2} = \frac{\tau\gamma}{2} = \frac{\tau^2}{2G}\,.$$

Рекомендации по решению задач

1. При решении задач на свойства упругих тел часто значительное упрощение при расчетах дает применение принципа суперпозиции. Допустим, что какое-либо тело подвергается одновременно сжатию (растяжению) и сдвигу (закручиванию). Тогда можно рассматривать не одновременно оба процесса, а их любую последовательность, поскольку величины E и G не зависят от предыстории деформации тела.

2. В задачах типа задачи 166 обращайте внимание, закреплен один конец деформированного тела или нет. Если закреплен, то в выражении для U и A вводите коэффициент 1/2.

Задачи к главе 6

Задача 150. Какое давление необходимо приложить к торцам стального цилиндра, чтобы его длина не изменилась при повышении температуры на 100 градусов?

Решение. Находим относительное удлинение тела, обусловленное повышением температуры:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \Delta T = \varepsilon, \tag{322}$$

где α — коэффициент термического расширения.

Удельное давление, которое необходимо приложить к торцам сжатого цилиндра:

$$E\varepsilon = \frac{F}{S} = P. \tag{323}$$

Подставляя значение ε из (322) в (323), получим

$$P = \alpha E \Delta T = 0{,}22 \text{ ГПа} = 2{,}2 \cdot 10^3 \text{ атм.}$$

Ответ: $P = 2{,}2 \cdot 10^3$ атм.

Задача 151. Какое давление изнутри (при отсутствии наружного давления) могут выдержать:

а) стеклянная трубка;

б) стеклянная сферическая колба с радиусом $r = 25$ мм и толщиной стенок $\Delta r = 1{,}0$ мм?

Решение. а) Рассмотрим стеклянное кольцо единичной ширины. Тогда давление, действующее на стенки кольца, будет равно разности внутренних и внешних напряжений:

$$P = \sigma_{\text{внутр.}} - \sigma_{\text{внеш.}} = \frac{F}{2\pi r} - \frac{F}{2\pi(r + \Delta r)} \approx \sigma_m \frac{\Delta r}{r} \approx$$
$$\approx 2{,}0 \text{ МПа} = 20 \text{ атм,}$$

где σ_m — предел прочности стекла.

б) Для стеклянной сферической колбы справедливо:

$$P = \sigma_{\text{внутр.}} - \sigma_{\text{внеш.}} = \frac{F}{4\pi r^2} - \frac{F}{4\pi(r + \Delta r)^2} \approx \sigma_m \frac{2\Delta r}{r} =$$
$$= 4{,}0 \text{ МПа} = 40 \text{ атм.}$$

Ответ: а) $P \approx 20$ атм;

б) $P \approx 40$ атм.

Задача 152. Горизонтально расположенный медный стержень длиной $l = 1{,}0$ м вращают вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. При какой частоте вращения он может разорваться?

Решение. Сила, растягивающая медный стержень, равна центростремительной силе, действующей на центр масс каждой половины стержня, который находится на расстоянии $l/4$ от центра вращения:

$$F_ц = \frac{mv^2}{l/4} = \frac{m4\pi^2(l/4)^2n^2}{l/4} = m\pi^2n^2l,$$

где m — масса стержня; n — частота вращения стержня.

Заменяя $m = \rho Sl/2$, где ρ — плотность меди; S — площадь сечения стержня, получаем

$$F_ц = \frac{\rho Sl^2\pi^2n^2}{2}.$$

Напряжение разрыва

$$\sigma_р = \frac{F_ц}{S} = \frac{\rho l^2\pi^2n^2}{2}$$

наступает при частоте вращения

$$n = \frac{\sqrt{2\sigma_р/\rho}}{\pi l} = 0{,}8 \cdot 10^2 \text{ об/с}.$$

Ответ: $n = 0{,}8 \cdot 10^2$ об/с.

Задача 153. К проволоке из углеродистой стали длиной $l = 1{,}5$ м и диаметром $d = 2{,}1$ мм подвешен груз массой $m = 110$ кг. Принимая для стали модуль Юнга $E = 216$ ГПа и предел пропорциональности $\sigma_n = 330$ МПа, определить:

1) какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе;
2) превышает приложенное напряжение или нет предел пропорциональности.

Решение. а) Записываем закон Гука для продольного растяжения: $\sigma = E\varepsilon$, а также

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$

Отсюда

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES} = \frac{4Fl}{E\pi d^2} = \frac{4 \cdot 100 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2 \cdot 1{,}5}{216 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-3})^2 \text{ м}^2} = 2{,}16 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

что составляет $\approx 0{,}14\%$.

б) Пределом пропорциональности называется такое значение σ, при котором еще выполняется закон Гука:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{4 \cdot 110 \text{ кг} \cdot 9{,}8 \text{ м/с}^2}{3{,}14 \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-3})^2 \text{ м}^2} = 311 \text{ МПа}.$$

Ответ: а) $\Delta l \approx 0{,}14\%$; б) не превышает.

Задача 154. Медная проволока сечением $S = 8$ мм^2 под действием растягивающей силы удлинилась на столько, на сколько она удлиняется при нагревании на 30 K. Принимая для меди модуль Юнга $E = 118$ ГПа и коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}, определите числовое значение этой силы.

Решение. Согласно (311), абсолютное удлинение проволоки под воздействием растягивающей силы

$$\Delta l = \frac{lF}{SE},$$

это же удлинение при нагревании

$$\Delta l = \alpha l \Delta T.$$

Отсюда

$$F = \alpha SE\Delta T = 1{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 8 \cdot 10^{-6} \cdot 118 \cdot 10^9 \cdot 30 \text{ K}^{-1} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{Па} \cdot \text{K} \cong 481 \text{ Н}.$$

Ответ: $F \approx 481$ Н.

Задача 155. Стальная проволока диаметра $d = 1{,}0$ мм натянута в горизонтальном положении между двумя зажимами, находящимися на расстоянии $l = 2{,}0$ м друг от друга. К середине проволоки — точке O — подвесили груз массой $m = 0{,}25$ кг (рис. 101). На сколько сантиметров опустится точка O?

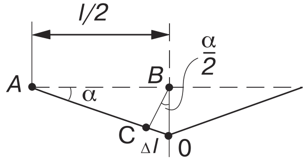


Рис. 101

Решение. Из ΔBOC, с учетом малости Δl, можно записать:

$$\alpha = \frac{2\Delta l}{x}\,.$$

Из ΔABO: $\alpha = 2x/l$.

Отсюда

$$\Delta l = \frac{x^2}{l}\,. \tag{324}$$

При растяжении стальной проволоки на каждую ее половину с длиной $l/2$ действует сила, равная, согласно (311),

$$F = \varepsilon ES = \frac{\varepsilon E\pi\, d^2}{4}\,.$$

В силу симметрии задачи будем рассматривать только ее левую часть: $\varepsilon = 2\Delta l/l$, а $F = \Delta l E\pi\, d^2/(2l)$. Эта сила совершает работу против сил упругости, которая равна изменению потенциальной энергии стальной проволоки.

Таким образом, можно записать

$$A = U = 2\int\limits_0^{2\Delta l} dF\Delta l'\, d(\Delta l') = \frac{2E\pi\, d^2}{2l}\int\limits_0^{2\Delta l} \Delta l'\, d(\Delta l') = \\ = \frac{2E\pi\, d^2\Delta l^2}{l} \tag{325}$$

или, с учетом (324),

$$U = \frac{2\pi E\, d^2 x^4}{l^3}\,. \tag{326}$$

С другой стороны, возрастание потенциальной энергии проволоки за счет ее растяжения равно изменению потенциальной энергии груза массой m, опустившегося на расстояние x, т. е.

$$U = mgx. \tag{327}$$

Приравнивая (326) и (327), находим:

$$x = \sqrt[3]{\frac{mg}{2\pi\, d^2 E}}\, l \approx 2{,}5\ \text{см}.$$

Ответ: $x \approx 2{,}5$ см.

Задача 156. Однородный упругий брусок движется по гладкой горизонтальной плоскости под действием постоянной силы F_0, равномерно распределенной по торцу. Площадь торца — S, модуль Юнга материала — E. Найти относительное сжатие бруска в направлении действия данной силы.

Решение. При движении стержня, когда один его конец не закреплен, а на другой действует внешняя сила, сила реакции отсутствует, поэтому формула (311) приобретает следующий вид:

$$\varepsilon = \frac{F_0}{2ES}\,.$$

Ответ: $\varepsilon = \dfrac{F_0}{2ES}$.

Задача 157. Тонкий однородный медный стержень длиной l и массой m равномерно вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Найти силу натяжения в стержне в зависимости от расстояния r до оси вращения, а также удлинение стержня.

Решение. Запишем выражение для элементарной силы, действующей на элементарную массу dm, расположенную на расстоянии r от оси вращения:

$$dF = \frac{dm\omega^2 r^2}{r} = \rho\omega^2 r\,dr,$$

где $dm = \rho\,dr$;

$$F = \int\limits_r^l \rho\omega^2 r\,dr = \frac{m\omega^2 l}{2}\left(1 - \frac{r^2}{l^2}\right),$$

где $m = \rho l$;

$$\frac{\delta(\Delta r)}{r} = \frac{dF}{E}$$

$$\Delta l = \int\limits_0^l \frac{\rho\omega^2 r^2\,dr}{E} = \frac{\rho\omega^2 l^3}{3E}\,.$$

Ответ: $F = \dfrac{m\omega^2 l}{2}\left(1 - \dfrac{r^2}{l^2}\right)$; $\Delta l = \dfrac{\rho\omega^2 l^3}{3E}$.

Задача 158. Сплошной медный цилиндр длиной $l = 65$ см поставили на горизонтальную поверхность и сверху приложили вертикальную сжимающую силу $F = 1000$ Н, которая равномерно распределена по его торцу. На сколько кубических миллиметров изменится объем цилиндра?

Р е ш е н и е. Изменение объема цилиндра определяется как

$$\Delta v = \pi(R + \Delta R)^2(l - \Delta l) - \pi R^2 l \approx \pi R^2 l\left(2\,\frac{2R}{R} - \frac{\Delta l}{l}\right).$$

Здесь отброшены бесконечно малые высшего порядка. Учитывая, что $\Delta l/l = \varepsilon$; $\Delta R/R = \varepsilon'$; $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$, где μ — коэффициент Пуассона, а также, что при сжатии ε отрицательно, находим:

$$\Delta v = \pi R^2 l\varepsilon(1 - 2\mu) = \frac{(1 - 2\mu)Fl}{E} = 1{,}6 \text{ мм}^3.$$

О т в е т: $\Delta v \approx 1{,}6$ мм^3.

Задача 159. Медный стержень длиной l подвесили за один конец к потолку. Найти:

а) удлинение стержня под действием собственного веса;

б) относительное приращение его объема.

Р е ш е н и е. а) Относительное удлинение стержня

$$\frac{\delta(\Delta l)}{l} = \frac{dF}{SE} = \frac{\rho Sg\,dl}{SE} = \frac{\rho g\,dl}{E}\,,$$

абсолютное удлинение

$$\Delta l = \frac{\rho g}{E}\int\limits_0^l l\,dl = \frac{\rho g l^2}{2E}\,.$$

б) Абсолютное изменение объема

$$\Delta v = \pi(R + \Delta R)^2(l + \Delta l) - \pi R^2 \approx \pi R^2 l\left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta R}{R}\right).$$

Учитывая, что $v = \pi R^2 l$, относительное приращение объема

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta l}{l} + \frac{2\Delta R}{R}\,.$$

Запишем, что

$$\frac{\Delta R}{R} = -\mu\,\frac{\Delta l}{l}\,.$$

Тогда

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta l}{l}\,(1 - 2\mu).$$

О т в е т: а) $\Delta l = \dfrac{\rho g l^2}{2E}$; б) $\dfrac{\Delta v}{v} \approx \dfrac{\Delta l}{l}\,(1 - 2\mu)$.

Задача 160. Брусок из материала с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона μ подвергли всестороннему сжатию давлением P. Найти:

а) относительное уменьшение его объема;

б) взаимосвязь между коэффициентом сжимаемости β и упругими постоянными E и μ.

Показать, что коэффициент Пуассона μ не может превышать 1/2.

Р е ш е н и е. а) Для простоты в качестве бруска рассмотрим куб с ребрами, равными одной единице длины. Поскольку по условию задачи на каждую грань нашего бруска действует одинаковое давление сжатия P, размеры граней бруска не имеют значения.

Пусть объем бруска до сжатия равен v, а после сжатия v'. Сжатие бруска осуществляется с трех пар граней. Применяя принцип суперпозиции, рассмотрим сначала сжатие бруска с верхней и нижней граней. После сжатия на малую величину брусок будет иметь высоту $1+\varepsilon$, а сечение $(1+\varepsilon')^2 \approx 1+2\varepsilon'$. Знаки ε и ε' мы пока не учитываем. Объем же бруска после деформации будет

$$v' = (1+\varepsilon)(1+2\varepsilon') \approx 1 + \varepsilon + 2\varepsilon',$$
$$a\Delta v = v' - v = \varepsilon + 2\varepsilon'.$$

Поскольку давление бруска осуществляется со всех трех пар граней, то, используя принцип суперпозиции, можно записать:

$$\Delta v' 3\Delta v' = 3(\varepsilon + 2\varepsilon').$$

Учитывая, что первоначальный объем бруска ($v = 1$) уменьшится, т. е. Δv будет иметь отрицательный знак, выражение

$$\varepsilon = \frac{F}{SE} = \frac{P}{E}$$

и соотношение (309), находим

$$\frac{\Delta v}{v} = -3(1 - 2\mu)\,\frac{P}{E}\,. \qquad (328)$$

б) По определению и согласно (313) коэффициент сжимаемости (модуль всестороннего сжатия β) равен

$$\beta = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial p}\,.$$

Беря предел отношения (328), находим β:

$$\beta = -\frac{1}{v}\lim_{\Delta p\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta p} = \frac{3(1-2\mu)}{E}\,.$$

Установим теперь предел значений коэффициента Пуассона μ. Очевидно, что при растяжении (сжатии) тела его объем увеличивается (уменьшается), и его изменение равно

$$\Delta v = \varepsilon(1-2\mu).$$

Поэтому Δv и ε должны иметь один и тот же знак, а это возможно лишь в случае, когда $\mu < 1/2$.

Наши рассуждения подтверждаются практическим опытом — достаточно посмотреть в любом справочнике таблицу значений коэффициента Пуассона μ.

Для абсолютно твердого тела $\mu = 1/2$, т. е. изменение его объема не происходит.

О т в е т: а) $\dfrac{\Delta v}{v} = -3\,\dfrac{(1-2\mu)P}{E}$; б) $\beta = 3\,\dfrac{(1-2\mu)}{E}$.

Задача 161. Установить связь между крутящим моментом $\overrightarrow{N}$ и углом закручивания φ для:

а) трубы, у которой толщина стенок Δr значительно меньше радиуса трубы;

б) сплошного стержня круглого сечения.

Их длина l, радиус r и модуль сдвига G известны.

Р е ш е н и е. а) Потенциальная энергия

$$U = A = \frac{1}{2}\,N\varphi.$$

С учетом того, что закон Гука при кручении имеет вид $N = k\varphi$, запишем:

$$U = \frac{N^2}{2k}\,. \tag{329}$$

Для кольца $N = S\tau r$, где S — площадь кольца:

$$S = 2\pi r\Delta r.$$

Крутящий момент

$$N = 2\pi r \Delta r \tau r = 2\pi r^2 \Delta r \tau. \tag{330}$$

Подставляя (330) в (329), получаем

$$U = \frac{N^2}{2k} = \frac{2\pi^2 r^4 \Delta r \tau^2}{k}.$$

Удельная потенциальная энергии деформации

$$w = \frac{U}{v} = \frac{\pi r^3 \Delta r \tau^2}{kl}, \tag{331}$$

где объем трубы $v = 2\pi r l \Delta r$.

С другой стороны, согласно (321),

$$w = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{332}$$

Приравнивая (331) к (332), находим:

$$k = \frac{2\pi G}{l} r^3 \Delta r. \tag{333}$$

Далее, с учетом закона Гука при кручении $N = k\varphi$, получаем:

$$\varphi = \frac{Nl}{2\pi r^3 G \Delta r}.$$

б) Выражение (333) представляет формулу для расчета k для кольца, когда Δr много меньше его радиуса. Чтобы получить значение k для сечения сплошного стержня, представляющего собой круг радиусом r, необходимо проинтегрировать (333):

$$k = \frac{2\pi G}{l} \int\limits_0^r r^3\, dr = \frac{\pi G r^4}{2l}, \tag{334}$$

откуда

$$\varphi = \frac{N}{k} = \frac{2Nl}{\pi G r^4}.$$

О т в е т: а) $\varphi = \dfrac{Nl}{2\pi r^3 G \Delta r}$; б) $\varphi = \dfrac{2Nl}{\pi G r^4}$.

Задача 162. Вычислить момент сил N, которые вызывают закручивание стальной трубы длиной $l = 3{,}0$ м на угол $\varphi = 2{,}0°$ вокруг ее оси, если внутренний и внешний диаметры трубы равны $d_1 = 30$ мм и $d_2 = 50$ мм.

Р е ш е н и е. Вычислим значение k для трубы с внутренним и внешним диаметрами d_1 и d_2 с помощью (334):

$$k = \frac{2\pi G}{l} \int\limits_{\frac{d_1}{2}}^{d_2/2} = \frac{\pi G}{32l}\,(d_2^4 - d_1^4).$$

Записывая закон Гука, находим:

$$N = k\varphi = \frac{\pi G}{32l}\,(d_2^4 - d_1^4)\varphi = 0{,}5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

О т в е т: $N = 0{,}5$ кН · м.

Задача 163. Найти наибольшую мощность, которую можно передать с помощью стального вала, вращающегося вокруг своей оси с угловой скоростью $\omega = 120$ рад/с, если его длина $l = 200$ см, радиус $r = 1{,}50$ см и допустимый угол закручивания $\varphi = 2{,}5°$.

Р е ш е н и е. При вращательном движении

$$P = N\omega = k\varphi\omega.$$

Используя выражение (334) для k, находим

$$P_{\max} = \frac{\pi G r^4 \varphi}{2l}\,\omega = 17 \text{ кВт}.$$

О т в е т: $P_{\max} = 17$ кВт.

Задача 164. Однородное кольцо массой m, имеющее внешний радиус r_2, плотно насажено на вал радиусом r_1. Вал вращается с постоянным угловым ускорением β вокруг его оси. Найти момент упругих сил деформации сдвига в кольце в зависимости от расстояния r до оси вращения.

Р е ш е н и е. Момент сил

$$N = \beta I, \tag{335}$$

где I — момент инерции кольца;

$$dI = r^2\,dm = r^2\rho\,dS = \frac{2m}{r_2^2 - r_1^2}\,r^3\,dr.$$

Здесь поверхностная плотность ρ,

$$\rho = \frac{m}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}\,,$$

$$dS = 2\pi r\,dr,$$

$$dm = \rho\,ds = \frac{2m}{r_2^2 - r_1^2}\,,$$

$$I = \frac{2m}{r_2^2 - r_1^2}\int\limits_r^{r_2} r^3\,dr = \frac{m(r_2^4 - r^2)}{2(r_2^2 - r_1^4)}\,. \tag{336}$$

Подставляя (336) в (335), приходим к выражению

$$N = \frac{\beta m(r_2^4 - r^4)}{2(r_2^2 - r_1^2)}\,.$$

О т в е т: $N = \dfrac{\beta m(r_2^4 - r^4)}{2(r_2^2 - r_1^2)}$.

Задача 165. Найти энергию упругой деформации стального стержня массой $m = 3{,}1$ кг, который растянут так, что его относительное удлинение $\varepsilon = 1{,}0 \cdot 10^{-3}$.

Р е ш е н и е. Используя (319), находим энергию упругой деформации

$$U = wv = \frac{E\varepsilon^2\pi r^2 l\rho}{2\rho} = \frac{mE\varepsilon^2}{2\rho} = 40\ \text{Дж},$$

где $m = \pi r^2 l\,\rho$; ρ — плотность стали.

О т в е т: $U = 40$ Дж.

Задача 166. Стальной цилиндрический стержень длиной l и радиусом r подвесили одним концом к потолку.

а) Найти энергию U упругой деформации стержня.

б) Выразить U через относительное удлинение стержня $\Delta l/l$.

Р е ш е н и е. а) Деформация стержня под действием собственного веса приводит к приращению его потенциальной энергии, равной работе сил тяжести против упругой деформации:

$$dU = dA = \frac{1}{2}\,F\delta(\Delta l').$$

Множитель 1/2 появился потому, что один конец стержня закреплен.

Используя результаты задачи 159, запишем:

$$\delta(\Delta l') = \frac{\rho g l'\,dl'}{E}\,,$$

а также

$$F = \pi r^2 l' \rho g,$$

где ρ — плотность стали. Тогда

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_0^l F\delta(\Delta l') = \left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{r^2\rho^2 g^2 l^3}{E}\,.$$

б) Относительное удлинение стержня найдем, используя результаты задачи 159:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\rho g l}{2E}$$

или

$$\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{\rho^2 g^2 l^2}{4E^2}\,. \tag{337}$$

С учетом (337):

$$U = \left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{r^2\rho^2 g^2 l^3}{E} = \left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{r^2 4lE\rho^2 g^2 l^2}{4E^2} = \left(\frac{2\pi}{3}\right) r^2 lE\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2.$$

О т в е т: а) $U = \left(\frac{\pi}{6}\right) r^2\rho^2 g^2 l^3/E$; б) $U = \left(\frac{2\pi}{r}\right) r^2 lE\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2$.

Задача 167. Найти энергию упругой деформации стального стержня, у которого один конец закреплен, а другой закручен на угол $\varphi = 6{,}0°$. Длина стержня $l = 1{,}0$ м, а его радиус $r = 10$ мм.

Р е ш е н и е. Воспользуемся результатами задачи 161:

$$U = \frac{1}{2}\,N\varphi = \frac{k\varphi^2}{2} = \frac{\pi r^4 G\varphi^2}{4l} = 7 \text{ Дж}.$$

О т в е т: $U = 7$ Дж.

Задача 168. Найти распределение плотности энергии упругой деформации в стальном стержне в зависимости от расстояния r до его оси. Длина стержня l, угол закручивания φ.

Р е ш е н и е. Воспользуемся соотношением, полученным в задаче 161:

$$U = \frac{1}{2}\,N\varphi = \frac{1}{2}\,k\varphi^2 = \frac{\pi G r^4 \varphi^2}{2l}\,,$$

$$w = \frac{U}{v} = \frac{G\varphi^4 r^2}{2l^2}\,.$$

О т в е т: $w = \dfrac{G\varphi^2 r^2}{2l^2}$.

Глава 7
Механика несжимаемой жидкости

Всякий объем жидкости или газа способен как угодно изменять свою форму под действием сколь угодно малых сил — это является коренным отличием жидкостей и газов от твердых тел. Жидкости и газы в отношении изменения объема ведут себя как упругие тела, т. е. при изменении объема в них возникают силы, уравновешивающие действие внешних сил. Однако плотность жидкости практически не зависит от давления, поэтому жидкость будем считать *несжимаемой* средой.

Во многих случаях, когда сила трения между отдельными слоями текущей жидкости пренебрежимо мала, жидкость можно считать *идеальной*, т. е. лишенной внутреннего трения.

В кинематике жидкостей возможны два различных метода описания движения. Один из них, называемый *методом Лагранжа*, состоит в том, что движение жидкости задается путем указания зависимости от времени координат всех ее частиц:

$$\begin{cases} x = F_1(a, b, c, t), \\ y = F_2(a, b, c, t), \\ z = F_3(a, b, c, t), \end{cases}$$

где a, b, c — координаты частиц в начальный момент времени $t = 0$. Исключая из этих уравнений время, можно получить уравнение траектории частицы.

Однако основным методом гидроаэродинамики является *метод Эйлера*, который заключается в том, что движение жидкости определяется путем задания поля скоростей жидкости в пространстве в каждый момент времени, т. е.

$$\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{r}, t),$$

или, в проекциях на оси прямоугольной декартовой системы координат,

$$\begin{cases} v_x = f_1(x, y, z, t), \\ v_y = f_2(x, y, z, t), \\ v_z = f_3(x, y, z, t), \end{cases}$$

где $\overrightarrow{v} = v_x \overrightarrow{i} + v_y \overrightarrow{j} + v_z \overrightarrow{k}$ — скорость жидкости в момент времени t в точке пространства, определяемой радиусом-вектором

$$\overrightarrow{r} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}.$$

Величины x, y, z, t называют *переменными Эйлера.* В качестве переменных Эйлера вместо прямоугольных декартовых координат (x, y, z) можно пользоваться цилиндрическими, сферическими и другими координатами.

Стационарным называется движение жидкости, когда поле ее скоростей не изменяется с течением времени. *Линией тока* называется линия, касательная в каждой точке которой в любой момент времени t совпадает по направлению с вектором скорости $\overrightarrow{v}$ движущейся жидкости. Часть жидкости, ограниченная линиями тока называется *трубкой тока.*

Если течение стационарно, то поверхность, образованная линиями тока, представляет собой как бы непроницаемую трубку. Ни одна из частиц жидкости, находящейся внутри такой трубки, при движении не выйдет за ее пределы.

Вся жидкость или газ, прошедшие через одно сечение такой трубки, должны пройти и через любое другое ее сечение (рис. 102). За промежуток времени Δt через сечение S_1 пройдет количество жидкости или газа, равное

$$\Delta m_1 = \rho_1 v_1 \Delta t S_1.$$

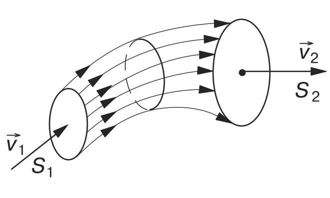


Рис. 102

Через сечение S_2 за тот же промежуток времени пройдет количество жидкости или газа, равное

$$\Delta m_2 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2,$$

где ρ_1, ρ_2, S_1 и S_2 — плотности жидкости или газа в сечениях S_1 и S_2 соответственно. Очевидно, что $\Delta m_1 = \Delta m_2$, иначе на промежутке между S_1 и S_2 у нас либо появлялось бы какое-то дополнительное количество жидкости, либо исчезало. Приравнивая $\Delta m_1 = \Delta m_2$, приходим к следующему выражению:

$$\rho_1 v_1 \Delta t S_1 = \rho_2 v_2 \Delta t S_2. \tag{338}$$

Однако соответствующие расчеты и опыт показывают, что при скоростях, меньших скорости звука, жидкости и газы можно считать *несжимаемыми*, поэтому уравнение (338) запишется в следующем виде:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

или

$$vS = \text{const}. \tag{339}$$

Уравнение (339) носит название *уравнение неразрывности*. Из него следует чрезвычайно важный вывод: там, где сечение трубки уменьшается, скорость потока возрастает, или, что то же самое, где линии тока гуще, там скорость течения потока выше.

В дальнейшем мы будем рассматривать только движение жидкостей. Для описания их движения нам необходимо знать, как связаны скорости движения жидкости с давлением. Такое соотношение отражает уравнение Бернулли:

$$\frac{\rho}{2} v^2 + \rho g h + P = \text{const}, \tag{340}$$

где P — давление, h — высота, v — скорость потока.

Если скорость в разных сечениях трубки различна, ее концы расположены на разной высоте, то уравнение Бернулли имеет следующий вид:

$$P_2 - P_1 = \rho g(h_1 - h_2) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2). \tag{341}$$

Если скорости потока v_1 и v_2 у двух сечений трубы равны, то

$$P_2 - P_1 = \rho g(h_1 - h_2), \tag{342}$$

т. е. разность давлений равна весу столба жидкости между уровнями сечений.

В случае горизонтального потока $h_1 = h_2$ и

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2), \tag{343}$$

т. е. разность давлений в потоке обусловлена только изменениями скорости. Там, где линии тока сгущаются и скорости возрастают,

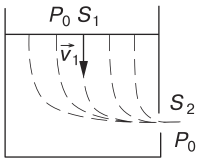


Рис. 103

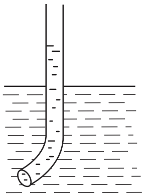


Рис. 104

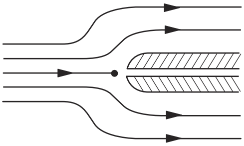


Рис. 105

давление уменьшается. Это связано с тем, что элемент жидкости, вписываясь в более узкое сечение трубки тока, не уменьшает, а увеличивает свой объем, степень сжатия падает и, следовательно, падает давление.

Запишем уравнение Бернулли для сечения широкого сосуда с площадью дна S_1 и для отверстия площадью S_2, проделанного вблизи дна сосуда (рис. 103), считая при этом жидкость несжимаемой, т. е. $\rho = \mathrm{const}$. Кроме того, наложим условие

$$\frac{S_2}{S_1} \ll 1.$$

Тогда уравнение Бернулли приобретает вид:

$$P_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = P_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}\,, \tag{344}$$

а уравнение неразрывности:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \tag{345}$$

Решая совместно (344) и (345) с учетом наложенных условий, находим:

$$v_2 = \sqrt{2gh}. \tag{346}$$

Это соотношение называется *формулой Торричелли.*

Рассмотрим явление, происходящее в неподвижной монометрической трубе, помещенной отверстием к потоку, — так называемой трубе Пито, находящей широкое применение в технике (рис. 104). У такой трубки скорость течения потока перед отверстием равна нулю, а линии тока искривляются (рис. 105). Подставив в (341)

$v_2 = 0$, получаем уравнение Бернулли для трубки Пито

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho v_1^2}{2}$$

или

$$P_2 = P_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}\,. \tag{347}$$

Из (347) следует, что неподвижный манометр, обращенный отверстием к потоку, окажет давление на величину $\rho v_1^2/2$ большее, чем движущийся вместе с потоком. Это происходит из-за того, что остановившиеся перед манометром частицы создают слой, где поток сжимается, что приводит к повышению давления на величину $\rho v_1^{2'}/2$. Перепишем (342) в виде

$$P' = P + \frac{\rho v^2}{2}\,. \tag{348}$$

Величину $\rho v^2/2$ называют *динамическим давлением,* P — *статистическим давлением*, а P' — *полным.*

С помощью трубки Пито мы измеряем полное давление P'. Возникает резонный вопрос — какое же из этих давлений истинное? Динамическое давление — это «избыточное давление», возникающее из-за введения в поток измерительного прибора, приводящее к его возмущению. Истинное же давление — это статистическое давление P.

Если сделать в трубке Пито боковое отверстие, то скорость, а следовательно, и давление вблизи этих отверстий, будут мало отличаться от скорости и давления невозмущенного потока (рис. 106). Поэтому манометр, присоединенный к такой трубке, покажет статистическое давление P. Если же конструкцию, представленную на рис. 107, присоединить к манометру, показывающему разность

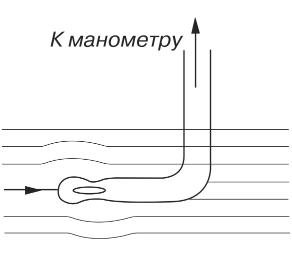


Рис. 106

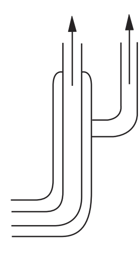


Рис. 107

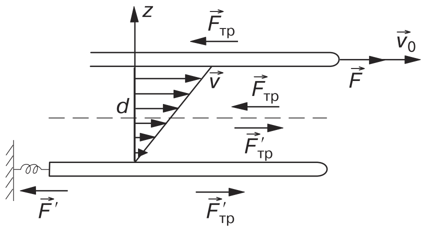


Рис. 108

давлений (дифференциальному манометру), то он покажет динамическое давление, а проградуированный соответствующим образом — скорость или объем проходящей жидкости.

До сих пор мы рассматривали идеальные жидкости, т. е. жидкости, не обладающие внутренним трением. Реальные жидкости обладают внутренним трением или вязкостью. Это подтверждается опытом, когда возникшее в жидкости под действием каких-либо причин движение постепенно прекращается.

Рассмотрим две пластины, погруженные в жидкость (рис. 108). Пусть нижняя пластина неподвижна, а верхняя движется относительно нее со скоростью $\vec{v}_0$. Чтобы пластина двигалась, необходимо приложить к ней какую-то силу $\vec{F}$. Поскольку она движется с постоянной скоростью, то существует какая-то другая сила, равная и противоположно направленная $\vec{F}$. Эта сила и есть сила трения $\vec{F}_{тр.}$ при движении пластины в жидкости. Опытным путем установлено, что

$$F_{тр} = \eta \frac{v_0}{d} S, \tag{349}$$

где η — *коэффициент внутреннего трения*, или *коэффициент вязкости*, или *просто вязкость*, — зависит от природы и температуры жидкости; S — площадь пластины.

Нижняя пластина при движении верхней также подвергается действию силы $\vec{F}'_{тр}$, равной по величине и противоположной по направлению $\vec{F}_{тр}$. Очевидно, что взаимодействие двух пластин осуществляется через жидкость и передается от одного слоя жидкости к другому. Поэтому важно помнить, что формула (349) определяет не только силу трения, действующую на пластину, но и силу трения между соприкасающимися частями жидкости. Можно показать, что

$$F_{\text{тр}} = \eta \left| \frac{dv}{dz} \right| S. \tag{350}$$

Величина $|dv/dz|$ — *модуль градиента скорости* — показывает, как быстро изменяется скорость в направлении, перпендикулярном движению жидкости.

Все сказанное выше относится к малым скоростям течения жидкости, когда она течет спокойно, как бы отдельными слоями, которые не перемешиваются друг с другом. В таких случаях говорят, что течение *ламинарное* (слоистое). При росте скорости у стенок начинают появляться завихрения, ламинарность нарушается. Такое течение называется *турбулентным*. При нем резко возрастает давление в трубопроводе, изменяется распределение скоростей по сечению трубы. Возникновение турбулентности определяется значением *числа Рейнольдса* (Re). Начиная с некоторого критического значения этого числа, ламинарное течение переходит в турбулентное:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \tag{351}$$

где ρ — плотность жидкости; v — характерная скорость потока; l — характерный размер; η — вязкость.

Если в качестве характерного размера взять диаметр трубы, то для воды Re будет равно 1000.

На медленно движущийся в жидкости шарик действует в соответствии с *законом Стокса* сила

$$F = 6\pi\eta r v,$$

где r — радиус шарика.

Рекомендации по решению задач

1. При решении задач, связанных с движением жидкости, необходимо записать уравнение неразрывности струи, уравнение Бернулли и формулы для дополнительных условий, если они, конечно, есть. Затем решить полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

2. При решении задач на вычисление сил реакции при истечении струи очень часто за силу реакции принимают силу гидростатического давления, что является ошибкой. При истечении струи из какого-либо сосуда в нем происходит перераспределение давлений, в результате чего давление вблизи стенки, находящейся напротив отверстия, оказывается большим, чем вблизи стенки с отверстием. На этом и основано действие реактивных двигателей.

3. При решении задач, где дан расход воды, особое внимание обращайте на размерность. Если расход Q дан в л/с, то его необходимо домножить на плотность воды ($\rho_{\text{в}}$).

Задачи к главе 7

Задача 169. Определить разность давлений в широком и узком ($d_1 = 9$ см, $d_2 = 6$ см) коленах горизонтальной трубы (рис. 109), если вода в широком колене течет со скоростью $v_1 = 6$ м/с. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/с^3.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение неразрывности

$$\rho_{\text{в}} S_1 v_1 = \rho_{\text{в}} S_2 v_2,$$

откуда, с учетом $S = \pi d^2/4$,

$$v_2 = v_1 \frac{d_1^2}{d_2^2}\,. \tag{352}$$

Записывая уравнение Бернулли

$$P_1 + \frac{\rho_{\text{в}} v_1^2}{2} = P_2 + \frac{\rho_{\text{в}} v_2^2}{2}$$

и подставляя в него (352), находим ΔP:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right) \approx 7{,}3 \cdot 10^4\ \text{Па}.$$

О т в е т: $\Delta P = 7{,}3 \cdot 10^4$ Па.

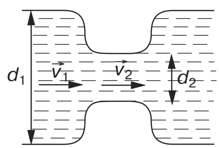


Рис. 109

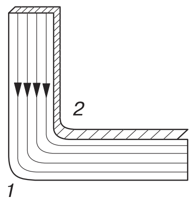


Рис. 110

Задача 170. Идеальная жидкость течет по плоской трубе одинакового сечения, расположенной в горизонтальной плоскости и изогнутой, как показано на рис. 110 (вид сверху). Поток стационарный. Одинаковы ли давление и скорости жидкости в точках 1 и 2? Какой вид имеют линии тока?

Решение. Поскольку труба расположена в горизонтальной плоскости, а поток стационарный, линии тока будут сгущаться у точки 2 из-за того, что поток воды будет стремиться пройти по наикратчайшему пути. Поэтому скорость потока в точке 2 будет больше, чем в точке 1, а давление соответственно меньше.

Ответ: $P_1 > P_2$; $v_1 < v_2$. Плотность линий тока растет при переходе от точки 1 к точке 2.

Задача 171. Две манометрические трубки установлены на горизонтальной трубе переменного сечения в местах, где сечения трубы равны S_1 и S_2 (рис. 111). По трубе течет вода. Найти объем воды, протекающий в единицу времени через сечение трубы, если разность уровней воды в манометрических трубках равна Δh.

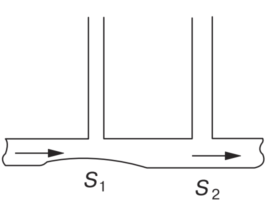


Рис. 111

Р е ш е н и е. Объем воды, протекающей в единицу времени через сечение трубы, равен

$$Q = Sv, \tag{353}$$

где v — скорость потока воды.

Согласно уравнению неразрывности струи мы можем взять любое сечение и соответствующую ему скорость. Перепишем (353) в виде

$$Q = S_1 v_1. \tag{354}$$

Поскольку течение стационарное, уравнение неразрывности струи примет вид:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \tag{355}$$

Уравнение Бернулли для нашего случая (горизонтальный поток) имеет вид

$$P_2 - P_1 = \frac{\rho_2}{2}(v_1^2 - v_2^2), \tag{356}$$

кроме того,

$$P_2 - P_1 = \Delta P = \rho g \Delta h. \tag{357}$$

Уравнения (353)–(355) образуют систему, решая которую, находим

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}. \tag{358}$$

Подставляя (358) в (354), получаем объем воды, протекающей через сечение трубы в единицу времени:

$$Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}.$$

О т в е т: $Q = \rho S_1 S_2 \sqrt{\dfrac{2g\Delta h}{S_2^2 - S_1^2}}$.

Задача 172. Трубка Пито (рис. 112) установлена на оси газопровода, площадь внутреннего сечения которого равна S. Пренебрегая вязкостью, найти объем газа, проходящего через сечение трубы в единицу времени, если разность уровней в жидкостном манометре равна Δh, а плотность жидкости и газа — соответственно ρ_0 и ρ.

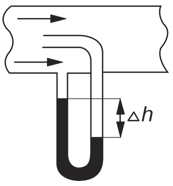


Рис. 112

Р е ш е н и е. Запишем закон Бернулли для нашего случая ($v_2 = 0$):

$$P_2 - P_1 = \rho_0 \Delta h g = \frac{\rho v_1^2}{2},$$

откуда

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_0 \Delta h g}{\rho}}.$$

Объем газа Q, проходящий через сечение S в единицу времени, равен:

$$Q = S v_1 = S\sqrt{\frac{2\rho_0 \Delta h g}{\rho}}.$$

О т в е т: $Q = S\sqrt{\dfrac{2\rho_0 \Delta h g}{\rho}}$.

Задача 173. Вертикальная струя идеальной жидкости вытекает из горизонтального отверстия радиусом r_0 со скоростью v_0. Найти радиус струи на расстоянии h ниже отверстия.

Р е ш е н и е. Уравнения Бернулли и неразрывности струи имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\rho v_0^2}{2} + \rho g h = \dfrac{\rho v^2}{2}, \\ \rho S_0 v_0 = \rho S v, \end{cases} \tag{359}$$

где v — скорость струи жидкости на расстоянии h ниже отверстия; $S_0 = \pi r_0^2$ — площадь отверстия и $S = \pi r^2$ — площадь струи на расстоянии h ниже отверстия.

Решая систему (359), получаем

$$r = r_0 \sqrt[4]{\frac{1}{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2}}}.$$

О т в е т: $r = r_0 \sqrt[4]{\dfrac{1}{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2}}}$.

Задача 174. Идеальная жидкость течет стационарным потоком по наклонной плоскости. Глубина потока уменьшается в $\eta = 2{,}0$ раза на расстоянии l. На каком расстоянии l' глубина потока уменьшится в $\eta' = 4{,}0$ раза?

Р е ш е н и е. Возьмем в потоке произвольную точку, где скорость прохождения потока равна v_1, а глубина потока h. На расстоянии l' скорость потока равна v_3, а глубина h/η'.

Запишем уравнение Бернулли и уравнение неразрывности струи на участке 1–2, где глубина потока уменьшается в η раз:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1^2}{2} + gl = \dfrac{v_2^2}{2}\,, \\ \eta v_1 = v_2. \end{cases} \tag{360}$$

Из решения системы (360) находим:

$$v_1^2 = \frac{2gl}{\eta^2 - 1}\,. \tag{361}$$

Запишем уравнение Бернулли и уравнение неразрывности струи для участка 1–3, где глубина потока уменьшается в η' раз:

$$\begin{cases} \dfrac{v_1^2}{2} + gl' = \dfrac{v_3^2}{2}\,, \\ \eta' v_1 = v_3. \end{cases} \tag{362}$$

Решение системы (362) с учетом (361) дает

$$l' = \frac{\eta'^2 - 1}{\eta^2 - 1}\, l = 5l.$$

О т в е т: $l' = \dfrac{\eta'^2 - 1}{\eta^2 - 1}\, l = 5l.$

Задача 175. На столе стоит широкий цилиндрический сосуд высотой $h = 50$ см. Сосуд наполнен водой. Пренебрегая вязкостью, найти, на какой высоте от дна сосуда следует сделать небольшое отверстие, чтобы струя из него била в поверхность стола на максимальное расстояние $l_{\max}$ от сосуда. Чему равно $l_{\max}$?

Р е ш е н и е. Определим скорость истечения жидкости из полого отверстия в открытом широком сосуде с помощью формулы Торричелли:

$$v = \sqrt{2g(h_0 - h)},$$

где h_0 — высота расположения отверстия над днищем сосуда.

Время движения элемента потока:

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}. \qquad (363)$$

Путь, проходимый элементом потока:

$$l = vt = \sqrt{4(h_0 h - h_0^2)}.$$

Высоту h_0, обеспечивающую максимальное расстояние $l_{\max}$, определим с помощью теоремы Ферма:

$$\frac{dl}{dh_0} = \frac{h - 2h_0}{\sqrt{h_0 h - h^2}} = 0,$$

откуда

$$h_0 = \frac{h}{2} = 25 \text{ см}. \qquad (364)$$

Подставляя (364) в (363), находим

$$l_{\max} = h.$$

О т в е т: $h_0 = 25$ см; $l_{\max} = h$.

Задача 176. Какую работу необходимо совершить, чтобы, действуя постоянной силой на поршень (рис. 113), выдавить из горизонтально расположенного цилиндра всю воду за время t? Объем воды в цилиндре равен V, площадь сечения отверстия s, причем s значительно меньше площади поршня S. Трение и вязкость пренебрежимо малы.

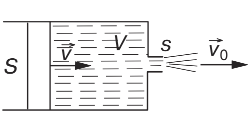


Рис. 113

Р е ш е н и е. Запишем выражение для работы A:

$$A = Fl = Fvt. \tag{365}$$

Из уравнения неразрывности $vS = v_0 s$ находим:

$$v_0 = \frac{S}{s}\, v. \tag{366}$$

Записываем уравнение Бернулли для горизонтального течения жидкости:

$$\frac{\rho}{2}\, v^2 + P = \frac{\rho}{2}\, v_0^2,$$

где ρ — плотность воды, откуда

$$P = \frac{\rho}{2}\,(v_0^2 - v^2).$$

Учитывая (366), $s \ll S$ и $F = P/S$, находим:

$$F = \frac{\rho}{2}\, v^2\, \frac{S}{s^2}\,. \tag{367}$$

Подставляя (367) в (365), приходим к

$$A = \frac{\rho}{2}\, v^2\, \frac{S}{s^2}\, vt.$$

Поскольку $V^3 = S^3 v^3 t^3$, получаем

$$A = \frac{\rho}{2}\; \frac{V^3}{t^2 s^2 S^2}\,.$$

О т в е т: $A = \dfrac{\rho}{2}\; \dfrac{V^3}{t^2 s^2 S^2}$.

Задача 177. Из отверстия в дне высокого цилиндрического сосуда вытекает вода. Площадь сечения сосуда в $\eta = 100$ раз больше площади сечения отверстия. Найти ускорение, с которым перемещается уровень воды в сосуде.

Р е ш е н и е. Поскольку уровень жидкости будет опускаться равнозамедленно, за время dt он опустится на величину $-dx$:

$$dt = -\,\frac{dx}{v_1}\,, \tag{368}$$

где v_1 — скорость опускания уровня жидкости в момент времени t.

Запишем уравнение неразрывности струи и уравнение Бернулли, учитывая, что атмосферное давление по всей трубе тока одинаково:

$$\eta v_1 = v_2; \quad \frac{v_1^2}{2} + gx = \frac{v_2^2}{2}, \tag{369}$$

где v_2 — скорость вытекания жидкости из сосуда. Из уравнений (369) находим

$$v_1 = \frac{\sqrt{2gx}}{\eta^2 - 1}. \tag{370}$$

Подставляя (370) в (368) и интегрируя, получаем выражение для t:

$$t = -\sqrt{\eta^2 - 1}\int_h^0 \frac{dx}{\sqrt{2gx}} = \sqrt{\eta^2 - 1}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{371}$$

Используя соотношение

$$h = -\frac{at^2}{2}$$

и (371), приходим к

$$a = -\frac{g}{\eta^2 - 1} = 10^{-4}g.$$

Ответ: $a = -\dfrac{g}{\eta^2 - 1} = 10^{-4}g.$

Задача 178. Цилиндрический сосуд высотой h с площадью основания S наполнен водой. В дне сосуда открыли отверстие с площадью $s \ll S$. Пренебрегая вязкостью воды, определить, через сколько времени вода вытечет из сосуда.

Решение. В предыдущей задаче было получено выражение для t:

$$t = \sqrt{\eta^2 - 1}\sqrt{\frac{2h}{g}}. \tag{372}$$

Поскольку по условию задачи $s \ll S$, то $\eta \gg 1$, и формула (372) приобретает вид

$$t \approx \eta\sqrt{\frac{2h}{g}} \approx \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Ответ: $t \approx \left(\dfrac{S}{s}\right)\sqrt{\dfrac{2h}{g}}.$

Задача 179. Горизонтально расположенная трубка AB длиной l вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси OO, проходящей через конец A (рис. 114). В трубке находится идеальная жидкость. Конец A трубки открыт, а в закрытом конце B имеется очень малое отверстие. Найти, с какой угловой скоростью относительно трубки будет вытекать жидкость в зависимости от «высоты» ее столба h.

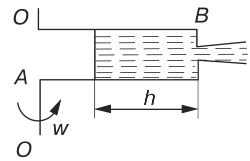


Рис. 114

Р е ш е н и е. На каждый элементарный участок жидкости высотой dh и массой dm действует сила

$$dF = \omega^2(l - h')dm = \omega^2(l - h')\rho S\, dh',$$

$$\int\limits_F^0 dF = \rho S\omega^2 \int\limits_{l-h}^{l} (l - h')dh'. \qquad (373)$$

Интегрируя (373), находим силу, действующую на жидкость при выходе ее из малого отверстия:

$$F = \frac{\rho S\omega^2 h^2}{2} = \frac{m\omega^2 h}{2}\,, \qquad (374)$$

где S — площадь сечения трубки; m — масса идеальной жидкости в зависимости от высоты столба.

Из (374) следует

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\omega^2 h}{2}\,. \qquad (375)$$

Поскольку надо установить зависимость скорости истечения жидкости от «высоты» столба, необходимо в (375) перейти от дифференцирования по t к дифференцированию по h, воспользовавшись для этого соотношением $dt = dh/v$.

Тогда выражение (375) примет вид

$$v dv = \frac{\omega^2 h}{2}\, dh.$$

Интегрируя

$$\int\limits_v^0 v\, dv = \frac{\omega^2}{2} \int\limits_l^{l-h} h\, dh$$

и решая полученное уравнение относительно v, находим

$$v = \frac{\omega h}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2l}{h} - 1}.$$

Ответ: $v = \dfrac{\omega h}{\sqrt{2}} \sqrt{\dfrac{2l}{h} - 1}.$

Задача 180. С противоположных сторон широкого вертикального сосуда, наполненного водой, открыли два одинаковых отверстия, каждое площадью $S = 0{,}50$ см^2. Расстояние между ними по высоте $\Delta h = 51$ см. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды.

Решение. Предположим, что оба отверстия закрыты заглушками, площадь которых равна площади отверстий. Тогда на каждую заглушку будет оказываться гидростатическое давление:

$$F_1 = \rho g h_1 S \quad \text{и} \quad F_2 = \rho g h_2 S,$$

где h_1 и h_2 — высоты водяного столба над первым и вторым отверстиями соответственно.

После того как отверстия открыли, вода из них будет вытекать со скоростью, определяемой по формуле Торричелли:

$$v^2 = 2gh. \tag{376}$$

За единицу времени струей будет уноситься импульс, равный $P = \rho S v^2$, или, с учетом (376), $P = 2\rho S g h$. Поскольку сила равна изменению импульса за единицу времени, можно считать, что реактивная сила равна

$$F = 2\rho S g h,$$

т. е. оказывается в два раза больше силы гидростатического давления. Так как F_1 и F_2 направлены в противоположные стороны, результирующая сила

$$F = F_1 - F_2 = 2\rho S g h_1 - 2\rho S g h_2 = 2\rho S g \Delta h = 0{,}50 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 0{,}50$ Н.

Задача 181. В боковой стенке широкого цилиндрического вертикального сосуда высотой $h = 75$ см сделана узкая вертикальная щель, нижний конец которой упирается в дно сосуда. Длина щели $l = 50$ см, ширина $b = 1{,}0$ мм. Закрыв щель, сосуд наполнили водой. Найти результирующую силу реакции вытекающей воды непосредственно после того, как щель открыли.

Решение. Воспользовавшись выражением для силы реакции, полученным в предыдущей задаче, и учитывая, что $dS = b\,dh'$, находим:

$$dF = 2\rho g b h'\,dh',$$

откуда

$$F = 2\rho g b \int\limits_{h-l}^{h} h'\,dh' = \rho g b l(2h - l) = 5 \text{ Н}.$$

Ответ: $F = 5$ Н.

Задача 182. Вода течет со скоростью v по U-образной трубке, лежащей в горизонтальной плоскости. Площадь сечения трубки S, радиус закругления R. Найти:

а) суммарный импульс воды в закругленной части трубки;

б) модуль силы, действующий со стороны текущей воды на стенки изогнутой части трубки.

Решение. а) За единицу времени в U-образную часть трубки текущей жидкостью приносится импульс $\vec{P}_1 = \rho S v \vec{v}_1$, а выносится импульс, равный по величине и противоположный по направлению $\vec{P}_2 = -\rho S v \vec{v}_2$ (рис. 115). Жидкость оказывает давление на стенки трубы, а стенки трубы, в соответствии с третьим законом Ньютона, с такой же силой действуют на жидкость, изменяя ее суммарный импульс. Поскольку изменение импульса за единицу времени равно действующей на него силе, можно записать:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 2\rho S v^2 = \frac{mv^2}{R}\,.$$

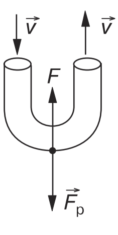


Рис. 115

Отсюда $m = 2\rho SR$, а суммарный импульс воды в закругленной части трубки

$$P = mv = 2\rho SRv.$$

б) Как указывалось выше, $\overrightarrow{F} = \dfrac{\Delta \overrightarrow{P}}{\Delta t}$ или для единицы времени

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{P}_1 - \overrightarrow{P}_2 = \rho Sv\overrightarrow{v}_1 - \rho Sv\overrightarrow{v}_2. \tag{377}$$

Учитывая, что $|\overrightarrow{v}_1| = -|\overrightarrow{v}_2|$, и переписывая (377) в скалярном виде, получаем

$$F = 2\rho Sv^2.$$

Ответ: а) $P = 2\rho SRv$; б) $F = 2\rho Sv^2$.

Задача 183. Вода вытекает из большого бака по изогнутой под прямым углом трубке, внутренний радиус которой $r = 0{,}50$ см (рис. 116). Длина горизонтальной части трубки $l = 22$ см. Расход воды $Q = 0{,}50$ л/с. Найти момент сил реакции воды на стенки этой трубки относительно точки O, обусловленной течением воды.

Решение. Воспользуемся результатом задачи 180, где было получено выражение для силы реакции вытекающей воды

$$F = 2\rho Sgh, \tag{378}$$

формулой Торричелли

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{379}$$

а также выражением для скорости расхода воды

$$Q = \rho vS. \tag{380}$$

Решая совместно (378)—(380), определяем силу реакции вытекающей струи:

$$F = \frac{Q^2}{\rho S}\,.$$

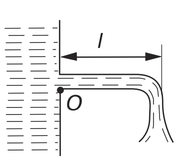


Рис. 116

По условию задачи расход Q дан в л/с, поэтому для пересчета в систему СИ его необходимо домножить на ρ. Тогда

$$F = \frac{\rho Q^2}{S} = \frac{\rho Q^2}{\pi r^2}\,.$$

Следовательно:

$$N = lF = \frac{l\rho Q^2}{\pi r^2} = 0{,}7\ \text{Н}.$$

Ответ: $N = 0{,}7$ Н.

Задача 184. Цилиндрический сосуд с водой вращают вокруг его вертикальной оси с угловой скоростью ω. Найти:

а) форму свободной поверхности воды;

б) распределение давления воды на дне сосуда вдоль его радиуса, если давление в центре дна равно P_0.

Решение. а) Рассмотрим поведение воды во вращающемся цилиндре. При вращении сосуда жидкость в нем через какое-то время будет вращаться вместе с цилиндром из-за сил вязкости. Предположим, что наблюдатель, а следовательно, и начало координат, находятся в центре вращения и вращаются вместе с цилиндром (рис. 117). С точки зрения наблюдателя, на элемент жидкости, лежащий на поверхности, действует сила инерции $m\omega^2 r$, где m — масса частиц жидкости.

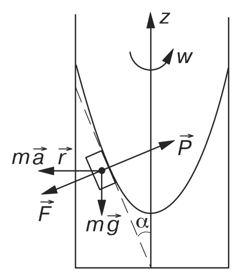


Рис. 117

Рассмотрим направление равнодействующей силы $\overrightarrow{F}$. Выделим на границе тонкий элемент объема. Со стороны соседних слоев жидкости на него будут действовать силы давления, нормальные к границам элемента. Если элемент взять достаточно тонким, то силы, действующие на боковые границы, будут малы и результирующая сила $\overrightarrow{F}$ нормальна к поверхности. Тогда, при малом α,

$$\alpha = \operatorname{tg}\alpha = \frac{mg}{m\omega^2 r}\,, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{dz} = \frac{g}{\omega^2 r}\,,$$

откуда

$$\int\limits_0^r \frac{\omega^2 r}{g}\,dr = \int\limits_0^z dz.$$

Интегрируя, получаем

$$z = \frac{\omega^2}{2g}\, r^2,$$

где z — высота от поверхности жидкости на оси сосуда; r — расстояние от оси.

Форма свободной поверхности жидкости представляет из себя параболоид вращения.

б) Давление в любой точке параболоида вращения будет складываться из давления в центре вращения и давления «элементарного» столбика воды, т. е.

$$P = P_0 + \frac{\rho g \omega^2 r^2}{2g} = P_0 + \frac{\rho \omega^2 r^2}{2}\,.$$

О т в е т: а) параболоид вращения: $z = \dfrac{\omega^2}{2g}\, r^2$; б) $P = P_0 + \dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2}$.

Задача 185. По трубе радиусом R течет стационарный поток вязкой жидкости (рис. 118). На оси трубы ее скорость равна v_0. Найти скорость жидкости как функцию расстояния r от оси трубы.

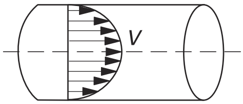


Рис. 118

Р е ш е н и е.

I способ

Мысленно выделим в жидкости цилиндр радиусом $r < R$ длиной l с осью, совпадающей с осью трубы. Тогда на единицу поверхности цилиндра будет действовать сила трения

$$f_{\text{тр}} = 2\pi r \eta l\, \frac{dv}{dr}\,.$$

Поскольку движение жидкости происходит с постоянной скоростью, можно утверждать, что $f_{\text{тр}}$ уравновешивается разностью сил давления P_1 и P_2 на торцах цилиндра, т. е.

$$2\pi r l \eta\, \frac{dv}{dr} = -(P_1 - P_2)\pi r^2,$$

откуда

$$-dv = \frac{P_1 - P_2}{2\eta l}\, r\, dr.$$

У стенок жидкость «прилипает», т. е. при $r = R$, $v = 0$

$$-\int\limits_v^0 dv = \frac{P_1 - P_2}{2\eta l} \int\limits_r^R r\,dr,$$

откуда

$$v = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\eta l}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

На оси трубы при $r = 0$ скорость течения жидкости

$$v = v_0 = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l}\,R^2.$$

Тогда выражение для скорости принимает вид

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right). \tag{381}$$

Эпюра скоростей $v(r)$ изображена на рис. 118.

II способ

Выражение для $v(r)$ можно найти с помощью неопределенного интеграла

$$dv = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta l}\,r\,dr.$$

Интегрируя, получаем

$$v = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta l}\,r^2 + C.$$

У стенок трубы $v = 0$. Отсюда

$$C = \frac{P_1 - P_2}{4\eta l}\,R^2.$$

Тогда

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

О т в е т: $v = v_0\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$.

Задача 186. По трубе длиной l и радиусом R течет стационарный поток жидкости, плотность которого ρ и вязкость η. Скорость течения жидкости зависит от расстояния r до оси трубы как

$$v = v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Найти:

а) объем жидкости, протекающий через сечение трубы ежесекундно;

б) кинетическую энергию жидкости в объеме трубы;

в) силу трения;

г) разность давления на концах трубы.

Р е ш е н и е. а) Мысленно разобьем сечение трубы на кольца радиусом r и шириной dr.

Площадь каждого кольца $dS = 2\pi r\,dr$. В единицу времени через такое кольцо протечет объем жидкости $dQ = 2\pi r\,dr\,v$. Общий объем жидкости определим с учетом выражения для v, найденного в предыдущей задаче:

$$Q = \int\limits_0^R 2\pi r v\,dr = \int\limits_0^R 2\pi 2v_0\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)dr = \frac{\pi v_0 R^2}{2}\,.$$

б) Вычислим кинетическую энергию жидкости:

$$dK = \frac{v^2\,dm}{2}\,,$$

$$dm = \rho 2\pi r\,dr\,l,$$

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^R v_0^2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \rho l 2\pi r\,dr = \frac{\pi l R^2 \rho v_0^2}{6}\,.$$

в) Для определения силы трения воспользуемся (350) и (381):

$$F_{\text{тр}} = \eta S\left|\frac{dv}{dz}\right|.$$

В нашем случае $dz = dr$. Таким образом,

$$F_{\text{тр}} = \eta 2\pi R v_0^2\,\frac{2r}{R^2}\,,$$

при $r = R$

$$F_{\text{тр}} = 4\eta\pi v_0.$$

г) Для определения ΔP используем полученное в задаче (186) выражение для v:

$$v_0 = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta l}\, R^2 = \frac{\Delta P}{4\eta l}\, R^2,$$

откуда

$$\Delta P = \frac{4\eta l v_0}{R^2}\,.$$

О т в е т: а) $Q = \dfrac{\pi v_0 R^2}{2}$; б) $K = \dfrac{\pi l r^2 \rho v_0^2}{6}$; в) $F_{\text{тр}} = 4\pi\eta l v_0$; г) $\Delta P = \dfrac{4\eta l v_0}{R^2}$.

Задача 187. В системе (рис. 119) из широкого сосуда A по трубке вытекает вязкая жидкость, плотность которой $\rho = 1{,}0$ г/см^3. Найти скорость вытекания жидкости, если $h_1 = 10$ см, $h_2 = 20$ см и $h_3 = 35$ см. Расстояние l одинаковы.

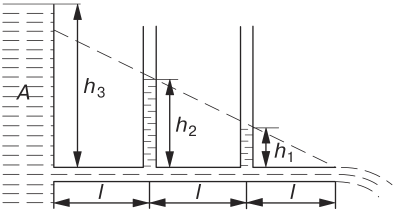


Рис. 119

Р е ш е н и е. При внимательном рассмотрении рисунка видно, что h_3 превышает на $\Delta h = 5$ см величину уровня, при котором жидкость вообще бы не вытекала. Именно этот излишек дает дополнительную кинетическую энергию жидкости, втекающей в трубу. Приравнивая кинетическую и потенциальную энергии $\rho v^2/2 = \rho g \Delta h$, находим

$$v = \sqrt{2g\Delta h} = 1{,}0 \text{ м/с}.$$

О т в е т: $v = 1{,}0$ см/с.

Задача 188. Радиус сечения трубопровода монотонно уменьшается по закону $r = r_0 e^{-\alpha x}$, где $\alpha = 0{,}50$ м$^{-1}$, x — расстояние от начала трубопровода. Найти отношение чисел Рейнольдса в сечениях, отстоящих друг от друга на $\Delta x = 3{,}2$ м.

Решение. Число Рейнольдса для сечения, находящегося на расстоянии x от начала трубопровода,

$$\mathrm{Re}_1 = \frac{\rho v_1 r_0 e^{-\alpha x}}{\eta},$$

а для сечения, находящегося на расстоянии $x + \Delta x$,

$$\mathrm{Re}_2 = \frac{\rho v_2 r_0 e^{-\alpha(x+\Delta x)}}{\eta}.$$

Из уравнения неразрывности

$$\rho v_1 \pi r_0^2 e^{-2\alpha x} = \rho v_2 \pi r_0^2 e^{-2\alpha(x+\Delta x)}$$

находим $v_2 = v_1 e^{2\alpha\Delta x}$.

Далее

$$\frac{\mathrm{Re}_2}{\mathrm{Re}_1} = \frac{e^{2\alpha\Delta x}\cdot e^{-\alpha(x+\Delta x)}}{e^{-\alpha x}} = e^{\alpha\Delta x} = 5.$$

Ответ: $\dfrac{\mathrm{Re}_2}{\mathrm{Re}_1} = 5$.

Задача 189. При движении шарика радиусом $r_1 = 1{,}2$ мм в глицерине ламинарное обтекание наблюдается при скорости шарика, не превышающей $v_1 = 23$ см/с. При какой минимальной скорости v_2 шара радиусом $r_2 = 5{,}5$ см в воде обтекание станет турбулентным? Вязкость глицерина и воды равны соответственно $\eta_1 = 1{,}39$ Па $\cdot$ с и $\eta_2 = 1{,}1$ мПа $\cdot$ с.

Решение. Границей между ламинарным и турбулентным течением в воде станет равенство чисел Рейнольдса для движения шарика в глицерине и воде:

$$\frac{\rho_1 v_1 r_1}{\eta_1} = \frac{\rho_2 v_2 r_2}{\eta_2}.$$

Откуда

$$v_2 = \frac{\rho_1 v_1 r_1 \eta_2}{\rho_2 v_2 r_2 \eta_1} = 5 \text{ мкм/с}.$$

Ответ: $v_2 = 5$ мкм/с.

Задача 190. Свинцовый шарик равномерно опускается в глицерине, вязкость которого $\eta = 1.39$ Па $\cdot$ с. При каком наибольшем диаметре шарика его обтекание еще ламинарное? Переход к турбулентному обтеканию соответствует числу $\mathrm{Re} = 0{,}5$ (это значение Re, при котором за характерный размер взят диаметр шарика).

Р е ш е н и е. Поскольку свинцовый шарик опускается равномерно, очевидно, что сила тяжести P уравновешивается выталкивающей силой F_A и силой сопротивления F, определяемой законом Стокса:

$$P = F_A + F$$

или

$$\rho g \, \frac{4}{3} \, \pi \, \frac{d^3}{8} = \rho_0 g \, \frac{4}{3} \, \pi \, \frac{d^3}{8} + 6\pi\eta r v,$$

где ρ_0 и ρ — плотность глицерина и свинца соответственно.

Решая полученное уравнение относительно v, находим

$$v = \frac{g(\rho - \rho_0)d^2}{18\eta} \,. \tag{382}$$

Из (349) с учетом (350) получаем $d = \dfrac{\mathrm{Re}\,\eta}{\rho_0 v}$, куда подставляем (382). Тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{18\,\mathrm{Re}\,\eta^2}{g\rho_0(\rho - \rho_0)}} = 5 \text{ мм}.$$

О т в е т: $d = 5$ мм.

Задача 191. Двигатель корабля был остановлен в тот момент, когда его скорость была равна v_0. Его эффективная масса равна m, а сила сопротивления при движении корабля пропорциональна его скорости. Определить:

а) какой путь пройдет корабль до полной остановки;

б) время, затраченное кораблем при прохождении этого пути.

Р е ш е н и е. Двигаясь в вязкой среде, тело увлекает окружающую его жидкость за собой. Молекулы жидкости приобретают скорости, пропорциональные скорости тела v. Затрачиваемая на разгон или торможение тела работа будет пропорциональна его эффективной массе (а не просто массе), которая больше массы тела на добавочную (присоединенную) массу, зависящую от вязкости среды и формы тела.

а) Поскольку двигатель корабля был остановлен, сила сопротивления единственная, оказывающая влияние на его движение. Поэтому можно записать:

$$ma = -kv \quad \text{или} \quad m \, \frac{dv}{dt} = -k \, \frac{dx}{dt} \,,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Интегрируя полученное уравнение, получаем

$$v(x) = v_0 - \frac{k}{m}\,x.$$

Пройденный путь S найдем из условия $v(S) = 0$:

$$S = \frac{m}{k}\,v_0.$$

б) Время, пройденное кораблем до остановки, определим из уравнения

$$m\,\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Его решение дает

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{k}{m}\,t\right).$$

Поскольку $v(t)$ асимптотически приближается к оси t, будем считать время до остановки τ, как это принято в физике, временем, за которое $v(t)$ уменьшится в e раз. Для его нахождения возьмем показатель экспоненты $k = -1$ и найдем:

$$t = \frac{m}{k}\,.$$

О т в е т: а) $S = \dfrac{m}{k}\,v_0$; б) $t = \dfrac{m}{k}$.

Глава 8

Релятивистская механика

Почти два века считалось, что классическая механика Ньютона является вершиной естествознания и основой мировоззрения. В основе ньютоновской механики лежат предположения о том, что все явления в мире связаны с происходящим в пространстве и во времени перемещением, взаимодействием и столкновением атомов. Пространство и время — это сцена, на которой и разворачиваются физические процессы. Ни пространство, ни время, ни материя не связаны между собой. Во всех системах отсчета время течет равномерно. Если бы материя исчезла, то пространство и время не изменились бы. Все пространственные соотношения подчиняются геометрии Евклида, а гравитационное воздействие передается мгновенно. Главным принципом Вселенной является лапласовский детерминизм — все причинно-следственные связи однозначны.

Со временем экспериментальная физика накапливала факты, которые не могла объяснить классическая механика Ньютона. Так, например, представление эфира не годилось для объяснения распространения электромагнитных волн.

В 1905 г. А. Эйнштейн выдвинул два принципа, позволяющие объяснить накопившейся к тому времени экспериментальный материал, в том числе и результаты опыта Майкельсона—Морли.

1. Принцип относительности, представляющий собой обобщение принципа относительности Галилея на любые физические процессы: все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета, все законы природы и уравнения, их описывающие, инвариантны, т. е. не меняются, при переходе от одной системы отсчета к другой. Никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную.

2. Скорость света не зависит от скорости источника и одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, а также скорость любого сигнала или воздействия на материальные тела не может превысить скорость света.

Рассмотрим две системы координат K и K'. Пусть часы находятся в системе K', которая движется равномерно и прямолинейно со скоростью v относительно K-системы.

Тогда

$$t_K - t_{K'} = \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}, \tag{383}$$

где t_K и $t_{K'}$ — время в K и K' системах соответственно, c — скорость света. Из (383) следует, что движущиеся часы идут медленнее, чем покоящиеся. Это явление называется *замедленным временем.* Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом, в котором происходит процесс, называется *собственным временем.* Из (383) следует, что время Δt процесса в другой системе зависит от скорости этой системы. Из-за огромной величины c^2 эффект замедления времени имеет существенное значение при скоростях, близких к световым.

Другим важным следствием постулатов Эйнштейна является изменение геометрических размеров тел при движении. Пусть два стержня, расположенные перпендикулярно друг к другу, движутся прямолинейно и равномерно со скоростью v относительно K-системы (рис. 120). Принцип относительности утверждает, что размеры тел остаются неизменными в направлении, перпендикулярном движению. Если бы это было не так и какой-либо стержень в какой-либо системе оказался бы короче или длиннее другого, то в результате экспериментальных исследований мы смогли бы отличить одну инерциальную систему от другой, но это противоречит принципу относительности. Стержень же AB, движущийся с постоянной скоростью v относительно K'-системы отсчета, изменится по длине, и его длина

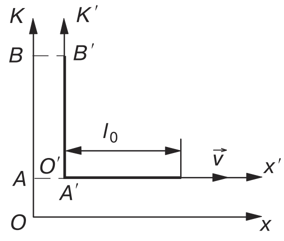


Рис. 120

$l = l_0$ в K'-системе будет равна

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{384}$$

где l_0 — собственная длина стержня, т. е. длина стержня в системе, где он покоится (K'-система). Этот эффект называется *лоренцевым сокращением.*

В классической механике преобразования координат и времени решаются с помощью преобразований Галилея, основанных на равенстве длины тел и одинаковом течении времени в различных инерционных системах координат. Однако из двух постулатов Эйнштейна следовало, что течение времени и длина тел зависят от системы отсчета. Поэтому необходимо было вывести формулы, которые учитывали бы лоренцево сокращение длины, а при малых скоростях переходили бы в преобразования Галилея.

Такие формулы были получены, они называются *преобразованием Лоренца.*

Преобразования Лоренца при переходе от K' к K-системе имеют вид:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y' = y, \quad t' = \frac{t - \dfrac{xV}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{385}$$

а при переходе от K' к K системе

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad t = \frac{t' + (x'V/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{386}$$

где $\beta = \dfrac{V}{c}$; V — скорость K'-системы относительно K-системы.

Если положить в преобразованиях Лоренца $c = \infty$, то мы получаем преобразования Галилея.

Пусть в K-системе в плоскости xy движется частица параллельно оси OX со скоростью v_x, а K-система движется со скоростью V. Тогда можно получить

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - (v_x V/c^2)}. \tag{387}$$

Эта формула выражает *релятивистский закон преобразования скорости.*

Рассмотрим теперь, какую форму принимают законы Ньютона при преобразованиях Лоренца. В механике Ньютона сила представляет собой скорость изменения импульса:

$$\overrightarrow{F} = \frac{d(m\overrightarrow{v})}{dt}\,.$$

Импульс движения равен mv, но в скорректированном Эйнштейном уравнении масса также является функцией скорости, и выражение для импульса приобретает вид

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v} = \frac{m_0\overrightarrow{v}}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,, \tag{388}$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}\,. \tag{389}$$

В выражении (389) величина m_0 называется *массой покоившейся частицы* или просто *массой покоя.*

Одним из кардинальных отличий релятивистской механики от механики Ньютона является следствие, вытекающее из (388). Если на тело действует постоянная сила, то в механике Ньютона скорость тела будет увеличиваться практически до бесконечности. В релятивистской же механике растет не скорость тела, а его импульс, который может непрерывно расти, потому что растет масса. Через некоторое время ускорение исчезает, но импульс продолжает расти. Мы говорим, что если действие силы ведет к малому ускорению, то тело обладает большой инерцией, мерой которой является масса. Из формулы (388) следует, что при $v \approx c$ инерция тела крайне велика.

Из классической механики известно, что под действием постоянной силы скорость тела будет возрастать. Из релятивистской механики мы знаем, что с ростом скорости растет и масса тела (389), т. е. приложенная к телу сила совершает на каком-то пути работу, приводящую не только к увеличению скорости, что уже было известно во времена Ньютона, но и к увеличению массы. С другой стороны, работа, производимая над телом, увеличивает его энергию, поэтому логично сделать предположение об эквивалентности массы и энергии. Чтобы установить эту связь, Эйнштейн предположил, что закон сохранения энергии справедлив и в теории относительности и получил соотношение

$$K = mc^2 - m_0c^2, \tag{390}$$

где K — кинетическая энергия тела; m — релятивистская масса тела, определяемая по формуле (389); m_0 — масса покоя тела.

Перепишем (390):

$$mc^2 = m_0c^2 + K. \tag{391}$$

Анализ соотношения (391) привел Эйнштейна к выводу формулы m_0c^2 — это общая внутренняя энергия тела (кинетическая, химическая и т. д.), называемая *энергией покоя* E_0. Величина mc^2 называется *полной энергией тела.* Закон взаимосвязи массы и энергии принято записывать следующим образом:

$$E = mc^2 = m_0c^2 + K. \tag{392}$$

Выражение (392) представляет собой один из фундаментальных законов природы. Первый член (392)

$$E_0 = m_0c^2 \tag{393}$$

называется *законом взаимосвязи (пропорциональности) массы* m_0 и *энергии покоя* E_0 тела.

Используя выражения (388) и (392), легко получить формулу, связывающую импульс и полную энергию

$$E - m_0^2c^4 = p^2c^2$$

или

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}. \tag{394}$$

С физической точки зрения, (394) представляет большой интерес. Понятно, что величины энергии и импульса имеют разные значения в различных системах отсчета. Однако такая их комбинация, называемая инвариантом, не зависит от скорости тела, а следовательно, и от системы координат.

Рекомендации по решению задач

1. Если в задаче применяется термин «*собственная длина*», то имеется в виду длина тела в системе отсчета, где оно (тело) покоится. Длина же тела в системе, относительно которой оно движется, определяется по формуле

$$l = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

2. Сокращение длины происходит только вдоль направления движения, в поперечном направлении длина не изменяется.

3. Время в системе отсчета, движущейся вместе с телом, замедляет свой ход

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\,,$$

где Δt_0 — собственное время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с телом; Δt — время, отсчитываемое по часам движущимся со скоростью v относительно тела.

Задачи к главе 8

Задача 192. Стержень движется в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной K-системы отсчета. При каком значении v длина стержня в этой системе отсчета будет на $\eta = 0{,}50\%$ меньше его собственной длины?

Решение. Для стержня, движущегося в продольном направлении с постоянной скоростью v относительно инерциальной K-системы отсчета, условие задачи запишется следующим образом:

$$(1 - \eta)l_0 = l_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Сокращая на l_0 и возводя в квадрат обе части уравнения, приходим к выражению

$$1 - 2\eta + \eta^2 = 1 - \frac{v^2}{c}\,,$$

откуда искомое значение скорости

$$v = c\sqrt{\eta(2 - \eta)} = 0{,}10\ \text{c}.$$

Ответ: $v = 0{,}10$ с.

Задача 193. Найти собственную длину стержня, если в k-системе отсчета его скорость $v = c/2$, длина $l = 1{,}00$ м и угол между ним и направлением движения $\theta = 45°$.

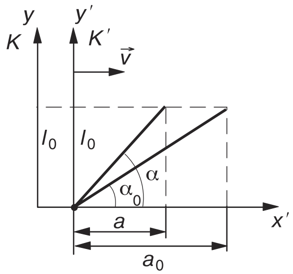


Рис. 121

Р е ш е н и е. Направим ось X неподвижной системы отсчета K, относительно которой система отсчета K' движется со скоростью v параллельно оси X' (рис. 121).

Запишем теорему Пифагора для собственной длины стержня, т. е. длины в K' системе отсчета

$$l_0^2 = a_0^2 + b_0^2$$

или, с учетом (385) и $b_0 = a \operatorname{tg} \alpha$,

$$l_0^2 = \frac{a^2}{1-\beta^2} + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha\beta^2}{1-\beta^2} =$$
$$= \frac{a^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha\beta^2)}{1-\beta^2} == a^2\left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha\beta^2\right) =$$
$$= l^2(1 - \sin^2 \alpha\beta^2),$$

где

$$l^2 = a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha, \quad l^2 = \frac{a^2}{\cos^2 \alpha}, \quad \beta = \frac{v}{c}.$$

Отсюда собственная длина стержня

$$l_0 = l\sqrt{\frac{1-\beta^2 \sin^2 \alpha}{1-\beta^2}} = 1{,}08 \text{ м}.$$

О т в е т: $l_0 = 1{,}08$ м.

Задача 194. Стержень движется равномерно в продольном направлении мимо двух меток A и B, расположенных на расстоянии Δx друг от друга. Сначала в момент t_1 напротив метки A оказался передний конец стержня. Затем напротив метки B в моменты t_2 и t_3

оказались соответственно передний и задний концы стержня. Найти его собственную длину.

Р е ш е н и е. Запишем преобразование Лоренца в виде

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\,, \tag{395}$$

где скорость движения стержня

$$v = \frac{\Delta x}{t_2 - t_1}\,, \tag{396}$$

длина стержня

$$l = v(t_3 - t_2) = \frac{\Delta x(t_3 - t_2)}{t_2 - t_1}\,. \tag{397}$$

Решая совместно уравнения (395)–(397), находим его собственную длину

$$l_0 = \frac{\Delta x(t_3 - t_2)}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - \left(\dfrac{\Delta x}{c}\right)^2}}\,.$$

О т в е т: $l_0 = \dfrac{\Delta x(t_3 - t_2)}{\sqrt{(t_2 - t_1)^2 - \left(\dfrac{\Delta x}{c}\right)^2}}$.

Задача 195. С какой скоростью двигались в K-системе отсчета часы, если за время $t = 5{,}0$ с (в K-системе) они отстали от часов этой системы на $\Delta t = 0{,}10$ с?

Р е ш е н и е. Формула для расчета замедления времени (383) в условиях задачи примет вид:

$$t = \frac{t - \Delta t}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}\,.$$

Возводя обе части в квадрат, получаем

$$t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t^2 - 2t\Delta t + \Delta t^2.$$

Решаем полученное уравнение относительно v:

$$v = c\sqrt{\left(2 - \frac{\Delta t}{t}\right)\frac{\Delta t}{t}} = 0{,}6 \cdot 10^8\ \text{м/с}.$$

Ответ: $v = 0{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 196. Собственное время жизни некоторой нестабильной частицы $\Delta t = 10$ нс. Какой путь пролетит эта частица до распада в лабораторной системе отсчета, где ее время жизни $\Delta t = 20$ нс?

Решение. Возводя в квадрат обе части (383) и решая полученное уравнение относительно v, находим

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2}.$$

Путь, пройденный частицей до распада (S) в лабораторной системе отсчета, определим из

$$S = v\Delta t = c\Delta t\sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t}\right)^2} = 5\ \text{м}.$$

Ответ: $S = 5$ м.

Задача 197. Две частицы, двигавшиеся в лабораторной системе отсчета по одной прямой с одинаковой скоростью $v = 3c/4$, попали в неподвижную мишень с промежутком времени $\Delta t = 50$ нс. Найти собственное расстояние между частицами до попадания в мишень.

Решение. Расстояние между частицами в неподвижной системе отсчета

$$l = l_0\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = v\Delta t,$$

откуда собственное расстояние между частицами

$$l_0 = \frac{v\Delta t}{\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} = 17 \text{ м}.$$

Ответ: $l_0 = 17$ м.

Задача 198. Стержень движется вдоль линейки с некоторой постоянной скоростью. Если зафиксировать положение обоих концов данного стержня одновременно в системе отсчета, связанной с линейкой, то разность отсчетов по линейке $\Delta x_1 = 4{,}0$ м. Если же положение обоих концов зафиксировать одновременно в системе отсчета, связанной со стержнем, то разность отсчетов по этой же линейке $\Delta x_2 = 9{,}0$ м. Найти собственную длину стержня и его скорость относительно линейки.

Решение. В первом случае

$$\Delta x_1 = l_0\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Во втором случае

$$l_0 = \Delta x_2\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Решая совместно эти два уравнения, находим:

$$l_0 = \sqrt{\Delta x_1 \Delta x_2} = 6{,}0 \text{ м}; \quad v = c\sqrt{1-\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}} \approx 2{,}2\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Ответ: $l_0 = 6{,}0$ м; $v \approx 2{,}2\cdot 10^8$ м/с.

Задача 199. Два стержня одинаковой собственной длины l_0 движутся навстречу друг другу параллельно общей горизонтальной оси. В системе отсчета, связанной с одним из стержней, промежуток времени между моментами совпадений левых и правых концов стержней оказался равным Δt. Какова скорость движения одного стержня относительно другого?

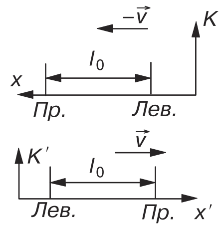


Рис. 122

Р е ш е н и е. Для расчета относительной скорости движения стержней выберем K'-систему отсчета, связанную с одним из стержней, ось OX направим вдоль движения (рис. 122). Скорость движения стержня в K'-системе будет равна $v_x = v$. K'-система движется относительно K-системы со скоростью

$$V = \frac{l_0}{\Delta t}.$$

Поскольку стержни движутся навстречу друг другу, выражение (387) принимает вид

$$v = \frac{2l_0/\Delta t}{\left[1 + \left(\frac{l_0}{c\Delta t}\right)^2\right]}.$$

О т в е т: $v = (2l_0/\Delta t)\Big/\left[1 + \left(\dfrac{l_0}{c\Delta t}\right)^2\right]$.

Задача 200. Во сколько раз релятивистская масса частицы, скорость которой отличается от скорости света на $\eta = 0{,}010\%$, превышает ее массу покоя?

Р е ш е н и е. По условию задачи,

$$\eta = \frac{c - v}{c}.$$

Отсюда скорость частицы

$$v = c(1 - \eta).$$

Согласно (389),

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{c^2(1-\eta)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\eta(1 - \eta/2)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2\eta}} = 70.$$

О т в е т: $\dfrac{m}{m_0} \approx 70$.

Задача 201. Найти скорость, при которой релятивистский импульс частицы в $\eta = 1{,}4$ раза превышает ее ньютоновский импульс.

Р е ш е н и е. Запишем отношение релятивистского импульса к ньютоновскому:

$$\frac{P_\text{р}}{P_\text{н}} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} m_0 v} = \eta.$$

Отсюда

$$\eta^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 1.$$

Решаем уравнение относительно v:

$$v = \frac{c}{\eta}\sqrt{\eta^2 - 1} = 0{,}70 \text{ с}.$$

О т в е т: $v = 0{,}70$ с.

Задача 202. Какую работу надо совершить, чтобы увеличить скорость частицы с массой m от 0,60 с до 0,80 с? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по нерелятивистской формуле.

Р е ш е н и е. Поскольку работа, совершенная над телом, равна изменению его кинетической энергии, для релятивистского случая, с учетом (390), имеем

$$A_p = K_2 - K_1 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v_2^2/c^2)}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (v_1^2/c^2)}}\right) = \\ = 0{,}42 m_0 c^2.$$

Работа в нерелятивистском случае

$$A_\text{н.р.} = \frac{m_0(v_2^2 - v_1^2)}{2} = 0{,}14 m_0 c^2.$$

О т в е т: $A_\text{р} = 0{,}42 m_0 c^2$; $A_\text{нр} = 0{,}14 m_0 c^2$.

Задача 203. При какой скорости кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя?

Р е ш е н и е. Кинетическая энергия частицы равна ее энергии покоя $K = m_0c^2$, в этом случае (392) принимает вид

$$mc^2 = 2m_0c^2$$

или, с учетом (389),

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = 2m_0c^2,$$

откуда находим скорость частицы

$$v = c\sqrt{\frac{3}{4}} = 2{,}6 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Р е ш е н и е. $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

Задача 204. Найти зависимость импульса частицы с массой m от ее кинетической энергии. Вычислить импульс протона с кинетической энергией 500 МэВ.

Р е ш е н и е. Запишем соотношение для полной энергии (394) и формулу связи импульса и полной энергии (392):

$$E^2 - P^2c^2 = m_0^2c^4,$$
$$E = m_0c^2 + K.$$

Подставляем в первое выражение значение полной энергии и решаем полученное уравнение относительно P:

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{K(K+2m_0c^2)} = 1{,}09 \text{ ГэВ/с}.$$

О т в е т: $P = 1{,}09$ ГэВ/с.

Задача 205. Найти скорость частицы, кинетическая энергия которой $K = 500$ МэВ и импульс $P = 865$ МэВ/c, где c — скорость света.

Решение. Из $E = mc^2$ находим массу $m = E/c^2$ и импульс частицы

$$P = mv = \frac{Ev}{c^2}\,.$$

Поскольку $E = K + m_0c^2$, выражение для импульса приобретает вид:

$$P = \frac{(K + m_0c^2)v}{c^2}\,,$$

откуда

$$v = \frac{Pc^2}{K + m_0c^2}\,. \tag{398}$$

Запишем соотношение для связи полной энергии и импульса релятивистской частицы (задача 204)

$$P = \frac{1}{c}\sqrt{K(K + 2m_0c^2)}$$

и выразим из него массу покоя:

$$m_0 = \frac{P^2c^2 - K^2}{2Kc^2}\,. \tag{399}$$

Подставляя (399) в (398) и проводя несложные преобразования, находим скорость частицы

$$v = \frac{2PK}{P^2 + (K^2/c^2)} = 0{,}87\ \text{c}.$$

Ответ: $v = 0{,}87$ с.

Литература

1. *И. И. Иродов.* Механика. Основные законы. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.
2. *И. Е. Иродов.* Задачи по общей физике. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
3. *В. В. Покровский.* Электромагнетизм. Методы решения задач: Учебное пособие. 2-е издание М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.
4. *Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц.* Механика. М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1965.
5. *И. В. Савельев.* Курс общей физики: Учебное пособие для вузов. В 5 кн. 4-е издание, переработанное. Кн. 1. М.: Наука, 1998.
6. *Т. И. Трофимова.* Сборник задач по курсу физики. Для втузов. М.: «Оникс XXI век»; «Мир и образование», 2003.
7. *А. Г. Чертов, А. А. Воробьев.* Задачник по физике. М.: Физматлит, 2001.
8. *Р. Фейнман.* Дюжина лекций: шесть попроще и шесть посложнее. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
9. *В. П. Демков, О. Н. Третьякова.* Физика. М.: Высшая школа, 2001.
10. *С. Е. Хайкин.* Механика. М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1948.

Оглавление

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программы Adobe Reader версии не ниже 11-й для платформ Windows, Mac OS, Android, iOS, Windows Phone и BlackBerry; экран 10"

Учебное электронное издание

Покровский Вячеслав Валерьевич

МЕХАНИКА.
МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
Учебное пособие

Редактор *С. Ф. Селивёрстова*
Художник *Н. А. Лозинская*
Технический редактор *Е. В. Денюкова*
Оригинал-макет подготовлен *М. Ю. Копаницкой* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано к использованию 19.03.15.
Формат 125×200 мм

Издательство «БИНОМ. Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

Книга является полезным дополнением к учебному пособию И. Е. Иродова «Механика. Основные законы».

Охвачены разделы: кинематика, основное уравнение динамики, законы сохранения импульса, энергии и момента импульса, всемирное тяготение, динамика твердого тела, упругие деформации твердого тела, механика несжимаемой жидкости, релятивистская механика.

Каждый раздел предваряется кратким изложением теоретических вопросов, описываются методики решения задач, которых всего в книге содержится около 1000.