

К. КЕЙЗ
П. ЦВАЙФЕЛЬ

ЛИНЕЙНАЯ
ТЕОРИЯ
ПЕРЕНОСА

К. КЕЙЗ, П. ЦВАЙФЕЛЬ

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА

Перевод с английского
М. Г. КУЗЬМИНОЙ

Под редакцией
М. В. МАСЛЕННИКОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1972

LINEAR TRANSPORT THEORY

Kenneth M. Case, Paul F. Zweifel

University of Michigan

Addison-Wesley Publishing Company
Reading, Massachusetts • Palo Alto • London • Don Mills, Ontario
1967

Книга содержит изложение основных математических проблем теории прохождения излучения через вещество. Наряду с классическим материалом в ней рассмотрены весьма плодотворный метод Кейза разложения по сингулярным собственным функциям характеристического уравнения переноса и метод инвариантного погружения Амбарцумяна — Чандрасекара — Беллмана. Описаны численные методы теории переноса.

Книга, несомненно, будет полезна как широкому кругу математиков, интересующихся физикой, так и физикам.

Редакция литературы по математическим наукам

2-2-3
11-72

К. КЕЙЗ, П. ЦВАЙФЕЛЬ

Линейная теория переноса

Редакторы Л. Б. Штейнпресс и Г. М. Ильичева

Художник Н. Я. Воск. Художественный редактор В. И. Шаповалов

Технический редактор Л. П. Бирюкова. Корректор Л. А. Брычкова

Сдано в набор 4/IV 1972 г. Подписано к печати 25/VIII 1972 г. Бумага кн. журн. 60×90^{1/16}-12,00 бум. л. 24,00 усл. печ. л., Уч.-изд. л. 21,50 Изд. № 1/5604.

Цена 2 р. 15 к. Зак. 0256

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени

Московская типография № 7 «Искра революции»

Главполиграфпрома Комитета по печати

при Совете Министров СССР

г. Москва, Трехпрудный пер., 9

Оглавление

От редактора перевода	5
Предисловие	7
 Глава 1. Основные положения	 9
1.1. Введение	9
1.2. Определения	11
1.3. Уравнение переноса	15
 Глава 2. Общие свойства уравнения переноса и его решений	 18
2.1. Свойства симметрии решений уравнения переноса	18
2.2. Односкоростное приближение	26
2.3. Единственность и граничные условия	27
2.4. Граничные условия и поверхностные источники	31
2.5. Стационарная задача; единственность и связь с нестационарной задачей	32
2.6. Функции Грина	36
2.7. Теорема взаимности для односкоростного уравнения переноса	37
 Глава 3. Перенос нейтронов без воспроизводства в соударениях	 43
3.1. Основные предположения	43
3.2. Истечение в вакуум	44
3.3. Перенос нейтронов в чисто поглощающих средах. Общие результаты	45
3.4. Приложение общих результатов к задаче о стационарном истечении в вакуум	47
3.5. Приложение к случаю стационарных источников в чисто поглощающей среде	51
3.6. Интегральные уравнения	57
3.7. Вероятность выхода	63
 Глава 4. Решения однородного односкоростного уравнения переноса	 73
4.1. Введение	73
4.2. Собственные функции однородного уравнения. Допустимое пространство функций	74
4.3. Вычисление дискретных собственных значений и собственных функций	76
4.4. Континуум собственных функций	82
4.5. Ортогональность и нормировка (случай целого отрезка)	83

4.6. Теорема полноты (случай целого отрезка)	88
4.7. Характерные приложения теоремы полноты и необходимость ее обобщения	93
4.8. Теорема полноты для половинного отрезка	95
4.9. Соотношения ортогональности для половинного отрезка	100
4.10. Случай анизотропного рассеяния	105
 Глава 5. <i>Применение метода разложения по сингулярным собственным функциям</i>	113
5.1. Введение	113
5.2. Функция Грина для бесконечной среды	114
5.3. Моменты функций Грина	119
5.4. Асимптотическое поведение фазовой плотности нейтронов при малых и больших r в случае изотропного точечного источника	126
5.5. Альбедная задача	131
5.6. Проблема Милна	135
5.7. Функция Грина для полупространства	137
5.8. Задачи для двух смежных полупространств	138
 Глава 6. <i>Явный вид решений некоторых задач о прохождении излучения через полупространство и плоские слои</i>	146
6.1. Введение	146
6.2. Тождества, содержащие функцию $X(z)$	147
6.3. Применение тождеств для X -функции к некоторым задачам для полупространства	153
6.4. Некоторые явные формулы для проблем Милна	158
6.5. Тождества для X -функции и некоторые точные результаты для двух смежных полупространств	173
6.6. Проблема критичности	175
6.7. Альбедная задача для плоского слоя	186
6.8. Линейно анизотропное рассеяние	187
6.9. Полупространство без поглощения с анизотропным рассеянием [44]	192
6.10. Линейно анизотропное рассеяние [44]	197
 Глава 7. <i>Нестационарные задачи</i>	199
7.1. Введение	199
7.2. Разложение по нормальным модам относительно пространственной переменной	200
7.3. Разложение по нормальным модам относительно временной переменной	206
7.4. Функция Грина для задачи Коши в случае бесконечной среды	210
7.5. Альбедные задачи	217
 Глава 8. <i>Численные методы</i>	221
8.1. Введение	221
8.2. Метод сферических гармоник. Общие вопросы	222
8.3. Диффузионное, или P_1 -приближение	223
! P_L -метод в плоской геометрии	235
! Метод сферических гармоник для других геометрий	246
8.6. Двойной P_L -метод	250
8.7. Общие замечания о методах дискретных ординат	255

8.8. Метод гауссовых квадратур. Эквивалентность методу сферических гармоник	256
8.9. S_N -метод	258
Глава 9. Инвариантное погружение	262
9.1. Введение	262
9.2. Уравнения для задачи о плоском слое	263
9.3. Задачи для полупространства	268
Глава 10. Задачи теории переноса из других областей физики	271
10.1. Введение	271
10.2. Распространение звука	271
10.3. Плазменные задачи	278
10.4. Электрический разряд в газе	294
10.5. Перенос излучения в звездных атмосферах	295
Приложение А. Сферические функции	304
Приложение В. Разложение фазовой плотности по сферическим функциям	305
Приложение С. Связь между функциями фазовой плотности при различных источниках	309
Приложение Д. Теоремы существования и единственности для уравнения переноса, зависящего от энергии [92]	314
Приложение Е. Функции $E_n(x)$	327
Приложение F. Случай кратных корней	329
Приложение G. Класс разложимых функций	332
Приложение Н. Прямое вычисление моментов функции плотности (изотропный точечный источник)	334
Приложение I. Задачи теории переноса в различных геометриях	339
Приложение J. Задачи без азимутальной симметрии	350
Приложение K. Вывод формулы (34d) разд. 4.9	356
Приложение L. Таблицы значений функции $X(z)$	357
Список литературы	380

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В 1960 г. К. Кейз сформулировал новый подход к решению задач теории переноса, основанный на разложении фазовой плотности излучения по собственным функциям однородного кинетического уравнения [18]. Сама по себе идея не нова, она лежит в основе метода Фурье, который широко используется в различных областях и с которым непосредственно связан популярный метод разделения переменных в математической физике. Для реализации метода Фурье необходимо, чтобы в распоряжении исследователя находился достаточно мощный набор функций, по которым проводится разложение и которые некоторым определенным образом связаны с рассматриваемой задачей (как правило, роль такого набора играет система собственных функций одного из операторов, входящих в задачу). Но именно это условие, на первый взгляд, не выполняется в теории переноса излучения. Оказывается, например, что в частном случае плоской геометрии и при разумных предположениях об индикатрисе рассеяния однородное уравнение переноса обладает лишь конечным числом линейно независимых собственных функций и чем «лучше» индикатриса, тем меньше их число. Эти собственные функции весьма хороши во многих отношениях: пространственные и угловые переменные в них разделяются, они непрерывны и т. д., но их слишком мало.

Ситуация изменилась после того, как Кейз обнаружил, что если расширить класс допустимых функций, включив в него наряду с классическими и сингулярные (обобщенные) функции, то резко расширится и система собственных функций уравнения переноса. Наряду с конечным («дискретным») набором классических собственных функций возникает целый континуум сингулярных собственных функций, и этих собственных функций в совокупности уже будет достаточно для применения метода Фурье.

Находка Кейза послужила отправным пунктом для большого количества работ. Оказалось, что метод Кейза применим в довольно широком классе задач теории переноса и во многих случаях позволяет получить решение в замкнутой форме. Очевидно, что явные решения в такой трудной теории, как теория переноса, имеют не только эстетическую ценность. Они дают представление об основных закономерностях, и их можно использовать для проверки точности различных приближенных и вычислительных

методов. В предлагаемой вниманию читателей книге К. Кейза и П. Цвайффеля собраны практически все задачи теории переноса, допускающие решение в явной форме, и построение этих решений проведено единым методом. В этом основное достоинство книги.

Помимо аналитического метода Кейза и его приложений, в книге затронуты и некоторые другие вопросы (проблема существования и единственности решения нестационарного уравнения переноса, метод инвариантного погружения, численные методы).

При изложении материала авторы не стремятся к особой математической строгости. Тонкости доказательств либо опущены вовсе, либо только намечены. В разделах, касающихся применений метода Кейза, это не приводит к ошибкам. Однако там, где речь идет о качественных вопросах теории переноса, нечеткость формулировок дает себя знать. Особенно сильно это сказалось на приложении D. Здесь большая часть теорем содержала утверждения, вообще говоря, не вытекающие из принятых предположений. При переводе эти заведомо ложные утверждения были опущены. Тем не менее и в новом варианте формулировки теорем оставляют желать лучшего. Однако мы не сочли нужным доводить их до формально-математического совершенства, так как это не соответствовало бы принятому авторами характеру изложения.

Обнаруженные ошибки исправлены без дополнительных оговорок. Равным образом устранены замеченные опечатки.

Следует, наконец, отметить, что книга К. Кейза и П. Цвайффеля ни в коей мере не отражает современного состояния всей математической теории переноса (авторы и не ставили перед собой такой задачи). В ней совсем не затронуты многие направления качественной теории переноса излучения. В этой связи отметим, например, работы по обоснованию разрешимости и исследованию свойств стационарного уравнения переноса (и в первую очередь основополагающий труд В. С. Владимирова [59]) [97—99], по теории нестационарных задач [100, 101], по проблеме Милна с анизотропным рассеянием [102].

В практических приложениях теории переноса (таких, как атмосферная оптика или теория реакторов и защиты от проникающей радиации) решающую роль играют специальные численные методы. Глава 8 настоящей книги дает о них лишь самое общее представление. Читателю, интересующемуся этими вопросами, следует обратиться к (весьма обильной) специальной литературе. Из числа советских работ упомянем лишь две книги, написанные Г. И. Марчуком (или при его участии) [103, 104]. В них содержится и подробная библиография.

В переводе книги, помимо М. Г. Кузьминой, принимали участие В. И. Журавлев (гл. 6 и приложение D) и С. С. Филиппов (гл. 10).

М. В. Масленников

ПРЕДИСЛОВИЕ

Около двенадцати лет назад один из нас (К. М. К.) в сотрудничестве с Ф. де Гофманом и Г. Плачеком написал том 1 предполагавшейся двухтомной монографии по теории переноса нейтронов (Case K. M., de Hoffman F., Placzek G., Introduction to the theory of neutron diffusion, Washington, 1953). Безвременная кончина старшего автора (Г. Плачека) и занятость остальных авторов другими делами привели к отказу от завершения работы.

Однако недавно при существенной поддержке Ф. де Гофмана мы решили начать все сначала. Поскольку за истекшее время были развиты новые методы, мы сочли, что в интересах единства изложения было бы желательно опубликование единого труда, объединяющего как изданные, так и неизданные части старой работы. Не следует, однако, считать, что настоящая книга полностью заменяет старую. В ней не воспроизведены весьма обширные таблицы и графики.

Большой удачей для нас была помощь со стороны д-ров И. Кучера, Н. Мак-Кормика, М. Нейтельсона, М. Мендельсона, Ф. Шура, Ч. Сиверта, Дж. Саммерфилда и П. Ахтара. Кроме всего прочего, они и д-р Д. Хетрик помогли устранить многие ошибки в рукописи. Мы особенно обязаны Д. Метколфу и Дж. Шалтису за тщательное чтение корректур и сверку всех формул. Кроме того, мы хотели бы отметить особую помощь д-ра Шура в написании некоторых частей гл. 6 и д-ра Кучера в подготовке гл. 8.

Всем упомянутым лицам мы приносим свою глубокую благодарность.

Наконец, мы хотели бы воспользоваться возможностью и посвятить эту книгу нашим матерям — Альме Б. Кейз и Дороти Цвайфель.

Анн Арбор, Мичиган

К. М. К.

П. Ф. Ц.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Введение

За двадцать пять лет, с 1939 по 1964 г., задачи теории переноса были подвергнуты разносторонним исследованиям. Это, конечно, было вызвано нуждами техники — необходимостью создания ядерных и термоядерных реакторов. К несчастью, по своей структуре соответствующие уравнения отличаются (и являются более сложными) от уравнений классической математической физики, например от уравнений электромагнитной теории. Мы говорим «к несчастью» по следующим двум причинам:

1. Класс задач, разрешимых в замкнутой форме, оказывается крайне ограниченным. В действительности решения в замкнутой форме возможны только в очень простых и в высшей степени идеализированных ситуациях. В результате те, кто сталкивался с требованиями практики, вынуждены были прибегать к далеко идущим и часто неконтролируемым приближениям. Более того, в различных областях (и даже в пределах одной области) возникли и нашли отражение в литературе изолированные примеры специальных разрешимых задач, которые исследуются отличающимися друг от друга специальными методами.

2. Тот, кто впервые приступает к изучению задач теории переноса, должен со значительной осторожностью пользоваться представлениями, выработанными (и потому ставшими интуитивными) при изучении классических краевых задач.

Эта книга представляет собой попытку введения в науку о линейных уравнениях переноса и их решениях. Предположение о линейности часто оказывается очень суровым. Многие интересные свойства при этом теряются. Однако в настоящее время мы обладаем лишь весьма незначительными возможностями исследовать нелинейные уравнения подобного типа.

Как будет видно в дальнейшем, линейные уравнения переноса возникают в связи с проблемами переноса излучения и диффузии нейтронов, в теории плазмы, в теории распространения звука, а также и в других областях. Исторически наиболее ранние исследования интересующего нас типа были выполнены в связи с теорией переноса излучения. С точностью до замены немногих общепринятых понятий соответствующие уравнения совпадают с уравнениями, возникающими в простых задачах о диффузии нейтронов.

Идеализация, необходимая для постановки разрешимой математической задачи, возможно, ближе всего к реальности в нейтронном случае. В связи с этим большую часть теории мы изложили на языке, адекватном нейтронным задачам. (Модификации, необходимые для других приложений, лишь намечены.)

По методическим соображениям наше изложение менее дедуктивно, чем это могло быть желательно для математиков. Так, хотя в самом начале получена весьма общая форма уравнения диффузии нейтронов, мы немедленно принимаем грубые упрощающие предположения, чтобы найти решения этого уравнения с помощью элементарных средств и, работая с упрощенными задачами, развить определенную интуицию.

Дальше эти ограничения будут смягчаться до тех пор, пока мы не будем в состоянии рассматривать все односкоростные задачи теории переноса нейтронов, допускающие решение в замкнутой форме. (Эти задачи, надо признать, все еще являются очень идеализированными.) В конце концов мы получим довольно полный обзор разрешимых (в замкнутой форме) односкоростных задач теории переноса нейтронов. Это может оказаться полезным по следующим трем соображениям:

1. В некоторых специальных ситуациях подобные односкоростные задачи могут быть хорошим приближением к физической реальности.

2. Их решения представляют самостоятельный математический интерес, так как они дают представление о структуре решений краевых задач линейной теории переноса.

3. Особенно важно, вероятно, то, что задачи, допускающие такие решения, образуют систему, на которой могут испытываться приближенные методы. Кроме того, как мы увидим, такие результаты указывают пути усовершенствования низших приближений.

В связи с последним обстоятельством для удобства читателя мы включили в книгу краткий обзор наиболее употребительных приближенных схем. Таблицы и графики приводятся только для того, чтобы дать возможность почувствовать природу точных результатов и облегчить их сравнения с приближенными. Более подробные численные результаты можно найти в работе [1].

Хотя основной упор делается на решения специальных задач, в книге обсуждаются и некоторые общие вопросы. Включены в рассмотрение теоремы существования и единственности и следствия из возможных свойств симметрии задач. Мы надеемся, что наша попытка отказаться от использования специальных сведений из анализа и теории групп не привела к излишней громоздкости изложения. Предполагается, что читатель владеет лишь небольшим математическим аппаратом. Например, необходимо только элементарное знание теории функций комплексной переменной.

(Во всяком случае, там, где требуются более специальные сведения, приводятся дополнительные ссылки на учебники.) Однако следует признать, что для чтения книги необходим определенный уровень математической культуры. То же самое, по-видимому, относится и к сведениям из физики. Все необходимые уравнения приводятся в тексте, но их происхождение из эксперимента и их общие следствия читателю должны быть известны.

В нашем изложении есть один неизбежный пробел. Не рассматриваются спектральные свойства операторов, фигурирующих в краевых задачах. Такое ограничение показалось нам необходимым, так как в противном случае требуется существенно другой и значительно более сложный математический аппарат, чем использованный в этой книге. Кроме того, до сих пор в этой области получены, мягко выражаясь, только разрозненные результаты; см., например, [2].

Специалист заметит, что, за исключением короткого описания метода «инвариантного погружения», мы всюду используем только один из возможных методов решения «разрешимых» задач. Отвлекаясь от личных склонностей, мы сочли такой подход предпочтительным, ибо не так важно, какой именно метод используется, как то, чтобы был развит один метод, достаточный для решения всех рассматриваемых задач.

1.2. Определения

Первый шаг в развитии теории переноса нейтронов состоит в выборе тех величин, через которые должно выражаться распределение нейтронов. Мы всюду будем предполагать, что силы взаимодействия между нейтронами отсутствуют и, следовательно, нет нейтрон-нейтронных столкновений¹⁾. Таким образом, поведение нейтронов весьма похоже на поведение идеального газа и их распределение полностью определяется функцией распределения для одной частицы $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, которую для краткости мы будем называть *фазовой плотностью*²⁾

Определение 1. Величина $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r d^3v$ — это число нейтронов в элементе объема d^3r в окрестности точки \mathbf{r} , скорости которых лежат в элементе объема d^3v пространства скоростей

¹⁾ Это предположение хорошо выполняется в любом практическом случае, поскольку плотности нейтронов ($\sim 10^{10}$ см⁻³) всегда намного ниже плотностей атомов ($\sim 10^{23}$ см⁻³).

²⁾ (В оригинале angular density.— *Ред.*) В некоторых приложениях, касающихся кинетики ядерных реакторов, появляется необходимость рассматривать функции распределения высших порядков. Эти вопросы, однако, не затрагиваются в данной книге.

в окрестности точки \mathbf{v} в момент времени t . (В дальнейшем часто будет использоваться единичный вектор Ω направления скорости нейтрона.)

Определение 2. $\Omega = \mathbf{v}/v$, где v — абсолютное значение скорости нейтрона. Таким образом,

$$d^3v = v^2 dv d\Omega. \quad (1)$$

При рассмотрении односкоростных задач теории переноса нейтронов удобнее в качестве независимой переменной выбрать вектор Ω , а не \mathbf{v} . (В основном в этой книге будут рассматриваться именно такие задачи.)

С фазовой плотностью связан ток $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Определение 3. $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = v\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Этому определению эквивалентно

Определение 3'. Величина $\mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{n} dS d^3v dt$ есть число нейтронов в объеме d^3v в окрестности точки \mathbf{v} , пересекающих элементарную площадку dS с единичным вектором нормали \mathbf{n} в момент времени t .

Эквивалентность обоих определений легко доказывается, если построить цилиндр с основанием dS , образующей длины $v dt$ и осью, параллельной вектору \mathbf{v} . Число нейтронов, которые пересекут dS за время dt и скорости которых лежат в d^3v в окрестности \mathbf{v} , будет равно числу нейтронов с такими же скоростями, находящихся в этом цилиндре. Поскольку объем цилиндра равен $v dt \cdot \mathbf{n} dS$, а плотность нейтронов с нужным значением скорости равна $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v$, число таких нейтронов в цилиндре будет равно

$$v \cdot \mathbf{n} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v dt dS \equiv \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} d^3v dt dS.$$

С фазовой плотностью связаны также величина $\rho(\mathbf{r}, v, t)$ и плотность $\rho(\mathbf{r}, t)$.

Определение 4.

$$\begin{aligned} \text{а) } \rho(\mathbf{r}, v, t) &= \int d\Omega \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \\ \text{б) } \rho(\mathbf{r}, t) &= \int d^3v \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Ясно, что $\rho(\mathbf{r}, t) d^3r$ представляет собой полное число нейтронов в объеме d^3r в окрестности точки \mathbf{r} независимо от их скорости, в то время как $\rho(\mathbf{r}, v, t) d^3rv^2 dv$ — общее число нейтронов в d^3r с абсолютными значениями скорости, лежащими между v и $v + dv$ (независимо от направления скорости). Аналогичным образом можно определить токи $\mathbf{J}(\mathbf{r}, v, t)$ и $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ путем интегрирования

функции $j(r, v, t)$ по $d\Omega$ и d^3v соответственно. Тогда полное число нейтронов, пересекающих dS за время dt , будет равно $J(r, t) \cdot n dS dt$.

Нейтроны, поступающие в среду от источников, мощность которых не зависит от распределения нейтронов, имеющихся в среде, можно описать с помощью *фазовой плотности источников*.

Определение 5. Величина $q(r, v, t) d^3r d^3v dt$ есть число нейтронов, испускаемых источниками в интервале времени от t до $t + dt$ объема d^3r в окрестности точки r и имеющих скорости, лежащие в объеме d^3v в окрестности точки v .

Путем интегрирования $q(r, v, t)$ по $d\Omega$ и d^3v соответственно можно определить величины $q(r, v, t)$ и $q(r, t)$.

Если в рассматриваемой области присутствуют ядра атомов, нейтроны будут испытывать столкновения. Пусть $l(v)$ — длина свободного пробега между столкновениями для нейтронов скорости v ¹⁾. Поскольку нейтрон скорости v претерпевает в среднем v/l столкновений в секунду, частота столкновений нейтронов скорости v в точке r равна

$$\frac{v}{l(r, v)} \psi(r, v, t) d^3r d^3v.$$

(Так как мы не касаемся задач из теории ядерных реакторов, в которых существенное значение имеют вариации реактивности на больших интервалах времени, будем считать, что l от времени не зависит.)

Величина, обратная среднему свободному пробегу, называется *микрокопическим поперечным сечением* и обозначается символом $\sigma(r, v)$:

$$\sigma(r, v) = l^{-1}(r, v). \quad (3)$$

Эта величина есть среднее взвешенное по всем ядрам, присутствующим в среде:

$$\sigma(r, v) = \sum_i N^i(r) \Sigma^i(v), \quad (4)$$

где $N^i(r)$ — пространственная плотность ядер типа i в точке r , а Σ^i — полное *микрокопическое* нейтронное сечение типа i . Это микрокопическое сечение в действительности равно сумме

¹⁾ Предположение, что l зависит только от скорости нейтрона и не зависит от скорости ядра — мпшени, означает, что скорость нейтрона намного больше скорости ядра и, следовательно, последней можно пренебречь. Это неверно для нейтронов очень низких (тепловых) энергий, а также в том случае, когда средняя длина свободного пробега сильно изменяется с изменением скорости, как, например, в резонансных явлениях. Указанные ограничения можно, однако, снять даже в рамках нашей теории, если за длину свободного пробега принять надлежащим образом выбранное среднее по тепловому движению ядер. См., например, [3, особенно гл. 4].

нескольких слагаемых, отвечающих различным реакциям, происходящим в системе нейтрон — ядро при соударении. Так, в типичном случае

$$\Sigma^i = \Sigma_s^i + \Sigma_a^i + \Sigma_{in}^i + \Sigma_f^i. \quad (5)$$

Входящие в (5) парциальные сечения являются соответственно сечениями упругого рассеяния, захвата, неупругого рассеяния и деления. Аналогичным образом определяются парциальные макроскопические сечения, например

$$\sigma_s = \sum_i N^i \Sigma_s^i \quad (6)$$

и т. д. При этом частота столкновений с рассеянием для нейтронов скорости \mathbf{v} в точке \mathbf{r} есть $\nu \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v$. Частота столкновений, сопровождающихся реакцией деления, дается тем же выражением с заменой σ_s на σ_f .

В результате каждого столкновения возникает $c(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ вторичных нейтронов.

Определение 6. $c(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — это среднее число вторичных нейтронов, приходящихся на одно соударение нейтрона скорости \mathbf{v} с ядром в пространственной точке \mathbf{r} .

Ясно, что для столкновения с поглощением $c = 0$, для столкновения с рассеянием $c = 1$, для столкновения с делением $c = \nu$, где ν — среднее число нейтронов, образованных в акте деления ($\sim 2,5$). Величина c в данной точке \mathbf{r} зависит, разумеется, от находящихся в \mathbf{r} ядер и их сечений. Если деления нет ($\sigma_f = 0$), то

$$c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \sigma_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})}. \quad (7)$$

Если деление имеет место, то в числителе выражения (7) добавляется слагаемое $\nu \sigma_f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Если нейтроны не воспроизводятся в результате соударения, то $\sigma_f = \sigma_s = \sigma_{in} = 0$, так что $c = 0$. (Этот случай подробно рассмотрен в гл. 3.)

Теперь мы определим функцию $\sigma(\mathbf{v}', t' \rightarrow \mathbf{v}, t; \mathbf{r})$.

Определение 7. Величина

$$\nu' \sigma(\mathbf{v}', t' \rightarrow \mathbf{v}, t; \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t') d^3v' d^3r d^3v dt$$

— это математическое ожидание числа нейтронов в элементе объема d^3r в окрестности точки \mathbf{r} , возникающих в объеме d^3v (в окрестности точки \mathbf{v}) пространства скоростей в интервале времени от t до $t + dt$ в результате столкновений в момент времени t' нейтронов со скоростями, лежащими внутри объема d^3v' (в окрестности точки \mathbf{v}'), с ядрами, находящимися в том же объеме d^3r .

Здесь существенную роль играет предположение, что нейтроны, возникающие в результате столкновения, находятся в точке, где столкновение произошло. Более того, мы можем предполагать,

что вторичные нейтроны возникают в момент столкновения ¹⁾, так что $\sigma = \sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$. Из определения поперечного сечения и определений 6 и 7, очевидно, следует, что

$$\int \sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) d^3v = c(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}'). \quad (8)$$

Обычно мы будем предполагать, что в рассматриваемой системе процессы столкновений инвариантны относительно вращений. В этом случае $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ зависит только от v, v' и $\Omega' \cdot \Omega$, т. е. от абсолютных значений скоростей первичного и вторичного нейтронов и угла между их траекториями ²⁾. Из формулы (8) тогда следует, что c и σ зависят лишь от величины скорости v' , но не от ее направления. Более подробно смысл этого свойства будет обсуждаться в разд. 2.1.

Отметим также тот важный факт, что величина $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ должна быть положительной, равно как и величины $c(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Последние должны быть также ограниченными.

Как правило, функция $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ определяется процессами упругого и неупругого рассеяния и деления. Будем считать, что для каждого из этих процессов функцию $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ можно записать в виде произведения сечения $\sigma(\mathbf{v}')$ на нормализованную функцию $f(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$, описывающую энергетический спектр вторичных нейтронов. Оказывается, что функцию $f(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ можно вычислить в точном соответствии с теорией только для случая упругого рассеяния. Однако для вклада, обусловленного делением, имеются хорошие полуэмпирические данные [4]; для вклада от неупругого рассеяния приходится довольствоваться скудными экспериментальными данными и весьма неточными теориями [5].

Величину сечения $\sigma(\mathbf{v}')$ в некоторых частных случаях можно получить теоретически. Однако обычно полагаются на обширные и общедоступные эмпирические данные (см., например, [6]).

Итак, мы дали определение всем величинам, необходимым для вывода уравнения, описывающего распределение нейтронов в произвольной системе. Вывод этого уравнения будет предметом следующего раздела.

1.3. Уравнение переноса

Основным законом, описывающим поведение нейтронов, по существу является уравнение баланса. Это уравнение в действительности представляет собой линеаризованное уравнение Больц-

¹⁾ Это означает, что мы пренебрегаем наличием запаздывающих нейтронов. Запаздывающие нейтроны необходимо принять во внимание при изучении кинетики ядерных реакторов.

²⁾ Тем самым мы пренебрегаем эффектами, связанными, например, с анизотропией кристаллов. Эти эффекты бывают важны в некоторых приложениях.

мана и может быть получено с помощью подходящих приближений из уравнения Лиувилля, проинтегрированного по координатам и скоростям (или импульсам) всех частиц, за исключением нейтронов. Ниже приводится простой вывод уравнения переноса, основанный на прямом подсчете баланса числа нейтронов внутри малого объема фазового пространства.

Рассмотрим изменение dN за время dt числа нейтронов, находящихся в малом объеме V с поверхностью S в окрестности точки \mathbf{r} , скорости которых лежат внутри объема d^3v в окрестности точки \mathbf{v} пространства скоростей:

$$dN = d^3v dt \int_V \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} d^3r. \quad (1)$$

Выполняется соотношение баланса

$$dN = - (a) - (b) + (c) + (d), \quad (2)$$

где

- (a) — число нейтронов, уходящих через поверхность S за время dt ;
- (b) — число нейтронов, претерпевающих столкновения внутри V за время dt ;
- (c) — число вторичных нейтронов со скоростью \mathbf{v} , возникающих в V за время dt в результате столкновений;
- (d) — число нейтронов со скоростью \mathbf{v} , порожденных в V за время dt источниками.

Слагаемое (a) учитывает те нейтроны, которые покидают объем V или прибывают в него с неизменной скоростью; слагаемые (b) и (c) учитывают соответственно нейтроны, скорости которых покидают элемент пространства скоростей d^3v или прибывают в последний при условии неизменности положения этих нейтронов. Математическое выражение для каждого из четырех слагаемых в правой части уравнения (2) можно найти на основе определения 3' разд. 1.2.

Если \mathbf{n}_0 — внешняя нормаль к поверхности dS , то

$$(a) = d^3v dt \int_S \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{n}_0 dS. \quad (2a)$$

В соотношении (2a) интеграл по поверхности можно свести к объемному интегралу с помощью теоремы Гаусса:

$$(a) = d^3v dt \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} d^3r. \quad (2a')$$

Аналогичным образом из уравнения (2) разд. 1.2 находим

$$(b) = d^3v dt \int_V \frac{v \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{l(\mathbf{r}, \mathbf{v})} d^3r, \quad (2b)$$

а по определению 7

$$(c) = d^3v dt \int_V v' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) d^3v' d^3r. \quad (2c)$$

Наконец, по определению 5

$$(d) = d^3v dt \int_V q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3r. \quad (2d)$$

Принимая во внимание произвольность объема V , из уравнений (1) и (2) после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + v \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int d^3v' \sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) v' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t). \end{aligned} \quad (3)$$

При выводе уравнения (3) были сокращены общие дифференциальные множители и использовано тождество $\nabla \cdot \mathbf{v} \psi = \mathbf{v} \cdot \nabla \psi$ (справедливое потому, что \mathbf{v} — независимая переменная). Через σ обозначена величина l^{-1} .

Уравнение (3) является основным уравнением теории переноса нейтронов; отыскание его решений будет предметом всей этой книги. К несчастью, в общем виде с этим уравнением очень трудно обращаться. И это несмотря на то, что даже вывод этого уравнения потребовал многочисленных предположений и приближений (неподвижные ядра, мгновенные соударения и т. д.). Если бы эти упрощающие предположения не были сделаны, задача отыскания решений уравнения переноса была бы еще более трудной.

Если же необходимо получить хотя бы качественную картину происходящих в действительности физических процессов, приходится принять дальнейшие упрощающие предположения. Эти предположения будут касаться природы функций σ и q , которые до сих пор были довольно произвольными функциями координат и скоростей. Как правило, мы будем вводить настолько суровые предположения о физической структуре рассматриваемых систем, что появится возможность получить простые решения. По мере развития техники построения решений эти предположения будут до некоторой степени смягчаться, но редко до уровня, на котором может быть решена какая-либо «практическая» проблема. Поэтому, как уже отмечалось в разд. 1.1, решения уравнения переноса, которые строятся в этой книге, могут, вообще говоря, служить для физической интерпретации процессов, происходящих в какой-либо «практической» ситуации, а также в качестве тестов для различных приближенных методов, часто используемых в прикладных задачах.

Глава 2

ОБЩИЕ СВОЙСТВА УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА И ЕГО РЕШЕНИЙ

2.1. Свойства симметрии решений уравнения переноса

Прежде чем пытаться найти решения уравнения переноса в явном виде, полезно выяснить некоторые общие свойства, которыми эти решения заведомо должны обладать. В действительности можно получить обширную информацию о решениях, не решая самого уравнения, и эта информация будет весьма полезной при фактическом поиске решений. В настоящем разделе мы рассмотрим информацию о решениях уравнения переноса, которую можно получить, изучая свойства инвариантности решения при различных преобразованиях системы координат¹⁾.

Будем называть оператором Больцмана оператор

$$B \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + v\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \int v'\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) d^3v'. \quad (1a)$$

Уравнение переноса можно записать в виде

$$B\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (1b)$$

Рассмотрим общее преобразование системы координат вида

$$\mathbf{r}' = \omega \mathbf{r} \quad (2)$$

и связанный с ω такой оператор Ω , что при преобразовании системы координат (2) произвольная функция $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ преобразуется по закону

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rightarrow f'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \Omega f(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad \text{где} \quad \Omega f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv f(\omega^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (3)$$

В нашем случае представляют интерес два класса преобразований: сдвиги и ортогональные преобразования (т. е. поворот и отражение, а также их комбинации).

Обозначим преобразование, отвечающее сдвигу системы координат на расстояние a в направлении, определяемом вектором $\hat{\mathbf{x}}_i$ ²⁾,

¹⁾ Многие из полученных результатов интуитивно очевидны; здесь дается их строгое обоснование.

²⁾ Всюду в этой книге знаком \wedge будет отмечаться единичный вектор (для векторов Ω и \mathbf{p} , однако, этот знак использоваться не будет).

через $t_i(a)$:

$$t_i(a) \mathbf{r} = \mathbf{r} - a \hat{\mathbf{x}}_i, \quad (4)$$

где a — произвольное действительное число. При этом соответствующий оператор для функции обозначим через T_i . Он действует лишь на пространственные переменные функции, так что

$$T_i f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(t_i^{-1} \mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (5)$$

Обозначая ортогональное преобразование системы координат буквой O и соответствующий оператор буквой Θ , получаем

$$\Theta f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(O^{-1} \mathbf{r}, O^{-1} \mathbf{v}). \quad (6)$$

Таким образом, оператор Θ в отличие от T_i (см. формулу (5)) действует не только на координаты, но и на скорости. Из-за существенного различия между определениями (5) и (6) удобно рассматривать эти два вида преобразований отдельно.

Общий подход к изучению свойств инвариантности состоит в следующем. В определенных случаях оператор B коммутирует с некоторыми операторами преобразования координат Ω . (Например, если B не зависит от координат x_i , то B коммутирует с T_i .)

Поддействуем таким оператором Ω на уравнение (1b). В силу коммутативности B и Ω

$$B\Omega\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \Omega q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (7)$$

Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

Теорема 1. Рассмотрим класс операторов преобразования Ω , коммутирующих с оператором Больцмана B . Если $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — решение уравнения переноса с источником $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, то $\Omega\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — решение этого уравнения с источником $\Omega q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

В настоящем разделе нас будут интересовать только операторы Ω конечных преобразований. Однако при построении общих решений уравнения переноса (см. приложение F) будут важны также операторы бесконечно малых преобразований. Теорема 1 справедлива для обоих типов преобразований, но в каждом случае ей можно дать свою интерпретацию.

1) В случае конечного преобразования из утверждения о том, что Ω коммутирует с B , следует, что граничные и начальные условия также инвариантны относительно преобразования Ω . Для бесконечной пространственной области это утверждение тривиально, а для конечной области это означает, что B не коммутирует ни с каким оператором сдвига, но может коммутировать с операторами поворота, если падающий поток имеет соответствующую симметрию.

Поэтому слова «постоянное сечение» в этом случае будут означать, что сечение постоянно всюду, а не в какой-нибудь одной конечной области, ограниченной вакуумом.

2) При бесконечно малых преобразованиях положение тела не меняется, но могут меняться граничные и начальные условия. Поэтому для таких

преобразований в формулировку теоремы 1 нужно внести изменения: «...то $\Omega\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — решение этого уравнения с источником $\Omega q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и новым граничным условием, которое получается в результате применения оператора Ω к старому граничному условию».

Эта неоднозначность в интерпретации теоремы 1 не должна вызвать путаницы, так как бесконечно малые преобразования рассматриваются лишь в приложении F.

В частности, при некоторых q и некоторых Ω может оказаться, что $\Omega q = q$. В этом случае из теоремы 1 вытекает

Следствие. Если операторы Ω и B коммутируют и, кроме того, $\Omega q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, то $\Omega\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

Применяя теорему 1 и ее следствие, можно получить информацию о решении уравнения переноса, которая, как уже отмечалось, в дальнейшем поможет найти некоторые его решения в явном виде.

Полезно заметить, что оператор B — это на самом деле целый класс операторов, поскольку он определяется функциями $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$. В зависимости от характера этих функций B коммутирует с различными классами операторов Ω . Условия, при которых это происходит, мы продемонстрируем на примерах. Начнем с преобразований сдвига.

Теорема 2. Если функции $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ не зависят от координат x_i , то операторы B и T_i коммутируют.

Доказательство этой теоремы элементарно, так как по условию оператор B содержит x_j только в слагаемом $\mathbf{v} \cdot \nabla$. Но $T_i(\partial/\partial x_j) = (\partial/\partial x_j) T_i$, откуда и следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1 и формулы (5) вытекает, что при выполнении условий теоремы 2

$$B\psi(t_i^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(t_i^{-1}\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (8)$$

Приведем некоторые приложения инвариантности относительно сдвига.

1) Рассмотрим бесконечную однородную изотропную среду. В этом случае функции $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ не зависят от пространственных координат и оператор B коммутирует с каждым оператором сдвига. Пусть q — функция точечного источника.

$$q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) q'(\mathbf{v}, t). \quad (9)$$

Тогда

$$BG(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) q'(\mathbf{v}, t). \quad (10)$$

Решение уравнения (10) обозначено буквой G , так как оно является функцией Грина оператора B (см. разд. 2.6).

Применяя сдвиг

$$t_i(\mathbf{r}_0) \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \quad (11)$$

из уравнений (8) и (10) получаем

$$BG(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, t) = \delta(\mathbf{r}) q'(\mathbf{v}, t). \quad (12)$$

Уравнение (12) есть не что иное, как уравнение для функции Грина $G(0 \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, соответствующей точечному источнику, расположенному в начале координат. Таким образом,

$$G(0 \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, t), \quad (13a)$$

или

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, t). \quad (13b)$$

Последний результат справедлив, разумеется, лишь для однородной бесконечной среды.

2) В качестве другого примера рассмотрим случай, когда функции $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ и $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ зависят только от одной пространственной координаты, скажем z . Тогда оператор B коммутирует как с T_x , так и с T_y . Из теоремы 2 и следствия теоремы 1 немедленно вытекает, что $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(z, \mathbf{v}, t)$, т. е. функция $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ может зависеть лишь от координаты z .

3) Рассмотрим бесконечную однородную среду с плоским источником

$$q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \delta(z - z_0) q'(\mathbf{v}, t). \quad (14)$$

Соображения, аналогичные тем, что привели к формуле (13b), позволяют заключить, что в этом случае функция Грина удовлетворяет соотношению

$$G(z_0 \rightarrow z, \mathbf{v}, t) = G(z - z_0, \mathbf{v}, t). \quad (15)$$

4) Наконец, в случае бесконечной однородной среды с источниками и начальными условиями, не зависящими от пространственных переменных, уравнение (8) определяет пространственно однородную функцию фазовой плотности:

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(\mathbf{v}, t).$$

Займемся теперь ортогональными преобразованиями.

Теорема 3. Если функции $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ и граничные условия зависят только от расстояния от начала координат до точки \mathbf{r} , т. е. от $r = |\mathbf{r}|$, и если $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ инвариантна относительно вращений, т. е. $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega, r)$, то оператор B коммутирует с любым ортогональным преобразованием Θ , оставляющим в покое начало координат.

Доказательство этой теоремы довольно просто. Прежде всего заметим, что операторы $\partial/\partial t$ и $\mathbf{v} \cdot \nabla$ коммутируют с оператором Θ ($\mathbf{v} \cdot \nabla$ коммутирует с Θ в силу того, что $\mathbf{v} \cdot \nabla$ является скалярным

произведением двух векторов). Точно так же член, содержащий $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, коммутирует с Θ , поскольку

$$\Theta \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sigma(O^{-1}\mathbf{r}, O^{-1}\mathbf{v}). \quad (16)$$

Из условий, налагаемых на функцию $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$, и из рассуждений, следующих за формулой (8) разд. 1.2, вытекает, что $\sigma(\mathbf{v})$ зависит только от скаляра $v = |\mathbf{v}|$. А так как скаляры r и v не меняются при ортогональном преобразовании, мы заключаем, что Θ коммутирует с σ .

Остается рассмотреть лишь интегральный член оператора B . Мы должны показать, что

$$\begin{aligned} \Theta \int d^3v' v' \sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega, r) \psi(v' \Omega', \mathbf{r}, t) = \\ = \int d^3v' v' \sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega, r) \{\Theta \psi(v' \Omega', \mathbf{r}, t)\}, \end{aligned} \quad (17a)$$

или

$$\begin{aligned} \int d^3v' v' \sigma(v', v, \Omega' \cdot O^{-1}\Omega, r) \psi(v' \Omega', O^{-1}\mathbf{r}, t) = \\ = \int d^3v' v' \sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega, r) \psi(v' O^{-1}\Omega', O^{-1}\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (17b)$$

Тождественность обеих частей формулы (17b) легко установить, если заметить, что $(\Omega' \cdot O^{-1}\Omega) = (O\Omega') \cdot \Omega$, поскольку для любых двух векторов \mathbf{A} и \mathbf{B} величина $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ является скалярным инвариантом, так что $(O\mathbf{A}) \cdot (O\mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$. Тогда левую часть формулы (17b) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \int d^3v' v' \sigma(v', v, O\Omega' \cdot \Omega, r) \psi(v' \Omega', O^{-1}\mathbf{r}, t) = \\ = \int d^3v' v' \sigma(v', v, \Omega'' \cdot \Omega, r) \psi(v' O^{-1}\Omega'', O^{-1}\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (18)$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (18), получается заменой переменной $O\Omega' = \Omega''$ с учетом того, что якобиан любого ортогонального преобразования равен единице. Так как правые части формул (17b) и (18) совпадают, то теорема 3 доказана.

Из теоремы 3 вытекает

Следствие. Если функция $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ и граничные условия инвариантны относительно вращений и если $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ и $\sigma(\mathbf{v}', \mathbf{r})$ зависят лишь от координаты x_i и длины вектора ρ в плоскости, перпендикулярной x_i , то оператор B коммутирует с операторами поворота вокруг оси x_i .

Всюду в этой книге мы будем предполагать, что функция $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ инвариантна относительно вращений.

Теперь применим теоремы 1, 2, 3 и их следствия к некоторым специальным видам симметрии, часто встречающимся в практических приложениях.

А. Плоская симметрия

Плоская симметрия означает, что функции $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ и $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ зависят лишь от одной пространственной координаты, скажем, z (этот случай мы обсуждали в примере 2, следующим за теоремой 2), а зависимость функции q от угла выражается только через $\mu \equiv \Omega \cdot \mathbf{z}$. Более того, все граничные условия должны зависеть только от z и μ (см. пояснение, следующее за теоремой 1).

В примере 2 мы уже показали, что $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(z, \mathbf{v}, t)$. Пользуясь следствием теоремы 3, заключаем, что оператор B коммутирует с оператором R_z поворота вокруг оси z . Поэтому, согласно теореме 1,

$$B\psi(z, R_z^{-1}\mathbf{v}, t) = q(z, R_z^{-1}\mathbf{v}, t). \quad (19)$$

По предположению, $q(z, \mathbf{v}, t) = q(z, v, \mu, t)$, так что

$$q(z, R_z^{-1}\mathbf{v}, t) = q(z, \mathbf{v}, t). \quad (20)$$

Но тогда

$$\psi(z, R_z^{-1}\mathbf{v}, t) = \psi(z, \mathbf{v}, t), \quad (21)$$

или

$$\psi(z, \mathbf{v}, t) = \psi(z, v, \mu, t). \quad (22)$$

Это означает, что фазовая плотность зависит только от z и угла между направлением Ω и осью z . Поскольку в этом случае $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$, уравнение переноса принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(z, v, \mu, t)}{\partial t} + v\mu \frac{\partial\psi}{\partial z} + v\sigma(z, v)\psi = \\ = q(z, v, \mu, t) + \int d^3v' v' \sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega, z) \psi(z, v', \mu', t). \end{aligned} \quad (23)$$

В некоторых задачах с плоской симметрией сечения оказываются симметричными относительно некоторой xy -плоскости (пусть это будет плоскость $z = 0$), так что $\sigma(z) = \sigma(-z)$. Тогда оператор B коммутирует с оператором A_z отражения в плоскости $z = 0$ и по теореме 1

$$B\psi(-z, v, -\mu, t) = q(-z, v, -\mu, t). \quad (24)$$

В частности, если источник также симметричен относительно плоскости $z = 0$, то

$$q(-z, v, -\mu, t) = q(z, v, \mu, t), \quad (25)$$

откуда следует, что в этом случае

$$\psi(-z, -\mu) = \psi(z, \mu). \quad (26)$$

В. Сферическая симметрия

Сферическая симметрия означает, что все точки сферы радиуса r с центром в начале координат эквивалентны. Таким образом, если R — оператор поворота вокруг начала координат, то

$$RB = BR, \quad (27a)$$

$$Rq = q \quad (27b)$$

и граничные условия инвариантны относительно операции поворота R . Поэтому из следствия теоремы 1 получаем

$$R\psi = \psi. \quad (28)$$

Как мы видели, соотношение (27a) будет выполнено, если $\sigma(\mathbf{r}, v)$ и $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ будут функциями скаляра r (что касается зависимости от скоростей, то по-прежнему предполагается, что $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega)$). Из формулы (27b) вытекает, что

$$q(R^{-1}\mathbf{r}, R^{-1}\mathbf{v}, t) = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (29)$$

Это возможно только тогда, когда q зависит лишь от r и $\mu_r \equiv \Omega \cdot \mathbf{r}$ (только эти две величины являются теми скалярами, которые можно образовать из векторов Ω и \mathbf{r}). Точно так же граничное условие должно зависеть лишь от r и μ_r . Из равенства (28) видно, что тем же свойством должна обладать и функция $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, т. е.

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(r, v, \mu_r, t). \quad (30)$$

Поэтому фазовая плотность зависит только от расстояния до начала координат и от угла между радиусом-вектором и вектором скорости.

Комбинируя полученные выше результаты и пример 1 для однородной изотропной бесконечной среды с изотропным источником, получаем

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, v, \Omega, t) = G\left(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \Omega}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, v, t\right). \quad (31)$$

С. Цилиндрическая симметрия

В случае *цилиндрической симметрии* функции $\sigma(\mathbf{r}, v)$, $\sigma(v', v, \Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r})$ и $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ зависят лишь от пространственной координаты η , представляющей собой расстояние от точки \mathbf{r} до оси симметрии (в качестве которой выберем ось z). Кроме того, зависимость функции q от направления скорости возможна лишь через величину $\mu = \Omega \cdot \hat{\mathbf{z}}$ ¹⁾. (Аналогичные утверждения справедливы и для

¹⁾ А также через величину $\varphi_\eta - \varphi_\Omega$ (см. ниже, например, формулу (35)).—

граничных условий.) В этом случае из теоремы 3 и ее следствия вытекает, что

$$T_z B = B T_z \quad (32a)$$

и

$$R_z B = B R_z. \quad (32b)$$

Кроме того,

$$T_z q = q \quad (33a)$$

и

$$R_z q = q. \quad (33b)$$

В силу следствия теоремы 1 тогда

$$T_z \psi = \psi \quad (34a)$$

и

$$R_z \psi = \psi. \quad (34b)$$

Формулы (34) означают, что функция ψ может зависеть лишь от тех комбинаций η , z и Ω , которые инвариантны относительно T_z и R_z .

а) Из (34a) следует, что функция ψ не зависит от z .

б) Из (34b) видно, что ψ может зависеть лишь от скаляров η , μ и $\Omega_\eta \cdot \hat{\eta}$, где Ω_η — проекция вектора Ω на плоскость, содержащую вектор η и перпендикулярную оси z .

Поскольку угол между векторами Ω_η и $\hat{\eta}$ можно представить в виде разности $\varphi_\eta - \varphi_\Omega$, где φ_η и φ_Ω — азимутальные углы векторов η и Ω , то в случае цилиндрической симметрии

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(\eta, \nu, \mu, \varphi_\eta - \varphi_\Omega, t). \quad (35)$$

Дальнейшие свойства симметрии функции $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ определяются дополнительными свойствами симметрии функции $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Предположим, например, что функция q изотропна. Тогда q будет инвариантной относительно операции отражения A_z в плоскости $z = 0$, и так как B и A_z коммутируют, то

$$\psi(-\mu) = \psi(\mu). \quad (36)$$

Более того, B будет коммутировать с любым оператором A_i отражения в плоскости, содержащей ось z . Отсюда (благодаря тому, что $A_i q = q$) получаем

$$\psi(\varphi_\eta - \varphi_\Omega) = \psi(\varphi_\Omega - \varphi_\eta), \quad (37)$$

поскольку действие такого отражения сводится к замене $\varphi - \varphi'$ на $\varphi' - \varphi$.

Таковы основные выводы из трансформационных свойств решений уравнения переноса. На протяжении всей книги мы будем время от времени пользоваться ими и другими подобными фактами. В частности, результаты, перечисленные в пунктах А, В и С, используются в приложении В, где построены разложе-

ния в ряды по сферическим гармоникам фазовой плотности в различных геометриях, а также в приложении С, где описаны распределения нейтронов в бесконечной среде от изотропных нейтронных источников различной формы.

2.2. Односкоростное приближение

Большая часть этой книги посвящена изучению односкоростных задач теории переноса нейтронов. В этих задачах предполагается, что в среднем скорость нейтрона не меняется в акте столкновения, так что функцию $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) = \sigma(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v) \frac{\delta(v - v')}{v^2}. \quad (1)$$

Отсюда (см. формулу (8) разд. 1.2)

$$\sigma(\mathbf{r}, v) c(\mathbf{r}, v) = \int d\Omega \sigma(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v) = \int d\Omega' \sigma(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v). \quad (2)$$

Отметим, что формула (1) неявно содержит предположение о том, что $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ зависит лишь от угла между направлениями \mathbf{v} и \mathbf{v}' . Это предположение приводит к инвариантности $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ относительно вращений в пространстве скоростей (последнее вытекает из формулы (2)).

Хотя предположение о постоянстве скорости нейтрона в акте столкновения может показаться довольно жестким ограничением, тем не менее односкоростное уравнение переноса имеет обширные практические приложения. Проинтегрируем, например, уравнение переноса (уравнение (3) разд. 1.3) по v в пределах от $v_1 = |\mathbf{v}_1|$ и $v_2 = |\mathbf{v}_2|$. Мы получим уравнение для функции

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \int_{v_1}^{v_2} v^2 dv \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (3)$$

Это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + \bar{v} \Omega \cdot \nabla \psi + \overline{v \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \psi = \\ = q(\mathbf{r}, \Omega, t) + \int d\Omega' \psi(\mathbf{r}, \Omega' \cdot t) \overline{\sigma(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v)} v. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь функция $q(\mathbf{r}, \Omega, t)$ связана с $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ соотношением, аналогичным соотношению (3), а черта сверху обозначает усреднение по «нейтронному спектру» (который описывается зависимостью ψ от \mathbf{v} при фиксированных \mathbf{r} и t). Эта процедура усреднения не является точной, за исключением случая, когда все сечения не зависят от скорости нейтрона¹⁾. Однако в основе некоторых

¹⁾ По этой причине односкоростное приближение иногда называют «приближением постоянного сечения» (см., например, [7]).

приближенных методов лежит предположение о том, что можно подобрать подходящий нейтронный спектр, при котором уравнение (4) дает разумное описание пространственного, углового и временного поведения ψ . Таково многогрупповое приближение, часто используемое для расчета ядерных реакторов.

Для нас односкоростное приближение интересно по двум причинам. Во-первых, оно часто позволяет найти точные решения уравнения переноса в замкнутой форме, что в общем случае получить не удастся. Во-вторых, как уже отмечалось, оно имеет практические приложения. Вопрос же о выборе подходящих усредненных сечений для односкоростного уравнения очень сложен и в настоящей книге обсуждаться не будет.

Заметим, далее, что в случае чисто поглощающей среды ($c = 0$) (этот случай исследуется в гл. 3) уравнение (4) является точным, так как в акте столкновения рассеянные нейтроны отсутствуют вовсе. Таким образом, односкоростное уравнение имеет еще одно приложение.

В дальнейшем нам удобнее будет рассматривать функцию $f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v)$, связанную с функцией $\sigma(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v)$ соотношением

$$f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v) = \frac{\sigma(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v)^{1/2}}{c(\mathbf{r}, v) \sigma(\mathbf{r}, v)^{1/2}}. \quad (5)$$

Из формулы (2) видно, что $f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v)$ нормирована на единицу. Теперь односкоростное уравнение переноса принимает вид²⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + v \Omega \cdot \nabla \psi - v \sigma(\mathbf{r}, v) \psi = \\ = q(\mathbf{r}, \Omega, t) + v \sigma(\mathbf{r}, v) c(\mathbf{r}, v) \int \psi(\mathbf{r}, \Omega', t) f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}, v) d\Omega'. \end{aligned}$$

Здесь всюду опущена черта сверху над усредненными величинами. В дальнейшем (за исключением гл. 3, в которой односкоростное приближение является точным) об этом следует помнить. Зависимость от переменной v функций σ , c и f (а поэтому и ψ) нужно понимать как параметрическую зависимость от \bar{v} . В дальнейшем мы, как правило, не будем явным образом указывать эту зависимость.

2.3. Единственность и граничные условия

Для решения уравнения переноса, очевидно, необходимо задать как начальное распределение нейтронов в момент времени $t = 0$, так и плотность источников нейтронов во всем пространстве. Тогда можно получить полное решение.

¹⁾ С этой функцией, обозначенной прежде через $f(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$, мы уже сталкивались в разд. 1.2.

²⁾ Если бы мы не предполагали инвариантности относительно вращения в пространстве скоростей, то σ и c были бы функциями переменной Ω' и их нельзя было бы вынести за знак интеграла.

Однако решения, полученные таким образом, в некотором смысле *слишком* полны. На практике представляет интерес распределение нейтронов лишь в ограниченной области пространства. В общем случае существует множество различных распределений источников, приводящих к одному и тому же распределению нейтронов внутри заданной области, но к различным распределениям вне ее. Поэтому было бы желательно найти общий метод, позволяющий сводить все такие задачи с различным распределением к какой-то одной задаче, поскольку все они с практической точки зрения представляют собой одну и ту же задачу.

Кроме того, заметим, что в достаточном удалении от интересующей нас области находится вакуум. В следующей главе мы покажем, что для вакуума решение уравнения переноса строится совершенно тривиально. Поэтому хотелось бы избавиться от необходимости каждый раз решать тривиальную часть задачи.

Искомая возможность упрощения содержится в следующей теореме, которая здесь доказана в односкоростном приближении в предположении об инвариантности функции $\sigma(\Omega' \rightarrow \Omega)$ относительно вращения. В приложении D это доказательство распространяется на общий случай.

Теорема единственности. Фазовая плотность нейтронов в заданном объеме пространства V , ограниченном поверхностью S , единственным образом определяется начальным значением фазовой плотности в объеме V , источниками внутри V и распределением излучения, падающего на S извне.

Ради простоты докажем сначала теорему для случая $c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq 1$, $\mathbf{r} \in V$, а затем распространим доказательство на более общий случай.

Доказательство для случая $c \leq 1$. Пусть ψ_1 и ψ_2 — два решения уравнения переноса, удовлетворяющие заданным условиям. Тогда функция $\Psi = \psi_1 - \psi_2$ внутри V удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + v\Omega \cdot \nabla \Psi + v\sigma \Psi = v\sigma(\mathbf{r})c(\mathbf{r}) \int \Psi(\mathbf{r}, \Omega', t) f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) d\Omega' \quad (1a)$$

с начальным условием

$$\Psi(\mathbf{r}, \Omega, 0) = 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad (1b)$$

и граничным условием

$$\Psi(\rho, \Omega, t) = 0, \quad \rho \in S, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \Omega < 0, \quad (1c)$$

где \mathbf{n}_0 — внешняя нормаль к поверхности S . Покажем, что $\Psi \equiv 0$, $\mathbf{r} \in V$. Умножим уравнение (1a) на $\Psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ и про-

интегрируем его по t от 0 до t_0 по объему V и по всем Ω :

$$\begin{aligned} \int d^3r d\Omega \frac{1}{2} \{ \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t_0) - \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, 0) \} = \\ = - \int_0^{t_0} dt \int d\Omega \int dS n_0 \cdot \Omega \frac{1}{2} \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t) v - \\ - \int_0^{t_0} dt \int d\Omega \int d^3r v \sigma \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t) \\ + \int_0^{t_0} dt \int d\Omega \int d^3r \int d\Omega' v \sigma(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \Omega, t) \Psi(\mathbf{r}, \Omega', t). \quad (2) \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (2) получается с помощью теоремы Гаусса. Далее, из равенства $\Psi(\mathbf{r}, \Omega, 0) = 0$ (условие (1b)) следует, что в левой части уравнения (2) стоит выражение

$$\int d^3r d\Omega \frac{1}{2} \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t_0), \quad (3)$$

неотрицательное, поскольку Ψ — действительная функция. Покажем, что правая часть уравнения (2), напротив, всюду неположительна. (В этом существо доказательства.)

Для начала заметим, что первое слагаемое в правой части уравнения (2) заведомо неположительно, так как функция $\Psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ обращается в нуль при $\mathbf{n}_0 \cdot \Omega < 0$ (условие (1c)).

Рассмотрим последнее слагаемое в правой части уравнения (2). Для того чтобы оценить это слагаемое, заметим, что

$$\iint d\Omega d\Omega' [\Psi(\mathbf{r}, \Omega', t) - \Psi(\mathbf{r}, \Omega, t)]^2 f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \geq 0. \quad (4)$$

Возводя в квадрат и учитывая, что функция $f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r})$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) d\Omega' = \int f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) d\Omega = 1, \quad (5)$$

записываем неравенство (4) в виде

$$\int d\Omega \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t) \geq \iint d\Omega d\Omega' \Psi(\mathbf{r}, \Omega', t) f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (6)$$

Таким образом, третье слагаемое в правой части уравнения (2) не превосходит величины

$$\int_0^{t_0} dt \int d^3r c(\mathbf{r}) v \sigma(\mathbf{r}) \int \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t) d\Omega. \quad (7)$$

Объединяя второе и третье слагаемые в правой части уравнения (2), получаем, что правая часть не превосходит

$$-\int_0^{t_0} dt \int d\Omega \int dS \mathbf{n}_0 \cdot \Omega \frac{1}{2} \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t) - \\ - \int_0^{t_0} dt \int d\Omega \int d^3r [1 - c(\mathbf{r})] \nu \sigma(\mathbf{r}) \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t). \quad (8)$$

Как уже отмечалось, первое слагаемое в (8) неположительно. То же самое верно и относительно второго слагаемого, так как мы предположили, что $c(\mathbf{r}) \leq 1$.

Таким образом, вся сумма в правой части равенства (2) неположительна, в то время как левая часть неотрицательна. Следовательно, обе части равенства (2) равны нулю. В частности,

$$\frac{1}{2} \int d^3r d\Omega \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega, t_0) = 0.$$

Интегрирование здесь проводится по всем $\mathbf{r} \in V$ и по всем Ω . Так как подинтегральная функция Ψ^2 для всех значений переменных интегрирования неотрицательна, то

$$\Psi(\mathbf{r}, \Omega, t_0) \equiv 0, \quad \mathbf{r} \in V, \quad \Omega \text{ любое.} \quad (9)$$

Для завершения доказательства теоремы остается вспомнить, что t_0 — произвольное неотрицательное число.

Условия теоремы единственности, кроме условия $c(\mathbf{r}) \leq 1$, интуитивно ясны. К счастью, это ограничение легко снимается. Действительно, пусть

$$c(\mathbf{r}) \leq M < \infty, \quad \mathbf{r} \in V.$$

Полагая снова, что $\Psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ есть разность двух решений, введем новую функцию

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = e^{-\nu t} \Psi(\mathbf{r}, \Omega, t),$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t)}{\partial t} + \nu \Omega \cdot \nabla \Phi + \nu [\sigma(\mathbf{r}) + \gamma] \Phi(\mathbf{r}, \Omega, t) = \\ = \nu c(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \int \Phi(\mathbf{r}, \Omega', t) f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) d\Omega' \quad (10)$$

и тем же самым граничным условиям, что и функция $\Psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ (т. е. условиям (1b) и (1c)). С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, находим, что

$$\frac{1}{2} \int d^3r \int d\Omega \Phi^2(\mathbf{r}, \Omega, t_0) = -\frac{\nu}{2} \int_0^{t_0} dt \int d\Omega \int dS \mathbf{n}_0 \cdot \Omega \Phi^2(\mathbf{r}, \Omega, t) - \Lambda, \quad (11)$$

где

$$\Lambda \geqslant \nu \int_0^{t_0} dt \int d^3r \{ \sigma(r) [1 - c(r)] + \gamma \} \int d\Omega \Phi^2(r, \Omega, t). \quad (12)$$

Ясно, что если γ достаточно велико, то $\Lambda \geqslant 0$. Таким образом, теорема доказана для всех $c < \infty$ и $t < \infty$, поскольку из равенства $\Phi(r, \Omega, t) = 0$ следует, что $\Psi(r, \Omega, t)$ также обращается в нуль для всех $t < \infty$.

2.4. Граничные условия и поверхностные источники

Из результатов предыдущего раздела нам известно, что для однозначного определения функции распределения нейтронов внутри области V нужно кроме начального значения функции $\psi(r, \Omega, t)$ знать также и функцию распределения падающих на границу S нейтронов для любого времени t , т. е. функцию $\psi(r, \Omega, t)$ при $\Omega \cdot n_0 \leqslant 0$ (n_0 — внешняя нормаль). (Если бы теорема единственности не была доказана, мы не смогли бы утверждать, что задание функции распределения падающего извне нейтронного излучения достаточно для определения решения внутри V . Например, можно было бы думать, что функция распределения *выходящего* излучения также должна быть задана.)

Иными словами, если нас интересует функция распределения нейтронов внутри V , то источники, находящиеся вне объема V , можно заменить излучением, падающим на границу S по специально подобранному закону.

Иногда, вместо того чтобы задавать в качестве граничного условия функцию распределения падающего потока нейтронов, бывает удобно задать распределение источников на поверхности S , приводящее к тому же самому распределению нейтронов внутри V . Такая поверхностная плотность источников, $q_s(r, v, t)$, определяется как число нейтронов скорости v , испускаемых в единицу времени на единицу площади поверхности S , и связана с (объемной) фазовой плотностью источников q соотношением

$$q(r, v, t) = q_s(r, v, t) \delta(x), \quad (1)$$

где x — расстояние от S вдоль нормали к поверхности в точке r . Чтобы связать плотность поверхностных источников с граничным условием, введем поверхностные источники в само уравнение переноса. Обозначим имеющиеся объемные источники через q .

В окрестности поверхности введем наряду с координатой x в направлении внешней нормали n_0 координаты y и z в направлениях \hat{t}_y и \hat{t}_z , касательных к поверхности S (начало координат

расположим на S). Уравнение переноса в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} - \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}_y \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{t}}_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \nu \sigma \psi = \\ = q_s \delta(x) + q + \int \nu' \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) \sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) d^3 v'. \quad (2)$$

Пропинтегрируем это уравнение по x от $-\varepsilon$ до ε и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$; тогда

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 [\psi_+ - \psi_-] = q_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (3)$$

где ψ_{\pm} — значения фазовой плотности на положительной и отрицательной сторонах поверхности S . (Положительная сторона поверхности S находится на бесконечно малом расстоянии вне объема, отрицательная сторона — на бесконечно малом расстоянии внутри.) Так как $\mathbf{v}\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, то поверхностный источник порождает скачок нормальной компоненты тока, причем величина скачка равна величине поверхностного источника. (Мы будем называть условие (3) *условием скачка* для поверхностного источника.)

Для того чтобы использовать полученный результат, рассмотрим две задачи:

а) Вычисление нейтронной плотности в объеме V , если заданы распределение q объемных источников внутри V и фазовая плотность падающего нейтронного потока $\psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$.

б) Вычисление нейтронной плотности в объеме V , если заданы то же самое распределение объемных источников и распределение поверхностных источников q_s при отсутствии падающего извне потока нейтронов.

В задаче б) функция распределения нейтронов будет той же, что и в задаче а), если поверхностные источники q_s будут выбраны так, что ими можно будет заменить поток падающих извне нейтронов, о котором говорится в задаче а).

Из условия (3) видно, что для этого нужно положить

$$q_s = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 < 0. \quad (4)$$

Разумеется, и обратно, поверхностный источник можно заменить потоком извне с помощью условия скачка. Таким образом, можно выбирать между этими двумя эквивалентными возможностями в зависимости от конкретных обстоятельств.

2.5. Стационарная задача: единственность и связь с нестационарной задачей

В некоторых случаях требуется найти решения уравнения переноса, постоянные во времени в некоторой области пространства V . Например, если источники нейтронов стационарны во

всем пространстве, или, что то же самое, если стационарны и источники внутри V и распределение падающих извне нейтронов, можно ожидать, что стационарное уравнение переноса

$$\begin{aligned} \nu \Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega) + \nu \sigma(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = q(\mathbf{r}, \Omega) + \nu \sigma(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) \int d\Omega' \psi(\mathbf{r}, \Omega') f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \end{aligned} \quad (1)$$

разрешимо.

То, что решение этого уравнения действительно существует, показывает

Теорема. Если $c(\mathbf{r}) < 1$ всюду в области V , то стационарное распределение нейтронов внутри V однозначно определяется стационарными источниками в области V и стационарным распределением падающих извне нейтронов.

Доказательство проводится точно так же, как доказательство теоремы единственности в разд. 2.3¹⁾ для случая $c \leq 1$, с той лишь разницей, что опускается интегрирование по t . Итак, допустим, что ψ_1 и ψ_2 — два решения уравнения (1). Интегрируя уравнение для функции $\Psi \equiv \psi_1 - \psi_2$ по объему V и по Ω , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int dS \int d\Omega n_0 \cdot \Omega \nu \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega) + \int d^3r \int d\Omega \nu \sigma(\mathbf{r}) \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = \int \int d\Omega d\Omega' \int d^3r c(\mathbf{r}) \nu \sigma(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r}, \Omega) f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \Psi(\Omega', \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя те же приемы, что и в разд. 2.3, можно из соотношения (2) вывести неравенство

$$\frac{1}{2} \int d\Omega \int dS n_0 \cdot \Omega \nu \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega) + \int d^3r \int d\Omega [1 - c(\mathbf{r})] \nu \sigma(\mathbf{r}) \Psi^2(\mathbf{r}, \Omega) \leq 0. \quad (3)$$

А так как при $c(\mathbf{r}) \leq 1$ оба слагаемых в (3) неотрицательны, то

$$\Psi(\mathbf{r}, \Omega) = 0, \quad \mathbf{r} \in V,$$

чем и завершается доказательство теоремы.

В случае $c(\mathbf{r}) > 1$ единственности решения нет, и это не должно вызывать удивления по следующей причине. Уравнение (1) с $q = 0$ есть однородное уравнение, которое могло бы описывать распределение нейтронов в «односкоростном» реакторе. Доказательство того факта, что это уравнение имеет лишь тривиальное решение при $c < 1$, эквивалентно доказательству того, что состояние реактора не может быть критическим при $c < 1$, что физически вполне разумно. При $c > 1$ состояние реактора может быть

¹⁾ В приложении D это доказательство обобщено также на случай энергетической зависимости.

критическим, так что уравнение (1) может иметь решение. В этом случае неоднородное уравнение переноса может иметь не единственное решение.

Здесь уместно заметить, что следует проявлять определенную осторожность при построении стационарного решения переходом к пределу по времени в решении нестационарной задачи со стационарными источниками и каким-то начальным распределением (иными словами, считая, что при этом начальном распределении источники «включаются» в какой-то момент и затем остаются стационарными). Оказывается, например, что предельное стационарное решение может не существовать, если в начальный момент все нейтроны не были сосредоточены в какой-то ограниченной части пространства.

Иногда оказывается удобным свести нестационарное уравнение переноса к уравнению, которое формально *выглядит* как стационарное. Это можно сделать, если рассмотреть преобразование Лапласа функции $\psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$.

А именно, предположим, что нам нужно найти функцию $\psi(\mathbf{r}, \Omega, t)$ в области V при заданных $q(\mathbf{r}, \Omega, t)$, $\psi(\mathbf{r}, \Omega, 0) = \psi_i$ и ψ_{inc} . Введем преобразования Лапласа:

$$\varphi(\mathbf{r}, \Omega, s) = \int_0^{\infty} \psi(\mathbf{r}, \Omega, t) e^{-st} dt \quad (4a)$$

и

$$\Lambda(\mathbf{r}, \Omega, s) = \int_0^{\infty} q(\mathbf{r}, \Omega, t) e^{-st} dt. \quad (4b)$$

После умножения уравнения переноса (6) разд. 2.2 на e^{-st} и интегрирования по t от 0 до ∞ приходим к уравнению

$$s\varphi(\mathbf{r}, \Omega, s) - \psi_i(\mathbf{r}, \Omega) + \nu\Omega \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, \Omega, s) + \nu\sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}, \Omega, s) = \\ = \nu\sigma(\mathbf{r})c(\mathbf{r}) \int d\Omega' f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, \Omega', s) + \Lambda(\mathbf{r}, \Omega, s). \quad (5)$$

Приводя подобные члены, получаем

$$\nu\Omega \cdot \nabla \varphi + \nu\sigma' \varphi = \nu\sigma' c' \int f(\Omega' \cdot \Omega, \mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}, \Omega', s) d\Omega' + q', \quad (6)$$

где

$$\sigma'(\mathbf{r}) = \sigma(\mathbf{r}) + s/\nu, \quad (7a)$$

$$c'(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})/(1 + s/\sigma(\mathbf{r})\nu) \quad (7b)$$

и

$$q'(\mathbf{r}, \Omega, s) = \Lambda(\mathbf{r}, \Omega, s) + \psi_i(\mathbf{r}, \Omega). \quad (7c)$$

Для того чтобы найти соответствующее граничное условие, нужно взять преобразование Лапласа от граничного условия нестационарного

нарной задачи:

$$\varphi_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \Omega, s) = \int_0^{\infty} \psi_{\text{inc}}(\mathbf{p}, \Omega, t) e^{-st} dt, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 < 0. \quad (7d)$$

Уравнение для φ формально идентично стационарному уравнению переноса (1), в котором произведена замена

$$\sigma, c, q \rightarrow \sigma', c', q'. \quad (8)$$

В частности, величины σ и c меняются так, как если бы сечение истинного поглощения увеличилось на величину s/v , а остальные сечения остались неизменными. По этой причине такое изменение параметров часто называется «временным поглощением»¹⁾. Физический смысл этого явления весьма прост. Рассмотрим, например, случай, когда плотность нейтронов экспоненциально возрастает со временем, т. е.

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega, t) \sim \psi_0(\mathbf{r}, \Omega) e^{\alpha t}. \quad (9)$$

Вклад в функцию распределения нейтронов в точке \mathbf{r} в момент времени t , обусловленный нейтронами, рожденными в точке \mathbf{r}' , определяется плотностью в точке \mathbf{r}' не в момент t , а в момент $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$, поскольку нейтрону со скоростью v требуется время $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/v$ для того, чтобы пройти расстояние $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$.

Таким образом, вклад, обусловленный нейтронами в точке \mathbf{r}' , в функцию распределения нейтронов в точке \mathbf{r} по сравнению со стационарным случаем уменьшается, и это уменьшение описывается множителем $e^{-\alpha/v|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$. Как мы увидим в разд. 3.4, точно такое изменение произойдет в стационарном случае, если увеличить сечение поглощения на величину α/v .

Итак, нестационарные уравнения в общем случае можно формально свести к стационарным уравнениям. Поэтому основное внимание мы будем уделять последним. Следует, однако, подчеркнуть, что указанное сведение является формальным; необходимо произвести еще обращение преобразования Лапласа, что, в общем, чрезвычайно сложно. Кроме того, полученное таким образом уравнение отличается от настоящего стационарного уравнения переноса, в котором функции ψ , σ и c действительны и положительны. В преобразованном уравнении эти величины могут стать какими угодно, в том числе комплексными. Все это будет разъяснено в гл. 7, где нестационарные задачи рассматриваются несколько подробнее.

Хотя вывод «приведенного уравнения» (уравнения (6)) был дан в односкоростном приближении, легко показать, что он осуществим и в общем случае. Мы опустим подробности, так как все построения в общем случае совпадают с проведенными выше.

¹⁾ В оригинале time absorption.— Прим. перев.

2.6. Функции Грина

Для различных приложений решение уравнения переноса с произвольными источниками и граничными условиями удобно представить в виде суперпозиции решений «фундаментальных» задач, т. е. с помощью функций Грина. Мы знаем, что в силу линейности уравнения переноса это сделать можно. В частности, легко доказать следующее утверждение.

Для произвольной области V можно выразить решение уравнения переноса с произвольным источником и любым распределением падающего потока нейтронов через две основные функции Грина: «объемную» функцию Грина и «поверхностную» функцию Грина.

«Объемной» функцией Грина называется решение уравнения переноса, соответствующее единичному мононаправленному источнику при нулевом падающем извне потоке; она обозначается

$$G(\mathbf{r}_0, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega).$$

Таким образом, исходными данными задачи являются

$$q = \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (1a)$$

и

$$\psi_{\text{inc}} = 0,$$

где

$$\psi_{\text{inc}} \equiv \psi(\rho, \Omega), \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 < 0. \quad (1b)$$

Здесь вектор ρ определяет точку на поверхности S области V , а $\delta_2(\Omega \cdot \Omega_0)$ — поверхностная дельта-функция:

$$\delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) = 0, \quad \Omega \neq \Omega_0, \quad (2a)$$

$$\int f(\Omega) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) d\Omega = f(\Omega_0). \quad (2b)$$

(Формула (2b) справедлива при условии, что Ω_0 принадлежит области интегрирования, т. е. если при некотором Ω из области интегрирования $\Omega \cdot \Omega_0 = 1$.) Поверхностная дельта-функция представляет собой в действительности произведение двух обычных дельта-функций Дирака:

$$\delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) = \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (2c)$$

где (μ, φ) и (μ_0, φ_0) — угловые координаты на сфере соответственно векторов Ω и Ω_0 .

Поверхностной функцией Грина, которую мы обозначим через

$$G_s(\rho_s, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega), \quad (3)$$

называется решение уравнения переноса при

$$q = 0 \quad (3a)$$

и

$$\psi_{\text{inc}}(\rho, \Omega) = \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) \delta_s(\rho, \rho_s), \quad \Omega_0 \cdot \mathbf{n}_0 < 0. \quad (3b)$$

Здесь ρ_s определяет некоторую точку на поверхности S области V , а δ_s — двумерная (поверхностная) дельта-функция. Как было показано в разд. 2.4¹⁾, функцию $G_s(\rho_s, \Omega_0 \rightarrow r, \Omega)$ можно определить как решение уравнения переноса с нулевым падающим внешним потоком и плотностью поверхностных источников

$$q_s(\rho, \Omega) = v\delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) \delta_s(\rho, \rho_s) |\Omega \cdot n_0|, \quad \Omega_0 \cdot n_0 < 0. \quad (4)$$

Это дает основание предположить, что достаточно одной объемной функции Грина и нет необходимости вводить поверхностную функцию Грина. В следующем разделе будет показано, что это в самом деле так.

С помощью двух функций Грина можно записать общее решение уравнения переноса при произвольных q и ψ_{inc} :

$$\begin{aligned} \psi(r, \Omega) = & \int_V \int G(r_0, \Omega_0 \rightarrow r, \Omega) q(r_0, \Omega_0) d\Omega_0 d^3r_0 + \\ & + \int_S dS \int d\Omega_s G_s(\rho_s, \Omega_s \rightarrow r, \Omega) \Psi_{\text{inc}}(\rho_s, \Omega_s), \quad \Omega_s \cdot n_0 < 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Тот факт, что функция (5) является решением уравнения переноса, следует непосредственно из его линейности. В самом деле, функция (5) есть просто сумма решений уравнения. Очевидно, она удовлетворяет граничным условиям.

Следует отметить, что в случае, когда однородное уравнение переноса имеет нетривиальные решения в области V , для получения полного решения к функции (5) нужно добавить общее решение однородного уравнения²⁾. Но сами функции Грина определены лишь с точностью до решения однородного уравнения. Поэтому, подходящим образом перестраивая функцию Грина, всегда можно написать общее решение в форме (5).

2.7. Теорема взаимности для односкоростного уравнения переноса

Предполагая, что функция $\sigma(v\Omega' \rightarrow v\Omega)$ инвариантна относительно вращений, можно получить ряд соотношений для решений односкоростного уравнения переноса при различных источниках и граничных условиях³⁾. Эти соотношения, называемые

¹⁾ См. уравнение (2) разд. 2.4 и последующие рассуждения.

²⁾ В предыдущем разделе было, однако, показано, что при $c(r) < 1$ такое решение тождественно равно нулю.

³⁾ Требование инвариантности функции $\sigma(v\Omega' \rightarrow v\Omega)$ относительно вращений палиппе сурово. На самом деле требуется лишь инвариантность относительно обращения времени, т. е. $\sigma(-v\Omega \rightarrow -v\Omega') = \sigma(v\Omega' \rightarrow v\Omega)$. Однако трудно придумать такой непатологический случай, в котором второе требование выполнялось бы, а первое нет.

обычно соотношениями взаимности, дают иногда возможность решать более простую задачу, чем та, которую мы в действительности хотим решить, а затем свести полученное решение к нужному.

Поскольку наши теоремы справедливы только для односкоростных задач (см. [8]), мы не будем явным образом выделять зависимость различных величин от v . Более того, принимая во внимание рассуждения из 2.5 относительно сведения нестационарных задач к стационарным, мы будем заниматься лишь последними.

Все соотношения симметрии, которые мы хотим получить, следуют из простого тождества, которое сейчас будет выведено.

Пусть $\psi^{(1)}$ — единственное решение односкоростного уравнения переноса в области V при заданном источнике $q^{(1)}$ и падающем на поверхность S внешнем потоке $\psi_{\text{inc}}^{(1)}$, т. е.

$$v\Omega \cdot \nabla \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) + v\sigma(\mathbf{r})\psi^{(1)} = v \int \sigma(\Omega' \rightarrow \Omega, \mathbf{r})\psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega')d\Omega' + q^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1a)$$

$$\psi^{(1)}(\rho, \Omega) = \psi_{\text{inc}}^{(1)}, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 < 0.$$

Пусть, далее, $\tilde{\psi}^{(1)}$ — единственное решение уравнения переноса, полученного из (1a) заменой переменных

$$\sigma(\Omega' \rightarrow \Omega, \mathbf{r}) \rightarrow \sigma(-\Omega \rightarrow -\Omega', \mathbf{r}),$$

т. е. уравнения

$$v\Omega \cdot \nabla \tilde{\psi}^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) + v\sigma(\mathbf{r})\tilde{\psi}^{(1)} = v \int \sigma(-\Omega \rightarrow -\Omega', \mathbf{r})\tilde{\psi}^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega')d\Omega' + q^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega), \quad (1b)$$

$$\tilde{\psi}^{(1)}(\rho, \Omega) = \psi_{\text{inc}}^{(1)}, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 < 0.$$

Допустим, что функция σ инвариантна относительно вращений¹⁾:

$$\sigma(-\Omega \rightarrow -\Omega') = \sigma(\Omega' \rightarrow \Omega).$$

Тогда $\psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) = \tilde{\psi}^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega)$ в области V , поскольку функции $\psi^{(1)}$ и $\tilde{\psi}^{(1)}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению с одинаковыми граничными условиями.

Пусть теперь $\psi^{(2)}(\mathbf{r}, \Omega)$ — другое решение уравнения переноса в области V с другим источником $q^{(2)}(\mathbf{r}, \Omega)$ и другим граничным условием $\psi_{\text{inc}}^{(2)}$. Определим функцию $\tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, \Omega)$ аналогично тому, как была определена функция $\tilde{\psi}^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega)$. Сейчас нас будет интересовать функция $\tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega)$, удовлетворяющая уравнению

$$-v\Omega \cdot \nabla \tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) + v\sigma(\mathbf{r})\tilde{\psi}^{(2)} = v \int \sigma(\Omega \rightarrow \Omega')\tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega')d\Omega' + q^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega), \quad (2)$$

$$\tilde{\psi}^{(2)}(\rho, -\Omega) = \psi_{\text{inc}}^{(2)}, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 > 0.$$

¹⁾ См. сноску 3 на стр. 37.

(В интегральном члене мы заменили переменную интегрирования Ω' на $-\Omega'$.) Умножим уравнение (1а) на $\tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega)$, а уравнение (2) на $\psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega)$, проинтегрируем по объему V и всем Ω и вычтем одно уравнение из другого. Для упрощения интегралов от первых слагаемых в левых частях уравнений (1а) и (2) применим теорему Гаусса и получим

$$\begin{aligned} \nu \int_S dS \int d\Omega \Omega \cdot \mathbf{n}_0 \tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = \int_V d^3r \int d\Omega \{ \tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) q^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) - \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) q^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) \} + \\ + \int_V d^3r \nu \int \int d\Omega d\Omega' \{ \tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) \sigma(\Omega' \rightarrow \Omega, \mathbf{r}) \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega') - \\ - \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) \sigma(\Omega \rightarrow \Omega', \mathbf{r}) \tilde{\psi}^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega') \}. \quad (3) \end{aligned}$$

Последний интеграл в уравнении (3) равен нулю. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно в одном из слагаемых в фигурных скобках произвести замену переменных $\Omega \rightleftharpoons \Omega'$. Полученное тождество связывает функции $\psi^{(1)}$ и $\tilde{\psi}^{(2)}$. В частности, если предположить, что функция $\sigma(\Omega' \rightarrow \Omega)$ инвариантна относительно вращений, то $\tilde{\psi}^{(2)} \equiv \psi^{(2)}$, и тождество (3) превращается в

$$\begin{aligned} \nu \int_S dS \int d\Omega \Omega \cdot \mathbf{n}_0 \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) \psi^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) = \\ = \int_V d^3r \int d\Omega \{ q^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) \psi^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) - q^{(2)}(\mathbf{r}, -\Omega) \psi^{(1)}(\mathbf{r}, \Omega) \}. \quad (4) \end{aligned}$$

Это и есть основное соотношение, которое мы искали. Применим теперь тождество к случаю, когда $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ — функции Грина, введенные в разд. 2.6:

$$\psi^{(1)} = G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega), \quad (5a)$$

$$\psi^{(2)} = G(\mathbf{r}_2, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega). \quad (5b)$$

Учитывая граничные условия (формула (1b) разд. 2.6), получаем

$$G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \Omega < 0 \quad (6a)$$

и

$$G(\mathbf{r}_2, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}, -\Omega) = 0, \quad \mathbf{r} \in S, \quad \mathbf{n}_0 \cdot \Omega > 0. \quad (6b)$$

Отсюда следует, что величина, стоящая в левой части тождества (4), равна нулю. Кроме того, поскольку

$$q^{(1)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_1) \quad (7a)$$

и

$$q^{(2)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \delta_2(\Omega, \Omega_2), \quad (7b)$$

тождество (4) сводится к соотношению

$$G(\mathbf{r}_2, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1) = G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, -\Omega_2), \quad (8)$$

или, если заменить Ω_2 на $-\Omega_2$, к соотношению

$$G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, \Omega_2) = G(\mathbf{r}_2, -\Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1). \quad (9)$$

Последнее соотношение представляет собой основную теорему взаимности для односкоростного уравнения переноса. Оно означает, что фазовая плотность в точке \mathbf{r}_2 в направлении Ω_2 , обусловленная точечным источником, расположенным в точке \mathbf{r}_1 ,

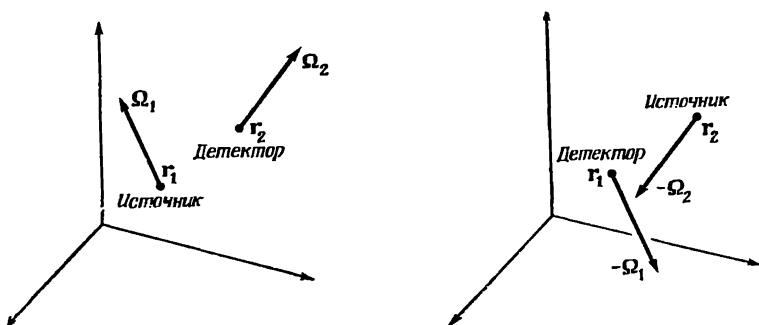


Рис. 2.1. Теорема взаимности для односкоростного уравнения переноса.

и испускающим нейтроны в направлении $+\Omega_1$, совпадает с фазовой плотностью в точке \mathbf{r}_1 в направлении $-\Omega_1$, обусловленной точечным источником, расположенным в точке \mathbf{r}_2 и испускающим нейтроны в направлении $-\Omega_2$ (рис. 2.1).

Из основной теоремы взаимности (тождество (9)) легко вывести ряд следствий. Иногда сами эти следствия называют «теоремами взаимности». Приведем несколько примеров.

Пример 1. Разделив тождество (9) на 4π , проинтегрируем его по Ω_1 . Получим

$$G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, \Omega_1) = (1/4\pi) \rho(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, -\Omega_1). \quad (10)$$

Это означает, что фазовая плотность в точке \mathbf{r}_1 в направлении Ω_1 , обусловленная изотропным источником нейтронов, находящимся в точке \mathbf{r}_2 , равна, умноженной на $(1/4\pi)$ плотности в точке \mathbf{r}_2 , обусловленной мононаправленным точечным источником, находящимся в точке \mathbf{r}_1 и испускающим нейтроны в направлении $-\Omega_1$.

Пример 2. Проинтегрируем (10) по Ω_1 . Получим

$$\rho(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = \rho(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1). \quad (11)$$

Это означает, что плотность нейтронов, обусловленная изотропным точечным источником, симметрична относительно перемены местами источника и точки наблюдения.

Из формулы (9) можно получить и другие соотношения, если умножить ее на различные степени Ω_1 и Ω_2 и затем интегрировать.

Пример 3. Пусть \mathbf{l} — произвольный единичный вектор. Умножим тождество (9) на $\mathbf{l} \cdot \Omega_1$ и проинтегрируем по Ω_1 :

$$\int d\Omega_1 \mathbf{l} \cdot \Omega_1 G(\mathbf{r}_2 \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, \Omega_1) = \int d\Omega_1 \mathbf{l} \cdot \Omega_1 G(\mathbf{r}_1, -\Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, -\Omega_2). \quad (12)$$

Это означает, что ток в точке \mathbf{r}_1 в направлении \mathbf{l} , обусловленный точечным источником, расположенным в точке \mathbf{r}_2 и испускающим нейтроны в направлении Ω_2 , равен фазовой плотности в точке \mathbf{r}_2 в направлении $-\Omega_2$, обусловленной точечным источником, расположенным в точке \mathbf{r}_1 и испускающим нейтроны с угловым распределением $-\mathbf{l} \cdot \Omega_1$.

Применим теперь тождество (4) к поверхностной функции Грина, введенной в разд. 2.6. Положим

$$\psi^{(1)} = G_s(\rho_{1s}, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) \quad (13a)$$

и

$$\psi^{(2)} = G_s(\rho_{2s}, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega). \quad (13b)$$

Так как в этом случае $q^{(1)} = q^{(2)} = 0$ (равенство (3a) разд. 2.6), то

$$v \int_S dS \left\{ \int_{\Omega \cdot \mathbf{n}_0 < 0} d\Omega + \int_{\Omega \cdot \mathbf{n}_0 > 0} d\Omega \right\} \times \\ \times [\Omega \cdot \mathbf{n}_0 G_s(\rho_{1s}, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) G_s(\rho_{2s}, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}, -\Omega)] = 0. \quad (14)$$

($\int_S dS$ означает интегрирование по координате \mathbf{r} , пробегающей поверхность S .) При $\mathbf{n}_0 \cdot \Omega < 0$

$$G_s(\rho_{1s}, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \rho_{1s}) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_1), \quad \mathbf{r} \in S,$$

а при $\mathbf{n}_0 \cdot \Omega > 0$

$$G_s(\rho_{2s}, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}, -\Omega) = \delta(\mathbf{r} - \rho_{2s}) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_2), \quad \mathbf{r} \in S.$$

Подставим эти равенства в соотношение (14):

$$|\mathbf{n}_0 \cdot \Omega_2|_{\Omega_{2s}} G_s(\rho_{1s}, \Omega_1 \rightarrow \rho_{2s}, -\Omega_2) = \\ = |\mathbf{n}_0 \cdot \Omega_1|_{\Omega_{1s}} G_s(\rho_{2s}, \Omega_2 \rightarrow \rho_{1s}, -\Omega_1). \quad (15)$$

Эта формула связывает угловое распределение нейтронов в точке ρ_{2s} , выходящих в направлении $-\Omega_2$, обусловленное пучком нейтронов в точке ρ_{1s} , падающим в направлении $-\Omega_1$, с угловым

распределением нейтронов в точке \mathbf{r}_{1s} , выходящих в направлении $-\Omega_1$, обусловленным пучком нейтронов в точке \mathbf{r}_{2s} , падающим в направлении Ω_2 .

Заметим, что тот же самый результат можно было бы получить из формулы (9), используя полученное ранее соотношение между падающим потоком и поверхностными источниками (разд. 2.4).

Некоторые из перечисленных результатов можно получить из тождества (4), если в качестве одной из функций ψ взять объемную, а в качестве другой — поверхностную функцию Грина. Например, положим

$$\psi^{(1)} = G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) \quad (16a)$$

и

$$\psi^{(2)} = G_s(\mathbf{r}_{2s}, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega). \quad (16b)$$

При этом

$$q^{(1)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_1), \quad (17a)$$

$$q^{(2)} = 0, \quad (17b)$$

$$\psi_{\text{inc}}^{(1)} = 0, \quad (18a)$$

$$\psi_{\text{inc}}^{(2)} = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{2s}) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_2). \quad (18b)$$

Отсюда

$$G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_{2s}, -\Omega_2) = \frac{G_s(\mathbf{r}_{2s}, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1)}{|\mathbf{n}_0 \cdot \Omega_2| \mathbf{e}_{2s}}. \quad (19)$$

Таким образом, если известна поверхностная функция Грина, то известно также и угловое распределение выходящего излучения, обусловленное направленным точечным источником. Кроме того, как мы видим, функция Грина $G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega)$ полностью определяет G_s . Следовательно, для решения всех стационарных задач в области V необходима лишь одна функция Грина, а не две. Как отмечалось в разд. 2.6, это вряд ли может вызвать удивление, если учесть эквивалентность задания падающего потока нейтронов и поверхностных источников. Формулу (19) фактически можно рассматривать как одно из доказательств эквивалентности падающего потока и поверхностных источников. Если умножить (19) на $q_s(\mathbf{r}_s, \Omega) = q(\mathbf{r}, \Omega) \cdot \delta(x)$, то мы сразу же обнаружим, что полученная таким образом функция распределения нейтронов (левая часть) равна соответствующей функции, обусловленной потоком падающих извне нейтронов $q_s/|\mathbf{n}_0 \cdot \Omega|$ (правая часть).

Глава 3

ПЕРЕНОС НЕЙТРОНОВ БЕЗ ВОСПРОИЗВОДСТВА В СОУДАРЕНИЯХ

3.1. Основные предположения

В этой главе мы построим частные решения уравнения переноса, опираясь на его общие свойства, которые обсуждались в гл. 2. Простейший случай описывается уравнением переноса с $\sigma(v' \rightarrow v, r) \equiv 0$ ¹⁾. Тогда $c \equiv 0$, и столкновения просто выводят нейтроны из системы. Этот случай имеет два приложения.

а) Истечение нейтронов в вакуум; при этом вообще нет никаких столкновений.

б) Диффузия нейтронов в чисто поглощающей среде.

Хотя упомянутые задачи являются простейшими, на самом деле они важны, так как благодаря им достигается понимание природы величин, однозначно определяющих распределение нейтронов. Кроме того, представляется возможность ознакомиться с рядом методов, используемых при решении более сложных задач. В частности, мы увидим, как можно применить общие методы, развитые в гл. 2, к простым задачам.

Результаты, полученные в настоящей главе, имеют и самостоятельные практические приложения. Так, при конструировании ядерных реакторов часто сталкиваются с задачей истечения в вакуум. Далее, функцию распределения нейтронов для «чисто поглощающей» среды можно рассматривать как распределение нейтронов, не испытавших соударения, в более общих задачах, когда учитывается также и рассеяние. Например, вероятность выхода из чисто поглощающей среды, вычисленную в этой главе (разд. 3.7), можно сопоставить с вероятностью первого столкновения в рассеивающей и поглощающей среде. Эти величины часто бывает удобно использовать в практических задачах, где учитываются процессы деления, вызванные быстрыми нейтронами, или процессы резонансного захвата. В подобных задачах разумно предположить, что столкновение, сопровождающееся рассеянием, снижает энергию нейтронов до величины ниже пороговой. Наконец, «распределение нейтронов, не испытавших соударения», можно использовать в качестве функции Грина

¹⁾ Эта ситуация настолько проста, что на самом деле можно было бы вовсе не вводить многих приближений и упрощений, описанных в гл. 2.

для более сложных задач, с помощью которой удастся свести дифференциальное уравнение переноса к некоторому интегральному уравнению (разд. 3.6). В определенных случаях это удобно.

Отметим, что поскольку, согласно предположениям, сделанным в этой главе, отсутствуют механизмы, изменяющие скорость нейтронов, односкоростное приближение (разд. 2.2) оказывается точным. Скорость v здесь выступает как параметр и будет опускаться всюду, где это не вызывает недоразумений.

3.2. Истечение в вакуум

В вакууме $\sigma = q = 0$ всюду, и уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = 0. \quad (1)$$

Физическая картина этого процесса ясна. Поскольку столкновения отсутствуют, распространение нейтронов происходит по прямым линиям. Следовательно, нейтрон, обладающий в точке \mathbf{r} скоростью \mathbf{v} в момент времени t , имел ту же самую скорость в точке $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t')$ в момент времени t' .

Аналитически этот результат можно получить, решая уравнение (1). Сделаем замену переменных, положив

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t. \quad (2)$$

Так как ¹⁾

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3)$$

то уравнение (1) можно записать в виде

$$(\partial/\partial t') \psi(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t', \mathbf{v}, t') = 0. \quad (4)$$

Таким образом, функция ψ не зависит от t' , т. е.

$$\psi(\mathbf{r}', \mathbf{v}, t') = \psi(\mathbf{r}', \mathbf{v}, 0). \quad (5)$$

Полагая $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$ и $t' = t$, находим

$$\psi = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0). \quad (6)$$

Это — математическое описание уже ясного с физической точки зрения процесса.

¹⁾ Индексы у оператора ∇ указывают переменные, на которые он действует.

3.3. Перенос нейтронов в чисто поглощающих средах. Общие результаты

Основной результат, полученный в разд. 3.2 (формула (6)), мало содержателен. Он не позволяет выразить функцию распределения нейтронов в области V через функцию распределения внешних источников, или, что то же самое, через функцию распределения нейтронов, падающих извне на поверхность S области V . В настоящем разделе мы дадим общее описание распределения нейтронов во всем пространстве. При этом результат для вакуума можно будет получить предельным переходом $\sigma \rightarrow 0$. Кроме того, если задавать не внешние по отношению к V источники, а распределение падающего на S нейтронного излучения и (или) поверхностные источники, можно упростить выкладки, привлекая результаты разд. 2.3—2.5.

Итак, рассмотрим чисто поглощающую среду, полагая $\sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = 0$. Уравнение переноса принимает вид

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \nu \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (1)$$

Как и в разд. 3.2, введем новые переменные

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t. \quad (2)$$

Уравнение (1) перейдет в уравнение

$$(\partial/\partial t') \psi(\mathbf{r}', \mathbf{v}; t') + \nu \sigma(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t', \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}', \mathbf{v}, t') = q(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t', \mathbf{v}, t'). \quad (3)$$

«Интегрирующим множителем» уравнения (3) является функция

$$\exp \left\{ \int_{t_0}^{t'} \nu \sigma(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t, \mathbf{v}) dt \right\}. \quad (4)$$

Таким образом, мы можем переписать уравнение (3) в виде

$$\begin{aligned} (\partial/\partial t') \left\{ \exp \left[\int_{t_0}^{t'} \nu \sigma(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t, \mathbf{v}) dt \right] \psi(\mathbf{r}', \mathbf{v}, t') \right\} = \\ = \exp \left[\int_{t_0}^{t'} \nu \sigma(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t, \mathbf{v}) dt \right] q(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t', \mathbf{v}, t'). \end{aligned} \quad (5)$$

Проинтегрировав теперь уравнение (5) по t' от 0 до t и положив $\mathbf{r}' + \mathbf{v}t = \mathbf{r}$, найдем

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \exp \left[- \int_0^t \nu \sigma(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau - t), \mathbf{v}) d\tau \right] \psi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0) + \\ + \int_0^t \exp \left[\int_t^{\tau'} \nu \sigma(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau - t), \mathbf{v}) d\tau \right] q(\mathbf{r} - \mathbf{v}(\tau' - t), \mathbf{v}, \tau') d\tau'. \quad (6)$$

(Заметим, что формула (6) приводит к результату предыдущего раздела при $\sigma \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$.) Полученный результат допускает простую физическую интерпретацию.

а) Первый член в правой части равенства (6) описывает нейтроны, которые в момент времени $t = 0$ находились в точке $\mathbf{r} - \mathbf{v}t$ и избежали поглощения при движении в течение времени t вдоль прямой в направлении $\Omega = \mathbf{v}/v$. Ослабление потока описывается экспоненциальным множителем.

б) Второй член в правой части равенства (6) описывает нейтроны, испущенные источником в направлении Ω (с учетом экспоненциального ослабления).

Представляющее особый интерес стационарное уравнение, соответствующее уравнению (6), можно получить путем интегрирования стационарного уравнения переноса (см. разд. 2.5). С другой стороны, как было указано в разд. 2.5, мы можем предположить, что в начальный момент нейтроны заполняли лишь конечную область пространства и что источники, будучи однажды «включенными», остаются далее постоянными во времени. Тогда стационарное уравнение получится из равенства (6) предельным переходом при $t \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что

а) в каждой точке конечной области первый член в правой части равенства (6) обращается в нуль;

б) второй член в правой части равенства (6) при $t \rightarrow \infty$ после замены переменных $R \equiv (t - \tau')$ и $R' \equiv (t - \tau)$ дает

$$\psi(\mathbf{r}, \nu\Omega) = \int_0^\infty \frac{q(\mathbf{r} - R\Omega, \nu\Omega)}{\nu} \exp \left[- \int_0^R \sigma(\mathbf{r} - R'\Omega, \mathbf{v}) dR' \right] dR. \quad (7)$$

Удобно выразить экспоненту, фигурирующую в формуле (7), через новую величину $\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \mathbf{v})$, где

$$\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}) = \int_0^R \sigma(\mathbf{r} - s(\mathbf{R}/R), \mathbf{v}) ds. \quad (8)$$

Эта величина называется *оптической толщиной* между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' для нейтронов скорости \mathbf{v} и характеризует ослабление

пучка нейтронов на пути от точки \mathbf{r} до точки \mathbf{r}' . Если σ не зависит от пространственных координат, то

$$\alpha = \sigma(\mathbf{v}) R = R/l(\mathbf{v}), \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|. \quad (9)$$

В этом случае α есть расстояние между точками \mathbf{r} и \mathbf{r}' , измеренное в единицах длины среднего свободного пробега нейтронов. После введения функции α формула (7) принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}, \nu\Omega) = \frac{1}{\nu} \int_0^\infty q(\mathbf{r} - R\Omega, \nu\Omega) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R\Omega, \nu)] dR. \quad (10)$$

Для дальнейшего интеграл в формуле (10) будет удобно представить в виде объемного интеграла. С этой целью введем новую переменную

$$\Omega_R \equiv R/R. \quad (11)$$

Тогда формулу (10) можно формально переписать в виде $\psi(\mathbf{r}, \nu\Omega) =$

$$= \frac{1}{\nu} \int d\Omega_R \delta_2(\Omega \cdot \Omega_R) \int_0^\infty q(\mathbf{r} - R, \Omega_R \nu) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R, \nu)] dR. \quad (12)$$

где через δ_2 обозначена поверхностная дельта-функция, введенная в разд. 2.6. Учитывая, что

$$d^3R = R^2 dR d\Omega_R, \quad (13)$$

перепишем выражение (12) в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \nu\Omega) = \frac{1}{\nu} \int \frac{d^3\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} q\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \nu\right) e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \nu)} \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right), \quad (14)$$

где интегрирование производится по всему пространству. Формулы (10) и (14) являются основными формулами, которые будут использоваться для описания распределения нейтронов в чисто поглощающих средах.

3.4. Приложение общих результатов к задаче о стационарном истечении в вакуум

Используя формулы (10) и (14) предыдущего раздела, мы теперь легко сможем получить выражения для функции распределения нейтронов в различных задачах. В качестве первого приложения рассмотрим случай, когда поверхностные источники $q_s(\mathbf{r}, \Omega)$ заданы на поверхности S объема V , заполненного вакуум

мом. В этом случае $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v}) = 0$ при $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in V$ (включая поверхность S). Формула (10) принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{v} \int_0^\infty q_s(\mathbf{r} - R\Omega, \Omega) \delta(x) dR. \quad (1)$$

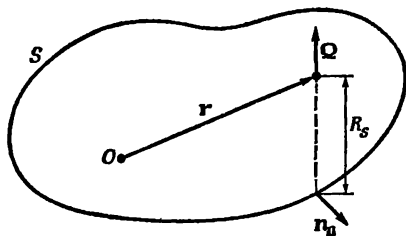
(Здесь мы воспользовались уравнением (1) разд. 2.4.) Так как R измеряется вдоль направления $-\Omega$, а x — расстояние вдоль нормали к поверхности (т. е. вдоль направления \mathbf{n}_0), то

$$\left| \frac{dR}{dx} \right| = \frac{1}{|\Omega \cdot \mathbf{n}_0|}. \quad (2)$$

Подставив якобиан (2) в уравнение (1) и проинтегрировав его по x , найдем

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{v} \frac{q_s(\mathbf{r} - R_s\Omega, \Omega)}{|\Omega \cdot \mathbf{n}_0|}. \quad (3)$$

Через R_s здесь обозначено значение R при $x = 0$, т. е. расстояние от точки \mathbf{r} до поверхности S , измеренное вдоль направления $-\Omega$ (рис. 3.1). При этом предполагается, что линия, проведенная



Р и с. 3.1. Поверхностный источник в вакууме

из точки \mathbf{r} в направлении $-\Omega$, пересекает поверхность S лишь в одной точке, как это происходит, например, в случае выпуклых поверхностей. Иначе в правой части равенства (3) должно быть несколько слагаемых указанного вида.

Если задана функция распределения $\psi_{\text{inc}}(\rho, \Omega)$ падающих на поверхность нейтронов (вместо $q_s(\mathbf{r}, \Omega)$), то из формулы (3) и из связи, существующей между функцией распределения падающих нейтронов и поверхностными источниками (формула (4) разд. 2.4), следует достаточно очевидный результат ¹⁾:

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \psi_{\text{inc}}(\mathbf{r} - R_s\Omega, \Omega). \quad (4)$$

¹⁾ В это выражение, конечно, дает вклад только точка на поверхности S , ближайшая к точке \mathbf{r} в направлении $-\Omega$.

В качестве характерных примеров рассмотрим следующие случаи.

а) Функция $\psi_{\text{inc}}(\rho, \Omega)$ не зависит от положения точки на поверхности S^1 , т. е. $\psi_{\text{inc}}(\rho, \Omega) = f(\Omega)$. Тогда из уравнения (4) получаем

$$\psi(r, \Omega) = f(\Omega). \quad (5)$$

Следовательно, функция распределения нейтронов постоянна во всей области V .

б) Случай сферической симметрии. В этом случае, как выяснено в разд. 2.1, функция ψ зависит только от $r = |\mathbf{r}|$ и $\mu_r = (\Omega \cdot \mathbf{r})/r$. (Ясно, что начало отсчета должно быть совмещено с центром симметрии.) Тогда

$$\psi(r, \Omega) = (1/2\pi) n(r, \mu_r). \quad (6)$$

(Нормирующий множитель $1/2\pi$ введен для удобства.)

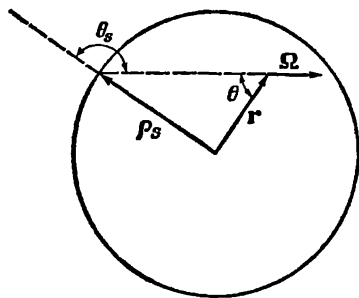
Далее, пространственная плотность нейтронов равна

$$\rho(r) = \int_{-1}^1 n(r, \mu_r) d\mu_r \quad (7a)$$

а ток —

$$\mathbf{J}(r) = (\mathbf{r}/r) v \int_{-1}^1 \mu_r n(r, \mu_r) d\mu_r, \quad (7b)$$

поскольку, как нетрудно видеть, у функции \mathbf{J} отлична от нуля лишь радиальная компонента (см. приложение В).



Р и с. 3.2. К вычислению фазовой плотности внутри шара.

Пусть нейтронное излучение падает на поверхность шара радиуса a . Используем полученные выше результаты для определения фазовой плотности внутри шара (рис. 3.2).

¹⁾ Например, в случае направленного пучка нейтронов, падающего на поверхность S .

Если распределение падающего извне излучения есть $n_{\text{inc}}(\mu_s)$ (где $\mu_s = \cos \theta_s$), то из (4) следует, что

$$n(r, \mu_r) = n_{\text{inc}}[\mu_s(r, \mu_r)]. \quad (8)$$

Здесь $\mu_r \equiv \cos \theta$, а $\mu_s(r, \mu_r)$ — значение μ_s , соответствующее заданным r и μ_r . Для определения $\mu_s(r, \mu_r)$ воспользуемся теоремой синусов (см. рис. 3.2)

$$\frac{\sin \theta}{a} = \frac{\sin(\pi - \theta_s)}{r}, \quad (9)$$

или

$$r \sin \theta = a \sin \theta_s. \quad (9')$$

Таким образом,

$$\mu_s(r, \mu_r) = -\sqrt{1 - (r^2/a^2)(1 - \mu_r^2)}. \quad (10)$$

Знак минус в формуле (10) обусловлен тем, что θ_s всегда удовлетворяет неравенству $\pi/2 \leq \theta_s \leq \pi$, так что $-1 \leq \mu_s \leq 0$. Действительно, из уравнения (10) видим, что

$$-1 \leq \mu_s \leq \sqrt{1 - (r^2/a^2)}. \quad (11)$$

Теперь ясно, что фазовая плотность внутри шара выражается через функцию распределения падающих нейтронов:

$$n(r, \mu_r) = n_{\text{inc}}(\mu_s) \Big|_{\mu_s = -\sqrt{1 - (r^2/a^2)(1 - \mu_r^2)}}. \quad (12)$$

В частности, если

$$n_{\text{inc}}(\mu_s) = 1, \quad (13a)$$

то

$$n(r, \mu_r) = 1 \quad (13b)$$

и

$$\rho(r) = \int_{-1}^1 d\mu_r = 2. \quad (13c)$$

Итак, в этом случае фазовая плотность нейтронов (а также, конечно, и пространственная плотность) постоянна внутри шара. Если же

$$n_{\text{inc}}(\mu_s) = -\mu_s, \quad (14a)$$

то

$$n(r, \mu_r) = \sqrt{1 - (r^2/a^2)(1 - \mu_r^2)} \quad (14b)$$

и

$$\rho(r) = 1 + (1 - (r^2/a^2)) \frac{\text{Arth } r/a}{r/a}. \quad (14c)$$

При $r > a$ функцию распределения также можно выразить через n_i , для чего рис. 3.2 нужно слегка изменить. Однако здесь мы этим заниматься не будем.

3.5. Приложение к случаю стационарных источников в чисто поглощающей среде

Применим теперь общие результаты, полученные в разд. 3.3, к случаю $\sigma \neq 0$. Мы получим простые выражения для распределений нейтронов в чисто поглощающих средах при различных модельных источниках (точечный источник, изотропно излучающая плоскость, источник, равномерно распределенный вдоль прямой линии, на поверхности цилиндра или шара¹⁾).

Эти выражения можно затем взять в качестве функций Грина для задач с произвольными источниками (с соответствующей симметрией). В результате получатся достаточно общие выражения для функции распределения нейтронов. Мы будем существенным образом использовать факты, изложенные в приложениях В и С, для того чтобы выразить распределения нейтронов от разных источников через решение задачи с точечным источником. Последнее в свою очередь выводится из формулы (14) разд. 3.3.

А. Точечный источник

Предположим, что мононаправленный источник единичной мощности находится в точке \mathbf{r}_0 и излучает в направлении Ω_0 :

$$q(\mathbf{r}', \Omega) = \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0). \quad (1)$$

Тогда из уравнения (14) разд. 3.3 можно получить формулу для фазовой плотности

$$G(\mathbf{r}_0, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{v} \frac{\delta_2(\Omega \cdot \Omega_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \delta_2\left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\right) e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}. \quad (2)$$

Разумеется, это не что иное, как явное выражение для функции Грина, о которой шла речь в разд. 2.6, при $c = 0$. Далее,

$$G(\mathbf{r}_0, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = G(\mathbf{r}, -\Omega \rightarrow \mathbf{r}_0, -\Omega_0),$$

что согласуется с общим соотношением взаимности (см. формулу (9) разд. 2.7).

Интегрирование функции G по Ω дает формулу для плотности

$$\rho(\mathbf{r}_0, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{1}{v} \delta_2\left(\Omega_0 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}\right) \frac{e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \quad (3)$$

¹⁾ В трех последних случаях мы ограничимся задачами с постоянным сечением.

и для тока

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_0, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{\Omega_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \delta_2 \left(\Omega_0 \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}. \quad (4)$$

Все эти функции сильно сингулярны. Физический смысл этого состоит в том, что нейтрон не может попасть в точку \mathbf{r} , если направление вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ не совпадает с направлением Ω_0 .

Для точечного изотропного источника единичной мощности

$$q(\mathbf{r}', \Omega) = (1/4\pi) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (5)$$

и

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = (1/4\pi) \int G(\mathbf{r}_0, \Omega_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) d\Omega_0. \quad (6)$$

В этом случае

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi v} \delta_2 \left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \frac{e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}. \quad (7)$$

Плотность определяется формулой

$$\rho(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi v} \frac{e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}. \quad (8)$$

Отметим, что $\rho(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0)$ в соответствии с теоремой взаимности.

Для тока получаем в этом случае формулу

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}. \quad (9)$$

Если среда однородна, т. е. σ не зависит от координат, то $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, и полученные выше результаты несколько упрощаются. В частности, формула (7) принимает вид

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi v} \delta_2 \left(\Omega \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \frac{e^{-\sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}. \quad (10)$$

Отметим, что функция G удовлетворяет условиям симметрии, полученным для этого случая (см. уравнение (34) разд. 2.1).

В. Плоский источник

Бесконечный плоский источник, перпендикулярный оси z в точке z_0 и испускающий в единицу времени один нейтрон с 1 см^2 в направлении Ω_0 , описывается выражением

$$q(\mathbf{r}, \Omega) = \delta(z - z_0) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0). \quad (11)$$

Если подставить (11) в уравнение (14) разд. 3.3, то можно в принципе получить выражение для плотности излучения, создаваемого таким источником. Однако проинтегрировать, вообще говоря, будет невозможно из-за сложной зависимости $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ от z и z_0 .

Но если ограничиться случаем *плоской симметрии*, когда сечение будет зависеть только от z , и считать, что интенсивность излучения источника не зависит от азимута, т. е.

$$q(\mathbf{r}, \Omega) = \delta(z - z_0) \delta(\mu - \mu_0), \quad (12)$$

то можно добиться значительного упрощения. В частности, оказываются справедливыми соображения относительно плоской симметрии, приведенные в разд. 2.1. При этом фазовая плотность подчиняется уравнению (23) из разд. 2.1:

$$\mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} + \sigma(z) \psi(z, \mu) = \frac{1}{v} q(z, \mu). \quad (13)$$

Если σ — константа, не зависящая от z , то положение еще более упрощается. Например, оказывается справедливым соотношение (15) из разд. 2.1, а также результаты разд. 1 приложения С. В связи с этим докажем следующую теорему.

Теорема. В случае плоской симметрии любую задачу можно свести к другой задаче, для которой сечения не зависят от пространственных координат.

Доказательство очень простое. В уравнении (13) введем новую переменную

$$y = \int_{z_1}^z \sigma(z') dz'.$$

(Здесь z_1 — некоторое удобным образом выбранное значение величины z .) Тогда уравнение (13) сведется к уравнению

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial y} + \psi = \frac{1}{v\sigma(y)} q(y, \mu), \quad (14)$$

и теорема доказана ¹⁾.

Итак, уравнение (14) определяет новую задачу с $\sigma = \text{const} = 1$ и преобразованным источником. Величина y называется *оптической толщиной* и является аналогом (для плоского случая) величины $\alpha(\mathbf{r}', \mathbf{r})$, введенной ранее. В самом деле,

$$y(z_1, z) = \alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \frac{|z - z_1|}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|}. \quad (15)$$

Доказав эту теорему, мы теперь имеем право рассматривать все плоскопараллельные задачи так, как если бы сечение было постоянным (обычно мы будем полагать его равным единице). В частности, теперь мы можем получить фазовую плотность в задаче с плоским источником несколькими путями. Например, можно

¹⁾ Хотя доказательство приведено здесь для случая чисто поглощающей среды, его легко распространить на общий случай.

непосредственно решить уравнение (14). Граничное условие при этом является условием скачка при $y = 0$ и выражается формулой (3) разд. 2.4. С другой стороны, мы можем использовать формулу (14) разд. 3.3, или, что то же самое, воспользоваться тем фактом, что выражение (2) настоящего раздела представляет собой функцию Грина для уравнения переноса, и привлечь уравнение (5) разд. 2.6.

Поскольку мы будем рассматривать только плоские изотропные источники, нам будет достаточно формулы (10). Положив в ней $\sigma = 1$, получим

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi v R^2} \delta(\mu_r - \mu) \delta(\varphi_r - \varphi) e^{-\sigma R}, \quad (16)$$

где, как и раньше, $R = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Здесь величины μ и φ определяют угловые координаты вектора Ω , а величины μ_R и φ_R — угловые координаты вектора R .

Для правой части имеем

$$q(y) = \frac{\delta(y)}{4\pi}. \quad (17)$$

Интегрирование выполняется точно (см. разд. 1 приложения С). Обращаясь к рис. С1 приложения С, находим

$$\Psi_{PI}(y, \mu) = \frac{1}{4\pi v} \int_{|y|}^{\infty} \frac{dR e^{-R}}{R} \int_0^{2\pi} d\varphi_R \delta(\varphi_R - \varphi) \delta\left(\frac{y}{R} - \mu\right). \quad (18)$$

При вычислении интеграла в (18) надо принять во внимание, что соответствующий якобиан равен

$$\left| \frac{d}{dR} \frac{y}{R} \right|^{-1} = \frac{R^2}{|y|}. \quad (19)$$

В результате (18) сводится к

$$\Psi_{PI}(y, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi v} \frac{e^{-y/\mu}}{|\mu|}, & \frac{y}{\mu} > 0, \\ 0, & \frac{y}{\mu} < 0. \end{cases} \quad (20)$$

Ограничение на знаки y и μ вызвано тем, что R есть, очевидно, положительная величина. Физический смысл этого ограничения ясен. Так как отсутствуют механизмы, изменяющие направление скорости нейтронов, то в области $y > 0$ нейтроны должны двигаться в направлении положительных значений y , а в области $y < 0$ — в направлении отрицательных значений y .

Учитывая инвариантность относительно сдвига, можно переместить источник из точки $y = 0$ в точку $y = y_1$:

$$\psi_{p1}(y_1 \rightarrow y, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi v} \frac{e^{-(y-y_1)/\mu}}{|\mu|}, & \frac{y-y_1}{\mu} > 0, \\ 0, & \frac{y-y_1}{\mu} < 0. \end{cases} \quad (21)$$

Плотность можно определить, проинтегрировав (21) по μ или используя уравнение (С.7). В обоих случаях получим

$$\rho(y_1 \rightarrow y) = \frac{1}{2v} E_1(|y - y_1|), \quad (22)$$

где

$$E_1(x) \equiv \int_1^{\infty} e^{-xu} \frac{du}{u}. \quad (23)$$

(Функции E_n рассматриваются в приложении Е.)

Аналогичным образом можно определить ток. При этом можно либо воспользоваться построением, проведенным в приложении С, либо произвести непосредственное интегрирование. Во всяком случае, как будет отмечено в приложении В, ток имеет лишь одну отличную от нуля компоненту — вдоль оси y . Легко найти, что эта компонента есть

$$J_y(y_1 \rightarrow y) = \frac{1}{2} E_2(|y - y_1|). \quad (24)$$

Теперь нетрудно получить выражения для плотности и тока при произвольном распределении изотропных источников в задачах с плоской симметрией. Действительно, пусть $q_0(z') dz'$ — количество точечных источников, размещенных внутри цилиндра с единичным основанием с центром в точке z' и высотой dz' . Тогда для функции плотности получаем формулу

$$\rho(y) = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q_0(y')}{\sigma(y')} E_1(|y - y'|) dy'; \quad (25)$$

величина тока определяется аналогичным выражением, с той лишь разницей, что в качестве ядра при этом выступает функция E_2 (ср. формулу (24)).

С. Источники, распределенные на сфере

Здесь мы будем предполагать, что сечение постоянно, а источники изотропны. В этом случае можно непосредственно использовать результаты разд. 2 приложения С. Плотность равна

$$\rho_{ss}(r, a) = \frac{a}{2rv} \{E_1(\sigma |r - a|) - E_1(\sigma(r + a))\}, \quad (26)$$

а ток (у которого отлична от нуля лишь радиальная составляющая) —

$$J_{ssr}(r, a) = \frac{a}{2r^2\sigma} \{E_3(\sigma|r-a|) - E_3(\sigma(r+a))\} + \\ + \frac{(r-a)}{|r-a|} \{E_2(\sigma|r-a|) - E_2(\sigma(r+a))\} \frac{a}{2r}. \quad (27)$$

С помощью этих формул нетрудно найти выражение для плотности и тока для произвольного сферически симметричного распределения источников (при постоянном значении σ). Итак, пусть $q_0(r')$ — плотность изотропных источников в слое между r' и $r' + dr'$. Тогда

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^\infty r' q_0(r') \{E_1(\sigma|r-r'|) - E_1(\sigma(r+r'))\} dr'. \quad (28)$$

Для тока получим аналогичное интегральное выражение с ядром (27).

Д. Источники, распределенные по поверхности цилиндра

Будем по-прежнему считать источники изотропными и σ константой. В этом случае применимы результаты разд. 3 приложения С. Заменяя в уравнении (С.24) переменную интегрирования R на z , получим выражение для функции плотности ($\equiv \psi_{00}$)

$$\rho_{cs} = \frac{a}{2\pi v} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\sqrt{\lambda^2+z^2}}}{\lambda^2+z^2} dz. \quad (29)$$

Заметим, что в (29) $\lambda = \lambda(\varphi)$. Полагая

$$K = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\sqrt{\lambda^2+z^2}}}{\lambda^2+z^2} dz \quad (30)$$

и делая замену переменных $z = \lambda \operatorname{sh} s$, сводим (30) к формуле

$$K = \int_0^\infty \frac{e^{-\sigma\lambda \operatorname{ch} s}}{\lambda \operatorname{ch} s} ds. \quad (31)$$

Далее

$$-\frac{\partial K}{\partial \sigma} = \int_0^\infty e^{-\sigma\lambda \operatorname{ch} s} ds \equiv K_0(\sigma\lambda), \quad (32)$$

где K_0 — функция Бесселя, определенная в [9]. Проинтегрировав соотношение (32) в пределах от $\sigma\lambda$ до ∞ , найдем

$$K = \frac{1}{\lambda} \int_{\sigma\lambda}^{\infty} K_0(s) ds \equiv \frac{1}{\lambda} K_{i1}(\sigma\lambda), \quad (33)$$

где K_{i1} — протабулированная функция [10] (так называемая функция Бикли). Таким образом,

$$\rho_{cs} = \frac{a}{2\pi w} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\lambda(\varphi)} K_{i1}(\sigma\lambda(\varphi)). \quad (34)$$

Возможно, удобнее было бы проинтегрировать по λ . Такая замена переменной в формуле (29) даст

$$\rho_{cs}(\eta) = \frac{2a}{\pi w} \int_{|\eta-a|}^{\eta+a} \frac{d\lambda K_{i1}(\sigma\lambda)}{\sqrt{[(\eta+a)^2 - \lambda^2][\lambda^2 - (\eta-a)^2]}}, \quad (35)$$

откуда можно получить выражение для случая распределения источников, обладающих осевой (цилиндрической) симметрией. Если $q_0(\eta')$ — плотность источников в единичном объеме цилиндрического слоя с радиусами η' и $\eta' + d\eta'$, то

$$\rho(\eta) = \frac{2}{\pi w} \int_0^{\infty} d\eta' \eta' q_0(\eta') \int_{|\eta-\eta'|}^{(\eta+\eta')} \frac{d\lambda K_{i1}(\sigma\lambda)}{\sqrt{[(\eta+\eta')^2 - \lambda^2][\lambda^2 - (\eta-\eta')^2]}}. \quad (36)$$

Е. Линейный источник

Если изотропный линейный источник испускает один нейтрон на единицу длины, то применимо уравнение (С.22), из которого немедленно следует, что

$$\rho_{line}(\eta) = \frac{1}{2\pi w \eta} K_{i1}(\sigma\eta). \quad (37)$$

3.6. Интегральные уравнения

С помощью решений, найденных в предыдущем разделе, можно свести уравнение переноса к интегральному уравнению, так как решения для случая чисто поглощающей среды можно интерпретировать в случае среды с более общими свойствами как поток нейтронов, не испытавших соударения.

А. Изотропное рассеяние. Изотропный источник

В случае изотропного рассеяния вывод соответствующего интегрального уравнения весьма прост. Мы заметим только, что столкновения, происходящие в точке \mathbf{r}' , можно рассматривать

как дополнительный изотропный источник мощности

$$q' = \nu r(\mathbf{r}') c\sigma/4\pi. \quad (1)$$

Эта величина должна быть добавлена к мощности *истинного* изотропного источника

$$q = q_0/4\pi. \quad (2)$$

Подставим теперь величину $q + q' = (1/4\pi) \{q_0 + \nu r(\mathbf{r}') c\sigma\}$ в уравнение (14) разд. 3.3. Интегрирование по Ω приводит к интегральному уравнению в общем виде для функции $\rho(\mathbf{r})$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \frac{1}{4\pi v} \frac{e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \{v c \sigma(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') + q_0(\mathbf{r}')\} d^3 r'. \quad (3)$$

Для различных видов симметрии (плоской, сферической и т. д.) уравнение (3) можно проинтегрировать по «циклической» координате и получить, таким образом, для каждого рассматриваемого случая свое уравнение. Однако по существу такое интегрирование уже было произведено в предыдущем разделе. Следовательно, остается лишь подставить величину $q + q'$ в качестве мощности источника в формулы (25), (28), (36) и т. д. разд. 3.5, и мы получим следующие результаты.

а) Случай *плоской симметрии*:

$$\rho(y) = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} dy' E_1(|y - y'|) \left\{ \frac{q_0(y')}{\sigma(y')} + v c \rho(y') \right\}. \quad (3a)$$

б) Случай *сферической симметрии* и постоянного сечения:

$$\rho(r) = \frac{1}{2rv} \int_0^{\infty} r' dr' \{E_1(\sigma|r - r'|) - E_1(\sigma(r + r'))\} \{q_0(r') + v c \rho(r')\}. \quad (3b)$$

в) Случай *цилиндрической симметрии* и постоянного сечения:

$$\rho(\eta) = \frac{2}{\pi v} \int_0^{\infty} \eta' d\eta' \int_{|\eta - \eta'|}^{\eta + \eta'} \frac{d\lambda K_{11}(\sigma\lambda)}{\sqrt{[(\eta + \eta')^2 - \lambda^2][\lambda^2 - (\eta - \eta')^2]}} \times \\ \times \{q_0(\eta') + v c \rho(\eta')\}. \quad (3c)$$

Решив эти уравнения для функции ρ , можно найти функцию тока и фактически любой из моментов более высокого порядка для функции $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$, если вычислить интегралы от произведения «эффективного источника» $(q_0 + v c \rho)$ на подходящий момент соответствующей функции Грина. Последние интегралы в свою очередь в принципе можно вычислить, если использовать методы, развитые в приложении С, а также, конечно, формулу (7) разд. 3.5

для функции $G(R, \Omega \cdot R)$. При этом мы обнаружим, что функция

$$G_l(R) = \frac{1}{4\pi\nu} \frac{e^{-\sigma R}}{R^2} \quad (4)$$

не зависит от l . Так, например, из уравнения (С.8) вытекает, что

$$\psi_{Pl}(z) = \frac{1}{2\nu} \int_{|z|}^{\infty} \frac{e^{-\sigma R}}{R} P_l\left(\frac{z}{R}\right) dR, \quad (5)$$

причем для любого l интеграл в (5) можно выразить через E_n .

В случае плоской симметрии тогда получим

$$\psi_l(y) = \frac{1}{2\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_{|y-y'|}^{\infty} dR \left(\frac{e^{-R}}{R} \right) P_l\left(\frac{y-y'}{R}\right) \left\{ \frac{q_0(y')}{\sigma(y')} + \nu c P_l(y') \right\}. \quad (6)$$

Аналогичные формулы, разумеется, можно вывести и для других случаев. Однако для иллюстрации метода достаточно результата, полученного для случая плоской симметрии. В этой книге нам редко нужна будет интегральная форма уравнения переноса. Однако ею часто пользуются в литературе (см. [1]), особенно при исследовании некоторых задач для полупространства.

В гл. 5 мы будем изучать эти задачи с совершенно иной точки зрения, но для того, чтобы понять другие исследования по этому вопросу, стоит ознакомиться с интегральным уравнением теории переноса. Следует отметить, что интегральные уравнения, вообще говоря, несколько легче поддаются численному решению, чем дифференциальные. Поэтому в случаях, когда необходимо получить численное решение, интегральная форма уравнения переноса может обладать реальным преимуществом.

В. Анизотропное рассеяние

Результаты разд. 3.5 нельзя непосредственно применить к случаю анизотропного рассеяния, так как «эффективный источник» не является при этом изотропным. Как мы увидим, такое усложнение приводит к необходимости решать систему интегральных уравнений для фазовой плотности. (Это в корне отличается от только что рассмотренного случая изотропного рассеяния, где решалось единственное интегральное уравнение для ρ . Моменты более высокого порядка получались тогда прямым интегрированием решения.) А именно, если в разложении индикатрисы рассеяния в ряд по полиномам Лежандра имеется L членов, то в общем случае требуется решить систему L^2 интегральных уравнений. Однако практически свойства симметрии обычно позволяют свести эту систему к системе более низкого порядка (при этом всегда не меньшего, чем L).

По этой причине интегральное уравнение теории переноса не очень удобно, если не считать случая изотропного рассеяния ¹⁾. Изложим общий метод вывода интегрального уравнения переноса.

Запишем не зависящий от времени оператор Больцмана чисто поглощающей среды в виде

$$B_0 \equiv \nu \Omega \cdot \nabla + \nu \sigma. \quad (7)$$

Тогда *формальное* решение уравнения

$$B \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (8a)$$

где в рассматриваемом нами односкоростном приближении

$$B \equiv B_0 - \int \nu' \sigma(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{r}) d^3 v', \quad (8b)$$

$$B = B_0 - \nu \sigma(\mathbf{r}') c(\mathbf{r}') \int f(\Omega'' \cdot \Omega') d\Omega'', \quad (8c)$$

имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \int d\Omega' d^3 r' G_0(\mathbf{r}', \Omega' \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) \times \\ \times \left[q(\mathbf{r}', \Omega') + \nu \sigma(\mathbf{r}') c(\mathbf{r}') \int f(\Omega'' \cdot \Omega') \psi(\mathbf{r}', \Omega'') d\Omega'' \right]. \quad (9)$$

Здесь, конечно, G_0 — функция Грина для уравнения переноса при наличии точечного источника в чисто поглощающей среде (формула (2) разд. 3.5).

Вспомним, что мы предположили инвариантность относительно вращения. В этом случае функцию $f(\Omega' \cdot \Omega)$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\Omega' \cdot \Omega), \quad (10)$$

или, в соответствии с теоремой сложения (см. приложение А),

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega'). \quad (11)$$

Кроме того, согласно уравнению (B.1),

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l,m} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} Y_{lm}(\Omega) \psi_{lm}(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Тогда

$$\int f(\Omega'' \cdot \Omega') \psi(\mathbf{r}', \Omega'') d\Omega'' = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} f_l \sum_{m=-l}^l \psi_{lm}(\mathbf{r}') Y_{lm}(\Omega'). \quad (13)$$

¹⁾ На самом деле, если индикатрису рассеяния можно аппроксимировать конечной суммой полиномов Лежандра, то в случае одномерной геометрии можно также получить одно уравнение для функции $\rho(y)$; см., например, [104]. — *Прим. перев.*

Умножим теперь равенство (9) на $Y_{lm}^*(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω с учетом разложений (12) и (13); получим

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int d^3r' \int d\Omega' \int d\Omega Y_{lm}^*(\Omega) G_0(\mathbf{r}', \Omega' \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) \times \\ \times \left[q(\mathbf{r}', \Omega') + v\sigma(\mathbf{r}') c(\mathbf{r}') \sum_{l', m'} \left(\frac{2l'+1}{\pi}\right)^{1/2} \psi_{l'm'}(\mathbf{r}') f_{l'} Y_{l'm'}(\Omega') \right]. \quad (14)$$

Подставив сюда функцию $G_0(\mathbf{r}', \Omega' \rightarrow \mathbf{r}, \Omega)$ в явном виде (см. формулу (2) разд. 3.5), можно выполнить интегрирование по Ω и Ω' . Тогда

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int d^3r' \frac{e^{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{v|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) \times \\ \times \left\{ q(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{R}}) + v\sigma(\mathbf{r}') c(\mathbf{r}') \sum_{l', m'} \left(\frac{2l'+1}{4\pi}\right)^{1/2} f_{l'} \psi_{l'm'}(\mathbf{r}') Y_{l'm'}(\hat{\mathbf{R}}) \right\}, \quad (15a)$$

где, как обычно,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (15b)$$

При изотропном рассеянии ($f_{l'} = \delta_{l'0}$) в изотропных источниках ($q(\mathbf{r}', \hat{\mathbf{R}}) = q_0(\mathbf{r}')/4\pi$) уравнение (15a) сводится к более простому уравнению, уже рассмотренному в части А настоящего раздела. Отметим, что наличие анизотропных источников не вносит существенных трудностей, поскольку оно не порождает связи между различными компонентами в разложении функции угловой плотности в ряд по сферическим гармоникам. К усложнению приводит только наличие анизотропного рассеяния.

С. Общий вид интегральных уравнений

Интегральные уравнения, полученные в частях А и В, особенно удобны в вычислительных целях. Для чисто математических целей, таких, как доказательство существования и единственности решений уравнения переноса, более удобна обычная форма интегрального уравнения, т. е. уравнения для самой функции фазовой плотности, а не для ее компонент в разложении в ряд по сферическим гармоникам.

Рассмотрим сначала нестационарное уравнение в общей форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + v(\Omega \cdot \nabla + \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d^3v'. \quad (16)$$

Это уравнение по форме совпадает с уравнением (1) разд. 3.3, решением которого служит функция (6) того же раздела. Поэтому для сведения уравнения (16) к интегральному уравнению достаточно заменить правую часть уравнения (1) разд. 3.3 правой

частью уравнения (16), т. е. произвести замену

$$q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \rightarrow q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d^3 v'. \quad (17)$$

Полученное при этом уравнение имеет вид уравнения Вольтерра второго рода:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int_0^t \exp \left[- \int_t^{\tau'} v \sigma(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau - t), \mathbf{v}) d\tau \right] \times \\ & \times \int d^3 v' v' \sigma(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau' - t), \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau' - t), \mathbf{v}', \tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь свободный член Q определяется выражением

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & \psi(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0) \exp \left\{ - \int_0^t v \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau - t)) d\tau \right\} + \\ & + \int_0^t \exp \left\{ - \int_t^{\tau'} v \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau - t)) d\tau \right\} q(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\tau' - t), \mathbf{v}, \tau') d\tau'. \end{aligned} \quad (19)$$

Интегральное уравнение (18) и сопряженное ему уравнение изучаются в приложении D, где рассматриваются вопросы существования и единственности решения уравнения (16). На самом деле в приложении исследуется несколько модифицированное уравнение, поскольку обычно интересуются фазовой плотностью лишь в ограниченной области V . Влияние внешних источников и эффектов рассеяния *вне* V при этом описывается с помощью подходящим образом подобранного излучения, падающего извне на поверхность S , ограничивающую область V (см. разд. 2.3). Детально этот вопрос рассматривается в приложении D.

Стационарное уравнение переноса

$$v(\Omega \cdot \nabla + \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \int d^3 v' v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \quad (20)$$

можно аналогичным образом свести к интегральному уравнению, если использовать формулу (10) разд. 3.3 и произвести замену

$$q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \rightarrow q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \int d^3 v' v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}'). \quad \{ (21) \}$$

В результате получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \frac{1}{v} \int_0^\infty dR \exp \{ -\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v}) \} \times \\ & \times \int d^3 v' v' \sigma(\mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v}') + \frac{1}{v} Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int_0^{\infty} dR \exp\{-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v})\} q(\mathbf{r} - R\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v}). \quad (23)$$

В приложении D с помощью интегрального уравнения (23) и сопряженного ему уравнения исследуются условия существования и единственности решения *стационарного* уравнения переноса. Как и в нестационарном случае, наибольший интерес представляют ограниченные области V (ср. разд. 2.5). В приложении E интегральные уравнения также подвергаются модификации, причем источники и рассеяние вне V описываются подходящим распределением падающего извне излучения. За деталями отсылаем к приложению.

Итерационный метод решения этих интегральных уравнений соответствует разложению решения уравнения переноса по кратности рассеяния¹⁾. Изложение этого метода дано в работе [11].

3.7. Вероятность выхода

Важное приложение общих результатов, полученных в гл. 2 и 3, состоит в возможности вычисления вероятности того, что нейтрон, рожденный в определенной точке рассматриваемой области, покинет последнюю. На самом деле нас будут интересовать следующие две возможности выхода нейтрона:

1. Вероятность P_{AB} того, что нейтрон, рожденный в области A , будет поглощен в области B . В частном случае, когда B является дополнением A до всего пространства, $P_{AB} \equiv E_A$, где E_A — полная вероятность выхода нейтрона из области A . Если нейтроны, выходящие из области A , могут поглотиться в ряде областей B_i , $i = 1, 2, \dots, N$, заполняющих все пространство, то

$$E_A = \sum_{i=1}^N P_{AB_i}.$$

2. Вероятность P_{AB}^c того, что нейтрон, рожденный в области A , претерпит *первое столкновение* в области B . По аналогии с E_A обозначим через E_A^c вероятность того, что нейтрон покинет область A , не претерпев столкновения.

Обычно E_A и E_A^c различны. Однако если вещество, заполняющее все области, является чистым поглотителем, то $E_A = E_A^c$. Как правило, E_A^c вычислить легче, чем E_A ; в данном разделе мы получим явные выражения лишь для E_A^c . Эта величина непосредственно используется, например, при вычислении резонансного захвата нейтронов в решетке реактора, поскольку

¹⁾ Доказательства можно найти, например, в [1].

в этом случае разумно предположить, что в результате столкновения нейтрон либо поглощается, либо его энергия падает ниже резонансного значения (при «узком резонансе»). В тех случаях, когда требуется знать E_A , а не E_A^c (например, при изучении поглощения тепловых нейтронов в реакторе), удастся связать E_A и E_A^c простым вариационным соотношением. Часто величина среднего свободного пробега рассеяния в полной системе бывает велика по сравнению с диаметром области A . При этом

$$E_A \simeq E_A^c.$$

Для ознакомления с применением понятия вероятности выхода к расчету реакторов можно порекомендовать учебники по физике реакторов [3, 12, 13]. Перейдем к обсуждению вероятности выхода, ее свойств и способов вычисления.

Определение. Для двух тел A и B , вообще говоря, не связанных (если не оговорено противное),

$$P_{AB} = \frac{\nu \int_B \rho(r') \sigma_a^B(r') d^3r'}{\int_A q_0(r') d^3r'}. \quad (1)$$

Здесь $\sigma_a^B(r)$ — сечение поглощения вещества в области B , а $q_0 = \int q(r, \Omega) d\Omega$. При вычислении вероятности выхода мы обычно будем предполагать, что функция $q(r, \Omega)$ не зависит от пространственных координат и изотропна, а вещество в областях A и B однородно, т. е. сечения постоянны. Из всех этих предположений, вообще говоря, не выполняется на практике лишь предположение о независимости q от пространственных координат. Однако для многих приложений это предположение не лишено смысла¹⁾, а для других случаев «постоянный источник» служит хорошим приближением при использовании вариационного метода [15]. Заметим, что P_{AB}^c можно также вычислить, пользуясь формулой (1) и заменяя сечение σ_a^B сечением σ^B , а функцию $\rho(r)$ — плотностью не испытавших столкновения нейтронов, найденной в предыдущих разделах этой главы.

Теорема 1. Пусть A и B — области, заполненные однородным веществом. Тогда для постоянного изотропного источника

$$P_{AB} = P_{BA} \frac{V_B}{V_A} \frac{\sigma_a^B}{\sigma_a^A}. \quad (2)$$

Здесь V_B/V_A — отношение объемов областей B и A . (Заметим, что P_{BA} относится к задаче, когда источник помещен в области B ,

¹⁾ Например, при вычислении вероятности резонансного захвата [14].

а P_{AB} — к задаче с источником, помещенном в области A .) В обоих случаях плотность источника предполагается одинаковой. Отметим снова, что области A и B не должны быть односвязными и могут быть окружены другими областями, на свойства которых не налагается никаких ограничений.

Теорема 1 следует непосредственно из теорем взаимности, доказанных в разд. 2.7. По формуле (1) настоящего раздела

$$P_{AB} = \frac{v\sigma_a^B}{q_0 V_A} \int_B d^3r \int_A d^3r' \rho(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) q_0 \quad (3a)$$

и

$$P_{BA} = \frac{v\sigma_a^A}{q_0 V_B} \int_A d^3r \int_B d^3r' \rho(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}) q_0, \quad (3b)$$

где $\rho(\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$ — плотность нейтронов в точке \mathbf{r} , обусловленная наличием источника в точке \mathbf{r}' . Согласно уравнению (11) разд. 2.7, двойные интегралы в (3a) и (3b) тождественно равны, откуда и следует формула (2).

Если A и B заполняют все пространство, то, как легко видеть,

$$P_{AB} = 1 - P_{AA}. \quad (4)$$

Коэффициент самоэкранировки. Предположим, что области A и B занимают все пространство, и будем считать, что в области B каким-то образом порождены нейтроны, фазовая плотность которых в области B , если бы A вовсе не было, равна $\psi_\infty(\mathbf{r}, \Omega)$ ¹⁾. Тогда за единицу времени в области A поглощается N_A нейтронов, где

$$N_A = V_A v \bar{\rho}_\infty \sigma_a^A f. \quad (5)$$

Величина f называется *коэффициентом самоэкранировки*; иногда $\sigma_a^A f$ называется *эффективным сечением*. Значение $\bar{\rho}_\infty$ в формуле (5) совпадает со средней плотностью, которую мы получили бы в области A , если бы она не была заполнена веществом. Из определения ясно, что

$$f \equiv \bar{\rho}_A / \bar{\rho}_\infty, \quad (6)$$

где $\bar{\rho}_A$ — среднее значение плотности в A . Отсюда видно, что если каким-нибудь образом определить f , то некоторые задачи для двух областей можно свести к задаче для одной области, что, безусловно, сильно упрощает дело. Для определения f часто используется

¹⁾ При вычислении $\psi_\infty(\mathbf{r}, \Omega)$ и $\rho_\infty(r) \equiv \int d\Omega \psi_\infty(\mathbf{r}, \Omega)$ часть области B , занятая областью A , должна быть заполнена веществом типа B и распределение источников должно быть продолжено в эту область.

Теорема 2. Пусть ψ_∞ не зависит от направления (т. е. $\psi_\infty = (1/4\pi) \rho_\infty$)¹⁾. Тогда, если среда, заполняющая области A и B , однородна, то

$$f = P_{AB}, \quad (7)$$

где P_{AB} — вероятность выхода, вычисленная при постоянном изотропном источнике в A .

Доказательство элементарно. Из равенства (5) имеем

$$f = N_A / V_A \nu \bar{\rho}_\infty \sigma_a^A. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение переноса по $d\Omega$, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_\infty(\mathbf{r}) + \sigma_a^B \rho_\infty(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r})/v. \quad (9a)$$

Так как по условию $\mathbf{J}_\infty(\mathbf{r}) = 0$, а функция q_0 постоянна, то

$$\nu \bar{\rho}_\infty = q_0 / \sigma_a^B. \quad (9b)$$

Далее, по определению

$$N_A = q_0 P_{BA} V_B. \quad (10)$$

Таким образом,

$$f = P_{BA} (\sigma_a^B V_B / \sigma_a^A V_A), \quad (11)$$

или по теореме 1

$$f = P_{AB}. \quad (12)$$

Этот результат особенно полезен в случае, когда P_{AB}^c можно заменить на P_{AB} , так как при этом вычисление f становится чисто геометрической задачей, состоящей в интегрировании траекторий нейтронов внутри области A . Для упрощения такого интегрирования часто используется

Теорема 3. Пусть A и B — области, заполненные чисто поглощающим веществом. Если A — выпуклая и односвязная область и нейтроны генерируются в B так, что ψ_∞ не зависит от направления, то

$$P_{AB}^c \equiv E_A^c = \frac{P_A^c}{4\sigma^A V_A / S_A}, \quad (13)$$

где P_A^c — вероятность поглощения в области A попадающих в нее нейтронов.

Здесь V_A и S_A — соответственно объем и площадь поверхности области A , σ^A — полное сечение взаимодействия нейтрона с веществом, заполняющим A . Напомним, что все величины

¹⁾ Это происходит, например, в случае, когда область B бесконечна и однородна, а источники равномерно распределены в пространстве. На самом деле достаточно потребовать выполнения лишь условия $\nabla \cdot \mathbf{J}_\infty = 0$ (ср. с уравнением (9a)).

с верхним индексом c вычисляются для чисто поглощающей среды и совпадают с соответствующими вероятностями первого столкновения в общем случае.

Отметим, что поскольку область A выпукла и односвязна, ее присутствие не вносит возмущения в распределение нейтронов, падающих на ее поверхность (так как отсутствует механизм, изменяющий направления движения нейтрона). Следовательно, распределение падающих нейтронов изотропно и постоянно вдоль поверхности области A .

Для того чтобы доказать теорему 3, прежде всего заметим, что если N_c — частота столкновений внутри области A , то

$$P_A^c = N_c/N_0, \quad (14)$$

где N_0 — общее число нейтронов, попадающих в A . Величина N_0 определяется так:

$$N_0 = \iint dS \, d\Omega \, \mathbf{j}(\Omega) \cdot \mathbf{n}_i, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_i > 0, \quad (15)$$

где \mathbf{n}_i — внутренняя нормаль к поверхности области A . В силу изотропии распределения падающих нейтронов

$$\mathbf{j}(\Omega) = \frac{v\rho_\infty}{4\pi} \Omega, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_i > 0, \quad (16)$$

и, таким образом,

$$N_0 = \frac{v\rho_\infty}{4\pi} S_A \int_{\Omega \cdot \mathbf{n}_i > 0} \Omega \cdot \mathbf{n}_i \, d\Omega, \quad (17a)$$

или ¹⁾

$$N_0 = \frac{v\rho_\infty}{4\pi} S_A \cdot 2\pi \int_0^1 \mu \, d\mu = \frac{v\rho_\infty}{4} S_A. \quad (17b)$$

Следовательно,

$$P_A^c = 4N_c/v\rho_\infty S_A, \quad (18)$$

или, согласно формулам (5) и (12),

$$P_A^c = \frac{4V_A}{S_A} \sigma^A E_A^c, \quad (19)$$

и теорема доказана.

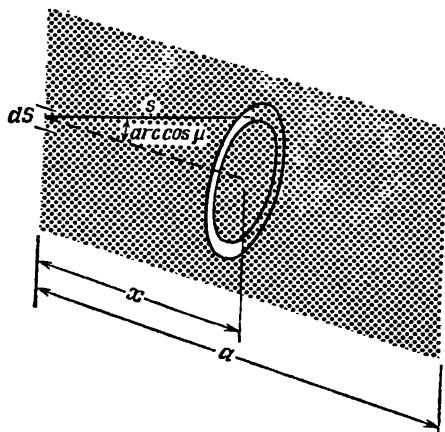
Значение этой теоремы состоит в том, что для вычисления E_A^c надо произвести интегрирование по объему области A , в то время как для вычисления P_A^c достаточно, вообще говоря, более простого интегрирования по поверхности. Это тем более удобно, что для симметричных областей часто можно обойтись даже и без интегрирования по поверхности. Мы продемонстрируем применение этой теоремы для вычисления E^c в нескольких простых случаях.

¹⁾ Соотношение (17b) выражает хорошо известный факт, заключающийся в том, что в изотропном потоке на единицу поверхности падает $\rho v/4$ частиц.

Вычисление E^c для слоя толщины a . Найдем значение E^c , вычислив сначала вероятность столкновения в случае изотропного распределения падающих нейтронов и применив затем теорему 3. Из рис. 3.3 видно, что число нейтронов, падающих на элемент поверхности dS внутри телесного угла $d\Omega = 2\pi d\mu$ и претерпевающих столкновение на пути от s до $s + ds$, вычисляется по формуле

$$d^2N = \left(\frac{\rho_{\infty} v}{4\pi} \mu dS \right) (2\pi d\mu) (e^{-\sigma x/\mu}) \left(\frac{\sigma dx}{\mu} \right). \quad (20a)$$

Выражение, стоящее в двух первых скобках, есть $\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_i dS d\Omega$ (вспомним, что $\mathbf{j} = (\rho_{\infty} v / 4\pi) \Omega$); выражение, стоящее в третьей



Р и с. 3.3. Вычисление вероятности выхода из слоя.

скобке,— это вероятность того, что нейтрон проходит расстояние $s = x/\mu$ без столкновений; последняя скобка определяет вероятность столкновения на пути ds . В силу (17b) общее число нейтронов, пересекающих поверхность dS , равно

$$N_0 = (v\rho_{\infty}/4) dS, \quad (20b)$$

так что¹⁾

$$P_A^c = N/N_0 = 2\sigma \int_0^a dx \int_0^1 e^{-\sigma x/\mu} d\mu. \quad (21)$$

Интегрируя по dx , получаем

$$P_A^c = 2 \int_0^1 d\mu (1 - e^{-\sigma a/\mu}), \quad (22a)$$

¹⁾ Здесь всюду используется тот факт, что точки поверхности эквивалентны и, следовательно, можно обойтись без интегрирования по поверхности.

или

$$P_A^c = 1 - 2E_3(\sigma a). \quad (22b)$$

(Здесь $E_3(x)$ — одна из функций $E_n(x)$, см. приложение Е.)
Теперь из теоремы 3 следует, что

$$E^c = (1/2\sigma a) [1 - 2E_3(\sigma a)]. \quad (23)$$

Шар радиуса R . Очевидно, в этой задаче проще определить P^c , а не E^c . Действительно, при определении E^c приходится интегрировать по внутренности шара и по всем направлениям выхода

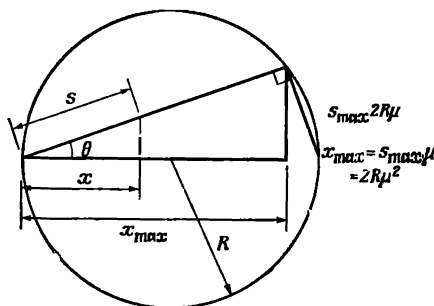


Рис. 3.4. Вычисление вероятности выхода из шара.

нейтронов. Двойные интегралы, которые потребуется вычислять, весьма сложны. С другой стороны, при определении P^c мы столкнемся лишь с простыми интегралами, подобными тем, которые встречались в случае плоского слоя. Кроме того, в силу симметрии не придется интегрировать по поверхности шара. При этом ясно, что формула для P_A^c аналогична соответствующей формуле (а именно (21)) для плоского слоя — отличие лишь в пределах интегрирования (рис. 3.4). Итак,

$$P_A^c = 2\sigma \int_0^1 d\mu \int_0^{2R\mu^2} e^{-\sigma x/\mu} dx. \quad (24)$$

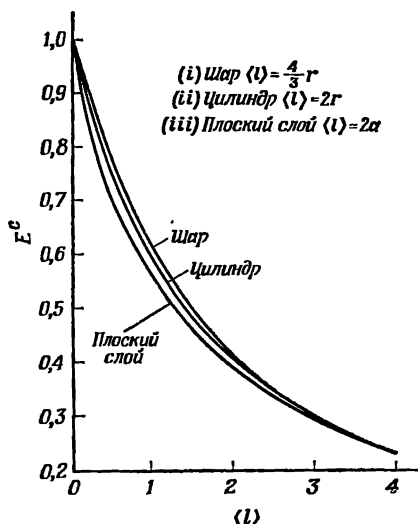
Этот двойной интеграл можно без труда взять в элементарных функциях. Согласно теореме 3,

$$E^c = \frac{3}{8R^3\sigma^3} [2(\sigma R)^2 - 1 + (1 + 2\sigma R)e^{-2\sigma R}]. \quad (25)$$

Аналогичные вычисления были проделаны и для других областей достаточно простой формы; результаты представлены в виде таблиц [1, 16]. Здесь мы больше не будем заниматься этими вопросами. Интересно лишь отметить, что часто E^c зависит только от $\sigma \langle l \rangle$, где $\langle l \rangle$ — длина так называемой средней хорды области,

равная $4V/S$ (мы это покажем ниже). На рис. 3.5 приводится E^c для плоских слоев, цилиндров и шаров как функция от $\sigma \langle l \rangle$.

Распределение хорд и средняя длина хорды. Используя теорему 3, покажем, что величину P_{AV}^c можно определить через так называемое *распределение хорд* $\varphi(l)$. Через каждую точку поверхности



Р и с. 3.5. Вероятности выхода при наличии источника постоянной плотности для шара радиуса r , цилиндра радиуса r , плоского слоя толщины r ; $\langle l \rangle$ измеряется в единицах длины среднего свободного пробега.

области проведем хорды, число которых в направлении, составляющем с нормалью к поверхности угол $\arcsin \mu$, пропорционально μ . Тогда, обозначив через $\varphi(l) dl$ число хорд, длины которых заключены между l и $l + dl$, получим

$$P_A^c = 1 - \int_0^{l_{\max}} \varphi(l) e^{-\sigma l} dl, \quad (26)$$

причем $\varphi(l)$ подчинено условию нормировки

$$\int_0^{l_{\max}} \varphi(l) dl = 1. \quad (27)$$

Формула (26) вытекает непосредственно из определений величин P^c и $\varphi(l)$.

В силу теоремы 3

$$E^c = \frac{S}{4\sigma V} \left[1 - \int_0^{l_{\max}} e^{-\sigma l} \varphi(l) dl \right]. \quad (28)$$

Формула (28) иногда используется для прямого вычисления вероятностей выхода [1]. Однако, поскольку формула (28) —

это не что иное, как несколько замаскированная формулировка теоремы 3, в подобном толковании нет особого смысла ¹⁾. Что же касается понятия *средней длины хорды* $\langle l \rangle$, то оно довольно удобно; величину ее можно вычислить следующим образом.

По определению

$$\langle l \rangle = \int_0^{l_{\max}} l \varphi(l) dl, \quad (29)$$

или, с учетом (26),

$$\langle l \rangle = \lim_{\sigma \rightarrow 0} (\partial P^c / \partial \sigma). \quad (30)$$

Из формулы (19) находим

$$\frac{\partial P^c}{\partial \sigma} = \frac{4V}{S} E^c + \frac{4V\sigma}{S} \frac{\partial E}{\partial \sigma}. \quad (31)$$

Очевидно, что $E^c \rightarrow 1$ при $\sigma \rightarrow 0$. Кроме того, как нетрудно видеть из соотношения (30), величина $\partial E / \partial \sigma$ остается конечной при $\sigma \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (\partial P^c / \partial \sigma) = 4V/S, \quad (32a)$$

откуда

$$\langle l \rangle = 4V/S. \quad (32b)$$

Таким образом, формула (28) принимает вид

$$E^c = \frac{1}{\sigma \langle l \rangle} \left[1 - \int_0^{l_{\max}} e^{-\sigma l} \varphi(l) dl \right]. \quad (33)$$

Для функции $\varphi(l)$ также можно написать простое выражение, но здесь мы его не приводим, поскольку его редко используют в приложениях.

Приближенные формулы для E^c . С помощью равенства (33) можно получить предельные выражения величины E^c для больших и малых областей. Разлагая в ряд функцию $e^{-\sigma l}$ и используя условие нормировки (27), находим

$$E^c = \frac{1}{\sigma \langle l \rangle} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma^n \langle l^n \rangle \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \quad (34)$$

где

$$\langle l^n \rangle = \int_0^{l_{\max}} l^n \varphi(l) dl. \quad (35)$$

¹⁾ Этот метод, однако, представляет исторический интерес, поскольку формула (28) была получена Дираком раньше, чем по достоинству оценили теорему 3.

Можно ожидать, что для областей с одним характерным размером (шар, бесконечный плоский слой, цилиндр) величина $\langle l^n \rangle$ будет функцией этого размера. Иными словами, $\langle l^n \rangle$ можно представить как функцию от $\langle l \rangle$. Поэтому и E^c будет функцией от $\langle l \rangle$; из соображений размерности следует, что величина E^c на самом деле должна быть функцией от $\sigma \langle l \rangle$. Нетрудно видеть, что это справедливо в рассмотренных выше примерах. Для очень малых областей (тех областей, характерные размеры которых намного меньше средней длины свободного пробега) можно взять только два члена разложения (34), так что

$$E^c \simeq 1 - \frac{1}{2} \frac{\sigma \langle l^2 \rangle}{\langle l \rangle} \quad (\text{малые области}). \quad (36)$$

Функцию $\langle l^2 \rangle$ можно вычислить, пользуясь явным выражением для $\varphi(l)$, о котором шла речь выше [1]. В табл. 3.1 приведены значения $Q \simeq \langle l^2 \rangle / \langle l \rangle^2$ для областей различной формы [1]. Для этих значений можно найти E^c по формуле (36).

Таблица 3.1

Форма	$Q = \langle l^2 \rangle / \langle l \rangle^2$
Шар	0,5625
Полушарие	0,6328
Тетраэдр	0,7915
Бесконечный цилиндр с круговым сечением	0,6667
Бесконечный цилиндр с квадратным сечением	0,7435
Бесконечный цилиндр с сечением в виде равностороннего треугольника	0,824
Бесконечный цилиндр с гексагональным сечением	0,6985

Для областей очень больших размеров в равенстве (33) можно пренебречь членом, содержащим экспоненту, и тогда

$$E^c \simeq 1/\sigma \langle l \rangle \quad (\text{большие области}). \quad (37)$$

Вигнер (см. [17]) ввел удобное выражение для E^c , которое для малых областей стремится к 1, а для больших — к $1/\sigma \langle l \rangle$. Это выражение, называемое *приближением Вигнера*, имеет вид

$$E^c \simeq \frac{1}{1 + \sigma \langle l \rangle}. \quad (38)$$

Обычно оно при любых значениях $\sigma \langle l \rangle$ совпадает с истинным значением с точностью до 15% и часто используется для грубых прикидок.

Глава 4

РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОГО ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

4.1. Введение

В гл. 2 и 3 обсуждались общие свойства уравнения переноса и были найдены его простейшие решения при условии $c = 0$. В настоящей главе мы рассмотрим решения уравнения переноса при $c > 0$, т. е. в случае когда возможна регенерация. Однако мы ограничимся односкоростным уравнением и будем искать стационарные решения для бесконечной однородной среды. В однородной среде σ , f и c постоянны¹⁾. Кроме того, мы рассматриваем лишь изотропное рассеяние, за исключением последнего раздела этой главы, где указана возможность обобщения результатов на случай неизотропного рассеяния. Наконец, практически во всех задачах мы ограничиваемся случаем плоской симметрии.

Все эти ограничения кажутся довольно суровыми, и это действительно так. Тем не менее имеются серьезные основания для такого сужения круга исследований. Во-первых, эта задача является простейшей нетривиальной задачей в теории переноса нейтронов, ее точные решения можно найти и использовать в качестве основных решений уравнения переноса в случае, когда σ , c и f постоянны в конечной области пространства. Более того, найденные таким образом точные решения можно использовать для испытания различных приближенных методов, применимых в более сложных задачах.

Изучение такой упрощенной задачи интересно также с чисто математической стороны. Например, таким способом мы находим удобные функциональные пространства, в которых можно искать решения уравнения переноса (и которые в отличие от обычно возникающих в физических задачах пространств не являются гильбертовыми). Мы получаем также сведения о спектре оператора Больцмана и, кроме того, подходим к пониманию условий существования решения, а не только условий его единственности.

¹⁾ Для плоской симметрии случай переменного сечения можно исследовать, как обычно, вводя понятие оптической толщины.

В гл. 3 мы видели, что в случае плоской симметрии основное уравнение можно записать в виде

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + q(x, \mu). \quad (1)$$

В задачах, рассмотренных в предыдущей главе, интегральный член, естественно, отсутствовал, поскольку там рассматривался только случай $c = 0$. (Множитель $1/2$ появляется из-за того, что при изотропном рассеянии $f(\Omega' \cdot \Omega) = 1/4\pi$, а интегрирование по азимутальному углу дает множитель 2π .)

В этой главе мы подробно исследуем решения однородного уравнения вида (1).

4.2. Собственные функции однородного уравнения.

Допустимое пространство функций

Как отмечалось в разд. 4.1, мы рассматриваем здесь только решения однородного уравнения переноса

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, \mu) + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'. \quad (1)$$

Такой подход подсказан обычным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно методом разложения в ряды по решениям однородного уравнения, или по *нормальным модам* [18]. Обычно этот метод позволяет свести обыкновенное дифференциальное уравнение к системе алгебраических уравнений. Здесь ситуация будет аналогична, с тем лишь отличием, что решения уравнения (1), вообще говоря, не лежат в гильбертовом пространстве. Как мы увидим, для уравнений переноса это вовсе не неожиданно. Более того, основной метод при этом не более сложен, чем обычно, хотя математическая сторона вопроса, возможно, несколько менее привычна.

Итак, найдем решение уравнения (1). Принимая во внимание условие инвариантности относительно сдвига¹⁾, будем искать решение в виде

$$\psi_\nu(x, \mu) = \varphi_\nu(\mu) e^{-x/\nu}. \quad (2)$$

(По аналогии с обычной терминологией будем называть φ_ν собственными функциями, а соответствующие значения ν — собственными значениями.) Подставив (2) в однородное уравнение,

¹⁾ См. приложение F.

получим

$$\left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) \dot{\varphi}_{\nu}(\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \varphi_{\nu}(\mu') d\mu'. \quad (3)$$

Поскольку уравнение (3) — линейное однородное уравнение относительно φ_{ν} , нормировка φ_{ν} произвольна. Удобно принять ¹⁾

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\nu}(\mu') d\mu' = 1. \quad (4)$$

Как будет видно в дальнейшем, уравнение (3) разрешимо не для всех ν , что также характерно для однородных уравнений. Таким образом, мы получаем упомянутые выше собственные значения.

После умножения на ν с учетом условия нормировки (4) уравнение (3) принимает вид

$$(\nu - \mu) \varphi_{\nu}(\mu) = c\nu/2. \quad (5)$$

Уравнение (5) выглядит довольно простым. На самом деле это уравнение не столь просто, как кажется на первый взгляд. С этим и связана особенность описанного здесь метода. Исходя из уравнения (5), заманчиво написать решение в виде

$$\varphi_{\nu}(\mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu} \quad (6)$$

Предположим, что допускается возможность $\mu = \nu$. (Вспомним, что μ всегда лежит на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси.) Тогда очевидно, что к правой части равенства (6) можно добавить член

$$\lambda(\nu) \delta(\nu - \mu), \quad (7)$$

где $\lambda(\nu)$ — произвольная функция, причем результат по-прежнему будет решением уравнения (5). В этом можно убедиться, подставив

$$\varphi_{\nu}(\mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \quad (8)$$

непосредственно в уравнение (5) и учитывая, что по определению

$$x\delta(x) \equiv 0. \quad (9)$$

Различные интерпретации выражения $1/(\nu - \mu)$ в формуле (8) отличаются лишь на дельта-функцию. Поэтому без ограничения общности к множителю $1/(\nu - \mu)$ можно присоединить символ P , обозначающий главное значение в смысле Коши. Тогда оконча-

¹⁾ При условии, что $\int_{-1}^1 \varphi_{\nu}(\mu') d\mu' \neq 0$. Далее будет показано, что это именно так.

тельно решение уравнения (5) принимает вид ¹⁾

$$\varphi_v(\mu) = \frac{cv}{2} P \frac{1}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(v-\mu). \quad (10)$$

Какой смысл имеет это выражение? Как главное значение Коши, так и дельта-функция имеют смысл лишь под знаком интеграла (конечно, если не исключена возможность $v = \mu$; в противном случае (10) переходит в (6)). Таким образом, мы видим, что собственные функции не являются функциями в обычном смысле. Они являются обобщенными функциями, или *распределениями* в смысле Шварца [19]; целесообразность использования таких функций в качестве основных решений нашего уравнения заключается в том, что они удобны и не приводят к существенным трудностям при исследовании уравнения переноса. Практически собственные функции вида (10) встречаются только в интегральных выражениях. Интегралы же от этих обобщенных функций являются «хорошими» функциями. Использовать обобщенные собственные функции в задачах теории переноса предложили независимо Дэвисон [20] и Вигнер [21], впервые реализовал этот метод Ван-Кампен [22] при исследовании задачи о колебаниях плазмы. В задачах теории переноса нейтронов обобщенные функции впервые применены Кейзом [18, 23].

4.3 Вычисление дискретных собственных значений и собственных функций

Предположим, что v не лежит на отрезке $[-1, 1]$ действительной оси. Тогда формула (10) предыдущего раздела упрощается:

$$\varphi_v(\mu) = \frac{cv}{2} \frac{1}{v-\mu}. \quad (1)$$

Используя условие нормировки (4) из разд. 4.2, получаем

$$\Lambda(v) \equiv 1 - \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v-\mu} = 0 \quad (2)$$

(функция $\Lambda(v)$ называется дисперсионной функцией). Итак, собственные значения являются решениями уравнения

$$\Lambda(v) = 0. \quad (3)$$

¹⁾ Теперь нетрудно видеть, что $\int_{-1}^1 \varphi_v(\mu') d\mu' \neq 0$. Действительно, если бы этот интеграл обращался в нуль, то из уравнения (3) следовало бы, что $\varphi_v(\mu) \sim \delta(\mu-v)$, но $\int \delta(\mu-v) d\mu \neq 0$.

Мы увидим, что существуют лишь два решения этого уравнения и тем самым два собственных значения и две соответствующие им собственные функции.

Для вычислительных целей иногда полезно ввести явное выражение для $\Lambda(v)$:

$$\Lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \ln \frac{1+1/v}{1-1/v}, \quad (4a)$$

или, иначе,

$$\Lambda(v) = 1 - cv \operatorname{Arth} \frac{1}{v}. \quad (4b)$$

Заметим (см. уравнение (2)), что функция $\Lambda(v)$ аналитична всюду в плоскости комплексного переменного с разрезом вдоль отрезка действительной оси от -1 до $+1$. Функция $\operatorname{Arth}(1/v)$ многозначна, в формуле (4b) подразумевается ее главная ветвь. Это соответствует тому, что основным определением функции $\Lambda(v)$ служит интегральная формула (2).

Теперь нам нужно найти нули функции $\Lambda(v)$. Мы будем пользоваться следующими легко проверяемыми свойствами функции $\Lambda(v)$:

1) $\Lambda(v) = \Lambda(-v)$. Таким образом, если v_0 — корень уравнения (3), то $-v_0$ также будет его корнем¹⁾.

2) Если v_0 — решение уравнения (3), то, как видно из уравнения (2), v_0^* также будет его решением.

3) Функция $\Lambda(v)$ имеет всего два нуля в комплексной плоскости с разрезом от -1 до $+1$. Ее нули лежат либо на действительной, либо на мнимой оси. (Последнее утверждение следует из свойств 1 и 2.)

Для того чтобы показать, что $\Lambda(v)$ имеет всего два нуля, воспользуемся тем, что функция $\Lambda(v)$, как уже отмечалось, аналитична в плоскости с разрезом. Кроме того, $\Lambda(v) \rightarrow 1 - c$ при $v \rightarrow \infty$. Число нулей функции $\Lambda(v)$ в плоскости с разрезом равно умноженному на $1/2\pi$ приращению ее аргумента при изменении v вдоль замкнутого контура, охватывающего всю плоскость с разрезом [24]. Этот контур состоит из контура на бесконечности и контура вокруг разреза. Однако благодаря тому, что $\Lambda(v)$ регулярна на бесконечности, нужно рассматривать лишь контур вокруг разреза. Обозначим через $\Lambda^\pm(v)$ значения функции $\Lambda(v)$ при $\operatorname{Im} v \rightarrow 0^\pm$, $\operatorname{Re} v \in [-1, 1]$. Тогда из уравнения (2)

¹⁾ Это можно было бы предвидеть, если учесть инвариантность уравнений переноса относительно операции зеркального отражения (разд. 2.1). Так, обе функции $\psi(x, \mu)$ и $\psi(-x, -\mu)$ будут решениями уравнения переноса. Но ввиду того, что $\psi(x, \mu) = e^{-x/v} \varphi_v(\mu)$, функцию $\psi(-x, -\mu)$ можно записать в виде $e^{x/(-v)} \varphi_{-v}(-\mu)$.

находим, что

$$\Lambda^{\pm} = 1 + \frac{cv}{2} P \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\mu - v} \pm \frac{\pi icv}{2}. \quad (5)$$

Так как $\Lambda(v) = \Lambda(-v)$ и $(\Lambda^+)^* = \Lambda^-$, то

$$\Delta_c \arg \Lambda = 4\Delta_{01} \arg \Lambda^+, \quad (6)$$

где через $\Delta_c f$ обозначена величина приращения функции $f(v)$ при изменении v вдоль замкнутого контура c , охватывающего разрез, а $\Delta_{01} f$ — величина соответствующего приращения функции $f(v)$ при изменении v от 0 до 1. Так как

$$\arg \Lambda^+ = \arctg \frac{\pi cv}{2 \left[1 + (cv/2) P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu - v} \right]}, \quad (7a)$$

то можно принять

$$\arg \Lambda^+(0) = 0. \quad (7b)$$

Далее, функция

$$1 + \frac{cv}{2} P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu - v} = 1 - cv \operatorname{Arth} v \quad (7c)$$

монотонно убывает от 1 до $-\infty$ при изменении v от 0 до 1. Следовательно, $\arg \Lambda^+(1) = \pi$. Таким образом,

$$\Delta_c \arg \Lambda = 4\pi, \quad (8)$$

откуда следует, что $\Lambda(v)$ имеет два нуля в плоскости с разрезом. Как уже отмечалось, эти нули лежат либо на мнимой оси, либо на действительной в промежутках $[\pm 1, \pm \infty]$.

Рассмотрим сначала случай $1 \leq v \leq \infty$. Мы уже видели, что

$$\Lambda(v) \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad v \rightarrow 1+ \quad (9a)$$

и

$$\Lambda(v) \rightarrow 1 - c \quad \text{при} \quad v \rightarrow \infty. \quad (9b)$$

Таким образом, ясно, что при $c < 1$ функция $\Lambda(v)$ меняет знак при изменении v между значениями $v = 1$ и $v = \infty$. Так как $\Lambda(v)$ имеет лишь два нуля и, как отмечалось, они располагаются парами, отсюда следует, что при $c < 1$ уравнение $\Lambda(v) = 0$ имеет один корень v_0 на положительной полуоси $[+1, +\infty]$ и соответствующий ему корень на отрицательной действительной полуоси.

Из формулы (4a) легко видеть, что при $c \rightarrow 0$ корень v_0 стремится к 1. Далее, при $c \rightarrow 1$, как это видно из формулы (4b), $v_0 \rightarrow \infty$. При изменении c от 0 до 1 величина v_0 монотонно возрастает от 1 до ∞ . (Случай $c = 1$ при этом соответствует двойному

корню на бесконечности. Подробнее этот вопрос обсуждается в приложении F).

Поскольку корни уравнения $\Lambda(v) = 0$ при $c \geq 1$ не лежат на действительной оси, ясно, что при $c > 1$ они должны лежать на мнимой оси. Поэтому, если положить $v = 1/i\sigma$, то получим

$$\Lambda(v) = 1 - c \frac{\operatorname{arctg} \sigma}{\sigma}. \quad (10)$$

Мы видим, что в данном случае

$$\Lambda \rightarrow 1 - c \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow 0 \quad (11)$$

и

$$\Lambda \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad \sigma \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Таким образом, при $c > 1$ уравнение $\Lambda(v) = 0$ имеет один корень $v_0 = 1/i\sigma_0$ на положительной мнимой полуоси и, конечно, соответствующий ему корень $-v_0$ на отрицательной мнимой полуоси. Эти корни монотонно изменяются от $\pm i\infty$ до $\pm i0$ при изменении c от 1 до ∞ .

Подведем итоги:

- а) $c < 1$. Уравнение $\Lambda(v) = 0$ имеет два корня $\pm v_0$ на действительной оси.
- б) $c > 1$. Уравнение $\Lambda(v) = 0$ имеет два корня $\pm v_0$ на мнимой оси.
- с) $c = 1$. Оба корня стремятся к бесконечности. Более подробно этот случай рассмотрен в приложении F.

Определив собственные значения, найдем теперь собственные функции. Обозначим через $\varphi_{0\pm}$ собственные функции, соответствующие собственным значениям $\pm v_0$. Тогда

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \pm c \frac{v_0}{2} \frac{1}{\pm v_0 - \mu}. \quad (13)$$

Функции (13) являются *дискретными модами* уравнения переноса; заметим, что они получены в предположении, что $v_0 \notin [-1, 1]$. В следующем разделе мы рассмотрим случай $v_0 \in [-1, 1]$. При этом собственные функции будут определяться формулой (10) разд. 4.2. Мы покажем, что в этом случае решение существует при любом v из отрезка $[-1, 1]$ и, следовательно, соответствующие собственные функции образуют *континуум мод*.

В предельных случаях $c \simeq 0$, $c \simeq 1$ и $c \gg 1$ можно получить удобные приближенные формулы для величины v_0 . Рассмотрим эти случаи.

а) $c \rightarrow 0$. Как мы уже видели, $v_0 \rightarrow 1$ вдоль действительной оси. Имеем

$$1 - \frac{cv_0}{2} \ln \left[\frac{1 + 1/v_0}{1 - 1/v_0} \right] = 0. \quad (14)$$

Если переписать это уравнение в виде

$$\ln \left(1 - \frac{1}{v_0} \right) = \ln \left(1 + \frac{1}{v_0} \right) - \frac{2}{cv_0}, \quad (15)$$

то можно найти величину v_0 методом последовательных приближений. Нулевое приближение получим, положив в правой части равенства (15) $v_0 = 1$. Таким образом,

$$\ln \left(1 - \frac{1}{v_0} \right) = \ln 2 + \ln [e^{-2/c}], \quad (16a)$$

или

$$\frac{1}{v_0} = 1 - 2e^{-2/c}. \quad (16b)$$

Подстановка (16b) в правую часть равенства (15) приводит к следующему приближению и т. д.

б) $c \rightarrow 1$. Как было показано, при этом $v_0 \rightarrow \infty$. В этом случае удобно ввести величину $y_0 = 1/v_0$ и воспользоваться формулой (4b). В результате получим

$$1 = \frac{c}{y_0} \operatorname{Arth} y_0. \quad (17)$$

Разложим в ряд функцию $\operatorname{Arth} y_0$; тогда

$$1 = \frac{c}{y_0} \left[y_0 + \frac{1}{3} y_0^3 + \frac{1}{5} y_0^5 + \dots \right]. \quad (18)$$

Заменим y_0 на $1/v_0$:

$$\frac{c}{3v_0^2} = 1 - c \left[1 + \frac{1}{5v_0^4} + \frac{1}{7v_0^6} + \dots \right]. \quad (19)$$

Таким образом, в нулевом приближении

$$1/v_0 = \sqrt{3(1-c)}, \quad (20)$$

а в первом приближении

$$\frac{c}{3v_0^2} = 1 - c - \frac{c}{5} \left[\frac{3(1-c)}{c} \right]^2 \quad (21)$$

или

$$\frac{1}{v_0^2} = \frac{3(1-c)}{1-(1-c)} \left[1 - \frac{9}{5}(1-c) \right]. \quad (22)$$

Отсюда

$$1/v_0 = \sqrt{3(1-c)} \left[1 - \frac{2}{5}(1-c) \right] \quad (23)$$

и т. д.

с) $c \gg 1$. Положим

$$v_0 = 1/i\sigma_0. \quad (24)$$

Таким образом, нам нужно найти корни уравнения

$$1 = \frac{c}{\sigma_0} \operatorname{arctg} \sigma_0. \quad (25)$$

Так как σ_0 велико, то

$$\operatorname{arctg} \sigma_0 \simeq \pi/2. \quad (26)$$

Следовательно, в нулевом приближении

$$\sigma_0 = c (\pi/2). \quad (27)$$

Чтобы найти следующее приближение, запишем

$$\operatorname{arctg} x = \pi/2 - 1/x + 1/3x^3. \quad (28)$$

Полагая в правой части уравнения (25) аргумент функции $\operatorname{arctg} x$ равным $\pi/2$, получаем

$$\sigma_0 = c \left[\operatorname{arctg} \frac{c\pi}{2} \right] = \frac{c\pi}{2} \left[1 - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{c} + \dots \right]. \quad (29)$$

На рис. 4.1 и 4.2 изображены функции $1/\nu_0(c)$ при $0 \leq c \leq 1$ и $\sigma_0(c)$ при $c > 1$. Эти кривые взяты из книги Кейза, Гоффмана

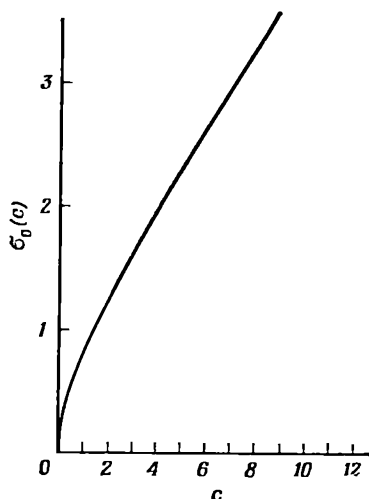
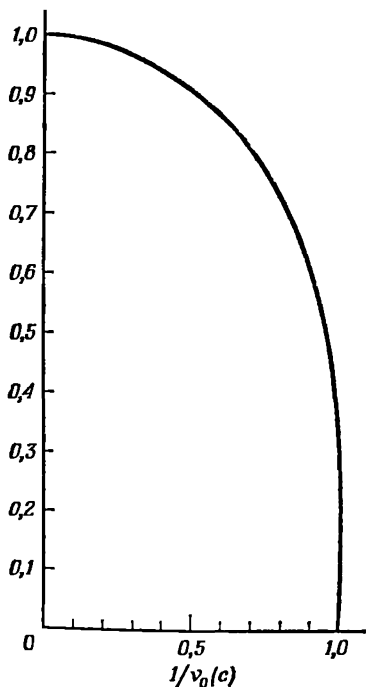


Рис. 4.1. Зависимость $1/\nu_0$ от c .

Рис. 4.2. Зависимость σ_0 от c .

и Плачека [1], где приведены некоторые таблицы, а также разложения для σ_0 с большим числом членов, чем здесь. Перейдем теперь к исследованию случая континуума собственных значений и соответствующего ему континуума собственных функций.

4.4. Континуум собственных функций

Если $v \in [-1, 1]$, то, как уже отмечалось в разд. 4.2, для определения собственных функций $\varphi_v(\mu)$ следует использовать формулу (10) разд. 4.2:

$$\varphi_v(\mu) = \frac{cv}{2} P \frac{1}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(v-\mu). \quad (1)$$

Учитывая условие нормировки (формула (4) разд. 4.2), находим

$$\lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} P \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{v-\mu}. \quad (2)$$

Очевидно, функцию $\lambda(v)$ всегда можно выбрать так, чтобы соотношение (2) удовлетворялось. Следовательно, любое значение v из отрезка $[-1, 1]$ является допустимым собственным значением; континуум соответствующих собственных функций при этом определяется формулой (1), где функция $\lambda(v)$ имеет вид (2). Вычисляя главное значение интеграла в формуле (2), получаем для $\lambda(v)$ явное выражение:

$$\lambda(v) = 1 - vc \operatorname{Arth} v. \quad (3)$$

Другое удобное представление для $\lambda(v)$ можно найти на основе формул Племель (см. [25]). Применяя эти формулы к функции $\Lambda(v)$, определенной соотношением (2) разд. 4.3, получаем

$$\Lambda^+(v) - \Lambda^-(v) = \pi icv \quad (4a)$$

и

$$\Lambda^+(v) + \Lambda^-(v) = \left[1 - \frac{cv}{2} P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v-\mu} \right] = 2\lambda(v), \quad (4b)$$

откуда

$$\Lambda^+(v) = \lambda(v) + \pi icv/2, \quad (5a)$$

$$\Lambda^-(v) = \lambda(v) - \pi icv/2 \quad (5b)$$

и

$$\lambda(v) = \frac{1}{2} [\Lambda^+(v) + \Lambda^-(v)]. \quad (6)$$

Итак, кроме двух дискретных собственных значений $\pm v_0$, найденных в предыдущем разделе, существует континуум собственных значений — всевозможные значения v , принадлежащие отрезку $[-1, 1]$. Соответствующие собственные функции определяются формулой (1), где $\lambda(v)$ имеет вид (3) или (6).

В следующем разделе покажем, что эти собственные функции ортогональны. Получим условие их нормировки. Затем докажем, что функции системы собственных функций. С по-

мощью этих результатов можно будет провести аналогию между задачами теории переноса и задачами «классических» дифференциальных уравнений в частных производных. Мы разложим решение уравнения переноса в ряд по ортонормированным функциям, удовлетворяющим соответствующему однородному уравнению, и потребуем выполнения граничных условий. Так будут определены коэффициенты разложения.

4.5. Ортогональность и нормировка (случай целого отрезка)

Как отмечалось в предыдущем разделе, для того чтобы применить найденные собственные функции к решению уравнения переноса, нужно доказать их ортогональность и полноту, а также определить постоянные нормировки. Полнота будет доказана в разд. 4.6 и 4.8, а сейчас (и в разд. 4.9) мы рассмотрим ортогональность и нормировку.

Теорема. Функции $\varphi_\nu(\mu)$ ортогональны, т. е.

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_\nu(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu = 0, \quad \nu \neq \nu'. \quad (1)$$

(Индексами ν и ν' здесь отмечены собственные функции, принадлежащие как непрерывному, так и дискретному спектру.)

Доказательство простое. Функция $\varphi_\lambda(\mu)$ удовлетворяет уравнению (3) разд. 4.2:

$$[1 - \mu/\nu] \varphi_\nu(\mu) = (c/2) \int_{-1}^1 \varphi_\nu(\mu') d\mu'. \quad (2)$$

Для $\varphi_{\nu'}(\mu)$ соответственно имеем

$$[1 - \mu/\nu'] \varphi_{\nu'}(\mu) = (c/2) \int_{-1}^1 \varphi_{\nu'}(\mu') d\mu'. \quad (3)$$

Умножим уравнение (2) на $\varphi_{\nu'}(\mu)$, уравнение (3) на $\varphi_\nu(\mu)$, вычтем из второго уравнения первое и проинтегрируем по μ :

$$\left[\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right] \int_{-1}^1 \mu \varphi_\nu(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu = 0. \quad (4)$$

Теорема доказана.

Вычислим теперь «нормировочный» интеграл, т. е. интеграл в уравнении (1) при $\nu = \nu'$. Для дискретных мод это просто,

поскольку

$$N_{0\pm} \equiv \int_{-1}^1 \mu \Phi_{0\pm}^2(\mu) d\mu = \left[\frac{c v_0}{2} \right]^2 \int_{-1}^{+1} \frac{\mu d\mu}{(\pm v_0 - \mu)^2}. \quad (5)$$

Определим N_{0+} (N_{0-} получим заменой v_0 на $-v_0$). Вспомним, что

$$\Lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu}, \quad (6a)$$

откуда

$$\frac{\partial \Lambda(v)}{\partial v} = -\frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu} + \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{(v - \mu)^2} = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \frac{\mu}{(v - \mu)^2} d\mu. \quad (6b)$$

Таким образом,

$$N_{0+} = \frac{c}{2} v_0^2 \frac{\partial \Lambda(v)}{\partial v} \Big|_{v=v_0}. \quad (7)$$

Другое удобное выражение для N_{0+} можно найти, положив с самого начала $\kappa = 1/v$. Тогда

$$N_{0+} = -\frac{c}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial \kappa} \Big|_{\kappa=\kappa_0} = -\frac{c}{2} \frac{\partial \Lambda(\kappa_0)}{\partial \kappa_0}.$$

Поскольку κ_0 — решение уравнения

$$1 - c \frac{\text{Arth } \kappa_0}{\kappa_0} = 0,$$

дифференцирование этого уравнения по c дает

$$-c \frac{\partial}{\partial \kappa_0} \left[\frac{\text{Arth } \kappa_0}{\kappa_0} \right] = \left(\frac{\partial \kappa_0}{\partial c} \right)^{-1} \frac{\text{Arth } \kappa_0}{\kappa_0},$$

или

$$\frac{\partial \Lambda(\kappa_0)}{\partial \kappa_0} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \kappa_0}{\partial c} \right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$N_{0+} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \kappa_0}{\partial c} \right)^{-1}.$$

Эту формулу можно представить в более удобном виде:

$$\frac{1}{2N_{0+}} = -\frac{\partial \kappa_0}{\partial c} = -\frac{1}{2\kappa_0} \frac{\partial \kappa_0^2}{\partial c}.$$

Теперь N_{0+} легко вычисляется из формул (7) и (4b) разд. 4.3:

$$N_{0+} = \frac{c}{2} v_0^3 \left[\frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right]. \quad (8a)$$

Полагая $v_0 = -v_0$, получаем

$$-N_{0-} = N_{0+}. \quad (8b)$$

В табл. 4.1 величина $1/N_{0+}$ протабулирована как функция от c .

Таблица 4.1

c	$1/N_{0+}$	c	$1/N_{0+}$
0,1	0	0,70	1,9189
0,2	0	0,80	2,8872
0,3	0	0,85	3,6310
0,4	0,3787	0,90	4,8000
0,5	0,7643	0,95	7,2745
0,6	0,2630		

Для определения нормировочных интегралов для функций непрерывного спектра придется проделать более кропотливую работу, так как функции непрерывного спектра не являются функциями с интегрируемым квадратом (см. обсуждение в разд. 4.2). Нормировочные интегралы для них можно вычислить в следующем смысле. Нам нужны нормировочные интегралы для вычисления коэффициентов разложения произвольной функции

$$f(\mu) = \int_{-1}^1 A(v') \varphi_{v'}(\mu) dv'. \quad (9)$$

Умножим равенство (9) на $\mu \varphi_v(\mu)$ и проинтегрируем по μ :

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_v(\mu) f(\mu) d\mu = \int_{-1}^1 \mu \varphi_v(\mu) d\mu \int_{-1}^1 A(v') \varphi_{v'}(\mu) dv'. \quad (10)$$

Левая часть равенства (10) по аналогии с обычным случаем должна быть произведением функции $A(v)$ на постоянную нормировки $N(v)$. Следовательно,

$$N(v) = \frac{1}{A(v)} \int_{-1}^1 \mu \varphi_v(\mu) d\mu \int_{-1}^1 A(v') \varphi_{v'}(\mu) dv'. \quad (11)$$

Мы сталкиваемся здесь с одним из тех редко встречающихся в физике случаев, когда важен порядок интегрирования (из-за сингулярности функций $\varphi_v(\mu)$). Покажем, как вычислить двойной интеграл (11). Рассмотрим интеграл

$$\bar{N}(v) = \frac{1}{A(v)} \int_{-1}^1 dv' A(v') \int_{-1}^1 \mu \varphi_{v'}(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu, \quad (12)$$

отличающийся от интеграла (11) лишь порядком интегрирования. Этот интеграл найти нетрудно, если воспользоваться явным видом функций $\varphi_\nu(\mu)$. Зная $\bar{N}(\nu)$, можно определить $N(\nu)$ с помощью формулы Пуанкаре — Бертрана (см. [25]).

Итак, подставим

$$\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\mu - \nu) \quad (13)$$

в формулу (12):

$$\begin{aligned} A(\nu) \bar{N}(\nu) = & \int_{-1}^1 dv' A(\nu') \int_{-1}^1 \mu d\mu \left[\lambda(\nu') \lambda(\nu) \delta(\mu - \nu') \delta(\mu - \nu) + \right. \\ & + \lambda(\nu') \delta(\mu - \nu') \frac{c\nu}{2} P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\mu - \nu) \frac{c\nu'}{2} P \frac{1}{\nu' - \mu} + \\ & \left. + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \nu' \nu P \frac{1}{\nu' - \mu} P \frac{1}{\nu - \mu} \right]. \quad (14) \end{aligned}$$

Первые три интеграла вычисляются легко; для вычисления четвертого воспользуемся тождеством

$$\mu \left[\frac{1}{\nu' - \mu} \right] \left[\frac{1}{\nu - \mu} \right] \equiv \left[\frac{\nu}{\nu - \mu} - \frac{\nu'}{\nu' - \mu} \right] \frac{1}{\nu' - \nu}. \quad (15)$$

Получим

$$\begin{aligned} A(\nu) \bar{N}(\nu) = & \nu A(\nu) \lambda^2(\nu) - \frac{c\nu}{2} P \int_{-1}^1 \frac{A(\nu') \lambda(\nu')}{\nu' - \nu} \nu' d\nu' + \\ & + \frac{c\nu}{2} \lambda(\nu) P \int_{-1}^1 \frac{A(\nu')}{\nu' - \nu} \nu' d\nu' + \\ & + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \nu P \int_{-1}^1 \frac{\nu' A(\nu')}{\nu' - \nu} d\nu' P \int_{-1}^1 d\mu \left[\frac{\nu}{\nu - \mu} - \frac{\nu'}{\nu' - \mu} \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Второй интеграл в последнем слагаемом формулы (16) равен

$$P \int_{-1}^1 d\mu \frac{\nu}{\nu - \mu} - P \int_{-1}^1 d\mu \frac{\nu'}{\nu' - \mu} = \frac{2}{c} [\lambda(\nu') - \lambda(\nu)]. \quad (17)$$

Подставляя это равенство в формулу (16), замечаем, что последнее слагаемое взаимно уничтожается с суммой второго и третьего, откуда

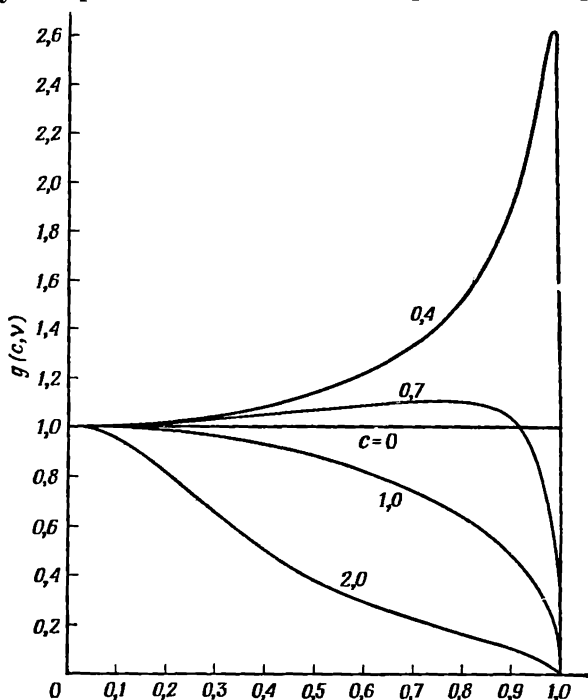
$$\bar{N}(\nu) = \nu \lambda^2(\nu). \quad (18)$$

Смысл проделанных выкладок заключается в том, что теперь можно связать $\bar{N}(\nu)$ и $N(\nu)$ при помощи формулы Пуанкаре —

Бертрана

$$\begin{aligned}
 P \int_{-1}^1 \frac{1}{\mu - \nu} d\mu P \int_{-1}^1 \frac{1}{\nu' - \mu} g(\mu, \nu') d\nu' = \\
 = -\pi^2 g(\nu, \nu) + \int_{-1}^1 d\nu' \int_{-1}^1 P \frac{1}{\mu - \nu} P \frac{1}{\nu' - \mu} g(\mu, \nu') d\mu, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где $g(\mu, \nu)$ — произвольная функция. Эта формула показывает, как следует производить изменение порядка интегрирования,

Р и с. 4.3. Функция $g(c, \mu)$ в зависимости от μ .

Если подставить в формулу (14) явное выражение для $\varphi_\nu(\mu)$ и выполнить умножение, то мы увидим, что первые три слагаемых в выражении для $A(\nu) N(\nu)$ совпадают с первыми тремя слагаемыми в выражении для $A(\nu) \bar{N}(\nu)$ (формула (16)), а последние слагаемые в этих выражениях отличаются лишь порядком интегрирования. Таким образом, согласно формуле (19),

$$A(\nu) N(\nu) = A(\nu) \bar{N}(\nu) + \frac{c^2 \pi^2}{4} \nu^3 A(\nu), \quad (20)$$

или

$$N(v) = v \left[\lambda^2(v) + \frac{\pi^2 c^2}{4} v^2 \right]. \quad (21)$$

Итак, условие ортогональности для собственных функций непрерывного спектра символически можно записать в виде

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{v'}(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu = N(v) \delta(v - v'). \quad (22)$$

С учетом формул (5а) и (5b) разд. 4.4 функция $N(v)$ принимает вид

$$N(v) = v \Lambda^+(v) \Lambda^-(v), \quad (23)$$

а в силу формулы (3) настоящего раздела она равна

$$N(v) = v [(1 - cv \operatorname{Arth} v)^2 + c^2 \pi^2 v^2 / 4], \quad (24)$$

или

$$N(v) = v/g(c, v). \quad (25)$$

Функция $g(c, v)$ хорошо изучена [1]. На рис. 4.3 представлены графики функции $g(c, v)$ для различных значений c . Таблицы с более подробной информацией можно найти в работе [1].

4.6. Теорема полноты (случай целого отрезка)

В предыдущих разделах настоящей главы мы нашли систему собственных значений и собственных функций однородного уравнения Больцмана. Она состоит из двух дискретных собственных значений $\pm v_0$ и двух отвечающих им собственных функций $\varphi_{0\pm}(\mu)$, а также из континуума собственных значений v , принадлежащих отрезку $[-1, 1]$, и отвечающего ему континуума собственных функций $\varphi_v(\mu)$. Мы показали, что собственные функции ортогональны (с весом μ), и вычислили необходимые нормировочные постоянные.

Прежде чем применять эти собственные функции «обычным» образом, т. е. разлагать по ним решения задач теории переноса, необходимо доказать, что они образуют полную систему в том смысле, что любую функцию переменной μ можно разложить в ряд по функциям $\varphi_{0\pm}$ и φ_v . В настоящем разделе мы как раз этим и займемся, но будем разлагать в ряд лишь функции, подчиненные некоторым условиям. (Эти условия обсуждаются в приложении G). Мы докажем *теорему полноты для целого отрезка* $[-1, 1]$ ¹⁾.

¹⁾ В разд. 4.8 будет доказана теорема полноты для половинного отрезка $[0, 1]$.

Вопросы применения теоремы полноты к решению различных задач теории переноса рассматриваются подробно в разд. 4.7.

Теорема. Функции $\varphi_{0\pm}(\mu)$ и $\varphi_\nu(\mu)$ образуют полную систему для функций $\psi(\mu)$ класса G^1 , определенных на отрезке $-1 \leq \mu \leq 1$.

Таким образом, нам нужно доказать, что любую функцию $\psi(\mu)$ класса G можно представить в виде

$$\psi(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad (1)$$

где a_{0-} , a_{0+} и $A(\nu)$ — коэффициенты разложения, причем $a_{0\pm}$ — постоянные, а функция $A(\nu)$ принадлежит классу G .

Метод доказательства состоит в следующем. Предположим, что любую функцию $\psi'(\mu)$ можно представить в виде

$$\psi'(\mu) = \int_{-1}^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu. \quad (2)$$

Будем рассматривать уравнение (2) как сингулярное интегральное уравнение для неизвестной функции $A(\nu)$. Если существует решение, принадлежащее классу G , то разложение (2) справедливо. Как мы увидим, вообще говоря, уравнение (2) не разрешимо. Для того чтобы оно было разрешимо, функция $\psi'(\mu)$ должна удовлетворять двум дополнительным условиям; этих условий будет достаточно для определения коэффициентов $a_{0\pm}$ и, следовательно, для справедливости разложения (1).

Метод доказательства заключается просто в решении интегрального уравнения (2), и в этом смысле доказательство конструктивно: коэффициенты разложения получаются в процессе доказательства, а именно определяются из условий ортогональности. Доказательство же теоремы полноты в общем случае (разд. 4.8) практически эквивалентно построению подходящих условий ортогональности (разд. 4.9).

Хотя эту теорему можно доказать методом разд. 4.8, мы дадим другое доказательство, поскольку мы хотим показать прием, приводящий в рассматриваемом случае к значительным упрощениям. Попутно мы ознакомимся с малоизвестными методами решения сингулярных интегральных уравнений типа уравнения (2). Эти методы подробно описаны Мухелишвили [25]. Итак, попытаемся построить решение уравнения

$$\psi'(\mu) = \int_{-1}^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu. \quad (2)$$

¹⁾ См. приложение G.

Вспомним, что функция $\varphi_\nu(\mu)$ задается формулой (10) разд. 4.2:

$$\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu), \quad (3)$$

где

$$\lambda(\nu) = \frac{1}{2} [\Lambda^+(\nu) + \Lambda^-(\nu)] \quad (4)$$

(формула (6) разд. 4.4). Подставим формулы (3) и (4) в уравнение (2):

$$\psi'(\mu) = \frac{1}{2} [\Lambda^+(\mu) + \Lambda^-(\mu)] A(\mu) + \frac{c}{2} P \int_{-1}^1 \frac{\nu A(\nu)}{\nu - \mu} d\nu. \quad (5)$$

Введем теперь функцию

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c}{2} \frac{\nu A(\nu)}{\nu - z} d\nu. \quad (6)$$

Если $A(\nu)$ существует и принадлежит классу G , то функция $n(z)$ обладает следующими свойствами (см. приложение G):

1) $n(z) \in \mathfrak{U}$, где \mathfrak{U} — комплексная плоскость с разрезом от -1 до 1 ;

2) $n(z) \sim 1/z$ при $z \rightarrow \infty$;

$$3a) n^+(z) + n^-(z) = (1/\pi i) P \int_{-1}^1 (c\nu/2) [A(\nu)/(\nu - z)] d\nu;$$

$$3b) n^+(z) - n^-(z) = (cz/2) A(z).$$

В силу свойств 3a и 3b находим из уравнения (5), что

$$\begin{aligned} \frac{c\mu}{2} \psi'(\mu) &= \frac{1}{2} [\Lambda^+(\mu) + \Lambda^-(\mu)] [n^+(\mu) - n^-(\mu)] + \\ &+ \frac{\pi i c \mu}{2} [n^+(\mu) + n^-(\mu)]. \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью соотношения (4a) из разд. 4.4 получаем

$$\frac{c\mu}{2} \psi'(\mu) = \Lambda^+(\mu) n^+(\mu) - \Lambda^-(\mu) n^-(\mu). \quad (8)$$

Таким образом, если мы сможем найти функцию n , значения которой на сторонах разреза $(-1, 1)$ удовлетворяют уравнению (8) и которая обладает свойствами 1 и 2, то можно будет утверждать, что функция $A(\nu)$ существует и ее можно будет найти исходя из свойства 3b. Чтобы найти функцию n , введем новую функцию

$$J(z) = \Lambda(z) n(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \frac{\psi'(\mu) d\mu}{\mu - z}, \quad (9)$$

обладающую следующими свойствами:

- 1) $J(z) \in \mathfrak{U}$;
- 2) $J(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$;
- 3) $J^+(z) - J^-(z) = \Lambda^+ n^+ - \Lambda^- n^- - (c\mu/2) \psi'(z) = 0$;

последнее равенство следует из уравнения (8). Таким образом, согласно свойству 3, функция $J(z)$ не имеет разрыва вдоль разреза Π , следовательно, аналитична в любой конечной части комплексной плоскости и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Но тогда по теореме Лиувилля

$$J(z) \equiv 0, \quad (10)$$

откуда

$$n(z) = \frac{1}{\Lambda(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \frac{\psi'(\mu)}{\mu - z} d\mu. \quad (11)$$

Если выполнены свойства 1 и 2 для $n(z)$, то формула (11) дает искомое решение. Свойство 2, очевидно, выполняется, поскольку $n(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Свойство 1, напротив, не выполняется, так как функция $\Lambda(z)$ обращается в нуль при $z = \pm v_0$ (для определения дискретных собственных значений использовалось уравнение $\Lambda(v) = 0$). Таким образом, функция $n(z)$ имеет простые полюсы в точках $\pm v_0$, если только не выполняются соотношения

$$\int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \frac{\psi'(\mu)}{\mu \pm v_0} d\mu = 0. \quad (12)$$

Разумеется, в общем случае эти соотношения не выполняются. Однако мы ведь пытаемся найти разложение не для функции $\psi'(\mu)$, а для функции

$$\psi(\mu) = \psi'(\mu) + a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu)$$

(см. уравнение (1)). Тогда соотношения (12) эквивалентны соотношениям

$$\int_{-1}^1 \frac{\mu\psi(\mu)}{\mu \pm v_0} d\mu = \int_{-1}^1 \frac{\mu}{\mu \pm v_0} [a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu)] d\mu. \quad (13)$$

Учитывая, что

$$\varphi_{0\pm} = \frac{c}{2} \frac{v_0}{v_0 \mp \mu}, \quad (14)$$

что функции φ_{0+} и φ_{0-} ортогональны и что

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{0\pm}^2(\mu) d\mu = N_{0\pm}$$

(см. разд. 4.5), мы заключаем, что соотношения (13) будут выполнены, если положить

$$a_{0\pm} = \frac{\int_{-1}^1 \mu \varphi_{0\pm}(\mu) \psi(\mu) d\mu}{N_{0\pm}}. \quad (15)$$

Нетрудно видеть, что именно таким образом мы получили бы значения $a_{0\pm}$ из разложения (1) обычным путем, а именно умножая (1) на $\mu \varphi_{0\pm}$ и пользуясь условиями ортогональности. Теперь соотношения (12) будут выполнены и функция $n(z)$, определенная в соответствии с (14), будет обладать нужными свойствами. Теорема полноты доказана.

В качестве иллюстрации покажем, что функция $A(v)$, определенная на основе свойства 3b, т. е.

$$A(v) = \frac{2}{cv} [n^+(v) - n^-(v)], \quad (16)$$

совпадает с функцией, которую можно получить из формулы (1), если умножить ее на $\mu \varphi_v(\mu)$ и проинтегрировать по μ , т. е. с функцией

$$A(v) = \frac{1}{N(v)} \int_{-1}^1 \mu \psi(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu. \quad (17)$$

Действительно, из формулы (11) имеем¹⁾

$$n^\pm(v) = \frac{1}{\Lambda^\pm(v)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \psi'(\mu) \left[P \frac{1}{\mu - v} \pm \pi i \delta(\mu - v) \right] d\mu. \quad (18)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} n^+(v) - n^-(v) &= \frac{1}{2\pi i} P \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \frac{\psi'(\mu)}{\mu - v} d\mu \left[\frac{1}{\Lambda^+(v)} - \frac{1}{\Lambda^-(v)} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \psi'(\mu) \delta(\mu - v) d\mu \left[\frac{1}{\Lambda^+(v)} + \frac{1}{\Lambda^-(v)} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Нетрудно проверить (см. разд. 4.4), что

$$\frac{1}{\Lambda^+} - \frac{1}{\Lambda^-} = -\frac{(\Lambda^+ - \Lambda^-)}{\Lambda^+ \Lambda^-} = -\frac{\pi i c v}{\Lambda^+ \Lambda^-} \quad (20a)$$

и

$$\frac{1}{\Lambda^+} + \frac{1}{\Lambda^-} = \frac{2\lambda(v)}{\Lambda^+ \Lambda^-}. \quad (20b)$$

¹⁾ Это по существу один из эквивалентных путей получения формул Племеля. В этом можно убедиться, взяв интеграл, содержащий дельта-функцию.

Следовательно,

$$\frac{2}{cv} [n^+ - n^-] = \frac{\int_{-1}^1 \mu \psi'(\mu) [(cv/2) P[1/(v-\mu)] + \lambda(v) \delta(\mu-v)] d\mu}{v\Lambda^+(v) \Lambda^-(v)}. \quad (21)$$

В силу соотношения (23) разд. 4.5

$$v\Lambda^+(v) \Lambda^-(v) = N(v) \quad (22)$$

и

$$\frac{cv}{2} P \frac{1}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(\mu-v) \equiv \varphi_v(\mu), \quad (23)$$

так что уравнение (21) переходит в уравнение

$$\frac{2}{cv} [n^+ - n^-] = \frac{1}{N(v)} \int_{-1}^1 \mu \psi'(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu. \quad (24)$$

С другой стороны, так как функции φ_{0+} и φ_{0-} ортогональны функциям φ_v , то

$$\frac{2}{cv} [n^+ - n^-] = \frac{1}{N(v)} \int_{-1}^1 \mu \psi(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu. \quad (25)$$

Отсюда видно, что формулы (16) и (17) согласуются друг с другом, как это, конечно, и должно быть. Вопрос о применимости теоремы полноты к решению различных задач теории переноса мы отложим до следующей главы. В оставшихся разделах настоящей главы будет дано обобщение теоремы полноты, позволяющее применить ее к более широкому кругу задач.

4.7. Характерные приложения теоремы полноты и необходимость ее обобщения

В гл. 5 мы подробно остановимся на применении результатов настоящей главы к задачам теории переноса. В данном разделе мы ограничимся двумя характерными задачами. Это — вычисление функции Грина для бесконечной среды и альбедная задача. Как мы увидим, первая из этих задач достаточно просто решается с помощью формализма, развитого в предыдущих разделах. Вторая требует для своего решения обобщения теоремы полноты, доказанной в разд. 4.6, на случай половинного отрезка, ибо мы хотим найти разложение для функции, определенной не на всем отрезке $-1 \leq \mu \leq 1$, а на его половине $0 \leq \mu \leq 1$. Причина этого ясна: в задачах, в которых, подобно альбедной задаче, есть физическая граница между рассеивающей средой и вакуумом, граничное условие описывает угловое распределение падаю-

цию извне нейтронов и задается функцией, определенной на половинном отрезке $0 \leq \mu \leq 1$. Разумеется, в этом случае нет смысла искать разложение этой функции на всем отрезке $-1 \leq \mu \leq 1$.

Чтобы лучше понять это, рассмотрим сначала функцию Грина для бесконечной среды. Пусть в плоскости $x = 0$ расположен единичный мононаправленный источник нейтронов, излучающий в направлении μ_0 . Тогда функция Грина $G(\mu_0 \rightarrow x, \mu)$ всюду, за исключением точки $x = 0$, удовлетворяет однородному уравнению и $G \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ ¹⁾. В точке $x = 0$ функция G имеет скачок, обусловленный наличием источника (см. уравнение (3) разд. 2.4):

$$G(\mu_0 \rightarrow 0+, \mu) - G(\mu_0 \rightarrow 0-, \mu) = \frac{1}{2\pi\mu} \delta(\mu - \mu_0). \quad (1)$$

Таким образом, можно записать:

$$G(\mu_0 \rightarrow x, \mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) e^{-x/\nu_0} + \int_0^1 A(\nu) e^{-x/\nu} \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad x > 0, \quad (2a)$$

$$G(\mu_0 \rightarrow x, \mu) = -a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) e^{x/\nu_0} - \int_{-1}^0 A(\nu) e^{-x/\nu} \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad x < 0. \quad (2b)$$

Каждое слагаемое в (2a) и (2b) удовлетворяет однородному уравнению. Кроме того, мы выбрали только те моды для $x > 0$ (соответственно для $x < 0$), которые обращаются в нуль на $+\infty$ (соответственно на $-\infty$). Произвольные постоянные a_{0+} , a_{0-} и $A(\nu)$ нужно выбрать так, чтобы удовлетворялось условие скачка (1), т. е.

$$a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu = \delta(\mu - \mu_0)/2\pi\mu. \quad (3)$$

Следовательно, a_{0+} , $A(\nu)$ и a_{0-} — коэффициенты разложения функции $\delta(\mu - \mu_0)/2\pi\mu$ для случая *целого* отрезка, и их можно найти с помощью формул разд. 4.6. Это полностью решает задачу. Решения будут выписаны и подробно рассмотрены в разд. 5.2—5.4.

Займемся теперь альбедной задачей. Нас интересует полупространство, в котором нет распределенных источников и на границу которого падает нейтронный пучок. Таким образом, мы ищем решение однородного уравнения переноса при $x > 0$, удовлетворяющее граничному условию

$$\psi_a(0, \mu) = \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu > 0, \quad (4)$$

¹⁾ В данной задаче и в рассматриваемой далее альбедной задаче мы предполагаем, что $c < 1$.

и стремящееся к нулю при $x \rightarrow \infty$. Такое решение можно представить в виде

$$\psi_a(x, \mu) = a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) e^{-x/\nu_0} + \int_0^1 A(\nu) e^{-x/\nu} \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad (5)$$

где коэффициенты a_{0+} и $A(\nu)$ в отличие от предыдущей задачи определяются из условия (4). Мы приходим к сингулярному интегральному уравнению

$$a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu = \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu > 0, \quad (6)$$

которое существенным образом отличается от соответствующего уравнения (3) для задачи о функции Грина, поскольку в данном случае имеется еще условие положительности μ . В следующем разделе мы дадим обобщение теоремы полноты на случай половинного отрезка, непосредственно построив решения уравнений типа уравнения (6). Мы покажем, что собственные функции на половинном отрезке $0 \leq \mu \leq 1$ уже не будут ортогональными с весом μ . Для нахождения надлежащей весовой функции нам придется решить уравнение, по форме напоминающее уравнение (6). С помощью найденной весовой функции мы сможем сразу получить коэффициенты разложения. В гл. 5 мы дадим ряд приложений новой теоремы полноты к задачам для полупространства.

4.8. Теорема полноты для половинного отрезка

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, теоремы полноты, доказанной в разд. 4.6 (для целого отрезка), недостаточно для решения задач, сформулированных для полупространства (в качестве типичного примера мы привели альбедную задачу). Сейчас мы докажем теорему полноты для *половинного* отрезка, которую затем можно будет использовать для решения различных задач, подобных упомянутой уже альбедной задаче, проблеме Милна и т. д.¹⁾

Теорема. Для функций $\psi(\mu)$ класса G , определенных на отрезке $0 \leq \mu \leq 1$, система функций $\varphi_{0+}(\mu)$ и $\varphi_\nu(\mu)$, $0 \leq \nu \leq 1$, полна²⁾.

¹⁾ Эти задачи решены в гл. 5 и 6.

²⁾ Эта теорема представляет собой частный случай более общей теоремы полноты для половинного отрезка в нестационарном случае. Последняя доведена в разд. 7.2.

Доказательство этой теоремы в основном проводится так же, как доказательство теоремы полноты для целого отрезка, хотя оно и более сложное.

Прежде всего предположим, что произвольную функцию класса G , обозначаемую далее через $\psi'(\mu)$, $0 \leq \mu \leq 1$, можно разложить лишь по модам непрерывного спектра и, таким образом, представить в виде

$$\psi'(\mu) = \int_0^1 A(v) \varphi_v(\mu) dv, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (1)$$

Как и в разд. 4.6, попытаемся решить это сингулярное интегральное уравнение относительно $A(v)$. Для доказательства полноты достаточно показать, что решение существует. Однако в разд. 4.9 нам придется решить аналогичное уравнение для того, чтобы найти соотношения ортогональности для случая половинного отрезка. Поэтому мы приведем здесь метод решения уравнения (1).

Подставим явное выражение для $\varphi_v(\mu)$ (формула (3) разд. 4.6) в уравнение (1):

$$\psi'(\mu) = \frac{1}{2} [\Lambda^+(\mu) + \Lambda^-(\mu)] A(\mu) + \frac{c}{2} P \int_0^1 \frac{vA(v)}{v-\mu} dv, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (2a)$$

где, как прежде,

$$\Lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v-\mu}. \quad (2b)$$

Следуя схеме рассуждений разд. 4.6, введем функцию $n(z)$ по формуле

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{c}{2} \frac{vA(v)}{v-z} dv. \quad (3)$$

Мы видим, что если существует функция $A(v)$, принадлежащая классу G , то функция $n(z)$ будет обладать следующими свойствами:

1) $n(z) \in \mathfrak{A}_1$, где \mathfrak{A}_1 — комплексная плоскость с разрезом от 0 до 1 вдоль действительной оси;

2) $n(z) \sim 1/z$ при $|z| \rightarrow \infty$;

$$3a) \quad n^+(\mu) + n^-(\mu) = (1/\pi i) P \int_0^1 (cv/2) A(v) dv/(v-\mu);$$

$$3b) \quad n^+(\mu) - n^-(\mu) = (c\mu/2) A(\mu).$$

В силу свойств 3а и 3б

$$\Lambda^+(\mu) n^+(\mu) - \Lambda^-(\mu) n^-(\mu) = \frac{[\Lambda^+(\mu) - \Lambda^-(\mu)]}{2\pi i} \psi'(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались равенством (см. разд. 4.4):

$$\Lambda^+(\mu) - \Lambda^-(\mu) = \pi i c \mu. \quad (5)$$

До сих пор схема доказательства практически совпадала со схемой для случая целого отрезка. С этого момента появляется некоторое отличие. При доказательстве теоремы для целого отрезка можно было рассматривать $\Lambda^+ n^+ - \Lambda^- n^-$ как разность граничных значений аналитической функции Λn . Тогда оставалось только построить эту функцию по известному значению ее скачка вдоль разреза и найти затем n . Теперь иная ситуация, поскольку функции Λ отвечает разрез от -1 до 1 , а для функции n аналогичный разрез проходит по отрезку $[0, 1]$. Чтобы преодолеть эту трудность, придется ввести новую функцию $X(z)$, отношение граничных значений которой на краях разреза совпадает с соответствующим отношением для функции $\Lambda(z)$ и которая аналитична в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[0, 1]$, а не $[-1, 1]$.

Разделив уравнение (4) на $\Lambda^-(\mu)$, получим

$$n^+(\mu) \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} - n^-(\mu) = \left[\frac{\Lambda^+}{\Lambda^-} - 1 \right] \frac{\psi'}{2\pi i}, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (6)$$

Введем теперь функцию $X(z)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)}, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (7)$$

и аналитическую при $-1 \leq \mu \leq 0$. На самом деле мы будем требовать большего. Мы будем требовать, чтобы $X(z)$ была отличной от нуля аналитической функцией в комплексной плоскости с разрезом от 0 до 1 . Кроме того, функция $X(z)$ должна быть регулярной на бесконечности. Допустим, что такая функция существует.

Заменим в уравнении (6) Λ^+/Λ^- на X^+/X^- и умножим его на X^- :

$$n^+(\mu) X^+(\mu) - n^-(\mu) X^-(\mu) = \gamma(\mu) \psi'(\mu), \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (8a)$$

где

$$\gamma(\mu) = (1/2\pi i) [X^+(\mu) - X^-(\mu)]. \quad (8b)$$

Решение уравнения (8a) (если оно существует) по аналогии с формулами (8) — (11) разд. 4.6 можно записать в виде

$$n(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\gamma(\mu) \psi'(\mu)}{\mu - z} d\mu. \quad (9)$$

Для того чтобы выяснить, обладает ли функция $n(z)$ свойствами 1, 2 и 3, нужно найти явное выражение для функции $X(z)$. Функция $X_0(z)$, обеспечивающая выполнение условия (7), задается формулой

$$X_0(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu' - z} \ln \left[\frac{\Lambda^+(\mu')}{\Lambda^-(\mu')} \right] \right\}. \quad (10a)$$

Поскольку $\Lambda^+(\mu) = [\Lambda^-(\mu)]^*$, эту формулу можно переписать в виде

$$X_0(z) = \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\Theta(\mu')}{\mu' - z} d\mu' \right], \quad (10b)$$

где $\Theta(\mu) = \arg \Lambda^+(\mu)$ (т. е. $\Lambda^+ = |\Lambda^+| e^{i\Theta}$).

Для того чтобы функцию $X_0(z)$ можно было взять в качестве $X(z)$, она должна быть аналитической, отличной от нуля функцией. Из формулы (10b) видно, что сомнения вызывают лишь концы отрезка интегрирования, а именно точки $z = 0$ и $z = 1$. В этих точках

$$X_0(z) \sim \exp [(1/\pi) \Theta(1) \ln(1-z)], \quad (11)$$

$$X_0(z) \sim \begin{cases} (1-z)^{\Theta(1)/\pi}, & z \simeq 1, \\ z^{\Theta(0)/\pi}, & z \simeq 0. \end{cases} \quad (12)$$

Далее (ср. с формулой (7a) разд. 4.3)

$$\Theta(\mu) = \arctg \frac{\pi c\mu/2}{1 + (c\mu/2) P \int_{-1}^1 [d\mu'/(\mu' - \mu)]}. \quad (13)$$

Отсюда видно, что функция $\Theta(\mu)$ на отрезке $[0, 1]$ монотонно возрастает от 0 до π . Следовательно, $X_0(z) \sim (1-z)$ в окрестности точки $z = 1$ и $X_0(z)$ имеет конечный, отличный от нуля предел при $z \rightarrow 0$. Итак, функция

$$X(z) \equiv \frac{X_0(z)}{1-z} \quad (14)$$

удовлетворяет всем нашим требованиям.

Рассмотрим теперь функцию $n(z)$, определенную формулой (9). Заметим, что хотя эта функция и обладает свойством 1, она, вообще говоря, не обладает свойством 2. Поэтому разложение, которое мы пытаемся осуществить, вообще говоря, невозможно. (Это утверждение не должно вызвать недоумение, поскольку мы сталкивались с таким фактом в случае целого отрезка. Там мы вводили две регулярные функции для того, чтобы разложение стало возможным. Здесь достаточно ввести одну функцию.) Наше

разложение возможно в том частном случае, когда интеграл в формуле (9) убывает на бесконечности как $1/z^2$, т. е.

$$\int_0^1 \frac{\gamma(\mu) \psi'(\mu)}{\mu - z} d\mu \sim \frac{1}{z^2} \text{ при } |z| \rightarrow \infty. \quad (15a)$$

Так как

$$\frac{1}{\mu - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \mu/z} = -\frac{1}{z} \left[1 + \frac{\mu}{z} + \dots \right], \quad (15b)$$

ясно, что условие (15a) удовлетворяется, если

$$\int_0^1 \gamma(\mu) \psi'(\mu) d\mu = 0. \quad (16)$$

Очевидно, что соотношение (16), вообще говоря, не верно. Таким образом, как и в случае целого отрезка, произвольную функцию нельзя разложить в ряд лишь по континууму нормальных мод. Однако можно попытаться найти разложение не для самой функции $\psi'(\mu)$, а для функции

$$\psi(\mu) = \psi'(\mu) + a_{0+} \varphi_{0+}(\mu). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16), видим, что искомое разложение существует, если коэффициент a_{0+} определяется формулой ¹⁾

$$a_{0+} = \frac{\int_0^1 \psi(\mu) \gamma(\mu) d\mu}{\int_0^1 \gamma(\mu) \varphi_{0+}(\mu) d\mu}. \quad (18)$$

Этим заканчивается доказательство теоремы. Вывод: любую функцию $\psi(\mu)$, $0 \leq \mu \leq 1$ можно разложить в ряд

$$\psi(\mu) = a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad (19)$$

где коэффициент a_{0+} задается формулой (18). Функцию $A(\nu)$ можно найти из соотношения

$$A(\nu) = \frac{2}{c\nu} [n^+(\nu) - n^-(\nu)], \quad (20)$$

а $n(z)$ и $X(z)$ имеют вид (9) и (14) соответственно.

¹⁾ Сравнение формул (18) и (19) наводит на мысль, что в случае половинного отрезка справедливо соотношение ортогональности с весовой функцией $W(\mu) = \gamma(\mu)/\varphi_{0+}(\mu)$. В следующем разделе мы докажем, что это именно так.

Прежде чем закончить настоящий раздел, сделаем несколько замечаний. Во-первых, ясно, что аналогичная теорема справедлива и для отрезка $-1 \leq \mu \leq 0$. Соответствующее разложение можно записать в виде

$$\psi(\mu) = a_{0-} \varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^0 A(\nu) \varphi_{\nu}(\mu) d\nu, \quad (21)$$

где

$$a_{0-} = \frac{\int_{-1}^0 \gamma(\mu) \psi(\mu) d\mu}{\int_{-1}^0 \gamma(\mu) \varphi_{0-}(\mu) d\mu}. \quad (22)$$

Во-вторых, величины

$$m_{0+} \equiv \int_0^1 \gamma(\mu) \varphi_{0+}(\mu) d\mu, \quad (23a)$$

$$m_{0-} \equiv \int_{-1}^0 \gamma(\mu) \varphi_{0-}(\mu) d\mu \quad (23b)$$

никогда не обращаются в нуль, в силу чего коэффициенты $a_{0\pm}$ всегда существуют. Этот факт доказывается в разд. 6.2, где устанавливаются некоторые свойства $m_{0\pm}$.

Полученные здесь формулы позволяют вычислять коэффициенты разложения. Другой (более быстрый способ) заключается в использовании соотношений ортогональности, которые будут получены в следующем разделе.

4.9. Соотношения ортогональности для половинного отрезка

Поскольку система функций φ_{0+} и $\varphi_{\nu}(\mu)$, $0 \leq \nu \leq 1$, полна относительно функций, определенных на половинном отрезке $0 \leq \mu \leq 1$, удобно было бы иметь какие-нибудь соотношения ортогональности для вычисления коэффициентов разложения. К сожалению, соотношения (1), (5) и (22) разд. 4.5 перестают быть верными при сужении области интегрирования до отрезка $0 \leq \mu \leq 1$. Мы построим весовую функцию, относительно которой функции системы будут ортогональны на интересующем нас промежутке¹⁾.

Точно так же, как в случае целого отрезка, начнем с того, что выпишем уравнения, которым удовлетворяет система наших

¹⁾ Эти соотношения ортогональности были получены в работе [26].

функций. Эти уравнения таковы:

$$[1 - \mu/\nu] \varphi_\nu(\mu) = c/2, \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad (1)$$

и

$$[1 - \mu/\nu_0] \varphi_{0+}(\mu) = c/2. \quad (2)$$

Нам нужно найти функцию $W(\mu)$, для которой

$$\int_0^1 W(\mu) \varphi_\nu(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu = 0, \quad \nu \neq \nu'. \quad (3)$$

В формуле (3) допустимы такие значения ν и ν' , что

$$0 \leq \nu, \nu' \leq 1 \quad \text{или} \quad \nu, \nu' = +\nu_0. \quad (4)$$

Для того чтобы отыскать функцию W , умножим уравнение (1) для $\varphi_\nu(\mu)$ на пока неизвестную функцию $W(\mu)/\mu$ и на $\varphi_{\nu'}(\mu)$. Точно так же умножим уравнение для $\varphi_{\nu'}(\mu)$ на $W(\mu)/\mu$ и на $\varphi_\nu(\mu)$. Затем вычтем одно уравнение из другого и проинтегрируем по μ :

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\nu} \right] \int_0^1 W(\mu) \varphi_\nu(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu = \\ = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} [\varphi_{\nu'}(\mu) - \varphi_\nu(\mu)] d\mu, \quad 0 \leq \nu, \nu' \leq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогично

$$\left[\frac{1}{\nu_0} - \frac{1}{\nu} \right] \int_0^1 W(\mu) \varphi_\nu \varphi_{0+} d\mu = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} [\varphi_{0+} - \varphi_\nu] d\mu. \quad (6)$$

Соотношения ортогональности (3) будут выполнены, если

$$\int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} \varphi_\nu(\mu) d\mu = \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu, \quad 0 \leq \nu, \nu' \leq 1, \quad (7)$$

и

$$\int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} \varphi_{\nu_0}(\mu) d\mu = \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu. \quad (8)$$

Так как формула (7) должна быть справедливой во всей области изменения ν и ν' , то

$$\int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} \varphi_\nu(\mu) d\mu = A', \quad 0 \leq \nu \leq 1, \quad (9)$$

где A' — постоянная, не зависящая от v . Из соотношения (8) видно, что формула (9) должна быть справедливой и при $v = v_0$.

Если подставить в (9) явные выражения для собственных функций, то получим, что $W(\mu)$ должна удовлетворять сингулярному интегральному уравнению

$$\frac{cv}{2} P \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu(v-\mu)} d\mu + \frac{\lambda(v) W(v)}{v} = A', \quad 0 \leq v \leq 1, \quad (10)$$

при условии

$$\frac{cv_0}{2} \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu(v_0-\mu)} d\mu = A'. \quad (11)$$

Умножим уравнение (10) на v , уравнение (11) на v_0 и перегруппируем члены:

$$\frac{cv}{2} P \int_0^1 \frac{W(\mu)}{v-\mu} d\mu + \lambda(v) W(v) = \pi i v A \quad (12)$$

и

$$\frac{cv_0}{2} \int_0^1 \frac{W(\mu)}{v_0-\mu} d\mu = \pi i v_0 A, \quad (13)$$

где

$$A \equiv \frac{1}{\pi i} \left[A' - \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu} d\mu \right]. \quad (14)$$

Заметим, что уравнение (12) очень похоже на интегральные уравнения, с которыми мы сталкивались при доказательстве теоремы полноты. Поэтому можно применить здесь те же приемы, что и раньше. А именно, зададим функцию $m(z)$ формулой

$$m(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{W(\mu)}{\mu-z} d\mu \quad (15)$$

и перепишем уравнение (12) в виде

$$\Lambda^-(v) m^+(v) - \Lambda^+(v) m^-(v) = A (\Lambda^+ - \Lambda^-), \quad 0 \leq v \leq 1; \quad (16)$$

при этом дополнительное условие (13) перейдет в условие

$$m(v_0) = -A. \quad (17)$$

Решающий шаг — введение функции $Y(z)$, связанной с X -функцией, построенной в предыдущем разделе, формулой

$$Y(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{(v_0-z)}. \quad (18)$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

- а) она аналитична в плоскости с разрезом, за исключением точки v_0 , являющейся ее простым полюсом;
 б) $Y^+/Y^- = \Lambda^-/\Lambda^+$ на разрезе $0 \leq v \leq 1$;
 в) $\lim_{|z| \rightarrow \infty} Y(z) = 1$.

Тогда уравнение (16) будет эквивалентно уравнению

$$Y^+ m^+ - Y^- m^- = -A [Y^+ - Y^-]. \quad (19)$$

Отсюда и из аналитичности функций $m(z)$ и $Y(z)$ вытекает, что функция

$$F(z) \equiv Y(z) m(z) + \frac{A}{2\pi i} \int_0^1 \frac{Y^+(\mu') - Y^-(\mu')}{\mu' - z} d\mu' \quad (20)$$

аналитична (всюду, кроме точки v_0 , где она имеет простой полюс) и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$F(z) = B/(z - v_0), \quad (21)$$

где B — некоторая постоянная. Применяя интегральную формулу Коши для вычисления интеграла от аналитической функции Y в формуле (20), получаем

$$m(z) = \frac{B}{Y(z)(z - v_0)} - A \left[1 + \frac{1}{X(v_0)(v_0 - z)Y(z)} - \frac{1}{Y(z)} \right]. \quad (22)$$

С помощью соотношения (17) выражаем постоянную B через A :

$$B = -A/X(v_0). \quad (23)$$

Окончательно имеем

$$m(z) = A \left[\frac{1}{Y(z)} - 1 \right], \quad (24)$$

или

$$W(\mu) = A \left[\frac{1}{Y^+(\mu)} - \frac{1}{Y^-(\mu)} \right], \quad (25)$$

$$W(\mu) = A (v_0 - \mu) [X^+(\mu) - X^-(\mu)]. \quad (26)$$

Положим ¹⁾ $A = 1/2\pi i$; тогда

$$W(\mu) = \gamma(\mu)(v_0 - \mu),$$

функция $\gamma(\mu)$ определена в разд. 4.8 (формула (8b)).

Попутно отметим следующие эквивалентные и полезные формулы:

$$\gamma(\mu) = \frac{c}{2} \mu \frac{X^-(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} = \frac{c}{2} \mu \frac{X^+(\mu)}{\Lambda^+(\mu)}. \quad (27)$$

¹⁾ Ясно, что постоянная A произвольна. Мы выберем значение A в соответствии с [26].

Итак, функция $W(\mu)$ построена, и выполнение соотношений ортогональности (3) гарантировано. Конечно, их можно проверить и непосредственным интегрированием. Интегралы от произведения собственных функций с весом W легко вычислить, если воспользоваться свойствами функции $m(z)$. В качестве простого примера рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 W(\mu) \varphi_{\nu}(\mu) \varphi_{0-}(\mu) d\mu. \quad (28)$$

Подставим сюда явные выражения для собственных функций:

$$I = \frac{c\nu_0}{2} \left[\frac{\lambda(\nu) \{m^+(\nu) - m^-(\nu)\}}{\nu_0 + \nu} + \frac{c\nu}{2} P \int_0^1 \frac{(m^+ - m^-) d\mu}{(\nu_0 + \mu)(\nu - \mu)} \right]. \quad (29)$$

Применяя разложение на простые дроби

$$\frac{1}{(\nu_0 + \mu)(\nu - \mu)} = \frac{1}{\nu + \nu_0} \left[\frac{1}{\nu_0 + \mu} + \frac{1}{\nu - \mu} \right],$$

получаем

$$\begin{aligned} P \int_0^1 \frac{(m^+ - m^-) d\mu}{(\nu_0 + \mu)(\nu - \mu)} &= \frac{1}{\nu_0 + \nu} \left[P \int_0^1 \frac{m^+ - m^-}{\nu_0 + \mu} d\mu + P \int_0^1 \frac{m^+ - m^-}{\nu - \mu} d\mu \right] = \\ &= \frac{2\pi i}{\nu_0 + \nu} \left[m(-\nu_0) - \left\{ \frac{m^+(\nu) + m^-(\nu)}{2} \right\} \right] \end{aligned} \quad (30)$$

(здесь на последнем шаге использовано определение функции $m(z)$ (формула (15)). Подставляя последнее соотношение в (29) и вспоминая, что

$$\lambda(\nu) = \frac{\Lambda^+ + \Lambda^-}{2}, \quad \Lambda^+ - \Lambda^- = \pi i c \nu, \quad (31)$$

приходим к формуле

$$I = \frac{c\nu_0}{2(\nu_0 + \nu)} [\Lambda^- m^+ - \Lambda^+ m^- + \pi i c \nu m(-\nu_0)]. \quad (32)$$

С учетом (16) формулу (32) можно записать в виде

$$I = \frac{c\nu_0}{2} \frac{c\nu}{2} \left[\frac{(1/A)m(-\nu_0) + 1}{\nu + \nu_0} \right] \equiv c\nu\nu_0 \varphi_0 - X(-\nu_0). \quad (33)$$

Точно таким же образом можно получить следующие полезные нормировочные интегралы (здесь всюду $0 \leq \nu, \nu' \leq 1$):

$$\int_0^1 \varphi_{\nu}(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) W(\mu) d\mu = W(\nu) \frac{N(\nu)}{\nu} \delta(\nu - \nu'), \quad (34a)$$

$$\int_0^1 \varphi_{0+}(\mu) \varphi_{\nu}(\mu) W(\mu) d\mu = 0, \quad (34b)$$

$$\int_0^1 \varphi_{0-}(\mu) \varphi_{\nu}(\mu) W(\mu) d\mu = c\nu_0 X(-\nu_0) \varphi_{0-}(\nu), \quad (34c)$$

$$\int_0^1 \varphi_{0\pm}(\mu) \varphi_{0+}(\mu) W(\mu) d\mu = \mp \left[\frac{1}{2} c\nu_0 \right]^2 X(\pm \nu_0), \quad (34d)$$

$$\int_0^1 \varphi_{-\nu}(\mu) \varphi_{0+}(\mu) W(\mu) d\mu = \frac{c^2 \nu \nu_0}{4} X(-\nu), \quad (34e)$$

$$\int_0^1 \varphi_{-\nu}(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) W(\mu) d\mu = \frac{c\nu'}{2} \varphi_{-\nu}(\nu') (\nu_0 + \nu) X(-\nu). \quad (34f)$$

Некоторую трудность доставляет лишь вывод формулы (34a). Метод вывода аналогичен примененному в случае целого отрезка. Из формулы (34a) следует, что

$$\int_0^1 d\nu' \int_0^1 W(\mu) \varphi_{\nu}(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu = \frac{W(\nu) N(\nu)}{\nu}. \quad (35)$$

Чтобы вычислить этот интеграл описанным выше методом, удобно изменить порядок интегрирования. При этом следует проявить осторожность и в подходящий момент воспользоваться формулой Пуанкаре — Бертрана (формула (19) разд. 4.5). Вычисление таких интегралов проиллюстрировано в приложении L на примере вывода формулы (34d).

4.10. Случай анизотропного рассеяния

А. Уравнение для собственных функций

Метод разложения по нормальным модам уравнения переноса в случае изотропного рассеяния, подробно описанный в предыдущих разделах настоящей главы, можно без труда обобщить на случай анизотропного рассеяния, если предположить, что функция рассеяния $f(\Omega' \cdot \Omega)$ с достаточной точностью аппроксимируется конечной суммой полиномов Лежандра. Здесь мы дадим лишь наброски метода; его полное описание опубликовано в работе [27] ¹⁾.

Представим функцию рассеяния в виде

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\Omega' \cdot \Omega). \quad (1)$$

¹⁾ См. также [28]. Первое исследование анизотропного рассеяния изложено в [29], где рассмотрен случай линейной анизотропии.

(Поскольку $f_0 = 1$, эта функция при $N = 0$ сводится к уже рассмотренной в случае изотропного рассеяния.) Уравнение переноса принимает вид

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = c \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{4\pi} f_l \int \psi(x, \Omega') P_l(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega'. \quad (2)$$

В силу теоремы сложения сферических функций (формула (A.8))

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = c \sum_{l=0}^N f_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\Omega) \int \psi(x, \Omega') Y_{lm}^*(\Omega') d\Omega'. \quad (3)$$

Наконец, если воспользоваться разложением функции $\psi(x, \Omega')$ (формула (B.5)) (напомним, что мы ограничиваемся здесь плоской симметрией) и ортогональностью функций Y_{lm} , можно проинтегрировать уравнение (3) по азимуту. Тогда

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') P_l(\mu') d\mu'. \quad (4)$$

Как и в случае изотропного рассеяния, будем искать решение $\psi(x, \mu)$ в форме

$$\psi(x, \mu) = \varphi_v(\mu) e^{-x/v}, \quad (5)$$

так что из уравнения (4) получаем

$$(v - \mu) \varphi_v(\mu) = \frac{cv}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 \varphi_v(\mu') P_l(\mu') d\mu'. \quad (6)$$

Умножим теперь уравнение (6) на $P_k(\mu)$ и проинтегрируем по μ . Вводя сокращенные обозначения

$$\int_{-1}^1 P_k(\mu) \varphi_v(\mu) d\mu \equiv \varphi_{vk} \quad (7)$$

и учитывая [30], что

$$\int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_k(\mu) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \quad (8a)$$

и

$$\mu P_l(\mu) = \frac{1}{2l+1} [(l+1) P_{l+1}(\mu) + l P_{l-1}(\mu)], \quad (8b)$$

находим рекуррентные формулы для функций φ_{vk} :

$$v(1 - cf_k) \varphi_{vk} - \frac{k+1}{2k+1} \varphi_{v, k+1} - \frac{k}{2k+1} \varphi_{v, k-1} = 0. \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что все $\varphi_{\nu k}$ пропорциональны $\varphi_{\nu 0}$. За условие нормировки примем равенство

$$\varphi_{\nu 0} = 1. \quad (10)$$

В этом случае $\varphi_{\nu k}$ при $k \geq 1$ являются известными функциями c , ν и k и могут быть определены из уравнений (9). В частности,

$$\varphi_{\nu 1} = \nu (1 - c), \quad (11a)$$

$$\varphi_{\nu 2} = \frac{3\nu^2}{2} (1 - cf_1) (1 - c) - \frac{1}{2} \quad (11b)$$

и т. д. (Мы воспользовались тем, что $f_0 = 1$.)

Уравнение (6) теперь принимает вид

$$(\nu - \mu) \varphi_{\nu}(\mu) = \frac{c\nu}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l \varphi_{\nu l} P_l(\mu). \quad (12)$$

В правой части равенства (12) стоит известная функция. Обозначим ее через $(c\nu/2) M(\mu, \nu)$. Тогда

$$M(\mu, \nu) = \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l \varphi_{\nu l} P_l(\mu). \quad (13)$$

Как и раньше, решение уравнения (12) можно записать в виде

$$\varphi_{\nu}(\mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{M(\mu, \nu)}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \quad (14)$$

с условием нормировки¹⁾

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{\nu}(\mu) d\mu = 1. \quad (15)$$

В. Определение дискретных собственных значений

Как и прежде, мы различаем случаи, когда ν не лежит на отрезке действительной оси $[-1, 1]$ (дискретные корни) и когда ν лежит на этом отрезке (континуум собственных значений). Пусть $\nu \notin [-1, 1]$. Тогда из уравнений (14) и (15) получаем

$$\Lambda(\nu) \equiv 1 - \frac{c\nu}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l \varphi_{\nu l} \int_1^{-1} \frac{P_l(\mu)}{\nu - \mu} d\mu = 0. \quad (16)$$

¹⁾ Как и в разд. 4.2, такая нормировка всегда возможна, поскольку $\int_{-1}^1 \varphi_{\nu}(\mu') d\mu' \neq 0$.

При выводе этой формулы использовано явное выражение для $M(\mu, \nu)$ (формула (13)). Интеграл в (16) можно выразить [31] через функции Лежандра второго рода $Q_l(\nu)$:

$$\int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu)}{\nu - \mu} d\mu = 2Q_l(\nu). \quad (17)$$

Таким образом,

$$\Lambda(\nu) = 1 - c\nu \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l \varphi_{\nu l} Q_l(\nu) = 0. \quad (18)$$

Прежде чем исследовать нули функции $\Lambda(\nu)$, заметим, что можно получить другое выражение для Λ , если равенство (14) (при $\nu \notin [-1, 1]$) умножить на $P_l(\mu)$ и проинтегрировать по μ . Тогда

$$\varphi_{\nu k}(\mu) = \frac{c\nu}{2} \sum_{l=0}^N (2l+1) f_l \varphi_{\nu l} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_k(\mu)}{\nu - \mu} d\mu. \quad (19)$$

Но (см. [32])

$$\int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_k(\mu)}{\nu - \mu} d\mu = 2\nu A_{lk} \left(\frac{1}{\nu} \right), \quad (20a)$$

где

$$A_{lk}(\eta) = \frac{1}{\eta} Q_l \left(\frac{1}{\eta} \right) P_k \left(\frac{1}{\eta} \right), \quad l \leq k, \quad (20b)$$

так что (19) принимает вид

$$\sum_{l=0}^N [(2l+1) c\nu^2 f_l A_{lk} - \delta_{lk}] \varphi_{\nu l} = 0. \quad (21)$$

Эта система уравнений может иметь нетривиальные решения только при условии, что ее детерминант равен нулю:

$$\det [(2l+1) c\nu^2 f_l A_{lk} - \delta_{lk}] = 0. \quad (22)$$

Корни уравнения (18) (или (22)) и являются дискретными собственными значениями $\pm \nu_j$. Рассмотрим сначала случай $c = 1$. Непосредственной подстановкой в (22) можно показать, что в этом случае $\nu = \infty$ — корень (кратности 2) уравнения (22). Действительно,

$$\nu \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_k(\mu)}{\nu - \mu} d\mu = \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_k(\mu)}{1 - \mu/\nu} d\mu \rightarrow \frac{2}{2l+1} \delta_{lk} \quad \text{при } \nu \rightarrow \infty. \quad (23)$$

Поэтому в пределе уравнение (22) принимает вид

$$\det [f_l - 1] \delta_{lk} = 0. \quad (24)$$

Λ это тождество, поскольку $f_0 = 1$. Ниже мы покажем, что, как и в случае изотропного рассеяния, если v_j — корень, то $-v_j$ тоже будет корнем. Следовательно, корень $(\pm) \infty$ является корнем кратности 2. Это утверждение, естественно, не зависит от N . Таким образом, в случае изотропного рассеяния ($N = 0$) $v = \infty$ также является корнем кратности 2¹⁾. В этом случае, как нам уже известно, других корней нет. При $N > 0$, разумеется, может быть более двух корней.

Для дальнейшего изучения дискретных собственных значений вернемся к формуле (18). Из формулы (17) видно, что

$$Q_l(-v) = (-1)^{l+1} Q_l(v), \quad (25a)$$

а из формулы (9) —

$$\varphi_{vl} = (-1)^{l+1} \varphi_{-v, l}. \quad (25b)$$

Таким образом, из формулы (18) следует, что

$$\Lambda(v) = \Lambda(-v), \quad (26)$$

так что если v_j — дискретное собственное значение, то $-v_j$ тоже будет собственным значением. Кроме того, если уравнению (18) удовлетворяет точка v_j , то ему удовлетворяет также и точка v_j^* . Итак, корни выступают в комбинациях

$$\pm v_j, \quad \pm v_j^*, \quad (27)$$

т. е. по четыре, если только v_j не есть действительная или чисто мнимая величина. В этих случаях корни располагаются парами, как, например, в случае изотропного рассеяния (разд. 4.3).

Общее число корней можно определить с помощью принципа аргумента, как это было сделано в разд. 4.3. Обозначим число корней через $2M$, тогда

$$2M = \frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg \Lambda(z). \quad (28)$$

Здесь $\Delta_c f(z)$ — приращение функции $f(z)$ при обходе точкой z контура, охватывающего разрез вдоль отрезка $[-1, 1]$. Применяя принцип аргумента, нетрудно показать, что в общем случае [27]

$$M \leq N + 1, \quad (29a)$$

а при $c = 1$

$$M \leq N. \quad (29b)$$

Поскольку обычно приходится рассматривать небольшие значения N , удобнее в каждом конкретном случае просто выписать в явном виде функцию $\Lambda(v)$ и исследовать ее корни. С учетом (28) это сразу же даст нужные результаты (табл. 4.2).

¹⁾ Свойства собственных значений и собственных функций в вырожденном случае $c = 1$ обсуждаются в приложении Е.

Таблица 4.2

Число дискретных собственных значений в случае анизотропного рассеяния [27]

N	c	f_1	M
0	любое c		1
1	$c=1$	любое f_1	1
	любое c	$f_1 < 0$	1
	$c \leq 1 + \frac{1}{3f_1}$	$f_1 > 0$	1
	$c > 1 + \frac{1}{3f_1}$	$f_1 > 0$	2
2	$c=1$ $c \neq 1$	любые f_1, f_2	$\begin{matrix} 1 \\ \leq 3 \end{matrix}$

Мы не будем останавливаться на дальнейших общих свойствах дискретных собственных значений, так как их расположение очень сильно зависит от f_1 и N . Мы предпочтем решать *вековое* уравнение в каждом конкретном случае. В гл. 6 мы рассмотрим подробнее случаи $N=1$ и $N=2$.

Г. Ортогональность, нормировка и полнота

Мы нашли, что число дискретных собственных значений $\pm v_j$ зависит от c , N и f_1 . Соответствующие им собственные функции равны

$$\varphi_{j\pm} = \frac{\pm cv_j}{2} \frac{M(\mu, \pm v_j)}{\pm v_j - \mu}. \quad (30)$$

Кроме того, имеется континуум собственных функций $\varphi_\nu(\mu)$, соответствующих каждому значению ν , принадлежащему отрезку $[-1, 1]$. Эти функции имеют вид

$$\varphi_\nu(\mu) = P \frac{c\nu}{2} \frac{M(\mu, \nu)}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\mu - \nu), \quad (31)$$

причем из условия нормировки, как и ранее, следует, что

$$\lambda(\nu) = \frac{1}{2} [\Lambda^+(\nu) + \Lambda^-(\nu)]. \quad (32)$$

Ортогональность собственных функций в случае целого отрезка доказывается точно так же, как в задаче об изотропном рассеянии. Нормировочные интегралы, правда, несколько более сложные, можно также получить обычным способом. Приведем формулы для нормировочных интегралов в случае целого отрезка:

$$\begin{aligned}
 N_{j\pm} &= \int_{-1}^1 \mu \varphi_{j\pm}^2(\mu) d\mu = \\
 &= \pm c v_j \left[\frac{c v_j^2}{2(v_j^2 - 1)} \sum_{k=0}^N \sum_{l=0}^N \Lambda_{kl} (2k+1) f_k (2l+1) \varphi_{v_j, l} \varphi_{v_j, k} - \right. \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N f_k (2k+1) \varphi_{v_j, k}^2 - \\
 &\quad - v_j \sum_{k=1}^N (4k+1) f_{2k} \varphi_{v_j, 2k} \sum_{s=1}^k (4s-1) \varphi_{v_j, 2s-1} - \\
 &\quad \left. - v_j \sum_{k=0}^N (4k+3) f_{2k+1} \varphi_{v_j, 2k+1} \sum_{s=0}^k (4s+1) \varphi_{v_j, 2s} \right], \quad (33)
 \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{kl} = \begin{cases} 1, & k+l \text{ четное,} \\ v_j, & k+l \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (34)$$

Нормировочные интегралы удовлетворяют соотношению¹⁾

$$N_{j\pm} = \pm \frac{c}{2} v_j^2 M(v_j, v_j) \left. \frac{\partial \Lambda(v)}{\partial v} \right|_{v=v_j}, \quad (35)$$

представляющему собой обобщение формул (7) и (8b) разд. 4.5.

Для непрерывного спектра определим нормировочную постоянную из соотношения

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_v(\mu) \int_{-1}^1 \psi(\eta) \varphi_\eta(\mu) d\eta d\mu = N(v) \psi(v). \quad (36)$$

¹⁾ В отличие от случая изотропного рассеяния в сингулярном интегральном уравнении, которое нужно решить при доказательстве теоремы полноты, присутствует еще и слагаемое фредгольмовского типа. Это не вызывает, однако, дополнительных трудностей вследствие вырожденности ядра $K(x, x')$ этого члена, обусловленной тем, что $f(\Omega \cdot \Omega)$ можно представить в виде конечной суммы полиномов Лежандра. Иными словами, ядро $K(x, x')$ можно записать в виде $K(x, x') = \sum_i a_i(x) b_i(x')$ (см. [27]).

Как и в случае изотропного рассеяния, находим

$$N(\nu) = \nu \Lambda^+(\nu) \Lambda^-(\nu), \quad (37)$$

где функция $\Lambda(\nu)$ задается формулой (18).

Доказательства теорем полноты для целого отрезка и для половинного отрезка очень похожи на соответствующие доказательства в изотропном случае ¹⁾.

Мы снова отложим обсуждение общего случая до тех пор, пока не рассмотрим подробно некоторые частные случаи (гл. 6).

Соотношения ортогональности для половинного отрезка получены также и для линейного анизотропного рассеяния ($N = 1$) и приведены (и использованы) в разд. 6.8. Аналогичные соотношения для рассеяния в непоглощающей среде при $N = 2$ приведены в разд. 6.9. Все эти соотношения являются частными случаями более общих соотношений, которые можно получить для произвольного анизотропного рассеяния [33].

¹⁾ См. примечание на предыдущей странице.

Глава 5

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПО СИНГУЛЯРНЫМ СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ

5.1. Введение

Теперь, когда развит формализм разложения по сингулярным собственным функциям, применим его к решению различных задач теории переноса. Основы метода обсуждались в разд. 4.7. Мы видели, что процедура разложения по сингулярным собственным функциям во многом аналогична обычному «классическому» методу разложения решения краевых задач по несингулярным собственным функциям. При этом обычно задается оператор O , его собственные функции ψ_k и соответствующие им собственные значения λ_k :

$$O\psi_k(\mathbf{r}) = \lambda_k\psi_k(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Пусть нужно решить задачу

$$Of(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}). \quad (2)$$

Если система функций $\psi_k(\mathbf{r})$ полна, можно разложить $f(\mathbf{r})$ и $g(\mathbf{r})$ в ряды

$$f(\mathbf{r}) = \sum f_k\psi_k(\mathbf{r}), \quad (3a)$$

$$g(\mathbf{r}) = \sum g_k\psi_k(\mathbf{r}). \quad (3b)$$

Здесь коэффициенты g_k известны, а коэффициенты f_k требуется определить. Из уравнений (1) — (3) находим

$$\sum_i f_i\lambda_i\psi_k(\mathbf{r}) = \sum g_i\psi_k(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Если система функций ψ_k не только полна, но и ортонормирована, то из уравнения (4) получаем

$$f_k = g_k/\lambda_k. \quad (5)$$

На самом деле мы будем решать задачи теории переноса несколько иным образом. Дело в том, что решения многих таких задач удовлетворяют однородным уравнениям (например, решение проблемы Милна²⁾). К тому же в большинстве случаев для

¹⁾ Как правило, это дифференциальный оператор.

²⁾ Так называется задача о полупространстве, в котором нет источников.

отыскания таких решений приходится прибегать к разложениям по системам функций, полным на половинном отрезке.

Рассмотрим в общих чертах задачи такого типа. Вместо уравнения (2) мы теперь рассматриваем однородное уравнение относительно f ,

$$Of(r, \mu) = 0, \quad (6)$$

с дополнительными условиями на бесконечности и при $r = 0$, скажем,

$$f(0, \mu) = f_0(\mu). \quad (7)$$

Для решения уравнения (6) разложим $f(r, \mu)$ в ряд по функциям $\psi_k(r, \mu)$, обладающим подходящим поведением на бесконечности:

$$f(r, \mu) = \sum f_k \psi_k(r, \mu). \quad (8)$$

В силу условия (7)

$$\sum' f_k \psi_k(0, \mu) = f_0(\mu). \quad (9)$$

Коэффициенты f_k можно определить из (9) с помощью соотношений ортогональности, которым подчинены функции ψ_k .

Эти вводные замечания, вероятно, станут яснее, когда мы обратимся к конкретным примерам. В следующих трех разделах мы достаточно подробно рассмотрим функцию Грина для бесконечной среды. В разд. 5.5 мы займемся альбедной задачей, в разд. 5.6 — проблемой Милна и в разд. 5.7 — функцией Грина для полупространства. Все результаты в этих разделах получены для случая изотропного рассеяния. В разд. 5.8 мы обсудим задачи для смежных полупространств и покажем, что развитый к тому моменту формализм можно распространить и на эти случаи.

Следует отметить, что некоторые авторы применяли метод разложения по сингулярным собственным функциям к задачам с энергетической зависимостью. Однако, поскольку все задачи, успешно исследованные этим методом, либо очень специфичны, либо таковы, что решение их невозможно представить в обозримом виде, мы не будем заниматься их обсуждением в настоящей книге. Заинтересованного читателя отсылаем к работам [34—37].

5.2. Функция Грина для бесконечной среды

Нас интересует фазовая плотность нейтронов, испускаемых источником единичной мощности, расположенным на плоскости $x = 0$ и испускающим нейтроны в направлении $\mu = \mu_0$. (В силу инвариантности относительно сдвига (разд. 2.1) источник можно без ограничения общности поместить в плоскости $x = 0$. Реше-

ние для источников других геометрий можно получить из решения для плоского источника методами, описанными в приложении С.)

Метод решения был вкратце изложен в разд. 4.7, но для удобства мы повторим его здесь. Уравнение переноса можно записать в виде

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu) + G = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu') d\mu' + \frac{\delta'(x) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi}. \quad (1)$$

Как уже говорилось в разд. 5.1, мы будем решать однородные уравнения. Уравнение (1) можно превратить в однородное, если заменить источник условием скачка в начале координат (формула (3) разд. 2.4). Таким образом, мы ищем решение уравнения¹⁾

$$\mu \frac{\partial G}{\partial x} + G = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 G(x, \mu') d\mu', \quad (2)$$

удовлетворяющее граничному условию

$$G(0+, \mu) - G(0-, \mu) = \frac{1}{2\pi\mu} \delta(\mu - \mu_0). \quad (3)$$

Предполагая, что $c < 1$, мы, естественно, получаем условие на бесконечности

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x, \mu) = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы удовлетворить условию (4), будем искать решение в виде

$$G = a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_\nu(x, \mu) d\nu, \quad x > 0, \quad (5a)$$

$$G = -a_{0-} \psi_{0-}(x, \mu) - \int_{-1}^0 A(\nu) \psi_\nu(x, \mu) d\nu, \quad x < 0. \quad (5b)$$

Здесь $a_{0\pm}$ — неизвестные числа, а $A(\nu)$ — неизвестная функция²⁾. Наша задача заключается в построении $a_{0\pm}$ и $A(\nu)$.

Функции (5) удовлетворяют уравнению переноса, поскольку каждая из них является линейной комбинацией его элементарных решений. При $x > 0$ мы опустили решения, неограниченно возра-

¹⁾ Там, где это не создает неясности, в аргументах функций G мы будем опускать переменные, характеризующие источник.

²⁾ Знак — в уравнении (5b) введен для удобства.

стающие при $x \rightarrow \infty$, а при $x < 0$ — решения, неограниченно возрастающие при $x \rightarrow -\infty$ ¹⁾. Теперь остается удовлетворить только условию скачка. При $x \rightarrow 0$ формулы (5) переходят соответственно в формулы

$$G(0+, \mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu \quad (6a)$$

и

$$G(0-, \mu) = -a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) - \int_{-1}^0 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu. \quad (6b)$$

Таким образом, условие скачка сводится к условию

$$\frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{0-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu. \quad (7)$$

Мы получили сингулярное интегральное уравнение для $a_{0\pm}$ и $A(\nu)$. Фактически это то же самое уравнение, которое мы рассматривали в разд. 4.6 при доказательстве теоремы полноты для целого отрезка. Действительно, уравнение (7) есть не что иное, как разложение по собственным функциям целого отрезка функции

$$\psi(\mu) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}. \quad (8)$$

Коэффициенты разложения можно получить из уравнения (7), если умножить его на $\mu\varphi_\nu(\mu)$, проинтегрировать по μ и воспользоваться соотношениями ортогональности, выведенными в разд. 4.5 для случая целого отрезка:

$$a_{0\pm} = \frac{1}{N_{0\pm}} \int_{-1}^1 \frac{\mu\varphi_{0\pm}(\mu) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi_{0\pm}(\mu_0)}{N_{0\pm}}, \quad (9a)$$

$$A(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi_\nu(\mu_0)}{N(\nu)}. \quad (9b)$$

Здесь функции $N_{0\pm}$ и $N(\nu)$ определены соответственно соотношениями (5) и (24) разд. 4.5. Вспомним, что

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \pm \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\pm \nu_0 - \mu} \quad (10a)$$

и

$$\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu). \quad (10b)$$

¹⁾ Вспомним, что $\psi_\nu(x, \mu) = e^{-x/\nu} \varphi_\nu(\mu)$.

Функция Грина теперь имеет вид

$$G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu) = \pm \frac{1}{2\pi} \frac{\varphi_{0\pm}(\mu_0) \varphi_{0\pm}(\mu) e^{-|x-x_0|/\nu_0}}{N_{0\pm}} + \\ + \int_{0\pm}^1 \frac{\varphi_{\pm\nu}(\mu) \varphi_{\pm\nu}(\mu_0) e^{-|x-x_0|/\nu}}{N(\pm\nu)} d\nu, \quad (11)$$

где верхние знаки берутся для $x > x_0$, а нижние — для $x < x_0$. (Снова воспользовавшись инвариантностью относительно сдвига, мы сдвинули источник в точку x_0 .)

В случае плоского изотропного источника единичной мощности результаты для фазовой и пространственной плотностей нейтронов выглядят особенно просто. Эти результаты получаются усреднением по μ_0 функции (11):

$$G(x_0 \rightarrow x, \mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu_0 G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu), \quad (12)$$

откуда

$$G(x_0 \rightarrow x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\varphi_{0+}(\mu) e^{-(x-x_0)/\nu_0}}{N_{0+}} + \int_0^1 \frac{\varphi_\nu(\mu) e^{-(x-x_0)/\nu}}{N(\nu)} d\nu \right] \quad (13)$$

для $x > x_0$. Для $x < x_0$ воспользуемся условием симметрии (формула (26) разд. 2.1)

$$\psi(x, \mu) = \psi(-x, -\mu). \quad (14)$$

При выводе (13) мы применим условие нормировки

$$\int_{-1}^1 \varphi_\nu(\mu_0) d\mu_0 = 1. \quad (15)$$

Чтобы найти плотность нейтронов $\rho(x_0 \rightarrow x)$, умножим G на 2π и проинтегрируем по μ (т. е. по всем Ω). Тогда

$$\rho(x_0 \rightarrow x) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-|x-x_0|/\nu_0}}{N_{0+}} + \int_0^1 \frac{e^{-|x-x_0|/\nu}}{N(\nu)} d\nu \right]. \quad (16)$$

Подставив в (16) явное выражение для N_{0+} (разд. 4.5), найдем

$$\rho(x_0 \rightarrow x) = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-|x-x_0|/\nu_0}}{\frac{1}{2} c \nu_0^2 \{[c/(\nu_0^2 - 1)] - [1/\nu_0^2]\}} + \int_0^1 \frac{e^{-|x-x_0|/\nu}}{N(\nu)} d\nu \right]. \quad (17)$$

Решение для случая изотропного *точечного* источника можно сразу получить из уравнения (С.9а):

$$\rho_{pt}(r) = -\frac{1}{2\pi r} \frac{d}{dr} \rho_{pl}(r). \quad (18)$$

Так как

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} e^{-r/v} = \frac{1}{v} \frac{1}{r} e^{-r/v}, \quad (19)$$

то

$$\rho_{pt}(r_0 \rightarrow r) = \frac{1}{4\pi |r - r_0|} \left[\frac{e^{-|r - r_0|/v_0}}{v_0 N_{0+}} + \int_0^1 \frac{e^{-|r - r_0|/v}}{v N(v)} dv \right], \quad (20)$$

или

$$\rho_{pt}(r_0 \rightarrow r) = \frac{1}{4\pi |r - r_0|} \left[\frac{e^{-|r - r_0|/v_0}}{\frac{1}{2} c v_0^4 \{[c/(v_0^2 - 1)] - [1/v_0^2]\}} + \int_0^1 \frac{e^{-|r - r_0|/v}}{v N(v)} dv \right]. \quad (21)$$

Формула (21) имеет большое значение; мы подробно исследуем ее в следующем разделе. Как мы увидим, несмотря на ее громоздкость, из нее довольно просто выводятся свойства функции $\rho_{pt}(r_0 \rightarrow r)$ (например, моменты и поведение при малых и больших r). В частности, мы увидим, что поведение при больших r , т. е. *асимптотическое* поведение, определяется слагаемым, отвечающим дискретному собственному значению. Это слагаемое убывает с увеличением $|r - r_0|$ медленнее, чем слагаемое, отвечающее непрерывному спектру собственных значений, поскольку $|v_0| > 1$, в то время как $|v| \leq 1$. Более подробно асимптотическое поведение будет исследовано в разд. 5.4.

Заметим также, что при $c \geq 1$ физическая интерпретация задачи не очевидна, так как в каждом столкновении рождается больше нейтронов, чем их было до столкновения. На математическом языке это означает, что существуют решения, не стремящиеся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Для того чтобы и в этом случае обеспечить единственность решения, необходимо ввести дополнительное условие. Обычно таким условием служит «условие излучения». Поскольку нет физических соображений, по которым мы должны были бы рассматривать этот случай в настоящий момент, мы ограничимся здесь случаем $c \leq 1$.

При $c = 0$ наши результаты сводятся к результатам, полученным в гл. 3 для случая чисто поглощающей среды. Действительно, рассмотрим предел, к которому стремится правая часть равенства (20) при $c \rightarrow 0$. Из формулы (24) разд. 4.5 следует, что

$$\lim_{c \rightarrow 0} N(v) = v. \quad (22)$$

Далее, соотношение (8а) разд. 4.5 можно переписать в виде

$$N_{0+} = \frac{c}{2} v_0 \left[\frac{c}{1 - 1/v_0^2} - 1 \right]. \quad (23)$$

В силу формулы (16b) разд. 4.3

$$N_{0+} \sim \frac{c}{2} v_0 \left[\frac{c}{4e^{-2/c}} - 1 \right], \quad (24)$$

откуда $N_{0+} \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow 0+$. Таким образом, слагаемое в формуле (20), отвечающее дискретному собственному значению, стремится к нулю, так что

$$\lim_{c \rightarrow 0} \rho_{pt}(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \int_0^1 \frac{e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/v}}{v^2} dv = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \int_1^\infty e^{-\xi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\xi, \quad (25)$$

или

$$\lim_{c \rightarrow 0} \rho_{pt}(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} e^{-|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (26)$$

Последнее соотношение согласуется с формулой (8) разд. 3.5. (Напомним, что мы положили $\sigma = 1$, так что $\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$.) Интересно отметить, что для случая $c = 0$ асимптотическая поправка тождественно равна нулю.

5.3. Моменты функций Грина

А. Обсуждение и определение

В точную формулу для функций Грина для бесконечной среды, выведенную в предыдущем разделе, входит интеграл вдоль линии разреза, отвечающий континууму собственных функций. Таким образом, если нужно довести до конца вычисления для какого-нибудь конкретного частного случая, приходится прибегать к численному интегрированию. Но все же некоторые сведения о структуре решения можно получить, исследуя его моменты. Последние выражаются в элементарных функциях. По этим моментам в принципе можно восстановить общее решение задачи, но практически такое восстановление мало эффективно. Пожалуй, наибольшая ценность метода моментов состоит в том, что он обеспечивает удобный способ проверки различных приближенных методов решения уравнения переноса. Кроме того, с помощью тауберовых теорем (см., например, [38]) можно изучить асимптотическое поведение плотности, отталкиваясь непосредственно от ее моментов.

Определим момент \overline{M}^N функции плотности нейтронов при изотропном точечном источнике¹⁾ соотношением

$$\overline{M}^N = \int \rho(\mathbf{r}) r^N d^3r = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^{N+2} dr. \quad (1)$$

¹⁾ Черта показывает, что этот момент соответствует изотропному источнику. Такое обозначение будет использоваться во всем этом разделе.

Для четных N эти интегралы можно вычислить в явном виде, пользуясь выражением для $\rho(r)$, полученным в предыдущем разделе. Процедура их вычисления описана в приложении Н. Здесь мы приведем более простой способ.

Уравнение переноса в рассматриваемом случае (изотропное рассеяние, $\sigma(r) = 1$) можно записать в виде

$$\Omega \cdot \nabla \psi + \psi = \frac{c\rho}{4\pi} + \frac{\delta(r)}{4\pi}. \quad (2)$$

Интегрирование (2) по Ω дает

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \rho = c\rho + \delta(r). \quad (3)$$

Проинтегрируем теперь по r и применим теорему Гаусса, учитывая, что $J(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда

$$\overline{M^0} = c\overline{M^0} + 1,$$

откуда

$$\overline{M^0} = 1/(1 - c). \quad (4)$$

Этот результат остается верным для любой симметрии (т. е. точечного, плоского и линейного источников).

В. Вычисление моментов для случая плоского анизотропного источника

Рассмотрим уравнение переноса для случая плоской симметрии, но источник и рассеяние будем предполагать анизотропными:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = c \int f(\Omega \cdot \Omega') \psi(x, \Omega') d\Omega' + \frac{\delta(x) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi}. \quad (5)$$

Разлагая функцию f в ряд, как это было сделано в разд. 4.10,

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\Omega \cdot \Omega'), \quad (6)$$

получаем

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \sum_l (2l+1) f_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi}. \quad (7)$$

Моменты ψ_l функции ψ по полиномам Лежандра определяются соотношением (см. уравнение (B.5))

$$\psi_l(x)/2\pi = \int_{-1}^1 P_l(\mu) \psi(x, \mu) d\mu. \quad (8)$$

Умножим уравнение (7) на $P_l(\mu)$ и проинтегрируем по μ ¹⁾:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(l+1)\psi_{l+1}(x) + l\psi_{l-1}(x)}{2l+1} \right] + \psi_l(x) = cf_l\psi_l(x) + \delta(x)P_l(\mu_0). \quad (9)$$

При выводе уравнения (9) была использована рекуррентная формула для полиномов Лежандра (формула (8b) разд. 4.10).

Определим моменты $M^{n,l}$ функции ψ_l формулой

$$M^{n,l} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \psi_l(x) dx. \quad (10)$$

Умножая уравнение (9) на x^n и интегрируя по x , приходим к рекуррентным соотношениям для $M^{n,l}$:

$$M^{n,l}(1 - cf_l) = \delta_{n0}P_l(\mu_0) + \frac{n}{2l+1}[(l+1)M^{n-1,l+1} + lM^{n-1,l-1}]. \quad (11)$$

(Мы проинтегрировали по частям слагаемое, содержащее дифференцирование по x , и воспользовались тем, что функция $\psi(x, \mu)$ вместе со всеми своими производными стремится к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.)

Как следует из уравнения (5), моменты $M^{n,l}$ являются пространственно-угловыми моментами для направленного источника $\delta(\mu - \mu_0)/4\pi$, так что

$$M^{n,l} = M^{n,l}(\mu_0). \quad (12)$$

Моменты для произвольного плоского источника $q(\mu_0)$ получаются усреднением $M^{n,l}(\mu_0)$ по этому источнику:

$$M^{n,l}(q) = \int_{-1}^1 d\mu_0 M^{n,l}(\mu_0) q(\mu_0). \quad (13)$$

(Напомним, что мы обозначили через $\overline{M^{n,l}}$ моменты для изотропного плоского источника.)

С. Связь между моментами для задач с плоским и точечным изотропными источниками

Рекуррентные соотношения (11) можно разрешить для каждого из моментов $M^{n,l}$. Прежде чем это сделать, заметим, что

$$M^{n,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \psi_0(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \rho_{pl}(x) dx. \quad (14)$$

¹⁾ Уравнение (9) это просто уравнение метода сферических гармоник в случае плоской симметрии; см. разд. 8.4.

Если источник изотропный, то $\rho(x) = \rho(-x)$ (разд. 2.1), и тогда

$$\overline{M^{n,0}} = \begin{cases} 2 \int_0^\infty x^n \rho_{pt}(x) dx, & n \text{ четно.} \\ 0, & n \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (15)$$

Плотность излучения, обусловленная изотропным *точечным* источником $\rho_{pt}(r) \equiv G_0(r)$, связана с плотностью $\rho_{pt}(x)$ формулой (С.8). Из этой формулы следует, что

$$\overline{M^{n,0}} = 4\pi \int_0^\infty dx x^n \int_x^\infty R G_0(R) dR, \quad (16a)$$

$$\overline{M^{n,0}} = 4\pi \int_0^\infty \rho_{pt}(R) R dR \int_0^R x^n dx, \quad (16b)$$

или

$$\overline{M^{n,0}} = \frac{4\pi}{n+1} \int_0^\infty R^{n+2} \rho_{pt}(R) dR. \quad (17)$$

Сравнивая с (11), мы видим, что моменты плотности для изотропного плоского и изотропного точечного источников связаны соотношением

$$\overline{M_{pt}^n} = (n+1) \overline{M_{pl}^{n,0}}, \quad n \text{ четно.} \quad (18)$$

С помощью той же формулы (С.8) можно получить аналогичные соотношения и для моментов более высоких порядков. А именно, по определению

$$\overline{M^{n,l}} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \bar{\psi}_l(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^\infty x^n \bar{\psi}_l(x) dx, & (n+l) \text{ четно,} \\ 0, & (n+l) \text{ нечетно} \end{cases} \quad (19)$$

($\bar{\psi}_l$ здесь обозначает l -й коэффициент разложения по полиномам Лежандра фазовой плотности нейтронов, обусловленной плоским изотропным источником). При выводе формул (19) мы воспользовались равенством $\psi_l(x) = (-1)^l \psi_l(-x)$ (ср. с (В.10)). Из формул (19) и (С.8) следует, что

$$\overline{M^{n,l}} = 4\pi \int_0^\infty x^n dx \int_x^\infty R G_l(R) P_l\left(\frac{x}{R}\right) dR, \quad (20a)$$

$$\overline{M^{n,l}} = 4\pi \int_0^\infty R G_l(R) dR \int_0^R x^n P_l(x/R) dx. \quad (20b)$$

Здесь G_l — моменты Лежандра порядка l фазовой плотности для изотропного точечного источника. Замена переменных $\mu = x/R$ в формуле (20b) дает

$$\overline{M^{n,l}} = 4\pi \int_0^\infty R^{n+2} G_l(R) dR \int_0^1 \mu^n P_l(\mu) d\mu, \quad (21)$$

или

$$\overline{M_{pt}^{n,l}} = \alpha_{n,l} \overline{M_{pt}^{n,l}}, \quad (22)$$

где $\overline{M_{pt}^{n,l}}$ — пространственно-угловые моменты фазовой плотности нейтронов для случая изотропного точечного источника,

$$\overline{M_{pt}^{n,l}} \equiv 4\pi \int_0^\infty R^{n+2} G_l(R) dR \quad (23)$$

и

$$\alpha_{n,l} \equiv \int_0^1 \mu^n P_l(\mu) d\mu. \quad (24)$$

Точно таким же образом на основании соотношений, выведенных в приложении С, можно установить связь между моментами для линейных источников, поверхностных источников и т. д. Мы не будем останавливаться на этих вопросах.

Д. Явный вид моментов функции распределения в задаче с плоским источником

Вернемся теперь к рекуррентным соотношениям (11) и с их помощью найдем явные выражения для моментов. Полагая $n = 0$, мы сразу же получаем

$$M^{0,l} = \frac{P_l(\mu_0)}{1 - cf_l}. \quad (25)$$

Так как $f_0 \equiv 1$, то

$$\overline{M^{0,0}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_0(\mu_0)}{1 - cf_0} d\mu_0 = \frac{1}{1-c}, \quad (26)$$

что согласуется с формулой (4).

Нетрудно видеть, что если известны все моменты $M^{n-1,l}$, то моменты $M^{n,l}$ можно найти с помощью соотношений (11). Мы уже знаем моменты $M^{0,l}$ (формула (25)), поэтому можем

определить все $M^{1,l}$, по ним $M^{2,l}$ и т. д. Итак,

$$M^{1,l} = \frac{1}{(2l+1)(1-cf_l)} \left[\frac{(l+1)P_{l+1}(\mu_0)}{1-cf_{l+1}} + \frac{lP_{l-1}(\mu_0)}{1-cf_{l-1}} \right], \quad (27a)$$

$$M^{2,l} = \frac{2}{(2l+1)(1-cf_l)} \times \\ \times \left[\frac{l+1}{(2l+3)(1-cf_{l+1})} \left\{ \frac{(l+2)R_{l+2}(\mu_0)}{1-cf_{l+2}} + \frac{(l+1)P_l(\mu_0)}{1-cf_l} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{l}{(2l-1)(1-cf_{l-1})} \left\{ \frac{lP_l(\mu_0)}{1-cf_l} + \frac{(l-1)P_{l-2}(\mu_0)}{1-cf_{l-2}} \right\} \right] \quad (27b)$$

и т. д. Согласно (25),

$$M^{0,0} = \frac{1}{1-c} = \overline{M^{0,0}}. \quad (28a)$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \rho(x) dx = M^{2,0} = \frac{2}{1-c} \left[\frac{1}{3(1-cf_1)} \left\{ \frac{2P_2(\mu_0)}{1-cf_2} + \frac{1}{1-c} \right\} \right], \quad (28b)$$

откуда

$$\overline{x^2} = \frac{M^{2,0}}{M^{0,0}} = \frac{2}{3(1-cf_1)} \left[\frac{2P_2(\mu_0)}{1-cf_2} + \frac{1}{1-c} \right]. \quad (28c)$$

Нетрудно заметить, что $\overline{x^2} \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow 1$. Это означает, что чем меньше поглощение, тем дальше от источника уходят нейтроны, что с физической точки зрения вполне разумно. При $c > 1$ моменты функции $\rho(r)$ могут стать отрицательными. Это — проявление того факта, что при $c > 1$ функция распределения знакопеременна (ибо в этом случае ν_0 — чисто мнимая величина). Такие решения, очевидно, не имеют физического смысла и представляют лишь математический интерес.

Так как случай изотропного источника очень важен, полезно проинтегрировать равенство (11) по μ_0 и тем самым выявить связь между величинами $\overline{M^{n,l}}$:

$$\overline{M^{n,l}}(1-cf_l) = \delta_{n0}\delta_{l0} + \frac{n}{2l+1} [(l+1)\overline{M^{n-1,l+1}} + l\overline{M^{n-1,l-1}}]. \quad (29)$$

В частности,

$$\overline{M^{0,l}} = \frac{1}{1-c} \delta_{l0}. \quad (30)$$

Мы уже показали, что $\overline{M^{1,0}} = 0$ (формула (15)). Тот же результат следует и из формулы (29). Далее,

$$\overline{M^{1,1}} = \frac{1}{3} \frac{1}{(1-c)(1-cf_1)}. \quad (31)$$

В силу формулы (19) $\overline{M^{1,2}} = 0$. Ясно, что величины $\overline{M^{1,l}}$ при $l > 2$ равны нулю, так как они выражаются через $\overline{M^{0,l}}$ при $l > 0$. Продолжая этот процесс для больших значений n , получаем, что $\overline{M^{n,l}} = 0$ при нечетных $n + l$ и $\overline{M^{n,l}} = 0$ при $n < l$.

Таким образом, пространственный момент порядка n от l -й компоненты Лежандра функции распределения для случая изотропного плоского источника равен нулю при $n < l$ и для нечетных значений $n + l$. Этот результат обусловлен особой симметрией решения задачи с плоским источником и несправедлив, например, в случае изотропного точечного источника.

Е. Преобразование Фурье функции фазовой плотности и ее моменты

В заключение укажем важную связь между преобразованием Фурье функции фазовой плотности и ее моментами. Рассмотрим плотность $\rho(x)$ и ее преобразование Фурье $\varphi(k)$:

$$\varphi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \rho(x) dx \quad (32a)$$

и

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \varphi(k) dk. \quad (32b)$$

Разложим в ряд экспоненту в формуле (32a):

$$\varphi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \rho(x) dx. \quad (33)$$

В силу (14) получаем

$$\varphi(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n}{n!} M^{n,0}. \quad (34)$$

Таким образом, преобразование Фурье фазовой плотности можно представить в виде степенного ряда по k , в котором моменты играют роль коэффициентов. Согласно тауберовой теореме, поведение функции $\varphi(k)$ при малых k определяет поведение функции $\rho(r)$ при больших r . По этой причине метод моментов оказывается весьма удобным для нахождения распределения нейтронов вдали от источника.

5.4. Асимптотическое поведение фазовой плотности нейтронов при малых и больших r в случае изотропного точечного источника

Исследуем асимптотическое поведение фазовой плотности в задаче с изотропным точечным источником ((формула 20) разд. 5.2). В случае изотропного рассеяния

$$\rho_{pt}(r) = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{e^{-r/v_0}}{v_0 N_{0+}} + \int_0^1 \frac{e^{-r/v}}{v N(v)} dv \right]. \quad (1)$$

Чтобы найти вклад от первого члена при малых r , разложим экспоненту по степеням r . При попытке использовать ту же самую процедуру применительно к интегральному члену мы столкнемся с тем, что под знаком интеграла появятся множители $\sim v^{-n}$ и интегралы будут расходиться. Поэтому лучше поступить следующим образом. Обозначим

$$\mathcal{J}(r) = \int_0^1 \frac{e^{-r/v}}{v N(v)} dv \quad (2)$$

и вспомним (разд. 4.5), что

$$N(v) = v\Lambda^+(v)\Lambda^-(v), \quad (3a)$$

$$\Lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v-\mu}. \quad (3b)$$

Ясно, что поведение функции $\mathcal{J}(r)$ при малых r определяется поведением функции $N(v)$ при малых v . В низшем приближении

$$N(v) = v\Lambda^+(0)\Lambda^-(0) = v, \quad (4)$$

поскольку $\Lambda(0) = 1$. Отсюда

$$\mathcal{J} \approx \int_0^1 e^{-r/v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^\infty e^{-vr} dy = \frac{1}{r}. \quad (5)$$

Тогда для малых r

$$\rho_{pt}(r) = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{1}{v_0 N_{0+}} + \frac{1}{r} \right] \approx \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (6)$$

Полученный результат не является неожиданным, поскольку плотность нейтронов вблизи источника определяется в основном нейтронами, не испытавшими столкновений. Плотность таких

нейтронов определяется формулой

$$\rho_0 = \frac{e^{-r}}{4\pi r^2}, \quad (7)$$

так что $\rho_0 \sim 1/(4\pi r^2)$ при малых r .

Для нахождения следующего приближения положим

$$\rho'(r) = \rho_{pt}(r) - \frac{1}{4\pi r^2} \quad (8)$$

и произведем аналогичные выкладки:

$$\rho_{pt}(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \left[1 + \left(\frac{c\pi^2}{4} - 1 \right) r + \left(2c - \frac{c^2\pi^2}{4} \right) r^2 \ln r \right] + O(\text{const}), \quad r \ll 1. \quad (9)$$

Можно было бы выбрать другой метод, связанный с преобразованием Фурье $\varphi(k)$ функции $\rho_{pt}(r)$ (разд. 5.3; заметим, что преобразования Фурье функций $\rho_{pt}(r)$ и $\rho(x)$ совпадают).! Функцию $\varphi(k)$ можно получить непосредственно из формулы (1) или, еще лучше, взяв преобразования Фурье от обеих частей уравнения переноса. В обоих случаях получаем

$$\varphi(k) = \frac{1}{(k/\text{arctg } k) - c}. \quad (10)$$

Тогда $\rho(r)$ при малых r находим с помощью обратного преобразования Фурье и подходящей тауберовой теоремы [1].

Интереснее выяснить поведение функции $\rho_{pt}(r)$ при больших r . Ясно, что оно определяется первым слагаемым в формуле (1), поскольку $v_0 > 1$ при $c < 1$, а интегральный член убывает не медленнее, чем e^{-r} . Прежде чем подробно исследовать поведение $\rho_{pt}(r)$ при больших r , сделаем небольшое замечание по поводу случая $c \geq 1$.

Если $c < 1$, то v_0 — действительный положительный корень трансцендентного уравнения

$$\Lambda(v) = 0,$$

а (1) определяет *единственное* решение задачи с точечным источником, обращающееся в нуль на бесконечности. Если же $c \geq 1$, то на бесконечности очевидного условия нет и первое слагаемое в (1) можно заменить *любым* решением однородного уравнения. Все такие решения одинаково приемлемы до тех пор, пока не выбрано какое-то дополнительное условие на бесконечности. Выберем для определенности то решение, для которого $v_0 = i |v_0|$.

Разделавшись с этим неприятным обстоятельством, займемся выяснением поведения функции $\rho_{pt}(r)$ при больших r . Запишем

$$\rho_{pt}(r) = p(r) + \rho_{as}(r), \quad (11)$$

где

$$\rho_{as}(r) = \frac{1}{v_0 N_{0+}} \frac{e^{-r/v_0}}{4\pi r}, \quad (12)$$

$$p(r) = \frac{1}{4\pi r} \int_0^1 \frac{e^{-r/v}}{v N(v)} dv. \quad (13)$$

Мы уже отмечали, что при $r \ll 1$ плотность ρ в основном обусловлена нейтронами, пришедшими от источника, не претерпев столкновений, т. е.

$$\rho(r) \approx e^{-r}/4\pi r^2, \quad r \ll 1. \quad (14)$$

Это асимптотическое соотношение должно обеспечиваться поведением функции $p(r)$, поскольку в разложении (11) при малых r преобладает $p(r)$. Поэтому удобно представить $p(r)$ в виде

$$p(r) = \frac{e^{-r}}{4\pi r^2} \varepsilon(r). \quad (15)$$

Ясно, что функция $\varepsilon(r)$, характеризующая отклонение $p(r)$ от плотности нейтронов, не претерпевших столкновения, не имеет особенностей. На рис. 5.1 показана зависимость функции ε от r при различных значениях c (см. [1]). Очевидно, что $\varepsilon(r) = 1$ при $c = 0$, так как в этом случае плотность целиком определяется нейтронами, не испытавшими столкновений.

Как мы увидим позднее, значение $\rho_{as}(r)$ в точности предсказывается диффузионной теорией, т. е. $\rho_{as}(r)$ описывает распределение нейтронов, подчиняющихся закону Фика:

$$\mathbf{J} = (\lambda/3) \nabla \rho \quad (16)$$

Теперь полезно получить оценку вклада в $\rho_{pt}(r)$, вносимого асимптотическим и «прострельным» слагаемыми. Это лучше всего сделать с помощью пространственных моментов. Напомним, что в разд. 5.3 мы нашли явные формулы для четных моментов функции $\rho_{pt}(r)$. Функция $\rho_{as}(r)$ столь проста, что моменты ее вычисляются элементарно:

$$\overline{A^{2m}} \equiv \int \rho_{as}(r) r^{2m} d^3r = \int \frac{e^{-r/v_0}}{v_0 N_{0+}} r^{2m+1} dr, \quad (17)$$

или

$$\overline{A^{2m}} = (2m+1)! (v_0^2)^{m+1} \frac{1}{v_0 N_{0+}}. \quad (18)$$

В частности,

$$\int \rho_{as}(r) d^3r = v_0^2/(v_0 N_{0+}) \quad (19a)$$

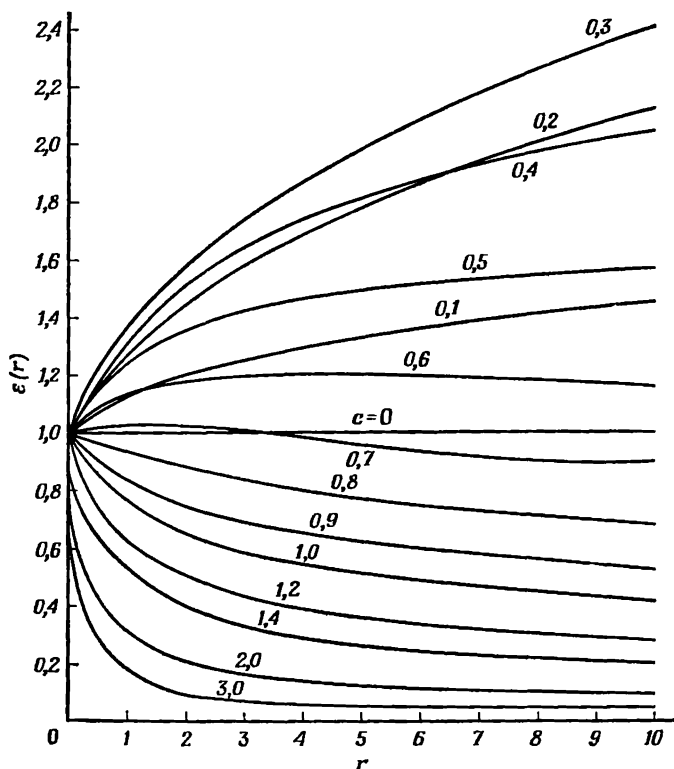
и

$$\int r^2 \rho_{as}(r) d^3r = 6v_0^4/(v_0 N_{0+}). \quad (19b)$$

Отсюда можно получить, например, средний квадрат расстояния нейтронов от начала отсчета, отвечающий асимптотическому распределению:

$$(\overline{r^2})_{\text{ас}} = \overline{A^2}/\overline{A^0} = 6\nu_0^2. \quad (20a)$$

(По этой причине величина ν_0 часто называется *диффузионной длиной*.) Второй момент $\overline{r^2}$ для полного распределения можно



Р и с. 5.1. Зависимость ε от r при различных значениях c .

найти из результатов предыдущего раздела:

$$\overline{r^2} = 2/(1 - c). \quad (20b)$$

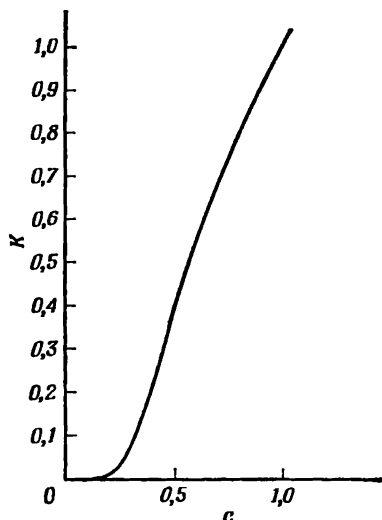
Если $c \approx 1$, то $\nu_0^2 \approx [3(1 - c)]^{-1}$, и значения (20a) и (20b) в нулевом приближении совпадают.

Более важно знать отношение $\overline{A^0}$ к $\overline{M^0}$, поскольку оно характеризует долю нейтронов, отвечающих асимптотическому рас-

пределению:

$$K \equiv \overline{A^0}/\overline{M^0} = \frac{\int \rho_{as}(r) d^3r}{\int \rho(r) d^3r} = \frac{\nu_0(1-c)}{1 N_{0+}}. \quad (21)$$

На рис. 5.2 показана зависимость функции K от c (см. [1]).



Р и с. 5.2. Зависимость K от c .

С помощью формулы (8а) разд. 4.5 для N_{0+} и выражения для ν_0 при $c \approx 1$, приведенного в разд. 4.3, можно получить разложение функции K :

$$K \approx 1 - \frac{4}{5}(1-c). \quad (22)$$

Заметим, что $K = 1$ при $c = 1$. Казалось бы, отсюда можно заключить, что все нейтроны в этом случае отвечают асимптотическому распределению. Это, разумеется, не верно. Отметим, однако (см. приложение F), что при $c = 1$ ¹⁾

$$\rho_{as} = 3/4\pi r. \quad (23)$$

Очевидно, что это происходит в случае, когда общее число нейтронов бесконечно. Физически это объясняется тем, что нейтроны непрерывно испускаются источником, но не поглощаются в среде.

¹⁾ В случае плоской симметрии и при $c = 1$, как показано в приложении F, $\psi_1 = 1/2$, $\psi_2 = (1/2)(x - \mu)$. Ясно, что ψ_2 определяет асимптотику решения, поскольку ψ_2 преобладает при больших x . Воспользовавшись связью между решениями задач о плоском и точечном источниках (формула (18) разд. 5.2 и приложение С), находим $\psi_2(r)$, в результате чего получаем формулу (23).

Равенство $K = 1$ обусловлено тем, что асимптотическому распределению отвечает бесконечно много нейтронов. Неасимптотическому распределению отвечает лишь конечное отличное от нуля число нейтронов.

Итак, вдали от источника естественно ожидать чисто экспоненциального распределения нейтронов, в то время как вблизи источников распределение сильно сингулярно и описывается функцией $p(r)$ сложной структуры.

Приведем некоторые количественные оценки.

При $|1 - c| \ll 1$

$$\frac{\rho_{as}(r)}{\rho_{pt}(r)} \approx 1 \quad \text{для } r \geq 1.$$

При $c = 1$

$$\rho_{as}(1)/\rho_{pt}(1) = 0,915, \quad (24a)$$

$$\rho_{as}(2,5)/\rho_{pt}(2,5) = 0,993. \quad (24b)$$

При $c \ll 1$ функция $\rho_{as}(r)$ преобладает лишь на очень больших расстояниях; суммарная же плотность на этих расстояниях пренебрежимо мала (табл. 5.1). В этом случае функция асимптотической плотности представляет собой, по существу, лишь математическую фикцию.

5.5. Альбедная задача

Альбедная задача — это задача нахождения фазовой плотности нейтронов в свободном от источников полупространстве $0 \leq x \leq \infty$, на границу которого падает параллельный поток излучения. Пусть $\Psi_a(x, \mu)$ — решение этой задачи, т. е. решение однородного уравнения переноса при $0 \leq x \leq \infty$ с граничными условиями

$$\Psi_a(0, \mu) = \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu_0, \mu > 0, \quad (1)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_a(x, \mu) = 0. \quad (2)$$

В самом общем виде решение однородного уравнения, удовлетворяющее граничному условию (2), можно представить в виде линейной комбинации функций ψ_{0+} и ψ_v , обращающихся в нуль на бесконечности. Представим решение в виде

$$\Psi_a(x, \mu) = a_{0+} \psi_{0+}(0, \mu) + \int_0^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv, \quad (3)$$

где коэффициенты a_{0+} и $A(v)$, как обычно, должны определяться из граничных условий (в данном случае из условия (1)). Таким

Таблица 5.1

 $\rho_{as}(r)/\rho(r)$

r	$c = 0,0$	$c = 0,1$	$c = 0,2$	$c = 0,3$	$c = 0,4$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	0,0000	$1,615 \times 10^{-7}$	$8,721 \times 10^{-4}$	$1,090 \times 10^{-2}$	$3,430 \times 10^{-2}$
0,2	0,0000	$3,176 \times 10^{-7}$	$1,686 \times 10^{-3}$	$2,070 \times 10^{-2}$	$6,394 \times 10^{-2}$
0,3	0,0000	$4,697 \times 10^{-7}$	$2,455 \times 10^{-3}$	$2,967 \times 10^{-2}$	$9,019 \times 10^{-2}$
0,4	0,0000	$6,183 \times 10^{-7}$	$3,188 \times 10^{-3}$	$3,799 \times 10^{-2}$	0,1138
0,5	0,0000	$7,641 \times 10^{-7}$	$3,891 \times 10^{-3}$	$4,578 \times 10^{-2}$	0,1354
0,6	0,0000	$9,073 \times 10^{-7}$	$4,569 \times 10^{-3}$	$5,312 \times 10^{-2}$	0,1552
0,7	0,0000	$1,048 \times 10^{-6}$	$5,224 \times 10^{-3}$	$6,006 \times 10^{-2}$	0,1735
0,8	0,0000	$1,188 \times 10^{-6}$	$5,861 \times 10^{-3}$	$6,668 \times 10^{-2}$	0,1906
0,9	0,0000	$1,325 \times 10^{-6}$	$6,479 \times 10^{-3}$	$7,300 \times 10^{-2}$	0,2066
1,0	0,0000	$1,460 \times 10^{-6}$	$7,081 \times 10^{-3}$	$7,906 \times 10^{-2}$	0,2217
1,5	0,0000	$2,119 \times 10^{-6}$	$9,900 \times 10^{-3}$	0,1062	0,2861
2,0	0,0000	$2,750 \times 10^{-6}$	$1,247 \times 10^{-2}$	0,1295	0,3377
2,5	0,0000	$3,363 \times 10^{-6}$	$1,487 \times 10^{-2}$	0,1501	0,3807
3,0	0,0000	$3,959 \times 10^{-6}$	$1,712 \times 10^{-2}$	0,1687	0,4175
3,5	0,0000	$4,543 \times 10^{-6}$	$1,926 \times 10^{-2}$	0,1857	0,4496
4,0	0,0000	$5,115 \times 10^{-6}$	$2,130 \times 10^{-2}$	0,2013	0,4781
4,5	0,0000	$5,677 \times 10^{-6}$	$2,326 \times 10^{-2}$	0,2159	0,5036
5,0	0,0000	$6,231 \times 10^{-6}$	$2,516 \times 10^{-2}$	0,2295	0,5266
6	0,0000	$7,317 \times 10^{-6}$	$2,875 \times 10^{-2}$	0,2545	0,5669
7	0,0000	$8,377 \times 10^{-6}$	$3,214 \times 10^{-2}$	0,2769	0,6010
8	0,0000	$9,416 \times 10^{-6}$	$3,536 \times 10^{-2}$	0,2973	0,6305
9	0,0000	$1,044 \times 10^{-5}$	$3,843 \times 10^{-2}$	0,3160	0,6563
10	0,0000	$1,144 \times 10^{-5}$	$4,137 \times 10^{-2}$	0,3333	0,6791
11	0,0000	$1,242 \times 10^{-5}$	$4,419 \times 10^{-2}$	0,3439	0,6994
12	0,0000	$1,340 \times 10^{-5}$	$4,691 \times 10^{-2}$	0,3644	0,7177
13	0,0000	$1,436 \times 10^{-5}$	$4,954 \times 10^{-2}$	0,3785	0,7343
14	0,0000	$1,530 \times 10^{-5}$	$5,208 \times 10^{-2}$	0,3918	0,7493
15	0,0000	$1,624 \times 10^{-5}$	$5,454 \times 10^{-2}$	0,4043	0,7630
16	0,0000	$1,716 \times 10^{-5}$	$5,692 \times 10^{-2}$	0,4161	0,7756
17	0,0000	$1,808 \times 10^{-5}$	$5,925 \times 10^{-2}$	0,4274	0,7872
18	0,0000	$1,899 \times 10^{-5}$	$6,151 \times 10^{-2}$	0,4381	0,7978
19	0,0000	$1,988 \times 10^{-5}$	$6,371 \times 10^{-2}$	0,4482	0,8077
20	0,0000	$2,077 \times 10^{-5}$	$6,585 \times 10^{-2}$	0,4580	0,8169

Табл. 5.1, продолжение

$$\rho_{\text{вс}}(r)/\rho(r)$$

r	$c = 0,5$	$c = 0,6$	$c = 0,7$	$c = 0,8$	$c = 0,9$	$c = 1,0$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,1	$6,589 \times 10^{-2}$	0,1012	0,1380	0,1755	0,2135	0,2574
0,2	0,1207	0,1823	0,2446	0,3063	0,3680	0,4428
0,3	0,1676	0,2493	0,3298	0,4073	0,4830	0,5762
0,4	0,2086	0,3060	0,3996	0,4873	0,5708	0,6734
0,5	0,2449	0,3549	0,4578	0,5520	0,6394	0,7451
0,6	0,2774	0,3975	0,5072	0,6052	0,6939	0,7988
0,7	0,3068	0,4351	0,5497	0,6469	0,7378	0,8396
0,8	0,3336	0,4686	0,5866	0,6872	0,7738	0,8710
0,9	0,3582	0,4986	0,6189	0,7192	0,8035	0,8954
1,0	0,3809	0,5257	0,6474	0,7468	0,8284	0,9147
1,5	0,4731	0,6300	0,7509	0,8407	0,9067	0,9664
2,0	0,5413	0,7011	0,8153	0,8933	0,9452	0,9854
2,5	0,5946	0,7527	0,8585	0,9255	0,9661	0,9932
3,0	0,6377	0,7919	0,8890	0,9463	0,9783	0,9967
3,5	0,6734	0,8226	0,9115	0,9605	0,9857	0,9984
4,0	0,7036	0,8472	0,9283	0,9705	0,9904	0,9992
4,5	0,7295	0,8673	0,9414	0,9776	0,9934	0,9996
5,0	0,7520	0,8839	0,9516	0,9828	0,9954	0,9998
6	0,7891	0,9096	0,9662	0,9896	0,9977	0,9999
7	0,8185	0,9284	0,9758	0,9935	0,9988	1,0000
8	0,8422	0,9424	0,9824	0,9958	0,9994	1,0000
9	0,8618	0,9532	0,9871	0,9973	0,9997	1,0000
10	0,8782	0,9616	0,9903	0,9982	0,9998	1,0000
11	0,8920	0,9683	0,9926	0,9988	0,9999	1,0000
12	0,9038	0,9736	0,9944	0,9992	0,9999	1,0000
13	0,9140	0,9779	0,9957	0,9995	1,0000	1,0000
14	0,9228	0,9814	0,9967	0,9996	1,0000	1,0000
15	0,9306	0,9844	0,9975	0,9998	1,0000	1,0000
16	0,9373	0,9867	0,9980	0,9998	1,0000	1,0000
17	0,9432	0,9887	0,9985	0,9999	1,0000	1,0000
18	0,9485	0,9904	0,9988	0,9999	1,0000	1,0000
19	0,9532	0,9918	0,9990	0,9999	1,0000	1,0000
20	0,9574	0,9930	0,9992	1,0000	1,0000	1,0000

образом, полагая в (3) $x = 0$ и применяя (1), получаем

$$\delta(\mu - \mu_0) = a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad \mu \geq 0, \quad (4)$$

поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi_\nu(x, \mu) = \varphi_\nu(\mu).$$

Коэффициенты a_{0+} и $A(\nu)$ можно определить с помощью условий ортогональности для половинного отрезка, выведенных в разд. 4.9. В самом деле, умножая уравнение (4) на $W(\mu) \varphi_\nu(\mu)$ и интегрируя по μ , находим

$$\frac{N(\nu)}{\nu} W(\nu) A(\nu) = W(\mu_0) \varphi_\nu(\mu_0), \quad (5a)$$

или

$$A(\nu) = \frac{\nu W(\mu_0) \varphi_\nu(\mu_0)}{N(\nu) W(\nu)} \quad (5b)$$

(здесь мы использовали формулу (34) разд. 4.9). Умножая уравнение (4) на $W(\mu) \varphi_0(\mu)$ и интегрируя, находим

$$-\left(\frac{c}{2} \nu_0\right)^2 X(\nu_0) a_{0+} = W(\mu_0) \varphi_{0+}(\mu_0), \quad (6a)$$

так что

$$a_{0+} = -2\gamma(\mu_0)/c\nu_0 X(\nu_0). \quad (6b)$$

(При переходе от (6a) к (6b) мы использовали формулу

$$\varphi_{0+}(\mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 - \mu}. \quad (7)$$

Напомним, кроме того, что по определению

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{X^-(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} \quad (8a)$$

и что

$$W(\mu) = \gamma(\mu) (\nu_0 - \mu). \quad (8b)$$

Таким образом, общее решение альбедной задачи имеет вид (3), где коэффициенты определяются формулами (5b) и (6b), а именно:

$$\begin{aligned} \Psi_a(x, \mu) = & \frac{-2\gamma(\mu_0)}{c\nu_0 X(\nu_0)} \varphi_{0+}(\mu) e^{-x/\nu_0} + \\ & + (\nu_0 - \mu_0) \gamma(\mu_0) \int_0^1 \frac{\nu \varphi_\nu(\mu_0) \varphi_\nu(\mu)}{N(\nu) \gamma(\nu) (\nu_0 - \nu)} e^{-x/\nu} d\nu. \end{aligned} \quad (9)$$

5.6. Проблема Милна

Проблемой Милна называется задача определения функции распределения нейтронов в свободной от источников среде, заполняющей полупространство при нулевом потоке падающего извне излучения. Можно считать, что источник нейтронов расположен на бесконечности. Мы ожидаем вдали от этого источника, но вдали и от границы (взятой в плоскости $x = 0$) то же асимптотическое распределение нейтронов, что и в случае плоского источника в бесконечной среде (разд. 5.4). Это означает, что по мере удаления от источника решение экспоненциально убывает с длиной релаксации ν_0 . Следовательно, оно должно экспоненциально возрастать по мере приближения к источнику (достаточно далеко от границы). Таким образом, если обозначить через $\Psi_0(x, \mu)$ решение задачи, то при больших x должно быть

$$\Psi_0(x, \mu) \rightarrow \psi_{0-}(x, \mu). \quad (1)$$

Итак, мы ищем решение однородного уравнения переноса, удовлетворяющее условию (1) и при $x=0$ граничному условию

$$\Psi_0(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (2)$$

Прежде чем выписывать решение, возможно, стоит упомянуть о том, что первоначально интерес к этой задаче был связан с тем, что описанной нами картиной, а именно полубесконечной средой с источником на большой глубине, хорошо моделируются физические условия в звезде. Данная задача вначале решалась как раз с целью определения углового распределения испускаемого звездой излучения [39]. Подробнее об этом говорится в гл. 10. С точки зрения теории переноса нейтронов можно считать, что решение проблемы Милна дает разумное приближение в случае, когда реактор окружен толстым слоем защиты и требуется определить угловое распределение нейтронов, выходящих наружу.

Из предыдущих рассуждений ясно, что решение проблемы Милна можно искать в виде линейной комбинации элементарных решений, обращающихся в нуль на бесконечности, плюс функция ψ_{0-} . (Моды, возрастающие на бесконечности быстрее ψ_{0-} , не рассматриваются в соответствии с рассуждением перед соотношением (1).) Следовательно, можно записать

$$\Psi_0(x, \mu) = \psi_{0-}(x, \mu) + a_{0+}\psi_{0+}(x, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_\nu(x, \mu) d\nu. \quad (3)$$

Так как нормировка произвольна, можно положить коэффициент при $\psi_{0-}(x, \mu)$ равным единице.

Теперь попытаемся удовлетворить условию отсутствия падающего извне излучения — граничному условию (2). Это немедленно

но дает

$$-\varphi_{0-}(\mu) = a_{0+}\varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu)\varphi_{\nu}(\mu)d\nu, \quad \mu \geq 0. \quad (4)$$

Таким образом, a_{0+} и $A(\nu)$ — это коэффициенты разложения на половинном отрезке функции

$$\varphi_{0-}(\mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 + \mu}. \quad (5)$$

С помощью условия ортогональности, как и в предыдущем разделе, получаем

$$\frac{W(\nu)N(\nu)}{\nu} A(\nu) = - \int_0^1 W(\mu)\varphi_{\nu}(\mu)\varphi_{0-}(\mu)d\mu, \quad (6a)$$

откуда

$$A(\nu) = - \frac{c\nu_0 X(-\nu_0)\varphi_{0-}(\nu)\nu^2}{(\nu_0 - \nu)\gamma(\nu)N(\nu)}, \quad (6b)$$

и

$$- \left[\frac{1}{2} c\nu_0 \right]^2 X(\nu_0)a_{0+} = - \int_0^1 \gamma(\mu)(\nu_0 - \mu)\varphi_{0+}(\mu)\varphi_{0-}(\mu)d\mu, \quad (7a)$$

откуда

$$a_{0+} = X(-\nu_0)/X(\nu_0). \quad (7b)$$

Мы снова воспользовались формулой (34) разд. 4.9.

Формула (7b) позволяет найти *экстраполированную длину*, т. е. расстояние от поверхности, на котором асимптотическая составляющая плотности

$$\rho_{as} = 2\pi \int_{-1}^1 [\psi_{0-}(x, \mu) + a_{0+}\psi_{0+}(x, \mu)] d\mu \quad (7c)$$

обращается в нуль. Пусть $x = -z_0$ будет точкой, в которой $\rho_{as}(x, \mu) = 0$. Так как

$$\psi_{0\pm}(x, \mu) = \varphi_{0\pm}(\mu) e^{\mp x/\nu_0} \quad (8a)$$

и

$$\int_{-1}^1 \varphi_{0\pm}(\mu) d\mu = 1, \quad (8b)$$

то

$$a_{0+} = -e^{-2z_0/\nu_0} = e^{-(2z_0/\nu_0) + i\pi} \quad (9a)$$

откуда

$$z_0 = \frac{\nu_0}{2} (-\ln a_{0+} + i\pi). \quad (9b)$$

5.7. Функция Грина для полупространства

Функция Грина для полупространства $\Psi_g(x, \mu)$ определяется как решение уравнения переноса в полубесконечной среде при отсутствии падающего извне излучения и с источником на некоторой плоскости внутри среды. Иными словами, мы ищем решение уравнения

$$\mu \frac{\partial \Psi_g(x, \mu)}{\partial x} + \Psi_g = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Psi_g(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x-x_0) \delta(\mu-\mu_0)}{2\pi} \quad (1)$$

с граничными условиями

$$\Psi_g(0, \mu) = 0, \quad \mu \geq 0, \quad (2a)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi_g(x, \mu) = 0. \quad (2b)$$

Чтобы удовлетворить уравнению (1), мы будем искать решение *однородного* уравнения переноса, подчиненное условию скачка при $x = x_0$:

$$[\Psi_g(x_0+, \mu) - \Psi_g(x_0-, \mu)] = \frac{1}{2\pi\mu} \delta(\mu - \mu_0). \quad (2c)$$

Ясно, что функция Грина $G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu)$ для бесконечной среды, построенная в разд. 5.2, удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2b) и (2c). Поэтому функцию Грина для полупространства можно представить в виде ¹⁾

$$\Psi_g(x, \mu) = G(x, \mu) - a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) - \int_0^1 A(\nu) \psi_\nu(x, \mu) d\nu. \quad (3)$$

Коэффициенты a_{0+} и $A(\nu)$ должны быть выбраны так, чтобы выполнялось условие (2a), т. е.

$$G(0, \mu) = a_{0+} \psi_{0+}(0, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_\nu(0, \mu) d\nu, \quad \mu > 0. \quad (4)$$

Таким образом, a_{0+} и $A(\nu)$ это коэффициенты разложения функции $G(0, \mu)$ на половинном отрезке. Их можно вычислить

¹⁾ Переменные, характеризующие источники, как и раньше, опускаются везде, где это не может привести к недоразумениям.

с помощью соотношений ортогональности. Итак,

$$a_{0+} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\varphi_{0-}(\mu_0)}{N_{0-}} e^{-x_0/v_0} \frac{X(-v_0)}{X(v_0)} + \int_0^1 \frac{dv}{N(-v)v_0} \frac{X(-v)}{X(v_0)} \varphi_{-v}(\mu_0) e^{-x_0/v} \right], \quad (5)$$

$$A(v) = -\frac{1}{2\pi} \frac{v}{(v_0-v)\gamma(v)N(v)} \left[\frac{\varphi_{0-}(\mu_0)}{N_{0-}} e^{-x_0/v_0} c v v_0 X(-v_0) \varphi_{0-}(v) + \right. \\ \left. + \frac{c v}{2} \int_0^1 dv' \frac{\varphi_{-v'}(\mu_0)}{N(-v')} e^{-x_0/v'} \varphi_{-v'}(v) (v_0 + v') X(-v') \right]. \quad (6)$$

5.8. Задачи для двух смежных полупространств¹⁾

Рассмотрим два полупространства, разделенные плоскостью $x = 0$, и обозначим через c_1 и c_2 значения величины c в правом и левом полупространствах соответственно. Обозначим

$$c(v) = \begin{cases} c_1, & v > 0, \\ c_2, & v < 0; \end{cases} \quad (1)$$

$$\Phi_v(\mu) = \frac{vc(v)}{2} P \frac{1}{v-\mu} + l(v) \delta(v-\mu); \quad (2a)$$

$$l(v) = 1 + \frac{vc(v)}{2} P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu-v}; \quad (2b)$$

$$L^\pm(v) = l(v) \pm \frac{\pi i v c(v)}{2}. \quad (3)$$

Далее, введем без дополнительных разъяснений дисперсионные функции Λ_1 и Λ_2 , дискретные собственные значения v_{01} и v_{02} , собственные функции $\varphi_{1\pm}$, $\varphi_{2\pm}$ и т. д., соответствующие значениям c_1 и c_2 .

Решение характерных задач для двух сред обычно приводит к модифицированному разложению на целом отрезке, при котором функция $\psi(\mu)$ разлагается в ряд по модам, отвечающим области $c = c_2$ при $\mu > 0$, и по модам, отвечающим области $c = c_1$ при $\mu < 0$. Следовательно, теоремой полноты для таких задач гарантируется существование разложения

$$\psi(\mu) = a_{0+} \varphi_{1+} + a_{0-} \varphi_{2-} + \int_{-1}^0 A(v) \varphi_{v2}(\mu) dv + \int_0^1 A(v) \varphi_{v1}(\mu) dv \quad (4)$$

¹⁾ Задача, описанная в этом разделе, решена в [40]; см. также [41].

функции $\psi(\mu)$ класса G . (Выбор φ_{v2} при $v < 0$ и φ_{v1} при $v > 0$ диктуется необходимостью удовлетворения граничных условий на бесконечности.)

Для того чтобы получить формулу (4), проведем рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве теоремы полноты для половинного отрезка (разд. 4.8). Попытаемся сначала найти разложение функции $\psi'(\mu)$ только по функциям непрерывного спектра:

$$\psi'(\mu) = \int_{-1}^0 A(v) \varphi_{v2}(\mu) dv + \int_0^1 A(v) \varphi_{v1}(\mu) dv. \quad (5)$$

Как и в случае задачи для однородной среды, решающий шаг в построении решения (5) — найти функцию $\chi(z)$, аналитическую в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрезка $[-1, 1]$ действительной оси, нигде не равную нулю и такую, что ее граничные значения χ^\pm также не обращаются в нуль и удовлетворяют соотношению

$$\frac{\chi^+(\mu)}{\chi^-(\mu)} = \frac{L^+(\mu)}{L^-(\mu)}. \quad (6)$$

Подходящей функцией будет

$$\chi(z) = X_1(z) X_2(-z), \quad (7)$$

где X_1 и X_2 — обычные X -функции для полупространства, соответствующие значениям c_1 и c_2 . Нетрудно заметить, что отношение граничных значений для $X_1(z)$ удовлетворяет наложенным ограничениям на правой половине разреза (где $X_2(-z)$ непрерывна), а отношение граничных значений для $X_2(-z)$ удовлетворяет наложенным ограничениям на левой половине разреза (где $X_1(z)$ непрерывна).

Продолжая построения по аналогии с разд. 4.8, находим, что функция $n(z)$, определяемая формулой

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c(v)}{2} \frac{vA(v)}{v-z} dv, \quad (8)$$

связана с функцией $\chi(z)$ соотношением

$$n(z) = \frac{1}{\chi(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\mu) \psi'(\mu)}{\mu - z} d\mu, \quad (9a)$$

где

$$\Gamma(\mu) = \frac{\mu c(\mu)}{2} \frac{\chi^-(\mu)}{L^-(\mu)}. \quad (9b)$$

Для того чтобы выполнялось асимптотическое условие $n(z) \sim z^{-1}$ при $z \rightarrow \infty$, мы должны потребовать выполнения условий

$$\int_{-1}^1 \mu^l \Gamma(\mu) \psi'(\mu) d\mu = 0, \quad l = 0, 1. \quad (10)$$

Оба эти условия могут быть удовлетворены, поскольку мы располагаем двумя дискретными собственными функциями (см. формулу (4)). Теорема полноты доказана.

Чтобы определить коэффициенты разложения в каждом конкретном случае, надо воспользоваться соотношениями ортогональности, аналогичными тем, которые были получены в гл. 4 для случаев целого отрезка и половинного отрезка. Эти соотношения можно доказать точно так же, как соответствующие соотношения для половинного отрезка (разд. 4.9). Можно использовать, впрочем, и другие методы [42]. Мы приведем лишь окончательные результаты:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi_v(\mu) \Phi_{v'}(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = (v_{01} - v) (v_{02} + v) \Gamma(v) L^+(v) L^-(v) \delta(v - v'), \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_{1+}(\mu) \Phi_v(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = 0, \quad (11b)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_{2-}(\mu) \Phi_v(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = 0, \quad (11c)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_{1+}(\mu) \Phi_{2-}(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = 0, \quad (11d)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi_{1-}(\mu) \Phi_v(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = \frac{1}{2} c_1 v c(v) v_{01}^2 \frac{v_{02} - v_{01}}{v_{01} + v} \chi(-v_{01}), \end{aligned} \quad (11e)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi_{2+}(\mu) \Phi_v(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = \frac{1}{2} c_2 v c(v) v_{02}^2 \frac{v_{01} - v_{02}}{v_{02} + v} \chi(v_{02}), \end{aligned} \quad (11f)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \Phi_{1\pm}(\mu) \Phi_{1\pm}(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = - \left[\frac{1}{2} c_1 v_{01} \right]^2 (v_{01} \pm v_{02}) \chi(\pm v_{02}), \end{aligned} \quad (11g)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{2\pm}(\mu) \varphi_{2-}(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = \left[\frac{1}{2} c_2 v_{02} \right]^2 (v_{02} \mp v_{01}) \chi(\pm v_{02}), \quad (11h)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{2+}(\mu) \varphi_{1+}(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = -\frac{1}{2} c_1 c_2 v_{01} v_{02}^2 \chi(+v_{02}), \quad (11i)$$

$$\int_{-1}^1 \varphi_{1-}(\mu) \varphi_{2-}(\mu) (v_{01} - \mu) (v_{02} + \mu) \Gamma(\mu) d\mu = \\ = \frac{1}{2} c_1 c_2 v_{01}^2 v_{02} \chi(-v_{01}). \quad (11j)$$

С помощью этих формул можно выписать решения различных задач для двух полупространств.

А. Проблема Милна для двух полупространств

Ищем решение $\psi(x, \mu)$ уравнения

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \begin{cases} \frac{c_1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', & x > 0; \\ \frac{c_2}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', & x < 0, \end{cases} \quad (12)$$

с граничными условиями

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \mu) = \psi_{1-}(x, \mu), \quad (13a)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x, \mu) = 0, \quad (13b)$$

$$\psi(0+, \mu) = \psi(0-, \mu). \quad (13c)$$

Из условия (13a) следует, что функция $\psi(x, \mu)$ не содержит мод, возрастающих при $x \rightarrow \infty$, за исключением $\psi_-(\mu)$. Поэтому

$$\psi(x, \mu) = \psi_{1-}(x, \mu) + a_{0+} \psi_{1+}(x, \mu) + \int_0^1 A(v) \psi_{v1}(x, \mu) dv, \quad x > 0. \quad (14a)$$

Из условия (13b) следует, что $\psi(x, \mu)$ не содержит мод, возрастающих при $x \rightarrow -\infty$. Поэтому

$$\psi(x, \mu) = -a_{0-} \psi_{2-}(x, \mu) - \int_{-1}^0 A(v) \psi_{v2}(x, \mu) dv, \quad x < 0. \quad (14b)$$

Наконец, условие (13с), означающее непрерывность функции $\Psi(x, \mu)$ при $x = 0$, дает

$$\begin{aligned} -a_{0-}\varphi_{2-}(\mu) - \int_{-1}^0 A(\nu) \varphi_{\nu 2}(\mu) d\nu = \\ = \varphi_{1-}(\mu) + a_{0+}\varphi_{1+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_{\nu 1}(\mu) d\nu, \end{aligned} \quad (15)$$

откуда

$$-\varphi_{1-}(\mu) = a_{0+}\varphi_{1+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{2-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \Phi_{\nu}(\mu) d\nu, \quad (16)$$

где функция $\Phi_{\nu}(\mu)$ определена равенством (2а).

В силу теоремы полноты, доказательство которой было намечено выше в настоящем разделе, разложение (16) справедливо. Коэффициенты разложения можно найти из соотношений ортогональности. Таким образом,

$$a_{0+} = \frac{\chi(-\nu_{01})}{\chi(\nu_{01})} \frac{(\nu_{02} - \nu_{01})}{\nu_{02} + \nu_{01}}, \quad (17a)$$

$$a_{0-} = -\frac{\chi(-\nu_{01})}{\chi(-\nu_{02})} \frac{2c_1\nu_{01}^2}{c_2\nu_{02}(\nu_{02} + \nu_{01})}, \quad (17b)$$

$$A(\nu) = -\frac{\nu c_1(1-c_1)\nu_{01}^2(\nu_{02}-\nu_{01})\chi(-\nu_{01})X_1(-\nu)}{(\nu_{02}+\nu)N_1(\nu)X_2(-\nu)}, \quad \nu > 0 \quad (18a)$$

$$A(\nu) = -\frac{\nu c_1(1-c_2)\nu_{01}^2(\nu_{02}-\nu_{01})\chi(-\nu_{01})X_2(\nu)(\nu_{02}-\nu)}{(\nu_{01}^2-\nu^2)N_2(\nu)X_1(\nu)}, \quad \nu < 0. \quad (18b)$$

В пределе при $c_2 \rightarrow 0$ из найденного решения получается решение обычной проблемы Милна (разд. 5.6).

В. Задача с постоянным источником

Предположим, что в правом полупространстве расположен постоянный изотропный источник q_0 . Полагая, как и прежде, $c_1 \leq 1$, $c_2 \leq 1$, получаем, что решение с правильным поведением при $x \rightarrow \pm \infty$ имеет вид

$$\Psi(x, \mu) = \begin{cases} \frac{q_0}{1-c_1} + a_{0+}\psi_{1+}(x, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_{\nu 1}(\mu) d\nu, & x > 0; \\ -a_{0-}\psi_{2-}(x, \mu) - \int_{-1}^0 A(\nu) \psi_{\nu 2}(\mu) d\nu, & x < 0. \end{cases} \quad (19)$$

Условие непрерывности $\psi(0+, \mu) = \psi(0-, \mu)$ дает уравнение для коэффициентов $a_{0\pm}$ и $A(\nu)$:

$$-\frac{q_0}{1-c_1} = a_{0+}\varphi_{1+}(\mu) + a_{0-}\varphi_{2-}(\mu) + \int_{-1}^1 A(\nu) \Phi_\nu(\mu) d\nu. \quad (20)$$

С помощью соотношений ортогональности находим явные выражения для коэффициентов разложения:

$$a_{0+} = \frac{2q_0}{(1-c_1) c_1 \nu_{01} (\nu_{01} + \nu_{02}) \chi(\nu_{01})}, \quad (21a)$$

$$a_{0-} = \frac{-2q_0}{(1-c_1) c_2 \nu_{02} (\nu_{01} + \nu_{02}) \chi(-\nu_{02})}, \quad (21b)$$

$$A(\nu) = \frac{-q_0 (\nu_{01} + \nu) X_1(-\nu) \nu}{(\nu_{02} + \nu) X_2(-\nu) N_1(\nu)}, \quad \nu > 0 \quad (22a)$$

$$A(\nu) = \frac{-q_0 (1-c_2) (\nu_{02} - \nu) X_2(\nu) \nu}{(1-c_1) (\nu_{01} - \nu) X_1(\nu) N_2(-\nu)}, \quad \nu < 0. \quad (22b)$$

Решение задачи для одного полупространства с постоянным изотропным источником q_0 имеет вид

$$\Psi(x, \mu) = \left[\frac{q_0}{1-c_1} + a_{0+}\psi_{1+}(x, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_{\nu 1}(x, \mu) d\nu \right], \quad c_2 = 0, \quad (23)$$

где, как легко видеть,

$$a_{0+} = \frac{2q_0}{(1-c_1) c_1 \nu_{01} X_1(\nu_{01})}, \quad (24a)$$

$$A(\nu) = -\frac{q_0 (\nu_{01} + \nu) X_1(-\nu) \nu}{N_1(\nu)}. \quad (24b)$$

Тут мы воспользовались тем, что $X(z) \rightarrow 1/(1-z)$ и $\nu_0 \rightarrow 1$ при $c \rightarrow 0$.

С. Функция Грина для двух полупространств

Мы хотим найти в обоих полупространствах фазовую плотность, обусловленную плоским мононаправленным источником, расположенным в плоскости $x = x_0$. Имеем в одном полупространстве уравнение переноса

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c_2}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad x < 0, \quad (25a)$$

и граничное условие

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x, \mu) = 0, \quad (25b)$$

а в другом полупространстве — уравнение переноса

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c_1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x-x_0) \delta(\mu-\mu_0)}{2\pi}, \quad x > 0, \quad (26a)$$

и граничное условие

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x, \mu) = 0. \quad (26b)$$

(Мы предполагаем, что источник расположен в правом полупространстве.) На поверхности раздела потребуем выполнения условия

$$\psi(0+, \mu) = \psi(0-, \mu). \quad (27)$$

Решение уравнения (25а), удовлетворяющее граничному условию (25b), в наиболее общем виде можно представить формулой

$$\psi(x, \mu) = a_{0-}\psi_{2-}(x, \mu) + \int_{-1}^0 A(v) \psi_{v2}(x, \mu) dv, \quad (28)$$

а решение уравнения (26а), удовлетворяющее граничному условию (26b), равно

$$\psi(x, \mu) = G_1(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu) - a_{0+}\psi_{1+} - \int_0^1 A(v) \psi_{v1}(x, \mu) dv,$$

где G_1 — функция Грина для бесконечной среды (разд. 5.2; $c = c_1$). Осталось определить такие коэффициенты $a_{0\pm}$ и $A(v)$, чтобы выполнялось условие (27), поскольку условие на бесконечности и условие скачка уже выполнены. Из условия (27) следует, что

$$G_1(x_0, \mu_0 \rightarrow 0, \mu) = a_{0+}\varphi_{1+} + a_{0-}\varphi_{2-} + \int_{-1}^1 A(v) \Phi_v(\mu) dv. \quad (29)$$

Формулу для $G(x_0, \mu_0 \rightarrow 0, \mu)$ можно получить, полагая $x = 0$ в формуле (11) разд. 5.2. Тогда коэффициенты $a_{0\pm}$ и $A(v)$ сразу же определяются из выписанных выше в настоящем разделе соотношений ортогональности для двух полупространств. Предоставляем читателю в качестве упражнения получить их явные выражения (см. формулу (17) разд. 5.2). Здесь мы их не приводим из-за их громоздкости. Однако для плотности $\rho(x_0 \rightarrow x)$ от изотропного источника формулы относительно про-

стве:

$$\rho(x_0, x) = \begin{cases} \rho_{\infty}^{(1)}(x_0 - x) - \frac{1}{c_1 - c_2} \int_0^{\infty} \eta_m^{(1)}(x' + x_0) \eta_m^{(1)}(x' + x) dx', & x > 0; \\ \frac{1}{c_1 - c_2} \int_{(x-x_0)/2}^{(x+x_0)/2} \eta_m^{(1)}\left(x' - \frac{x-x_0}{2}\right) \eta_m^{(2)}\left(x' + \frac{x-x_0}{2}\right) dx', & x < 0. \end{cases} \quad (30)$$

Здесь $\rho_{\infty}^{(1)}$ — плотность нейтронов от изотропного плоского источника в бесконечной среде, характеризуемой величиной $c = c_1$ [40] и

$$\eta_m^{(j)} = \left[\frac{d}{dx_0} - \frac{1}{v_0} \right] \rho_m^{(j)}(x_0),$$

где $\rho_m^{(j)}(x)$ — плотность нейтронов в проблеме Милна для полубесконечной среды типа j ($j = 1, 2$), причем $\rho_m(0) = 1$.

Глава 6

ЯВНЫЙ ВИД РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ О ПРОХОЖДЕНИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЧЕРЕЗ ПОЛУПРОСТРАНСТВО И ПЛОСКИЕ СЛОИ

6.1. Введение

В предыдущей главе были найдены явные выражения для фазовой плотности в ряде задач. Например, были найдены функции Грина для неограниченной среды и полупространства, решены альбедная задача и проблема Милна, а также различные задачи с двумя полупространствами. В задачах с одним полупространством любое решение можно представить в виде:

$$\Psi(x, \mu) = f(x, \mu) + a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_\nu(x, \mu) d\nu, \quad (1a)$$

$$\psi_{0+} = \varphi_{0+}(\mu) e^{-x/\nu_0}, \quad (1b)$$

$$\psi_\nu = \varphi_\nu(\mu) e^{-x/\nu}. \quad (1c)$$

Здесь $f(x, \mu)$ — известная функция, а коэффициенты a_{0+} и $A(\nu)$ определяются граничным условием на поверхности $x = 0$.

Это граничное условие при $x = 0$ всегда приводит к уравнению

$$\psi(\mu) = a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu, \quad (2)$$

где функция $\psi(\mu)$, подлежащая разложению (в указанной форме (2)), различна для разных задач (например, $\psi(\mu) = \delta(\mu - \mu_0)$ для альбедной задачи и $\psi(\mu) = -\varphi_{0-}(\mu)$ для проблемы Милна). С помощью соотношений ортогональности можно получить из уравнения (2) (разд. 4.9) общие выражения для a_{0+} и $A(\nu)$:

$$a_{0+} = - \frac{\int_0^1 \psi(\mu') W(\mu') \varphi_{0+}(\mu') d\mu'}{(c\nu_0/2)^2 X(\nu_0)}, \quad (3a)$$

$$A(\nu) = \frac{\int_0^1 \psi(\mu') W(\mu') \varphi_\nu(\mu') d\mu'}{W(\nu) N(\nu)/\nu}. \quad (3b)$$

(На самом деле для большинства задач функция $\psi(\mu)$ простая, так что интегралы в (3a) и (3b) можно взять аналитически. Поэтому в выражении для фазовой плотности остается только (численное) интегрирование по ν .)

В этой главе мы займемся упрощением выражений для фазовой плотности и, что особенно важно, для плотности $\rho(x)$ и для распределения выходящего излучения $\Psi(0, \mu)$, $\mu < 0$. Последние величины наиболее интересны с точки зрения физических приложений. Их упрощение состоит, во-первых, в вычислении, когда это возможно, различных интегралов в явном виде и, во-вторых, в представлении в наиболее простой форме полученных результатов, а также подинтегральных функций в тех случаях, когда интегралы *нельзя* взять аналитически. При этом в интересующие нас выражения входят только две трансцендентные функции: X -функция, уже встречавшаяся в предыдущих двух главах, и функция

$$N(\nu) = \nu \Lambda^+(\nu) \Lambda^-(\nu),$$

которая также использовалась ранее. Обе эти функции протабулированы, и потому численная оценка наших результатов относительно проста.

Чтобы облегчить нашу задачу, мы докажем в разд. 6.2 несколько тождеств, содержащих X -функцию. Эти тождества, каждое из которых по существу вытекает из теоремы Коши, в свою очередь приводят к нелинейному интегральному уравнению для $X(z)$, которое можно решить итерационным методом и тем самым получить численные значения функции $X(z)$. В разд. 6.3 с помощью тех же тождеств мы упростим выражение для $\rho(x)$ и $\Psi(0, \mu)$. Эти функции, а также некоторые другие, представляющие интерес для проблемы Милна, мы подробно исследуем в разд. 6.4. Выбор для изучения проблемы Милна объясняется ее историческим значением, а также тем, что она особенно удобна для испытания приближенных методов. В разд. 6.5 мы произведем аналогичные упрощения в задачах о двух средах. В последующих разделах разберем специфические трудности, возникающие в задачах о системах с двумя границами (плоские слои), и в заключение в разд. 6.8 и 6.9 обсудим задачи с анизотропным рассеянием.

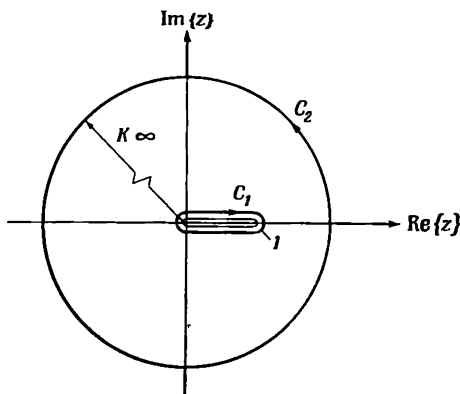
6.2. Тождества, содержащие функцию $X(z)$

Как уже отмечалось в предыдущем разделе, тождества, которые мы установим здесь, будут использованы для упрощения выражений функции распределения нейтронов, а также для численной оценки некоторых результатов.

Тождество А.

$$X(z) = \int_0^1 \frac{\gamma(\mu')}{\mu' - z} d\mu'. \quad (1)$$

Доказательство. Мы знаем, что $X(z) \in \mathcal{U}$, где \mathcal{U} — комплексная плоскость z с разрезом вдоль действительной оси

Рис. 6.1. Контуры C_1 и C_2 .

от 0 до 1, и что $X(z) \sim -1/z$ при $z \rightarrow \infty$ (разд. 4.8). Отсюда по теореме Коши

$$X(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1 + C_2} \frac{X(z')}{z' - z} dz', \quad (2)$$

где контуры C_1 и C_2 показаны на рис. 6.1. Так как $X(z) = 0$ на C_2 , то

$$X(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{X(z')}{z' - z} dz'. \quad (3)$$

Из определения функций $X^\pm(z)$ вытекает, что

$$X(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{X^+(\mu) - X^-(\mu)}{\mu - z} d\mu. \quad (4)$$

Но так как (формула (8b) разд. 4.8)

$$\gamma(\mu) = \frac{1}{2\pi i} [X^+(\mu) - X^-(\mu)], \quad (5)$$

то

$$X(z) = \int_0^1 \frac{\gamma(\mu)}{\mu - z} d\mu, \quad (6)$$

что и требовалось доказать ¹⁾.

Тождество В.

$$X(z) X(-z) = \Lambda(z) / (v_0^2 - z^2) (1 - c). \quad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$R(z) = \Lambda(z) / X(z) X(-z) (v_0^2 - z^2) (1 - c). \quad (8)$$

Эта функция аналитична всюду в комплексной плоскости с разрезом (поскольку значения $\pm v_0$ являются нулями не только знаменателя, но и функции $\Lambda(z)$). Далее при $z \rightarrow \infty$

$$R(z) \sim \frac{1-c}{[1/(1-z)][1/(1+z)](-z^2)(1-c)} \rightarrow 1, \quad (9)$$

поскольку при $z \rightarrow \infty$

$$\Lambda(z) \rightarrow 1 - c \quad (10)$$

и

$$X(z) \rightarrow 1/(1-z). \quad (11)$$

Таким образом, $R(z)$ — аналитическая функция в комплексной плоскости с разрезом, стремящаяся к 1 при $z \rightarrow \infty$ и непрерывная на разрезе. Чтобы доказать это, рассмотрим отношение

$$\frac{R^+}{R^-} = \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} \frac{X^-(\mu) X^-(-\mu)}{X^+(\mu) X^+(-\mu)}. \quad (12)$$

Функция $X(-\mu)$ при $\mu \geq 0$ непрерывна, так что (12) переходит в

$$\frac{R^+}{R^-} = \frac{\Lambda^+(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} \frac{X^-(\mu)}{X^+(\mu)}. \quad (13)$$

Так как $\Lambda^+/\Lambda^- \equiv X^+/X^-$, то при $\mu \geq 0$

$$R^+/R^- = 1. \quad (14)$$

Аналогично можно показать, что функция $X(\mu)$ непрерывна при $\mu < 0$, так что соотношение (14) справедливо при всех μ . Следовательно, $R(z)$ аналитична всюду и $R(z) \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$. Тогда по теореме Липуилля

$$R(z) \equiv 1, \quad (15)$$

¹⁾ Из этого тождества видно, что величины $m_{0\pm}$, введенные в разд. 4.8 (формулы (23)), пропорциональны $X(\pm v_0)$ и потому не равны нулю.

откуда

$$X(z) X(-z) = \frac{\Lambda(z)}{(v_0^2 - z^2)(1-c)}, \quad (16a)$$

и тождество В доказано.

Так как $\Lambda(0) = 1$, то из этого тождества вытекает простое соотношение

$$X^2(0) = 1/(v_0^2(1-c)). \quad (16b)$$

Тождество С.

$$X(z) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu' d\mu'}{(v_0^2 - \mu'^2) X(\mu') (\mu' + z)}. \quad (17)$$

Это «тождество» на самом деле является нелинейным интегральным уравнением для $X(z)$. Уравнение (17), как и другие аналогичные соотношения, можно использовать для получения численных значений функции $X(z)$.

Доказательство. Подставим в тождество А

$$X(z) = \int_0^1 \frac{\gamma(\mu')}{\mu' - z} d\mu' \quad (18)$$

явное выражение для $\gamma(\mu)$:

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{X^-(\mu)}{\Lambda^-(\mu)}. \quad (19)$$

Тогда

$$X(z) = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{\mu' X^-(\mu')}{\Lambda^-(\mu') (\mu' - z)} d\mu'. \quad (20)$$

Запишем тождество В в виде

$$\frac{X^-(\mu')}{\Lambda^-(\mu')} = \frac{1}{(v_0^2 - \mu'^2)(1-c)} \frac{1}{X^-(\mu')} \quad (21)$$

и заметим, что при $\mu' \geq 0$ функция $X(-\mu')$ непрерывна, так что

$$\frac{X^-(\mu')}{\Lambda^-(\mu')} = \frac{1}{(v_0^2 - \mu'^2)(1-c)} \frac{1}{X(-\mu')}. \quad (22)$$

Следовательно,

$$X(z) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_0^1 \frac{\mu'}{v_0^2 - \mu'^2} \frac{1}{X(-\mu')} \frac{d\mu'}{\mu' - z}. \quad (23)$$

Заменяя μ' на $-\mu'$, получаем

$$X(z) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu'}{(\nu_0^2 - \mu'^2)} \frac{1}{X(\mu')} \frac{d\mu'}{\mu' + z}, \quad (24)$$

что и требовалось доказать¹⁾.

Это уравнение применял Чандрасекар [43] для нахождения численных значений функции $X(z)$. Опишем его метод вычислений.

Легко видеть, что если функция $X(z)$ известна для $-1 \leq \mu \leq 0$, то она известна всюду. Если положить $z = \mu$, $-1 \leq \mu \leq 0$, то мы придем к несингулярному нелинейному интегральному уравнению, удобному для решения итерационным методом. Лучше всего начать с вычитания $X(0)$ из обеих частей уравнения (24):

$$X(z) - X(0) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu' d\mu'}{(\nu_0^2 - \mu'^2) X(\mu')} \left[\frac{1}{\mu' + z} - \frac{1}{\mu'} \right]. \quad (25)$$

Так как

$$X(0) = 1/(\nu_0 \sqrt{1-c}) \quad (26)$$

(формула (16b)²⁾ и

$$\frac{1}{\mu' + z} - \frac{1}{\mu'} = -\frac{z}{\mu'(\mu' + z)}, \quad (27)$$

то после замены переменных $z = \mu$ ($-1 \leq \mu \leq 0$) уравнение (25) принимает вид

$$X(\mu) = \frac{1}{\nu_0 \sqrt{1-c}} - \frac{c}{2} \frac{\mu}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{d\mu'}{(\nu_0^2 - \mu'^2) X(\mu')(\mu' + \mu)}. \quad (28)$$

Теперь итерации функции $X(\mu)$ сходятся достаточно быстро.

Чандрасекар вычислял функцию

$$H(z) \equiv 1/(\sqrt{1-c} X(-z)(\nu_0 + z)), \quad (29a)$$

решая итерационным методом интегральное уравнение³⁾

$$\frac{1}{H(\mu)} = (1-c)^{1/2} + \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{\mu' H(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (29b)$$

¹⁾ По существу это же уравнение получается методом инвариантного погружения, но там используется функция $H(z)$ (подробности см. в гл. 9).

²⁾ При вычислении квадратного корня необходимо устранить неопределенность в знаке. Это можно сделать, заметив, что $X(0) = e^{\Gamma(0)} > 0$ (разд. 4.8).

³⁾ Доказательство см. в разд. 9.3.

Таблицы значений функции $H(\mu)$ приведены в различных работах, например в [43] и в приложении I.

Существует итерационная схема, обеспечивающая более быструю сходимость, чем те, которые связаны с уравнениями (28) или (29) (см. [44]). Эта схема построена для функции

$$\Omega(z) \equiv [(1/X(0)) - z] X(z), \quad (30)$$

удовлетворяющей интегральному уравнению

$$\Omega(z) = 1 - \frac{zc\nu_0^2}{2} \int_{-1}^0 \frac{1 - \mu^2 X^2(0)}{(-\mu^2 + \nu_0^2)(\mu + z) \Omega(\mu)} d\mu. \quad (31)$$

Итерационный процесс для этого уравнения сходится исключительно быстро.

Тождество D.

$$\int_0^1 \frac{\varphi_\nu(\mu) \varphi_\nu(\mu')}{(\nu_0 - \nu) \gamma(\nu) N(\nu)/\nu} d\nu = \frac{1}{\nu_0 - \mu} \left[\frac{1}{(\nu_0 - \mu')} \frac{1}{X(\nu_0)} - \frac{1}{\mu - \mu'} \frac{1}{X(\mu)} \right],$$

$$\mu < 0, \mu' > 0. \quad (32)$$

Доказательство этого тождества ¹⁾ мы приводить не будем, так как оно сводится к непосредственному и довольно утомительному применению теоремы Коши. Метод доказательства аналогичен методу доказательства соотношений ортогональности в разд. 4.9

Явное выражение для функции $X(z)$. Закончим раздел выводом явного выражения для $X(z)$, которым можно будет пользоваться при вычислениях. В разд. 4.8 мы получили формулу

$$X(z) = \frac{1}{1-z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(\mu') d\mu'}{\mu' - z} \right], \quad (33)$$

где

$$\theta(\mu) = \arg \Lambda^+ = \arctg \frac{\pi c \mu}{2(1 - c \mu \operatorname{Arth} \mu)}. \quad (34)$$

Перепишем интеграл в формуле (33) в виде

$$\int_0^1 \theta(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' - z} \equiv \int_0^1 \theta(\mu') \frac{d}{d\mu'} \ln(\mu' - z) d\mu'. \quad (35)$$

¹⁾ Заметим, что тождество (32) не инвариантно относительно замены $\mu \neq \mu'$, что на первый взгляд может показаться странным. Однако ограничение $\mu < 0, \mu' > 0$ также не симметрично относительно μ и μ' .

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^1 \theta(\mu') \frac{d\mu'}{\mu' - z} = \pi \ln(1 - z) - \int_0^1 \frac{d\theta(\mu')}{i d\mu'} \ln(\mu' - z) d\mu'. \quad (36)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = \pi. \quad (37)$$

Вычисляя $d\theta/d\mu$ из соотношения (34) и учитывая формулы (33) и (36), приходим после некоторых алгебраических преобразований к равенству

$$X(z) = \exp \left[-\frac{c}{2} \int_0^1 \frac{1}{\Lambda^+(\mu') \Lambda^-(\mu')} \left\{ 1 + \frac{c\mu'^2}{1 - \mu'^2} \right\} \ln(\mu' - z) d\mu' \right]. \quad (38)$$

Подстановка $N(v) = v\Lambda^+(v)\Lambda^-(v)$ (разд. 4.5) дает

$$X(z) = \exp \left[-\frac{c}{2} \int_0^1 \frac{\mu'}{N(\mu')} \left\{ 1 + \frac{c\mu'^2}{1 - \mu'^2} \right\} \ln(\mu' - z) d\mu' \right]. \quad (39)$$

В приложении L приведены таблицы значений функции $X(z)$ для $0 \leq z \leq 1$ и $0 \leq c \leq 1$.

6.3. Применение тождеств для X -функции к некоторым задачам для полупространства

А. Фазовая плотность

Как уже упоминалось в разд. 6.1, фазовая плотность $\Psi(x, \mu)$ в различных задачах для полупространства определяется функцией $\psi(\mu)$, участвующей в разложении (2). При этом $\Psi(x, \mu)$ представляется в виде комбинации собственных функций, а именно

$$\Psi(x, \mu) = f(x, \mu) + a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) + \int_0^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv, \quad (1)$$

где a_{0+} и $A(v)$ задаются соотношениями (3а) и (3б) из разд. 6.1. Присутствие в разложении слагаемого $f(x, \mu)$ зависит от задачи ¹⁾.

Заметим прежде всего, что и a_{0+} , и $A(v)$ содержат функцию ²⁾

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{X^-(\mu)}{\Lambda^-(\mu)}. \quad (2)$$

¹⁾ Например, в проблеме Милна $f(x, \mu) = \psi_{0-}(x, \mu)$, а в альбедной задаче $f(x, \mu) = 0$.

²⁾ См. формулу (27) разд. 4.9. Эквивалентность этой формулы и формулы (5) разд. 6.2 легко доказать с помощью равенства $X^-/X^+ = \Lambda^-/\Lambda^+$.

Другими словами, a_{0+} и $A(v)$ выражаются через граничные значения аналитических функций. Так как с аналитическими функциями в комплексной плоскости удобнее оперировать вдали от разреза, выразим $\gamma(\mu)$ только через функцию $X(z)$, а не через значения $X^-(\mu)$ и $\Lambda^-(\mu)$. Это нетрудно сделать с помощью тождества В, т. е. формулы (7) разд. 6.2:

$$X(z)X(-z) = \Lambda(z)/(\nu_0^2 - z^2)(1 - c). \quad (3)$$

Пусть $z = \mu$, $0 \leq \mu \leq 1$. Тогда функция $X(-\mu)$ непрерывна вдоль разреза, так что равенство (3) можно переписать в виде

$$\frac{X^-(\mu)}{\Lambda^-(\mu)} = \frac{1}{X(-\mu)(\nu_0^2 - \mu^2)(1 - c)}, \quad (4a)$$

откуда

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{1}{X(-\mu)(\nu_0^2 - \mu^2)(1 - c)}. \quad (4b)$$

Применяя соотношение (4b) и равенство

$$\Phi_{0+}(\mu') = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 - \mu'}, \quad (5)$$

получаем более простой вид формулы (3a) разд. 6.1:

$$a_{0+} = -\frac{1}{\nu_0 X(\nu_0)(1 - c)} \int_0^1 \frac{\mu' \psi(\mu')}{X(-\mu')(\nu_0^2 - \mu'^2)} d\mu'. \quad (6)$$

Аналогично упрощается формула (3b) разд. 6.1:

$$A(v) \equiv \frac{!(\nu_0 + v) X(-v)}{N(v)} \times \\ \times \left[\frac{c}{2} P \int_0^1 \frac{\psi(\mu')}{X(-\mu')(\nu_0 + \mu')} \frac{\mu' d\mu'}{v - \mu'} + \frac{\lambda(v) \psi(v) v}{X(-v)(\nu_0 + v)} \right]. \quad (7)$$

Здесь мы воспользовались явным видом функции

$$\Phi_v(\mu') = \frac{cv}{2} P \frac{1}{v - \mu'} + \lambda(v) \delta(v - \mu'). \quad (8)$$

Даже если функция $\psi(\mu')$ такова, что аналитическая оценка интеграла невозможна, выражение для a_{0+} (формула (6)) весьма удобно (поскольку все величины, входящие в формулу (6), несингулярны, а X -функции хорошо протабулированы). При вычислении $A(v)$ по формуле (7), напротив, могут возникнуть затруднения из-за присутствующего в ней главного значения интеграла. Подстановка равенств (6) и (7) в формулу (1) для фазовой плотности приводит к тому, что $\Psi(x, \mu)$ выражается через главное значение двойного интеграла — одного по μ' (формула (7)) и другого по v . Однако с помощью интегрирования по частям и в слу-

чае надобности формулы Пуанкаре — Бертрана этот интеграл обычно можно представить в виде суммы главных значений двух однократных интегралов.

Прежде чем перейти к исследованию других величин, остановимся на численной оценке главного значения интеграла

$$P \int_a^b \frac{f(z)}{z-z_0} dz, \quad (9)$$

где $z_0 \in [a, b]$. Запишем этот интеграл в виде

$$\int_a^b \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + f(z_0) P \int_a^b \frac{1}{z - z_0} dz. \quad (10)$$

Первый интеграл в (10) не содержит особенностей, а второй вычисляется точно:

$$P \int_a^b \frac{1}{\mu - \mu_0} d\mu = \ln \frac{b - \mu_0}{\mu_0 - a}. \quad (11)$$

Таким способом можно часто обойти трудности, связанные с вычислениями.

В. Плотность распределения

Рассмотрим плотность распределения $\rho(x)$, задаваемую формулой

$$\rho(x)/2\pi = \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu) d\mu. \quad (12)$$

Проинтегрируем равенство (1) по μ и учтем, что φ_{0+} и φ_v нормированы на единицу¹⁾; тогда

$$\rho(x)/2\pi = \int_{-1}^1 f(x, \mu) d\mu + a_{0+} e^{-x/\nu_0} + \int_0^1 A(v) e^{-x/\nu} dv. \quad (13)$$

Из-за трансцендентного множителя $e^{-x/\nu}$ интеграл по dv в (13) всегда приходится оценивать численно.

С. Распределение выходящего излучения

Распределение выходящего излучения $\Psi(0, \mu)$ можно найти, подставив $x = 0$ в формулу (1) для фазовой плотности:

$$\Psi(0, \mu) = f(0, \mu) + a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(v) \varphi_v(\mu) dv, \quad \mu < 0. \quad (14)$$

¹⁾ См. также формулы (1b) и (1c) из разд. 6.1.

Заметим, что подинтегральная функция в (14) несингулярна, так как $\mu < 0$. Для того чтобы упростить формулу (14), подставим в нее выражения для a_{0+} и $A(\nu)$ (формулы (3) разд. 6.1) и затем применим тождество D, т. е. формулу (32) разд. 6.2. В результате получим относительно простое выражение для расщепления выходящего излучения:

$$\Psi(0, \mu) = f(0, \mu) + \frac{1}{X(\mu)} \left[\int_0^1 \gamma(\mu') \psi(\mu') \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{\nu_0 - \mu} \right\} d\mu' \right], \quad \mu < 0, \quad (15a)$$

или в силу (4b)

$$\Psi(0, \mu) = f(0, \mu) + \frac{1}{X(\mu)} \left[\int_0^1 \frac{c\mu'}{2} \frac{\psi(\mu')}{X(-\mu')(\nu_0^2 - \mu'^2)(1-c)} \times \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{\nu_0 - \mu} \right\} d\mu' \right], \quad \mu < 0. \quad (15b)$$

Существует другой (более простой) вывод соотношения (15a) — без привлечения тождества D [45]. Рассмотрим функцию $\Psi(0, \mu')$ для $\mu' > 0$. Умножим соотношение (14) на $\varphi_\mu(\mu') W(\mu') d\mu'$, $\mu < 0$, и проинтегрируем от 0 до 1. С помощью формул (34e) и (34f) разд. 4.9 находим, что

$$\int_0^1 \psi(\mu') \varphi_\mu(\mu') W(\mu') d\mu' = \\ = -X(\mu) \frac{c\mu}{2} (\nu_0 - \mu) \left[a_{0+} \varphi_{0+}(\mu) + \int_0^1 A(\nu) \varphi_\nu(\mu) d\nu \right], \quad \mu < 0. \quad (15c)$$

Подставив (15c) в (14), получим

$$\Psi(0, \mu) = f(0, \mu) - \frac{2}{c\mu(\nu_0 - \mu) X(\mu)} \int_0^1 \psi(\mu') \varphi_\mu(\mu') W(\mu') d\mu', \quad \mu < 0, \quad (15d)$$

что нетрудно свести к (15a).

В альбедной задаче $\psi(\mu') = \delta(\mu' - \mu_0)$, $f(x, \mu) = 0$, так что формула (15b) принимает вид:

$$\Psi_a(0, \mu) = \frac{c\mu_0}{2(\nu_0 + \mu_0)(1-c)} \frac{1}{X(-\mu_0)} \frac{1}{X(\mu)} \frac{1}{\mu_0 - \mu} \frac{1}{\nu_0 - \mu}, \quad \mu < 0. \quad (16)$$

В задаче о плоском изотропном источнике, расположенном в плоскости $x = 0$ (рассматривается случай одного полупространства, а не двух смежных полупространств), согласно формуле (23) разд. 5.8,

$$f(x, \mu) = q_0/(1 - c), \quad (17)$$

а функция $\psi(\mu)$, участвующая в разложении (2) разд. 6.1, равна:

$$\psi(\mu) = -q_0/(1 - c). \quad (18)$$

Здесь формула (15a) имеет вид

$$\Psi_k(0, \mu) = \frac{q_0}{1-c} \left[1 - \frac{1}{X(\mu)} \int_0^1 \gamma(\mu') \left\{ \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{v_0 - \mu} \right\} d\mu' \right], \quad \mu < 0. \quad (19)$$

Формулу (19) можно еще упростить, вычислив первый интеграл с помощью тождества A для X-функции (т. е. формулы (1) разд. 6.2) и заметив при вычислении второго интеграла, что

$$\int_0^1 \gamma(\mu') d\mu' = \lim_{z \rightarrow \infty} (-zX(z)) = 1. \quad (20)$$

В результате получим

$$\Psi_k(0, \mu) = \frac{q_0}{(1-c)X(\mu)(v_0 - \mu)}, \quad \mu < 0. \quad (21)$$

Аналогичным образом можно найти выражения для плотности нейтронов и распределения выходящего излучения в ряде других задач. Например, нетрудно вычислить функцию Грина для полупространства. (Мы не будем вдаваться здесь в детали. Однако, учитывая большое значение, которое имеет проблема Милна, в следующем разделе мы найдем явные выражения отвечающих ей физических величин.)

D. Ток нейтронов

Формулу для тока $J(x)$ можно получить, умножая фазовую плотность на μ и затем интегрируя

$$J(x)/2\pi = \int_{-1}^1 \mu \Psi(x, \mu) d\mu, \quad (22a)$$

т. е.

$$J(x)/2\pi = \int_{-1}^1 \mu f(x, \mu) d\mu + (1-c) \left[a_{0+} e^{-x/v_0} + \int_0^1 v A_1^+(v) e^{-x/v} dv \right]. \quad (22b)$$

6.4. Некоторые явные формулы для проблем Милна

Эта проблема уже обсуждалась в разд. 5.6, где были найдены явные выражения для a_{0+} и $A(v)$. Для удобства повторим их здесь:

$$a_{0+} = \frac{X(-v_0)}{X(v_0)}, \quad (1a)$$

$$A(v) = -\frac{cv_0 X(-v_0) \varphi_{0-}(v) v^2}{(v_0 - v) \gamma(v) N(v)}. \quad (1b)$$

Функция $\psi(\mu)$ равна:

$$\psi(\mu) = -\varphi_{0-}(\mu) = -\frac{cv_0}{2} \frac{1}{v_0 + \mu}. \quad (1c)$$

Равенство (1b) можно записать в другой форме, если воспользоваться формулой (4b) из предыдущего раздела и определением функции $\varphi_{0-}(v)$:

$$A(v) = -\frac{-c(1-c)v_0^2 v}{N(v)} X(-v_0) X(-v). \quad (1b')$$

А. Распределение выходящего излучения

Подставив в формулу (15a) разд. 6.3 равенство (1c), получим¹⁾:

$$\begin{aligned} \Psi_0(0, \mu) &= \frac{cv_0}{2} \frac{1}{v_0 + \mu} - \frac{1}{X(\mu)} \left[\int_0^1 \gamma(\mu') \frac{cv_0}{2} \frac{1}{v_0 + \mu'} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{v_0 - \mu} \right\} d\mu' \right], \quad \mu < 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{v_0 + \mu'} \frac{1}{\mu' - \mu} = \frac{1}{v_0 + \mu} \left[\frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{\mu' + v_0} \right], \quad (3)$$

приводим формулу (2) к виду:

$$\begin{aligned} \Psi_0(0, \mu) &= \frac{cv_0}{2} \frac{1}{v_0 + \mu} - \frac{1}{X(\mu)} \left[\int_0^1 \gamma(\mu') \frac{cv_0}{2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \frac{1}{v_0 + \mu} \frac{1}{\mu' - \mu} - \frac{1}{v_0 + \mu} \frac{1}{\mu' + v_0} - \frac{1}{v_0 + \mu'} \frac{1}{v_0 - \mu} \right\} d\mu' \right], \quad \mu < 0. \end{aligned} \quad (4)$$

¹⁾ Заметим, что $f(0, \mu) = -\psi(\mu) = \varphi_{0-}(\mu) = (cv_0/2) [1/(v_0 + \mu)]$.

Каждый из трех интегралов в формуле (4) можно вычислить с помощью тождества А из разд. 6.2. Тогда

$$\Psi_0(0, \mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\nu_0 + \mu} - \frac{1}{X(\mu)} \frac{c\nu_0}{2} \times \\ \times \left[\frac{1}{\nu_0 + \mu} X(\mu) - \frac{1}{\nu_0 + \mu} X(-\nu_0) - \frac{1}{\nu_0 - \mu} X(-\nu_0) \right], \quad (5a)$$

или

$$\Psi_0(0, \mu) = \frac{c\nu_0^2 X(-\nu_0)}{X(\mu)(\nu_0^2 - \mu^2)}, \quad \mu < 0. \quad (5b)$$

Отсюда с учетом равенства (26) разд. 6.2 легко найти плотность $\Psi_0(0, 0)$ нейтронов, движущихся параллельно границе:

$$\Psi_0(0, 0) = c \sqrt{\nu_0^2(1-c)} X(-\nu_0). \quad (6)$$

В. Явное выражение для пространственной плотности на границе
Подставив в соотношение

$$\rho_0(0)/2\pi = \int_{-1}^0 \Psi_0(0, \mu) d\mu \quad (7)$$

равенство (5b), получим

$$\frac{\rho_0(0)}{2\pi} = c\nu_0^2 X(-\nu_0) \int_{-1}^0 \frac{d\mu}{(\nu_0^2 - \mu^2) X(\mu)}. \quad (8)$$

Положим $z=0$ в тождестве С (формула (24) разд. 6.2) и воспользуемся равенством (26) разд. 6.2. Тогда

$$X(0) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu' d\mu'}{(\nu_0^2 - \mu'^2) X(\mu') \mu'} = \frac{1}{\nu_0 \sqrt{1-c}}, \quad (9)$$

откуда

$$\int_{-1}^0 \frac{d\mu}{(\nu_0^2 - \mu^2) X(\mu)} = \frac{2}{c\nu_0} \sqrt{1-c}. \quad (10)$$

Таким образом,

$$\frac{\rho_0(0)}{2\pi} = 2 \sqrt{\nu_0^2(1-c)} X(-\nu_0). \quad (11a)$$

Заметим, что

$$\frac{2\pi\Psi_0(0, 0)}{\rho_0(0)} = \frac{c}{2} \quad (11b)$$

($\Psi_0(0, 0)$ задается формулой (6)). Этот результат показывает, что фазовая плотность возрастает в направлении вперед — эффект, который с увеличением поглощения, естественно, становится более резко выраженным.

Значение отношения

$$\frac{2\pi\Psi_0(0, \mu)}{\rho_0(0)} = \frac{cv_0^2}{2\sqrt{v_0^2(1-c)}} \frac{1}{X(\mu)(v_0^2 - \mu^2)} \quad (12)$$

можно получить численно, используя явное выражение для $X(\mu)$, выведенное в разд. 6.2 (формула (39)). В табл. 6.1 приведены значения этого отношения для различных значений c и μ .

Таблица 6.1

$2\pi\Psi_0(0, \mu)/\rho_0(0)$				
$c \backslash -\mu$	0,1	0,3	0,7	1,0
0,0	0,05	0,150	0,350	0,500
0,2	0,064	0,199	0,496	0,725
0,4	0,086	0,272	0,670	0,915
0,6	0,129	0,413	0,940	1,097
0,8	0,257	0,830	1,457	1,276
0,98	2,592	7,495	2,684	1,436
1,0	$1,258 \cdot 10^7$	65,360	2,951	1,454

С. Выходящий ток

Подставив равенство (5b) в соотношение

$$J_0(0)/2\pi = \int_{-1}^0 \mu \Psi_0(0, \mu) d\mu, \quad (13a)$$

получим

$$J_0(0)/2\pi = cv_0^2 X(-v_0) \int_{-1}^0 \frac{\mu d\mu}{(v_0^2 - \mu^2) X(\mu)}. \quad (13b)$$

Вспомним, что для больших z

$$X(z) \sim -1/z. \quad (14)$$

С учетом этого предельного соотношения тождество С разд. 6.2 принимает вид

$$-1 = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu' d\mu'}{(v_0^2 - \mu'^2) X(\mu')}. \quad (15)$$

Разрешая это уравнение относительно интеграла и подставляя результат в формулу (13b), находим, что

$$J_0(0)/2\pi = -2\nu_0^2 X(-\nu_0) (1-c), \quad (16)$$

откуда

$$\bar{\mu} = \frac{\int_{-1}^0 \mu \Psi_0(0, \mu) d\mu}{\int_{-1}^0 \Psi_0(0, \mu) d\mu} = -\sqrt{\nu_0^2 (1-c)}. \quad (17)$$

В разд. 4.3 показано, что при $c \approx 1$

$$\nu_0^2 = 1/3 (1-c). \quad (18a)$$

Следовательно,

$$\bar{\mu} = -1/\sqrt{3}. \quad (18b)$$

D. Высшие моменты распределения выходящего излучения

Высшие моменты функции $\Psi(0, \mu)$ в замкнутой форме получить трудно, но можно привести их к виду, пригодному для численной оценки и, кроме того, вывести некоторые точные соотношения между ними. Например, положим

$$\bar{\mu}^n = \frac{1}{\nu_0^2} \frac{1}{X(-\nu_0)} \int_{-1}^0 \Psi_0(0, \mu) \mu^n d\mu \quad (19)$$

и подставим сюда явное выражение для $\Psi_0(0, \mu)$. Тогда

$$\bar{\mu}^n = c \int_{-1}^0 \frac{\mu^n}{X(\mu) (\nu_0^2 - \mu^2)} d\mu. \quad (20)$$

Выпишем для удобства тождество C из разд. 6.2:

$$X(z) = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu' d\mu'}{(\nu_0^2 - \mu'^2) X(\mu') (\mu' + z)}. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{z + \mu'} = \frac{1}{z(1 + \mu'/z)} = \frac{1}{z} \left[1 - \frac{\mu'}{z} + \frac{\mu'^2}{z^2} + \dots \right] \quad (22)$$

для достаточно больших z . Кроме того, для больших z можно разложить $X(z)$ в ряд Лорана:

$$X(z) = -\frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}. \quad (23)$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \frac{c}{2} \frac{1}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu' d\mu'}{(\nu_0^2 - \mu'^2) X(\mu')} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \mu'^{n-1}}{z^n}. \quad (24)$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z , получим

$$a_n = \frac{c}{2} \frac{(-1)^{n-1}}{1-c} \int_{-1}^0 \frac{\mu'^n d\mu'}{X(\mu') (\nu_0^2 - \mu'^2)}, \quad (25)$$

т. е.

$$\bar{\mu}^n = (-1)^{n-1} (1-c) a_n.$$

Другими словами, $\bar{\mu}^n$ определяется коэффициентами ряда Лорана для функции $X(z)$. Этот ряд можно получить из явного выражения для $X(z)$ (формула (33) разд. 6.2):

$$X(z) = \frac{1}{1-z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\theta(\mu') d\mu'}{\mu' - z} \right]. \quad (26)$$

Разложим это выражение в ряд:

$$X(z) = -\frac{1}{z} \left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right] \times \\ \times \exp \left[\frac{-1}{z\pi} \int_0^1 \theta(\mu') d\mu' \left\{ 1 + \frac{\mu'}{z} + \dots \right\} \right]. \quad (27)$$

Вычислим коэффициенты a_1 и a_2 . (На самом деле мы уже знаем, что $a_1 = -1$.) Для этого нужно в формуле (27) оставить только члены с z^{-1} и z^{-2} :

$$X(z) = \left(-\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \right) \left[1 - \frac{1}{z\pi} \int_0^1 \theta(\mu') d\mu' \right] + R, \quad (28)$$

где R — сумма членов $\sim z^{-n}$, $n > 2$. Теперь очевидно, что $a_1 = -1$ и

$$a_2 = -1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \theta(\mu') d\mu'. \quad (29)$$

Упростим формулу (29), интегрируя по частям (напомним, что $\theta(1) = \pi$):

$$\int_0^1 \theta(\mu') d\mu' = \pi - \int_0^1 \mu' \frac{d\theta}{d\mu'} d\mu'. \quad (30)$$

При выводе формулы (39) разд. 6.2 мы отмечали, что

$$\frac{d\theta}{d\mu} = \frac{c\mu}{2N(\mu)} \left[1 + \frac{c\mu^2}{1-\mu^2} \right]. \quad (31)$$

Таким образом,

$$a_2 = -\frac{c}{2} \int_0^1 \mu \left[1 + \frac{c\mu^2}{1-\mu^2} \right] g(c, \mu) d\mu \quad (32)$$

и, значит,

$$\overline{\mu^2} = c(1-c) \int_0^1 \mu g(c, \mu) \left[1 + \frac{c\mu^2}{1-\mu^2} \right] d\mu. \quad (33)$$

Таблицы значений a_2 составлены Кейзом, Гофманом и Плачком¹⁾.

Очевидно, что через аналогичные интегралы можно выразить и более высокие моменты. С помощью тождеств, доказанных в разд. 6.2, это сделать нетрудно. Так, тождество В имеет вид

$$X(z) X(-z) = \Lambda(z) / (v_0^2 - z^2) (1-c). \quad (34)$$

Используя разложение

$$X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}, \quad (35)$$

получим

$$X(z) X(-z) = \sum_{m, n=1}^n \frac{a_n a_m}{z^n z^m} (-1)^m = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{z^{2l}}. \quad (36)$$

Правая часть представляет собой разложение в ряд Лорана функции

$$\Lambda(z) / (v_0^2 - z^2) (1-c). \quad (37)$$

Теперь для определения a_n осталось только приравнять коэффициенты при одинаковых степенях z . Рассмотрим, например, члены до z^{-4} включительно:

$$\left[\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} \right] \left[-\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} - \frac{a_3}{z^3} \right] = \frac{b_1}{z^2} + \frac{b_2}{z^4}. \quad (38)$$

Сравнивая коэффициенты, видим, что

$$-a_1^2 = b_1 \quad (39a)$$

и

$$a_2^2 - 2a_1 a_3 = b_2. \quad (39b)$$

¹⁾ См. [1, стр. 136]. В их обозначениях $a_2 = -I_1(c)$.

Для определения b_1 воспользуемся разложением

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{c}{2} z \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{z - \mu}, \quad (40a)$$

т. е.

$$\Lambda(z) = 1 - c \left[1 + \frac{1}{3z^2} + \frac{1}{5z^4} + \dots \right]. \quad (40b)$$

Отсюда

$$\frac{\Lambda(z)}{(v_0^2 - z^2)(1-c)} = -\frac{1}{z^2} + \left[\frac{-c}{3(1-c)} - v_0^2 \right] \frac{1}{z^4} + \dots, \quad (41)$$

так что

$$b_1 = -1, \quad (42a)$$

$$b_2 = \frac{-c}{3(1-c)} - v_0^2. \quad (42b)$$

Зная a_1 и a_2 (заметим, что из (39a) и (42a) следует, что $a_1 = \pm 1$), можно тривиальным образом найти a_3 .

Если учесть члены до порядка z^{-6} , приходим к уравнению, содержащему коэффициенты a_4 и a_5 . Один из них вычисляется тем же способом, что и a_2 , другой — тем же способом, что и a_3 . Другими словами, половина коэффициентов получается с помощью соотношения (36), после чего другую половину можно вычислить, разлагая в ряд правую часть в (27).

Е. Поведение функции $\Psi_0(0, \mu)$ при малых μ

Рассмотрим снова явное выражение для $\Psi_0(0, \mu)$:

$$\Psi_0(0, \mu) = \frac{cv_0^2 X(-v_0)}{X(\mu)(v_0^2 - \mu^2)}. \quad (43)$$

Перепишем интегральное уравнение (25) разд. 6.2 в виде:

$$X(\mu) = X(0) + \frac{c}{2(1-c)} \int_{-1}^0 \frac{d\mu'}{(v_0^2 - \mu'^2) X(\mu')} \left[\frac{1}{1 + \mu/\mu'} - 1 \right]. \quad (44)$$

Заметим, что основной вклад в интеграл дают малые значения μ' . Поэтому можно записать:

$$X(\mu) \simeq X(0) + \frac{c}{2(1-c)v_0^2 X(0)} \int_{-1}^0 d\mu' \left[\frac{\mu'}{\mu' + \mu} - \frac{\mu + \mu'}{\mu + \mu'} \right], \quad (45a)$$

или

$$X(\mu) \simeq X(0) - \frac{\mu c}{2(1-c)v_0^2 X(0)} \int_{-1}^0 \frac{d\mu'}{\mu' + \mu}, \quad (45b)$$

откуда

$$X(\mu) \simeq X(0) + \frac{c}{2(1-c)v_0^2 X(0)} (-\mu) \ln \frac{\mu}{\mu-1}. \quad (46)$$

Применяя формулу (26) разд. 6.2 для $X(0)$ и полагая под знаком логарифма $\mu - 1 \simeq -1$, получаем для $\mu < 0$, $|\mu| \ll 1$:

$$X(\mu) \approx \frac{1}{\sqrt{v_0^2(1-c)}} \left[1 + \frac{c}{2} |\mu| \ln |\mu| \right]. \quad (47)$$

Таким образом, из соотношений (16), (43) и (47) следует, что

$$\frac{2\pi\Psi_0(0, \mu)}{-J_0(0)} = \frac{c}{2(1-c)} \frac{1}{X(\mu)(v_0^2 - \mu^2)}, \quad (48)$$

или

$$\frac{2\pi\Psi_0(0, \mu)}{-J_0(0)} = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{v_0^2(1-c)}} \left[1 - \frac{c}{2} |\mu| \ln |\mu| + \dots \right]. \quad (49)$$

Здесь мы положили $v_0^2 - \mu^2 \simeq v_0^2$ и учли лишь два первых члена разложения в ряд функции $\left[1 + \frac{c}{2} |\mu| \ln |\mu| \right]^{-1}$. Как отмечено выше, этот результат справедлив для $-1 \ll \mu < 0$.

Г. Плотность нейтронов

Общую формулу для $\rho_0(x)$ можно получить в результате интегрирования $\Psi_0(x, \mu)$ по μ :

$$\frac{\rho_0(x)}{2\pi} = e^{x/v_0} + a_{0+} e^{-x/v_0} + \int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv. \quad (50)$$

Мы видели, что асимптотическое поведение плотности описывается суммой первых двух членов:

$$\rho_{as}(x)/2\pi = e^{x/v_0} + a_{0+} e^{-x/v_0}. \quad (51)$$

Определим экстраполированную длину z_0 равенством

$$a_{0+} = -e^{-2z_0/v_0}. \quad (52a)$$

Тогда равенство (51) принимает вид

$$\frac{\rho_{as}(x)}{2\pi} = 2e^{-z_0/v_0} \operatorname{sh} \frac{x+z_0}{v_0}. \quad (52b)$$

Асимптотическая плотность обращается в нуль в точке $x = -z_0$ (отсюда термин «экстраполированная длина»). Подчеркнем, что z_0 — это расстояние влево от поверхности, на которой обращается в нуль асимптотическая плотность.

Равенство (52а) можно записать и в другой форме:

$$a_{0+} = \exp^{-2z_0/v_0 + i\pi}, \quad (53)$$

так что

$$z_0 = -\frac{v_0}{2} [-\ln a_{0+} + i\pi] \quad (54)$$

(это соотношение мы вывели еще в разд. 5.6). Подставим сюда явное выражение для a_{0+} (формула (1а)):

$$z_0 = \frac{v_0}{2} \left[\ln \frac{X(v_0)}{X(-v_0)} + i\pi \right]. \quad (55)$$

Применяя теперь формулу (40) разд. 6.2, находим явное выражение для z_0 :

$$z_0 = \frac{c}{2} \int_0^1 \frac{\mu}{N(\mu)} \left[1 + \frac{c\mu^2}{1-\mu^2} \right] v_0 \operatorname{Arth} \frac{\mu}{v_0} d\mu. \quad (56)$$

Здесь мы использовали известное тождество

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (57)$$

Из формулы (56) вытекают следующие полезные соотношения:

$$cz_0(c) = 1 - \frac{c}{2} \ln \frac{2}{c}, \quad c \ll 1, \quad (58a)$$

$$cz_0(c) = 0,710446 [1 - 0,0199(1-c)^2 + \dots], \quad |c-1| \ll 1, \quad (58b)$$

и

$$cz_0(c) = \frac{3}{4}, \quad c \rightarrow \infty. \quad (58c)$$

На рис. 6.2 представлена величина cz_0 как функция от c .

Заметим, что асимптотическая плотность полностью определяется параметрами v_0 и z_0 . Поставим вопрос: насколько важен неасимптотический вклад в плотность?

Пусть

$$\rho_0(x) = \rho_{as}(x) - h(x), \quad (59)$$

где, как и ранее,

$$\frac{\rho_{as}(x)}{2\pi} = 2e^{-z_0/v_0} \operatorname{sh} \frac{x+z_0}{v_0} \quad (60)$$

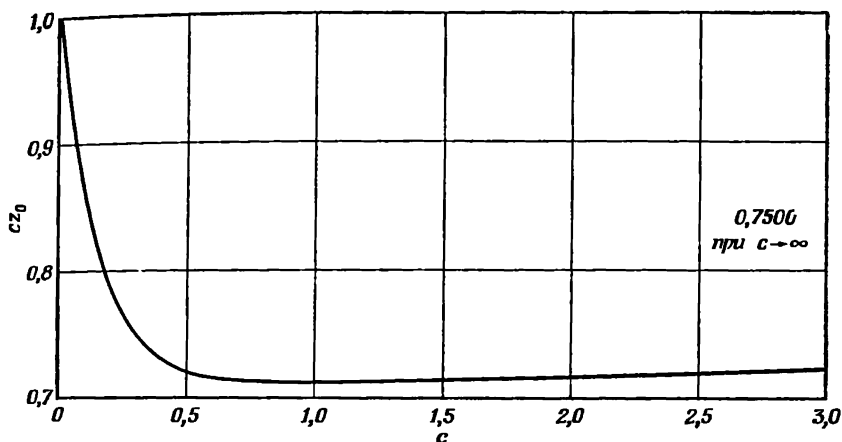
и

$$\frac{h(x)}{2\pi} = - \int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv. \quad (61)$$

Таким образом, отклонение от асимптотики определяется функцией $h(x)$. Подставим в (61) выражение $(1b')$ для $A(v)$. Тогда

$$\frac{h(x)}{2\pi} = c(1-c) v_0^2 X(-v_0) \int_0^1 \frac{v}{N(v)} X(-v) e^{-x/v} dv. \quad (62)$$

Теперь для изучения функции $h(x)$ мы можем воспользоваться



Р и с. 6.2. График cz_0 как функции от c .

полученными результатами. Рассмотрим отношение $\rho_{as}(0)/\rho_0(0)$:

$$\rho_{as}(0)/\rho_0(0) = 1 + h(0)/\rho_0(0); \quad (63)$$

формулы для $\rho_{as}(0)$ и $\rho_0(0)$ нам известны (например, $\rho_0(0)$ имеет вид (11a)). Отсюда

$$1 + \frac{h(0)}{\rho_0(0)} = \sqrt{\frac{c}{1-c}} K \operatorname{sh} \frac{z_0}{v_0}, \quad (64)$$

где величина K , введенная в гл. 5 в связи с функцией Грина для неограниченной среды, равна

$$K = \frac{2(c-1)}{c} \frac{[(1/v_0^2)-1]}{[(1/v_0^2)-1+c]}. \quad (65)$$

Еще проще получается отношение асимптотического тока к полному току:

$$\frac{J_{as}(x)}{2\pi} = \int_{-1}^1 \mu [\Phi_0-(\mu) e^{x/v_0} + a_0 + \Phi_0 + e^{-x/v_0}] d\mu. \quad (66)$$

Так как

$$\Phi_{0\pm} = \frac{c}{2} \frac{v_0}{v_0 \mp \mu}, \quad (67)$$

то

$$\frac{J_{as}(x)}{2\pi} = \frac{cv_0}{2} \left[e^{x/v_0} \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{v_0 + \mu} + a_0 + e^{-x/v_0} \int_{-1}^1 \frac{\mu d\mu}{v_0 - \mu} \right]. \quad (68)$$

Далее,

$$\frac{\mu}{v_0 \pm \mu} = \mp \frac{v_0}{v_0 \pm \mu} \pm 1. \quad (69)$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{J_{as}(x)}{2\pi} = \frac{cv_0}{2} \left[e^{x/v_0} \left\{ -v_0 \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v_0 + \mu} + 2 \right\} + \right. \\ \left. + a_0 + e^{-x/v_0} \left\{ +v_0 \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v_0 - \mu} - 2 \right\} \right]. \quad (70) \end{aligned}$$

Условие нормировки

$$\frac{cv_0}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v_0 \pm \mu} = 1 \quad (71)$$

позволяет привести равенство (70) к виду

$$J_{as}(x)/2\pi = e^{x/v_0} \{-v_0 + cv_0\} + a_0 + e^{-x/v_0} \{+v_0 - cv_0\}, \quad (72)$$

или

$$J_{as}(x)/2\pi = +v_0(c-1)[e^{x/v_0} - a_0 + e^{-x/v_0}]. \quad (73)$$

Сравнивая это соотношение с формулой (51), видим, что

$$J_{as}(x) = -v_0^2(1-c)(\partial \rho_{as}(x)/\partial x). \quad (74)$$

Таким образом, асимптотический ток и плотность удовлетворяют закону Фика, который является основным соотношением диффузионной теории (гл. 7). Величина $v_0^2(1-c)$ называется *коэффициентом диффузии* и обычно обозначается буквой D .

Положим $x = 0$ в формуле (74) и разделим на $J_0(0)$ (формула (16)); тогда

$$J_{as}(0)/J_0(0) = \sqrt{cK} \operatorname{ch} z_0/v_0, \quad (75)$$

где K задается формулой (65). В табл. 6.2 представлены отношения $\rho_{as}(0)/\rho_0(0)$ и $J_{as}(0)/J_0(0)$ как функции от c . Из таблицы видно, что $\rho_{as}(0) \geq \rho_0(0)$. Таким образом, асимптотическая плотность служит верхней оценкой для истинной плотности.

Таблица 6.2

c	$\frac{\rho_{as}(0)}{\rho_0(0)} = 1 + \frac{h(0)}{\rho_0(0)}$	$\frac{J_{as}(0)}{J_0(0)}$
0,0	1,00	1,000
0,3	1,12	0,950
0,6	1,19	0,950
0,9	1,22	0,986
1,0	1,23	1,000
2,0	1,26	1,140
∞	1,31	∞

Напомним (приложение Н), что при $c = 1$ функции $\psi_{0\pm}$ вырождаются в собственные функции:

$$\psi_1 = 1/2, \quad (76a)$$

$$\psi_2 = (1/2)(x - \mu). \quad (76b)$$

В этом случае

$$\rho_{as}(x)/2\pi = x + a_{0+}, \quad (77)$$

так что (см. формулу (74))

$$J_{as}(x) = \text{const}, \quad (78)$$

поскольку $J_{as}(0) = J_0(0)$ для $c = 1$ (табл. 6.2). Отсюда следует, что при $c = 1$

$$J_{as}(x) = J_0(0). \quad (79)$$

В явной форме

$$J_{as}(x)/2\pi = -\lim_{c \rightarrow 1} v_0^2(1-c), \quad (80a)$$

или

$$J_{as}(x)/2\pi = -1/3, \quad (80b)$$

так как $v_0^2 \simeq 1/3(1-c)$ при $c \approx 1$ (разд. 4.3).

Г. Функция $h(x)$

Теперь исследуем функцию $h(x)$, характеризующую отклонение плотности от своей асимптотики. Рассмотрим сначала нулевой момент функции $h(x)$, а именно

$$\bar{h}_c = \int_0^\infty h(x) dx. \quad (81)$$

Заметим, что если уравнение переноса

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi d\mu' = \frac{c}{4\pi} \rho_0 \quad (82)$$

умножить на 2π и проинтегрировать по μ , то придем к уравнению непрерывности

$$\partial J_0 / \partial x = -(1-c) \rho_0(x), \quad (83)$$

откуда, интегрируя по x , получим

$$J_0(x) = J_0(0) - (1-c) \int_0^x \rho_0(x') dx'. \quad (84)$$

Если $c = 1$, то $J_0(x)/2\pi = J_0(0)/2\pi = 1/3$. Справедливость этого соотношения для J_{as} уже была доказана (формула (80b)).

Покажем, что для асимптотических плотности и тока выполняется соотношение, аналогичное (84). Вспомним, что

$$\frac{\rho_{as}(x)}{2\pi} \sim \text{sh} \frac{x + z_0}{v_0}. \quad (85)$$

Дифференцируя по x , видим, что $\rho_{as}(x)$ удовлетворяет уравнению диффузии ¹⁾

$$v_0^2 \frac{\partial^2 \rho_{as}}{\partial x^2} - \rho_{as}(x) = 0. \quad (86)$$

Проинтегрируем по x :

$$\int_0^x \rho_{as}(x') dx' = v_0^2 \left[\frac{\partial \rho_{as}(x)}{\partial x} - \frac{\partial \rho_{as}(0)}{\partial x} \right]. \quad (87)$$

С помощью (74) приведем это соотношение к виду

$$J_{as}(x) = J_{as}(0) - (1-c) \int_0^x \rho_{as}(x') dx'. \quad (88)$$

(Таким образом, можно сказать, что число «асимптотических» нейтронов сохраняется. По этой причине приближенная теория, т. е. теория диффузии, которая занимается только асимптотической частью распределения нейтронов, правильно предсказывает по крайней мере сохранение их числа.)

¹⁾ Это непосредственно следует из закона Фика (формула (74)).

Вычтем равенство (88) из равенства (84):

$$J_0(x) - J_{as}(x) = J_0(0) - J_{as}(0) + (1-c) \int_0^x [\rho_{as}(x') - \rho(x')] dx', \quad (89a)$$

т. е.

$$J_0(x) - J_{as}(x) = J_0(0) - J_{as}(0) + (1-c) \int_0^x h(x') dx'. \quad (89b)$$

Так как $J_{as}(x) \rightarrow J_0(x)$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$\int_0^x h(x') dx' = \frac{J_{as}(0) - J_0(0)}{1-c}. \quad (90)$$

В частности, с учетом формулы (75) получим

$$\frac{\int_0^\infty h(x') dx'}{-J_0(0)} = \frac{1 - J_{as}(0)/J_0(0)}{1-c} = \frac{1 - \sqrt{cK}}{1-c} \operatorname{ch} \frac{z_0}{v_0}. \quad (91)$$

Аналогично определяется первый пространственный момент функции $h(x)$:

$$\frac{\int_0^x xh(x) dx}{-J_0(0)} = \frac{1}{1-c} \left[v_0 \sqrt{cK} \operatorname{sh} \frac{z_0}{v_0} - \frac{\bar{\mu}^2}{\sqrt{v_0^2(1-c)}} \right], \quad (92)$$

где $\bar{\mu}^2$ — второй угловой момент распределения выходящего излучения (см. соотношение (33)). Эта связь пространственных моментов функции $h(x)$ с угловыми моментами распределения выходящего излучения не случайна: и те и другие содержат интегралы от $A(v)$.

Таблица 6.3

c	L	\bar{x}
0,0	0,443	0,629
0,3	0,477	0,776
0,6	0,446	0,639
0,9	0,377	0,566
1,0	0,358	0,546
1,5	0,286	0,470
2,0	0,239	0,449
3,0	0,182	0,353
∞	1,124/c	0,702/ \sqrt{c}

В табл. 6.3 приведены значения функций

$$L = \frac{\int_0^x h(x) dx}{h(0)} \quad (93a)$$

и

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\infty x h(x) dx}{\int_0^\infty h(x) dx} \quad (93b)$$

при разных значениях s . С помощью этой таблицы и табл. 6.2 можно составить представление об отклонении плотности от ее асимптотического значения.

Н. Поведение функции $\rho_0(x)$ при малых x

Мы закончим этот раздел выводом приближенного выражения для функции $\rho_0(x)$, справедливого при малых x . Итак (формула (45)),

$$\rho_0(x)/2\pi = e^{x/v_0} + a_{0+}e^{-x/v_0} + \int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv \quad (94a)$$

и

$$\rho_0(0)/2\pi = 1 + a_{0+} + \int_0^1 A(v) dv. \quad (94b)$$

Рассмотрим тождество

$$\int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv \equiv \int_0^1 [A(v) - A(0)] e^{-x/v} dv + A(0) \int_0^1 e^{-x/v} dv. \quad (95)$$

Поскольку мы ищем разложение, справедливое при малых x , можно разложить в ряд экспоненту в первом интеграле правой части тождества (95). Заметим, что в точке $v = 0$ нет особенностей. Второй интеграл есть не что иное, как функция $E_2(x)$ (см. приложение Е, где дано также ее разложение в ряд). Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv &= \int_0^1 [A(v) - A(0)] \left[1 - \frac{x}{v} \right] dv + \\ &+ A(0) \left[1 + x \ln \frac{1}{x} \right] + o(x), \end{aligned} \quad (96)$$

или

$$\int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv = \int_0^1 A(v) dv - A(0) x \ln \frac{1}{x} + o(x). \quad (97)$$

Следовательно,

$$\frac{\rho_0(x)}{2\pi} = 1 + a_{0+} + \int_0^1 A(v) dv - A(0) x \ln \frac{1}{x} + o(x), \quad x \approx 0, \quad (98a)$$

т. е.

$$\frac{\rho_0(x)}{2\pi} = \frac{\rho_0(0)}{2\pi} - A(0) x \ln \frac{1}{x} + o(x). \quad (98b)$$

Функцию $A(0)$ можно найти из формулы (1a):

$$A(0) = -c \sqrt{v_0^2 (1-c)} X(-v_0), \quad (99a)$$

или

$$A(0) = -\frac{c}{2} \frac{\rho_0(0)}{2\pi}. \quad (99b)$$

Последнее равенство вытекает из соотношения (11a). Итак, при малых x

$$\rho_0(x) = \rho_0(0) \left[1 + \frac{c}{2} x \ln \frac{1}{x} \right] + o(x). \quad (100)$$

6.5. Тождества для X -функции и некоторые точные результаты для двух смежных полупространств¹⁾

В разд. 5.8 мы рассмотрели решения уравнения переноса в задачах о двух смежных полупространствах. Методы, которые будут использоваться для упрощения решений таких задач, аналогичны методам, изложенным ранее в этой главе в связи с задачами для полупространства. Но так как в этом случае X -функция имеет другую форму, то будут другими и тождества, которыми мы воспользуемся для преобразования решений.

Напомним, в частности (разд. 5.8), что χ -функция, соответствующая задаче о двух полупространствах, равна произведению X -функций, взятых для каждого полупространства в отдельности:

$$\chi(z) = X^{(1)}(z) X^{(2)}(-z). \quad (1)$$

При этом область (I), в которой $c = c_1$, располагается справа от области (II), в которой $c = c_2$. Теперь нетрудно показать, что спра-

¹⁾ Большинство результатов этого раздела взято из работы [40].

ведливы тождества ¹⁾:

$$\chi(z) = \int_{-1}^1 \frac{\Gamma(\mu)}{\mu - z} d\mu, \quad (2a)$$

$$z\chi(z) = \int_{-1}^1 \frac{\mu\Gamma(\mu)}{\mu - z} d\mu, \quad (2b)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) = & \frac{c_2}{2(1-c_2)} \int_{-1}^0 \frac{\mu X_1(\mu)}{X_2(\mu)(v_{02}^2 - \mu^2)(\mu - z)} d\mu + \\ & + \frac{c_1}{2(1-c_1)} \int_0^1 \frac{\mu X_2(-\mu)}{X_1(-\mu)(v_{01}^2 - \mu^2)(\mu - z)} d\mu, \end{aligned} \quad (2c)$$

$$\begin{aligned} z\chi(z) = & \frac{c_2}{2(1-c_2)} \int_{-1}^0 \frac{\mu^2 X_1(\mu)}{X_2(\mu)(v_{02}^2 - \mu^2)(\mu - z)} d\mu + \\ & + \frac{c_1}{2(1-c_1)} \int_0^1 \frac{\mu^2 X_2(-\mu)}{X_1(-\mu)(v_{01}^2 - \mu^2)(\mu - z)} d\mu. \end{aligned} \quad (2d)$$

Здесь, разумеется, v_{01} и v_{02} — дискретные собственные значения, соответствующие областям (I) и (II), а функция $\Gamma(\mu)$, введенная в разд. 5.8, есть

$$\Gamma(\mu) = \frac{\mu c(\mu)}{2} \frac{\chi^-(\mu)}{L^-(\mu)}. \quad (3)$$

Напомним также, что $c(\mu) = c_1$ для $\mu > 0$ и $c(\mu) = c_2$ для $\mu < 0$; $L^\pm(\mu)$ определяется аналогичным образом.

Применение этих тождеств к решению проблемы Милна для двух смежных полупространств приводит к следующим простым выражениям для фазовой плотности, для плотности и тока на границе полупространств и для экстраполированной длины z_0 :

$$\Psi(0, \mu) = \begin{cases} \frac{c_1 v_{01}^2 (v_{02} - \mu) X_2(\mu) X_1(-v_{01})}{(v_{01}^2 - \mu^2)(v_{02} + v_{01}) X_1(\mu) X_2(-v_{01})}, & \mu < 0, \\ \frac{c_2 (1 - c_1) v_{01}^2 X_1(-\mu) X_1(-v_{01})}{(1 - c_2)(v_{02} + \mu)(v_{02} + v_{01}) X_2(-\mu) X_2(-v_{01})}, & \mu > 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{\rho(0)}{2\pi} = \frac{2v_{01} \sqrt{1 - c_1} X_1(-v_{01})}{(v_{02} + v_{01}) \sqrt{1 - c_2} X_2(-v_{01})}; \quad (5a)$$

$$\frac{J(0)}{2\pi} = -v_{01} [(1 - c_1)(1 - c_2)]^{1/2} \rho(0) \quad (5b)$$

¹⁾ Доказательство аналогично доказательству тождеств для полупространства (разд. 6.2).

(интегралы для $\rho(0)$ и $J(0)$ вычисляются с помощью соотношений (2c) и (2d));

$$z_0 = \frac{v_{01}}{2} \ln \left[\frac{v_{01} + v_{02}}{v_{01} - v_{02}} \frac{X_1(v_{01})}{X_1(-v_{01})} \frac{X_2(-v_{01})}{X_2(v_{01})} \right]. \quad (6)$$

Аналогично находится решение задачи с постоянным источником¹⁾:

$$\psi(0, \mu) = \begin{cases} \frac{q_0 c_1 (1 - c_2) (v_{02} - \mu) X_2(\mu)}{(c_1 - c_2) (1 - c_1) (v_{01} - \mu) X_1(\mu)} - \frac{q_0 c_2}{c_1 - c_2}, & \mu < 0, \\ \frac{q_0 c_2 (v_{01} + \mu) X_1(-\mu)}{(c_1 - c_2) (v_{02} + \mu) X_2(-\mu)} - \frac{q_0 c_2}{c_1 - c_2}, & \mu > 0, \end{cases} \quad (7)$$

$$\frac{\rho(0)}{2\pi} = \int_{-1}^1 \psi(0, \mu) d\mu = \frac{2q_0}{c_1 - c_2} \left[\left(\frac{1 - c_2}{1 - c_1} \right)^{1/2} - 1 \right]. \quad (8)$$

Что касается функции Грина для двух полупространств, то выражения для ее значений на границе не допускают существенных упрощений, и мы не будем приводить дальнейших результатов.

6.6. Проблема критичности²⁾

В задачах, которые мы решали в гл. 5 и 6, область по крайней мере в одном направлении была неограниченной. По этой причине решения с $c > 1$ были лишены физического смысла, и мы рассматривали их только как математическое расширение результатов для $c < 1$ (после наложения условия излучения на бесконечности).

Однако в ограниченных областях имеет смысл искать решения для $c > 1$. В разд. 6.2 и в приложении D показано, что уравнение переноса не обязано в таких случаях обладать единственным решением. Одной из наших задач будет определение условий, при которых существует единственное решение.

Мы ограничимся случаем, в котором отсутствуют внешние источники нейтронов; нейтроны появляются в системе только в результате деления. Тогда фазовая плотность удовлетворяет однородному уравнению переноса

$$\Omega \cdot \nabla \psi + \psi = \frac{c}{4\pi} \int d\Omega' \psi(r, \Omega') \quad (1a)$$

и граничному условию

$$\psi(\rho_s, \Omega) = 0, \quad \Omega \cdot n_0 < 0, \quad (1b)$$

¹⁾ В соответствии с разд. 5.8 речь идет об изотропном источнике, постоянном по всей области, в которой $c = c_1$.

²⁾ См. [46, 47]. Более подробно эта проблема изложена в приложении I. Анализ задач на критичность в многослойных плоских системах дан в работе [48].

где s — поверхность, ограничивающая рассматриваемую область, и n_0 — внешняя нормаль.

Уравнение (1a) и граничное условие (1b) совпадают с уравнением (1) разд. 2.5 и соответствующим граничным условием, полученными для фазовой плотности $\Psi = \psi_1 - \psi_2$ в теореме единственности. Единственность при $c < 1$ следовала из того, что уравнение (1) имело только тривиальное решение $\Psi \equiv 0$. Другими словами, если нетривиального решения уравнения (1) для $c < 1$ нет, то система без источников не может поддерживать стационарное, отличное от нуля распределение при $c < 1$; это означает, что реактор не может быть критичным, если испускается менее чем один нейтрон на одно столкновение.

Этот результат вряд ли окажется неожиданным. Однако заметим, что отсюда не обязательно следует, что уравнение (1) при $c > 1$ обладает нетривиальным решением. Такое решение существует только тогда, когда значение c и размер системы связаны некоторым соотношением, называемым *условием критичности*. Это соотношение мы выведем в настоящем разделе.

Даже для простого одномерного случая, который мы подробно здесь рассмотрим, нельзя получить точно ни условия критичности, ни выражения для связанной с ним стационарной фазовой плотности. Однако можно указать итерационный процесс, быстро сходящийся к решению, причем сходимость тем быстрее, чем больше система. В первом приближении считается, что граничные условия «не взаимодействуют». В плоском случае это, по существу, отвечает суперпозиции двух решений проблемы Милна, по одному для каждой границы, и приводит к уже знакомому нам условию на экстраполированной длине. Мы проведем еще один итерационный шаг и покажем, как в принципе можно получить результаты с любой нужной точностью.

А. Постановка плоской задачи на критичность

Рассмотрим пластину толщиной $2b$; начало координат помещено в центре пластины. Уравнение (1a) принимает вид:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'. \quad (2a)$$

Как показано в разд. 2.1, выполняется условие симметрии

$$\psi(x, \mu) = \psi(-x, -\mu), \quad (2b)$$

так что граничное условие можно записать в виде

$$\psi(-b, \mu) = 0, \quad \mu \geq 0. \quad (2c)$$

Разложим решение уравнения (1а) обычным образом:

$$\psi(x, \mu) = a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) + a_{0-} \psi_{0-}(x, \mu) + \int_{-1}^1 A(v) \psi_v(x, \mu) dv. \quad (3)$$

Так как

$$\psi_{0\pm}(x, \mu) = e^{\mp x/v_0} \frac{c v_0}{2} \frac{1}{v_0 \mp \mu} = \psi_{0\mp}(-x, -\mu) \quad (4a)$$

и

$$\psi_v(x, \mu) = \psi_{-v}(-x, -\mu), \quad (4b)$$

то в силу условия (2b)

$$a_{0+} = a_{0-} \quad (5a)$$

и

$$A(v) = A(-v). \quad (5b)$$

Разложение (3) принимает теперь форму

$$\psi(x, \mu) = \psi_{0+} + \psi_{0-} + \int_0^1 A(v) [\psi_v(x, \mu) + \psi_{-v}(x, \mu)] dv \quad (6)$$

(мы выбрали нормировку $a_{0+} = 1$).

Коэффициент $A(v)$ можно найти с помощью условия (2с):

$$\begin{aligned} & \psi_{0+}(-b, \mu) + \psi_{0-}(-b, \mu) + \\ & + \int_0^1 A(v) [\psi_v(-b, \mu) + \psi_{-v}(-b, \mu)] dv = 0, \quad \mu \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

К сожалению, точное решение этого уравнения неизвестно. Однако можно преобразовать это уравнение к фредгольмовскому виду и затем найти решение методом последовательных приближений. Положим

$$B(v) = A(v) e^{b/v}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (7) примет вид

$$\int_0^1 B(v) \varphi_v(\mu) dv = -\varphi_{0+} e^{b/v_0} - \varphi_{0-} e^{-b/v_0} - \int_0^1 B(v) e^{-2b/v} \varphi_v(-\mu) dv. \quad (9)$$

Уравнение (9) — это (сингулярное) интегральное уравнение относительно $B(v)$. Чтобы свести его к уравнению Фредгольма, решение которого можно найти итерационным методом, умножим обе его части на $\gamma(\mu)$ и проинтегрируем по μ . С помощью тождества A (разд. 6.2) легко показать, что

$$\int_0^1 \gamma(\mu) \varphi_{0\pm}(\mu) d\mu = \mp \frac{c v_0}{2} X(\pm v_0). \quad (10)$$

Кроме того,

$$\int_0^1 \gamma(\mu) \varphi_\nu(\mu) d\mu = 0, \quad \nu \geq 0, \quad (11a)$$

$$\int_0^1 \gamma(\mu) \varphi_\nu(-\mu) d\mu = -\frac{c\nu}{2} X(-\nu), \quad \nu \geq 0 \quad (11b)$$

(эти равенства доказываются так же, как тождество А в разд. 6.2). В силу (10) и (11)

$$\nu_0 X(\nu_0) e^{b/\nu_0} - \nu_0 X(-\nu_0) e^{-b/\nu_0} - \int_0^1 \nu B(\nu) e^{-2b/\nu} X(-\nu) d\nu = 0. \quad (12)$$

Умножим теперь уравнение (9) на $\varphi_\nu(\mu) \gamma(\mu)$ и проинтегрируем по μ . Снова появляются интегралы, которые после интегрирования по частям приводятся к виду (10) и (11). В результате получается интегральное уравнение Фредгольма, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu B(\mu) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] \times \\ &\times \left[-\frac{\nu_0 X(\nu_0)}{\mu - \nu_0} e^{b/\nu_0} + \frac{\nu_0 X(-\nu_0)}{\mu + \nu_0} e^{-b/\nu_0} + \int_0^1 \frac{\nu B(\nu)}{\mu + \nu} e^{-2b/\nu} X(-\nu) d\nu \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Можно показать, что

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] = -\frac{(c\mu/2)^2 \mu}{\gamma(\mu) N(\mu)}, \quad (14)$$

и при желании использовать эту формулу в (13).

Заметим, что в уравнении (13) ядро несингулярно и пределы интегрирования конечны. Уравнение (12) называется *уравнением критичности*. Метод его решения состоит в следующем: разрешаем уравнение (13) относительно $B(\mu)$ и подставляем результат в уравнение (12), чтобы определить, какие значения c и b приводят к критической конфигурации.

Выражения для плотности и тока получаются интегрированием соотношения (6):

$$\frac{\rho(x)}{4\pi} = \cos \frac{x}{|\nu_0|} + \int_0^1 A(\nu) \operatorname{ch} \frac{x}{\nu} d\nu, \quad (15)$$

$$\frac{J(x)}{4\pi} = (c-1)|\nu_0| \sin \frac{x}{|\nu_0|} + (c-1) \int_0^1 \nu A(\nu) \operatorname{sh} \frac{x}{\nu} d\nu. \quad (16)$$

Здесь $|v_0| = v_0/i$; мы воспользовались тем фактом, что решения существуют только для $c > 1$. В этом случае v_0 должно быть чисто мнимым (разд. 4.3).

В. Приближенные решения

Мы уже отмечали, что при $c < 1$ не существует нетривиального решения нашей задачи. Поэтому мы будем рассматривать только случай $c \geq 1$. Очевидно, при $c > 1$ (но когда $c - 1$ мало) критический размер должен быть большим.

Подходя к задаче с этой точки зрения¹⁾, обратим внимание на то, что интегральный член в условии критичности (12) содержит множитель $e^{-2b/v}$. В нулевом приближении мы пренебрегаем им и приходим к приближенному условию критичности

$$X(v_0)e^{b/v_0} - X(-v_0)e^{-b/v_0} = 0. \quad (17)$$

Напомним, что экстраполированная длина z_0 в проблеме Милна (разд. 6.4) связана с $X(\pm v_0)$ соотношением

$$X(-v_0)/X(v_0) = -e^{-2z_0/v_0}. \quad (18)$$

Тем самым условие (17) принимает вид²⁾

$$e^{(z_0+b_0)/v_0} + e^{-(z_0+b_0)/v_0} = 0. \quad (19)$$

Другими словами, решение существует, если

$$\cos[(b_0 + z_0)/|v_0|] = 0. \quad (20)$$

Отсюда

$$(z_0 + b_0)/|v_0| = \pi/2, \quad (21a)$$

или

$$b_0 = \pi |v_0|/2 - z_0. \quad (21b)$$

Заметим, что это условие эквивалентно требованию, чтобы асимптотическая плотность обращалась в нуль на расстоянии в одну экстраполированную длину (отвечающую проблеме Милна) от границы. Таким образом, это решение эквивалентно суперпозиции двух решений проблемы Милна при отказе от учета влияния одной границы на другую и сохранении лишь асимптотических частей решения. Поэтому в нулевом приближении плотность ρ_0 и ток J_0 определяются лишь первыми членами в правых частях формул (15) и (16):

$$\rho_0(x)/4\pi = \cos(x/|v_0|), \quad (22a)$$

$$J_0(x)/4\pi = (c-1)|v_0|\sin(x/|v_0|). \quad (22b)$$

¹⁾ Можно надеяться на плодотворность такого подхода, ибо большие значения c в природе не наблюдаются.

²⁾ b_i здесь обозначает i -е приближение к b .

Это условие называется *условием на экстраполированной границе*. Если не считать того, что в наши формулы вошла точная длина диффузии ν_0 , по существу тот же результат следует из диффузионной теории (разд. 8.3).

Поучительно взглянуть на этот факт с другой стороны. В диффузионной теории вместо (2с) обычно используется граничное условие Маршака низшего порядка

$$J_+(-b) = \int_0^1 \mu \psi(-b, \mu) d\mu = 0. \quad (23)$$

Полагая $B(\nu) = 0$ в формуле (9) и применяя условие (23), получаем вместо (21b) условие

$$b_0^1 = \pi |\nu_0|/2 - z_0^1, \quad (24a)$$

где

$$z_0^1 = |\nu_0| \operatorname{arctg} \frac{c-1}{c |\nu_0| \ln [1 + (1/|\nu_0|^2)]^{1/2}}. \quad (24b)$$

При $c-1 \ll 1$ правую часть равенства (24b) можно разложить в ряд:

$$z_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}(c-1)} \operatorname{arctg} 2 \left[\frac{c-1}{3} \right]^{1/2} = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{4}{9}(1-c) + \dots \right], \quad (25)$$

а это в точности разложение для экстраполированной длины в проблеме Милна, найденное в рамках диффузионной теории (разд. 8.3). Таким образом, использование граничного условия Маршака в форме (23) вместо условия (2с) немедленно приводит к «диффузионному» результату (если опять же не считать, что здесь фигурирует точное значение длины диффузии ν_0).

Из формул (22) вытекает, что

$$J_0(x) = -D (d\rho_0(x)/dx), \quad (26a)$$

где

$$D = |\nu_0|^2 (c-1). \quad (26b)$$

Объединяя (26a) с уравнением непрерывности (полученным интегрированием уравнения (2a) по μ)

$$dJ_0/dx + (1-c) \rho_0(x) = 0, \quad (27a)$$

приходим к уравнению для ρ_0 :

$$\frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{1}{|\nu_0|^2} \rho_0(x) = 0. \quad (27b)$$

Мы видим, что асимптотическая плотность удовлетворяет уравнению диффузии. Точнее, уравнение (27b) становится уравнением

диффузии при $c \simeq 1$, и в этом случае (разд. 4.3)

$$|v_0|^2 \rightarrow 1/3 (1 - c). \quad (28)$$

Величина $1/|v_0|$ называется *геометрическим параметром* реактора и обычно обозначается B^2 .

Вернемся к уравнению (13). Пусть теперь $B(\mu)$ будет не нуль, а

$$\mu B(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] \left[-\frac{v_0 X(v_0)}{\mu - v_0} e^{b/v_0} + \frac{v_0 X(-v_0)}{\mu + v_0} e^{-b/v_0} \right]. \quad (29)$$

Тогда мы получим приближение следующего порядка. Подставив его в условие критичности (соотношение (12)), найдем, что

$$X(v_0) e^{b_1/v_0} - X(-v_0) e^{-b_1/v_0} = -\frac{c}{2} (1 - c) [v_0 \{X(v_0) e^{b_1/v_0} + X(-v_0) e^{-b_1/v_0}\} I_1 + \{X(v_0) e^{b_1/v_0} - X(-v_0) e^{-b_1/v_0}\} I_2], \quad (30a)$$

где

$$I_j = \int_0^1 v^j X(-v) g(c, v) e^{-2b_1/v} dv. \quad (30b)$$

Соотношение (30a) можно представить в виде

$$\frac{X(v_0) e^{b_1/v_0} - X(-v_0) e^{-b_1/v_0}}{X(v_0) e^{b_1/v_0} + X(-v_0) e^{-b_1/v_0}} = v_0 \alpha(c, b_1), \quad (31a)$$

положив

$$\alpha = \frac{(c/2)(c-1) I_1}{1 - [(c/2)(c-1) I_2]}. \quad (31b)$$

В силу (18) условие критичности в первом приближении принимает вид

$$\operatorname{tg} \frac{1}{|v_0|} \left[b_1 + z_0 - \frac{\pi |v_0|}{2} \right] = -|v_0| \alpha. \quad (32)$$

Заметим, что $\alpha \sim c - 1$. Поэтому имеет смысл построить приближение к (32) для малых значений $\alpha(v_0)$:

$$b_1 \approx \frac{\pi |v_0|}{2} - z_0 - \alpha(c, b_1) |v_0|^2, \quad (33a)$$

или

$$b_1 \approx b_0 - \alpha(c, b_1) |v_0|^2. \quad (33b)$$

Следовательно (поскольку $\alpha > 0$), поправка первого порядка уменьшает критическую толщину. Плотность и ток в этом при-

ближении равны

$$\frac{\rho_1(x)}{4\pi} = \frac{\rho_0(x)}{4\pi} + c\nu_0^2(c-1) \left[\frac{X(\nu_0)X(-\nu_0)}{1-\alpha^2\nu_0^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \int_0^1 X(-\nu)g(c, \nu)(1+\alpha\nu)e^{-b_1/\nu} \operatorname{ch} \frac{x}{\nu} d\nu, \quad (34a)$$

$$\frac{J_1(x)}{4\pi} = \frac{J_0(x)}{4\pi} + (1-c)^2 c\nu_0^2 \left[\frac{X(\nu_0)X(-\nu_0)}{1-\alpha^2\nu_0^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \int_0^1 \nu X(-\nu)g(c, \nu)(1+\alpha\nu)e^{-b_1/\nu} \operatorname{sh} \frac{x}{\nu} d\nu. \quad (34b)$$

Здесь ρ_0 и J_0 — плотность и ток в нулевом приближении (формулы (22)).

В принципе тем же самым методом можно было бы получить поправки более высокого порядка. Однако уже первое приближение, по-видимому, дает хороший результат для систем, размеры которых намного больше одного свободного пробега нейтрона. Это соображение анализируется в работе Митсиса [46], где также обсуждается сходимость использованного здесь итерационного процесса.

Таблица 6.4

Критическая толщина пластины

c	t_0	t_1
1,01	16,6590	16,6590
1,10	4,2266	4,2265
1,20	2,5796	2,5786
1,30	1,8776	1,8749
1,40	1,4768	1,4723
1,50	1,2152	1,2088
1,60	1,0303	1,0228
1,70	0,8928	0,8838
1,80	0,7963	0,7853
1,90	0,7016	0,6897
2,00	0,6527	0,6397

В табл. 6.4 приведены значения t_0 и t_1 для различных значений c между 1 и 2 ($t = 2b$). Из таблицы видно, что максимальное отклонение t_1 от t_0 составляет 2%.

Построим удобную приближенную формулу для t_1 . Так как величины I_j (формула (30b)) малы, то

$$\alpha(c, t) \approx (c/2)(c-1)I_1. \quad (35)$$

Основной вклад в интеграл I_1 дают значения v , близкие к единице. Для таких v

$$X(-v) \approx X(0)/v. \quad (36a)$$

С учетом этого приближения, замены переменных $v = 1/(1+x)$ и формул (24) и (25) из разд. 4.5 I_1 принимает вид

$$I_1 \approx \frac{X^2(0)}{4} e^{-2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x} dx}{(1-(c/2) \ln(2/x))^2 + (\pi c/2)^2}. \quad (36b)$$

Еще одна замена переменных дает

$$I_1 \approx \left(\frac{2}{\pi c}\right)^2 X^2(0) \frac{e^{-t}}{t} \int_0^{\infty} \frac{e^{-y} dy}{1 + ((\lambda - \ln y)/\pi)^2}, \quad (36c)$$

где $\lambda = \ln 2t - 2/c$. Отсюда

$$I_1 \approx \left(\frac{X(0)}{\pi c}\right)^2 \frac{e^{-t}}{t} f(\lambda). \quad (37)$$

Функция $f(\lambda)$ протабулирована [1]. Теперь нетрудно получить приближенную формулу для t_1 :

$$t_1 \approx t_0 - \frac{1}{c\pi^2} \frac{e^{-t_1}}{t_1} f(\lambda). \quad (38)$$

Таблица 6.5

Отношение нулевого приближения к первому для плотности нейтронов как функции положения

x/b_0	$c = 1,01$	$c = 1,10$	$c = 1,30$	$c = 1,60$	$c = 2,00$
0,00	1,000	1,002	1,020	1,050	1,082
0,25	1,000	1,003	1,023	1,050	1,082
0,50	1,000	1,007	1,032	1,073	1,104
0,75	1,001	1,026	1,064	1,109	1,154
0,85	1,003	1,049	1,094	1,144	1,195
0,95	1,036	1,120	1,162	1,230	1,269
1,00	1,254	1,126	1,271	1,289	1,313

В табл. 6.5 представлено отношение плотностей ρ_0/ρ_1 как функция от x/b . Как и следовало ожидать, наибольшее отклонение наблюдается вблизи границы. Заметим также, что $\rho_1 > \rho_0$.

С. Задача критичности для шара; антисимметричные решения

Если мы вернемся к разд. 3.6, где обсуждалась интегральная форма уравнения переноса, то увидим, что основное уравнение задачи критичности для плоского слоя (уравнение (2а) настоящего раздела) можно записать в виде

$$\rho(x) = \frac{c}{2} \int_{-b}^b E_1(|x-x'|) \rho(x') dx'. \quad (39)$$

Проблема критичности сводится к определению условий, при которых это уравнение обладает нетривиальным решением. Аналогично можно написать, снова используя результаты разд. 3.6, интегральное уравнение задачи критичности для шара радиуса R ¹⁾:

$$r\rho(r) = \frac{c}{2} \int_0^R r' \rho(r') [E_1(|r-r'|) - E_1(r+r')] dr'. \quad (40)$$

Пусть $n(r) \equiv r\rho(r)$, $r > 0$, а для отрицательных r определим $n(r)$ соотношением

$$n(-r) = -n(+r). \quad (41)$$

Тогда уравнение (40) переходит в уравнение

$$n(r) = \frac{c}{2} \int_{-R}^R n(r') E_1(|r-r'|) dr', \quad (42)$$

которое совпадает с уравнением для плоского слоя (уравнение (39)) если не считать того, что в отличие от задачи (39) нас будут интересовать здесь нечетные решения.

Итак, мы будем действовать следующим образом. Рассмотрим фиктивную задачу критичности для плоского слоя с дополнительным условием

$$\psi(x, \mu) = -\psi(-x, -\mu) \quad (43)$$

вместо

$$\psi(x, \mu) = +\psi(-x, -\mu). \quad (44)$$

Когда эта задача формулируется как интегральное уравнение для пространственной плотности, мы приходим к уравнению (42)

¹⁾ Здесь мы положили $\sigma = \text{const} = 1$.

с условием

$$n(x) = -n(-x). \quad (45)$$

Другими словами, критический радиус шара равен половине критической толщины в фиктивной задаче для плоского слоя. Кроме того, плотность в сферической задаче равна плотности в случае плоского слоя. (Для фазовой плотности это не так. Но поскольку фазовую плотность можно получить из пространственной с помощью квадратуры, это не обедняет информации, которую дает такой прием.)

Дальнейшие построения аналогичны проведенным выше. Применим интегральное уравнение для $B(\mu)$ (уравнение (13)), изменив в двух местах знаки на противоположные:

$$\mu B(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\mu)} - \frac{1}{X^-(\mu)} \right] \left[-\frac{v_0 X(v_0)}{\mu - v_0} e^{b/v_0} - \right. \\ \left. - \frac{v_0 X(-v_0)}{\mu + v_0} e^{-b/v_0} - \int_0^1 \frac{v B(v)}{\mu + v} e^{-2b/v} X(-v) dv \right]. \quad (46)$$

Условие критичности (12) заменяется условием

$$v_0 X(v_0) e^{b/v_0} + v_0 e^{-b/v_0} X(-v_0) + \int_0^1 v B(v) e^{-2b/v} X(-v) dv = 0. \quad (47)$$

Приближение нулевого порядка дает для b_0 вместо соотношения (17) соотношение

$$X(v_0) e^{b_0/v_0} + X(-v_0) e^{-b_0/v_0} = 0, \quad (48)$$

так что

$$\sin \left[\frac{z_0 + b_0}{|v_0|} \right] = 0. \quad (49)$$

Отсюда критический радиус b_0 равен

$$b_0 = \pi |v_0| - z_0. \quad (50)$$

Аналогично

$$\rho_0(x) = \sin(x/|v_0|), \quad (51)$$

или лучше (так как необходимо заменить $\rho(x)$ на $r\rho(r)$)

$$\rho(r) = \frac{\sin(r/|v_0|)}{r}. \quad (52)$$

Тем же способом можно получить b_1 и ρ_1 . Подробно этот вопрос разобран в работе Митсиса [46], который рассмотрел также задачу критичности для цилиндра.

В приложении I мы в деталях исследуем задачу критичности для шара, чтобы проиллюстрировать один метод, применимый и к другим геометриям.

6.7. Альбедная задача для плоского слоя

Альбедная задача для плоского слоя очень похожа на задачу критичности для плоского слоя, рассмотренную в разд. 6.6. Различие состоит в том, что в первом случае на одной из поверхностей задается ненулевое граничное условие¹⁾. Пусть границами слоя служат плоскости $x = 0$ и $x = d$, а граничные условия имеют вид

$$\psi(0, \mu) = \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu > 0, \quad (1a)$$

$$\psi(d, \mu) = 0, \quad \mu < 0. \quad (1b)$$

Представим фазовую плотность в виде

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & a_{0+}\psi_{0+}(x, \mu) + a_{0-}\psi_{0-}(x, \mu) + \\ & + \int_0^1 A(\nu) \varphi_{\nu}(\mu) d\nu + \int_0^1 A(-\nu) \varphi_{-\nu}(\mu) d\nu \end{aligned} \quad (2)$$

и применим условия (1). Тогда для коэффициентов разложения (2) получим уравнения

$$\begin{aligned} \delta(\mu - \mu_0) - b_{\pm}\varphi_{0+}(\mu) \mp b_{\pm}e^{-d/\nu_0}\varphi_{0-}(\mu) \mp \\ \mp \int_0^1 B_{\pm}(\nu) e^{-d/\nu} \varphi_{-\nu}(\mu) d\nu = \int_0^1 B_{\pm}(\nu) \varphi_{\nu}(\mu) d\nu, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$B_{\pm}(\mu) = A(\mu) \pm A(-\mu) e^{d/\mu}, \quad (4a)$$

$$b_{\pm} = a_{0+} \pm a_{0-} e^{d/\nu_0}. \quad (4b)$$

Соотношения ортогональности на половинном отрезке и выведенные выше тождества приводят к уравнению Фредгольма для $B_{\pm}(\nu)$:

$$\begin{aligned} B_{\pm}(\nu) = \frac{\nu}{N(\nu)} (\nu_0^2 - \nu^2) (1 - c) X(-\nu) \left[\frac{2\varphi_{\nu}(\mu_0) \gamma(\mu_0)}{c\nu} - b_{\pm}\varphi_{0+}(\nu) X(\nu_0) \mp \right. \\ \left. \mp b_{\pm}e^{-d/\nu_0}\varphi_{0-}(\mu) X(-\nu_0) \mp \int_0^1 B_{\pm}(\nu) e^{-d/\nu} \varphi_{-\nu}(\mu) X(-\nu) d\nu \right]. \end{aligned} \quad (5a)$$

Умножая уравнения (3) на $\gamma(\mu)$ и интегрируя по μ , с помощью наших тождеств находим

$$b_{\pm} = \frac{(2/c) \gamma(\mu_0) \mp \int_0^1 \nu B_{\pm}(\nu) e^{-d/\nu} X(-\nu) d\nu}{\nu_0 X(-\nu_0) [e^{2z_0/\nu_0} \pm e^{-a/\nu_0}]}. \quad (5b)$$

Здесь z_0 — экстраполированная длина в проблеме Милна.

¹⁾ См. [49]. Первые результаты в этом направлении получены в работе [50].

Точно так же, как в задаче критичности, рассмотренной в предыдущем разделе, уравнения (5) дают возможность определить искомые коэффициенты разложений методом последовательных приближений. В нулевом приближении

$$a_{0+}^{(0)} = -e^{(2z_0+2d)/v_0},$$

$$a_{0-}^{(0)} = \frac{\gamma(\mu_0) e^{d/v_0}}{c v_0 X(-v_0) \operatorname{sh}[(2z_0+d)/v_0]}, \quad (6a)$$

$$A^{(0)}(\mu) = \frac{\mu}{N(\mu)} X(-\mu) (v_0^2 - \mu^2) (1-c) \left[\frac{2\gamma(\mu_0) \varphi_\mu(\mu_0)}{c} - a_{0+}^{(0)} \varphi_{0+}(\mu) X(v_0) - a_{0-}^{(0)} \varphi_{0-}(\mu) X(-v_0) \right], \quad (6b)$$

$$A^{(0)}(-\mu) = -e^{-d/\mu} \frac{\mu}{N(\mu)} (v_0^2 - \mu^2) (1-c) X(-\mu) \times \\ \times [a_{0-}^{(0)} e^{d/v_0} \varphi_{0+}(\mu) X(v_0) + a_{0+}^{(0)} e^{-d/v_0} \varphi_{0-}(\mu) X(-v_0)]; \quad (6c)$$

в (6b) и (6c) $\mu \geq 0$. Первое приближение для этих величин было построено Мендельсоном и Мак-Кормиком [49]; мы не будем повторять здесь их результаты.

Итак, плоские задачи обычно приводят к уравнениям Фредгольма для коэффициентов разложения. Тем самым эти коэффициенты можно получить в замкнутой форме лишь при условии, что соответствующее уравнение Фредгольма допускает решение в замкнутой форме, а это условие, вообще говоря, не выполняется.

6.8. Линейно анизотропное рассеяние

Для линейно анизотропного рассеяния уравнение переноса принимает вид

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') [1 + 3f_1 \mu' \mu] d\mu'. \quad (1)$$

Функция $\Lambda(v)$ для этого случая была найдена в разд. 4.10:

$$\Lambda(v) = 1 - \frac{cv}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 + 3f_1(1-c)v\mu}{v-\mu} d\mu. \quad (2)$$

Мы видим, что в случае линейно анизотропного рассеяния $\Lambda(v)$ имеет только два нуля¹⁾. Обозначим их $\pm v_0$. Соответствующая теорема полноты была доказана (точнее, был дан набросок доказательства) в разд. 4.10²⁾. Мы знаем, что задачи с анизотропным

¹⁾ См. табл. 4.2 в разд. 4.10.

²⁾ В работе [44] некоторые результаты, установленные в этом и в следующем разделах, получены прямым решением сингулярного интегрального уравнения для соответствующих коэффициентов разложения (т. е. без помощи соотношений ортогональности). См. также [29].

рассеянием можно решить обычным способом, т. е. разложением по сингулярным собственным функциям. Для определения коэффициентов разложения нам понадобятся следующие соотношения ортогональности [45]:

$$\int_0^1 \varphi_{\nu}(\mu) \left[\varphi_{\nu'}(\mu) + B \frac{c\nu'}{2} \right] W(\mu) d\mu = (\nu_0 - \nu) \gamma(\nu) \frac{N(\nu)}{\nu} \delta(\nu - \nu'), \quad (3a)$$

$$\int_0^1 \varphi_{0+}(\mu) \left[\varphi_{\nu}(\mu) + \frac{Bc\nu}{2} \right] W(\mu) d\mu = 0, \quad (3b)$$

$$\int_0^1 \varphi_{\nu}(\mu) \left[\varphi_{0+}(\mu) + \frac{Bc\nu_0}{2} \right] W(\mu) d\mu = 0, \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{0\pm}(\mu) \left[\varphi_{0+}(\mu) + \frac{Bc\nu_0}{2} \right] W(\mu) d\mu = \\ = \mp \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 X(\pm \nu_0) d(\nu_0 \bar{\nu}) \frac{d(\pm \nu_0 \bar{\nu})}{d(\nu_0 \bar{\nu})}, \end{aligned} \quad (3d)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_{0-}(\mu) \left[\varphi_{\nu}(\mu) + \frac{Bc\nu}{2} \right] W(\mu) d\mu = \\ = \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{2\nu d(\nu_0 \nu_0) d(-\bar{\nu}) X(-\nu_0)}{d(\nu_0 \bar{\nu})(\nu_0 + \nu)}, \end{aligned} \quad (3e)$$

$$\int_0^1 \left[\varphi_{\nu}(\mu) + \frac{Bc\nu}{2} \right] W(\mu) d\mu = \frac{c\nu}{2} \gamma^{(0)} \frac{d(\nu_0 \nu_0) d(\bar{\nu} \bar{\nu})}{d(\nu_0 \bar{\nu})}, \quad (3f)$$

$$\int_0^1 \left[\varphi_{0+}(\mu) + \frac{Bc\nu_0}{2} \right] W(\mu) d\mu = \frac{c\nu_0}{2} \gamma^{(0)} \frac{d(\nu_0 \nu_0) d(\bar{\nu} \bar{\nu})}{d(\nu_0 \bar{\nu})}. \quad (3g)$$

Здесь $W(\mu)$ — обычная весовая функция:

$$W(\mu) = \gamma(\mu) (\nu_0 - \mu), \quad (4a)$$

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} X^+(\mu) / \Lambda^+(\mu). \quad (4b)$$

Кроме того,

$$B = \frac{3f_1(1-c)(\nu_0 - \bar{\nu})}{d(\nu_0 \bar{\nu})}, \quad (5a)$$

$$\gamma^{(n)} = \int_0^1 \mu^n \gamma(\mu) d\mu, \quad (5b)$$

$$\bar{\nu} \equiv \gamma^{(1)} / \gamma^{(0)}, \quad (5c)$$

$$d(ab) = 1 + 3f_1(1-c)ab. \quad (5d)$$

Заметим также, что

$$\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{d(\nu\mu)}{\nu-\mu} + \lambda(\mu) \delta(\mu-\nu), \quad (6a)$$

$$\varphi_{0\pm}(\mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{d(\pm\nu_0\mu)}{\nu_0 \mp \mu}, \quad (6b)$$

$$X(z) = \int_0^1 \frac{\gamma(\mu) d(\mu\mu)}{\mu-z} d\mu, \quad (6c)$$

$$N(\nu) = \nu \left[\lambda^2(\nu) + \left\{ \frac{\pi c\nu}{2} d(\nu\nu) \right\}^2 \right], \quad (6d)$$

$$\lambda(\nu) = \frac{1}{2} [\Lambda^+(\nu) + \Lambda^-(\nu)]. \quad (6e)$$

Введенные обозначения дают возможность сразу написать решения различных задач для полупространства с линейно анизотропным рассеянием. Как и в разд. 6.3, напомним:

$$\Psi(x, \mu) = f(x, \mu) + a_{0+} \psi_{0+}(x, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \psi_\nu(x, \mu) d\nu \quad (7)$$

(здесь $f(x, \mu)$ — частное решение рассматриваемой задачи). Коэффициенты a_{0+} и $A(\nu)$ определяются из соотношений ортогональности, приведенных выше:

$$a_{0+} = - \left(\frac{2}{c\nu_0} \right)^2 \int_0^1 \frac{\psi(\mu') [\varphi_{0+}(\mu') + Bc\nu_0/2] (\nu_0 - \mu') \gamma(\mu') d\mu'}{X(\nu_0) d(\nu_0\nu_0)}, \quad (8a)$$

$$A(\nu) = \nu \int_0^1 \frac{\psi(\mu') [\varphi_\nu(\mu') + Bc\nu/2] (\nu_0 - \mu') \gamma(\mu') d\mu'}{(\nu_0 - \nu) \gamma(\nu) N(\nu)}. \quad (8b)$$

Как и раньше, функция $\psi(\mu)$ имеет вид

$$\psi(\mu) = \Psi(0, \mu) - f(0, \mu). \quad (8c)$$

Пространственная плотность $\rho(x)$ задается формулой (13) разд. 6.3, так что результаты настоящего раздела отличаются от результатов разд. 6.3 для случая изотропного рассеяния только формулами для a_{0+} и $A(\nu)$. Это относится также и к току $J(x)$, который можно найти по формуле (22b) разд. 6.3.

Для углового распределения выходящего излучения справедлива формула (14) разд. 6.3. Но для того чтобы привести результат к виду, соответствующему равенствам (15a) или (15b) разд. 6.3, нужно обобщить тождество D на случай линейно анизотропного

тропного рассеяния. Этим обобщением [45] будет соотношение

$$\int_0^1 \frac{\nu \varphi_\nu(\mu) [\varphi_\nu(\mu') + B c \nu / 2] d\nu}{(\nu_0 - \nu) \gamma(\nu) N(\nu)} =$$

$$= \frac{-1}{(\nu_0 - \mu) X(\mu)} \left[\frac{d(\mu\mu')}{\mu - \mu'} + B \right] + \left(\frac{2}{c\nu_0} \right)^2 \frac{\varphi_{0+}(\mu) [\varphi_{0+}(\mu') + B(c\nu_0/2)]}{X(\nu_0) d(\nu_0\nu_0)}. \quad (9)$$

Формула для углового распределения выходящего излучения теперь принимает вид

$$\Psi(0, \mu) = f(0, \mu) + \frac{1}{X(\mu)} \int_0^1 \psi(\mu') \gamma(\mu') \left[\frac{d(\mu'\mu')}{\mu' - \mu} - B \right] \frac{(\nu_0 - \nu')}{(\nu_0 - \mu)} d\mu,$$

$$\mu < 0. \quad (10)$$

Отметим следующие частные результаты.

а) Альбедная задача. Напомним, что $\psi(\mu) = \delta(\mu - \mu_0)$, $\mu > 0$, $f(x, \mu) = 0$. Тогда

$$a_{0+} = \frac{-2\gamma(\mu_0) d(\nu\bar{\mu}_0)}{c\nu_0 X(\nu_0) d(\nu\nu_0)}, \quad (11a)$$

$$A(\nu) = \frac{\nu\gamma(\mu_0)(\nu_0 - \mu_0)}{\gamma(\nu) N(\nu)(\nu_0 - \nu)} \left[\varphi_\nu(\mu_0) + \frac{Bc\nu}{2} \right]. \quad (11b)$$

Далее,

$$\Psi(0, \mu) = \frac{c\mu_0}{2} \frac{[d(\mu_0\mu) + B(\mu - \mu_0)]}{(\mu_0 - \mu)(\nu_0 - \mu) X(\mu)(1 - c)(\nu_0 + \mu_0) X(-\mu_0)(1 - cf_1)},$$

$$\mu < 0. \quad (12)$$

Этот результат, т. е. формулу для углового распределения выходящего излучения, получил также Чандрасекар методом инвариантного погружения¹⁾.

б) Постоянный изотропный источник. Здесь $f(x, \mu) = q_0/(1 - c)$ и $\psi(0, \mu) = 0$, $\mu > 0$. Тогда

$$a_{0+} = \frac{q_0 d(\nu_0\nu_0) d(\bar{\nu}\bar{\nu}) \gamma^{(0)}}{(c\nu_0/2) X(\nu_0) d(\nu_0\nu_0) d(\nu_0\bar{\nu})(1 - c)}, \quad (13a)$$

$$A(\nu) = \frac{-q_0 c \nu^2 d(\nu_0\nu_0) d(\bar{\nu}\bar{\nu}) \gamma^{(0)}}{2(1 - c)(\nu_0 - \nu) \gamma(\nu) N(\nu) d(\nu_0\bar{\nu})}, \quad (13b)$$

и мы находим

$$\Psi(0, \mu) = \frac{q_0}{(1 - c) X(\mu)(\nu_0 - \mu)} \frac{\gamma^{(0)} d(\nu_0\nu_0) d(\bar{\nu}\bar{\nu})}{d(\nu_0\bar{\nu})}, \quad \mu < 0. \quad (14)$$

¹⁾ У него в работе [43, разд. 46.2] соответствующий вид имеет азимутально симметричный член в уравнении (70).

с) Проблема Милна. В этом случае $\Psi_0(0, \mu) = 0$, $\mu > 0$, и $f(0, \mu) = \varphi_0(\mu)$. С помощью соотношений ортогональности определяем коэффициенты разложения:

$$a_{0+} = \frac{X(-v_0) d(-\bar{v}v_0)}{X(v_0) d(\bar{v}v_0)}, \quad (15a)$$

$$A(v) = \frac{-d(-\bar{v}v) d(v_0v_0)}{d(\bar{v}v_0)} \frac{cvX(-v_0) X(-v)}{N(v) X^2(0)}. \quad (15b)$$

Величину $X^2(0)$ можно вычислить по формуле (23) настоящего раздела.

Распределение выходящего излучения равно

$$\Psi_0(0, \mu) = \frac{cv_0^2 X(-v_0)}{(v_0^2 - \mu^2) X(\mu)} \frac{d(v_0v_0) d(-\bar{v}\mu)}{d(v_0\bar{v})}, \quad \mu < 0. \quad (16)$$

Формулы (6), (11a), (11b), (12), (16) и (17) разд. 6.4 переходят теперь в формулы

$$\Psi_0(0, 0) = cX(-v_0) R \frac{d(v_0v_0)}{d(v_0\bar{v})}, \quad (17a)$$

$$\frac{\rho_0(0)}{2\pi} = 2RX(-v_0) \frac{d(v_0v_0)}{d(v_0\bar{v})}, \quad (17b)$$

$$\frac{\Psi_0(0, 0)}{\rho_0(0)} = \frac{c}{4\pi}, \quad (17c)$$

$$\frac{2\pi\Psi_0(0, \mu)}{\rho_0(0)} = \frac{cv_0^2 d(-\bar{v}\mu)}{2RX(\mu) (v_0^2 - \mu^2)}, \quad \mu < 0, \quad (17d)$$

$$\frac{J_0(0)}{2\pi} = -2v_0^2 \frac{X(-v_0) (1-c) (1-cf_1) d(v_0v_0) d(\bar{v}\bar{v}) \gamma^{(0)}}{d(v_0\bar{v})}, \quad (18a)$$

$$\bar{\mu} = -Rd(\bar{v}\bar{v}) \gamma^{(0)}, \quad (18b)$$

где

$$R = \sqrt{v_0^2 (1-c) (1-cf_1)}. \quad (18c)$$

В заключение обобщим тождества В и С для X -функции на настоящий случай. Обобщения тождеств А и D уже были сделаны (формулы (6с) и (9) соответственно). Тождеству В аналогична формула

$$X(z) X(-z) = \frac{\Lambda(z)}{(v_0^2 - z^2) (1-c) (1-cf_1)}. \quad (19)$$

Она позволяет выразить $\gamma(\mu)$ в более удобном для вычислений виде:

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{X^+(\mu)}{\Lambda^+(\mu)}. \quad (20a)$$

откуда

$$\gamma(\mu) = \frac{c\mu}{2} \frac{1}{(v_0^2 - \mu^2)(1-c)(1-cf_1)X(-\mu)}, \quad (20b)$$

так что для вычисления интегралов, определяющих $\gamma^{(i)}$, достаточно знать функцию $X(\mu)$ на отрезке $-1 \leq \mu \leq 0$. Эту функцию можно найти методом последовательных приближений, исходя из следующего обобщения тождества С:

$$\Omega(z) = 1 - \frac{cv_0^2 z}{2} \int_{-1}^0 \frac{[1 - \mu^2 X^2(0)] d(\mu\mu)}{(v_0^2 - \mu^2)(\mu + z)\Omega(\mu)}, \quad (21)$$

где

$$\Omega(z) = [(1/X(0)) - z] X(z). \quad (22)$$

Значение $X(0)$ получается подстановкой $z = 0$ в формулу (19):

$$X(0) = 1/(v_0 \sqrt{(1-c)(1-cf_1)}). \quad (23)$$

Выбор знака перед корнем определяется тем, что величина $X(0) = e^{\Gamma(0)}$ должна быть положительной.

6.9. Полупространство без поглощения с анизотропным рассеянием [14]

В гл. 5 и в предыдущих разделах настоящей главы был решен ряд задач (особое внимание было уделено задачам для полупространства). В каждом случае мы предполагали, что $c \neq 1$, и, за исключением разд. 6.8, что рассеяние изотропно.

Предельный переход в предыдущих результатах при $c \rightarrow 1$ дает возможность распространить их на случай чистого рассеяния ($c = 1$). Но так как при переходе к пределу необходима осторожность и так как в прошлом этот изолированный случай был предметом интенсивных исследований, возможно, и нам стоит разобрать его отдельно. Так мы и поступим в настоящем разделе. Кроме того, мы рассмотрим здесь более общий закон рассеяния.

Как показано в приложении F, в случае изотропного рассеяния и $c = 1$ два дискретных собственных значения $\pm v_0$ сливаются на бесконечности. Им отвечают вырожденные собственные функции (для $f_1 = 0$):

$$\psi_1(x, \mu) = \frac{1}{2}, \quad (1a)$$

$$\psi_2(x, \mu) = \frac{1}{2}(x - \mu). \quad (1b)$$

В разд. 4.10 мы отмечали, что в случае $c = 1$ и рассеяния не более чем квадратически анизотропного существуют только такие

две регулярные собственные функции. Мы ограничимся этой степенью анизотропии, так как в этом случае вполне проявляются существенные особенности метода; таким образом, в задачах, которые мы будем рассматривать, единственными регулярными собственными функциями будут функции (1).

Итак, интересующее нас уравнение переноса таково:

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') [1 + 5f_2 P_2(\mu') P_2(\mu)] d\mu'. \quad (1c)$$

Не ограничивая общности, можно считать равным нулю коэффициент f_1 при линейном члене в законе рассеяния. Это следует из теоремы, доказываемой ниже (см. формулу (20)).

Поскольку соответствующие теоремы полноты уже были доказаны в разд. 4.10 для общего анизотропного рассеяния, сейчас нам потребуются лишь соотношения ортогональности. Эти соотношения были получены Мак-Кормиком и Кучером [45]. Коэффициент при регулярной собственной функции можно определить из равенства

$$\int_0^1 \varphi_\nu(\mu) \gamma(\mu) d\mu = 0. \quad (2)$$

Далее,

$$\int_0^1 \varphi_\nu(\mu) \left[\varphi_{\nu'}(\mu) + \frac{15}{8} f_2 \nu' (\bar{\nu} - \mu) \right] \gamma(\mu) d\mu = \nu^{-1} \gamma(\nu) N(\nu) \delta(\nu - \nu'), \quad (3a)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2} \left[\varphi_{\nu'}(\mu) + \frac{15}{8} f_2 \nu' (\bar{\nu} - \mu) \right] \gamma(\mu) d\mu = 0, \quad (3b)$$

$$\int_0^1 \left(-\frac{\mu}{2} \right) \left[\varphi_{\nu'}(\mu) + \frac{15}{8} f_2 \nu' (\bar{\nu} - \mu) \right] \gamma(\mu) d\mu = \frac{\nu'}{4\nu^{(0)}(1-f_2)}; \quad (3c)$$

$\gamma^{(i)}$ и $\bar{\nu}$ определяются так же, как в предыдущем разделе. (При выводе этих формул было использовано тождество

$$\left[\varphi_\nu(\mu) + \frac{15f_2\nu F(\mu)(\nu + \bar{\nu})}{8F(\nu)} \right] \frac{1}{F(\mu)} = \left[\varphi_\nu(\mu) + \frac{15}{8} f_2 \nu (\bar{\nu} - \mu) \right] \frac{1}{F(\nu)}.$$

В разд. 4.10 было показано, что собственные функции $\varphi_\nu(\mu)$ непрерывного спектра при $c=1$ имеют вид¹⁾

$$\varphi_\nu(\mu) = \frac{\nu}{2} F(\mu) P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu), \quad (4a)$$

¹⁾ Даже если бы мы не положили $f_1 = 0$, коэффициент f_1 все равно не появился бы в этих формулах, так как $\varphi_{\nu 1} = 0$ при $c = 1$ (ср. (11a) разд. 4.10).

где

$$\lambda(v) = \frac{1}{2} (\Lambda^+(v) + \Lambda^-(v)), \quad (4b)$$

$$\Lambda(z) = 1 - \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{F(\mu)}{z - \mu} d\mu, \quad (4c)$$

$$F(\mu) = 1 - \frac{5f_2}{2} P_2(\mu). \quad (5)$$

Необходимо сделать одно замечание. В этой книге всюду используется обозначение

$$N(v) = v\Lambda^+(v)\Lambda^-(v). \quad (6)$$

Однако нужно помнить, что при изменении степени анизотропии рассеяния меняется определение функции $\Lambda(v)$, а потому меняются нормировочные коэффициенты $N(v)$ собственных функций непрерывного спектра. То же относится и к другим часто встречающимся величинам, например к функции $\gamma(\mu)$.

Как обычно, запишем решение в общем виде:

$$\Psi(x, \mu) = f(x, \mu) + a_{0+}/2 + \int_0^1 A(v) \varphi_v(\mu) e^{-x/v} dv \quad (7)$$

(мы учли, что $\varphi_{0+} = 1/2$). Тогда для проблемы Милна и альбедной задачи ¹⁾

$$f(x, \mu) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \mu) & \text{(Милн),} \\ 0 & \text{(альбедо),} \end{cases} \quad (8a) \quad (8b)$$

$$\Psi(0, \mu) = \begin{cases} 0 & \text{(Милн),} \\ \delta(\mu - \mu_0) & \text{(альбедо), } \mu'_0 > 0. \end{cases} \quad (9a) \quad (9b)$$

Отсюда

$$\psi(\mu) = \begin{cases} \mu/2 & \text{(Милн),} \\ \delta(\mu - \mu_0) & \text{(альбедо).} \end{cases} \quad (10a) \quad (10b)$$

Как обычно, коэффициенты разложения получаем из соотношений ортогональности:

$$a_{0+} = \frac{2}{\gamma^{(0)}} \int_0^1 \psi(\mu') \gamma(\mu') d\mu', \quad (11a)$$

$$A(v) = \int_0^1 \psi(\mu') \frac{v \left[\varphi_v(\mu') + \frac{15}{8} f_2 v (\bar{v} - \mu') \right] \gamma(\mu') d\mu'}{\gamma(v) N(v)}. \quad (11b)$$

¹⁾ Интересно, что функция $\rho_{as}(x)$ в проблеме Милна линейна, а в альбедной задаче постоянна. Это общее свойство для случая $c = 1$.

Угловое распределение выходящего излучения можно найти с помощью подходящей модификации тождества D. В нашем случае такой модификацией будет

$$\int_0^1 \frac{\nu \varphi_\nu(\mu)}{\gamma(\nu) N(\nu)} \left[\varphi_\nu(\mu') + \frac{15}{8} f_2 \nu (\bar{\nu} - \mu') \right] d\nu = \frac{1}{\gamma^{(0)}} - \frac{1}{X(\mu)} \left[\frac{15 f_2 (\mu + \bar{\nu})}{4} + \frac{F(\mu)}{\mu - \mu'} \right], \quad (12)$$

и тогда распределение выходящего излучения примет вид

$$\Psi(0, \mu) = f(0, \mu) - \frac{1}{X(\mu)} \int_0^1 \psi(\mu') \gamma(\mu') \left[\frac{15 f_2 (\mu + \bar{\nu})}{4} + \frac{F(\mu)}{\mu - \mu'} \right] d\mu'. \quad (13)$$

Все эти формулы позволяют выписать выражения для различных интересующих нас величин. С помощью подходящих модификаций тождеств A и B можно, как и раньше, упростить структуру решений. Поэтому мы сначала приведем соответствующие модификации ¹⁾, а затем изложим окончательные результаты, относящиеся к проблеме Милна и к альбедной задаче [44].

Тождество A принимает здесь вид

$$X(z) = \int_0^1 \frac{F(\mu) \gamma(\mu)}{\mu - z} d\mu, \quad (14a)$$

а тождество B преобразуется к виду

$$X(z) X(-z) = \frac{3\Lambda(z)}{1 - f_2}. \quad (14b)$$

Аналогом тождества C будет нелинейное интегральное уравнение для $X(z)$, для которого последовательные приближения сходятся особенно быстро [44]:

$$\Omega(z) = X(z) \left[\frac{1}{X(0)} - z \right] = 1 - \frac{z}{2} \int_{-1}^0 \frac{[1 - \mu^2 X^2(0)] F(\mu)}{\Omega(\mu) (\mu + z)} d\mu. \quad (15a)$$

Здесь $X(0)$ можно найти из формулы (14b), поскольку $\Lambda(0) = 1$

$$X(0) = \sqrt{3/(1 - f_2)}. \quad (15b)$$

Применение приведенных выше результатов приводит к следующим точным формулам [44].

¹⁾ Модификацию тождества D мы уже приводили (формула (12)).

Проблема Милна. В этой задаче

$$a_{0+} = -z_0 = \frac{\int_0^1 [\mu^2 d\mu / X(-\mu)]}{\int_0^1 [\mu d\mu X(-\mu)]}, \quad (16a)$$

$$A(\nu) = -\frac{1}{9} \frac{\nu X(-\nu)}{N(\nu)} (1 - f_2) \left[\int_0^1 \frac{\mu d\mu}{X(-\mu)} \right]^{-1}, \quad (16b)$$

угловое распределение выходящего излучения имеет вид

$$\Psi_0(0, \mu) = \frac{1}{3X(\mu)} \left[\int_0^1 \frac{\mu d\mu}{X(-\mu)} \right]^{-1}, \quad \mu < 0. \quad (17)$$

В табл. 6.6 представлены значения фазовой плотности на границе полупространства для различных степеней анизотропии. Данные, касающиеся экстраполированной длины z_0 , приведены в табл. 6.7. Из таблицы видно, что величина z_0 очень слабо зависит от значения коэффициента f_2 в законе рассеяния. Позже в этом разделе мы покажем, что от коэффициента f_1 величина z_0 , напротив, зависит весьма сильно.

Таблица 6.6

Угловое распределение выходящего излучения в проблеме Милна, нормированное на единицу полного тока (квадратичная анизотропия, $c = 1$)

— μ	$5f_2$				
	0	0,2	0,5	1,0	1,8
0,0	0,43304	0,42755	0,41904	0,40399	0,37649
0,1	0,54034	0,53632	0,53001	0,51837	0,49565
0,2	0,62801	0,62483	0,61986	0,61057	0,59169
0,3	0,71114	0,70890	0,70496	0,69780	0,68287
0,4	0,79191	0,79017	0,78754	0,78242	0,77127
0,5	0,87152	0,87042	0,86886	0,86564	0,85843
0,6	0,95003	0,94953	0,94824	0,94783	0,94474
0,7	1,0277	1,0277	1,0283	1,0289	1,0302
0,8	1,1052	1,1059	1,1074	1,1099	1,1150
0,9	1,1833	1,1846	1,1870	1,1914	1,2014
1,0	1,2592	1,2608	1,2644	1,2707	1,2844

Таблица 6.7

Экстраполированная длина для проблемы Милна
(квадратичная анизотропия, $c = 1$)

f_2	0,0	0,2	0,5	1,0	1,8
z_0	0,7104	0,7108	0,7114	0,7125	0,7148

Альбедная задача. Здесь

$$a_{0+} = \frac{2\mu_0}{X(-\mu_0)} \left[\int_0^1 \frac{\mu d\mu}{X(-\mu)} \right]^{-1}, \quad (18a)$$

$$A(\nu) = \frac{\gamma(\mu_0) [\varphi_\nu(\mu_0) + 15f_2\nu(\bar{\nu} - \mu_0)/8]}{\gamma(\nu) N(\nu)/\nu}, \quad (18b)$$

$$\Psi(0, \mu) = \frac{3\mu_0 [1 + (5f_2/4) - (15f_2/4) \mu\mu_0 - (15/4) (f_2\bar{\nu}(\mu_0 - \mu))]}{2(\mu_0 - \mu) X(\mu) (1 - f_2) X(-\mu_0)}, \quad \mu < 0. \quad (19)$$

Последний результат был также получен Чандрасекаром [43, стр. 172, формула (147)¹].

6.10. Линейно анизотропное рассеяние [44]

Докажем теорему, из которой будет следовать, что в законе рассеяния можно без потери общности положить $f_1 = 0$.

Теорема. Если $\psi(x, \mu)$ — решение уравнения переноса с $c = 1$ и произвольным законом рассеяния

$$f(\Omega \cdot \Omega') = \sum_{l=0}^N \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\Omega \cdot \Omega'),$$

а $\bar{\psi}(x, \mu)$ — решение той же задачи с $f_1 = 0$, то

$$\psi(x, \mu) = \bar{\psi}(x, \mu) + \frac{3f_1}{4\pi} \bar{J}x. \quad (20)$$

Доказательство этой теоремы очень несложно. Сначала напомним, что интегрирование уравнения переноса по μ приводит к соотношению

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} = (c-1) \rho(x), \quad (21)$$

¹) Азимутально симметричный член.

так что при $c = 1$ ток постоянен при любой степени анизотропии. Подстановка равенства (20) в уравнение переноса доказывает теорему.

Из этой теоремы следует, что при $c = 1$ коэффициент f_1 может принимать любое допустимое значение, так что можно без потери общности положить $f_1 = 0$.

В проблеме Милна ток J можно получить, умножая уравнение (7) на $2\pi\mu$ и затем интегрируя по μ :

$$\bar{J} = -2\pi/3 + 2\pi \int_0^1 A(v) e^{-x/v} dv \int_{-1}^1 \mu \varphi_v(\mu) d\mu. \quad (22)$$

Интеграл по μ равен нулю в силу соотношения ортогональности на целом отрезке: функции $\varphi_v(\mu)$ и $\varphi_1 = 1/2$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией μ . Таким образом, собственные функции непрерывного спектра не дают вклада в ток, т. е.

$$\bar{J} = -2\pi/3. \quad (23)$$

Доказанная только что теорема позволяет связать экстраполированную длину $z_0(f_1, f_2, \dots, f_N)$ для произвольного закона рассеяния при $c = 1$ с \bar{z}_0 — той же самой величиной при $f_1 = 0$. Проинтегрируем равенство (7) по μ и учтем формулу (8a)¹⁾. Тогда

$$\bar{\rho}_{as}(x) = 2\pi(x + \bar{a}_{0+}) \quad (24a)$$

и, значит,

$$\bar{z}_0 = -\bar{a}_{0+}. \quad (24b)$$

Теперь из теоремы следует, что

$$\rho_{as}(x) = \bar{\rho}_{as}(x) + 3f_1\bar{J}x, \quad (25)$$

так что

$$z_0 = \frac{\bar{z}_0}{1 + 3f_1\bar{J}/2\pi}, \quad (26a)$$

или

$$z_0 = \frac{\bar{z}_0}{1 - f_1} \quad (26b)$$

(мы воспользовались формулой (23)). В частности, экстраполированная длина для линейно анизотропного рассеяния равна

$$z_0(f_1) = 0,7104.../(1 - f_1). \quad (26c)$$

¹⁾ Хотя она была установлена лишь для квадратичного закона рассеяния, результат (24a) справедлив в общем случае, так как дискретные собственные функции уравнений при $c = 1$ всегда совпадают с функциями (1a) и (1b).

Глава 7

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

7.1. Введение

В предыдущих главах этой книги мы занимались в основном стационарным уравнением переноса. Правда, некоторые общие свойства нестационарных уравнений уже обсуждались (в гл. 2 и приложении D), например, симметрия, существование и единственность решения. В частности, в разд. 2.5 мы показали, как можно получить преобразование Лапласа решения нестационарного уравнения из решения стационарного уравнения, если в последнем заменить σ_a на $\sigma_a + s/v$, где s — переменная преобразования. Эта замена, однако, нетривиальна, поскольку она может привести к появлению отрицательных и даже комплексных сечений, не говоря уже о том, что задача обращения преобразования Лапласа обычно очень трудна.

В настоящей главе мы рассмотрим стационарную задачу с двух различных, хотя и эквивалентных, точек зрения. Первая (изложенная в разд. 7.2) основана на упомянутом выше методе преобразования Лапласа¹⁾. Этот подход приводит к естественному обобщению разложения по сингулярным собственным функциям относительно пространственной переменной, использованного в гл. 4 для стационарной задачи. Ограничиваясь случаем изотропного рассеяния, мы найдем обычный континуум решений и две дискретные моды, хотя (и эта ситуация характерна для нестационарных задач) дискретные моды существуют не для всех значений переменной преобразования. После этого мы наметим доказательство теорем полноты для целого и половинного отрезков, обобщающих теоремы, доказанные в гл. 4. Этому пути следовал Боуден [51, 52], отдельными результатами которого мы здесь воспользуемся.

Второй подход, изложенный в разд. 7.3, включает анализ Фурье уравнения переноса по пространственной переменной с последующим разложением по сингулярным собственным функ-

¹⁾ На самом деле удобнее применять преобразование Лапласа способом, несколько отличным от описанного в разд. 2.5. При этом простая замена $\sigma_a \rightarrow \sigma_a + s/v$ оказывается недостаточной. Это обстоятельство, однако, несущественно, поскольку всю процедуру можно провести и с этой заменой, хотя в целях разложения по нормальным модам она не очень удобна.

циям относительно временной переменной. Этот метод имеет свои достоинства. (Например, целесообразность метода преобразования Фурье очевидна, когда нужно знать зависимость фазовой плотности от времени в заданной точке пространства. С другой стороны, если мы хотим знать пространственное распределение в заданный момент времени, то естественнее применить преобразование Лапласа.) Для этого случая мы докажем теорему полноты лишь для целого отрезка.

В разд. 7.4 мы найдем двумя способами решение задачи Коши для бесконечной среды (функция Грина) и докажем их эквивалентность. В разд. 7.5 мы найдем решение альбедной задачи и приведем некоторые результаты, полученные Боуденом [51] для задачи о плоском слое с импульсным источником.

Наше исследование нестационарных задач будет сжатым: используемый здесь формализм очень сходен с формализмом в стационарном случае. И так как весь ход рассуждений теперь уже знаком читателю, нет необходимости в детальном обсуждении.

7.2. Разложение по нормальным модам относительно пространственной переменной

А. Собственные значения и собственные функции

Начнем с нестационарного односкоростного уравнения переноса с изотропным рассеянием ¹⁾

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu', t) d\mu'. \quad (1)$$

Следуя Боудену [51], умножим уравнение (1) на $e^{(1-s)t}$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞ . Преобразование Лапласа $\psi_s(x, \mu)$ функции $\psi(x, \mu, t)$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\mu \frac{\partial \psi_s(x, \mu)}{\partial x} + s \psi_s(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_s(x, \mu') d\mu'. \quad (2)$$

Функция $\psi(x, \mu, t)$ выражается через ψ_s с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$\psi(x, \mu, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-(1-s)t} \psi_s(x, \mu) ds, \quad (3)$$

¹⁾ Из уравнения (1) видно, что при произвольном c решение (назовем его $\psi^{(c)}$) связано с решением $\psi^{(1)}$ для $c = 1$ соотношением $\psi^{(c)}(x, \mu, t) = c e^{-(1-c)t} \psi^{(1)}(cx, \mu, ct)$. Таким образом, если найдено решение задачи для какого-либо одного значения c , сразу же определяются решения для всех остальных c .

где γ лежит правее всех особенностей подинтегральной функции.

Уравнение (2) по существу совпадает со стационарным уравнением переноса с измененным значением сечения (которое может быть и комплексным). В соответствии с нашим подходом к исследованию стационарной задачи (гл. 4) ищем решение уравнения (2) в виде

$$\psi_s(x, \mu) = e^{-sx/v} \varphi_{v,s}(\mu). \quad (4a)$$

Тогда функция $\varphi_{v,s}$ удовлетворяет уравнению

$$(v - \mu) \varphi_{v,s}(\mu) = \frac{cv}{2s} \int_{-1}^1 \varphi_{v,s}(\mu') d\mu'. \quad (4b)$$

Если выбрать условие нормировки¹⁾

$$\int_{-1}^1 \varphi_{v,s}(\mu) d\mu = 1, \quad (5a)$$

то уравнение (4b) примет вид

$$(v - \mu) \varphi_{v,s}(\mu) = cv/2s. \quad (5b)$$

Это фактически то же самое уравнение, что было получено для $\varphi_v(\mu)$ в стационарном случае (разд. 4.2). Единственное отличие заключается в том, что здесь c заменено на c/s .

Таким образом, результаты гл. 4 можно перенести на наш случай практически без изменений. Решением уравнения (5b) будет

$$\varphi_{v,s}(\mu) = P \frac{cv}{2s} \frac{1}{v - \mu} + \lambda_s(v) \delta(\mu - v), \quad (6a)$$

где v принадлежит континууму собственных значений, т. е.

$$-1 \leq v \leq 1, \quad (6b)$$

и

$$\lambda_s(v) = 1 - \frac{cv}{2s} P \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v - \mu}. \quad (6c)$$

Заметим, что $\lambda_s(v) \rightarrow \lambda(v)$ при $s \rightarrow 1$, где $\lambda(v)$ — соответствующая величина для стационарной задачи. Это, разумеется, согласуется с уравнением (3).

Кроме континуума собственных значений, мы получаем дискретный набор собственных значений v_i при $v \notin [-1, 1]$ с соответствующими собственными функциями

$$\varphi_{v_i,s} = \frac{cv_i}{2s} \frac{1}{v_i - \mu}. \quad (7a)$$

¹⁾ Как и в стационарной задаче, нетрудно убедиться в том, что такая нормировка возможна всегда, за исключением случая $s = 0$, которым мы здесь не интересуемся.

Собственные значения v_i являются нулями дисперсионной функции $\Lambda_s(z)$:

$$\Lambda_s(v) = 1 - \frac{cv}{2s} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{v-\mu}, \quad (7b)$$

или

$$\Lambda_s(v) = 1 - \frac{cv}{s} \operatorname{Arth} \frac{1}{v}. \quad (7c)$$

Как и раньше, $\lambda_s(v)$ и граничные значения функции $\Lambda_s(v)$ связаны между собой:

$$\Lambda_s^\pm(v) = \lambda_s(v) \pm \pi icv/2s. \quad (8)$$

Напомним, что в стационарном случае функция $\Lambda_s(v)$ имела два нуля в точках $\pm v_0(c)$. В рассматриваемом случае это не

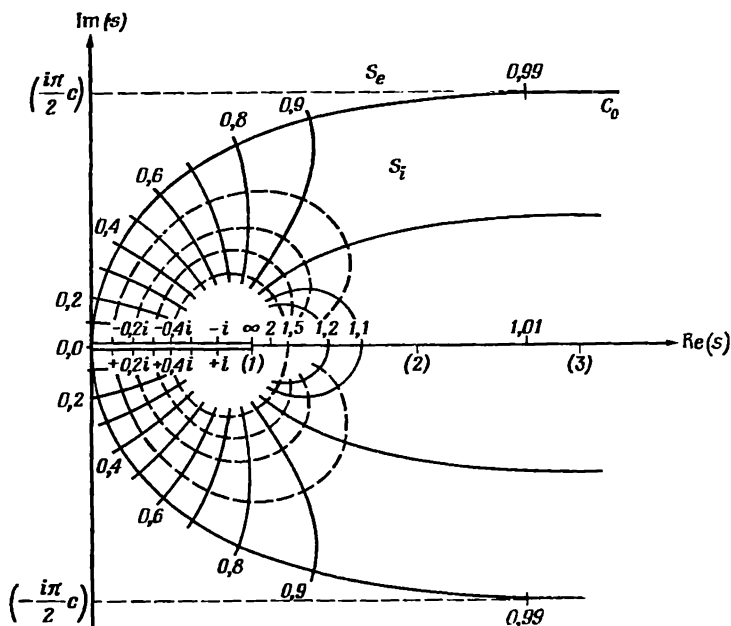


Рис. 7.1. Значения $v_0(s)$ как функции от комплексной переменной s . Значения s указаны в скобках. Вдоль сплошных линий постоянна величина $\operatorname{Re}[v_0(s)]$, вдоль штриховых — величина $\operatorname{Im}[v_0(s)]$.

всегда так. В зависимости от значений s и c функция $\Lambda_s(v)$ имеет либо два нуля (когда s лежит внутри области S_i , ограниченной контуром C_0), либо не имеет ни одного (в противном случае; рис. 7.4). (Указанный контур C_0 является просто конформным отображением разреза $0 \leq v \leq 1$, осуществляемым функцией

$c\nu \operatorname{Arth} \nu^{-1}$.) Обозначим эти нули через $\pm \nu_0(s)$, а соответствующие собственные функции — через $\varphi_{0\pm, s}$ (см. формулу (7a)). Итак, функция $\Lambda_s(\nu)$ имеет два нуля $\pm \nu_0(s)$ при $s \in S_i$ и не имеет нулей в противном случае. На контуре C_0

$$\operatorname{Re} s = c \operatorname{Arth} \nu, \quad \operatorname{Im} s = \pi c \nu / 2, \quad 0 \leq \nu \leq 1.$$

Заметим, что независимо от значения c контур C_0 всегда охватывает действительную ось; по этой причине в стационарном случае всегда есть дискретные корни.

Предельными значениями для $\nu_0(s)$ будут

$$\nu_0(s) \rightarrow [s/3(s-c)]^{1/2}, \quad s \rightarrow c, \quad (9a)$$

$$\nu_0(s) \rightarrow \pi i c s / 2, \quad s \rightarrow 0. \quad (9b)$$

Собственные функции $\varphi_{\nu_i, s}$ можно записать в виде

$$\varphi_{0\pm, s} = \frac{c \nu_0}{2s} \frac{1}{\nu_0 \pm \mu}. \quad (10)$$

Здесь для удобства опущен аргумент функции $\nu_0(s)$. Как и в стационарном случае (разд. 4.5), различные моды ортогональны:

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{\nu', s}(\mu) \varphi_{\nu, s}(\mu) d\mu = 0, \quad \nu \neq \nu', \quad (11)$$

где либо ν , либо ν' , либо обе величины вместе могут принадлежать как непрерывному, так и дискретному спектру. При $\nu = \nu'$

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{0\pm, s}^2 d\mu = N_{0\pm}(s), \quad (12a)$$

где

$$N_{0\pm}(s) = \pm \frac{c \nu_0^2}{2s} \left[\frac{c}{s} \frac{\nu_0}{\nu_0^2 - 1} - \frac{1}{\nu_0} \right]. \quad (12b)$$

Если ν и ν' принадлежат непрерывному спектру, то

$$\int_{-1}^1 \mu \varphi_{\nu}(\mu) \varphi_{\nu'}(\mu) d\mu = N_s(\nu) \delta(\nu - \nu'), \quad (13a)$$

где

$$N_s(\nu) = \nu [\lambda_s^2(\nu) + (\pi c \nu / 2s)^2] \equiv \nu g_s(c, \nu). \quad (13b)$$

В. Теорема полноты для целого отрезка

Теорема. Функцию $\psi(\mu)$ из класса G , заданную на целом отрезке $-1 \leq \mu \leq 1$, можно разложить в ряд по функциям непрерывного спектра $\varphi_{\nu, s}(\mu)$ при $s \notin S_i$ (см. рис. 7.1). При $s \in S_i$, когда дисперсионная функция $\Lambda_s(\nu)$ имеет два нуля, эту систему следует дополнить двумя дискретными модами $\varphi_{0\pm}(s)$.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство аналогичной теоремы для стационарного случая (разд. 4.5). Единственное отличие состоит в том, что все фигурирующие здесь величины нужно снабдить индексом s . В результате мы приходим к формуле для $n_s(z)$, аналогичной формуле (11) разд. 4.6:

$$n_s(z) = \frac{1}{\Lambda_s(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{c\mu}{2} \frac{\Psi'(\mu)}{\mu - z} d\mu. \quad (14)$$

Поскольку, как и в разд. 4.6, требуется, чтобы $n_s(z)$ была аналитической функцией в комплексной плоскости z с разрезом вдоль отрезка действительной оси $[-1, 1]$, необходимо, чтобы интеграл в формуле (14) стремился к нулю одновременно с $\Lambda(z)$. При $s \in S_i$ (рис. 7.1) это приводит к появлению в разложении двух дискретных корней, а при $s \notin S_i$ функция $n(z)$ уже обладает нужными свойствами, так что вводить дискретные члены нет необходимости. Тем самым теорема доказана.

С. Теорема полноты для половинного отрезка

С помощью теоремы полноты для целого отрезка можно решать задачи во всем пространстве. Однако для решения задач в полупространстве требуется теорема полноты для половинного отрезка. Сформулируем эту теорему, которая представляет собой обобщение теоремы, доказанной в разд. 4.8:

Теорема. Функцию $\psi(\mu)$ из класса G , заданную на половинном отрезке $0 \leq \mu \leq 1$ (или $-1 \leq \mu \leq 0$), можно разложить в ряд по функциям непрерывного спектра $\varphi_{\nu, s}(\mu)$, $0 \leq \nu \leq 1$ (или $-1 \leq \nu \leq 0$) при $s \notin S_i$. При $s \in S_i$ эту систему следует дополнить одной дискретной модой $\varphi_{0\pm, s}$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы для стационарного случая (разд. 4.8). Оно связано с построением функций $X_s(z)$, граничные значения которой удовлетворяют условию

$$X_s^+(\mu)/X_s^-(\mu) = \Lambda_s^+(\mu)/\Lambda_s^-(\mu) \quad (15)$$

и которая аналитична в комплексной плоскости с разрезом от 0 до 1 (или от -1 до 0), а не от -1 до 1. Кроме того, требуется, чтобы функция $X_s(\nu)$ не обращалась в нуль в плоскости с разрезом и была ограничена на бесконечности. Легко проверить, что функция

$$X_{0s}(z) = \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\mu' - z} \ln \frac{\Lambda_s^+(\mu')}{\Lambda_s^-(\mu')} d\mu' \right] \quad (16)$$

удовлетворяет условию (15).

Исследуем поведение $X_{0s}(z)$ в окрестности концов отрезка $[0, 1]$ (соответственно $[-1, 0]$.) Обозначим эти концы через α и β , $\alpha < \beta$. Тогда

$$X_{0s}(z) \sim (a - z)^{-\tau_s(\alpha)}, \quad z \simeq \alpha, \quad (17a)$$

и
$$X_{0s}(z) \sim (\beta - z)^{-\tau_s(\beta)}, \quad z \simeq \beta, \quad (17b)$$

где
$$\tau_s(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{\Lambda_s^+(z)}{\Lambda_s^-(z)}. \quad (17c)$$

Заметим, что в противоположность стационарному случаю здесь $\Lambda^+ \neq (\Lambda^-)^*$. Поэтому, вообще говоря, $\tau(z)$ — комплексное число. Вблизи точек $z = \alpha$ и $z = \beta$ значения $X_0(z)$ определяются

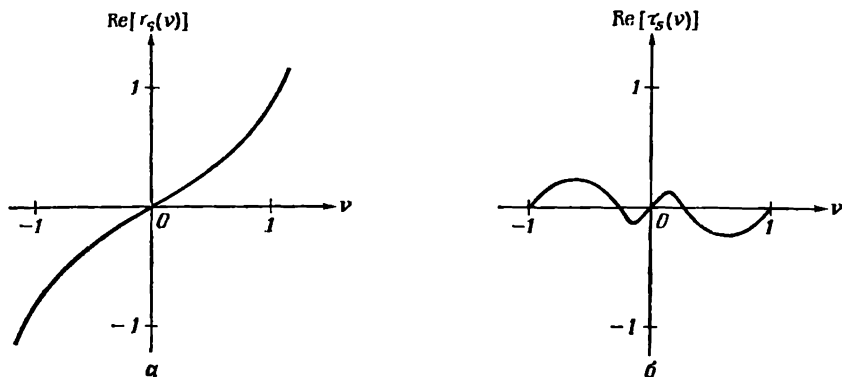


Рис. 7.2. Функция $\operatorname{Re} [\tau_s(v)]$ для двух характерных случаев: (а) $s \in S_i$; (б) $s \notin S_i$.

действительной частью τ . На рис. 7.2 представлена зависимость $\operatorname{Re} [\tau_s(v)]$ от v для случаев $s \in S_i$ и $s \notin S_i$ ¹⁾. Из рисунка нетрудно заключить, что $X_{0s}(v)$ имеет нули при $z = \pm 1$ в случае $s \in S_i$ и принимает равные значения на концах отрезка $[\alpha, \beta]$ при $s \notin S_i$. Таким образом, в силу рассуждений, проведенных в разд. 4.8, для случая половинного отрезка потребуется одно дискретное слагаемое при $s \in S_i$ и ни одного — при $s \notin S_i$. Этим завершается доказательство теоремы полноты для половинного отрезка. Коэффициенты разложения определяются по формулам, аналогичным формулам для стационарной задачи.

Все полученные здесь результаты, а также многие детали можно найти в диссертации Боудена [51].

¹⁾ Случай, когда s лежит на контуре C_0 , ограничивающем S_i , вызывает незначительные затруднения, на которых нет необходимости здесь останавливаться.

1.3. Разложение по нормальным модам относительно временной переменной

А. Собственные значения и собственные функции

Выбранный здесь подход состоит в проведении преобразования Фурье уравнения переноса по координате x и последующем разложении нестационарного уравнения по нормальным (сингулярным) модам. Итак, введем функцию

$$\psi_k(\mu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, \mu, t) e^{-ikx} dx. \quad (1)$$

Функция $\psi(x, \mu, t)$ выражается через $\psi_k(\mu, t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\psi(x, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(\mu, t) e^{ikx} dk. \quad (2)$$

Возьмем преобразование Фурье от нестационарного уравнения переноса (уравнение (1) разд. 7.2):

$$\frac{\partial \psi_k(\mu, t)}{\partial t} + (1 + ik\mu) \psi_k = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_k(\mu', t) d\mu'. \quad (3)$$

Будем считать k фиксированным (действительным) параметром. Тогда в силу инвариантности относительно сдвига по времени можно предположить, что решение имеет вид

$$\psi_k(\mu, t) = \varphi_{\alpha, k}(\mu) e^{-(1+ik\alpha)t}. \quad (4)$$

Из соотношений (3), (4) получаем уравнение для $\varphi_{\alpha, k}$:

$$(\alpha - \mu) \varphi_{\alpha, k}(\mu) = \frac{ic}{2k} \int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, k}(\mu') d\mu'. \quad (5)$$

Если функция $\varphi_{\alpha, k}$ нормирована обычным образом, т. е.

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, k}(\mu') d\mu' = 1, \quad (6)$$

то из уравнения (5) находим

$$\varphi_{\alpha, k}(\mu) = \frac{ic}{2k} P \frac{1}{\alpha - \mu} + \bar{\lambda}_k(\alpha) \delta(\mu - \alpha). \quad (7)$$

Пусть сначала $\alpha \notin [-1, 1]$. Тогда

$$\Phi_{\alpha, k}(\mu) = \frac{ic}{2k} \frac{1}{\alpha_{0k} - \mu}. \quad (8a)$$

Здесь α_{0k} определяется из условия нормировки (6) и удовлетворяет трансцендентному уравнению

$$\bar{\Lambda}_k(\alpha) = 1 + \frac{ic}{2k} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu - \alpha} = 1 - \frac{ic}{k} \operatorname{Arth} \frac{1}{\alpha} = 0. \quad (8b)$$

Функция $\bar{\Lambda}_k(\alpha)$ аналитична в комплексной α -плоскости с разрезом вдоль отрезка действительной оси $[-1, 1]$.

Если $\alpha \in [-1, 1]$, то собственные функции имеют вид (7), а $\bar{\Lambda}$ определяется из условия нормировки

$$\bar{\Lambda}_k(\alpha) = \frac{1}{2} [\bar{\Lambda}_k^+(\alpha) + \bar{\Lambda}_k^-(\alpha)]. \quad (9)$$

Чтобы определить число нулей дисперсионной функции $\bar{\Lambda}_k(\alpha)$, заметим, что значение α , при котором $\bar{\Lambda}_k(\alpha) = 0$, можно вычислить по формуле (8b):

$$\alpha = ic \operatorname{tg}(k/c). \quad (10)$$

Рассматривая функцию (10) как отображение плоскости k в плоскость α , видим, что полоса

$$|\operatorname{Re} k| < \pi c/2 \quad (11)$$

переходит во всю плоскость α с разрезом. Таким образом, если k выбрано внутри полосы (11), то существует одно и только одно значение α (назовем его α_0), при котором $\bar{\Lambda}_k(\alpha) = 0$. При $|\operatorname{Re} k| > \pi c/2$ функция $\bar{\Lambda}_k(\alpha)$ нулей не имеет. Поскольку нас интересуют только действительные k , мы заключаем, что $\bar{\Lambda}_k(\alpha)$ имеет один нуль при $|k| < \pi c/2$ и ни одного нуля в противном случае. Более того, из формулы (10) видно, что α — чисто мнимая величина, причем $\operatorname{Im} \alpha > 0$ при $k > 0$ и $\operatorname{Im} \alpha < 0$ при $k < 0$, и что $\alpha_{0k} = -\alpha_{0, -k}$. Отсюда следует, что ika — отрицательное действительное число. Тогда, согласно (4), решение всегда будет убывать медленнее, чем e^{-t} . Действительно, нетрудно показать, что решение как функция времени заключено между экспонентами e^{-t} и $e^{-(1-c)t}$, отвечающими процессам чистого рассеяния и чистого поглощения.

При малых и больших значениях k/c имеем соответственно:

$$\frac{\alpha_{0k}}{i} = \frac{c}{k} - \frac{k}{3c} + O\left(\frac{k}{c}\right)^3, \quad \frac{k}{c} \simeq 0, \quad (12a)$$

$$\frac{\alpha_{0k}}{i} = \frac{\pi}{2} - \frac{k}{c} + \dots, \quad \frac{k}{c} \simeq \frac{\pi}{2}. \quad (12b)$$

Из уравнения (5), определяющего $\varphi_{\alpha, k}$, сразу же следует, что функции $\varphi_{\alpha, k}$ ортогональны:

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, k}(\mu) \varphi_{\alpha', k}(\mu) d\mu = 0, \quad \alpha \neq \alpha'. \quad (13)$$

(Заметим, что весовая функция μ в данном случае равна 1.) Нормировочные интегралы найти легко. При $\alpha = \alpha_{0k}$ непосредственное интегрирование дает

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha_{0k}, k}^2(\mu) d\mu = \frac{c^2}{4k^2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{(\alpha_{0k} - \mu)^2}, \quad (14a)$$

откуда

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha_{0k}, k}^2(\mu) d\mu = -\frac{c^2}{2k^2} \frac{1}{1 - \alpha_{0k}^2} \equiv N_{\alpha_0}(k). \quad (14b)$$

Для $\alpha \in [-1, 1]$ следует повторить процедуру, использованную в разд. 4.5 (т. е. привлечь формулу Пуанкаре — Бертрана). Тогда

$$\int_{-1}^1 \varphi_{\alpha, k}(\mu) \varphi_{\alpha', k}(\mu) d\mu = N(\alpha, k) \delta(\alpha - \alpha'), \quad (15a)$$

где

$$N(\alpha, k) = \bar{\lambda}^2(\alpha, k) - c^2 \pi^2 / 4k^2. \quad (15b)$$

Функция $\bar{\lambda}_k(\alpha)$ определяется формулой (9). В явном виде

$$\bar{\lambda}_k(\alpha) = 1 - \frac{ic}{k} \operatorname{Arth} \alpha. \quad (16)$$

В. Теорема полноты для целого отрезка

Теорема. Функцию $\psi(\mu)$ из класса G , заданную на целом отрезке $-1 \leq \mu \leq 1$, можно разложить в ряд по функциям непрерывного спектра $\varphi_{\alpha, k}$ для любого k , для которого $|k| > \pi/2$. При $|k| < \pi/2$ эту систему следует дополнить одной дискретной модой $\varphi_{\alpha_0, k}$.

Доказательство проводится обычным образом с некоторыми незначительными изменениями. Мы снова дадим лишь набросок доказательства, отсылая читателя за деталями к разд. 4.5. Итак, попытаемся найти разложение в виде

$$\psi(\mu) = \int_{-1}^1 A(\alpha, k) \varphi_{\alpha, k}(\mu) d\mu, \quad (17a)$$

п.п. записывая $\varphi_{\alpha, k}$ в явной форме,

$$\psi(\mu) = \frac{ic}{2k} P \int_{-1}^1 A(\alpha, k) \frac{1}{\alpha - \mu} d\mu + \bar{\lambda}_k(\mu) A(\mu, k). \quad (17b)$$

При этом функция $n(z, k)$ задается формулой

$$n(z, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{ic}{2k} \frac{A(\alpha, k)}{\alpha - z} d\alpha. \quad (18)$$

Мы видим, что $n(z, k)$ аналитична в плоскости с разрезом и убывает на бесконечности, как z^{-1} . Используя определение функции $\bar{\Lambda}^{\pm}$ (формула (9)), перепишем (17) в виде

$$\frac{ic}{2k} \psi(\mu) = \bar{\Lambda}_k^+(\mu) n^+(\mu, k) - \bar{\Lambda}_k^-(\mu) n^-(\mu, k). \quad (19)$$

Это уравнение называется уравнением Гильберта. Его решение хорошо известно (разд. 4.5):

$$n(z, k) = \frac{1}{\Lambda_k(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{ic}{2k} \frac{\psi(\mu, k)}{\mu - z} d\mu. \quad (20)$$

При $|k| > \pi/2$ функция $\bar{\Lambda}_k(z)$ не имеет нулей. Поэтому функция $n(z, k)$ обладает нужными свойствами, так что коэффициенты разложения $A(\alpha, k)$ существуют и связаны с $n(z, k)$ соотношением (18). При $|k| < \pi/2$, как мы уже показали, $\Lambda_k(z)$ имеет один нуль. В этом случае для обращения в нуль при $z = \alpha_{0k}$ числителя в выражении, определяющем $n(z, k)$, можно использовать одну дискретную собственную функцию $\varphi_{\alpha_{0k}, k}$. Это и обеспечивает нужные свойства функции $n(z, k)$.

Тем самым теорема доказана. Коэффициенты разложения можно найти из соотношений ортогональности (14) и (15).

С. Полнота для половинного отрезка

Задачи для полупространства проще всего решаются методом, изложенным в разд. 7.2, т. е. методом разложения по нормальным модам относительно пространственной переменной¹⁾. Поэтому мы не будем доказывать здесь теорему полноты для половинного отрезка. Однако такая теорема есть, доказательство ее принадлежит Кучеру²⁾.

¹⁾ В силу того, что изложенный в настоящем разделе метод, основанный на преобразовании Фурье по пространственной переменной, не очень приспособлен к решению задач для полупространства.

²⁾ Частное сообщение.

7.4. Функция Грина для задачи Коши в случае бесконечной среды

Найдем фазовую плотность нейтронов в бесконечной среде, обусловленную мононаправленным импульсным плоским источником нейтронов, действующим в момент $t = 0$. Иными словами, мы будем искать функцию Грина уравнения

$$\frac{\partial \psi_g(x, \mu, t; 0, \mu_0, 0)}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi_g}{\partial x} + \psi_g = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_g(x, \mu', t; 0, \mu_0, 0) d\mu' + \delta(x) \delta(t) \delta(\mu_0 - \mu). \quad (1)$$

Для простоты мы поместили источник в плоскости $x = 0$.

Ниже, в части А, мы воспользуемся методом, изложенным в разд. 7.2, а именно методом преобразования Лапласа по временной переменной t с последующим разложением по сингулярным собственным функциям относительно пространственной переменной x . В части В мы будем следовать методу разд. 7.3, который заключается в преобразовании Фурье уравнения (1) по x и последующем разложении по сингулярным собственным функциям относительно t . Наконец, в части С мы покажем идентичность результатов, полученных этими способами. Всюду рассматривается лишь случай $c \leq 1$, так что решения должны стремиться к нулю при $x \rightarrow \pm\infty$.

А. Разложение по нормальным модам относительно переменной x

Как уже говорилось, начнем с преобразования Лапласа по переменной t ¹⁾:

$$\psi_s(x, \mu) = \int_0^\infty \psi_g(x, \mu, t) e^{(1-s)t} dt. \quad (2)$$

Будем считать, что $\psi_s(x, \mu)$ существует при $\operatorname{Re} s > c$ ²⁾.

Функция ψ_g выражается через ψ_s с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$\psi_g(x, \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \psi_s(x, \mu, t) e^{-(1-s)t} ds, \quad (3)$$

¹⁾ Для краткости мы не будем указывать явно зависимость от параметров источника.

²⁾ Это можно обосновать разными способами. Например, в разд. 7.2 мы отмечали, что нестационарная задача в некотором смысле эквивалентна стационарной, если заменить c на c/s . Тогда требование $\operatorname{Re} s > c$ эквивалентно требованию $c < 1$ для стационарной задачи.

где γ лежит правее всех особых точек функции ψ_s . (Как мы увидим, потребуется, чтобы было $\gamma > c$.)

Взяв преобразование Лапласа от уравнения (1) (т. е. умножив его на $e^{(1-s)t}$ и проинтегрировав затем по t от 0 до ∞), мы обнаружим, что функция $\psi_s(x, \mu)$, задаваемая формулой (2), всюду, за исключением точки $x = 0$, удовлетворяет тому же однородному уравнению, что и собственные функции $\varphi_{s, \nu}(\mu) e^{-sx/\nu}$, о которых шла речь в разд. 7.2. В точке $x = 0$ наличие источника приводит к разрыву:

$$\psi_s(0+, \mu) - \psi_s(0-, \mu) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{\mu}. \quad (4)$$

Граничные условия при $x \rightarrow \pm \infty$ вместе с условием полноты системы собственных функций позволяют представить $\psi_s(x, \mu)$ в виде

$$\psi_s(x, \mu) = \int_0^1 A_s(\nu) \varphi_{\nu, s} e^{-sx/\nu} d\nu + a_{s+} \varphi_{0+, s}(\mu) e^{-sx/\nu_0}, \quad x > 0, \quad (5a)$$

и

$$\psi_s(x, \mu) = - \int_{-1}^0 A_s(\nu) \varphi_{\nu, s} e^{-sx/\nu} d\nu - a_{s-} \varphi_{0-, s}(\mu) e^{sx/\nu_0}, \quad x < 0, \quad (5b)$$

где $\operatorname{Re} \nu_0 > 0$. Эти формулы справедливы при $s \in S_i$ (рис. 7.1). При $s \notin S_i$ дискретные слагаемые отсутствуют. Условие скачка (4) определяет коэффициенты $A_s(\nu)$ и $a_{s\pm}^1$:

$$\delta(\mu - \mu_0)/\mu = \int_{-1}^1 A_s(\nu) \varphi_{\nu, s}(\mu) d\nu + a_{s+} \varphi_{0+, s}(\mu) + a_{s-} \varphi_{0-, s}(\mu). \quad (6)$$

С помощью соотношений ортогональности (разд. 7.2) получаем

$$a_{s\pm} = \begin{cases} \varphi_{0\pm, s}(\mu_0)/N_{0\pm}(s), & s \in S_i, \\ 0, & s \notin S_i, \end{cases} \quad (7a)$$

$$A_s(\nu) = \varphi_{\nu, s}(\mu_0)/N_s(\nu), \quad (7b)$$

где $N_{0\pm}$ и $N_s(\nu)$ найдены в разд. 7.2:

$$N_{0\pm}(s) = \pm \frac{c\nu_0^2}{2s} \left[\frac{c}{s} \frac{\nu_0}{\nu_0^2 - 1} - \frac{1}{\nu_0} \right] = \pm \nu_0 \frac{d\Lambda}{d\nu} \Big|_{\nu=\nu_0}, \quad (8a)$$

$$N_s(\nu) = \nu [\lambda_s^2(\nu) + (\pi c \nu / 2s)^2]. \quad (8b)$$

Подставив эти результаты в формулы (5), найдем $\psi_s(x, \mu)$.

¹⁾ Аналогия со стационарной задачей, рассмотренной в разд. 5.2, очевидна.

Для того чтобы обратить преобразование Лапласа по формуле (3), заметим (см. рис. 7.1 или формулу (9а) разд. 7.2), что функция $v_0(s)$ имеет точку ветвления при $s = c$. Из формул (5) видно, что такой же особенностью обладает и функция $\psi_s(x, \mu)$. Если сделать разрез вдоль отрезка $0 \leq s \leq c$, то придется потребовать, чтобы в формуле (3) было $\gamma > c$.

Если теперь мы хотим сдвинуть контур интегрирования в формуле (3), чтобы получить результат в более удобном виде, необходимо прежде всего убедиться в том, что мы при этом не пересечем особых точек функции $\psi_s(x, \mu)$ в комплексной плоскости s . На первый взгляд кажется, что функция $\psi_s(x, \mu)$ претерпевает

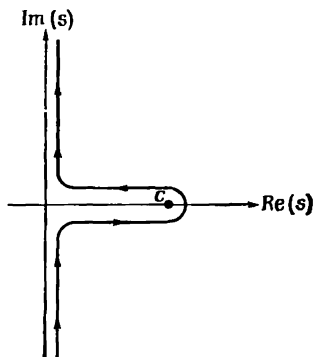


Рис. 7.3. Контур при вычислении обращения преобразования Лапласа.

разрыв, когда s пересекает границу C_0 (рис. 7.1), поскольку при этом дискретное слагаемое обращается в нуль. Следует, однако, принять во внимание, что в подинтегральной функции в формулах (5) при $v = v_0$ множитель $N_s^{-1}(v) = [\nu \Lambda_s^+(v) \Lambda_s^{-1}(v)]^{-1}$ имеет полюс в плоскости s . (Точка $v = v_0$ лежит как раз в интервале $(0, 1)$.) Наличие этого полюса приводит к тому, что интегралы в формулах (5) (с учетом (7b)) при пересечении точкой s контура C_0 изменяют свои значения на величину, равную произведению $2\pi i$ на вычет подинтегральной функции. Поскольку $N_{0\pm}(s) = \pm v_0 \Lambda'(v_0)$, это изменение интеграла в точности компенсирует упомянутый выше разрыв, так что в итоге при пересечении точкой s контура C_0 функция ψ_s остается непрерывной и, следовательно, аналитической.

Еще одна трудность возникает из-за наличия полюсов у слагаемых в формулах (5) в тех точках s контура C_0 , где $v_0(s) = \mu$ или $v_0(s) = \mu_0$. Подобно тому, как это было сделано выше, можно показать, что суммарный вклад от этих полюсов также равен нулю. Итак, функция $\psi_s(x, \mu)$ регулярна во всей правой полуплоскости $\text{Re } s > 0$, за исключением разреза $0 \leq s \leq c$, проходящего через точку ветвления.

В силу всего вышесказанного можно деформировать контур интегрирования в формуле (3), как показано на рис. 7.3. Тем самым интеграл сводится к сумме двух интегралов, один из которых берется вдоль мнимой оси, а другой — вдоль интервала $0 < s < c$. Окончательно получаем

$$\begin{aligned} \psi_g(x, \mu, t) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left[\int_0^{\pm 1} \frac{\varphi_{v, s}(\mu_0) \varphi_{v, s}(\mu)}{N_s(v)} e^{-sx/v} \right] e^{-(1-s)t} ds + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_0^c \left[\frac{\varphi_{0-, s}(\mu_0) \varphi_{0-, s}(\mu)}{N_{0-}(s)} e^{sx/v_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\varphi_{0+, s}(\mu_0) \varphi_{0+, s}(\mu)}{N_{0+}(s)} e^{-sx/v_0} \right] e^{-(1-s)t} ds, \quad (9) \end{aligned}$$

где знак $+$ в верхнем пределе интеграла по v относится к случаю $x > 0$, а знак $-$ относится к случаю $x < 0$. Подинтегральная функция в первом члене не содержит дискретного слагаемого из разложения функции $\psi_s(x, \mu)$, так как мнимые значения s лежат вне S_i . Напротив, во втором интеграле присутствуют только дискретные члены, поскольку, как нетрудно видеть, вклады континуума собственных функций, относящиеся к разным сторонам разреза, взаимно уничтожаются. (Описанная ситуация типична для задач о бесконечной среде и не встречается в задачах о плоском слое или полупространстве.)

В. Разложение по нормальным модам относительно переменной t

Этот подход связан с преобразованием Фурье по x :

$$\psi_h(\mu, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_g(x, \mu, t) e^{-ikhx} dx. \quad (10)$$

Функция ψ_g выражается через ψ_h с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\psi_g(x, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_h(\mu, t) e^{ikhx} dx. \quad (11)$$

Умножив уравнение (1) на e^{-ikhx} и проинтегрировав по x от $-\infty$ до $+\infty$, приходим к уравнению для ψ_h , аналогичному однородному уравнению, которому удовлетворяет полная система собственных функций $\varphi_{\alpha, h}(\mu) e^{-(1+ikh\alpha)t}$, $t > 0$ (уравнение (3) разд. 7.3). При $t = 0$ получаем начальное условие

$$\psi_h(\mu, 0) = \delta(\mu - \mu_0). \quad (12)$$

Упомянутая только что аналогия подсказывает разложение

$$\psi_k(\mu, t) = a_{0k} \varphi_{\alpha_{0k}, k}(\mu) e^{-(1+i\alpha_{0k})t} + \int_{-1}^1 a(\alpha, k) \varphi_{\alpha, k}(\mu) e^{-(1+i\alpha)k} d\alpha. \quad (13)$$

(Дискретное слагаемое присутствует только при $|k| < \pi/2$.)

Коэффициенты a_{0k} и $a(\alpha, k)$ определяются из соотношений ортогональности:

$$a(\alpha, k) = \varphi_{\alpha, k}(\mu_0)/N(\alpha, k), \quad (14)$$

$$a_{0k} = \begin{cases} \varphi_{\alpha_{0k}, k}(\mu_0)/N_{\alpha_0}(k), & |k| < \pi/2, \\ 0, & |k| > \pi/2. \end{cases} \quad (15)$$

Из формул (13) — (16) предыдущего раздела находим

$$\begin{aligned} \psi_g(x, \mu, t) = & \frac{e^{-t}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \int_{-1}^1 d\alpha \frac{\varphi_{\alpha, k}(\mu_0) \varphi_{\alpha, k}(\mu)}{N(\alpha, k)} e^{-i\alpha kt} + \right. \\ & \left. + \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} dk \frac{e^{ikx}}{N_0(k)} \varphi_{\alpha_{0k}, k}(\mu_0) \varphi_{\alpha_{0k}, k}(\mu) e^{-i\alpha_{0k}kt} \right]. \quad (16) \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $|k| > \pi/2$ дискретное слагаемое отсутствует.

Плотность нейтронов, обусловленную плоским изотропным источником, можно получить, умножая (16) на 2π и интегрируя по μ и μ_0 . Условие нормировки функций $\varphi_{\alpha, k}(\mu)$ (формула (6) разд. 7.3) дает

$$\rho(x, t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk \left[\int_{-1}^1 d\alpha \frac{e^{-i\alpha kt}}{N(\alpha, k)} + \frac{e^{-i\alpha_{0k}kt}}{N_{\alpha_0}} \right]. \quad (17)$$

Заметим, что для собственных функций непрерывного спектра α — действительное число, так что эти функции убывают как e^{-t} . Дискретные собственные функции при заданном k всегда убывают медленнее¹⁾, и потому именно они определяют асимптотику (точно так же, как в стационарном случае). Действительно, вклад от гармоник Фурье при $k = 0$ сохраняется и для больших значений t . При $t \rightarrow \infty$

$$\rho(x, t) \sim e^{-(1-c)t}; \quad (18)$$

как и следовало ожидать, при $c > 1$ плотность возрастает, а при $c < 1$ стремится к нулю с ростом t .

¹⁾ Поскольку α_{0k} — чисто мнимая величина и $-ika_{0k} < c$ (см. формулы (12) разд. 7.3). Напомним, что мы ограничились случаем $c < 1$.

Вернемся к формуле (16) и покажем, что интервал интегрирования по α можно заменить на $(0, 1)$ при $x > 0$ и $(-1, 0)$ при $x < 0$. Для этого достаточно заметить, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\varphi_{\alpha, k}(\mu_0) \varphi_{\alpha, k}(\mu)}{N(\alpha, k)} e^{ikh(x-\alpha t)} = 0, \quad x\alpha < 0 \quad (19)$$

(напомним, что здесь всюду $t > 0$). Для того чтобы доказать справедливость соотношения (19), например для $x > 0, \alpha < 0$ (те же рассуждения можно провести для $x < 0, \alpha > 0$), замкнем контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости комплексной переменной k . Это можно сделать, поскольку подинтегральная функция аналитична по k (по тем же причинам, что и функция $\psi_s(x, \mu)$) и равна нулю на полуокружности (так как $x - \alpha t > 0$). Таким образом, интеграл в формуле (19) равен произведению $2\pi i$ на сумму вычетов подинтегральной функции во всех полюсах, расположенных в верхней полуплоскости переменной k ¹⁾. Такими полюсами будут нули функции

$$N(\alpha, k) = [k - ic \operatorname{Arth} \alpha]^2 - (\pi c/2)^2. \quad (20a)$$

Легко видеть, что $N(\alpha, k) = 0$ в точках

$$k = \pm \pi c/2 + ic \operatorname{Arth} \alpha. \quad (20b)$$

Поскольку $\alpha < 0$, оба эти корня лежат в нижней полуплоскости. Следовательно, подинтегральная функция в (19) не имеет полюсов в верхней полуплоскости и, значит, интеграл равен нулю. Поэтому формулу (16) можно переписать в форме, которая окажется полезной при доказательстве эквивалентности двух выражений для ψ_g , а именно (16) и (9):

$$\begin{aligned} \psi_g(x, \mu, t) = & \pm \frac{e^{-t}}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{ikx} \int_0^{\pm 1} d\alpha \frac{\varphi_{\alpha, k}(\mu_0) \varphi_{\alpha, k}(\mu)}{N(\alpha, k)} e^{-i\alpha kt} + \right. \\ & \left. + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dk \frac{e^{ikx}}{N_{\alpha_0}(k)} \varphi_{\alpha_0 k, k}(\mu_0) \varphi_{\alpha_0 k, k}(\mu) e^{-i\alpha_0 k t} \right]. \quad (21) \end{aligned}$$

С. Эквивалентность двух методов

Покажем, что полученные для ψ_g выражения, а именно формулы (9) и (16), эквивалентны. Рассмотрим сначала слагаемые, отвечающие непрерывному спектру мод. В формуле (16) сделаем

¹⁾ Особые точки в α -плоскости для нас не представляют интереса.

замену переменных

$$\alpha \rightarrow v, \quad (22a)$$

$$k \rightarrow is/v \quad (22b)$$

и, следовательно,

$$dk dv \rightarrow (i/v) ds dv. \quad (22c)$$

Напомним явный вид нормировочных коэффициентов $N_s(v)$ и $N(\alpha, k)$:

$$N_s(v) = v [\lambda_s^2(v) + (\pi cv/2s)^2], \quad (23a)$$

$$N(\alpha, k) = \bar{\lambda}_k^2(\alpha) - (\pi c/2)^2, \quad (23b)$$

и собственных функций непрерывного спектра:

$$\varphi_{v,s} = \frac{cv}{2s} P \frac{1}{v-\mu} + \lambda_s(v) \delta(\mu-v), \quad (24a)$$

$$\varphi_{\alpha,k} = \frac{ic}{2k} P \frac{1}{\alpha-\mu} + \bar{\lambda}_k(\alpha) \delta(\mu-\alpha). \quad (24b)$$

Здесь

$$\lambda_s(v) = 1 - \frac{cv}{s} \operatorname{Arth} v, \quad (25a)$$

$$\bar{\lambda}_k(\alpha) = 1 - \frac{ic}{k} \operatorname{Arth} \alpha. \quad (25b)$$

Теперь с помощью простых алгебраических выкладок легко показать, что слагаемое, соответствующее вкладу в формулу (16) от функций непрерывного спектра (двойной интеграл), сводится к аналогичному слагаемому в формуле (9).

В дискретном слагаемом (однократный интеграл) формулы (16) положим

$$k = is/\alpha_{0k}. \quad (26)$$

Заметим, что

$$\alpha_{0k}(k) = v_0(s),$$

где s и k связаны соотношением (26). Действительно, из формулы (8b) разд. 7.3 следует, что

$$k(\alpha_{0k}) = ic \operatorname{Arth} \frac{1}{\alpha_{0k}}, \quad (27a)$$

а из формулы (7c) разд. 7.2 следует, что

$$s(v_0) = cv_0 \operatorname{Arth} \frac{1}{v_0}. \quad (27b)$$

Таким образом, в обоих случаях в качестве дискретного корня можно взять величину v_0 .

Далее, с помощью соотношений (27a) и (27b) находим, что

$$\frac{dk}{ds} = \frac{N\alpha_{0k}}{N_{0+}(s)} \Big|_{k=is/v_0}. \quad (28)$$

Наконец, в силу определения α_{0k} (формула (26)) $s = c$ при $k = 0$ и $s = 0$ при $k = \pm \pi c/2$. Из всех этих результатов сразу же вытекает эквивалентность дискретных слагаемых в формулах (9) и (16). Тем самым эквивалентность обеих формул доказана.

7.5. Альбедные задачи

В настоящем разделе мы применим метод Боудена, изложенный в разд. 7.2, к нестационарным альбедным задачам для полупространства и плоского слоя. Мы только наметим ход вычислений, подробное исследование проведено в работах [51, 53]. Основная идея метода очень близка к той, на базе которой в предыдущем разделе была вычислена функция Грина для бесконечной среды.

А. Альбедная задача для полупространства

Найдем решения однородного нестационарного уравнения переноса при $x \geq 0$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\psi(0, \mu, t; \mu_0) = \delta(\mu - \mu_0) \delta(t), \quad \mu \geq 0, \quad (1a)$$

и

$$\psi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (1b)$$

Преобразование Лапласа

$$\psi_s(x, \mu; \mu_0) = \int_0^\infty \psi(x, \mu, t; \mu_0) e^{(1-s)t} dt \quad (2)$$

удовлетворяет однородному уравнению

$$s\psi_s(x, \mu; \mu_0) + \mu \frac{\partial \psi_s}{\partial x} = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_s(x, \mu'; \mu_0) d\mu' \quad (3a)$$

с граничными условиями

$$\psi_s(0, \mu; \mu_0) = \delta(\mu - \mu_0), \quad \mu \geq 0, \quad (3b)$$

$$\psi_s(x, \mu; \mu_0) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty. \quad (3c)$$

Функция ψ_s , определенная соотношениями (3), по существу совпадает с решением стационарной альбедной задачи в разд. 5.5, в которой x заменяется на sx . Это относится к случаю $s \in S_i$ (рис. 7.1). При $s \notin S_i$ в разложении отсутствуют дискретные члены, и потому в этом случае мы поступим по-другому. Важно, что при $s \notin S_i$ функция $X_{0s}(z)$ «хорошо» себя ведет в граничных точках $\mu = 0$ и $\mu = 1$ (разд. 7.2). Таким образом, вместо того чтобы вводить функцию $X_s(z) = X_{0s}(z)/(1-z)$, можно использовать саму функцию $X_{0s}(z)$. При этом оказывается, что если в формуле

для ψ_s при $s \in S_i$ опустить дискретный член, а $(v_0 + z) X_s(-z)$ заменить на $X_{0s}(-z)$, то получим формулу для ψ_s при $s \notin S_i$. Итак,

$$\psi_s(x, \mu; \mu_0) = \frac{\mu_0}{(v_0 + \mu_0) X_s(-\mu_0)} \left[\frac{4s X_s(-v_0)}{c v_0 \Lambda_s^+(v_0)} \varphi_{0+,s}(\mu_0) \varphi_{0+,s}(\mu) e^{-sx/v_0} + \right. \\ \left. + \int_0^1 \frac{(v_0 + v) X_s(-v)}{v \Lambda_s^+(v) \Lambda_s^-(v)} \varphi_{v,s}(\mu_0) \varphi_{v,s}(\mu) e^{-sx/v} dv \right], \quad s \in S_i; \quad (4a)$$

$$\psi_s(x, \mu; \mu_0) = \frac{\mu_0}{X_{0s}(-\mu_0)} \int_0^1 \frac{X_{0s}(-v)}{v \Lambda_s^+(v) \Lambda_s^-(v)} \varphi_{v,s}(\mu_0) \varphi_{v,s}(\mu) e^{-sx/v} dv, \\ s \notin S_i, \quad \operatorname{Re}(s) \geq 0. \quad (4b)$$

Аналитические свойства функции ψ_s , которые важны при обращении преобразования Лапласа, совпадают со свойствами преобразования Лапласа функции Грина, рассмотренными в предыдущем разделе. Они позволяют деформировать путь интегрирования при обращении преобразования Лапласа так же, как это было сделано там (рис. 7.3). Мы снова приходим к сумме двух интегралов: первый берется вдоль мнимой оси, второй охватывает линию разреза от 0 до c . В последнем интеграле подынтегральная функция содержит разность значений функции ψ_s на противоположных сторонах разреза. А так как обе эти величины служат решениями одной и той же задачи, разность их будет решением соответствующей однородной задачи, т. е. проблемы Милна. Это решение, нормированное на единичный ток выходящего излучения¹⁾, мы обозначим через $\psi_s(x, \mu)$. При $s \in S_i$

$$\psi_s(x, \mu) = \frac{s}{2(s-c) v_0^2} \left[\frac{1}{X_s(v_0)} \varphi_{0+,s}(\mu) e^{-sx/v_0} + \frac{1}{X_s(-v_0)} \varphi_{0-,s}(\mu) e^{sx/v_0} \right] - \\ - \frac{c}{2s} \int_0^1 \frac{X_s(-v)}{\Lambda_s^+(v) \Lambda_s^-(v)} \varphi_{v,s}(\mu) e^{-sx/v} dv. \quad (5a)$$

Кроме того,

$$\psi_s(0, -\mu) = \left[2 \left(\frac{s}{c} - 1 \right) (v_0^2 - \mu^2) X_s(-\mu) \right]^{-1}, \quad \mu \geq 0. \quad (5b)$$

С помощью выражений для тока в точке $s = 0$, соответствующих обоим значениям ψ_s , т. е. $\psi_s^\pm(x, \mu; \mu_0)$, находим:

$$\psi_s^+(x, \mu; \mu_0) - \psi_s^-(x, \mu; \mu_0) = \\ = -4i\mu_0 \left(1 - \frac{s}{c} \right) |v_0| \psi_s(0, -\mu_0) \psi_s(x, \mu). \quad (6)$$

¹⁾ Решение, приведенное в разд. 5.6, имеет другую нормировку. Однако для целей настоящего раздела удобно выбрать именно такую нормировку. Для этого достаточно разделить решение на ток выходящего излучения (формула (16) разд. 6.4).

Теперь можно окончательно написать решение нестационарной альбедной задачи:

$$\psi(x, \mu, t; \mu_0) = \frac{2}{\pi} \mu_0 \int_0^c \left(1 - \frac{s}{c}\right) |v_0(s)| \psi_s(0, -\mu_0) \psi_s(x, \mu) e^{-(1-s)t} ds + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \psi_s(x, \mu; \mu_0) e^{-(1-s)t} ds. \quad (7)$$

Фигурирующие здесь функции $\psi_s(0, -\mu_0)$, $\psi_s(x, \mu)$ и $\psi_s(x, \mu; \mu_0)$ определяются соответственно формулами (5b), (5a) и (4b).

Полученная функция формально похожа на функцию Грина разд. 7.4. Однако между ними имеется существенное различие. В данном случае при интегрировании вокруг разреза подынтегральная функция содержит как дискретную моду, так и моды непрерывного спектра, а в случае функции Грина моды непрерывного спектра, совпадающие для обеих сторон разреза, взаимно уничтожаются. Это различие вызвано тем, что здесь разложение происходит по системе функций, полной на половинном отрезке, а не на целом. (Разумеется, при интегрировании вдоль мнимой оси моды непрерывного спектра появляются в любом случае.)

Формулы для плотности нейтронов $\rho(x, t; \mu_0)$ и тока $J(x, t; \mu_0)$ получаются, если функции $\psi_s(x, \mu)$ и $\psi_s(x, \mu; \mu_0)$ в соотношении (7) заменить на ρ_s и J_s соответственно. Формулы для ρ_s проще всего найти интегрированием (4b) и (5a) по μ с учетом нормировки собственных функций.

При $x = 0$ возможно дальнейшее упрощение, поскольку в этом случае функция, определяемая формулой (4b), аналитически продолжается в область $\operatorname{Re} s < 0$, что неверно при $x > 0$ из-за наличия в подынтегральной функции множителя $e^{-sx/v}$. Теперь путь интегрирования можно с помощью дальнейшей деформации превратить в замкнутый контур, охватывающий разрез. После этого второй член в правой части формулы (7) при $x = 0$ обращается в нуль, так что

$$\psi(0, -\mu, t; \mu_0) = \frac{2}{\pi} \mu_0 \int_0^c \left(1 - \frac{s}{c}\right) |v_0(s)| \psi_s(0, -\mu_0) \psi_s(0, -\mu) e^{-(1-s)t} ds, \quad \mu \geq 0. \quad (8)$$

В. Альбедная задача для плоского слоя [51]

Задача для плоского слоя отличается от задачи для полупространства тем, что функция ψ_s однозначна во всей правой половине плоскости s , и нет необходимости делать разрез. Это связано с тем, что в разложении для ψ_s присутствуют обе дискретные соб-

ственные функции $\varphi_{0+}, s e^{-sx/v_0}$ и $\varphi_{0-}, s e^{sx/v_0}$ и при обходе по замкнутому контуру точки $s = c$ оба члена просто меняются местами, оставляя сумму неизменной. Вместе с тем, как показал Винг [54], функция $\psi_s(x, \mu; \mu_0)$ имеет конечное число полюсов в точках $s = s_j, j = 1, \dots, N$, расположенных внутри отрезка $0 \leq s \leq c$. (Эти полюсы соответствуют решениям задачи критичности для плоского слоя.)

Сдвигая при вычислении обратного преобразования Лапласа контур интегрирования влево, приходим к формуле, похожей на (7), причем интеграл вокруг линии разреза заменяется суммой вычетов. Согласно [51],

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu, t; \mu_0) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_{s_j}(0, -\mu_0) \psi_{s_j}(x, \mu) e^{-(1-s_j)t} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \psi_s(x, \mu; \mu_0) e^{-(1-s)t} ds. \end{aligned} \quad (9)$$

(Здесь плоский слой определен неравенствами $0 \leq x \leq a$.) Функции ψ_{s_j} , нормированные условием

$$\int_{-a}^a \int_{-1}^1 \psi_{s_j}(x, \mu) \psi_{s_j}(x, -\mu) dx d\mu = 1, \quad (10)$$

служат решениями задачи критичности при $s = s_j$. Явные выражения для $\psi_{s_j}(x, \mu)$ можно найти методом последовательных приближений (разд. 6.7).

При увеличении толщины слоя полюсы все более плотно заполняют область $0 \leq s \leq c$. Можно показать, что в пределе при стремлении толщины слоя к бесконечности результат приближается к формуле (7) для случая полубесконечной среды.

Глава 8

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

8.1. Введение

В первых семи главах настоящей книги были развиты общие методы решения уравнения переноса. Эти методы были затем применены к решению различных идеализированных задач, таких, как нахождение функции Грина для бесконечной среды, проблема Милна, и т. д. На практике обычно приходится сталкиваться с задачами не столь «идеальными». Например, бывает нужно решить уравнение переноса нейтронов в цилиндрической топливной ячейке реактора, где необходимо принимать во внимание стенки кожуха, каналы теплоносителя, пустоты и всевозможные другие усложняющие моменты, обычно возникающие на практике.

Для решения практических задач такого рода прибегают к численным методам интегрирования уравнений переноса. В этом случае в соответствии с тем, что говорилось в гл. 1, можно использовать точные решения идеализированных задач для проверки адекватности применяемых численных методов. Другими словами, к решению идеализированной задачи, точное решение которой известно, можно применить различные численные методы и тем самым получить представление о степени точности, которой можно ожидать от каждого из этих методов.

Поскольку главная цель настоящей книги — построение строгих математических методов решения уравнения переноса, изложение материала в этой главе будет весьма кратким. За подробностями мы отсылаем читателя к работам по теории ядерных реакторов [3, 13] или по астрофизике [43].

В настоящее время широко применяются следующие три типа численных методов:

1. Разложение фазовой плотности по ортогональным функциям.
2. Схемы интегрирования уравнения переноса методом дискретных ординат.
3. Методы Монте-Карло.

Мы обсудим только методы типов 1 и 2. В методах типа 1 до сих пор наиболее распространенным набором функций служат сфери-

ческие¹⁾. Среди схем типа 2 еще в недалеком прошлом наиболее важным был метод гауссовых квадратур Вика — Чандрасекара; теперь чаще используют так называемый S_N -метод. По этой причине, а также потому, что в определенном смысле метод гауссовых квадратур эквивалентен методу сферических гармоник, при изложении методов типа 2 основное внимание мы уделим S_N -методу.

Метод Монте-Карло (тип 3) состоит в численном «разыгрывании» большого числа «историй» отдельных нейтронов. Подробное изложение этой процедуры можно найти в целом ряде книг (см., например, [57]).

8.2. Метод сферических гармоник. Общие вопросы

Рассмотрим односкоростное, не зависящее от времени²⁾ уравнение переноса с ядром рассеяния, инвариантным относительно вращений:

$$\Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{v} q(\mathbf{r}, \Omega) + c(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \int \psi(\mathbf{r}, \Omega') f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega'. \quad (1)$$

Основная идея метода сферических гармоник очень проста: в уравнение переноса подставляются разложения по сферическим гармоникам функций $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ (приложение В) и $q(\mathbf{r}, \Omega)$:

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \psi_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega), \quad (2a)$$

$$q(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} q_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega). \quad (2b)$$

Кроме того, $f(\Omega' \cdot \Omega)$ разлагается в ряд по полиномам Лежандра:

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\Omega' \cdot \Omega), \quad (3a)$$

¹⁾ Мы будем обсуждать именно разложение по сферическим функциям. Другие разложения (например, по полиномам Чебышева [55, 56]) хотя и дают в некоторых случаях большую точность, но страдают тем недостатком, что для них нет простой теоремы сложения и поэтому они относительно мало используются в практических приложениях.

²⁾ Мы ограничимся здесь стационарным случаем; обобщение на нестационарный случай весьма несложно.

$$\text{или} \quad f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega), \quad (3b)$$

равенство (3b) получается с помощью теоремы сложения (формула (A.8)).

Подставив эти разложения в уравнение (1), умножив результат на $Y_{lm}^*(\Omega)$ и проинтегрировав по Ω , приходим к бесконечной системе дифференциальных уравнений для неизвестных функций ψ_{lm} . Чтобы урезать эту систему, достаточно предположить, что производные функций ψ_{lm} обращаются в нуль при $l = L + 1$. Это называется P_L -приближением. Оно приводит к системе $(L + 1)^2$ уравнений для $(L + 1)^2$ неизвестных $\psi_{00}, \psi_{01}, \dots, \psi_{LL}$. На самом деле мы будем предполагать, что все ψ_{lm} обращаются в нуль при $l > L$. Тогда можно получить замкнутое выражение для фазовой плотности.

В общем случае полученные таким образом уравнения (представленные в разд. 8.5) весьма сложны; но если есть какая-нибудь симметрия (например, плоская, сферическая, цилиндрическая), разложение фазовой плотности принимает более простой вид и соответствующие уравнения метода сферических гармоник значительно упрощаются. Так, в случае плоской симметрии (разд. 8.4) в P_L -приближении система состоит из $L + 1$, а не из $(L + 1)^2$ совместных уравнений.

Приближение низшего порядка (P_1 -приближение) для любой геометрии можно вывести совсем легко, если применить специальный прием. Это приближение, обычно называемое «диффузионным», подробно обсуждается в разд. 8.3, где результаты, получаемые с его помощью, сравниваются с точными решениями, найденными с помощью разложения по сингулярным собственным функциям. Затем (разд. 8.4) рассматриваются P_L -приближения более высокого порядка для случая плоской симметрии, а дальше (разд. 8.5) приводятся некоторые замечания для других геометрий.

Заметим, кстати, что P_L -приближения с нечетными L в любой геометрии можно свести к дифференциальным уравнениям порядка L относительно лапласиана ∇^2 . Соответствующая процедура описана подробно в книге Дзвисона [7], однако, учитывая, что она не нашла широкого практического применения, мы не будем ее здесь приводить.

8.3. Диффузионное, или P_1 -приближение

А. Вывод уравнения диффузии

Как уже отмечалось в разд. 8.2, так называемое диффузионное приближение представляет собой (по крайней мере в односкоростном случае) просто приближение низшего порядка при разложе-

нии по сферическим гармоникам. Другими словами, в сумме по l в разложениях (2) разд. 8.2 оставляются только члены с $l = 0$ и $l = 1$ ¹⁾. Итак,

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{1/2} \psi_{00}(\mathbf{r}) Y_{00}(\Omega) + \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} \sum_{m=-1}^1 \psi_{1m}(\mathbf{r}) Y_{1m}(\Omega). \quad (1)$$

Теперь мы могли бы подставить это разложение в уравнение переноса, выполнить необходимые интегрирования (разложив $f(\Omega' \cdot \Omega)$) и прийти в конце концов к четырем уравнениям для определения четырех неизвестных функций ψ_{00} и ψ_{1m} (следует процедуре, описанной в предыдущем разделе). Однако гораздо удобнее поступить иначе.

Заметим, что, поскольку $Y_{00} = (1/4\pi)^{1/2}$ — скаляр, а Y_{1m} — три компоненты вектора, равенство (1) можно переписать в виде

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = A + \Omega \cdot \mathbf{B}. \quad (2)$$

Интегрируя по Ω , находим

$$A = (1/4\pi) \rho(\mathbf{r}) \quad (3)$$

(ибо $\int \Omega \cdot \mathbf{B} d\Omega = 0$). Умножая равенство (2) на Ω и интегрируя по Ω , находим

$$4\pi \mathbf{B} = (3/v) \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int A \Omega d\Omega = 0, \quad (5a)$$

$$\int \Omega (\Omega \cdot \mathbf{B}) d\Omega = (4\pi/3) \mathbf{B}. \quad (5b)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении разложение фазовой плотности принимает вид

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = (1/4\pi) \left[\rho(\mathbf{r}) + \frac{3}{v} \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \Omega \right]. \quad (6)$$

Теперь подставим это разложение, во всех отношениях, разумеется, эквивалентное разложению (1), в уравнение переноса, т. е. в уравнение (1) разд. 8.2, и введем еще разложение (относительно угловой переменной) плотности источника $q(\mathbf{r}, \Omega)$, подобное (6):

$$q(\mathbf{r}, \Omega) = (1/4\pi) [q_0(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{q}_1(\mathbf{r})] + \dots \quad (7)$$

¹⁾ На самом деле, обрывая суммирование после члена с $l = 0$, можно построить приближение еще более низкого порядка; но поскольку с его помощью получаются только постоянные в пространстве плотности нейтронов, это приближение слишком уж низкого порядка.

Подставив выражения (6) и (7) в уравнение (1) разд. 8.2 и сократив результат на общий множитель $1/4\pi$, получим

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \left[\rho(\mathbf{r}) + \frac{3}{v} \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right] + \sigma(\mathbf{r}) \left[\rho(\mathbf{r}) + \frac{3}{v} \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right] = \\ = \frac{1}{v} [q_0(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{q}_1(\mathbf{r})] + c(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \int \left[\rho(\mathbf{r}) + \frac{3}{v} \Omega' \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) \right] f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega'. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем интеграл в правой части уравнения (8), учитывая, что

$$\int f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' = 1 \quad (9a)$$

и ¹⁾

$$\int \Omega' f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' = a\Omega, \quad (9b)$$

где a — константа, которую надлежит определить. Ее можно найти, умножив скалярно (9b) на Ω . Так как $\Omega \cdot \Omega = 1$, то

$$a = \int (\Omega \cdot \Omega') f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega', \quad (10a)$$

т. е.

$$a \equiv \bar{\mu}_0, \quad (10b)$$

где $\bar{\mu}_0$ — средний косинус угла рассеяния. Таким образом, уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} [\Omega \cdot \nabla + \{1 - c(\mathbf{r})\}] \rho(\mathbf{r}) + [\Omega \cdot \nabla + \{1 - c(\mathbf{r})\} \bar{\mu}_0] \sigma(\mathbf{r}) \frac{3}{v} \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \\ = \frac{1}{v} [q_0(\mathbf{r}) + \Omega \cdot \mathbf{q}_1(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (11)$$

После интегрирования по Ω это уравнение сводится к двум уравнениям для двух неизвестных функций $\rho(\mathbf{r})$ и $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. В самом деле, проинтегрируем сначала уравнение (11) по Ω и учтем, что для произвольных векторов \mathbf{A} и \mathbf{B}

$$\int \Omega \cdot \mathbf{A} d\Omega = 0, \quad (12a)$$

$$\int (\Omega \cdot \mathbf{A})(\Omega \cdot \mathbf{B}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}). \quad (12b)$$

Тогда ²⁾

$$[1 - c(\mathbf{r})] \sigma(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{v} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} q_0(\mathbf{r}). \quad (13)$$

¹⁾ Соотношение (9b) можно вывести с помощью следующего рассуждения. Слева стоит вектор; следовательно, справа тоже должен быть вектор. Так как Ω' — переменная интегрирования, то в качестве единственного вектора остается Ω , и, значит, интеграл должен быть пропорционален Ω .

²⁾ Символ ∇ рассматривается как вектор.

Далее, умножим уравнение (11) на Ω и проинтегрируем по Ω .
Так как

$$\int \Omega (\mathbf{A} \cdot \Omega) d\Omega = (4\pi/3) \mathbf{A} \quad (14a)$$

и

$$\int \Omega (\mathbf{A} \cdot \Omega) (\mathbf{B} \cdot \Omega) d\Omega = 0, \quad (14b)$$

то

$$\frac{1}{3} \nabla \rho(\mathbf{r}) + \frac{1}{v} \sigma(\mathbf{r}) [1 - c(\mathbf{r}) \bar{\mu}_0] \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} \mathbf{q}_1(\mathbf{r}). \quad (15)$$

Уравнения (13) и (15) являются основными уравнениями теории диффузии; исключая неизвестную функцию $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, можно свести их к одному уравнению, называемому *уравнением диффузии*. Поскольку обычно нам приходится решать задачи с изотропными источниками, положим $\mathbf{q}_1(\mathbf{r}) = 0$. Пусть по определению коэффициент диффузии $D(\mathbf{r})$ равен:

$$D(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} [\sigma(\mathbf{r}) \{1 - c(\mathbf{r}) \bar{\mu}_0\}]^{-1}. \quad (16)$$

Тогда из уравнения (15) вытекает, что

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -vD(\mathbf{r}) \nabla \rho(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Это соотношение, связывающее ток с градиентом плотности, называют правилом Фика из-за его сходства с одноименным уравнением газовой диффузии. Это — основное соотношение диффузионного приближения.

Подставляя соотношение (17) в уравнение (13), получаем уравнение диффузии

$$-\nabla \cdot D(\mathbf{r}) \nabla \rho(\mathbf{r}) + \sigma_a(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} q_0(\mathbf{r}). \quad (18)$$

Сечение поглощения $[1 - c(\mathbf{r})] \sigma(\mathbf{r})$ мы здесь обозначили общепринятым символом $\sigma_a(\mathbf{r})$. Поскольку мы рассматриваем только односкоростной случай, мы будем всюду в дальнейшем полагать $v = 1$.

В. Сравнение с точными решениями. Общие замечания

Уравнение диффузии весьма полезно, ибо решение уравнения переноса для любой геометрии сводится к решению полученного выше дифференциального уравнения второго порядка. Естественно, возникает вопрос о справедливости приближений, приводящих к уравнению диффузии¹⁾. Чтобы представить себе,

¹⁾ Среди них особенно уязвимо предположение о «почтиизотропии» фазовой плотности.

о чем идет речь, сравним уравнение диффузии и некоторые его решения со строгими результатами гл. 5 и 6 для проблемы Милна, функций Грина точечного и плоского источников и для значений критической толщины плоских слоев. Подобные сравнения, разумеется, дают лишь общее представление о точности, если с помощью уравнения диффузии решаются наиболее общие задачи. Однако можно ожидать, что получаемые на основе таких сравнений оценки в разумной степени точны.

Поскольку во всех задачах, для которых найдены точные решения, среда была однородна, положим $\sigma(\mathbf{r}) = 1$. Кроме того, мы по крайней мере на время ограничимся случаем изотропного рассеяния ($\bar{\mu}_0 = 0$), так что уравнение диффузии (18) примет вид

$$-D \nabla^2 \rho(\mathbf{r}) + (1 - c) \rho(\mathbf{r}) = q_0(\mathbf{r}), \quad (19a)$$

где (см. (16))

$$D(\mathbf{r}) = 1/3. \quad (19b)$$

Заметим далее, что во всех рассмотренных нами задачах плотность выражалась в виде суммы асимптотической компоненты, связанной с дискретным корнем v_0 , и быстро убывающего слагаемого, обязанного своим происхождением континууму собственных значений:

$$\rho(x) = a_{0+} e^{-x/v_0} + a_{0-} e^{x/v_0} + \int_{-1}^1 A(v) e^{-x/v} dv. \quad (20)$$

Коэффициенты $a_{0\pm}$ и $A(v)$ определялись граничными условиями. Подставив равенство (20) в однородное уравнение диффузии (уравнение (19a) с $q_0(\mathbf{r}) = 0$), находим, что функция

$$\rho_{as}(x) = a_{0+} e^{-x/v_0} + a_{0-} e^{+x/v_0} \quad (21)$$

будет решением при условии, что

$$v_0^2 = \frac{D}{1-c} = \frac{1}{3(1-c)}. \quad (22a)$$

Из разд. 4.3 видно, что величина (22a) есть не что иное, как первый член разложения v_0^2 при $|c - 1| \ll 1$:

$$\frac{1}{v_0^2} = 3(1-c) \left[1 - \frac{4}{5}(1-c) \right] + \dots \quad (22b)$$

Таким образом, теория диффузии дает адекватное описание асимптотической плотности, если значение c близко к единице. (На самом деле, как мы увидим дальше, теория диффузии представляет для нас еще большую ценность. ибо она достаточно хорошо описывает фазовую плотность в целом. В частности, она приводит к правильным значениям двух пространственных моментов.) Однако при c , близком к единице, большая часть нейтронов

находится в асимптотической области. Чтобы убедиться в этом, заметим (разд. 5.4), что отношение числа нейтронов в асимптотическом распределении к полному числу нейтронов (для функции Грина точечного источника) равно $K \approx 1 - (4/5)(1 - c)$ (см. формулу (22) разд. 5.4 и табл. 5.1). Аналогичные выводы можно сделать и относительно проблемы Милна (см. разд. 6.3, где подробно обсуждаются асимптотические плотности и токи).

Здесь, однако, следует сделать одну небольшую оговорку: проведенные только что сравнения касались случаев бесконечной и полубесконечной среды. Когда характерные размеры системы сравнимы со средним свободным пробегом нейтрона, неасимптотическая часть плотности может играть заметную роль даже при c , близком к единице. Поэтому для возможности применения теории диффузии мы должны требовать не только, чтобы выполнялось условие $c \approx 1$, но также чтобы характерные размеры системы были больше длины свободного пробега.

С. Сравнения на основе функции Грина

Проведем теперь конкретные численные сравнения решений уравнения диффузии со строгими результатами. Тем самым мы получим более ясное количественное представление о точности, которую от него можно ожидать.

Сначала рассмотрим случай бесконечной однородной среды с плоским изотропным нейтронным источником. Положив $\sigma(r) = 1$, приведем уравнение диффузии (18) к виду ¹⁾

$$-D \frac{d^2 \rho(z)}{dz^2} + (1 - c) \rho(z) = \delta(z), \quad (23a)$$

где

$$D = \frac{1}{3(1 - c\bar{\mu}_0)}. \quad (23b)$$

Решение уравнения (23a), подчиняющееся граничному условию

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \rho(z) = 0, \quad (23c)$$

имеет вид

$$\rho(z) = \frac{v_{0d}}{2D} e^{-|z|/v_{0d}}, \quad (24a)$$

где диффузионная длина v_{0d} в «диффузионном приближении» равна

$$v_{0d} = \left(\frac{1 - c}{D} \right)^{-1/2} \quad (24b)$$

¹⁾ Мы принимаем $q(z, \Omega) = (1/4\pi) \delta(z)$, так что

$$q_0(z) = \int q(z, \Omega) d\Omega = \delta(z).$$

(ср. с формулой (22a)). Таким образом, в этом приближении плотность нейтронов убывает экспоненциально и длина релаксации определяется равенством (24b).

Теперь нужно сравнить этот результат с точным значением ν_0 , получающимся при решении дисперсионного уравнения

$$\Lambda(\nu_0) = 0. \quad (25)$$

Выражение для функции $\Lambda(\nu)$ в случае линейно анизотропного рассеяния дано в разд. 4.10 (отметим, что $f_1 = \bar{\mu}_0$). В табл. 8.1 приведены для сравнения значения ν_0 , вычисленные по точной

Таблица 8.1

Значения ν_0 как функции от c и $\bar{\mu}_0 \equiv f_1$

c	f_1	Точные значения	Значения согласно диффузионной теории
1,0	Любое	0	0
0,98	0	0,2430	0,2450
	0,1	0,2306	0,2316
	0,3	0,2032	0,2058
	0,9	0	0,5254
0,9	0	0,5254	0,5477
	0,05	0,5110	0,5352
	0,07	0,5064	0,5302
	0,1	0,4989	0,5225
	0,3	0,4416	0,4680
	0,7	0	0,8286
0,7	0	0,8286	0,9487
	0,1	0,7902	0,9148
	0,3	0,7062	0,8432
	-0,3	0,9355	1,0435
0,5	0	0,9575	1,2247
	0,1	0,9185	1,1937
	0,3	0,8357	1,1291
	-0,1	0,9952	1,2550
	-0,3	1,0667	1,3134
0	Любое	1,0	1,7320

формуле и в соответствии с диффузионной теорией. Как и предсказывалось, результаты согласуются только при $c \approx 1$. Кроме того (мы это уже отмечали раньше), решение уравнения диффузии содержит только асимптотическую часть плотности, что весьма характерно для этого уравнения. Иными словами, асимптотическая плотность, вообще говоря, удовлетворяет уравнению диффу-

зии, хотя длина релаксации v_{0d} , получаемая на основе теории диффузии, согласуется с точной длиной релаксации v_0 для асимптотической плотности только при $c \approx 1$; впрочем, как раз в этом случае асимптотическая плотность хорошо приближает полную пространственную плотность.

Для того чтобы сделать следующий шаг в наших рассуждениях, предположим, что рассеяние изотропно, так что $\mu_0 = 0$. Решение по-прежнему дается формулой (24а), но выражение для v_{0d} упрощается (см. (22)):

$$v_{0d} = [3(1-c)]^{-1/2}. \quad (26)$$

Этот результат, как мы уже указывали, согласуется со строгим значением v_0 для изотропного рассеяния при $c \approx 1$. (Численное сравнение можно провести, используя данные табл. 8.1 при $\mu_0 = 0$.)

Сравнение результатов диффузионной теории и асимптотической части точных результатов можно продолжить, а именно сравнить соответствующие амплитуды. Записав в каждом случае 1)

$$\rho = \rho_0 e^{-|z|/v_0}, \quad (27)$$

найдем 2)

$$\rho_{0d} = \frac{1}{2} \sqrt{3/(1-c)} \quad (28a)$$

и

$$\rho_{0r} = \frac{1}{2N_{0+}} = -\frac{1}{2\kappa_c} \frac{\partial \kappa_0^2}{\partial c}, \quad \kappa_0 = 1/v_0. \quad (28b)$$

(Формула (28b) следует из формулы (16) разд. 5.2. См. также разд. 4.5.)

Функцию $\partial \kappa_0^2 / \partial c$ можно разложить в ряд с помощью дифференцирования разложения (22b) ($v_0^{-2} = \kappa_0^2$):

$$\frac{\partial \kappa_0^2}{\partial c} = -3 \left[1 - \frac{8}{5}(1-c) + O(1-c)^2 \right], \quad (29)$$

откуда

$$\rho_{0r} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{1-c} \right)^{1/2} + O(1-c) \quad (30)$$

(здесь учтено также и разложение функции κ_0). Таким образом, амплитуды ρ_0 согласуются при $c \approx 1$ с точностью до членов порядка $1-c$.

1) Разумеется, понимая под v_0 его соответствующее значение. В случае точного решения под ρ нужно понимать ρ_{as} .

2) Индексы d и r указывают соответственно диффузионное (diffusion) и точное (rigorous) значения.— *Прим. ред.*

Аналогично можно исследовать функцию Грина точечного источника. Здесь

$$\rho_d(r) = \frac{3}{r} e^{-\kappa_0 d r}, \quad (31a)$$

и (разд. 5.2)

$$\rho_{r,as}(r) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \kappa_0^2}{\partial c} e^{-\kappa_0 r}. \quad (31b)$$

И опять амплитуды и длины релаксации согласуются при $c \approx 1$ ¹⁾.

Обратим внимание на то, что плотность в диффузионной теории можно сделать точно совпадающей с асимптотической частью точного решения, если 1) переопределить коэффициент диффузии, а именно взять

$$D = \frac{1-c}{\kappa_0^2}, \quad (31c)$$

где для κ_0^2 используется точное значение, и 2) умножить плотность источника на $(1/3) (\partial \kappa_0^2 / \partial c)$. Этот вопрос обсуждался, например, Глессстоном и Эдлундом [58]. Заметим, кстати, что величина (31c) представляет собой коэффициент пропорциональности между J_{as} и $-\partial \rho_{as} / \partial z$ для проблемы Милна (формула (25) разд. 6.3). Разлагая κ_0^2 вблизи $c = 1$, мы снова приходим к результату диффузионной теории.

Другое интересное замечание касается поведения $\rho(r)$ при малых r . Из уравнения (14) разд. 5.4 видно, что $\rho(r) \sim e^{-r}/r^2$ при малых r , так как плотность вблизи источника — это, по существу, плотность нейтронов, не испытавших соударения. Диффузионная теория дает e^{-r}/r при любых r , подтверждая тем самым наше утверждение, что даже при $c \approx 1$ от диффузионной теории нельзя ожидать точных результатов вблизи источников (или вблизи границ между различными веществами).

Интересно также сравнить моменты плотности в случае точечного источника. В разд. 5.3²⁾ мы вычислили несколько моментов функции плотности, заданной в точной форме:

$$M_{0r} = \int d^3r \rho(r) = \frac{1}{1-c}, \quad (32a)$$

$$M_{2r} = \int r^2 d^3r \rho(r) = \frac{2}{(1-c)^2}, \quad (32b)$$

$$M_{4r} = \frac{1}{(1-c)^2} \left[24 + \frac{40}{3} \frac{c}{1-c} \right]. \quad (32c)$$

¹⁾ Мы уже указывали, но отметим снова, что при $c \approx 1$ отношение чисел нейтронов в неасимптотическом и асимптотическом распределениях мало (см. табл. 5.1).

²⁾ См. также приложение Н.—Прим. ред.

В диффузионной теории

$$M_{0d} = \int d^3r \rho_d = \frac{1}{1-c}, \quad (33a)$$

$$M_{2d} = \frac{2}{(1-c)^2}, \quad (33b)$$

$$M_{4d} = \frac{40}{3} \frac{1}{(1-c)^3}. \quad (33c)$$

Итак, диффузионная теория дает для M_0 и M_2 точные формулы, а формула для M_4 близка к точной при $c \approx 1$.

Д. Граничные условия и проблема Милна

Для сравнения других результатов диффузионной теории с точными решениями дополним уравнение диффузии соответствующими граничными условиями. Рассмотрим сначала условия на границе раздела между рассеивающей средой и идеальным поглотителем (или вакуумом). Точное условие, как мы знаем, имеет вид

$$\psi(\rho_s, \Omega) = 0 \quad \text{при} \quad \Omega \cdot \mathbf{n} > 0, \quad (34)$$

где \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности раздела, направленный внутрь рассеивающей среды. Диффузионная теория дает только приближенное выражение для ψ :

$$\psi_d(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \rho(\mathbf{r}) + \frac{3}{4\pi} \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}). \quad (35)$$

Ясно, что с помощью такого простого выражения нельзя точно удовлетворить условию (34). Поэтому при выборе граничного условия допускается некоторый произвол. Обычно берут условие обращения в нуль падающего извне потока ¹⁾.

Поскольку в диффузионной теории полное число нейтронов, входящих в рассеивающую среду, равно

$$\mathbf{n} \cdot \Omega \psi_d(\rho_s, \Omega), \quad (36)$$

положим

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) \psi_d(\rho_s, \Omega) d\Omega = 0, \quad (37a)$$

¹⁾ Это как раз граничное условие Маршака низшего порядка. Условия Маршака будут подробно рассмотрены в следующем разделе. Излишне говорить, что если задано угловое распределение $\psi_{\text{inc}}(\rho_s)$ (ненулевого) падающего извне потока, то равенство (37a) следует заменить на

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) \psi_d(\rho_s, \Omega) d\Omega = \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) \psi_i(\rho_s) d\Omega.$$

или

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) [\rho(\rho_s) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\rho_s)] d\Omega = 0. \quad (37b)$$

Так как

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^1 \mu d\mu = \pi \quad (38a)$$

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} (\mathbf{n} \cdot \Omega) (\Omega \cdot \mathbf{J}) d\Omega = -D \int (\mathbf{n} \cdot \Omega) (\Omega \cdot \nabla \rho) d\Omega = -\frac{2\pi D}{3} \frac{\partial \rho}{\partial n}, \quad (38b)$$

то равенство (37b) принимает вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial n} = \frac{1}{2D}. \quad (39)$$

Иными словами, при нашем выборе граничных условий нормальная логарифмическая производная плотности равна $1/2D$.

Эти граничные условия можно использовать для вычисления (в рамках диффузионной теории) экстраполированной длины в проблеме Милна. В случае изотропного рассеяния и $c = 1$ уравнение диффузии имеет вид

$$-\frac{1}{3} \frac{d^2 \rho}{dz^2} = 0, \quad (40)$$

поскольку здесь $D = 1/3$. Его решением будет

$$\rho = Az + B, \quad (41)$$

где A и B — постоянные. Применяя граничное условие (39) на границе $z = 0$, находим

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \frac{A}{B} = \frac{3}{2}, \quad (42)$$

так что

$$\rho = A \left(z + \frac{2}{3} \right). \quad (43)$$

Следовательно, точкой z_0 , в которой ρ экстраполируется нулем, будет

$$z_0 = -\frac{2}{3}. \quad (44)$$

Напомним, что точное значение z_0 (разд. 6.3) равно $-0,7104\dots$. При меньших значениях c отклонение больше, поскольку, как мы уже видели, диффузионное приближение точнее всего при $c \approx 1$.

Исследуем теперь условия в точке \mathbf{r}_0 границы раздела между двумя рассеивающими средами. Точное условие состоит в том,

что функция $\psi(r_0, \Omega)$ должна быть непрерывной. Опять-таки это условие в диффузионном приближении нельзя выполнить точно, поскольку фазовая плотность аппроксимируется функцией (35). Эта функция будет непрерывной, если потребовать непрерывность функций $\rho(r_0)$ и $J(r_0)$. Таким образом, в диффузионном приближении обычно берут в качестве граничных условий на поверхности раздела между двумя рассеивающими средами следующие условия:

$$\rho(r_0) — непрерывная функция \quad (45a)$$

и

$$J(r_0) — непрерывная функция. \quad (45b)$$

Е. Проблема критической толщины плоского слоя

Наконец, применим диффузионную теорию к вычислению критической толщины слоя и сравним результат с результатами разд. 6.8. Уравнением диффузии в этом случае (изотропное рассеяние, $\sigma = 1$) будет

$$\frac{d^2\rho}{dz^2} + \frac{c-1}{3}\rho = 0, \quad (46a)$$

а граничными условиями (см. (39)) —

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \Big|_{z=\pm t} = 3/2 \quad (46b)$$

(здесь $2t$ — толщина реактора). Уравнению (46) удовлетворяет функция

$$\rho = A \cos \left(\frac{c-1}{3} \right)^{1/2} z; \quad (47)$$

решение $\sin [(c-1)/3]^{1/2} z$ отбрасывается по соображениям симметрии. Применяя теперь (46b), находим критическое условие:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{c-1}{3} \right)^{1/2} t = 3/2, \quad (48a)$$

откуда

$$t = \left(\frac{3}{c-1} \right)^{1/2} \operatorname{arctg} 3/2, \quad (48b)$$

т. е.

$$t = \left(\frac{3}{c-1} \right)^{1/2} 0,9827. \quad (48c)$$

Заметим, что формула плотности (47) согласуется с решением, полученным в приближении низшего порядка (разд. 6.8), правда, изменился аргумент у косинуса:

$$\rho_0 \propto \cos \frac{z}{|v_0|}. \quad (49)$$

Разлагая $|v_0|$ при $c \approx 1$, видим, что обе формулы совпадают, когда c близко к единице.

Таким образом, и в этом случае при $c \approx 1$ диффузионная теория дает правильный результат. В табл. 8.2 приведены для

Таблица 8.2
Критические значения толщины ($2t$)
реакторов

c	t_1 (из табл. 6.4)	t_d
1,01	16,16	17,02
1,10	4,23	5,382
1,30	1,88	3,108
1,60	1,03	2,197
2,00	0,653	1,702

сравнения значения t , вычисленные по формуле (48b), и результаты, полученные во втором приближении и приведенные в табл. 6.4 (разд. 6.6). Эти данные подтверждают наши выводы о справедливости результатов диффузионной теории. (Заметим, что при $c \approx 1$ по физически очевидным причинам размеры реактора велики.)

8.4. P_L -метод в плоской геометрии

В разд. 8.3 мы отмечали, что метод сферических гармоник в любой геометрии приводит к очень громоздкой системе уравнений. Однако в наиболее важном случае одномерной геометрии (плоской, сферической или цилиндрической) систему уравнений можно значительно упростить, если уже в исходных разложениях (2) разд. 8.2 непосредственно воспользоваться специальным видом разложения, отвечающим рассматриваемой геометрии. (Эти специальные разложения построены в приложении В.) В настоящем разделе мы рассмотрим в качестве конкретного примера плоский случай ¹⁾. Из формулы (В.5) видно, что в этом случае $\psi(r, \Omega)$ зависит только от координаты z и величины $\mu = \Omega \cdot \hat{z}$:

$$\psi(z, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l(z) Y_{lm}^*(\hat{z}) Y_{lm}(\Omega), \quad (1a)$$

т. е.

$$\psi(z, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \psi_l(z) P_l(\mu). \quad (1b)$$

¹⁾ Метод сферических гармоник в других геометриях обсуждается, например, Вейнбергом и Вигнером [3] и Мегребляном и Холмсом [13].

Уравнение переноса здесь принимает вид

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial z} + \psi = c \int f(\Omega' \cdot \Omega) \psi(z, \mu') d\Omega' + \frac{1}{v} \frac{q(z, \mu)}{\sigma(z)} \quad (2)$$

(z — оптическая толщина; см. разд. 3.5).

Прежде чем подставлять сюда разложение (1), разложим в ряд плотность источника

$$q(z, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \psi_l(z) P_l(\mu), \quad (3a)$$

и индикатрису рассеяния (разд. 8.2)

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\Omega' \cdot \Omega), \quad (3b)$$

или

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega). \quad (3c)$$

Подставим теперь разложения (1a) и (3c) в интегральный член уравнения (2) (обозначим его буквой J):

$$J = c \sum_{l', l=0}^{\infty} f_l \psi_{l'}(z) \int d\Omega' \sum_{m=-l}^l \sum_{m'=-l'}^{l'} Y_{lm}(\Omega) Y_{l'm'}^*(\hat{z}) Y_{l'm'}(\Omega') Y_{lm}^*(\Omega'), \quad (4a)$$

или

$$J = c \sum_{l=0}^{\infty} f_l \psi_l(z) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\Omega) Y_{lm}^*(\hat{z}). \quad (4b)$$

Здесь при интегрировании мы воспользовались соотношением ортогональности (A.2). Применим еще раз теорему сложения:

$$J = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} J_l P_l(\mu), \quad (5a)$$

где

$$J_l = c f_l \psi_l(z). \quad (5b)$$

Подставим теперь разложения функций ψ , q и J в уравнение переноса (2):

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \left[\mu \frac{d\psi_l(z)}{dz} + \psi_l - \frac{c}{2} J_l(z) - \frac{1}{v} \frac{q_l(z)}{\sigma(z)} \right] = 0. \quad (6)$$

Поскольку [30]

$$\mu P_l(\mu) = \frac{1}{2l+1} [(l+1) P_{l+1}(\mu) + l P_{l-1}(\mu)], \quad (7)$$

уравнение (6) можно переписать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \left[\frac{1}{2l+1} \left\{ (l+1) P_{l+1}(\mu) \frac{d\psi_l(z)}{dz} + l P_{l-1}(\mu) \frac{d\psi_l(z)}{dz} \right\} + \right. \\ \left. + \psi_l P_l(\mu) - \frac{c}{2} J_l P_l(\mu) - \frac{1}{v} \frac{q_l(z)}{\sigma(z)} P_l(\mu) \right] = 0. \quad (8)$$

Умножим это уравнение на $P_k(\mu)$ и проинтегрируем по $d\Omega = 2\pi d\mu$. Так как

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu) P_k(\mu) d\mu = \frac{2}{2k+1} \delta_{lk}, \quad (9)$$

то

$$\frac{1}{2k+1} \left[k \frac{d\psi_{k-1}(z)}{dz} + (k+1) \frac{d\psi_{k+1}(z)}{dz} \right] + \\ + \psi_k(z) - J_k(z) - \frac{1}{v} \frac{q_k(z)}{\sigma(z)} = 0, \quad (10)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$. Мы получили, таким образом, бесконечную последовательность уравнений относительно ψ_k , причем уравнение для ψ_k связано с уравнениями для ψ_{k-1} и ψ_{k+1} . Для того чтобы оборвать эту последовательность, достаточно предположить, что $d\psi_{L+1}/dz = 0$, где L — некоторое конкретное значение k . Получающаяся таким образом система уравнений называется P_L -приближением:

$$\frac{1}{2k+1} \left[k \frac{d\psi_{k-1}}{dz} + (k+1) \frac{d\psi_{k+1}}{dz} \right] + (1 - cf_k) \psi_k = \frac{1}{v\sigma} q_k, \\ k = 0, 1, \dots, L-1, \quad (11a)$$

и

$$\frac{1}{2L+1} \frac{d\psi_{L-1}}{dz} + (1 - cf_L) \psi_L = \frac{1}{v\sigma} q_L. \quad (11b)$$

При $L = 1$, т. е. в P_1 -приближении, будут всего два связанных уравнения — для ψ_1 и ψ_2 , которые легко сводятся к уравнению диффузии, исследованному в предыдущем разделе. (Отметим, что $f_k = P_k(\mu_0)$, откуда $f_0 = 1$, $f_1 = \mu_0$.) Следующим по порядку будет P_2 -приближение, однако по причинам, которые мы обсудим позднее, приближения четных порядков обычно не применяются. Рассмотрим поэтому P_3 -приближение и положим для удобства

$\sigma = \nu = 1$. Кроме того, предположим, что источник изотропный, т. е. $q_k = 0$ при $k > 0$. Тогда получим четыре уравнения:

$$\frac{d\psi_1}{dz} + (1 - c) \psi_0 = q_0, \quad (12a)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\psi_0}{dz} + \frac{2}{3} \frac{d\psi_2}{dz} + (1 - cf_1) \psi_1 = 0, \quad (12b)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d\psi_1}{dz} + \frac{3}{5} \frac{d\psi_3}{dz} + (1 - cf_2) \psi_2 = 0, \quad (12c)$$

$$\frac{3}{7} \frac{d\psi_2}{dz} + (1 - cf_3) \psi_3 = 0. \quad (12d)$$

Напомним, что ψ_0 — плотность, а ψ_1 — величина потока ¹⁾ (ψ_2 и ψ_3 не имеют столь простого физического смысла).

Четыре уравнения (12) можно свести к одному дифференциальному уравнению 4-го порядка для ψ_0 (и вообще, любую P_L -систему при нечетном L всегда можно свести к дифференциальному уравнению $(L + 1)$ -го порядка, в которое войдут производные только четных порядков). Следуя обозначениям Мегребляна и Холмса [13], запишем это уравнение 4-го порядка в виде ²⁾

$$\alpha \frac{d^4\psi_0}{dz^4} - \beta \frac{d^2\psi_0}{dz^2} + \gamma \psi_0 = \epsilon_1 \epsilon_2 q_0, \quad (13)$$

где

$$\epsilon_k = 1 - cf_k, \quad (14a)$$

а константы α , β и γ определяются формулами:

$$\alpha = \frac{3}{35\epsilon_3}, \quad (14b)$$

$$\beta = \frac{\epsilon_2}{3} + \frac{9}{35} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1}{\epsilon_3} + \frac{4\epsilon_0}{15} \quad (14c)$$

и

$$\gamma = \epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2. \quad (14d)$$

Будем искать решение однородного уравнения, соответствующего (13), в виде

$$\psi_0 = g(\nu) e^{-z/\nu}. \quad (15)$$

Тогда собственными значениями ν будут 4 значения:

$$\nu_{1\pm} = \pm \left[\frac{2}{2\alpha} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\gamma\alpha}{\beta^2}} \right) \right]^{-1/2}; \quad (16a)$$

$$\nu_{2\pm} = \pm \left[\frac{\beta}{2\alpha} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma\alpha}{\beta^2}} \right) \right]^{-1/2}. \quad (16b)$$

¹⁾ См. приложение В.

²⁾ Для простоты источник здесь предполагается постоянным. В противном случае в правую часть уравнения (13) войдут еще производные четных порядков от плотности источника.

Для простоты исследуем $v_{1\pm}$ и $v_{2\pm}$ в случае изотропного рассеяния. В этом случае $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ и

$$\alpha = \frac{3}{35}, \quad (17a)$$

$$\beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{1}{1} (1-c), \quad (17b)$$

$$\gamma = (1-c). \quad (17c)$$

Выполнив длинные алгебраические выкладки, найдем

$$\frac{1}{v_{1\pm}^2} = 3(1-c) \left[1 - \frac{4}{5} (1-c) \right] + O(1-c)^3, \quad (18a)$$

$$\frac{1}{v_{2\pm}^2} = \frac{35}{9} \left[1 + \frac{4}{5} (1-c) \right] + O(1-c)^2. \quad (18b)$$

Таким образом, собственные значения $v_{1\pm}$ совпадают с точными собственными значениями с точностью до членов порядка $(1-c)^2$ (см. (22b) разд. 8.3). Напомним, что в P_1 -приближении собственные значения совпадали с точными до членов порядка $1-c$ включительно, так что P_3 -приближение улучшает диффузионное приближение. Кроме того, мы видим, что появляются еще два собственных значения $v_{2\pm}$, и они принадлежат отрезку $[-1, 1]$. Отрезок начинает заполняться!

Вообще говоря, хотя мы показали это только для P_1 - и P_3 -приближений, в любом P_{2L+1} -приближении ($L = 0, 1, 2, \dots$) дискретные собственные значения совпадают с точными с точностью до членов порядка $(1-c)^{L+1}$ и появляются еще $2L$ собственных значений из непрерывного спектра. Таким образом, по мере увеличения порядка P_L -приближения не только улучшается асимптотическое решение (связанное с дискретными собственными значениями), но получается все лучшее и лучшее приближение к асимптотически малой части решения (связанной с собственными значениями непрерывного спектра).

В случае изотропного рассеяния собственные значения $\kappa_i = v_i^{-1}$ в P_L -приближении служат корнями векового уравнения [7]:

$$\begin{vmatrix} 1-c & \kappa_i & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \kappa_i & 3 & 2\kappa_i & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 2\kappa_i & 5 & 3\kappa_i & 0 & & & 0 \\ \cdot & & & & & & & \vdots \\ \cdot & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & (N-1)\kappa_i & (2N-1) & N\kappa_i \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & N\kappa_i & 2N+1 \end{vmatrix} = 0. \quad (19)$$

Общее решение P_L -системы можно тогда записать в виде

$$\psi_n(z) = \sum_j A_j G_n(\kappa_j) e^{\kappa_j z}, \quad n=0, 1, \dots, L, \quad (20)$$

где A_j — произвольная постоянная, κ_j — корни векового уравнения и

$$G_n(\kappa) = (-1)^n \left[P_n\left(\frac{1}{\kappa}\right) - \frac{c}{\kappa} \left\{ \Omega_0\left(\frac{1}{\kappa}\right) P_n\left(\frac{1}{\kappa}\right) - \Omega_n\left(\frac{1}{\kappa}\right) \right\} \right]. \quad (21)$$

Здесь Q_n — функции Лежандра второго рода [31]. Как κ_j , так и G_n при $L = 1, 3, 5, 7$ протабулированы Дэвисоном [7].

Применяя любое P_L -приближение, мы сталкиваемся с тем, что фазовая плотность представляется в виде оборванного ряда по полиномам Лежандра, а именно

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \psi_l(x) P_l(\mu),$$

так что невозможно точно удовлетворить точным граничным условиям. Мы решим эту проблему, как и в случае диффузионного приближения, налагая приближенные граничные условия:

1) на границе между двумя диффузными средами функции $\psi_l(z)$ непрерывны ($l = 0, 1, \dots, L$);

2) на границе между диффузной средой и вакуумом либо

$$(a) \quad \int_{\Omega \cdot n > 0} \psi(x_s, \mu) \mu^l d\mu = 0, \quad l = 1, 3, \dots, L \quad (\text{граничные условия Маршака}),$$

либо

$$(b) \quad \psi(x_s, \mu_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, (2L-1)/2 \quad (\text{граничные условия Марка}).$$

Дискретные значения углов $\arccos \mu_i$, при которых должна обращаться в нуль плотность входящего потока, обычно выбираются так, чтобы соответствующие значения μ_i были положительными нулями полинома $P_{L+1}(\mu)$. Такие граничные условия обсуждаются подробно в книге Дэвисона [7]¹⁾, поэтому мы сделаем здесь только несколько весьма общих замечаний²⁾.

1. На примерах задач, которые допускают точные решения (в частности, на примере проблемы Милна), можно установить,

¹⁾ Как и в случае граничных условий в диффузионном приближении, если задано ненулевое распределение падающего потока, то в правой части граничных условий (a) и (b) должны появиться соответствующие моменты этого распределения (или значения функции распределения при соответствующих углах). Это утверждение столь очевидно, что более подробно о нем говорить не стоит.

²⁾ В. С. Владимиров [59*] установил, что в некотором строгом смысле граничные условия Маршака являются наилучшими. — *Прим. ред.*

что условия Маршака лучше работают при малых L , а условия Марка — при средних L . Разумеется, при $L \rightarrow \infty$ эти условия эквивалентны.

2. В связи с этим в качестве граничного условия для диффузионного приближения было выбрано условие Маршака низшего порядка (разд. 8.3). Это привело к значению экстраполированной длины (при $c = 1$), равному 0,6667. Условие Марка низшего порядка дает 0,578, а строгое значение равнялось 0,7104.

3. Число условий в каждом наборе является «правильным» в следующем смысле. На границе с вакуумом условий вдвое меньше, чем неизвестных функций ψ_i . Однако в силу свойств плоской геометрии либо должна быть другая поверхность раздела с вакуумом, где налагаются недостающие граничные условия, либо систему следует продолжить до бесконечности, и тогда для однозначного определения решения будет достаточно дополнить имеющиеся условия условиями на бесконечности.

В других геометриях нет второй «граничной поверхности». Но в таких случаях неизбежно оказывается, что половина решений нерегулярна в начале координат и потому должна быть отброшена.

Мы уже указывали в подстрочном примечании, как должны быть модифицированы условия на свободной поверхности, если на ней задано ненулевое угловое распределение падающего потока. Помранинг [60] дал изящное исследование граничных условий в методе сферических гармоник. Исходя из вариационного принципа, он сумел улучшить граничные условия как на границе между рассеивающими средами, так и на свободных поверхностях. Для экстраполированной длины в проблеме Милна он получил в диффузионном приближении значение 0,7071 (см. замечание 2 выше). В более ранней работе [61] ему удалось вывести и сами уравнения метода сферических гармоник на основе некоторого (несамосопряженного) вариационного принципа. Однако его результаты слишком громоздки, чтобы излагать их здесь.

В заключение рассмотрим в P_3 -приближении решение задачи о функции Грина плоского источника в бесконечной среде и проблемы Милна.

А. Функция Грина для бесконечной среды с изотропным источником. Изотропное рассеяние [62]

Решение этой задачи легко найти из уравнения (20), где коэффициенты A_j определяются «условием скачка» в источнике. Плотность имеет вид

$$\rho(x) = \frac{3(1-c)v_1^2 - 1}{6(1-c)^2 v_2^2} \left[\frac{e^{-|x|/v_{1+}}}{v_{1+}} + \frac{e^{-|x|/v_{2+}}}{v_{2+}} \right]. \quad (22)$$

Фигурирующие здесь величины v_1 и v_2 вычисляются по формулам (18). Решение нормировано к источнику единичной мощности.

На рис. 8.1 изображены решения в P_1 - и P_3 -приближениях и точное решение как функции от x ; P_1 -приближение получено с помощью формул разд. 8.3. Точное решение дано в разд. 5.2.

При обсуждении диффузионного приближения в разд. 8.3 мы уже указывали, что второй момент функции Грина, вычисленной в диффузионном приближении, совпадает с точным. Это, по существу, лишь частный случай более общего утверждения.

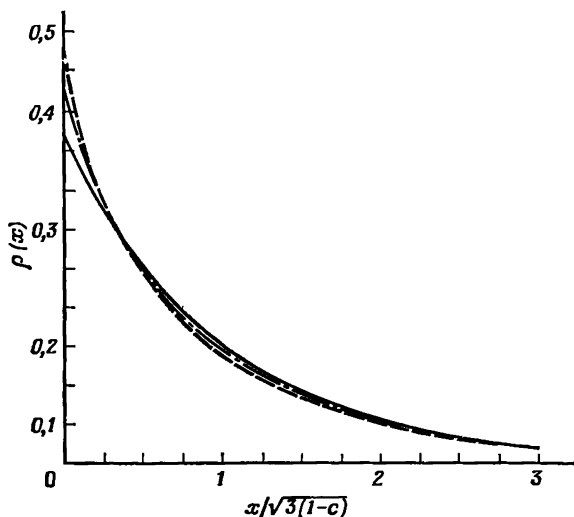


Рис. 8.1. Сравнение решений в случае плоского источника [62]. Сплошной линией показано P_1 -приближение, штрих-пунктирной показано P_3 -приближение, штриховой — точное решение; $c = 0,9$.

Теорема. В P_l -приближении моменты $M^{n,l}$ функции Грина ¹⁾ для $l \leq L$ и $l + n \leq 2L$ совпадают с точными.

Хотя мы рассматриваем здесь только одномерный (и односкоростной) случай, эта теорема справедлива и в общем случае. Доказательство теоремы тривиально, ибо при указанных выше условиях P_l -система приводит к правильному рекуррентному соотношению (см. (11) разд. 5.3) и всегда $M^{0,l} = P_l(\mu_0)/(1 - cf_l)$.

В. Проблема Милна

Исследуем решение этой задачи несколько подробнее. Положим в P_3 -системе (12) $f_1 = f_3 = 0$, $q_0 = 0$, $c = 1$ ²⁾. Тогда

$$\frac{d\psi_1}{dz} = 0, \quad (23a)$$

$$\frac{1}{3} \frac{d\psi_0}{dz} + \frac{2}{3} \frac{d\psi_2}{dz} + \psi_1 = 0, \quad (23b)$$

¹⁾ См. разд. 5.3.

²⁾ Мы рассматриваем, таким образом, задачу с квадратичным анизотропным рассеянием, которая уже решалась в разд. 6.9.

$$\frac{2}{5} \frac{d\psi_1}{dz} + \frac{3}{5} \frac{d\psi_3}{dz} + (1 - f_2) \psi_2 = 0, \quad (23c)$$

$$\frac{3}{7} \frac{d\psi_2}{dz} + \psi_3 = 0. \quad (23d)$$

Из уравнения (23a) следует, что ψ_1 — константа. Возьмем для удобства

$$\psi_1 = -1. \quad (24)$$

Дифференцируя уравнение (23d), получаем

$$\frac{3}{7} \frac{d^2\psi_2}{dz^2} + \frac{d\psi_3}{dz} = 0. \quad (25a)$$

Учитывая (23b), заключаем, что ψ_2 удовлетворяют уравнению

$$\frac{3}{7} \frac{d^2\psi_2}{dz^2} - \frac{5}{3} (1 - f_2) \psi_2 = 0. \quad (25b)$$

Тогда

$$\psi_2(z) = ke^{-\sqrt{(35/9)(1-f_2)}z} \equiv ke^{-\alpha z}, \quad (25c)$$

где k — постоянная; решение уравнения (25b) в виде экспоненты с положительным показателем отброшено, чтобы удовлетворялись условия на бесконечности.

Подстановка (25c) в (23b) приводит к уравнению для ψ_0 (напомним, что $\psi_1 = -1$):

$$d\psi_0/dz = 3 + 2\alpha ke^{-\alpha z}, \quad (26a)$$

имеющему своим решением функцию

$$\psi_0 = k' + 3z - 2ke^{-\alpha z}, \quad (26b)$$

где k' — другая произвольная постоянная.

Наконец, находим ψ_3 с помощью (23d):

$$\psi_3 = \frac{3}{7} \alpha ke^{-\alpha z}. \quad (27)$$

Итак,

$$\psi_0(z) = k' + 3z - 2ke^{-\alpha z}, \quad (28a)$$

$$\psi_1(z) = -1, \quad (28b)$$

$$\psi_2(z) = ke^{-\alpha z}, \quad (28c)$$

$$\psi_3(z) = \frac{3}{7} \alpha ke^{-\alpha z}, \quad (28d)$$

где

$$\alpha = \sqrt{(35/9)(1-f_2)}. \quad (28e)$$

Для определения постоянных k и k' воспользуемся первыми двумя граничными условиями Маршак:

$$\int_0^1 \mu \psi(0, \mu) d\mu = 0 \quad (29a)$$

и

$$\int_0^1 \mu^3 \psi(0, \mu) d\mu = 0. \quad (29b)$$

С учетом формул (28) разложение

$$\psi(0, \mu) = \sum_{l=0}^3 \frac{2l+1}{4\pi} \psi_l(0) P_l(\mu) \quad (30a)$$

принимает вид

$$\psi(0, \mu) = \frac{1}{4\pi} [k' - 2k - 3P_1(\mu) + 5kP_2(\mu) + 3k\alpha P_3(\mu)]. \quad (30b)$$

Напомним, что

$$P_1(\mu) = \mu, \quad (31a)$$

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2} (3\mu^2 - 1), \quad (31b)$$

$$P_3(\mu) = \frac{1}{2} (5\mu^3 - 3\mu) \quad (31c)$$

и, разумеется, $P_0(\mu) = 1$. Тогда

$$\int_0^1 \mu P_0(\mu) d\mu = \frac{1}{2}, \quad (32a)$$

$$\int_0^1 \mu^3 P_0(\mu) d\mu = \frac{1}{4}, \quad (32b)$$

$$\int_0^1 \mu P_1(\mu) d\mu = \frac{1}{3}, \quad (33a)$$

$$\int_0^1 \mu^3 P_1(\mu) d\mu = \frac{1}{5}, \quad (33b)$$

$$\int_0^1 \mu P_2(\mu) d\mu = \frac{1}{8}, \quad (34a)$$

$$\int_0^1 \mu^3 P_2(\mu) d\mu = \frac{1}{8}, \quad (34b)$$

$$\int_0^1 \mu P_3(\mu) d\mu = 0, \quad (35a)$$

$$\int_0^1 \mu^3 P_3(\mu) d\mu = \frac{2}{35}. \quad (35b)$$

Применение соотношений (30b) и (35) приводит к системе двух уравнений относительно k и k' :

$$\frac{1}{2}(k' - 2k) - 1 + \frac{5}{8}k = 0, \quad (36a)$$

$$\frac{1}{4}(k' - 2k) - \frac{3}{5} + \frac{5}{8}k + \frac{6}{35}k\alpha = 0. \quad (36b)$$

Решая ее, находим

$$k = \frac{1/20}{(5/32 + 3\alpha/35)}, \quad (37a)$$

$$k' = 2 + \frac{3/80}{(5/32 + 3\alpha/35)}. \quad (37b)$$

Подставляя эти значения в формулы (28), получаем зависимость фазовой плотности от z в P_3 -приближении. В частности, из (28a) видно, что экстраполированная длина z_0 равна

$$z_0 = \frac{1}{3} k'. \quad (38)$$

В табл. 8.3 приведены значения z_0 как функции от b ; для сравнения мы поместили в таблицу и точные значения, найденные в разд. 6.9.

Таблица 8.3
Экстраполированная длина

$5f_2$	P_3	Точное значение
0	0,7051	0,7104
0,1	0,7053	0,7108
0,2	0,7055	0,7114
0,3	0,7057	0,7125
1,0	0,7074	0,7148

Отметим, что P_3 -результаты хорошо приближают точные значения; напомним, что диффузионное приближение давало $2/3$. Отметим также слабую зависимость результатов от f_2 ¹⁾.

Аналогичные вычисления можно провести в P_5 -приближении и в более высоких приближениях. Некоторые из полученных таким образом результатов можно найти в книге Вайнберга и Нодерера [62]. Например, в P_5 -приближении (изотропное рассеяние, $c = 1$)

$$\psi_0(z) = 3z + 2,1246 - 0,0777e^{-1,225z} - 0,2145e^{-3,2030z}, \quad (39a)$$

$$\psi(0, \mu) = 0,8877 - 1,5P_1(\mu) + 4,365P_2(\mu) + 0,4322P_3(\mu) - \\ - 0,07583P_4(\mu) - 0,3641P_5(\mu), \quad \mu > 0. \quad (39b)$$

В этом случае значение экстраполированной длины оказывается равным 0,708 (в P_3 -приближении $z_0 = 0,705$, а точное значение z_0 есть 0,710; см. табл. 8.3).

Отметим еще раз, что при использовании граничных условий Марка экстраполированная длина в P_1 -приближении равна 0,577, а P_3 -приближение дает 0,695, т. е. лишь немного менее точное значение, чем при использовании граничных условий Маршака.

Сравнение приближений четных и нечетных порядков в методе сферических гармоник мы отложим до разд. 8.8, где будем рассматривать метод дискретных ординат Вика — Чандрасекара. Сейчас ограничимся лишь заявлением, что точность приближения четного порядка, вообще говоря, меньше точности *предыдущего* приближения нечетного порядка (т. е. P_2 -приближение менее точно, чем P_1 -приближение, и т. д.). По этой причине обычно применяются приближения нечетных порядков.

Наконец, укажем, что с более формальным (в противоположность численному) сравнением P_L -приближений с результатами метода сингулярных собственных функций можно ознакомиться в работе [63].

8.5. Метод сферических гармоник для других геометрий

Для полноты картины наметим вывод уравнения для сферических гармоник в произвольной геометрии и выпишем уравнения в случае сферической и цилиндрической симметрий. При этом мы будем следовать методу, изложенному в разд. 8.2.

¹⁾ Эти вычисления выполнены при $f_1 = f_3 = 0$. Вспомним, однако, что значения при произвольных f_1 можно получить из соответствующих значений при $f_1 = 0$ делением на $1 - f_1$ (разд. 6.9).

А. Общее уравнение

Подставим в уравнение переноса

$$\Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = (1/v) q(\mathbf{r}, \Omega) + c(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) \int \psi(\mathbf{r}, \Omega') f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' \quad (1)$$

разложение функции ψ по сферическим гармоникам (приложение В)

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \psi_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega) \quad (2a)$$

и аналогичное разложение

$$q(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} q_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega). \quad (2b)$$

Разложим индикатрису рассеяния $f(\Omega' \cdot \Omega)$, как мы это сделали в предыдущем разделе, где рассматривался плоский случай:

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_l Y_{lm}^*(\Omega') Y_{lm}(\Omega). \quad (3)$$

Подставив все эти разложения в уравнение (1), умножим его на $Y_{\lambda\mu}^*(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω . В силу ортогональности сферических функций (приложение А)

$$\left(\frac{4\pi}{2\lambda+1} \right)^{1/2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \nabla \psi_{lm}(\mathbf{r}) \cdot \int \Omega Y_{\lambda\mu}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega) d\Omega + \\ + \sigma(\mathbf{r}) \psi_{\lambda\mu}(\mathbf{r}) = \frac{1}{v} q_{\lambda\mu}(\mathbf{r}) + c(\mathbf{r}) \sigma(\mathbf{r}) f_{\lambda} \psi_{\lambda\mu}(\mathbf{r}). \quad (4)$$

Чтобы выполнить интегрирование в левой части равенства, воспользуемся рекуррентными соотношениями между сферическими функциями [64]; например,

$$\Omega_z Y_l^m(\cos \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1-m)(l+1+m)}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1}^m + \\ + \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}} Y_{l-1}^m. \quad (5)$$

Соответствующие соотношения справедливы и для $\Omega_x Y_{lm}$ и $\Omega_y Y_{lm}$, но мы не будем их здесь выписывать. Учитывая эти соотношения, проинтегрируем уравнение (4) по Ω . В результате

получим систему

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda+1} \left[(\lambda+1-\mu)^{1/2} (\lambda+1+\mu)^{1/2} \frac{\partial}{\partial z} \psi_{\lambda+1, \mu} + (\lambda-\mu)^{1/2} (\lambda+\mu)^{1/2} \times \right. \\ \times \frac{\partial}{\partial z} \psi_{\lambda-1, \mu} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i\partial}{\partial y} \right) \{ (\lambda+\mu)^{1/2} (\lambda+\mu-1)^{1/2} \psi_{\lambda-1, \mu-1} - \\ - (\lambda-\mu+2)^{1/2} (\lambda-\mu+1)^{1/2} \psi_{\lambda+1, \mu-1} \} - \\ \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i\partial}{\partial y} \right) \{ -(\lambda-\mu)^{1/2} (\lambda-\mu-1)^{1/2} \psi_{\lambda-1, \mu+1} + \right. \\ \left. + (\lambda+\mu+1)^{1/2} (\lambda+\mu+2)^{1/2} \psi_{\lambda+1, \mu+1} \} \right] + \sigma(r) \psi_{\lambda\mu} = \\ = \frac{1}{v} q_{\lambda\mu}(r) + c(r) \sigma(r) f_{\lambda} \psi_{\lambda\mu}. \quad (6) \end{aligned}$$

Эта огромная система уравнений ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, L$; $\mu = -\lambda, -\lambda+1, \dots, \lambda-1, \lambda$) представляет, по-видимому, лишь чисто академический интерес. В P_L -приближении система состоит из

$$\sum_{l=0}^L (2l+1) = (L+1)^2$$

уравнений и, конечно, содержит $(L+1)^2$ неизвестных $\psi_{\lambda\mu}$. Любая симметрия уменьшает число уравнений и неизвестных. В предыдущем разделе мы показали, что в случае плоской симметрии число неизвестных и уравнений в P_L -приближении уменьшается с $(L+1)^2$ до $L+1$. Сейчас мы выясним, что будет в случае сферической и цилиндрической симметрий.

Сферическая симметрия. В разд. 2.1 (формула (30)) мы видели, что фазовая плотность зависит только от $r = |\mathbf{r}|$ и $\mu_r = \Omega \cdot \hat{\mathbf{r}}$. С помощью этих сведений уже можно упростить систему (6). Однако проще сразу записать уравнение переноса в сферических координатах, а дальше поступить по аналогии со случаем плоской симметрии (разд. 8.4). В сферических координатах уравнение переноса имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_r \frac{\partial \psi(r, \mu_r)}{\partial r} + \frac{1-\mu_r^2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \sigma(r) \psi = \\ = c\sigma(r) \int f(\Omega' \cdot \Omega) \psi(r, \mu'_r) d\Omega' + \frac{1}{\sigma v} q(r, \mu_r). \quad (7) \end{aligned}$$

Разложим теперь $\psi(r, \mu_r)$ и $q(r, \mu_r)$ по сферическим функциям (приложение В):

$$\psi(r, \mu_r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\mu_r), \quad (8a)$$

или

$$\psi(r, \mu_r) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \psi_l(r) P_l(\mu_r). \quad (8b)$$

Разложение для q аналогично. Кроме того, разложим в ряд функцию $f(\Omega' \cdot \Omega)$ (равенство (3с) разд. 8.4).

Подставим эти разложения в уравнение (7), умножим его на $P_j(\mu_r)$ и проинтегрируем по μ_r . Член с $\partial\psi/\partial\mu_r$ будем интегрировать по частям и с учетом рекуррентных соотношений (формулы (7) разд. 8.4). В результате придем к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{j+1}{2j+1} \left[\frac{d}{dr} + \frac{j+2}{r} \right] \psi_{j+1}(r) + \frac{j}{2j+1} \left[\frac{d}{dr} - \frac{j-1}{r} \right] \psi_{j-1}(r) \\ + \sigma \psi_j(r) - \cos f_j \psi_j(r) = \frac{1}{v} q_j(r). \end{aligned} \quad (9)$$

Положив теперь $\psi_{L+1} = 0$ и отделив тем самым первые $L+1$ уравнений от остальных, получим P_L -приближение для случая сферической симметрии.

Для того чтобы найти собственные значения соответствующей однородной системы ($q_j = 0$) с изотропным рассеянием ($f_j = \delta_{j0}$), запишем решение в виде

$$\psi_n(r) = G_n(\kappa) j_n(i\kappa r), \quad (10)$$

где j_n — сферическая функция Бесселя. Подстановка этого равенства в систему (9) приводит к тем же собственным значениям κ_j и тем же собственным функциям $G_n(\kappa_j)$, что и ранее для плоской симметрии. Это не случайно: собственные функции и собственные значения одинаковы для всех геометрий, в которых уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных (этот факт с общих позиций обсуждается в приложении I).

Цилиндрическая геометрия. Наиболее подробно метод сферических гармоник в случае цилиндрической геометрии рассмотрел Кофинк [65]. В этом случае (см. разд. 2.1 и приложение В) зависимость фазовой плотности $\psi(r, \Omega)$ от переменных можно представить в виде

$$\psi = \psi(\eta, \mu, \varphi_\Omega - \varphi_\eta)$$

(обозначения взяты из части С разд. 2.1). В обозначениях Кофинка

$$\mu = \cos \theta, \quad (11a)$$

$$\varphi = \varphi_\Omega - \varphi_\eta \quad (11b)$$

уравнение переноса принимает вид

$$\begin{aligned} \sin \theta \left[\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\sin \varphi}{\eta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right] + \sigma(\eta) \psi(\eta, \theta, \varphi) = \\ = q(\eta) + c\sigma(\eta) \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' f(\Omega' \cdot \Omega) \psi(\eta, \theta', \varphi'). \end{aligned} \quad (12)$$

Разложение фазовой плотности по сферическим функциям (см. приложение В) и обычное разложение индикатрисы рассеяния $f(\Omega' \cdot \Omega)$ по полиномам Лежандра приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} A_{lm} \left[\frac{d}{d\eta} + \frac{m+1}{\eta} \right] \psi_{l+1, m+1}(\eta) - \\ - B_{lm} \left[\frac{d}{d\eta} - \frac{m-1}{\eta} \right] \psi_{l+1, m-1}(\eta) - C_{lm} \left[\frac{d}{d\eta} + \frac{m+1}{\eta} \right] \psi_{l-1, m+1}(\eta) + \\ + D_{lm} \left[\frac{d}{d\eta} - \frac{m-1}{\eta} \right] \psi_{l-1, m-1}(\eta) = q_{lm} + \sigma \gamma_l \psi_{lm}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$A_{lm} = \frac{[(l+m+1)(l+m+2)]^{1/2}}{2(2l+3)}, \quad (14a)$$

$$B_{lm} = \frac{[(l-m+1)(l-m+2)]^{1/2}}{2(2l+3)}, \quad (14b)$$

$$C_{lm} = \frac{[(l-m-1)(l-m)]^{1/2}}{2(2l-1)}, \quad (14c)$$

$$D_{lm} = \frac{[(l-m-1)(l-m)]^{1/2}}{2(2l-1)}, \quad (14d)$$

$$\gamma_l = 1 - cf_l. \quad (14e)$$

8.6. Двойной P_L -метод

Другой вариант метода сферических гармоник, нашедший применение при решении проблем переноса, был развит Ивоном¹⁾, предложившим разлагать фазовую плотность в отдельные ряды по полиномам Лежандра²⁾ при $\mu > 0$ и $\mu < 0$. Смысл такого разложения состоит в том, что на границах раздела рассеивающих сред и на свободных поверхностях фазовая плотность может терпеть разрыв при $\mu = 0$, а при $\mu > 0$ и $\mu < 0$ она непрерывна. Таким образом, можно надеяться, что «двойное» разложение фазовой плотности лучше, чем одинарное с удвоенным числом членов.

В соответствии с этим можно надеяться, что двойное P_1 -приближение даст большую точность, чем одинарное P_3 -приближе-

¹⁾ J. Iyon, не опубликовано; см. также [7].

²⁾ Мы рассмотрим здесь лишь плоскую геометрию.

ние; в некоторых задачах эти надежды оправдались. Сейчас мы наметим вывод уравнений в двойном P_L -приближении (DP_L). Начнем с разложения фазовой плотности:

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \psi_l^+(x) P_l(2\mu-1), \quad \mu > 0, \quad (1a)$$

$$\psi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \psi_l^-(x) P_l(2\mu+1), \quad \mu < 0. \quad (1b)$$

В дальнейшем нам понадобится соотношение

$$\mp \int_0^{\mp 1} P_l(2\mu \pm 1) P_{l'}(2\mu \pm 1) d\mu = \frac{\delta_{ll'}}{2l+1}. \quad (2)$$

Разложим индикатрису рассеяния $f(\Omega' \cdot \Omega)$, как мы уже делали много раз:

$$f(\Omega' \cdot \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\Omega) Y_{lm}(\Omega'). \quad (3)$$

Прежде чем подставить эти разложения в уравнение переноса, запишем интегральный член уравнения в виде

$$J = \sum_l f_l \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 d\mu' Y_{lm}^*(\mu, \varphi) Y_{lm}(\mu', \varphi') \psi(x, \mu') \quad (4)$$

и проинтегрируем по $d\varphi'$. Так как (приложение А)

$$Y_{lm} = K_{lm}(\mu) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

где K_{lm} не зависит от φ , то

$$J = \sum_l f_l \int_{-1}^1 d\mu' K_{lm}^*(\mu) K_{lm}(\mu') \psi(x, \mu') \int_0^{2\pi} d\varphi' e^{im(\varphi' - \varphi)}, \quad (6a)$$

откуда

$$J = 2\pi \sum_l f_l \int_{-1}^1 d\mu' K_{l0}^*(\mu) K_{l0}(\mu') \psi(x, \mu'), \quad (6b)$$

поскольку

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' e^{im\varphi'} = 2\pi \delta_{m0}.$$

Согласно (А.4) (приложение А),

$$K_{l0}(\mu) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} P_l(\mu), \quad (7)$$

так что формула (6b) переходит в

$$J = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l \int_{-1}^1 d\mu' P_l(\mu) P_l(\mu') \psi(x, \mu'). \quad (8)$$

Наконец,

$$P_l(\mu) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{l\lambda} P_{\lambda}(2\mu-1), \quad \mu > 0, \quad (9a)$$

и

$$P_l(\mu) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{l\lambda} P_{\lambda}(2\mu+1), \quad \mu < 0. \quad (9b)$$

В силу (2)

$$a_{l\lambda} = (2\lambda+1) \int_0^1 P_{\lambda}(2\mu-1) P_l(\mu) d\mu, \quad (10a)$$

$$b_{l\lambda} = (2\lambda+1) \int_{-1}^0 P_{\lambda}(2\mu+1) P_l(\mu) d\mu. \quad (10b)$$

Эти интегралы при любых значениях l и λ вычисляются без труда:

$$a_{00} = b_{00} = 1, \quad (11a)$$

$$a_{01} = b_{01} = 0, \quad (11b)$$

$$a_{10} = -b_{10} = -\frac{1}{2}, \quad (11c)$$

$$a_{11} = b_{11} = \frac{1}{2} \quad (11d)$$

и т. д.

Теперь можно подставить разложение для $\psi(x, \mu')$ (формула (1)) в (8). Пусть

$$J = J_+ + J_-, \quad (12)$$

где

$$J_+ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l \int_0^1 d\mu' P_l(\mu) P_l(\mu') \psi(x, \mu'), \quad (13a)$$

$$J_- = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} f_l \int_{-1}^0 d\mu' P_l(\mu) P_l(\mu') \psi(x, \mu'). \quad (13b)$$

Тогда

$$J_+ = \sum_{l, l', \lambda} \frac{2l+1}{2} f_l P_l(\mu) a_{l\lambda} (2l' + 1) \psi_l^\dagger \times \\ \times \int_0^1 P_\lambda(2\mu' - 1) P_{l'}(2\mu' - 1) d\mu', \quad (14a)$$

или

$$J_+ = \sum_{l, \lambda} \frac{2l+1}{2} f_l \psi_\lambda^\dagger a_{l\lambda} P_l(\mu), \quad (14b)$$

и аналогично

$$J_- = \sum_{l, \lambda} \frac{2l+1}{2} f_l \psi_\lambda^- b_{l\lambda} P_l(\mu). \quad (15)$$

Наконец, разложим функцию $q(x, \mu)$:

$$q(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) q_l^\dagger(x) P_l(2\mu-1), \quad \mu > 0, \quad (16a)$$

$$q(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) q_l^-(x) P_l(2\mu+1), \quad \mu < 0. \quad (16b)$$

Теперь запишем уравнение переноса в виде

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi = c (J^+ + J^-) + \frac{1}{v\sigma} q \quad (16c)$$

и подставим в него все найденные разложения, а также соответствующие разложения для $P_l(\mu)$:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \sum_l (2l+1) \psi_l^\dagger(x) P_l(2\mu-1) = \\ = c \sum_{l, \lambda, \lambda'} \left(\frac{2l+1}{2} \right) f_l a_{l\lambda} P_{\lambda'}(2\mu-1) [a_{l\lambda} \psi_\lambda^\dagger + b_{l\lambda} \psi_\lambda^-] + \\ + \frac{1}{v\sigma} \sum_l (2l+1) q_l^\dagger(x) P_l(2\mu-1), \quad \mu > 0; \quad (17a)$$

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} + 1 \right) \sum_l (2l+1) \psi_l^-(x) P_l(2\mu+1) = \\ = c \sum_{l, \lambda, \lambda'} \left(\frac{2l+1}{2} \right) f_l b_{l\lambda} P_{\lambda'}(2\mu+1) [a_{l\lambda} \psi_\lambda^\dagger + b_{l\lambda} \psi_\lambda^-] + \\ + \frac{1}{v\sigma} \sum_l (2l+1) q_l^-(x) P_l(2\mu+1), \quad \mu < 0. \quad (17b)$$

Нетрудно догадаться, что следующий шаг — умножение уравнения (17а) на $P_j(2\mu - 1)$ и интегрирование его по μ от 0 до 1; затем умножение уравнения (17б) на $P_j(2\mu + 1)$ и интегрирование его по μ от -1 до 0. Единственный член, который не удастся проинтегрировать непосредственно (с помощью соотношения ортогональности (2)), — это член с $\mu(\partial/\partial x)$. Его можно вычислить с помощью формул

$$\int_0^1 \mu P_l(2\mu - 1) P_j(2\mu - 1) d\mu = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (x+1) P_l(x) P_j(x) dx = \\ = \frac{1}{2(2j+1)} \left[\frac{j}{2j-1} \delta_{l,j-1} + \frac{j+1}{2j+3} \delta_{l,j+1} + \delta_{lj} \right]; \quad (18a)$$

$$\int_{-1}^0 \mu P_l(2\mu + 1) P_j(2\mu + 1) d\mu = \\ = \frac{1}{2(2j+1)} \left[\frac{j}{2j+1} \delta_{l,j-1} + \frac{j+1}{2j+3} \delta_{l,j+1} - \delta_{lj} \right]. \quad (18b)$$

С учетом этих формул уравнения (17) принимают вид

$$\frac{1}{2(2j+1)} \left[j \frac{\partial \psi_{j-1}^+}{\partial x} + (j+1) \frac{\partial \psi_{j+1}^+}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j^+}{\partial x} \right] + \psi_j^+ = \\ = \frac{c}{2} \sum_{l,\lambda} \left(\frac{2l+1}{2j+1} \right) f_l a_{lj} [a_{l\lambda} \psi_\lambda^+ + b_{l\lambda} \psi_\lambda^-] + \frac{1}{v\sigma} q_j^+; \quad (19a)$$

$$\frac{1}{2(2j+1)} \left[j \frac{\partial \psi_{j-1}^-}{\partial x} + (j+1) \frac{\partial \psi_{j+1}^-}{\partial x} - \frac{\partial \psi_j^-}{\partial x} \right] + \psi_j^- = \\ = \frac{c}{2} \sum_{l,\lambda} \left(\frac{2l+1}{2j+1} \right) f_l b_{lj} [a_{l\lambda} \psi_\lambda^- + b_{l\lambda} \psi_\lambda^+] + \frac{1}{v\sigma} q_j^-. \quad (19b)$$

По аналогии с обычным P_L -методом приходим к DP_L -приближению, положив $\psi_{L+1}^+ = \psi_{L+1}^- = 0$. Тогда получим систему из $2(L+1)$ уравнений (в обычном методе $L+1$ уравнений).

Некоторые из обсуждавшихся здесь методов сравнивались со строгими численными методами; при этом было найдено, что в ряде случаев DP_L -приближение дает такую же или даже более высокую точность, чем P_3 -приближение [66]. В этом мы видим некоторое подтверждение нашего предположения о более высокой точности этого метода.

Шифф и Зиринг [67] предложили различные обобщения этого метода, в том числе P_L -методы более высокой кратности (квадратные и т. д.), и применили их для других геометрий.

8.7. Общие замечания о методах дискретных ординат

Рассмотрим еще один тип методов решения уравнения переноса нейтронов, состоящий в использовании дискретного набора точек (по углу) для аппроксимации фазовой плотности (вместо разложения ее в ряд по дискретному набору функций угла). Проще всего излагать этот подход на примере одномерного уравнения с плоской симметрией. Так мы и будем делать. Мы обсудим только два метода дискретных ординат — метод квадратур Вика — Чандрасекара — Гаусса [68] (ввиду его исторической важности) и S_N -метод [69] (ввиду его теперешней популярности).

Эти два метода существенно отличаются друг от друга. Чтобы увидеть это, обрисуем кратко общие идеи обоих методов. В каждом случае, разумеется, начнем с решения односкоростного одномерного уравнения переноса и для простоты будем предполагать рассеяние изотропным:

$$\frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi = \frac{c}{2} \int \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{q(x, \mu)}{v\sigma}. \quad (1)$$

Сначала рассмотрим метод гауссовых квадратур. В этом случае интеграл по углам оценивается с помощью квадратурной формулы Гаусса [70, 71], согласно которой интеграл заменяется суммой значений подинтегральной функции в нулях полинома $P_N(\mu)$, взятых с подходящими весами¹⁾:

$$\int \psi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{j=1}^N \psi(x, \mu_j) w_j. \quad (2)$$

Если отнести левую часть уравнения (1) к тем же самым значениям μ_j , получим систему N уравнений с N неизвестными $\psi(x, \mu_j)$. В этом сущность метода Вика — Чандрасекара.

В S_N -методе отрезок $-1 \leq \mu \leq 1$ разбивается на N частей $[\mu_{j-1}, \mu_j]$, $j = 1, 2, \dots, N$, в каждой из которых фазовая плотность предполагается линейной по μ . Тогда удастся вычислить интеграл в уравнении переноса (по существу методом трапеций). Кроме того (и именно этим данный метод отличается от метода Вика — Чандрасекара), само уравнение переноса интегрируется последовательно в каждом отрезке, по-прежнему в предположении линейной зависимости ψ от μ . В результате получается набор из N уравнений с $(N+1)$ неизвестными $\psi(\mu_j) \equiv \psi_j$. В качестве $(N+1)$ -го уравнения обычно берут само уравнение переноса с $\mu = -1$.

¹⁾ Относительные веса w_j называются числами Кристоффеля. Они протабулированы в книге [72]. Формула (2) точна, если $\psi(x, \mu')$ — многочлен по μ' степени не выше $2N-1$.

В следующем разделе мы покажем, что процедура Вика — Чандрасекара в некотором смысле эквивалентна методу сферических гармоник; эта процедура теперь редко применяется в практических приложениях, хотя, как будет видно дальше, по-прежнему представляет определенный теоретический интерес. S_N -метод, напротив, применяется, по-видимому, чаще, чем любой другой метод приближенного решения уравнения переноса, если непременно диффузионное приближение (это верно по крайней мере в отношении расчета реакторов).

8.8. Метод гауссовых квадратур. Эквивалентность методу сферических гармоник

Уравнения в этом приближении были, по существу, уже выведены в предыдущем разделе. Если используется N -точечная квадратурная формула, то

$$\mu_j \frac{\partial \psi_j(x)}{\partial x} + \psi_j(x) = \frac{c}{2} \sum_{j=1}^N w_j \psi_j(x) + \frac{q_j(x)}{v\sigma}, \quad (1)$$

где $\psi_j \equiv \psi(\mu_j)$, $q_j \equiv q(\mu_j)$. При этом точки μ_j расположены симметрично относительно $\mu = 0$ и $w(-\mu_j) = w(\mu_j)$.

Докажем, что этот подход эквивалентен P_{N-1} -методу ¹⁾. Прежде всего отметим, что существует набор функций $\psi^{(l)}$, для которых

$$\psi_j(x) = \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2l+1}{2} \psi^{(l)}(x) P_l(\mu_j), \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

В самом деле, правая часть равенства (2) представляет собой многочлен степени $N-1$, который можно заставить пройти через любые N точек в плоскости (μ, ψ) .

Подставим (2) в первый член в правой части уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{c}{4} \sum_{j=1}^N w_j \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1) \psi^{(l)}(x) P_l(\mu_j) &= \\ &= \frac{c}{4} \sum_{l=0}^{N-1} (2l+1) \psi^{(l)}(x) \sum_{j=1}^N w_j P_l(\mu_j). \end{aligned} \quad (3)$$

Внутренняя сумма в правой части равенства (3) есть не что иное, как гауссова квадратура для $P_l(\mu)$, $l = 0, 1, \dots, N-1$, кото-

¹⁾ Доказательство принадлежит Р. Гасту [73]. (См. также [74, 75]. — *Ред.*)

рая, согласно предыдущему разделу, является точной, т. е.

$$\sum_{j=1}^N w_j P_l(\mu_j) = 2\delta_{l0}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и учтем (2):

$$\frac{c}{2} \sum_{j=1}^N w_j \psi_j(x) = \frac{c}{2} \psi^{(0)}(x). \quad (5)$$

Подставим (2) и (5) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} \mu_j \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2l+1}{2} \frac{\partial \psi^{(l)}(x)}{\partial x} P_l(\mu_j) + \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2l+1}{2} \psi^{(l)}(x) P_l(\mu_j) = \\ = \frac{c}{2} \psi^{(0)}(x) + \frac{1}{v\sigma} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{2l+1}{2} q^{(l)}(x) P_l(\mu_j); \end{aligned} \quad (6)$$

здесь использовано аналогичное формуле (2) разложение плотности источников q . Применяя теперь в первом члене уравнения (6) рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра (формула (7) разд. 8.4) и меняя обозначения индексов суммирования в первых двух членах, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^N \frac{\partial \psi^{(h-1)}}{\partial x} h P_h(\mu_j) + \sum_{m=0}^{N-2} \frac{\partial \psi^{(m+1)}}{\partial x} (m+1) P_m(\mu_j) + \\ + \sum_{l=0}^{N-1} P_l(\mu_j) \left[(2l+1) \psi^{(l)} - c \psi^{(0)} \delta_{l0} - \frac{1}{v\sigma} (2l+1) q^{(l)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Наконец, учитывая, что

$$P_N(\mu_j) \equiv 0 \quad (8)$$

(поскольку по определению μ_j — нули функции $P_N(\mu)$), запишем уравнение (7) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} P_l(\mu_j) \left[l \frac{\partial \psi^{(l-1)}}{\partial x} + (l+1) \frac{\partial \psi^{(l+1)}}{\partial x} + (2l+1) \psi^{(l)} - \right. \\ \left. - c \psi^{(0)} \delta_{l0} - \frac{1}{v\sigma} (2l+1) q^{(l)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если теперь положить коэффициенты при P_l равными нулю, то придем как раз к P_{N-1} -системе (уравнения (11) разд. 8.4 с $f_i = 0$, $i > 0$). Таким образом, эквивалентность метода гауссовых квадратур методу сферических гармоник (P_L -приближение соответствует квадратуре с $L+1$ точками) доказана.

По-видимому, предположение об изотропном рассеянии не было необходимым. Доказательство останется в силе, если гауссова квадратура интегрального члена $\int f(\Omega' \cdot \Omega) \psi(x, \mu') d\mu'$ в уравнении переноса будет точна. А это в свою очередь выполняется для любой индикатрисы рассеяния $f(\Omega' \cdot \Omega)$, содержащей только первые N полиномов Лежандра (для метода Гаусса с N точками, соответствующего P_{N-1} -приближению). Это связано с тем, что N -точечная квадратурная формула Гаусса, как мы уже указывали, верна для полиномов степени до $2N - 1$ включительно, а фазовая плотность выражается полиномом степени $N - 1$ (разложение (2)). Заметим, что в P_{N-1} -приближении только первые $(N - 1)$ моментов Лежандра функции $f(\Omega' \cdot \Omega)$ всегда отличны от нуля, а моменты более высоких порядков могут вести себя по-разному. При этом P_{N-1} -приближение и N -точечный метод Гаусса эквивалентны, если все моменты более высоких порядков тождественно равны нулю, и не эквивалентны в противном случае.

Теперь понятно, почему P_L -приближения четных порядков обычно не применяются. Из приведенного выше доказательства видно, что приближение четного порядка в методе сферических гармоник соответствует приближению гауссовых квадратур нечетного порядка. Но при этом фазовая плотность оценивается в нулях полинома P_{2L-1} , одним из которых является $\mu = 0$. Поскольку фазовая плотность, вообще говоря, разрывна при $\mu = 0$, эта процедура может оказаться неудачной¹⁾.

Наконец, отметим, что существует метод «двойных гауссовых квадратур», соответствующий двойному P_L -методу, изложенному в разд. 8.6. Этот метод изложен в работе Гаста [73].

8.9. S_N -метод

Основное предположение в S_N -приближении к уравнению переноса состоит в том, что отрезок $-1 \leq \mu \leq 1$ можно разбить на N частей $[\mu_{j-1}, \mu_j]$, $j = 1, \dots, N$, в каждой из которых фазовая плотность линейно зависит от μ . Следовательно²⁾, можно написать

$$\psi(x, \mu) = \frac{\mu - \mu_{i-1}}{\mu_i - \mu_{i-1}} \psi_i(x) + \frac{\mu_i - \mu}{\mu_i - \mu_{i-1}} \psi_{i-1}(x), \quad \mu_{i-1} \leq \mu \leq \mu_i, \quad (1)$$

¹⁾ Если мы рассмотрим границу между средой и вакуумом, то заметим, что в среде есть нейтроны с вектором скорости, параллельным границе, а в вакууме таких нейтронов нет. Этот аргумент, насколько нам известно, впервые применен Б. Спиррадом (частное сообщение).

²⁾ Мы по-прежнему рассматриваем случай плоской симметрии и изотропного рассеяния.

где $\psi_i(x) \equiv \psi(x, \mu_i)$. Подставим выражение (1) (и аналогичное выражение для плотности анизотропного источника) в уравнение переноса и проинтегрируем его по μ от μ_{i-1} до μ_i :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{6} \right) \left[(2\mu_i + \mu_{i-1}) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + (\mu_i + 2\mu_{i-1}) \frac{\partial \psi_{i-1}}{\partial x} \right] + \\ & + \left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{2} \right) [\psi_i + \psi_{i-1}] = \\ & = \frac{c}{4\pi} (\mu_i - \mu_{i-1}) \rho + \left(\frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{2} \right) (q_i + q_{i-1}). \quad (2) \end{aligned}$$

Поскольку в системе (2) только N уравнений, но $N + 1$ неизвестных ψ_i , нужно найти еще одно уравнение; в качестве такового обычно берут уравнение переноса, заданное при $\mu = \mu_0 \equiv -1$:

$$-\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + \psi_0 = \frac{c}{4\pi} \rho + q_0. \quad (3)$$

Уравнения (2) — (3) образуют S_N -систему.

Заметим, что в первом члене правых частей уравнений (2) и (3) стоит ρ . Очевидно, ρ можно выразить через ψ_i , ибо в соответствии с нашими предположениями о характере зависимости ψ от μ интеграл

$$\frac{\rho(x)}{2\pi} = \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu \quad (4a)$$

можно вычислить по формуле трапеций:

$$\frac{\rho(x)}{2\pi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mu_i - \mu_{i-1}) (\psi_i + \psi_{i-1}). \quad (4b)$$

Однако при решении на ЭВМ обычно применяют метод итераций. Сначала выбирают разумное первое приближение для ρ , затем из уравнений (2) и (3) определяют ψ_i и с помощью (4b) вычисляют следующее приближение для ρ . Эта процедура продолжается до тех пор, пока два последовательных значения ρ не совпадут с заданной точностью. Причина использования такой процедуры чисто практическая: прямое решение системы уравнений высокого порядка путем обращения матриц занимает гораздо больше времени на вычислительных машинах, чем только что описанная итерационная процедура. Заметим к тому же, что S_N -система особенно подходит для такой процедуры, поскольку она «треугольная». Это значит, что после того, как ρ задано, ψ_0 можно вычислить с помощью (3); затем подставляют в (2) $i = 1$ и находят ψ_1 ; положив $i = 2$, находят ψ_2 и т. д.

Относительно точности, достигаемой в S_N -приближениях, высказывались различные утверждения. Карлсон и Белл [69] считают, что точность S_2 -приближения сравнима с точностью P_3 -приближения (при этом S_2 -система содержит только 3 уравнения с 3 неизвестными, а не 4, как P_3 -система); кроме того, S_4 -приближение сравнимо с P_5 -приближением. Как бы то ни было, этот метод сейчас наиболее часто применяется для численных расчетов нейтронных задач, когда диффузионное приближение оказывается неприменимым.

Распространение S_N -метода на случай анизотропного рассеяния несколько громоздко. В большей части односкоростных вычислений используется так называемое «транспортное приближение», в котором сечение рассеяния σ_0 заменяется на «транспортное сечение» $\sigma_0(1 - f_1)$. В работе Латропа [76] транспортное приближение сопоставляется с некоторыми другими схемами, в которых учтено анизотропное рассеяние, и приводятся результаты численного сравнения. За подробностями читатель отсылается к упомянутой работе.

Транспортное приближение обсуждается также в работе Цвайфеля и Гарга [77]. В качестве альтернативы транспортному приближению они предложили так называемое $(S_N - P_1)$ -приближение. Чтобы понять, в чем смысл этого приближения, рассмотрим уравнения (2) и (3) в случае анизотропного P_1 -рассеяния. Тогда к правой части уравнения (2) добавится член

$$\frac{3c}{8\pi} (\mu_j^2 - \mu_{j-1}^2) J, \quad (5a)$$

а к правой части уравнения (3) добавится член¹⁾

$$-\frac{3c}{4\pi} f_1 J. \quad (5b)$$

По аналогии с (4a) запишем

$$\frac{J(x)}{2\pi} = \int_{-1}^1 \mu \psi(\mu) d\mu, \quad (6)$$

где $\psi(\mu)$ определяется соотношением (1). Очевидно, что

$$\frac{J}{2\pi} = \sum_{i=1}^N \frac{(\mu_i - \mu_{i-1})}{6} \{ (2\mu_i + \mu_{i-1}) \psi_i + (\mu_i + 2\mu_{i-1}) \psi_{i-1} \}. \quad (7)$$

Транспортное приближение можно теперь проверить, подставив (7) в (5), а результат — в (2) и (3), после чего сравнить новые уравнения с теми, в которые переходят (2) и (3) при замене

¹⁾ В работе Цвайфеля и Гарга [77] ρ и J нужно заменить на $\rho/2\pi$ и $J/2\pi$. Здесь J — ток нейтронов.

c на $c(1 - f_1)$. Оказывается, полученные таким образом системы уравнений не тождественны, так что неясно, каковы теоретические основы транспортного приближения.

В $(S_N - P_1)$ -приближении величина J в (5) заменяется соответствующей величиной в диффузионном приближении (разд. 8.3):

$$J = -D \frac{dp}{dx}, \quad (8a)$$

или

$$J = -\frac{1}{3(1 - cf_1)} \frac{dp}{dx}. \quad (8b)$$

Это приближение проверялось численно в работе [77]; результаты получились удовлетворительные. Например, «точное» S_2 -приближение при $c = 0,7$, $f_1 = 0,3$ дает для экстраполированной длины в проблеме Милна значение 0,9233; в транспортном приближении $z_0 = 0,8856$, а в $(S_2 - P_1)$ -приближении $z_0 = 0,9109$. «Точное» значение получалось из решения уравнений (2) и (3) с дополнительными членами (5) и формулой (7) для J . В работе [77] проведено также сравнение диффузионных длин v_0^{-1} в различных приближениях. Оказалось, что $(S_N - P_1)$ -приближение для большинства значений c и f_1 дает лучшие результаты, чем транспортное приближение.

Описание более сложных приближенных методов решения уравнения переноса с анизотропным рассеянием можно найти в работе Латропа [76]; см. также Латроп и Леонард [78].

Глава 9

ИНВАРИАНТНОЕ ПОГРУЖЕНИЕ

9.1. Введение

Совсем другой подход к решению задач теории переноса предложил Амбарцумян [79]. Это так называемый метод *инвариантного погружения*. Многочисленные приложения этого метода осуществлены Чандрасекаром [43]. В последние годы появилась обширная литература, посвященная распространению метода на другие задачи теории переноса и иных разделов математической физики [54].

Поскольку окончательные уравнения, которые нам в итоге придется решать, совпадают с уже рассмотренными, мы ограничимся выводом уравнений для задач о плоском слое и полупространстве и покажем их эквивалентность уравнениям, полученным раньше.

Сначала, однако, стоит рассмотреть физические основания метода и наметить общий способ его применения. Предположим, что некоторая область V заполнена веществом и ограничена поверхностью S . Часто возникает следующий вопрос: пусть распределение падающего на S излучения является заданной функцией точки; каково тогда угловое распределение выходящего излучения в каждой точке поверхности S ? Для ответа на этот вопрос надо решить уравнение переноса при заданном распределении падающего излучения. Устремив затем пространственную переменную решения к граничному значению, найдем распределение выходящего излучения. (Отметим, однако, что при этом мы на самом деле получаем большую информацию, чем требуется. Действительно, попутно мы вычисляем фазовую плотность внутри области — задача, которая даже экспериментально решается непросто.)

Итак, возникает задача построения уравнения, непосредственно связывающего заданные и искомые величины. Для решения этой задачи полезно представить себе, как поступил бы экспериментатор, пытаясь найти эти соотношения. По-видимому, он потребовал бы варьировать имеющиеся в его распоряжении параметры, такие, как размер и форма области, распределение падающего излучения. Изучение зависимости представляющих

интерес величин от таких параметров и приводит к уравнениям метода инвариантного погружения.

Чтобы найти эту зависимость, представим себе, что вещество, заполняющее интересующую нас область, заполняет также все пространство. Как мы уже видели в разд. 2.5, фазовая плотность внутри V определяется *только* распределением падающего на границу S излучения. Можно потребовать, чтобы фазовая плотность вне S тождественно равнялась нулю. Тогда можно считать, что уравнение переноса удовлетворяется всюду. Разрыв фазовой плотности соответствует наличию поверхностных источников, распределенных по поверхности S . Мощность этих источников в точке \mathbf{r}_s равна

$$+\hat{n}_i \cdot \Omega \psi(\mathbf{r}_s, \Omega). \quad (1)$$

(Здесь через \hat{n}_i обозначена внутренняя нормаль, а ψ — предел функции $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ при $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_s$ изнутри.) Заметим, что при $\hat{n}_i \cdot \Omega > 0$ эта мощность известна. При $\hat{n}_i \cdot \Omega < 0$ мощность не известна, и ее-то мы и должны определить. Чтобы найти указанную зависимость от различных параметров, можно поступить следующим образом.

Пусть ψ' — решение уравнения переноса, соответствующее другой области V' и другому угловому распределению падающего излучения. Мы снова считаем, что эта область составляет часть бесконечного пространства, заполненного тем же веществом. По-прежнему предполагается, что уравнение переноса удовлетворяется всюду. (Теперь решение тождественно равно нулю вне V' .) Это также требует введения поверхностных источников, частично известных, частично нет. Придерживаясь последовательности операций разд. 2.7, которая привела к соотношению взаимности, мы получаем нелинейное интегральное соотношение между различными источниками и ψ, ψ' . Если область V' отличается от V только бесконечно малым изменением некоторых параметров, то с помощью этого соотношения можно выяснить зависимость интересующих нас величин от этих параметров.

9.2. Уравнения для задачи о плоском слое

Продemonстрируем детали метода на примере диффузии нейтронов в бесконечном слое. Для простоты ограничимся функцией рассеяния, инвариантной относительно вращений¹⁾, и случаем плоской симметрии. Без ограничения общности полагаем $\sigma = 1$. Временно будем считать с функцией пространственной координаты z (измеряемой вдоль направления, перпендикулярного границе слоя). Основная задача, о которой шла речь в разд. 9.1, состоит

¹⁾ Более общий случай исследован в работе [80].

в определении распределения выходящего через границы слоя излучения при условии, что задано распределение падающего извне излучения. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда падающее излучение представляет собой хорошо коллимированный пучок в заданном (но произвольном) направлении.

Для наших целей удобно разбить уравнение переноса на два уравнения, соответствующие нейтронам, движущимся направо ($\Omega_z = \mu > 0$), и нейтронам, движущимся налево ($\Omega_z = \mu < 0$). Положим, таким образом,

$$\Psi_{\pm}(z, \Omega) = \psi(z, \pm\Omega), \quad (1)$$

причем всегда $\mu \geq 0$. Однородное уравнение переноса эквивалентно тогда уравнениям

$$\begin{aligned} \pm \mu \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial z} + \Psi_{\pm}(z, \Omega) = \\ = c(z) \int_{\mu' > 0} [f(\pm \Omega \cdot \Omega') \Psi_{+}(z, \Omega') + f(\mp \Omega \cdot \Omega') \Psi_{-}(z, \Omega')] d\Omega'. \quad (2^{\pm}) \end{aligned}$$

Если рассматривается слой $a \leq z \leq b$, то требуется еще, чтобы $\Psi_{+}(a, \Omega)$ и $\Psi_{-}(b, \Omega)$ были заданы. Придадим этой задаче другую форму, погрузив наш слой в бесконечную среду. Это означает, что мы добавляем к правым частям уравнений (2^{\pm}) источники $q_{\pm}(z, \Omega)$, где

$$q_{+} = \mu \Psi_{+}(a, \Omega) \delta(z - a) - \mu \Psi_{+}(b, \Omega) \delta(z - b), \quad (3^{+})$$

$$q_{-} = -\mu \Psi_{-}(a, \Omega) \delta(z - a) + \mu \Psi_{-}(b, \Omega) \delta(z - b), \quad (3^{-})$$

и требуем, чтобы новые уравнения удовлетворялись во всем пространстве и чтобы выполнялось условие $\Psi = 0$ при $z < a$ и $z > b$.

Исследуем вместе решения двух различных задач (задаче i соответствует индекс $i = 1, 2$). Функции $\Psi^{(i)}(z, \Omega)$ отвечает задача о плоском слое $a_i \leq z \leq b_i$ с заданными функциями $\Psi_{+}^{(i)}(a_i, \Omega)$ и $\Psi_{-}^{(i)}(b_i, \Omega)$.

Функции $\Psi_{\pm}^{(i)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \pm \mu \frac{\partial \Psi_{\pm}^{(i)}}{\partial z} + \Psi_{\pm}^{(i)}(z, \Omega) = c(z) \int_{\mu' > 0} [f(\pm \Omega \cdot \Omega') \Psi_{+}^{(i)}(z, \Omega') + \\ + f(\mp \Omega \cdot \Omega') \Psi_{-}^{(i)}(z, \Omega')] d\Omega' + q_{\pm}^{(i)}(z, \Omega). \quad (4^{\pm}) \end{aligned}$$

(Здесь $q_{\pm}^{(i)}$ определяются формулами (3^{\pm}) с соответствующими индексами фигурирующих в них величин.)

Будем поступать так же, как в разд. 2.7 при выводе принципа взаимности. Умножим уравнение (4^{+}) для $\Psi_{+}^{(1)}$ на $\Psi_{-}^{(2)}$, уравнение (4^{-}) для $\Psi_{-}^{(1)}$ на $\Psi_{+}^{(2)}$, уравнение (4^{+}) для $\Psi_{+}^{(2)}$ на $\Psi_{-}^{(1)}$ и урав-

нение (4') для $\Psi_-^{(2)}$ на $\Psi_+^{(1)}$. Затем из суммы первого и второго уравнений вычтем сумму третьего и четвертого. Проинтегрируем по всему пространству и по всем Ω ($\mu > 0$). В результате придем к тождеству

$$\begin{aligned} \int d\Omega [\Psi_-^{(2)}(a_1, \Omega) \mu \Psi_+^{(1)}(a_1, \Omega) - \Psi_-^{(2)}(b_1, \Omega) \mu \Psi_+^{(1)}(b_1, \Omega) - \\ - \Psi_+^{(2)}(a_1, \Omega) \mu \Psi_-^{(1)}(a_1, \Omega) + \Psi_+^{(2)}(b_1, \Omega) \mu \Psi_-^{(1)}(b_1, \Omega)] = \\ = \int d\Omega [\Psi_-^{(1)}(a_2, \Omega) \mu \Psi_+^{(2)}(a_2, \Omega) - \Psi_-^{(1)}(b_2, \Omega) \mu \Psi_+^{(2)}(b_2, \Omega) - \\ - \Psi_+^{(1)}(a_2, \Omega) \mu \Psi_-^{(2)}(a_2, \Omega) + \Psi_+^{(1)}(b_2, \Omega) \mu \Psi_-^{(2)}(b_2, \Omega)]. \quad (5) \end{aligned}$$

Если теперь выбрать какие-то определенные задачи 1 и 2, можно получить полезные соотношения и использовать их для выявления свойств решений задач о плоских слоях. Для простоты мы исследуем эти свойства в предположении $c = \text{const}$.

Пусть $a_1 = 0$, $a_2 = x$; $b_1 = \tau$; $b_2 = a_2 + \tau$. Тогда обе наши задачи описывают слой толщины τ , причем у первой левое граничное условие налагается при $z = 0$, а у второй — при $z = x$. Тождество (5) упрощается, поскольку

$$\Psi_-^{(2)}(a_1, \Omega) = \Psi_+^{(2)}(a_1, \Omega) = \Psi_+^{(1)}(b_2, \Omega) = \Psi_-^{(1)}(b_2, \Omega) = 0. \quad (6)$$

В качестве граничных условий задачи 1 возьмем условия

$$\Psi_+^{(1)}(0, \Omega) = \delta_2(\Omega \cdot \Omega_1), \quad \Psi_-^{(1)}(\tau, \Omega) = 0. \quad (7)$$

Обозначим решение этой задачи через $\Psi(z, \Omega; \Omega_1)$. Таким образом, $\Psi^{(1)}$ порождается излучением, падающим на поверхность $z = 0$ в направлении Ω_1 при отсутствии излучения, падающего на поверхность $z = \tau$.

В качестве первого варианта задачи 2 рассмотрим задачу, в которой поток излучения падает на поверхность $z = x$ в направлении Ω_2 при отсутствии излучения, падающего на поверхность $z = x + \tau$. Так как $c = \text{const}$, то очевидно, что

$$\Psi^{(2)}(z, \Omega) = \Psi(z - x, \Omega; \Omega_2). \quad (8)$$

Для удобства поменяв местами индексы 1 и 2, приведем тождество (5) к виду

$$\begin{aligned} \mu_1 \Psi_-(x, \Omega_1; \Omega_2) - \int d\Omega \mu \Psi_+(x, \Omega; \Omega_2) \frac{S(\Omega, \Omega_1)}{\mu} = \\ = - \int d\Omega \mu \Psi_-(\tau - x, \Omega; \Omega_1) \frac{T(\Omega, \Omega_2)}{\mu}, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = \mu_1 \Psi_-(0, \Omega_1; \Omega_2), \quad (10)$$

$$T(\Omega_1, \Omega_2) = \mu_1 \Psi_+(\tau, \Omega_1; \Omega_2). \quad (11)$$

(Функции S и T представляют наибольший с физической точки зрения интерес. Они определяют потоки излучения, отраженного

и пропущенного слоем толщины τ при условии, что на него извне падает мононаправленный поток.)

Физический смысл соотношения (9) очевиден. Оно просто показывает, что фазовый ток излучения, распространяющегося налево и обусловленного излучением, падающим на поверхность $z = 0$ в направлении Ω_2 , в точке x плоского слоя $0 \leq z \leq \tau$ можно получить, учитывая отражение от слоя $x \leq z \leq x + \tau$ излучения, движущегося направо, и поправку, обусловленную тем, что пространство между плоскостями τ и $\tau + x$ в действительности не заполнено веществом (нейтроны, прошедшие за плоскость $z = \tau$, не отражаются).

В самом деле, основываясь на таких интуитивных соображениях, можно без труда вывести [54] уравнение (9) и связанное с ним соотношение (14). Мы не следуем этому пути, так как хотим показать, что вся доступная информация уже содержится в уравнении переноса. Никакие рассуждения, основанные на здравом физическом смысле, как бы остроумны они ни были, не дадут новой информации. (Разумеется, на таком пути могут появиться также уравнения, связь которых с уравнением переноса непосредственно не видна.)

Нетрудно показать, что функция S обладает простым свойством симметрии. Устремим в уравнении (9) x к нулю. В силу граничных условий (7)

$$\mu_1 \Psi_-(0, \Omega_1; \Omega_2) = \int d\Omega \mu \delta_2(\Omega \cdot \Omega_2) S(\Omega, \Omega_1), \quad (12)$$

а в силу (10)

$$S(\Omega_1, \Omega_2) = S(\Omega_2, \Omega_1).$$

(Это, конечно, частный случай общего принципа взаимности, полученного в разд. 2.7. Мы просто повторили сделанные там выкладки.)

Более существенную информацию дает дифференцирование тождества (9) по x и переход к пределу при $x \rightarrow 0$. С помощью уравнений (2^\pm) выразим производные через значения функций на границах и учтем симметрию функции S :

$$\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) S(\Omega_1, \Omega_2) = c \iint d\Omega d\Omega' f(-\Omega \cdot \Omega') \{ \}_1, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} \{ \}_1 = & \left[\delta_2(-\Omega' \cdot \Omega_2) \mp \frac{S(\Omega', \Omega_2)}{\mu'} \right] \left[\delta_2(-\Omega \cdot \Omega_1) \mp \frac{S(\Omega, \Omega_1)}{\mu} \right] \pm \\ & \pm \frac{T(\Omega_1, \Omega_2)}{\mu} \frac{T(\Omega', \Omega_1)}{\mu'}. \end{aligned}$$

(Для удобства мы проинтегрировали по всем Ω , положив $S = 0$ и $T = 0$ для отрицательных μ или μ' .)

Уравнение (13) представляет собой одно из уравнений для определения S и T . Второе уравнение можно получить, выбрав по-другому задачу 2. Пусть поток излучения падает извне на плоскость $z = x + \tau$ в направлении $-\Omega_2$, а на плоскость $z = x$ не падает никакого излучения. Соответствующее решение строится без труда. Заметим, что если $\Psi(z, \Omega)$ — решение первого варианта уравнений (2), то $\Psi(x + \tau - z, -\Omega)$ будет решением новой задачи. В частности, функция

$$\Psi(x + \tau - z, -\Omega; \Omega_2)$$

удовлетворяет всем условиям новой задачи 2. Поэтому решением $\Psi^{(2)}$ нового варианта задачи 2 служит пара функций:

$$\Psi_+^{(2)}(z, \Omega) = \Psi_-(x + \tau - z, \Omega; \Omega_2),$$

$$\Psi_-^{(2)}(z, \Omega) = \Psi_+(x + \tau - z, \Omega; \Omega_2).$$

Подставим эти функции в тождество (5):

$$\int \mu d\Omega \Psi_+(x, \Omega; \Omega_2) \frac{T(\Omega, \Omega_1)}{\mu} = \int \mu d\Omega \Psi_+(x, \Omega; \Omega_1) \frac{T(\Omega, \Omega_2)}{\mu}. \quad (14)$$

Как и выше, положим сначала $x = 0$. Граничные условия для Ψ_+ приводят теперь к соотношению симметрии

$$T(\Omega_2, \Omega_1) = T(\Omega_1, \Omega_2). \quad (15)$$

Дифференцируя равенство (14) по x , исключая производные с помощью (2⁺) и переходя затем к пределу при $x \rightarrow 0$, получаем

$$T(\Omega_2, \Omega_1) \left[\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right] = c \iint d\Omega d\Omega' f(-\Omega \cdot \Omega') \{ \}_2, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \{ \}_2 = & \frac{T(\Omega, \Omega_1)}{\mu} \left[\delta_2(-\Omega' \cdot \Omega_2) + \frac{S(\Omega', \Omega_2)}{\mu'} \right] - \\ & - \frac{T(\Omega, \Omega_2)}{\mu} \left[\delta_2(-\Omega' \cdot \Omega_1) + \frac{S(\Omega', \Omega_1)}{\mu'} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Итак, мы вывели второе уравнение, связывающее S и T . Следует отметить, что ни уравнение (13), ни уравнение (16) не содержат явно толщины слоя. Эти уравнения удовлетворяются для слоя любой толщины.

Дополнительную информацию, необходимую для выявления зависимости от толщины слоя, дает внимательный анализ уравнения (16). Если мы попытаемся разрешить его относительно T , считая правую часть известной, мы сразу же столкнемся с известной нам ситуацией, когда решение определяется с точностью до слагаемого, пропорционального $\delta(\mu_2 - \mu_1)$. Физически эта функция δ соответствует падающему извне излучению, экспоненциально ослабевающему при прохождении через слой. Таким

образом, уравнение (16) можно представить в следующей форме, однозначным образом отвечающей данному слою:

$$T(\Omega_2, \Omega_1) = \mu_1 \delta_2(\Omega_2, \Omega_1) e^{-\tau/\mu_1} + P \frac{c\mu_1\mu_2}{|\mu_1 - \mu_2|} \iint d\Omega d\Omega' f(-\Omega \cdot \Omega') \{ \}_2. \quad (18)$$

(Здесь символ главного значения P указывает, как нужно обращаться с сингулярностью при $\mu_1 = \mu_2$.) Уравнения (13) и (18) можно использовать для эффективного определения функций S и T [43].

Поскольку наша цель состоит лишь в выяснении связи изложенного метода с развитыми ранее, мы исследуем лишь простейшую задачу, а именно задачу об отражении излучения полупространством.

9.3. Задачи для полупространства

Рассматривая полупространство как плоский слой с $\tau \rightarrow \infty$, мы видим, что первый член в правой части уравнения (18) стремится к нулю. Ясно, что решением будет $T = 0$ ¹⁾. Будем считать для простоты, что рассеяние изотропно. Тогда уравнение (13) для S сводится к уравнению

$$\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) S(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{c}{4\pi} \iint d\Omega d\Omega' \left[\delta_2(-\Omega' \cdot \Omega_2) + \frac{S(\Omega', \Omega_2)}{\mu'} \right] \left[\delta_2(-\Omega \cdot \Omega_1) + \frac{S(\Omega, \Omega_1)}{\mu} \right]. \quad (1)$$

Правая часть представляет собой произведение некоторой функции от μ_1 на ту же самую функцию от μ_2 . Таким образом,

$$\left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) S(\Omega_1, \Omega_2) = \frac{c}{4\pi} H(\mu_2) H(\mu_1), \quad (2)$$

где

$$H(\mu) = \int d\Omega' \left[\delta_2(-\Omega \cdot \Omega') + \frac{S(\Omega', \Omega)}{\mu'} \right]. \quad (3)$$

Если S в формуле (3) выразим с помощью (2), то придем к (нелинейному) интегральному уравнению для H :

$$H(\mu) = 1 + \frac{c\mu}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu) H(\mu')}{\mu + \mu'} d\mu'. \quad (4)$$

¹⁾ Так будет по крайней мере в физически интересном случае $c < 1$, которым мы здесь и ограничимся.

Легко проследить связь этого результата с полученным ранее. В самом деле, разделим уравнение (4) на $H(\mu)$:

$$\frac{1}{H(\mu)} = 1 - \frac{c\mu}{2} \int_0^1 \frac{H(\mu')}{\mu' + \mu} d\mu'. \quad (5)$$

Положим

$$Y(z) = X(z)(v_0 - z), \quad (6)$$

где $X(z)$ — функция из разд. 4.8. Очевидно, что

а) $Y(z)$ — аналитическая функция в плоскости с разрезом от 0 до 1;

б) на линии разреза $Y^+/Y^- = \Lambda^+/\Lambda^-$;

$$c) \quad \frac{Y(z)}{\Lambda(z)} = \frac{1}{Y(-z)(1-c)}; \quad (7)$$

д) $Y(\infty) = 1$.

Согласно теореме Коши,

$$\begin{aligned} Y(z) &= 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{[Y^+ - Y^-]}{\mu' - z} d\mu' = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{Y^-}{\Lambda^-} \frac{(\Lambda^+ - \Lambda^-)}{\mu' - z} d\mu' = \\ &= 1 + \frac{c}{2(1-c)} \int_0^1 \frac{\mu' d\mu'}{Y(-\mu')(\mu' - z)}. \end{aligned} \quad (8)$$

(На последнем шаге было использовано соотношение (7).) Поскольку

$$\int_0^1 \frac{\mu' d\mu'}{Y(-\mu')(\mu' - z)} = \int_0^1 \frac{(\mu' - z + z)}{Y(-\mu')(\mu' - z)} d\mu', \quad (9)$$

уравнение (8) можно переписать в виде

$$Y(z) = 1 + \frac{c}{2(1-c)} \int_0^1 \frac{d\mu'}{Y(-\mu')} + \frac{cz}{2(1-c)} \int_0^1 \frac{d\mu'}{Y(-\mu')(\mu' - z)}. \quad (10)$$

Если положить здесь $z=0$, то станет очевидно, что первые два слагаемых в правой части дают в сумме $Y(0)$. Таким образом,

$$Y(z) = Y(0) + \frac{cz}{2(1-c)} \int_0^1 \frac{d\mu'}{Y(-\mu')(\mu' - z)}. \quad (11)$$

Положив $z=0$ в формуле (7), найдем

$$Y(0) = \frac{1}{\sqrt{1-c}}. \quad (12)$$

Уравнение (11) принимает вид

$$Y(z) = \frac{1}{\sqrt{1-c}} + \frac{cz}{2(1-c)} \int_0^1 \frac{d\mu'}{Y(-\mu')(\mu'-z)}. \quad (13)$$

Умножим это уравнение на $\sqrt{1-c}$:

$$\sqrt{1-c} Y(z) = 1 + \frac{cz}{2} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-c} Y(-\mu')(\mu'-z)}. \quad (14)$$

Положим $z = -\mu$ ($0 \leq \mu \leq 1$). Тогда

$$\sqrt{1-c} Y(-\mu) = 1 - \frac{c\mu}{2} \int_0^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{1-c} Y(-\mu')(\mu'+\mu)}. \quad (15)$$

Сравнивая уравнение (15) с уравнением (5), замечаем, что

$$\frac{1}{H(\mu)} = \sqrt{1-c} Y(-\mu), \quad (16)$$

или

$$H(\mu) = \frac{1}{\sqrt{1-c} (v_0 + \mu) X(-\mu)}. \quad (17)$$

Для получения числовых результатов в рассматриваемой альбедной задаче читатель может повторить сделанную в предыдущих разделах работу. Функция $H(\mu)$ протабулирована Чандрасекаром [43].

Глава 10

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗ ДРУГИХ ОБЛАСТЕЙ ФИЗИКИ

10.1. Введение

Техника и методы, развитые в первых девяти главах настоящей книги, ориентированы на решение уравнений, описывающих диффузию нейтронов. Разумеется, результаты носят гораздо более общий характер, поскольку перенос нейтронов — лишь одно из многих физических явлений, адекватным образом описываемых линеаризованным уравнением Больцмана. В разд. 1.1 и 4.2 мы уже указывали, что результаты, полученные в теории переноса нейтронов, можно распространить на другие линейные уравнения переноса.

В настоящей главе мы вкратце покажем, как можно более или менее непосредственно применить результаты предыдущих глав к изучению четырех различных физических явлений, описываемых линейным уравнением Больцмана. Речь идет о распространении звуковой волны (разд. 10.2), движении электронов в плазме (разд. 10.3), электрическом разряде в газе (разд. 10.4) и температурном режиме звездных атмосфер (разд. 10.5). В том, что касается математических деталей, мы будем существенно опираться на результаты предыдущих глав, так что здесь основное внимание мы уделим формулированию физических принципов, связанных с каждой из этих задач, и выявлению сходства этих задач с задачей переноса нейтронов. Следует отметить, что в некоторых обсуждаемых здесь задачах (например, в задаче о плазме) предположение линейности, т. е. отсутствия столкновений между частицами, не столь оправдано физически, как в случае нейтронов. Однако не занимаясь здесь вопросами обоснования линеаризации, мы сосредоточим свое внимание на исследовании методов решения линейных уравнений, считая, что последние удовлетворяются.

10.2. Распространение звука¹⁾

Звук — это распространяющаяся в материальной среде (продольная) волна. Пусть эта среда будет газом, в котором молекулы взаимодействуют друг с другом только посредством парных столк-

¹⁾ Мы следуем изложению Уленбека и Форда [81].

новений. Тогда фазовая плотность молекул газа $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ удовлетворяет уравнению Больцмана

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \psi - \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \psi + \\ + 2\pi \int d^3v_1 \int d\mu |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \mu) (\psi' \psi'_1 - \psi \psi_1). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{a} — ускорение в точке \mathbf{r} под действием любых *внешних* сил, а индексы у операторов градиента указывают переменные (пространственные координаты или компоненты вектора скорости), на которые эти операторы действуют.

Особый интерес представляет интеграл столкновений — последний член в правой части уравнения (1). Штрихи и индекс 1 у ψ относятся к скоростным переменным. Интегральный член описывает столкновение в точке \mathbf{r} двух молекул со скоростями \mathbf{v} и \mathbf{v}_1 , при котором вектор относительной скорости $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$ поворачивается на угол $\theta = \arccos \mu$; скорости после столкновения равны \mathbf{v}' и \mathbf{v}'_1 , а сечение такого процесса равно $\sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \mu)$. Напомним, что в уравнение переноса нейтронов входит похожий интеграл столкновений; однако он описывает столкновения нейтронов с ядрами; нейтрон-нейтронные столкновения там не учитываются. При изучении распространения звука, напротив, рассматриваются коллективные движения газа, состоящего из *одинаковых* частиц, причем достаточно плотного, так что столкновениями молекул газа между собой пренебречь нельзя. Поэтому основное уравнение (1) нелинейно. Если пренебречь столкновениями и положить, как в случае нейтронов, внешние силы равными нулю, то уравнение (1), как и следовало ожидать, сведется к уравнению для потока нейтронов в пустоте (разд. 3.2).

Нелинейное уравнение (1) не поддается решению. Попробуем линеаризовать его. Для этого вспомним H -теорему Больцмана, в которой утверждается, что функция

$$H(t) \equiv \int \psi \log \psi d^3r d^3v \quad (2)$$

монотонно убывает с ростом времени. С помощью этой теоремы Больцман показал, что (за исключением некоторых экзотических случаев, которые нас не будут интересовать) решение уравнения (1) асимптотически приближается к распределению Максвелла — Больцмана ψ_0 ¹⁾:

$$\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \text{const} \cdot e^{-\beta[mv^2/2 + U(\mathbf{r})]}, \quad (3)$$

где $U(\mathbf{r})$ — потенциал внешних сил и $\beta = 1/kT$, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, $mv^2/2$ — кинетическая

¹⁾ Напомним, что рассматриваемый газ состоит из одинаковых молекул.

энергия молекулы газа. В интересующем нас случае $U = 0$ и

$$\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-(\beta/2)m\mathbf{v}^2}, \quad (4)$$

где n — плотность частиц.

Линеаризуем уравнение (1). Будем искать решения, мало отклоняющиеся от равновесного распределения (4). Положив

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) [1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)], \quad (5)$$

подставим это равенство в уравнение (1). Так как h предполагается малым, можно пренебречь членами порядка h^2 . В результате получим *линеаризованное* уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} h - \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} h + 2\pi \int d^3v_1 \int d\mu |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| \sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \mu) \psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_1) [h' + h'_1 - h - h_1]. \quad (6)$$

Чтобы упростить уравнение (6), обозначим

$$\mathbf{c} = \left(\frac{m\beta}{2} \right)^{1/2} \mathbf{v}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{c}_1 = \left(\frac{m\beta}{2} \right)^{1/2} \mathbf{v}_1 \quad (7b)$$

(таким образом, c — безразмерная скорость) и

$$\tau = \left(\frac{2}{\beta m} \right)^{1/2} t. \quad (8)$$

Если внешние силы отсутствуют, то $\mathbf{a} = 0$ и ψ_0 определяется формулой (4). Положим наконец

$$g = |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1|, \quad (9)$$

$$F(g, \mu) = \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \frac{g\sigma(g, \mu)}{\sigma}, \quad (10)$$

где σ — произвольная величина, выбираемая так, чтобы функция $F(g, \mu)$ была безразмерной¹⁾.

В этих обозначениях уравнение (6) принимает простой вид:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \mathbf{c} \cdot \nabla h = n\sigma J(h), \quad (11)$$

где $J(h)$ — интегральный оператор

$$J(h) = \frac{1}{\pi^{1/2}} \int d^3c_1 e^{-c_1^2} \int d\mu F(g, \mu) [h' + h'_1 - h - h_1]. \quad (12)$$

(Мы опустили индекс \mathbf{r} у оператора градиента, поскольку оператор $\nabla_{\mathbf{v}}$ больше встречаться не будет.)

¹⁾ σ — положительное число, по порядку величины равное полному сечению.

Чтобы исследовать распространение звуковых волн, надо изучить периодические во времени решения уравнения (11). Для этого удобно переписать $J(h)$, вводя собственные функции ψ_i и соответствующие им собственные значения λ_i оператора J :

$$J(\psi_i) \equiv \frac{2}{\pi^{1/2}} \int d^3c_i e^{-c_i^2} \int d\mu F(g, \mu) [\psi'_i + \psi'_{i1} - \psi_i - \psi_{i1}] = \lambda_i \psi_i. \quad (13)$$

Существование и другие свойства этих собственных функций мы обсуждать не будем¹⁾. Предположим, что существует полная нормированная система функций ψ_i , взаимно ортогональных с весом e^{-c^2} :

$$\int d^3c e^{-c^2} \psi_i(c) \psi_j(c) = \delta_{ij}. \quad (14)$$

Запишем $J(h)$ в канонической форме, а именно

$$J(h) = \int d^3c_1 L(c, c_1) h(c_1), \quad (15)$$

где

$$L(c, c_1) = \sum_j \lambda_j \psi_j(c) \psi_j(c_1) e^{-c_1^2}. \quad (16)$$

Тогда

$$J(h) = \sum_j \lambda_j \int d^3c_1 \psi_j(c) \psi_j(c_1) e^{-c_1^2} h(c_1), \quad (17)$$

и уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + c \cdot \nabla h = n\sigma \sum_j \lambda_j \psi_j(c) \int d^3c_1 \psi_j(c_1) e^{-c_1^2} h(c_1). \quad (18)$$

Но и для этого упрощенного уравнения решение не найдено. Однако можно получить разрешимое уравнение, если сделать еще одно допущение (оценить физическое значение которого довольно трудно.) Заметим сначала, что $\lambda_i = 0$ является пятикратным вырожденным собственным значением оператора J и ему соответствуют собственные функции

$$\pi^{-3/2}, \quad 2^{1/2} \pi^{-3/2} c, \quad (2/3)^{1/2} \pi^{-3/2} (3/2 - c^2)^2.$$

Далее, если $\sigma(g, \mu)$ не зависит от g , то при больших j

$$\lambda_j \rightarrow -2\pi \int d\mu F(g, \mu). \quad (19)$$

¹⁾ Собственные функции оператора J обсуждаются в книге Уленбека и Форда [81], где приведен их явный вид для случая, когда $\sigma(g, \mu)$ не зависит от g .

²⁾ Это следует из того, что частицы, импульс и энергия при столкновении сохраняются. (Подробное обсуждение собственных функций и собственных значений оператора J см. в книге Уленбека и Форда [81]. Здесь просто приводятся некоторые результаты.)

Введенную в формуле (10) величину σ всегда можно выбрать так, чтобы $\lambda_j \rightarrow -1$. Наше допущение будет состоять в том, что в правой части уравнения (18) все λ_j , за исключением пяти нулевых собственных значений, полагаются равными -1 . Иными словами, уравнение (18) будет иметь вид

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \mathbf{c} \cdot \nabla h = -n\sigma \sum_{j>5} \psi_j(\mathbf{c}) \int d^3c_1 \psi_j(\mathbf{c}_1) e^{-c_1^2} h(\mathbf{c}_1). \quad (20)$$

Разложим $h(\mathbf{c}_1)$ в ряд по функциям ψ_j :

$$h(\mathbf{c}_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(\mathbf{c}_1) \int d^3c'_1 e^{-c_1'^2} h(\mathbf{c}'_1) \psi_j(\mathbf{c}'_1). \quad (21)$$

Тогда

$$\sum_{j>5} \psi_j(\mathbf{c}) \int d^3c_1 \psi_j(\mathbf{c}_1) e^{-c_1^2} h(\mathbf{c}_1) = h(\mathbf{c}) - \sum_{j=1}^5 \psi_j(\mathbf{c}) \int d^3c_1 e^{-c_1^2} h(\mathbf{c}_1) \psi_j(\mathbf{c}_1). \quad (22)$$

Подставляя (22) в уравнение (20) и используя явный вид первых пяти функций ψ_j , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} + n\sigma h + \mathbf{c} \cdot \nabla h = & \frac{n\sigma}{\pi^{3/2}} \int d\mathbf{c}_1 e^{-c_1^2} \left[1 + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}_1 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \left(c^2 - \frac{3}{2} \right) \left(c_1^2 - \frac{3}{2} \right) \right] h(\mathbf{c}_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Это уравнение можно решить методом разложения по нормальным модам, как мы решали задачи теории переноса нейтронов (гл. 4—6). Но мы исследуем лишь наиболее простой одномерный вариант уравнения (23):

$$\frac{\partial h}{\partial \tau}(x, c, \tau) + \gamma h + c \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{c}_1 e^{-c_1^2/2} (1 + cc_1) h(\mathbf{c}_1). \quad (24)$$

Определим преобразование Фурье функции $h(x, c, \tau)$ формулой

$$h_k(c, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} h(x, c, \tau) \quad (25a)$$

и применим его к уравнению (24):

$$\frac{\partial h_k}{\partial \tau} + (\gamma + ikc) h_k = \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{c}_1 e^{-c_1^2/2} (1 + cc_1) h_k(c_1, \tau). \quad (25b)$$

Будем искать решения уравнения (25b) в виде

$$h_k(c, \tau) = h_k^{\omega}(c) e^{-i\omega\tau}. \quad (26a)$$

Подстановка (26а) в уравнение (25b) дает

$$(-i\omega + \gamma + ikc) h_k^\omega = \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}} (\rho_k^\omega + l\varphi_k^\omega). \quad (26b)$$

Здесь введены величины ρ и φ , аналогичные соответственно плотности и току:

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} dce^{-c^2/2} h(c), \quad (27a)$$

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} dce^{-c^2/2} ch(c). \quad (27b)$$

Умножив уравнение (25b) на $e^{-c^2/2}$ и проинтегрировав по c , получим уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_k(\tau)}{\partial \tau} + ik\varphi_k(\tau) = 0, \quad (28a)$$

или

$$\omega \rho_k^\omega = k\varphi_k^\omega. \quad (28b)$$

Выберем нормировку решения так, чтобы выполнялось условие

$$\rho_k^\omega = 1. \quad (29)$$

Тогда с учетом (28b) уравнение для h_k^ω примет вид

$$(-i\omega + \gamma + ikc) h_k^\omega = \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}} \left(1 + \frac{\omega c}{k}\right). \quad (30)$$

Его решением будет

$$h_k^\omega = \frac{\gamma}{(2\pi)^{1/2}} P \frac{1 + \omega c/k}{ikc - i\omega + \gamma} + \lambda_k(\omega) \delta\left(c - \frac{\omega + i\gamma}{k}\right). \quad (31)$$

Пусть $\bar{c} = (\omega + i\gamma)/k$ — действительная величина. (Заметим, что c может принимать все действительные значения от $-\infty$ до $+\infty$.) В этом случае всегда можно выбрать λ так, чтобы выполнялось условие нормировки (29). В самом деле, положим

$$\lambda = e^{\bar{c}^2/2} \left\{ 1 - \frac{\gamma}{ik(2\pi)^{1/2}} P \int_{-\infty}^{\infty} dc \frac{1 + \omega c/k}{c - \bar{c}} e^{-c^2/2} \right\}. \quad (32)$$

Таким образом, существует непрерывный спектр комплексных собственных значений с частотами

$$\omega = kr - i\gamma, \quad (33)$$

где r — произвольное действительное число. Все колебания непрерывного спектра имеют одинаковый декремент затухания¹⁾,

¹⁾ Напомним, что величина γ в одномерной задаче аналогична σ и, значит, положительна.

и дисперсионного соотношения (т. е. связи между ω и k) в данном случае нет.

Пусть \bar{c} — комплексная величина. В этом случае получается дискретный спектр. Аргумент δ -функции в формуле (31) и знаменатель в главном значении интеграла не могут обратиться в нуль. Поэтому из условия нормировки (29) вытекает, что

$$1 - \frac{\gamma}{ik(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{c} \frac{1 + \omega\bar{c}/k}{\bar{c} - \bar{c}} e^{-\bar{c}^2/2} = 0. \quad (34)$$

Исследуем корни этого уравнения, т. е. значения ω (при фиксированном k), при которых выполняется соотношение (34). Для этого удобно сделать замену переменных

$$z = \omega/k, \quad x = \gamma/k, \quad \rho = z + ix \quad (35)$$

и ввести функцию

$$F(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} d\bar{c} e^{-\bar{c}^2/2} \frac{1}{\bar{c} - \rho}. \quad (36)$$

Уравнение (34) принимает вид

$$H(x, \rho) \equiv x^2 \{\rho F(\rho) + 1\} + ix \{(\rho^2 + 1) F(\rho) + \rho\} + 1 = 0. \quad (37)$$

Нетрудно показать, что

$$H^*(x, \rho) = H(-x, \rho^*) = H(x, -\rho^*). \quad (38)$$

Опишем поведение корней уравнения (37).

При $x > 0$ ($k > 0$) уравнение $H(x, \rho) = 0$ в нижней полуплоскости комплексной переменной ρ не имеет корней, а в верхней полуплоскости в зависимости от значения x либо не имеет корней, либо имеет два корня (аналогичная ситуация была в нестационарной нейтронной задаче гл. 7, где дискретные моды при некоторых значениях k также обращались в нуль). Корни исчезают при $x_0 \approx 0,724$ (т. е. при $x < 0,724$ дискретный спектр отсутствует). У обоих корней мнимые части одинаковы, а действительные части противоположны по знаку (см. уравнение (38)). Таким образом, эти корни соответствуют затухающим звуковым волнам, распространяющимся в противоположных направлениях.

При достаточно больших x , т. е. при достаточно малых k (для длинных волн),

$$z = 1 - \frac{i}{x} + \frac{1}{2x^2} - \frac{6i}{x^3} + \dots \quad (39)$$

Положив $\omega = \omega_1 - i\alpha_1$ и заметив, что фазовая скорость звука V равна

$$V = \omega_1/k, \quad (40)$$

получим дисперсионное соотношение

$$V = 1 + k^2/2\gamma^2 + \dots \quad (41)$$

Итак, скорость звука растет с уменьшением длины волны. Декремент затухания равен

$$\alpha_1 = \frac{k^2}{\gamma} \left(1 + \frac{\delta k^2}{\gamma^2} + \dots \right). \quad (42)$$

Аналогичные рассуждения можно провести и для трехмерного уравнения (23); результаты будут сходными. Отметим один важный результат: непрерывный спектр существует всегда, а коллективные движения (дискретные моды), которые мы связываем с распространением звуковой волны, существуют лишь при достаточно большой длине волны. С физической точки зрения этот результат легко объяснить: коллективные колебания среды с длиной волны, по порядку величины меньшей среднего свободного пробега частиц (т. е. $\gamma/k \lesssim 1$), поддерживаться не могут.

Теперь можно решить задачу Коши, разлагая плотность распределения источников по собственным функциям дискретного и непрерывного спектров (предварительно следует вывести соотношения ортогональности и доказать полноту системы собственных функций). Мы опускаем подробности, поскольку аналогичное рассмотрение было проведено в гл. 7 для нестационарного уравнения переноса нейтронов.

10.3. Плазменные задачи ¹⁾

Для иллюстрации применимости развитого нами метода к плазменным задачам мы рассмотрим очень упрощенную модель. Будем считать, что ионы образуют однородный фон положительного заряда, пренебрежем столкновениями и допустим, что функция распределения электронов по скоростям мало отличается от пространственно однородной, но в остальном произвольна. Будем рассматривать только продольные волны.

Поскольку мы ограничились динамическим описанием лишь одних электронов, система описывается единственной функцией распределения $F(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Эта функция удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} F + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} F = 0 \quad (1)$$

¹⁾ Описанную здесь нестационарную задачу исследовал в основном Ван Кампен [22]. Наше изложение близко следует статьям Кейза [82, 83].

(уравнение Ливилля), так как столкновения не учитываются. Ускорение a выражается через заряд электрона ($-e$), его массу m и напряженность электрического поля E :

$$a = -\frac{eE(\mathbf{r}, t)}{m}. \quad (2)$$

Напряженность электрического поля определяется уравнением

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad (3)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}, t) = en - e \int F d^3r \quad (4)$$

— плотность электрического заряда, en — однородная плотность положительного заряда ионов.

Линеаризуем уравнения, положив

$$F = nf_0 + f, \quad (5)$$

где f_0 — заданная функция скорости, не зависящая от времени и координат (f_0 может быть, например, максвелловским распределением), а f предполагается малой величиной. Подставляя (5) в предыдущие уравнения и опуская члены высших порядков по возмущению, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f = \frac{en}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_0 \quad (6)$$

и

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E} = -4\pi e \int f(\mathbf{v}) d^3v. \quad (7)$$

Покажем теперь, как для простой модели, описываемой этими уравнениями, построить систему собственных функций и доказать ее полноту.

Применим преобразование Фурье по пространственным переменным к этим уравнениям. Кроме того, введем *продольную* и *поперечную* (по отношению к переменной преобразования \mathbf{k}) компоненты скорости:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{k}}{k} u + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\perp}) = 0. \quad (8)$$

Исключив электрическое поле, приходим к уравнению

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + iku f_{\mathbf{k}} = ikn_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) \int f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}') d^3v', \quad (9)$$

где

$$n_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial u} f_0(\mathbf{v}), \quad (10)$$

$\omega_p^2 = 4\pi n e^2 / m$ — квадрат плазменной частоты.

Будем искать решения в виде

$$f_k = e^{-ikv t} \varphi_k^v(v). \quad (11)$$

Тогда из уравнения (9) вытекает, что

$$(u - v) \varphi_k^v = n_k(v) \int \varphi_k^v(v') d^3v'. \quad (12)$$

Очевидно, решения можно нормировать так, чтобы выполнялось условие

$$\int \varphi_k^v(v') d^3v' = 1. \quad (13)$$

Существуют два класса решений.

К л а с с 1:

$$\varphi_k^i = \frac{n_k(v)}{u - v_i}, \quad (14)$$

где v_i — корни уравнения

$$\Lambda_k(v_i) \equiv 1 - \int \frac{n_k(v) d^3v}{u - v_i} = 0 \quad (15)$$

(дисперсионное уравнение для плазмы).

К л а с с 2:

$$\varphi_k^v = P \frac{n_k(v)}{u - v} + \lambda_k(v, v_\perp) \delta(u - v), \quad (16)$$

где v — произвольное действительное число.

Мы видим, что в этом случае решение не однозначно. Единственное ограничение на λ_k — требование выполнения интегрального условия (13). Эту свободу можно использовать для того, чтобы путем соответствующего выбора λ получить полную систему функций. Для каждого вектора \mathbf{p} , удовлетворяющего условию $\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = 0$, построим функции

$$\varphi_k^{v, \mathbf{p}} = P \frac{n_k(v)}{u - v} + \lambda_k(v) \delta(v_\perp - \mathbf{p}) \delta(u - v). \quad (17)$$

Тогда из условия нормировки вытекает, что

$$\lambda_k(v) = \frac{1}{2} \{ \Lambda_k^+(v) + \Lambda_k^-(v) \}. \quad (18)$$

Заметим также, что

$$\Lambda_k^+(v) - \Lambda_k^-(v) = -2\pi i \int n_k(v, v_\perp) d^2v_\perp. \quad (19)$$

При таком выборе функций справедлива

Теорема 1. Любую функцию $f(\mathbf{v})$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{v}) = \sum_i a_i \varphi_k^i(\mathbf{v}) + \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int d^2 p A(\mathbf{v}, \mathbf{p}) \varphi_k^{\mathbf{v}, \mathbf{p}}(\mathbf{v}). \quad (20)$$

(Как всегда в подобных случаях, для строгой формулировки теоремы следует указать, к какому классу функций принадлежит $f(\mathbf{v})$). Как показано в приложении G, если f_0 удовлетворяет условию Гёльдера, то для существования разложения (20) достаточно, чтобы $f(\mathbf{v})$ удовлетворяла тому же условию. Если же f_0 — достаточно хорошая функция (например, распределение Максвелла), то $f(\mathbf{v})$ может быть подходящей обобщенной функцией.)

Мы дадим лишь набросок доказательства, поскольку оно очень похоже на соответствующие предыдущие доказательства.

Предположим, что коэффициенты a_i известны. Надо показать, что функцию $f' \equiv f - \sum_i a_i \varphi_k^i$ можно представить в интегральной

форме. Подстановка явного выражения для $\varphi_k^{\mathbf{v}, \mathbf{p}}$ (формула (17)) в равенство (20) приводит к интегральному уравнению для $A(\mathbf{v}, \mathbf{p})$:

$$f'(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \int d^2 p A(\mathbf{v}, \mathbf{p}) P \frac{n_k(\mathbf{v})}{u - \mathbf{v}} + \lambda(u) A(u, \mathbf{v}_{\perp}). \quad (21)$$

Из этого уравнения можно найти $A(u, \mathbf{v}_{\perp})$, если известна функция

$$\bar{A}(\mathbf{v}) = \int d^2 p A(\mathbf{v}, \mathbf{p}). \quad (22)$$

Уравнение для \bar{A} находим, интегрируя уравнение (21) по \mathbf{v}_{\perp} и учитывая тождества (18) и (19):

$$\bar{f}(u) = \frac{\Lambda^+(u) - \Lambda^-(u)}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{v} \frac{\bar{A}(\mathbf{v})}{\mathbf{v} - u} + \frac{\Lambda^+(u) + \Lambda^-(u)}{2} \bar{A}(u), \quad (23)$$

где

$$\bar{f}(u) = \int f'(\mathbf{v}) d^2 v_{\perp}. \quad (24)$$

Уравнение (23) — это сингулярное интегральное уравнение в стандартной форме. Его решение имеет вид

$$\bar{A}(u) = N^+(u) - N^-(u), \quad (25)$$

где

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Lambda_k(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(u) du}{u - z}, \quad (26)$$

при условии, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(u) du}{u-z} = 0 \quad (27)$$

в нулях функции $\Lambda_k(z)$. Но это условие означает, что

$$\int \frac{f(v) d^3v}{u-v_i} = \sum_{j=1}^n a_j \int \frac{\Phi_k^j(v) d^3v}{u-v_i}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (28)$$

Тем самым мы получаем как раз нужное число уравнений для определения коэффициентов a_i . Зная a_i , по формуле (25) вычисляем $\bar{A}(u)$, а затем находим $A(u, v_{\perp})$ из уравнения (24). Таким образом, коэффициенты разложения (20) определены, и притом однозначно.

Это доказательство полноты конструктивно, ибо оно дает способ определения коэффициентов разложения. Однако, как мы неоднократно убеждались, эти коэффициенты в подобных задачах проще найти с помощью соотношений ортогональности. Чтобы испытать этот метод, возьмем более простую одномерную модель (или будем считать предыдущие уравнения проинтегрированными по v_{\perp}). При этом уравнение (9) перейдет в

$$\frac{\partial f_k}{\partial t} + ikvf_k = ik\beta_k(v) \int_{-\infty}^{\infty} f_k(v') dv'. \quad (29)$$

(Здесь β_k — интеграл от $n_k(v)$ по всем v_{\perp} .)

Легко видеть, что правая часть уравнения (29) не симметрична. Обычно в таких случаях применяют классическую процедуру, состоящую в умножении на подходящую степень функции $\beta_k(v)$. Но в данном случае это неудобно, поскольку нам надо учитывать и такие ситуации, когда β_k меняет знак и, возможно, обращается в нуль на интервалах ненулевой меры. Другой подход основан на введении сопряженного уравнения

$$\frac{\partial f_k^*}{\partial t} + ikvf_k^* = ik \int f_k^*(v') \beta_k(v') dv'. \quad (30)$$

Эффективность этого подхода видна уже из следующей теоремы:

Теорема 2. Спектры оператора переноса и сопряженного оператора совпадают.

Дадим конструктивное доказательство. Пусть

$$f_k = e^{-ikvt} \Phi_k^v(v), \quad f_k^* = e^{-ikvt} \Phi_k^{v*}(v). \quad (31)$$

Тогда уравнения (29) и (30) принимают вид

$$\begin{aligned}(\nu - \nu) \varphi_k^\nu(\nu) &= \beta_k(\nu) \int \varphi_k^\nu(\nu') d\nu', \\ (\nu - \nu) \varphi_k^{\nu*}(\nu) &= \int \varphi_k^{\nu*}(\nu') \beta_k(\nu') d\nu'.\end{aligned}\quad (32)$$

Возьмем, как и выше, в качестве условия нормировки равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^\nu(\nu) d\nu = 1. \quad (33)$$

Рассмотрим различные частные случаи.

1) Число $\nu = \nu_i$ такое, что

$$\Lambda_k(\nu_i) \equiv 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k(\nu') d\nu'}{\nu' - \nu_i} = 0. \quad (34)$$

Решениями будут функции

$$\varphi_k^i = \frac{\beta_k(\nu)}{\nu - \nu_i}, \quad \varphi_k^{i*} = \frac{1}{\nu - \nu_i}. \quad (35)$$

2) Число ν — действительное; $\Lambda(\nu) \neq 0$.

Класс 2а: $\nu \in \Sigma_\alpha$ (Σ_α обозначает множество действительных чисел ν , для которых $\beta_k(\nu) \neq 0$). Тогда

$$\begin{aligned}\varphi_k^\nu(\nu) &= \frac{P\beta_k(\nu)}{\nu - \nu} + \lambda_k(\nu) \delta(\nu - \nu), \\ \varphi_k^{\nu*}(\nu) &= P \frac{1}{\nu - \nu} + \lambda_k^*(\nu) \delta(\nu - \nu),\end{aligned}\quad (36)$$

где

$$\lambda_k(\nu) = \frac{\Lambda_k^+ + \Lambda_k^-}{2}, \quad \lambda_k^* = \lambda_k / \beta_k. \quad (37)$$

Сделаем ряд замечаний:

(i) функции (35) и (36) удовлетворяют соотношению

$$\varphi_k^{\nu*} = \varphi_k^\nu(\nu) / \beta_k(\nu); \quad (38)$$

(ii) в обоих случаях нормировка такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{\nu*}(\nu) \beta_k(\nu) d\nu = 1; \quad (39)$$

(iii) сравнивая с доказательством теоремы 1, видим, что функции классов 1 и 2а вместе образуют полную систему в пространстве функций $f(\nu)$, равных нулю вне множества Σ_α .

К л а с с 2β : $v \in \Sigma_\beta$ (Σ_β — дополнение к Σ_α , т. е. множество всех действительных чисел v , для которых $\beta_k(v) = 0$).

Функции φ_k^v мы выберем, как в (36), но в качестве φ_k^{v*} возьмем

$$\varphi_k^{v*} = \delta(v - v). \quad (40)$$

Та же аргументация, что и при доказательстве теоремы 1, позволяет заключить, что функции классов 1, 2α и 2β вместе образуют полную систему (т. е. «все» $f(v)$, $-\infty < v < \infty$, можно представить в виде линейных комбинаций функций этой системы).

Особое значение сопряженных функций для приложений связано с тем, что собственные функции и сопряженные к ним удовлетворяют очень простым соотношениям ортогональности. Действительно, исходя из определений и используя тождества типа тождеств для функций Грина, находим, что φ_k и φ_k^* с различными индексами ортогональны. Для совпадающих индексов интегралы при нашем выборе функций вычисляются легко. Как и следовало ожидать, они выражаются через дисперсионную функцию плазмы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{i*}(v) \varphi_k^j(v) dv = N_i \delta_{ij}, \quad (41)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{v*}(v) \varphi_k^{v'}(v) dv = N(v) \delta(v - v'), \quad (42)$$

где

$$N_i = - \left. \frac{\partial \Lambda_k}{\partial z} \right|_{z=v_i}, \quad (43)$$

$$\frac{1}{N(v)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{\Lambda_k^+} - \frac{1}{\Lambda_k^-} \right], & v \in \Sigma_\alpha, \\ \frac{1}{\Lambda_k(v)}, & v \in \Sigma_\beta. \end{cases} \quad (44)$$

Заметим, что формула (43) верна только для случая простых нулей функции Λ_k (что выше молчаливо предполагалось). Общий случай можно исследовать, как в приложении F.

В качестве примера применения развитого здесь подхода решим задачу о нахождении функции распределения $f(t)$ при заданном начальном распределении $f(0)$. Преобразование Фурье $f(k, v, t)$ по пространственной переменной разлагается по полной системе функций:

$$f(k, v, t) = \sum_i a_i \varphi_k^i(v) e^{-ikv_i t} + \int_{-\infty}^{\infty} A(v) \varphi_k^v(v) e^{-ikv t} dv. \quad (45)$$

Коэффициенты разложения выражаются через $f(k, \nu, 0)$ с помощью соотношений ортогональности

$$a_i = \frac{1}{N_i} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{i*}(\nu) f(k, \nu, 0) d\nu \quad (46)$$

$$A(\nu) = \frac{1}{N(\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{\nu*}(\nu) f(k, \nu, 0) d\nu.$$

Этот результат удобно записать в виде

$$f(k, \nu, t) = \int_{-\infty}^{\infty} T_t(\nu, \nu') f(k, \nu', 0) d\nu', \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned} T_t(\nu, \nu') &= \sum_i \varphi_k^i(\nu) e^{-ik\nu t} \varphi_k^{i*}(\nu') / N_i + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k^{\nu}(\nu) e^{-ik\nu t} \varphi_k^{\nu*}(\nu') d\nu / N(\nu). \end{aligned} \quad (48)$$

Тем же способом можно решать и краевые задачи. Ограничимся снова простой одномерной моделью. Преобразование Фурье по *временной* переменной приводит исходные уравнения к виду

$$\nu \frac{\partial f}{\partial x} - i\omega f = \frac{eE}{m} n \frac{\partial f_0}{\partial \nu}, \quad (49a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial x} = -4\pi e \int f d\nu. \quad (49b)$$

Введем сопряженную систему уравнений

$$\nu \frac{\partial f^*}{\partial x} - i\omega f^* = \frac{eE_n^*}{m}, \quad (50)$$

$$\frac{\partial E^*}{\partial x} = -4\pi e \int f^*(\nu) d\nu \quad (51)$$

и будем искать решения в виде

$$\begin{aligned} f &= e^{i\omega x/\nu} f_{\nu}(\nu), & f^* &= e^{i\omega x/\nu} f_{\nu}^*(\nu), \\ E &= e^{i\omega x/\nu} E_{\nu}, & E^* &= e^{i\omega x/\nu} E_{\nu}^*. \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда искомые функции удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \left(\frac{\nu}{v} - 1\right) f_{\nu} &= \frac{eE_{\nu} n}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \nu}, & \left(\frac{\nu}{v} - 1\right) f_{\nu}^* &= \frac{eE_{\nu}^* n}{mi\omega}, \\ \frac{E_{\nu}}{\nu} &= -\frac{4\pi e}{i\omega} \int f_{\nu} d\nu, & \frac{E_{\nu}^*}{\nu} &= -4\pi e \int \frac{\partial f_0}{\partial \nu} f_{\nu}^* d\nu. \end{aligned} \quad (53)$$

Здесь возможны 3 вида спектра.

а) $\nu = \infty$:

$$\begin{aligned} f_{\infty} &= \frac{-en}{m i \omega} \frac{\partial f_0}{\partial \nu}, & f_{\infty}^* &= \frac{-en}{m i \omega}, \\ E_{\infty} &= 1, & E_{\infty}^* &= 1. \end{aligned} \quad (54)$$

б) *Дискретный спектр*: $\nu = \nu_i$, где ν_i — корни уравнения

$$\Lambda(\nu_i) \equiv 1 - \sigma^2 \nu_i^2 \int d\nu \frac{(\partial f_0 / \partial \nu)}{\nu - \nu_i} = 0, \quad \sigma^2 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (55)$$

Заметим, что дискретный спектр может отсутствовать. Для максвелловского распределения уравнение (55) не имеет корней при $\omega_p^2 < \omega^2$ и имеет два корня при $\omega_p^2 > \omega^2$; при $\omega_p^2 = \omega^2$ точка $\nu = \infty$ будет дважды вырожденной точкой спектра.

Соответствующими собственными функциями будут

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{\sigma^2 \nu_i^2 (\partial f_0 / \partial \nu)}{\nu - \nu_i}, & f_i^* &= \frac{f_i}{(\partial f_0 / \partial \nu)}, \\ E_i &= \frac{-4\pi e \nu_i}{i \omega}, & E_i^* &= E_i. \end{aligned} \quad (56)$$

в) *Непрерывный спектр* (ν — действительное число, $\Lambda(\nu) \neq 0$).

Класс 2α :

$$\left. \frac{\partial f_0}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu} \neq 0.$$

Решения имеют вид

$$\begin{aligned} f_{\nu} &= P \frac{\sigma^2 \nu^2 (\partial f_0 / \partial \nu)}{\nu - \nu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \nu), & f_{\nu}^* &= \frac{f_{\nu}}{(\partial f_0 / \partial \nu)}, \\ E_{\nu} &= \frac{-4\pi e \nu}{i \omega}, & E_{\nu}^* &= E_{\nu}. \end{aligned} \quad (57)$$

Отметим, что для классов 1 и 2α мы приняли нормировку

$$\int f_{\nu} d\nu = \int f_{\nu}^* \frac{\partial f_0}{\partial \nu} d\nu = 1, \quad (58)$$

так что

$$\lambda(\nu) = \frac{\Lambda^+(\nu) + \Lambda^-(\nu)}{2}. \quad (59)$$

Класс 2β :

$$\left. \frac{\partial f_0}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu} = 0.$$

Функции f_{ν} , E_{ν} те же, что и в (57), но

$$f_{\nu}^* = \delta(\nu - \nu), \quad E_{\nu}^* = 0. \quad (60)$$

Польза этой системы функций опять-таки связана с ее полнотой на всем интервале $-\infty < \nu < \infty$. В частности, справедлива

Теорема 3. Системы функций $f_\nu(\nu)$ и чисел E_ν полны в следующем смысле: существуют такие постоянные a_∞ , a_i и такая функция $A(\nu)$, что любая функция $\Phi(\nu)$ и любая константа \bar{E} могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}\Phi(\nu) &= a_\infty f_\infty + \sum_i a_i f_i + \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) f_\nu(\nu) d\nu, \\ \bar{E} &= a_\infty E_\infty + \sum_i a_i E_i + \int_{-\infty}^{\infty} A(\nu) E_\nu(\nu) d\nu.\end{aligned}\quad (61)$$

Доказательство этой теоремы по существу совпадает с доказательством теоремы 4, поэтому мы его опустим, хотя оно и конструктивно. Коэффициенты разложения найдем более простым способом, а именно с помощью соотношений ортогональности, непосредственно вытекающих из уравнений (53):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \nu f_\nu^*(\nu) f_\nu(\nu) d\nu - \frac{n}{4\pi m} E_\nu^* E_\nu = N(\nu) \delta(\nu - \nu'). \quad (62)$$

Поскольку явный вид собственных функций известен, $N(\nu)$ можно определить непосредственно. Как и следовало ожидать, $N(\nu)$ выражается через плазменную дисперсионную функцию:

$$\begin{aligned}N_\infty &= \frac{-n}{4\pi m} \Lambda(\infty) = \frac{-n}{4\pi m} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right); \\ N_i &= -\sigma^2 \nu_i^3 \left. \frac{\partial \Lambda}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_i};\end{aligned}\quad (63a)$$

$$\frac{1}{N(\nu)} = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i \sigma^2 \nu^3} \left[\frac{1}{\Lambda^+(\nu)} - \frac{1}{\Lambda^-(\nu)} \right], & \nu \in \Sigma_\alpha, \\ \frac{1}{\nu \Lambda(\nu)}, & \nu \in \Sigma_\beta. \end{cases} \quad (63b)$$

Теперь легко найти коэффициенты разложения для $\Phi(\nu)$ и \bar{E} . Например,

$$N(\nu) A(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \nu f_\nu^*(\nu) \Phi(\nu) d\nu - \frac{n}{4\pi m} E_\nu^* \bar{E}, \quad (64a)$$

$$N_\infty a_\infty = \int_{-\infty}^{\infty} \nu f_\infty^*(\nu) \Phi(\nu) d\nu - \frac{n}{4\pi m} E_\infty^* \bar{E}. \quad (64b)$$

Продemonстрируем применение этой теории на простой краевой задаче. Пусть плазма занимает полупространство $x \geq 0$. На границе $x = 0$ задано электрическое поле напряженности E_0 . Потребуем, чтобы на бесконечности выполнялось условие излучения. Допустим далее, что электроны упруго отражаются от стенки $x = 0$, т. е. что

$$f(0, v) = f(0, -v). \quad (65)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда $v = \infty$ — единственная точка дискретного спектра. Предположим, наконец, что $f_0(v) = f_0(-v)$. (Это существенно упрощает ситуацию. В случае f_0 более общего вида требуется более сильная теорема полноты на полупрямой, которую мы докажем ниже.)

Теперь нетрудно найти решение поставленной задачи. Общее решение уравнений движения, удовлетворяющее условию излучения на бесконечности, имеет вид

$$f(x, v) = b_\infty f_\infty + \int_0^\infty e^{i\omega x/v} B(v) f_v(v) dv, \quad (66)$$

$$E(x) = b_\infty E_\infty + \int_0^\infty e^{i\omega x/v} E_v B(v) dv. \quad (67)$$

Граничное условие $E(0) = E_0$ дает

$$E_0 = b_\infty E_\infty + \int_0^\infty B(v) E_v dv, \quad (68)$$

а в силу условия (65)

$$b_\infty f_\infty(v) + \int_0^\infty B(v) f_v(v) dv = b_\infty f_\infty(-v) + \int_0^\infty B(v) f_v(-v) dv. \quad (69)$$

Предположение о четности f_0 позволяет разрешить уравнения (68), (69) относительно b_∞ и $B(v)$ с помощью приема, предложенного Ландау [84]. Так как f_0 — четная функция, то $\partial f_0 / \partial v$ — нечетная. Следовательно,

$$f_\infty(-v) = -f_\infty(v), \quad f_v(-v) = f_{-v}(v). \quad (70)$$

Зададим функцию $B(v)$ при $v < 0$ равенством ¹⁾

$$B(-v) = -B(v). \quad (71)$$

¹⁾ Тот же прием был применен в разд. 6.6 для установления связи между плоской и сферической нейтронными задачами.

Соотношения (70) позволяют записать уравнения (68) и (69) в виде

$$0 = 2b_{\infty}f_{\infty}(v) + \int_{-\infty}^{\infty} B(v)f_v(v)dv, \quad (72)$$

$$2E_0 = 2b_{\infty}E_{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} B(v)E_v dv. \quad (73)$$

Итак, задача свелась к разложению $[\Phi(v), \bar{E}] \equiv [0, 2E_0]$ по нормальным модам. Из уравнений (64) получаем непосредственно:

$$b_{\infty} = \frac{E_0}{\Lambda_{\infty}} = \frac{E_0}{1 - \omega^2/\omega^2}, \quad (74)$$

$$B(v) = \frac{-2inev}{m\omega} \frac{E_0}{N(v)}. \quad (75)$$

В частности, для $v \in \Sigma_{\alpha}$

$$B(v) = \frac{-2ine}{m\omega} \frac{(\partial f_0(v)/\partial v)}{\Lambda^+(v)\Lambda^-(v)}. \quad (76)$$

Представляет интерес поведение функции распределения вдали от границы. Оно определяется асимптотическим поведением $B(v)$ при больших v . Из формулы (76) следует, что при больших v

$$B(v) \approx \frac{-2ine}{m\omega} \frac{(\partial f_0/\partial v)}{\Lambda^2(\infty)}. \quad (77)$$

Задача с зеркальным отражением от границы была решена с помощью соотношений ортогональности на всей числовой оси. Последние в свою очередь оказались применимыми благодаря специальному приему, существенно использующему четность функции f_0 . Для невозмущенных функций распределения более общего вида такой прямой подход, по-видимому, не пригоден. Однако система собственных функций обладает свойствами полноты и ортогональности и на полубесконечном интервале. Это позволяет решить задачу и тогда, когда функция f_0 не обязательно четная. Кроме того, как будет показано ниже, можно решить и задачи с диффузным отражением от стенки. Свойства полноты и ортогональности системы собственных функций на полупрямой можно сформулировать в виде теорем, аналогичных уже встречавшимся. Для простоты ограничимся случаем, когда $v = \infty$ — единственная точка дискретного спектра. (Более общий случай рассматривается аналогично.)

Теорема 4. Функции (f_{∞}, E_{∞}) и $[f_v(v), E_v]$, $v \geq 0$, образуют полную систему, по которой можно разложить любую функцию $[\Phi(v), \bar{E}]$, $v \geq 0$.

Доказательство. В теореме утверждается, что существуют такая постоянная a_∞ и такая функция $[A(v)]$, что

$$\Phi(v) = a_\infty f_\infty(v) + \int_0^\infty A(v) f_v(v) dv, \quad v \geq 0, \quad (78)$$

$$\bar{E} = a_\infty E_\infty + \int_0^\infty A(v) E_v dv. \quad (79)$$

Покажем, что решение $[a_\infty, A(v)]$ уравнений (78), (79) существует и единственно. Как обычно, сделаем это непосредственным построением.

Предположим сначала, что постоянная a_∞ известна. Зададим функцию

$$\Phi'(v) = \Phi(v) - a_\infty f_\infty(v). \quad (80)$$

Тогда (78) становится интегральным уравнением

$$\Phi'(v) = \lambda(v) A(v) - \sigma^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial v} \right) P \int_0^\infty \frac{v'^2 A(v') dv'}{v - v'}, \quad v \geq 0. \quad (81)$$

Решение (единственное) этого уравнения можно описать следующим образом. Пусть

$$\Theta(v) = \arg \Lambda^+(v) \quad (82a)$$

и

$$X(z) = \exp \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\Theta(v') dv'}{v' - z}. \quad (82b)$$

Тогда $A(v)$ имеет вид

$$A(v) = N^+(v) - N^-(v), \quad (83)$$

где

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{v'^2 \Phi'(v') X^-(v') dv'}{\Lambda^-(v') (v' - z)}. \quad (84)$$

Неизвестную постоянную a_∞ , которая входит в это выражение, можно найти с помощью уравнения (79). Выразив его интегральный член через $N(0)$, получим

$$\bar{E} = a_\infty - \frac{4\pi e}{i\omega} 2\pi i N(0). \quad (85)$$

Далее, X -функция удовлетворяет, как всегда, ряду тождеств. В данном случае такими тождествами будут

$$X(z) X(-z) = \Lambda(z) / \Lambda(\infty), \quad (86)$$

откуда, в частности, следует

$$X(0) = \frac{1}{\sqrt{\Lambda(\infty)}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}}; \quad (87)$$

затем

$$X(z) = 1 - \sigma^2 \int_0^\infty \frac{X^-(v')}{\Lambda^-(v')} \frac{v'^2 (\partial f_0 / \partial v')}{v' - z} dv' \quad (88)$$

и

$$X(z) = 1 - \sigma^2 \int_{-\infty}^0 \frac{v'^2 (\partial f_0 / \partial v')}{\Lambda(\infty) X(v') (v' + z)} dv'. \quad (89)$$

Применяя эти тождества, легко разрешить уравнение (85) относительно a_∞ :

$$a_\infty = X(0) \bar{E} + \frac{4\pi e}{i\omega} \int_0^\infty v' \Phi(v') \frac{X^-(v')}{\Lambda^-(v')} dv'. \quad (90)$$

Тогда

$$N(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \left\{ \frac{ne}{mi\omega} \frac{a_\infty}{\sigma^2} + \int_0^\infty \frac{v'^2 \Phi(v') X^-(v') dv'}{\Lambda^-(v') (v' - z)} \right\}. \quad (91)$$

Решение можно представить в различных видах, но форма, получаемая из соотношений (91) и (83), по-видимому, наиболее удобна:

$$A(v) = \frac{\Lambda^-(v) (\partial f_0 / \partial v)}{X^-(v) \Lambda^+ \Lambda^-} \left\{ \frac{en}{mi\omega} X(0) \bar{E} + \sigma^2 v \int_0^\infty \frac{v' \Phi(v') X^-(v') dv'}{\Lambda^-(v') (v' - v)} \right\} + \frac{\Phi(v) \lambda(v)}{\Lambda^+(v) \Lambda^-(v)}. \quad (92)$$

К этой теореме полноты можно добавить теорему ортогональности, в которой утверждается, что существует весовая функция, относительно которой функции $f_v, f_{v'}$ ($0 \leq v, v' < \infty$) ортогональны на полупрямой $0 \leq v \leq \infty$. Опять-таки можно дать конструктивное доказательство этой теоремы, основанное на решении уравнения, сопряженного к уравнению (81).

Применим полученные результаты к решению описанной выше краевой задачи, несколько изменив ее постановку. Вместо условия зеркального отражения потребуем, чтобы на границе ($x = 0$) поправка f к невозмущенной функции распределения удовлетворяла условию

$$f(0, v) = -g(v) \int_{-\infty}^0 v' f(0, v') dv', \quad v \geq 0. \quad (93)$$

(Здесь $g(v)$ — произвольная функция, подчиненная условию $\int_0^{\infty} v g(v) dv = 1$.)

Такая постановка задачи соответствует, грубо говоря, ситуации, когда электроны, падающие на стенку $x = 0$, эмитируются обратно, причем их распределение определяется характеристиками стенки. Интегральное условие просто гарантирует нейтральность плазмы.

Приступая к решению этой задачи, заметим, что уравнения движения и граничные условия на бесконечности будут выполнены, если положить

$$f(x, v) = a_{\infty} f_{\infty}(v) + \int_0^{\infty} e^{i\omega x/v} A(v) f_v(v) dv, \quad (94)$$

$$E(x) = a_{\infty} E_{\infty} + \int_0^{\infty} e^{i\omega x/v} A(v) E_v dv. \quad (95)$$

Граничные условия на стенке (при $x=0$) требуют выполнения равенств:

$$E_0 = a_{\infty} E_{\infty} + \int_0^{\infty} A(v) E(v) dv, \quad (96)$$

$$C g(v) = a_{\infty} f_{\infty}(v) + \int_0^{\infty} A(v) f_v(v) dv, \quad v \geq 0, \quad (97)$$

где

$$C = - \int_{-\infty}^0 v' f(0, v') dv'. \quad (98)$$

Если отвлечься от необходимости определения C , то уравнения (96) и (97) эквивалентны уравнениям (79) и (78) в теореме 4. К решению этих уравнений возможен прямой подход, но он связан со слишком громоздкими вычислениями. Вычисления можно существенно упростить, заметив, что значение a_{∞} фактически известно [84]. В самом деле, проинтегрируем уравнение (49a) по v и сложим с уравнением (49b):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ E + \frac{4\pi e}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} v f(v) dv \right\} = 0. \quad (99)$$

Легко видеть, что величина, заключенная в фигурные скобки, постоянна. По предположению,

$$E + \frac{4\pi e}{i\omega} \int_{-\infty}^{\infty} v f dv = E_0 \quad (100)$$

при $x=0$ и $E \rightarrow a_{\infty}$ и $f \rightarrow a_{\infty} f_{\infty}$ при $x \rightarrow \infty$, так что

$$E_0 = a_{\infty} + \frac{4\pi e}{i\omega} a_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v f_{\infty}(v) dv = a_{\infty} \{1 - \sigma^2\}, \quad (101)$$

откуда

$$a_{\infty} = \frac{E_0}{1 - \sigma^2}. \quad (102)$$

Сравнивая этот результат с равенством (90), в котором следует положить $\Phi(v') = Cg(v')$, находим

$$C = \frac{i\omega}{4\pi e} \frac{X(0) [X(0) - 1] E_0}{\int_0^{\infty} v' g(v') [X^-(v')/\Lambda^-(v')] dv'}. \quad (103)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (91), вычисляем $N(z)$, а затем по формуле (83) — и $A(v)$.

Рассмотрим два примера.

а) *Стенка при нулевой температуре.* В этом случае

$$g(v) = -\delta'(v). \quad (104)$$

С помощью тождеств (86), (88) и (89) находим:

$$A(v) = \frac{-nie}{m\omega} E_0 \frac{\partial f_0(v)}{\partial v} \frac{X(-v)}{\Lambda^+(v) \Lambda^-(v)}. \quad (105)$$

Представляет интерес поведение решений при малых и при больших значениях x . Его легко получить, зная асимптотическое поведение $A(v)$ при малых и при больших значениях v соответственно. Легко видеть, что при малых v

$$A(v) \approx \frac{-nie}{m\omega} E_0 \frac{\partial f_0}{\partial v} X(0), \quad (106)$$

а при больших v

$$A(v) \approx \frac{-nie}{m\omega} E_0 \frac{(\partial f_0 / \partial v)}{\Lambda^2(\infty)}. \quad (107)$$

б) *Стенка при невозмущенной температуре.* Здесь

$$g(v) = -\frac{1}{f_0(0)} \frac{1}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v}. \quad (108)$$

Так же как и в предыдущем примере, получаем

$$A(v) = \frac{nie}{m\omega} \frac{(\partial f_0 / \partial v) X(-v)}{\Lambda^+(v) \Lambda^-(v)} E_0 \left\{ \frac{1 - X(0)}{v X'(0)} - 1 \right\}. \quad (109)$$

Мы видим, в частности, что при малых v

$$A(v) \approx \frac{nie}{m\omega} \frac{\partial f_0}{\partial v} X(0) \left\{ \frac{1 - X(0)}{v X'(0)} \right\}, \quad (110)$$

а при больших v

$$A(v) \approx \frac{-nie}{m\omega} \frac{(\partial f_0 / \partial v) E_0}{\Lambda^2(\infty)}. \quad (111)$$

Сравнивая формулы (107) и (111), замечаем, что при больших v (т. е. при больших x) решения одинаковы. Действительно, из соотношения (94) легко вывести, что асимптотическое поведение $A(v)$ при больших v определяется формулой (111) независимо от вида функции g . Этот результат весьма приятен: на больших расстояниях от границы решение *не зависит* от точного вида граничного условия. Напротив, при *очень малых* v решение *явно зависит* от граничного условия, что видно из формул (106) и (110).

Отметим, что Шур [85] исследовал этими методами ряд задач, в которых существенную роль играют не только продольные поля.

10.4. Электрический разряд в газе

Существуют плазменные задачи, которые еще более непосредственно связаны с рассмотренными в этой книге нейтронными задачами. В качестве примера приведем следующую в высшей степени идеализированную модель газоразрядной трубки с электронным током.

Пусть электроны движутся в постоянном заданном электрическом поле в трубке, наполненной газом из нейтральных атомов или молекул. Пусть сечение столкновения электрона, движущегося со скоростью v , с одной из этих частиц равно $\sigma'(v)$. Предположим, что при каждом столкновении возникает в среднем s новых электронов. Для простоты допустим, что возникающие электроны распределены по углам изотропно и движутся с *той же* скоростью, что и породивший их электрон. (Это, по-видимому, наиболее сильное допущение в данной модели.) Тогда уравнение переноса для электронной функции распределения $F(\mathbf{r}, v, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F - \frac{e}{m} \mathbf{E} \cdot \nabla_v F + v \sigma'(v) F = \frac{c}{4\pi} v \sigma'(v) \int F(\mathbf{r}, |\mathbf{v}|, \Omega, t) d\Omega, \quad (1)$$

где

$$\Omega = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \quad (2)$$

и t — время.

Если интересоваться только распределением по скоростям (независимо от координаты), можно проинтегрировать уравнение (1) по всей трубке и получить для функции

$$\psi(v, t) = \int F(r, v, t) d^3r \quad (3)$$

уравнение

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{eE}{m} \nabla_v \psi + \nu \sigma'(v) \psi = \frac{c}{4\pi} \nu \sigma'(v) \int \psi(|v|, \Omega) d\Omega. \quad (4)$$

Вместо декартовых координат скорости v удобно ввести переменные

$$\mu = -\frac{E \cdot v}{|E|v}, \quad (5)$$

$$v = |v|, \quad (6)$$

в которых уравнение (4) запишется так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{e|E|}{m} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial v} + \frac{(1-\mu^2)}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} \right\} \psi + \nu \sigma' \psi = \frac{c}{4\pi} \nu \sigma' \int \psi(v, \Omega) d\Omega. \quad (7)$$

Положив

$$\tau = t \frac{e|E|}{m}, \quad \sigma = \frac{\sigma'}{e|E|/m}, \quad (8)$$

представим уравнение (7) в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \left[\mu \frac{\partial}{\partial v} + \frac{(1-\mu^2)}{v} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] \psi + \nu \sigma \psi = \frac{c}{4\pi} \nu \sigma \int \psi(v, \Omega) d\Omega. \quad (9)$$

Если в этом уравнении заменить v на $|r|$, оно в точности совпадает с односкоростным уравнением переноса нейтронов с изотропным рассеянием, записанным в сферических координатах. При произвольной функции $\sigma(v)$ уравнение соответствует нейтронной задаче с сечением, зависящим от координаты. Однако интересный с физической точки зрения случай $\sigma \sim v^{-1}$ соответствует нейтронной задаче с постоянным сечением¹⁾, так что можно непосредственно применить методы, описанные в гл. 4—6.

Отметим, что физически интересный случай $\sigma \sim v^{-2}$ тоже легко поддается аналитическому исследованию [88]. (В соответствующей нейтронной задаче сечение изменяется, как $|r|^{-1}$.)

10.5. Перенос излучения в звездных атмосферах

Задачу определения температурного распределения во внешних слоях звезды можно при определенных (и весьма сильных) упрощающих предположениях свести к решению уравнения, экви-

¹⁾ Эта аналогия использовалась в работах [86, 87].

валентного односкоростному уравнению переноса нейтронов. (Это уравнение впервые было получено как раз в астрофизике.) Ранние работы по этому вопросу принадлежат Милну [89], предложившему следующую модель звезды.

Фотоны образуются главным образом вблизи центра звезды в области очень высокой температуры. Эти фотоны затем диффундируют наружу через менее плотные слои звездной атмосферы и, наконец, пересекают пограничный слой между звездой и окружающим ее пустым пространством. Звезда предполагается столь большой, что задачу можно рассматривать в плоской геометрии с бесконечно удаленным от границы источником. Требуется найти распределение температуры в атмосфере, а также угловое распределение излучения, выходящего из звезды.

Таким образом, мы ищем решения уравнения переноса без источников при условии, что на границе нет потока, направленного внутрь. Такова первоначальная формулировка проблемы Милна. Рассмотренная в гл. 5 и 6 проблема Милна для нейтронов получила свое название благодаря сходству с астрофизической проблемой. Действительно, мы увидим далее, что обсуждавшаяся в гл. 5 и 6 задача соответствует частному случаю астрофизической задачи, а именно проблеме Милна для «серой» среды.

Исследуем теперь уравнение переноса, которому удовлетворяет плотность числа фотонов, отнесенная к единице телесного угла (*фазовая плотность*), $\psi_\omega(x, \mu)$. (Обозначения останутся теми же, что и в случае нейтронов, только вместо энергии E будем пользоваться угловой частотой ω ($E = \hbar\omega$). Мы отказались от употребления более принятой переменной $\nu = \omega/2\pi$, поскольку через ν мы обозначаем собственные значения уравнения переноса.) Допустим, что $\psi_\omega(x, \mu)$ удовлетворяет уравнению¹⁾

$$\mu \frac{\partial \psi_\omega(x, \mu)}{\partial x} + [\sigma_\omega^s(x) + \sigma_\omega^a(x)] \psi_\omega(x, \mu) = \sigma_\omega^s(x) \int_{-1}^1 \psi_\omega(x, \mu') f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' + S_\omega(x). \quad (1)$$

Здесь $\sigma_\omega^s(x)$ и $\sigma_\omega^a(x)$ — макроскопические сечения рассеяния и поглощения соответственно. Обычно предполагается, что пространственное изменение этих сечений целиком определяется изменением плотности $\rho(x)$ вещества²⁾, т. е. что *относительная*

¹⁾ В астрофизической литературе μ часто задается как $-\Omega \cdot z$, а не $+\Omega \cdot z$. При таком соглашении, очевидно, изменится знак первого члена в уравнении (1).

²⁾ Не следует путать $\rho(x)$ с плотностью нейтронов, которую мы обозначаем той же буквой.

концентрация различных компонент звездной атмосферы постоянна. В этом случае

$$\sigma_{\omega}^a(x) = \rho(x) k_{\omega}, \quad (2a)$$

$$\sigma_{\omega}^s(x) = \rho(x) \sigma_{\omega}, \quad (2b)$$

где введены обычные астрофизические обозначения для микроскопических сечений k_{ω} и σ_{ω} , которые принято называть *коэффициентами* поглощения и рассеяния соответственно.

Первый член в правой части уравнения (1) описывает фотоны, рассеянные без изменения частоты. Второй член $S_{\omega}(x)$ является эффективным «источником». Он описывает фотоны, испускаемые веществом в точке x после поглощения первичного фотона. Основное предположение, которое обычно делают, состоит в том, что излучаемые фотоны распределены по частотам, как в случае абсолютно черного тела (распределение Планка). Следовательно, плотность вещества предполагается столь большой, что каждой точке x можно приписать локальную температуру $T(x)$. Тогда «источник» излучения $S_{\omega}(x)$ и поглощение связаны условием термодинамического равновесия [43], а именно

$$S_{\omega}(x) = \sigma_{\omega}^a(x) B_{\omega}[T(x)], \quad (3a)$$

где $B_{\omega}(T)$ — распределение Планка:

$$B_{\omega}(T) = \frac{h\omega^3}{4\pi^3c^2} (e^{h\omega/kT(x)} - 1)^{-1}. \quad (3b)$$

Мы будем называть соотношение (3a) для S_{ω} условием «локального термодинамического равновесия» (ЛТР). В астрофизической литературе принято называть ЛТР условие (3a) с $\sigma_{\omega}^s \equiv 0$ (при этом исходят из естественного предположения, что если плотность достаточно велика для того, чтобы выполнялось условие (3a), то процессами рассеяния можно пренебречь). Предельный случай малой плотности соответствует равенству $\sigma_{\omega}^a = 0$. Его обычно называют случаем «монохроматического равновесия», или «рассеивающей атмосферы». Мы предпочитаем пользоваться термином «локальное термодинамическое равновесие» для обозначения той трактовки неупругого рассеяния фотонов, которая описывается уравнением (3a), а предельные случаи называть «чистым поглощением» и «чистым рассеянием», хотя правильнее было бы называть их «чисто неупругим рассеянием» и «чисто упругим рассеянием».

В астрофизических приложениях принято оперировать не с плотностью числа фотонов $\psi_{\omega}(x, \mu)$, а с *плотностью энергии* фотонов $I_{\omega}(x, \mu)$, называемой *интенсивностью*:

$$I_{\omega}(x, \mu) = \hbar\omega\psi_{\omega}(x, \mu). \quad (4)$$

Подставим выражения (3а) и (4) в уравнение (1), разделим на $\rho(z)$ и учтем соотношения (2):

$$\mu \frac{\partial I_{\omega}}{\partial z}(z, \mu) + (k_{\omega} + \sigma_{\omega}) I_{\omega}(z, \mu) = \\ = \sigma_{\omega} \int I_{\omega}(z, \mu') f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega' + k_{\omega} B_{\omega}[T(z)]. \quad (5)$$

Здесь z определяется формулой $z = \int_0^z \rho(x') dx'$.

Это уравнение в случае «чистого рассеяния» ($k_{\omega} = 0$) совпадает с односкоростным уравнением переноса нейтронов, которое было исчерпывающе исследовано в предыдущих главах. Частота ω входит лишь как тривиальный параметр, поскольку фотоны различной частоты совершенно не связаны друг с другом. Найденные в разд. 5.6 и 6.4 решения нейтронной проблемы Милна применимы также и здесь.

Более интересен случай $k_{\omega} \neq 0$. Здесь можно достичь некоторого упрощения, приняв шварцшильдовскую модель «радиационного равновесия» [43]. Эта модель предполагает, что распределение температуры не зависит от времени и что все тепло переносится излучением. Тогда полный поток энергии через любую плоскость, перпендикулярную оси z , должен быть постоянным:

$$\frac{\partial F_{\omega}(z)}{\partial z} = 0, \quad (6a)$$

где $F_{\omega}(z)$ — величина, называемая *потоком излучения* и пропорциональная плотности потока энергии:

$$F_{\omega}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \mu I_{\omega}(z, \mu) d\mu. \quad (6b)$$

Если проинтегрировать уравнение (5) по $d\omega$ и $d\Omega = 2\pi d\mu$ и воспользоваться тем, что

$$\int f(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega = 1, \quad (7)$$

а также соотношением (6а), то в качестве условия радиационного равновесия получим равенство

$$\int d\Omega \int_0^{\infty} d\omega k_{\omega} I_{\omega}(z, \mu) = 4\pi \int_0^{\infty} k_{\omega} B_{\omega}[T(z)] d\omega, \quad (8)$$

в которое не входит сечение рассеяния. Введем теперь величину

$$J_{\omega} = \frac{1}{4\pi} \int d\Omega I_{\omega}(z, \mu), \quad (9)$$

называемую в астрофизике *средней интенсивностью* и, очевидно, аналогичную *плотности* в нейтронных задачах. Условие (8) примет вид

$$\int_0^{\infty} d\omega k_{\omega} J_{\omega}(z) = \int_0^{\infty} k_{\omega} B_{\omega}[T(z)] d\omega. \quad (10)$$

Уравнения (5) и (10) можно рассматривать как систему уравнений для двух неизвестных функций $I_{\omega}(z, \mu)$ и $B_{\omega}[T(z)]$. Заметим, что эта система в высшей степени нелинейна и общее решение ее неизвестно. Однако для некоторых конкретных видов энергетической зависимости сечений k_{ω} и σ_{ω} решения найти можно. Рассмотрим сначала самый простой случай, когда эти величины постоянны (случай так называемой «серой» среды). Проинтегрируем уравнение (5) по ω и учтем условие (10):

$$\mu \frac{\partial I(z, \mu)}{\partial z} + (k + \sigma) I(z, \mu) = \int I(z, \mu') g(\Omega' \cdot \Omega) d\Omega', \quad (11a)$$

где

$$I = \int_0^{\infty} I_{\omega} d\omega, \quad (11b)$$

$$g(\Omega' \cdot \Omega) = \sigma f(\Omega' \cdot \Omega) + k/4\pi.$$

Таким образом, в случае «серой» среды уравнение для интегральной интенсивности совпадает с односкоростным уравнением переноса нейтронов¹⁾, решение которого нам уже известно.

Уравнение (10) позволяет связать температуру со средней интегральной интенсивностью

$$J(z) = \alpha T^4(z), \quad (12a)$$

поскольку

$$\int_0^{\infty} B_{\omega}[T(z)] d\omega = \alpha T^4(z), \quad (12b)$$

где α — постоянная Стефана — Больцмана, деленная на π . Легко видеть, что T^4 удовлетворяет уравнению для *плотности* ρ нейтронов в односкоростном случае (разд. 3.6). Например, для изо-

¹⁾ Односкоростное уравнение переноса получается как при $k_{\omega} = 0$, так и при постоянных сечениях (в последнем случае — для интегральной интенсивности). Эта ситуация аналогична ситуации в задачах переноса нейтронов (разд. 2.2).

тропного рассеяния (т. е. $f(\Omega' \cdot \Omega) = 1/4\pi$):

$$T^4(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1 |(\sigma + k)|z - z'| | T^4(z') dz'. \quad (13)$$

Зная $T(z)$, можно решить уравнение (5), вычислив интеграл от произведения теперь уже известного «источника» $kB[T(z)]$ на функцию Грина плоского источника (формула (21a) разд. 2.5). При $\sigma_\omega = 0$ решение имеет простой вид:

$$I_\omega(z, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{-k_\omega |z - z'|/\mu}}{\mu} B_\omega[T(z')] dz'. \quad (14)$$

При $\sigma_\omega \neq 0$ для нахождения $I_\omega(z, \mu)$ требуется решить интегральное уравнение, отличающееся от уравнения (14) лишь присутствием под интегралом члена, соответствующего рассеянию (разд. 2.6). Детали слишком хорошо известны, чтобы мы на них здесь останавливались.

Кроме модели «серой» среды, точное решение допускает также несколько более общая модель — так называемая модель «однородного частотного колода». В этой модели спектр частот разбивается на малые отрезки $\Delta\omega_i$ и на каждом из них функция $B_\omega(T)$ считается не зависящей от ω . Далее, предполагается, что на каждом отрезке $\Delta\omega_i$ коэффициент k_ω принимает N различных значений k_1, k_2, \dots, k_N , причем доля длины $\Delta\omega_i$, на которой k_ω принимает каждое из значений k_i , одинакова для всех отрезков $\Delta\omega_i$. Эту модель можно рассматривать как идеализированную модель резонансных линий поглощения, налагающихся на серый континуум, который представлен наименьшим из значений k_i . Кроме того, мы предположим, что $\sigma_\omega = 0$.

При этих довольно значительных ограничениях уравнение переноса можно привести к виду, удобному для решения. Прежде всего проинтегрируем уравнение (5) с $\sigma_\omega = 0$ по подмножеству Δ_i спектра частот, на котором $k_\omega = k_i$:

$$\mu \frac{\partial I_i(z, \mu)}{\partial z} + k_i I_i = \frac{k_i \omega_i \sum_{j=1}^N k_j \int_{-1}^1 I_j(z, \mu') d\mu'}{2 \sum_{j=1}^N k_j \omega_j}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (15)$$

где

$$I_i(z, \mu) = \int_{\Delta_i} d\omega I_\omega(z, \mu), \quad (16)$$

$$\omega_i = \frac{1}{\alpha T^4(z)} \int_{\Delta_i} d\omega B_\omega[T(z)]. \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что ограничения, наложенные на k_i , обеспечивают независимость ω_i от z .

При выводе уравнений (15) использовано условие Шварцшильда (10), которое в данной модели принимает вид

$$\sum_{j=1}^N k_j \omega_j \alpha T^4(z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N k_j \int_{-1}^1 I_j(z, \mu') d\mu'. \quad (18)$$

Обозначив $k_i/k_N = \sigma_i$ ($\sigma_N = 1$), запишем уравнения (15) в матричной форме:

$$E\mu \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{I}(z, \mu) + \Sigma \mathbf{I}(z, \mu) = \mathbf{C} \int_{-1}^1 \mathbf{I}(z, \mu') d\mu', \quad (19)$$

где \mathbf{I} обозначает N -мерный вектор-столбец с компонентами I_i , E — единичная матрица и

$$(\Sigma)_{ij} = \sigma_i \delta_{ij}, \quad (20a)$$

$$(\mathbf{C})_{ij} = \frac{\sigma_i \omega_i \sigma_j}{2 \sum_{j=1}^N \sigma_i \omega_i}. \quad (20b)$$

Уравнение (19) имеет такую же форму, как многогрупповые уравнения переноса нейтронов [34], но матрица \mathbf{C} обладает специальными свойствами, упрощающими решение. Отметим, в частности, что

$$\det \mathbf{C} = 0 \quad (21a)$$

и, более того,

$$\det \mathbf{M} = 0, \quad (21b)$$

где \mathbf{M} — любой минор любого ранга (>1) матрицы \mathbf{C} . Эти уравнения были детально исследованы методом разложения по сингулярным модам¹⁾. Итак, мы ищем решение в виде

$$I_\nu(x, \mu) = \Phi_\nu(\mu) e^{-x/\nu}, \quad (22)$$

где $\Phi_\nu(\mu)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\Sigma - E \frac{\mu}{\nu} \right) \Phi_\nu(\mu) = \mathbf{C} \int_{-1}^1 \Phi(\mu') d\mu'. \quad (23)$$

Уравнение (23) решается способом, аналогичным способу решения односкоростного уравнения (гл. 4). Приведем здесь некоторые результаты.

Существует непрерывный спектр собственных значений $-1 \leq \nu \leq 1$. Соответствующие собственные функции на каждом

¹⁾ См. [90, 91]. Случай $N = 2$ исследован в неопубликованной работе Стюарта (J. C. Stewart) методом дискретных ординат.

отрезке $1/\sigma_{i-1} \leq v \leq 1/\sigma_i$ ¹⁾ имеют различный вид. Обозначим собственные функции на таком отрезке через Φ_v^i . Они оказываются $(N - i + 1)$ -кратно вырожденными. Далее, двум точкам дискретного спектра $v_0 = \pm \infty$ (вырожденным) соответствуют собственные функции

$$I_+(x, \mu) = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \end{pmatrix}, \quad (24a)$$

$$I_-(x, \mu) = \begin{pmatrix} \omega_1(x - \mu/\sigma_1) \\ \vdots \\ \omega_N(x - \mu) \end{pmatrix}. \quad (24b)$$

Можно доказать теорему полноты для половинного отрезка. Отметим, что в этой теореме коэффициенты разложения будут скалярами (не матрицами). Справедлива также теорема ортогональности на половинном отрезке:

$$\int_0^1 \Phi_v^*(\mu) w(\mu) \Phi_{v'}(\mu) d\mu = 0, \quad v \neq v', \quad (25)$$

где $\Phi_v^*(\mu)$ — сопряженные собственные функции, т. е. решения уравнения, полученного из (23) заменой матрицы S на транспонированную матрицу \tilde{S} :

$$\left(\Sigma - \frac{\mu}{v} E \right) \Phi_v^*(\mu) = \tilde{S} \int_{-1}^1 \Phi_{v'}^*(\mu') d\mu'. \quad (26)$$

Весовая функция $w(\mu)$ является диагональной матрицей²⁾:

$$w(\mu) = \begin{pmatrix} \sigma_1 \gamma(\mu/\sigma_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 \gamma(\mu/\sigma_2) & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & \dots & \gamma(\mu) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

¹⁾ «Группы» упорядочены таким образом, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N = 1$.

²⁾ Функция γ здесь определяется так же, как в односкоростном случае: $\gamma(\mu) = \mu [X^+(\mu)/\Omega^+(\mu)]$, где

$$X(z) = \frac{\exp \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^1 \arg \Omega^+(\mu) \frac{d\mu}{\mu - z} \right\}}{1 - z},$$

а дисперсионная функция $\Omega(z)$ имеет вид

$$\Omega(z) = 1 - 2v \sum_{i=1}^N c_{ii} \operatorname{Arth} \frac{1}{v}.$$

В соотношении (25) $\Phi_\nu(\mu)$ может быть как собственной функцией непрерывного спектра, так и функцией I_+ . (Функции, принадлежащие вырожденным собственным значениям непрерывного спектра, можно ортогонализировать с помощью процедуры Шмидта.)

Этот формализм, очевидно, обобщает формализм в односкоростном случае при $c = 0$. Его можно применить к различным задачам для полупространства. Дальнейшие подробности можно найти в работах [90, 91]. Отметим в заключение, что при $N = 1$ описанная нами модель вырождается в «случай серой среды», рассмотренный в начале этого раздела.

Приложение А

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Любую функцию $f(\Omega)$ можно разложить в ряд по полной системе сферических функций $Y_{lm}(\Omega) = Y_{lm}(\mu, \varphi)$, где $\mu = \cos \theta$ и φ — угловые координаты вектора Ω на сфере единичного радиуса:

$$f(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\Omega). \quad (\text{A.1})$$

Функции Y_{lm} ортогональны по l, m и могут быть нормированы:

$$\int Y_{lm}^*(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.2})$$

где знак * означает комплексное сопряжение.

Из равенств (A.1) и (A.2) получаем

$$f_{lm} = \int f(\Omega) Y_{lm}^*(\Omega) d\Omega. \quad (\text{A.3})$$

В явном виде функции $Y_{lm}(\Omega)$ определяются формулами [64]

$$Y_{lm}(\Omega) = \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2} (-1)^{(1/2)(m+|m|)} P_{l|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (\text{A.4})$$

где P_{lm} — присоединенные функции Лежандра. Ясно, что

$$Y_{l0}(\Omega) = [(2l+1)/(4\pi)]^{1/2} P_l(\mu), \quad (\text{A.5})$$

$$Y_{l,-m}(\Omega) = (-1)^m Y_{lm}^*(\Omega), \quad (\text{A.6})$$

$$Y_{lm}(1, \varphi) = [(2l+1)/(4\pi)]^{1/2} \delta_{m0}. \quad (\text{A.7})$$

Здесь $P_l(\mu)$ — полином Лежандра. Имеет место теорема сложения:

$$P_l(\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{a}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{b}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\hat{\mathbf{a}}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{b}}), \quad (\text{A.8})$$

где $\hat{\mathbf{a}}$ и $\hat{\mathbf{b}}$ — два произвольных единичных вектора¹⁾.

Полезно напомнить также, что компоненты вектора Ω можно выразить через три сферические функции первого порядка:

$$\Omega_z = \mu = \sqrt{(4\pi/3)} Y_1^0(\Omega), \quad (\text{A.9a})$$

$$\Omega_x = \cos \varphi \sqrt{1-\mu^2} = \sqrt{(2\pi/3)} [-Y_{1,1}(\Omega) + Y_{1,-1}(\Omega)], \quad (\text{A.9b})$$

$$\Omega_y = \sin \varphi \sqrt{1-\mu^2} = +i \sqrt{(2\pi/3)} [Y_{1,1}(\Omega) + Y_{1,-1}(\Omega)]. \quad (\text{A.9c})$$

¹⁾ Мы по-прежнему будем отмечать знаком $\hat{}$ единичные векторы.

Приложение В

РАЗЛОЖЕНИЕ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ ПО СФЕРИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Разложим функцию $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ в ряд

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \psi_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\Omega), \quad (\text{B.1})$$

где для удобства выделен нормировочный множитель $[(2l+1)/4\pi]^{1/2}$.
Так как $\rho(\mathbf{r}) = \int d\Omega \psi(\mathbf{r}, \Omega)$, то

$$\rho(\mathbf{r}) = \psi_{00}(\mathbf{r}). \quad (\text{B.2})$$

Далее, $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = v \int d\Omega \cdot \Omega \psi(\mathbf{r}, \Omega)$. В силу (A.9)

$$J_z = v \psi_{10}(\mathbf{r}), \quad (\text{B.3a})$$

$$J_x = v \frac{1}{\sqrt{2}} [-\psi_{11} + \psi_{1,-1}], \quad (\text{B.3b})$$

$$J_y = -v \frac{i}{\sqrt{2}} [\psi_{11} + \psi_{1,-1}]. \quad (\text{B.3c})$$

Это — общие формулы. В каждой конкретной задаче они имеют свой вид. Рассмотрим сначала случай плоской симметрии.

В.1. Плоская симметрия

В разд. 2.1 было показано, что фазовую плотность в случае плоской симметрии можно записать в виде ¹⁾

$$\psi = \psi(z, \mu), \quad (\text{B.4})$$

где $\mu = \Omega \cdot \hat{\mathbf{z}}$. Разлагая (B.4) в ряд по полиномам Лежандра

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \psi_l(z) P_l(\mu) \quad (\text{B.5})$$

¹⁾ Зависимость от v и t мы не будем указывать явно.

и применяя теорему сложения (А.8), находим

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l(z) Y_{lm}^*(\hat{z}) Y_{lm}(\Omega). \quad (\text{В.6})$$

Сравнивая с формулой (В.1), видим, что в случае плоской симметрии

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \psi_l(z) Y_{lm}^*(\hat{z}). \quad (\text{В.7})$$

Таким образом, плотность определяется соотношением

$$\rho(z) = \psi_0(z), \quad (\text{В.8})$$

а для тока получаем

$$J_z(z) = \psi_1(z) v, \quad (\text{В.9a})$$

$$J_x(z) = J_y(z) = 0. \quad (\text{В.9b})$$

(в силу (А.7)¹). Таким образом, ток направлен по оси z , т. е.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \hat{z} \psi_1(z) v. \quad (\text{В.10})$$

Если выполнены условия, при которых справедливо соотношение (26) разд. 2.1 (имеется в виду симметрия сечений относительно плоскости $z = 0$ и изотропия источников), то из (В.5) следует

$$\psi_l(z) = (-1)^l \psi_l(-z), \quad (\text{В.10}')$$

поскольку

$$P_l(\mu) = (-1)^l P_l(-\mu).$$

В.2. Сферическая симметрия

Согласно разд. 2.1, функция ψ зависит от r и $\Omega \cdot \mathbf{r}$. Поэтому, разлагая ψ , как в (В.5), по полиномам Лежандра от аргумента $\Omega \cdot \mathbf{r}$ и применяя теорему сложения, находим

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_l(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{lm}(\Omega). \quad (\text{В.11})$$

Сравнивая с формулой (В.1), видим, что в случае сферической симметрии

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} \psi_l(r) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}). \quad (\text{В.12})$$

Таким образом, для плотности и трех компонент тока получаем

$$\rho(r) = \psi_0(r), \quad (\text{В.13})$$

$$J_z = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} v Y_{10}(\hat{\mathbf{r}}) \psi_1(r), \quad (\text{В.14a})$$

¹) С учетом того, что угловая координата на оси z равна $\mu = 1$.

$$J_x = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} v [-Y_{11}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{r}})] \psi_1(r), \quad (\text{B.14b})$$

$$J_y = +i \sqrt{\frac{2\pi}{3}} v [Y_{11}(\hat{\mathbf{r}}) + Y_{1,-1}(\hat{\mathbf{r}})] \psi_1(r). \quad (\text{B.14c})$$

Сравнивая далее эти соотношения с формулами (A.9), замечаем, что в (B.14) функция $\psi_1(r)$ умножается просто на x -, y - и z -компоненты вектора $\hat{\mathbf{r}}$ соответственно. Таким образом,

$$\mathbf{J}(r) = v \hat{\mathbf{r}} \psi_1(r); \quad (\text{B.15})$$

иными словами, ток оказывается радиальным, а его величина, как и в случае плоской симметрии, равна $\psi_1 v$.

В.3. Цилиндрическая симметрия

Опять-таки из формул разд. 2.1 заключаем, что в случае цилиндрической симметрии

$$\psi = \psi(\eta, \mu, \varphi_\Omega - \varphi_\eta), \quad (\text{B.16})$$

где $\mu = \Omega \cdot \hat{\mathbf{z}}$, причем ось z направлена вдоль оси симметрии. Тогда можно разложить (B.16) в ряд

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} \psi_{lm}(\eta) Y_{lm}(\mu, \varphi_\Omega - \varphi_\eta). \quad (\text{B.17})$$

Сравнивая с формулой (B.1), видим, что

$$\psi_{lm}(\mathbf{r}) = \psi_{lm}(\eta) e^{-im\varphi_\eta}. \quad (\text{B.18})$$

Таким образом, для плотности и тока получаем

$$\rho(\eta) = \psi_{00}(\eta), \quad (\text{B.19})$$

$$J_z = v \psi_{10}(\eta), \quad (\text{B.20a})$$

$$J_x = \frac{v}{\sqrt{2}} [-\psi_{11}(\eta) e^{-i\varphi_\eta} + \psi_{1,-1}(\eta) e^{i\varphi_\eta}], \quad (\text{B.20b})$$

$$J_y = -\frac{vi}{\sqrt{2}} [\psi_{11}(\eta) e^{-i\varphi_\eta} + \psi_{1,-1}(\eta) e^{i\varphi_\eta}]. \quad (\text{B.20c})$$

В случае изотропного источника можно применить формулы (36) и (37) разд. 2.1. В этом случае полученные выше результаты несколько упрощаются. Из формулы (36) разд. 2.1 и из (B.17) следует, что

$$\psi_{lm} = 0, \quad \text{если } l + m \neq 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.21})$$

Таким образом, в данном случае

$$J_z = 0, \quad (\text{B.22})$$

т. е. компонента вектора тока, направленная по оси симметрии, равна нулю. Применим формулу (37) разд. 2.1 и учтем, что

$$Y_{lm}(\mu, -\varphi) = Y_{lm}^*(\mu, \varphi) = (-1)^m Y_{l,-m}(\mu, \varphi). \quad (\text{B.23})$$

Тогда в силу (B.17)

$$\psi_{lm}(\eta) = (-1)^m \psi_{l,-m}(\eta). \quad (\text{B.24})$$

Теперь формулы (B.20b) и (B.20c) принимают вид

$$J_x = v \sqrt{2} \psi_{11}(\eta) \cos \varphi_\eta, \quad (\text{B.25a})$$

$$J_y = v \sqrt{2} \psi_{11}(\eta) \sin \varphi_\eta, \quad (\text{B.25b})$$

откуда $\mathbf{J} = \sqrt{2} v \psi_{11}(\eta) \hat{\eta}$; иными словами, ток опять радиальный.

Приложение С

СВЯЗЬ МЕЖДУ ФУНКЦИЯМИ ФАЗОВОЙ ПЛОТНОСТИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ИСТОЧНИКАХ

Как отмечалось в разд. 2.6, решение уравнения переноса при произвольном распределении источников можно получить интегрированием решения с точечным источником (т. е. функции Грина оператора Больцмана) по распределению источников. В частности, фазовую плотность при каком-то распределении изотропных источников можно получить из решения задачи с точечным изотропным источником, т. е.

$$\psi_{q_0}(\mathbf{r}, \Omega) = \int q_0(\mathbf{r}_0) G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) d^3 r_0. \quad (\text{C.1})$$

Согласно формуле (13b) разд. 2.1 и формуле (B.14), функцию $G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega)$ можно записать в виде

$$G(\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l G_l(R) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) Y_{lm}(\Omega), \quad (\text{C.2})$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Разложим левую часть равенства (C.1) в соответствии с (B.1), умножим на $Y_{lm}^*(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω :

$$\psi_{q_0 lm}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} \int d^3 r_0 G_l(R) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) q_0(\mathbf{r}_0). \quad (\text{C.3})$$

Формула (C.3) позволяет связать компоненты разложения по сферическим гармоникам различных источников с соответствующими компонентами разложения точечного источника по полиномам Лежандра.

В частности, в этом приложении мы применим формулу (C.3) к случаям плоского и линейного источников и к случаям источников, равномерно распределенных по поверхности шара или цилиндра. Всюду будет предполагаться, что источник изотропный.

С.1. Плоский источник

Рассмотрим однородный изотропный источник, испускающий 1 нейтрон на 1 см^2 и расположенный в плоскости $z = 0$ ¹⁾. Тогда

$$q_0(z) = \delta(z). \quad (\text{C.4})$$

¹⁾ Согласно формуле (15) разд. 2.1, предположение о расположении источника в плоскости $z = 0$ не ограничивает общности рассуждений.

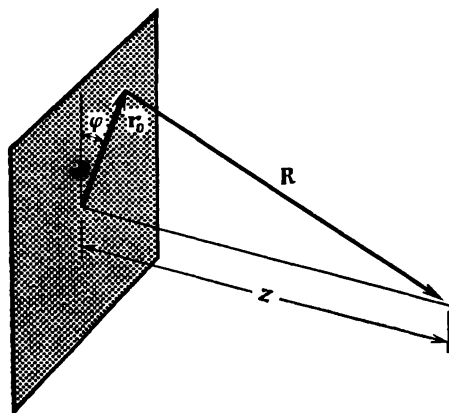
В цилиндрических координатах $d^3r_0 = \eta d\eta d\varphi dz$, так что формула (С.3) сводится к формуле (рис. С.1)

$$\psi_{plm}(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int_0^\infty \eta d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi G_l(\sqrt{\eta^2+z^2}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}). \quad (\text{С.5})$$

С помощью (В.7) приведем формулу (С.5) к виду

$$\psi_{pl}(z) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{z}}) = \int_0^\infty \eta d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi G_l(\sqrt{z^2+\eta^2}) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}). \quad (\text{С.6})$$

Умножим обе части этого равенства на $Y_{lm}(\hat{\mathbf{z}})$, просуммируем



Р и с. С.1.

по m и применим теорему сложения:

$$\psi_{pl}(z) = \int_0^\infty \eta d\eta \int_0^{2\pi} d\varphi G_l(\sqrt{z^2+\eta^2}) P_l(\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{R}}). \quad (\text{С.7})$$

Заменим переменную интегрирования на $R = \sqrt{\eta^2+z^2}$:

$$\psi_{pl}(z) = 2\pi \int_{|z|}^\infty R dR G_l(R) P_l(z/R). \quad (\text{С.8})$$

Формула (С.8) будет искомой. Для $l=0, 1$ это интегральное соотношение можно обратить и тем самым получить полезные дифференциальные соотношения:

$$G_0(R) \equiv \rho_{pt}(R) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{d}{dR} [\rho_{pl}(R)], \quad (\text{С.9a})$$

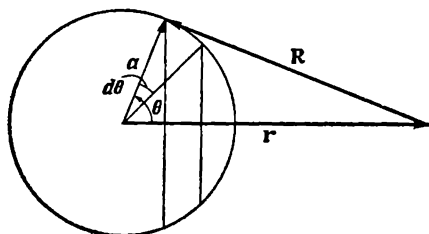
$$G_1(R) \equiv j_{pt}(R) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dR} \left[\frac{J_{pl}(R)}{R} \right]. \quad (\text{С.9b})$$

С.2. Источник на сфере

Источник на сфере радиуса a , испускающий 1 нейтрон на 1 см^2 , можно представить в виде

$$q_0(\mathbf{r}_0) = \delta(r_0 - a). \quad (\text{C.10})$$

Источник на сфере приводит, естественно, к сферической симметрии задачи; следовательно, $\psi_{ss}(\mathbf{r}, \Omega)$ обладает теми же свойствами



Р и с. С.2.

ми инвариантности, что и $G(\mathbf{R}, \Omega)$, и (С.3) приводится к виду

$$\psi_{ss l}(r, a) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{r}}) = \int d^3 r_0 G_l(R) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) \delta(r_0 - a) \quad (\text{C.11})$$

(мы воспользовались здесь формулой (В.12)). Умножим на $Y_{lm}(\hat{\mathbf{r}})$ и просуммируем по m :

$$\psi_{ss l}(r, a) = \int d^3 r_0 G_l(R) P_l(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{R}}) \delta(r_0 - a). \quad (\text{C.12})$$

Из рис. С.2 видно, что

$$d^3 r_0 = 2\pi r_0^2 d(\cos \theta) dr_0, \quad (\text{C.13a})$$

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta \quad (\text{C.13b})$$

и

$$a^2 = R^2 + r^2 - 2R \cdot \mathbf{r}.$$

Таким образом, формула (С.12) принимает вид

$$\psi_{ss l}(r, a) = 2\pi a^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) G_l(R) P_l\left(\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}\right). \quad (\text{C.14})$$

Заменим переменную интегрирования на R и учтем, что $d(\cos \theta) = -R (dR/ar)$:

$$\psi_{ss l}(r, a) = \frac{2\pi a}{r} \int_{|r-a|}^{|r+a|} R dR G_l(R) P_l\left(\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2Rr}\right). \quad (\text{C.15})$$

Это и есть основная формула в случае источника на сфере. Из формулы (С.15) при $l=0, 1$ и формулы (С.8) можно вывести простые соотношения между функциями плотности и токами в задачах об источниках на сфере и плоскости:

$$\rho_{ss}(r, a) = \frac{a}{r} [\rho_{pl}(|r-a|) - \rho_{pl}(|r+a|)], \quad (\text{С.16a})$$

$$J_{ss}(r, a) = \frac{a}{r^2} \left[\int_{|r-a|}^{|r+a|} J_{pl}(z) dz - r \left\{ J_{pl}(|r+a|) - \frac{r-a}{|r-a|} J_{pl}(|r-a|) \right\} \right]. \quad (\text{С.16b})$$

В пределе при $a \rightarrow 0$ формулы для источника на сфере должны переходить в формулы для точечного источника. Легко проверить, что именно так и получится, если источник на сфере нормировать на один нейтрон со всей поверхности, т. е. если вместо (С.10) положить

$$q_0(r_0) = \frac{\delta(r_0 - a)}{4\pi a^2}. \quad (\text{С.10'})$$

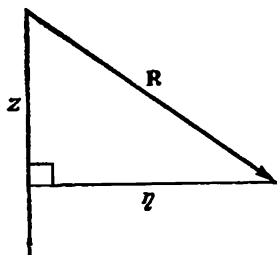
С.3. Линейный источник

Допустим, что источник испускает изотропно один нейтрон на единицу длины источника, т. е.

$$q_0(r_0) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\delta(\eta_0 - a)}{2\pi a} \quad (\text{С.17a})$$

и

$$d^3r_0 = \eta_0 d\eta_0 d\varphi_0 dz_0. \quad (\text{С.17b})$$



Р и с. С.3.

Из рис. С.3 видно, что

$$z = \pm \sqrt{R^2 - \eta^2}, \quad dz = R dR / (\pm z). \quad (\text{С.18})$$

Тогда (С.3) принимает вид

$$\psi_{\text{line } lm} = e^{im\varphi_\eta} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} \int dz G_l(R) Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) \quad (\text{C.19})$$

(мы воспользовались здесь формулой (В.18)). Так как¹

$$Y_{lm}^*(\hat{\mathbf{R}}) = Y_{lm} \left(\frac{\pm \sqrt{R^2 - \eta^2}}{R}, 0 \right) e^{-im\varphi_\eta}, \quad (\text{C.20})$$

то (С.19) сводится к

$$\psi_{\text{line } lm}(\eta) = \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} \int_{|\eta|}^{\infty} \frac{R dR}{\sqrt{R^2 - \eta^2}} G_l(R) Y_{lm} \left(\frac{\sqrt{R^2 - \eta^2}}{R}, 0 \right). \quad (\text{C.21})$$

С помощью (В.21) можно записать (С.21) в виде

$$\begin{aligned} \psi_{\text{line } lm}(\eta) = [1 + (-1)^{l+m}] \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} \times \\ \times \int_{|\eta|}^{\infty} \frac{R dR}{\sqrt{R^2 - \eta^2}} G_l(R) Y_{lm} \left(\frac{\sqrt{R^2 - \eta^2}}{R}, 0 \right). \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Отметим, что соотношение (В.24) в данном случае выполняется автоматически, т. е.

$$\psi_{\text{line } lm} = (-1)^m \psi_{\text{line } l, -m}.$$

С.4. Источник на цилиндрической поверхности¹⁾

Допустим, источник испускает 1 нейтрон на 1 см², так что

$$q_0 = \delta(\eta - a). \quad (\text{C.24})$$

Выкладки весьма громоздки, поэтому мы приведем здесь только окончательный результат:

$$\begin{aligned} \psi_{\text{cs } lm}(\eta) = 2a [1 + (-1)^{l+m}] \sqrt{4\pi/(2l+1)} \int_0^\pi d\varphi \int_{\lambda(\varphi)}^\infty \frac{R dR}{z(R, \varphi)} \times \\ \times G_l(R) \operatorname{Re} Y_{lm} \left[\frac{z(R, \varphi)}{R}, \arcsin \left(\frac{a \sin \varphi}{\lambda(\varphi)} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.24a})$$

где

$$z(R, \varphi) = \sqrt{R^2 - \eta^2 - a^2 + 2\eta a \cos \varphi}, \quad (\text{C.24b})$$

$$\lambda(\varphi) = \sqrt{\eta^2 + a^2 - 2\eta a \cos \varphi}, \quad (\text{C.24c})$$

Если формулы (С.24) разделить на $2la$ и перейти к пределу при $a \rightarrow 0$, то получатся формулы для случая линейного источника (С.22). Отметим также, что величины, определенные соотношениями (С.24), удовлетворяют условиям (В.21) и (В.24).

¹⁾ Формулы этого раздела выведены М. Мендельсоном (не опубликовано).

Приложение D

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА, ЗАВИСЯЩЕГО ОТ ЭНЕРГИИ [92]

В разд. 2.5 мы доказали, что решения нестационарного односкоростного уравнения переноса с ядром рассеяния $f(\Omega' \cdot \Omega, r)$, инвариантным относительно вращения, однозначно определяется начальным и граничными условиями и распределением источников. Было также показано, что решение *стационарного* уравнения однозначно определяется распределением источников и граничными значениями при условии, что $c(r) < 1$. Однако мы ничего не говорили относительно существования решения и не рассматривали более общие уравнения, например, зависящие от энергии уравнения переноса с произвольным ядром рассеяния.

В настоящем приложении мы распространим результаты разд. 2.5 на этот более общий случай. Кроме того, мы рассмотрим существование и единственность решений сопряженного уравнения (определенного ниже). Мы также рассмотрим, насколько это окажется возможным, различные свойства, которыми обладают решения (т. е. непрерывность, интегрируемость и т. д.).

Вообще говоря, ситуация такова. Задан ряд возможных ограничений, которые можно было бы наложить на сечения и источники, фигурирующие в уравнении переноса нейтронов или в сопряженном уравнении. Можно доказать, что при выполнении некоторых из этих ограничений решения непрерывны, при другом наборе ограничений решения могут быть разрывными, но все же интегрируемыми функциями одной или более независимых переменных задачи (таковы пространственные координаты, скорость и — в нестационарном случае — время). Существуют ограничения, при которых ничего нельзя сказать о решении. В этом приложении мы исследуем множество разумных ограничений, которые можно наложить на сечения и источники, и обсудим вопросы существования и единственности решений в каждом случае ¹⁾.

Начнем с преобразования рассматриваемых уравнений в интегральные уравнения.

¹⁾ Мы покажем, что во многих случаях можно доказать теоремы существования и (или) единственности либо для уравнения переноса, либо для соответствующего сопряженного уравнения, но не для обоих вместе.

D.1. Уравнения переноса

Уравнение переноса в нестационарном случае имеет вид

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \nu [\Omega \cdot \nabla + \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int \nu' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t) d^3 v', \quad (\text{D.1a})$$

а в стационарном

$$\nu [\Omega \cdot \nabla + \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \int \nu' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') d^3 v'. \quad (\text{D.1b})$$

Уравнения (D.1) можно обычным способом преобразовать в интегральные уравнения, вводя функции Грина для левых частей. Эти функции построены в гл. 3¹⁾. В результате получим интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (D.1a):

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \int_0^t dt' \int d^3 v' \nu' \sigma[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}] \times \\ \times \psi[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), \mathbf{v}', t'] \exp \left[- \int_{t'}^t \nu \sigma[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t''), \mathbf{v}] dt'' \right], \quad (\text{D.2a})$$

где

$$Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \psi(\mathbf{r} - \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0) \exp \left[- \int_0^t \nu \sigma[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), \mathbf{v}] dt' \right] + \\ + \int_0^t dt' q[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t'), \mathbf{v}, t'] \exp \left[- \int_{t'}^t \nu \sigma[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t''), \mathbf{v}] dt'' \right]. \quad (\text{D.2b})$$

Теперь, как и в разд. 2.5, мы докажем теоремы существования и единственности решений внутри заданного объема V , ограниченного поверхностью S , при условии, что на S задано распределение входящего (или в случае сопряженных уравнений выходящего) излучения.

Для того чтобы с помощью уравнения (D.2) описать интересующую нас ситуацию, проще всего потребовать, чтобы функции $q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, 0)$, $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ равнялись нулю при $\mathbf{r} \notin V$. При этом, как и в разд. 2.4, значения на границе

¹⁾ Формула (6) разд. 3.3 (с $q = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \delta(t - t')$) для уравнения (D.1a) и формула (2) разд. 3.5 для уравнения (D.1b).

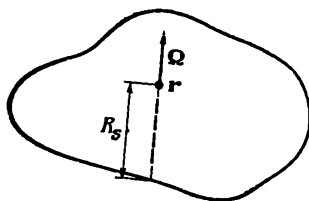
$\psi_i(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t)$ заменим поверхностным источником $q_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t)$ на S :

$$q_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t) = \begin{cases} v |\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_0| \psi_i(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t), & \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n}_0 < 0, \quad t > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

(Здесь \mathbf{n}_0 — внешняя нормаль к S .) Тогда (с учетом требования на функции q , ψ , σ и $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$) уравнение (D.2b) все еще можно будет применять, но к свободному члену Q надо добавить слагаемое Q_s , описывающее поверхностные источники:

$$Q_s = \frac{1}{v} q_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t - R_s/v) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} \rightarrow R_s \boldsymbol{\Omega}, \mathbf{v})]. \quad (\text{D.4})$$

Здесь α , как обычно, обозначает оптический путь (разд. 3.3), а R_s — расстояние от точки \mathbf{r} до поверхности S вдоль направления $-\boldsymbol{\Omega}$ (рис. D.1). Заметим, что $R_s = R_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega})$.



Р и с. D.1.

Видоизмененное таким образом уравнение (D.2) и есть общее интегральное уравнение нестационарной задачи переноса нейтронов, которое мы будем здесь исследовать. Удобно переписать его в более компактном виде, а именно

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + K\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (\text{D.5})$$

где K — интегральный оператор

$$Kf(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \int_0^t dt' \int d^3r' \int d^3v' \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r} + \mathbf{v}(t - t')] \times \\ \times \exp\left[-\int_{t'}^t v\sigma\{\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t''), \mathbf{v}\} dt''\right] \mathbf{v}'\sigma(\mathbf{r}', \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \quad (\text{D.6a})$$

и

$$Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + Q_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (\text{D.6b})$$

Точно так же, т. е. с помощью функции Грина для левой части уравнения (D.1b) (формула (12) разд. 3.3) строится интегральная форма стационарного уравнения переноса

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \Lambda\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (\text{D.7a})$$

где Λ — интегральный оператор

$$\Lambda f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int_0^{R_s} dR \int d^3r' \int d^3v' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r} + R\Omega) \times \\ \times \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v})] v' \sigma(\mathbf{r}', \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) f(\mathbf{r}', \mathbf{v}'), \quad (\text{D.7b})$$

$$Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = q_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R_s\Omega, \mathbf{v})] + \\ + \int_0^{R_s} q(\mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v}) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v})] dR, \quad (\text{D.7c})$$

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{D.7d})$$

Еще раз напомним, что сечения и источники по определению равны нулю при $\mathbf{r} \notin V$ (или при $t < 0$).

D.2. Сопряженные уравнения

Нестационарным сопряженным уравнением называется уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + v[-\Omega \cdot \nabla + \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \\ = \tilde{q}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + v \int d^3v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}'), \quad (\text{D.8a})$$

а стационарным сопряженным уравнением — уравнение

$$v[-\Omega \cdot \nabla + \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})] \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \tilde{q}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + v \int d^3v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}'). \quad (\text{D.8b})$$

В качестве функций, сопряженных решениям уравнений (D.1a) и (D.1b), возьмем решения уравнений (D.8a) и (D.8b), удовлетворяющие подходящим граничным условиям.

Эти граничные условия заключаются в том, что задается распределение на S *выходящего*, а не *входящего* излучения, $\psi_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t)$. Как и раньше, заменим значения на границе поверхностным источником

$$\tilde{q}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t) = \begin{cases} v|\Omega \cdot \mathbf{n}_0| \psi_0(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t), & \Omega \cdot \mathbf{n}_0 > 0, \quad t > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Теперь точно так же, как в случае уравнений переноса, преобразуем уравнения (D.8) в интегральные уравнения. Для нестационарного уравнения получим

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \tilde{Q}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) + \tilde{K}\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (\text{D.10a})$$

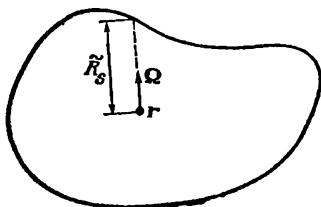
где \tilde{K} — интегральный оператор

$$\begin{aligned} \tilde{K}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & v \int_0^t dt' \int d^3r' \int d^3v' \delta[\mathbf{r}' - \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t')] \times \\ & \times \exp \left[- \int_{t'}^t v \sigma \{ \mathbf{r} + \mathbf{v}(t - t''), \mathbf{v} \} dt'' \right] \sigma(\mathbf{r}', \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') f(\mathbf{r}', \mathbf{v}', t') \quad (\text{D.10b}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = & \tilde{\psi}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t, \mathbf{v}, 0) \exp \left[- \int_0^t v \sigma \{ \mathbf{r} + \mathbf{v}(t - t''), \mathbf{v} \} dt'' \right] + \\ & + \int_0^t dt' \tilde{q}[\mathbf{r} + \mathbf{v}(t - t'), \mathbf{v}, t'] \exp \left[- \int_{t'}^t v \sigma \{ \mathbf{r} + \mathbf{v}(t - t''), \mathbf{v} \} dt'' \right] + \\ & + \frac{1}{v} \tilde{q}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}, t - \tilde{R}_s/v) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \tilde{R}_s\Omega, \mathbf{v})]. \quad (\text{D.10c}) \end{aligned}$$

Сечения и начальное распределение по-прежнему задаются равными нулю при $\mathbf{r} \notin V$, и $\tilde{R}_s = \tilde{R}_s(\mathbf{r}, \Omega)$ — расстояние от точки \mathbf{r} до поверхности вдоль направления $+\Omega$ (а не $-\Omega$, как это было в случае уравнения переноса); см. рис. D.2.



Р и с. D.2.

Аналогично получаем для *стационарного* сопряженного уравнения

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{1}{v} \tilde{Q}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) + \tilde{\Lambda} \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (\text{D.11a})$$

где $\tilde{\Lambda}$ — интегральный оператор

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \int_0^{R_s} dR \int d^3r' \int d^3v' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r} - R\Omega) \times \\ & \times \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{v})] \sigma(\mathbf{r}', \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') f(\mathbf{r}', \mathbf{v}') \quad (\text{D.11b}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{Q}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = & \tilde{q}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{v}) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} + \tilde{R}_s\Omega, \mathbf{v})] + \\ & + \int_0^{R_s} \tilde{q}(\mathbf{r} + R\Omega, \mathbf{v}) \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} + R\Omega, \mathbf{v})] dR. \quad (\text{D.11c}) \end{aligned}$$

D.3. Основные определения и предположения

В дальнейшем мы всюду будем предполагать, что плотности источников $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и $\tilde{Q}'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, а также сечения $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ удовлетворяют следующим условиям, разумным с физической точки зрения:

а) Q' и \tilde{Q}' положительны при всех значениях своих аргументов;

б) Q' и \tilde{Q}' либо ограничены, либо представляют собой произведения ограниченных функций на дельта-функции от одного или нескольких своих аргументов;

с) существует такое число $v_0 < \infty$, что при $|\mathbf{v}| > v_0$ функции Q' и \tilde{Q}' тождественно равны нулю;

д) существует такое число $v_1 < \infty$, что $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \equiv 0$ для $v > v' > v_1$.

Выполнение условий (с) и (д) позволяет избежать некоторых трудностей, которые могли бы возникнуть из-за неограниченности области изменения переменной v , так как вместе они означают, что нет нейтронов со скоростями, превосходящими величину $v_m = \max(v_0, v_1)$. Тем самым интегралы по v' в любом из интегральных уравнений можно записать в виде

$$\int d^3v' \rightarrow \int d\Omega' \int_0^{v_m} v'^2 dv'. \quad (\text{D.12})$$

На самом деле эти требования можно до некоторой степени ослабить: мы могли бы предположить, что Q' и \tilde{Q}' достаточно быстро убывают при $v \rightarrow \infty$. Тогда, если другие условия удовлетворяются, то неограниченный предел изменения v не причиняет никаких неприятностей. Однако условия (с) и (д) физически оправданы, и потому можно не пытаться ослабить их.

е) $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ можно записать в виде

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \sum_i N_i(\mathbf{r}) \Sigma_i(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}), \quad (\text{D.13})$$

где функции $N_i(\mathbf{r})$ ограничены. (Действительно, так как $N_i(\mathbf{r})$ — пространственная плотность распределения ядер, а Σ_i — микроскопическое сечение, то наше условие заключается в том, что в рассматриваемых системах концентрации атомов ограничены.)

ж) $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ можно записать точно в таком же виде:

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_i N_i(\mathbf{r}) \Sigma_i(\mathbf{v}). \quad (\text{D.14})$$

г) Произведение $v \Sigma_i(\mathbf{v})$ ограничено. Мы предполагаем, что микроскопическое сечение $\Sigma_i(\mathbf{v})$ ограничено всюду, кроме, быть может, точки $v = 0$. В последнем случае мы допускаем, что $\Sigma_i(\mathbf{v}) \sim v^{-1}$.

- h) $\Sigma_i(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$, $\Sigma_i(\mathbf{v})$ и $\Sigma_i(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ положительны.
 i) Функция

$$c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\int \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') d^3v'}{\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \quad (\text{D.15})$$

ограничена. Это предположение также физически оправдано, ибо $c(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — среднее число нейтронов, эмиттированных в одном столкновении.

Зададим аналогичную (D.15) микроскопическую величину $\xi_i(v)$, также ограниченную:

$$\xi_i(v) = \frac{\int \Sigma_i(\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') d^3v'}{\Sigma_i(\mathbf{v})}. \quad (\text{D.16})$$

Наконец, в некоторых случаях нам понадобятся функции

$$c'_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\int \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d^3v'}{\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \quad (\text{D.17a})$$

и

$$c''(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{\int v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d^3v'}{\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v})}. \quad (\text{D.17b})$$

Заметим, что c' и c'' могут не быть ограниченными, но они (как и c) всегда положительны. Аналогично функции

$$\xi'_i = \frac{\int \Sigma_i(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d^3v'}{\Sigma_i(\mathbf{v})} \quad (\text{D.18a})$$

и

$$\xi''_i(v) = \frac{\int v' \Sigma_i(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) d^3v'}{\Sigma_i(\mathbf{v})} \quad (\text{D.18b})$$

могут быть неограниченными, но (подобно $\xi_i(v)$) они положительны.

D.4. Нестационарное уравнение переноса

Считая, что все перечисленные выше условия выполняются, докажем теоремы существования и единственности для нестационарного уравнения переноса.

Теорема 1. Пусть функция $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ограничена. Если функция $c''(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ограничена, то существует единственное (положительное) решение нестационарного уравнения переноса.

Докажем теорему, построив ряд Неймана для уравнения (D.6):

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (\text{D.19})$$

где

$$\psi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (\text{D.20a})$$

$$\psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = K\psi_{n-1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (\text{D.20b})$$

По условию

$$0 \leq \psi_0 \leq M < \infty. \quad (\text{D.21})$$

Далее,

$$\psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = KQ'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) < Mc''_{\max}\sigma_{\max}t. \quad (\text{D.22})$$

Продолжая итерации, находим, что

$$\psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \leq M(c''_{\max}\sigma_{\max})^n \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{D.23})$$

Следовательно, ряд Неймана сходится в каждой точке, и определяет решение уравнения (D.6). Так как каждый член ряда положителен, то решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ положительно. Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $c''(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ не ограничена. Тогда справедлива

Теорема 2. Если функция $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ ограничена, то существует единственное положительное решение уравнения переноса, и оно интегрируемо по \mathbf{v} .

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1, только здесь доказывается поточечная сходимость ряда

$$\sum_n \int d^3v \psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t). \quad (\text{D.24})$$

Итак,

$$\int d^3v \psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \leq M \int_0^t dt' \int v' d^3v' \int d^3v \sigma[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t-t'), \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}]. \quad (\text{D.25})$$

Мы предположили (условие (e)), что $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ можно записать в виде

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \sum_i N_i(\mathbf{r}) \Sigma_i(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}), \quad (\text{D.26})$$

где функции $N_i(\mathbf{r})$ ограничены, например, величинами N_{i0} . Поэтому

$$\int d^3v \psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \leq Mt \sum_i N_{i0} \int v' d^3v' \xi_i(v') \Sigma_i(v'). \quad (\text{D.27})$$

Так как $\xi_i(v')$ и $\Sigma_i(v')$ также предполагаются (разд. D.3) ограниченными, например, величинами ξ_{i0} и Σ_{i0} , то

$$\int d^3v \psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \leq Mt \sum_i N_{i0} \xi_{i0} \Sigma_{i0} \int v' d^3v', \quad (\text{D.28})$$

а так как $v' \leq v_m$ (условие (d)), то

$$\int d^3v \psi_i(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \leq kt, \quad 0 \leq k \leq \infty. \quad (\text{D.29})$$

Аналогично находим, что

$$\int d^3v \psi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \leq \frac{k' t^n}{n!}, \quad 0 \leq k' \leq \infty, \quad (\text{D.30})$$

и теорема доказана. Снова каждый член ряда положителен, и, значит, решение положительно.

Теперь рассмотрим случай, когда функция $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ не обязательно ограничена, но интегрируема. Сформулированные ниже теоремы довольно просто доказываются прямым построением рядов Неймана, точно так же, как это было сделано выше.

Теорема 3. Пусть $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \delta(t)$, где функция $Q_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ограничена.

- а) Если функция $c''(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ограничена, то существует единственное (положительное) решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ нестационарного уравнения переноса. Разность $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ непрерывна по t .
- б) Если функция $c''(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ не ограничена, то решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ по крайней мере интегрируемо по \mathbf{v} . Остальные утверждения пункта (а) остаются без изменений.

Теорема 4. Пусть $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q(\mathbf{r}, t) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$, где функция $Q(\mathbf{r}, t)$ ограничена.

- а) Если произведение $v\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ ограничено, то существует единственное положительное решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$. Разность $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ непрерывна по \mathbf{v} .
- б) Если произведение $v\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ не ограничено, то $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - Q(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ по крайней мере интегрируемо по \mathbf{v} .

(При доказательстве пункта (б) следует воспользоваться ограниченностью функций \mathbf{v} и $\xi_i(v)$ (разд. D.3).)

Теорема 5. Пусть $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = Q'_2(\mathbf{v}, t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, где функция $Q'_2(\mathbf{v}, t)$ ограничена.

- а) Если функция $c''(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ограничена, то существует единственное положительное решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и оно интегрируемо по \mathbf{r} .
- б) Если функция $c''(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ не ограничена, то решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ по крайней мере интегрируемо по \mathbf{v} .

Комбинируя теоремы 1—5, можно сформулировать теоремы для случаев, когда функция источника $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ содержит дельта-функцию более чем одной переменной. Мы здесь не будем на этом останавливаться.

D.5. Нестационарное сопряженное уравнение

В этом разделе мы исследуем уравнение (D.10). Все теоремы приводятся без доказательств, так как доказательства этих теорем аналогичны доказательствам предыдущего раздела.

Теорема 6. Если функция $\tilde{Q}'(r, v, t)$ ограничена, существует единственное положительное решение $\tilde{\psi}(r, v, t)$.

При доказательстве необходимо воспользоваться ограниченностью функции $c(r, v)$ (условие (i)).

Теорема 7. Если $\tilde{Q}'(r, v, t) = \tilde{Q}_0(r, v) \delta(t)$, где функция $\tilde{Q}_0(r, v)$ ограничена, то существует единственное положительное решение $\tilde{\psi}(r, v, t)$. Разность $\tilde{\psi}(r, v, t) - \tilde{Q}'(r, v, t)$ непрерывна по t .

Теорема 8. Пусть $\tilde{Q}'(r, v, t) = \tilde{Q}_1(r, t) \delta(v - v_0)$, где функция $\tilde{Q}_1(r, t)$ ограничена.

а) Если произведение $v\sigma(r, v' \rightarrow v)$ ограничено, то существует единственное положительное решение $\tilde{\psi}(r, v, t)$. Разность $\tilde{\psi}(r, v, t) - \tilde{Q}'(r, v, t)$ непрерывна по v .

б) Если произведение $v\sigma(r, v' \rightarrow v)$ не ограничено, но функция $\xi_i^*(r, v)$ ограничена, то справедливы утверждения пункта (а), с той только разницей, что разность $\tilde{\psi}(r, v, t) - \tilde{Q}'(r, v, t)$ может оказаться не непрерывной, а лишь интегрируемой по v .

Теорема 9. Если $\tilde{Q}'(r, v, t) = \tilde{Q}_2(v, t) \delta(r - r_0)$, где функция $\tilde{Q}_2(v, t)$ ограничена, то существует единственное положительное решение $\tilde{\psi}(r, v, t)$ и оно интегрируемо по r .

Опять-таки, комбинируя подходящим образом теоремы 6—9, можно сформулировать соответствующие теоремы для случаев, когда \tilde{Q}' содержит дельта-функции более чем одной переменной.

D.6. Стационарное уравнение переноса и сопряженное уравнение

Теоремы существования и единственности положительного решения стационарного уравнения переноса и соответствующего ему сопряженного уравнения можно доказать лишь для некоторого довольно небольшого числа случаев. Вообще говоря, требования здесь оказываются гораздо более сильными, чем для нестационарных уравнений, и мы увидим позже, что этого и следовало ожидать.

Теорема 10. Пусть функция $Q'(r, v)$ ограничена и положительна. Если $c'(r, v) < 1$, то существует единственное (положительное) решение стационарного уравнения переноса (уравнения D.7)).

Заметим, что интегральное уравнение (D.7) отличается от уравнения (D.1b) тем, что в первом неизвестная величина —

поток $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = v\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, а не фазовая плотность $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Поэтому не все теоремы, которые мы докажем относительно стационарного уравнения переноса, будут применимы к фазовой плотности, если только $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ при $v \rightarrow 0$ не стремится к нулю достаточно быстро. Это не должно вызывать беспокойства, так как обычно интерес представляет как раз поток, а не фазовая плотность.

Как и раньше, для доказательства теоремы построим ряд Неймана

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_n \varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (\text{D.31a})$$

$$\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (\text{D.31b})$$

где

$$\varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \Lambda^n \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \Lambda \varphi_{n-1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{D.31c})$$

По условию функция $\varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ограничена и положительна:

$$0 \leq \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq M < \infty. \quad (\text{D.32})$$

Предположим, что функция $\varphi_{n-1}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ограничена, например, константой M' . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \Lambda \varphi_{n-1}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq \\ &\leq M' c_{\max} \int_0^\infty dR \exp[-\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v})] \sigma(\mathbf{r} - R\Omega, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Легко показать, что интеграл равен единице. Поэтому

$$\varphi_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq M' c_{\max} < M', \quad (\text{D.34})$$

ибо по условию $c'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$. Отсюда и следует утверждение теоремы, так как ряд Неймана сходится всюду и каждый его член положителен.

Точно таким же образом доказывается

Теорема 11. Если $Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = Q_1(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)$, где функция $Q_1(\mathbf{r})$ ограничена, $c'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$ и сечение $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}_0 \rightarrow \mathbf{v})$ ограничено, то существует единственное (положительное) решение $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. Разность $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ непрерывна по \mathbf{v} .

Теорема 12. Если произведение $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) Q'(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ интегрируемо, то при $c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$ существует единственное положительное интегрируемое решение.

Эта теорема была доказана в работе [93]. Метод доказательства состоит в построении ряда Неймана для плотности столкновений

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \quad (\text{D.35})$$

и проверке неравенства

$$\int d^3v d^3r K X_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \leq \int d^3r d^3v X_n(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{D.36})$$

Так как в работе [93] приведены все подробности, мы здесь не будем на этом останавливаться.

Теперь займемся стационарным сопряженным уравнением. Теоремы для него аналогичны теоремам 10—12, только s и s' меняются ролями. Поскольку доказательства очень похожи, мы ограничимся лишь формулировками теорем.

Теорема 13. Пусть произведение $\nu^{-1}\tilde{Q}'(r, \nu)$ ограничено и положительно. Если $s(r, \nu) < 1$, то существует единственное положительное решение стационарного сопряженного уравнения.

Теорема 14. Пусть $\nu^{-1}\tilde{Q}'(r, \nu) = \tilde{Q}_1(r) \delta(\nu - \nu_0)$, где функция $\tilde{Q}_1(r)$ ограничена и положительна. Если $s(r, \nu) < 1$ и сечение $\sigma(r, \nu \rightarrow \nu_0)$ ограничено, то существует единственное положительное решение $\tilde{\psi}(r, \nu)$. Разность $\tilde{\psi} - \nu^{-1}\tilde{Q}'$ непрерывна по ν .

Теорема 15. Если $s'(r, \nu) < 1$ и произведение $\nu^{-1}\sigma(r, \nu) \tilde{Q}'(r, \nu)$ интегрируемо, то существует единственное положительное интегрируемое решение.

Заметим, что в каждой из этих теорем ограничения налагаются на $\nu^{-1}\tilde{Q}'$, а не на \tilde{Q}' . Если предположить, что в системе отсутствуют источники нейтронов бесконечно малой энергии, то можно перестроить формулировки теорем, отказавшись от ограничений на $\nu^{-1}\tilde{Q}'$ и введя соответствующие ограничения на \tilde{Q}' .

Докажем теперь теорему единственности для случаев, когда существование решений заранее не установлено.

Теорема 16. Пусть существует решение стационарного сопряженного уравнения, принадлежащее классу L_2 . Если существует решение из класса L_2 стационарного уравнения переноса, то оно единственно.

Мы только наметим доказательство. Предположим, что уравнение переноса имеет два решения: ψ_1 и ψ_2 . Тогда разность $\psi_1 - \psi_2 \equiv \psi$ удовлетворяет уравнению

$$\nu [\Omega \cdot \nabla + \sigma(r, \nu)] \psi(r, \nu) = \int \nu' \sigma(r, \nu' \rightarrow \nu) \psi(r, \nu') d^3\nu', \quad (\text{D.37})$$

где

$$\psi(\rho_s, \nu) = 0, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 < 0. \quad (\text{D.38})$$

Рассмотрим сопряженное уравнение с нулевым граничным условием:

$$\nu [-\Omega \cdot \nabla + \sigma(r, \nu)] \tilde{\psi}(r, \nu) = \tilde{q}(r, \nu) + \int \nu \sigma(r, \nu \rightarrow \nu') \tilde{\psi}(r, \nu') d^3\nu', \quad (\text{D.39})$$

$$\tilde{\psi}(\rho_s, \nu) = 0, \quad \Omega \cdot \mathbf{n}_0 > 0. \quad (\text{D.40})$$

(По условию решение такого уравнения существует.) Умножим уравнение (D.37) на $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, уравнение (D.39) на $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, вычтем из первого второе и результат проинтегрируем по \mathbf{r} и \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \int d^3v \int d\Omega \cdot \mathbf{n}_0 \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \\ = \int d^3r \int d^3v \int d^3v' v' \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \\ - \int d^3r \int d^3v \int d^3v' v \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}') \tilde{\psi}(\mathbf{r}, \mathbf{v}') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \\ - \int d^3r \int d^3v \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \tilde{q}(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{D.41}) \end{aligned}$$

Левая часть этого соотношения получена с помощью теоремы Гаусса; в силу (D.38) и (D.40) она равна нулю. Первые два члена в правой части взаимно уничтожаются, так что

$$\int d^3r \int d^3v \psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \tilde{q}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = 0. \quad (\text{D.42})$$

Поскольку функция $\tilde{q}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ произвольна (и положительна), из (D.42) следует, что

$$\psi(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \equiv 0. \quad (\text{D.43})$$

Теорема доказана.

Заметим, что условия этой теоремы выполняются, в частности, при $c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$. Следовательно, уравнение (D.39) при $c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$ не может иметь решения, удовлетворяющего граничным условиям (D.38). Так как уравнения (D.38) и (D.39) описывают плотность нейтронов в реакторе, то мы попутно доказали вполне естественное утверждение о том, что реактор не может быть критическим, если в расчете на одно соударение поглощается больше нейтронов, чем испускается ($c < 1$).

В случае, когда есть только рассеяние и чистое поглощение и, следовательно, нет деления, эту (и следующую) теорему можно доказать проще [92].

Теореме 16 аналогична

Теорема 17. Пусть существует решение стационарного уравнения переноса, принадлежащее классу L_2 . Если существует решение из класса L_2 стационарного сопряженного уравнения, то оно единственно.

Эта теорема доказывается точно так же, как теорема 16. Смысл ее состоит в том, что реактор не может быть критическим, если $c'(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$. Это легко установить с помощью незначительной модификации рассуждений, приведенных выше при выводе того же утверждения из условия $c(\mathbf{r}, \mathbf{v}) < 1$.

Приложение Е

Функции $E_n(x)$

Функции $E_n(x)$ определяются интегралами

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xu} u^{-n} du = \int_0^1 \mu^{n-2} e^{-x/\mu} d\mu. \quad (\text{Е.1})$$

При $n=0$

$$E_0(x) = \frac{e^{-x}}{x}, \quad (\text{Е.2})$$

а при $n > 1$ справедливы рекуррентные соотношения

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} [e^{-x} - xE_{n-1}(x)]. \quad (\text{Е.3})$$

Кроме того, часто бывает полезна формула

$$E_n(x) = \int_x^{\infty} E_{n-1}(x') dx'. \quad (\text{Е.4})$$

Дифференцируя по x , получаем

$$E'_n(x) = -E_{n-1}(x), \quad (\text{Е.5})$$

поскольку

$$E_n(\infty) = 0 \quad \text{для всех } n. \quad (\text{Е.6})$$

Другие свойства этих функций, их табулированные значения, а также ссылки на литературу можно найти в монографии Кейза, де Гофмана и Плачека [4].

Иногда удобно использовать разложение

$$E_n(x) = \frac{e^{-x}}{x+n} \left[1 + \frac{n}{(x+n)^2} + \frac{n(n-2x)}{(x+n)^4} + \frac{n(6x^2-8nx+n^2)}{(x+n)^6} \right] + R(n, x), \quad (\text{Е.7})$$

где

$$R(n, x) = n \int_1^{\infty} \frac{e^{-xu} (-24x^3u^3 + 58nx^2u^2 - 22n^2xu + n^3)}{u^n (xu+n)^8} du. \quad (\text{Е.8})$$

Асимптотическое разложение при $x \gg 1$ имеет вид

$$E_n(x) = \frac{e^{-x}}{x} \left[1 - \frac{n}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{x^3} - \dots \right]. \quad (\text{E.9})$$

Отметим, что

$$E_0(0) = E_1(0) = \infty \quad (\text{E.10a})$$

и

$$E_n(0) = \frac{1}{n-1}, \quad n > 1, \quad (\text{E.10b})$$

и, как уже указывалось,

$$E_n(\infty) = 0. \quad (\text{E.10c})$$

Приложение F

СЛУЧАЙ КРАТНЫХ КОРНЕЙ

В основном тексте мы не рассматривали случай, когда некоторые из дискретных корней совпадают. В сущности, окончательные результаты в тех случаях, которые представляют интерес ($c = 1$), можно получить из наших формул, переходя к пределу при $c \rightarrow 1+$ или $c \rightarrow 1-$ (разд. 6.9). Однако, возможно, интересно будет также получить некоторое представление об общей процедуре. Способ, который мы сейчас изложим, по существу состоит в формальном применении обычного метода решения обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Мы искали решения уравнения переноса, принадлежащие одномерному неприводимому представлению группы сдвигов. Однако, когда характеристическое уравнение

$$\Lambda(z) = 0 \quad (F.1)$$

имеет кратные корни, нужно искать функции, принадлежащие неприводимым представлениям более высокого порядка. Канонический вид таких функций можно найти следующим образом. Рассмотрим одномерную группу. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ — набор базисных векторов для неприводимого n -мерного представления. Тогда каждому сдвигу на расстояние a можно поставить в соответствие оператор $T(a)$, для которого

$$T(a) \varphi_i = \varphi_i(x + a). \quad (F.2)$$

Так как φ_i — соответствующие базисные функции, то

$$T(a) \varphi_i = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) T_{ji}(a), \quad i = 1, \dots, n, \quad (F.3)$$

где $T_{ji}(a)$ — матрица представления. Для того чтобы получить каноническую форму, достаточно рассмотреть единственный инфинитезимальный производящий оператор (поскольку это одномерная группа). Таким образом, положив

$$K = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{T(a) - 1}{a}, \quad (F.4)$$

найдем

$$K\varphi_i(x) = \partial\varphi_i/\partial x = \sum_j \varphi_j(x) K_{ji}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (F.5)$$

Здесь K_{ji} — представление инфинитезимального элемента.

Допустим, матрица K_{ji} записана в жордановой канонической форме. Тогда для того чтобы представление было неприводимым, матрица K_{ji} должна иметь вид

$$K_{ji} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & \dots \\ \vdots & & & & & \\ \dots & \dots & & & \dots & \lambda \end{pmatrix}. \quad (F.6)$$

С такой матрицей K_{ji} уравнения (F.5) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x} &= \lambda\varphi_1, \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} &= \lambda\varphi_2 + \varphi_1, \\ &\vdots \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x} &= \lambda\varphi_n + \varphi_{n-1}. \end{aligned} \quad (F.7)$$

Легко видеть, что решением этой системы служат функции

$$\varphi_i(x) = \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{\lambda x}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (F.8)$$

Следовательно, в случае, когда наше характеристическое уравнение имеет кратные корни порядка n , мы должны пересмотреть нашу процедуру и искать решение уравнения переноса в виде

$$\psi(x, \mu) = \sum_i a_i(\mu) \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} e^{-x/\nu}. \quad (F.9)$$

Например, для изотропного рассеяния с $c = 1$ функция $\Lambda(z)$ имеет двойной нуль при $z = \infty$. Значит, нужно искать дискретные собственные функции в виде

$$\psi(x, \mu) = a_1(\mu) + a_2(\mu)x. \quad (F.10)$$

Подставляя это выражение в уравнение переноса

$$\mu \frac{\partial\psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (F.11)$$

получаем

$$\mu a_2(\mu) + a_1(\mu) + x a_2(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\mu') d\mu' + \frac{x}{2} \int_{-1}^1 a_2(\mu') d\mu'. \quad (F.12)$$

Приравняем члены, пропорциональные x :

$$a_2(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_2(\mu') d\mu', \quad (\text{F.13})$$

и члены, не зависящие от x :

$$a_1(\mu) + \mu a_2(\mu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.14})$$

Из уравнения (F.13) видно, что a_2 — постоянная, т. е. не зависит от μ . Если $a_2 = 0$, то из уравнения (F.14) вытекает, что a_1 — постоянная и

$$\int_{-1}^1 a_1(\mu') d\mu' \neq 0 \quad (\text{F.15})$$

(в противном случае $\psi \equiv 0$). Следовательно, можно нормировать a_1 так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-1}^1 a_1(\mu') d\mu' = 1. \quad (\text{F.16})$$

Отсюда $a_1 = 1/2$ и, значит, одно из решений равно

$$\psi_1(x, \mu) = \frac{1}{2}. \quad (\text{F.17})$$

Если $a_2 \neq 0$, выбираем нормировку так, чтобы выполнялось условие

$$\int_{-1}^1 a_2 d\mu' = 1. \quad (\text{F.18})$$

Тогда $a_2 = 1/2$. Подстановка в (F.14) дает

$$a_1(\mu) = -\frac{\mu}{2} + C, \quad (\text{F.19})$$

где

$$C = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 a_1(\mu') d\mu'. \quad (\text{F.20})$$

Тогда для любого C функция

$$\psi_C = \frac{1}{2}(x - \mu) + C \quad (\text{F.21})$$

будет другим линейно независимым решением уравнения переноса. Ясно, что выбор конкретного значения C означает просто прибавление первого решения ψ_1 с соответствующим коэффициентом к ψ_2 , где

$$\psi_2 = (x - \mu)/2. \quad (\text{F.22})$$

Таким образом, проще всего положить $C = 0$.

Приложение G

КЛАСС РАЗЛОЖИМЫХ ФУНКЦИЙ

В основном тексте книги мы сталкивались с многочисленными примерами теорем полноты. Эти теоремы гласят, что «любую» функцию можно представить в виде линейной комбинации наших обобщенных собственных функций. Очевидно, важно знать точно, какие ограничения на произвол выбора функции налагает требование разложимости. Эта общая проблема в настоящей книге выглядит следующим образом.

Мы имеем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $f(t)$:

$$g(t) = A(t)f(t) + P \int_a^b \frac{B(t')f(t')dt'}{t' - t} \quad (G.1)$$

или сопряженное уравнение

$$g(t) = A(t)f^*(t) + PB(t) \int_a^b \frac{f^*(t')dt'}{t' - t}. \quad (G.2)$$

Предполагается, что $g(t)$, $A(t)$, $B(t)$ заданы. Возникают два вопроса:

1. При каких ограничениях на заданные функции решение существует?

2. К какому классу функций принадлежат решения?

Достаточные условия существования решений широко обсуждаются в математической литературе (см., например, [25, гл. 6]).

Пусть $g(t)$, $A(t)$, $B(t)$ удовлетворяют условиям Гёльдера:

$$|g(t) - g(t')| < (\text{const}) |t - t'|^\mu$$

для $a < t, t' < b$ при некотором $\mu > 0$,

$$|g(t) - g(c)| < [\text{const}/|t - c|^\alpha], \quad \alpha < 1,$$

где c — конец отрезка (a или b) и $a < t < b$. Тогда, если $A(t) \pm \pi i B(t) \neq 0$ в интервале (a, b) , то решения существуют, удовлетворяют условиям Гёльдера и их можно найти с помощью методов, описанных в основном тексте книги.

Существенным пунктом в доказательствах является утверждение о том, что интеграл Коши от функции, удовлетворяющей условию Гёльдера, сам удовлетворяет условию Гёльдера. Иначе

говоря, если

$$\Psi(z) = \int_a^b \frac{\varphi(t') dt'}{t' - z}, \quad (G.3)$$

где $\varphi(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера, то функции $\Psi^\pm(t)$ также удовлетворяют условию Гёльдера.

Функции $A(t)$, $B(t)$, встречающиеся в данной книге, всегда были гладкими и хорошо себя ведущими. Ясно, что в таком случае ограничения, налагаемые на $g(t)$, настолько слабы, что для всех интересных с точки зрения физики задач развиваемая здесь теория применима.

Однако отметим, что для того чтобы развить общий подход к различным задачам, мы строили функции Грина. В таких сильно идеализированных условиях разлагаемые функции оказывались сингулярными (например, δ -функции) или, если воспользоваться принятой математической терминологией, обобщенными функциями (см., например, [19]).

Построение общей теории уравнений, подобных (G.1), в которых все функции являются обобщенными функциями из некоторого класса, представляется весьма трудной задачей, если вообще разрешимой. Главная трудность связана с тем, что произведение двух обобщенных функций из данного класса не обязательно принадлежит этому классу.

К счастью, нам не нужна общая теория. На протяжении всей книги нам попадались только очень специальные функции $A(t)$ и $B(t)$. При этом сразу было видно, что это гладкие и хорошо себя ведущие функции. При этих условиях теорию можно развигать следующим образом.

Мы предполагаем, что $f(t)$ и $g(t)$ — обобщенные функции из некоторого класса. Для уравнений, подобных уравнениям (G.1) или (G.2), подходящим классом будет пространство \mathcal{E}' [19]. Его образуют непрерывные линейные функционалы на пространстве \mathcal{E} основных функций. В качестве \mathcal{E} выбираем множество бесконечно дифференцируемых функций, определенных на прямой $-\infty < t < \infty$. Бремерман и Дюран [94] показали, что обобщенную функцию из \mathcal{E}' можно выразить через разность граничных значений аналитической функции. Подстановка таких выражений для $g(t)$ и $f(t)$ в уравнения (G.1) и (G.2) приводит к известным соотношениям между граничными значениями соответствующих аналитических функций. Дальше для нахождения неизвестной функции достаточно результатов теории функций комплексного переменного. Найдя ее, определяем $f(t)$. Наконец, при заданных $A(t)$ и $B(t)$ проверяем, принадлежит ли $f(t)$ пространству \mathcal{E}' . Например, если $g(t) = \delta(t - t_0)$, $a < t < b$, то легко видеть, что $f(t) \in \mathcal{E}'$, если функции $A(t)$ и $B(t)$ непрерывны.

Приложение Н

ПРЯМОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ (ИЗОТРОПНЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК)

В разд. 5.3 моменты функции плотности в случаях точечного и плоского источников были получены непосредственно из уравнения переноса. Покажем, как оценить интегралы, определяющие моменты, если эти интегралы найдены прямым интегрированием решения.

Положив, как и в разд. 5.3,

$$\overline{M^N} = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^{N+2} dr, \quad (\text{Н.1})$$

подставим сюда $\rho(r)$ из формулы (20) разд. 5.2 и проинтегрируем. Оказывается, таким путем удобно вычислять лишь четные моменты, так что мы ими и ограничимся.

При выполнении интегрирования нам потребуется изменить порядок вычисления интегралов по v и r . Очевидно, что это допустимо во всех случаях, кроме $N = 0$. В случае $N = 0$ при $v = 0$ возникает кажущаяся сингулярность. В том, что сингулярность только кажущаяся, легко убедиться, если заметить, что $e^{-r/v}$ быстро стремится к нулю при $v \rightarrow 0$. Следовательно, когда появляются сомнения в допустимости изменения порядка интегрирования, можно рассматривать

$$\int_0^1 \frac{e^{-r/v}}{vN(v)} dv \text{ как } \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_\eta^1 \frac{e^{-r/v}}{vN(v)} dv,$$

и трудность будет таким образом обойдена.

Выяснив эти обстоятельства, изменим порядок интегрирования по r и v в формуле для $\overline{M^N}$. Так как

$$\int_0^\infty e^{-r/v} r^{N+1} dr = v^{N+2} (N+1)!, \quad (\text{Н.2})$$

$$\text{то} \quad \frac{\overline{M^N}}{(N+1)!} = \frac{v_0^{N+1}}{N_{0+}} + \int_\eta^1 \frac{v^{N+1}}{N(v)} dv. \quad (\text{Н.3})$$

(Разумеется, потом мы перейдем к пределу при $\eta \rightarrow 0$.)

С помощью (7) и (23) разд. 4.5, а именно

$$N_{0+} = \frac{c}{2} v_0^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=v_0} \quad (\text{H.4a})$$

$$\text{и} \quad N(v) = v \Lambda^+(v) \Lambda^-(v), \quad (\text{H.4b})$$

этот результат можно упростить. Так как (формулы (5) разд. 4.4)

$$\Lambda^\pm = \lambda(v) \pm i \frac{\pi c v}{2}, \quad (\text{H.5})$$

$$\text{то} \quad \frac{1}{\Lambda^+ \Lambda^-} = \frac{1}{\pi i c v} \left[\frac{1}{\Lambda^-} - \frac{1}{\Lambda^+} \right]. \quad (\text{H.6})$$

Таким образом, формула (H.3) принимает вид

$$\frac{-\pi i c \overline{M}^N}{(N+1)!} = -2\pi i v_0^{N-1} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=v_0} \right)^{-1} + \int_{\eta}^1 v^{N-1} \left[\frac{1}{\Lambda^+} - \frac{1}{\Lambda^-} \right] dv. \quad (\text{H.7})$$

Отсюда видно, что четные моменты вычисляются легко. Положим поэтому $N = 2m$.

Напомним, что $\Lambda(v) = \Lambda(-v)$. Тогда

$$v_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=v_0} = -v_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=-v_0}. \quad (\text{H.8})$$

Следовательно, первый член в правой части формулы (H.7) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{-2\pi i v_0^{2m-1}}{\frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=v_0}} &= -\frac{2\pi i}{2} \left[v_0^{2m} \left(v_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=v_0} \right)^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + (-v_0)^{2m} \left((-v_0) \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=-v_0} \right)^{-1} \right]. \quad (\text{H.9}) \end{aligned}$$

Точно так же простая замена переменных $v \rightarrow -v$ дает (с учетом того, что $\Lambda(v)$ — четная функция)

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^1 v^{2m-1} \left[\frac{1}{\Lambda(v+i\epsilon)} - \frac{1}{\Lambda(v-i\epsilon)} \right] dv &= \\ &= - \int_{-1}^{-\eta} v^{2m-1} \left[\frac{1}{\Lambda(v-i\epsilon)} - \frac{1}{\Lambda(v+i\epsilon)} \right] dv. \quad (\text{H.10}) \end{aligned}$$

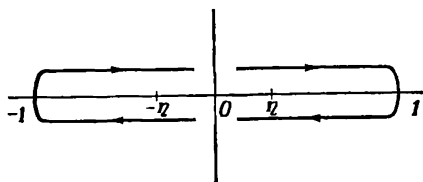
Отсюда находим второй член в правой части формулы (H.7) (вспоминая, что $\Lambda^\pm \equiv \Lambda(v \pm i\epsilon)$):

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^1 v^{2m-1} \left[\frac{1}{\Lambda^+(v)} - \frac{1}{\Lambda^-(v)} \right] dv &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\eta}^1 v^{2m-1} \left[\frac{1}{\Lambda^+} - \frac{1}{\Lambda^-} \right] dv - \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{-1} v^{2m-1} \left[\frac{1}{\Lambda^+} - \frac{1}{\Lambda^-} \right] dv, \quad (\text{H.11}) \end{aligned}$$

или

$$\int_{\eta}^1 v^{2m-1} \left[\frac{1}{\Lambda^+} - \frac{1}{\Lambda^-} \right] dv = \frac{1}{2} \int_{C_1} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)}, \quad (\text{Н.12})$$

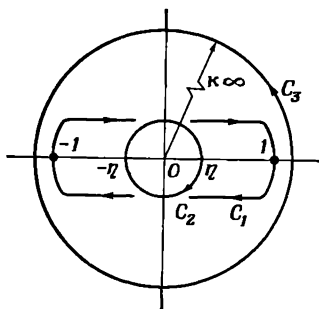
где контур C_1 изображен на рис. Н.1.

Р и с. Н.1. Контур C_1 .

В результате этих «упрощений» формула (Н.7) принимает вид

$$\frac{-2\pi i c \overline{M^{2m}}}{(2m+1)!} = -2\pi i \left[v_0^{2m} \left(v_0 \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=v_0} \right)^{-1} + \right. \\ \left. + (-v_0)^{2m} (-v_0) \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial v} \Big|_{v=-v_0} \right)^{-1} \right] + \int_{C_1} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)}. \quad (\text{Н.13})$$

Чтобы оценить интеграл по C_1 , рассмотрим контур $C = C_1 + C_2 + C_3$ (рис. Н.2).

Р и с. Н.2. Контур C .

Здесь контур C_2 — это малая окружность радиуса η с центром в начале координат, а C_3 — окружность с бесконечно большим радиусом. Согласно теореме о вычетах

$$\int_C v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)} = 2\pi i \sum_k \rho_k, \quad (\text{Н.14})$$

где ρ_k — вычеты функции $v^{2m-1}/\Lambda(v)$ в особых точках, лежащих внутри контура. Таким образом,

$$\int_{C_1} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)} = 2\pi i \sum_k \rho_k - \int_{C_2+C_3} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)}. \quad (\text{H.15})$$

Интеграл по C_2 можно оценить очень просто, поскольку подынтегральная функция имеет полюс внутри C_2 только при $m = 0$. (Напомним, что нули функции $\Lambda(v)$ при $c < 1$ лежат на действительной оси между ± 1 и $\pm \infty$.) Итак,

$$\int_{C_2} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)} = -\frac{2\pi i}{\Lambda(0)} \delta_{m,0} \quad (\text{H.16})$$

(Знак — появляется потому, что интегрирование отвечает обходу начала координат вдоль контура C_2 в отрицательном направлении.)

Поскольку (простые) нули функции $\Lambda(v)$ лежат, как известно, в точках $\pm v$, сумма вычетов равна

$$\sum_k \rho_k = \left[\frac{v_0^{2m-1}}{(\partial\Lambda/\partial v)_{v=v_0}} + \frac{(-v_0)^{2m-1}}{(\partial\Lambda/\partial v)_{v=-v_0}} \right]. \quad (\text{H.17})$$

Равенства (H.13), (H.15) — (H.17) вместе дают формулу для четных моментов:

$$\overline{M^{2m}} = \frac{(2m+1)!}{c} \left[-\delta_{m,0} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)} \right]. \quad (\text{H.18})$$

Для оценки интеграла по контуру C_3 воспользуемся разложением в ряд Лорана

$$\frac{1}{\Lambda(v)} = a_0 + \frac{a_{-1}}{v} + \frac{a_{-2}}{v^2} + \dots \quad (\text{H.19})$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} v^N dv = \begin{cases} 0, & N \neq -1, \\ 1, & N = -1, \end{cases} \quad (\text{H.20})$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} v^{2m-1} \frac{dv}{\Lambda(v)} = a_{-2m}, \quad (\text{H.21})$$

откуда

$$\overline{M^{2m}} = \frac{(2m+1)!}{c} [-\delta_{m,0} + a_{-2m}]. \quad (\text{H.22})$$

Разложим в ряд функцию $\text{Arth } v^{-1}$ в формуле

$$\Lambda(v) = 1 - cv \text{Arth } v^{-1}. \quad (\text{H.23})$$

Тогда

$$\Lambda(v) = 1 - c + c \left[\frac{1}{3v^2} + \frac{1}{5v^4} + \frac{1}{7v^6} + \dots \right], \quad (\text{H.24})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Lambda(v)} &= \frac{1}{1-c} \frac{1}{[1 - (c/(1-c)) \{1/3v^2 + 1/5v^4 + \dots\}]} = \\ &= \frac{1}{1-c} \left[1 + \frac{c}{1-c} \frac{1}{3v^2} + \frac{c}{1-c} \left\{ \frac{1}{9} \frac{c}{1-c} + \frac{1}{5} \right\} \frac{1}{v^4} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

Таким образом,

$$a_0 = \frac{1}{1-c}, \quad (\text{H.26a})$$

$$a_{-2} = \frac{c}{3(1-c)^2}, \quad (\text{H.26b})$$

$$a_{-4} = \frac{c}{(1-c)^2} \left[\frac{1}{9} \frac{c}{1-c} + \frac{1}{5} \right] \quad (\text{H.26c})$$

и т. д. Итак,

$$\overline{M^0} = \int \rho(r) d^3r = \frac{1}{1-c}, \quad (\text{H.27a})$$

$$\overline{M^2} = \frac{2}{(1-c)^2}, \quad (\text{H.27b})$$

$$\overline{M^4} = \frac{1}{(1-c)^2} \left[24 + \frac{40}{3} \frac{c}{1-c} \right] \quad (\text{H.27c})$$

и

$$\overline{r^2} = \overline{M^2}/\overline{M^0} = \frac{2}{1-c}. \quad (\text{H.27d})$$

Приложение I

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА В РАЗЛИЧНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

I.1. Введение

В этой книге рассмотрена бóльшая часть задач теории переноса, разрешимых в замкнутой форме. Мы видели, что за исключением нескольких задач для бесконечной среды круг таких задач сводится к очень специальным проблемам в плоской геометрии. Полученные результаты дали возможность сделать определенные качественные заключения, касающиеся поведения решений более общих задач. Теперь уместно показать, как можно использовать наши точные решения для систематического построения приближенных решений более общих задач.

Первым шагом в этом направлении было исследование проблемы критичности плоского слоя (разд. 6.6). Мы показали, что для решения задачи в первом приближении достаточно знания одной лишь экстраполированной длины. Поправки можно определить с помощью выведенных в разд. 6.6 точных соотношений.

Здесь мы наметим подход, применимый к более общим задачам, в частности к задачам в других несложных геометриях. С помощью этого подхода можно, например, выявить зависимость экстраполированной длины от радиусов кривизны границ.

Сущность нашего подхода состоит в выводе сингулярного интегрального уравнения типа Коши для соответствующих коэффициентов разложения. Главная часть этого уравнения в точности совпадает с аналогичным уравнением для задач о полупространстве. Остальные члены уравнения малы, если соответствующий (безразмерный) размер интересующей нас области велик. Присутствие этих членов начинает сказываться, например, при построении методами теории возмущений решения уравнения в форме асимптотического ряда.

Ради простоты мы ограничимся здесь рассмотрением проблем критичности для шаров и цилиндров. Однако наши формулировки умышленно сделаны излишне общими, чтобы показать, как наш метод работает в различных задачах, где он применим. Таковы, по-видимому, однородные и неоднородные задачи для областей, границы которых совпадают с координатными поверхностями и для которых уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных.

I.2. Интегральное представление ядер

Наш подход основан на интегральном уравнении для плотности нейтронов. Сначала мы построим удобное интегральное представление ядра. Затем покажем, что функции, участвующие в подобных представлениях, обладают некоторым полезным свойством, которое мы назовем свойством *восстановления*¹⁾.

Рассмотрим интегральное уравнение для плотности нейтронов в однородной области V с изотропным рассеянием и изотропными источниками. В разд. 3.6 мы видели, что таким уравнением будет

$$\rho(\mathbf{r}) = \int_V K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \{c\rho(\mathbf{r}') + q_0(\mathbf{r}')\} d^3r', \quad (I.1)$$

где

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}. \quad (I.2)$$

Так как

$$\frac{e^{-r}}{4\pi r^2} = \int_0^1 \frac{e^{-r/v}}{4\pi r v^2} dv \quad (I.3)$$

и

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\right) \frac{e^{-r/v}}{4\pi r} = -\delta(\mathbf{r}), \quad (I.4)$$

то

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_0^1 K_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{dv}{v^2}, \quad (I.5)$$

где

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\right) K_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (I.6)$$

В различных координатных системах эти формулы выглядят по-разному и дают искомые интегральные представления.

а) Проблема критичности для шара

Здесь нас интересуют сферически симметричные решения однородной формы уравнения (I.1), а именно

$$\rho(r) = \int_0^a G(r, r') c\rho(r') r'^2 dr', \quad (I.7)$$

где

$$G(r, r') = \int G_v(r, r') \frac{dv}{v^2}, \quad (I.8)$$

$$G_v(r, r') = \int K_v(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Omega. \quad (I.9)$$

¹⁾ В оригинале replication.— Прим. перев.

Запишем δ -функцию в сферических координатах. Тогда уравнение (I.6) примет вид

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\right) K_v(r, r') = -\frac{\delta(r-r')}{r'^2} \frac{\delta(\theta-\theta')}{\sin\theta} \delta(\varphi-\varphi'). \quad (\text{I.10})$$

Проинтегрировав по Ω , получим

$$\left\{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\right\} G_v(r, r') = -\frac{\delta(r-r')}{r'^2}. \quad (\text{I.11})$$

в) Проблема критичности для цилиндра

В этом случае мы ищем решение однородной формы уравнения (I.1), не зависящее в цилиндрических координатах от z и φ . Повторяя уже проведенные рассуждения, мы снова приходим к уравнению (I.11), но теперь r^2 и r'^2 заменяется на r и r' . В связи с этим положим

$$h(r) = \begin{cases} 1 & \text{для плоской геометрии,} \\ r & \text{для цилиндрической геометрии,} \\ r^2 & \text{для сферической геометрии.} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Тогда во всех трех случаях интегральное уравнение имеет вид

$$\rho(r) = \int_0^a G(r, r') c\rho(r') h(r') dr'. \quad (\text{I.13})$$

Кроме того,

$$\left\{\frac{1}{h(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{1}{v^2}\right\} G_v(r, r') = -\frac{\delta(r-r')}{h(r')} \quad (\text{I.14})$$

и $G(r, r')$ выражается через G_v по формуле (I.8). Применяя стандартные методы [30], мы находим

$$G_v(r, r') = \frac{i^v(r<) k^v(r>)}{W(v)}, \quad (\text{I.15})$$

где i^v (k^v) — решение однородной формы уравнения (I.14), регулярное в начале координат (равное нулю на бесконечности), а $r<$ и $r>$ — соответственно меньшее и большее из чисел r и r' . Легко проверить, что функция

$$W(v) \equiv h(r) \left[k^v(r) \frac{\partial}{\partial r} i^v(r) - i^v(r) \frac{\partial}{\partial r} k^v(r) \right] \quad (\text{I.16})$$

не зависит от r .

Подставляя (I.15) в (I.8), получаем искомое интегральное представление ядер. (Явный вид i^v и k^v нам потребуется позже, когда мы будем рассматривать конкретные частные случаи.)

I.3. Свойство восстановления

Значение полученных представлений заключено в следующем их свойстве: если в правой части уравнения (I.13) положить $\rho(r') = i\bar{v}(r')$, интеграл будет равен сумме функции $i\bar{v}(r)$, умноженной на константу, и линейной комбинации функций $i\bar{v}_\alpha(r)$, $0 \leq v \leq 1$.

Это свойство доказывается прямой подстановкой. Интегралы легко вычислить, используя тождество

$$\left[\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right] \int_{\alpha}^{\beta} \varphi^{v_1}(r') \varphi^{v_2}(r') h(r') dr' = \\ = \left\{ h(r') \left[\varphi^{v_2}(r') \frac{\partial \varphi^{v_1}(r')}{\partial r'} - \varphi^{v_1}(r') \frac{\partial \varphi^{v_2}(r')}{\partial r'} \right] \right\}_{\alpha}^{\beta}, \quad (\text{I.17})$$

где $\varphi^{v_j}(r)$ — решение уравнения

$$\left\{ \frac{1}{h(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(h(r) \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{1}{v_j^2} \right\} \varphi^{v_j}(r) = 0. \quad (\text{I.18})$$

(Заметим, что, положив $v_1 = v_2$, можно убедиться в постоянстве функции W , о чем уже говорилось выше.) С помощью тождества (I.17) находим

$$\int_0^a G(r, r') i\bar{v}(r') h(r') dr' = \int_0^1 \frac{dv}{v^2 W(v) [(1/v^2) - (1/\bar{v}^2)]} \times \\ \times \left\{ k^v(r) \left[h(r) \left(i\bar{v}(r) \frac{\partial}{\partial r} i\bar{v}(r) - i\bar{v}(r) \frac{\partial}{\partial r} i\bar{v}(r) \right) \right] + \right. \\ \left. + i\bar{v}(r) \left[h(a) \left(i\bar{v}(a) \frac{\partial}{\partial a} k^v(a) - k^v(a) \frac{\partial}{\partial a} i\bar{v}(a) \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - h(r) \left(i\bar{v}(r) \frac{\partial}{\partial r} k^v(r) - k^v(r) \frac{\partial}{\partial r} i\bar{v}(r) \right) \right] \right\}. \quad (\text{I.19})$$

Здесь надо обратить внимание на два обстоятельства. Во-первых, интеграл регулярен при $v = \bar{v}$. Во-вторых, можно привести подобные члены. При этом, однако, возникают ложные особенности. Они устраняются, если особенность функции

$$[1/v^2 - 1/\bar{v}^2]^{-1}$$

всегда понимается в смысле главного значения. (Можно показать, что любое другое разумное толкование этой величины приводит к тому же окончательному результату.)

Тогда второй и шестой члены в фигурных скобках в правой части равенства (I.19) взаимно уничтожаются, а первый и пятый

дают в сумме $W(v) i^{\bar{v}}(r)$. Вводя функцию $\Phi(a, v, \bar{v})$ формулой

$$\Phi(a, v, \bar{v}) = h(a) \left[k^v(a) \frac{\partial}{\partial a} i^{\bar{v}}(a) - i^{\bar{v}}(a) \frac{\partial}{\partial a} k^v(a) \right], \quad (I.20)$$

записываем результат в виде

$$\int_0^a G(r, r') i^{\bar{v}}(r') h(r') dr' = \int_0^1 \frac{dv}{v^2 [(1/v^2) - (1/\bar{v}^2)]} i^{\bar{v}}(r) - \\ - \int_0^1 \frac{dv}{v^2 W(v)} \frac{i^v(r) \Phi(a, v, \bar{v})}{[(1/v^2) - (1/\bar{v}^2)]}, \quad (I.21)$$

что и требовалось доказать.

1.4. Спектральное представление плотности

Свойство восстановления подсказывает форму, в которой целесообразно искать решение уравнения (I.3):

$$\rho(r) = \sum_i A_i i^{v_i}(r) + \int_0^1 \varphi(v) i^v(r) dv. \quad (I.22)$$

Коэффициенты A_i , функция $\varphi(v)$ и дискретные значения v_i подлежат определению.

Подставим $\rho(r)$ в форму (I.22) в уравнение (I.13) и используем соотношение (I.21):

$$\sum_i A_i i^{v_i}(r) + \int_0^1 \varphi(v) i^v(r) dv = \\ = c \sum_i A_i \left\{ i^{v_i}(r) \int_0^1 \frac{dv}{v^2 [(1/v^2) - (1/v_i^2)]} - \int_0^1 \frac{dv i^v(r) \Phi(a, v, v_i)}{v^2 W(v) [(1/v^2) - (1/v_i^2)]} \right\} + \\ + c \int_0^1 \varphi(v') dv' \left\{ i^{v'}(r) \int_0^1 \frac{dv}{v^2 [(1/v^2) - (1/v'^2)]} - \right. \\ \left. - \int_0^1 \frac{dv i^v(r)}{v^2 W(v)} \frac{\Phi(a, v, v')}{[(1/v^2) - (1/v'^2)]} \right\}.$$

Для того чтобы функция ρ , заданная формулой (I.22), была решением, достаточно, чтобы коэффициенты при $i^{v_i}(r)$ и $i^v(r)$ ($0 < v < 1$) равнялись нулю. Это условие с помощью функции $\Lambda(z)$ (разд. 4.3) можно представить в следующем виде.

Дискретные слагаемые:

$$A_i \Lambda(v_i) = 0. \quad (I.24)$$

Слагаемые непрерывного спектра:

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda^+ + \Lambda^-}{2} \varphi(v) = & -\frac{(\Lambda^+ - \Lambda^-)}{2\pi i v W(v)} \left\{ \sum_i v_i A_i \Phi(a, v, v_i) \left[\frac{1}{v_i - v} + \frac{1}{v_i + v} \right] + \right. \\ & \left. + \int_0^1 v' \varphi(v') \Phi(a, v, v') \left[\frac{1}{v' - v} + \frac{1}{v' + v} \right] \right\}. \quad (I.25) \end{aligned}$$

Из уравнения (I.24) видно, что дискретные точки v_i служат корнями нашего характеристического уравнения $\Lambda(z) = 0$. Но эти корни уже известны нам: это точки $\pm v_0$. Поскольку, как мы увидим, i^{v_0} и i^{-v_0} пропорциональны в сферической и цилиндрической геометриях, можно ограничиться рассмотрением только одного корня, который мы обозначим через v_0 . (Сумма в (I.25) сводится таким образом к одному члену, содержащему $v_0 A_0$.)

I.5. Решение уравнений

Чтобы продвинуться дальше, нам придется обратиться к частным случаям. Для вычисления $W(v)$ и $\Phi(a, v, v')$ изучим функции i^v и k^v .

а) Шар

Решениями здесь будут сферические функции Бесселя [30]. Положим

$$\begin{aligned} i^v(r) &= i_0(r/v), \\ k^v(r) &= k_0(r/v). \end{aligned} \quad (I.26)$$

Тогда

$$\frac{\Phi(a, v, v_i)}{W(v)} = \frac{v_i}{v^2} e^{-a/v} \left[\frac{e^{a/v_i}}{v_i - v} - \frac{e^{-a/v_i}}{v_i + v} \right]. \quad (I.27)$$

Зададим функцию $\bar{\varphi}$ формулой

$$\bar{\varphi}(v) = v^2 e^{a/v} \varphi(v). \quad (I.28)$$

Тогда (I.25) принимает вид

$$\frac{\Lambda^+ + \Lambda^-}{2} \bar{\varphi}(v) + \frac{\Lambda^+ - \Lambda^-}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(v') dv'}{v' - v} = (\Lambda^+ - \Lambda^-) f(v), \quad (I.29)$$

где

$$f(v) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ v_0^2 A_0 \left[\frac{e^{-a/v_0}}{v_0 + v} - \frac{e^{a/v_0}}{v_0 - v} \right] + \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(v') e^{-2a/v'}}{v' + v} dv' \right\}. \quad (I.30)$$

Если бы функция $f(v)$ была известна, то появилась бы непосредственная возможность решить уравнение (I.29). Действительно, если

$$n(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(v') dv'}{v' - z}, \quad (I.31)$$

то

$$n(z) = \frac{\Gamma(z)}{X(z)}, \quad (I.32)$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{[X^+(v') - X^-(v')]}{v' - z} f(v') dv', \quad (I.33)$$

где функция $X(z)$ определена в разд. 4.8.

Функция

$$\bar{\varphi}(v) = n^+ - n^- \quad (I.34)$$

удовлетворяет уравнению (I.29) при условии, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z\Gamma(z) = 0. \quad (I.35)$$

Интеграл, входящий в определение $\Gamma(z)$, вычисляется легко. Из структуры функции $f(v)$ видно, что нам нужно найти лишь

$$I(\bar{v}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{[X^+(v') - X^-(v')]}{(v' - z)(v' - \bar{v})} dv'. \quad (I.36)$$

Теорема Коши дает

$$I(\bar{v}) = \frac{X(z) - X(\bar{v})}{z - \bar{v}}. \quad (I.37)$$

Используя этот результат и явный вид функции $f(v)$, получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(z) = & \frac{A_0 v_0}{2\pi i} \left\{ e^{a/v_0} \frac{[X(z) - X(v_0)]}{z - v_0} - e^{-a/v_0} \frac{[X(z) - X(-v_0)]}{z + v_0} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \bar{\varphi}(v'') e^{-2av''} \frac{[X(z) - X(-v'')]}{z + v''} dv''. \end{aligned} \quad (I.38)$$

Подставив (I.38) в (I.34), придем к регулярному интегральному уравнению для $\bar{\varphi}(v)$:

$$\bar{\varphi}(v) = -\frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(v)} - \frac{1}{X^-(v)} \right] \times \\ \times \left\{ A_0 v_0 \left[\frac{e^{a/v_0} X(v_0)}{v - v_0} - \frac{e^{-a/v_0} X(-v_0)}{v + v_0} \right] + \int_0^1 \frac{\bar{\varphi}(v'') e^{-2a/v''} X(-v'') dv''}{v + v''} \right\}. \quad (I.39)$$

Условие (I.35) принимает вид

$$A_0 v_0 \{e^{a/v_0} X(v_0) - e^{-a/v_0} X(-v_0)\} + \int_0^1 \bar{\varphi}(v'') e^{-2a/v''} X(-v'') dv'' = 0. \quad (I.40)$$

Уравнения (I.39) и (I.40) идеальным образом подходят для построения асимптотических разложений при больших a . В этом случае интегральный член в уравнении (I.39) экспоненциально мал, что дает возможность воспользоваться методом последовательных приближений. Подстановка результата в условие (I.40) приводит к искомому условию критичности. Например, если пренебречь интегралом в условии (I.40), получим нулевое приближение

$$e^{a/v_0} X(v_0) - e^{-a/v_0} X(-v_0) = 0. \quad (I.41)$$

Это не что иное, как условие обращения в нуль асимптотической плотности на экстраполированной длине. Задача эта обсуждалась в разд. 6.6 несколько иным образом; подход, использованный здесь, интересен своей общностью.

б) Цилиндр

Здесь подходящими функциями будут

$$i^v(r) = I_0(r/v), \quad k^v(r) = K_0(r/v), \quad (I.42)$$

где I_0 и K_0 — бесселевы функции в смысле Ватсона [9]. В этом случае

$$W(v) = 1. \quad (I.43)$$

Функция Φ очень сложна. Однако, поскольку наша цель заключается в построении разложений для больших a , можно заменить Φ ее асимптотическим представлением. Для простоты ограничимся первыми двумя членами. Функции $\Phi(a, v, v_0)$ и $\Phi(a, v, v')$ нужно рассматривать порознь, так как v_0 здесь должно быть мнимым числом. (Ясно, что для критичности должно быть $c > 1$.)

i) $\Phi(a, v, v')$. Используя разложения

$$\begin{aligned} K_0(z) &\sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[1 - \frac{1}{8z}\right], \\ I_0(z) &\sim \left(\frac{1}{2\pi z}\right)^{1/2} e^z \left[1 + \frac{1}{8z}\right], \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

находим

$$\Phi(a, v, v') \left[\frac{1}{v' - v} + \frac{1}{v' + v} \right] = e^{-a/v} e^{a/v'} [v'/v]^{1/2} \left[\frac{1}{v' - v} + \frac{1}{8a} \right]. \quad (\text{I.45})$$

ii) $\Phi(a, v, v_0)$. Используя разложение

$$\begin{aligned} I_0(a/v_0) &= \frac{1}{(2\pi a/v_0)^{1/2}} \left\{ e^{-i[(a/v_0) - (\pi/4)]} \left[1 - \frac{1}{8ia/|v_0|} \right] + \right. \\ &\quad \left. + e^{i[(a/v_0) - (\pi/4)]} \left[1 + \frac{1}{8ia/|v_0|} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

и соответствующее разложение для $K_0(a/v)$, мы находим

$$\begin{aligned} \Phi(a, v, v_0) \left[\frac{1}{v_0 - v} + \frac{1}{v_0 + v} \right] &= \\ &= e^{-a/v} \left(\frac{v_0}{v} \right)^{1/2} \left\{ e^{a/v_0} \left[\frac{1}{v_0 - v} + \frac{1}{8a} \right] - \right. \\ &\quad \left. - ie^{-a/v_0} \left[\frac{1}{v_0 + v} - \frac{1}{8a} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

Зададим функцию $\psi(v)$ формулой

$$\psi(v) = v^{3/2} e^{a/v} \varphi(v). \quad (\text{I.48})$$

Тогда можно переписать уравнение (I.25) в виде

$$\frac{\Lambda^+ + \Lambda^-}{2} \psi(v) + \frac{\Lambda^+ - \Lambda^-}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\psi(v') dv'}{v' - v} = (\Lambda^+ - \Lambda^-) g(v), \quad (\text{I.49})$$

где

$$\begin{aligned} g(v) &= -\frac{1}{2\pi i} \left\{ v_0^{3/2} A_0 \left[e^{a/v_0} \left(\frac{1}{v_0 - v} + \frac{1}{8a} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ie^{-a/v_0} \left(\frac{1}{v_0 + v} - \frac{1}{8a} \right) \right] + \frac{1}{8a} \int_0^1 \psi(v') dv' \right\}. \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении мы получили сингулярное интегральное уравнение, с главной частью которого мы уже неоднократно сталкивались. Поправка выражена. Поэтому решение сразу можно написать в полной аналити-

ческой форме. (Заметим, что, включив в асимптотическое разложение функций Бесселя большее число членов, мы все равно пришли бы к уравнениям того же типа.)

Решение строится стандартным образом. Положим

$$n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\psi(v')}{v' - z} dv', \quad (I.51)$$

тогда

$$n(z) = \frac{G(z)}{X(z)}, \quad (I.52)$$

где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{X^+(v') - X^-(v')}{v' - z} g(v') dv'. \quad (I.53)$$

Функция $\psi(v)$, определенная формулой

$$\psi(v) = n^+(v) - n^-(v), \quad (I.54)$$

удовлетворяет уравнению (I.45) при условии

$$\lim_{z \rightarrow \infty} zG(z) = 0. \quad (I.55)$$

Как и прежде, интегрирование в уравнении (I.49) элементарно. В результате имеем

$$\begin{aligned} G(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \left\{ v_0^{3/2} A_0 \left[e^{a/v_0} \frac{[X(v_0) - X(z)]}{z - v_0} + \frac{e^{a/v_0} X(z)}{8a} - \right. \right. \\ & \left. \left. - i e^{-a/v_0} \frac{[X(z) - X(-v_0)]}{z + v_0} + \frac{i e^{-a/v_0} X(z)}{8a} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{8a} \int_0^1 \psi(v') dv' X(z) \right\}. \quad (I.56) \end{aligned}$$

С помощью формулы (I.50) находим

$$\psi(v) = -\frac{1}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{X^+(v)} - \frac{1}{X^-(v)} \right\} v_0^{3/2} A_0 \left\{ \frac{e^{a/v_0} X(v_0)}{v - v_0} + \frac{i e^{-a/v_0} X(-v_0)}{v + v_0} \right\}. \quad (I.57)$$

Условие критичности (I.55) принимает форму

$$\begin{aligned} v_0^{3/2} A_0 \left\{ e^{a/v_0} \left[X(v_0) - \frac{1}{8a} \right] + i e^{-a/v_0} \left[X(-v_0) - \frac{1}{8a} \right] \right\} - \\ - \frac{1}{8a} \int_0^1 \psi(v') dv' = 0. \quad (I.58) \end{aligned}$$

Подставим формулу для $\psi(v')$ в интеграл, фигурирующий в равенстве (I.58). Мы столкнемся с величиной

$$J(\pm v_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{X^+(v)} - \frac{1}{X^-(v)} \right\} \frac{X(\pm v_0)}{v \pm v_0} dv. \quad (\text{I.59})$$

В силу теоремы Коши

$$J(\pm v_0) = 1, \quad (\text{I.60})$$

так что условие критичности упрощается:

$$e^{a/v_0} X(v_0) + ie^{-a/v_0} X(-v_0) = 0. \quad (\text{I.61})$$

В рассматриваемом приближении это условие совпадает с тем, к которому в задаче о цилиндре большого диаметра приводит процедура, связанная с определением экстраполированной длины.

Приложение J

ЗАДАЧИ БЕЗ АЗИМУТАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Напомним, что на протяжении всей книги преимущественное внимание уделялось одномерным задачам с азимутальной симметрией. Последнее ограничение (а именно наличие лишь зависимости от μ — косинуса угла между вектором скорости и выделенным направлением) можно легко ослабить. Здесь мы наметим довольно простые изменения, которые для этого потребуются произвести ¹⁾. Для простоты исследуем подробно случай изотропного рассеяния. Метод исследования в общем случае анизотропного рассеяния при этом будет очевиден.

Рассмотрим в общем виде одномерную односкоростную задачу с изотропным рассеянием. Если не предполагать азимутальной симметрии, однородное уравнение (при подходящем выборе единиц измерения) будет иметь вид

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial x} + 1\right) \Psi = \frac{c}{4\pi} \int \Psi(x, \Omega') d\Omega'. \quad (J.1)$$

Будем искать нормальные моды в виде

$$\Psi = e^{-x/v} \Phi(\Omega). \quad (J.2)$$

Если мы выберем условие нормировки ²⁾

$$\int \Phi(\Omega') d\Omega' = 1, \quad (J.3)$$

то уравнение (J.1) примет вид

$$(v - \mu) \Phi(\Omega) = cv/4\pi. \quad (J.4)$$

Мы снова приходим к двум классам решений.

(i) *Дискретные решения.* Ими будут функции

$$\Phi_i(\Omega) = \frac{cv_i}{4\pi(v_i - \mu)}, \quad (J.5)$$

¹⁾ Другой подход был развит Саммерфилдом (частное сообщение) и Шалтисом [95].

²⁾ В отличие от азимутально симметричного случая теперь нет уверенности, что это можно сделать (интеграл (J.3) может обращаться в нуль и при нетривиальной функции Φ). Однако, ограничиваясь лишь функциями, допускающими нормировку (J.3), мы все же получим «достаточное» количество решений.

где, согласно условию (J.3),

$$\int \Phi_i(\Omega) d\Omega = \int \frac{c v_i}{4\pi (v_i - \mu)} d\Omega = 1, \quad (\text{J.6a})$$

или

$$\Lambda(v_i) = 0. \quad (\text{J.6b})$$

(ii) *Решения непрерывного спектра.* Эти решения появляются при $-1 < v < 1$ и имеют вид

$$\Phi_v(\Omega) = \frac{c v}{4\pi} P \frac{1}{v - \mu} + \eta(v, \varphi) \delta(v - \mu). \quad (\text{J.7})$$

(Здесь φ — азимут вектора Ω .) Согласно условию нормировки,

$$\int_0^{2\pi} \eta(v, \varphi) d\varphi = \frac{\Lambda^+(v) + \Lambda^-(v)}{2}. \quad (\text{J.8})$$

За исключением этого единственного ограничения, η может зависеть от φ произвольным образом. Удобно ввести следующую параметризацию этого семейства решений. Пусть Ω_0 — единичный вектор, для которого

$$v = \Omega_0 \cdot \hat{x} \equiv \mu_0. \quad (\text{J.9})$$

Чтобы получить достаточно широкий класс функций, положим

$$\eta(v, \varphi) = \lambda(\mu_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (\text{J.10})$$

где φ_0 — азимут вектора Ω_0 . Тогда собственные функции примут вид

$$\Phi_{\Omega_0}(\Omega) = \frac{c \mu_0}{4\pi} P \frac{1}{\mu_0 - \mu} + \lambda(\mu_0) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0), \quad (\text{J.11})$$

а условие нормировки перейдет в условие

$$\lambda(\mu_0) = \frac{\Lambda^+(\mu_0) + \Lambda^-(\mu_0)}{2}. \quad (\text{J.12})$$

Итак, мы имеем дискретные моды, соответствующие корням характеристического уравнения (J.6b), и двумерный континуум мод, описываемых трехмерными единичными векторами. Эти моды можно использовать для того, чтобы свести азимутально неоднородные задачи к исследованным ранее азимутально однородным задачам. Приведем два примера.

Рассмотрим сначала задачу о плоском источнике $\delta(z) F(\Omega)$ в бесконечной однородной среде. Она сводится к решению однородного уравнения, если

- Ψ обращается в нуль на бесконечности,
- выполнено условие скачка

$$\mu \{\Psi(0, \Omega)_+ - \Psi(0, \Omega)_-\} = F(\Omega). \quad (\text{J.13})$$

Мы снова ищем решение в виде разложений

$$x > 0, \quad \Psi(x, \Omega) = a_{0+} \Phi_{0+}(\Omega) e^{-x/\nu_0} + \int_{\mu_0 \geq 0} A(\Omega_0) e^{-x/\mu_0} \Phi_{\Omega_0}(\Omega) d\Omega_0, \quad (J.14)$$

$$x < 0, \quad \Psi(x, \Omega) = -a_{0-} \Phi_{0-}(\Omega) e^{x/\nu_0} - \int_{\mu_0 \leq 0} A(\Omega_0) e^{x/\mu_0} \Phi_{\Omega_0}(\Omega) d\Omega_0. \quad (J.15)$$

Положим

$$\Phi'(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{\mu} - a_{0+} \Phi_{0+} - a_{0-} \Phi_{0-}. \quad (J.16)$$

Тогда условие скачка примет вид

$$\Phi'(\Omega) = \int A(\Omega_0) \Phi_{\Omega_0}(\Omega) d\Omega_0. \quad (J.17)$$

Если подставить сюда явное выражение для Φ_{Ω_0} , то (J.17) перейдет в интегральное уравнение

$$\Phi'(\Omega) = \lambda(\mu) A(\Omega) + \int d\Omega_0 \frac{c}{4\pi} \mu_0 P \frac{1}{\mu_0 - \mu} A(\Omega_0). \quad (J.18)$$

Теперь заметим, что если известна величина

$$\bar{A}(\mu_0) \equiv \int_0^{2\pi} A(\Omega_0) d\varphi_0, \quad (J.19)$$

то с помощью нашего интегрального уравнения можно определить $A(\Omega)$. Величину \bar{A} найти легко. Действительно, положим

$$\bar{\Phi}'(\mu) = \int_0^{2\pi} \Phi'(\Omega) d\varphi \quad (J.20)$$

и проинтегрируем уравнение (J.18) по φ :

$$\bar{\Phi}'(\mu) = \lambda(\mu) \bar{A}(\mu) + \frac{c}{2} P \int_{-1}^1 \frac{\mu_0}{\mu_0 - \mu} \bar{A}(\mu_0) d\mu_0. \quad (J.21)$$

Мы пришли к задаче, которая уже обсуждалась при доказательстве теоремы полноты в случае с азимутальной симметрией.

Аналогично исследуется альбедная задача. Допустим, мы должны решить однородное уравнение в полупространстве $x > 0$ при граничных условиях

- а) $\Psi(z, \Omega)$ обращается в нуль на бесконечности,
- б) $\Psi(0, \Omega) = G(\Omega)$ при $\mu \geq 0$, где G — заданная функция.

Для того чтобы удовлетворить уравнению переноса и условию на бесконечности, воспользуемся разложением

$$\Psi = a_{0+} \Phi_{0+}(\Omega) e^{-x/v_0} + \int_{\mu_0 \geq 0} A(\Omega_0) \Phi_{\Omega_0}(\Omega) e^{-x/\mu_0} d\Omega_0. \quad (\text{J.22})$$

Пусть

$$\Phi'(\Omega) = G(\Omega) - a_{0+} \Phi_{0+}(\Omega). \quad (\text{J.23})$$

Условие при $x=0$ принимает вид

$$\Phi'(\Omega) = \int_{\mu_0 \geq 0} A(\Omega_0) \Phi_{\Omega_0}(\Omega) d\Omega_0, \quad 1 \geq \mu \geq 0. \quad (\text{J.24})$$

Подставляя сюда выражение для Φ_{Ω_0} , приходим к интегральному уравнению

$$\Phi'(\Omega) = \lambda(\mu) A(\Omega) + \int d\Omega_0 \frac{c}{4\pi} \mu_0 P \frac{1}{\mu_0 - \mu} A(\Omega_0), \quad 1 \geq \mu \geq 0. \quad (\text{J.25})$$

Из уравнения (J.25) снова можно найти $A(\Omega)$, если известна величина $\bar{A}(\mu)$. Это делается так же, как и раньше. А именно, проинтегрируем уравнение (J.25) по φ :

$$\bar{\Phi}'(\mu) = \lambda(\mu) \bar{A}(\mu) + \frac{c}{2} P \int_0^1 \frac{\mu_0}{\mu_0 - \mu} \bar{A}(\mu_0) d\mu_0, \quad 1 \geq \mu \geq 0. \quad (\text{J.26})$$

С этой задачей мы уже встречались при доказательстве теоремы полноты для полубесконечного интервала в случае с азимутальной симметрией. Итак, мы опять пришли к той же самой задаче.

Исследование задачи с анизотропным рассеянием аналогично. Предположим, что функция рассеяния содержит полиномы Лежандра $P_n(\Omega \cdot \Omega')$, где $n \leq l$. Основное отличие от только что рассмотренных случаев состоит в том, что здесь нормальные моды пропорциональны $e^{im\varphi}$, где $-l \leq m \leq l$. Повторяя те же операции, приходим к уравнениям, подобным (J.18) и (J.25) для определения коэффициентов разложения по функциям непрерывного спектра. Эти коэффициенты можно найти в явном виде, если известны величины

$$A_m(\mu) = \int_0^{2\pi} A(\Omega) e^{im\varphi} d\varphi, \quad -l \leq m \leq l. \quad (\text{J.27})$$

Уравнения для $A_m(\mu)$ получаются умножением интегрального уравнения на $e^{im\varphi}$ и интегрированием по φ . Таким образом, задача снова сводится к решению нескольких задач с азимутальной симметрией.

Напрашивается ряд обобщений этого метода. Например, аналогичным образом можно построить класс трехмерных решений

однородного уравнения. Для этого рассмотрим уравнение

$$\Omega \cdot \nabla \Psi + \Psi = \frac{c}{4\pi} \int \Psi(r, \Omega') d\Omega'. \quad (J.28)$$

В силу инвариантности относительно сдвига целесообразно искать решения уравнения (J.28) в виде

$$\Psi = e^{-n \cdot r / v} \Phi_n(\Omega). \quad (J.29)$$

(Здесь n — единичный вектор, а v и Φ_n подлежат определению.) Подставим (J.29) в (J.28):

$$(v - n \cdot \Omega) \Phi_n = c/4\pi, \quad (J.30)$$

где функция Φ_n , как и раньше, нормирована так, что

$$\int \Phi_n(\Omega) d\Omega = 1. \quad (J.31)$$

Без труда находим два класса решений.

i) *Дискретно-континуальный класс* решений. Здесь

$$\Phi_{n,i} = \frac{c}{4\pi} \frac{v_i}{v_i - n \cdot \Omega} \quad (J.32)$$

и $\Lambda(v_i) = 0$. В данном случае, разумеется, есть только один такой корень. Однако эти решения образуют континуум, поскольку n пробегает всю единичную сферу.

(ii) *Континуально-континуальный класс* решений. В этом случае

$$\Phi_n = \frac{c}{4\pi} P \frac{v}{v - n \cdot \Omega} + \eta(v, \varphi) \delta(v - n \cdot \Omega), \quad -1 < v < 1. \quad (J.33)$$

Здесь φ — угол, который вместе с величиной $\mu = n \cdot \Omega$ определяет вектор Ω . Единственное ограничение на η — это требование

$$\int_0^{2\pi} \eta(v, \varphi) d\varphi = \frac{\Lambda^+(v) + \Lambda^-(v)}{2}. \quad (J.34)$$

Заметим, что условие $-1 < v < 1$ можно записать в виде

$$v = n \cdot \Omega_0. \quad (J.35)$$

Положив

$$\eta(v, \varphi) = \lambda(n \cdot \Omega_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (J.36)$$

где φ_0 — азимут вектора Ω_0 , получим широкий класс решений. Таким образом, мы построили континуум собственных функций континуума, который определяется двумя единичными векторами n и Ω_0 :

$$\Phi_{n, \Omega_0}(\Omega) = \frac{c}{4\pi} P \frac{n \cdot \Omega_0}{n \cdot (\Omega_0 - \Omega)} + \lambda(\Omega_0 \cdot n) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0) \quad (J.37)$$

(здесь $\lambda(\Omega_0 \cdot n)$ — та же функция, что и раньше).

Дадим теперь обобщение на нестационарные задачи с бесконечной средой. Пусть требуется решить уравнение

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Psi + \Psi = \frac{c}{4\pi} \int \Psi(\mathbf{r}, \Omega', t) d\Omega'. \quad (\text{J.38})$$

Будем искать решение в виде

$$\Psi \sim e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{-ikvt} e^{-l} \Phi(\Omega). \quad (\text{J.39})$$

Подставим (J.39) в (J.38):

$$(v - \Omega_{\parallel}) \Phi = \frac{ic}{4\pi} \frac{1}{k}, \quad (\text{J.40})$$

где $\Omega_{\parallel} \equiv (\mathbf{k} \cdot \Omega)/k$, условие нормировки остается прежним, т. е. $\int \Phi(\Omega') d\Omega' = 1$. Получаются следующие классы решений:

i) *Дискретный класс.*

$$\Phi_l = \frac{ic}{4\pi} \frac{1}{k} \frac{1}{v_l - \Omega_{\parallel}}, \quad (\text{J.41})$$

где v_l определяются условиями

$$v_l \in [-1, 1], \quad \Lambda(v_l) \equiv 1 - \frac{ic}{4\pi} \frac{1}{k} \int \frac{d\Omega}{v_l - \Omega_{\parallel}} = 0. \quad (\text{J.42})$$

Так же, как в одномерной задаче, тут либо существует один корень, зависящий от переменной k , либо корней вовсе нет.

ii) *Функции непрерывного спектра.* Они появляются при $-1 \leq v \leq 1$ и определяются формулой

$$\Phi = \frac{ic}{4\pi} \frac{1}{k} P \frac{1}{v - \Omega_{\parallel}} + n(v, \Omega_{\perp}) \delta(v - \Omega_{\parallel}), \quad (\text{J.43})$$

где

$$\Omega_{\perp} = \Omega - \left(\frac{\mathbf{k} \cdot \Omega}{k^2} \right) \mathbf{k}. \quad (\text{J.44})$$

Положим снова

$$v = (\Omega_0)_{\parallel} \quad (\text{J.45})$$

и выберем

$$\eta(v, \Omega_{\perp}) = \lambda(v) \delta(\varphi - \varphi_0). \quad (\text{J.46})$$

Собственные функции непрерывного спектра тогда будут иметь вид

$$\Phi_{\Omega_0} = \frac{ic}{4\pi} P \frac{1}{(k/k) \cdot (\Omega_0 - \Omega)} + \lambda(\mathbf{k} k^{-1} \cdot \Omega_0) \delta_2(\Omega \cdot \Omega_0). \quad (\text{J.47})$$

По-прежнему

$$\lambda(v) = \frac{\Lambda^+(v) + \Lambda^-(v)}{2}, \quad (\text{J.48})$$

где Λ задается формулой (J.42).

По тем же соображениям, что и в начале этого приложения, а также в силу теоремы об интеграле Фурье построенная нами система функций от положения точки и от скорости полна. С помощью этой системы можно эффективно решать задачи Коши.

Приложение К

ВЫВОД ФОРМУЛЫ (34 d) РАЗД. 4.9

Рассмотрим интеграл

$$I(z) = \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \int_0^1 \frac{W(\mu)}{(\mu - \nu_0)(\mu - z)} d\mu. \quad (\text{K.1})$$

Ясно, что

$$\int_0^1 \varphi_{0\pm}(\mu) \varphi_{0+}(\mu) W(\mu) d\mu = \pm \lim_{z \rightarrow \pm \nu_0} I(z). \quad (\text{K.2})$$

Используя разложение на простые дроби и определение функции $m(z)$ (формула (15) разд. 4.9), получаем из (K.1):

$$I(z) = \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{2\pi i}{\nu_0 - z} [m(\nu_0) - m(z)]. \quad (\text{K.3})$$

Теперь применим формулы (18) и (24) разд. 4.9

$$I(z) = - \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 X(z). \quad (\text{K.4})$$

Приложение L

ТАБЛИЦЫ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $X(z)$

Мы видели, что во многих задачах теории переноса важную роль играют соответствующие X -функции. В наиболее важном случае изотропного рассеяния X -функция определяется формулой (39) разд. 6.2. Приведенные здесь таблицы значений $X(z)$ для действительных значений z между 0 и 1 и для значений c в том же самом интервале вычислены Мендельсоном [96].

$X(z)$ для $c=0.001$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.000500	.200	.833601	.400	.714464	.600	.625129
.005	.995510	.205	.830140	.405	.711920	.605	.623181
.010	.990572	.210	.826708	.410	.709395	.610	.621245
.015	.985683	.215	.823304	.415	.706887	.615	.619321
.020	.980844	.220	.819928	.420	.704397	.620	.617409
.025	.978053	.225	.816579	.425	.701925	.625	.615509
.030	.971308	.230	.813258	.430	.699470	.630	.613620
.035	.966610	.235	.809964	.435	.697032	.635	.611743
.040	.961957	.240	.806696	.440	.694611	.640	.609877
.045	.957349	.245	.803455	.445	.692206	.645	.608023
.050	.952785	.250	.800239	.450	.689819	.650	.606180
.055	.948265	.255	.797049	.455	.687447	.655	.604348
.060	.943787	.260	.793885	.460	.685092	.660	.602528
.065	.939352	.265	.790746	.465	.682753	.665	.600718
.070	.934958	.270	.787631	.470	.680430	.670	.598919
.075	.930605	.275	.784541	.475	.678123	.675	.597130
.080	.928293	.280	.781475	.480	.675831	.680	.595353
.085	.922020	.285	.778432	.485	.673555	.685	.593586
.090	.917787	.290	.775414	.490	.671294	.690	.591829
.095	.913593	.295	.772419	.495	.669048	.695	.590083
.100	.909437	.300	.769446	.500	.666817	.700	.588347
.105	.905318	.305	.766497	.505	.664601	.705	.586621
.110	.901237	.310	.763570	.510	.662400	.710	.584905
.115	.897193	.315	.760665	.515	.660213	.715	.583200
.120	.893184	.320	.757783	.520	.658040	.720	.581504
.125	.889211	.325	.754922	.525	.655882	.725	.579818
.130	.885274	.330	.752083	.530	.653738	.730	.578142
.135	.881371	.335	.749265	.535	.651608	.735	.576475
.140	.877503	.340	.746468	.540	.649492	.740	.574818
.145	.873668	.345	.743692	.545	.647389	.745	.573171
.150	.869867	.350	.740936	.550	.645300	.750	.571533
.155	.866099	.355	.738201	.555	.643225	.755	.569904
.160	.862364	.360	.735486	.560	.641162	.760	.568285
.165	.858660	.365	.732791	.565	.639113	.765	.566674
.170	.854988	.370	.730115	.570	.637077	.770	.565073
.175	.851348	.375	.727459	.575	.635054	.775	.563481
.180	.847738	.380	.724823	.580	.633044	.780	.561898
.185	.844159	.385	.722205	.585	.631046	.785	.560324
.190	.840610	.390	.719606	.590	.629061	.790	.558758
.195	.837091	.395	.717026	.595	.627089	.795	.557201

Продолжение табл. Л.1

z	X	z	X	z	X	z	X
.800	.555653	.855	.539175	.905	.525020	.955	.511590
.805	.554114	.860	.537725	.910	.523645	.960	.510284
.810	.552583	.865	.536283	.915	.522278	.965	.508986
.815	.551060	.870	.534849	.920	.520918	.970	.507694
.820	.549546	.875	.533422	.925	.519564	.975	.506408
.825	.548040	.880	.532003	.930	.518218	.980	.505129
.830	.546542	.885	.530592	.935	.516879	.985	.503856
.835	.545053	.890	.529188	.940	.515546	.990	.502590
.840	.543571	.895	.527791	.945	.514221	.995	.501330
.845	.542098	.900	.526402	.950	.512902	1.000	.500077
.850	.540632						

Таблица Л.2

 $X(z)$ для $c=0.050$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.025978	.120	.909853	.240	.819162	.360	.745271
.005	1.020191	.125	.905657	.245	.815786	.365	.742485
.010	1.014640	.130	.901501	.250	.812438	.370	.739720
.015	1.009207	.135	.897385	.255	.809118	.375	.736976
.020	1.003868	.140	.893309	.260	.805826	.380	.734252
.025	.998613	.145	.889271	.265	.802560	.385	.731549
.030	.993432	.150	.885271	.270	.799322	.390	.728865
.035	.988321	.155	.881309	.275	.796111	.395	.726202
.040	.983276	.160	.877384	.280	.792925	.400	.723558
.045	.978293	.165	.873495	.285	.789766	.405	.720933
.050	.973371	.170	.869642	.290	.786632	.410	.718328
.055	.968506	.175	.865823	.295	.783524	.415	.715742
.060	.963697	.180	.862040	.300	.780440	.420	.713174
.065	.958942	.185	.858291	.305	.777381	.425	.710625
.070	.954240	.190	.854575	.310	.774346	.430	.708095
.075	.949589	.195	.850892	.315	.771335	.435	.705582
.080	.944989	.200	.847242	.320	.768348	.440	.703088
.085	.940436	.205	.843624	.325	.765384	.445	.700611
.090	.935932	.210	.840038	.330	.762444	.450	.698152
.095	.931474	.215	.836483	.335	.759526	.455	.695710
.100	.927062	.220	.832959	.340	.756631	.460	.693285
.105	.922695	.225	.829465	.345	.753758	.465	.690878
.110	.918372	.230	.826001	.350	.750908	.470	.688487
.115	.914091	.235	.822567	.355	.748079	.475	.686113

Продолжение табл. Л.2

z	X	z	X	z	X	z	X
.480	.683755	.615	.625741	.745	.578523	.875	.537957
.485	.681413	.620	.623782	.750	.576850	.880	.536511
.490	.679088	.625	.621835	.755	.575186	.885	.535072
.495	.676779	.630	.619901	.760	.573532	.890	.533641
.500	.674485	.635	.617979	.765	.571887	.895	.532218
.505	.672207	.640	.616068	.770	.570252	.900	.530802
.510	.669945	.645	.614169	.775	.568626	.905	.529394
.515	.667698	.650	.612283	.780	.567009	.910	.527993
.520	.665466	.655	.610407	.785	.565402	.915	.526600
.525	.665249	.660	.608544	.790	.563804	.920	.525214
.530	.661046	.665	.606691	.795	.562215	.925	.523835
.535	.658859	.670	.604850	.800	.560634	.930	.522464
.540	.656686	.675	.603020	.805	.559063	.935	.521100
.545	.654527	.680	.601202	.810	.557501	.940	.519743
.550	.652383	.685	.599394	.815	.555947	.945	.518392
.555	.650253	.690	.597597	.820	.554402	.950	.517049
.560	.648137	.695	.595811	.825	.552865	.955	.515713
.565	.646034	.700	.594036	.830	.551337	.960	.514384
.570	.643945	.705	.592271	.835	.549818	.965	.513062
.575	.641870	.710	.590517	.840	.548306	.970	.511746
.580	.639808	.715	.588773	.845	.546804	.975	.510438
.585	.637760	.720	.587039	.850	.545309	.980	.509136
.590	.635725	.725	.585316	.855	.543823	.985	.507840
.595	.633702	.730	.583603	.860	.542344	.990	.506551
.600	.631693	.735	.581900	.865	.540874	.995	.505269
.605	.629696	.740	.580207	.870	.539412	1.000	.503993
.610	.627712						

Таблица Л.3

 $X(z)$ для $c=0.100$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.054093	.035	1.012307	.070	.975553	.105	.941908
.005	1.047436	.040	1.006831	.075	.970574	.110	.937317
.010	1.041213	.045	1.001436	.080	.965655	.115	.932777
.015	1.035182	.050	.996119	.085	.960795	.120	.928286
.020	1.029297	.055	.990875	.090	.955992	.125	.923842
.025	1.023531	.060	.985702	.095	.951244	.130	.919445
.030	1.017872	.065	.980595	.100	.946549	.135	.915095

Продолжение табл. Л.3

z	X	z	X	z	X	z	X
.140	.910789	.345	.764900	.550	.660225	.755	.581035
.145	.906527	.350	.761944	.555	.658035	.760	.579343
.150	.902308	.355	.759012	.560	.655859	.765	.577660
.155	.898132	.360	.756102	.565	.653697	.770	.575987
.160	.893997	.365	.753215	.570	.651550	.775	.574324
.165	.889904	.370	.750351	.575	.649417	.780	.572670
.170	.885850	.375	.747509	.580	.647298	.785	.571026
.175	.881836	.380	.744689	.585	.645194	.790	.569392
.180	.877860	.385	.741891	.590	.643103	.795	.567767
.185	.873923	.390	.739114	.595	.641025	.800	.566151
.190	.870023	.395	.736359	.600	.638962	.805	.564545
.195	.866160	.400	.733624	.605	.636911	.810	.562947
.200	.862333	.405	.730910	.610	.634874	.815	.561359
.205	.858542	.410	.728217	.615	.632850	.820	.559780
.210	.854786	.415	.725544	.620	.630839	.825	.558209
.215	.851064	.420	.722890	.625	.628841	.830	.556648
.220	.847376	.425	.720257	.630	.626856	.835	.555095
.225	.843722	.430	.717643	.635	.624883	.840	.553551
.230	.840101	.435	.715048	.640	.622923	.845	.552016
.235	.836512	.440	.712472	.645	.620976	.850	.550489
.240	.832955	.445	.709915	.650	.619040	.855	.548971
.245	.829430	.450	.707377	.655	.617117	.860	.547461
.250	.825936	.455	.704857	.660	.615206	.865	.545959
.255	.822472	.460	.702356	.665	.613306	.870	.544466
.260	.819038	.465	.699872	.670	.611419	.875	.542981
.265	.815635	.470	.697406	.675	.609543	.880	.541504
.270	.812260	.475	.694958	.680	.607679	.885	.540035
.275	.808914	.480	.692527	.685	.605826	.890	.538574
.280	.805597	.485	.690114	.690	.603985	.895	.537121
.285	.802308	.490	.687718	.695	.602154	.900	.535676
.290	.799047	.495	.685338	.700	.600336	.905	.534238
.295	.795813	.500	.682975	.705	.598528	.910	.532809
.300	.792606	.505	.680629	.710	.596731	.915	.531387
.305	.789426	.510	.678299	.715	.594945	.920	.529973
.310	.786272	.515	.675985	.720	.593169	.925	.528566
.315	.783143	.520	.673687	.725	.591405	.930	.527167
.320	.780041	.525	.671405	.730	.589651	.935	.525775
.325	.776963	.530	.669138	.735	.587907	.940	.524391
.330	.773911	.535	.666887	.740	.586174	.945	.523013
.335	.770883	.540	.664651	.745	.584451	.950	.521644
.340	.767880	.545	.662431	.750	.582738	.955	.520281

Продолжение табл. Л.3

z	X	z	X	z	X
.960	.518925	.975	.514901	.985	.512253
.965	.517577	.980	.513574	.990	.510939
.970	.516236			1.000	.508332
					.509632

Таблица Л.4

X(z) для c = 0.200

z	X	z	X	z	X
.000	1.117932	.155	.936461	.310	.813465
.005	1.109335	.160	.931851	.315	.810070
.010	1.101602	.165	.927292	.320	.806704
.015	1.094228	.170	.922783	.325	.803368
.020	1.087110	.175	.918323	.330	.800061
.025	1.080196	.180	.913912	.335	.796782
.030	1.073455	.185	.909547	.340	.793531
.035	1.066867	.190	.905229	.345	.790309
.040	1.060416	.195	.900955	.350	.787113
.045	1.054090	.200	.896726	.355	.783945
.050	1.047880	.205	.892541	.360	.780803
.055	1.041779	.210	.888398	.365	.777687
.060	1.035780	.215	.884298	.370	.774598
.065	1.029878	.220	.880238	.375	.771533
.070	1.024067	.225	.876219	.380	.768495
.075	1.018344	.230	.872240	.385	.765480
.080	1.012705	.235	.868299	.390	.762491
.085	1.007146	.240	.864397	.395	.759526
.090	1.001665	.245	.860533	.400	.756584
.095	.996259	.250	.856706	.405	.753667
.100	.990925	.255	.852915	.410	.750772
.105	.985661	.260	.849160	.415	.747901
.110	.980465	.265	.845441	.420	.745052
.115	.975335	.270	.841756	.425	.742226
.120	.970269	.275	.838105	.430	.739422
.125	.965265	.280	.834488	.435	.736639
.130	.960321	.285	.830905	.440	.733879
.135	.955437	.290	.827353	.445	.731139
.140	.950610	.295	.823834	.450	.728421
.145	.945839	.300	.820347	.455	.725724
.150	.941123	.305	.816891	.460	.723047
					.649072
					.651216
					.653374
					.65547
					.65735
					.65937
					.662155
					.664389
					.66637
					.6680463
					.671181
					.673478
					.674181
					.675790
					.677600
					.682825
					.685204
					.687357
					.68963
					.692443
					.694891
					.697357
					.700013
					.702344
					.704865
					.707404
					.709963
					.712540
					.715137
					.717754
					.720390
					.723047

Продолжение табл. Л.4

z	X	z	X	z	X	z	X
.620	.648943	.720	.607159	.815	.573712	.910	.543801
.625	.644828	.725	.605300	.820	.572055	.915	.542314
.630	.642727	.730	.603453	.825	.570407	.920	.540835
.635	.640640	.735	.601617	.830	.568769	.925	.539364
.640	.638566	.740	.599792	.835	.567141	.930	.537901
.645	.638507	.745	.597979	.840	.565522	.935	.536447
.650	.634460	.750	.596177	.845	.563912	.940	.535000
.655	.632428	.755	.594385	.850	.562312	.945	.533561
.660	.630408	.760	.592605	.855	.560721	.950	.532130
.665	.628402	.765	.590835	.860	.559139	.955	.530707
.670	.628408	.770	.589076	.865	.557565	.960	.529291
.675	.624427	.775	.587328	.870	.556001	.965	.527883
.680	.622459	.780	.585590	.875	.554446	.970	.526483
.685	.620504	.785	.583863	.880	.552900	.975	.525090
.690	.618561	.790	.582146	.885	.551362	.980	.523704
.695	.618631	.795	.580439	.890	.549833	.985	.522326
.700	.614712	.800	.578742	.895	.548312	.990	.520955
.705	.612806	.805	.577055	.900	.546800	.995	.519591
.710	.610912	.810	.575379	.905	.545296	1.000	.518235
.715	.609030						

Таблица Л.5

 $X(z)$ для $c=0.300$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.192138	.070	1.080420	.140	.996819	.210	.927368
.005	1.181292	.075	1.073829	.145	.991454	.215	.922826
.010	1.171805	.080	1.067349	.150	.986158	.220	.918333
.015	1.162867	.085	1.060976	.155	.980929	.225	.913889
.020	1.154312	.090	0.054704	.160	.975764	.230	.909492
.025	1.146059	.095	1.048529	.165	.970663	.235	.905142
.030	1.138058	.100	1.042449	.170	.965624	.240	.900838
.035	1.130275	.105	1.036459	.175	.960644	.245	.896579
.040	1.122687	.110	1.030556	.180	.955724	.250	.892364
.045	1.115275	.115	1.024737	.185	.950861	.255	.888192
.050	1.108024	.120	1.019000	.190	.946055	.260	.884063
.055	1.100923	.125	1.013342	.195	.941304	.265	.879976
.060	1.093960	.130	1.007761	.200	.936606	.270	.875930
.065	1.087129	.135	1.002254	.205	.931961	.275	.871924

<i>z</i>	<i>X</i>	<i>z</i>	<i>X</i>	<i>z</i>	<i>X</i>	<i>z</i>	<i>X</i>
.280	.867958	.465	.744121	.645	.654448	.825	.584485
.285	.864031	.470	.741286	.650	.652273	.830	.582759
.290	.860142	.475	.738474	.655	.650114	.835	.581043
.295	.856291	.480	.735684	.660	.647968	.840	.579337
.300	.852477	.485	.732916	.665	.645838	.845	.577641
.305	.848700	.490	.730169	.670	.643721	.850	.575956
.310	.844958	.495	.727444	.675	.641619	.855	.574280
.315	.841252	.500	.724739	.680	.639531	.860	.572615
.320	.837580	.505	.722056	.685	.637457	.865	.570959
.325	.833943	.510	.719393	.690	.635396	.870	.569312
.330	.830339	.515	.716750	.695	.633349	.875	.567676
.335	.826769	.520	.714128	.700	.631316	.880	.566049
.340	.823231	.525	.711525	.705	.629296	.885	.564431
.345	.819725	.530	.708942	.710	.627289	.890	.562823
.350	.816251	.535	.706378	.715	.625295	.895	.561224
.355	.812808	.540	.703833	.720	.623314	.900	.559635
.360	.809396	.545	.701308	.725	.621346	.905	.558054
.365	.806014	.550	.698801	.730	.619390	.910	.556483
.370	.802662	.555	.696312	.735	.617447	.915	.554920
.375	.799339	.560	.693842	.740	.615517	.920	.553367
.380	.796046	.565	.691389	.745	.613598	.925	.551822
.385	.792781	.570	.688955	.750	.611692	.930	.550286
.390	.789544	.575	.686538	.755	.609798	.935	.548758
.395	.786335	.580	.684139	.760	.607916	.940	.547239
.400	.783153	.585	.681757	.765	.606046	.945	.545729
.405	.779998	.590	.679392	.770	.604187	.950	.544227
.410	.776870	.595	.677043	.775	.602340	.955	.542733
.415	.773769	.600	.674712	.780	.600505	.960	.541248
.420	.770693	.605	.672397	.785	.598681	.965	.539771
.425	.767643	.610	.670098	.790	.596868	.970	.538302
.430	.764617	.615	.667815	.795	.595066	.975	.536842
.435	.761617	.620	.665548	.800	.593276	.980	.535389
.440	.758642	.625	.663297	.805	.591496	.985	.533944
.445	.755690	.630	.661062	.810	.589727	.990	.532507
.450	.752763	.635	.658842	.815	.587969	.995	.531078
.455	.749859	.640	.656638	.820	.586222	1.000	.529657
.460	.746979						

Таблица Л.6

 $X(z)$ для $c=0.400$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.272435	.200	.978935	.400	.811105	.600	.694759
.005	1.259061	.205	.973791	.405	.807697	.605	.692293
.010	1.247607	.210	.968708	.410	.804318	.610	.689845
.015	1.236918	.215	.963686	.415	.800970	.615	.687415
.020	1.226757	.220	.958723	.420	.797650	.620	.685002
.025	1.217009	.225	.953817	.425	.794360	.625	.682607
.030	1.207603	.230	.948967	.430	.791099	.630	.680229
.035	1.198491	.235	.944173	.435	.787865	.635	.677868
.040	1.189638	.240	.939433	.440	.784660	.640	.675524
.045	1.181019	.245	.934746	.445	.781481	.645	.673197
.050	1.172613	.250	.930111	.450	.778330	.650	.670886
.055	1.164402	.255	.925527	.455	.775206	.655	.668592
.060	1.156372	.260	.920993	.460	.772108	.660	.666313
.065	1.148512	.265	.916508	.465	.769035	.665	.664051
.070	1.140812	.270	.912071	.470	.765989	.670	.661804
.075	1.133261	.275	.907682	.475	.762967	.675	.659573
.080	1.125853	.280	.903338	.480	.759971	.680	.657357
.085	1.118581	.285	.899040	.485	.756999	.685	.655157
.090	1.111437	.290	.894787	.490	.754051	.690	.652972
.095	1.104417	.295	.890578	.495	.751127	.695	.650802
.100	1.097515	.300	.886411	.500	.748227	.700	.648646
.105	1.090726	.305	.882287	.505	.745351	.705	.646505
.110	1.084047	.310	.878205	.510	.742497	.710	.644379
.115	1.077472	.315	.874163	.515	.739666	.715	.642267
.120	1.070999	.320	.870162	.520	.736857	.720	.640169
.125	1.064624	.325	.866200	.525	.734071	.725	.638085
.130	1.058343	.330	.862277	.530	.731307	.730	.636015
.135	1.052154	.335	.858393	.535	.728564	.735	.633959
.140	1.046054	.340	.854546	.540	.725842	.740	.631916
.145	1.040040	.345	.850735	.545	.723142	.745	.629887
.150	1.034109	.350	.846962	.550	.720462	.750	.627871
.155	1.028260	.355	.843224	.555	.717804	.755	.625869
.160	1.022490	.360	.839521	.560	.715165	.760	.623879
.165	1.016796	.365	.835853	.565	.712546	.765	.621903
.170	1.011178	.370	.832219	.570	.709948	.770	.619939
.175	1.005632	.375	.828619	.575	.707369	.775	.617988
.180	1.000157	.380	.825052	.580	.704809	.780	.616049
.185	.994752	.385	.821518	.585	.702268	.785	.614123
.190	.989414	.390	.818015	.590	.699747	.790	.612209
.195	.984143	.395	.814545	.595	.697244	.795	.610307

Продолжение табл. Л.6

z	X	z	X	z	X	z	X
.800	.608417	.855	.588394	.905	.571323	.955	.555233
.805	.606540	.860	.586640	.910	.569671	.960	.553674
.810	.604674	.865	.584897	.915	.568029	.965	.552124
.815	.602819	.870	.583164	.920	.566397	.970	.550584
.820	.600977	.875	.581442	.925	.564774	.975	.549052
.825	.599146	.880	.579730	.930	.563161	.980	.547528
.830	.597326	.885	.578029	.935	.561557	.985	.546013
.835	.595517	.890	.576337	.940	.559962	.990	.544507
.840	.593720	.895	.574656	.945	.558376	.995	.543009
.845	.591934	.900	.572985	.950	.556800	1.000	.541520
.850	.590158						

Таблица Л.7

 $X(z)$ для $c = 0.500$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.354115	.120	1.122688	.240	.977363	.360	.868895
.005	1.337992	.125	1.115570	.245	.972242	.365	.864940
.010	1.324416	.130	1.108566	.250	.967180	.370	.861023
.015	1.311844	.135	1.101672	.255	.962178	.375	.857145
.020	1.299964	.140	1.094884	.260	.957233	.380	.853304
.025	1.288619	.145	1.088200	.265	.952344	.385	.849500
.030	1.277716	.150	1.081615	.270	.947512	.390	.845732
.035	1.267190	.155	1.075127	.275	.942733	.395	.841999
.040	1.256996	.160	1.068734	.280	.938008	.400	.838302
.045	1.247099	.165	1.062431	.285	.933335	.405	.834639
.050	1.237471	.170	1.056218	.290	.928713	.410	.831011
.055	1.228090	.175	1.050091	.295	.924142	.415	.827415
.060	1.218937	.180	1.044047	.300	.919620	.420	.823853
.065	1.209996	.185	1.038086	.305	.915146	.425	.820324
.070	1.201253	.190	1.032204	.310	.910720	.430	.816826
.075	1.192697	.195	1.026400	.315	.906340	.435	.813360
.080	1.184318	.200	1.020672	.320	.902007	.440	.809925
.085	1.176105	.205	1.015017	.325	.897718	.445	.806521
.090	1.168051	.210	1.009435	.330	.893474	.450	.803146
.095	1.160149	.215	1.003923	.335	.889273	.455	.799802
.100	1.152391	.220	.998479	.340	.885115	.460	.796487
.105	1.144771	.225	.993103	.345	.880998	.465	.793201
.110	1.137284	.230	.987793	.350	.876924	.470	.789943
.115	1.129925	.235	.982547	.355	.872889	.475	.786714

Продолжение табл. L.7

z	X	z	X	z	X	z	X
.480	.783512	.615	.706316	.745	.645533	.875	.594622
.485	.780338	.620	.703759	.750	.643410	.880	.592828
.490	.777191	.625	.701222	.755	.641301	.885	.591044
.495	.774070	.630	.698703	.760	.639206	.890	.589272
.500	.770976	.635	.696204	.765	.637125	.895	.587510
.505	.767907	.640	.693722	.770	.635058	.900	.585759
.510	.764864	.645	.691259	.775	.633005	.905	.584019
.515	.761846	.650	.688814	.780	.630966	.910	.582289
.520	.758853	.655	.686387	.785	.628939	.915	.580569
.525	.755885	.660	.683978	.790	.626927	.920	.578860
.530	.752941	.665	.681586	.795	.624927	.925	.577162
.535	.750021	.670	.679211	.800	.622940	.930	.575473
.540	.747124	.675	.676853	.805	.620967	.935	.573794
.545	.744251	.680	.674512	.810	.619006	.940	.572126
.550	.741401	.685	.672188	.815	.617058	.945	.570467
.555	.738573	.690	.669880	.820	.615122	.950	.568818
.560	.735768	.695	.667589	.825	.613199	.955	.567179
.565	.732985	.700	.665314	.830	.611288	.960	.565549
.570	.730224	.705	.663054	.835	.609389	.965	.563929
.575	.727484	.710	.660811	.840	.607502	.970	.562318
.580	.724766	.715	.658583	.845	.605627	.975	.560717
.585	.722069	.720	.656370	.850	.603764	.980	.559125
.590	.719393	.725	.654173	.855	.601913	.985	.557542
.595	.716737	.730	.651991	.860	.600073	.990	.555968
.600	.714102	.735	.649824	.865	.598245	.995	.554404
.605	.711487	.740	.647671	.870	.596428	1.000	.552848
.610	.708891						

Таблица L.8

X (z) для c = 0.600

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.434618	.035	1.334095	.070	1.259690	.105	1.196729
.005	1.415575	.040	1.322517	.075	1.250111	.110	1.188429
.010	1.399763	.045	1.311305	.080	1.240745	.115	1.180280
.015	1.385219	.050	1.300423	.085	1.231579	.120	1.172276
.020	1.371544	.055	1.289843	.090	1.222603	.125	1.164412
.025	1.358538	.060	1.279540	.095	1.213808	.130	1.156683
.030	1.346082	.065	1.269495	.100	1.205186	.135	1.149083

$X(z)$ для $C=0.600$

z	X	z	X	z	X	z	X
.140	1.141608	.340	.913850	.540	.766921	.740	.662224
.145	1.134254	.345	.909437	.545	.763883	.745	.659983
.150	1.127016	.350	.905070	.550	.760870	.750	.657758
.155	1.119892	.355	.900749	.555	.757882	.755	.655549
.160	1.112878	.360	.896472	.560	.754918	.760	.653355
.165	1.105970	.365	.892239	.565	.751978	.765	.651176
.170	1.099165	.370	.888049	.570	.749063	.770	.649012
.175	1.092460	.375	.883901	.575	.746171	.775	.646863
.180	1.085853	.380	.879796	.580	.743302	.780	.644728
.185	1.079340	.385	.875731	.585	.740456	.785	.642608
.190	1.072919	.390	.871706	.590	.737632	.790	.640502
.195	1.066588	.395	.867721	.595	.734831	.795	.638410
.200	1.060344	.400	.863775	.600	.732053	.800	.636332
.205	1.054186	.405	.859867	.605	.729296	.805	.634268
.210	1.048110	.410	.855997	.610	.726560	.810	.632218
.215	1.042115	.415	.852164	.615	.723846	.815	.630181
.220	1.036198	.420	.848368	.620	.721153	.820	.628158
.225	1.030359	.425	.844608	.625	.718481	.825	.626148
.230	1.024595	.430	.840883	.630	.715829	.830	.624151
.235	1.018905	.435	.837193	.635	.713198	.835	.622168
.240	1.013286	.440	.833538	.640	.710586	.840	.620197
.245	1.007737	.445	.829916	.645	.707994	.845	.618239
.250	1.002257	.450	.826328	.650	.705422	.850	.616293
.255	.996844	.455	.822772	.655	.702870	.855	.614361
.260	.991497	.460	.819249	.660	.700336	.860	.612440
.265	.986213	.465	.815758	.665	.697821	.865	.610532
.270	.980993	.470	.812298	.670	.695325	.870	.608636
.275	.975834	.475	.808869	.675	.692847	.875	.606752
.280	.970736	.480	.805471	.680	.690388	.880	.604880
.285	.965697	.485	.802103	.685	.687947	.885	.603019
.290	.960715	.490	.798764	.690	.685523	.890	.601171
.295	.955790	.495	.795455	.695	.683117	.895	.599334
.300	.950921	.500	.792174	.700	.680728	.900	.597508
.305	.946107	.505	.788922	.705	.678357	.905	.595694
.310	.941346	.510	.785698	.710	.676003	.910	.593891
.315	.936638	.515	.782502	.715	.673665	.915	.592099
.320	.931981	.520	.779333	.720	.671344	.920	.590318
.325	.927375	.525	.776190	.725	.669040	.925	.588548
.330	.922818	.530	.773075	.730	.666752	.930	.586789
.335	.918310	.535	.769985	.735	.664480	.935	.585041

Продолжение табл. L.8

z	X	z	X	z	X	z	X
.940	.583303	.960	.576456	.975	.571428	.990	.566489
.945	.581576	.965	.574770	.980	.569772	.995	.564861
.950	.579859	.970	.573094	.985	.568125	1.000	.563244
.955	.578153						

Таблица L.9

 $X(z)$ для $c = 0.700$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.512874	.155	1.162006	.315	.964733	.475	.829227
.005	1.490770	.160	1.154383	.320	.959767	.480	.825643
.010	1.472637	.165	1.146882	.325	.954857	.485	.822092
.015	1.456057	.170	1.139498	.330	.950002	.490	.818573
.020	1.440536	.175	1.132229	.335	.945200	.495	.815086
.025	1.425829	.180	1.125071	.340	.940452	.500	.811631
.030	1.411787	.190	1.111075	.345	.935756	.505	.808206
.035	1.398311	.195	1.104231	.350	.931110	.510	.804811
.040	1.385328	.200	1.097485	.355	.926515	.515	.801447
.045	1.372783	.205	1.090837	.360	.921969	.520	.798112
.050	1.360633	.210	1.084282	.365	.917472	.525	.794806
.055	1.348842	.215	1.077818	.370	.913021	.530	.791529
.060	1.337382	.220	1.071443	.375	.908618	.535	.788281
.065	1.326227	.225	1.065155	.380	.904260	.540	.785060
.070	1.315357	.230	1.058952	.385	.899947	.545	.781867
.075	1.304754	.235	1.052831	.390	.895679	.550	.778701
.080	1.294400	.240	1.046791	.395	.891453	.555	.775562
.085	1.284282	.245	1.040830	.400	.887271	.560	.772450
.090	1.274388	.250	1.034946	.405	.883131	.565	.769363
.095	1.264705	.255	1.029137	.410	.879032	.570	.766302
.100	1.255224	.260	1.023401	.415	.874974	.575	.763267
.105	1.245935	.265	1.017738	.420	.870956	.580	.760257
.110	1.236829	.270	1.012144	.425	.866978	.585	.757272
.115	1.227899	.275	1.006620	.430	.863038	.590	.754311
.120	1.219137	.280	1.001163	.440	.855272	.595	.751374
.125	1.210537	.285	.995771	.445	.851445	.600	.748461
.130	1.202092	.290	.990444	.450	.847654	.605	.745571
.135	1.193796	.295	.985181	.455	.843899	.610	.742705
.140	1.185645	.300	.979979	.460	.840179	.615	.739862
.145	1.177632	.305	.974838	.465	.836494	.620	.737041
.150	1.169754	.310	.969756	.470	.832844	.625	.734243

Продолжение табл. I.9

z	X	z	X	z	X	z	X
.630	.731466	.725	.682573	.820	.639993	.915	.602542
.635	.728712	.730	.680186	.825	.637903	.920	.600695
.640	.725979	.735	.677817	.830	.635827	.925	.598860
.645	.723267	.740	.675464	.835	.633765	.930	.597036
.650	.720576	.745	.673129	.840	.631716	.935	.595223
.655	.717906	.750	.670810	.845	.629681	.940	.593422
.660	.715257	.755	.668507	.850	.627660	.945	.591631
.665	.712628	.760	.666221	.855	.625651	.950	.589852
.670	.710018	.765	.663951	.860	.623656	.955	.588084
.675	.707429	.770	.661697	.865	.621674	.960	.586326
.680	.704859	.775	.659458	.870	.619705	.965	.584579
.685	.702309	.780	.657235	.875	.617749	.970	.582843
.690	.699777	.785	.655028	.880	.615805	.975	.581117
.695	.697264	.790	.652836	.885	.613874	.980	.579402
.700	.694770	.795	.650658	.890	.611955	.985	.577697
.705	.692295	.800	.648496	.895	.610048	.990	.576002
.710	.689838	.805	.646349	.900	.608154	.995	.574318
.715	.687398	.810	.644216	.905	.606272	1.000	.572643
.720	.684977	.815	.642097	.910	.604401		

Таблица I.10

 $X(z)$ для $c = 0.800$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.588529	.080	1.345132	.160	1.193194	.240	1.077879
.005	1.563247	.085	1.334073	.165	1.185116	.245	1.071523
.010	1.542726	.090	1.323270	.170	1.177172	.250	1.065251
.015	1.524062	.095	1.312711	.175	1.169356	.255	1.059063
.020	1.506659	.100	1.302383	.180	1.161664	.260	1.052956
.025	1.490224	.105	1.292275	.185	1.154093	.265	1.046929
.030	1.474577	.110	1.282377	.190	1.146640	.270	1.040979
.035	1.459597	.115	1.272679	.195	1.139300	.275	1.035105
.040	1.445199	.120	1.263174	.200	1.132071	.280	1.029305
.045	1.431315	.125	1.253852	.205	1.124949	.285	1.023578
.050	1.417893	.130	1.244707	.210	1.117932	.290	1.017922
.055	1.404892	.135	1.235732	.215	1.111017	.295	1.012335
.060	1.392276	.140	1.226920	.220	1.104201	.300	1.006817
.065	1.380016	.145	1.218266	.225	1.097482	.305	1.001365
.070	1.368086	.150	1.209764	.230	1.090857	.310	.995973
.075	1.356464	.155	1.201408	.235	1.084323	.315	.990655

Продолжение табл. L.10

z	X	z	X	z	X	z	X
.320	.985395	.495	.833025	.665	.726074	.835	.644247
.325	.980196	.500	.829406	.670	.723360	.840	.642127
.330	.975058	.505	.825819	.675	.720667	.845	.640022
.335	.969979	.510	.822266	.680	.717995	.850	.637930
.340	.964957	.515	.818744	.685	.715343	.855	.635853
.345	.959992	.520	.815255	.690	.712712	.860	.633789
.350	.955083	.525	.811796	.695	.710100	.865	.631739
.355	.950229	.530	.808369	.700	.707509	.870	.629703
.360	.945428	.535	.804971	.705	.704937	.875	.627680
.365	.940680	.540	.801604	.710	.702384	.880	.625670
.370	.935984	.545	.798267	.715	.699851	.885	.623674
.375	.931338	.550	.794958	.720	.697336	.890	.621691
.380	.926742	.555	.791679	.725	.694840	.895	.619720
.385	.922195	.560	.788428	.730	.692362	.900	.617763
.390	.917697	.565	.785204	.735	.689903	.905	.615818
.395	.913245	.570	.782009	.740	.687462	.910	.613885
.400	.908841	.575	.778840	.745	.685038	.915	.611965
.405	.904481	.580	.775698	.750	.682633	.920	.610057
.410	.900167	.585	.772583	.755	.680244	.925	.608162
.415	.895897	.590	.769494	.760	.677873	.930	.606278
.420	.891670	.595	.766431	.765	.675519	.935	.604407
.425	.887486	.600	.763393	.770	.673181	.940	.602547
.430	.883344	.605	.760380	.775	.670861	.945	.600699
.435	.879243	.610	.757393	.780	.668557	.950	.598862
.440	.875183	.615	.754429	.785	.666269	.955	.597037
.445	.871163	.620	.751490	.790	.663997	.960	.595223
.450	.867182	.625	.748574	.795	.661741	.965	.593421
.455	.863240	.630	.745682	.800	.659501	.970	.591630
.460	.859335	.635	.742814	.805	.657276	.975	.589849
.465	.855469	.640	.739968	.810	.655067	.980	.588080
.470	.851639	.645	.737145	.815	.652873	.985	.586321
.475	.847846	.650	.734344	.820	.650695	.990	.584573
.480	.844088	.655	.731566	.825	.648531	.995	.582836
.485	.840366	.660	.728809	.830	.646382	1.000	.581110
.490	.836679						

Таблица L.11

 $X(z)$ для $c = 0.900$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.661556	0.010	1.610027	.020	1.569932	.030	1.534486
.005	1.632990	0.015	1.589242	.025	1.551751	.035	1.517997

z	X	z	X	z	X	z	X
.040	1.502180	.245	1.099971	.450	.885065	.655	.743982
.045	1.486957	.250	1.093330	.455	.880947	.660	.741126
.050	1.472268	.255	1.086780	.460	.876870	.665	.738292
.055	1.458062	.260	1.080319	.465	.872834	.670	.735481
.060	1.444297	.265	1.073945	.470	.868837	.675	.732693
.065	1.430940	.270	1.067655	.475	.864878	.680	.729926
.070	1.417961	.275	1.061449	.480	.860958	.685	.727181
.075	1.405334	.280	1.055323	.485	.857076	.690	.724457
.080	1.393036	.285	1.049276	.490	.853231	.695	.721754
.085	1.381048	.290	1.043307	.495	.849422	.700	.719073
.090	1.369352	.295	1.037414	.500	.845650	.705	.716412
.095	1.357931	.300	1.031594	.505	.841912	.710	.713771
.100	1.346773	.305	1.025847	.510	.838210	.715	.711151
.105	1.335863	.310	1.020171	.515	.834542	.720	.708550
.110	1.325189	.315	1.014565	.520	.830908	.725	.705969
.115	1.314742	.320	1.009026	.525	.827307	.730	.703408
.120	1.304510	.325	1.003554	.530	.823739	.735	.700865
.125	1.294485	.330	.998148	.535	.820204	.740	.698342
.130	1.284658	.335	.992805	.540	.816700	.745	.695837
.135	1.275021	.340	.987525	.545	.813228	.750	.693351
.140	1.265568	.345	.982306	.550	.809787	.755	.690884
.145	1.256290	.350	.977148	.555	.806376	.760	.688434
.150	1.247182	.355	.972049	.560	.802996	.765	.686003
.155	1.238237	.360	.967008	.565	.799646	.770	.683589
.160	1.229450	.365	.962023	.570	.796324	.775	.681192
.165	1.220816	.370	.957095	.575	.793032	.780	.678813
.170	1.212328	.375	.952221	.580	.789768	.785	.676451
.175	1.203984	.380	.947401	.585	.786532	.790	.674106
.180	1.195778	.385	.942634	.590	.783324	.795	.671778
.185	1.187705	.390	.937919	.595	.780143	.800	.669466
.190	1.179762	.395	.933255	.600	.776990	.805	.667171
.195	1.171946	.400	.928640	.605	.773863	.810	.664891
.200	1.164251	.405	.924075	.610	.770762	.815	.662628
.205	1.156675	.410	.919558	.615	.767687	.820	.660381
.210	1.149215	.415	.915089	.620	.764638	.825	.658149
.215	1.141866	.420	.910666	.625	.761614	.830	.655933
.220	1.134627	.425	.906289	.630	.758615	.835	.653732
.225	1.127494	.430	.901957	.635	.755640	.840	.651546
.230	1.120465	.435	.897669	.640	.752690	.845	.649376
.235	1.113536	.440	.893425	.645	.749764	.850	.647220
.240	1.106706	.445	.889224	.650	.746861	.855	.645079

Продолжение табл. Л.11

z	X	z	X	z	X	z	X
.860	.642952	.900	.626445	.935	.612699	.970	.599558
.865	.640840	.905	.624443	.940	.610786	.975	.597728
.870	.638742	.910	.622453	.945	.608885	.980	.595909
.875	.636658	.915	.620477	.950	.606996	.985	.594102
.880	.634588	.920	.618514	.955	.605119	.990	.592305
.885	.632532	.925	.616563	.960	.603253	.995	.590520
.890	.630490	.930	.614625	.965	.601400	1.000	.588746
.895	.628461						

Таблица Л.12

 $X(z)$ для $c = 0.950$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.697108	.140	1.283965	.280	1.067595	.420	.919574
.005	1.666867	.145	1.274383	.285	1.061395	.425	.915105
.010	1.642665	.150	1.264979	.290	1.055275	.430	.910682
.015	1.620807	.155	1.255747	.295	1.049234	.435	.906306
.020	1.600537	.160	1.246681	.300	1.043270	.440	.901974
.025	1.581478	.165	1.237775	.305	1.037381	.445	.897687
.030	1.563403	.170	1.229024	.310	1.031566	.450	.893443
.035	1.546158	.175	1.220422	.315	1.025824	.455	.889242
.040	1.529632	.180	1.211966	.320	1.020151	.460	.885083
.045	1.513742	.185	1.203649	.325	1.014548	.465	.880965
.050	1.498421	.190	1.195469	.330	1.009013	.470	.876888
.055	1.483615	.195	1.187421	.335	1.003544	.475	.872852
.060	1.469281	.200	1.179500	.340	.998140	.480	.868854
.065	1.455380	.205	1.171704	.345	.992800	.485	.864896
.070	1.441881	.210	1.164029	.350	.987523	.490	.860976
.075	1.428756	.215	1.156471	.355	.982306	.495	.857093
.080	1.415981	.220	1.149027	.360	.977150	.500	.853248
.085	1.403535	.225	1.141694	.365	.972053	.505	.849439
.090	1.391398	.230	1.134469	.370	.967013	.510	.845666
.095	1.379553	.235	1.127349	.375	.962030	.515	.841929
.100	1.367986	.240	1.120332	.380	.957103	.520	.838226
.105	1.356681	.245	1.113415	.385	.952231	.525	.834558
.110	1.345627	.250	1.106596	.390	.947412	.530	.830923
.115	1.334811	.255	1.099871	.395	.942646	.535	.827322
.120	1.324223	.260	1.093239	.400	.937932	.540	.823754
.125	1.313854	.265	1.086698	.405	.933268	.545	.820218
.130	1.303693	.270	1.080244	.410	.928655	.550	.816714
.135	1.293733	.275	1.073877	.415	.924090	.555	.813241

Продолжение табл. L.12

z	X	z	X	z	X	z	X
.560	.809800	.675	.738294	.785	.681185	.895	.632517
.565	.806389	.680	.735483	.790	.678805	.900	.630474
.570	.803008	.685	.732694	.795	.676443	.905	.628445
.575	.799657	.690	.729926	.800	.674097	.910	.626429
.580	.796335	.695	.727181	.805	.671769	.915	.624426
.585	.793043	.700	.724457	.810	.669456	.920	.622436
.590	.789778	.705	.721754	.815	.667161	.925	.620460
.595	.786542	.710	.719072	.820	.664881	.930	.618496
.600	.783334	.715	.716410	.825	.662617	.935	.616545
.605	.780152	.720	.713769	.830	.660370	.940	.614607
.610	.776998	.725	.711148	.835	.658138	.945	.612681
.615	.773871	.730	.708547	.840	.655921	.950	.610767
.620	.770769	.735	.705966	.845	.653720	.955	.608866
.625	.767694	.740	.703404	.850	.651534	.960	.606977
.630	.764644	.745	.700861	.855	.649363	.965	.605099
.635	.761620	.750	.698337	.860	.647207	.970	.603234
.640	.758620	.755	.695832	.865	.645065	.975	.601380
.645	.755645	.760	.693346	.870	.642938	.980	.599538
.650	.752694	.765	.690878	.875	.640826	.985	.597708
.655	.749768	.770	.688428	.880	.638728	.990	.595889
.660	.746865	.775	.685996	.885	.636643	.995	.594081
.665	.743985	.780	.683581	.890	.634573	1.000	.592284
.670	.741128						

Таблица L.13

 $X(z)$ для $c=0.990$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.725110	.065	1.474466	.130	1.318496	.195	1.199420
.005	1.693512	.070	1.460554	.135	1.308281	.200	1.191322
.010	1.668311	.075	1.447034	.140	1.298266	.205	1.183353
.015	1.645591	.080	1.433880	.145	1.288443	.210	1.175509
.020	1.624549	.085	1.421070	.150	1.278806	.215	1.167787
.025	1.604786	.090	1.408584	.155	1.269348	.220	1.160182
.030	1.586061	.095	1.396403	.160	1.260062	.225	1.152692
.035	1.568211	.100	1.384511	.165	1.250942	.230	1.145314
.040	1.551119	.105	1.372894	.170	1.241983	.235	1.138045
.045	1.534696	.110	1.361539	.175	1.233179	.240	1.130882
.050	1.518871	.115	1.350432	.180	2.224526	.245	1.123821
.055	1.503588	.120	1.339563	.185	1.216018	.250	1.116862
.060	1.488800	.125	1.328921	.190	1.207651	.255	1.110001

Продолжение табл. Л.13

z	X	z	X	z	X	z	X
.260	1.103235	.450	.899895	.635	.766213	.820	.668331
.265	1.096563	.455	.895630	.640	.763175	.825	.666043
.270	1.089981	.460	.891407	.645	.760162	.830	.663771
.275	1.083489	.465	.887226	.650	.757174	.835	.661515
.280	1.077084	.470	.883088	.655	.754211	.840	.659274
.285	1.070763	.475	.878990	.660	.751271	.845	.657050
.290	1.064526	.480	.874933	.665	.748356	.850	.654840
.295	1.058370	.485	.870915	.670	.745464	.855	.652646
.300	1.052293	.490	.866937	.675	.742595	.860	.650467
.305	1.046293	.495	.862997	.680	.739749	.865	.648303
.310	1.040370	.500	.859095	.685	.736926	.870	.646154
.315	1.034521	.505	.855231	.690	.734125	.875	.644019
.320	1.028744	.510	.851403	.695	.731346	.880	.641899
.325	1.023039	.515	.847612	.700	.728589	.885	.639793
.330	1.017403	.520	.843856	.705	.725854	.890	.637702
.335	1.011836	.525	.840135	.710	.723139	.895	.635624
.340	1.006335	.530	.836449	.715	.720446	.900	.633560
.345	1.000900	.535	.832797	.720	.717774	.905	.631510
.350	.995530	.540	.829179	.725	.715122	.910	.629474
.355	.990222	.545	.825593	.730	.712490	.915	.627451
.360	.984976	.550	.822041	.735	.709879	.920	.625441
.365	.979791	.555	.818520	.740	.707287	.925	.623445
.370	.974665	.560	.815031	.745	.704715	.930	.621461
.375	.969597	.565	.811574	.750	.702162	.935	.619491
.380	.964586	.570	.808147	.755	.699628	.940	.617533
.385	.959632	.575	.804750	.760	.697113	.945	.615588
.390	.954733	.580	.801384	.765	.694617	.950	.613656
.395	.949887	.585	.798047	.770	.692139	.955	.611735
.400	.945095	.590	.794739	.775	.689680	.960	.609828
.405	.940355	.595	.791459	.780	.687238	.965	.607932
.410	.935666	.600	.788208	.785	.684814	.970	.606048
.415	.931028	.605	.784985	.790	.682408	.975	.604177
.420	.926439	.610	.781790	.795	.680020	.980	.602317
.425	.921898	.615	.778621	.800	.677648	.985	.600469
.430	.917405	.620	.775480	.805	.675294	.990	.598632
.435	.912959	.625	.772365	.810	.672956	.995	.596807
.440	.908560	.630	.769276	.815	.670635	1.000	.594993
.445	.904205						

$X(z)$ для $c=1.000$

z	X	z	X	z	X	z	X
.000	1.732051	.200	1.194228	.400	.946850	.600	.789401
.005	1.700112	.205	1.186216	.405	.942092	.605	.786168
.010	1.674660	.210	1.178330	.410	.937384	.610	.782962
.015	1.651724	.215	1.170567	.415	.932728	.615	.779784
.020	1.630488	.220	1.162923	.420	.928121	.620	.776632
.025	1.610549	.225	1.155394	.425	.923562	.625	.773507
.030	1.591662	.230	1.147978	.430	.919052	.630	.770409
.035	1.573661	.235	1.140672	.435	.914589	.635	.767336
.040	1.556428	.240	1.133472	.440	.910173	.640	.764289
.045	1.539871	.245	1.126377	.445	.905802	.645	.761267
.050	1.523921	.250	1.119383	.450	.901476	.650	.758270
.055	1.508519	.255	1.112488	.455	.897194	.655	.755297
.060	1.493617	.260	1.105689	.460	.892955	.660	.752349
.065	1.479176	.265	1.098984	.465	.888760	.665	.749425
.070	1.465161	.270	1.092371	.470	.884606	.670	.746524
.075	1.451542	.275	1.085848	.475	.880493	.675	.743646
.080	1.438294	.280	1.079413	.480	.876421	.680	.740792
.085	1.425394	.285	1.073063	.485	.872389	.685	.737961
.090	1.412820	.290	1.066796	.490	.868397	.690	.735151
.095	1.400556	.295	1.060611	.495	.864443	.695	.732364
.100	1.388584	.300	1.054506	.500	.860527	.700	.729599
.105	1.376889	.305	1.048480	.505	.856649	.705	.726856
.110	1.365458	.310	1.042529	.510	.852808	.710	.724134
.115	1.354279	.315	1.036654	.515	.849003	.715	.721433
.120	1.343340	.320	1.030852	.520	.845234	.720	.718753
.125	1.332631	.325	1.025121	.525	.841500	.725	.716093
.130	1.322141	.330	1.019461	.530	.837802	.730	.713454
.135	1.311862	.335	1.013869	.535	.834137	.735	.710835
.140	1.301785	.340	1.008345	.540	.830506	.740	.708236
.145	1.291903	.345	1.002887	.545	.826909	.745	.705657
.150	1.282209	.350	.997493	.550	.823344	.750	.703097
.155	1.272694	.355	.992163	.555	.819812	.755	.700556
.160	1.263353	.360	.986895	.560	.816311	.760	.698034
.165	1.254181	.365	.981688	.565	.812842	.765	.695531
.170	1.245170	.370	.976540	.570	.809404	.770	.693046
.175	1.236316	.375	.971451	.575	.805996	.775	.690580
.180	1.227614	.380	.966420	.580	.802619	.780	.688132
.185	1.219058	.385	.961446	.585	.799271	.785	.685701
.190	1.210645	.390	.956527	.590	.795952	.790	.683289
.195	1.202370	.395	.951662	.595	.792662	.795	.680894

Продолжение табл. L.14

<i>z</i>	<i>X</i>	<i>z</i>	<i>X</i>	<i>z</i>	<i>X</i>	<i>z</i>	<i>X</i>
.800	.678516	.855	.653448	.905	.632259	.955	.612436
.805	.676155	.860	.651264	.910	.630218	.960	.610524
.810	.673811	.865	.649094	.915	.628190	.965	.608624
.815	.671484	.870	.646939	.920	.626175	.970	.606736
.820	.669174	.875	.644799	.925	.624174	.975	.604859
.825	.666880	.880	.642674	.930	.622185	.980	.602995
.830	.664602	.885	.640563	.935	.620210	.985	.601143
.835	.662340	.890	.638466	.940	.618248	.990	.599302
.840	.660093	.895	.636383	.945	.616298	.995	.597472
.845	.657863	.900	.634314	.950	.614361	1.000	.595655
.850	.655648						

Список литературы

- [1] Case K. M., de Hoffman F., Placzek G. P., Introduction to the theory of neutron diffusion, Washington, 1953.
- [2] Leonard A., Mullikan T. W., *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 399.
- [3] Вейнберг А., Вигнер Е., Физическая теория ядерных реакторов, ИЛ, М., 1961.
- [4] Watt B. E., *Phys. Rev.*, 87 (1952), 1037.
- [5] Marion J. B., Fowler J. L. (ed.), Fast neutron physics, New York, 1960.
- [6] Brookhaven National Laboratory Report BNL-325 and supplements.
- [7] Дэвисон Б., Теория переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1960.
- [8] Kušcer I., *J. Nuc. Energy*, 16 (1962), 379.
- [9] Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949.
- [10] Bickley W. G., Naylor J., *Phil. Mag.*, 20 (1935), 343.
- [11] Carter C., Rowlands G., *Reactor Science and Technology*, 15(1961), 1.
- [12] Dresner L., Resonance absorption in nuclear reactors, Oxford, 1960.
- [13] Meghreblian R. V., Holmes D. K., Reactor analysis, New York, 1960.
- [14] Hayes W. T., Luming M., Zweifel P. F., *Trans. Am. Nuc. Soc.*, 3 (1960), 366.
- [15] Francis N. C., Stewart J. C., Bohl L. S., Krieger T. J., Variational solutions of the transport equations, *Proc. Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy*, 16 (1958), 517.
- [16] Dwork J., Hofmann P. L., Hurwitz H., Jr., Clancy E. F., Self-shielding factors for infinitely long hollow cylinders, *KAPL Report* (1955), 1262.
- [17] Chernick J., Vernon R., *Nucl. Sci. Eng.*, 4 (1958), 649.
- [18] Case K. M., Elementary solutions of the transport equation, *Ann. Phys.*, 9 (1960), 1.
- [19] Schwartz L., *Théorie des distributions*, т. 1, Paris, 1950.
- [20] Davison B., Angular distribution due to an isotropic point source and spherically symmetric eigensolutions of the transport equation, Canadian Report MT-112, 1945.
- [21] Wigner E. P., Mathematical problems of nuclear reactor theory, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11 (1959), 89.
- [22] Van Kampen N. G., On the theory of stationary waves in plasmas, *Physica*, 21 (1955), 949.
- [23] Case K. M., Recent developments in neutron transport theory, University of Michigan Memorial Phoenix Project Report, 1961.

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе. — Прим. ред.

- [24] Титчмарш Е., Теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
- [25] Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд-во «Наука», М., 1968.
- [26] Kuščer I., McCormick N. J., Summerfield G. C., *Ann. Phys.*, 30 (1965).
- [27] Mika J. R., *Nucl. Sci. Eng.*, 11 (1961), 415.
- [28] Jacobs A. M., Thesis, Pennsylvania State University, 1963.
- [29] Żelazny R., Kuszell A., Mika J., *Ann. Phys.*, 16 (1961), 69.
- [30] Морс Ф. М., Фешбах Н., Методы теоретической физики, ИЛ, М., 1958; 1960.
- [31] Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
- [32] Hurwitz H., Jr., Zweifel P. F., *J. Appl. Phys.*, 26 (1955), 923.
- [33] McCormick N. J., Kuščer I., *J. Math. Phys.*, 7 (1966), 2036.
- [34] Żelazny R., Kuszell A., *Ann. Phys.*, 16 (1961), 81; Proc. Conf. on Physics of Fast and Intermediate Reactors, IAEA, Vienna, 1962.
- [35] Bednarz R. J., Mika J., *J. Math. Phys.*, 4 (1963), 1285.
- [36] Koppel J. U., *Nucl. Sci. Eng.*, 16 (1963), 101.
- [37] Ferziger J. H., Leonard A., *Ann. Phys.*, 22 (1963), 192.
- [38] Винер Н., Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, изд-во «Наука», М., 1964.
- [39] Schwarzschild K., *Göttingen Nachrichten, Math. Phys. Klasse*, 1906, 41.
- [40] Mendelson M. R., Summerfield G. C., *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 668.
- [41] Mendelson M. R., Thesis, University of Michigan, 1964.
- [42] Kuščer I., McCormick N. J., Summerfield G. C., *Ann. Phys.*, 30 (1964), 411.
- [43] Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИЛ, М., 1953. (Chandrasekhar S., Radiative transfer, New York, переработанное издание, 1960.)
- [44] Shure F., Natelson M., *Ann. Phys.*, 26 (1964), 274.
- [45] McCormick N. J., Kuščer I., *J. Math. Phys.*, 6 (1965), 1939.
- [46] Mitsis G. J., Thesis, University of Michigan, 1963 (Argonne National Laboratory Report ANL-6459); *Nucl. Sci. Eng.*, 17 (1963), 55.
- [47] Żelazny R., *J. Math. Phys.*, 2 (1961), 538.
- [48] Kuszell A., *Acta Phys. Polon.*, 20 (1961), 567.
- [49] McCormick N. J., Mendelson M. R., *Nucl. Sci. Eng.*, 20 (1964), 462.
- [50] Żelazny R., Kuszell A., *Physica*, 27 (1961), 797.
- [51] Bowden R. L., Thesis, Virginia Polytechnic Institute, Report TID 18884, 1963.
- [52] Bowden R. L., Williams C. D., *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 1527.
- [53] Kuščer I., Zweifel P. F., *J. Math. Phys.*, 6 (1965), 1125.
- [54] Wing M., An introduction to transport theory, New York, 1962.
- [55] Conkie W., *Nucl. Sci. Eng.*, 6 (1959), 260.
- [56] Yabushita S., *J. Math. Phys.*, 2 (1961), 543.
- [57] Goertzel G., Kalos M., Progress in nuclear energy, v. 1, New York, 1956.
- [58] Глестон С., Эдлунд М., Основы теории ядерных реакторов, ИЛ, М., 1954.

- *[59] Владимиров В. С., Математические задачи односкоростной теории переноса нейтронов, Труды МИАН СССР, т. 61, Изд-во АН СССР, 1961.
- [60] Pomraning G. C., *Ann. Phys.*, 27 (1964), 193.
- [61] Pomraning G. C., Clark M., Jr., *Nucl. Sci. Eng.*, 16 (1963), 147.
- [62] Weinberg A. M., Noderer L., Theory of neutron chain reactions, Oak Ridge National Laboratory Report.
- [63] Gallone S., Ghilardotti G., *Il Nuovo Cimento*, 31 (1964), 203.
- [64] Goertzel G., Tralli N., Some mathematical methods of physics, New York, 1960.
- [65] Kofink W., *Nucl. Sci. Eng.*, 6 (1959), 475.
- [66] Stewart J. C., Zweifel P. F., PICG P/631, 1959.
- [67] Schiff S., Ziering S., *Nucl. Sci. Eng.*, 3 (1958), 635; 1 (1960), 172.
- [68] Wick G. C., *Z. Phys.*, 121 (1943), 702.
- [69] Carlson B. G., Bell G. I., PICG P/2386, 1959.
- [70] Mineur H., Techniques de calcul numérique à l'usage des mathématiciens astronomes, physiciens et ingénieurs, Librairie Polytechnique, Paris, 1952.
- [71] Spencer L. V., *Phys. Rev.*, 88 (1952), 269.
- [72] Scarborough J. B., Numerical mathematical analysis, Baltimore, 1930.
- [73] Gast R., Westinghouse Report WAPD-TM-118, не опубликовано.
- * [74] Герменова Т. А., О решении уравнения переноса при сильно неізотропном рассеянии, *ДАН СССР*, 113 (1957), № 2, 297.
- * [75] Чуюнов В. А., О сходимости приближенного решения кинетического уравнения (метод квадратур Гаусса), Некоторые математические задачи нейтронной физики, МГУ, 1960.
- [76] Lathrop K. D., *Nucl. Sci. Eng.*, 21 (1965), 498.
- [77] Zweifel P. F., Garg S. B., *Nucl. Sci. Eng.*, 20 (1964), 513.
- [78] Lathrop K. D., Leonard A., *Nucl. Sci. Eng.*, 22 (1965), 115.
- [79] Амбарцумян В. А., *ДАН СССР*, 38 (1943), 229.
- [80] Case K. M., *Rev. Mod. Phys.*, 29 (1957), 65.
- [81] Uhlenbeck G. E., Ford G. W., Lectures in statistical mechanics, Amer. Math. Soc., Providence, 1963.
- [82] Case K. M., *Ann. Phys.*, 7 (1959), 34a.
- [83] Case K. M., Proc. Symp. Appl. Math., v. 18, 1965, 78.
- [84] Ландау Л. Д., *ЖЭТФ*, 10 (1946), 25.
- [85] Shure F. C., Boundary value problems in plasma oscillations, University of Michigan, Thesis, 1963.
- [86] Gerjuoy E. C., Stuart G. W., *Phys. of Fluids*, 3 (1960), 1008.
- [87] Shure F. C., General Atomic Report GAMD-967, 1959.
- [88] Amold R. E., Thesis, University of Michigan, 1963.
- [89] Milne E. A., Radiative equilibrium in the outer layers of a star, *M.N.*, 81 (1921), 361; The structure and opacity of a stellar atmosphere, Bakerian lecture, *Phil. Trans. Roy. Soc. of London (A)*, 228 (1929), 421; *Handbuch der Astrophysik*, v. 3, chap. 2, Thermodynamics of the stars, Berlin, 1930, 70—172.
- [90] Siewert C. E., Zweifel P. F., *Ann. Phys.*, 36 (1966).
- [91] Siewert C. E., Zweifel P. F., *J. Math. Phys.*, 7 (1966), 2092.
- [92] Case K. M., Zweifel P. F., *J. Math. Phys.*, 4 (1963), 1376.
- [93] Olhoeft J. E., The Doppler effect for nonuniform temperatures, University of Michigan, Thesis, 1962.
- [94] Bremermann H. J., Durand L. III, *J. Math. Phys.*, 2 (1961), 240.

- [95] Shultis J., Master's Thesis, University of Michigan, 1965.
- [96] Mendelson M. R., Solutions of the one-speed transport equation in plane geometry, University of Michigan, Thesis, 1964.
- * [97] Albertoni S., Montagnini B., On the spectrum of a neutron transport equation in finite bodies, *J. Math. Anal. and Appl.*, 13 (1966), 19.
- * [98] Герменова Т. А., Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса, *ЖВМ и МФ*, 9 (1969), 605.
- * [99] Шихов С. Б., Некоторые вопросы математической теории критического состояния реактора, *ЖВМ и МФ*, 7 (1967), 113.
- * [100] Jørgens K., An asymptotic expansion in the theory of neutron transport, *Comms. Pure and Appl. Math.*, 11 (1958), 219.
- * [101] Lehner J., Wing M., *Comms. Pure and Appl. Math.*, 8, No. 2 (1955).
- * [102] Масленников М. В., Проблема Милна с анизотропным рассеянием, Труды МИАН СССР, т. 97, 1968.
- * [103] Марчук Г. И., Методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, М., 1961.
- * [104] Марчук Г. И., Лебедев В. И., Численные методы в теории переноса нейтронов, Атомиздат, М., 1971.