



SCHWINGUNGEN

Eine Einführung in die theoretische
Behandlung von Schwingungsproblemen

Von Dr. rer. nat. K. MAGNUS
o. Professor an der Technischen Universität München

3., Durchgesehene auflage 1976
mit 197 figuren und 62 aufgaben

B. G. TEUBNER STUTTGART

К. Магнус

КОЛЕБАНИЯ

ВВЕДЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИЕ
КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Перевод с немецкого
В. И. СИДОРОВА и В. В. ФИЛАТОВА

под редакцией
В. Д. СМИРНОВА

с предисловием
А. Ю. ИШЛИНСКОГО

ББК 22.23
М 12
УДК 534.1+538.56

Магнус К.

М 12 Колебания: Введение в исследование колебательных систем. Пер. с нем.— М.: Мир, 1982.— 304 с., ил

В систематической и доступной форме описываются различные виды колебаний. Книга содержит много примеров и задач (в том числе нелинейных). Она может служить учебным пособием, методическим руководством и справочником. Автор, известный западногерманский ученый, знаком советским читателям по переводу его монографии «Гироскоп» (М.: Мир, 1974).

Для математиков-прикладников, специалистов по теории колебаний, инженеров, преподавателей, аспирантов и студентов университетов и вузов.

М $\frac{20304-037}{041(01)-82}$ 37-82, ч. 1 1703030000

ББК 22.23
531

Редакция литературы по математическим наукам

© В. Г. Teubner Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart, 1961, 1969, 1976. Mit Genehmigung des Verlages V. G. Teubner, Stuttgart, veranstaltete, allein autorisierte russische Überetzung der deutschen Originalausgabe.

© Перевод на русский язык, «Мир», 1982

Предисловие к переводу

Книга «Колебания» известного ученого, специалиста в области теоретической механики и теории регулирования Курта Магнуса замечательна во многих отношениях и далеко выходит за рамки учебного пособия, написание которого входило в первоначальное намерение автора.

В сущности это научная хрестоматия, посвященная одному из основных разделов механики и, если угодно, теории регулирования. С большим мастерством автор излагает практически все основные вопросы механических, а в ряде случаев и электрических колебаний с одной степенью свободы, линейных и нелинейных, консервативных и самовозбуждающихся, вынужденных и теряющих устойчивость вследствие параметрического резонанса. В должной мере освещаются исходные положения теории колебательных систем с двумя и несколькими степенями свободы.

Автору принадлежат не только оригинальные методические разработки многих конкретных примеров теории колебаний, но и решение ряда новых задач. Текст книги сопровождается прекрасными рисунками, графиками и хорошо подобранными упражнениями, расширяющими ее содержание. В настоящем издании список литературы дополнен некоторыми работами, изданными в СССР и доступными советским читателям.

Нет сомнения, что книга К. Магнуса «Колебания» станет настольной книгой многих ученых и инженеров и будет полезна как для преподавания, так и для решения практических вопросов современной техники.

А. Ю. Ишлинский

От автора

Советским читателям, несомненно, будут интересны основные методологические идеи, в свете которых написана эта книга. Для тех, кто изучает технические науки на средних курсах высших учебных заведений, изложение теории колебаний не должно быть ни слишком подробным, ни слишком специализированным; оно прежде всего должно быть направлено на понимание физики колебательных процессов. Методами математического описания таких процессов нужно заниматься в той мере, в какой это необходимо для достижения указанной выше цели, избегая при этом излишнего формализма.

Лекции по теории колебаний следует сопровождать демонстрацией большей части явлений, описанных в настоящей книге; студентам, особо интересующимся этой областью, надо предоставить возможность углубить свои знания при помощи соответствующего практикума. Таким образом должен быть достигнут тот уровень знаний, который, с одной стороны, создает общее представление о теории колебаний и о возможностях ее применений в технике, а с другой — обеспечивает достаточную подготовку для дальнейшего изучения теории колебаний в специальных курсах. Следует также особо подчеркнуть тесную связь между теорией колебаний и теорией регулирования, руководствуясь этим при выборе методов.

Так как книга задумана как учебное пособие, в ней сравнительно мало ссылок на литературу, а сам список литературы ограничен важнейшими учебниками на немецком и английском языках. В настоящем издании этот список значительно расширен (в основном за счет работ советских авторов).

Курт Магнус

Предисловие

В литературе на немецком языке нет недостатка в хороших и даже отличных трудах по теории колебаний. Так зачем же еще увеличивать количество изданий в этой области? В качестве ответа на этот вполне закономерный вопрос укажем, что при подготовке книги решающими оказались два тесно связанных между собой обстоятельства: отбор материала и ограниченность его объема. Нужно было включить лишь столько материала, сколько можно охватить односеместровым курсом лекций, и в то же время избежать чрезмерной односторонности и ограниченности изложения. Эти соображения с самого начала заставили отбросить всякие мысли о возможности рассмотреть *результаты* исследований колебаний в полном объеме. При этом все же преследовалась цель в возможно общей форме описать основные *методы* изучения колебаний и наиболее важные *свойства* колебательных процессов.

По своей структуре данная книга отличается от других работ, в которых ставилась аналогичная задача. Основная идея изложения — подразделение колебаний на различные типы по механизму их возникновения, т. е. по виду и месту приложения возмущения, действующего на колебательную систему. Поэтому наряду с *автономными* собственными колебаниями и автоколебаниями рассматриваются *гетерономные* колебания при параметрическом возбуждении и вынужденные колебания. В заключение исследуются связанные колебания, охватывающие обе эти области, и таким образом намечается переход к системам с несколькими степенями свободы, а также к колебаниям сплошной среды.

В книге делается попытка выделить основные идеи, без которых невозможно обойтись в теории колебаний. Особое значение придается соединению наглядных физических рассуждений с математическими выводами, зачастую носящими формальный характер. Как подсказывает опыт, одна из главных трудностей в овладении любой теорией заключается именно в том, чтобы научиться, с одной стороны, превращать физически поставленную задачу в математически сформулированную проблему, а с другой — уяснить физический смысл математических результатов. Я надеюсь, что эта книга будет способствовать четкому установлению связи между математическими методами и физической природой колебаний.

Насколько это возможно, предпочтение отдавалось точным математическим методам. Однако нельзя было отказываться и от рассмотрения разнообразных приближенных методов, которые представляют собой важный и даже необходимый для практиков, имеющих дело с колебаниями, набор приемов исследования. Так, само собой разумеется, многократно использован метод малых колебаний. Кроме того, описаны и более мощные методы, разработанные прежде всего для исследования нелинейных задач, например метод гармонического баланса. Конечно же, трудности, связанные с математическим обоснованием методов, указаны лишь в общих чертах.

Теория колебаний применяется почти во всех областях физики и техники. Поэтому я не стал ограничиваться рассмотрением только механических колебаний, хотя примеры из области механики явно преобладают. Там, где это возможно, я пытался проводить аналогии: так, особо указано тесное родство понятий и терминов, используемых в теории колебаний и теории регулирования. При рассмотрении вынужденных колебаний совершенно естественным образом вводятся понятия переходной функции, передаточной функции, частотной характеристики и годографа; к теории колебаний относится и интеграл Дюамеля.

Те примеры, которые можно рассматривать как типичные, разработаны подробно, другие — пояснены лишь частично. Несмотря на ограниченный объем книги, специалист найдет в ней ряд результатов, которые, насколько мне известно, до сих пор не были опубликованы, хотя и могли быть получены известными методами (см., например, разд. 3.3.1, 3.4.2, 4.2, 4.4 и 5.4.2). Задачи, помещенные в конце каждой главы, подчеркивают учебный характер издания. Как мне хотелось бы думать, каждый читатель, решивший эти задачи, имеет право утверждать, что он что-то понимает в основных идеях теории колебаний. Объем знаний, приобретенный таким читателем, по меньшей мере позволит ему без особого труда продолжить свою деятельность в специальных разделах теории колебаний.

Хотя содержание этой книги главным образом основывается на переработанном материале моих собственных лекций, мне все же посчастливилось найти сотрудников, взявших на себя часть трудоемкой работы по проверке формул, подготовке рукописи к печати и чтению корректур. Я хотел бы сердечно поблагодарить этих сотрудников, хотя и не смогу перечислить их всех. Все же я должен упомянуть моих ассистентов: доктора Хорста Лейпхольца, внесшего существенный вклад в проверку выкладок в примерах и задачах и сделавшего ценные замечания по тексту, и инженера Мартина Фрика, добросовестно, а не формально отнесшегося к чтению рукописи и корректур. Мастерски выполнил рисунки инженер Карл-Хайнц Дёттингер, который, кроме того, рассчитал многие кривые и таким образом способствовал тому, что удалось избежать

неточности рисунков (к сожалению, обычной), из-за которой они отражают лишь качественные стороны явлений.

Издательству «Тойбнер» я весьма признателен за проявленное им долготерпение, многие ценные указания и за чрезвычайно благоприятное отношение к сотрудничеству.

При подготовке третьего издания были исправлены лишь отдельные мелкие ошибки, так что в основном оно почти не отличается от второго издания. Пользуясь случаем, я выражаю читателям благодарность за многочисленные письма, поступившие в мой адрес, а также прошу и впредь обращать мое внимание на несогласованности или неясности формулировок, полностью избежать которых, пожалуй, никогда не удастся.

К. Магнус

1. Основные понятия и определения. Графическое изображение колебательных процессов

1.1. Колебания и характеризующие их величины

Под колебаниями понимают изменения параметров состояния системы, происходящие более или менее регулярно во времени. Колебания наблюдаются всюду в природе и во всех областях техники. Так, освещенность Земли колеблется в течение суток, поршень двигателя совершает возвратно-поступательное движение и, наконец, периодически меняется угол, образуемый с вертикалью качающимся гравитационным маятником.

Положение или состояние какой-либо колеблющейся системы определяется *обобщенной координатой*, характерной для каждой системы, например углом, давлением, температурой, электрическим напряжением, скоростью и т. д.

В теории колебаний исследуется изменение обобщенной координаты x во времени, $x=x(t)$. При этом особое внимание уделяется процессам, при которых это изменение является периодическим, т. е. имеет место соотношение

$$x(t) = x(t+T). \quad (1.1)$$

Здесь T является постоянной величиной, которая называется *периодом колебания*.

Соотношение (1.1) показывает, что x принимает одинаковое значение в моменты времени, которые отличаются друг от друга на величину периода T . Величина, обратная периоду колебания T ,

$$f = 1/T \quad (1.2)$$

называется *частотой* колебания и равняется числу колебаний в секунду. Единицей измерения частоты является Герц, обозначаемый Гц. Так, при колебаниях, например, с частотой 6 Гц происходит 6 полных колебаний в секунду.

Наряду с частотой f , определяемой равенством (1.2), при расчетах применяется еще так называемая *круговая частота* ω . Под ней понимается число колебаний за 2π секунд. Таким образом,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T. \quad (1.3)$$

Кроме периода (соответственно частоты) колебание характеризуется *амплитудой* A . Амплитуда составляет половину общего *размаха* колебания, т. е. интервала изменения обобщенной координаты.

наты x за период. Если x_{\max} — наибольшее, а x_{\min} — наименьшее значение x в течение периода, то

$$A = \frac{1}{2}(x_{\max} - x_{\min}). \quad (1.4)$$

При периодических колебаниях обобщенная координата x колеблется около *среднего* значения x_0 . Среднее значение может быть или задано, или определено как

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min}). \quad (1.5)$$

При симметричных колебаниях это значение одновременно соответствует *состоянию покоя* или *положению равновесия*.

Если функция $x(t)$ удовлетворяет условию периодичности (1.1) не строго, а лишь приближенно, то говорят о *почти периодических колебаниях* и при этом имеют в виду, что

$$|x(t) - x(t+T)| < \varepsilon, \quad (1.6)$$

где ε — заранее заданная малая величина.

1.2. Изображение колебаний в плоскости x, t

Для наглядного представления колебательного процесса пользуются его графическим изображением в координатах x, t . При этом время t откладывается по оси абсцисс, а отклонение x — по оси ординат. Как показывает приведенный на рис. 1 пример, такое изображение периодического колебания позволяет непосредственно найти интересующие нас величины, характеризующие колебание: период T , амплитуду A и среднее значение x_0 .

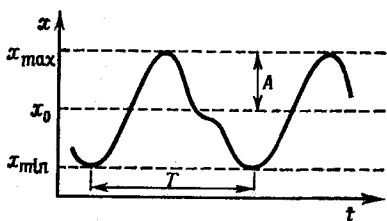


Рис. 1. Изображение периодического колебания в плоскости x, t .

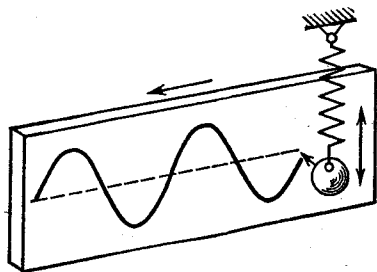


Рис. 2. Принцип механической записи колебаний.

Изображение в координатах x, t является основным при представлении процесса колебаний. Это объясняется прежде всего тем, что почти все регистрирующие колебания приборы (самописцы колебаний, осциллографы) воспроизводят указанное изображение. Такие приборы производят запись колебаний либо на движущейся с постоянной скоростью полосе бумаги или пленки, либо на вра-

щающемся барабане. На рис. 2 показан принцип записи для простейшего случая.

Изображение в координатах x, t не только позволяет легко найти величины, определяющие колебания; оно к тому же дает ценные сведения об общем характере колебаний, т. е. об их форме. На рис. 3 представлены некоторые типичные формы колебаний, а именно:

- а) треугольные колебания симметричной формы,
- б) пилообразные колебания (треугольные колебания несимметричной формы),
- в) трапецеидальные колебания,
- г) прямоугольные колебания,
- д) синусоидальные колебания.

Из названных типов колебаний наиболее важными, несомненно, являются последние — синусоидальные колебания, которые называются также *гармоническими*. Они важны не только из-за удобства их математического представления, но и прежде всего потому, что

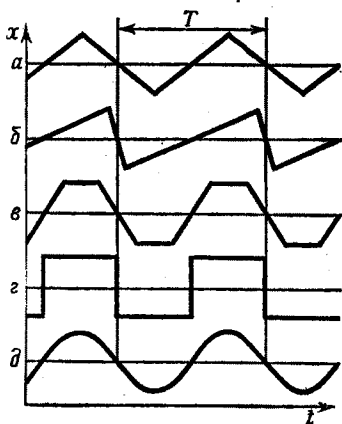


Рис. 3. Простейшие формы колебаний.

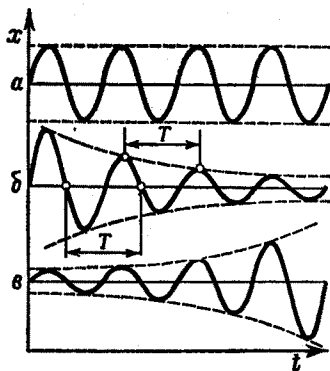


Рис. 4. Незатухающие, затухающие и нарастающие колебания.

все встречающиеся в природе и технике колебания с очень хорошим приближением описываются синусоидальным законом. Даже в тех случаях, когда колебания происходят несинусоидально, функцию синуса удобно применять как вспомогательную для приближенного описания процесса.

Для синусоидальных колебаний имеет место соотношение

$$x = x_0 + A \sin \omega t, \quad (1.7)$$

в котором круговая частота ω определяется выражением (1.3).

До сих пор рассматриваемые колебания удовлетворяли условию периодичности (1.1), так что и отрезки кривой $x(t)$, и значения

x_{\max} и x_{\min} были одинаковы для каждого периода колебания. Если соединить все точки, в которых x принимает значение x_{\max} , а затем все точки, в которых x принимает значение x_{\min} , то получатся две горизонтальные прямые, параллельные оси t и представляющие собой огибающие кривой $x(t)$ (рис. 4, а). Такие колебания являются *незатухающими* (недемпфированными). Если расстояние между двумя огибающими с увеличением t убывает, как это показано на рис. 4, б, то говорят о *затухающих* (демпфированных) колебаниях. Если обе огибающие с течением времени t расходятся, то колебания называют *нарастающими* (рис. 4, в).

Хотя для нарастающих или затухающих колебаний соотношение (1.1) не имеет места, период колебания T можно определить и в этих случаях. Для этого находят интервал времени между двумя последовательными касаниями кривой $x(t)$ с одной из огибающих. За период колебания можно также принять интервал между двумя последовательными моментами времени, в которые кривая $x(t)$ проходит в одинаковом направлении через среднее положение.

Среднее положение в этих случаях определяется просто как средняя линия между обеими огибающими. В качестве амплитуды, зависящей теперь от времени, может приниматься расстояние от средней линии до точки касания кривой $x(t)$ с огибающей.

1.3. Векторное изображение колебаний и их представление в комплексной плоскости

Для изображения синусоидальных колебаний можно использовать весьма наглядное векторное изображение. При его построении используется взаимосвязь между синусоидальными колебаниями и равномерным вращением.

Эта связь устанавливается непосредственно из изображенной на рис. 5 схемы кривошипного механизма. Если кривошип вращается равномерно, то каждая точка вертикального стержня совершает синусоидальное движение, для которого выполняется равенство $x = A \sin \omega t$. Связь между равномерно вращающимся век-

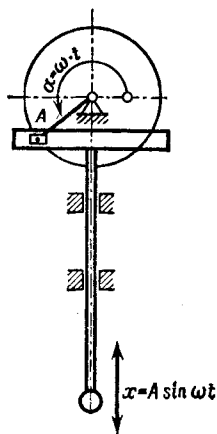


Рис. 5. Кривошипный механизм и синусоидальные колебания.

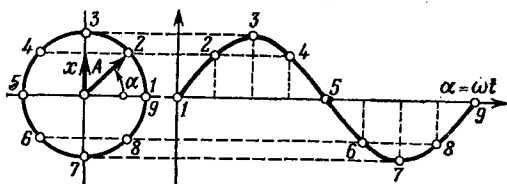


Рис. 6. Построение синусоидальных колебаний при равномерном вращении.

тором A , величина которого задана длиной плеча кривошипа, и временным изображением колебаний стержня определяется из геометрического построения, показанного на рис. 6. Конечная точка вектора A движется по окружности и при этом занимает последовательно положения с 1 по 9. Если спроектировать эти положения на плоскость с координатами x и t , причем по оси абсцисс, как и прежде, откладывается время, а по оси ординат — угол α , соответствующий каждому моменту времени, то получится синусоида. Слева на рис. 6 приведено векторное изображение простого синусоидального колебания.

Для расчета гармонических колебаний обычно целесообразно рассматривать плоскость векторного изображения как комплексную z -плоскость с $z = x + iy$. Вращающийся вектор A представляется в этом случае соотношением

$$z = Ae^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (1.8)$$

Если начало отсчета времени выбирается произвольно, то любое гармоническое колебание представляется либо синусоидой, либо косинусоидой. Если же по каким-либо причинам начало отсчета времени задано, то величина отклонения запишется в форме

$$x = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (1.9)$$

При векторном изображении колебания величина φ представляет собой так называемый *фазовый угол*. Этот угол позволяет определить отклонение в нулевой момент времени.

Гармоническое колебание с произвольным фазовым углом можно представить в виде синусоидальной и косинусоидальной составляющих, а именно в виде

$$\begin{aligned} x &= A \cos \varphi \cos \omega t + A \sin \varphi \sin \omega t, \\ x &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t, \end{aligned} \quad (1.10)$$

как следует из (1.9). Поскольку $A_1 = A \cos \varphi$, $A_2 = A \sin \varphi$, мы имеем

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = A_2/A_1. \quad (1.11)$$

Эту взаимосвязь можно непосредственно найти и из векторного изображения, представленного на рис. 7.

Комплексное изображение также оказывается пригодным при наличии сдвига фазы между колебаниями, так как выражение (1.9) можно записать в комплексной форме:

$$z = Ae^{i(\omega t - \varphi)} = Ae^{-i\varphi} e^{i\omega t}. \quad (1.12)$$

Если произведение $Ae^{-i\varphi}$ рассматривать как комплексную амплитуду, то снова получится приведенное выше выражение (1.8). Таким образом, сдвиг фазы можно изобразить и при помощи ком-

плексного представления: в комплексной плоскости он изображается постоянным углом поворота φ вектора A , как показано на рис. 7.

Соотношение (1.9) можно интерпретировать как результат сложения двух сдвинутых по фазе на 90° колебаний, что следует из соотношений (1.10). Сложение двух гармонических колебаний, которые имеют одинаковые частоты $\omega_1 = \omega_2$, производится аналитически и в самом общем случае. Используя комплексное представление, находим

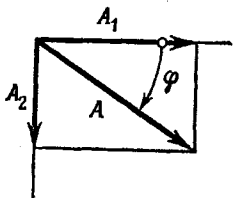


Рис. 7. Разложение вектора колебания с фазовым углом φ .

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1 e^{i(\omega_1 t - \varphi_1)} = A_1 e^{-i\varphi_1} e^{i\omega t}, \\ z_2 &= A_2 e^{i(\omega_2 t - \varphi_2)} = A_2 e^{-i\varphi_2} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Оба колебания имеют одинаковую частоту, но различные амплитуды A и различные фазовые углы φ . После сложения получим

$$\begin{aligned} z &= z_1 + z_2 = e^{i\omega t} (A_1 e^{-i\varphi_1} + A_2 e^{-i\varphi_2}), \\ z &= A e^{-i\varphi} e^{i\omega t}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, сложение колебаний сводится к сложению двух комплексных величин — операции непосредственного сложения на комплексной плоскости двух векторов (рис. 8). При этом можно вычислить две новые величины — амплитуду и фазовый угол:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Итак, результат сложения двух колебаний одинаковой частоты является колебанием той же частоты, но с соответственно измененными величинами амплитуды и фазы.

Если при помощи векторного изображения требуется определить временную зависимость, заданную уравнением (1.13), то надо представить себе, что векторный треугольник, построенный на рис. 8, вращается как твердое тело с постоянной угловой скоростью ω вокруг начала координат. При этом к постоянным фазовым углам φ , φ_1 и φ_2 , которые векторы образуют с действительной осью, добавляются одинаковые величины линейно возрастающего по времени угла ωt . Проекция конечной точки вектора A на действительную ось определяет отклонение $x = x(t)$.

Несколько труднее сложения двух колебаний одинаковой частоты оказывается сложение (или вычитание) двух колебаний различной частоты. Так как в этом случае комплексное решение не дает никаких преимуществ, колебания следует представить в действительной форме:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t \quad (1.15)$$

(здесь ради простоты принято $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$). Уже этот частный случай позволяет определить важнейшие свойства колебаний, отказавшись от нетрудного, но весьма трудоемкого исследования общего случая. Прежде всего рассмотрим этот колебательный процесс при помощи векторного изображения (рис. 9), где каждое из слагаемых (1.15) представляется вектором, вращающимся в комплексной плоскости.

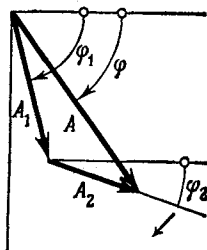


Рис. 8. Сложение векторов двух колебаний одинаковой частоты.

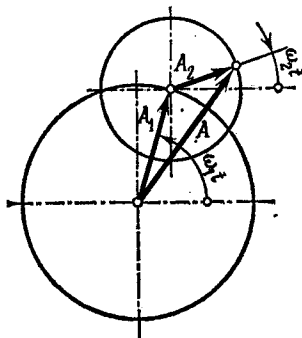


Рис. 9. Сложение векторов двух колебаний различной частоты.

Сложение производится таким образом, чтобы точка начала второго вектора совмещалась с конечной точкой первого. Суммарный вектор A проводится от точки начала первого вектора к конечной точке второго. Однако из-за того, что оба составляющих вектора вращаются с различными скоростями, форма векторного треугольника со временем меняется. Таким образом, векторный треугольник вращается вокруг начала координат не подобие твердого тела, как в случае, изображенном на рис. 8, а деформируется в процессе вращения. Из-за этого векторный рисунок несколько теряет в наглядности, хотя, конечно, он позволяет без особого труда построить на комплексной плоскости траекторию конечной точки вектора A .

Несколько больше сведений о колебаниях дают в этом случае следующие преобразования: из (1.15) получаем

$$x = \frac{A_1 + A_2}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + \frac{A_1 - A_2}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t),$$

откуда, применяя тригонометрические соотношения, находим

$$x = \left[(A_1 + A_2) \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \cos \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \left[(A_1 - A_2) \sin \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right] \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t, \quad (1.16)$$

или короче

$$x = A^* \cos(\omega_m t + \varphi^*), \quad (1.17)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A^* &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos 2\omega_d t}, \\ \operatorname{tg} \varphi^* &= \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2} \operatorname{tg} \omega_d t, \\ \omega_m &= 1/2 (\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_d = 1/2 (\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Хотя это представление значительно сложнее исходного уравнения (1.15), для некоторых особенно интересных в техническом отношении случаев оно допускает весьма наглядное толкование. Если частоты обоих составляющих колебаний мало отличаются друг от друга, т. е. если имеет место неравенство $\omega_d \ll \omega_m$, то решение (1.17) можно рассматривать как гармоническое колебание с средней частотой ω_m , амплитуда A^* и фазовый угол φ^* которого медленно меняются во времени с частотами $2\omega_d$ и ω_d соответственно.

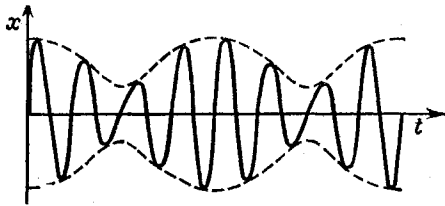


Рис. 10. Форма колебаний при сложении двух колебаний с близкими частотами.

Временная зависимость такого рода колебаний имеет вид, представленный на рис. 10, т. е. основное колебание с частотой ω_m охватывается огибающей, которая также является периодической кривой. Здесь же видно, что расстояние огибающей от среднего положения меняется в следующих пределах:

$$|A_1 - A_2| \leq A^* \leq A_1 + A_2.$$

При этом величины амплитуд A следует брать всегда положительными. Колебания, происходящие с частотой $2\omega_d$, называются *биениями*. Эти же колебания, показанные на рис. 10, можно рассматривать как *амплитудно-модулированные колебания с несущей частотой ω_m* , которая, в силу того что $\varphi^* = \varphi^*(t)$, колеблется около своего среднего значения. Основные колебания модулируются по амплитуде с частотой модуляции $2\omega_d$. Модулированные колебания такого рода составляют основу радиотехники.

1.4. Фазовые траектории и фазовый портрет

С векторным изображением тесно связано представление колебаний в так называемой фазовой плоскости. Однако изображение в фазовой плоскости более наглядно и особенно хорошо представляет негармонические колебания. Фазовый портрет колебания получается следующим образом: скорость движения $x = dx/dt = v$ откладывается по оси ординат, а отклонение x — по оси абсцисс фазовой плоскости. Каждому движению в момент времени t соответствует изображающая точка на указанной плоскости с координатами x, v , однозначно определяемая мгновенными значениями отклонения x и скорости $\dot{x} = v$. Изображающая точка с течением времени перемещается, описывая фазовую траекторию (рис. 11). В этом представлении время играет роль параметра: уравнение фазовой траектории задано зависимостью между координатой и скоростью $v = v(x)$.

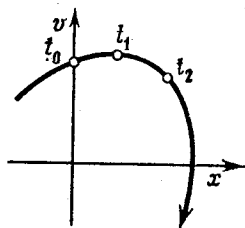


Рис. 11. Фазовая траектория, т. е. траектория движения в плоскости x, v .

Недостатком фазового портрета является невозможность непосредственного представления процесса во времени, но этот недостаток компенсируется большим преимуществом: здесь из чисто геометрического представления фазовой траектории или семейства фазовых траекторий можно сделать важные заключения о свойствах колебаний ¹⁾.

Рассмотрим прежде всего простой пример: определим фазовую траекторию гармонического колебания, для которого

$$x = A \cos(\omega t - \varphi), \quad v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t - \varphi).$$

Возведение в квадрат и последующее сложение позволяют исключить время, так что зависимость между x и v принимает вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{(A\omega)^2} = 1. \quad (1.19)$$

На фазовой плоскости такое уравнение описывает эллипс с полуосями A и $A\omega$ (рис. 12). В случае $\omega = 1$ этот эллипс превращается в окружность. Однако окружность можно получить и для любой частоты ω , изменив масштаб по оси ординат и откладывая по ней не v , а v/ω .

¹⁾ Это прежде всего относится к колебаниям, которые описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Для таких колебаний может оказаться, что единственно возможным методом их исследования является метод фазовой плоскости.— *Прим. ред.*

Для изображенного на рис. 3, а колебания треугольной формы скорость v кусочно постоянна: ее направление скачкообразно меняется на противоположное в каждой поворотной точке движения. Как легко видеть, в этом случае фазовая траектория представляет собой прямоугольник (рис. 13). Такая же фазовая траектория, но при другой зависимости от времени t , получается для трапецеи-

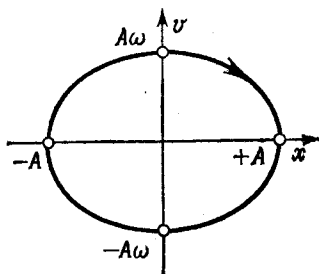


Рис. 12. Фазовая траектория гармонического колебания.

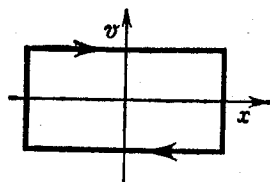


Рис. 13. Фазовая траектория треугольного колебания.

дального колебания (рис. 3, в). Фазовая траектория пилообразного колебания тоже будет прямоугольником, только нижняя сторона прямоугольника сдвинута в сторону большего отрицательного значения v . Наконец, в случае фазовой траектории прямоугольного колебания оба горизонтальных участка траектории скользят в бесконечность соответственно вверх и вниз, так что остаются только две прямые, параллельные оси ординат и пересекающие ось абсцисс в точках $+A$ и $-A$.

Процесс изменения во времени, который не представляется в явном виде уравнением фазовой траектории, можно определить интегрированием. Если уравнение траектории задано в виде $\dot{x} = v = v(x)$, то, разделяя переменные, получаем

$$dt = \frac{dx}{v(x)}$$

и, интегрируя, находим

$$t = t + \int_0^x \frac{dx}{v(x)}. \quad (1.20)$$

Таким образом, для гармонического колебания с фазовой траекторией (1.19) в силу зависимости

$$v = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

получается период

$$T = 2 \int_{-A}^{+A} \frac{dx}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}} = \frac{2}{\omega} \arcsin \frac{x}{A} \Big|_{-A}^{+A} = \frac{2}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства фазовых траекторий. Непосредственно видно, что каждая фазовая траектория в верхней полуплоскости может проходить только слева направо, а в нижней полуплоскости — только справа налево. В верхней полуплоскости всегда $v > 0$, и, следовательно, величина x может только возрасть; в нижней полуплоскости, наоборот, $v < 0$, и величина x может только убывать. Таким образом, направление движения изображающей точки по фазовой траектории определяется однозначно; на рис. 11—13 оно показано стрелками.

В точках пересечения с осью абсцисс все фазовые траектории имеют вертикальные касательные. Это следует из того, что точка пересечения с осью абсцисс характеризуется значением скорости, равным нулю. Однако когда скорость $v = 0$, величина x имеет стационарное значение и, следовательно, касательная к фазовой траектории в точке пересечения с осью абсцисс должна быть вертикальной. Одновременно точки пересечения с осью абсцисс определяют экстремальные значения x , т. е. амплитуду колебания. Отсюда следует, что ни в одной точке верхней или нижней полуплоскости фазовая траектория не может иметь вертикальную касательную, ибо в каждой точке, где касательная вертикальна, будь то экстремальное значение или точка перегиба, скорость должна быть равной нулю. Возможны исключения, когда определенные вырожденные фазовые траектории пересекают абсциссу не вертикально, но тогда точка пересечения всегда является так называемой особой точкой. Подробнее об этом будет сказано ниже.

Отдельная фазовая траектория представляет некоторое вполне определенное движение. Если требуется общее представление о всех возможных движениях колебательной системы (осциллятора), то изображается семейство фазовых траекторий. Такое семейство траекторий называется *фазовым портретом* осциллятора. Подобно тому как портрет человека позволяет составить известное представление о нем, фазовый портрет показывает специалисту важные свойства осциллятора.

В качестве простого примера рассмотрим массу, подвешенную на пружине. После толчка масса совершает колебательное движение с некоторой амплитудой A , а соответствующая фазовая траектория является эллипсом или хотя бы подобна эллипсу. При других начальных условиях колебания происходят с другой амплитудой, но носят тот же характер, так что фазовый портрет осциллятора, состоящего из массы и пружины, представляется семейством concentрических эллипсов (рис. 14). В фазовый портрет целесооб-

разно включить и положение равновесия осциллятора, т. е. точку $x=v=0$. Из геометрических соображений следует, что это единственная особая точка фазовой плоскости.

Положение равновесия осциллятора всегда представляется особой точкой фазовой плоскости. Легко видеть, что такая точка может лежать только на оси x , так как в противном случае состояние покоя невозможно.

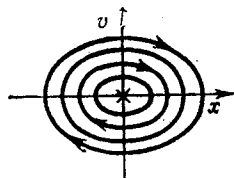


Рис. 14. Фазовый портрет гармонического осциллятора.

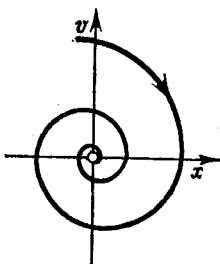


Рис. 15. Фазовая траектория демпфированного колебания.

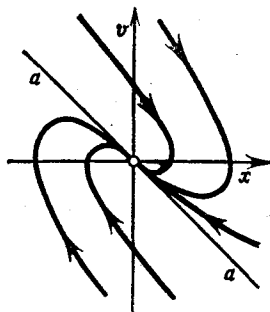


Рис. 16. Фазовый портрет осциллятора с сильным демпфированием.

По виду фазовых траекторий, окружающих особые точки, различают следующие типы этих точек: *центр*, *фокус*, *узел* и *седло*. Эти понятия, заимствованные из теории дифференциальных уравнений ¹⁾, оказались очень полезными для описания поведения колебательной системы.

На рис. 14 показана особая точка типа центра. Она характерна для незатухающих колебаний около положения равновесия. При наличии демпфирования каждый эллипс переходит в спираль (рис. 15), а особая точка в начале координат становится фокусом.

Если демпфирование слабое, то спираль состоит из большого числа близко расположенных витков. Чем сильнее демпфирование, тем дальше витки отстоят друг от друга. При очень сильном демпфировании фазовый портрет меняется и качественно, принимая вид, показанный на рис. 16. Здесь начало координат является узлом. В особой точке все фазовые траектории касаются проходящей через нее наклонной прямой $a-a$ и вдоль этой прямой стягиваются в особую точку.

Особая точка достигается лишь по истечении бесконечно большого времени. Это легко установить, исследуя процесс движения

¹⁾ См., например, Collatz L. Differentialgleichungen. — 3. Aufl. — Stuttgart: 1967. [См. также Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — Перераб. изд. — Лейпциг: Гойбнер, 1979; М.: Наука. 1980, с. 540—544. — *Ред.*]

во времени при помощи интеграла (1.20). В непосредственной окрестности особой точки любую фазовую траекторию можно приближенно представить прямой $v = -cx$. Подстановка этого уравнения в (1.20) дает

$$t = t_0 - \int_{x_0}^x \frac{dx}{cx} = t_0 - \frac{1}{c} (\ln x - \ln x_0),$$

или

$$x = x_0 e^{-c(t-t_0)}. \quad (1.21)$$

Таким образом, особая точка может быть достигнута лишь асимптотически и касательные к фазовым траекториям, пересекающим ось абсцисс в особой точке, не вертикальны.

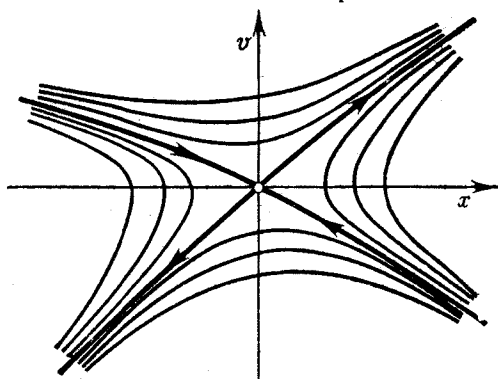


Рис. 17. Фазовый портрет с особой точкой типа седла.

На рис. 17 представлен фазовый портрет системы с особой точкой типа седла. Он характеризуется тем, что через особую точку проходят две вырожденные фазовые траектории (*сепаратрисы*), а остальные траектории похожи на гиперболы. Ниже мы увидим, что особая точка такого типа соответствует неустойчивому положению равновесия осциллятора.

Приведенные здесь фазовые портреты являются «стандартными блоками», из которых строятся рассматриваемые в дальнейшем фазовые портреты реальных осцилляторов. Следует также заметить, что можно применять модифицированные фазовые плоскости. Так, чтобы получить фазовые траектории более простого вида, иногда целесообразно откладывать по оси ординат вместо скорости v ее подходящую функцию, а по оси абсцисс — подходящую функцию от x соответственно. Успешно применяются и фазовые плоскости, где оси координат не прямоугольные, а косоугольные¹⁾.

¹⁾ См. Флюгге-Лотц И. Метод фазовой плоскости в теории линейных систем: Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1959.— *Прим. ред.*

1.5. Переходная функция, частотные характеристики и годограф колебательной системы

Существуют также иные способы определения свойств колебательной системы. Можно вывести систему из равновесия посредством какого-либо внешнего возмущения и исследовать реакцию системы на это возмущение. Так, например, наблюдая процесс затухания

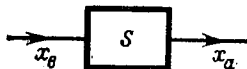


Рис. 18. Блок-схема осциллятора при наличии возмущения.

колебаний после удара, определяют высоту тона камертона. В общем случае свойства колебательной системы определяются по ее реакции на возмущения заданного типа. Пусть x_e — возмущение (*входная функция*), а x_a — реакция на это возмущение (*выходная функция*); тогда независимо от устройства самого осциллятора связь между этими функциями можно наглядно представить блок-схемой, изображенной на рис. 18

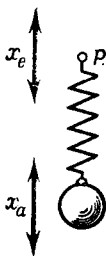


Рис. 19. Масса, подвешенная на пружине с движущейся точкой подвеса.

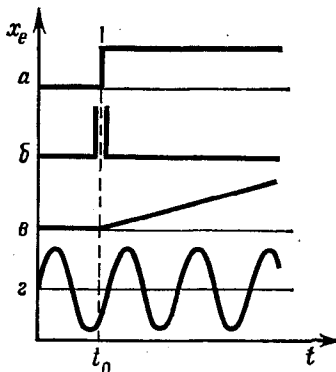


Рис. 20. Формы испытательных функций для исследования осцилляторов.

В качестве конкретного примера представим себе подвешенную на пружине массу (рис. 19). Здесь возмущение может быть вызвано быстрым перемещением точки подвеса P по вертикали. Смещение этой точки является входной функцией x_e . Реакцией на это возмущение будут колебания массы, так что выходной функцией может служить координата x_a массы.

Практически наиболее удобными входными функциями являются *испытательные функции*, представленные на рис. 20. На рис. 20, a

показана единичная ступенчатая функция

$$x_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0, \\ 1 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Умножив эту функцию на соответствующее число, можно получить ступенчатую функцию с любой высотой ступеньки.

Изображенная на рис. 20, б импульсная функция (функция Дирака) отлична от нуля только в узкой области около момента времени $t=t_0$. В пределе ширина этой области $2\varepsilon \rightarrow 0$. При этом имеем

$$x_e = 0 \text{ при } t < t_0 - \varepsilon \text{ и } t > t_0 + \varepsilon$$

$$\int_{t_0 - \varepsilon}^{t_0 + \varepsilon} x_e dt = 1.$$

Для кусочно линейной возрастающей функции (рис. 20, в)

$$x_e = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_0, \\ c(t - t_0) & \text{при } t \geq t_0. \end{cases}$$

Константу c при этом также можно выбрать равной единице. Наконец, на рис. 20, г показана синусоидальная испытательная функция $x_e = \sin \omega t$.

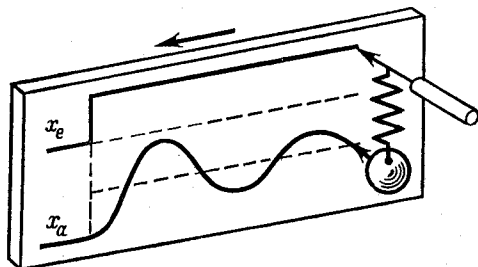


Рис. 21. К построению переходной функции.

Иногда применяются также еще и другие испытательные функции, например прямоугольная или треугольная, однако основную роль играют функции, изображенные на рис. 20, а и 20, г, т. е. ступенчатая и синусоидальная функции. Введенные для этих функций понятия стали ценным вспомогательным средством в теории колебаний.

Реакция осциллятора на единичное ступенчатое воздействие называется *переходной функцией*. Понять, как получается такая функция, помогает рис. 21, который не нуждается в дополнительных пояснениях. Здесь действие возмущения сказывается в скачкооб-

разном изменении положения равновесия колебательной системы. Процесс перехода из старого положения равновесия в новое описывается переходной функцией, которая в дальнейшем обозначается через $x_a(t)$.

Если входная функция представляется синусоидальной с частотой ω , то по завершении некоторого переходного процесса выходная функция тоже будет периодической функцией с той же самой частотой ω . Во многих случаях она будет иметь вид синусоиды или хотя бы настолько приближаться к ней, что синусоиду можно рассматривать в качестве хорошего приближения.

Применяя комплексный способ описания, в этом случае можно положить

$$x_e = e^{i\omega t}, \quad x_a = V e^{i(\omega t - \psi)} = V e^{-i\psi} e^{i\omega t}.$$

При этом коэффициент усиления V указывает, во сколько раз амплитуда выходного колебания больше (или меньше) амплитуды входного колебания. Угол ψ определяет сдвиг по фазе между входной и выходной величинами. Теперь введем отношение выходной величины к входной:

$$F = \frac{x_a}{x_e} = V e^{-i\psi}. \quad (1.23)$$

Эта комплексная величина называется комплексным коэффициентом усиления колебательной системы или передаточной функцией. В общем случае она не является постоянной и зависит от частоты ω входного возмущения x_e . Пусть A — амплитуда возмущения; тогда F , а также V и ψ зависят еще и от A , т. е.

$$F = F(A, \omega), \quad V = V(A, \omega), \quad \psi = \psi(A, \omega).$$

Однако для важного класса колебательных систем — линейных систем — амплитуда A возмущения не оказывает никакого влияния на выходные величины и последние зависят только от частоты ω . При этом график $V(\omega)$ называют амплитудной частотной характеристикой, график $\psi(\omega)$ — фазовой частотной характеристикой, а годограф $F(\omega)$ — амплитудно-фазовой (комплексной) характеристикой или годографом колебательной системы. В общем случае частотная характеристика определяет изменение какой-либо величины в зависимости от частоты. Пример амплитудной и фазовой характеристик показан на рис. 22.

Комплексный коэффициент усиления F можно также непосредственно представить некоторой кривой, приняв V и ψ за полярные координаты на комплексной плоскости. Здесь каждому значению ω соответствует пара значений V, ψ , т. е. точка комплексной плоскости. С изменением ω эта точка с координатами V и ψ перемещается и описывает амплитудно-фазовую характеристику (рис. 23). Эта характеристика начинается при $\omega = 0$ на действительной оси и за-

канчивается при $\omega \rightarrow \infty$ в начале координат. Последнее является очевидным, так как колебательная система (в силу своей инерционности) не может следовать входному возмущению бесконечно большой частоты и ее реакция на выходе в этом случае равна нулю.

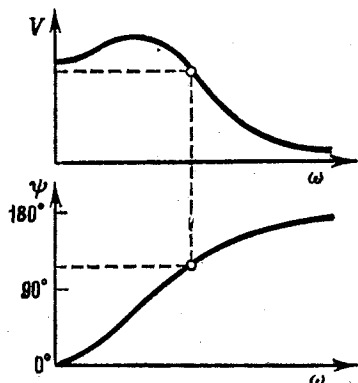


Рис. 22. Амплитудная и фазовая частотные характеристики.

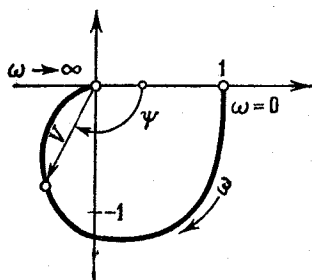


Рис. 23. Годограф (амплитудно-фазовая частотная характеристика) осциллятора.

Амплитудно-фазовая характеристика, точно так же, как фазовый портрет и переходная функция, является «визитной карточкой» колебательной системы, позволяющей определить важные свойства этой системы.

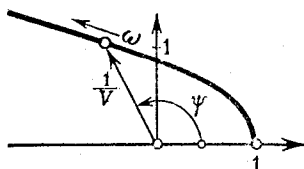


Рис. 24. Годограф обратной передаточной функции для осциллятора, представленного на рис. 23.

Для некоторых целей в комплексной плоскости удобнее строить не амплитудно-фазовую характеристику, определяемую соотношением (1.23), а *годограф обратной передаточной функции*

$$\bar{F} = \frac{1}{F} = \frac{1}{V} e^{+\psi} \quad (1.24)$$

Амплитудно-фазовой характеристике, построенной на рис. 23, соответствует годограф обратной передаточной функции, построенный на рис. 24 (*обратная амплитудно-фазовая характеристика*). Годограф обратной передаточной функции также всегда начинается на действительной оси, но при $\omega \rightarrow \infty$ уходит в бесконечность.

1.6. Типы колебаний и их признаки

В основу любого изложения теории колебаний должно быть положено представление о физической природе и методах математического описания колебаний. При этом нужно рассмотреть различные типы колебаний и привести основные сведения о методах их исследования.

В общем случае основным отличительным признаком колебательной системы является число степеней свободы. В соответствии с основными физическими законами это число всегда равно числу координат, необходимых для однозначного описания движения системы.

Так, абсолютно твердое тело, которое может колебаться вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, поскольку для определения положения тела достаточно одной координаты — угла его отклонения. Масса, подвешенная на нити, имеет уже не менее двух степеней свободы и т. д.

Важнейшие методы теории колебаний можно показать уже на примерах осцилляторов, имеющих одну степень свободы. Поэтому большая часть данной книги посвящается исследованию именно таких осцилляторов.

Другим отличительным признаком колебательной системы является вид дифференциальных уравнений ее движения. Здесь прежде всего надо различать линейные и нелинейные колебания, описываемые дифференциальными уравнениями соответствующего вида. Реальные колебательные системы в конечном счете всегда нелинейны, однако (в определенных пределах) их часто можно приближенно описать линейными дифференциальными уравнениями. Применение приближенных методов описания колебаний позволяет получить важные практические выводы. Заметим, что этот отличительный признак неразрывно связан с механизмом возникновения колебаний, о чем речь пойдет ниже.

Еще одним отличительным признаком колебательной системы является форма колебаний, рассмотренная в разд. 1.2. Помимо указанного там деления колебаний по их форме (синусоидальные, треугольные, прямоугольные и т. д.) весьма важную роль играет изменение амплитуды с течением времени. Здесь следует различать нарастающие колебания, колебания постоянной амплитуды и затухающие колебания.

В основу структуры этой книги положено деление колебаний по механизму их возникновения, т. е. по характеру возмущения, действующего на колебательную систему. Это целесообразно не только с физической точки зрения, но и по чисто методическим соображениям, поскольку к полученным таким образом различным группам колебаний применяются различные методы исследования. Мы различаем

собственные (свободные) колебания,
автоколебания (самовозбуждающиеся колебания),
параметрические колебания (колебания с параметрическим воз-
буждением),
вынужденные колебания,
связанные колебания.

Собственные, или свободные, колебания — это движения такой колебательной системы, которая после кратковременного возмущения не подвергается какому-либо внешнему воздействию, т. е. к которой во время движения не подводится энергия извне. Примером может служить движение гравитационного маятника после кратковременного толчка. Собственные колебания всегда описываются однородными дифференциальными уравнениями.

В отличие от собственных колебаний при *автоколебаниях* имеет место приток энергии в систему. При этом имеется источник энергии, не обладающий колебательными свойствами, от которого система за период получает ровно столько энергии, сколько затрачивается (механизм такой передачи энергии будет описан ниже). Наиболее известным примером соответствующей колебательной системы служат часы, в которых роль источника энергии играет поднятый груз или закрученная пружина. Автоколебания описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, причем нелинейность является существенной.

При собственных колебаниях и автоколебаниях частота колебаний определяется самим осциллятором. Поэтому их называют *автономными* в отличие от параметрических и вынужденных колебаний, называемых *гетерономными*, поскольку частота последних задается внешними воздействиями. В системах с *параметрическим возбуждением* внешнее воздействие сказывается в периодических изменениях одного или нескольких параметров. Примером служит маятник на нити, длина которой периодически меняется. Математический отличительный признак колебаний с параметрическим возбуждением состоит в том, что в описывающих их дифференциальных уравнениях коэффициенты явно зависят от времени (как правило, периодически).

При *вынужденных колебаниях* колебательная система также подвергается внешним воздействиям, которые и определяют период колебаний. Однако здесь возмущение связано не с изменением параметров, а с тем, что в уравнениях движения появляются новые члены. Поэтому дифференциальные уравнения вынужденных колебаний становятся неоднородными, причем член в правой части является функцией времени. Примером вынужденных колебаний являются колебания фундамента двигателя при наличии неуравновешенных масс.

Связанные колебания возникают в тех случаях, когда либо две колебательные системы (или несколько таких систем) оказывают

друг на друга взаимное влияние, либо система имеет несколько степеней свободы. При этом отличительным признаком является взаимное влияние колебаний. Если бы это влияние было односторонним, например, если колебания первого осциллятора влияли бы на колебания второго, а колебания второго осциллятора не влияли бы на колебания первого, то имели бы место колебания уже рассмотренных выше типов: первый осциллятор совершал бы собственные колебания, которые вызывали бы вынужденные колебания второго осциллятора.

Кроме названных здесь типов колебаний возможны, конечно, колебания смешанных типов. Так, могут одновременно происходить вынужденные колебания и автоколебания, на которые к тому же накладываются собственные колебания. Могут также иметь место параметрические колебания, происходящие одновременно с автоколебаниями. В последующем изложении не ставится задача описания всех возможных случаев или хотя бы простого их перечисления. Вместо этого здесь дается представление о различных свойствах колебательных систем и методов их исследования для наиболее типичных случаев.

2. Собственные колебания

Собственными колебаниями являются движения, совершаемые колебательной системой, которая после кратковременного внешнего возмущения предоставлена самой себе. При этом происходят периодические переходы одного вида энергии в другой, т. е. потенциальная энергия (энергия, определяемая положением системы) переходит в кинетическую энергию (энергию движения) и наоборот. Если сумма этих энергий в процессе колебаний сохраняется, то колебания будут недемпфированными (незатухающими) и система в этом случае называется *консервативной*. Если энергия системы уменьшается (например, из-за наличия трения), то происходят демпфированные (затухающие) колебания и система называется *неконсервативной*. В этой главе рассматриваются сначала недемпфированные, а затем демпфированные колебания. В пределах такого разделения отдельно рассматриваются линейные и нелинейные колебательные системы.

2.1. Недемпфированные собственные колебания

2.1.1. Колебательные системы и дифференциальные уравнения их движения

Уравнения движения систем являются дифференциальными уравнениями, так как кроме координаты x в них входят и ее производные по времени. Ниже мы выведем эти дифференциальные уравнения для некоторых типичных колебательных систем.

2.1:1.1. Масса, колеблющаяся на пружине. Прежде всего рассмотрим систему, состоящую из массы и пружины. Такая система показана на рис. 25, причем масса движется в направлении оси x . Уравнение движения этого простого осциллятора получается из условия равновесия сил, приложенных к массе m . Обе пружины предварительно напряжены, и каждая из них воздействует на массу соответственно с силой

$$K_{f1} = K_0 + \frac{c}{2} x, \quad K_{f2} = K_0 - \frac{c}{2} x.$$

Здесь K_0 — сила предварительного натяжения, действующая на массу в положении равновесия. При отклонении от положения равновесия на величину x возникают дополнительные силы, кото-

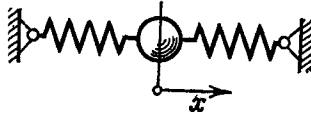


Рис. 25. Масса, колеблющаяся в направлении оси пружин.

рые для обычных пружин пропорциональны величине отклонения с коэффициентом пропорциональности, равным $c/2$.

Силы K_{f1} и K_{f2} направлены противоположно, так что на массу действует их разность

$$K_f = K_{f2} - K_{f1} = -cx. \quad (2.1)$$

Эту силу нужно подставить либо в основной закон Ньютона

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = \sum K,$$

либо в уравнение равновесия

$$\sum K = 0, \quad (2.2)$$

в которое, разумеется, следует включить даламберову силу инерции

$$K_f = -\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = -m\ddot{x}. \quad (2.3)$$

Здесь дифференцирование по времени, как обычно, обозначается точкой над буквой. Подставляя в (2.2) выражения (2.1) и (2.3), получаем

$$m\ddot{x} + cx = 0. \quad (2.4)$$

Если для краткости ввести

$$\omega^2 = c/m, \quad (2.5)$$

то уравнение (2.4) примет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.6)$$

Рассматриваемой системе можно также сообщить импульс в вертикальном направлении, так что масса будет колебаться перпендикулярно прежнему направлению (рис. 26). В этом случае получается другое уравнение движения, так как сила действия пружины выражается иначе:

$$K_f = K_0 + (c/2)[\sqrt{L^2 + x^2} - L].$$

Эта сила имеет для обеих пружин одинаковую величину, а ее направление соответствует направлениям продольных осей пружин. Теперь движение определяется только составляющими этих сил в новом направлении x :

$$K_{fx} = K_{f1x} + K_{f2x} = 2K_f \sin \alpha = 2K_f \frac{x}{\sqrt{L^2 + x^2}},$$

$$K_{fx} = \frac{2K_0 x}{\sqrt{L^2 + x^2}} + cx \left[1 - \frac{L}{\sqrt{L^2 + x^2}} \right] = f(x). \quad (2.7)$$

Из условия (2.2) с учетом силы инерции получаем уравнение движения

$$m\ddot{x} + f(x) = 0. \quad (2.8)$$

В отличие от (2.4) это уравнение нелинейно. Если интересоваться только малыми отклонениями массы, то при $x \ll L$ выраже-

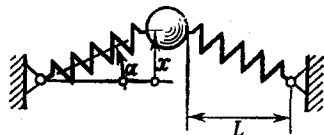


Рис. 26. Масса, колеблющаяся в направлении, перпендикулярном оси пружин. Уравнение (2.7) можно упростить:

$$f(x) \approx 2K_0 \frac{x}{L} + \left(\frac{cL}{2} - K_0 \right) \left(\frac{x}{L} \right)^3. \quad (2.9)$$

При большом предварительном натяжении пружин K_0 и малых отклонениях x в этом выражении можно пренебречь вторым членом. Тогда уравнение движения (2.8) становится линейным и принимает ранее рассмотренную форму (2.6). Однако при отсутствии предварительного натяжения даже в случае малых отклонений нельзя пользоваться приближенным линейным выражением. Восстанавливающая сила в окрестности положения равновесия будет при этом пропорциональной третьей степени отклонения x .

Наконец, рассмотрим еще одну систему, состоящую из массы и пружины (рис. 27). Здесь помимо восстанавливающей силы пружины $K_f = -cx$ и силы инерции (2.3) следует принять во внимание и силу тяжести $K_g = mg$, где g — ускорение свободного падения. Условие равновесия (2.2) теперь принимает вид

$$m\ddot{x} + cx - mg = 0. \quad (2.10)$$

Последний член этого уравнения не зависит от x . Его можно исключить преобразованием координат

$$x = \xi + x_0, \quad \ddot{x} = \ddot{\xi},$$

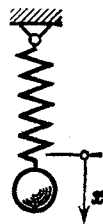


Рис. 27. Масса, подвешенная на пружине и совершающая вертикальные колебания.

где

$$x_0 = mg/c. \quad (2.11)$$

Снова используя обозначение (2.5), уравнение (2.10) можно привести к виду

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = 0. \quad (2.12)$$

2.1.1.2. Электрический колебательный контур. Идеальный электрический колебательный контур состоит из конденсатора и катушки, как показано на рис. 28. Здесь энергия может накапливаться в виде электростатической энергии в конденсаторе или в виде электромагнитной энергии в катушке. Дифференциальные уравнения такого осциллятора можно получить из условия равенства напряжений. Если U_c — приложенное к конденсатору напряжение, C — емкость, а Q — заряд конденсатора, то

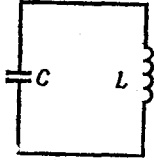


Рис. 28. Электрический колебательный контур, состоящий из катушки и конденсатора.

$$Q = CU_c, \text{ или } U_c = Q/C.$$

Напряжение на катушке, по которой протекает ток I , определяется по закону индукции и составляет

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (2.13)$$

При этом L — не изменяющаяся во времени индуктивность катушки. Сумма всех напряжений равна нулю и, таким образом,

$$U_L + U_c = L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = 0. \quad (2.14)$$

Принимая во внимание, что

$$Q = \int I dt, \text{ или } I = \frac{dQ}{dt},$$

и одновременно вводя обозначение

$$\omega^2 = 1/(LC), \quad (2.15)$$

получаем уравнение (2.14) в виде

$$\ddot{Q} + \omega^2 Q = 0. \quad (2.16)$$

Если катушка содержит стальной сердечник, то индуктивность L в законе (2.13) уже нельзя считать постоянной величиной, так как в этом случае она является функцией силы тока. Эта функция определяется по кривой намагничивания материала сердечника. Уравнение (2.14), описывающее процесс колебаний, теперь следует написать в виде

$$L(I) \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0, \quad (2.17)$$

а это уравнение нелинейно.

2.1.1.3. Жидкость в U-образной трубке и резонатор Гельмгольца. Находящийся в U-образной трубке столб жидкости (рис. 29) после некоторого начального возмущения приходит в колебательное движение. Если площадь F поперечного сечения U-образной трубки постоянна, то собственные колебания этой системы описываются линейным дифференциальным уравнением, которое можно составить для нестационарного движения жидкости ¹⁾. Однако в рас-

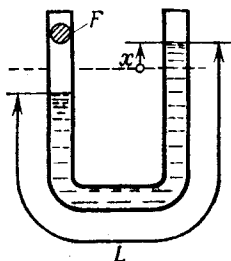


Рис. 29. Колебания жидкости в U-образной трубке.

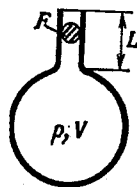


Рис. 30. Резонатор Гельмгольца.

сматриваемом здесь частном случае мы получим качественно правильный результат при помощи следующего простого рассуждения: так как все частицы жидкости совершают одинаковое перемещение, то столб жидкости можно рассматривать как единую колеблющуюся массу, равную $m = \rho FL$, где ρ — плотность, а L — длина столба жидкости. Силы, которые действуют при повороте столба жидкости в закруглении трубы, учитывать не надо, поскольку они всегда перпендикулярны направлению движения. Трение жидкости о стенки трубки не учитывается. Таким образом, в уравнение движения входят только силы тяжести, причем от них остается лишь разность $K_g = -2x\rho g$, которая соответствует разности уровней правой и левой частей столба жидкости. При этом уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{x} = \rho FL\ddot{x} = K_g = -2\rho Fgx,$$

или при

$$\omega^2 = 2g/L$$

вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.18)$$

В резонаторе Гельмгольца (дис. 30) можно считать, что масса воздуха, находящаяся в горловине резонатора, образует пробку,

¹⁾ См., например, Prandtl L. *Strömungslehre*.— Braunschweig: 1942, Kap. 2, § 5. [Имеется перевод изд. 1944 г.: Прандтль Л. *Гидроаэромеханика*.— 2-е изд.— М.: ИЛ, 1951.]

которая находится над упругой воздушной подушкой, заключенной внутри сферической полости. Собственные колебания можно описать таким же способом, как и в случае системы, состоящей из массы и пружины.

Если горловина резонатора имеет длину L и площадь поперечного сечения F , то масса находящейся в ней воздушной пробки составляет $m = \rho FL$; следовательно, сила инерции равна

$$K_1 = -\rho FL\ddot{x}. \quad (2.19)$$

Восстанавливающая сила возникает благодаря разности между давлением воздуха внутри сферической полости и давлением наружного воздуха. Если эта разность равна Δp , то восстанавливающая сила составляет

$$K_d = F\Delta p. \quad (2.20)$$

Теперь следует выразить Δp через координату x воздушной пробки, используя уравнение состояния газа. При перемещении пробки на величину x объем массы газа, заключенной в резонаторе, меняется на величину $\Delta V = Fx$. Если процесс изменения состояния газа считать адиабатическим, то при показателе адиабаты κ имеет место соотношение

$$pV^\kappa = (p_0 + \Delta p)(V_0 + \Delta V)^\kappa = p_0 V_0^\kappa = \text{const},$$

или

$$\Delta p V_0^\kappa + p_0 \kappa V_0^{\kappa-1} \Delta V + \dots = 0.$$

Если Δp и ΔV рассматривать как малые величины, то последующими членами разложения можно пренебречь. Тогда в качестве соотношения между Δp и ΔV получаем

$$\Delta p = -\frac{p_0 \kappa}{V_0} \Delta V = -\frac{p_0 \kappa F}{V_0} x.$$

Подставляя это выражение в (2.20) и учитывая требование равновесия сил, находим

$$K_1 + K_d = -F \left(\rho L \ddot{x} + \frac{p_0 \kappa F}{V_0} x \right) = 0;$$

вводя обозначение

$$\omega^2 = \frac{p_0 \kappa F}{\rho L V_0},$$

получаем

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.21)$$

2.1.1.4. Крутильные осцилляторы. Два простых типа крутильного осциллятора изображены на рис. 31. Рассмотрим маятник или «баланс» карманных часов, совершающий крутильные колебания

вокруг оси, вращающейся в опорах корпуса часового механизма, а также колебания диска, насаженного на вал, второй конец которого жестко закреплен. При повороте на угол φ в обоих случаях возникают восстанавливающие моменты, в области упругой деформации пропорциональные углу поворота φ , т. е.

$$M_d = -c\varphi.$$

Этот восстанавливающий момент уравнивает момент сил инерции, действующих на баланс или на диск,

$$M_i = -\frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}) = -J\ddot{\varphi}. \quad (2.22)$$

Здесь J — момент инерции баланса или диска относительно оси вращения. Поскольку во время колебаний его можно считать по-

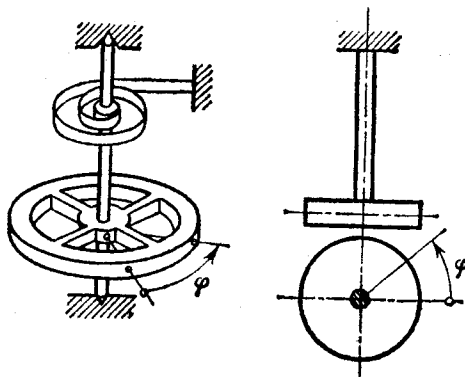


Рис. 31. Крутильные осцилляторы.

стоянным, момент M_i можно записать в простом виде (2.22). Требование равновесия крутящих моментов относительно оси вращения приводит, таким образом, к уравнению

$$M_i + M_d = -J\ddot{\varphi} - c\varphi = 0,$$

или при

$$\omega^2 = c/J$$

к уравнению

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \quad (2.23)$$

Уравнение точно такого же вида описывает движение системы, состоящей из двух дисков, которые закреплены на концах упругого вала (рис. 32). Если оба диска повернуты относительно положения равновесия на равные углы φ_1 и φ_2 , то соединяющий их вал не закручивается и на диски не действуют восстанавливающие моменты. Только в том случае, когда величины углов φ_1 и φ_2 различны,

возникает восстанавливающий момент

$$M_d = -c(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2.24)$$

Момент такого знака действует на второй диск, а на первый диск действует момент обратного знака, поскольку моменты на концах вала будут взаимно уничтожаться.

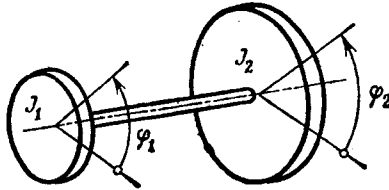


Рис. 32. Крутильный осциллятор, состоящий из вала и двух дисков.

Восстанавливающие моменты должны уравниваться моментами даламберовых сил инерции $-J_1\ddot{\varphi}_1$ для первого диска и $-J_2\ddot{\varphi}_2$ для второго диска, что дает

$$\begin{aligned} -J_1\ddot{\varphi}_1 + c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0, \\ -J_2\ddot{\varphi}_2 - c(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Если нас интересует только смещение одного диска относительно другого, на которое, конечно, может накладываться совместное вращение дисков, то, вычитая из первого уравнения (2.25) второе и полагая $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$, можно получить уравнение

$$\ddot{\psi} + c\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)\psi = 0, \quad (2.26)$$

или при

$$\omega^2 = c\left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)$$

уравнение

$$\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом, рассмотрение всех трех осцилляторов, совершающих крутильные колебания, приводит к одному уравнению движения, ранее полученному для других случаев.

2.1.1.5. Гравитационный маятник. Уравнение движения материальной точки, подвешенной на нити (рис. 33) и движущейся в плоскости (плоского математического маятника), легко вывести уже описанным выше способом. При отклонении маятника на угол φ от вертикали возникает восстанавливающая составляющая силы тяжести, равная

$$K_g = -mg \sin \varphi. \quad (2.28)$$

Дуга, описываемая материальной точкой, имеет длину $L\varphi$, ускорение точки равно $L\ddot{\varphi}$, а сила инерции составляет

$$K_t = -mL\ddot{\varphi}.$$

Полагая

$$\omega^2 = g/L, \quad (2.29)$$

получаем уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (2.30)$$

Это нелинейное уравнение можно упростить, если ограничиться малыми углами отклонения маятника $\varphi \ll 1$. Тогда в известном разложении синуса можно оставить только первый член:

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \approx \varphi.$$

При этом уравнение (2.30) становится линейным:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0,$$

как и получалось во всех рассмотренных до сих пор случаях. Примененный здесь прием является простым примером линеаризации методом малых колебаний; этот метод будет подробно описан в дальнейшем.

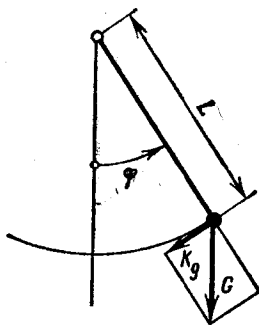


Рис. 33. Математический маятник, совершающий плоское движение.

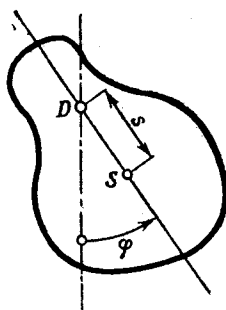


Рис. 34. Физический маятник.

Уравнение, полностью эквивалентное уравнению (2.30), получается и тогда, когда вместо математического маятника рассматривается маятник в виде твердого тела — физический маятник (рис. 34). Здесь целесообразно подсчитывать не силы, а моменты относительно оси вращения такого маятника. Так, в качестве восстанавливающего момента силы тяжести получаем

$$M_g = -mgs \sin \varphi,$$

где s — расстояние от центра тяжести S до оси вращения D . Момент, создаваемый силами инерции, равен $M_t = -J_D \ddot{\varphi}$, где J_D — момент инерции физического маятника относительно оси вращения. Полагая

$$\omega^2 = mgs/J_D, \quad (2.31)$$

снова получаем уравнение движения в виде (2.30).

Наконец, к гравитационным маятникам можно отнести и такие осцилляторы, в которых масса движется под действием силы тя-

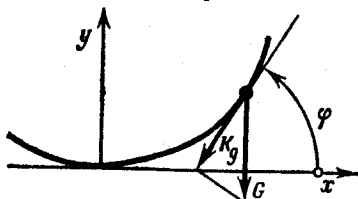


Рис. 35. Движение массы по произвольной плоской траектории в поле силы тяжести.

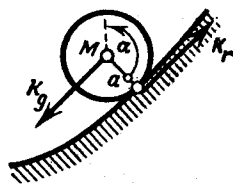


Рис. 36. Осциллятор качения на заданной поверхности.

жести вдоль заданной кривой или шар (либо цилиндр) катится по изогнутой поверхности. Колебательным движением является также перекатывание одной криволинейной поверхности по другой, происходящее под действием силы тяжести; в качестве примера такого осциллятора можно привести кресло-качалку.

В случае математического маятника материальная точка перемещается по круговой траектории. Пусть теперь траектория точки произвольна (рис. 35); тогда в уравнении траектории $y=y(x)$ функцию $y(x)$ можно считать заданной. Обозначив через φ угол, образуемый касательной к траектории с горизонтальной осью, получим — при отклонениях точки от положения равновесия $\varphi=0$ — восстанавливающую силу

$$K_g = -mg \sin \varphi.$$

Так как $\operatorname{tg} \varphi = dy/dx = y'$, выражение K_g можно преобразовать:

$$K_g = -\frac{mgy'}{\sqrt{1+y'^2}}. \quad (2.32)$$

Сила инерции по-прежнему равна $K_t = -m\ddot{s}$. Для длины дуги s и ее производных по времени имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} s &= \int \sqrt{1+y'^2} dx, \\ \dot{s} &= \frac{ds}{dx} \dot{x} = \sqrt{1+y'^2} \dot{x}, \\ \ddot{s} &= \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (\sqrt{1+y'^2} \dot{x}). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Из условия равновесия сил с учетом (2.32) и (2.33) теперь следует уравнение движения

$$\frac{d}{dt} (\sqrt{1+y'^2} \dot{x}) + g \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0. \quad (2.34)$$

Если за траекторию $y=y(x)$ принять, например, окружность радиуса L , то при помощи параметрического представления

$$x = L \sin \varphi, \quad y = L (1 - \cos \varphi)$$

мы снова вернемся к уже непосредственно выведенному уравнению (2.30) для математического маятника.

Если колеблющаяся масса не скользит, а катится по заданной поверхности (рис. 36), то в предыдущих рассуждениях мало что изменится. Следует только иметь в виду, что качение может происходить только тогда, когда существуют силы трения, предотвращающие скольжение. Эти силы трения K_r включаются в баланс сил осциллятора, так что теперь требование равновесия сил в направлении движения выглядит так:

$$-m\ddot{s} + K_g - K_r = 0. \quad (2.35)$$

Относительно центра M , силы трения создают момент $K_r a$, где a — радиус качения. Этот момент должен уравновешивать момент сил инерции:

$$-J\ddot{\alpha} + K_r a = 0.$$

Здесь J — момент инерции катящегося тела относительно оси, проходящей через точку M . Если определить неизвестную силу трения K_r , подставить полученное значение в (2.35) и учесть чисто кинематические условия качения

$$s = a\alpha, \quad \ddot{s} = a\ddot{\alpha},$$

то получится уравнение движения

$$-\left(m + \frac{J}{a^2}\right)\ddot{s} + K_g = 0. \quad (2.36)$$

Отсюда видно, что явление качения ничего не меняет в форме уравнения: меняется лишь масса, увеличиваясь на J/a^2 . Учитывая, что момент инерции можно выразить через радиус инерции,

$$J = m\rho^2,$$

массу, входящую в уравнение качения, можно записать в виде

$$m^* = m \left[1 + \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \right]. \quad (2.37)$$

Для однородного шара $m^* = 7/8 m$, для однородного цилиндра $m^* = 3/2 m$.

Следует, однако, подчеркнуть, что увеличенная масса m^* должна учитываться только при определении момента сил инерции, а не при расчете восстанавливающей силы, обусловленной действием силы тяжести. В качестве примера можно записать уравнение движения однородного шара, который катается внутри сферической оболочки радиуса L , причем точка касания шара и оболочки описывает плоскую траекторию, проходящую через наиниžшую точку оболочки. Поскольку $s = L\varphi$ и $\dot{s} = L\dot{\varphi}$, имеем

$$m^* L \ddot{\varphi} + mg \sin \varphi = 0; \quad (2.38)$$

полагая

$$\omega^2 = \frac{g}{7/8 L},$$

получаем известное уравнение движения математического маятника

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

2.1.1.6. Осциллятор с непрерывно распределенными накопителями энергии. До сих пор в рассмотренных осцилляторах накопители потенциальной и кинетической энергии всегда определялись одно-



Рис. 37. Осциллятор в виде винтовой пружины постоянного сечения.

значно и четко разграничивались. В этом, однако, заключается идеализация проблемы, так как, например, у осцилляторов, состоящих из массы и пружины, мы пренебрегали, с одной стороны, массой пружины, а с другой — возможными упругими деформациями массы. Во многих случаях это вполне допустимо, но легко представить себе ситуации, когда такого рода допущения уже не могут приводить к положительным результатам. Если, например, в осцилляторе, изображенном на рис. 25, заключенная между пружинами масса выбирается все меньшей и в пределе совсем исчезает, то получается система, которая способна колебаться (рис. 37), но в которой оба накопителя энергии непрерывно распределены по всей длине пружины. Каждый участок пружины имеет определенную массу и поэтому может накапливать кинетическую энергию; кроме того, он обладает способностью накапливать потенциальную энергию за счет упругих деформаций. Составим уравнение движения и для этого случая.

Пусть x — координата элемента пружины в состоянии покоя (рис. 37), и пусть $\xi = \xi(x)$ — смещение элемента пружины в направлении x во время движения. Рассмотрим элемент dx пружины и составим для него уравнение движения и соответственно условие равновесия сил. Если μ — масса единицы длины пружины, то сила инерции будет равна

$$\Delta K_i = -\mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu dx \ddot{\xi}. \quad (2.39)$$

В общем случае во время движения элемент пружины испытывает и растяжение, которое можно определить как отношение удлинения элемента к его первоначальной длине,

$$\varepsilon = \frac{\xi(x+dx) - \xi(x)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

и возникает упругая сила, пропорциональная растяжению:

$$K_f = k \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

На элемент dx пружины теперь действует разность соответствующих упругих сил, приложенных на концах этого элемента, т. е.

$$\Delta K_f = K_f(x+dx) - K_f(x) = \frac{\partial K_f}{\partial x} dx = k \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = k \xi'' dx. \quad (2.40)$$

Условие равновесия сил имеет вид

$$\Delta K_i + \Delta K_f = -dx (\mu \ddot{\xi} - k \xi'') = 0,$$

или при

$$c^2 = k/\mu \quad (2.41)$$

вид

$$\ddot{\xi} = c^2 \xi''. \quad (2.42)$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка — одномерное *волновое уравнение*.

Точно таким же образом, как это было сделано для продольных колебаний пружины, можно вывести уравнение продольных колебаний упругого стержня. Ход рассуждений будет полностью аналогичен, но в этом случае целесообразно ввести модуль упругости E и плотность ρ материала стержня. Таким образом приходят к уравнению движения (2.42), где константа имеет значение

$$c^2 = E/\rho. \quad (2.43)$$

Подобно тому как осциллятор, состоящий из массы и пружины, путем предельного перехода превращается в осциллятор с непрерывно распределенными накопителями энергии, резонатор Гельм-

гольца (рис. 30), заменив сферическую полость длинной трубкой, можно превратить в осциллятор, в котором накопители кинетической и потенциальной энергии непрерывно распределяются по всей длине трубки. Таким же образом получаются осцилляторы типа органной трубы или флейты. В целях экономии места мы не будем выводить уравнения движения для этого случая, а только укажем, что здесь снова получается уравнение (2.42) с постоянной

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho}, \quad (2.44)$$

где p — давление, а ρ — плотность газа. Величина c в этом случае имеет вполне определенный физический смысл: она представляет собой скорость звука в газе.

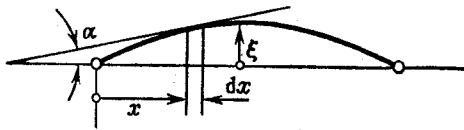


Рис. 38. Колеблющаяся струна.

До сих пор мы рассматривали только продольные колебания, но легко показать, что аналогичные результаты получаются и для поперечных колебаний. В изображенной на рис. 37 винтовой пружине могут быть возбуждены колебания в направлении, перпендикулярном направлению x . Тогда пружина колеблется как натянутая струна, и в основу следующего ниже вывода может быть положен рис. 38. Отклонения струны, перпендикулярные теперь направлению x , обозначены через ξ . Составим уравнение равновесия элемента струны длиной dx . Если μ — масса единицы длины, то сила инерции равна

$$\Delta K_t = -\mu dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\mu dx \ddot{\xi}.$$

Если сила натяжения струны равна S , то при отклонениях составляющая этой силы в направлении ξ имеет величину

$$K_f = S \sin \alpha \approx S \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

причем такое приближение тем лучше, чем меньше угол наклона α . Действующие на концы элемента струны вертикальные составляющие силы K взаимно почти уничтожаются, так что остается лишь разность

$$\Delta K_f = K_f(x + dx) - K_f(x) = \frac{\partial K_f}{\partial x} dx = S \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx.$$

Если

$$c^2 = S/\mu, \quad (2.45)$$

то условие равновесия вертикальных сил, действующих на элемент струны, снова приводит к тому же самому уравнению движения, какое было выведено для продольных колебаний:

$$\ddot{\xi} = c^2 \xi'' \quad (2.46)$$

Не останавливаясь на общем решении этого волнового уравнения, рассмотрим здесь лишь процесс колебаний во времени. Отклонение ξ является функцией как времени t , так и координаты x . Можно найти некоторые частные решения уравнения (2.46), представив искомую функцию ξ в виде произведения двух функций: функции, зависящей только от времени, и функции, зависящей только от координаты:

$$\xi = F(t) G(x) \quad (2.47)$$

Подставляя (2.47) в (2.46) и разделяя переменные, приходим к уравнению

$$\frac{\ddot{F}}{F} = c^2 \frac{G''}{G} \quad (2.48)$$

Левая часть данного уравнения зависит только от времени t , а правая — только от координаты x . Это возможно лишь тогда, когда обе части уравнения равны одной и той же постоянной, не зависящей ни от времени, ни от координаты. Эту постоянную выбирают равной $-\omega^2$, так как легко убедиться в том, что с физической точки зрения имеют смысл только ее отрицательные значения. Если рассмотреть указанные колебания в положении $x = x_0$, то в общем случае можно предположить, что $G(x) > 0$. Поэтому при отклонении в положительном направлении ξ будет $F(t) > 0$, но тогда возникает восстанавливающая сила, и, значит, $\ddot{F} < 0$.

Теперь уравнение (2.48) можно разделить на два отдельных уравнения:

$$\ddot{F} + \omega^2 F = 0, \quad (2.49)$$

$$G'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 G = 0. \quad (2.50)$$

Отсюда видно, что в рассматриваемых в этом разделе осцилляторах с уравнением движения (2.46) возможны формы движения, при которых для каждого положения x имеет место дифференциальное уравнение вида (2.49), точно соответствующее уравнению движения большого числа простых осцилляторов. Следует также заметить, что постоянная ω не может быть выбрана произвольным образом, так как *граничные условия*, например условия на концах струны, выполняются только для совершенно определенных дискретных значений (*собственных значений*) $\omega = \omega_n$.

2.1.2. Поведение линейных осцилляторов

В предыдущем разделе было показано, что уравнения движения многих осцилляторов являются линейными и сводятся, если пренебречь силами сопротивления, к дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2.51)$$

Свойства решения этого уравнения будут рассмотрены ниже.

Следует подчеркнуть, что термин «линейное» здесь всегда относится к линейности дифференциальных уравнений, а не к возможной прямолинейности движения колеблющейся массы.

2.1.2.1. Решение дифференциального уравнения (2.51). Уравнение (2.51) имеет два частных решения:

$$x_1 = \cos \omega t, \quad x_2 = \sin \omega t.$$

Эти решения образуют фундаментальную систему, так что общее решение можно записать в виде их линейной комбинации

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2.52)$$

с постоянными A и B . Объединяя оба частных решения, можно привести решение также к форме

$$x = C \cos(\omega t - \varphi), \quad (2.53)$$

где

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = B/A.$$

Постоянные интегрирования A и B (соответственно C и φ) могут быть найдены из начальных условий. Если в начале движения ($t=0$)

$$x(0) = x_0 \quad \text{и} \quad \dot{x}(0) = v_0,$$

то при подстановке в уравнения (2.52) и (2.53) найдем

$$\begin{aligned} A &= x_0, & B &= v_0/\omega, \\ C &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, & \operatorname{tg} \varphi &= \frac{v_0}{\omega x_0}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Таким образом, движение линейного осциллятора происходит по закону синуса (или косинуса), причем амплитуда C и фаза φ однозначно определяются начальными условиями для отклонения и скорости. Единственный входящий в уравнение (2.51) параметр ω оказывается теперь круговой частотой колебаний. Зависимость этой собственной частоты от физических параметров некоторых осцилляторов была найдена в разд. 2.1.1, так что теперь можно составить таблицу выражений периодов колебаний для рассмотренных случаев (см. табл. 1).

Таблица 1

Осциллятор	Рисунок	Период колебаний
Масса, колеблющаяся на пружинах в продольном направлении	25, 27	$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}$
То же в поперечном направлении	26	$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL}{2K_0}}$
Электрический колебательный контур	28	$T = 2\pi \sqrt{LC}$
Жидкость в U-образной трубке	29	$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2g}}$
Резонатор Гельмгольца	30	$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho LV_0}{\rho_0 \kappa F}}$
Часовой баланс	31	$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{c}}$
Крутильный осциллятор	32	$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_1 J_2}{c(J_1 + J_2)}}$
Математический маятник в случае $\varphi \ll 1$	33	$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$
Физический маятник в случае $\varphi \ll 1$	34	$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_D}{mgs}}$

Построение общего решения (2.52) как суперпозиции частных решений возможно лишь для линейных осцилляторов. Из принципа суперпозиции, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем, следует, что для линейных осцилляторов все вычисления гораздо проще, чем для нелинейных. Чтобы использовать это преимущество, нелинейный осциллятор, точный расчет которого невозможен, обычно заменяют его линейной моделью.

Решение уравнения (2.51) можно получить и в комплексном виде. Прежде всего запишем исходное уравнение в комплексной форме. Для этого введем новые переменные

$$x_1 = x, \quad x_2 = -\dot{x}/\omega,$$

а затем преобразуем уравнение второго порядка в два уравнения первого порядка:

$$x_1 = -\omega x_2, \quad x_2 = \omega x_1. \quad (2.55)$$

Если теперь принять x_1 и x_2 за действительную и мнимую части комплексной переменной

$$z = x_1 + ix_2,$$

то оба уравнения (2.55) можно объединить в одно комплексное уравнение первого порядка

$$z - i\omega z = 0 \quad (2.56)$$

с решением

$$z = Ae^{i\omega t}. \quad (2.57)$$

Изображая это решение в комплексной плоскости (рис. 39), получаем уже рассмотренную ранее векторную диаграмму гармонического колебания. В общем случае коэффициент усиления A тоже является комплексной величиной. Он определяется величиной амплитуды $|A|$ и величиной фазы φ в начальный момент времени. Комплексное представление полностью эквивалентно действительному, но имеет то преимущество, что порядок комплексного дифференциального уравнения вдвое ниже порядка исходного уравнения. Это может оказаться решающим при решении системы дифференциальных уравнений и привести к существенной экономии расчетной работы. Правда, комплексный метод успешно применяется только в таких задачах, которым свойственна известная симметрия. Эта симметрия состоит в том, что исходное уравнение должно разделяться на уравнения симметричной структуры (как уравнение (2.55)).

Для движения линейного осциллятора по закону (2.52) или соответственно (2.53) можно построить (x, t) -изображение, а по комплексному закону (2.57) — векторное изображение. Остается выяснить, можно ли непосредственно из исходного уравнения (2.51) получить фазовую траекторию движения. Это, действительно,

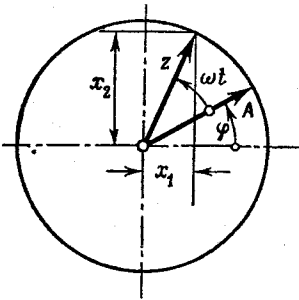


Рис. 39. Векторное изображение гармонического колебания.

также оказывается возможным. Для этого умножим (2.51) на x и проинтегрируем:

$$\ddot{x}\dot{x} + \omega^2 x\dot{x} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}^2}{2} \right) + \omega^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{x^2}{2} \right) = 0, \quad (2.58)$$

или

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = \text{const}. \quad (2.59)$$

Полученное уравнение представляет собой уравнение фазовой траектории, т. е. устанавливает зависимость между x и \dot{x} . Постоянная интегрирования снова служит для того, чтобы полученное решение могло удовлетворять заданному начальному условию. Как показывает уравнение (2.59), фазовые траектории являются эллипсами, полуоси которых относятся друг к другу как 1 : ω . Соответствующий фазовый портрет был уже рассмотрен ранее; он изображен на рис. 14.

2.1.2.2. Энергетические соотношения. Процесс интегрирования уравнения (2.58), который привел к уравнению фазовой траектории (2.59), тесно связан с энергией колеблющейся системы. Для рассматриваемых здесь недемпфированных осцилляторов имеет место закон сохранения энергии, который гласит, что для механического осциллятора сумма кинетической и потенциальной энергии является постоянной величиной. Это легко установить из уравнения движения, которое мы будем рассматривать не в упрощенной форме (2.51), а в виде условия равновесия сил, например в виде (2.4). Умножив это уравнение почленно на \dot{x} и проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} m\ddot{x}\dot{x} + c\dot{x}x &= \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{x}^2 \right) + \\ &+ \frac{d}{dt} \left(\frac{c}{2} x^2 \right) = 0, \\ \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}cx^2 &= \text{const} = E_0, \quad (2.60) \\ E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} &= E_0. \end{aligned}$$

Это закон сохранения энергии; E_0 — постоянная величина энергии. Соотношение (2.60) можно изобразить весьма наглядно (рис. 40), если представить потенциальную энергию как функцию x . При этом получается парабола, форма которой зависит лишь от жесткости пружины c . Если эту параболу пересечь прямой, параллельной оси x и расположенной на расстоянии E_0 от нее, то точки пересечения этой прямой с параболой дают значения амплитуды A колебания. Теперь для любой величины x в интервале $-A \leq x \leq$

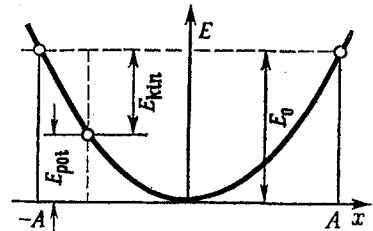


Рис. 40. Энергетическая диаграмма для линейного консервативного осциллятора.

$\leq +A$ можно найти соответствующие значения потенциальной и кинетической энергии. Изображение такого рода в несколько обобщенном виде будет использоваться ниже при рассмотрении нелинейных колебаний.

Подстановка решения (2.53) в выражения для потенциальной и кинетической энергии дает

$$\begin{aligned} E_{\text{pot}} &= \frac{1}{2} cx^2 = \frac{cC^2}{2} \cos^2(\omega t - \varphi) = \frac{cC^2}{4} [1 + \cos(2\omega t - 2\varphi)], \\ E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 = \frac{mC^2\omega^2}{2} \sin^2(\omega t - \varphi) = \frac{mC^2\omega^2}{4} [1 - \cos(2\omega t - 2\varphi)]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Выражения (2.61) показывают, что, в то время как координата x , а вместе с ней и ее производная колеблются с круговой частотой ω , колебания каждого вида энергии происходят с удвоенной час-

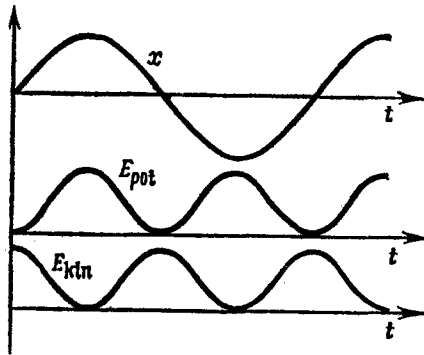


Рис 41. Отклонения и энергия осциллятора как функции времени.

тотой 2ω (рис. 41). Когда значения одной формы энергии минимальны, значения другой максимальны. Максимальные значения каждого вида энергии, конечно, должны быть равны:

$$\frac{1}{4}cC^2 = \frac{1}{4}mC^2\omega^2,$$

отсюда снова следует, что $\omega^2 = c/m$.

2.1.2.3. Влияние массы пружины. Исходя из энергетических соображений, можно найти влияние массы пружины, которым до сих пор пренебрегали. Кинетическая энергия системы представляется теперь кинетической энергией массы m , а также энергией отдельных элементов пружины (рис. 42):

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \int_0^L \frac{1}{2} \mu d\xi \dot{\xi}^2. \quad (2.62)$$

Здесь ξ , как видно из рис. 42, координата элемента пружины, а μ — масса, приходящаяся на единицу длины. Не будет большой ошибки, если для скорости $\dot{\xi}$ элемента пружины принять справедливым соотношение $\dot{\xi}/\dot{x} = \xi/L$. Оно означает, что вдоль пружины от точки закрепления пружины до массы m скорость возрастает линейно от нуля до скорости массы m . Это предположение заведомо допустимо в том случае, когда период собственных колебаний,

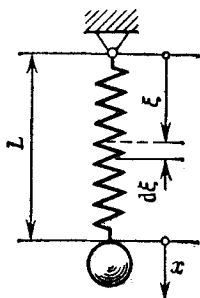


Рис. 42. К подсчету влияния массы пружины.



Рис. 43. Деформация мягкой пружины под действием собственного веса.

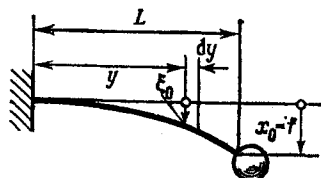


Рис. 44. К подсчету влияния массы плоской пружины.

которые может совершать пружина при жестко закрепленной массе, значительно меньше периода колебаний самого осциллятора, состоящего из массы и пружины, а это имеет место при условии, что масса пружины значительно меньше m . Подставив в уравнение (2.62)

$$\dot{\xi} = \frac{\dot{x}}{L} \xi,$$

получим

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{\mu}{L^2} \int_0^L \xi^2 d\xi \right) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{\mu L}{3} \right),$$

или (поскольку масса пружины $m_f = \mu L$)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{1}{3} m_f \right). \quad (2.63)$$

Таким образом, получаем выражение кинетической энергии того же вида, только теперь к массе колеблющегося тела добавляется треть массы пружины. Это справедливо не только для кинетической энергии, но и для расчета собственной круговой частоты ω , которая также получается из выражения кинетической энергии. Период колебаний рассматриваемого осциллятора, состоящего из массы и пружины, соответственно будет

$$T = 2\pi \sqrt{(m + \frac{1}{3} m_f) / c}. \quad (2.64)$$

Если эту приближенную формулу применить к предельному случаю $m=0$, то для периода собственного колебания ненагруженной пружины с равномерно распределенной массой получится значение, заниженное примерно на 10%. Ошибка будет меньшей, если учесть, что под действием собственного веса пружина деформируется неравномерно: ведь деформация пружины в свою очередь является функцией от ξ , как показывает рис. 43 для случая очень мягкой пружины.

Если осциллятор состоит из плоской пружины, один конец которой закреплен, а другой несет массу m (рис. 44), то кинетическая энергия равна

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \int_0^L \frac{1}{2} \mu dy \dot{\xi}^2. \quad (2.65)$$

Скорость элемента плоской пружины уже нельзя принимать за линейную функцию от расстояния y , отсчитываемого от места закрепления пружины. Однако можно считать справедливым соотношение $\dot{\xi}/\dot{x} = \xi_0/x_0$, где ξ_0 — статический прогиб плоской пружины. Для прогиба под действием сосредоточенной нагрузки mg , приложенной на конце плоской пружины, теория изгиба дает

$$\xi_0 = \frac{mg}{2EJ} y^2 \left(L - \frac{1}{3} y \right); \quad (2.66)$$

здесь E — модуль упругости, а J — момент инерции площади поперечного сечения плоской пружины. Отсюда получается максимальный прогиб при $y=L$, так называемая стрела прогиба,

$$x_0 = f = \frac{mgL^3}{3EJ}.$$

Подставив в (2.65) $\dot{\xi} = \xi_0 \dot{x}/x_0$ и проинтегрировав результат, найдем

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \left(m + \frac{33}{140} m_f \right). \quad (2.67)$$

Теперь видно, что в этом случае к массе тела следует добавить примерно одну четверть массы пружины (вместо одной трети в случае винтовой пружины). В предельном случае $m=0$ полученный таким образом период колебаний плоской пружины без нагрузки на свободном конце оказывается только на 1,5% меньше точного значения.

2.1.2.4. Определение собственной частоты по величине стрелы прогиба. Для всех осцилляторов, состоящих из плоской пружины и массы, существует очень удобный способ определения собственной частоты или периода колебания по величине стрелы прогиба (статического прогиба). Если f — стрела прогиба, то в случае рав-

новесия

$$cf = G = mg.$$

Отсюда можно определить жесткость пружины c и подставить ее в выражение для собственной круговой частоты:

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{mg}{f} \frac{1}{m} = \frac{g}{f};$$

таким образом,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{f}}, \text{ или } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{f}{g}}. \quad (2.68)$$

Если учесть приближенное равенство $g \approx 100 \text{ м}^2/\text{с}^2$, то можно прийти к достаточно точным для практического применения приближенным формулам

$$T \approx \frac{1}{5} \sqrt{f}, \quad n = \frac{1}{T} \approx \frac{5}{\sqrt{f}} \quad (f \text{ в см!}). \quad (2.69)$$

Эта приближенная формула справедлива в очень широких пределах и применяется не только к осцилляторам, представленным на рис. 42 и 44, но и к более сложным конструкциям, например к фундаменту двигателя, схематически изображенному (с условно преувеличенной деформацией) на рис. 45.

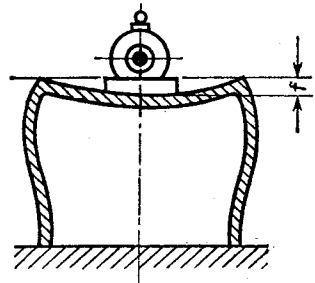


Рис. 45. Прогиб фундамента под действием веса двигателя.

2.1.3. Поведение нелинейных осцилляторов

Консервативные осцилляторы, движение которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, уже рассматривались в разд. 2.1.1. Теперь продолжим их рассмотрение, применив для их описания и графического изображения только что изложенные методы. При этом нас прежде всего интересует зависимость $x = x(t)$ координаты от времени и период колебания T , а также качественный характер движения, о котором можно судить по фазовому портрету.

2.1.3.1. Общие зависимости. В качестве примера уравнения движения нелинейного осциллятора возьмем уравнение (2.8)

$$m\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (2.70)$$

где под $f(x)$ можно понимать восстанавливающую силу, совершенно произвольным образом зависящую от x . Поскольку решение такого уравнения в общем виде нельзя найти непосредственно, попытаемся получить приемлемые результаты обходным путем, исходя из

энергетических соображений. Умножим (2.70) на x и проинтегрируем по времени:

$$\frac{1}{2}mx^2 + \int f(x) x dt = \text{const} = E_0. \quad (2.71)$$

При этом

$$\int f(x) x dt = \int f(x) dx = E_{\text{pot}},$$

так что соотношение (2.71) снова выражает сохранение полной энергии осциллятора

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0.$$

Отсюда сразу можно получить уравнение фазовой траектории и уравнение фазового портрета. Разрешив (2.71) относительно x , получим

$$x = v = \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - E_{\text{pot}})}. \quad (2.72)$$

Связь между фазовым портретом и потенциальной энергией можно пояснить графически. В верхней части рис. 46 построен график потенциальной энергии как функции от координаты x , а в нижней

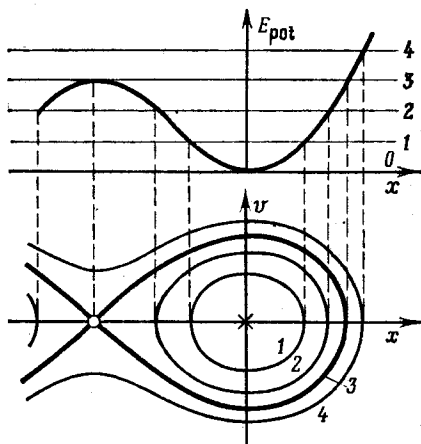


Рис. 46. Энергетическая диаграмма и фазовый портрет осциллятора с нелинейной восстанавливающей силой.

в том же масштабе оси x — соответствующий фазовый портрет. Как и в случае линейного осциллятора (рис. 40), на верхней части рисунка можно провести прямую, параллельную оси x и расположенную на расстоянии E_0 от нее. На рис. 46 проведены четыре такие прямые, помеченные цифрами 1—4, что соответствует различным уровням энергии осциллятора.

Точки пересечения прямых E_0 с кривой E_{pot} позволяют определить максимальные отклонения осциллятора в обоих направлениях, причем в этих точках, как видно из уравнения (2.72), $\dot{x}=0$. Следовательно, таким точкам пересечения соответствуют в нижней части рисунка точки пересечения фазовых траекторий с осью абсцисс (осью x). Для каждого значения x , лежащего между максимальными отклонениями, из (2.72) можно найти значение \dot{x} и, таким образом, построить фазовую траекторию. В случаях 1 и 2 она по форме близка к эллипсу. Ранее уже было установлено, что все фазовые траектории пересекают ось абсцисс по перпендикуляру к ней; в рассматриваемом же здесь случае они пересекают по перпендикуляру и ось x .

Так как в начале отсчета координаты x достигается минимум потенциальной энергии E_{pot} , кинетическая энергия, равная разности $E_0 - E_{\text{pot}}$, здесь максимальна, но тогда из (2.72) следует, что максимум имеет и \dot{x} . Части фазовых траекторий, лежащие в нижней полуплоскости, представляют собой зеркальные отражения частей, лежащих в верхней полуплоскости. Каждая из этих частей соответствует одному из значений корня (2.72).

Все прямые E_0 , которые могут быть проведены между отметками 0 и 3, соответствуют фазовым траекториям, имеющим форму эллипсов (таким, как фазовые траектории 1 и 2 на рис. 46). Прямая E_0 , помеченная цифрой 3, соответствует граничному случаю, так как она касается кривой потенциальной энергии E_{pot} в точке максимума. В этом случае получается фазовая траектория 3 особого рода — сепаратриса, которая пересекает ось x лишь один раз в особой точке, соответствующей максимуму кривой E_{pot} . Эта сепаратриса отделяет область, в которой фазовые траектории имеют форму эллипса, от области, в которой фазовые траектории имеют вид кривой 4.

Движения, соответствующие фазовым траекториям вида 4, уже не будут колебательными, так как теперь изображающая точка с конечной скоростью движется слева направо; она преодолевает расположенный при $x < 0$ пик потенциальной энергии, причем в вершине этого пика \dot{x} имеет минимум. После этого изображающая точка проходит потенциальную ложину, на дне которой (при $x=0$) достигается максимальная величина скорости \dot{x} , и продолжает двигаться в том же направлении до тех пор, пока вся кинетическая энергия не перейдет в потенциальную. Затем начинается движение в обратном направлении по зеркальному отражению пройденного участка фазовой траектории; при этом меняется лишь знак скорости. Снова преодолев левый пик потенциальной энергии, изображающая точка удаляется в направлении отрицательных значений x .

Фазовый портрет имеет особую точку типа центра, соответст-

вующую минимуму кривой E_{pot} и — с физической точки зрения — устойчивому положению равновесия осциллятора. На некотором расстоянии от нее находится особая точка типа седла, соответствующая максимуму кривой E_{pot} (и неустойчивому положению равновесия осциллятора). Положение равновесия следует считать устойчивым, если колебания, возникшие после слабого возмущения, протекают таким образом, что осциллятор не покидает непосредственной окрестности положения равновесия. Как показывает фазовый портрет на рис. 46, это имеет место для особой точки типа центра, потому что фазовой траекторией возмущенного движения оказывается охватывающий эту точку маленький эллипс. Чем меньше возмущение, тем ближе точки эллипса к особой точке. Наоборот, для особой точки типа седла даже малейшее возмущение вызывает движение, которое выводит осциллятор из непосредственной окрестности неустойчивого положения равновесия, так как фазовые траектории в окрестности особой точки являются гиперболообразными кривыми, асимптотами которых служат ветви сепаратрисы.

Таким образом, по фазовому портрету можно непосредственно установить характер положения равновесия и тип движения. Если, кроме того, нужно знать процесс движения во времени, то следует вернуться к выведенной ранее формуле (1.20) и найти время прохождения отрезка фазовой траектории от положения x_0 до x :

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{v} = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E_0 - E_{\text{pot}})}}. \quad (2.73)$$

Соответственно для периода колебаний получается

$$T = 2 \int_{x_{\text{min}}}^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E_0 - E_{\text{pot}})}}. \quad (2.74)$$

Эта формула применима, конечно, только тогда, когда фазовые траектории замкнуты, т. е. являются кривыми типа 1 и 2 (рис. 46): только в этом случае существуют оба экстремальных значения x_{max} и x_{min} . Уравнение (2.74) можно упростить, если восстанавливающая функция $f(x)$ является нечетной, т. е. выполняется условие $f(x) = -f(-x)$. Тогда E_{pot} будет четной функцией и имеет место равенство $E_{\text{pot}}(x) = E_{\text{pot}}(-x)$. В этом случае фазовые траектории симметричны не только относительно оси x , но и относительно оси \dot{x} . Отсюда следует

$$T = 4 \int_0^{x_{\text{max}}} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E_0 - E_{\text{pot}})}}. \quad (2.75)$$

Легко убедиться в том, что в линейном случае $f(x) = cx$ из (2.75) снова получается известное выражение для T . Здесь $E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}cx^2$, и, так как $c/m = \omega^2$, имеем

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \frac{4}{\omega} \arcsin \frac{x}{x_0} \Big|_0^{x_0} = \frac{4}{\omega} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Интегралы (2.73)–(2.75) не всегда приводят к уже известным и затабулированным функциям, так что зачастую их приходится находить численно или графически. Если восстанавливающая функция является полиномом до третьей степени включительно, то указанные интегралы всегда приводятся к эллиптическим. Если в этом случае начало координат выбрать так, что $f(0) = 0$, то

$$f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \\ E_{\text{pot}} = \int f(x) dx = a_0 + \frac{1}{2}a_1x^2 + \frac{1}{3}a_2x^3 + \frac{1}{4}a_3x^4. \quad (2.76)$$

Все интегралы вида

$$\int R[x, \sqrt{P(x)}] dx,$$

где R — любая рациональная функция, а $P(x)$ — многочлен не выше четвертой степени, являются эллиптическими. Обратные им функции также будут эллиптическими. Интегралы (2.73) — (2.75) имеют как раз такой вид. Следует отметить, что это будет справедливо и тогда, когда восстанавливающая функция $f(x)$ несимметрична, как это, например, может произойти в случае $a_2 \neq 0$.

2.1.3.2. Плоский гравитационный маятник. Соотношения, приведенные в предыдущем разделе, можно непосредственно применить к плоскому гравитационному маятнику, причем безразлично, идет ли речь о математическом (рис. 33) или о физическом маятнике (рис. 34). Для обоих случаев было выведено уравнение движения (2.30)

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Положив $x = \varphi$ и $f(x) = m\omega^2 \sin \varphi$, мы чисто формально сведем это уравнение к рассмотренному в предыдущем разделе уравнению (2.70). Тогда

$$(E_{\text{pot}}) = \int f(x) dx = \int_0^{\varphi} m\omega^2 \sin \varphi d\varphi = m\omega^2 (1 - \cos \varphi).$$

Это выражение не имеет размерности энергии и поэтому заключено в скобки, но справедливость рассуждений от этого не пострадает. В точке $\varphi_{\text{max}} = \varphi_0$ мы имеем

$$(E_0) = m\omega^2 (1 - \cos \varphi_0).$$

Подставляя эти результаты в (2.72), получаем уравнение фазового портрета

$$\dot{\varphi} = \omega \sqrt{2 (\cos \varphi - \cos \varphi_0)}. \quad (2.77)$$

Фазовый портрет и соответствующие кривые потенциальной энергии представлены на рис. 47. Этот рисунок показывает все качественные свойства гравитационного маятника. Фазовый портрет периодичен по углу φ с периодом 2π . Собственные колебания

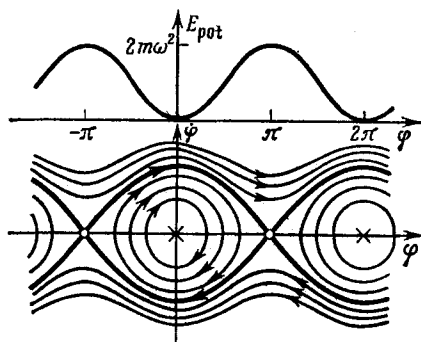


Рис. 47. Энергетическая диаграмма и фазовый портрет плоского гравитационного маятника.

маятника происходят около устойчивого положения равновесия $\varphi=0$ (особая точка типа центра), и их фазовые траектории представляются эллипсовидными кривыми. Область этих колебаний ограничивается двумя сепаратрисами, которые проходят через особые точки типа седла при $\varphi=-\pi$ и $\varphi=+\pi$. Сепаратрисы являются косинусоидами, как показывает уравнение (2.77). Если подставить в это уравнение $\varphi_0 = \pm\pi$, то, поскольку

$$1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 (\varphi/2),$$

оно превратится в следующее:

$$\dot{\varphi} = 2\omega \cos (\varphi/2). \quad (2.78)$$

Физически этим сепаратрисам соответствует движение, которое возникает в том случае, когда гравитационный маятник отпускают без начальной скорости из верхнего (неустойчивого) положения равновесия. Тогда маятнику теоретически потребуется бесконечно большое время для того, чтобы начать двигаться из этого положения равновесия. Наконец он проскочит через нижнее (устойчивое) положение равновесия и будет снова асимптотически приближаться к верхней мертвой точке, подобно тому как было показано выше (формула (1.21)).

Фазовые траектории вне области, ограниченной сепаратрисами, соответствуют движениям опрокидывающегося маятника, которому в верхнем положении сообщена начальная скорость, причем верхние кривые соответствуют вращению против часовой стрелки, а нижние — вращению по часовой стрелке.

Вследствие периодичности фазового портрета все происходящие движения воспроизводятся в одной полосе, параллельной оси v , ограниченной значениями $-\pi$ и π и имеющей ширину 2π . Представим себе, что такую полосу вырезали и свернули в цилиндр, состыковав разрезанные фазовые траектории. При этом весь фазовый портрет будет представляться на цилиндре без повторения отдельных участков. Фазовые траектории опрокидывающегося маятника обегают цилиндр, в то время как фазовые траектории, соответствующие колебаниям обычного маятника, окружают особую точку типа центра на поверхности цилиндра.

Чтобы рассмотреть поведение маятника во времени, вернемся к уравнению (2.73), которое теперь примет вид

$$t = t_0 + \frac{1}{\omega} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}. \quad (2.79)$$

Данный интеграл можно преобразовать в нормальный эллиптический интеграл Лежандра. Для этого прежде всего используем известное соотношение

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2(\varphi/2)$$

и введем новую переменную α и постоянную k :

$$\sin(\varphi/2) = \sin(\varphi_0/2) \sin \alpha = k \sin \alpha, \quad k = \sin(\varphi_0/2).$$

Кроме того, выберем начало отсчета времени так, что $t_0 = 0$. Тогда интеграл (2.79) можно записать в виде

$$t = \frac{1}{\omega} \int \frac{d\alpha}{\cos(\varphi/2)} = \frac{1}{\omega} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\omega} F(k, \alpha). \quad (2.80)$$

Функция $F(k, \alpha)$ представляет собой неполный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода. Существуют таблицы значений этой функции в зависимости от переменной α и так называемого модуля k^1 .

После того как получено соотношение (2.80), задача о поведении маятника во времени в принципе решена, так как найдена зависимость времени t от вспомогательной величины α . Однако для приложений больший интерес представляет обратная функция $\alpha = \alpha(t)$ или, еще лучше, функция $\varphi = \varphi(t)$. Чтобы получить эти функции,

¹⁾ См., например, Jahnke E., Emde F., Lösch F. *Tafeln höherer Funktionen*. — Aufl. 7. — Stuttgart: 1966. [Имеется перевод: Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции* (формулы, графики, таблицы). — М.: Наука, 1968].

можно воспользоваться функциями, обратными эллиптическому интегралу $F(k, \alpha)$. Мы имеем

$$\sin \alpha = \operatorname{sn}(k, \omega t)$$

и соответственно

$$\sin(\varphi/2) = \sin(\varphi_0/2) \operatorname{sn}(k, \omega t), \quad (2.81)$$

где $\operatorname{sn}(k, \omega t)$ (*sinus amplitudinis*) — одна из эллиптических функций Якоби. Ее можно рассматривать как обобщение функции синуса, поскольку

$$\operatorname{sn}(0, \omega t) = \sin \omega t.$$

На рис. 48 построены графики $\operatorname{sn}(k, \omega t)$ для различных значений модуля k . При этом нужно учесть, что различные кривые построены

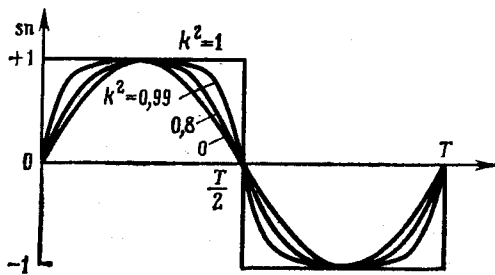


Рис. 48. Эллиптическая функция $\operatorname{sn}(k, \omega t)$ для различных значений модуля k .

в различных временных масштабах, так как на этом рисунке за единицу измерения времени принят период колебания.

Период колебания T находится из соотношения (2.80); для этого нужно верхний предел интегрирования положить равным $\pi/2$ и умножить интеграл на четыре:

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha}} = \frac{4}{\omega} F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\omega} K(k). \quad (2.82)$$

Функция $K(k)$ представляет собой полный эллиптический интеграл первого рода, который зависит только от одной переменной — модуля k . График этой функции, построенный на рис. 49, показывает, что период колебания гравитационного маятника существенно меняется только тогда, когда величина k стремится к единице, т. е. когда амплитуда колебания маятника приближается к π (180°). Для малых значений k и соответственно малых величин φ_0 период колебания равен

$$T = \frac{4}{\omega} \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (2.83)$$

что совпадает с предыдущими результатами.

При применении теории колебаний гравитационного маятника в часовой технике интересуются прежде всего зависимостью периода колебания от амплитуды. Хотя эту зависимость для всех амплитуд и с любой желаемой точностью можно найти из точной формулы (2.82), для оценки влияния амплитуды гораздо удобнее пользоваться приближенной формулой, поскольку из нее легче усмотреть влияние отдельных величин. Такая приближенная формула получается разложением в степенной ряд полного эллиптического интеграла:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots \right].$$

Для малых значений φ_0 можно положить $k \approx \varphi_0/2$, что дает

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left[1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 + \frac{9}{1024} \varphi_0^4 + \dots \right].$$

Оставляя лишь два первых члена, из (2.82) получаем период колебания

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right). \quad (2.84)$$

Теперь легко оценить ошибку, которая имеет место при использовании обычной приближенной формулы (2.83). Если, например, амплитуду считать равной $\varphi_0 = 10^\circ = 0,175$, то добавочный член в скобках (2.84) имеет величину 0,0019. Таким образом, для этого случая период колебания по формуле (2.83) будет примерно на 0,2% меньше.

2.1.3.3. Применения гравитационного маятника. Дифференциальные уравнения движения плоского математического маятника идентичны уравнениям движения физического маятника. Для входящего в уравнение параметра, круговой частоты ω , мы имеем в случае математического маятника $\omega^2 = g/L$ (2.29), а в случае физического маятника $\omega^2 = mgs/J_D$ (2.31).

Отсюда видно, что для физического маятника можно определить эквивалентную длину L^* :

$$L^* = \frac{J_D}{ms}, \quad (2.85)$$

подстановка которой в формулы для такого маятника приводит эти формулы в точности к тому же виду, что и для математического маятника. Величина L^* называется *приведенной длиной* физического маятника.

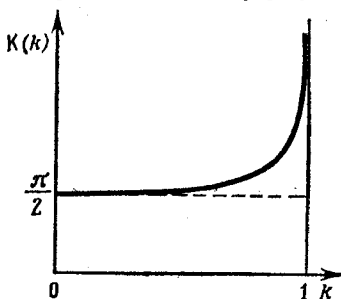


Рис. 49. Зависимость полного эллиптического интеграла $K(k)$ от модуля k .

В применениях гравитационного маятника интересуются также изменением периода колебания из-за смещения оси вращения. Так как в выражении периода колебания в качестве единственной величины, измеряемой приборами, входит приведенная длина маятника L^* , однозначно определяющая период колебания, достаточно исследовать лишь изменение приведенной длины маятника L^* из-за смещения оси вращения.

Если ось вращения меняет свое положение, то меняется и момент инерции J_D . Поэтому целесообразно исходить из момента инерции относительно центра тяжести J_S и произвести перерасчет при помощи теоремы Гюйгенса — Штейнера:

$$J_D = J_S + ms^2. \quad (2.86)$$

Если к тому же использовать известное представление момента инерции как произведение массы m на квадрат радиуса инерции ρ

$$J_D = m\rho_D^2, \quad J_S = m\rho_S^2,$$

то из (2.86) и (2.85) следует, что

$$\begin{aligned} \rho_D^2 &= \rho_S^2 + s^2, \\ L^* &= \frac{\rho_D^2}{s} = \frac{\rho_S^2}{s} + s. \end{aligned} \quad (2.87)$$

На рис. 50 изображена приведенная длина L^* как функция расстояния s центра тяжести от точки подвеса. Как легко установить из (2.87), эта функция имеет минимум при $\rho = \rho_S$, причем минимальное ее значение равно $L_{\min}^* = 2\rho_S$. Наличие минимума показывает, что в этой области незначительные изменения расстояния до центра тяжести в первом приближении не оказывают существенного влияния на приведенную длину маятника, а вместе с тем и на период колебания. Этот факт был использован Шулером¹⁾ при конструировании маятниковых часов особо высокой точности. Маятник, в котором выполнено условие минимума, называют *минимальным маятником* или *скомпенсированным маятником*. Период колебания такого маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{2\rho_S/g}. \quad (2.88)$$

Из того, что период колебания не зависит от изменения расстояния до центра тяжести, еще нельзя сделать вывод, что и температурные изменения длины маятника не оказывают существенного влияния. Такого рода изменения сказываются не только на изменении расстояния s до центра тяжести, но и на соответствующую

¹⁾ Schuler M. Das freie, unveränderliche Pendel an der Sternwarte in Göttingen.—Schriftenreihe der Gesellschaft für Zeitmeßkunde und Uhrentechnik, 1932, Bd. 4, S. 199—219.

щем изменении радиуса инерции ρ_S , который входит в формулу периода колебания (2.88). Минимальный маятник может в значительной мере реагировать и на те изменения, которые возникают из-за износа призм подвеса с течением времени.

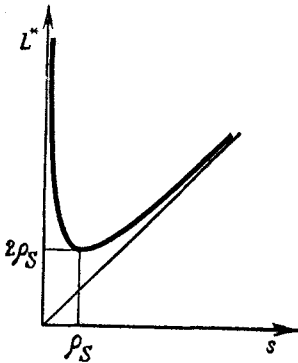


Рис. 50. Приведенная длина физического маятника как функция расстояния центра тяжести от точки подвеса.

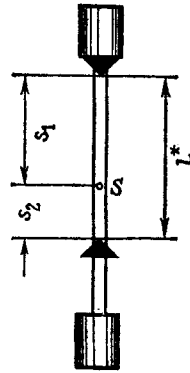


Рис. 51. Реверсивный маятник.

Как показывает рис. 50, для каждого значения $L^* > 2\rho_S$ существуют два значения s , которые дают эту приведенную длину маятника и соответствующий период колебания. Оба эти значения можно определить из квадратного относительно s уравнения (2.87):

$$s^2 - L^*s + \rho_S^2 = 0, \\ s_{1,2} \left. \vphantom{s} \right\} = \frac{L^*}{2} \pm \sqrt{\frac{L^{*2}}{4} - \rho_S^2}. \quad (2.89)$$

Отсюда после сложения корней уравнения (2.89) следует соотношение $s_1 + s_2 = L^*$. Это соотношение дает основание для применения так называемого *реверсивного* (оборотного) маятника (рис. 51). Принцип его действия легко понять, если представить, что расстояния s_1 и s_2 от центра тяжести могут быть отложены в противоположных направлениях. Поэтому для каждого физического маятника можно определить две точки подвеса, расположенные по разные стороны от центра тяжести и на различном расстоянии от него и такие, что периоды колебаний будут одинаковы. Эти точки можно найти экспериментально, заставляя маятник попеременно колебаться относительно двух осей, хотя бы одна из которых может перемещаться вдоль стержня маятника. Когда периоды колебаний относительно обеих осей будут одинаковы, расстояние между осями будет в точности равно приведенной длине маятника L^* .

Реверсивный маятник используется при точных измерениях ускорения свободного падения. При этом наряду с приведенной длиной маятника L^* опреде-

ляется период колебаний T , и тогда ускорение свободного падения вычисляется по формулам

$$T = 2\pi \sqrt{L^*/g}, \quad g = 4\pi^2 L^*/T^2. \quad (2.90)$$

Еще одним примером применения гравитационного маятника является определение момента инерции тел сложной формы. Пусть, например, требуется найти момент инерции махового колеса, изображенного на рис. 52, относительно центра

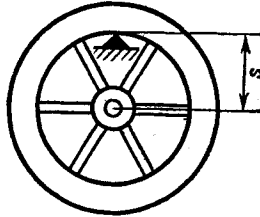


Рис. 52. К нахождению момента инерции при помощи маятниковых колебаний.

тяжести. Это можно осуществить путем измерения периода колебаний относительно любой точки колеса. Момент инерции J_S рассчитывается по периоду колебания T , расстоянию центра тяжести s и общей массе m колеса. Расчет производится по формуле

$$J_S = m\rho_S^2 = ms(L^* - s) = ms \left(\frac{T^2 g}{4\pi^2} - s \right), \quad (2.91)$$

которая следует из (2.87) и (2.90).

2.1.3.4. Циклоидальный маятник. Зависимость периода колебания обычного гравитационного маятника от угла отклонения является одним из препятствий для увеличения точности хода прецизионных маятниковых часов. Чтобы часы шли точно, угол отклонения маятника должен меняться в очень узких пределах. Поэтому уже давно возник следующий вопрос: можно ли сконструировать маятник, у которого период колебания имеет постоянное значение при любой амплитуде колебаний? Подобного рода маятник называют *изохронным*.

Нам нужно найти такую кривую, что движущаяся по ней масса совершает под действием силы тяжести изохронные колебания. В разд. 2.1.1.5 было составлено уравнение движения массы под действием силы тяжести по произвольной кривой $y=y(x)$ (уравнение (2.34)). Там было выведено дифференциальное уравнение движения массы по заданной кривой. Теперь нужно решить обратную задачу: по силе, заданной в виде $K=K(s)$, где s — длина дуги, найти кривую, по которой движется масса.

В этом случае восстанавливающая сила равна

$$K = -mg \sin \varphi = -G \sin \varphi,$$

где φ — угол наклона касательной к искомой кривой (рис. 53). Разложив силу тяжести G на нормальную составляющую N и восстанавливающую силу K , из подобия треугольников (рис. 53) можно получить

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi = \frac{N}{G} = \frac{\sqrt{G^2 - K^2}}{G} = \sqrt{1 - \left(\frac{K}{G}\right)^2},$$

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi = -\frac{K}{G}.$$

Отсюда получается уравнение кривой в параметрическом виде

$$x = \int \sqrt{1 - \left(\frac{K}{G}\right)^2} ds, \quad y = -\int \frac{K}{G} ds. \quad (2.92)$$

Таким образом, решение задачи сводится к однократному интегрированию. Уравнение (2.92) справедливо и в более общем

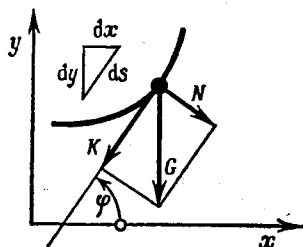


Рис. 53. Разложение силы тяжести при движении массы по произвольной траектории.

случае — для любого закона изменения силы. Теперь сузим область исследования и потребуем, чтобы восстанавливающая сила была линейной функцией перемещения колеблющейся массы

$$K(s) = -cs. \quad (2.93)$$

Исследование линейного осциллятора показало, что в этом случае собственная круговая частота ω и вместе с тем период колебания T не зависят от величины амплитуды. Подставим условие (2.93) в (2.92) и проинтегрируем. При этом целесообразно ввести новую переменную α , а именно

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{cs}{G} = -\frac{K}{G},$$

что дает

$$ds = \frac{G}{2c} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha,$$

$$x = \int \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} ds = \frac{G}{2c} \int_0^\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{G}{4c} \int_0^\alpha (1 + \cos \alpha) d\alpha,$$

$$x = \frac{G}{4c} (\alpha + \sin \alpha),$$

$$y = \frac{G}{2c} \int_0^\alpha \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha = \frac{G}{4c} \int_0^\alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{G}{4c} (1 - \cos \alpha).$$

Введя обозначение $R = G/(4c)$, имеем

$$x = R(\alpha + \sin \alpha), \quad y = R(1 - \cos \alpha). \quad (2.94)$$

Это — параметрическое уравнение циклоиды, которая изображена на рис. 54. Такая циклоида получается при качении без скольжения

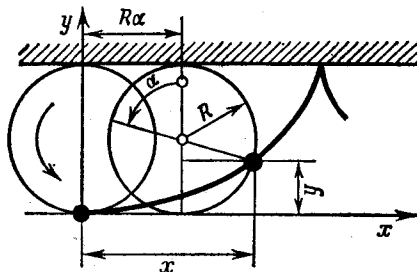


Рис. 54. Построение циклоиды.

окружности радиуса R по прямой, параллельной оси x и находящейся на расстоянии $2R$ от нее; параметр α — угол поворота ок-

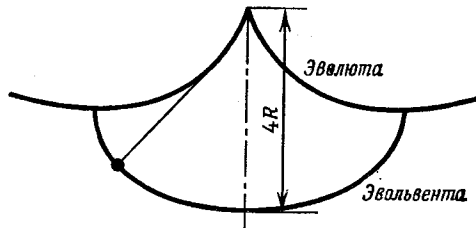


Рис. 55. Схема циклоидального маятника Гюйгенса.

ружности. При качении окружности любая ее точка описывает циклоиду.

Вследствие рассмотренного здесь физического свойства циклоиды ее называют также *изохронной* (или таутохронной). Уже Гюй-

генс (1629—1695) знал это свойство и попытался использовать его при конструировании циклоидального маятника для часов. Поскольку каждую циклоиду можно рассматривать как эволюту конгруэнтной ей циклоиды, Гюйгенс нашел простой способ (схематически представленный на рис. 55) осуществить движение массы по дуге циклоиды. Для этого нужно выполнить направляющую в форме циклоиды, прикрепить к ее острию нить длиной $4R$ и позаботиться о том, чтобы при колебаниях нить прилегалась к направляющей. Тогда свободный конец нити будет двигаться по нижней циклоиде.

Период колебания циклоидального маятника равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{m \frac{4R}{mg}} = 4\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (2.95)$$

2.1.3.5. Осциллятор с кусочно линейной восстанавливающей силой. В многочисленных прикладных задачах теории колебаний восстанавливающая сила $f(x)$ нелинейна в целом, но линейна в отдельных интервалах значения x . Некоторые такие осцилляторы будут исследованы ниже.

Прежде всего рассмотрим осциллятор, восстанавливающая сила которого записывается следующим образом:

$$f(x) = +h \operatorname{sign} x = \begin{cases} +h & \text{при } x > 0, \\ -h & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad (2.96)$$

Здесь восстанавливающая сила имеет постоянное значение, не зависящее от величины отклонения x , но меняет знак при прохождении осциллятора через нулевое положение. Восстанавливающая сила такого вида действует, например, на массу, которая скользит или катится вдоль прямой, имеющей излом в нулевой точке (рис. 56). Кроме того, восстанавливающая сила, описываемая формулами (2.96), часто имеет место в релейных системах управления, например

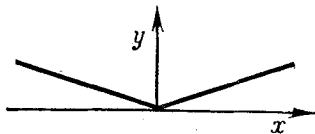


Рис. 56. Осциллятор качения на плоскости с изломом.

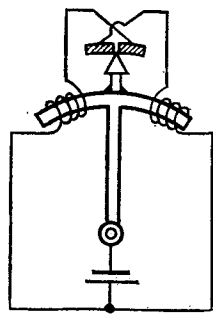


Рис. 57. Релейный осциллятор с разрывной восстанавливающей силой.

мер в осцилляторе, изображенном на рис. 57. Этот осциллятор посредством скользящего контакта и двух контактных шин переключает электромагнит. Возникающие при этом электромагнитные силы регулируют движение осциллятора.

Решение уравнений движения теперь нужно искать по отдельности для случаев $x > 0$ и $x < 0$. Если мы рассматриваем область $x > 0$, то

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -f(x) = -h, \\ \dot{x} &= -\frac{h}{m}t + v_0, \\ x &= -\frac{h}{2m}t^2 + v_0t + x_0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Предполагая, что в нулевой момент времени осциллятор находится как раз в одном из своих крайних положений, начальные условия можно записать так:

$$t = 0: x_0 = A, \quad v_0 = 0.$$

Если теперь из второго уравнения (2.97) найти время t и подставить его значение в третье уравнение, то получится соотношение, связывающее x и \dot{x} , т. е. уравнение фазовой траектории. Это уравнение можно привести к виду

$$\dot{x} = v = \sqrt{\frac{2h}{m}(A-x)}. \quad (2.98)$$

Таким образом, на фазовой плоскости получаются симметричные относительно оси x параболы, вершины которых лежат на оси x на расстоянии A (рис. 58).

Фазовые траектории симметричны как относительно оси x , так и относительно оси v . Поэтому период колебания T можно определить как учетверенную величину времени прохождения одного квадранта. Это время непосредственно определяется из уравнений

$$x = -\frac{h}{2m}t^2 + A, \quad (2.99)$$

$$0 = -\frac{h}{2m}\left(\frac{T}{4}\right)^2 + A,$$

$$T = 4 \sqrt{\frac{2mA}{h}} = 5,6568 \sqrt{\frac{mA}{h}}. \quad (2.100)$$

Период колебаний в этом случае возрастает пропорционально корню квадратному из амплитуды; колебания, как и следовало ожидать, неизохронны.

Если контактные шины изображенного на рис. 57 осциллятора не близки одна к другой, а разделены определенным расстоянием, то в окрестности нулевой особой точки имеется область, в которой восстанавливающая сила отсутствует. Ширину этой области, называемой *мертвой зоной*, обозначим через x_1 . Тогда восстанавливаю-

щая сила будет равна

$$f(x) = \begin{cases} +h & \text{при } x > x_t, \\ 0 & \text{при } -x_t \leq x \leq x_t, \\ -h & \text{при } x < -x_t. \end{cases} \quad (2.101)$$

В соответствии с тремя значениями, которые может принимать восстанавливающая сила, анализ движения выполняется в три приема. Для областей $x < -x_t$ и $x > x_t$ остаются справедливыми резуль-

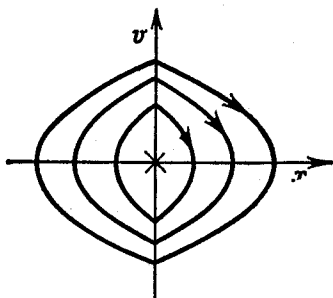


Рис. 58. Фазовый портрет осциллятора с восстанавливающей силой $f(x) = h \operatorname{sign} x$.

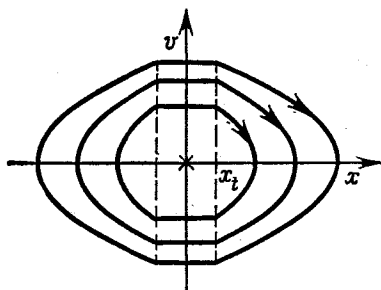


Рис. 59. Фазовый портрет осциллятора, имеющего мертвую зону.

таты, полученные в предыдущем случае, т. е. справедливо уравнение (2.98). Поэтому фазовые траектории, лежащие как справа от прямых $x = x_t$, так и слева от прямых $x = -x_t$, являются параболлами. На промежуточном участке, где $f(x) = 0$, имеем

$$\ddot{x} = 0, \quad \dot{x} = v_{0t}, \quad x = v_{0t}t \pm x_t. \quad (2.102)$$

Отсюда видно, что в средней области фазовые траектории представляются горизонтальными отрезками. При этом получается фазовый портрет, изображенный на рис. 59. Он получается из портрета, приведенного на рис. 58, следующим образом: портрет на рис. 58 разрезается посередине и обе его половины сдвигаются в разные стороны по горизонтали на величину x_t . После этого траектории соединяются горизонтальными прямыми, лежащими в мертвой зоне.

При расчете периода колебания нужно определить время T_1 и время T_2 , за которое изображающая точка проходит расстояние от точки $x = A$, $\dot{x} = 0$ до прямой $x = x_t$ и расстояние от прямой $x = x_t$ до оси x соответственно; тогда

$$T = 4(T_1 + T_2). \quad (2.103)$$

Чтобы найти время T_1 , надо подставить в уравнение (2.99) $x=x_t$ и разрешить результат относительно t :

$$T_1 = \sqrt{\frac{2m}{h} (A - x_t)}.$$

Скорость при достижении прямой $x=x_t$ следует из (2.97):

$$\dot{x} = -\frac{h}{m} T_1 = -\sqrt{\frac{2h}{m} (A - x_t)} = v_{0t}.$$

Подставив это выражение в (2.102) и положив $x=0$, получим

$$t = T_2 = \frac{x_t}{|v_{0t}|} = \frac{x_t}{\sqrt{(2h/m) (A - x_t)}}.$$

Согласно (2.103), теперь весь период колебания будет равен

$$T = \frac{8A - 4x_t}{\sqrt{(2h/m) (A - x_t)}}. \quad (2.104)$$

При $x_t \rightarrow 0$ снова получается приведенное выше выражение (2.100). Применяемый здесь способ решения уравнений движения по областям с последующей стыковкой решений на границах областей называется *методом припасовывания*. Он широко применяется в случае кусочно линейных восстанавливающих и возмущающих сил, в особенности при исследовании сложных систем, применяемых, например, в технике регулирования.

2.1.3.6. Приближенные методы. Если восстанавливающая функция $f(x)$ произвольна, то приведенные в разд. 2.1.3.1 формулы становятся слишком громоздкими, и тогда для расчета колебаний используются приближенные методы.

Одним из важнейших методов такого рода, несомненно, является метод малых колебаний. В нем предполагается, что амплитуды колебаний, происходящих около положения равновесия, настолько малы, что в малой окрестности положения равновесия дугу графика восстанавливающей функции можно заменить отрезком касательной к этому графику.

Положение равновесия (положение покоя) характеризуется значениями $x=0$ и $f(x)=0$, так что $f(0)=0$. Разложим функцию $f(x)$ в окрестности $x=0$ в ряд Тейлора:

$$f(x) = f(0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)_{x=0} x^2 + \dots$$

Если ограничиться малой окрестностью точки $x=0$, то члены с высшими степенями x окажутся малыми по сравнению со вторым слагаемым правой части. Поскольку $f(0)=0$, в качестве приближения

можно принять

$$f(x) \approx \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} x. \quad (2.105)$$

Подставив (2.105) в уравнение движения осциллятора

$$m\ddot{x} + f(x) = 0$$

и введя обозначение

$$\frac{1}{m} \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=0} = \omega^2,$$

получим обычную для линейного осциллятора форму уравнения движения $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

В качестве примера рассмотрим гравитационный маятник, для которого

$$f(x) = \frac{mg}{L} \sin x.$$

Здесь

$$\omega^2 = \frac{1}{m} \frac{gm}{L} (\cos x)_{x=0} = \frac{g}{L}$$

в соответствии с полученными ранее результатами.

Метод малых колебаний применим тогда, когда восстанавливающую функцию можно разложить в ряд Тейлора. Но он неприменим в случаях, подобных тем, с которыми мы познакомились в прошлом разделе, где или функция $f(x)$ менялась скачкообразно, например по формуле (2.96), или нулевая особая точка лежала в мертвой зоне, в которой все производные обращались в нуль. В обоих этих случаях функции в нулевой точке не являются аналитическими и не могут быть разложены в ряд Тейлора.

В подобных случаях хорошие приближенные решения можно получить разработанным Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [12*] методом, который известен под названием *метода гармонического баланса*. В дальнейшем мы будем часто применять этот метод, однако рассмотрим его уже теперь, поскольку он дает хорошие результаты и для обсуждаемых консервативных нелинейных колебаний. Правда, здесь следует ограничиться нечетными, хотя в остальном и произвольными восстанавливающими функциями, так что

$$f(x) = -f(-x), \quad f(0) = 0. \quad (2.106)$$

Далее нужно, чтобы колебания вообще были возможны, т. е. чтобы восстанавливающая сила преобладала над теми силами, которые стремятся вывести осциллятор из положения равновесия.

Основное предположение метода гармонического баланса заключается в том, что колебания считаются близкими к гармоническим:

$$x = A \cos \omega t. \quad (2.107)$$

Если подставить это выражение в нелинейную восстанавливающую функцию $f(x)$, то она также станет периодической функцией времени и будет иметь именно такую же круговую частоту ω , как и x . Эту периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = f(A \cos \omega t) = a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} \cos \nu \omega t + b_{\nu} \sin \nu \omega t), \quad (2.108)$$

где a_{ν} и b_{ν} — известные коэффициенты ряда Фурье. В силу предположения (2.106) все коэффициенты b_{ν} , а также постоянный коэффициент a_0 равны нулю. Второе предположение метода гармонического баланса состоит в том, что пренебрегают высшими гармониками ряда (2.108), т. е. членами с $\nu > 1$, и учитывают только основную гармонику с круговой частотой ω . Тогда с учетом выражения (2.107) получают

$$f(x) = f(A \cos \omega t) \approx a_1 \cos \omega t = \frac{a_1}{A} x = cx. \quad (2.109)$$

Таким образом, методом гармонического баланса нелинейную функцию $f(x)$ удалось привести к линейному приближенному выражению с x . Однако коэффициент пропорциональности c здесь не является постоянным, как в методе малых колебаний, а зависит от амплитуды A . Подставляя в (2.109) коэффициент Фурье a_1 , получаем

$$c = c(A) = \frac{a_1}{A} = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \omega t) \cos \omega t \, d(\omega t). \quad (2.110)$$

Это — интегральное преобразование, преобразующее функцию f от переменной x в функцию c от переменной A . Такой прием, позволяющий при помощи преобразования заменить нелинейность зависимостью от амплитуды A , оказывается необычайно плодотворным.

В силу (2.109) нелинейные колебания могут быть приближенно описаны линейным уравнением, для решения которого используются уже указанные выше методы. Для собственной круговой частоты мы теперь имеем

$$\omega^2 = c(A)/m$$

и соответственно можем получить период колебания T , тоже зависящий от амплитуды A .

В качестве простого примера применения метода гармонического баланса рассмотрим осциллятор с восстанавливающей функцией

$$f(x) = h \operatorname{sign} x,$$

для которого в предыдущем разделе мы уже нашли (без каких-либо допущений)

период колебания. Из (2.110) следует

$$c = 4 \frac{1}{\pi A} \int_0^{\pi/2} h \cos \omega t \, d(\omega t) = \frac{4h}{\pi A} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{4h}{\pi A}. \quad (2.111)$$

При этом используется тот факт, что вследствие симметрии достаточно проинтегрировать лишь от 0 до $\pi/2$, а затем умножить полученный результат на четыре. Для периода колебания из (2.111) получается

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\pi mA}{4h}} = \pi \sqrt{\frac{\pi mA}{h}} = 5,5683 \sqrt{\frac{mA}{h}}. \quad (2.112)$$

Сравнение с полученным ранее точным решением (2.100) показывает, что приближенное решение совершенно правильно описывает влияние отдельных параметров и лишь численный коэффициент в нем на 1,56% меньше коэффициента в точном решении. Однако следует заметить, что в общем случае и ошибка приближенного решения может зависеть от амплитуды A .

Для определения фазового портрета также имеются приближенные способы, которыми легко получить общее представление о ходе фазовой траектории при любых функциях $f(x)$. Возможность для этого дает известный из теории дифференциальных уравнений первого порядка *метод изоклин*. Исходное уравнение второго порядка

$$m\ddot{x} + f(x) = 0$$

легко преобразовать в уравнение первого порядка. Поскольку

$$\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} = \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = v \frac{dv}{dx},$$

мы имеем

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x)}{mv}. \quad (2.113)$$

Стоящая в левой части производная равна тангенсу угла наклона фазовой траектории. При использовании метода изоклин находят такие кривые, для которых (2.113) имеет заданное постоянное значение. В силу (2.113) уравнение этих кривых имеет вид

$$\frac{f(x)}{mv} = \text{const.}$$

Полученные таким образом изоклины можно нанести на фазовую плоскость вместе с линейными элементами фазовых траекторий (отрезками касательных к этим траекториям). Семейство изоклин с соответствующими линейными элементами дает наглядное представление о возможном расположении фазовых траекторий.

В качестве примера рассмотрим линейный осциллятор с $f(x) = cx$. Здесь

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{c}{m} \frac{x}{v}.$$

Эта величина постоянна, если $v=kx$, где k — произвольная постоянная. Поэтому изоклины представляют собой прямые, проходящие через начало координат. Тангенс угла наклона линейных элементов фазовых траекторий на изоклинах равен

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{c}{mk}.$$

Самые простые соотношения получаются при $c/m=1$, когда

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{x}{v}.$$

В этом случае элементы фазовых траекторий будут всегда перпендикулярны изоклинам, и получаются поле изоклин и поле линейных элементов фазовых траекторий, изображенные на рис. 60. На этом рисунке сразу видно, что фазовые траектории

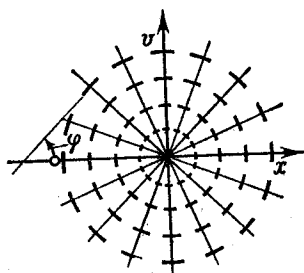


Рис. 60. Поле изоклин на фазовой плоскости x, v для линейного консервативного осциллятора.

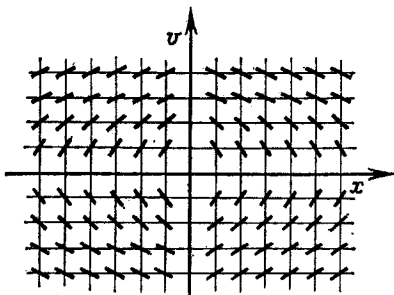


Рис. 61. Поле изоклин на фазовой плоскости x, v для консервативного осциллятора с разрывной восстанавливающей силой.

ектории представляют собой окружности, проведенные вокруг расположенной в начале координат особой точки, — результат, который, конечно, согласуется с выводами, сделанными в разд. 2.1.2.1.

В качестве второго примера рассмотрим осциллятор с восстанавливающей функцией $f(x)=h \operatorname{sign} x$. Здесь из (2.113) для области $x>0$ следует, что

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = -\frac{h}{mv}.$$

Эта величина постоянна, если постоянна v , и поэтому теперь изоклины представляют собой прямые, параллельные оси x (рис. 61). Линейные элементы фазовых траекторий будут проходить тем круче, чем меньше v . На самой оси x эти элементы становятся вертикальными. В области $x<0$ получается соответствующая картина, следует только изменить знак h . На оси v направление линейных элементов не определено, так как здесь не определено значение $f(x)$. Таким образом, фазовые траектории снова должны иметь вид, представленный на рис. 58 (см. рис. 61).

Наконец, рассмотрим еще один простой графический метод, который может быть использован для построения фазовых траекторий. Этот метод, предложенный Льенаром, излагается в несколько модифицированном виде; он особенно удобен в тех случаях, когда функция $f(x)$ задана графиком.

Само построение показано на рис. 62. Сначала в плоскости x, v строится график функции $f(x)/m$. Чтобы найти линейный элемент

фазовой траектории в произвольной точке P , опустим из точки P перпендикуляр на ось x ; он пересечет кривую $f(x)/m$ в точке B , а ось x — в точке C . Затем опишем вокруг центра C окружность радиуса CB и проведем прямую, соединяющую точку P с (левой) точкой пересечения этой окружности с осью x . Линейный элемент фазовой траектории, проходящей через точку P , будет перпендикулярен прямой DP . Справедливость такого построения следует из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{PC/BC} = \\ &= -\frac{BC}{PC} = -\frac{f(x)}{mv} \end{aligned}$$

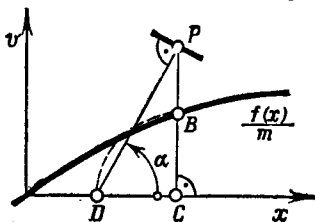


Рис. 62. Построение линейных элементов фазовой траектории по Лянару.

(полученный результат совпадает с уравнением (2.113)). Последовательно соединяя найденные таким образом линейные элементы, легко построить всю фазовую траекторию.

2.2. Демпфированные собственные колебания

2.2.1. Учет демпфирования

При выводе уравнений движения осцилляторов, рассмотренных в разд. 2.1.1, всегда делалось допущение об отсутствии какого-либо сопротивления. Поэтому в большинстве случаев уравнение движения механического осциллятора можно было представить в виде

$$m\ddot{x} + f(x) = 0.$$

Такие уравнения движения получались из условий равновесия между силами инерции и восстанавливающими силами (или в случае электрического колебательного контура из условия равновесия напряжения на катушке и конденсаторе). Однако в каждом реальном осцилляторе действуют и силы (соответственно моменты или напряжения), которые оказывают демпфирующее воздействие. Эти силы демпфирования совершают отрицательную работу, уменьшая тем самым энергию колебания.

В качестве примера рассмотрим простой механический осциллятор, представленный на рис. 63 и состоящий из пружины и массы, которая соединена с создающим демпфирование поршнем. При колебании поршня в цилиндре возникает сила, величина которой зависит от скорости поршня x , а направление противоположно направлению этой скорости. При хорошо подогнанном поршне

эта сила прямо пропорциональна скорости и поэтому

$$K_d = -d\dot{x}. \quad (2.114)$$

Знак определяется условием, что сила демпфирования всегда тормозит движение. С учетом силы демпфирования условие равновесия сил принимает вид

$$K_t + K_d + K_f = 0,$$

и, следовательно,

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0. \quad (2.115)$$

Соответственно можно дополнить введенное выше уравнение (2.16) для электрического колебательного контура, учитывая имеющиеся в каждом контуре омические сопротивления. На рис. 64



Рис. 63. Схема демпфированного осциллятора.

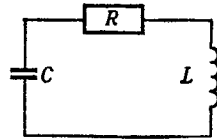


Рис. 64. Электрический колебательный контур с сопротивлением.

все сопротивления представлены одним особо выделенным элементом R , хотя это совершенно не обязательно. Если в контуре течет ток I , то падение напряжения на сопротивлении составляет

$$U_R = RI;$$

поэтому условие равновесия напряжений дает уравнение

$$Li + RI + \frac{1}{C} \int I dt = 0,$$

или, поскольку $\int I dt = Q$, уравнение

$$L\dot{Q} + RQ + \frac{1}{C} Q = 0. \quad (2.116)$$

В обоих рассмотренных случаях сила демпфирования (соответственно падение напряжения) пропорциональна скорости изменения некоторого параметра состояния x (соответственно Q). Такая пропорциональность, очевидно, не является безусловной. Если, например, к маятнику прикреплен перпендикулярная его

движению пластина, которая при колебаниях вызывает турбулентное движение воздуха, то демпфирующие моменты с большой точностью можно считать пропорциональными квадрату скорости. При движении маятника может возникнуть и момент сил сухого трения, у которого величина почти не зависит от скорости движения, но при изменении направления движения меняется знак.

В каждом случае демпфирующие влияния являются функцией скорости; эту функцию в общем случае мы будем обозначать $g(\dot{x})$. При этом уравнение движения осциллятора (разделив его на коэффициент при \ddot{x}) почти всегда можно привести к общему виду

$$\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0. \quad (2.117)$$

Иногда оказывается, что силы демпфирования и восстанавливающие силы очень тесно связаны друг с другом и в уравнении движения их нельзя разделить. Тогда общий вид уравнения движения будет выглядеть так:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (2.118)$$

В дальнейшем будут рассмотрены прежде всего свойства демпфированных линейных осцилляторов, а затем некоторые типичные случаи нелинейных осцилляторов.

2.2.2. Линейный осциллятор

2.2.2.1. Преобразование общего уравнения. В самом общем случае коэффициенты уравнения движения линейного демпфированного осциллятора с одной степенью свободы могут являться функциями времени. Тогда можно написать

$$m(t) \ddot{x} + d(t) \dot{x} + c(t) x = 0. \quad (2.119)$$

Это линейное уравнение всегда можно преобразовать так, что второй член (соответствующий демпфированию) исчезнет. Введя новую переменную

$$y = x \exp \left[(1/2) \int (d/m) dt \right], \quad (2.120)$$

приведем уравнение (2.119) к виду

$$\ddot{y} + \left[\frac{c}{m} - \frac{1}{4} \left(\frac{d}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{m} \right) \right] y = 0. \quad (2.121)$$

Теперь решения уравнения (2.119) можно получить из соответствующих решений уравнения (2.121), что может оказаться чрезвычайно полезным для расчета линейных осцилляторов.

Здесь мы ограничимся случаем постоянных коэффициентов (некоторые явления, возникающие при зависящих от времени коэффи-

циентах, будут обсуждаться в дальнейшем; см. гл. 4). В качестве исходного уравнения используем (2.115), однако все проводимые рассуждения будут в равной мере относиться и к совершенно аналогичному уравнению (2.116). Чтобы придать рассуждениям более общий характер, запишем исходное уравнение в безразмерном виде. Полагая

$$c/m = \omega_0^2,$$

введем безразмерное время

$$\tau = \omega_0 t. \quad (2.122)$$

Это означает, что движения осцилляторов с различными значениями параметров должны описываться в различных масштабах времени. Величина τ представляет собой, так сказать, растянутое или сжатое (в зависимости от величины круговой частоты ω_0) время, которое называется *собственным временем* системы. Из (2.122) следует, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0 \frac{dx}{d\tau} = \omega_0 x', \\ \ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{dx'}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega_0^2 x''. \end{aligned}$$

После подстановки этих выражений в исходное уравнение (2.115) и деления на $m\omega_0^2$ уравнение движения приводится к виду

$$x'' + 2Dx' + x = 0, \quad (2.123)$$

где

$$D = \frac{d}{2m\omega_0} = \frac{d\omega_0}{2c} = \frac{d}{2\sqrt{cm}}. \quad (2.124)$$

Эта единственная входящая в уравнение движения константа представляет собой безразмерную величину, так называемый *безразмерный коэффициент демпфирования*, который был введен Лером [13]¹⁾.

Для недемпфированного осциллятора $D=0$, и в этом предельном случае можно вернуться к результатам проведенного в разд. 2.1 исследования.

2.2.2.2. Решение уравнений движения. Решение безразмерного уравнения (2.123) можно было бы искать в виде экспоненты

$$x = e^{\lambda\tau},$$

как это обычно делается в теории дифференциальных уравнений. Однако здесь мы воспользуемся методом, основанным на замене

¹⁾ В действительности понятия безразмерного коэффициента демпфирования и собственного времени системы были введены еще И. А. Вышнеградским (1878 г.). В связи с этим в отечественной литературе форма записи уравнения (2.123) называется формой Вышнеградского.— *Прим. ред.*

переменной (2.120). Сравнивая (2.123) и (2.119), видим, что в данном случае

$$m=c=1, \quad d=2D,$$

и тогда из соотношения (2.120) следует, что

$$x = ye^{-D\tau}, \quad (2.125)$$

причем y должно удовлетворять уравнению (2.121), которое теперь принимает вид

$$y'' + (1-D^2)y = 0. \quad (2.126)$$

В зависимости от величины коэффициента демпфирования D теперь нужно рассмотреть по отдельности три следующих случая:

I. $D < 1$, II. $D > 1$, III. $D = 1$.

I. *Случай* $D < 1$. Введя обозначение $1-D^2 = \nu^2$, получим из (2.126) дифференциальное уравнение, решение которого уже было найдено в разд. 2.1.2.1:

$$y = A \cos \nu\tau + B \sin \nu\tau, \quad y = C \cos(\nu\tau - \varphi).$$

Здесь A и B (соответственно C и φ) — произвольные постоянные. Отсюда и из уравнения (2.125) получается решение для x :

$$x = e^{-D\tau} [A \cos \nu\tau + B \sin \nu\tau], \quad x = Ce^{-D\tau} \cos(\nu\tau - \varphi). \quad (2.127)$$

Для определения постоянных из заданных начальных условий, а также для дальнейшего исследования полученного решения нужно найти скорость. Дифференцирование по τ дает

$$\begin{aligned} x' &= e^{-D\tau} [(B\nu - DA) \cos \nu\tau - (A\nu + DB) \sin \nu\tau], \\ x' &= -Ce^{-D\tau} [D \cos(\nu\tau - \varphi) + \nu \sin(\nu\tau - \varphi)]. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Если начальные условия при $\tau=0$ имеют вид $x=x_0$ и $x'=x'_0$, то постоянные, входящие в выражения (2.127) и (2.128), принимают следующие значения:

$$A = x_0, \quad B = \frac{x'_0 + Dx_0}{\nu}, \quad C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{x'_0 + Dx_0}{\nu}\right)^2}, \quad (2.129)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} = \frac{x'_0 + Dx_0}{\nu x_0}.$$

II. *Случай* $D > 1$. Обозначив $D^2 - 1 = k^2$, получим из (2.126) уравнение

$$y'' - k^2 y = 0. \quad (2.130)$$

Частными решениями этого уравнения являются гиперболические функции

$$y_1 = \operatorname{ch} k\tau, \quad y_2 = \operatorname{sh} k\tau,$$

где sh и ch — гиперболический синус и гиперболический косинус соответственно. Оба этих решения составляют фундаментальную систему, так что общее решение (2.130) с постоянными A и B можно записать в виде

$$y = A \text{ch } k\tau + B \text{sh } k\tau, \quad y = C \text{ch } (k\tau + \varphi), \quad (2.131)$$

причем

$$C = \sqrt{A^2 - B^2}, \quad \text{th } \varphi = B/A$$

(th — гиперболический тангенс).

Подставляя решения (2.131) в (2.125), получаем решения для x :

$$x = e^{-D\tau} [A \text{ch } k\tau + B \text{sh } k\tau], \quad x = C e^{-D\tau} \text{ch } (k\tau + \varphi). \quad (2.132)$$

Определение постоянных из начальных условий теперь дает

$$A = x_0, \quad B = \frac{x'_0 + Dx_0}{k}, \quad C = \sqrt{A^2 - B^2} = \sqrt{x_0^2 - \left(\frac{x'_0 + Dx_0}{k}\right)^2}, \quad (2.133)$$

$$\text{th } \varphi = \frac{B}{A} = \frac{x'_0 + Dx_0}{kx_0}.$$

Наряду с обеими формами решения (2.132) часто применяется еще одна его форма, которая следует из соотношений

$$\text{ch } \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha + e^{-\alpha}), \quad \text{sh } \alpha = \frac{1}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}),$$

т. е. форма

$$x = \frac{A+B}{2} e^{-(D-k)\tau} + \frac{A-B}{2} e^{-(D+k)\tau}. \quad (2.134)$$

Поскольку $k = \sqrt{D^2 - 1} < D$, разность $D - k$ положительна, так что показатели степени в решении (2.134) всегда отрицательны.

III. *Случай* $D=1$. Этот граничный случай можно получить из обоих рассмотренных до сих пор случаев предельным переходом при $D \rightarrow 1$. Однако проще непосредственно найти это решение уже освоенным способом. Из (2.126) следует уравнение

$$y'' = 0$$

с общим решением

$$y = A\tau + B.$$

Решение для x , таким образом, будет

$$x = e^{-\tau} (A\tau + B). \quad (2.135)$$

Определение постоянных интегрирования из начальных условий теперь дает

$$A = x_0 + x'_0, \quad B = x_0.$$

и поэтому общее решение переходит в следующее:

$$x = e^{-\tau} [x_0 (1 + \tau) + x_0' \tau]. \quad (2.136)$$

2.2.2.3. Поведение решений. Для полученных в предыдущем разделе решений нас преимущественно интересует (x, t) -диаграмма, т. е. процесс движения во времени. Из решений (2.134) и (2.136) можно прежде всего усмотреть, что в случае $D > 1$ происходят лишь аperiodические движения, описываемые экспоненциальными функ-

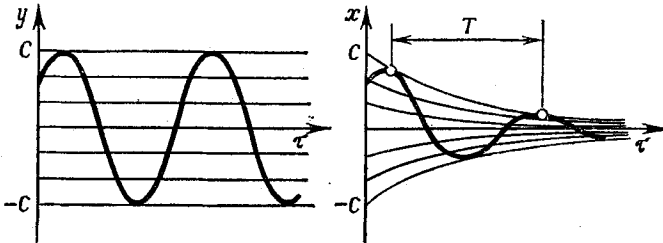


Рис. 65. Изображение демпфированных колебаний в плоскостях y, τ и x, τ при $D < 1$.

циями с действительными отрицательными показателями. Наоборот, в случае $D < 1$, когда получается решение (2.127), происходят колебания, амплитуды которых из-за наличия множителя $e^{-D\tau}$ с течением времени убывают. Поскольку в решение (2.127) входят периодические функции синус и косинус, решение при $D < 1$ иногда относят к *периодическому случаю*, но это не совсем правильно, ибо при $D \neq 0$ координата x не удовлетворяет условию периодичности (1.1). Случай $D=1$ и $D > 1$ называют *аperiodическими*, причем первый из них называется *предельным аperiodическим случаем*.

Рассмотрим сначала случай $D < 1$. Заметим, что преобразование (2.125) переводит прямые $y = \text{const}$ в плоскости y, τ в убывающие экспоненциальные кривые $x = \text{const} \cdot e^{-D\tau}$ в плоскости x, τ (рис. 65). Вследствие этого кривая недемпфированного колебания в плоскости y, τ переходит в плоскости x, τ в кривую демпфированного колебания, заключенную между двумя убывающими экспонентами. Бывшие прямые $y = \pm C$ образуют теперь *огibaющие* кривых демпфированных колебаний. Уравнение огibaющих имеет вид

$$x = \pm C e^{-D\tau} \quad (2.137)$$

Поведение демпфированного колебательного процесса во времени характеризуется двумя величинами, которые определяют, во-первых, спад огibaющих со временем, и, во-вторых, период колебания — интервал времени между двумя последовательными моментами касания кривой переходного процесса с одной из огibaющих. Спад огibaющих со временем определяется так называемой *по-*

стоянной времени τ_z (соответственно T_z), равной

$$\tau_z = 1/D. \quad (2.138)$$

При этом уравнение огибающей можно записать в виде

$$x_h = Ce^{-\tau/\tau_z}.$$

Геометрический смысл постоянной времени τ_z ясен из рис. 66. Касательная к экспоненте в точке $\tau=0$ пересекает ось абсцисс при значении τ_z . Легко убедиться в том, что расстояние по оси τ между произвольной точкой касания и точкой пересечения касательной

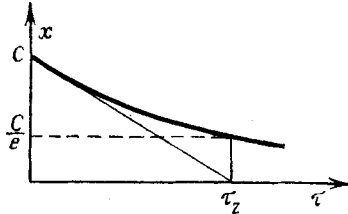


Рис. 66. Геометрический смысл постоянной времени τ_z .

с абсциссой равно τ_z . За время $\tau = \tau_z$ экспонента убывает на величину, равную $1/e = 0,368$ первоначального значения, так что амплитуда колебаний за это время уменьшается до 63%.

Величина τ_z измеряется в безразмерном собственном времени, значение же постоянной T_z в масштабе действительного времени в силу (2.122) будет

$$T_z = \frac{\tau_z}{\omega_0} = \frac{1}{D\omega_0} = \frac{2m}{d}. \quad (2.139)$$

Второй характерной величиной, как было указано выше, является период колебания. Он определяется как период T_s входящих в решение (2.127) периодических функций синус и косинус. Таким образом, в масштабе собственного времени

$$\tau_s = \frac{2\pi}{\nu} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-D^2}}$$

и соответственно в масштабе действительного времени

$$T_s = \frac{\tau_s}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-D^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-D^2}}, \quad (2.140)$$

причем $T_0 = 2\pi/\omega_0$ — период соответствующего недемпфированного колебания, $T(D=0) = T_0$. Эта формула показывает, что демпфированные колебания имеют больший период колебания, чем недемпфированные. Правда, для малых значений коэффициента демпфи-

рования D это влияние почти неощутимо; оно становится существенным лишь тогда, когда D приближается к единице.

Из решения (2.127) видно, что точки прохождения кривой колебания через нулевое положение отстоят друг от друга на расстояние $\nu\tau = \pi$. Точки, в которых кривая колебания касается огибающей

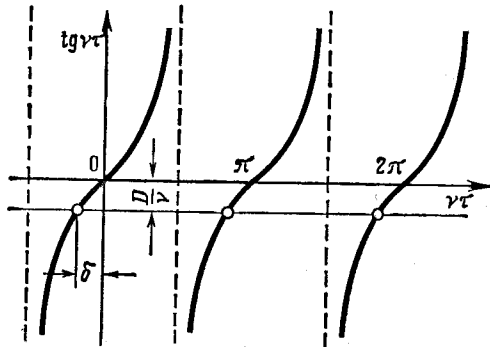


Рис. 67. Определение смещения δ максимума кривой колебания.

щей, лежат посередине между нулевыми положениями. Однако эти точки касания совпадают с максимумами кривой колебания только в случае недемпфированных колебаний. При демпфированных колебаниях максимумы смещены на небольшие величины τ . Величины этих смещений находят по нулевым значениям скорости колебания x' . Из (2.128) при $\varphi=0$ следует

$$\operatorname{tg} \nu\tau_0 = -\frac{D}{\nu} = -\frac{D}{\sqrt{1-D^2}}.$$

Если тангенсоиду пересечь горизонтальной прямой, проведенной на расстоянии $-D/\nu$ от оси абсцисс (рис. 67), то смещение максимума можно видеть непосредственно; оно составляет

$$\delta = \nu\tau_0 = -\operatorname{arctg} \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}. \quad (2.141)$$

Это смещение не зависит от величины амплитуды. Соответственно этому, период демпфированного колебания можно определить либо по расстоянию между прохождениями кривой колебания через нуль, либо по расстоянию между максимумами этой кривой. Однако в этом случае интервал времени между максимумом кривой колебания и ее прохождениями через нуль не будет равен четверти периода недемпфированного колебания.

Величины амплитуд колебания уменьшаются со временем в соответствии с ходом огибающей. Это уменьшение уже было охарактеризовано постоянной времени τ_z , но наряду с этим целесообразно иметь и другую меру измерения уменьшения амплитуды, в которой

данное уменьшение задается не как функция времени, а как функция числа полных колебаний. Обозначим амплитуды кривой колебания, расположенные по одну сторону от среднего положения, через x_1, x_2, \dots, x_n , а соответствующие значения времени через $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$; тогда; согласно (2.127),

$$x_n = Ce^{-D\tau_n} \cos [v\tau_n - \varphi], \quad x_{n+1} = Ce^{-D(\tau_n + \tau_s)} \cos [v(\tau_n + \tau_s) - \varphi].$$

Разделим первое выражение на второе и (поскольку косинус имеет период $v\tau_s$), получим

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{D\tau_s}. \quad (2.142)$$

Таким образом, отношение двух следующих друг за другом амплитуд, расположенных по одну сторону от среднего положения, является постоянной величиной, не зависящей ни от амплитуды C , ни от текущего времени τ . Поэтому для характеристики процесса уменьшения амплитуд колебаний можно воспользоваться отношением (2.142). Натуральный логарифм этого отношения

$$\ln \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right) = D\tau_s = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \vartheta \quad (2.143)$$

называют *логарифмическим декрементом затухания* и обозначают буквой ϑ . Если хотят определить ϑ по величинам двух последовательных амплитуд, расположенных по *разные* стороны от среднего положения, то логарифм в левой части уравнения (2.143) нужно умножить на два. Величины ϑ и D связаны друг с другом соотношением (2.143). Величину D удобнее использовать в теоретических расчетах, в то время как величину ϑ легко найти путем измерений.

Разрешив (2.143) относительно D , находим

$$D = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi^2 + \vartheta^2}}. \quad (2.144)$$

Если хотят по измеренным величинам амплитуд x_n определить величину ϑ , а затем из (2.144) получить D , то лучше пользоваться не формулой (2.143), а графическим построением. Для этого на график наносят (в полулогарифмическом масштабе) точки $(n, \ln x_n)$ и соединяют их прямой (рис. 68). Тангенс угла α наклона этой прямой равен ϑ . Последнее можно установить следующим образом:

$$x_{n+1} = x_1 e^{-Dn\tau_s},$$

или

$$\ln x_{n+1} = \ln x_1 - Dn\tau_s,$$

или, так как $D\tau_s = \vartheta$,

$$\vartheta = \frac{\ln x_1 - \ln x_{n+1}}{n} = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.145)$$

Если при использовании этого способа нанесенные точки измерения отклоняются от прямой, причем эти отклонения не могут объясняться неточностью отдельных измерений, а носят систематический

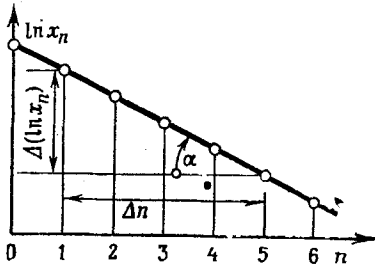


Рис. 68. Графическое определение логарифмического декремента затухания ϑ .

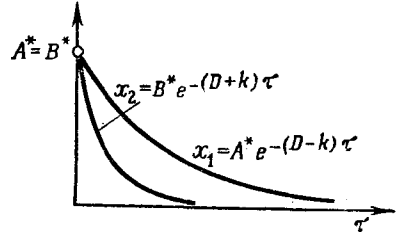


Рис. 69. Частные решения уравнения (2.123) в случае $D > 1$.

характер, то это указывает, что принятый закон демпфирования неверен. Тогда о действительном законе демпфирования можно судить по виду кривой, соединяющей точки измерения, но таким исследованием мы заниматься не будем.

Следует упомянуть также, что кривой демпфированного колебания можно представить не только координату x (по формуле (2.127)); но и ее производные. Поскольку в выражении для амплитуды все производные x сохраняют один и тот же множитель $e^{-D\tau}$, их постоянные времени τ_z и T_z имеют одинаковую величину. Тогда из-за равенства периода колебания и логарифмический декремент $\vartheta = D\tau_s$ во всех случаях будет одинаковым. Если же измеряется не сама координата x , а какая-либо величина, связанная с ней квадратичной зависимостью, например энергия, то полученная постоянная времени будет представлять собой только половину своего прежнего значения. Действительно,

$$x^2 = C^2 e^{-2D\tau} \cos^2(\nu\tau - \varphi),$$

откуда следует, что постоянная времени τ_z^* для x^2 равна

$$\tau_z^* = \frac{1}{2D} = \frac{1}{2} \tau_z.$$

Таким образом, спад огибающей для x^2 происходит вдвое быстрее, чем для x . Однако из этого нельзя делать вывод, что удваивается и логарифмический декремент затухания. В силу того что

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha),$$

для x^2 круговая частота вдвое больше частоты для x , а период колебания вдвое меньше τ_s ; поэтому

$$\vartheta^* = D^* \tau_s^* = 2D \frac{\tau_s}{2} = D\tau_s = \vartheta.$$

Таким образом, логарифмический декремент остается неизменным.

Чтобы исследовать поведение системы при аperiодическом движении, происходящем при $D > 1$, вернемся к форме решения (2.134)

и заметим, что, поскольку $k = \sqrt{D^2 - 1}$,

$$0 < k < D, \quad D + k > D - k > 0.$$

Отсюда следует, что общее решение всегда можно построить из двух экспоненциальных функций, которые убывают с различной скоростью, и поведение системы во времени можно характеризовать двумя постоянными времени

$$\tau_{z1} = \frac{1}{D - k}, \quad \tau_{z2} = \frac{1}{D + k}. \quad (2.146)$$

Теперь надо скомбинировать два частных решения (рис. 69) в соответствии с заданными начальными условиями. Чтобы лучше представить себе картину возможных форм движения, следует исходить не из самих начальных условий, а из значений коэффициентов A^* и B^* частных решений и представить общее решение в виде

$$x = x_1 + x_2 = A^* e^{-(D-k)\tau} + B^* e^{-(D+k)\tau}.$$

Считая постоянной амплитуду A^* медленнее убывающего решения x_1 и меняя величину амплитуды B^* , получаем (x, τ) -диаграммы, приведенные на рис. 70.

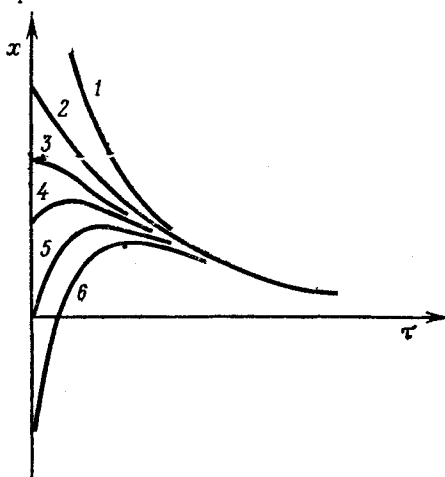


Рис. 70. Изображение аperiodического движения в плоскости x, τ при различных начальных условиях.

Кривая 3 относится к движению, при котором осциллятор отпускается без толчка из начального положения, не совпадающего с положением равновесия, а кривая 5 — к движению, когда осциллятору, находящемуся в положении равновесия, сообщают толчок. Кривые 1, 2 и 6 соответствуют толчку, направленному к положению равновесия; кривая 4 — толчку, направленному от положения равновесия. На рис. 70 показаны

все возможные аperiодические процессы; исследования при других значениях A^* дали бы лишь измененные в масштабе или же отраженные относительно оси τ кривые. Поэтому можно утверждать, что в случае $D > 1$ могут существовать, самое большее, одна точка изменения направления движения и, самое большее, одна точка пересечения оси τ . Это утверждение справедливо и для предельного случая $D = 1$, в котором движение определяется формулой (2.136) и качественно полностью соответствует процессам, представленным на рис. 70.

2.2.2.4. Фазовый портрет. Если в исходном уравнении (2.123) использовать прежнее обозначение $x' = v$ и соответственно записать

$$x'' = \frac{dv}{d\tau} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{d\tau} = v \frac{dv}{dx},$$

то получится соотношение для направления касательной к фазовой траектории (уравнение интегральной кривой):

$$\frac{dv}{dx} = - \left(2D + \frac{x}{v} \right). \quad (2.147)$$

Таким образом уравнение второго порядка (2.123) мы перевели в уравнение первого порядка, из которого легко получить уравнение изоклин. Если положить $dv/dx = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{const}$, то из (2.147) следует уравнение изоклин

$$v = - \frac{x}{\operatorname{tg} \varphi + 2D}. \quad (2.148)$$

Согласно данному уравнению изоклины являются прямыми, проходящими через начало координат фазовой плоскости. Эти изоклины являются носителями линейных элементов (фазовых траекторий), образующих угол φ с осью x . Величину $\operatorname{tg} \varphi = dv/dx$ можно получить из уравнения (2.147). Впрочем, частный случай $D = 0$ приводит к уже рассмотренному ранее случаю, изображенному на рис. 60, в котором все линейные элементы перпендикулярны изоклинам.

Из уравнения (2.147) непосредственно видно, что в случае $D > 0$ все линейные элементы повернуты по часовой стрелке на постоянный угол, за исключением элементов, расположенных на оси x ($v = 0$); последние, как и прежде, перпендикулярны оси x . Пример

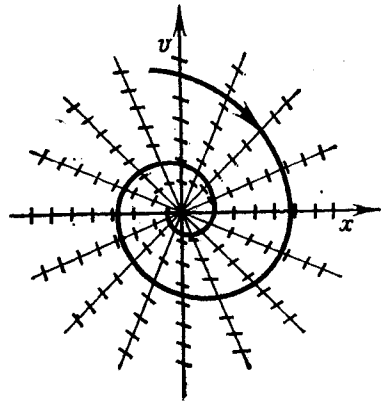


Рис. 71. Поле линейных элементов и фазовая траектория в случае $0 < D < 1$.

поля линейных элементов при $D < 1$ приведен на рис. 71. Фазовые траектории являются спиралями, а особая точка — особой точкой типа фокуса. Изображающая точка, представляющая движение осциллятора, движется по спирали в особую точку.

Линейные элементы, а вместе с ними и фазовые траектории становятся горизонтальными при

$$v = -\frac{x}{2D}.$$

Это уравнение определяет прямую, проходящую через начало координат фазовой плоскости.

Чем больше коэффициент демпфирования D , тем больше должен быть угол поворота (по часовой стрелке) линейных элементов на изоклинах. Если D достаточно велик, то при этом может оказаться, что линейный элемент будет направлен так же, как и несущая его изоклина. Такого рода изоклина уже не может пересекаться фазовыми траекториями, а становится асимптотой фазовых траекторий.

Рассмотрим, когда это происходит. Очевидно, что

$$\operatorname{tg} \varphi = v/x,$$

или с учетом (2.148)

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi + 2D}.$$

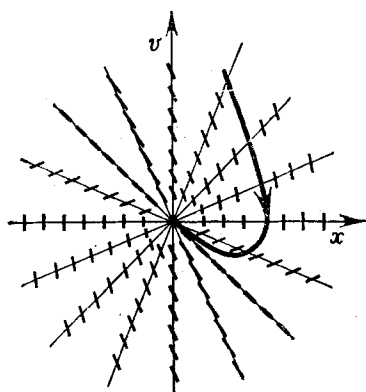


Рис. 72. Поле линейных элементов и фазовая траектория в случае $D=1$.

Это квадратное относительно $\operatorname{tg} \varphi$ уравнение имеет решения

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \varphi_1 \\ \operatorname{tg} \varphi_2 \end{array} \right\} = -D \pm \sqrt{D^2 - 1} = \begin{cases} -(D - k), \\ -(D + k). \end{cases} \quad (2.149)$$

При $D < 1$ не существует действительного решения и асимптоты-изоклины отсутствуют. В особом случае, когда $D=1$ (апериодический предельный случай), уравнение (2.149) имеет кратный корень $\operatorname{tg} \varphi = -1$. Здесь асимптотой-изоклиной будет прямая, проходящая через второй и четвертый квадранты под углом 45° . Соответствующее поле изоклин и одна из фазовых траекторий построены на рис. 72. При $D > 1$ существуют две асимптоты-изоклины с углами наклона φ_1 и φ_2 (рис. 73). Фазовые траектории, показанные на этом рисунке, соответствуют кривым, построенным в координатах x, τ на рис. 70, и обозначены здесь теми же цифрами. Сравнивая оба рисунка, легко видеть взаимосвязь между (x, τ) -диаграммами и фазовым портретом.

Каждая асимптота-изоклина сама может стать фазовой траекторией. Это происходит в том случае, когда в решении (2.134) или $A=B$, или $A=-B$, т. е. когда один из коэффициентов при частных

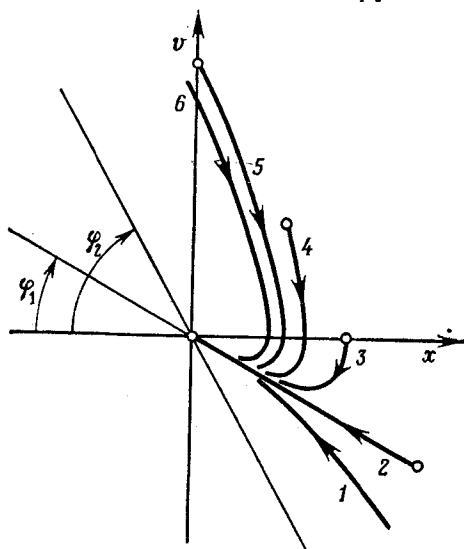


Рис. 73. Фазовые траектории в случае $D > 1$ для аperiodических движений, представленных на рис. 70.

решениях обращается в нуль. При этом изоклине с углом φ_1 соответствует медленнее убывающее первое частное решение, а изоклине с углом φ_2 — быстрее убывающее второе частное решение.



Рис. 74. Области различных типов движения в плоскости $c/m, d/m$.

При изменении величины D фазовый портрет меняется не только количественно, но и качественно. Находящаяся в начале координат фазовой плоскости особая точка, являющаяся при $D=0$ (рис. 60) особой точкой типа центра, при $0 < D < 1$ становится фокусом (рис. 71) и, наконец, при $D \geq 1$ — узлом (рис. 72

и 73). Фазовый портрет с особой точкой типа центра соответствует чисто периодическим недемпфированным колебаниям, с особой точкой типа фокуса — демпфированным колебаниям (периодический случай), а с особой точкой типа узла — аperiodическому движению.

Чтобы выразить эти взаимосвязи через коэффициенты исходного уравнения (2.115) на рис. 74 изображены полученные из соотношения (2.124) области различных типов движения в плоскости c/m , d/m . Отсюда снова видно, что величина коэффициента демпфирования d еще ничего не говорит о характере движения и что решающую роль играет безразмерная величина D .

2.2.3. Нелинейный осциллятор

2.2.3.1. Общий случай. При наличии произвольных восстанавливающих сил и сил демпфирования уравнение движения осциллятора можно записать так:

$$\ddot{x} + F(x, \dot{x}) = 0. \quad (2.150)$$

Действуя так же, как и в случае линейного осциллятора, это уравнение можно свести к уравнению первого порядка. Введем $x = v$; тогда $\ddot{x} = dv/dt = v dv/dx$ и уравнение (2.150) принимает следующий вид:

$$\frac{dv}{dx} = - \frac{F(x, v)}{v}. \quad (2.151)$$

Согласно этому уравнению, каждой точке x, v фазовой плоскости однозначно соответствует определенное направление. Поэтому любую фазовую траекторию можно построить последовательным соединением отдельных элементов касательных к ней.

Во многих случаях функцию $F(x, v)$ можно разложить на два слагаемых:

$$F(x, v) = g(v) + f(x).$$

В соответствии с многочисленными возможностями выбора функций демпфирования $g(v)$ и восстанавливающих функций $f(x)$ существует чрезвычайно много их комбинаций, большей частью встречающихся и в технической практике. Задачей предстоящего исследования не может являться рассмотрение всех имеющихся возможностей; вместо этого мы рассмотрим два типичных случая, которые могут представлять особый интерес и с практической точки зрения.

2.2.3.2. Осциллятор с сухим трением. Сухое или кулоново трение наблюдается в том случае, когда твердые тела соприкасаются и в месте соприкосновения движутся одно относительно другого. Силы трения при отсутствии смазки почти не зависят от величины скорости движения; их направление противоположно скорости относительного перемещения. Во многих случаях силу трения можно

приближенно описать следующим образом:

$$K_r = \begin{cases} -r & \text{при } v > 0, \\ +r & \text{при } v < 0, \end{cases}$$

или

$$K_r = -r \operatorname{sign} v. \quad (2.152)$$

Включив силу трения в условие равновесия сил, приложенных к механическому осциллятору, получим уравнение движения

$$m\ddot{x} + r \operatorname{sign} \dot{x} + f(x) = 0. \quad (2.153)$$

Так как при $\dot{x}=0$ сила трения скачкообразно меняется, уравнение (2.153) решается отдельно в областях $v < 0$ и соответственно $v > 0$. Частные решения в двух областях различаются лишь знаком перед коэффициентом трения r . Таким образом, достаточно получить решение для одной области, а затем учесть изменения знака в другой области. Для $v > 0$ имеем

$$m\ddot{x} + f(x) = -r.$$

Умножим это уравнение на $v = \dot{x}$ и проинтегрируем по времени:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^x f(x) dx = E_0 - rx, \quad (2.154)$$

или

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0 - rx = \bar{E}_0. \quad (2.155)$$

Этот результат можно истолковать как обобщенное энергетическое соотношение с энергетической «константой» \bar{E}_0 , зависящей от x . Уже из уравнения (2.155) очень наглядным способом можно найти закон уменьшения амплитуды. Если построить график зависимости потенциальной энергии от x (рис. 75), то из полученной диаграммы сразу же — совершенно аналогично соотношениям для линейного осциллятора — определяется кинетическая энергия. Для этой цели нужно нанести на указанный график наклонную прямую $E_0 - rx$. В области $v > 0$ эта прямая имеет отрицательный наклон.

Точки изменения направления движения характеризуются значениями $v=0$, или $E_{\text{kin}}=0$. Соответствующие значения амплитуды x получают как точки пересечения кривой E_{pot} с «прямой потери энергии» $E_0 - rx$. Если, например, движение начинается при $x=x_1 < 0$ и $v=0$, то первая точка изменения направления движения получается при амплитуде $x=x_2 > 0$ и мы покидаем область $v > 0$. Для движения в обратном направлении в уравнение (2.155) нужно подставить другое значение $E_0 = E_{02}$ и противоположный знак перед r . Таким образом получается прямая потери энергии с положительным наклоном, которая, конечно, должна стыковаться с прямой, соответствующей

первому полуколебанию, т. е. проходить через точку пересечения первой прямой с кривой E_{pot} при $x=x_2$. Другая точка пересечения второй прямой с кривой E_{pot} дает следующую точку изменения направления движения и соответственно амплитуду $x=x_3$.

Можно продолжить такое построение и найти последовательность точек изменения направления движения. Последовательность x_n обрывается, когда наклон кривой E_{pot} становится меньше накло-

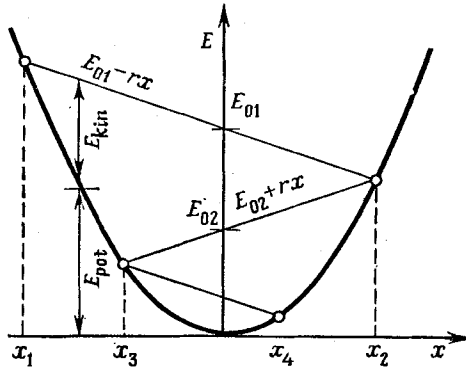


Рис. 75. Построение точек изменения направления движения осциллятора с сухим трением.

на прямой потери энергии. Это легко объяснить физически: при уменьшении отклонения x восстанавливающая сила уменьшается, в то время как сила трения сохраняет постоянную величину. Начиная с определенного значения отклонения x сила трения становится больше восстанавливающей силы, и последняя уже не может вызвать смещение осциллятора из соответствующей точки изменения направления движения. Колебания заканчиваются в *мертвой зоне*, определяемой величиной силы трения r .

Из (2.155) можно непосредственно вывести также уравнения фазовых траекторий:

$$\begin{aligned} v &= + \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - rx - E_{\text{pot}})}, \quad v > 0, \\ v &= - \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 + rx - E_{\text{pot}})}, \quad v < 0. \end{aligned} \quad (2.156)$$

Соответственно получаются выражения для периода колебания. При этом интервалы времени, за которые совершаются полуколебания, рассчитываются отдельно. Таким образом,

$$T = T_1 + T_3,$$

причем

$$T_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E_0 - rx - E_{\text{pot}})}}, \quad T_2 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E_0 + rx - E_{\text{pot}})}}. \quad (2.157)$$

В качестве простого, но типичного примера рассмотрим случай линейной восстанавливающей силы $f(x) = cx$. Здесь

$$E_{\text{pot}} = \int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2} cx^2,$$

и энергетическое соотношение (2.155) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} c x^2 + r x &= E_0, \\ \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} c \left(x + \frac{r}{c}\right)^2 &= E_0 + \frac{r^2}{2c} = E_0^*, \end{aligned}$$

или при $\omega_0^2 = c/m$

$$\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 + \left(x + \frac{r}{c}\right)^2 = \frac{2E_0^*}{c}. \quad (2.158)$$

Если описываемые этим соотношением фазовые траектории построить в фазовой плоскости, где по оси ординат откладывается не v ,

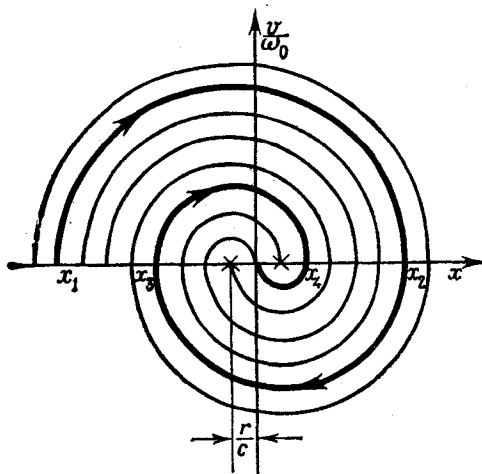


Рис. 76. Фазовый портрет осциллятора с сухим трением и линейной восстанавливающей силой.

а v/ω_0 , то получатся окружности, центр которых сдвинут из начала отсчета по оси абсцисс влево на величину r/c (рис. 76). Этот расположенный слева центр является центром всех полуокружностей в

верхней полуплоскости. Соответствующим образом получают расположенный справа центр всех полуокружностей в нижней полуплоскости. Фазовые траектории составляются из последовательно такого рода полуокружностей, которые при пересечении оси абсцисс все время переходят одна в другую. Из фазового портрета также нетрудно видеть, что движение должно прийти к состоянию покоя через конечное число полуколебаний. При каждом полуколебании происходит уменьшение амплитуды, равное

$$\Delta x = 2r/c,$$

и если колебание начинается при начальной амплитуде x_1 и $v=0$, то число полуколебаний n можно определить как наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$|x_1| - \frac{2r}{c} n < \frac{r}{c}.$$

Для расчета периода колебания можно преобразовать выражение (2.157) так же, как было сделано при выводе уравнения фазового портрета (2.158); это дает

$$T_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{(2/m) \left[E_0^* - \frac{1}{2} c \left(x + \frac{r}{c} \right)^2 \right]}}.$$

Вводя новую переменную $\xi = x + r/c$ и полагая $\omega_0^2 = c/m$, получаем

$$T_1 = \frac{1}{\omega_0} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d\xi}{\sqrt{2E_0^*/c - \xi^2}} = \frac{1}{\omega_0} \arcsin \frac{\xi}{\sqrt{2E_0^*/c}} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{\pi}{\omega_0},$$

где пределы интегрирования равны

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{2E_0^*}{c}}, \quad \xi_2 = +\sqrt{\frac{2E_0^*}{c}}.$$

Таким образом, время T_1 первого полуколебания не зависит от величины амплитуды и силы трения. Для второй области при $v < 0$ получается то же самое время колебания $T_2 = T_1$, так как изменение знака силы трения r не влияет на время полуколебания. Период колебания составляет

$$T = T_1 + T_2 = 2\pi/\omega_0$$

и в точности соответствует величине периода недемпфированного колебания.

Может возникнуть вопрос: возможно ли при сопротивлении типа сухого трения аperiodическое, а не колебательное движение? После всего сказанного выше легко видеть, что это невозможно, так как каждое полуколебание в данном слу-

чае происходит точно так же, как недемпфированное, только при смещенном положении равновесия. Однако возможно, что уже после одного полуколебания осциллятор остановится в мертвой зоне около среднего положения. Для этого должно выполняться неравенство

$$\frac{r}{c} < |x_1| \leq \frac{3r}{c}.$$

В отличие от условий для линейного осциллятора это условие аperiodичности зависит от величины начального отклонения.

В качестве второго примера приведем рассмотренный в разд. 2.1.3.5 осциллятор с постоянной по величине восстанавливающей силой, меняющей знак при прохождении положения равновесия. Если при этом имеется и сухое трение, то уравнение движения запишется так:

$$m\ddot{x} + r \operatorname{sign} \dot{x} + h \operatorname{sign} x = 0. \quad (2.159)$$

Отсюда следует, что $\ddot{x} = \text{const}$, причем эта постоянная принимает различные значения в различных квадрантах фазовой плоскости. Полученные результаты сведены в табл. 2 (нумерация квадрантов приведена на рис. 77).

Фазовый портрет изображен на рис. 77. Он состоит из отрезков парабол, которые в квадрантах I и III проходят более круто, чем в квадрантах II и IV. Смысл начальных условий, входящих в уравнение фазового портрета (столбец x , v табл. 2), непосредственно ясен из рисунка.

Таблица 2

Квадрант	$g(v)$	$f(x)$	\ddot{x}	x (соответственно v)
I	$+r$	$+h$	$-\frac{h+r}{m}$	$x_1 = \frac{v_0^2 m}{2(h+r)}$
II	$-r$	$+h$	$-\frac{h-r}{m}$	$v_2 = -v_0 \sqrt{\frac{h-r}{h+r}}$
III	$-r$	$-h$	$\frac{h+r}{m}$	$x_3 = -x_1 \frac{h-r}{h+r}$
IV	$+r$	$-h$	$\frac{h-r}{m}$	$v_4 = v_0 \frac{h-r}{h+r}$

Построенный на рис. 77 фазовый портрет относится к случаю $r < h$. При этом мертвой зоны в окрестности нулевого положения не существует, так как восстанавливающая сила всегда больше силы трения. Напротив, в случае $r > h$ получается фазовый портрет, где

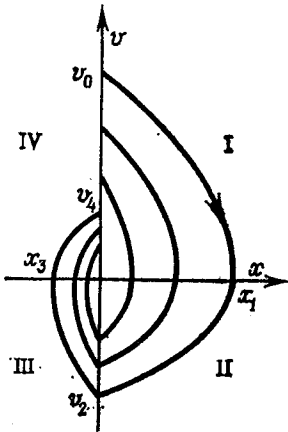


Рис. 77. Фазовый портрет осциллятора с сухим трением и разрывной восстанавливающей силой.

вся ось x относится к мертвой зоне. Любая фазовая траектория, подходящая к оси x , заканчивается на этой оси, так как сила трения превышает восстанавливающую силу при любом отклонении.

2.2.3.3. Сила демпфирования, пропорциональная квадрату скорости. При быстром движении тел в жидкостях или газах, обладающих малой вязкостью, возникают вихри, на формирование которых затрачивается энергия. При этом развиваются силы сопротивления, приближенно пропорциональные квадрату скорости движения. В таком случае говорят о *турбулентном сопротивлении*. Силы сопротивления, как всегда, направлены противоположно направлению движения. Введем коэффициент пропорциональности Q ; тогда

$$K_w = -Qv^2 \operatorname{sign} v = -Q|v|v$$

Уравнение движения механического осциллятора теперь принимает вид

$$m\ddot{x} + Qv^2 \operatorname{sign} v + f(x) = 0. \quad (2.160)$$

Здесь решения тоже находятся по отдельности в областях $v > 0$ и $v < 0$. Сначала рассмотрим случай $v > 0$. Введя обозначение $2Q/m = q$ и заменив \ddot{x} выражением

$$\ddot{x} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dx},$$

получим из (2.160) дифференциальное уравнение первого порядка, линейное относительно v^2 :

$$\frac{dv^2}{dx} + qv^2 + \frac{2}{m} f(x) = 0. \quad (2.161)$$

Это уравнение имеет решение

$$v^2 = e^{-qx} \left[C - \frac{2}{m} \int_0^x f(x) e^{qx} dx \right], \quad (2.162)$$

где C — постоянная интегрирования.

В случае $v < 0$ получается аналогичное уравнение, только с другим знаком коэффициента q . Введем теперь функции

$$F_o(x) = \frac{2}{m} \int_0^x f(x) e^{qx} dx \quad \text{при } v > 0 \text{ (верхняя полуплоскость плоскости } x, v),$$

$$F_u(x) = \frac{2}{m} \int_0^x f(x) e^{-qx} dx \quad \text{при } v < 0 \text{ (нижняя полуплоскость плоскости } x, v)$$
(2.163)

и определим постоянную интегрирования C в (2.152) при начальных условиях $x = x_1 < 0, v = 0$. Она будет равна $C = F_o(x_1)$, так что уравнение фазовой траектории примет следующий вид:

$$v^2 = e^{-qx} [F_o(x_1) - F_o(x)], \quad v > 0,$$

$$v^2 = e^{qx} [F_u(x_2) - F_u(x)], \quad v < 0.$$
(2.164)

Отсюда может быть определена последовательность максимальных отклонений. Точки изменения направления движения соответ-

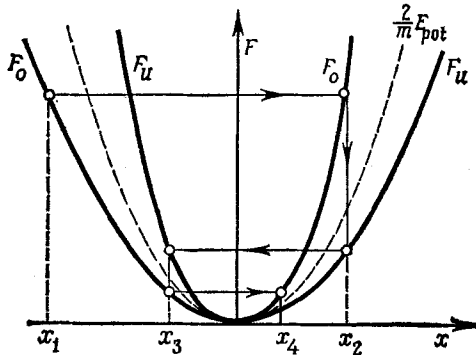


Рис. 78. Построение точек изменения направления движения осциллятора в среде демпфирования, пропорционального квадрату скорости.

ствуют $v = 0$. Если первая точка x_1 изменения направления движения задана, то вторую точку можно сразу найти из первого уравнения (2.164) и равенства

$$F_o(x_2) = F_o(x_1). \quad (2.165)$$

Поведение осциллятора наглядно представлено на рис. 78, где построены графики функций F_o и F_u в зависимости от x . Эти кривые похожи на приведенную ранее кривую потенциальной энергии. Действительно, легко установить, что имеют место следующие соотно-

шения:

$$F_o(x) > \frac{2}{m} E_{\text{pot}} > F_u(x), \quad x > 0;$$

$$F_o(x) < \frac{2}{m} E_{\text{pot}} < F_u(x), \quad x < 0.$$

Для нахождения последовательности амплитуд на диаграмме, приведенной на рис. 78, начинают с точки $x = x_1 < 0$ и проводят через нее вертикаль до пересечения с кривой F_o . Вторую амплитуду x_2 получают согласно соотношению (2.165), проводя горизонталь до пересечения с правой ветвью кривой F_o . В этой точке происходит переход из области $v > 0$ в область $v < 0$. Теперь следует найти $F_u(x_2)$ и перенести по горизонтали значение полученной ординаты на левую ветвь той же кривой. Точка пересечения имеет абсциссу x_3 . Продолжая этот процесс, получают всю последовательность амплитуд.

Этот метод можно упростить в том случае, когда $f(x)$ является нечетной функцией, т. е. когда выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$. Тогда из (2.163) следует, что $F_o(x) = F_u(-x)$, и отдельные ветви кривых F_o и F_u симметричны

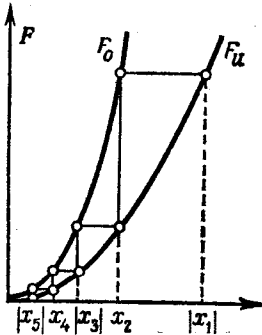


Рис. 79. То же, что на рис. 78, в случае нечетной восстанавливающей силы $f(x)$.

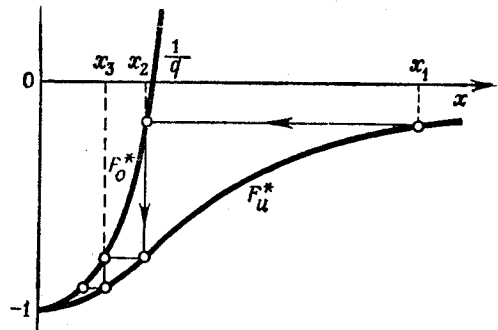


Рис. 80. То же, что на рис. 78, в случае линейной восстанавливающей силы.

относительно оси ординат. Поэтому достаточно построить половину диаграммы (рис. 79). Если теперь снова начать с амплитуды x_1 , то, очевидно, можно найти все последующие амплитуды, спускаясь как по лесенке между обеими кривыми. Правда, при этом знак координаты x теряется, но это не имеет никакого значения, поскольку знаки чередуются.

Период колебания определяется из (1.20) с учетом (2.164). Мы снова имеем

$$T = T_1 + T_2,$$

$$T_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{e^{(q/2)x} dx}{\sqrt{F_o(x_1) - F_o(x)}}, \quad T_2 = \int_{x_2}^{x_3} \frac{e^{-(q/2)x} dx}{\sqrt{F_u(x_2) - F_u(x)}}. \quad (2.166)$$

В качестве простого примера рассмотрим случай, когда $f(x) = cx$. Из (2.163) получим вспомогательные функции

$$\begin{aligned} F_o(x) &= -\frac{2c}{mq^2} [e^{qx} (1 - qx) - 1], \\ F_u(x) &= -\frac{2c}{mq^2} [e^{-qx} (1 + qx) - 1]. \end{aligned} \quad (2.167)$$

Так как постоянный коэффициент $2c/(mq^2)$, а также вычитаемое -1 в квадратных скобках не влияют на амплитуды, на рис. 80 построены лишь графики функций $F_o^* = -e^{qx} (1 - qx)$ и $F_u^* = -e^{-qx} (1 + qx)$. Последовательность точек изменения направления движения находится здесь описанным выше способом.

Из хода кривых видно важное свойство рассматриваемого осциллятора. Кривая F_o^* пересекает ось x в точке $x = 1/q$ и при больших значениях x остается в верхней полуплоскости. Функция F_u^* , наоборот, отрицательна при всех значениях x . Отсюда следует, что, сколь бы велика ни была начальная амплитуда x_1 , вторая амплитуда не может быть больше чем $1/q$,

$$|x_2| \leq 1/q.$$

Из уравнения фазовых траекторий (2.164) с учетом (2.167) получаем

$$\begin{aligned} v &= + \sqrt{\frac{2c}{mq^2} [(1 - qx) - (1 - qx_1) e^{q(x_1 - x)}]}, \\ v &= - \sqrt{\frac{2c}{mq^2} [(1 + qx) - (1 + qx_2) e^{-q(x_2 - x)}]}. \end{aligned} \quad (2.168)$$

Из обоих соотношений видно, что при предположении одинаковых начальных условий фазовые траектории нижней полуплоскости ($v < 0$) получаются из траекторий верхней полуплоскости изменением знаков x и v . Поэтому верхние и нижние части фазовых траекторий при $x_1 = x_2$ (которые, правда, не относятся к одному процессу) могут быть совмещены поворотом на 180° вокруг начала координат фазовой плоскости.

Период колебания также определяется обычным интегрированием. Однако, поскольку интеграл, получающийся при подстановке (2.167) в (2.166), в явном виде не берется, подробнее эта задача здесь не рассматривается.

Результаты, полученные для осциллятора с квадратичным демпфированием, можно без каких-либо изменений использовать и в случае, когда на осциллятор действуют возмущающие силы

$$K = Qu^2 \text{ или } K = -Qu^2.$$

Эти силы всегда положительны (соответственно отрицательны), и поэтому для одного полуколебания их действие подобно демпфированию, а для следующего — возмущению. Демпфирование в одной области компенсируется возмущением в следующей области, так что колебания оказываются периодическими,

хотя и несимметричными относительно точки $x=0$. Фазовый портрет подобного осциллятора определяется первым из уравнений (2.168) со знаком $\pm v$ уже на всей фазовой плоскости. Легко сообразить, что фазовые траектории всегда замкнуты и их нижние половины получаются из верхних простым отображением относительно оси x .

2.2.3.4. Энергетический метод решения уравнений колебаний. Метод энергетического баланса. Вполне приемлемую оценку решений уравнения колебаний

$$m\ddot{x} + g(\dot{x}) + f(x) = 0 \quad (2.169)$$

можно получить в том случае, когда влияние демпфирования мало, т. е. сила демпфирования мала по сравнению с восстанавливающей силой и силой инерции, так что максимальная величина члена $g(\dot{x})$ мала по сравнению с максимальными величинами двух других членов.

Для линейно демпфированного осциллятора было показано, что период колебания почти не зависит от силы демпфирования при ее малой величине. Это справедливо и для уравнения общего вида (2.169). Но кроме периода колебания нас интересует уменьшение амплитуды, и здесь можно воспользоваться энергетическим методом, в большинстве случаев дающим достаточно хорошее приближение.

Чтобы получить интеграл энергии для (2.169), умножим, как обычно, это уравнение на \dot{x} и проинтегрируем по времени:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int_0^t g(\dot{x}) \dot{x} dt + \int_0^x f(x) dx = E_0. \quad (2.170)$$

Если ввести величину E_D , потерю энергии на преодоление сил демпфирования,

$$E_D = \int_0^t g(\dot{x}) \dot{x} dt, \quad (2.171)$$

то энергетическое соотношение можно привести к виду

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = E_0 - E_D.$$

Так как при каждом амплитудном значении $v=0$ и соответственно $E_{\text{kin}}=0$, а E_0 является постоянной интегрирования, при движении между двумя амплитудными значениями x_1 и x_2 выполняется соотношение

$$E_{\text{pot}}(x_2) - E_{\text{pot}}(x_1) = -\Delta E_D = -\int_{t_1}^{t_2} g(\dot{x}) \dot{x} dt. \quad (2.172)$$

Потенциальную энергию E_{pot} можно считать известной функцией от x , и поэтому из (2.172) при заданной величине ΔE_D можно найти уменьшение амплитуды Δx . Действительно, пренебрегая членами высшего порядка в разложении в ряд Тейлора, приближенно определяем $E_{\text{pot}}(x_2)$:

$$E_{\text{pot}}(x_2) \approx E_{\text{pot}}(x_1) - \left[\frac{d}{dx}(E_{\text{pot}}) \right]_{x=x_1} \Delta x = E_{\text{pot}}(x_1) - f(x_1) \Delta x,$$

что с учетом (2.172) дает

$$\Delta x = \Delta E_D / f(x_1). \quad (2.173)$$

Соотношения (2.172) и (2.173) применимы только в том случае, когда известна величина ΔE_D . Однако в эту величину входит скорость колебания \dot{x} , которая сама должна была бы быть найдена интегрированием исходного уравнения. В силу предположения, что силы демпфирования малы, не будет допущено слишком большой ошибки, если для определения потери энергии на преодоление сил демпфирования ΔE_D использовать значение скорости, соответствующее недемпфированному колебанию. При этом всегда можно вычислить интеграл, входящий в (2.172), и тем самым определить ΔE_D . Для недемпфированных колебаний линейной системы мы имеем

$$x = A \cos \omega t, \quad \dot{x} = v = -A\omega \sin \omega t. \quad (2.174)$$

Эти выражения часто можно применять как хорошее приближение и для нелинейных колебаний. Ожидаемая ошибка будет оставаться малой уже вследствие того, что в этом случае выражение (2.174) для \dot{x} используется только для расчета влияния демпфирования, малого по предположению.

Подставляя (2.174) в интеграл правой части (2.172), получаем

$$\Delta E_D = \int_{t_1}^{t_2} g(-A\omega \sin \omega t)(-A\omega \sin \omega t) dt,$$

или

$$\Delta E_D = -A \int_0^{2\pi} g(-A\omega \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (2.175)$$

Таким образом для любой функции $g(x)$ можно вычислить ΔE_D , т. е. потерю энергии на преодоление сил демпфирования за полное колебание. В качестве примера исследуем уже рассмотренный выше случай сухого трения, когда

$$g(x) = r \operatorname{sign} x, \quad \Delta E_D = 2Ar \int_0^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) = 4Ar. \quad (2.176)$$

Для восстанавливающей силы примем $f(x) = cx$, так что

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2} cx^2.$$

Принимая во внимание выражение (2.176) и полагая $x_1 = A$, из уравнения (2.173) получаем уменьшение амплитуды за полное колебание:

$$\Delta x = 4 r/c.$$

Эта величина в точности совпадает с уменьшением амплитуды, которое было получено в разд. 2.2.3.2 без каких-либо допущений.

Приближенная формула (2.175) для потери энергии на преодоление сил демпфирования, полученная здесь из интеграла энергии, похожа на формулу (2.110), которая была выведена для эквивалентного коэффициента восстанавливающей силы $c = c(A)$. Действительно, здесь также можно найти эквивалентный коэффициент демпфирования $d = d(A)$:

$$g(x) = d(A) \dot{x}.$$

Чтобы определить $d(A)$, нужно потребовать точного равенства величин потери энергии ΔE_D , подсчитанных при помощи эквивалентного выражения $d\dot{x}$ и при помощи формулы (2.175). Так как при этом потеря энергии составляет

$$\Delta E_D = \int_0^{2\pi/\omega} d\dot{x}^2 dt = \int_0^{2\pi/\omega} dA^2 \omega^2 \sin^2 \omega t dt = dA^2 \omega \pi,$$

из сравнения с (2.175) следует, что

$$d = d(A) = -\frac{1}{\pi A \omega} \int_0^{2\pi} g(-A \omega \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (2.177)$$

Это выражение, полученное приравнованием выражений энергии (*энергетический баланс*), можно получить также методом гармонического баланса, использованным при выводе эквивалентного коэффициента восстанавливающей силы. В данном случае оба метода эквивалентны.

При помощи (2.177) нелинейная функция $g(x)$ преобразуется в линейное эквивалентное выражение $d\dot{x}$, которое может быть подставлено в исходное уравнение (2.169). Последнее можно затем рассматривать как уравнение с линейной функцией демпфирования; при этом только нужно иметь в виду, что d является функцией амплитуды A .

Нетрудно убедиться в том, что если в качестве функции демпфирования взять $g(\dot{x}) = r \operatorname{sign} \dot{x}$ (сухое трение), то и этим приближенным методом снова можно найти полученную ранее величину уменьшения амплитуды Δx . Тогда из (2.177)

получаем

$$d(A) = \frac{4r}{\pi A \omega}.$$

Если, кроме того, $f(x) = cx$, то, согласно (2.124), имеем

$$D = \frac{d\omega}{2c} = \frac{2r}{\pi A c}.$$

Отношение двух последовательных амплитуд определяется по формуле (2.142):

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{D\tau_s} = \exp[2\pi D / \sqrt{1 - D^2}].$$

В силу предположения о малости демпфирования $D \ll 1$, так что

$$x_n \approx x_{n+1} (1 + 2\pi D) = x_{n+1} \left(1 + \frac{4r}{Ac}\right).$$

Поскольку $\Delta x = x_n - x_{n+1}$ и $x_{n+1} = A$, снова получаем уже известную величину уменьшения амплитуды:

$$\Delta x = 4r/c.$$

2.3. Задачи

1. К жестко закрепленной в верхнем конце винтовой пружине жесткостью c_1 подвешена вторая винтовая пружина жесткостью c_2 . На второй пружине закреплена масса m . Массы пружин пренебрежимо малы по сравнению с m . Определить жесткость c одной пружины, эквивалентной обеим пружинам.

2. Масса m закреплена между двумя пружинами жесткостью c_1 и c_2 (см. рис. 25). Определить жесткость одной пружины, эквивалентной обеим пружинам.

3. Определить собственную круговую частоту ω малых вертикальных колебаний массы m , подвешенной на проволоке длиной L и поперечным сечением F ; модуль упругости материала проволоки равен E , масса проволоки пренебрежимо мала.

4. Цилиндрический стержень с поперечным сечением F , длиной L и плотностью ρ плавает в вертикальном положении в жидкости с плотностью ρ_f . Вывести уравнение вертикальных колебаний погруженного в жидкость стержня и рассчитать собственную круговую частоту этих колебаний. Влиянием совместно колеблющейся массы жидкости пренебречь.

5. На закрепленной в верхнем конце винтовой пружине подвешены две равные массы. Статическое удлинение пружин под действием обеих масс равно a . В положении равновесия одна из масс отделяется от пружины без начальной скорости. Определить амплитуду и частоту возникающих при этом колебаний.

6. Осциллятор из задачи 5 (винтовая пружина с двумя равными массами) совершает гармонические колебания по закону $x = a + A \cos \omega t$. Найти амплитуду A^* колебаний, возникающих после того, как одна из масс отделяется без начальной скорости

а) в среднем положении ($x = a$),

б) в нижней точке изменения направления движения ($x = a + A$),

в) в верхней точке изменения направления движения ($x = a - A$).

7. Масса m движется под влиянием силы тяжести по расположенной в вертикальной плоскости параболе $y = ax^2$; ось y направлена по вертикали. Найти уравнение фазовых траекторий $\dot{x} = \dot{x}(x)$ и собственную круговую частоту для случая малых колебаний.

8. На каком расстоянии s от центра тяжести нужно закрепить однородный тонкий стержень длиной L , чтобы получился минимальный маятник?

9. Круговое кольцо массой m и радиусом R подвешено на трех нитях длиной L так, что плоскость кольца горизонтальна. Какова круговая частота малых кру-

тильных колебаний кольца вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр? Какова будет круговая частота, если вместо кольца подвесить однородный диск той же массы и того же радиуса?

10. Масса может двигаться (при полном отсутствии трения) по плоскости, касательной к поверхности Земли. Найти период малых колебаний этой массы, происходящих под действием силы тяжести относительно положения равновесия (точки касания плоскости с поверхностью Земли). Радиус Земли $R=6350$ км, ускорение свободного падения $g=9,81$ м/с².

11. Найти период колебания осциллятора с массой m и восстанавливающей силой

$$f(x) = \begin{cases} h+cx & \text{при } x \geq 0, \\ -h+cx & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

12. Найти период колебания осциллятора с массой m и восстанавливающей силой

$$f(x) = \begin{cases} c(x-x_t) & \text{при } x > x_t, \\ 0 & \text{при } x_t \geq x \geq -x_t, \\ c(x+x_t) & \text{при } -x_t > x, \end{cases}$$

если амплитуда $A > x_t$.

13. Период колебаний осциллятора с линейной восстанавливающей функцией и линейной функцией демпфирования при включении демпфирования увеличивается на 8% по сравнению со значением, которое получается для недемпфированного осциллятора. Какова величина коэффициента демпфирования D ?

14. У линейно демпфированного осциллятора измерены три последовательные амплитуды: $x_1=8,6$ мм; $x_2=4,1$ мм; $x_3=2,3$ мм. Каково среднее положение x_m осциллятора? Какова величина логарифмического декремента затухания θ и коэффициента демпфирования D ?

15. При линейно демпфированных колебаниях измерены постоянная времени $T_z=5$ с и период колебания $T_s=2$ с. Каковы θ и D ?

16. При линейно демпфированных колебаниях измерены:

1) время $t_1=2$ с между прохождением через среднее положение и достижением максимума отклонения;

2) время $t_2=2,2$ с между достижением максимума и следующим за ним прохождением через нулевое положение. Какова величина D ? Какова величина следующей амплитуды в процентах от предшествующей?

17. Для определения характеристик сильно демпфированного линейного осциллятора ($D > 1$) его вывели из положения покоя $x=0$ в момент $t=0$. Измерены следующие отклонения:

при $t=1$ с: $x_1=1$ м,

при $t=2$ с: $x_2=0,5$ м,

при $t=4$ с: $x_3=0,1$ м.

Каковы величины постоянных времени обеих составляющих движения T_{z1} и T_{z2} осциллятора?

18. На осциллятор с линейной восстанавливающей силой $-cx$ и жесткостью пружины $c=2$ Н/см действует тормоз, развивающий постоянную силу торможения $r=1$ Н. Однако тормоз действует только в области $-1 \text{ см} \leq x \leq +1 \text{ см}$, а вне этой области осциллятор колеблется без демпфирования. Найти последовательность точек изменения направления движения, если колебание начинается с отклонения $x_0=-3$ см при $\dot{x}_0=0$. После какого числа полупериодов движение прекратится?

19. Найти эквивалентный коэффициент демпфирования $D=D(A)$ для осциллятора с линейной восстанавливающей силой $f(x)=cx$ и нелинейной силой демпфирования $g(\dot{x})=k\dot{x}^3$. По формуле (2.173) вычислить уменьшение амплитуды Δx за каждое полное колебание.

3. Автоколебания

Автоколебания являются колебаниями особого рода. Они отличаются от рассмотренных в гл. 2 собственных колебаний как механизмом возникновения, так и механизмом сохранения амплитуды. Для склонной к автоколебаниям системы характерно наличие источника энергии (не обладающего колебательными свойствами), из которого в систему поступает энергия, необходимая для возмещения неизбежных энергетических потерь.

В этой главе мы сначала на практических примерах качественно исследуем механизм возникновения автоколебаний, для чего введем некоторые важные новые понятия, а затем опишем математические методы расчета автоколебательных систем и применение этих методов для исследования ряда конкретных случаев.

3.1. Структура и принцип действия автоколебательной системы

3.1.1. Системы осцилляторного и накопительного типов

По структуре и принципу действия автоколебательные системы можно разделить на два типа. Для первого типа, который мы назовем *осцилляторным типом*, характерна структура, схематически показанная на рис. 81. Здесь имеется источник питания системы энергией, причем подвод энергии не происходит произвольно, а осуще-

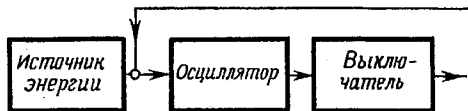


Рис. 81. Блок-схема автоколебательной системы осцилляторного типа.

вляется при помощи механизма управления (на рис. 81 выключателя), приводимого в действие самой системой. Выключатель действует как обратная связь между колебательной системой и источником энергии, обеспечивая подвод энергии в нужный момент периода колебаний.

Важнейшие элементы автоколебательной системы легко показать на примере электрического звонка (рис. 82). Источником энергии является батарея или электрическая сеть. В качестве осциллятора используется закрепленный на плоской пружине молоточек. Молоточек несет пластину, которая в положении его покоя — при неподключенном напряжении — замыкает контакт. При подключенном напряжении электрический контур оказывается замкнутым и электромагнит притягивает закрепленный на молоточке стальной якорь; при этом контакт размыкается, и весь цикл повторяется снова. Таким образом возбуждаются колебания молоточка, при которых (благодаря периодическому замыканию и размыканию контакта) происходит подвод энергии в нужный момент периода. Поэтому, несмотря на потери энергии при ударе молоточка о колокольчик, колебания будут незатухающими.

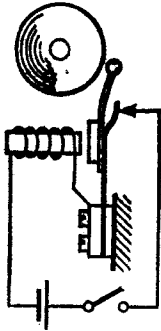


Рис. 82. Электрический звонок.

Отличительной особенностью системы, изображенной на рис. 81, является обратная связь от осциллятора через выключатель к источнику энергии. Лишь благодаря этой обратной связи возможно самовозбуждение колебаний и их существование.

Некоторые примеры автоколебательных систем осцилляторного типа приведены в табл. 3.

В некоторых случаях отдельные элементы схемы, приведенной на рис. 81, не всегда так легко распознать, как в случае звонка или часов. Например, механизм поступления энергии, необходимой для колебаний виолончельной струны, весьма сложен и будет предметом дальнейшего обсуждения. Аналогичный механизм возникновения колебаний имеет место в ряде самовозбуждающихся колебательных систем, в которых происходят так называемые фрикционные колебания. К последним относятся, например, пронзительные шумы трамваев на повороте, визг тормозов, скрип плохо смазанных дверных петель, а также колебания заготовок и резцов на токарных станках.

Равным образом случай колебаний несущего крыла самолета, приведенный в таблице, является лишь одним из примеров колебаний, возбуждаемых потоком. Сюда относятся столь часто наблюдаемые колебания провисающих проводов, колебания мостов и других сооружений, происходящие в воздушном потоке. Здесь же следует упомянуть процесс возникновения звука в органах труб.

В таблице не приведены чрезвычайно разнообразные по механизму своего возникновения колебания в контурах регулирования. Кроме того, в ней не упомянуты высокочастотные колебания гидравлических сервомоторов, колебания (шимми) колес автомобилей

Таблица 3

	Система	Источник энергии	Осциллятор	Способ осуществления обратной связи
1	Звонок	Батарея (сеть)	Молоточек	Контакт
2	Часы	Напряженная пружина	Балансир	Спусковой регулятор
3	Виолончельная струна	Движущийся смычок	Струна	Сухое трение с убывающей характеристикой
4	Несущее крыло самолета	Воздушный поток	Упругое крыло	Нестационарные силы взаимодействия воздушного потока и колеблющегося крыла
5	Радиопередатчик	Электросеть	Колебательный контур	Регулирующее воздействие сетки

в определенных интервалах скоростей, а также другие явления аналогичного типа.

Принципиальная схема автоколебательной системы *накопительного типа* приведена на рис. 83. Место осциллятора здесь занимает накопитель, через который проходит поток энергии системы. Теперь

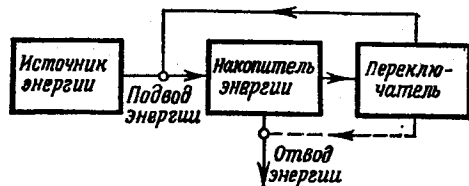


Рис. 83. Блок-схема автоколебательной системы накопительного типа.

управляемый накопителем переключатель осуществляет обратную связь, воздействующую либо на подвод энергии, либо на ее отвод из накопителя (а в особых случаях и на оба эти процесса).

Особенно наглядный пример соответствующего механического устройства представлен на рис. 84. Закрепленный на вращающемся рычаге пустой сосуд легче противовеса, находящегося на другом

конце рычага. В положении, показанном сплошными линиями, сосуд наполняется равномерно поступающей в него водой и поэтому центр тяжести системы перемещается вверх. При совершенно определенном уровне воды сосуд опрокидывается, вода выливается и система снова занимает исходное положение. Процесс наполнения сосуда и опрокидывания периодически повторяется. Подобные колебания называют *разрывными*, даже если потеря равновесия происходит не столь резко, как в данном случае.

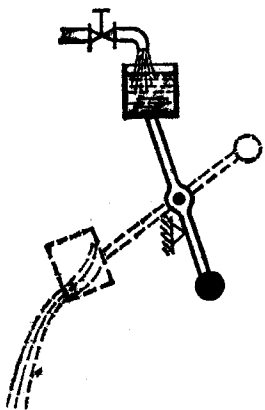


Рис. 84. Механический осциллятор, совершающий разрывные колебания.

Пример электрической колебательной системы, в которой происходят разрывные колебания, приведен на рис. 85. Здесь конден-

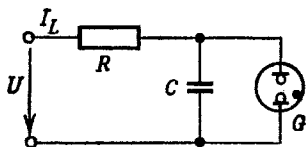


Рис. 85. Электрический колебательный контур, в котором происходят разрывные колебания.

сатор C заряжается током зарядки I_L через сопротивление R . Конденсатор замкнут на неоновую разрядную лампу G . Когда напряжение на конденсаторе достигает величины напряжения зажигания, лампа зажигается и конденсатор разряжается через лампу до тех пор, пока не будет достигнуто так называемое напряжение затухания и тем самым не прекратится процесс разрядки конденсатора. После этого весь процесс начинается снова. Разрывные колебания здесь возможны потому, что напряжение зажигания и напряжение затухания отличаются друг от друга.

Следует заметить, что не всегда удастся вполне однозначно разграничить автоколебательные системы осцилляторного и накопительного типов. Можно представить себе такие системы, которые могут быть отнесены как к одному, так и к другому типу. Это станет понятным, если подумать о том, что любая колебательная система всегда состоит из накопителей, между которыми происходит обмен энергией. В случае сильно демпфированных собственных колебаний к системе при каждом колебании должно подводиться большое количество энергии, и тогда можно считать, что поток энергии управляется накопителем колебательной системы, а форма колебаний очень близка к разрывной. В разд. 3.3 и 3.4 мы познакомимся с примерами таких колебаний.

3.1.2. Баланс энергии и фазовый портрет

Для понимания физической природы автоколебаний необходимо рассмотреть энергетический баланс колебаний. Наряду с формами энергии, используемыми для объяснения собственных

колебаний (потенциальной и кинетической энергий) в автоколебаниях определенную роль играют потеря энергии на преодоление сил демпфирования E_D и подводимая извне энергия E_Z . Если действующие в системе силы демпфирования незначительны, то происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и наоборот, как это было в случае собственных колебаний. При автоколебаниях общее количество энергии, переходящей из одной формы в другую, зависит также от E_D и E_Z . Здесь нет необходимости знать E_D и E_Z в каждый момент времени t ; чтобы получить общую картину колебания, вполне достаточно знать ΔE_D , т. е. потерю энергии на преодоление сил демпфирования за период колебания, а также подводимую извне энергию ΔE_Z за тот же период. Если $\Delta E_D - \Delta E_Z > 0$, то в течение каждого периода колебания энергия у системы отбирается и происходят затухающие колебания. Если, наоборот, $\Delta E_D - \Delta E_Z < 0$, то энергия системы увеличивается и колебания нарастают.

Как ΔE_D , так и ΔE_Z в общем случае являются функциями амплитуды. Если, например, сила демпфирования пропорциональна скорости ($K_D = -d\dot{x}$), а колебания могут быть описаны функцией $x = A \cos \omega t$, то имеем

$$\begin{aligned} \Delta E_D &= - \int_0^T K_D \dot{x} dt = + d \int_0^T \dot{x}^2 dt = + d A^2 \omega \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \\ &= + d A^2 \omega \pi. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В этом случае ΔE_D возрастает пропорционально квадрату амплитуды, а кривая $\Delta E_D(A)$ представляет собой параболу (верхняя часть рис. 86).

Вид функции подводимой энергии $\Delta E_Z(A)$ зависит от механизма возбуждения. На рис. 86 представлен случай, когда ΔE_Z не зависит от A . Кривые ΔE_D и ΔE_Z пересекаются при $A = A_1$. В области $A < A_1$ энергии больше подводится, чем потребляется, и, следовательно, амплитуда возрастает. Наоборот, в области $A > A_1$ амплитуда колебаний уменьшается, так как здесь $\Delta E_D > \Delta E_Z$. Таким образом, ход построенных энергетических кривых позволяет сделать качественные выводы о характере колебаний.

Между энергетической диаграммой и фазовым портретом существует тесная взаимосвязь. Если для осциллятора справедливо равенство $\Delta E_D = \Delta E_Z$ (как при $A = A_1$ на рис. 86), то возможны колебания постоянной амплитуды. На фазовом портрете колебательной системы такие чисто периодические колебания изображаются замкнутой фазовой траекторией, которая пересекает ось x при значении $x = A_1$. Эту фазовую траекторию называют *предельным циклом*, потому что она представляет собой траекторию, к которой при $t \rightarrow \infty$ асимптотически приближаются соседние фазовые траектории фазового портрета. Для всех фазовых траекторий, проходя-

ших внутри предельного цикла, $A < A_1$, так что $\Delta E_D - \Delta E_Z < 0$ и амплитуда колебаний должна возрастать. Фазовые траектории в этом случае имеют форму раскручивающихся спиралей. Заштрихованная область внутри предельного цикла представляет собой область нарастающих до параметров предельного цикла ¹⁾ колебаний. Наоборот, для всех фазовых траекторий вне предельного цикла $A > A_1$ и вместе с тем $\Delta E_D - \Delta E_Z > 0$; поэтому область вне предельного цикла является областью уменьшающихся до параметров предельного цикла колебаний. Фазовые траектории и в этом случае оказываются спиральями, но скручивающимися теперь к предельному циклу снаружи. Таким образом, области раскручивающихся и скручивающихся спиралей разграничиваются предельным циклом.

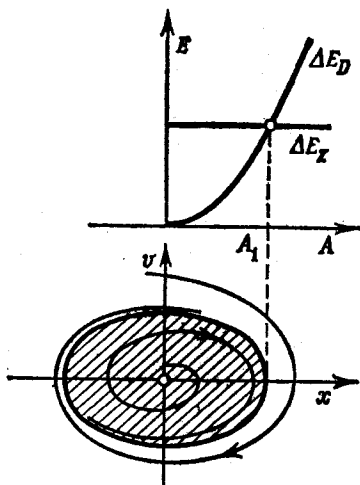


Рис. 86. Энергетическая диаграмма и фазовый портрет автоколебательной системы.

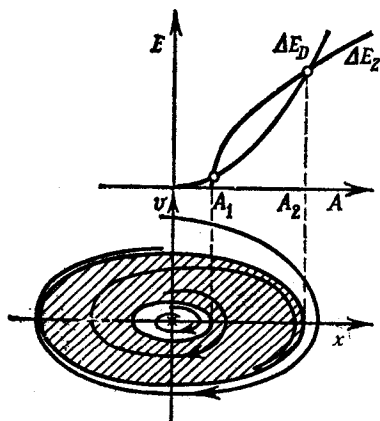


Рис. 87. Энергетическая диаграмма и фазовый портрет с двумя предельными циклами.

На рис. 86 показан простейший случай, ибо в общем случае кривые ΔE_D и ΔE_Z могут пересекаться многократно. Например, к часовому маятнику энергия в общем случае подводится только тогда, когда амплитуда колебания маятника становится меньше определенной величины. Подводимая энергия довольно быстро возрастает и при больших амплитудах приближается к некоторому постоянному значению. Кривая ΔE_Z имеет при этом вид, показанный на энергетической диаграмме в верхней части рис. 87. Такая кривая ΔE_Z

¹⁾ То есть до величины амплитуды и максимальной скорости колебаний, соответствующих предельному циклу. — Прим. ред.

пересекается с параболообразной кривой ΔE_D в двух точках, соответствующих значениям амплитуды A_1 и A_2 .

На фазовом портрете (нижняя часть рис. 87) каждому из этих значений соответствует свой предельный цикл. В заштрихованной области между двумя предельными циклами амплитуды увеличиваются, в то время как в областях внутри меньшего предельного цикла и вне большего предельного цикла амплитуды уменьшаются. Из энергетической диаграммы легко видеть, что внутри малого предельного цикла все фазовые траектории представляют собой спирали, стягивающиеся к нулевой особой точке. Наоборот, все остальные фазовые траектории с течением времени приближаются к большему предельному циклу.

Фазовые портреты, приведенные на рис. 86 и 87, указывают на необходимость так расширить определение устойчивости (которое до сих пор было дано только для положения равновесия), чтобы оно охватывало и поведение фазовых траекторий в окрестности предельных циклов. В полной аналогии с определением устойчивости положения равновесия предельный цикл (а вместе с ним и соответствующие ему колебания) называется *устойчивым*, если фазовая траектория, начинающаяся при $t=t_0$ в окрестности данного предельного цикла остается в этой окрестности при всех $t > t_0$. От более точного математического определения устойчивости здесь придется отказаться.

Предельный цикл называется *неустойчивым*, если фазовая траектория, начинающаяся в его окрестности, с течением времени покидает эту окрестность.

Согласно этим определениям, предельный цикл на рис. 86 и больший предельный цикл на рис. 87 являются устойчивыми: все близрасположенные фазовые траектории приближаются к ним асимптотически. Наоборот, малый предельный цикл на рис. 87 неустойчив, поскольку все фазовые траектории покидают его окрестность.

Особая точка, расположенная в начале координат фазовой плоскости, на рис. 86 является особой точкой типа неустойчивого фокуса, а на рис. 87 — особой точкой типа устойчивого фокуса.

При описании поведения автоколебательных систем применяются также следующие понятия: *устойчивой в малом* называется система, для которой особая точка в начале координат фазовой плоскости соответствует устойчивому положению равновесия. В этом случае (как, например, на рис. 87) всегда существует область затухания колебаний, которая окружает положение равновесия и в которой все фазовые траектории сходятся по спиралям к особой точке в начале координат. Система с фазовым портретом, показанным на рис. 86, является *неустойчивой в малом*, так как начало координат находится в области нарастания колебаний.

Наоборот, обе системы (и на рис. 86, и на рис. 87) *устойчивы в большом*, так как в области вне большего предельного цикла коле-

бания уменьшаются. Система, у которой в области вне большего предельного цикла колебания нарастают, называется *неустойчивой в большом*.

Фазовый портрет, изображенный на рис. 87, показывает, что эти понятия не могут охватить все тонкости поведения системы, так как при этом ничего не говорится о фазовом портрете системы в области, заключенной между предельными циклами. Если при изучении устойчивости системы эта промежуточная область играет существенную роль, то для ее исследования нужно либо обратиться к энергетической диаграмме, либо использовать другие методы, о которых речь пойдет ниже.

Движение системы, фазовый портрет которой приведен на рис. 86, при сколь угодно малом начальном возмущении с течением времени будет приближаться к устойчивым колебаниям, соответствующим предельному циклу. При этом любая фазовая траектория, начинающаяся в окрестности особой точки, представляет собой раскручивающуюся спираль. Этот случай относится к так называемому *мягкому возбуждению*.

Наоборот, изображенный на рис. 87 фазовый портрет соответствует системе с *жестким возбуждением*. Если нужно получить устойчивые колебания, отвечающие внешнему устойчивому предельному циклу, то начальное возмущение должно быть таким, чтобы соответствующая фазовая траектория начиналась в кольцеобразной области нарастающих колебаний. При меньших начальных возмущениях система снова вернется в состояние покоя, так как она устойчива в малом.

Следует указать еще одно весьма существенное различие между автоколебаниями и ранее рассмотренными собственными колебаниями: на фазовом портрете, представляющем собственные колебания, также могут встречаться замкнутые траектории, охватывающие особую точку. Это всегда имеет место для консервативных систем, у которых возможны периодические колебания *любой* амплитуды и весь фазовый портрет состоит из замкнутых траекторий с особой точкой типа центра. Однако эти траектории не являются предельными циклами, так как соседние траектории не сближаются с ними асимптотически. Таким образом, на фазовом портрете консервативных систем нет областей ни нарастающих, ни убывающих колебаний.

Напротив, фазовую плоскость автоколебательных систем всегда можно разделить на области нарастающих и убывающих колебаний, разграниченные предельными циклами. Поэтому периодические движения автоколебательных систем возможны только при совершенно определенных значениях амплитуд, соответствующих точкам пересечения предельных циклов с осью абсцисс.

3.2. Методы расчета

Системы уравнений движения автоколебательных систем всегда нелинейны. Для их решения был предложен ряд методов, которые мы не сможем здесь подробно рассмотреть. Вместо этого мы опишем в основных чертах и применим к простым примерам лишь некоторые типичные методы, чтобы получить представление о возможных применениях методов и о возникающих при этом трудностях. Здесь нам придется отказаться от строгих математических выводов: читатель может восполнить этот пробел, обратившись к работам [1, 10, 16, 19].

Уравнения движения автоколебательной системы имеют вид

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0. \quad (3.2)$$

Уравнения такого вида будут выведены в разд. 3.3 и 3.4; здесь же в качестве примера приведем уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta x^2) \dot{x} + x = 0, \quad (3.3)$$

которое будет выведено в разд. 3.3. Этим уравнением описываются колебания ламповых генераторов, применяемых в радиотехнике.

3.2.1. Общие методы

Уже при обсуждении демпфированных собственных колебаний было указано на то, что общее уравнение (3.2) всегда можно свести к уравнению первого порядка для $\dot{x} = v$:

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{f(x, v)}{v}. \quad (3.4)$$

Оно особенно удобно для нахождения решений в плоскости x, v , т. е. в фазовой плоскости, так как стоящая в левой части производная задает наклон кривой в определенной точке x, v этой плоскости. Благодаря этому оказывается возможным последовательно построить фазовые траектории известными графическими методами и таким образом получить общее представление о фазовом портрете, а следовательно, и о характере колебаний.

Найти точное аналитическое решение уравнения (3.2) можно лишь в немногих случаях, когда функция $f(x, v)$ имеет достаточно простой вид.

В этих случаях мы для большей наглядности будем преимущественно пользоваться энергетическим методом, уже зарекомендовавшим себя при расчете нелинейных собственных колебаний, и получим интеграл энергии.

При этом оказывается целесообразным разложить произвольную функцию $f(x, v)$ на два слагаемых, одно из которых зависит только от x :

$$f(x, v) = \tilde{f}(x, 0) + [f(x, v) - \tilde{f}(x, 0)] = f(x, 0) + g(x, v), \quad (3.5)$$

где $g(x, 0) = 0$. Подставим это выражение в (3.2), почленно умножим результат на $x=v$ и проинтегрируем по времени. Полученное соотношение

$$\frac{1}{2}mv^2 + \int f(x, 0) dx + \int g(x, v)v dt = \text{const} \quad (3.6)$$

после умножения на постоянную m (которая здесь нас больше не интересует) переходит в уравнение энергии

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_d = E_0.$$

При этом следует принять во внимание, что теперь величина E_d представляет не только потерю энергии на преодоление сил демпфирования, но и энергию, подводимую извне. Таким образом, E_d соответствует применявшейся в предыдущем разделе разности $E_D - E_Z$.

Во всех случаях, когда интеграл

$$E_d = m \int g(x, v)v dt \quad (3.7)$$

можно вычислить в явном виде, задача расчета колебаний сводится к обычному интегрированию. После этого из (3.6) сразу получается уравнение фазового портрета

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_0 - E_d - E_{\text{pot}})}, \quad (3.8)$$

и дальнейшим интегрированием находится зависимость от времени:

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{(2/m)(E_0 - E_d - E_{\text{pot}})}}. \quad (3.9)$$

Если функция $g(x, v)$ по величине существенно меньше, чем $f(x, 0)$, то часто можно прийти к вполне приемлемым результатам, вычислив интеграл (3.7) с некоторым заданным приближенным выражением для x и подставив полученное значение в (3.8) и в (3.9).

3.2.2. Линеаризация исходных уравнений

Метод малых колебаний, уже использовавшийся в разд. 2.1.3.6, можно применить и в данном случае. С этой целью разложим функцию $f(x, v)$ в ряд Тейлора по обеим переменным x и v в окрестности положения равновесия $x=v=0$:

$$f(x, v) = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 v + \dots$$

Так как $x=v=0$ должно быть положением равновесия, мы имеем $f(0, 0) = 0$. Подставляя это разложение в (3.2) и пренебрегая членами высшего порядка малости, получаем линеаризованное уравнение

$$\ddot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0 \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 x = 0. \quad (3.10)$$

Это — уравнение с постоянными коэффициентами, а уравнение такого вида уже решалось в разд. 2.2.2.

Метод малых колебаний применим только тогда, когда существуют обе производные, входящие в уравнение (3.10), т. е. когда функция $f(x, v)$ непрерывна и может быть разложена в ряд Тейлора. В случаях когда функция $f(x, v)$ не является непрерывной, этот метод неприменим. Поскольку в ряде Тейлора пренебрегают членами высшего порядка, удовлетворительные результаты в общем случае можно получить только в непосредственной окрестности положения равновесия. Таким образом, данный метод может описать поведение системы только «в малом».

Для безразмерного коэффициента демпфирования D , определенного формулой (2.124), из уравнения (3.10) получаем

$$D = \frac{(\partial f / \partial v)_0}{2 \sqrt{(\partial f / \partial x)_0}}$$

Если $D=0$, то система «в малом» не демпфирована и является консервативной. При $D>0$ система демпфирована, и на фазовой плоскости ее положение равновесия представляется устойчивой особой точкой типа фокуса или узла. Из решения (2.127) можно видеть, что при $D<0$ следует ожидать нарастающих колебаний; положение равновесия при этом соответствует неустойчивой особой точке таких же типов. Этот случай, невозможный при собственных колебаниях, часто встречается при автоколебаниях. Однако метод малых колебаний дает здесь только условия, при которых могут возникнуть нарастающие колебания и система не будет оставаться вблизи положения равновесия. Исследование дальнейшего поведения возбужденных колебаний, например расчет предельного цикла, превышает возможности этого метода.

Линеаризация совершенно другого рода осуществляется в бегло упомянутом выше (разд. 2.1.3.6) *методе гармонического баланса*. Этот метод открывает гораздо большие возможности, чем метод малых колебаний, так как при его использовании не ограничиваются исследованием малых отклонений. Точность полученных результатов в этом случае определяется *формой* происходящих колебаний. Для гармонических колебаний получаются точные результаты, а для колебаний, близких к гармоническим, достаточно хорошие приближения. Даже для совершенно отличных от синусоидальной формы треугольных и прямоугольных колебаний все же можно получить приемлемые результаты¹⁾.

Основная идея метода гармонического баланса состоит в том, что колебание предполагается синусоидальным:

$$x = A \cos \omega t, \quad \dot{x} = v = -A\omega \sin \omega t. \quad (3.11)$$

¹⁾ О точности получаемых результатов см. статью автора Магнус К. Установившиеся колебания в нелинейных динамических системах с запаздыванием: Пер. с нем.—Сб. переводов Механика, 1957, № 4, 138—149.—Прим. ред.

Эти выражения подставляются в функцию $f(x, v)$, и получающуюся таким образом периодическую функцию с периодом $T=2\pi/\omega$ раскладывают в ряд Фурье:

$$f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) = a_0 + \sum_{v=1}^{\infty} (a_v \cos v\omega t + b_v \sin v\omega t). \quad (3.12)$$

Ограничимся такими функциями, для которых коэффициент

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) d(\omega t) \quad (3.13)$$

равен нулю. Это тот случай, когда функция $f(x, v)$ обладает известными свойствами симметрии, и благодаря этому удастся избежать достаточно сложных вычислений, необходимых в случае несимметричных функций. В разложении (3.12) будем пренебрегать членами с $v > 1$, т. е. высшими гармониками. Таким образом, в качестве приближения для периодической функции $f(x, v)$ используется только основное колебание, определяемое первой гармоникой:

$$f(x, v) \approx a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = \frac{a_1}{A} x - \frac{b_1}{A\omega} \dot{x},$$

$$f(x, v) \approx a^* x + b^* \dot{x}, \quad (3.14)$$

где

$$a^* = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \cos \omega t d(\omega t),$$

$$b^* = -\frac{1}{\pi A\omega} \int_0^{2\pi} f(A \cos \omega t, -A\omega \sin \omega t) \sin \omega t d(\omega t). \quad (3.15)$$

Если подставить линейное выражение (3.14) в исходное уравнение (3.2), то это уравнение приведет к линейной форме

$$\ddot{x} + b^* \dot{x} + a^* x = 0. \quad (3.16)$$

В отличие от линеаризованного уравнения (3.10) коэффициенты здесь не постоянны, а зависят от амплитуды A колебаний. Именно эта зависимость от амплитуды колебаний позволяет сделать некоторые выводы о поведении колебательной системы. Безразмерный коэффициент демпфирования D теперь также является функцией амплитуды, потому что из (3.16) его можно получить в следующем виде:

$$D = \frac{b^*}{2\sqrt{a^*}}. \quad (3.17)$$

В качестве примера применения метода рассмотрим уравнение (3.3). Принимая во внимание (3.11), будем иметь

$$f(x, v) = x - (\alpha - \beta x^2) v = A \cos \omega t + (\alpha - \beta A^2 \cos^2 \omega t) A\omega \sin \omega t.$$

Подстановка в (3.15) с учетом соотношений

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t d(\omega t) = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos \omega t d(\omega t) = \int_0^{2\pi} \sin \omega t \cos^3 \omega t d(\omega t) = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^3 \omega t \sin^3 \omega t d(\omega t) = \frac{\pi}{4}$$

дает в результате новые коэффициенты

$$a^* = 1, \quad b^* = \frac{\beta}{4} A^2 - \alpha. \quad (3.18)$$

Тем самым из (3.16) получается уравнение, для которого можно использовать решение, полученное в разд. 2.2.2. Частота и безразмерный коэффициент демпфирования соответственно будут равны

$$\omega = \sqrt{a^*(1-D^2)} = \sqrt{1-D^2}, \quad (3.19)$$

$$D = \frac{b^*}{2\sqrt{a^*}} = \frac{1}{8} (\beta A^2 - 4\alpha).$$

Условия убывания и нарастания колебаний и их устойчивость позволяет установить изображенная на рис. 88 зависимость $D(A)$. Кривая D пересекает ось A при значении

$$A_{st} = 2\sqrt{\alpha/\beta}. \quad (3.20)$$

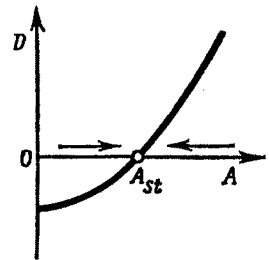


Рис. 88. Энергетическая диаграмма для уравнения Ван дер Поля.

При $A < A_{st}$ будет $D < 0$ и, следовательно, происходят колебания с нарастающей амплитудой; при $A > A_{st}$, наоборот, $D > 0$ и происходят колебания с убывающей амплитудой. Таким образом, амплитуды колебаний меняются в направлениях, указанных на рис. 88 стрелками, и стремятся к значению амплитуды $A = A_{st}$, с которой и происходят периодические незатухающие колебания. Эти колебания устойчивы, так как при любом возмущении, которое увеличивает или уменьшает амплитуду, осциллятор (в силу описанного выше характера изменения амплитуды) возвращается к колебательному процессу все с той же амплитудой A_{st} .

На этом простом примере можно убедиться в значительных преимуществах метода гармонического баланса по сравнению с методом малых колебаний.

3.2.3. Метод Ритца — Галеркина

В теории упругости, как и во многих других областях технических наук, чрезвычайно эффективным оказался метод решения краевых задач, предложенный Ритцем и развитый далее Галеркиным. Этот метод применим и в теории колебаний, в особенности при расчете стационарных, т. е. периодических, колебаний. Можно показать, что метод гармонического баланса содержится в методе Ритца — Галеркина как частный случай, так что метод Ритца — Галеркина можно считать обобщением метода гармонического баланса¹⁾.

Преимущество метода Ритца — Галеркина состоит в его большей приспособляемости и возможности перехода к приближениям высших порядков в случаях, когда первое приближение уже не является достаточным. Известным недостатком метода можно считать малую наглядность, обусловленную его формально математическим характером.

Подобно тому как периодическая функция представляется рядом Фурье, т. е. линейной комбинацией функций $\sin \nu \omega t$ и $\cos \nu \omega t$, можно попытаться осуществить аппроксимацию иного вида, основанную на использовании системы функций $\psi_\nu(t)$, выбранной надлежащим образом. Это приводит к теореме Ритца:

$$x = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu \psi_\nu(t). \quad (3.21)$$

Если разложение (3.21) использовать для решения уравнения (3.2), то, согласно предложенному Галеркиным правилу, неизвестные амплитудные коэффициенты A_ν находятся из условий

$$\int_0^T [\ddot{x} + f(x, \dot{x})] \psi_\nu(t) dt = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots). \quad (3.22)$$

Это первоначально чисто формальное правило можно интерпретировать следующим образом. Поскольку при практическом применении разложения (3.21) в нем, естественно, оставляется только конечное число членов, полученная таким образом функция $x(t)$ является лишь приближением, для которого исходное уравнение (3.2) выполняется нестрого. Поэтому надо попытаться добиться того, чтобы уравнение (3.2) выполнялось хотя бы «в среднем», т. е. после интегрирования за период. Правило Галеркина гласит, что для определения амплитудных коэффициентов целесообразно использовать не простое среднее, а «взвешенное среднее» с весовыми функциями $\psi_\nu(t)$. Именно таким образом и получаются условия (3.22).

¹⁾ А также ряда других методов; см. статью автора Магнус К. О связи между различными приближенными методами расчета нелинейных колебаний; Пер. с нем.— Сб. переводов Механика, 1959, № 1, 127—146.— Прим. ред.

В качестве примера снова рассмотрим уравнение Ван дер Поля (3.3). Выберем простейшую форму разложения (3.21), где учтены только члены первого порядка с $\nu=1$, и используем в качестве аппроксимирующих функций тригонометрические функции $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$. Тогда (3.21) перейдет в

$$x = A_s \sin \omega t + A_c \cos \omega t = A \cos(\omega t - \varphi). \quad (3.23)$$

Подставляя это выражение в (3.22), приходим к двум характеристическим уравнениям:

$$\int_0^T \{A(1-\omega^2) \cos(\omega t - \varphi) + A\omega[\alpha - \beta A^2 \cos^2(\omega t - \varphi)] \times \\ \times \sin(\omega t - \varphi)\} \sin \omega t dt = 0, \quad (3.24)$$

$$\int_0^T \{A(1-\omega^2) \cos(\omega t - \varphi) + A\omega[\alpha - \beta A^2 \cos^2(\omega t - \varphi)] \times \\ \times \sin(\omega t - \varphi)\} \cos \omega t dt = 0.$$

После интегрирования и простых тригонометрических преобразований получаем

$$\pi A \left[\sin \varphi (1 - \omega^2) + \omega \cos \varphi \left(\alpha - \frac{\beta}{4} A^2 \right) \right] = 0,$$

$$\pi A \left[\cos \varphi (1 - \omega^2) - \omega \sin \varphi \left(\alpha - \frac{\beta}{4} A^2 \right) \right] = 0.$$

Эти уравнения выполняются при

$$\omega^2 = 1, \quad A = A_s = 2\sqrt{\alpha/\beta}. \quad (3.25)$$

Первое из этих условий ничего нового не сообщает, оно позволяет лишь видеть, что исходное уравнение в отношении собственного времени нормировано так, что коэффициент при x стал равным единице. Второе условие (3.25) определяет значение амплитуды, с которой могут происходить стационарные колебания. Этот результат в точности совпадает с результатом (3.20), полученным методом гармонического баланса.

Преимущество метода Ритца—Галеркина состоит в том, что в некоторых особых случаях (например, в случае разрывных колебаний, о которых речь пойдет ниже) за счет надлежащего выбора функций $\psi_n(t)$ можно прийти к лучшим приближениям, чем это возможно при помощи тригонометрических функций.

3.2.4. Метод медленно меняющихся амплитуд

Как метод гармонического баланса, так и метод Ритца — Галеркина прежде всего позволяют судить только о возможных периодических колебаниях. Хотя оба этих метода можно использовать

и для описания непериодических процессов, для этой цели более удобным представляется другой метод, а именно метод медленно меняющихся амплитуд, предложенный Ван дер Полем и впервые примененный им для решения названного его именем уравнения (3.3). Метод описывается здесь лишь в основных чертах и поясняется на одном примере.

Гармонические выражения (3.11) справедливы для стационарных колебаний. Для их же применения к переходным колебательным процессам амплитуду следует считать функцией времени:

$$\begin{aligned}x &= A(t) \cos \omega t, & \dot{x} &= \dot{A} \cos \omega t - A\omega \sin \omega t, \\ \ddot{x} &= \ddot{A} \cos \omega t - 2\dot{A}\omega \sin \omega t - A\omega^2 \cos \omega t.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Основная идея метода состоит в том, что амплитуда $A(t)$ рассматривается как функция, которая *медленно* меняется во времени и для которой следует положить

$$\dot{A} \ll A\omega, \quad \ddot{A} \ll A\omega^2.$$

Поэтому в выражениях (3.26) для \dot{x} и \ddot{x} можно пренебречь первыми членами в силу их малости. Далее, если функцию $f(x, v)$ аппроксимировать первыми членами ее разложения в ряд Фурье

$$f(x, v) \approx b_1 \sin \omega t + a_1 \cos \omega t, \quad (3.27)$$

то после подстановки в исходное уравнение (3.2) получится

$$\sin \omega t (-2\dot{A}\omega + b_1) + \cos \omega t (-A\omega^2 + a_1) = 0. \quad (3.28)$$

Чтобы это равенство выполнялось для любого момента времени t , стоящие в скобках выражения должны одновременно обращаться в нуль:

$$A\omega^2 = a_1, \quad \dot{A} = b_1/(2\omega). \quad (3.29)$$

Из этих соотношений можно найти частоту и амплитуду колебаний. В качестве примера снова рассмотрим уравнение (3.3), где

$$f(x, v) = x - (\alpha - \beta x^2) \dot{x}.$$

Подстановка гармонических выражений (3.26) после простых преобразований дает

$$f(x, v) = A\omega \left(\alpha - \frac{\beta}{4} A^2 \right) \sin \omega t + A \cos \omega t - \frac{\beta}{4} A^3 \omega \sin 3\omega t.$$

Сравнение с соотношением (3.27) показывает, что в данном случае

$$b_1 = A\omega \left(\alpha - \frac{\beta}{4} A^2 \right), \quad a_1 = A. \quad (3.30)$$

В силу этого из (3.29) получаются условия

$$\omega^2 = 1, \quad \dot{A} = \frac{A}{2} \left(\alpha - \frac{\beta}{4} A^2 \right). \quad (3.31)$$

Первое из них совпадает с первым из условий (3.25), второе определяет зависимость амплитуды A от времени. Сразу же видно, что при

$$A = A_{st} = 2\sqrt{\alpha/\beta} \quad (3.32)$$

не происходит изменения амплитуды (ибо $\dot{A}=0$), так что и здесь мы снова получаем уже найденное ранее значение стационарной амплитуды колебаний. Чтобы решить дифференциальное уравнение

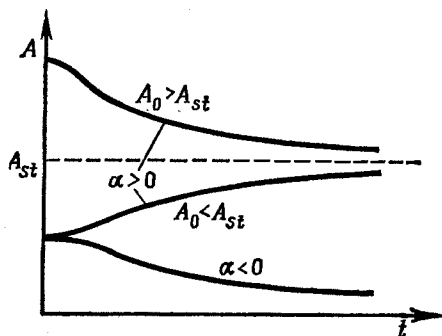


Рис. 89. Переходный процесс, описываемый уравнением Ван дер Поля.

(3.31), умножим его на A и введем новую переменную $A^2=y$. В результате получаем дифференциальное уравнение типа уравнения Абеля

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \alpha y - \frac{\beta}{4} y^2,$$

решение которого известно:

$$y = \frac{4\alpha}{\beta [1 - (1 - 4\alpha/(\beta y_0))e^{-\alpha t}]};$$

отсюда

$$A(t) = \frac{A_{st}}{\sqrt{1 - (1 - A_{st}^2/A_0^2)e^{-\alpha t}}}, \quad (3.33)$$

причем A_0 является начальным значением амплитуды A при $t=t_0$. Временная зависимость (3.33) представлена на рис. 89. При $\alpha < 0$ и $A_0 < A_{st}$ амплитуда с увеличением t (рис. 89) приближается к значению $A=0$; при $\alpha > 0$, наоборот, амплитудные кривые как в случае $A_0 > A_{st}$, так и в случае $A_0 < A_{st}$ асимптотически приближаются к стационарному значению A_{st} .

3.3. Примеры автоколебательных систем

3.3.1. Часовой маятник

То обстоятельство, что собственные колебания гравитационного маятника при достаточно малых амплитудах приблизительно изохронны и их период не зависит от величины амплитуды, позволяет использовать период колебания маятника в качестве эталона отрезка времени. При этом, разумеется, нужно позаботиться о том, чтобы однажды возбужденные колебания не затухали. На каждом периоде колебания энергия, затрачиваемая на преодоление демпфирования, должна восполняться при помощи особого механизма. Из-за наличия такого механизма часы являются автоколебательной системой.

Существует много конструкций маятниковых механизмов, отличающихся друг от друга типом возбуждения и характером сил демпфирования; три из них в общих чертах рассматриваются ниже.

3.3.1.1. Движение маятника при постоянном возмущении и квадратичном демпфировании. Маятник может совершать незатухающие колебания, если его движение поддерживается постоянным моментом. Пример устройства для осуществления таких колебаний приведен на рис. 90. Маятник жестко насажен на вращающуюся ось электромотора, создающего момент постоянной величины. Знак момента соответствует направлению вращения ротора. Изменение знака момента, а следовательно, и направления движения маятника осуществляется контактным рычагом, закрепленным с умеренным трением на оси маятника и замыкающим контакты в зависимости от направления движения.

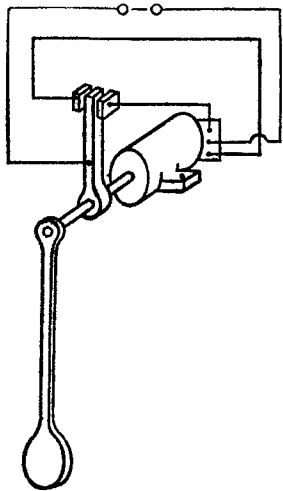


Рис. 90. Механизм привода гравитационного маятника.

Если предположить, что помимо этого момента, постоянного по величине, но скачкообразно меняющего знак, на маятник действует сила демпфирования, пропорциональная квадрату скорости v , то уравнение движения системы примет следующий вид:

$$\ddot{x} = p \operatorname{sign} v - \frac{q}{2} v^2 \operatorname{sign} v - \omega_0^2 \sin x. \quad (3.34)$$

Здесь p — отнесенный к моменту инерции маятника момент мотора, $q/2$ — также отнесенный к моменту инерции коэффициент демпфирования, а ω_0 — круговая частота собственных недемпфированных колебаний маятника.

При помощи уже использованного ранее преобразования

$$\ddot{x} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (v^2)$$

уравнение (3.34) приводится к виду

$$\frac{d}{dx} (v^2) + qv^2 \operatorname{sign} v = 2(p \operatorname{sign} v - \omega_0^2 \sin x). \quad (3.35)$$

Замечая, что в каждой из областей $v > 0$ и $v < 0$ выражение, стоящее в правой части уравнения (3.35), зависит только от x и не зависит от v , можно сразу выписать решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} \text{при } v > 0 \quad v^2 &= e^{-qx} [C_1 - F_1(x)], \\ \text{при } v < 0 \quad v^2 &= e^{+qx} [C_2 - F_2(x)], \end{aligned} \quad (3.36)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, а функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имеют вид

$$F_1(x) = 2 \int (\omega_0^2 \sin x - p) e^{qx} dx = 2e^{qx} \left[\frac{\omega_0^2}{1+q^2} (q \sin x - \cos x) - \frac{p}{q} \right], \quad (3.37)$$

$$F_2(x) = 2 \int (\omega_0^2 \sin x + p) e^{-qx} dx = -2e^{-qx} \left[\frac{\omega_0^2}{1+q^2} (q \sin x + \cos x) + \frac{p}{q} \right].$$

Постоянные интегрирования определяются по амплитудным значениям, т. е. по условиям в точках, где $v=0$. Если в первой такой точке $x=x_1$, а во второй $x=x_2$, то $C_1=F_1(x_1)$, $C_2=F_2(x_2)$ и решение (3.36) переходит в следующее:

$$\begin{aligned} \text{при } v > 0 \quad v^2 &= e^{-qx} [F_1(x_1) - F_1(x)], \\ \text{при } v < 0 \quad v^2 &= e^{+qx} [F_2(x_2) - F_2(x)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При помощи этих решений можно последовательно найти все точки изменения знака скорости при любой начальной амплитуде x_1 (таким же образом, как это было сделано при исследовании собственных колебаний с квадратичным демпфированием). Если начать с $x_1 < 0$, то из решения в области $v > 0$ находится $x=x_2 > 0$, для которого $v=0$. В этом случае x_2 определяется из уравнения

$$F_1(x_1) = F_1(x_2).$$

Полученное значение x_2 подставляется в решение в области $v < 0$, и получается уравнение для определения $x_3 < 0$:

$$F_2(x_2) = F_2(x_3).$$

Такое последовательное определение амплитуд можно осуществить графически, построив на одном чертеже графики функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ (рис. 91). Поскольку $F_1(x) = F_2(-x)$, достаточно построить графики только для положительных значений x . Начиная с за-

данного значения x_1 нужно провести ряд отрезков (см. рисунок), что позволит найти все амплитудные значения. Стационарная амплитуда A_{st} определяется точкой пересечения кривых $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

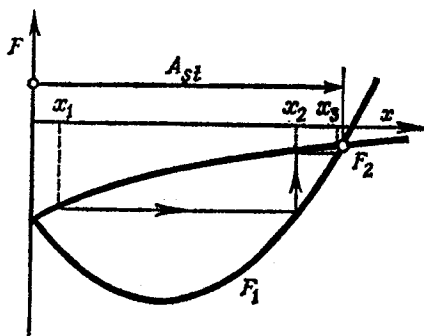


Рис. 91. Переходный процесс для гравитационного маятника с самовозбуждением.

Если $x_1 > A_{st}$, то x_1 образуют убывающую последовательность. Заметим, что уже x_2 должно быть меньше значения x , при котором $F_1(x) = 0$.

3.3.1.2. Движение маятника при импульсном периодическом возмущении и линейном демпфировании. Схема, изображенная на рис. 90, для часов непригодна. Колебания часового маятника будут изохронными, если подвод энергии осуществляется в тот момент, когда маятник проходит через положение равновесия¹⁾. Функция $f(x, v)$ для этого случая схематически показана на рис. 92. Эта функция везде равна нулю, за исключением малого интервала $-\varepsilon \leq x \leq +\varepsilon$, в котором знак функции определяется знаком скорости. Идеальная возмущающая функция соответствует предельному случаю, когда $\varepsilon \rightarrow 0$, а интеграл

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x, v) dx = E_Z \quad (3.39)$$

имеет конечное значение. Здесь E_Z — количество энергии, подводимой к маятнику в течение импульса.

В момент подвода энергии скорость маятника скачкообразно возрастает. С другой стороны, энергия маятника, а следовательно, и его скорость уменьшаются из-за наличия сил демпфирования, которые здесь считаются линейными функциями скорости.

¹⁾ Более подробное описание движения часовых механизмов читатель найдет в следующих книгах: Дроздов Ф. В. Приборы времени. — М.: Оборонгиз, 1940; Дроздов Ф. В. Детали приборов. — М.: Оборонгиз, 1948. — *Прим. ред.*

Поведение такого маятника можно наглядно представить при помощи фазовой плоскости (рис. 93). В областях, где $v \neq 0$, энергия не подводится и движение маятника (согласно (2.127)) происходит по закону

$$x = Ae^{-D\tau} \cos v\tau \quad (v = \sqrt{1-D^2}), \quad (3.40)$$

в силу которого как в правой, так и в левой фазовой полуплоскости получаются дуги спирали. Эти дуги не образуют гладкую кривую, потому что в момент прохождения положения равновесия скорость скачкообразно возрастает. Как показано на рис. 93, при правиль-

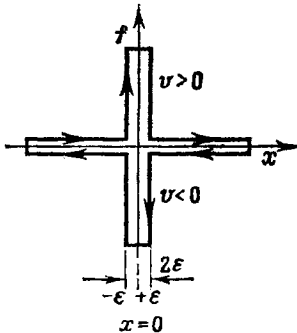


Рис. 92. Функция $f(x, v)$ при импульсивном возмущении часового маятника.

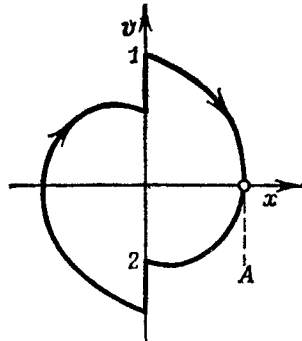


Рис. 93. Фазовая траектория часового маятника при идеальном импульсивном возмущении.

но выбранных начальных условиях получается замкнутая фазовая траектория, т. е. предельный цикл. В этом случае потеря скорости из-за демпфирования возмещается своевременным действием импульса.

Стационарную амплитуду A_{st} можно найти из условия, что фазовая траектория должна быть замкнутой. Из (3.40) следует, что точки 1 и 2, в которых $x=0$, соответствуют значениям времени

$$\tau = \tau_1 = -\frac{\pi}{2v} \quad \text{и} \quad \tau = \tau_2 = +\frac{\pi}{2v}.$$

Величины скорости в этих точках получаются дифференцированием (3.40) по t и подстановкой τ_1 и τ_2 :

$$v_1 = \omega_0^2 A v e^{-D\tau_1}, \quad v_2 = -\omega_0^2 A v e^{-D\tau_2}.$$

Потеря кинетической энергии маятником в течение полупериода составит

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2} \omega_0^2 A^2 v^2 (e^{\pi D/v} - e^{-\pi D/v}), \quad (3.41)$$

или

$$\Delta E_{\text{kin}} = \omega_0^2 A^2 v^2 \operatorname{sh}(\pi D/v).$$

(Здесь E_{kin} является энергией, отнесенной к моменту инерции маятника.) Величина ΔE_{kin} должна быть равна энергии ΔE_Z , получаемой за счет импульса,

$$\Delta E_Z = \omega_0^2 A^2 v^2 \operatorname{sh}(\pi D/v).$$

Отсюда следует, что

$$A = \frac{1}{v\omega_0} \sqrt{\frac{\Delta E_Z}{\operatorname{sh}(\pi D/v)}} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\Delta E_Z}{(1-D^2) \operatorname{sh}(\pi D/\sqrt{1-D^2})}}. \quad (3.42)$$

Эта амплитуда не является стационарной амплитудой колебаний маятника, так как из-за демпфирования максимум величины (3.40) достигается не при значении $\tau=0$, а при

$$\tau = \tau_{\text{max}} = -\frac{1}{v} \operatorname{arctg} \frac{D}{v} \quad (3.43)$$

(см. формулу (2.141) в разд. 2.2.2.3). Подставив это значение в (3.40), получим

$$A_{st} = x(\tau_{\text{max}}) = Ae^{-D\tau_{\text{max}}} \cos v\tau_{\text{max}},$$

или

$$A_{st} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\Delta E_Z}{\operatorname{sh}(\pi D/\sqrt{1-D^2})}} e^{-D\tau_{\text{max}}}. \quad (3.44)$$

В практически интересном случае малого демпфирования ($D \ll 1$) выражение (3.44) можно упростить; в этом случае

$$v \approx 1, \quad \tau_{\text{max}} \approx -D, \quad e^{D^2} \approx 1, \quad \operatorname{sh}(\pi D/v) \approx \pi D,$$

так что

$$A_{st} \approx \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{\Delta E_Z}{\pi D}}. \quad (3.45)$$

Таким образом определяется амплитуда стационарных колебаний маятника. Частота, а тем самым и период колебаний находятся по частоте собственного колебания; это можно видеть на рис. 93. Для прохождения каждой дуги спирали требуется время, в точности равное полупериоду собственного колебания; возрастание скорости за счет прилагаемого импульса происходит мгновенно и не увеличивает периода колебания.

Приведенные выше соображения относятся, однако, только к идеальному случаю, изображенному на рис. 93, когда импульс прикладывается точно в положении равновесия. При малейших смещениях точки приложения импульса период колебаний меняется,

а это приводит к погрешности хода часов. Чтобы найти изменение периода колебаний, рассмотрим изображенный на рис. 94 предельный цикл, который отличается от предельного цикла, показанного

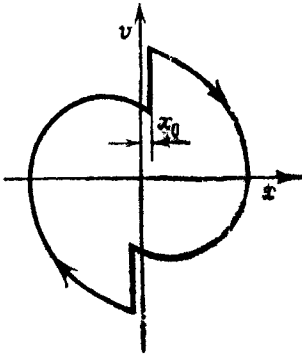


Рис. 94. Фазовая траектория часового маятника при возмущении запаздывающим импульсом.

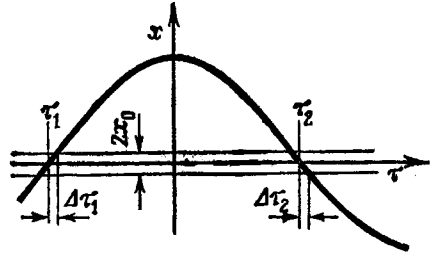


Рис. 95. К расчету возмущения запаздывающим импульсом.

на рис. 93, тем, что скорость скачкообразно меняется не при $x=0$, а при $x=\pm x_0$. Если скачки скорости происходят при значениях времени τ_1 и τ_2 соответственно, то

$$x(\tau_1) = x_0 = Ae^{-D\tau_1} \cos v\tau_1, \quad x(\tau_2) = -x_0 = Ae^{-D\tau_2} \cos v\tau_2. \quad (3.46)$$

Разность $\tau_2 - \tau_1$ равна половине периода колебаний маятника τ_s . Это время можно найти из соотношения

$$x(\tau_1) + x(\tau_2) = A(e^{-D\tau_1} \cos v\tau_1 + e^{-D\tau_2} \cos v\tau_2) = 0.$$

Так как смещения x_0 точки приложения импульса относительно положения равновесия должны быть в общем случае малыми, достаточно получить приближенное решение, при котором смещение τ выражается через смещение x следующим образом:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta x}{(dx/dt)_0} = \frac{x_0}{v_0}$$

(см. рис. 95). Таким образом, наклон кривой x, τ принимается равным его значению в положении равновесия. Это дает

$$\Delta\tau_1 = \frac{x_0}{Av e^{\pi D/(2v)}}, \quad \Delta\tau_2 = \frac{x_0}{Av e^{-\pi D/(2v)}}.$$

Разность этих двух значений равна половине изменения периода колебания:

$$\Delta\tau_s = 2(\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1) = \frac{2x_0}{Av} (e^{+\pi D/(2v)} - e^{-\pi D/(2v)}),$$

или

$$\Delta\tau_s = \frac{4x_0}{Av} \operatorname{sh} \frac{\pi D}{2v}.$$

Для относительного изменения периода колебания отсюда получается

$$\frac{\Delta\tau_s}{\tau_s} = \frac{2x_0}{\pi A} \operatorname{sh} \frac{\pi D}{2\sqrt{1-D^2}}. \quad (3.47)$$

В случае малого демпфирования это выражение также можно упростить:

$$\frac{\Delta\tau_s}{\tau_s} \approx \frac{x_0 D}{A}. \quad (3.48)$$

Например, при $D=0,01$ и $x_0/A=0,01$ получается относительное изменение, равное 10^{-4} ; ошибка часов за сутки (86 400 с) составит 8,64 с.

3.3.1.3. Движение маятника при импульсном возмущении и сухом трении. Если сила сопротивления не зависит от скорости, а имеет постоянную величину (сухое трение), то и тогда с учетом сказанного в разд. 2.2.3.2 можно при помощи фазового портрета найти стационарную амплитуду колебаний. В этом случае предельный цикл (рис. 96) состоит из дуг окружностей, центры которых расположены на оси x на расстоянии $\pm x_r$ от начала координат. Величина x_r определяется из того условия, что при $x=x_r$ восстанавливающий момент маятника равен моменту трения. Непосредственно по рис. 96 можно найти скорости в точках 1 и 2 (в моменты прохождения маятником положения равновесия):

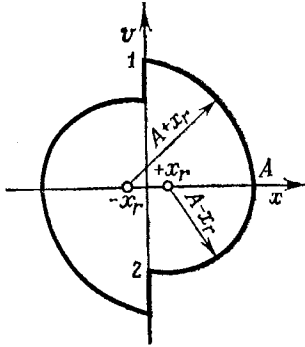


Рис. 96. Предельный цикл часового маятника в сухом трении.

$$v_1 = \sqrt{(A+x_r)^2 - x_r^2},$$

$$v_2 = \sqrt{(A-x_r)^2 - x_r^2}.$$

Следовательно, разность значений кинетической энергии, отнесенная к моменту инерции маятника, в этих точках составляет

$$\Delta E_{kin} = \frac{1}{2} (v_1^2 - v_2^2) = 2Ax_r.$$

Из условия $\Delta E_{kin} = \Delta E_Z$ получается амплитуда установившихся колебаний маятника

$$A_{st} = \frac{\Delta E_Z}{2x_r}. \quad (3.49)$$

Вычисление периода колебаний мы здесь опускаем и предлагаем его читателю в качестве задачи 26 (разд. 3.5). Однако на рис. 96 видно, что в рассматриваемом случае период колебания должен быть больше периода колебания маятника при отсутствии сухого трения. Период колебания не меняется лишь в том случае, когда энергия подводится точно в положениях $x = -x_r$ и $x = x_r$ при $v > 0$ и $v < 0$ соответственно. Предельный цикл при этом состоит из четырех четвертей окружности.

3.3.2. Ламповый генератор

В разд. 3.2 в качестве характерного примера уравнения автоколебательной системы неоднократно упоминалось уравнение Ван дер Поля (3.3). Теперь мы покажем, какой физический процесс описывается этим уравнением, и в качестве примера рассмотрим схему лампового генератора (рис. 97). В этом генераторе имеется кон-

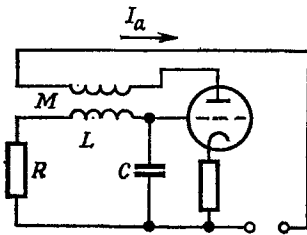


Рис. 97. Схема лампового генератора.

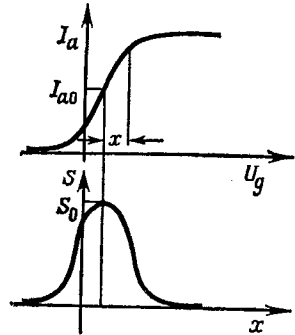


Рис. 98. Характеристика лампы и ее крутизна.

тур, содержащий омическое сопротивление R , катушку самоиндукции L и конденсатор C . Падение напряжения на омическом сопротивлении компенсируется напряжением, возникающим в катушке колебательного контура благодаря индуктивной связи с катушкой, включенной в анодную цепь лампы. Фаза возникающего напряжения такова, что фазы колебаний контура и катушки обратной связи совпадают. Напряжение на сетке лампы и соответственно величина анодного тока определяются напряжением на конденсаторе.

Уравнение колебательного процесса получается из уравнения напряжений контура. Оно отличается от ранее выведенного для простого колебательного контура уравнения (2.116) наличием члена, соответствующего добавочному напряжению, возникающему на катушке контура за счет взаимной индукции. Если величина анодного тока равна I_a , а коэффициент взаимной индукции $M > 0$, то это добавочное напряжение можно записать в виде

$$U_K = -M \frac{dI_a}{dt}.$$

При этом знак выбран так, что энергия поступает в контур. Таким образом получается уравнение напряжений

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q - M \frac{dI_a}{dt} = 0. \quad (3.50)$$

Зависимость между величиной анодного тока I_a и напряжением на сетке U_g задается характеристикой лампы (верхняя часть рис. 98). При величине среднего анодного тока I_{a0} , которая определяется выбранной рабочей точкой лампы, можно написать

$$I_a = I_{a0} + f(x) \quad (3.51)$$

и соответственно

$$\frac{dI_a}{dt} = \frac{dI_a}{dx} \dot{x} = \frac{df}{dx} \dot{x} = S(x) \dot{x},$$

где $S(x)$ — *крутизна* характеристики лампы (нижняя часть рис. 98). Так как изменение напряжения на сетке равно

$$\Delta U_g = x = Q/C,$$

уравнение (3.50) принимает следующий вид:

$$LC\ddot{x} + RC\dot{x} + x - MS(x)\dot{x} = 0. \quad (3.52)$$

Полагая

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC}}, \quad D_0 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}},$$

это уравнение можно уже известным способом привести к безразмерной форме:

$$x'' - \left[\frac{MS(x)}{\sqrt{LC}} - 2D_0 \right] x' + x = 0. \quad (3.53)$$

Входящую в это уравнение крутизну характеристики лампы $S(x)$ можно приближенно считать четной функцией и аппроксимировать рядом

$$S(x) = S_0 - S_2 x^2 + S_4 x^4 + \dots$$

Принимая во внимание лишь два первых члена этого ряда и вводя обозначения

$$\alpha = \frac{MS_0}{\sqrt{LC}} - 2D_0, \quad \beta = \frac{MS_2}{\sqrt{LC}}, \quad (3.54)$$

получаем из (3.53) уравнение Ван дер Поля (3.3):

$$x'' - (\alpha - \beta x^2)x' + x = 0. \quad (3.55)$$

Из приведенного вывода видно, что уравнение (3.55) представляет собой лишь приближенное уравнение лампового генератора. В за-

висимости от формы характеристики лампы и вида аппроксимации для крутизны можно получить уравнения с другими коэффициентами при x' .

Из уравнений (3.54) и (3.55) следует, что незатухающие колебания происходят только тогда, когда коэффициент взаимной индукции M достигает некоторого минимального значения, так как должно выполняться неравенство $\alpha > 0$, которое в силу (3.54) можно записать так:

$$M > M_0 = \frac{2D_0\sqrt{LC}}{S_0} = \frac{RC}{S_0}. \quad (3.56)$$

Величина M_0 определяет так называемую *границу самовозбуждения*, при переходе которой возникают автоколебания генератора.

Расчет переходного процесса и стационарной амплитуды колебаний для лампового генератора уже был рассмотрен в разд. 3.2. Более подробное исследование свойств уравнения Ван дер Поля можно найти, например, в книгах [7, 10, 19].

3.3.3. Фрикционные колебания маятника Фруда

В разд. 3.1.1 уже приводились некоторые примеры фрикционных колебаний — колебания виолончельной струны, визг тормозов и трамвая на повороте, скрип дверных петель, колебания резца на токарном станке. Несмотря на разнообразие систем, процесс воз-

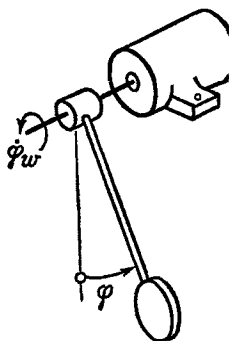


Рис. 99. Маятник с сухим трением (маятник Фруда).

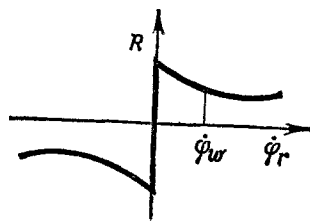


Рис. 100. Характеристика сухого трения.

никновения фрикционных автоколебаний во всех случаях одинаков. Рассмотрим этот процесс на простом примере маятника Фруда, изображенного на рис. 99.

Маятник подвешен на оси, которая вращается с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi}_w$. Между муфтой маятника и вращающейся осью возникает момент трения, значение которого зависит от величины скорости вращения муфты маятника относительно оси. За-

зависимость между моментом трения R и относительной угловой скоростью $\dot{\varphi}_r$ находится из эксперимента; примерный вид этой зависимости показан на рис. 100. Момент трения имеет наибольшее значение, когда относительная скорость равна нулю (трение покоя). С возрастанием скорости трение уменьшается и приближается к некоторому предельному значению, хотя возможно, что при больших скоростях величина трения снова начнет возрастать.

Спадающая часть кривой трения может явиться причиной возникновения автоколебаний. Это можно показать простым исследованием уравнения энергии. Если скорость колебания маятника в некоторый момент времени равна $\dot{\varphi}$, то момент трения R совершает работу

$$A = \int R \dot{\varphi} dt.$$

Если бы момент трения был постоянен, то работа за полное колебание при симметричных колебаниях равнялась бы нулю. Однако момент трения R является функцией относительной скорости $\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}$. Если кривая трения имеет такую форму, как показано на рис. 100, то при $\dot{\varphi} > 0$, т. е. при $\dot{\varphi}_r < \dot{\varphi}_w$, развивается больший момент трения, чем при $\dot{\varphi} < 0$, т. е. при $\dot{\varphi}_r > \dot{\varphi}_w$. Поэтому работа, совершаемая моментом трения за полуколебание с $\dot{\varphi} > 0$, больше работы, затрачиваемой на преодоление этого момента за полуколебание с $\dot{\varphi} < 0$. Таким образом, за время полного колебания работа момента трения отлична от нуля и к маятнику подводится энергия. Если эта энергия достаточно велика, чтобы преодолеть имеющиеся в системе силы демпфирования, то возможно возникновение автоколебаний.

Если кроме момента трения R на маятник действует сила демпфирования, пропорциональная скорости, то из условия равновесия моментов получается уравнение движения в следующем виде:

$$\Theta \ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + mgs \sin \varphi = R(\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}). \quad (3.57)$$

Разделив уравнение на момент инерции маятника Θ и положив

$$\frac{d}{\Theta} = 2\delta, \quad \frac{mgs}{\Theta} = \omega_0^2, \quad \frac{R}{\Theta} = r,$$

получим уравнение (3.57) в виде

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = r(\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}). \quad (3.58)$$

Отсюда известным способом находится уравнение фазового портрета (интегральных кривых):

$$\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{1}{\dot{\varphi}} [r(\dot{\varphi}_w - \dot{\varphi}) - 2\delta\dot{\varphi} - \omega_0^2 \sin \varphi]. \quad (3.59)$$

Если функция трения известна, то по этому уравнению можно построить фазовый портрет и тем самым получить общее представление о возможных движениях. Здесь мы ограничимся тем, что рассмотрим некоторые характерные свойства фазового портрета; дальнейшие подробности можно найти, например, в книге Каудерера [10, § 59].

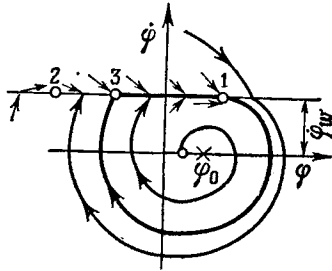


Рис. 101. Фазовый портрет маятника с трением.

Прежде всего видно, что особая точка, т. е. положение равновесия, существует в том случае, когда выполняются условия

$$\dot{\varphi} = 0 \text{ и } r(\varphi_w) - \omega_0^2 \sin \varphi = 0.$$

В фазовой плоскости (рис. 101) эта точка расположена на оси φ на расстоянии

$$\varphi = \varphi_0 = \arcsin(r(\dot{\varphi}_w)/\omega_0^2) \quad (3.60)$$

от начала координат. Пока движения маятника остаются столь малыми, что $\varphi < \varphi_w$ и $\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_w - \dot{\varphi} > 0$, фазовые траектории имеют вид спиралей, которые либо стягиваются к особой точке (3.60), либо раскручиваются. При больших отклонениях маятника может случиться, что $\varphi = \varphi_w$ и, таким образом, $\dot{\varphi}_r = 0$. Тогда ось привода и маятник движутся как одно твердое тело до тех пор, пока сумма силы демпфирования и восстанавливающей силы не достигнет величины силы трения покоя. В этой «точке срыва» маятник начинает двигаться относительно оси. Если сила трения покоя равна $r(0) = r_0$, то точка срыва находится из условий

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_w, \quad r_0 - 2\delta\dot{\varphi}_w - \omega_0^2 \sin \varphi &= 0, \\ \varphi = \varphi_1 = \arcsin \frac{r_0 - 2\delta\dot{\varphi}_w}{\omega_0^2}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

что соответствует точке 1 на рис. 101. Точка срыва лежит на «линии скачка» ($\varphi = \varphi_w$), на которой все фазовые траектории имеют излом из-за скачкообразного изменения силы трения. Величину этого излома можно определить из (3.59). Покажем, что все фазовые тра-

ектории, подходящие к линии скачка на участке 1—2, при возрастании φ следуют по этой линии до точки срыва 1. Рассматривая направления, по которым фазовые траектории подходят к участку 1—2 (на рисунке эти направления показаны стрелками), мы обнаруживаем, что дальше траектории могут идти только вдоль линии скачка. Если фазовая траектория достигает линии скачка, то устанавливается такая величина силы трения, что $d\dot{\varphi}/d\varphi=0$, и поэтому продолжение траектории представляет собой горизонтальный отрезок. В этом случае сила трения как раз обеспечивает сцепление муфты маятника с осью привода. Точку 2 (рис. 101), являющуюся левой границей того участка линии скачка, который при этом проходит, можно получить из (3.61), изменив знак r_0 . Таким образом, точка 2 будет иметь координаты

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_w, \quad \varphi = \varphi_2 = \arcsin \frac{-r_0 - 2\delta\varphi_w}{\omega_0^2}. \quad (3.62)$$

Все фазовые траектории, «вливающиеся» в участок 1—2, следуют сначала до точки 1, а далее — по спирали вокруг ранее найденного положения равновесия. Если собственное демпфирование достаточно велико, то эти спирали скручиваются к положению равновесия, не касаясь снова линии скачка. В этом случае автоколебания не возникают; вместо этого все фазовые траектории стягиваются к *положению равновесия*.

При малом собственном демпфировании выходящая из точки 1 спираль вновь достигает линии скачка в точке 3, как показано на рис. 101. Вместе с участком 3—1 дуга спирали образует замкнутую кривую, представляющую собой предельный цикл системы. Все фазовые траектории, где бы они ни начинались, в конце концов вливаются в этот предельный цикл. В то время как во многих других автоколебательных системах предельный цикл нужно искать методом проб, а именно варьированием начальных условий, здесь предельный цикл полностью задается прямолинейным отрезком, замыкающим вполне определенную фазовую траекторию. В рассматриваемом здесь случае фазовые траектории не приближаются к предельному циклу асимптотически, а в точности совпадают с ним после конечного числа оборотов.

В зависимости от величины демпфирования, трения и скорости вращения оси привода, а также прежде всего в зависимости от вида функции трения возможны многочисленные формы движения маятника, которые здесь не будут рассматриваться. Следует только указать, что при достаточно большом трении покоя может иметь место случай, когда не будет существовать точки срыва. Как видно из (3.61), это происходит при

$$r_0 \geq \omega_0^2 + 2\delta\varphi_w. \quad (3.63)$$

когда аргумент функции \arcsin в (3.61) становится большим единицы, так что действительного решения не существует. В этом случае маятник просто равномерно вращается вместе с валом, как будто он жестко закреплен на нем.

Наконец, исследуем устойчивость положения равновесия. Для этого достаточно рассмотреть поведение фазовых траекторий в непосредственной окрестности положения равновесия, т. е. устойчивость в малом. С этой целью положим $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varphi}$ и будем считать $\bar{\varphi}$ настолько малым, что можно принять $\sin \varphi = \bar{\varphi}$ и $\cos \varphi = 1$; тогда

$$\sin \varphi = \sin (\varphi_0 + \bar{\varphi}) = \sin \varphi_0 + \bar{\varphi} \cos \varphi_0. \quad (3.64)$$

Функция трения $r(\varphi_r)$ в непосредственной окрестности рабочей точки $\varphi_r = \varphi_w$ раскладывается в ряд Тейлора, причем, в силу того что $\dot{\varphi}_0 = 0$, здесь можно положить $\dot{\varphi}_r = \dot{\varphi}_w - \dot{\varphi} = \varphi_w - \dot{\varphi}$:

$$r(\dot{\varphi}_r) = r(\dot{\varphi}_w) - (dr/d\dot{\varphi}_r)_0 \dot{\varphi} + \dots$$

(индекс 0 у производной относится к значению $\dot{\varphi} = 0$). Пренебрегая членами высшего порядка в ряде Тейлора и учитывая условие равновесия (3.60), из (3.58) получаем уравнение движения

$$\ddot{\varphi} + [2\delta + (dr/d\dot{\varphi}_r)_0] \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cos \varphi_0 \bar{\varphi} = 0. \quad (3.65)$$

Поведение осциллятора, описываемого линейным дифференциальным уравнением такого вида, рассматривалось в гл. 2. Осциллятор совершает колебания, характер которых зависит от коэффициента при $\dot{\varphi}$. Производная, входящая в этот заключенный в квадратные скобки коэффициент, отрицательна, когда рабочая точка выбрана так, как это показано на рис. 100. Если

$$(dr/d\dot{\varphi}_r)_0 = -2\delta,$$

то коэффициент при $\dot{\varphi}$ равен нулю и в непосредственной окрестности положения равновесия происходят незатухающие колебания. В случае

$$(dr/d\dot{\varphi}_r)_0 > -2\delta$$

получаются затухающие колебания, а в случае

$$(dr/d\dot{\varphi}_r)_0 < -2\delta \quad (3.66)$$

— нарастающие колебания. В последнем случае изображающая точка, движущаяся вдоль фазовой траектории и характеризующая текущее состояние маятника, через некоторое время покидает ок-

рестность положения равновесия и приближается к предельному циклу, о котором речь шла выше. Таким образом, неравенство (3.66) является условием возбуждения колебаний рассматриваемого маятника с трением.

3.4. Разрывные колебания

Автоколебания, происходящие в системах накопительного типа, мы назвали разрывными колебаниями; при этом, однако, следует подчеркнуть, что не всегда можно установить четкую границу между такими колебаниями и рассматривавшимися выше автоколебаниями систем осцилляторного типа. Разрывные колебания часто называют также *релаксационными* колебаниями ¹⁾, но в нашей книге этот термин не используется, во-первых, потому, что он вообще представляется нам выбранным не слишком удачно, и, во-вторых, потому, что он может привести к недоразумениям, ибо физики вкладывают в понятие релаксации совершенно иной смысл.

Уже во введении к этой главе упоминались некоторые простые системы, в которых могут возбуждаться разрывные колебания (рис. 84 и 85). Рассмотренный в разд. 3.3.3 фрикционный маятник при определенных условиях также совершает движения, которые можно было бы назвать разрывными колебаниями. В дальнейшем сначала качественно исследуются некоторые простые системы с разрывными колебаниями, а затем количественно анализируется поведение двух таких типичных систем.

3.4.1. Примеры систем с разрывными колебаниями

Принцип действия гидравлической системы, изображенной на рис. 102, весьма прост. Сосуд непрерывно наполняется до тех пор, пока при уровне воды h_2 встроенный в сосуд сифон не начнет действовать и не опорожнит сосуд до уровня воды $h=h_1$. При $h \leq h_1$ в сифон поступает воздух, опорожнение прекращается и сосуд снова начинает наполняться. Процесс состоит из постоянно повторяющихся колебаний уровня воды h между двумя граничными значениями h_1 и h_2 , причем период колебания определяется просто как сумма времени наполнения T_F и времени опорожнения T_B .

Колебательный процесс представлен на рис. 103, предельный цикл фазового портрета — на рис. 104.

Колебательная система подобного типа хорошо известна из бытовой практики — вода, капающая из водопроводного крана. При не полностью закрытом кране вода постоянно понемногу проса-

¹⁾ Введенный Ван дер Полем термин «релаксационные колебания» охватывает колебания, отличные от чисто гармонических и образующие переходную форму от гармонических к разрывным колебаниям. — *Прим. ред.*

чивается и собирается в трубке крана. Форма свободной поверхности воды на конце трубки определяется поверхностным натяжением, силами сцепления частиц воды и силой тяжести. Так как вода все время подтекает, сила тяжести становится преобладающей и начинается процесс образования перемычки, заканчивающийся

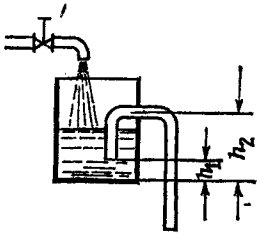


Рис. 102. Гидравлический осциллятор с разрывными колебаниями.

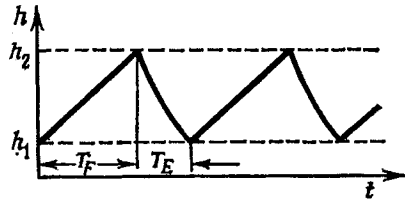


Рис. 103. Разрывные колебания гидравлического осциллятора.

падением капли. Поверхностное натяжение предотвращает образование непрерывно истекающей струи. После отделения капли снова образуется свободная поверхность, и через известное время вода вновь накапливается.

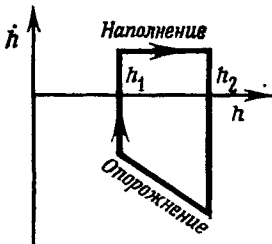


Рис. 104. Предельный цикл гидравлического осциллятора с разрывными колебаниями.

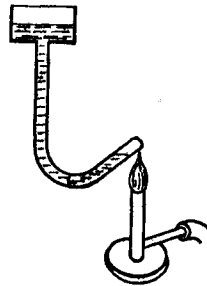


Рис. 105. Модель гейзера.

Температурно-гидравлической автоколебательной системой является гейзер, который периодически выбрасывает горячую воду на значительную высоту. Упрощенная модель гейзера изображена на рис. 105. Заполняющая изогнутую трубку вода подогревается в запаянном конце трубки, слегка загнутом вверх. Когда достигается температура кипения, образующийся водяной пар выбрасывает часть водяного столба из области подогрева. Процесс парообразования прерывается, и холодные стенки охлаждают оставшуюся в

трубке воду. Из-за большого перепада температур на границе зоны подогрева и тепловой инерции водяного столба происходит возбуждение колебаний, выражающихся в периодическом выбрасывании воды из трубки.

В качестве последнего примера рассмотрим гидравлический ударный подъемник («гидравлический таран»). В этой системе, изобретенной в 1796 г. Монгольфье, инерционные силы движущихся масс воды весьма искусным способом используются для того, чтобы

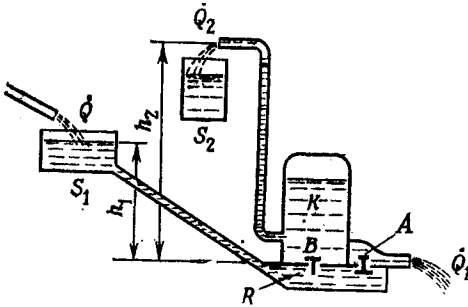


Рис. 106. Гидравлический ударный подъемник.

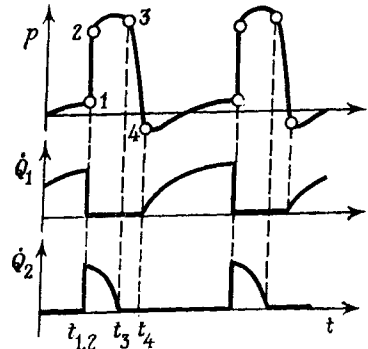


Рис. 107. Колебания давления и расходов в гидравлическом ударном подъемнике.

подавать воду из нижнего резервуара S_1 в расположенный выше резервуар S_2 . На рис. 106 показана схема такого подъемника. Его принцип действия состоит в следующем. Из резервуара S_1 вода по наклонной трубе поступает в камеру R , из которой она может либо вытекать наружу через клапан A , либо поступать в бак K через перепускной клапан B . Так как к баку подсоединена вертикальная труба, давление в нем, естественно, выше, чем в расположенной ниже камере R . Вследствие этого клапан B в нерабочем положении закрыт. Для пуска подъемника открывают клапан A , и возникающее течение создает в окрестности этого клапана такое распределение давлений, что по достижении определенной скорости течения подсаивающая сила внезапно закрывает клапан. Резкое перекрытие клапана A приводит к гидравлическому удару, т. е. скачкообразному повышению давления p в камере R . При этом клапан B открывается, часть воды поступает из камеры в бак K и за счет скачка давления подается по вертикальной трубе в расположенный выше резервуар S_2 . При этом находящаяся в баке K воздушная подушка играет роль своеобразной пружины. После падения возникшего от удара давления клапан B снова закрывается, а распространяющаяся вверх по наклонной трубе волна давления создает в камере

разрежение. Тогда клапан A автоматически открывается, и весь описанный выше процесс повторяется.

На рис. 107 показано изменение во времени давления p в камере, а также расходов \dot{Q}_1 и \dot{Q}_2 . На нем выделены следующие точки:

- 1 — закрывается клапан A — начало процесса гидравлического удара;
- 2 — открывается клапан B (почти одновременно с закрытием A) — конец процесса гидравлического удара;
- 3 — закрывается клапан B — начало процесса разрежения;
- 4 — открывается клапан A — конец процесса разрежения.

Время, разделяющее точки 3 и 4, определяется временем прохождения волной давления наклонной трубы. Этим временем и скоростью нарастания давления на клапане определяется время повторения процесса (период колебания). В описанном устройстве оно имеет порядок одной секунды.

Построены ударные подъемники, у которых отношение высот h_1/h_2 достигает величины $1/20$. Производительность процесса — количество подаваемой в секунду воды \dot{Q}_2 — тем меньше, чем выше вертикальная труба. Следует заметить, что подъем массы воды \dot{Q}_2 на более высокий уровень не противоречит закону сохранения энергии.

3.4.2. Колебания в релейном контуре регулирования (регулятор температуры)

Рассмотрим колебания регулятора температуры. Принципиальная схема устройства, которое в почти неизменном виде применяется в термостатах, электрических печах, отоплении помещений, холодильниках и кондиционерах, приведена на рис. 108. Помещение R обогревается нагревателем H , причем достигается определенная температура x . Величина x , измеряемая, например, термоэлементом, сравнивается с заданным значением x_s , и разность $x - x_s$ поступает на вход усилителя. На выходе усилителя включено реле, которое включает нагреватель H , если измеренное значение x меньше заданного, и соответственно отключает нагреватель, если x больше заданного значения. В отдельных случаях нагреватель может не выключаться, а переключаться на более низкий уровень обогрева.

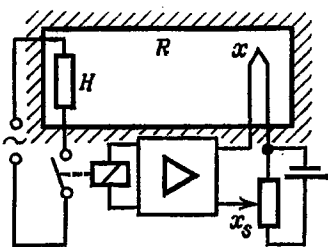


Рис. 108. Регулятор температуры релейного типа.

Чтобы получить уравнение для температуры x , рассмотрим тепловой баланс системы. Если \dot{Q}_z — количество тепла, подводимое

нагревателем в секунду, \dot{Q}_a — количество тепла, отводимое в секунду вследствие потерь, \dot{Q}_s — количество тепла, накапливающееся в помещении за секунду, то

$$\dot{Q}_z = \dot{Q}_a + \dot{Q}_s. \quad (3.67)$$

Количество отводимого тепла принимается пропорциональным температуре:

$$\dot{Q}_a = kx.$$

Количество подводимого тепла постоянно, пока реле находится в одном из двух возможных состояний: нагреватель включен или выключен. Для накапливающегося в помещении тепла в случае постоянной теплоемкости C можно записать

$$\dot{Q}_s = C\dot{x}.$$

Подставляя в (3.67) выражения для \dot{Q}_a и \dot{Q}_s , получаем

$$C\dot{x} + kx = \dot{Q}_z. \quad (3.68)$$

Введем следующие обозначения:

$C/k = T_z$ — постоянная времени;

$\frac{\dot{Q}_z}{k} = \begin{cases} x_0 \\ x_u \end{cases}$ — предельные значения температуры.

Здесь величина x_0 является максимальной температурой в помещении, которая со временем устанавливается при длительном включении нагревателя; соответственно x_u — минимальная температура, которая со временем устанавливается при отключенном нагревателе или при его работе в пониженном режиме. Положение реле определяет то из этих значений, которое надо подставить в уравнение. Таким образом, из уравнения (3.68) получаем

$$T_z \dot{x} + x = \begin{cases} x_0 & \text{I,} \\ x_u & \text{II.} \end{cases} \quad (3.69)$$

Решения этого дифференциального уравнения известны, и в случае начальных условий $x = x_a$ при $t = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} \text{I: } x &= x_0 - (x_0 - x_{a1}) e^{-t/T_z}, \\ \text{II: } x &= x_u + (x_{a11} - x_u) e^{-t/T_z}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Графики этих решений приведены на рис. 109, а фазовые траектории — на рис. 110. Реально существующее решение, соответствующее процессу регулирования, представляется обоими решениями (3.70). Моменты перехода от одного решения к другому определяются характеристикой реле и настройкой регулятора.

Регулятор и помещение, в котором поддерживается заданная температура, образуют контур регулирования. На вход регулятора от измерительного прибора (термометра) поступают данные о температуре в помещении, и регулятор, включая и выключая нагреватель, поддерживает температуру помещения в заданных пределах.

При идеальной характеристике реле его действие описывается следующей функцией $f(x)$:

$$\begin{aligned} \text{I: } & x < x_s, \quad f(x) = x_0, \\ \text{II: } & x > x_s, \quad f(x) = x_u, \end{aligned}$$

или в общем виде

$$f(x) = \frac{1}{2}(x_0 + x_u) + \frac{1}{2}(x_0 - x_u) \operatorname{sign}(x_s - x). \quad (3.71)$$

График этой функции приведен на рис. 111.

Теперь процесс регулирования протекает следующим образом. Если начальная температура в помещении ниже заданной, то регулятор включает нагреватель. Температура, согласно (3.70)_I,

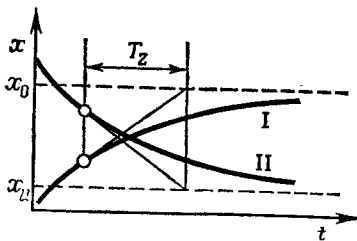


Рис. 109. Графики решений уравнений контура регулирования температуры.

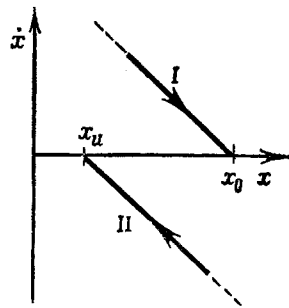


Рис. 110. Фазовые траектории решений уравнений контура регулирования температуры.

возрастает соответственно восходящей кривой на рис. 109, пока не будет достигнуто заданное значение температуры. При малейшем превышении этого заданного значения регулятор выключает нагреватель, и после этого вступает в силу решение (3.70)_{II}, которому на рис. 109 соответствует нисходящая кривая. Температура снижается и становится меньше заданного значения. Регулятор опять включает нагреватель, и температура вновь повышается.

При идеальном регуляторе процесс регулирования состоял бы из отдельных отрезков кривых I и II, теоретически бесконечно быстро следующих друг за другом, а температура почти незаметно колебалась бы около заданного значения. Иначе говоря, процесс регулирования представлял бы собою колебательный процесс с бесконечно большей частотой и бесконечно малой амплитудой.

Реальные регуляторы ведут себя иначе, так что частота и амплитуда колебаний температуры имеют конечные значения. Главные причины таких колебаний регулируемой температуры заключаются в следующем.

1. *Гистерезис* реле, применяемого в регуляторе. В этом случае около заданного значения температуры существует известная зона нечувствительности, в которой реле не реагирует на отклонения температуры. Характеристика реле и соответственно статическая характеристика регулятора имеет вид, показанный на рис. 112.

Реле включается и выключается не при $x=x_s$, а при значениях x_1 и x_2 , которые отличаются от x_s на величину Δx .

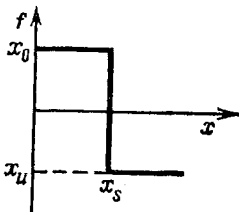


Рис. 111. Характеристика идеального реле.

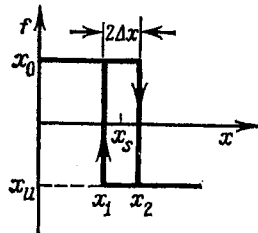


Рис. 112. Характеристика реле с гистерезисом.

2. *Временное запаздывание* регулятора. В рассматриваемом случае для того, чтобы сигнал переключения от измерительного прибора достиг реле, требуется определенное время τ на выходе регулятора. Во многих случаях время запаздывания можно считать постоянным. Переменное время запаздывания может возникнуть благодаря инерции измерительного прибора.

3. *Инерция* измерительного прибора. Измерительный прибор показывает не действительную температуру x , а величину x_m , зависящую от x , но из-за инерции измерительной системы отстающую от действительной температуры. Совершенно аналогичные явления происходят и потому, что в обогреваемом помещении температура x не сразу распределяется равномерно. Таким образом, температура в месте измерения в общем случае отстает от измеряемой непосредственно у нагревателя. Оба эффекта запаздывания оказывают одинаковое влияние на характер колебательного процесса.

Рассмотрим более подробно причины колебаний, указанные в пунктах 1 и 2.

3.4.2.1. *Регулятор с гистерезисом.* Если характеристика регулятора имеет вид, изображенный на рис. 112, то после некоторого переходного процесса устанавливаются стационарные колебания

постоянной амплитуды, как показано на рис. 113. Восходящая ветвь соответствует кривой I решения (3.70). Переход на кривую II происходит при $x = x_2 = x_s + \Delta x$. Соответственно при $x = x_1 = x_s - \Delta x$

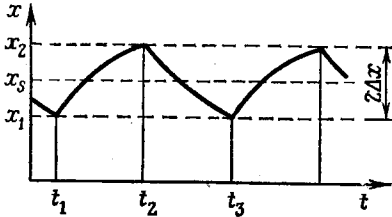


Рис. 113. Колебания температуры в случае релейного регулятора с гистерезисом.

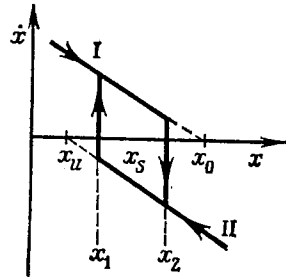


Рис. 114. Предельный цикл изображенного на рис. 108 релейного регулятора при наличии гистерезиса.

происходит обратный переход на кривую I. Таким образом, температура все время колеблется между значениями x_1 и x_2 и амплитуда этих колебаний определяется статической характеристикой регулятора:

$$A = 1/2 (x_2 - x_1) = \Delta x.$$

Период колебания

$$T = (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)$$

находится простыми вычислениями из решений (3.70) с учетом граничных условий

$$\begin{aligned} \text{для кривой I: } & \begin{cases} x(t_1) = x_s - \Delta x, \\ x(t_2) = x_s + \Delta x; \end{cases} \\ \text{для кривой II: } & \begin{cases} x(t_2) = x_s + \Delta x, \\ x(t_3) = x_s - \Delta x. \end{cases} \end{aligned}$$

Используя (3.70), находим

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= T_z \ln \frac{x_0 - x_s + \Delta x}{x_0 - x_s - \Delta x}, \\ t_3 - t_2 &= T_z \ln \frac{x_s - x_u + \Delta x}{x_s - x_u - \Delta x}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$T = T_z \ln \frac{(x_0 - x_s + \Delta x)(x_s - x_u + \Delta x)}{(x_0 - x_s - \Delta x)(x_s - x_u - \Delta x)}. \quad (3.72)$$

Фазовый портрет регулятора показан на рис. 114. Кривым I и II решения (3.70) здесь соответствуют две наклонные прямые. Изображающая точка, представляющая текущее состояние системы,

периодически перескакивает с одной из этих прямых на другую, так что получается предельный цикл в форме параллелограмма. Все фазовые траектории, какими бы начальными условиями они ни определялись, вливаются в этот предельный цикл вдоль прямых I и II.

3.4.2.2. Регулятор с временным запаздыванием. При наличии времени запаздывания τ реле выключается (или включается) не при прохождении заданного значения регулируемой величины, а

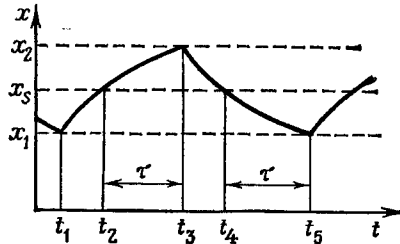


Рис. 115. Колебания температуры в случае релейного регулятора с временным запаздыванием.

с соответствующим запаздыванием. Происходящее за время этого запаздывания увеличение или уменьшение регулируемой величины можно рассчитать по формулам (3.70). Применяя обозначения, приведенные на рис. 115, получаем

$$\begin{aligned} \text{для кривой I: } & \begin{cases} x(t_2) = x_s, \\ x(t_3) = x(t_2 + \tau) = x_2; \end{cases} \\ \text{для кривой II: } & \begin{cases} x(t_4) = x_s, \\ x(t_5) = x(t_4 + \tau) = x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.70) и исключая t_2 и t_4 , находим

$$x_2 = x_0 - (x_0 - x_s) e^{-\tau/Tz}, \quad x_1 = x_u + (x_s - x_u) e^{-\tau/Tz}, \quad (3.73)$$

так что амплитуда колебания составляет

$$A = \frac{1}{2} (x_2 - x_1) = \frac{1}{2} (x_0 - x_u) (1 - e^{-\tau/Tz}). \quad (3.74)$$

В пределе это дает

$$\begin{aligned} \text{при } \tau \rightarrow 0 \quad & A \rightarrow 0, \\ \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad & A \rightarrow \frac{1}{2} (x_0 - x_u). \end{aligned}$$

Таким образом, при уменьшении времени запаздывания амплитуда колебаний стремится к нулю и при нулевом запаздывании колебания не происходят.

Точки переключения, в которых происходит переход с кривой I на кривую II и обратно, можно найти при помощи простых построений на фазовой плоскости (рис. 116). Абсциссы этих точек задаются формулами (3.73), а ординаты получаются из решений (3.70) после дифференцирования и подстановки $x_a = x_s$, $t = \tau$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{1}{T_z} (x_0 - x_s) e^{-\tau/T_z}, \\ x_1 &= -\frac{1}{T_z} (x_s - x_n) e^{-\tau/T_z}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Исключив из уравнений (3.73) и (3.75) x_0 и x_n , будем иметь для x_1 и x_2 два одинаковых соотношения:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_s + x_1 T_z (e^{\tau/T_z} - 1), \\ x_2 &= x_s + x_2 T_z (e^{\tau/T_z} - 1). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Если x_1 и x_2 считать переменными величинами, то соотношения (3.76) являются уравнением прямой в фазовой плоскости.

Эта прямая проходит через точку $x = x_s$, $\dot{x} = 0$ и имеет наклон

$$\frac{dx}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{T_z (e^{\tau/T_z} - 1)}. \quad (3.77)$$

Эта же прямая, нанесенная на рис. 116 штриховой линией, представляет собой геометрическое место искомых точек переключения (и называется прямой переключения.— *Ред.*). Но геометрическим местом таких точек являются и прямые, соответствующие кривым I и II. Следовательно, точками переключения будут обозначенные на рис. 116 цифрами 1 и 2 точки пересечения этих прямых с прямой переключения. При помощи такого построения легко установить, как влияют изменения x_s или τ на максимальные значения x_1 и x_2 . Из рис. 116 непосредственно видно, что колебания становятся существенно несимметричными, если заданное значение x_s приближается к граничным значениям x_0 или x_n . Для периода колебания в данном случае получается соотношение

$$T = 2\tau + (t_2 - t_1) + (t_4 - t_3). \quad (3.78)$$

Из граничных условий

$$\begin{aligned} \text{для кривой I:} & \begin{cases} x(t_1) = x_1, \\ x(t_2) = x_s; \end{cases} \\ \text{для кривой II:} & \begin{cases} x(t_3) = x_2, \\ x(t_4) = x_s \end{cases} \end{aligned}$$

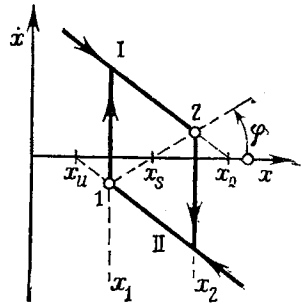


Рис. 116. Предельный цикл изображенного на рис. 108 релейного регулятора при наличии временного запаздывания.

и уравнений (3.70) находим входящие в (3.78) разности

$$t_2 - t_1 = T_z \ln \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_s}, \quad t_4 - t_3 = T_z \ln \frac{x_2 - x_u}{x_s - x_u},$$

а следовательно, и период колебания:

$$T = 2\tau + T_z \ln \frac{(x_0 - x_1)(x_2 - x_u)}{(x_0 - x_s)(x_s - x_u)}. \quad (3.79)$$

Здесь x_1 и x_2 определяются формулами (3.73).

3.4.3. RC-генератор

Наряду с рассмотренным в разд. 3.3.2 ламповым генератором с контуром RLC для генерации электрических колебаний применяются также RC -генераторы. Этот генератор содержит дополнительный контур, благодаря которому можно в широких пределах менять форму колебаний, воспроизводя при этом почти любую форму, промежуточную между гармоническими колебаниями и совершенно отличными от них разрывными колебаниями. Благодаря этому свойству RC -генератор получил широкое распространение.

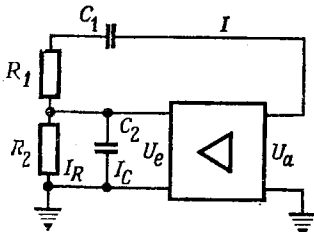


Рис. 117. Схема RC -генератора.

Принципиальная схема RC -генератора показана на рис. 117. Основными элементами генератора являются два RC -контура и усилитель, изображенный на рисунке просто в виде блока. Выходное напряжение усилителя U_a поступает на вход усилителя через конденсатор C_1 и омическое сопротивление R_1 . На входе усилителя включены второй конденсатор C_2 и второе омическое сопротивление R_2 . Индуктивности отсутствуют.

Усилитель должен воспроизводить заданную функциональную зависимость $U_a = U_a(U_e)$ между входным напряжением и выходным напряжением U_a . Источником энергии этой автоколебательной системы является аккумуляторная батарея (на рисунке не показана).

Принцип действия генератора можно представить следующим образом. При достаточно большом входном сопротивлении усилителя величины токов, указанные на рис. 117, удовлетворяют равенству

$$I = I_R + I_C. \quad (3.80)$$

Конденсатор C_2 и сопротивление R_2 включены параллельно входу усилителя, поэтому

$$U_e = \frac{1}{C_2} \int I_C dt = R_2 I_R. \quad (3.81)$$

Выходное напряжение усилителя можно представить в виде суммы трех напряжений:

$$U_a = \frac{1}{C_1} \int I dt + R_1 I + R_2 I_R. \quad (3.82)$$

В качестве величины, характеризующей состояние системы, выберем входное напряжение $U_e = x$. Путем исключения токов уравнение (3.82) можно привести к виду

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \dot{x} + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1) x + \int x dt = U_a C_1 R_2. \quad (3.83)$$

Дифференцируя это уравнение по времени и учитывая соотношение

$$\frac{dU_a}{dt} = \frac{dU_a}{dx} \frac{dx}{dt} = S(x) \dot{x},$$

где $S(x)$ — крутизна характеристики усилителя, получаем уравнение

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.84)$$

Здесь коэффициент демпфирования

$$\delta = \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1 - R_2 C_1 S(x)}{2R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (3.85)$$

является функцией от x , а

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

представляет собой частоту недемпфированных колебаний. Решения уравнения (3.84) описывают нарастающие колебания, если $\delta < 0$. Поэтому из (3.85) следует условие возбуждения RC-генератора:

$$S(x) > \frac{R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1}{R_2 C_1}. \quad (3.86)$$

Если в выбранной рабочей точке крутизна характеристики усилителя удовлетворяет этому условию, то происходят автоколебания. Так как на характеристике любого усилителя проявляется эффект насыщения и ее крутизна при больших амплитудах уменьшается, амплитуды возникающих колебаний ограничены некоторым предельным значением. Расчет колебаний производится рассмотренными в разд. 3.2 методами и полностью аналогичен расчету лампового генератора.

Из (3.84) видно, что RC-генератор, работающий на границе возбуждения ($\delta \approx 0$), генерирует почти синусоидальные колебания. Однако, меняя какой-либо параметр, например уменьшая емкость конденсатора C_2 , можно получить колебания, практически являющиеся разрывными. Чтобы доказать это, рассмотрим предельный

случай, когда $C_2 \rightarrow 0$. Так как в этом случае (по причинам, которые станут очевидными в дальнейшем) целесообразно пользоваться прежней переменной $x = U_e$, вернемся к исходному уравнению (3.82) и в качестве величины, характеризующей состояние системы, выберем заряд конденсатора C_1 :

$$q = \int I dt, \quad q = I.$$

Поскольку $I_C = 0$ и $I_R = I$, уравнение (3.82) переходит в уравнение

$$\frac{1}{C_1} \int I dt + (R_1 + R_2) I = U_a,$$

или

$$C_1 (R_1 + R_2) \dot{q} + q = C_1 U_a. \quad (3.87)$$

Теперь U_a является функцией входного напряжения усилителя, равного $R_2 I$. Так как $I = \dot{q}$, то $U_a = U_a(\dot{q})$. Если принять это во внимание, то из (3.87) непосредственно получится уравнение фазового портрета:

$$q = C_1 [U_a(\dot{q}) - (R_1 + R_2) \dot{q}] = F(\dot{q}). \quad (3.88)$$

Если характеристика усилителя $U_a(\dot{q})$ задана, то посредством показанных на рис. 118 построений по любому значению \dot{q} можно определить соответствующую величину q . Изображенная на рисунке характеристика усилителя примерно соответствует ламповому

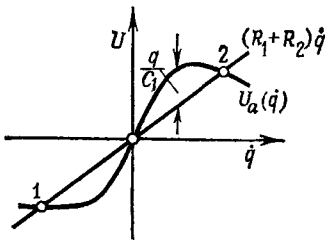


Рис. 118. К построению фазового портрета RC -генератора

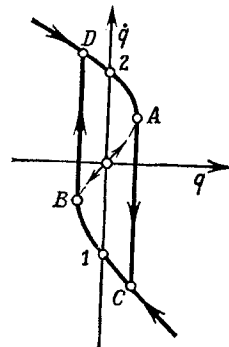


Рис. 119. Предельный цикл фазового портрета RC -генератора.

усилителю, у которого рабочая точка сдвинута в начало координат. Характеристика усилителя и прямая $(R_1 + R_2) \dot{q}$, которая определяет падение напряжения на сопротивлениях R_1 и R_2 , пересекаются,

кроме начала координат, в точках 1 и 2. В силу (3.88) в этих точках $q=0$. Этим же точкам пересечения соответствуют точки 1 и 2 пересечения фазовой траектории рассматриваемой системы (рис. 119) с осью ординат.

Фазовая траектория системы на рис. 119 имеет форму буквы Z; она задана последовательностью точек $D - A -$ начало координат $- B - C$. Но так как фазовые траектории в верхней полуплос-

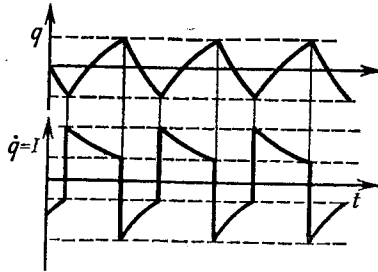


Рис. 120. Колебания заряда q и величины тока I в RC -генераторе.

кости могут проходиться только в направлении роста q , а в нижней полуплоскости — только в направлении уменьшения q , изображающая точка движется так, как показано стрелками. Особая точка в начале координат здесь неустойчива, так как изображающая точка может лишь удаляться от нее. К точкам A и B изображающая точка может подходить как сверху, так и снизу. Однако точки A и B не являются положениями равновесия, так как для них $\dot{q} \neq 0$. Движение происходит таким образом, что изображающая точка скачкообразно перемещается из точки A в точку C и соответственно из точки B в точку D . При этом получается предельный цикл $ACBDA$, похожий на предельные циклы других разрывных колебаний (см., например, рис. 114 и 116), имеющие форму параллелограмма.

Такое сходство имеет место не только для фазовых портретов; кривые $x(t)$ для рассматриваемых нами колебаний напоминают эти кривые для разрывных колебаний в других системах. В верхней части рис. 120 построена кривая изменения во времени заряда q , а в нижней части — соответствующая кривая для величины тока I , которая является и мерой входного напряжения усилителя. Отсюда видно, что величина тока I непригодна для описания процесса колебаний, так как при ее скачкообразном изменении производная принимает сколь угодно большие значения, и поэтому на плоскости (I, \dot{I}) невозможно построить фазовый портрет.

3.5. Задачи

20. Найти линейное приближение (3.16) для нелинейного дифференциального уравнения Релея

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta x^2) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

и вычислить приближенные значения амплитуды A и частоты ω стационарных колебаний. (Уравнение Релея описывает колебания лампового генератора с измененной по сравнению с рис. 97 схемой включения.)

21. Вычислить амплитуду указанных в задаче 20 колебаний, полагая $x \approx A \cos \omega_0 t$ и исходя из условия, что при стационарных колебаниях в течение одного полного колебания не происходит ни подвода энергии, ни ее потери.

22. Найти линейное приближение для дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - (\alpha - \beta |x|) \dot{x} + \omega_0^2 (x + \gamma x^3) = 0$$

и вычислить приближенные значения частоты и амплитуды стационарных колебаний.

23. Колебательная система, в которой возможны автоколебания, описывается дифференциальным уравнением

$$x'' + 2Dx' + x = a \operatorname{sign} x',$$

Найти амплитуду стационарных колебаний, используя: а) решения в областях $x' > 0$ и $x' < 0$ без каких-либо дополнительных допущений; б) приближенные решения, полученные методом гармонического баланса.

24. Колебательная система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$x'' + 2Dx' + x = ax_{\tau},$$

причем функция $x_{\tau}(t) = x(t - \tau_0)$ сдвинута по времени на величину τ_0 относительно функции x . Найти условие возбуждения, используя энергетическое равенство $\Delta E_D = \Delta E_Z$ и полагая $x \approx A \cos \omega t$.

25. Колебания несущего крыла самолета при импульсном возмущении описываются дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(\dot{x}, \varphi) = av^3 (\varphi - \dot{x}/v) = av^2 \alpha,$$

т. е. функция f пропорциональна углу атаки $\alpha = \varphi - \dot{x}/v$ и квадрату скорости полета v . С колебаниями $x \approx A \cos \omega_0 t$ связаны отличающиеся от них на фазовый угол ψ крутильные колебания крыла $\varphi \approx bA \cos(\omega_0 t - \psi)$. Из условия энергетического баланса определить критическую скорость полета, при превышении которой следует опасаться возникновения незатухающих колебаний — флаттера.

26. Определить период колебаний T часового маятника, у которого уменьшение амплитуды колебаний за счет сухого трения компенсируется импульсом $s(t)$, приложенным в момент прохождения положения равновесия (см. рис. 96). Колебания такого маятника описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\rho \operatorname{sign} \dot{x} + s(t).$$

На сколько секунд за сутки часы отстают из-за трения, если $x_r = \rho/\omega_0^2 = 0,01A$?

27. Определить период колебания маятника в задаче 26, если в точках изменения направления движения ($\dot{x} = 0$) прикладываются импульсы, направленные: а) к положению равновесия и б) от положения равновесия.

На сколько секунд за сутки часы спешат в случае а) и соответственно отстают в случае б), если $x_r = 0,01A$?

28. Регулятор с запаздыванием описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = h_0 - h \operatorname{sign} x_{\tau},$$

причем функция $x_{\tau}(t) = x(t - t_0)$ запаздывает на время t_0 по отношению к $x(t)$. Определить период колебаний T и их амплитуду A , а также среднее значение x_m в случае $h > h_0$.

29. Пусть у RC -генератора, изображенного на рис. 117, $R_1 = R_2$, $C_1 = C_2$, и пусть характеристика усилителя приближенно описывается соотношением

$U_a(x) \approx \alpha x - \beta x^3$. Найти крутизну характеристики α_0 в нулевой точке, соответствующую границе возбуждения автоколебаний, и для случая $\alpha > \alpha_0$ вывести приближенные выражения для частоты и амплитуды возникающих колебаний.

30. Для RC -генератора с $C_2=0$, $C_1=C$, $R_1=R_2$ характеристика усилителя приближенно описывается соотношением

$$U_a(\dot{q}) \approx \alpha \dot{q} - \beta \dot{q}^3.$$

Из уравнения фазового портрета (3.88) (см. также рис. 119) определить наименьшую крутизну характеристики α_0 в нулевой точке, при которой могут возникнуть автоколебания. В случае $\alpha > \alpha_0$ определить амплитуду A этих колебаний непосредственно из уравнения (3.88).

4. Параметрические колебания

Во вводном обзоре (разд. 1.6) параметрическими назывались такие колебания, которые возбуждаются вследствие изменения во времени одного из параметров колебательной системы. Наибольший интерес представляют периодические изменения параметра. Так как период изменения параметра определяется внешними воздействиями, параметрические колебания относятся к колебаниям с внешним возбуждением. Однако в отдельных случаях частота изменения параметра может совпадать с одной из собственных частот колебательной системы. При этом параметр меняется в такт с собственным колебанием, так что осциллятор обладает некоторыми свойствами системы с самовозбуждением, и в таких случаях имеет смысл говорить о параметрических колебаниях с самовозбуждением. Известнейший пример системы такого вида — качели — подробно рассматривается ниже.

Отличительная черта параметрических колебаний состоит в том, что возбуждение не происходит, если осциллятор находится в положении равновесия. Однако при некоторых условиях, в частности при определенных значениях отношения собственной частоты колебаний к частоте возбуждения, положение равновесия может стать неустойчивым, и поэтому сколь угодно малое возмущение может вызвать параметрические колебания. Необходимость такого возмущения, приводящего к изменению параметров системы, отличают параметрические колебания от вынужденных колебаний, которые будут рассматриваться ниже (гл. 5). Вынужденные колебания могут начинаться и из положения равновесия, так как в этом случае возмущающая сила действует на осциллятор в любом его положении.

Параметрические колебания называют также *реономными* колебаниями, что соответствует принятому в теоретической механике термину, относящемуся к системам со связями, меняющимися со временем. В зависимости от вида дифференциальных уравнений, описывающих такие колебания, речь может идти о реолинейных и реонелинейных колебаниях.

4.1. Примеры осцилляторов с параметрическим возбуждением

4.1.1. Физический маятник с периодически перемещающейся осью подвеса

Рассмотрим физический маятник (рис. 121), который может поворачиваться вокруг горизонтальной оси A и положение которого определяется углом φ . Предположим, что ось A подвеса маятника движется в вертикальном направлении по определенному закону $a = a(t)$.

При составлении уравнения движения маятника в системе координат, движущейся вместе с осью подвеса, наряду с моментом силы тяжести $M_s = -mgs \sin \varphi$ необходимо учесть момент силы инерции $M_b = -m\ddot{a}s \sin \varphi$. Поэтому уравнение движения маятника примет вид

$$J\ddot{\varphi} = M_s + M_b = -m(g + \ddot{a})s \sin \varphi,$$

или вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{ms}{J}(g + \ddot{a}) \sin \varphi = 0. \quad (4.1)$$

Если $a(t)$ — периодическая функция времени, то такой же функцией является и коэффициент при $\sin \varphi$, так что уравнение (4.1) представляет собой нелинейное уравнение с периодическими коэффициентами.

4.1.2. Колебания в спарнике электровоза

В спарнике электровоза наблюдаются колебания, причину которых следует искать в периодическом изменении параметра системы, в данном случае жесткости сцепления. Принцип устройства спарника показан на рис. 122.

Ведущее колесо электровоза R , которое катится по рельсам с практически постоянной скоростью, обычно связано с мотором M двумя сцепными тягами. Массу, вращающуюся вместе с мотором, можно рассматривать как упругую систему, связанную с ведущим колесом и совершающую крутильные колебания. Жесткость пружины этого осциллятора зависит от положения колеса, т. е. от угла α . Если $\alpha = 90^\circ$, то передняя сцепная тяга находится в мертвой точке и почти не оказывает влияния на жесткость. Наоборот, жесткость

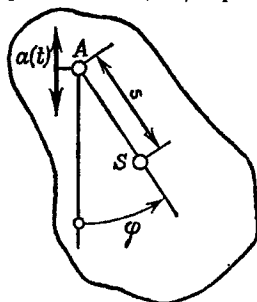


Рис. 121. Физический маятник с вертикально перемещающейся осью подвеса.

задней тяги, сдвинутой на 90° по отношению к передней, в этом положении максимальна.

Изменение жесткости в зависимости от угла α схематически изображено на рис. 123. Общая жесткость, полученная сложением

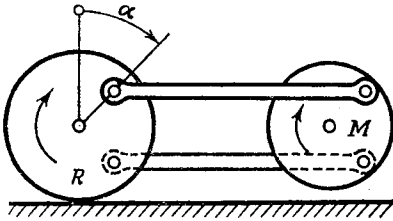


Рис. 122. Схема спарника электровоза.

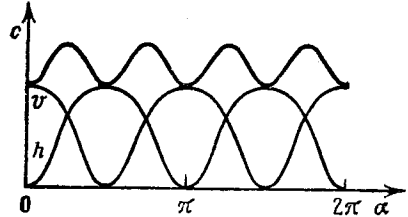


Рис. 123. Зависимость жесткости спарника от угла α .

жесткости передней (v) и задней (h) сцепных тяг, показана жирной линией. Таким образом, в этом случае жесткость является периодической функцией времени, четыре периода которой соответствуют одному обороту колеса.

Если угол смещения колеса относительно мотора обозначить через φ , то для малых углов ($\varphi \ll 1$) можно написать уравнение движения в виде

$$J\ddot{\varphi} + c(t)\varphi = 0. \quad (4.2)$$

Это — уравнение колебаний с периодически меняющимися коэффициентами.

4.1.3. Электрический колебательный контур с периодическими параметрами

Для электрического колебательного контура, состоящего из конденсатора (емкость C) и катушки индуктивности (индуктивность L), в гл. 2 было составлено дифференциальное уравнение (2.16):

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (4.3)$$

Если при этом, например, емкость $C = C(t)$ является периодической функцией времени, то уравнение (4.3) превращается в уравнение с периодическими коэффициентами и в системе могут происходить параметрически возбуждаемые колебания.

Периодическая зависимость этого параметра от времени может быть нежелательным побочным явлением. Тогда система настраивается таким образом, чтобы параметрически возбуждаемые колебания не возникали. Однако способность системы совершать параметрические колебания может быть с успехом применена при разработке

генераторов. Так, Л. И. Мандельштам и Н. Д. Папалекси построили и испытали генератор переменного тока, у которого в колебательном контуре, настроенном надлежащим образом, емкость периодически менялась за счет того, что часть пластины конденсатора составляло вращающееся зубчатое колесо.

4.1.4. Колеблущаяся струна с переменным натяжением

Мельде описал эксперимент, в котором можно получить параметрические колебания натянутой струны. Если струна натянута между неподвижной точкой и камертоном (рис. 124), то удар по камертону приводит к тому, что натяжение струны, зависящее от колебаний камертона, будет меняться периодически.

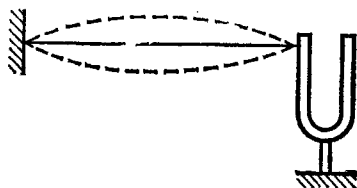


Рис. 124. Струна с периодически меняющимся натяжением.

Если при этом частота собственных колебаний камертона вдвое больше частоты основных колебаний струны, то амплитуда этих основных колебаний может сильно возрасти.

Поперечные колебания струны в соответствии с разд. 2.1.1.6 (уравнение (2.46)) описываются одномерным волновым уравнением

$$\ddot{\xi} = c^2 \xi'' = (S/\mu) \xi'' \quad (4.4)$$

Это уравнение можно решить методом разделения переменных, полагая

$$\xi = F(t) G(x).$$

После подстановки в (4.4) получим

$$\frac{\mu}{S} \frac{\ddot{F}}{F} = \frac{G''}{G} = -\frac{\omega_0^2 \mu}{S_0} \quad (4.5)$$

В отличие от предыдущего решения (уравнение (2.48)) теперь множитель S , зависящий от времени, необходимо было перенести в левую часть уравнения, чтобы в левой части находились только зависящие от времени, а в правой только зависящие от координаты выражения. Уравнение (4.5) может выполняться только тогда, когда эти выражения не зависят ни от времени, ни от координаты и, следовательно, должны быть равны константе, которую мы положили равной $-\omega_0^2 \mu/S_0$. Поведение решения во времени в силу урав-

нения (4.5) описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{F} + \omega_0^2 \frac{S(t)}{S_0} F = 0, \quad (4.6)$$

т. е. снова уравнением с периодически меняющимися коэффициентами.

Если струну заменить стержнем, а переменное натяжение — пульсирующей сжимающей силой, то также могут возникнуть параметрически возбуждаемые колебания. Такой вид поперечных колебаний стержня под влиянием периодически меняющейся продольной нагрузки был исследован в основном Меттлером (Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffn. Nürnberg, 1940, Bd. 8, S. 1—15)¹⁾.

4.1.5. Движение в окрестности стационарных колебаний

При исследовании устойчивости стационарных колебаний нелинейных систем всегда получаются дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами. Поэтому существует тесная связь между собственными колебаниями нелинейной системы и параметрическими колебаниями. Если $x = x_s(t)$ — стационарное (т. е. периодическое) решение нелинейного уравнения

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \quad (4.7)$$

то, для того чтобы оценить устойчивость осциллятора, рассматривают лишь движения в окрестности стационарного решения x_s .

Полагая

$$x = x_s + \xi, \quad \ddot{x} = \ddot{x}_s + \ddot{\xi},$$

можно представить $f(x)$ в виде ряда

$$f(x) = f(x_s) + (\partial f / \partial x)_{x=x_s} \xi + \dots$$

Считая «возмущение» ξ достаточно малым, можно отбросить все остальные члены ряда Тейлора, и тогда подстановка в уравнение (4.7) дает

$$\ddot{x}_s + \ddot{\xi} + f(x_s) + (\partial f / \partial x)_{x=x_s} \xi = 0.$$

Учитывая, что x_s является решением исходного уравнения (4.7), получаем уравнение для возмущения ξ :

$$\ddot{\xi} + (\partial f / \partial x)_{x=x_s} \xi = 0. \quad (4.8)$$

¹⁾ Еще ранее этим вопросом занимался В. Н. Челомей (см. его статью «О колебаниях стержней, подверженных действию периодически меняющихся продольных сил». — Труды КАИ, 1937, вып. VII). — *Прим. ред.*

В нелинейных системах производная $\partial f/\partial x$ зависит от переменной x . Так как было оговорено, что величина x_s является периодической функцией времени, коэффициент при ξ в уравнении (4.8) тоже должен быть периодической функцией времени.

4.1.6. Математический маятник переменной длины

Рассмотрим теперь в качестве последнего примера математический маятник, у которого длина нити $L=L(t)$ является периодической функцией времени. Для вывода уравнения движения применим закон изменения момента количества движения, согласно которому производная по времени от момента количества движения равна моменту внешних сил. Момент количества движения маятника относительно точки подвеса A равен $mL^2\dot{\varphi}$, момент силы тяжести $M_s = -mgL \sin \varphi$; следовательно,

$$\frac{d}{dt} (mL^2\dot{\varphi}) = 2mL\dot{L}\dot{\varphi} + mL^2\ddot{\varphi} = -mgL \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{L}}{L}\dot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0. \quad (4.9)$$

Наличие члена с множителем $\dot{\varphi}$ отличает это уравнение от ранее выведенных, однако уравнение (4.9) также является уравнением параметрических колебаний. Именно на примере математического маятника переменной длины особенно удобно показать типичные явления, которые происходят при параметрическом возбуждении. Поэтому в следующем разделе мы подробно рассмотрим поведение такого маятника в случае функции $L=L(t)$ специального вида.

4.2. Колебания качелей

В качестве типичного примера параметрически самовозбуждаемой системы рассмотрим качели. Как известно, качели приводятся в движение таким ритмическим сгибанием и выпрямлением тела (или периодическим сгибанием и выпрямлением колен), что центр тяжести системы поднимается, когда качели проходят через низшую точку, и опускается, когда качели достигают высшей точки (области максимального отклонения). Качели вместе с качающимся на них человеком с вполне достаточной точностью можно рассматривать как математический маятник, длина которого периодически меняет-

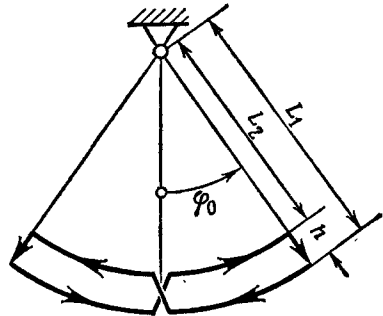


Рис. 125. К расчету колебаний качелей.

ся (что соответствует перемещению центра тяжести качелей в направлении веревки). Таким образом, качели в точности соответствуют примеру, рассмотренному в разд. 4.1.6. Это соответствие будет особенно наглядным, если представить перемещение центра тяжести как процесс, происходящий за бесконечно короткое время, т. е. мгновенно. При этом получается идеализированная модель, представленная на рис. 125. Длина маятника принимает два значения: L_1 и L_2 , причем большее значение L_1 соответствует движению от точки максимального отклонения к нижней точке, т. е. относится к фазе спуска, а меньшее значение L_2 соответствует фазе подъема. Траектория центра тяжести представляет собой петлеобразную кривую.

Заметим, что качели могут служить примером осциллятора с чистым самовозбуждением, так как длина маятника может быть однозначно выражена как функция величин φ и $\dot{\varphi}$. Например, для случая, представленного на рис. 125, имеем

$$L = L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}(L_1 + L_2) - \frac{1}{2}(L_1 - L_2) \operatorname{sign} \varphi \operatorname{sign} \dot{\varphi}.$$

Однако нецелесообразно подставлять это выражение в уравнение (4.9), так как при этом потребуется производная по времени от скачкообразно меняющейся функции. Проще и нагляднее использовать энергетические соображения, так как тогда легко не только установить закономерности возникновения колебаний, но и выяснить, как влияют на движение демпфирование и сухое трение.

4.2.1. Нарастание амплитуды колебаний

Соотношения, выведенные ранее в гл. 2 (разд. 2.1.3.2), можно с полным основанием применить к четверти периода колебания качелей, а именно к фазе спуска. В частности, при отсутствии сил демпфирования можно записать уравнение сохранения энергии

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgL(1 - \cos \varphi) = mgL(1 - \cos \varphi_0). \quad (4.10)$$

Так как $v = L\dot{\varphi}$, теперь можно найти угловую скорость $\dot{\varphi}$ в нижней точке ($\varphi = 0$), т. е. в конце фазы спуска:

$$\dot{\varphi}_1^2 = (2g/L_1)(1 - \cos \varphi_{01}); \quad (4.11)$$

здесь φ_{01} — угол начального отклонения в тот момент, когда качели начинают опускаться. Совершенно аналогичное соотношение связывает угловую скорость $\dot{\varphi}_2$ в момент начала фазы подъема и максимальное отклонение φ_{02} в конце этой фазы, так как снова можно написать уравнение для четверти периода колебаний:

$$\dot{\varphi}_2^2 = (2g/L_2)(1 - \cos \varphi_{02}). \quad (4.12)$$

Между фазами подъема и спуска происходит мгновенный подъем центра тяжести. Вызывающие его силы действуют вдоль нити и не создают момента относительно точки подвеса. Поэтому момент количества движения маятника в момент внезапного перемещения

остаётся неизменным:

$$mL_1^2\dot{\varphi}_1 = mL_2^2\dot{\varphi}_2. \quad (4.13)$$

Это соотношение между двумя скоростями $\dot{\varphi}_1$ и $\dot{\varphi}_2$ позволяет найти связь между последовательными значениями максимальных отклонений φ_{01} и φ_{02} . Возведя (4.13) в квадрат и подставив в результат выражения (4.11) и (4.12), получим

$$L_1^3(1 - \cos \varphi_{01}) = L_2^3(1 - \cos \varphi_{02}). \quad (4.14)$$

Аналогичное соотношение можно получить для любого последующего полупериода; поэтому, пользуясь методом итераций, можно написать соотношение между максимальными отклонениями:

$$L_1^3(1 - \cos \varphi_{0n}) = L_2^3[1 - \cos \varphi_{0(n+1)}] \quad (4.45)$$

Расчет в соответствии с этим соотношением можно очень наглядно проиллюстрировать графически, построив графики функций

$$L_1^3(1 - \cos \varphi_0) \text{ и } L_2^3(1 - \cos \varphi_0)$$

на одном чертеже (рис. 126). Сразу видно, что мы можем найти все значения амплитуд, поднимаясь, начиная с заданной начальной ам-

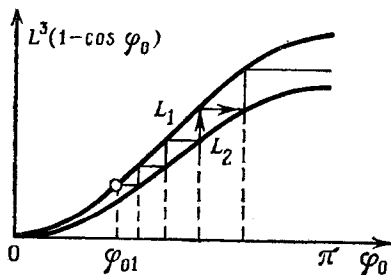


Рис. 126. Нарастание амплитуды колебаний качелей.

плитуды φ_{01} , по ступенчатой ломаной, заключенной между этими двумя графиками. Абсциссы ступенек представляют значения амплитуды в последовательные моменты изменения направления движения.

Простое (а в случае рассматриваемой здесь модели и совершенно точное) соотношение можно вывести не только для амплитуд, но и для энергии колебательной системы. Изменение энергии системы будет иметь место лишь в тех точках, где центр тяжести мгновенно поднимается или опускается, поэтому, чтобы составить условие баланса энергии, необходимо проанализировать лишь эти процессы. При подъеме энергии системы меняется на величину

$$E_H = mgh + \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2). \quad (4.16)$$

В этой формуле первое слагаемое представляет увеличение потенциальной энергии, а второе — увеличение кинетической энергии. Высота подъема равна $h=L_1-L_2$. Учитывая соотношения (4.11), (4.12), (4.14) и равенство $v=L\dot{\varphi}$, формулу (4.16) можно преобразовать таким образом, что энергия E_H будет функцией начальной амплитуды φ_{01} :

$$E_H = mg \{h + L_1 (1 - \cos \varphi_{01}) [(L_1/L_2)^2 - 1]\}. \quad (4.17)$$

Приросту энергии при подъеме соответствует потеря потенциальной энергии при спуске, поэтому в точках изменения направления движения имеем

$$E_S = mgh \cos \varphi_{02}. \quad (4.18)$$

Таким образом, для одного полупериода колебаний, включающего подъем и спуск, получаем полное приращение энергии:

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_H - E_S, \\ \Delta E &= mg \{h(1 - \cos \varphi_{02}) + L_1 [(L_1/L_2)^2 - 1] (1 - \cos \varphi_{01})\}. \end{aligned}$$

С учетом равенства (4.14) это выражение можно привести к виду

$$\Delta E = \frac{h(L_1^2 + L_1 L_2 + L_2^2)}{L_2^3} mg L_1 (1 - \cos \varphi_{01}) = k E_{01}. \quad (4.19)$$

Здесь E_{01} — начальная (потенциальная) энергия осциллятора, а k — постоянный коэффициент, зависящий только от геометрии маятника-качелей. Величина энергии в конце первого полупериода равна

$$E_{02} = E_{01} + \Delta E = E_{01} (1 + k). \quad (4.20)$$

Аналогичные соотношения можно написать для всех последующих полупериодов, и поэтому величина энергии после $n-1$ полупериода колебаний определяется формулой

$$E_{0n} = E_{01} (1 + k)^{n-1}. \quad (4.21)$$

Энергия системы, таким образом, возрастает в геометрической прогрессии¹⁾, подобно тому как денежный вклад увеличивается по закону сложных процентов.

4.2.2. Влияние демпфирования и сухого трения

Чтобы оценить влияние этих сил сопротивления движению, построим приближенное решение для случая малых амплитуд колебаний. Предполагая, что $\varphi_0 \ll 1$, можно приближенно принять

¹⁾ Напомним, что рассматривается система без демпфирования. — *Прим. ред.*

$1 - \cos \varphi_0 \approx \varphi_0^2/2$. Тогда соотношение (4.19) преобразуется к виду

$$\Delta E = \frac{mghL_1(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2)}{2L_2^3} \varphi_0^2 = k_1 \varphi_0^2. \quad (4.22)$$

Это приращение энергии должно быть равно потерям, обусловленным сопротивлением. Рассмотрим два случая: сила демпфирования, пропорциональная скорости,

$$K_D = -dv = -dL\dot{\varphi}. \quad (4.23)$$

и сила сухого трения, величина которой не зависит от скорости:

$$K_R = \begin{cases} +r & \text{при } v < 0, \\ -r & \text{при } v > 0. \end{cases} \quad (4.24)$$

Работа, совершаемая этими силами,

$$E = \int K ds = \int K v dt = \int KL\dot{\varphi} dt \quad (4.25)$$

рассеивается и отбирается от общей энергии осциллятора.

В случае силы демпфирования (4.23) такая потеря энергии составляет

$$E_D = \int dL^2 \dot{\varphi}^2 dt = dL^2 \int \dot{\varphi}^2 dt. \quad (4.26)$$

Если закон колебаний $\varphi = \varphi(t)$ известен, то можно определить $\dot{\varphi}$ и затем вычислить E_D . Так как обычно величина E_D мала по сравнению с полной энергией системы, для приближенного вычисления E_D колебания можно считать синусоидальными:

$$\varphi \approx \varphi_0 \cos \omega t, \quad \dot{\varphi} \approx -\varphi_0 \omega \sin \omega t, \quad \omega^2 = g/L. \quad (4.27)$$

Это допущение справедливо в таком интервале исследуемых амплитуд, в котором энергия, вносимая параметрическим возбуждением, приблизительно равна потере энергии за счет демпфирования. Учитывая (4.27), из (4.26) получаем величину потери энергии за полупериод:

$$\Delta E_D = dL_1^2 \varphi_0^2 \omega_1 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega_1 t d(\omega_1 t) + dL_2^2 \varphi_0^2 \omega_2 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \omega_2 t d(\omega_2 t),$$

т. е.

$$\Delta E_D = 1/4 \pi d \sqrt{g} (\sqrt{L_1^3} + \sqrt{L_2^3}) \varphi_0^2 = k_2 \varphi_0^2. \quad (4.28)$$

Если величина приращения энергии ΔE (4.22) больше величины ΔE_D (4.28), то колебания будут нарастающими; если $\Delta E < \Delta E_D$, то колебания будут затухающими. Так как выражения (4.22) и

(4.28) одинаковым образом зависят от φ_0 , можно утверждать, что

колебания нарастают при $k_1 > k_2$,

колебания затухают при $k_1 < k_2$.

Предельный случай $k_1 = k_2$ соответствует стационарным колебаниям, которые в этом частном случае возможны при любом значении амплитуды φ_0 , удовлетворяющему, конечно, принятому допущению $\varphi_0 \ll 1$.

В случае сухого трения (4.24) аналогичные вычисления дают для потери энергии величину

$$\begin{aligned} E_R &= - \int K_r ds = - \int K_r v dt = \\ &= rL \int |\dot{\varphi}| dt. \end{aligned}$$

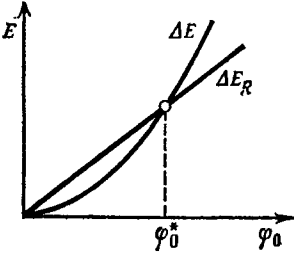


Рис. 127. Энергетическая диаграмма для колебаний качелей при наличии сухого трения.

Потеря энергии за полупериод будет равна

$$\begin{aligned} \Delta E_R &= rL_1 \varphi_0 \int_0^{\pi/2} \sin \omega_1 t d(\omega_1 t) + \\ &+ rL_2 \varphi_0 \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \omega_2 t d(\omega_2 t), \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta E_R = r(L_1 + L_2)\varphi_0. \quad (4.29)$$

Построив график потери энергии при сухом трении совместно с графиком приращения энергии (4.22) в зависимости от амплитуды φ_0 , получим диаграмму, представленную на рис. 127. Кривые пересекаются в точке, определяемой значением амплитуды

$$\varphi_0^* = r(L_1 + L_2)/k_1. \quad (4.30)$$

При меньших значениях амплитуд имеет место неравенство $\Delta E_R > \Delta E$, т. е. в этом случае расходуется больше энергии, чем поступает извне и, следовательно, колебания затухают; наоборот, если амплитуда превышает предельное значение, определяемое формулой (4.30), то справедливо противоположное неравенство, а это означает, что колебания нарастают. Очевидно, что здесь мы имеем дело с осциллятором, который является устойчивым в малом и неустойчивым в большом. Для того чтобы происходили параметрически возбуждаемые колебания, необходимо такое начальное возмущение, при котором амплитуда φ_0 превышает критическое значение φ_0^* .

4.3. Параметрические колебания линейных систем

4.3.1. Общие математические зависимости

Ограничимся здесь рассмотрением систем с одной степенью свободы, которые описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. Уже на таком простом осцилляторе можно изучить типичные свойства параметрических колебаний. Сведения о системах с многими степенями свободы читатель может найти в специальной литературе, в частности в книге И. Г. Малкина [14, гл. V, § 62]¹⁾.

Дифференциальное уравнение для линейного осциллятора с одной степенью свободы и с зависящими от времени параметрами можно представить в виде

$$\ddot{x} + p_1(t) \dot{x} + p_2(t) x = 0. \quad (4.31)$$

Оно получается, например, из приведенного в разд. 2.2.2.1 уравнения (2.119), если последнее разделить на $m(t)$. Ранее было показано, что это уравнение можно упростить, введя новую переменную. Полагая

$$x = y \exp \left[- (1/2) \int p_1(t) dt \right], \quad (4.32)$$

преобразуем (4.31) к виду

$$\ddot{y} + P(t) y = 0, \quad (4.33)$$

где

$$P(t) = p_2(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [p_1(t)] - \frac{1}{4} p_1^2(t). \quad (4.34)$$

Если параметры p_1 и p_2 являются периодическими функциями времени с периодом T_p , то для $P(t)$ также имеет место равенство

$$P(t + T_p) = P(t). \quad (4.35)$$

Уравнение вида (4.33) является *уравнением Хилла*; в случаях, представляющих практический интерес, это уравнение имеет решение вида

$$y(t) = C_1 e^{\mu_1 t} y_1(t) + C_2 e^{\mu_2 t} y_2(t), \quad (4.36)$$

где y_1 и y_2 — периодические функции времени, C_1 и C_2 — константы, а μ_1 и μ_2 — так называемые *характеристические показатели* уравнения (4.33). Эти показатели, зависящие только от входящих в исходное уравнение (4.33) величин и не зависящие от начальных ус-

¹⁾ См. также книги Стокера [19] и Шмидта [27].— *Прим. ред.*

ловий, определяют условия устойчивости решения (4.36). Если действительная часть одного из двух характеристических показателей положительна, то при $t \rightarrow \infty$ решение (4.36) неограниченно возрастает, т. е. является неустойчивым. Наоборот, если действительные части обоих показателей отрицательны, то при $t \rightarrow \infty$ решение $y(t)$ асимптотически стремится к нулю и является асимптотически устойчивым. В граничном случае, естественно, действительная часть одного из показателей (или обоих показателей) обращается в нуль. Тогда решение $y(t)$ остается ограниченным, однако без асимптотического стремления к нулю; в этом случае решение $y(t)$ может быть периодическим.

В теории колебаний интересуются прежде всего действительными показателями μ . В этом случае область устойчивости решения отделяется от области его неустойчивости границей, на которой существуют чисто периодические решения. Поэтому отыскание области неустойчивости сводится в конечном счете к определению условий, при которых показатели μ обращаются в нуль, т. е. могут существовать чисто периодические решения.

Решение уравнения (4.33) детально исследовано для некоторых частных видов периодической функции $P(t)$, например для

$$P(t) = P_0 + \Delta P \cos \Omega t, \quad (4.37)$$

$$P(t) = P_0 + \Delta P \operatorname{sign} \cos \Omega t. \quad (4.38)$$

В первом из этих случаев параметр изменяется по гармоническому закону, во втором случае происходит разрывное изменение функции, так что $P(t)$ является функцией типа меандра ¹⁾. При подстановке для $P(t)$ выражения (4.37) уравнение Хилла переходит в *уравнение Матье*, а при подстановке (4.38) — в *уравнение Мейсснера*.

Так как уравнение Матье будет рассматриваться в разд. 4.3.2, а уравнение Мейсснера в разд. 4.4, приведем оба уравнения к обычной и наиболее удобной в математическом смысле нормальной форме. Введем безразмерное время

$$\tau = \Omega t, \quad (4.39)$$

положим

$$\lambda = P_0/\Omega^2, \quad \gamma = \Delta P/\Omega^2 \quad (4.40)$$

и придем к нормальной форме уравнения Матье:

$$y'' + (\lambda + \gamma \cos \tau) y = 0, \quad (4.41)$$

где штрихи означают дифференцирование по безразмерному времени τ .

С учетом обозначений (4.39) и (4.40) уравнение Мейсснера приводится к виду

$$y'' + [\lambda + \gamma \operatorname{sign}(\cos \tau)] y = 0. \quad (4.42)$$

Последнее уравнение эквивалентно двум следующим:

$$y'' + (\lambda + \gamma) y = 0 \quad \text{при} \quad -\pi/2 < \tau < \pi/2, \quad (4.43)$$

$$y'' + (\lambda - \gamma) y = 0 \quad \text{при} \quad \pi/2 < \tau < 3\pi/2.$$

¹⁾ График функции этого типа приведен на рис. 161.— *Прим. ред.*

4.3.2. Поведение осциллятора, описываемого уравнением Матъе

Характеристические показатели μ уравнения Матъе (4.41), определяющие устойчивость (или неустойчивость) его решения, зависят исключительно от величин λ и γ и не зависят от начальных условий. Поэтому по каждой паре значений λ и γ можно установить,

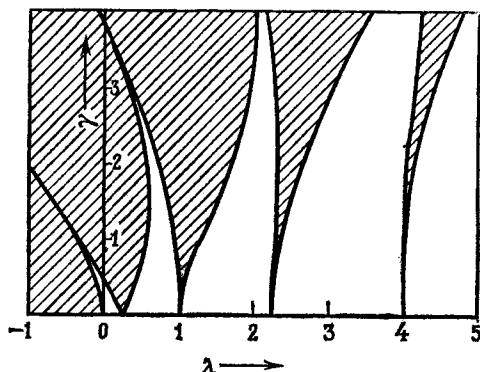


Рис. 128. Диаграмма устойчивости для дифференциального уравнения Матъе. Штриховкой выделены области неустойчивости.

будет ли соответствующее решение устойчивым или неустойчивым, т. е. в плоскости λ, γ можно построить области устойчивости и неустойчивости. Такая диаграмма устойчивости, рассчитанная Айнсом и Стреттом, приведена на рис. 128. Выделенные штриховкой области неустойчивости и незаштрихованные области устойчивости отделяются одна от другой граничной линией, точки которой соответствуют периодическому решению. Так как диаграмма устойчивости симметрична относительно оси λ , достаточно изобразить только верхнюю полуплоскость.

Какие же суждения можно высказать на основе исследования диаграммы устойчивости, приведенной на рис. 128?

Прежде всего рассмотрим случай $\gamma=0$, для которого уравнение (4.41) переходит в уравнение простого осциллятора

$$y'' + \lambda y = 0. \quad (4.44)$$

Решение этого уравнения для случая $\lambda > 0$ известно и представляет собой чисто периодическую функцию (синус или косинус) с круговой частотой $\omega_0 = \sqrt{\lambda}$. На диаграмме устойчивости ему соответствует положительная ось λ . Случаю $\lambda < 0$ соответствуют уже не тригонометрические, а экспоненциальные функции с действительным показателем $\sqrt{|\lambda|} \tau$. Эти решения неустойчивы, что и видно на диаграмме, где все точки отрицательной оси λ находятся в области неустойчивости.

Если теперь рассматривать осциллятор с постоянным коэффициентом γ , отличным от нуля, то точки, соответствующие этому случаю, при изменении величины λ будут перемещаться вдоль прямой, параллельной оси λ . При этом для $\lambda > 0$ эта прямая несколько раз пересекает области неустойчивости. Практически это означает, что колебательная система, устойчивая в случае $\gamma = 0$, в случае $\gamma \neq 0$ может при определенных значениях λ стать неустойчивой.

Таким образом, осциллирующая часть коэффициента при y может уменьшать устойчивость решения. В то же время устойчивость может иметь место и при $\lambda < 0$, т. е. в области, в которой осциллятор с постоянным параметром неустойчив. В этом случае осциллирующая часть коэффициента оказывает стабилизирующее действие.

По мере приближения к оси абсцисс границы областей неустойчивости сближаются и пересекаются на этой оси в следующих точках:

$$\lambda = (n/2)^2 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (4.45)$$

Ширина области, а вместе с ней и ее практическое значение с ростом числа n уменьшаются. Это объясняется прежде всего влиянием демпфирования, которое хотя и не учитывается в данном случае, но всегда имеется у реальных осцилляторов. Учет демпфирования приводит к уменьшению области неустойчивости (см., например, Клоттер [11, с. 368 и далее]).

Часто представляет интерес лишь непосредственная окрестность нулевой точки $\lambda = \gamma = 0$. Здесь в данной задаче уравнение границы области устойчивости с достаточной точностью можно представить при помощи простых функций $\lambda = \lambda(\gamma)$. Приведем без доказательства уравнения первых пяти (считая слева) граничных линий:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\frac{1}{2} \gamma^2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2}, \\ \lambda_4 = 1 - \frac{1}{12} \gamma^2, \quad \lambda_5 = 1 + \frac{5}{12} \gamma^2 \quad (\gamma \ll 1). \end{aligned} \quad (4.46)$$

Граничные линии, соответствующие этим приближениям, показаны штриховыми кривыми на части диаграммы устойчивости, изображенной в увеличенном масштабе на рис. 129¹⁾.

¹⁾ Границы области неустойчивости решения уравнения Матвея в окрестности так называемой «половинной» частоты (равной $1/2$ в безразмерных единицах) можно приближенно найти методом, описанным в книге А. Ю. Ишлинского «Механика специальных гироскопических систем». — Киев: Изд-во АН УССР, 1952. Для этой цели представим уравнение (4.41) в несущественно измененном виде

$$y'' + \lambda y = -\gamma y \cos(\tau + \varepsilon),$$

где ε — постоянная величина, значение которой будет определено несколько позже.

Поясним правила исследования диаграммы устойчивости на примере, приведенном в разд. 4.1: рассмотрим малые колебания физического маятника, у которого точка подвеса периодически движется по вертикали. Для этого осциллятора справедливо уравнение (4.1), причем в силу малости амплитуды можно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. Если точка подвеса движется гармонически, то

$$a = -A \cos \Omega t.$$

При этом уравнение (4.1) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{ms}{J} (g + A\Omega^2 \cos \Omega t) \varphi = 0. \quad (4.47)$$

Используя обозначения

$$\tau = \Omega t, \quad \lambda = \frac{msg}{J\Omega^2} = \frac{g}{L_r \Omega^2} = \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2, \quad \gamma = \frac{msA}{J} = \frac{A}{L_r}, \quad (4.48)$$

Примем, что вблизи «порога устойчивости» закон изменения переменной y на небольшом интервале времени близок к гармоническому $y = a \sin(\tau/2)$, подставим это выражение в правую часть уравнения и получим

$$y'' + \lambda y = -\gamma a \sin(\tau/2) \cos(\tau + \varepsilon) = -(\gamma a/2) [\sin(3\tau/2 + \varepsilon) - \sin(\tau/2 + \varepsilon)] = \\ = -(\gamma/2) a [\sin(3\tau/2 + \varepsilon) - \sin(\tau/2) \cos \varepsilon - \cos(\tau/2) \sin \varepsilon].$$

Однако при сделанном предположении $\sin(\tau/2) = y/a$, $\cos(\tau/2) = 2y'/a$ и исходное уравнение как бы заменяется следующим:

$$y'' - \gamma \sin \varepsilon y' + [\lambda - (\gamma/2) \cos \varepsilon] y = -(\gamma/2) a \sin(3\tau/2 + \varepsilon).$$

Решение этого уравнения неустойчиво при $\sin \varepsilon > 0$, т. е. при $0 < \varepsilon < \pi$. Если γ мало, то приближенно

$$\lambda - (\gamma/2) \cos \varepsilon = (1/2)^2$$

и, следовательно, по заданным значениям λ и γ определяются два значения константы ε , имеющей характер сдвига фазы. Значениям $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = \pi$ на диаграмме устойчивости (λ, γ) (диаграмма Айнса) соответствуют границы между областями устойчивости и неустойчивости. Это прямые

$$\lambda \pm \gamma/2 = (1/2)^2,$$

что полностью согласуется с рис. 129, а также второй и третьей формулами (4.46). Тем же методом можно получить уравнения аналогичных границ при наличии линейных сил сопротивления. Дело сводится к установлению областей неустойчивости решения однородного дифференциального уравнения

$$y'' + (\delta - \gamma \sin \varepsilon) y' + [\lambda - (\gamma/2) \cos \varepsilon] y = 0.$$

В этом случае (вновь для «половинной» частоты) границей области неустойчивости в плоскости λ, γ является гипербола.

Подобным образом можно найти периодические решения ряда нелинейных уравнений, например уравнения Ван дер Поля (5.169) и уравнения более общего вида

$$\ddot{x} + \gamma f(x, \dot{x}, t) + k^2 x = 0,$$

где γ настолько мало, что решение мало отличается от периодического. — Прим. ред.

$L_r = J/(ms)$ = приведенная длина маятника,

$\omega_0 = \sqrt{g/L_r}$ = круговая частота собственных колебаний при неподвижной точке подвеса,

получаем из (4.47) нормальную форму (4.41) уравнения Матье.

Сначала рассмотрим маятник, у которого центр тяжести лежит ниже точки подвеса ($\lambda > 0$), и предположим, что точка подвеса маят-

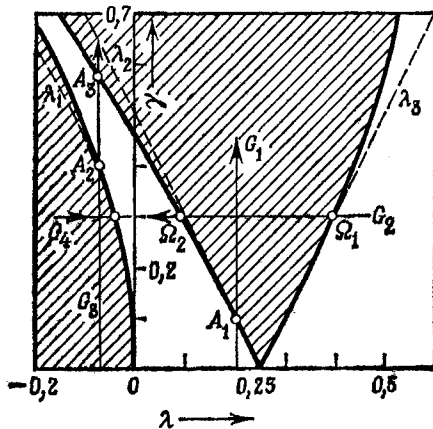


Рис. 129. К устойчивости маятника с колеблющейся точкой подвеса.

ника движется с постоянной круговой частотой Ω , приближенно равной удвоенному значению круговой частоты ω_0 ($\Omega \approx 2\omega_0$). Если амплитуда колебания точки подвеса A возрастает (начиная с нуля), то в силу (4.48) величина γ увеличивается пропорционально амплитуде A , в то время как величина λ остается постоянной. Поэтому точка на диаграмме устойчивости перемещается вдоль вертикальной прямой, например вдоль прямой G_1 . Эта прямая начинается в области устойчивости, а затем пересекает ее границу при значении амплитуды $A = A_1$. При $0 \leq A \leq A_1$ движение остается устойчивым; оно, наоборот, неустойчиво при $A > A_1$. Впрочем, данный пример дестабилизирующего действия осциллирующего параметра полностью согласуется с исследованным в разд. 4.2 явлением раскачивания качелей с той лишь разницей, что там частота осцилляции параметра точно равнялась удвоенной частоте собственных колебаний. На рис. 129 этот случай соответствует прямой, параллельной прямой G_1 и проходящей через точку $\lambda = 0,25$. Для этой прямой $A_1 = 0$, т. е. возбуждение возможно при сколь угодно малой амплитуде колебаний точки подвеса.

Если амплитуда A сохраняет постоянное значение, а частота Ω возрастает (начиная с нуля), то соответствующая точка (как видно из выражения (4.48) для λ) будет перемещаться вдоль горизонталь-

ной прямой G_2 от больших значений λ к оси ординат (оси γ). При этом точка проходит через несколько областей неустойчивости (только одну на рис. 129 и несколько на рис. 128). В частности, неустойчивость имеет место в последней из этих областей, в которой

$$\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$$

и которая снова соответствует области раскачивания качелей. При выбранном значении γ , определяющем прямую G_2 , маятник остается устойчивым при сколь угодно больших значениях $\Omega > \Omega_2$.

Теперь рассмотрим опрокинутый маятник. Такой маятник находится в положении неустойчивого равновесия, потому что его центр тяжести лежит выше точки опоры. Заметим, что неустойчивое при неподвижной точке опоры верхнее положение равновесия маятника может стать устойчивым при надлежащем выборе режима колебаний точки опоры. Это означает, что при малом отклонении от положения равновесия маятник не опрокидывается, а будет совершать стационарные колебания около верхнего положения равновесия. Если сохранять частоту Ω постоянной и менять амплитуду колебаний точки опоры, то соответствующая точка в плоскости λ, γ будет перемещаться вдоль вертикальной прямой G_3 , показанной на рис. 129. При $0 < A < A_2$ точка пробегает область неустойчивости, а при $A_2 < A < A_3$ — область устойчивости.

Исследуем теперь, при каких условиях возникнет этот эффект стабилизации. Возьмем, например, $\lambda = -0,01$; в силу (4.48) это означает, что частота Ω в десять раз больше частоты ω_0 , с которой маятник колебался бы около своего нижнего устойчивого положения равновесия. Из уравнения (4.46) определим значение γ , соответствующее точке на границе области устойчивости, как $\gamma \approx \sqrt{-2\lambda} = 0,141$. Согласно (4.48), это означает, что для появления эффекта стабилизации амплитуда точки опоры должна составлять по меньшей мере 14% приведенной длины маятника. Если нужно стабилизировать маятник при меньшей амплитуде A , то необходимо соответственно увеличить частоту Ω . Так, амплитуда A будет равна всего 1,4% приведенной длины маятника, если $\lambda = -10^{-4}$, т. е. если точка опоры быстро колеблется с частотой $\Omega = 100\omega_0$.

Если теперь также сохранять постоянной амплитуду A и увеличивать (начиная с нуля) частоту Ω , то точка на диаграмме устойчивости будет двигаться вдоль горизонтальной прямой G_4 слева направо. Для реализуемых на практике амплитуд (a следовательно, и значений γ) верхнее положение равновесия, устойчивое при некоторой граничной частоте Ω , остается устойчивым и при дальнейшем росте частоты Ω .

Существование такого замечательного эффекта стабилизации можно объяснить с физической точки зрения. Если точка опоры маятника (см. рис. 130) периодически движется по вертикали между точками 1 и 2, то маятник совершает вынужденное движение, в котором можно выделить два крайних положения, пока-

занных на рисунке. Сила инерции, действующая на маятник при вынужденном движении точки его опоры, приложена в центре тяжести и создает момент, который стремится повернуть маятник вокруг точки опоры. Вследствие периодического движения точки опоры этот момент меняется также периодически; однако его среднее значение отлично от нуля, так как в той фазе движения, в которой ускорение точки опоры направлено вниз (путь 0—1—0), а сила инерции, приложенная

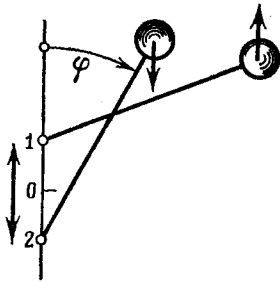


Рис. 130. К объяснению эффекта стабилизации опрокинутого маятника с колеблющейся точкой опоры.

в центре тяжести маятника, направлена вверх, величина угла φ принимает большие значения, чем в той фазе движения, в которой ускорение точки опоры направлено вверх (путь 0—2—0). Таким образом, остается некоторый избыточный момент, который стремится вернуть маятник в верхнее положение равновесия и который мы назовем *вибронравляющим моментом* (Rüttelrichtmoment). Если этот момент больше опрокидывающего момента силы тяжести, то маятник может быть устойчивым в верхнем положении и не будет покидать окрестность этого положения равновесия при малых возмущениях.

Стабилизирующий эффект также может наблюдаться на магнитной стрелке компаса, если она находится под действием не только магнитного поля Земли, а еще и под действием слабых переменных магнитных полей, что часто имеет место вблизи электроустановок переменного тока. При этом может случиться, что обычно неустойчивое положение магнитной стрелки, в котором ее северный полюс обращен к югу, стабилизируется переменной составляющей магнитного поля.

Вибронравляющие моменты могут также вызывать погрешности в показаниях упруго подвешенных стрелочных приборов (см., например, Клоттер [11, § 107]).

4.3.3. Приближенные методы решений

Для уравнения Матье, уравнения Хилла и некоторых других уравнений диаграммы устойчивости уже построены, однако часто требуется приближенно определить области устойчивости для уравнений, еще не исследованных столь детально, и особенно для систем уравнений. Не вдаваясь в подробности, наметим путь, ведущий к этой цели.

Если отклонения некоторого параметра от его нормального значения остаются малыми, например в случае уравнения Матье $\gamma \ll \lambda$, то целесообразен *метод возмущений*, при котором решение представляется степенным рядом по степеням параметра γ :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n y_n. \quad (4.49)$$

Это выражение подставляют в дифференциальное уравнение и предполагают члены по степеням γ . Функции y_n , входящие в выражение (4.49), можно последовательно определить приравняв нулю коэффициенты при различных степенях γ . Система уравнений для определения величин y_n иногда решается очень просто, если ограничиться отысканием периодического решения, т. е. границы между областью устойчивости и областью неустойчивости; подробности можно найти, например, в книгах Стокера [19, гл. VI, § 5] и И. Г. Малкина [14, гл. V, § 62].

Если осциллирующее слагаемое не мало, так что ряд для возмущения сходится медленно или не сходится совсем, то границы области устойчивости можно определить путем нахождения периодических решений при помощи ряда Фурье:

$$y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t). \quad (4.50)$$

Частоту ω в этом методе можно выразить через частоту изменения параметра Ω . Она или непосредственно равна последней, или связана с ней рациональным отношением. После подстановки выражения (4.50) в исходное уравнение члены, содержащие одинаковые гармоники, объединяются; исходное уравнение удовлетворяется, если коэффициенты при всех гармониках обращаются в нуль. Это условие приводит к системе с бесконечным числом уравнений для определения амплитудных множителей a_n и b_n . Такую систему уравнений можно решить путем итераций, пользуясь известными методами прикладного анализа.

4.4. Математический маятник с параметрическим возбуждением

4.4.1. Постановка задачи и ее решение по областям

Рассмотрим на примере математического маятника с периодически меняющейся длиной влияние нелинейности характеристики возмущения на поведение параметрически возбуждаемого осциллятора. Уравнение движения такого осциллятора было уже составлено в разд. 4.1.6 (уравнение (4.9)) и имело вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{L}}{L}\dot{\varphi} + \frac{g}{L} \sin \varphi = 0. \quad (4.51)$$

В разд. 4.2 на основании простых энергетических соображений были установлены математические зависимости для роста амплитуды в тех условиях, когда длина маятника меняется скачкообразно в моменты изменения направления движения и в моменты прохождения через нуль. Там же указывалось, что такой осциллятор типа

качелей можно считать самовозбуждающейся системой, поскольку длину маятника можно рассматривать как функцию φ и $\dot{\varphi}$. В этом разделе мы покажем, что раскачивание возможно и при чисто параметрическом возбуждении.

Рассмотрим математический маятник, движение которого описывается уравнением (4.51), и предположим, что длина маятника скачкообразно меняется по закону

$$L = L_0 (1 + \varepsilon \operatorname{sign} \sin \Omega t) \quad (4.52)$$

(см. рис. 131).

В отличие от осциллятора типа качелей скачкообразные изменения длины маятника зависят теперь не от его положения, а происходят согласно заранее заданному постоянному периодиче-

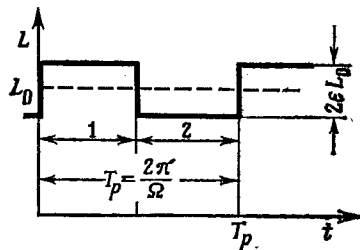


Рис. 131. Изменение длины L нити математического маятника при параметрическом возбуждении.

скому закону с периодом $T_p = 2\pi/\Omega$. Для выбранного закона изменения длины маятника во времени (4.52) можно получить точное решение задачи. В пределах каждого из двух интервалов 1 или 2 имеем $\dot{L} = 0$. Поэтому в уравнении (4.51) второй член равен нулю, и, следовательно, в промежутках между скачками справедливо известное уравнение свободных колебаний гравитационного маятника:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0. \quad (4.53)$$

Здесь $\omega = \sqrt{g/L}$ — собственная круговая частота малых свободных колебаний маятника, введенная для сокращения записи. Уравнение (4.53) было исследовано в разд. 2.1.3.2, и там было получено его решение (2.81):

$$\sin(\varphi/2) = \sin(\varphi_0/2) \operatorname{sn}[k; \omega(t - t_0)]. \quad (4.54)$$

Здесь φ_0 — максимальное отклонение, $k = \sin(\varphi_0/2)$ — модуль эллиптической функции sn ; постоянная t_0 позволяет надлежащим образом выбрать начало отсчета времени. Необходимо также найти угловую скорость маятника $\dot{\varphi}$, так как она будет использоваться в

дальнейшем; из (4.54) по правилам дифференцирования эллиптических функций получаем

$$\dot{\varphi} = 2\omega \sin(\varphi_0/2) \operatorname{cn}[k; \omega(t - t_0)]. \quad (4.55)$$

Теперь запишем общие решения (4.54) или (4.55) для обеих областей, обозначив их соответствующими индексами. Так, в области 1 имеем

$$L = L_1 = L_0(1 + \varepsilon), \quad \varphi = \varphi_1, \quad \varphi_0 = \varphi_{10}, \quad k = k_1 = \sin(\varphi_{10}/2), \quad (4.56)$$

$$\omega = \omega_1 = \sqrt{g/L_1} = \omega_0 \sqrt{1/(1 + \varepsilon)},$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/L_0}$.

Аналогично в области 2 получаем

$$L = L_2 = L_0(1 - \varepsilon), \quad \varphi = \varphi_2, \quad \varphi_0 = \varphi_{20}, \quad k = k_2 = \sin(\varphi_{20}/2), \quad (4.57)$$

$$\omega = \omega_2 = \sqrt{g/L_2} = \omega_0 \sqrt{1/(1 - \varepsilon)}.$$

В дальнейшем нам потребуется также величина

$$\kappa = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}}. \quad (4.58)$$

В точках перехода от одной области к другой решения, полученные для различных областей, должны быть припасованы. Переход должен быть таким, чтобы координата φ менялась непрерывно, а $\dot{\varphi}$ при этом не будет непрерывной. Лучше всего это видно из закона изменения момента количества движения: в те промежутки времени (предполагаемые исчезающе малыми), когда масса маятника принудительно поднимается или опускается, действующие на нее силы (сила тяжести и сила натяжения нити) не могут оказать скольконибудь заметного влияния на момент количества движения относительно точки подвеса и, следовательно, этот момент остается неизменным:

$$mL_1^2 \dot{\varphi}_1 = mL_2^2 \dot{\varphi}_2, \quad \dot{\varphi}_2 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 \dot{\varphi}_1 = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 \dot{\varphi}_1.$$

Таким образом, условие припасовывания решений с учетом (4.58) можно представить в виде

$$\varphi_2 = \varphi_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \kappa^2 \dot{\varphi}_1. \quad (4.59)$$

4.4.2. Периодические решения

Чтобы найти границы, разделяющие области существования устойчивых и неустойчивых решений, необходимо отыскать чисто периодические решения. В самом общем случае эта задача в математическом отношении достаточно сложна, однако некоторые особенно интересные периодические решения могут быть найдены из физиче-

ских соображений. Если движение является периодическим, то энергия осциллятора должна принимать одно и то же значение в моменты времени, отделенные одно от другого полным периодом. Так как в каждом из интервалов 1 и 2 рассматриваемая система консервативна, т. е. ее энергия сохраняется, изменения энергии могут происходить лишь при скачкообразном изменении длины нити. Это изменение энергии составляет

$$\Delta E = mg(L_1 - L_2) \cos \varphi + \frac{1}{2} m (L_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - L_1^2 \dot{\varphi}_1^2). \quad (4.60)$$

Первое слагаемое соответствует изменению потенциальной энергии, а второе — изменению кинетической энергии. Величина ΔE положительна, когда нить укорачивается (при подъеме массы), и отрицательна, когда нить удлиняется. Периодические решения возможны в том случае, когда в пределах периода выполняется равенство

$$\Delta E_H + \Delta E_S = 0, \quad (4.61)$$

где индексы H и S означают подъем и спуск соответственно. Это условие безусловно выполняется, если имеют место равенства

$$|\varphi_H| = |\varphi_S|, \quad |\dot{\varphi}_{1H}| = |\dot{\varphi}_{1S}|, \quad |\dot{\varphi}_{2H}| = |\dot{\varphi}_{2S}|,$$

т. е. если подъем или спуск массы происходит в моменты времени, характеризующиеся одинаковыми значениями угла отклонения φ и

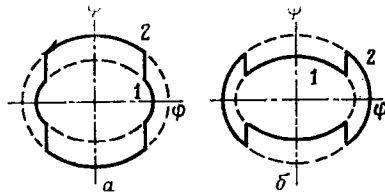


Рис. 132. Фазовые траектории возможных периодических движений математического маятника при параметрическом возбуждении.

угловой скорости φ . Иначе говоря, фазовые траектории движения должны быть симметричными. Два возможных случая приведены на рис. 132.

Как легко проверить, можно задаться произвольной многопериодической формой движения, в которой либо в течение одного периода происходит четное число скачков, либо между двумя последовательными скачками проходит один или несколько полных периодов. Мы не будем рассматривать здесь такую проблему в общем виде, а ограничимся лишь тем, что дополним полученные выше результаты, относящиеся к маятнику типа качелей. Этот случай точно соответствует обеим формам движения, представленным на рис. 132, и поэтому мы исследуем их более подробно.

В силу симметрии фазовых траекторий достаточно рассмотреть лишь один квадрант фазовой плоскости, например первый квадрант.

Как показано в увеличенном масштабе на рис. 133, фазовые траектории состоят из двух участков, движение вдоль которых происходит за четверть периода. Эти два участка фазовой траектории соединены вертикальным отрезком, который соответствует скачкообразному изменению длины маятника: спуску массы маятника (а) или

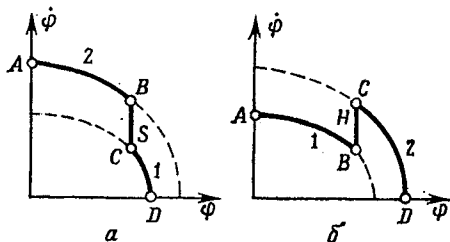


Рис. 133. Первый квадрант рис. 132 в увеличенном масштабе.

ее подъему (б). Предполагается, что оба скачка происходят мгновенно, или, точнее говоря, в течение интервала времени, пренебрежимо малого по сравнению с периодом T_p изменения параметра. Теперь можно построить амплитудно-частотную характеристику для рассматриваемого типа движения на основании требования, что при соединении двух участков траектории посредством скачка (на котором должны выполняться условия перехода (4.59)) получается вся та часть фазовой траектории, которая лежит в данном квадранте.

4.4.3. Амплитудная частотная характеристика для периодических решений при $\Omega \approx 2\omega_0$

Рассмотрим амплитудно-фазовые характеристики для обоих приведенных выше случаев и помимо сокращений (4.56) и (4.57) введем следующие обозначения:

$$\alpha_1 = \omega_1 T_p / 4, \quad \alpha_2 = \omega_2 T_p / 4. \quad (4.62)$$

Случай а (рис. 133). Фазовая траектория начинается в точке А при $\varphi=0$ участком, соответствующим области 2. Если отсчитывать время от точки А, то в общем решении (4.54) нужно положить $t_0=0$, что даст

$$\sin(\varphi_2/2) = k_2 \operatorname{sn}(k_2; \omega_2 t). \quad (4.63)$$

Для участка CD, соответствующего области 1, начало отсчета времени лучше всего выбрать так, чтобы моменту $t=0$ соответствовала точка D. Тогда мы имеем

$$t_0 = -\mathbf{K}(k_1)/\omega_1,$$

и уравнение для этого участка фазовой траектории запишется в виде

$$\sin(\varphi_1/2) = k_1 \operatorname{sn}\{k_1; [\omega_1 t + \mathbf{K}(k_1)]\}; \quad (4.64)$$

здесь $\mathbf{K}(k_1)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k_1 .

Положим в формуле (4.63) $t = T_p/4$ и найдем значение φ_2 в точке скачка B ; аналогично, положив в формуле (4.64) $t = -T_p/4$, получим значение координаты φ_1 в точке скачка C . Из условий перехода (4.59) с учетом выражения (4.55) для угловой скорости $\dot{\varphi}$ получаем два уравнения:

$$\begin{aligned} k_1 \operatorname{sn} \{k_1; [\mathbf{K}(k_1) - \alpha_1]\} &= k_2 \operatorname{sn} (k_2; \alpha_2), \\ \kappa^3 k_1 \operatorname{cn} \{k_1; [\mathbf{K}(k_1) - \alpha_1]\} &= k_2 \operatorname{cn} (k_2; \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.65)$$

При помощи преобразований, используемых в теории эллиптических функций, можно упростить левые части этих уравнений, записав входящие в них функции в несколько упрощенном виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{sn} (\mathbf{K} - \alpha) &= \frac{\operatorname{cn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha}, \\ \operatorname{cn} (\mathbf{K} - \alpha) &= \sqrt{1 - k^2} \frac{\operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{dn} \alpha}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

где dn (delta amplitudinis) — третья эллиптическая функция Якоби. Тогда уравнения (4.65) дают

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\operatorname{cn} (k_1; \alpha_1)}{\operatorname{dn} (k_1; \alpha_1)} &= k_2 \operatorname{sn} (k_2; \alpha_2), \\ \kappa^3 k_1 \sqrt{1 - k_1^2} \frac{\operatorname{sn} (k_1; \alpha_1)}{\operatorname{dn} (k_1; \alpha_1)} &= k_2 \operatorname{cn} (k_2; \alpha_2). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Эти два уравнения вместе с соотношением

$$\alpha_2 = \kappa \alpha_1, \quad (4.68)$$

которое следует из равенств (4.62) и (4.58), связывают между собой четыре величины: k_1 , k_2 , α_1 , α_2 . Задав одну из этих величин, например k_1 , можно вычислить три остальные. Амплитуды определяются величиной k , а период T_p изменения параметра — величиной α , и поэтому, решив систему уравнений, можно для каждой заданной амплитуды найти такое значение периода T_p , при котором может существовать периодическое решение исследуемого здесь вида.

Мы не будем останавливаться на далеко не простой задаче решения системы трех уравнений (4.67) и (4.68). Это решение можно получить при помощи какого-либо из известных методов прикладного анализа, причем наиболее распространенным из таких методов является метод итераций. В разд. 4.4.4 будут вкратце рассматриваться те приближенные решения, которые легче всего получить.

Случай б (рис. 133). Рассуждая так же, как в случае *а*, получаем уравнения для искомых величин снова из уравнений участков AB и CD фазовой траектории с учетом условий перехода (4.59). Вместо

уравнений (4.67) теперь имеем:

$$\begin{aligned} k_1 \operatorname{sn}(k_1; \alpha_1) &= k_2 \frac{\operatorname{cn}(k_2; \alpha_2)}{\operatorname{dn}(k_2; \alpha_2)}, \\ \kappa^2 k_1 \operatorname{cn}(k_1; \alpha_1) &= k_2 \sqrt{1 - k_2^2} \frac{\operatorname{sn}(k_2; \alpha_2)}{\operatorname{dn}(k_2; \alpha_2)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Так как уравнение (4.68) по-прежнему выполняется, мы снова располагаем тремя уравнениями, из которых можно найти три неизвестные величины.

На рис. 134 представлен результат решения системы уравнений при заданном относительном изменении длины маятника ($\varepsilon=0,095$). Эта амплитудно-частотная характеристика позволяет сделать важные выводы о поведении осциллятора. Штриховая кривая относится к случаю *a*, сплошная кривая — к случаю *b*. Две кривые определяют геометрическое место всех пар значений амплитуды φ_0 и относительной частоты Ω/ω_0 , для которых возможны периодические решения рассматриваемого здесь вида. На основании ранее высказанных соображений ясно, что эти кривые образуют также границы между областями устойчивости и неустойчивости. Легко показать, что в данном случае заштрихованная область, заключенная между этими двумя кривыми, является областью неустойчивости. Именно в этой области лежит точка $\varphi_0=0$, $\Omega/\omega_0=2$, характеризующая начало движения осциллятора типа качелей, который исследовался ранее и для которого было установлено, что в ней осциллятор неустойчив.

Амплитуды φ_0 колебаний, соответствующие точкам внутри области неустойчивости, возрастают; следовательно, изображающие точки движутся в направлениях, показанных стрелками. Внутри области устойчивости картина будет обратной — амплитуды уменьшаются. Исследуя поведение амплитуд, можно непосредственно сделать выводы об устойчивости периодических решений. Например, возможные периодические решения на штриховой кривой следует считать неустойчивыми, так как сколь угодно малое возмущение амплитуды приведет к тому, что изображающая точка будет удаляться от этой граничной кривой и колебания либо прекратятся, т. е. система придет в состояние покоя, либо будут нарастать до тех пор, пока изображающая точка не достигнет ветви *b*. Периодические

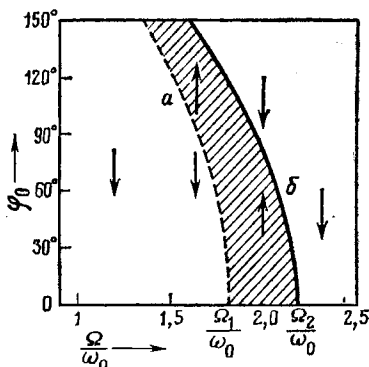


Рис. 134. Часть диаграммы устойчивости для математического маятника при параметрическом возбуждении.

движения на ветви b являются устойчивыми, так как после небольших возмущений изображающая точка возвращается на ту же ветвь.

Из этих соображений следует, что положение равновесия $\varphi=0$, являющееся также решением исходного уравнения, может быть устойчивым или неустойчивым в зависимости от частоты. Если предельные значения частот, соответствующие пересечению ветвей a и b с осью абсцисс, обозначить через Ω_1 и Ω_2 , то положение равновесия может быть устойчивым при $\Omega < \Omega_1$ и $\Omega > \Omega_2$ и неустойчивым при $\Omega_1 < \Omega < \Omega_2$. При этом следует иметь в виду, что на оси абсцисс могут быть еще и другие области неустойчивости, однако они относятся к периодическим движениям иного типа и должны рассчитываться другими методами.

Здесь следует указать на одно отличие от линейных систем: устойчивость или неустойчивость осциллятора по-прежнему зависит от амплитуды. Поэтому утверждение об устойчивости положения равновесия при $\Omega < \Omega_1$ справедливо лишь для достаточно малых амплитуд, т. е. для устойчивости в малом. Если рассматривать случай, соответствующий рис. 134, то осциллятор при $\Omega = 1,7\omega_0$ будет устойчив лишь при $\varphi_0 < 75^\circ$; в интервале амплитуд $75^\circ < \varphi_0 < 137^\circ$ осциллятор неустойчив; при больших амплитудах колебания снова будут затухающими. Таким образом, заданному значению частоты соответствуют два возможных устойчивых стационарных вида движения: система может или оставаться в положении равновесия $\varphi=0$, или совершать периодические колебания с амплитудой $\varphi_0 = 137^\circ$. Какой из этих двух видов движения будет осуществляться, зависит от начальных условий. Неустойчивая ветвь a разграничивает начальные условия, которые приводят к тому или иному из двух видов движения.

Аналогичные соображения справедливы и для области неустойчивости. Параметрически возбуждаемый маятник с частотой параметрических возбуждений $\Omega = 2\omega_0$ ведет себя не так, как маятник типа качелей с той же относительной частотой. При $\varphi_0 \ll 1$ никакой разницы нет, оба маятника могут быть выведены из положения равновесия самыми малыми возмущениями. Однако, в то время как амплитуды маятника типа качелей будут возрастать в геометрической прогрессии до тех пор, пока маятник не начнет описывать полную окружность, амплитуды параметрически возбуждаемого маятника ограничены (на рис. 134 $\varphi_{\max} \approx 80^\circ$).

Такое ограничение амплитуд типично для нелинейных систем; его можно охарактеризовать как своего рода эффект расстройки. Нарастание колебаний происходит при условии, что отношение частоты параметрического возбуждения к собственной частоте находится в области неустойчивости. Если в линейных системах это условие выполняется для малых амплитуд, то оно будет выполняться для всех амплитуд, и поэтому никакого ограничения амплитуды нет. В нелинейных системах собственная частота является функцией

амплитуды, так что при возрастании амплитуды меняется отношение частоты параметрического возбуждения к собственной частоте. Если в результате достигается предельное значение отношения частот, соответствующее границе области неустойчивости, то движение осциллятора, вообще говоря, асимптотически приближается к периодическому.

Следует, кстати, заметить, что наклон заштрихованной области на рис. 134 зависит от вида характеристики обратной связи в осцилляторе. Рис. 134 относится к математическому маятнику, для которого период колебаний возрастает с увеличением амплитуды. Если рассмотреть характеристику возмущения, у которой период колебаний уменьшается по мере возрастания амплитуды, то область неустойчивости будет наклонена в другую сторону, а именно в сторону возрастания частот. Аналогичное явление наблюдается также при вынужденных колебаниях нелинейных систем.

4.4.4. Приближенные решения для случая $\varphi_0 \ll 1$ или $\varepsilon \ll 1$

Решения, полученные в предыдущем разделе, можно существенно упростить, если ограничиться случаем малых амплитуд $\varphi_0 \ll 1$. Подобные приближения могут быть очень полезны и интересны, хотя они и не позволяют исследовать некоторые особенности движения, например влияние нелинейной характеристики.

При $\varphi_{10} \ll 1$ или $\varphi_{20} \ll 1$, согласно (4.56) и (4.57), получаем модули

$$k_1 \approx \frac{1}{2} \varphi_{10} \ll 1, \quad k_2 \approx \frac{1}{2} \varphi_{20} \ll 1.$$

При этом эллиптические функции Якоби переходят в соответствующие тригонометрические функции:

$$\operatorname{sn} \rightarrow \sin, \quad \operatorname{cn} \rightarrow \cos, \quad \operatorname{dn} \rightarrow 1, \quad \mathbf{K}(k) \rightarrow \pi/2.$$

Поэтому в случае *a* уравнения (4.67) можно записать так:

$$\frac{1}{2} \varphi_{10} \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \varphi_{20} \sin \alpha_2, \quad \frac{1}{2} \kappa^3 \varphi_{10} \sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \varphi_{20} \cos \alpha_2. \quad (4.70)$$

Отсюда можно исключить амплитуды φ_{10} и φ_{20} . Почленно разделив первое из уравнений (4.70) на второе, преобразуем результат при помощи соотношений (4.62) и (4.56) — (4.58), а также равенства $T_p = 2\pi/\Omega$. Тем самым мы получим уравнение для искомого отношения частот Ω/ω_0 :

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{1+\varepsilon} \Omega} \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{1-\varepsilon} \Omega} = \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{3/2}. \quad (4.71)$$

В случае *b* из уравнений (4.69) совершенно аналогично получается

$$\frac{1}{2} \varphi_{10} \sin \alpha_1 = \frac{1}{2} \varphi_{20} \cos \alpha_2, \quad \frac{1}{2} \kappa^3 \varphi_{10} \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \varphi_{20} \sin \alpha_2, \quad (4.72)$$

что после исключения амплитуд дает

$$\operatorname{tg} \frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{1+\varepsilon} \Omega} \operatorname{tg} \frac{\pi \omega_0}{2\sqrt{1-\varepsilon} \Omega} = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{3/2}. \quad (4.73)$$

Теперь для каждого заданного значения ϵ можно из соотношений (4.71) и (4.73) найти два граничных значения отношения частот Ω/ω_0 . Но это позволяет для колебаний исследуемого здесь вида построить диаграмму устойчивости, полностью аналогичную рассмотренной выше диаграмме Айнса — Стретта.

Принятые приближения справедливы для сколь угодно больших изменений параметра ϵ . Полагая $\epsilon \ll 1$, можно произвести дальнейшие упрощения. Прежде всего, из (4.71) и (4.73) следует, что в пределе при $\epsilon \rightarrow 0$ в обоих случаях $\Omega/\omega_0 \rightarrow 2$. Таким образом, чем больше становится величина ϵ , тем больше отличаются друг от друга граничные значения Ω/ω_0 и тем шире становится расположенная между ними область неустойчивости. При разложении выражений (4.71) и (4.73) в ряд по степеням ϵ и отбрасывании всех членов ряда, кроме первого, получается соотношение

$$\operatorname{tg} \frac{\pi\omega_0}{2\Omega} \approx 1 \pm \frac{3\epsilon}{2} \quad (\epsilon \ll 1), \quad (4.74)$$

или

$$\Omega_1 \approx \frac{\pi\omega_0}{2 \arctg(1 + 3\epsilon/2)} \quad \Omega_2 \approx \frac{\pi\omega_0}{2 \arctg(1 - 3\epsilon/2)}. \quad (4.75)$$

Неустойчивости следует ожидать в области

$$\Omega_1 < \Omega < \Omega_2. \quad (4.76)$$

4.5. Задачи

31. Пусть на описанный в разд. 4.2 осциллятор типа качелей действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости ($K_D = -q|v|v$). Предполагая, что $\varphi_0 \ll 1$, вычислить потерю энергии ΔE_D за полупериод и найти амплитуду φ_0^* стационарных колебаний. Устойчивы ли эти колебания?

32. Точка подвеса маятника, имеющего собственную частоту ω_0 , колеблется в вертикальном направлении по закону $x = A \cos \Omega t$, причем амплитуда A составляет 10% от величины приведенной длины маятника L_r . При помощи приближенных формул (4.46) определить обе верхние области частот, в которых могут происходить нарастающие колебания.

33. Какой должна быть минимальная частота Ω вертикальных колебаний точки подвеса маятника из задачи 32 для того, чтобы верхнее положение равновесия было устойчивым?

34. Привести уравнение (4.2) колебаний спарника электровоза при $c(t) = c_0 + \Delta c \cos 4\Omega t$ к нормальному виду (4.41) и найти значения λ и γ . Полагая, что частота вращения колеса равна $\Omega = v/R$, где v — скорость движения, а R — радиус колеса, и используя приближенные формулы (4.46), вывести выражения для границ v_1 и v_2 верхней критической области скорости движения, в которой могут происходить колебания.

35. Показать, что при подстановке в уравнение Матье (4.41) разложения (4.50) с $\omega t = \tau/2$ и пренебрежении членами высших порядков получаются приближенные решения (4.46) для λ_2 и λ_3 .

5. Вынужденные колебания

Отличительной особенностью вынужденных колебаний является наличие внешних возмущающих сил, которыми определяется закон движения осциллятора. Возмущающие силы действуют и тогда, когда сам осциллятор находится в покое. Этим вынужденные колебания осциллятора отличаются от ранее рассмотренных автоколебаний и колебаний с параметрическим возбуждением. Так, возмущающие силы, возникающие при работе двигателя внутреннего сгорания, действуют даже тогда, когда фундамент, на котором установлен двигатель, жестко закреплен и не может совершать колебания.

При вынужденных колебаниях в уравнения движения системы всегда входит зависящий от времени член $f(t)$, который не зависит от координаты, характеризующей положение системы. Поэтому уравнения движения имеют общий вид $D(x) = f(t)$, где $D(x)$ является дифференциальным выражением для x . При исследовании вынужденных колебаний ограничиваются рассмотрением простых случаев, когда либо левая, либо правая часть уравнения — или же обе они — имеет специальную форму. Так, прежде всего рассматривают уравнения, в которых левая часть приводится к линейному дифференциальному выражению

$$D(x) \rightarrow L(x) = a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x. \quad (5.1)$$

Для осциллятора, имеющего лишь одну степень свободы, $n=2$. В этом случае, согласно выражению (5.1), уравнение движения осциллятора становится линейным неоднородным уравнением, для решения которого теория дифференциальных уравнений предлагает ряд методов. Можно показать, что общее решение полного (неоднородного) уравнения $L(x) = f(t)$ является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения $L(x) = 0$ и частного решения неоднородного уравнения. Так как решение однородного уравнения соответствует собственным колебаниям исследуемой системы, при действии внешних возмущений движение этой системы представляется наложением свободных и вынужденных колебаний.

На практике прежде всего интересуются периодическими возмущающими функциями $f(t)$, которые во многих случаях можно даже представить гармоническим законом. Кроме того, при исследо-

вании вынужденных колебаний оказалось, что ступенчатые и импульсные функции также представляют интерес, так как их можно использовать не только в качестве испытательных функций при определении свойств осциллятора, но и для получения решения в самом общем случае произвольных возмущающих функций.

В соответствии с указанным упрощением в этой главе прежде всего рассматриваются линейные осцилляторы, а затем изучаются характерные влияния нелинейностей на свойства колебаний. Наряду с этим проводится исследование различных форм зависимости возмущения от времени, что дает возможность осветить происходящие при вынужденных колебаниях явления, представляющие практический интерес.

5.1. Реакция линейной системы на внешние непериодические возмущения

5.1.1. Переходные функции при возмущении в виде ступенчатой функции

Рассмотрим поведение осциллятора с одной степенью свободы. Для этого мы вернемся к ранее рассмотренному уравнению (2.115) и дополним его внешней возмущающей функцией $f(t)$:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = f(t). \quad (5.2)$$

Здесь $f(t)$ является ступенчатой функцией, изображенной на рис. 135 и такой, что

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ K_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Из уравнения (5.2) видно, что кусочно постоянное возмущение приводит к смещению положения равновесия x_{0l} осциллятора:

$$x_{0l} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ K_0/c = x_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Движение этого осциллятора представляет собой собственные колебания, которые происходят относительно скачкообразно изменившегося положения равновесия. Для исследования приведем уравнение движения (5.2) к уже использованному в гл. 2 безразмерному виду

$$x'' + 2Dx' + x = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ x_0 & \text{при } t \geq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Ограничимся тем, что будем исследовать поведение осциллятора при $t \geq 0$ и, как уже упоминалось выше, получим общее решение

уравнения (5.4) как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Частным решением является просто $x=x_0$, а решение однородного уравнения (собствен-

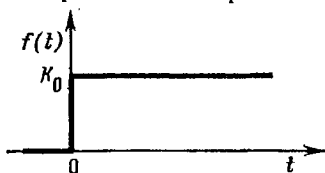


Рис. 135. Ступенчатая функция.

ные колебания) дается формулами (2.127). Следовательно, общее решение уравнения (5.4) при $t \geq 0$ имеет вид

$$x = x_0 + Ce^{-D\tau} \cos(\sqrt{1-D^2}\tau - \varphi) \quad (D < 1). \quad (5.5)$$

Теперь предположим, что при $t < 0$ осциллятор находился в состоянии покоя; тогда в качестве начальных условий нужно подставить

$$t = 0: \quad x = 0, \quad x' = 0.$$

Из этих начальных условий после простых вычислений определяются постоянные C и φ (см. формулы (2.129)):

$$C = -\frac{x_0}{\sqrt{1-D^2}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{D}{\sqrt{1-D^2}} = \operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \sqrt{1-D^2}\tau_0.$$

Здесь δ и соответственно τ_0 являются величинами, которые характеризуют смещение максимума амплитуды собственных затухающих колебаний (см. формулу (2.141)). Теперь равенство (5.5) принимает вид

$$x_{ii} = \frac{x(\tau)}{x_0} = 1 - \frac{e^{-D\tau}}{\sqrt{1-D^2}} \cos\left[\sqrt{1-D^2}(\tau - \tau_0)\right] \quad (D < 1). \quad (5.6)$$

Это соотношение описывает переход осциллятора из первоначального положения равновесия в новое. Полученную величину x_n , которая показывает реакцию системы на *единичное ступенчатое возмущение*, называют *переходной функцией* осциллятора.

Формула (5.6) справедлива для $D < 1$. Не представляет никаких трудностей привести соответствующие периодические функции и для других случаев, когда $D = 1$ и $D > 1$. Не вдаваясь в подробности, приведем здесь лишь конечные результаты:

$$x_{ii} = \frac{x}{x_0} = 1 - (1 + \tau)e^{-\tau} \quad (D = 1), \quad (5.7)$$

$$x_{ii} = \frac{x}{x_0} = 1 - \frac{D+k}{2k}e^{-(D-k)\tau} + \frac{D-k}{2k}e^{-(D+k)\tau} \quad (D > 1), \quad (5.8)$$

где $k = \sqrt{D^2 - 1}$.

Вид переходных функций для различных значений D показан на рис. 136.

Проведенные выше рассуждения можно распространить на осциллятор с несколькими степенями свободы. Переходную функцию, т. е. реакцию осциллятора на единичное ступенчатое возмущение, можно рассматривать как своего рода «визитную карточку» осциллятора, и эта возможность широко и весьма успешно

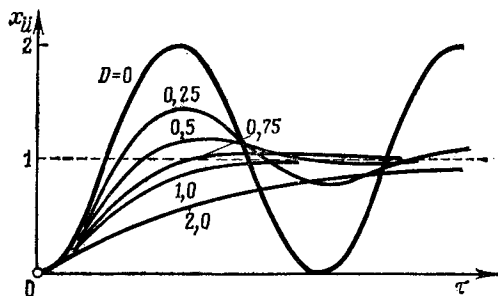


Рис. 136. Ступенчатые переходные функции при различных значениях коэффициента демпирования.

применяется в технике регулирования. При этом обычно за основу принимается простая схема, изображенная на рис. 18, согласно которой осциллятор — независимо от его внутренней структуры — рассматривается как «черный ящик», в который входит некоторая входная величина x_e (величина возмущения) и выходит выходная величина x_a (например, амплитуда колебания). Если $x_e(t)$ — ступенчатая функция, в частности единичная, то $x_a(t) = x_{ii}$ будет являться переходной функцией осциллятора. Иногда для большей точности говорят о *ступенчатых переходных функциях*, чтобы подчеркнуть характер входной функции и избежать путаницы с рассматриваемыми в следующем разделе *импульсными переходными функциями*.

5.1.2. Переходные функции при импульсном возмущении

Пусть теперь $f(t)$ является *импульсной функцией* (или *функцией Дирака*), изображенной на рис. 137. Для нее равенство $f(t) = 0$ выполняется почти везде, за исключением очень малого интервала времени $-\varepsilon \leq t \leq +\varepsilon$ в окрестности начала координат. В этом интервале функция, как правило, нормируется таким образом, что

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(t) dt = 1$$

(единичный импульс). Функцией такого вида можно представить воздействующий на осциллятор кратковременный импульс. Непосредственным следствием воздействия этого импульса будет изменение скорости осциллятора. Если до подачи импульса осциллятор находился в покое, то его движение после подачи импульса может быть рассчитано путем определения постоянных в общем решении

(5.5) по начальным условиям

$$\tau = 0: \quad x = 0, \quad x' = v_0 \neq 0.$$

Для различных интервалов значений D расчет приводит к следующему результату:

$$x_i = \frac{v_0 e^{-D\tau}}{\sqrt{1-D^2}} \sin \sqrt{1-D^2} \tau \quad (D < 1), \quad (5.9)$$

$$x_i = v_0 \tau e^{-\tau} \quad (D = 1), \quad (5.10)$$

$$x_i = \frac{v_0}{2k} [e^{-(D-k)\tau} - e^{-(D+k)\tau}] \quad (D > 1). \quad (5.11)$$

Вид этой импульсной переходной функции (ударной переходной функции) для различных значений коэффициента демпфирования D

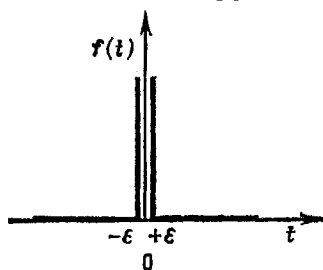


Рис. 137. Импульсная функция.

показан на рис. 138. Абсолютная величина импульса, т. е. значение v_0 , не оказывает никакого влияния на характер переходной функции, так что для линейных систем можно ограничиться исследованием случая $v_0 = 1$.

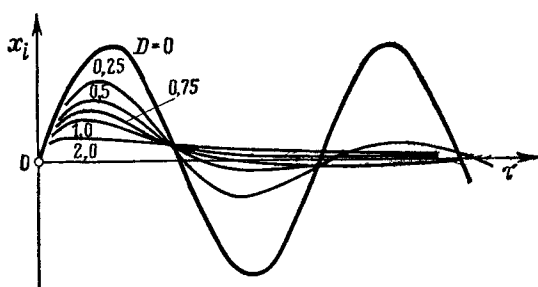


Рис. 138. Импульсные переходные функции при различных значениях коэффициента демпфирования.

Импульсная переходная функция также может быть определена в общем случае для осциллятора с несколькими степенями свободы: при импульсной входной величине x_e в качестве выходной функции получают импульсную переходную функцию, которая, как и ступенчатая переходная функция, может быть использована в качестве характеристики осциллятора.

5.1.3. Выбор оптимальных параметров приборов

При применении осцилляторов в физике и технике возникает вопрос о наилучших их параметрах, т. е. такой настройке осциллятора, когда его свойства совпадают с заданными или, насколько это возможно, приближаются к ним. Эту проблему оптимизации, которая имеет большое значение в технике регулирования, ни в коем случае нельзя рассматривать в отрыве от специфических условий каждого отдельного случая. К тому же требования, предъявляемые к приборам, и прежде всего понимание того, что именно должно считаться оптимальным, слишком различны. Здесь мы ограничимся тем, что на примере простого осциллятора с одной степенью свободы опишем известные методы, характерные для решения вопросов оптимизации.

В электрическом измерительном приборе (амперметр, вольтметр и т. д.) измерительная система образует осциллятор с характерными отличительными признаками: инерция, упругость и демпфирование. Прибор служит для измерения зависящих от времени величин и должен удовлетворять требованию, чтобы его показания (выходные величины) возможно ближе соответствовали подлежащим измерению параметрам (входным величинам). Если входной величиной является ступенчатая функция (включение тока), то выходная величина в колебательном процессе не должна недопустимо отличаться от значения, соответствующего состоянию равновесия, и не слишком медленно переходить к новому равновесному значению. Для этого из изображенных на рис. 136 переходных функций нужно выбрать такую, чтобы значение коэффициента демпфирования D было «наилучшим». Очевидно, что одинаковым образом не подходят как очень малые, так и очень большие значения D . Между тем оптимум все же должен существовать. А что же должно служить критерием для определения оптимума?

Оптимальными можно считать те переходные функции, для которых постоянная времени затухания имеет наименьшее значение. Как видно из формул (5.6) — (5.8), это тот случай, когда $D=1$; здесь постоянная времени затухания $\tau_z=1$. Для $D<1$ получается $\tau_z=1/D>1$; в случае $D>1$ существуют две различные постоянные времени затухания:

$$\tau_{z1} = \frac{1}{D + \sqrt{D^2 - 1}} < 1, \quad \tau_{z2} = \frac{1}{D - \sqrt{D^2 - 1}} > 1.$$

В последнем случае при совершенно особых начальных условиях, когда отсутствует составляющая движения с постоянной времени τ_{z2} , возможно быстрое протекание переходного процесса с малой постоянной времени τ_{z1} , однако в качестве оптимальной может быть принята только такая настройка, которая дает наиболее быстро протекающий переходный процесс при произвольных начальных ус-

ловиях. Требование возможно малой величины времени переходного процесса приводит к «оптимальному» значению $D=1$.

Для характеристики длительности переходного процесса кроме постоянных времени затухания можно также использовать площадь, которая заключена между кривой переходного процесса и прямой положения равновесия $x=1$ на диаграмме x, τ . На рис. 139,а и 139,б эта площадь изображена для двух различных значений D . Теперь можно в качестве оптимального взять такое значение D , для которого

$$F_1 = \int_0^{\infty} [1 - x_{ii}(\tau)] d\tau = \min. \quad (5.12)$$

Если вычислить интеграл для переходных функций (5.6), (5.7) и (5.8), то во всех трех случаях получится величина $F_1=2D$. Здравый смысл подсказывает, что критерий (5.12) можно применять только для монотонных процессов, т. е. для $D \geq 1$. Для $D < 1$ он становится непригодным, поскольку площади, расположенные по обе стороны прямой, соответствующей новому положению равновесия (рис. 139,б), имеют при интегрировании различные знаки и их сумма не может служить критерием качества переходного процесса. Для монотонных процессов критерий (5.12) дает в качестве наилучшего значения $D=1$.

Однако этот критерий с небольшой поправкой можно использовать и для $D < 1$. Для этого следует лишь заменить подынтегральное выражение в (5.12) его модулем:

$$F_2 = \int_0^{\infty} |x_{ii}(\tau) - 1| d\tau = \min. \quad (5.13)$$

Тогда площади на рис. 139,б будут всегда положительны. Для простого осциллятора интеграл (5.13) можно определить в явном виде. Подставив в (5.13) выражение (5.6), будем иметь

$$F_2 = \frac{e^{-D\tau_0}}{\nu} \int_{-\tau_0}^{\infty} |e^{-Dz} \cos \nu z| dz,$$

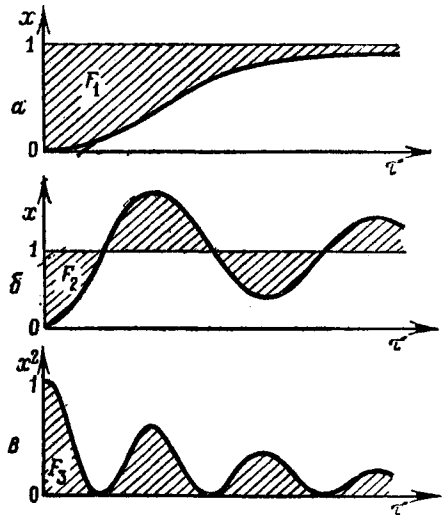


Рис. 139. Геометрическая интерпретация интегральных критериев (5.12), (5.13) и (5.20).

где $v = \sqrt{1-D^2}$ и $z = \tau - \tau_0$. Подынтегральное выражение обращается в нуль при

$$z_n = \frac{(2n+1)\pi}{2v}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.14)$$

Разбив весь участок интегрирования на отдельные интегралы между нулями подынтегрального выражения, получим

$$F_2 = \frac{e^{-D\tau_0}}{v} \left[\int_{-\tau_0}^{z_0} + \int_{z_0}^{z_1} + \int_{z_1}^{z_2} + \dots \right]. \quad (5.15)$$

Входящие в (5.15) интегралы можно вычислить по отдельности, что дает

$$\int e^{-Dz} \cos v z dz = -e^{-Dz} (D \cos v z - v \sin v z). \quad (5.16)$$

Теперь вследствие (5.14)

$$\sin v z_n = (-1)^n, \quad \cos v z_n = 0,$$

а вследствие равенства (2.141) при $\tau = \tau_0$

$$\sin v \tau_0 = D, \quad \cos v \tau_0 = v.$$

Вместе с этим, если принять во внимание, что в (5.15) берутся модули подынтегральных выражений, получится

$$F_2 = 2 \left[D + e^{-D\tau_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-Dz_n} \right]. \quad (5.17)$$

Учитывая (5.14), выражение (5.17) можно преобразовать:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-Dz_n} = e^{-D\pi/(2v)} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-D\pi/v})^n = \frac{e^{-D\pi/(2v)}}{1 - e^{-D\pi/v}}, \quad (5.18)$$

$$F_2 = 2 \left[D + \frac{e^{-D(\tau_0 + \pi/2v)}}{1 - e^{-D\pi/v}} \right]. \quad (5.19)$$

Так как

$$v = \sqrt{1-D^2} \quad \text{и} \quad \tau_0 = (\arcsin D)/v,$$

величина F_2 является функцией только коэффициента демпфирования D . Эта функция имеет минимум при значении $D = 0,663$, которое, таким образом, является оптимальным для критерия (5.13).

При вычислении F_2 можно обойтись без необходимого для этого разбиения общего интеграла на его составляющие, если в качестве критерия (см. рис. 139,б) принять

$$F_3 = \int_0^{\infty} [x_{\ddot{u}}(\tau) - 1]^2 d\tau = \min. \quad (5.20)$$

После подстановки переходной функции (5.6), т. е. для осциллятора с одной степенью свободы, будем иметь

$$F_3 = (1 + 4D^2)/(4D). \quad (5.21)$$

Эта функция имеет минимум при значении $D = 0,5$.

Рассмотренные здесь примеры уже показывают трудности при выборе критерия оптимизации. К тому же если учесть, что приведенные соображения справедливы только для переходной ступенчатой функции, соответствующей скачкообразному возмущению, и что в прикладной теории колебаний играют важную роль и многие другие виды возмущающих функций, то становится ясно, что критерий, в равной мере пригодный для всех интересующих нас случаев, найти весьма затруднительно.

На практике для простых осцилляторов стало обычным использование коэффициента демпфирования, близкого к значению $D = \sqrt{0,5} \approx 0,7$, являющемуся оптимальным и в силу других причин, которые будут рассматриваться в разд. 5.2.1.2.

5.1.4. Возмущающие функции общего вида

Как показано на рис. 140, возмущающую функцию $f(t)$, произвольно зависящую от времени, всегда можно аппроксимировать последовательностью ступенчатых функций. Высота соответствующего момента времени $t = t^*$ скачка равна

$$\Delta x_0(t^*) = \left[\frac{df(t)}{dt} \right]_{t=t^*} \Delta t^*. \quad (5.22)$$

При этом Δt^* — разность по времени между двумя соседними скачками, а t^* — подходящим образом выбранное значение в интервале $t^* \leq t \leq t^* + \Delta t^*$. Отдельный скачок в момент $t = t^*$ дает для выходной функции приращение

$$\Delta x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t^*, \\ \Delta x_0(t^*) x_{\ddot{u}}(t - t^*) & \text{при } t \geq t^*. \end{cases} \quad (5.23)$$

Поскольку осциллятор предполагается линейным, выходную величину можно получить сложением отдельных составляющих

$$x(t) = \sum \Delta x(t).$$

Переходя теперь к пределу $\Delta t^* \rightarrow 0$, получаем

$$x(t) = \int_0^t \frac{df(t^*)}{dt^*} x_{\ddot{u}}(t - t^*) dt^*. \quad (5.24)$$

При помощи этого интеграла, выведенного Дюамелем и названного его именем, определяется реакция линейного осциллятора на возму-

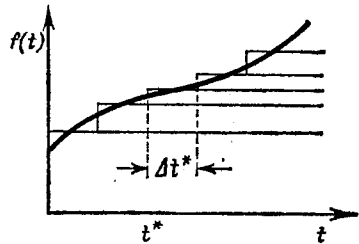


Рис. 140. Аппроксимация возмущающей функции $f(t)$ ступенчатыми функциями.

шение в виде произвольной функции $f(t)$. Решение (5.24) справедливо для тех же самых начальных условий, для которых была найдена переходная функция $x_a(t)$, т. е. для системы, находившейся при $t \leq 0$ в покое. Если к выражению (5.24) добавить еще выражение для собственных колебаний, то получится самое общее решение, которое справедливо для любых начальных условий.

Легко убедиться в том, что из (5.24) снова получается переходная функция, если $f(t)$ представляет собой единичную ступенчатую функцию. Тогда производная df/dt везде равна нулю, за исключением точки $t=0$. Здесь $(df/dt^*)dt^*|_0=1$, так что уравнение (5.24) дает просто $x(t)=x_a(t)$.

Если применить интеграл Дюамеля к системе с одной степенью свободы, то с учетом собственных колебаний системы выражение (5.6) примет вид

$$x(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{df(\tau^*)}{d\tau^*} \left[1 - \frac{e^{-D(\tau-\tau^*)}}{\nu} \cos \nu(\tau - \tau^* - \tau_0) \right] d\tau^* + Ce^{-D\tau} \cos(\nu\tau - \varphi). \quad (5.25)$$

Это выражение можно, например, применить к случаю, когда $f(t)$ является импульсной функцией, показанной на рис. 137. Тогда $x(t)$ должна стать равной переходной ступенчатой функции $x_f(t)$. Заменив импульсную функцию двумя ступеньками высотой H при $\tau^* = -\varepsilon$ и $\tau^* = +\varepsilon$, интеграл Дюамеля можно представить в следующем виде:

$$x(\tau) = H \left[1 - \frac{e^{-D(\tau+\varepsilon)}}{\nu} \cos \nu(\tau - \tau_0 + \varepsilon) \right] - H \left[1 - \frac{e^{-D(\tau-\varepsilon)}}{\nu} \cos \nu(\tau - \tau_0 - \varepsilon) \right].$$

При $\varepsilon \ll 1$ это выражение можно упростить:

$$x(\tau) = \frac{2H\varepsilon}{\nu} e^{-D\tau} [\nu \sin \nu(\tau - \tau_0) + D \cos \nu(\tau - \tau_0)].$$

Если учесть, что $D = \sin \nu\tau_0$ и $\nu = \sqrt{1-D^2} = \cos \nu\tau_0$, то

$$x(\tau) = \frac{2H\varepsilon}{\nu} e^{-D\tau} \sin \nu\tau.$$

Переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ и выбирая случай, когда $H \rightarrow \infty$, увидим, что произведение $H\varepsilon$ получает конечное значение. Положив $2H\varepsilon = v_0$, в точности получим импульсную переходную функцию (5.9).

Произвольную возмущающую функцию $f(t)$ можно аппроксимировать и последовательностью отдельных импульсов, как показано

на рис. 141. Используя импульсные переходные функции $x_i(t)$, можно соответственно найти и реакцию линейной системы. Воздействие отдельного импульса, приложенного в момент $t = t^*$, равно

$$\Delta x(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t^*, \\ f(t^*) \Delta t^* x_i(t - t^*) & \text{при } t \geq t^*. \end{cases}$$

В качестве меры воздействия отдельного импульса здесь служит произведение $f(t^*) \Delta t^*$, т. е. площадь вертикальной полосы, показанной на рис. 141. Суммируя воздействия отдельных импульсов и переходя к пределу $\Delta t^* \rightarrow dt^*$, наконец получаем

$$x(t) = \int_0^t f(t^*) x_i(t - t^*) dt^*. \quad (5.26)$$

Этот интеграл, как и интеграл Дюамеля (5.24), можно использовать для вычисления реакции линейных осцилляторов на произвольные возмущающие функции. Вычисление интеграла (5.26) в итоге дает решение для системы, находящейся при $t < 0$ в покое. Другие начальные условия удовлетворяются добавлением решения для однородного уравнения (собственных колебаний).

Для осциллятора с одной степенью свободы воспользуемся формулой (5.9) и добавим выражение для собственных колебаний:

$$x(\tau) = \frac{v_0 e^{-D\tau}}{v} \int_0^\tau f(\tau^*) e^{D\tau^*} \sin v(\tau - \tau^*) d\tau^* + C e^{-D\tau} \cos(v\tau - \varphi). \quad (5.27)$$

Если в качестве $f(\tau)$ подставить сюда ступенчатую функцию, то снова получится переходная функция (5.6). Введя обозначение $\tau - \tau^* = z$ и приняв $f(\tau) = 1$, будем иметь

$$x(\tau) = -\frac{1}{v} \int_{\tau}^0 e^{-Dz} \sin vz dz,$$

$$x(\tau) = -\frac{1}{v} [e^{-D\tau} (D \sin v\tau + v \cos v\tau) - v].$$

С учетом того, что $\sin v\tau_0 = D$ и $\cos v\tau_0 = \sqrt{1 - D^2} = v$, получим ступенчатую переходную функцию (5.6).

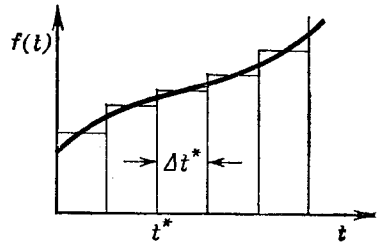


Рис. 141. Аппроксимация возмущающей функции $f(t)$ импульсными функциями.

5.2. Периодические возмущения в линейных системах

Хотя в предыдущем разделе решение линейного уравнения колебаний и могло быть задано в интегральной форме для совершенно произвольных возмущающих функций $f(t)$, в частных случаях могут оказаться более целесообразными и простыми другие пути решения. Это в особенности относится к периодическим возмущающим функциям, которые играют большую роль в теории и практике колебаний. В этом случае сравнительно просто найти частное решение полного неоднородного уравнения.

Любую периодическую функцию $f(t)$ можно представить как предел суммы гармонических функций — ряда Фурье. Точно так же, как в ряде Фурье, периодическая функция общего вида складывается из отдельных гармоник, в линейных системах решение может быть представлено в виде суммы всех отдельных реакций системы на гармонические составляющие входного воздействия. Отсюда следует, что прежде всего нужно рассмотреть чисто гармонические возмущающие функции.

5.2.1. Гармонические возмущающие функции

5.2.1.1. Уравнения движения осцилляторов с гармоническим возмущением. В разд. 2.1.1 были рассмотрены различные простые осцилляторы и выведены дифференциальные уравнения их движения. Колебания во всех этих осцилляторах могут вызываться внешними гармоническими воздействиями различного вида. Количество возможных случаев столь велико, что здесь мы удовлетворимся исследованием лишь некоторых характерных явлений на примере простого осциллятора в виде массы с пружиной. Аналогично тому как поведение различного рода осцилляторов ранее удавалось описывать одними и теми же дифференциальными уравнениями, проблему возмущения гармоническими функциями можно свести к немногим основным типам уравнений движения.

Рассмотрим три различных типа возмущения для механического осциллятора, состоящего из пружины, массы и демпфера:

А) возмущение за счет периодического движения точки подвеса пружины, рис. 142;

Б) возмущение за счет колебаний корпуса демпфера, рис. 143;

В) возмущение за счет движения основания, к которому прикреплены пружина и корпус демпфера, рис. 144. К этому случаю следует отнести также показанный на рис. 145 случай возмущения за счет вращающихся дисбалансов, так как обе системы описываются одинаковыми уравнениями движения.

Случай А. Если движение точки подвеса пружины подчиняется закону

$$x_A = x_0 \cos \Omega t, \quad (5.28)$$

то удлинение (либо сокращение) пружины выражается разностью $x - x_A$. Сила упругости пружины пропорциональна этой разности, так что уравнение движения можно записать в виде

$$m\ddot{x} = -d\dot{x} - c(x - x_A).$$

Если сюда ввести возмущающую функцию (5.28) и привести уравнение, как это делалось ранее, к безразмерному виду, то получим

$$x'' + 2Dx' + x = x_0 \cos \eta \tau. \quad (5.29)$$

Здесь безразмерная величина $\eta = \Omega/\omega_0 = \Omega\sqrt{m/c}$ представляет собой отношение частоты возмущения к собственной частоте недемпфированной системы. Наряду с безразмерным коэффициентом демпфиро-

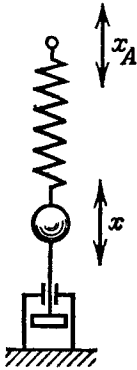


Рис. 142. Осциллятор с одной массой; возмущение колебаниями точки подвеса.

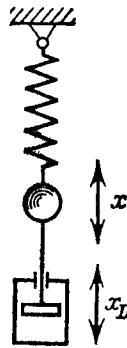


Рис. 143. Осциллятор с одной массой; возмущение колебаниями корпуса демпфера.

вания D безразмерная частота η является важным параметром колебательной системы, и ее влияние на характер вынужденных колебаний следует исследовать подробно.

Случай Б. Для осциллятора, показанного на рис. 143, силы демпфирования пропорциональны скорости перемещения поршня относительно корпуса демпфера. В этом случае уравнение движения выглядит следующим образом:

$$m\ddot{x} = -d(\dot{x} - \dot{x}_D) - cx,$$

откуда при $x_D = x_0 \sin \Omega t$ получается уравнение движения в безразмерном виде

$$x'' + 2Dx' + x = 2D\eta x_0 \cos \eta\tau. \quad (5.30)$$

Случай В. Этот случай представляет собой комбинацию обоих рассмотренных случаев, и поэтому уравнение движения запишется так:

$$m\ddot{x} = -d(\dot{x} - \dot{x}_G) - c(x - x_G). \quad (5.31)$$

При $x_G = x_0 \cos \Omega t$ это безразмерное уравнение принимает вид

$$x'' + 2Dx' + x = x_0 \cos \eta\tau - 2D\eta x_0 \sin \eta\tau. \quad (5.32)$$

Как и во всех исследованных до сих пор случаях, координата x здесь характеризует измеряемое отклонение массы m относительно инерциальной системы координат. Часто его трудно измерить, и во

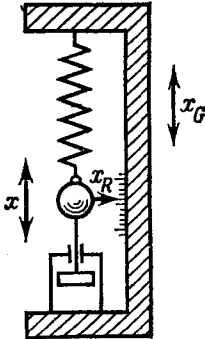


Рис. 144. Осциллятор с одной массой; возмущение силами инерции.

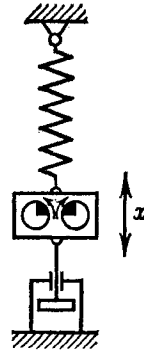


Рис. 145. Осциллятор с одной массой; возмущение вращающимися дисбалансами.

многих практических случаях им совсем не надо интересоваться. Так, если осциллятор находится на движущемся автомобиле, то основание совершает движение вместе с автомобилем. Тогда находящийся в автомобиле наблюдатель может видеть лишь движение x_R массы m относительно основания. Для него справедливо равенство $x_R = x - x_G$. При этом уравнение (5.31) преобразуется к виду

$$m(\ddot{x}_R + \ddot{x}_G) = -dx_R - cx_R,$$

или в безразмерных величинах

$$x_R'' + 2Dx_R' + x_R = x_0\eta^2 \cos \eta\tau. \quad (5.33)$$

Дифференциальное уравнение такого вида получается и при возмущении осциллятора вращающимся дисбалансом — случай, который очень часто встречается в технике колебаний. На практике применяют две вращающиеся навстречу друг другу неуравновешенные массы одинаковой величины (рис. 145), которые создают силу инерции только в направлении x , в то время как силы, перпендикулярные направлению x , взаимно уничтожаются. Если всю массу дисбаланса обозначить через m_u , а координату его центра тяжести относительно корпуса через x_u , то сила инерции будет равна

$$K_t = -m_u (\ddot{x} - \ddot{x}_u).$$

Таким образом, в качестве уравнения движения получим

$$(m + m_u) \ddot{x} = -dx - cx + m_u \ddot{x}_u.$$

Если массы вращаются равномерно, то $x_u = x_0 \cos \Omega t$. Для общей массы осциллятора $m + m_u$ уравнение движения в безразмерной форме будет

$$x'' + 2Dx' + x = -\kappa \eta^2 x_0 \cos \eta \tau, \quad (5.34)$$

где $\kappa = m_u / (m + m_u)$.

Полученные в трех рассмотренных выше случаях А, Б и В безразмерные уравнения движения (5.29), (5.30), (5.33) и (5.34) различаются лишь коэффициентом, который стоит в правой части перед функцией косинуса. Следовательно, в общем случае можно записать

$$x'' + 2Dx' + x = x_0 E \cos \eta \tau, \quad (5.35)$$

где:

$$\begin{aligned} \text{случай А, уравнение (5.29): } & E = 1; \\ \text{случай Б, уравнение (5.30): } & E = 2D\eta; \\ \text{случай В, уравнение (5.33): } & E = \eta^2; \\ \text{уравнение (5.34): } & E = -\kappa \eta^2. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Так как коэффициенты E не зависят от безразмерного времени τ , уравнения движения можно решать одновременно для всех трех случаев. Лишь при исследовании зависимости решения от параметров D , η и κ эти случаи следует рассматривать по отдельности.

5.2.1.2. Амплитудные и фазовые характеристики. Если на колебательную систему воздействует периодическое внешнее возмущение с частотой Ω , то следует предположить, что вынужденное движение будет происходить с той же частотой. Действительно, можно получить частное решение уравнения движения (5.35), положив

$$x = x_0 V \cos(\eta \tau - \psi). \quad (5.37)$$

Физически это выражение означает, что гармоническое колебание происходит с амплитудой $x_0 V$ и отстает по фазе от возмущающего

воздействия на угол ψ . При этом x_0 является мерой величины возмущения, а V показывает, во сколько раз амплитуда колебаний отличается от амплитуды x_0 . Поэтому V называют *коэффициентом усиления* или *динамичности*, а график его зависимости от η — амплитудной характеристикой или (иногда) резонансной кривой.

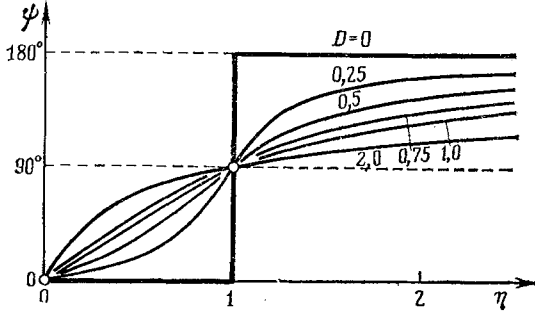


Рис. 146. Фазовая характеристика при различных значениях коэффициента демпфирования.

Амплитудная и фазовая характеристики дают возможность судить о важнейших свойствах системы, совершающей вынужденные колебания. Величины V и ψ должны быть выбраны таким образом,

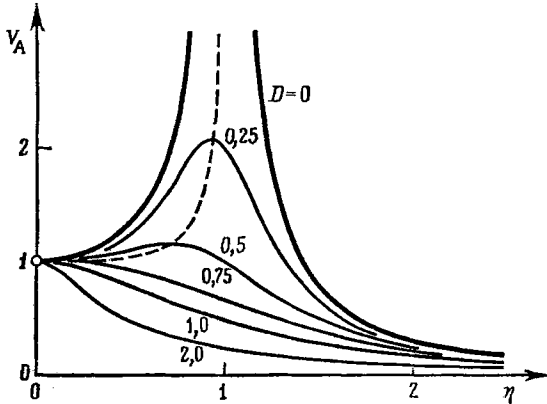


Рис. 147. Амплитудные характеристики (5.40) при различных значениях коэффициента демпфирования.

чтобы выражение (5.37) удовлетворяло уравнению движения (5.35). Подставляя (5.37) в (5.35) и приводя подобные члены, получаем

$$\cos \eta \tau [x_0 V (1 - \eta^2) \cos \psi + 2D\eta x_0 V \sin \psi - x_0 E] + \sin \eta \tau [x_0 V (1 - \eta^2) \sin \psi - 2D\eta x_0 V \cos \psi] = 0.$$

Это соотношение справедливо при любых значениях τ только тогда, когда оба выражения, стоящие в квадратных скобках, одновременно обращаются в нуль, что дает

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}, \quad (5.38)$$

$$V = \frac{E}{(1-\eta^2) \cos \psi + 2D\eta \sin \psi}. \quad (5.39)$$

Фазовая характеристика, как это видно из уравнения (5.38), не зависит от E и потому одинакова для всех трех рассмотренных

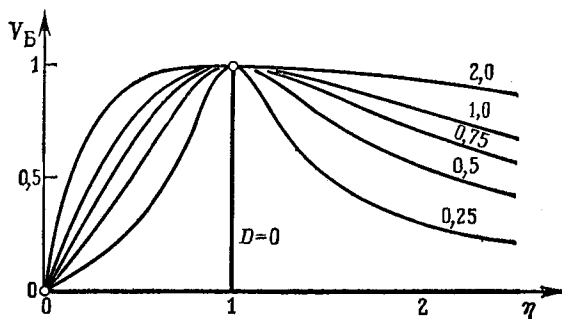


Рис. 148. Амплитудные характеристики (5.41) при различных значениях коэффициента демпфирования.

случаев. Следует, однако, заметить, что в случае Б угол ψ является фазовым углом между отклонением x и скоростью \dot{x} . С учетом (5.38) и (5.36) коэффициент усиления можно представить следующим образом:

$$\text{А) } V_A = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad (5.40)$$

$$\text{Б) } V_B = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad (5.41)$$

$$\text{В) } V_B = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}. \quad (5.42)$$

Соответствующие амплитудные характеристики и фазовая характеристика (5.38) при различных значениях D построены на рис. 146—149. Характерные значения фазы и коэффициентов усиления приведены в табл. 4.

В этой таблице η_{\max} — то значение относительной частоты η , при котором коэффициент усиления имеет максимальную величину. В каждом из трех случаев η_{\max} имеет следующие значения:

$$\text{А) } \eta_{\max} = \sqrt{1-2D^2}, \quad \text{Б) } \eta_{\max} = 1, \quad \text{В) } \eta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1-2D^2}}.$$

Таблица 4

η	ψ	V_A	V_B	v_B
0	0	1	0	0
1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{2D}$	1	$\frac{1}{2D}$
∞	π	0	0	1
η_{\max}	---	$\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$	1	$\frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}}$

Следует заметить, что максимумы амплитудных характеристик ни в одном из трех случаев не совпадают с «резонансом», при котором собственная частота $\omega = \omega_0\sqrt{1-D^2}$ равна частоте возмущения Ω , т. е. $\eta = \sqrt{1-D^2}$.

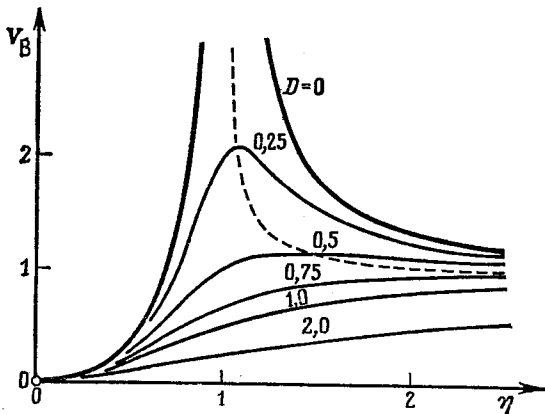


Рис. 149. Амплитудные характеристики (5.42) при различных значениях коэффициента демпфирования.

Геометрическое место максимумов легко вычислить по приведенным выше значениям V и η_{\max} . Исключая D , находим

$$A) V_{\max} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta_{\max}^4}}, \quad (5.43)$$

$$B) V_{\max} = \frac{\eta_{\max}^2}{\sqrt{\eta_{\max}^4 - 1}}. \quad (5.44)$$

На рис. 147 и 149 это геометрическое место точек показано штриховой линией. Исследуя выражения для η_{\max} , можно заключить, что в случаях А и В максимум существует только тогда, когда $D \leq \sqrt{0,5} = 0,7071$. При $D > \sqrt{0,5}$ кривые $V(\eta)$ имеют монотонный характер.

Следует заметить, что во всех трех случаях рассчитывался коэффициент усиления по координате x и строились амплитудные характеристики. Кроме амплитуды колебаний существенный интерес представляют скорость колебания \dot{x} и ускорение \ddot{x} . Обе эти величины легко получить дифференцированием x . При каждом таком дифференцировании к коэффициенту усиления добавляется множитель η , так что коэффициенты усиления по \dot{x} и \ddot{x} зависят от частоты иначе, чем по отклонению x . Например, формулу (5.42) и соответственно рис. 149 можно воспринимать как коэффициент усиления по ускорению в случае А. Таким образом, в то время как отклонение x при $\eta \rightarrow \infty$ стремится к нулю (рис. 147), ускорение стремится к постоянному значению, отличному от нуля. На эти зависимости следует обращать особое внимание при оценке результатов измерения параметров колебаний.

5.2.1.3. Мощность и работа при вынужденных колебаниях. У механического осциллятора мощность L рассчитывается как скалярное произведение вектора силы \vec{K} и вектора скорости $\dot{\vec{x}}$

$$L = \vec{K} \cdot \dot{\vec{x}}. \quad (5.45)$$

Если по направлению сила и скорость совпадают, то можно взять обычное произведение $K\dot{x}$. В противном случае подставляют лишь составляющую силы, направленную по скорости.

В случае периодической возмущающей силы будем иметь

$$K = K_0 \cos \Omega t.$$

Если амплитуду вынужденных колебаний в общем случае обозначить через A , то движение, вызываемое периодически меняющейся силой, описывается формулой

$$x = A \cos(\Omega t - \psi),$$

как это было показано в предыдущем разделе. Подставляя эти выражения в формулу (5.45), после несложных тригонометрических преобразований получаем мощность колебаний

$$L = K\dot{x} = \frac{1}{2} K_0 A \Omega [\sin \psi - \sin(2\Omega t - \psi)] = L_m - L_s. \quad (5.46)$$

Таким образом, мощность можно представить в виде суммы постоянной составляющей L_m (средняя мощность) и периодической составляющей L_s . Составляющая L_s меняется с частотой, вдвое большей частоты возмущающей силы. Пользуясь терминологией, принятой в электротехнике, мощность L_m можно назвать *активной*, а мощность L_s — *реактивной*.

Подставляя соответствующие значения K_0 и A , из справедливых в общем случае соотношений (5.46) легко найти выражения для

мощности во всех частных случаях. Так, для случая А из разд. 5.2.1.2, считая, что на массу m действует сила $K(t) = K_0 \cos \Omega t = c x_0 \cos \Omega t$, имеем

$$A = x_0 V_A = \frac{x_0}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad \sin \psi = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}.$$

Учитывая, далее, что $\Omega = \omega_0 \eta$, получаем

$$\begin{aligned} L_m &= c x_0^2 \omega_0 \frac{D\eta^2}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} = c x_0^2 \omega_0 V_m, \\ L_s &= c x_0^2 \omega_0 \frac{\eta}{2 \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \sin(2\Omega t - \psi) = \\ &= c x_0^2 \omega_0 V_s \sin(2\Omega t - \psi). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Множитель $c x_0^2 \omega_0$ имеет размерность мощности, а V_m и V_s можно рассматривать как безразмерные коэффициенты усиления для мощности. Эти выражения описывают влияние коэффициента демпфирования D и относительной частоты η на величину мощности. Совершенно аналогично тому, как это делалось при построении амплитудных характеристик, можно построить «резонансные» кривые для мощности. Из (5.47) легко видеть, что как V_m , так и V_s равен нулю при $\eta=0$ и при $\eta \rightarrow \infty$. Между тем оба семейства кривых независимо от величины D при $\eta=1$ имеют максимум, равный

$$(V_m)_{\max} = (V_s)_{\max} = 1/(4D).$$

Это означает, что при частоте возмущения $\Omega = \omega_0$ средняя мощность (активная мощность) равна максимальному значению переменной мощности (реактивной мощности). Таким образом, при введении в колебательную систему определенной полезной мощности в системе должна развиваться такая реактивная мощность, максимальное значение которой имеет ту же самую величину, что и активная мощность. Если возмущение происходит не с частотой $\Omega = \omega_0$, то отношение активной мощности к реактивной уменьшается. Из (5.47) легко получить

$$\frac{L_m}{(L_s)_{\max}} = \frac{V_m}{V_s} = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}. \quad (5.48)$$

Однако это выражение в точности повторяет ранее полученное выражение (5.41) для V_B , зависимость которого от η и D можно видеть на рис. 148. Отсюда непосредственно видно, что если нам нужен осциллятор с возможно низкой реактивной мощностью, то лучше перейти к резонансному случаю.

Не проводя подробных вычислений, приведем выражения для активной и реактивной мощности в двух других случаях (см. разд. 5.2.1.2):

Случай Б:

$$L_m = dx_0^2 \omega_0^2 \frac{2D^2 \eta^4}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2},$$

$$L_s = dx_0^2 \omega_0^2 \frac{D \eta^3}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \sin(2\Omega t - \psi); \quad (5.49)$$

Случай В:

$$L_m = m_a x_0^2 \omega_0^3 \frac{D \eta^6}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2},$$

$$L_s = m_a x_0^2 \omega_0^3 \frac{\eta^5}{2 \sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}} \sin(2\Omega t - \psi). \quad (5.50)$$

Следует отметить, что отношение активной мощности к максимальной реактивной в обоих случаях имеет точно такое же значение, какое уже было найдено в случае А (формула (5.48)). Таким образом, сделанные там выводы справедливы и для случаев Б и В.

Графики коэффициентов усиления по мощности имеют иной вид, чем амплитудные характеристики, построенные на рис. 147—149. На рис. 150 в качестве примера показана функция V_m для слу-

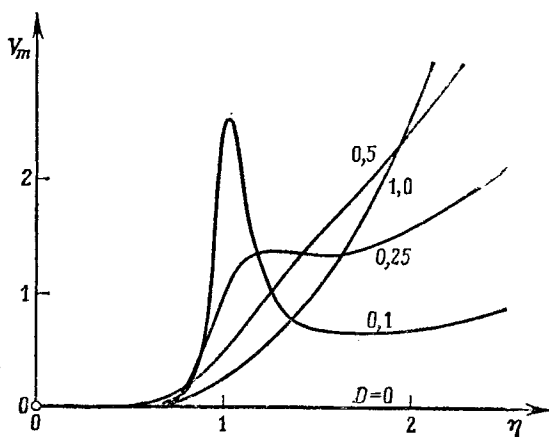


Рис. 150. Коэффициенты усиления по мощности, определяемые выражениями (5.50).

чая В. Первая формула (5.50) позволяет легко убедиться в том, что резонансный максимум полностью исчезает уже при весьма небольших значениях демпфирования. Кривые при $D > 0,259$ монотонны, так что при этом развивается тем большая мощность, чем выше частота возмущения.

Совершаемую работу можно найти интегрированием мощности. Принимая во внимание равенство (5.46), получают работу внешней силы возмущения:

$$E_e = \int L dt = \frac{1}{2} K_0 A \Omega t \sin \psi + \frac{1}{4} K_0 A \cos(2\Omega t - \psi). \quad (5.51)$$

В этой работе также оказывается возможным выделить активную и реактивную составляющие. Активная работа растет линейно по времени, в то время как реактивная работа является периодической функцией времени. На практике интересуются прежде всего работой E^* , совершаемой за одно полное колебание:

$$E_e^* = E_e(t = 2\pi/\Omega) - E_e(t = 0) = \pi K_0 A \sin \psi. \quad (5.52)$$

Наряду с внешней возмущающей силой работу совершают также и внутренние силы колебательной системы. При этом получаем следующие выражения для работы

$$\text{силы инерции:} \quad E_T = \int m \ddot{x} \dot{x} dt = 1/2 m \dot{x}^2,$$

$$\text{силы демпфирования:} \quad E_D = \int dx \dot{x} dt,$$

$$\text{восстанавливающей силы:} \quad E_R = \int cx \dot{x} dt = 1/2 cx^2.$$

Работа силы инерции равна кинетической энергии массы, а работа восстанавливающей силы равна потенциальной энергии напряженной пружины. При периодических движениях обе эти работы также меняются периодически и, имея разные знаки, исключаются из общего баланса энергии системы, если их величина рассчитывается для одного полного колебания. Таким образом, обе

работы являются реактивными. Работа же, совершаемая силами демпфирования за один полный период, не исключается из общего баланса. При $\dot{x} = -\Omega A \sin(\Omega t - \psi)$ имеем

$$E_D^* = d \Omega A^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(\Omega t - \psi) d(\Omega t) = \pi d A^2 \Omega. \quad (5.53)$$

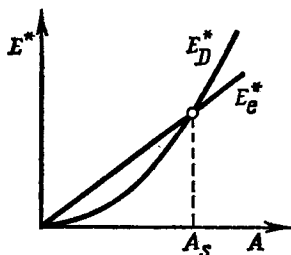


Рис. 151. Энергетическая диаграмма для вынужденных колебаний.

Сравнение энергии (5.52), поступающей в систему за счет внешних сил, с энергией (5.53), расходуемой на преодоление демпфирования, дает представление о механизме вынужденных колебаний.

Здесь E_e^* линейно зависит от амплитуды колебания A , в то время как E_D^* пропорциональна квадрату амплитуды. Эти зависимости можно нанести на график для какого-либо постоянного значения Ω или соответственно η и получить диаграмму, изображенную на рис. 151. Прямая E_e^* пересекает параболу E_D^* при $A = A_s$, т. е. при стационарном значении амплитуды. Если $A < A_s$, то в систему поступает больше энергии, нежели расходуется на преодоление сил демпфирования, и, следовательно, амплитуда увеличивается. Наоборот,

при $A > A_s$, потребляемая демпфированием энергия больше энергии, производимой внешней силой, и вследствие этого происходит уменьшение амплитуды. При $A = A_s$ обе работы равны между собой:

$$E_e^* = \pi K_0 A_s \sin \psi = E_D^* = \pi d A_s^2 \Omega,$$

откуда и получается стационарная амплитуда

$$A_s = \frac{K_0 \sin \psi}{d \Omega}. \quad (5.54)$$

5.2.1.4. Передаточная функция и частотные характеристики.

Уже в первой главе (разд. 1.5) было показано, насколько разнообразны средства, применяемые для изображения колебаний. Если колебания вызваны гармоническими возмущающими силами, то для описания колебательных процессов наряду с уже рассмотренными амплитудными и фазовыми характеристиками можно использовать передаточные функции и амплитудно-фазовые характеристики. Не вдаваясь в подробности, укажем здесь лишь на тесную взаимосвязь между этими способами описания и покажем, что при надлежащем их выборе можно не только сэкономить большое количество времени на расчетную работу, но и достичь лучшей наглядности представления полученных результатов.

В качестве примера снова рассмотрим простой линейный осциллятор, для которого справедливо уравнение движения (5.29). Входящую в правую часть этого уравнения возмущающую функцию можно рассматривать как гармоническую «входную функцию»

$$x_e = x_0 \cos \eta \tau,$$

на которую осциллятор реагирует также гармоническим колебанием, т. е. «выходной функцией»

$$x_a = x = x_0 V \cos(\eta \tau - \psi).$$

Как x_e , так и x_a могут быть представлены проекциями вращающихся векторов (рис. 152). Однако вместо проекции можно использовать и сами векторы. Если изображенную на рис. 152 плоскость считать комплексной плоскостью, то эти векторы будут выражаться следующим образом:

$$x_e = x_0 e^{i \eta \tau}, \quad x_a = x_0 V e^{i(\eta \tau - \psi)}. \quad (5.55)$$

С введением этих величин легко видеть, что x_a действительно является решением уравнения движения (5.29) и что величины V и ψ

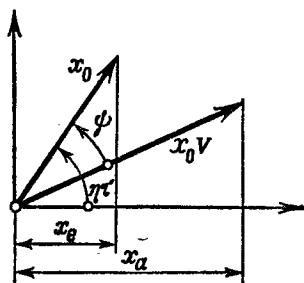


Рис. 152. Входное колебание x_e и выходное колебание x_a как проекции вращающихся векторов.

принимают в точности такие же значения, которые были уже определены формулами (5.38) и (5.40).

Комплексное представление (5.55) оказывается особенно удобным при образовании коэффициента усиления F , или передаточной функции

$$F = \frac{x_a}{x_e} = V e^{-i\psi}. \quad (5.56)$$

Величина F является коэффициентом, на который нужно умножить входную величину x_e , чтобы получить выходную величину x_a . По передаточной функции F можно видеть, в каком виде входное возмущение поступает на выход системы, т. е. что происходит с входным возмущением при прохождении через систему. Если передаточная функция F принимает действительное значение, то это значение показывает «статическое» увеличение или уменьшение входной величины. Если F становится комплексной величиной, то это указывает на наличие сдвига фазы. Из выражения (5.56) можно найти две составляющие передаточной функции: *модуль* передаточной функции $V = |F|$ и сдвиг фазы, или *аргумент*, ψ .

Передаточная функция F , а также V и ψ зависят от частоты или отношения частот η . Для соответствующих графических представлений приняты следующие названия:

- $F(\eta)$ — комплексная частотная характеристика;
- $V(\eta)$ — амплитудная частотная характеристика;
- $\psi(\eta)$ — фазовая частотная характеристика.

Амплитудная частотная характеристика, или, как ее иногда называют, амплитудно-частотная кривая, идентична рассматривавшемуся выше графику коэффициента усиления.

Величины V и ψ можно рассматривать как полярные координаты точки. Таким образом, каждому значению η соответствует одна точка комплексной плоскости; совокупность этих точек образует *амплитудно-фазовую характеристику*. В случае А (см. выше), используя выражения

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}, \quad (5.57)$$

нетрудно построить амплитудно-фазовую характеристику. Однако в данном случае проще строить не саму амплитудно-фазовую характеристику, а обратную амплитудно-фазовую характеристику, когда на комплексной плоскости получается годограф обратной передаточной функции

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{V} e^{i\psi}. \quad (5.58)$$

Для этого по осям координат откладывают

$$u = 1 - \eta^2, \quad v = 2D\eta, \quad (5.59)$$

как показано на рис. 153. Тогда радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку P обратной амплитудно-фазовой характеристики, фактически определяется величиной модуля $1/V$ и аргументом ψ , как это и требуется формулой (5.58). Таким образом, уравнения (5.59) являются параметрическим представлением обратной амплитудно-фазовой характеристики с η в качестве параметра. Исключая η , легко найти

$$u = 1 - \frac{v^2}{4D^2}. \quad (5.60)$$

Таким образом, обратные амплитудно-фазовые характеристики являются параболой с вершиной в точке $(1, 0)$. Эти кривые называют также *параболами Рунге*, ибо Рунге применил этот вид изображения в теории колебаний. Каждому значению коэффициента демпфи-

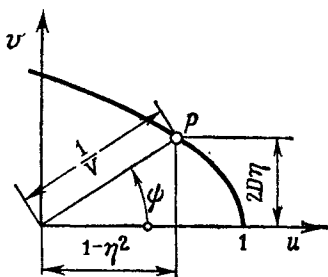


Рис. 153. Построение годографа обратной передаточной функции.

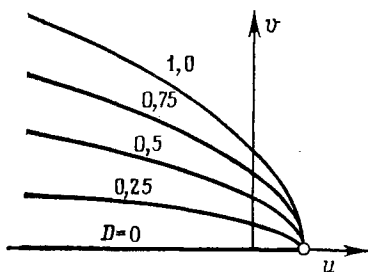


Рис. 154. Годографы обратной передаточной функции при различных значениях коэффициента демпфирования.

рования соответствует своя парабола. Все кривые, приведенные на рис. 146 и 147, можно заменить одним семейством парабол, построенных для различных значений D , как показано на рис. 154, потому что по этому рисунку можно определить амплитуду и фазу для каждого значения частоты η . При желании рис. 154 можно дополнить изображением кривых $\eta = \text{const}$, которые, как показывают уравнения (5.59), являются прямыми, параллельными оси v . Все параболы начинаются при значении $\eta=0$ на оси u , пересекают ось v при значении $\eta=1$ и при дальнейшем росте η переходят во второй квадрант, продолжаясь в сторону все больших отрицательных значений u .

По обратной амплитудно-фазовой характеристике легко определить максимальную величину амплитуды и относительную частоту,

при которой она достигается. Максимуму V соответствует минимум $1/V$. Последний может быть найден, если из начала координат провести нормаль к параболе (рис. 155). Так как нормаль и касательная к кривой перпендикулярны, для точки пересечения перпендикуляра с параболой выполняется равенство

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}.$$

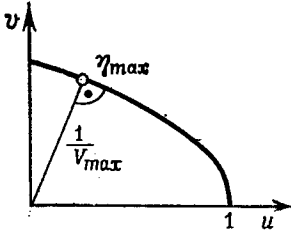


Рис. 155. Нахождение резонансного максимума по годографу обратной передаточной функции.

Если вычислить производную при помощи (5.60), а затем подставить выражения (5.59), то получится уравнение для частоты η , решением которого будет

$$\eta_{\max} = \sqrt{1 - 2D^2},$$

что согласуется с ранее полученным результатом. Если, наконец, подставить это значение в формулу

$$V_{\max} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (5.61)$$

то с учетом (5.59) снова получим уже найденное выше другим путем значение для максимума коэффициента усиления.

В данном примере построение обратной амплитудно-фазовой характеристики можно сделать еще нагляднее, если подставить в уравнение движения комплексные выражения (5.55). Тогда это уравнение приведет к виду

$$x_0 V e^{i(\eta\tau - \psi)} \left[-\eta^2 + i(2D\eta) + 1 - \frac{1}{V} e^{i\psi} \right] = 0. \quad (5.62)$$

Чтобы это уравнение удовлетворялось, стоящее в квадратных скобках выражение должно быть равно нулю. Каждый из членов в скобках может быть истолкован как вектор на комплексной плоскости. Все четыре вектора вместе образуют замкнутый многоугольник, как показано на рис. 156. Точка P обратной характеристики может быть найдена как конечная точка векторной ломаной, образованной тремя первыми слагаемыми. При этом каждому вектору соответствует член дифференциального уравнения, а каждое дифференцирование по τ представляет поворот соответствующего вектора на 90° .

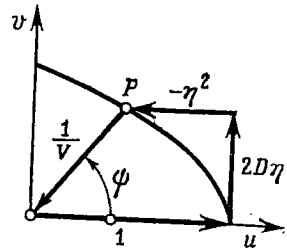


Рис. 156. Построение годографа обратной передаточной функции суммированием отдельных векторов.

Исходя из всего сказанного выше, легко представить себе, как построить обратную амплитудно-фазовую характеристику осциллятора, уравнение движения которого является дифференциальным уравнением n -го порядка. Не вдаваясь в подробности таких построений, заметим, что они весьма распространены в технике регулирования.

5.2.1.5. Переходные процессы при вынужденных колебаниях. Рассматривавшееся в предыдущих разделах решение (5.37) является не общим, а лишь частным решением уравнения движения (5.35). Согласно сказанному выше, для того чтобы найти общее решение,

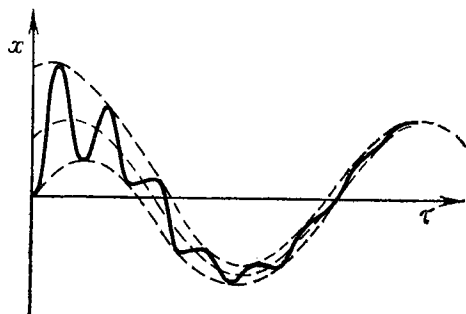


Рис. 157. Наложение свободных и вынужденных колебаний в случае $\eta \ll 1$.

нужно прибавить выражения для свободных колебаний, т. е. общее решение однородного уравнения. Следовательно, решение имеет вид

$$x = x_0 V \cos(\eta\tau - \psi) + Ce^{-D\tau} \cos(\sqrt{1 - D^2}\tau - \varphi). \quad (5.63)$$

При надлежащем выборе постоянных C и φ это решение будет удовлетворять любым заданным начальным условиям. В зависимости от

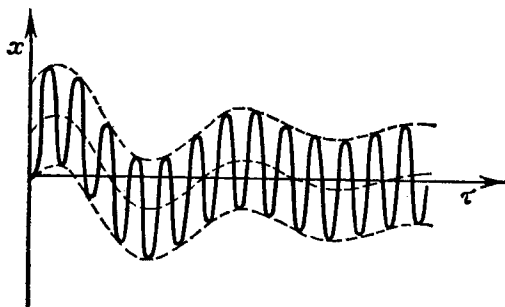


Рис. 158. Наложение свободных и вынужденных колебаний в случае $\eta \gg 1$.

частоты возмущения, собственной частоты и вида начальных условий возможно чрезвычайно большое количество типов колебаний. Две кривые $x(\tau)$ с начальными условиями $t=0$, $x=x'=0$ построены на рис. 157 и 158.

Особый интерес представляет поведение осциллятора в случае, когда собственная частота и частота возмущения близки друг к

другу. Здесь мы ограничимся лишь рассмотрением недемпфированных колебаний ($D=0$); тогда с учетом (5.38) и (5.40) выражение (5.63) примет вид

$$x = x_0 \frac{1}{1-\eta^2} \cos \eta \tau + C \cos (\tau - \varphi). \quad (5.64)$$

Если постоянные C и φ определить из начальных условий $t=0$, $x=x'=0$, то получится

$$C = -\frac{x_0}{1-\eta^2}, \quad \varphi = 0.$$

При этом выражение (5.64) переходит в следующее:

$$x = \frac{x_0}{1-\eta^2} (\cos \eta \tau - \cos \tau).$$

Тригонометрическими преобразованиями это выражение приводится к форме

$$x = -\frac{2x_0}{1-\eta^2} \sin \frac{\eta-1}{2} \tau \sin \frac{\eta+1}{2} \tau. \quad (5.65)$$

Это справедливое в общем случае выражение допускает особенно наглядное толкование при $\eta \approx 1$, т. е. в случае, когда собственная частота и частота возмущения мало отличаются друг от друга. В этом случае выполняется неравенство $(\eta-1) \ll (\eta+1)$ и, следовательно,

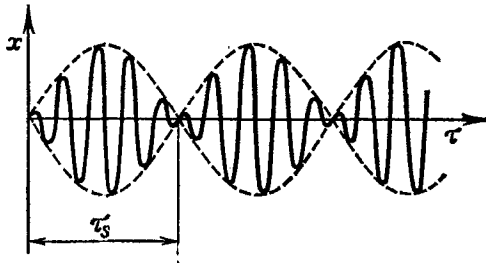


Рис. 159. Наложение свободных и вынужденных колебаний в случае $\eta \approx 1$ при $D=0$.

аргумент первой функции синуса будет меняться медленно по сравнению с изменениями аргумента второй функции синуса. Таким образом, движение можно представить себе как колебание с частотой $(\eta+1)/2 \approx 1$, амплитуда которого $A(t)$ медленно меняется по гармоническому закону

$$A(t) = -\frac{2x_0}{1-\eta^2} \sin \frac{\eta-1}{2} \tau.$$

Кривая в плоскости x, τ для этих колебаний изображена на рис. 159. Осциллятор совершает колебания типа биений, причем временной

интервал между двумя минимумами вычисляется по формуле

$$\tau_s = \frac{2\pi}{\eta - 1}. \quad (5.66)$$

При помощи формулы (5.65) можно также удовлетворительно пояснить особый случай переходного процесса при резонансе. Рассмотрение частного решения для этого случая дает практически не-

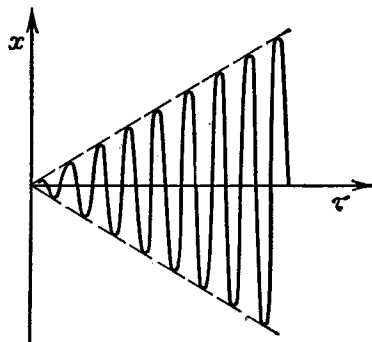


Рис. 160. Колебания в случае резонанса $\eta=1$ при $D=0$.

пригодный результат, так как в случае $D=0$ коэффициент усиления при $\eta=1$ обращается в бесконечность. Однако, принимая во внимание, что $\eta \approx 1$, уравнение (5.65) можно записать следующим образом:

$$x = -\frac{2x_0}{(1+\eta)(1-\eta)} \frac{\eta-1}{2} \tau \sin \frac{\eta+1}{2} \tau.$$

Переходя к пределу, при $\eta \rightarrow 1$ будем иметь

$$x = (x_0/2) \tau \sin \tau. \quad (5.67)$$

Это уравнение описывает колебания с линейно нарастающей со временем амплитудой, как показано на рис. 160. Впрочем, легко убедиться, что рис. 160 получается из рис. 159 при $\tau_s \rightarrow \infty$, т. е. при сдвиге первого минимума вправо до бесконечности. Действительно, из уравнения (5.66) видно, что при $\eta \rightarrow 1$ период биений τ_s неограниченно возрастает.

5.2.2. Периодическое возмущение общего вида; решение методом разложения в ряд Фурье

Если действующее на осциллятор возмущение является периодическим, то оно может быть представлено рядом Фурье. Тогда для входной функции можно записать

$$x_s = f(t) = \sum_{n=1}^N k_n \cos(n\eta\tau - \chi_n) = \sum_{n=1}^N \dot{f}_n(t). \quad (5.68)$$

Для осцилляторов, уравнения движения которых линейны, в силу принципа суперпозиции решение можно найти как сумму отдельных реакций осциллятора на различные составляющие возмущения. Это легко понять из следующих рассуждений: если в общем случае $L(x)$ является линейным дифференциальным выражением от x , то для линейного осциллятора уравнение можно записать так:

$$L(x_a) = x_e. \quad (5.69)$$

Если теперь $x_e = \sum f_n(t)$, то можно положить $x_a = \sum x_{an}$. Тогда вследствие линейности справедливо равенство

$$L(x_a) = L(\sum x_{an}) = \sum L(x_{an}).$$

Следовательно, исходное уравнение (5.69) можно привести к виду

$$\sum_{n=1}^N [L(x_{an}) - f_n(t)] = 0.$$

Если x_{an} выбрать таким образом, чтобы каждый член суммы, т. е. каждое стоящее в квадратных скобках выражение, обращался

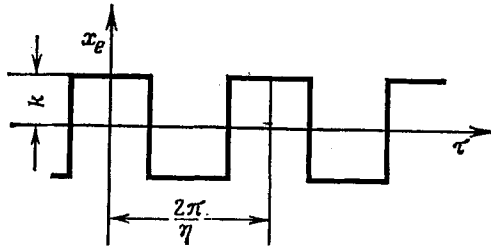


Рис. 161. Функция типа меандра.

в нуль, то это уравнение будет удовлетворяться, а общее решение x_a получится как сумма частных решений.

В качестве примера снова рассмотрим уравнение движения

$$x'' + 2Dx' + x = x_e, \quad (5.70)$$

причем x_e является функцией типа меандра, изображенной на рис. 161. Для этой функции разложение в ряд Фурье выглядит так:

$$\begin{aligned} x_e(\tau) &= \frac{4k}{\pi} \left[\cos \eta\tau - \frac{\cos 3\eta\tau}{3} + \frac{\cos 5\eta\tau}{5} - \dots \right] = \\ &= \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos [(2n+1)\eta\tau]}{2n+1}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Применяя ранее полученные результаты для коэффициента усиления и фазы — формулы (5.40) и (5.38) соответственно — легко най-

ти каждое частное решение, так что общее решение принимает следующий вид:

$$x_a = x = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos [(2n+1)\eta\tau - \psi_n]}{(2n+1) \sqrt{[1-(2n+1)^2\eta^2]^2 + 4D^2(2n+1)^2\eta^2}} + \\ + Ce^{-D\tau} \cos [\sqrt{1-D^2}\tau - \varphi], \quad (5.72)$$

где

$$\operatorname{tg} \psi_n = \frac{2D(2n+1)\eta}{1-(2n+1)^2\eta^2}.$$

Вычисление этого ряда на практике, естественно, весьма трудоемко, хотя из-за сильного затухания он сходится значительно быстрее, чем ряд для возмущающей функции (5.71). В разд. 5.2.4 мы увидим, что для данного примера проще и легче найти точное решение совершенно иным путем.

5.2.3. Статистически распределенные возмущения

Рассмотренный в предыдущем разделе способ можно использовать и для непериодических возмущающих функций. Так, например, с непериодической функцией мы имеем дело уже тогда, когда в возмущение входят две гармонические составляющие, отношение частот которых не является рациональным числом (несоизмеримые частоты). Для практики еще важнее такие возмущения, у которых частоты распределены более или менее непрерывно, т. е. существует целый частотный спектр возмущений. В этом случае возмущение можно представить как предельное значение суммы отдельных возмущений, т. е. как интеграл

$$x_e = \int_0^{\infty} k_e(\eta) \cos [\eta\tau - \chi(\eta)] d\eta. \quad (5.73)$$

Функция $k_e(\eta)$ называется *частотным спектром* возмущения. Фазовый угол $\chi(\eta)$ характеризует сдвиг по времени отдельных составляющих колебаний друг относительно друга.

Каждая составляющая возмущения в (5.73) вызывает соответствующую составляющую движения осциллятора, которую можно найти уже рассмотренным способом, т. е. умножением входной амплитуды на коэффициент усиления $V(\eta)$ и добавочным сдвигом фазы на величину $\psi(\eta)$. В качестве общего решения, согласно сказанному, имеем

$$x = x_a = \int_0^{\infty} k_e(\eta) V(\eta) \cos [\eta\tau - \chi(\eta) - \psi(\eta)] d\eta. \quad (5.74)$$

Отсюда видно, что частотный спектр выходной функции получается умножением частотного спектра входной функции на коэффициент усиления:

$$k_a(\eta) = k_e(\eta)V(\eta). \quad (5.75)$$

Если возмущения являются статистически распределенными, т. е. представляются так называемыми случайными функциями, то их характеризуют не частотным спектром, а *спектральной плотностью* $S(\eta)$, которую можно получить из частотного спектра $k(\eta)$ переходом к пределу. Не останавливаясь подробно на определении спектральной плотности, в дальнейшем для простоты будем полагать

$$S(\eta) = \text{const} \cdot |k(\eta)|^2. \quad (5.76)$$

Применение спектральной плотности вместо частотного спектра имеет то преимущество, что, с одной стороны, ее можно найти непосредственно из кривой $x_e(\tau)$, а с другой стороны, по ней можно рассчитать *среднеквадратичное отклонение* $\overline{x^2}$, используемое в теории вероятностей для характеристики ожидаемого отклонения. Последнее определяется по формуле

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\eta) d\eta. \quad (5.77)$$

Более подробные сведения о частотных спектрах читатель может найти в литературе по теории вероятностей ¹⁾.

Если случайные функции стационарны, т. е. если их спектральная плотность и соответственно частотный спектр не зависят от времени, то по известной спектральной плотности $S_e(\eta)$ входного возмущения можно рассчитать спектральную плотность $S_a(\eta)$ выходной функции осциллятора. Возведя в квадрат равенство (5.75) и подставив результат в соотношение (5.76), справедливое как для входной, так и для выходной функций, непосредственно получим важную зависимость между спектральными плотностями входной и выходной функций:

$$S_a(\eta) = S_e(\eta)|V(\eta)|^2. \quad (5.78)$$

Для наглядности мы применим формулу (5.78) к задаче подрессорирования автомобиля, для которой может быть использовано уравнение движения вида (5.70). Входное возмущение x_e обуславливается в этом случае случайными неровностями дороги. Для известного типа дороги можно опытным путем найти спектральные плотности $S_e(\eta)$, соответствующие каждой скорости движения. После этого

¹⁾ См., например, Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1960. — *Прим. ред.*

ставится задача определения оптимального значения коэффициента демпфирования D , с тем чтобы среднеквадратичное отклонение \bar{x}_a^2 , т. е. средняя амплитуда колебаний автомобиля, было как можно меньше.

Сначала из выражения (5.78) с учетом значения $V(\eta)$ вычислим спектральную плотность $S_a(\eta)$ и, подставив ее в формулу (5.77), сразу получим искомое среднеквадратичное отклонение

$$\bar{x}_a^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_e(\eta) [V(\eta)]^2 d\eta. \quad (5.79)$$

Так как интегрирование проводится по частоте, то в результате получается функция от коэффициента демпфирования D . При известной $S_e(\eta)$ интегрирование может быть выполнено, так что из функции $\bar{x}_a(D)$ можно найти оптимальное значение D .

5.2.4. Общее периодическое возмущение; решение методом припасовывания

Хотя в принципе рассмотренным в разд. 5.2.2 методом можно рассчитать вынужденные колебания для периодических возмущений общего вида, практическое вычисление полученного решения может оказаться очень трудоемким. Покажем на простом примере, что в случае, когда возмущающая функция является кусочно постоянной, частное решение можно всегда найти элементарными средствами. Возьмем возмущающую функцию

$$x_e(\tau) = k \operatorname{sign} \sin \eta \tau, \quad (5.80)$$

соответствующую изображенной на рис. 161 функции типа меандра, только здесь начало координат помещено в точку скачка; период возмущающей функции обозначим через $2\tau_1$. Поскольку x_e кусочно постоянна, уравнение движения

$$x'' + 2Dx' + x = x_e = k \operatorname{sign} \sin \eta \tau \quad (5.81)$$

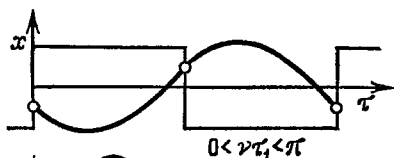
можно решить в каждом интервале между двумя скачками возмущающей функции. Решение (см. формулу (5.5)) определяет затухающие колебания около положения равновесия $\pm k$:

$$x = \pm k + Ce^{-D\tau} \cos(\nu\tau - \varphi), \quad (5.82)$$

где $\nu = \sqrt{1 - D^2}$. В интервале $0 < \tau < \tau_1$ у k берется знак плюс, а в интервале $\tau_1 < \tau < 2\tau_1$ — знак минус. Постоянные C и φ , которые пока еще не определены, должны быть выбраны таким образом, чтобы общее решение имело период $2\tau_1$. При этом не только должно выполняться условие непрерывности и плавности перехода в местах скачков возмущения, но через полный период $\tau = 2\tau_1$ состояние должно

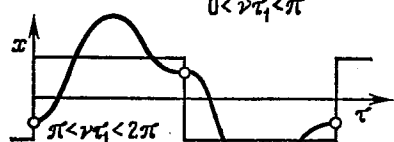
быть таким же, каким оно было при $\tau=0$. Таким образом, задача заключается в следующем: через положение равновесия надо провести такие отрезки кривых свободного затухающего колебания, чтобы получились непрерывная гладкая кривая с периодом $2\tau_1$.

На рис. 162 это показано для трех различных областей частот. Вследствие симметрии возмущающей функции в данном случае достаточно исследовать процесс в интервале $0 \leq \tau \leq \tau_1$. Тогда граничные условия будут такими:



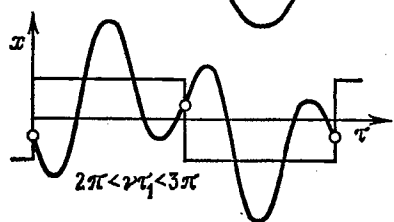
$$x(\tau_1) = -x(0), \quad x'(\tau_1) = -x'(0). \quad (5.83)$$

Из этих условий можно найти обе постоянные. Подставив (5.82) в (5.83) и решив полученное уравнение относительно C , получим



$$C = - \frac{2k}{\cos \varphi + e^{-D\tau_1} \cos(\nu\tau_1 - \varphi)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{D + e^{-D\tau_1} (D \cos \nu\tau_1 + \nu \sin \nu\tau_1)}{\nu + e^{-D\tau_1} (\nu \cos \nu\tau_1 - D \sin \nu\tau_1)}. \quad (5.84)$$



Так как $\tau_1 = \pi/\eta$, величины C и φ представляют собой известные функции частоты возмущения.

Рис. 162. Периодические решения при возмущении, описываемом функцией типа меандра.

Если по известному теперь решению (5.82) нужно построить резонансную кривую, т. е. зависимость максимальных отклонений от

частоты, то прежде всего следует найти их максимумы относительно смещенного положения равновесия. Эти максимумы соответствуют значению $\tau = \tau_m$, которое определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}(\nu\tau_m - \varphi) = -D/\nu.$$

Максимумы получаются подстановкой τ_m в (5.82). Резонансная кривая может иметь несколько экстремальных значений. Из них нужно найти такое, которое представляет собой абсолютный максимум по отношению к положению равновесия $x=0$.

На рис. 163 результат вычислений значений максимумов представлен в виде рельефного изображения резонансных кривых, где можно проследить влияние частоты и демпфирования. В отличие от обычного построения резонансных кривых, когда по оси абсцисс откладывается частота или соответственно относительная частота η , на рис. 163 используется полупериод колебаний $\tau_1 = \pi/\eta$. Это делается для того, чтобы лучше выделить максимумы, так как при

обычном построении они накладывались бы друг на друга в области $0 \leq \eta \leq 1$.

Для частного случая отсутствия демпфирования ($D=0$) можно вывести формулы для отклонения x и его максимумов. При $D=0$ будем иметь $\nu=1$. Тем самым формулы (5.84) упрощаются:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \tau_1}{1 + \cos \tau_1} = \operatorname{tg} \frac{\tau_1}{2}, \quad \varphi = \frac{\tau_1}{2}, \quad C = -\frac{k}{\cos(\tau_1/2)},$$

а выражение (5.82) принимает вид

$$x = k \left[1 - \frac{\cos(\tau - \tau_1/2)}{\cos(\tau_1/2)} \right].$$

Отсюда видно, что резонансные кривые всегда пересекают ось абсцисс в местах скачков возмущающей функции, так как при

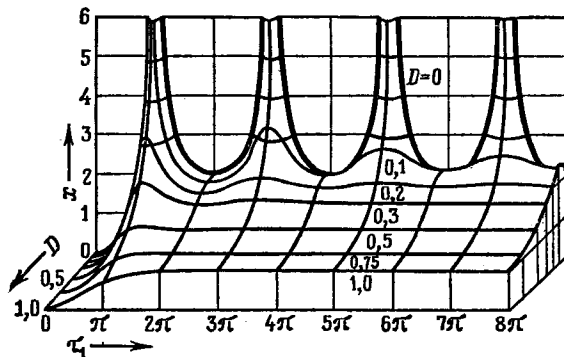


Рис. 163. Рельефное изображение резонансных кривых при возмущении, описываемом функцией типа меандра.

$\tau=0$ и $\tau=\tau_1$ выполняется равенство $x=0$. Максимумы кривых расположены в середине отрезков между местами скачков. Для абсолютных максимумов имеет место

$$x_{\max} = k \left[1 - \frac{1}{\cos(\tau_1/2)} \right] \quad \text{при } 0 < \tau_1 < \pi,$$

$$x_{\max} = k \left[1 + \frac{1}{\cos(\tau_1/2)} \right] \quad \text{при } \tau_1 > \pi.$$

Более подробное описание рассмотренной здесь задачи читатель может найти в статье автора (Z. angew. Math. und Mech., 1951, Bd. 31, S. 324—329).

5.3. Применение теории резонанса

5.3.1. Приборы для измерения колебаний

Для указания регистрации и измерения колебаний могут применяться самые разнообразные приборы. Мы выберем лишь несколько примеров, чтобы пояснить на них возникающие при этом вопросы.

Одним из наиболее известных приборов для регистрации и измерения параметров колебаний является шлейфовый осциллограф, принцип устройства которого показан на рис. 164. Две параллельные

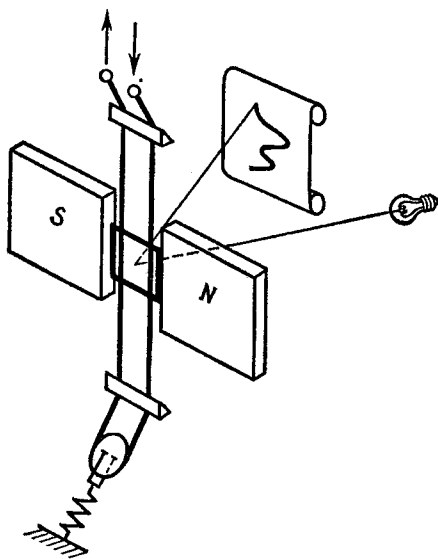


Рис. 164. Шлейфовый осциллограф.

части петлеобразной тонкой проводящей ленты (шлейфа) находятся в магнитном поле; лента натянута укрепленным на пружине роликом и закреплена двумя планками; между планками на ленте помещено маленькое зеркало. Когда по ленте протекает ток, на обе части ленты действуют противоположные силы, обусловленные магнитным полем. При этом зеркало поворачивается, а отклонение отраженного от зеркала светового луча может служить мерой величины тока, протекающего по ленте. Лента и зеркало образуют осциллятор, уравнение движения которого может быть приведено к известному виду

$$x'' + 2Dx' + x = x_e, \quad (5.85)$$

где x — отклонение светового луча на регистрирующей бумаге, а x_e является мерой величины тока. Демпфирование достигается тем, что шлейф помещен в сосуд с маслом.

Прибор применяется для измерения протекающего через шлейф тока, т. е. величины x_e . Однако отклонение зеркала (соответственно светового зайчика) пропорционально величине x , которая связана с входной величиной x_e уравнением (5.85). Только при стационарных, т. е. не зависящих от времени, величинах x_e величина x также будет по истечении некоторого времени (прекращении переходного процесса) принимать стационарное значение, и только в этом слу-

чае, согласно уравнению (5.85), действительно будет выполняться равенство $x=x_e$.

В отличие от этого при всех меняющихся во времени значениях x_e показания прибора дают величину x , которая в той или иной мере отклоняется от подлежащей измерению величины x_e . В связи с этими рассуждениями возникают два вопроса:

1) каким образом в общем случае по x найти искомую величину x_e ?

2) при каких условиях x можно рассматривать как приемлемое приближение для x_e ?

На первый из указанных вопросов ответить в принципе просто: можно получить величину x_e , дважды продифференцировав измеряемую величину x , а затем из x и ее производных по времени составить выражение, стоящее в левой части уравнения (5.85). Однако нахождение производных по измеряемым кривым является весьма ненадежным делом и в общем случае может привести к значительным ошибкам. Поэтому пользоваться предложенным выше способом имеет смысл только тогда, когда дополнительные члены с производными по времени можно рассматривать лишь как малые поправки, которые добавляются к основному члену x .

Второй вопрос характеризует основную проблему техники измерения колебаний. Ее нельзя решить в общем случае, т. е. для совершенно произвольных входных функций $x_e(\tau)$, но для функций, которые либо сами являются периодическими, либо могут быть аппроксимированы периодическими функциями, можно сделать некоторые важные выводы. Для этого случая в силу принципа суперпозиции достаточно рассмотреть чисто гармоническую входную функцию

$$x_e(\tau) = x_0 \cos \eta \tau. \quad (5.86)$$

Таким образом, для уравнения (5.85), как известно, получается частное решение

$$x(\tau) = x_0 V(\eta) \cos(\eta \tau - \psi) \quad (5.87)$$

с коэффициентом усиления (5.40). Выходная величина x совпадает с входной величиной x_e , если

$$V(\eta) = 1, \quad \psi(\eta) = 0. \quad (5.88)$$

С первого взгляда на рис. 146 и 147 становится ясным, что это условие может выполняться только при $\eta=0$, т. е. при $\Omega=0$, а это соответствует «бесконечно медленному» колебанию, т. е. «стационарному» процессу.

Если условия (5.88) для колебаний с $\eta \neq 0$ выполняются нестрого, то можно добиться их приближенного выполнения с обычно достаточной для практических целей точностью, выбрав $\eta \ll 1$. Это равносильно случаю, когда $\Omega \ll \omega_0$. Таким образом, собственная час-

тота прибора должна быть много больше частот, которые желают измерить. В этом случае говорят о *квазистатическом* или же *докритическом* измерении, так как измеряемые частоты Ω лежат ниже критической собственной частоты ω_0 .

Как же выбрать коэффициент демпфирования D измеряющего прибора-осциллятора? На рис. 147 видно, что при $D \approx 0,6$ требуемое условие $V(\eta) = 1$ достаточно хорошо выполняется в интервале частот приблизительно $0 \leq \eta < 1$. Правда, при этом условии $\psi = 0$ не выполняется. Последнее условие в качестве наилучшего значения дало бы $D = 0$ (см. рис. 146), т. е. значение, которое нельзя ни реализовать, ни требовать, так как недемпфированные собственные колебания не позволили бы производить измерения. Поэтому измерительный прибор всегда выполняют с достаточным демпфированием и одновременно заботятся о том, чтобы возникающие ошибки измерения или искажения оставались как можно меньшими. Чтобы это пояснить, рассмотрим возможные искажения несколько подробнее.

Искажения при измерении колебаний, состоящих из многих гармонических составляющих, могут возникнуть, во-первых, за счет изменений отношения амплитуд составляющих колебаний (*амплитудное искажение*) и, во-вторых, за счет сдвигов их фаз, которые не пропорциональны соответствующим частотам составляющих колебаний (*фазовые искажения*). Как было указано, амплитудные искажения могут оставаться малыми, если при $D \approx 0,6$ частоты Ω_n всех составляющих колебаний меньше собственной частоты ω_0 измерительного прибора. При наличии демпфирования сдвиги фаз для составляющих колебаний, как видно на рис. 146, всегда различны. Для определения искажения используются не сами сдвиги фазы ψ , а вызываемые ими сдвиги по времени Δt . Так как $\psi : 2\pi = \Delta t : (2\pi/\eta)$, сдвиг по времени будет равен

$$\Delta t = \psi / \eta. \quad (5.89)$$

Если для всех составляющих колебаний эти сдвиги по времени одинаковы по величине, то кривые составляющих колебаний сохраняют свое относительное положение (рис. 165), так что при сложении всех составляющих колебаний снова получается в точности входная кривая, правда, со сдвигом по времени на величину Δt . Поэтому в силу (5.89) условие для отсутствия фазового искажения можно записать так:

$$\psi = \text{const} \cdot \eta, \text{ или } d\psi/d\eta = \text{const}.$$

Таким образом, из уравнения (5.38) получается

$$\frac{d\psi}{d\eta} = \frac{2D(1+\eta^2)}{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2} = \text{const}. \quad (5.90)$$

График этого выражения как функции от η приведен на рис. 166. Построенные кривые показывают, что при $D \approx 0,8$ требуемое зна-

чение постоянной может быть получено в большом диапазоне частот. Хотя это значение несколько отличается от того, которое было признано оптимальным в смысле уменьшения амплитудных искажений,

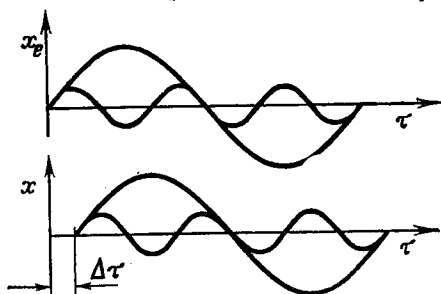


Рис. 165. Сдвиг по времени $\Delta\tau$ за счет запаздывания по фазе.

все же при коэффициентах демпфирования в интервале $0,7 < D < 0,8$ можно получить малые как амплитудные, так и фазовые искажения, в особенности если выбрать $\eta \approx 0,5$.

В качестве второго примера прибора для измерения колебаний рассмотрим виброграф, изображенный на рис. 144. Если этот при-

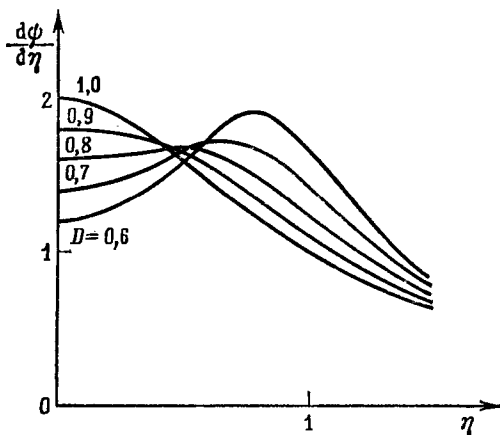


Рис. 166. К расчету фазовых искажений.

бор помещен на движущемся автомобиле, то его основание повторяет движение $x_G(\tau)$ автомобиля. В силу приведенных выше соображений для измеряемого прибором относительного отклонения x_R справедливо решение вида (5.87) с коэффициентом усиления (5.42) и сдвигом фазы (5.38). Как можно видеть на рис. 149 и 146, основополагающие условия $V(\eta)=1$ и $\psi(\eta)=0$ теперь не могут выполняться даже приближенно для большей области частот η . Следовательно, равенства

$x_R \approx x_e = x_G$ достичь нельзя. Правда, можно осуществить приближенное равенство $x_R \approx -x_e$, выбрав $\eta \gg 1$. В этом случае фазы всех составляющих колебаний сдвигаются на $\psi \approx \pi$, что равносильно изменению знака.

Неравенство $\eta \gg 1$ означает $\Omega \gg \omega_0$, т. е. работу прибора в области *сверхкритических* частот. Если это условие выполняется, то относительное движение x_R (рис. 144) представляет собой зеркальное отражение движения основания x_G . Физически это выглядит так: если осциллятор обладает низкой собственной частотой, то его масса остается приблизительно в покое, в то время как основание движется вместе с автомобилем. Таким образом, должно иметь место равенство $x = x_R + x_G \approx 0$, и поэтому $x_R \approx -x_G$.

Этот принцип измерения может применяться в том случае, если нужно замерить *амплитуду* колебаний. Он находит, например, применение в сейсмографах, предназначенных для измерения амплитуды колебаний поверхности Земли. Осуществление необходимой при этом малой собственной частоты прибора, а также изготовление достаточно эффективного демпфера являются причиной значительных конструктивных трудностей.

Приборы описанного выше типа (рис. 144) могут применяться и с докритической настройкой, т. е. при $\eta \ll 1$. Тогда они измеряют не амплитуду колебания, а *ускорение* основания во время колебаний. Это проще всего видеть из уравнения движения осциллятора, которое, как было показано в разд. 5.2.1.1, можно привести к следующему виду:

$$\ddot{x}_R + 2D\dot{x}_R + x_R = -\ddot{x}_G. \quad (5.91)$$

Это уравнение соответствует уравнению (5.85), поскольку за входную величину x_e здесь принимается взятое со знаком минус ускорение основания \ddot{x}_G . Таким образом, при докритической настройке виброграф работает как измеритель ускорения. Это легко представить себе наглядно: в случае высокой собственной частоты прибора, изображенного на рис. 144, масса «квазистатически» движется вместе с основанием и возникающие при этом силы инерции измеряются пружиной, которая при малых ее деформациях действует как измеритель силы.

Кроме упомянутых здесь типов настройки, закритической ($\eta > 1$) и докритической ($\eta < 1$), в некоторых приборах используют также настройку вблизи собственной частоты ($\eta \approx 1$). Это делается в приборах, работающих по принципу резонанса и в общем случае служащих только для определения частоты. В них используется тот факт, что при малом демпфировании ($D \ll 1$) резонансный максимум может становиться очень большим. В этом случае измерительный прибор «выбирает» из всего спектра имеющихся частот такие, которые соответствуют его собственной частоте.

Механическими приборами этого типа являются *язычковые измерители частоты*, электрическими — так называемые *волномеры*, используемые в радиотехнике.

5.3.2. Защита машин и приборов от воздействий колебаний

При защите машин и приборов от внешних колебаний различают две принципиально различные задачи: во-первых, *активное устранение колебаний*, при котором машина закрепляется на фундаменте так, чтобы ее колебания и возникающие при этом периодические силы не распространялись бы по фундаменту и соответственно по зданию в целом; во-вторых, *пассивное устранение колебаний*, которое применяется для защиты чувствительных измерительных приборов от влияния колебаний основания, на котором они установлены. Обе задачи могут быть решены при помощи упругой, т. е. способной совершать колебания, опоры машины или прибора.

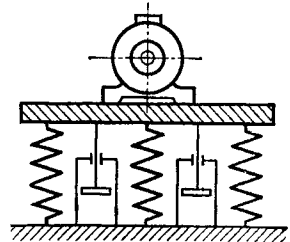


Рис. 167. Машина на упругом фундаменте.

При *активном устранении* колебаний машины последние помещаются на фундаменте из упругого материала, обладающего демпфирующими свойствами (например, резины или пробки), причем массу машины намного увеличивают за счет специально подобранных дополнительных весов. Схема подобной установки показана на рис. 167. Почти всегда имеющиеся несбалансированные массы машины (дисбаланс) порождают возмущающие силы, пропорциональные квадрату круговой частоты Ω . При равномерно работающей машине силу дисбаланса можно представить как

$$K_u = m_u \ddot{x}_u = -m_u x_0 \Omega^2 \cos \Omega t. \quad (5.92)$$

Уравнение движения, справедливое для такой возмущающей силы, уже было выведено выше (уравнение (5.34)). Оно имеет частное решение

$$x = -\kappa x_0 V_C \cos(\eta t - \psi) = -\kappa x_0 V_C \cos(\Omega t - \psi), \quad (5.93)$$

где V_C — коэффициент усиления (см. формулу (5.42)).

Теперь найдем силу K_f , с которой вибрирующая машина действует на фундамент. Сила передается от машины к фундаменту через пружины и демпфер, и поэтому

$$\begin{aligned} K_f &= cx + d\dot{x} = -c\kappa x_0 V_C \cos(\Omega t - \psi) + d\kappa x_0 V_C \Omega \sin(\Omega t - \psi) = \\ &= -\kappa x_0 V_C \sqrt{c^2 + d^2 \Omega^2} \cos(\Omega t - \psi + \vartheta), \end{aligned} \quad (5.94)$$

где

$$\operatorname{tg} \vartheta = \Omega d / c = 2D\eta.$$

Для предотвращения колебаний следует добиваться предельно возможного уменьшения действия на фундамент периодических сил, вызванных дисбалансом движущихся масс K_u . За подходящую меру

качества защиты от колебаний (добротности — *Ред.*) можно принять отношение максимальных значений действующих сил

$$\frac{K_f \max}{K_u \max} = \frac{\kappa x_0 V_c \sqrt{c^2 + a^2 \Omega^2}}{m_u x_0 \Omega^2}.$$

С учетом принятых выше обозначений это отношение можно записать в следующем виде:

$$\frac{K_f \max}{K_u \max} = \sqrt{\frac{1 + 4D^2 \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2 \eta^2}}. \quad (5.95)$$

На рис. 168 построен график этого выражения как функции η . Независимо от величины демпфирования все кривые проходят через фиксированную точку

$$\eta = \sqrt{2}, \quad K_f \max / K_u \max = 1,$$

в чем легко убедиться, подставив эти значения в (5.95). Желательно, чтобы отношение (5.95) было как можно меньше, а этого, как видно из рис. 168, можно добиться по возможности увеличивая η

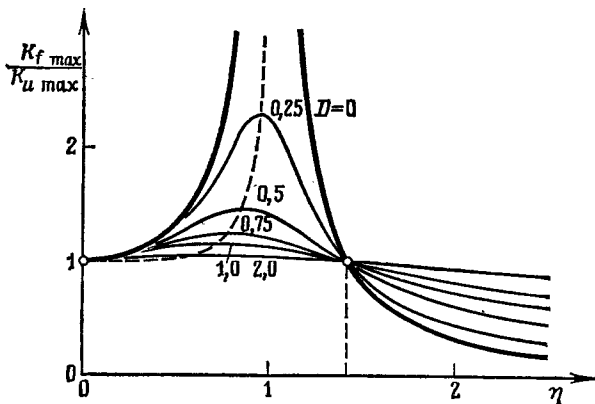


Рис. 168. К оценке эффективности упругого фундамента.

и уменьшая D . Правда, слишком малые значения D при прохождении резонансной частоты ($\eta \approx 1$) могут привести к слишком большим отклонениям. Поэтому все же попытаемся найти некоторое компромиссное решение, поскольку регулируемое демпфирование, уменьшающееся после прохождения критической частоты, осуществить нельзя.

Эти соображения можно перенести также на весьма распространенный случай, когда в машине возникает спектр колебаний с различными частотами. Тогда нужно сделать так, чтобы собственные частоты упруго поддрессоренной машины были примерно втрое меньше самой низкой частоты возмущения, создаваемого машиной.

Следует заметить, что хотя проведенные выше рассуждения и отражают существо дела, однако на практике они почти всегда нуждаются в дополнении. Так, в общем случае большинство применяемых упругих материалов не подчиняется принятым здесь простым законам; кроме того, и сам фундамент часто нельзя рассматривать как твердое тело. В особенности требуется дополнить рассуждения в том случае, когда вместо непрерывных возмущающих сил действуют разрывные ударные силы. Этой проблеме посвящена обширная специальная литература (см., например, [13]).

При *пассивном устранении* колебаний нужно различать два случая в зависимости от того, как действует демпфирование: относительным образом, т. е. на колеблющийся фундамент, или же абсолютным образом, т. е. непосредственно на здание. За схему с *относительным* демпфированием можно принять рис. 167, только на месте машины нужно теперь представить себе измерительный прибор, подлежащий защите от вибраций фундамента. Для движения осциллятора выполняется выведенное ранее уравнение (5.31), причем $x_G(\tau)$ описывает колебания фундамента. Если последнее предполагается гармоническим, то имеет место уравнение (5.32), которое при $\vartheta = 2D\eta$ можно записать следующим образом:

$$x'' + 2Dx' + x = x_0 \sqrt{1 + 4D^2\eta^2} \cos(\eta\tau + \vartheta). \quad (5.96)$$

Уравнение (5.96) соответствует ранее рассмотренному случаю А с несколько измененным коэффициентом в правой части. Решение этого уравнения имеет вид

$$x = x_0 \sqrt{\frac{1 + 4D^2\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \cos(\eta\tau + \vartheta - \psi). \quad (5.97)$$

Входящая сюда функция усиления равна полученному в формуле (5.95) отношению сил, которое представлено на рис. 168. Требование, чтобы вибрации фундамента по возможности поглощались за счет упругой подвески, приводит к уже известным условиям для настройки этой подвески: демпфирование D должно быть как можно меньшим, а частота η — как можно большей. Это снова означает, что при настройке нужно получить возможно меньшую частоту колебаний упругой подвески ω_0 . Так как для упруго подвешенного прибора, находящегося под действием собственного веса, ω_0 связана с f_0 соотношением

$$\omega_0 = \sqrt{g/f_0} \quad (5.98)$$

(см. формулу (2.68)), то на практике попытка получить низкую собственную частоту может привести к недопустимо большим значениям f_0 .

Для упругих подвесок с *абсолютным* демпфированием уравнение движения, записанное в виде

$$x'' + 2Dx' + x = x_G,$$

имеет частное решение

$$x = x_0 V_A \cos(\eta t - \psi).$$

Соответствующие амплитудные характеристики см. на рис. 147. Видно, что и в этом случае благоприятна мягкая подвеска (малая ω_0 , большая η). В отличие от предыдущего случая, где требовалось слабое демпфирование, теперь желательно иметь возможно более сильное демпфирование (большое D). Это и понятно, так как слабое абсолютное демпфирование не может гасить колебания основания прибора.

Упругие подвески применяются и для гашения импульсных воздействий. Если приборы, нуждающиеся в защите, встроены жестко,

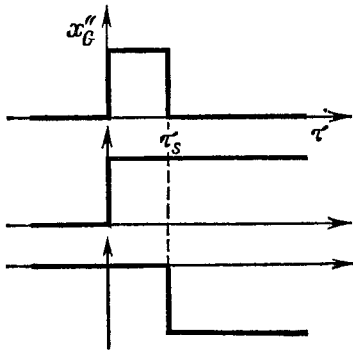


Рис. 169. Схематическое изображение кривой замедления.

то эффективного устранения колебаний часто можно достичь за счет соответствующей мягкой подвески. Напротив, требования к упругим подвескам чувствительных приборов, установленных на автомобилях, могут быть настолько жесткими, что выполнить их не всегда представляется возможным. Приведем простое соображение. Как уже было показано, относительное движение установленного на автомобиле осциллятора описывается уравнением (5.91), причем x_G'' мы можем теперь считать ускорением (соответственно замедлением) автомобиля, поскольку направление движения осциллятора совпадает с направлением движения автомобиля. Предположим, что автомобиль мгновенно тормозит, так что кривая замедления будет иметь вид, изображенный на рис. 169. Так как эту кривую можно рассматривать как сумму двух сдвинутых по времени на величину τ_0 скачков, то реакцию осциллятора можно представить в виде суммы двух переходных функций (см. разд. 5.1.1):

$$x = x_{G0}'' [x_{ii}''(\tau) - x_{ii}''(\tau - \tau_s)]. \quad (5.99)$$

Для произвольной кривой замедления реакцию осциллятора, разумеется, можно выразить через интеграл Дюамеля (5.24). При импульсных нагрузках время действия импульса τ_s в общем случае очень мало, так что можно принять $\tau_s = \omega_0 t_s \ll 2\pi$. Кроме того, в нашем приближенном анализе мы положим $D=0$. Тогда в силу уравнения (5.6)

$$x_{ii}''(\tau) = 1 - \cos \tau,$$

так что из (5.99) следует

$$x = \dot{x}_{G0} [\cos(\tau - \tau_s) - \cos \tau] = 2\dot{x}_{G0} \sin \frac{\tau_s}{2} \sin \frac{2\tau - \tau_s}{2}.$$

Поскольку $\tau_s \ll 2\pi$, приближенно можно принять

$$x \approx \dot{x}_{G0} \tau_s \sin(\tau - \tau_s/2). \quad (5.100)$$

Для характеристики упругой подвески нужно знать максимальное отклонение x_{\max} , а также максимальное ускорение \ddot{x}_{\max} . Из уравнения (5.100) получим

$$\begin{aligned} x_{\max} &= \dot{x}_{G0} \tau_s = \frac{\ddot{x}_{G0}}{\omega_0^2} \omega_0 t_s = \frac{\ddot{x}_{G0}}{\omega_0} t_s, \\ \ddot{x}_{\max} &= x_{\max} \omega_0^2 = \ddot{x}_{G0} t_s \omega_0. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Учитывая, что величина $\ddot{x}_{G0} t_s = \Delta v$ равна изменению скорости автомобиля и что значения частоты ω_0 и статического перемещения f_0 за счет собственного веса связаны соотношением (5.98), мы можем написать

$$x_{\max} = \Delta v \sqrt{f_0/g}, \quad \ddot{x}_{\max} = \Delta v \sqrt{g/f_0}. \quad (5.102)$$

Эти важные соотношения станут более наглядными, если привести числовой пример. Пусть прибор встроен таким образом, что статическое отклонение в направлении движения осциллятора составляет $f_0 = 1$ см. Прибор свободно падает с высоты 1 м по закону свободного падения и достигает скорости $v = 4,47$ м/с. При ударе эта скорость в течение очень короткого времени убывает до нуля. Тогда формулы (5.102) дают значения $x_{\max} = 14,3$ см и $\ddot{x}_{\max} = 140$ м/с² $\approx 14,3$ g! Таким образом, хотя упругая подвеска должна допускать длинный ход пружины, равный 14,3 см, в приборе все еще имеет место ускорение, в 14 раз большее ускорения свободного падения.

Хочется к тому же подчеркнуть, что увеличение демпфирования качественно ничего не меняет в этом результате. Другая кривая зависимости ускорения от времени также не оказывает никакого влияния, так как мерилом служит не ускорение, а вызываемое им изменение скорости. Таким образом, для прибора совершенно безразлично, происходит ли жесткий удар или удар несколько смягчается подвеской.

5.3.3. Настройка, избирательность и искажения в радиотехнике

Осцилляторы с малым демпфированием обладают свойством избирательности, так как они могут выделять из спектра колебаний различной частоты колебания, близкие к их собственной частоте. Это свойство используется в уже упоминавшихся выше резонансных частотомерах. Аналогичным образом в радиотехнике из множества принимаемых антенной колебаний различных частот выделяются колебания, поступающие от определенного передатчика. Используемая для этого схема показана на рис. 170. За входную величину можно принять напряжение на антенне, а за выходную величину —

сеточное напряжение. Выходной спектр получается из входного спектра умножением на коэффициент усиления (см. формулу (5.75)). В случае малого демпфирования он имеет четко выраженный максимум при собственной частоте контура настройки, вследствие чего колебания антенного контура, соответствующие этой частоте, передаются с наибольшим усилением, а остальные — с много меньшим, т. е. отфильтровываются.

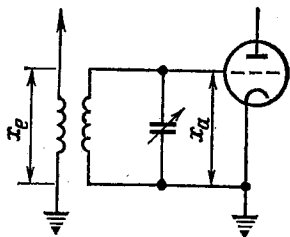


Рис. 170. Схема контура настройки радиоприемника.

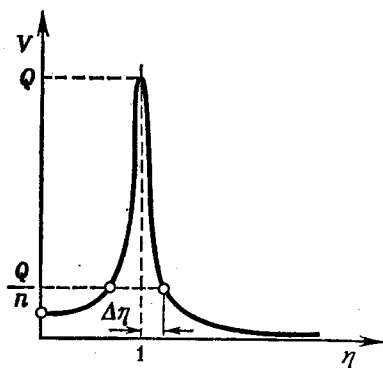


Рис. 171. К расчету избирательности.

Теперь определим величину демпфирования, к которой следует стремиться, чтобы, с одной стороны, добиться достаточного разделения (избирательности) между близкими по частоте передатчиками и, с другой стороны, по возможности уменьшить искажения при воспроизведении колебаний нужного нам передатчика. Эти два требования ведут к различным условиям для коэффициента демпфирования D .

Рассмотрим коэффициент усиления

$$V_A = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

и предположим, что $D \ll 1$. Тогда резонансная кривая (рис. 171) имеет максимум при $\eta \approx 1$, соответствующий значению

$$V_{A \max} = 1/(2D) = Q. \quad (5.103)$$

Вместо коэффициента демпфирования D в радиотехнике применяется безразмерная добротность Q настроенного контура, которая, согласно формуле (5.103), обратно пропорциональна величине D . Приемник обладает достаточной избирательностью, если при настройке на нужный передатчик ($\Omega_0 = \omega_0$, $\eta = 1$) ординаты точек резонансной кривой (рис. 171), соответствующие близким по частоте передатчикам, достаточно малы. Если достаточным считается сни-

жение усиления для близких частот на n -ю часть максимального значения Q , то колебательный контур как бы отсекает такие передатчики, относительная частота которых отличается от частоты нужного передатчика на $\Delta\eta$ (см. рисунок). В этом случае

$$V_A(1 + \Delta\eta) = \frac{Q}{n} = \frac{1}{2Dn} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}},$$

откуда получается квадратное уравнение для η^2

$$\eta^4 - 2(1 - 2D^2)\eta^2 + 1 - 4n^2D^2 = 0,$$

имеющее решение

$$\eta_{1,2} = \sqrt{1 - 2D^2 \pm 2D\sqrt{n^2 - 1 + D^2}}. \quad (5.104)$$

При $D \ll 1$ можно приближенно принять

$$\eta_{1,2} \approx \sqrt{1 \pm 2D\sqrt{n^2 - 1}},$$

или

$$\Delta\eta = |1 - \eta_{1,2}| \approx D\sqrt{n^2 - 1}. \quad (5.105)$$

Если относительная частота соседних передатчиков отличается от частоты нужного передатчика на $(\Delta\eta)_s$, то для достаточной избирательности необходимо, чтобы

$$D \leq (\Delta\eta)_s / \sqrt{n^2 - 1}. \quad (5.106)$$

Если, например, $(\Delta\eta)_s = 5\% = 0,05$ и требуется, чтобы $n > 5$, то должно выполняться неравенство $D < 0,01$ и соответственно $Q > 50$. Подобные значения D и Q можно осуществить в электрических колебательных контурах без особых затруднений.

Чем меньше демпфирование, тем лучше избирательность. Однако уменьшение демпфирования связано не только с трудностями подбора материала омического сопротивления контура: и по принципиальным соображениям D не должно быть слишком малым. Слишком малое D может явиться причиной искажений при приеме передачи. Ведь передатчик излучает не чисто гармонические колебания, а лишь близкие к гармоническим колебания с *несущей частотой* Ω_0 , амплитуда которых (при амплитудной модуляции) меняется с *частотой модуляции* Ω_m (и соответственно смешиваются колебания различных частот). Поэтому входную величину x_e можно выразить следующим образом:

$$x_e = x_0(1 - k \cos \Omega_m t) \cos \Omega_0 t, \quad (5.107)$$

где $k < 1$ — так называемая *глубина модуляции*. При помощи известных тригонометрических формул выражение (5.107) можно

преобразовать к виду

$$x_e = x_0 \cos \Omega_0 t - (x_0 k/2) [\cos (\Omega_0 + \Omega_m) t + \cos (\Omega_0 - \Omega_m) t]. \quad (5.108)$$

Спектр входного сигнала x_e содержит не только несущую частоту Ω_0 , но и обе боковые частоты $\Omega_0 - \Omega_m$ и $\Omega_0 + \Omega_m$ и имеет вид, изображенный на рис. 172.

Чтобы не было искажений при приеме, все боковые частоты при обычной передаче должны приходиться на вершину резонансной кривой. Поэтому при расчетах мы можем поступать аналогично

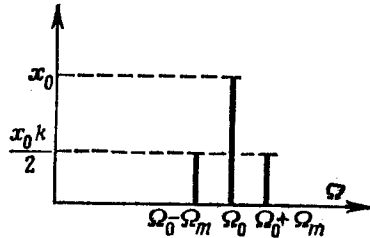


Рис. 172. Спектр модулированного колебания.

тому, как это делалось ранее при определении избирательной способности, однако с тем отличием, что теперь для боковых частот требуется не достаточно большое, а наоборот, достаточно малое ослабление амплитуды. Если теперь коэффициент ослабления обозначить через m (вместо принятого ранее n), то вместо условия (5.106) получится условие

$$D \geq (\Delta\eta)_m / \sqrt{m^2 - 1}, \quad (5.109)$$

где $(\Delta\eta)_m$ — относительная ширина полосы пропускания частот бокового спектра.

Возьмем, например, несущую частоту, равную $\Omega = 1$ МГц (средние волны). Для нормальной радиопередачи достаточно иметь частоту модуляции (частоту звуковых колебаний) примерно до 10 кГц, что дает значение $(\Delta\eta)_m = 0,01$. Если теперь принять коэффициент ослабления m равным 1,2, то из (5.109) получится $D > 0,015$.

Оба приведенных числовых примера показывают, что в общем случае нужно искать решение, которое обеспечивало бы как приемлемую избирательность, так и достаточную малость искажений. Следует указать, однако, что в практике радиотехники вместо простого контура настройки, изображенного на рис. 170, применяют цепочку связанных контуров (фильтров) со сравнительно близкими собственными частотами, что приводит к столбобразной резонансной кривой.

5.4. Вынужденные колебания нелинейных осцилляторов

Математическое описание движения нелинейных осцилляторов, подвергающихся внешним возмущениям, — задача достаточно трудная, и в настоящее время она решена только для немногих

частных случаев. Трудность ее обусловлена главным образом тем, что для нелинейных систем неприменим принцип суперпозиции, и поэтому получение полного решения сложением отдельных решений, столь удобное для линейных осцилляторов, теперь уже недопустимо. Это означает также, что результирующее движение (общее решение) не получается простым суммированием собственных колебаний (общего решения однородного уравнения) и вынужденных колебаний (частного решения неоднородного уравнения).

Использование переходных функций в нелинейных системах также теряет смысл, так как их больше нельзя рассматривать как элементы, из которых строятся более общие решения. Кроме того, теперь переходная функция не может быть определена в таком общем виде, как это имело место в линейных системах.

В линейных системах величина входного возмущения не оказывала никакого влияния на вид переходной функции. Нелинейные системы не обладают этим свойством, и поэтому каждому значению амплитуды входного возмущения соответствует своя переходная функция.

Как и в линейных системах, в данном случае особый интерес представляют периодические решения. Это основывается не только на сравнительной простоте математического анализа таких решений, но и прежде всего на несомненно большом значении, которое имеют подобные формы движения в технике.

К приближенному описанию движения нелинейных систем можно приступить, располагая уже применявшимися ранее способами, которые мы напомним лишь вкратце, хотя и приведем пример использования приближенных методов в задаче, имеющей точное решение. В дальнейших примерах мы дадим более общий обзор возможных в нелинейных системах явлений, так как оказывается, что наряду с уже известными по линейным системам явлениями в нелинейных системах могут проявляться многочисленные новые *нелинейные эффекты*, важные с технической точки зрения. Среди многого другого сюда относятся: возникновение неустойчивости форм движения, скачки амплитуды и фазы, высокочастотные колебания, субгармоническое возмущение, комбинационные частоты, выпрямленные воздействия, явления затягивания. Здесь приводится лишь поверхностное описание этих явлений, подробные же сведения о них можно найти в специальной литературе (см., например, [10, 16, 19]).

5.4.1. Постановка задачи и возможности ее решения

Ранее не раз рассматривалось уравнение движения нелинейного осциллятора с одной степенью свободы — см., например, уравнение (3.2). Здесь нам нужно лишь дополнить это уравнение зависящим от времени возмущающим членом в правой части:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = x_e(t). \quad (5.110)$$

Исследование решения этого уравнения на фазовой плоскости, целесообразное, например, в случае автоколебаний (разд. 3.2.1), теперь хотя и возможно, но менее эффективно и более трудоемко, так как время входит в явном виде в возмущающий член.

Энергетический подход к решению здесь также несколько утрачивает свое значение. Однако он может оказаться полезным при отыскании приближенных решений, и поэтому его следует напомнить: представив функцию $f(x, \dot{x})$ в виде (3.5), как в разд. 3.2.1, имеем

$$f(x, \dot{x}) = f(x, 0) + [f(x, \dot{x}) - f(x, 0)] = f(x, 0) + g(x, \dot{x}).$$

Тогда, умножив уравнение (5.110) на \dot{x} и почленно проинтегрировав по времени, можно получить энергетическое соотношение

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x f(x, 0) dx + \int_0^t g(x, \dot{x}) x dt = \int_0^t x_e(t) \dot{x} dt + E_0, \quad (5.111)$$

или

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_D = E_e + E_0.$$

Кроме кинетической и потенциальной энергии, а также энергетической постоянной E_0 , в это соотношение входят поглощаемая демпфированием энергия E_D и подводимая возмущением энергия E_e . Так как последние зависят и от времени, описание колебательного процесса нельзя получить только из (5.111), как это было сделано в разд. 2.1.3.1 при описании нелинейных собственных колебаний консервативных систем. Однако можно высказать некоторые соображения и о чисто периодических решениях. А именно, если проинтегрировать уравнение энергии за один полный период, то первые два слагаемых в (5.111) и постоянная E_0 исчезнут, так что останется соотношение

$$E_D^* = \int_0^T g(x, \dot{x}) \dot{x} dt = \int_0^T x_e(t) \dot{x} dt = E_e^*, \quad (5.112)$$

т. е. математическое выражение равенства между подводимой и поглощаемой энергией. Если известна форма колебаний, то это выражение можно применить для определения амплитуды. Но форма колебаний, т. е. закон изменения амплитуды по времени $x(t)$, должна быть найдена из решения уравнения движения. Тем не менее уравнение энергетического баланса (5.112) позволяет сделать ценные выводы, поскольку для $x(t)$ здесь можно принять приемлемое выражение, например гармоническое колебание. Наконец, указанный здесь приближенный метод приводит к удовлетворению уравнения движения «в среднем», о чем уже говорилось в разд. 3.2.3.

Если нелинейная функция $f(x, \dot{x})$ квазилинейна, т. е. зависимость от обеих переменных x и \dot{x} носит почти линейный характер, то часто оказывается предпочтительным метод разложения в ряд Тейлора. В этом случае уравнение (5.110) при $f(0, 0) = 0$ переходит в следующее:

$$\ddot{x} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \dot{x}} \right)_0 \dot{x} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 x = x_e(t) - R[f(x, \dot{x})], \quad (5.113)$$

где $R[f(x, \dot{x})]$ — остаточный член разложения. Для квазилинейных функций этот остаточный член является малым, так что его можно рассматривать как дополнительное возмущение. Тогда уравнение (5.113) допускает решение методом итераций, причем в первом приближении дополнительным возмущением можно пренебречь. Можно также представить возмущение в виде суммы

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n x_n, \quad (5.114)$$

причем ε является «малым параметром», который имеет такой же порядок малости, как и остаточный член R в (5.113). После подстановки (5.114) в (5.113) уравнение движения распадается на систему уравнений, служащих для последовательного определения x_n . При удачно выбранном ряде (5.114) достаточно точное решение можно получить вычислением небольшого числа членов ряда, однако доказательство сходимости ряда в общем случае оказывается весьма трудным.

Для исследования вынужденных колебаний нелинейных систем весьма часто применяются также методы, в принципе эквивалентные уже многократно использовавшемуся методу гармонического баланса. При этом нелинейная функция $f(x, \dot{x})$ заменяется линейным по x и \dot{x} выражением

$$f(x, \dot{x}) \rightarrow a^*x + b^*\dot{x}, \quad (5.115)$$

в котором коэффициенты a^* и b^* находятся при помощи интегрального преобразования (см. формулы (3.15) в разд. 3.2.2). При этом исходное уравнение (5.110) переходит в линейное уравнение

$$\ddot{x} + b^*\dot{x} + a^*x = x_e(t), \quad (5.116)$$

решение которого исследовалось в предыдущем разделе. Его отличие от уравнения для линейного осциллятора состоит в том, что коэффициенты a^* и b^* являются функциями амплитуды колебаний. Если их считать постоянными или приблизительно постоянными, то метод в общем случае дает чрезвычайно хорошие результаты.

5.4.2. Гармоническое возмущение недемпфированного осциллятора с разрывной восстанавливающей силой

В разд. 2.1.3.5 были исследованы собственные колебания нелинейного осциллятора с восстанавливающей силой $f(x) = h \operatorname{sign} x$. Теперь мы рассмотрим вынужденные колебания этого же осциллятора, порожденные гармоническими возмущающими силами. При отсутствии демпфирующих сил уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} + h \operatorname{sign} x = x_0 \cos \Omega t. \quad (5.117)$$

5.4.2.1. Точные решения для равнопериодических колебаний. Так как восстанавливающая сила кусочно постоянна, уравнение (5.117) можно проинтегрировать, после чего получится

$$\dot{x} = C_1 \mp ht + \frac{x_0}{\Omega} \sin \Omega t, \quad (5.118)$$

$$x = C_2 + C_1 t \mp \frac{1}{2} ht^2 - \frac{x_0}{\Omega^2} \cos \Omega t, \quad (5.119)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования. Знак минус ставится при $x > 0$, знак плюс — при $x < 0$. Будем ожидать, что возможны периодические решения с периодом, равным периоду возмущения, при которых колебания в областях $x > 0$ и $x < 0$ являются зеркальными отражениями. Если t_0 и t_1 — точки, в которых $x(t)$ принимает нулевое значение и которые ограничивают область $x > 0$, то периодические решения можно искать из условий

$$x(t_0) = x(t_1) = 0, \quad (5.120)$$

$$\dot{x}(t_0) = -\dot{x}(t_1). \quad (5.121)$$

Таким образом, для определения трех неизвестных величин C_1 , C_2 и t_0 получаются три уравнения. Предполагая, что период функции $x(t)$ равен периоду возмущения, имеем $t_1 = t_0 + T/2 = t_0 + \pi/\Omega$. Подставляя решение (5.119) в условия (5.120) и (5.121), после простых преобразований находим, что t_0 должно удовлетворять условию $\cos \Omega t_0 = 0$, и в итоге получим

$$t_0 = \frac{\pi}{2\Omega}, \quad \frac{3\pi}{2\Omega}, \quad \frac{5\pi}{2\Omega}, \quad \dots \quad (5.122)$$

Если из этих значений использовать сначала первое, то постоянные интегрирования будут равны

$$C_1 = h\pi/\Omega, \quad C_2 = -3\pi^2 h/(8\Omega^2).$$

Вместе с этим мы получим удовлетворяющее условиям периодичности (5.120) и (5.121) решение

$$x(t) = -\frac{3\pi^2 h}{8\Omega^2} + \frac{h\pi}{\Omega} t - \frac{h}{2} t^2 - \frac{x_0}{\Omega^2} \cos \Omega t, \quad (5.123)$$

которое, как легко установить подстановкой $t=t_0+\Delta t$, при $t_0 < t < t_1$ соответствует $x > 0$. Таким образом, в общем решении (5.119) следует взять относящийся к области $x > 0$ знак минус.

Теперь найдем зависимость максимального отклонения (амплитуды) от частоты возмущения. Положение максимума определяется из условия

$$\dot{x} = \frac{h\pi}{\Omega} - ht + \frac{x_0}{\Omega} \sin \Omega t = 0.$$

Легко видеть, что решением этого уравнения, находящимся в рассматриваемой области, является $t=t^*=\pi/\Omega$. Для собственно максимального отклонения находим

$$x_{\max} = A = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{\pi^2 h}{8} + x_0 \right). \quad (5.124)$$

Тем самым амплитуда колебания становится известной. Фаза легко находится из условия, что возмущающая функция $\cos \Omega t$ в рассматриваемой здесь области $\Omega t_0 = \pi/2 < \Omega t < \Omega t_1 = 3\pi/2$ имеет отрицательные значения. Так как $x > 0$, то колебания имеют относительно возмущения сдвиг по фазе, равный $\psi = \pi = 180^\circ$, т. е. находятся в *противофазе* (антифазные колебания).

Если взять второе значение t_0 из (5.122), т. е. положить $t_0 = 3\pi/(2\Omega)$, то получатся колебания в той же фазе, что и возмущающая функция (синфазные колебания). В этом случае постоянные интегрирования равны

$$C_1 = 2\pi h/\Omega, \quad C_2 = -15\pi^2 h/(8\Omega^2)$$

и решение имеет вид

$$x(t) = -\frac{15\pi^2 h}{8\Omega^2} + \frac{2\pi h}{\Omega} t - \frac{h}{2} t^2 - \frac{x_0}{\Omega^2} \cos \Omega t. \quad (5.125)$$

Как и ранее в общем решении (5.119), здесь взят знак минус. Правда, в отличие от рассмотренного перед этим случая теперь должно выполняться некоторое дополнительное условие. Подставляя $t=t_0+\Delta t$, находим

$$x(t_0 + \Delta t) = \Delta t \left(\frac{h\pi}{2\Omega} - \frac{x_0}{\Omega} \right).$$

Если теперь $x > 0$, то амплитуда возмущения не должна быть слишком велика:

$$x_0 < \pi h/2. \quad (5.126)$$

Предполагая, что это условие выполняется, получаем максимальное отклонение при $t=t^*=2\pi/\Omega$, равное

$$x_{\max} = A = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{\pi^2 h}{8} - x_0 \right). \quad (5.127)$$

Полученные в обоих случаях решения можно объединить:

$$A = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{\pi^2 h}{8} \mp x_0 \right), \quad (5.128)$$

причем верхний знак относится к синфазному, а нижний — к антифазному движению. «Резонансная кривая», соответствующая формуле (5.128), построена на рис. 173. Штриховая ветвь представляет

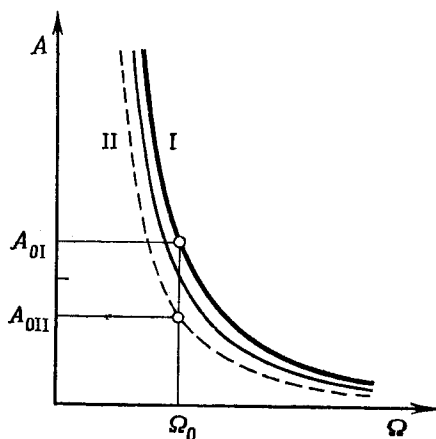


Рис. 173. Резонансная кривая нелинейного осциллятора с разрывной восстанавливающей силой.

синфазную, а толстая сплошная — антифазную форму колебаний. В дальнейшем мы увидим, что только антифазная ветвь соответствует устойчивому периодическому движению.

Следует заметить, что при $x_0 \rightarrow 0$ получается гипербола, изображенная тонкой линией и расположенная между обеими ветвями. Она показывает зависимость между амплитудой и частотой собственных колебаний. Действительно, в силу равенства (2.100) при $m=1$ имеем

$$A = \frac{T^2 h}{4^2 2} = \frac{4\pi^2 h}{32\Omega^2} = \frac{\pi^2 h}{8\Omega^2}. \quad (5.129)$$

5.4.2.2. Сравнение точного и приближенного решений. Решим уравнение движения (5.117) также приближенным методом гармонического баланса. Для этого прежде всего заменим нелинейную функцию $f(x) = h \operatorname{sign} x$ линейным выражением $f(x) \rightarrow a^* x$, где, согласно первой формуле (3.15),

$$a^* = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} h \operatorname{sign}(A \cos \Omega t) \cos \Omega t d(\Omega t) = \frac{4h}{\pi A}. \quad (5.130)$$

Теперь уравнение движения (5.117) можно заменить приближенным уравнением

$$\ddot{x} + a^*x = \ddot{x} + \omega^2x = x_0 \cos \Omega t. \quad (5.131)$$

Зависящий от амплитуды коэффициент a^* равен квадрату собственной частоты ω осциллятора, которая зависит теперь от амплитуды. Напомним, что эта приближенно найденная собственная частота отличается от частоты, полученной ранее точным способом, примерно на 1,6% (см. формулы (2.100) и (2.112)).

Для отыскания периодических решений уравнения (5.131) положим $x = \pm A \cos \Omega t$, причем знак плюс соответствует синфазному, а знак минус — антифазному движению. Подстановка этого выражения в (5.131) дает условие

$$\cos \Omega t [\pm A (\omega^2 - \Omega^2) - x_0] = 0,$$

которое выполняется для произвольных значений времени t только тогда, когда

$$A = \frac{\pm x_0}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Но так как ω^2 сама является функцией амплитуды A , то

$$A (\omega^2 - \Omega^2) = A \left(\frac{4h}{\pi A} - \Omega^2 \right) = \frac{4h}{\pi} - A\Omega^2 = \pm x_0, \quad (5.132)$$

или

$$A = \frac{1}{\Omega^2} \left(\frac{4h}{\pi} \mp x_0 \right). \quad (5.133)$$

Это приближенное решение отличается от точного решения (5.128) только числовым коэффициентом $4/\pi$ (вместо $\pi^2/8$). Указанные коэффициенты различаются на 3,4%. Так как в данном случае точное значение собственной частоты известно (из формулы (2.100) следует, что $\omega^2 = \pi^2 h / (8A)$), при определении амплитуды даже можно было бы подставить это значение в равенство (5.132) и получить точное решение. Этот результат заслуживает особого внимания, ибо в исследованном здесь осцилляторе восстанавливающая сила весьма далека от линейной.

5.4.2.3. Устойчивость периодических решений. Устойчивость вынужденных колебаний линейного осциллятора могла быть доказана еще в разд. 5.2.1.3 при помощи энергетических соображений. Сравнивая работу возмущающего воздействия с рассеиваемой в осцилляторе энергией (см. рис. 151), можно было показать, что при определенной стационарной амплитуде A_s достигается равенство подводимой и потребляемой энергий. При отклонении от равновесного состояния осциллятор движется таким образом, что это откло-

нение уменьшается и снова достигается равновесное состояние. Такое поведение осциллятора характеризует устойчивость рассматриваемого равновесного состояния.

Совершенно аналогично можно исследовать поведение нелинейного осциллятора, совершающего вынужденные колебания и выведенного из равновесного состояния. При этом будем исходить из соотношения (5.112), представляющего собой выражение баланса энергии. В данном случае силы демпфирования отсутствуют, так что $g(x, \dot{x})=0$ и остается исследовать лишь правую часть равенства (5.112). Взяв возмущающую функцию в виде

$$x_e(t) = x_0 \cos \Omega t$$

и воспользовавшись решением (5.118), энергию, подводимую к осциллятору за счет возмущения, можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} E_e &= x_0 \int \cos \Omega t \left[C_1 \mp ht + \frac{x_0}{\Omega} \sin \Omega t \right] dt = \\ &= \frac{x_0}{\Omega} \left[C_1 \sin \Omega t \mp \frac{h}{\Omega} (\Omega t \sin \Omega t + \cos \Omega t) + \frac{x_0}{4\Omega} (1 - \cos 2\Omega t) \right]. \end{aligned} \quad (5.134)$$

Так как исследуемые здесь колебания симметричны относительно оси абсцисс, достаточно исследовать, например, одну лишь положительную область. Тогда за пределы интегрирования следует принять t_0 и t_1 , а перед вторым слагаемым, стоящим в квадратных скобках, взять знак минус. Подставляя соответствующие значения:

для антифазных колебаний

$$C_1 = \frac{\pi h}{\Omega}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2\Omega}, \quad t_1 = \frac{3\pi}{2\Omega},$$

для синфазных колебаний

$$C_1 = \frac{2\pi h}{\Omega}, \quad t_0 = \frac{3\pi}{2\Omega}, \quad t_1 = \frac{5\pi}{2\Omega},$$

легко установить, что для обеих форм колебаний сохраняется энергетический баланс, т. е. выполняется равенство

$$E_e^* = 2[E_e(t_1) - E_e(t_0)] = 0.$$

Теперь рассмотрим энергетический баланс для возмущенного движения, близкого к стационарному, и возьмем постоянную интегрирования в виде

$$C_1^* = C_1 + \varepsilon, \quad (5.135)$$

где ε — малое возмущение. При этом условия периодичности (5.120) и (5.121) уже не выполняются, однако уравнение движения

(5.117) остается справедливым. Изменение постоянной C_1 приводит теперь к тому, что границы положительной области $x > 0$ несколько сдвигаются, а пределы интегрирования становятся равными

$$t_0^* = t_0 + (\Delta t)_0, \quad t_1^* = t_1 + (\Delta t)_1. \quad (5.136)$$

Изменение интеграла энергии E_e^* по сравнению со значением (5.134), полученным для установившегося движения, вызывается, во-первых, изменением скорости \dot{x} за счет введения новой постоянной интегрирования (5.135) и, во-вторых, изменением пределов интегрирования согласно (5.136). Если возмущение ε , а вместе с ним и величины $(\Delta t)_0$, $(\Delta t)_1$ считать малыми, то изменения, обусловленные смещением пределов интегрирования, взаимно компенсируются. Произведя необходимые вычисления, получим

$$E_e^* = 2[E_e(t_1^*) - E_e(t_0^*)] = \begin{cases} -4\varepsilon x_0/\Omega & \text{для антифазного} \\ & \text{колебания,} \\ +4\varepsilon x_0/\Omega & \text{для синфазного} \\ & \text{колебания.} \end{cases} \quad (5.137)$$

Теперь рассмотрим влияние возмущения ε на амплитуду колебаний. Прежде всего можно установить, что происходит небольшое изменение положения максимума $x(t)$, так что можно принять $t_{\max}^* = t_{\max} + (\Delta t)_{\max}$. Как и следует ожидать, малое смещение и в этом случае не сказывается на величине максимума, так что вычислять $(\Delta t)_{\max}$ не требуется. Для возмущенного антифазного колебания из (5.123) с учетом возмущения (5.135) получаем

$$x_{\max}^* = -\frac{3\pi^2 h}{8\Omega^2} + \left(\frac{\pi h}{\Omega} + \varepsilon\right) t_{\max}^* - \frac{h}{2} t_{\max}^{*2} - \frac{x_0}{\Omega^2} \cos \Omega t_{\max}^*.$$

Но так как

$$t_{\max}^* = t_{\max} + (\Delta t)_{\max} = \pi/\Omega + (\Delta t)_{\max}$$

и $\Omega(\Delta t)_{\max} \ll 1$, отсюда следует

$$x_{\max}^* = x_{\max} + \pi\varepsilon/\Omega. \quad (5.139)$$

Аналогичным образом из (5.125) для возмущенного синфазного колебания получаем

$$x_{\max}^* = -\frac{15\pi^2 h}{8\Omega^2} + \left(\frac{2\pi h}{\Omega} + \varepsilon\right) t_{\max}^* - \frac{h}{2} t_{\max}^{*2} - \frac{x_0}{\Omega^2} \cos \Omega t_{\max}^*,$$

что при

$$t_{\max}^* = t_{\max} + (\Delta t)_{\max} = 2\pi/\Omega + (\Delta t)_{\max}$$

равно

$$x_{\max}^* = x_{\max} + 2\pi\varepsilon/\Omega. \quad (5.140)$$

Таким образом, положительное возмущение ϵ для обеих форм колебаний приводит к увеличению амплитуды. Так как для антифазного колебания подводимая энергия E_ϵ^* , согласно (5.137), отрицательна, т. е. энергия отбирается, амплитуда уменьшается. Поэтому колебания после возмущения снова стремятся к равновесному состоянию и являются устойчивыми.

Совсем иначе происходят колебания при синфазном возмущении. При таком возмущении, приводящем к увеличению амплитуды, от него поступает еще больше энергии. За счет этого амплитуда все более возрастает, так что колебания все больше удаляются от равновесного состояния. Одинаковым образом происходят колебания и при $\epsilon < 0$, при этом также можно обнаружить тенденцию к удалению от равновесного состояния. Поэтому колебания при синфазном возмущении являются неустойчивыми.

5.4.3. Гармоническое возмущение демпфированных нелинейных осцилляторов

5.4.3.1. **Линейное демпфирование и жесткая восстанавливающая сила.** Подставим в исходное уравнение (5.110) следующие функции:

$$x_\epsilon(t) = \omega_0^2 x_0 \cos \Omega t, \quad f(x, \dot{x}) = d\dot{x} + \omega_0^2(x + \alpha x^3).$$

Если ввести безразмерное время $\tau = \omega_0 t$, то уравнение движения примет следующий вид:

$$x'' + 2Dx' + x + \alpha x^3 = x_0 \cos \eta \tau. \quad (5.141)$$

Решим уравнение (5.141) приближенным образом, и для этого, согласно методу гармонического баланса, заменим жесткую восстанавливающую силу αx^3 линейным выражением с коэффициентом, зависящим от отклонения:

$$\alpha x^3 \rightarrow a^* x,$$

где

$$a^* = \frac{\alpha}{\pi A} \int_0^{2\pi} A^3 \cos^4 \eta \tau d(\eta \tau) = \frac{3\alpha A^3}{4}. \quad (5.142)$$

Если теперь ввести относительную собственную частоту осциллятора η_A , также зависящую от отклонения, положив

$$1 + a^* = 1 + \frac{3}{4} \alpha A^2 = \eta_A^2, \quad (5.143)$$

то уравнение (5.141) приведет к виду

$$x'' + 2Dx' + \eta_A^2 x = x_0 \cos \eta \tau. \quad (5.144)$$

Периодическим решением этого линейного уравнения будет

$$x = A \cos(\eta \tau - \psi),$$

где

$$A = x_0 V_A = \frac{x_0}{\sqrt{(\eta_A^2 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad (5.145)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2D\eta}{\eta_A^2 - \eta^2}. \quad (5.146)$$

В отличие от ранее рассмотренного случая величина η_A теперь зависит от амплитуды A , так что равенство (5.145) следует рассматривать как уравнение для A :

$$A^2 [(\eta_A^2 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2] = x_0^2. \quad (5.147)$$

Поскольку, согласно формуле (5.143), η_A^2 меняется как A^2 , (5.147) является кубическим уравнением относительно A^2 . Его решение дало бы зависимость амплитуды A от относительной частоты возмущения η . Однако в этом случае целесообразнее найти зависимость частоты от амплитуды $\eta = \eta(A)$, так как относительно η^2 (5.147) представляет собой квадратное уравнение и может быть решено элементарно. После подстановки (5.143) в уравнение (5.147) последнее переходит в

$$\eta^4 - 2 \left(1 + \frac{3\alpha A^2}{4} - 2D^2 \right) \eta^2 + \left[\left(1 + \frac{3\alpha A^2}{4} \right)^2 - \frac{x_0^2}{A^2} \right] = 0.$$

Решением этого уравнения будет

$$\eta_{1,2}^2 = \left(1 + \frac{3\alpha A^2}{4} - 2D^2 \right) \pm \sqrt{\frac{x_0^2}{A^2} - 4D^2 \left(1 + \frac{3\alpha A^2}{4} - D^2 \right)}. \quad (5.148)$$

Отсюда для каждого A можно найти соответствующее значение η . В зависимости от величины входящих в это уравнение параметров может быть два, одно или же ни одного действительного решения для η . Однако здесь мы не будем вдаваться в обсуждение возможностей решения, а лишь заметим, что построенные согласно (5.148) резонансные кривые оказываются гораздо разнообразнее, чем в случае линейных систем. Здесь кроме коэффициента демпфирования D существенное влияние оказывают величины α и x_0 . Амплитуда возмущения x_0 практически не влияла на поведение линейных систем. В то же время поведение нелинейных систем самым существенным образом зависит от амплитуды x_0 и эту зависимость нужно рассмотреть подробно.

Исследуем некоторые характерные свойства резонансных кривых нелинейных систем. Два семейства кривых такого рода представлены на рис. 174 и 175, причем рис. 174 соответствует $\alpha > 0$, а рис. 175 — $\alpha < 0$. Сравним эти кривые с семейством кривых для линейного случая (рис. 147). Нелинейность, выраженная коэффициентом α , вызывает изгиб пиков отдельных резонансных кривых. При $\alpha > 0$ пики изгибаются вправо, т. е. в направлении больших зна-

чений η , а при $\alpha < 0$ — влево, т. е. в направлении меньших значений η . Следствием этих изгибов является существование областей частот η , в которых некоторому фиксированному значению η соответствуют три значения амплитуды A , т. е. три возможных решения уравнения (5.147).

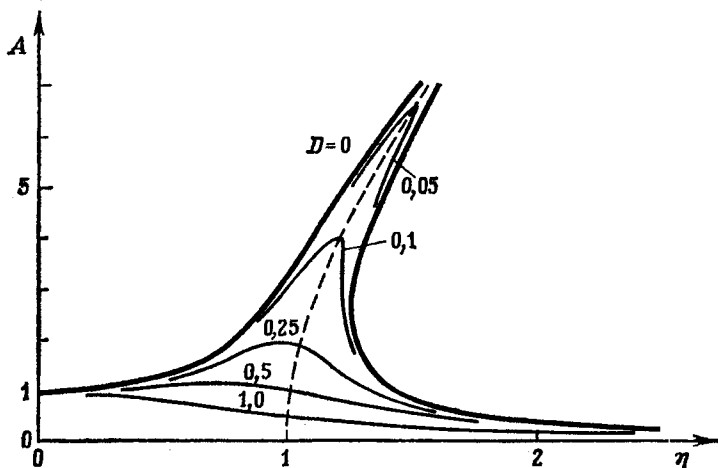


Рис. 174. Резонансные кривые нелинейного осциллятора с кубической восстанавливающей силой при $\alpha = +0,04$.

Максимумы изогнутых резонансных кривых определить нетрудно. Для этого нужно лишь найти кратный корень η^2 уравнения (5.148), т. е. условие того, что подкоренное выражение обращается в нуль. Это условие дает квадратное уравнение для A^2 , решением которого будет

$$A_{\max}^2 = -\frac{2(1-D^2)}{3\alpha} \pm \sqrt{\frac{4(1-D^2)^2}{9\alpha^2} + \frac{x_0^2}{3\alpha D^2}}. \quad (5.149)$$

Соответствующее значение η получается по формуле (5.148):

$$\begin{aligned} \eta_{\max}^2 &= 1 + \frac{3\alpha A_{\max}^2}{4} - 2D^2 = \\ &= 1 + \frac{1-D^2}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{3\alpha x_0^2}{4D^2(1-D^2)^2}} - 1 \right] - 2D^2. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Фазовые характеристики рассматриваемой системы также существенно отличаются от фазовых характеристик линейной системы. На рис. 176 и 177 изображены фазовые характеристики, соответствующие рис. 174 и 175. Они определяются формулой (5.146) с учетом

(5.143):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2D\eta}{1 + 3/4\alpha A^2 - \eta^2}, \quad (5.151)$$

причем, конечно, нужно учитывать зависимость амплитуды от частоты $A(\eta)$.

Замечательное явление, типичное для нелинейных систем,— это *скачок* стационарной амплитуды при медленном квазистационарном прохождении «нависающей» части резонансной кривой. Такого рода кривая построена на рис. 178. Если частоту возмущения

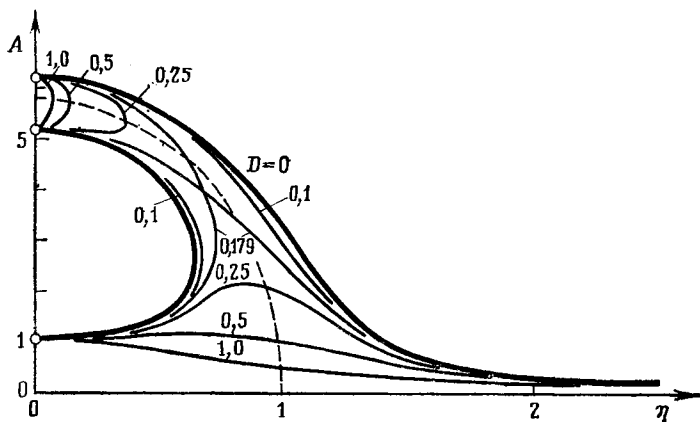


Рис. 175. То же, что на рис. 174, при $\alpha = -0,04$.

увеличивать, начиная с малых значений, то амплитуда стационарного колебания будет возрастать в соответствии с верхней ветвью резонансной кривой. После прохождения максимума амплитуда несколько убывает — до изгиба резонансной кривой в точке A . При дальнейшем увеличении частоты η стационарная амплитуда должна скачком принять значение, которое соответствует точке B на нижней ветви резонансной кривой. Таким образом, стационарная амплитуда скачком меняет свое значение от A до B ; это явление называется также «опрокидыванием». Соответствующее явление повторяется при уменьшении частоты возмущения: здесь амплитуда сначала меняется в соответствии с нижней ветвью резонансной кривой до точки C . Затем следует скачок из точки C в точку D , который приводит амплитуду в соответствие с верхней ветвью резонансной кривой, единственно возможной для меньших значений η . Одновременно с амплитудой скачкообразно меняется и «стационарный» фазовый угол ψ , как показывает рис. 176.

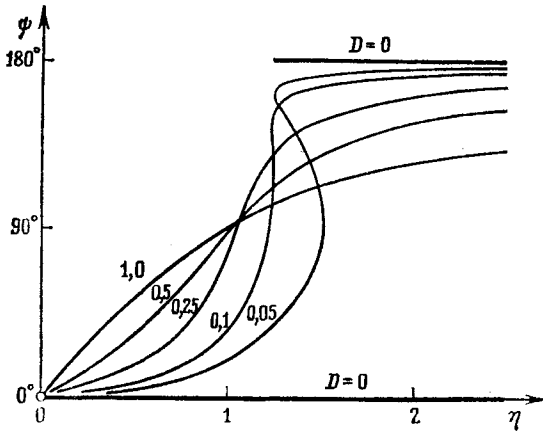


Рис. 176. Фазовые характеристики нелинейного осциллятора с кубической восстанавливающей силой при $\alpha = -0,04$.

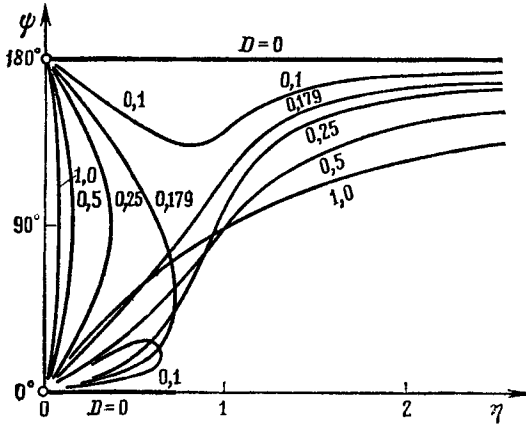


Рис. 177. То же, что на рис. 176, при $\alpha = -0,04$.

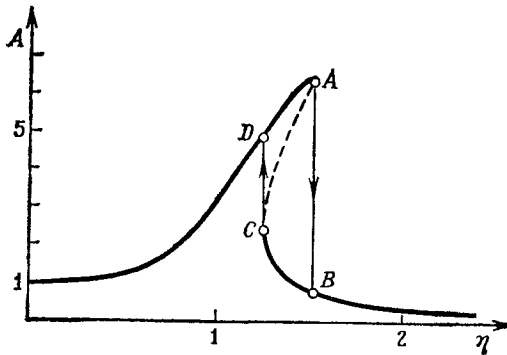


Рис. 178. Скачок амплитуды.

Скачкообразные изменения амплитуды могут совершенно аналогично происходить и в том случае, когда резонансная кривая изогнута влево. Здесь возможны еще более сложные варианты, так как имеются случаи (например, кривая для $D=0,25$ на рис. 175), когда резонансная кривая состоит из двух независимых частей.

Следует заметить, что скачки имеют место только для стационарной амплитуды. Истинная амплитуда в процессе перехода нестационарна, так как при скачке возбуждаются и собственные колебания и новая стационарная амплитуда устанавливается только после затухания этих колебаний.

Если существует несколько стационарных значений амплитуды, то, согласно результату, полученному в разд. 5.4.2.3, можно ожидать, что не все эти значения соответствуют устойчивым формам движения. Более подробное исследование движений, близких к стационарным, которое мы здесь не будем проводить (см., например, [10, 19]), показывает, что для изображенного на рис. 178 случая идущая назад ветвь $A-C$ соответствует неустойчивому движению, поэтому она и изображена штриховой кривой. Для осциллятора с одной степенью свободы в общем случае можно показать, что границы между устойчивой и неустойчивой частями резонансных кривых всегда характеризуются точками, в которых касательные к резонансным кривым вертикальны.

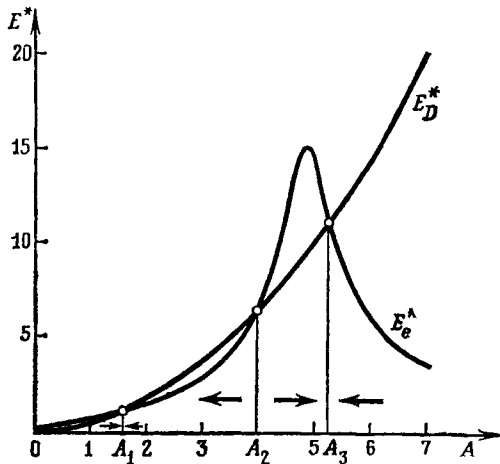


Рис. 179. Энергетическая диаграмма для нелинейных вынужденных колебаний,

Впрочем, факт неустойчивости колебаний, соответствующих средней ветви резонансной кривой, можно установить из баланса энергии — равенства (5.112). В данном случае за одно полное колебание демпфированием поглощается энергия

$$E_D = 2\pi D\eta A^2 \quad (5.152)$$

и поступает от внешнего возмущения энергия

$$E_e^* = \pi x_0 A \sin \varphi. \quad (5.153)$$

Приравнивая эти значения, можно опять определить возможные стационарные амплитуды A . Для исследования устойчивости строятся графики значений энергии в зависимости от амплитуды (рис. 179), причем следует учесть, что в отличие от линейного случая $\sin \varphi$ также является функцией A (см. формулу (5.151)). В то время как в линейном случае кривая поступающей энергии E_e^* представляла собой прямую (кривая E_e^* на рис. 151), изображенная на рис. 179 кривая имеет четко выраженный максимум. В некоторых случаях парабола энергии E_D^* , поглощаемой демпфированием, может трижды пересекать кривую E_e^* . Характер изменения амплитуды можно определить по разности энергий $E_D^* - E_e^*$. Если энергии поглощаются больше, чем подводится, то амплитуды уменьшаются. Характер протекающих процессов указан стрелками на рис. 179. Из рисунка непосредственно видно, что стационарные значения амплитуд A_1 и A_3 соответствуют устойчивым движениям, в то время как значение A_2 соответствует неустойчивому движению.

5.4.3.2. Сухое трение и линейная восстанавливающая сила. При наличии сил сопротивления, зависящих от скорости \dot{x} нелинейной, можно поступить в точности таким же образом, как в случае нелинейных восстанавливающих сил. Покажем это на примере и выберем для этого случай сухого (кулонова) трения. Тогда, подставив в уравнение (5.110) выражения

$$x_e(t) = x_0 \cos \Omega t, \quad f(x, \dot{x}) = r \operatorname{sign} \dot{x} + x,$$

получим уравнение движения

$$\ddot{x} + r \operatorname{sign} \dot{x} + x = x_0 \cos \Omega t \quad (5.154)$$

Теперь нелинейный член уравнения приводится к виду

$$r \operatorname{sign} \dot{x} \rightarrow b^* x,$$

где

$$b^* = \frac{r}{\pi A \Omega} \int_0^{2\pi} \operatorname{sign}(A \Omega \sin \Omega t) \sin \Omega t d(\Omega t) = \frac{4r}{\pi A \Omega}.$$

Введя безразмерную величину

$$\frac{2r}{\pi A \Omega} = \frac{2r}{\pi A \eta} = D \quad (\omega_0 = 1), \quad (5.155)$$

получим безразмерную форму уравнения (5.154):

$$x'' + 2Dx' + x = x_0 \cos \eta t. \quad (5.156)$$

Периодическое решение этого уравнения имеет амплитуду

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}.$$

Так как коэффициент демпфирования D сам зависит от амплитуды A , это — снова уравнение для определения A , имеющее решение

$$A = \frac{x_0}{1-\eta^2} \sqrt{1 - \left(\frac{4r}{\pi x_0}\right)^2}; \quad (5.157)$$

при этом сдвиг фазы находится из равенства

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2} = \frac{4r}{\pi A (1-\eta^2)}. \quad (5.158)$$

В этом решении замечательно то, что в случае, когда сухое трение не слишком велико, резонансная кривая по-прежнему уходит в бесконечность при $\eta=1$. Чтобы решение (5.157) имело физический смысл, в любом случае должно выполняться условие

$$r < \pi x_0 / 4. \quad (5.159)$$

Однако амплитуда $A \rightarrow \infty$ при $\eta \rightarrow 1$. Это положение дел легко объяснить, рассмотрев энергию, которая рассеивается в результате сухого трения. Согласно формуле (5.152), она равна

$$E_D^* = 2\pi D\eta A^2 = 4rA.$$

Теперь эта энергия пропорциональна первой степени амплитуды, а не ее квадрату. В силу того что поступающая от внешнего возмущения энергия нарастает пропорционально амплитуде A (см., например, формулу (5.153)), при заданном неравенством (5.159) соотношении между коэффициентом трения r и амплитудой возмущения x_0 , возможен длительный переходный процесс. При этом потери энергии за счет трения с избытком возмещаются энергией, поступающей от возмущения.

5.4.4. Верхние, нижние и комбинационные частоты при вынужденных колебаниях

При гармоническом возмущении в линейных системах с одной степенью свободы имеется только один резонанс, для которого частота возмущения приближенно или точно равна собственной частоте осциллятора. В нелинейных системах, наоборот, возможны многочисленные другие типы резонанса. Покажем это на примере недемпфированного осциллятора, причем возьмем довольно общий случай, когда возмущающая функция состоит из двух гармоник:

$$\ddot{x} + f(x) = x_e(t) = x_{10} \cos(\Omega_1 t + \delta_1) + x_{20} \cos(\Omega_2 t + \delta_2). \quad (5.160)$$

Представим нелинейную функцию восстанавливающей силы рядом Тейлора

$$f(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots, \quad (5.161)$$

где постоянный член a_0 обращается в нуль за счет надлежащего выбора начала отсчета x . Тогда решение уравнения движения (5.160) можно получить рассмотренным ранее методом итераций. При этом n -е приближение получается из $(n-1)$ -го с помощью рекуррентного уравнения

$$\ddot{x}_n + a_1 x_n = x_{10} \cos(\Omega_1 t + \delta_1) + x_{20} \cos(\Omega_2 t + \delta_2) - (a_2 x_{n-1}^2 + a_3 x_{n-1}^3 + \dots). \quad (5.162)$$

При $x_0 = 0$ на первом шаге получим решение

$$x_1 = \frac{x_{10}}{a_1 - \Omega_1^2} \cos(\Omega_1 t + \delta_1) + \frac{x_{20}}{a_1 - \Omega_2^2} \cos(\Omega_2 t + \delta_2). \quad (5.163)$$

При этом из соображений, которые станут понятными позже, предполагаются такие начальные условия, которые не вызывают собственных колебаний.

Если теперь подставить первое приближение (5.163) в правую часть рекуррентного уравнения (5.162), то получится множество периодических возмущающих членов с различными частотами. В силу известных тригонометрических соотношений

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1/2 (1 + \cos 2\alpha), & \cos^3 \alpha &= 1/4 (3 \cos \alpha + \cos 3\alpha), \\ \cos \alpha \cos \beta &= 1/2 \cos(\alpha + \beta) + 1/2 \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

член x_1^2 содержит периодические компоненты с частотами

$$2\Omega_1, \quad 2\Omega_2, \quad \Omega_1 + \Omega_2, \quad \Omega_1 - \Omega_2,$$

член x_1^3 — с частотами

$$\Omega_1, \quad \Omega_2, \quad 3\Omega_1, \quad 3\Omega_2, \quad 2\Omega_1 + \Omega_2, \quad 2\Omega_1 - \Omega_2, \quad \Omega_1 + 2\Omega_2, \quad \Omega_1 - 2\Omega_2,$$

и т. д.

Уже при втором итерационном шаге в решении x_2 появляются все возможные линейные комбинации двух исходных частот Ω_1 и Ω_2 . Дальнейшие итерации не вносят ничего принципиально нового, и поэтому можно утверждать, что в общем случае решение будет содержать частоты

$$\begin{aligned} (1) \quad & n\Omega_1, \quad m\Omega_2, \\ (2) \quad & n\Omega_1 \pm m\Omega_2, \end{aligned} \quad (m, n - \text{целые числа}). \quad (5.164)$$

Частоты, пропорциональные частотам возмущения, называются *верхними частотами*, а соответствующие их суммам частоты — *комбинационными*. В акустике последние известны под названием *комбинационных тонов Гельмгольца*.

Влияние отдельного гармонического возмущения на общую форму вынужденных колебаний зависит не только от типа функции $f(x)$ и соответственно от коэффициентов a_i разложения в ряд Тейлора, но прежде всего от того, насколько

частота этого возмущения отличается от собственной частоты осциллятора. За счет резонанса может произойти усиление отдельных, ничем не выделяющихся гармоник. В технике резонансы подобного рода с верхними частотами проявляются как дополнительные, большей частью нежелательные колебательные процессы. Нежелательные комбинационные тона можно наблюдать в плохих громкоговорителях.

Теперь вкратце расскажем о влиянии собственных колебаний, которые были произвольно опущены в этом процессе итерации. Если в первом приближении (5.163) для собственных колебаний принять $x_{1e} = C \cos(\sqrt{a_1}t - \varphi)$, то в процессе итерации будут появляться гармоники не только с частотами, кратными собственной частоте и ее комбинациям, но и с частотой собственных колебаний. При следующем шаге итерации это дало бы резонансное решение с бесконечно большой амплитудой. Однако указанная трудность вызвана исключительно способом приближения, не имеет ничего общего с физической стороной дела и ее можно избежать при более точных расчетах. Дальнейшие подробности можно найти в специальной литературе (см., например, [10]).

В нелинейных системах возможны вынужденные колебания не только с верхними частотами, но и с нижними частотами, составляющими лишь часть от частоты возмущения. Здесь мы ограничимся рассмотрением одного частного примера: движение осциллятора с восстанавливающей силой, пропорциональной третьей степени отклонения, при гармоническом возмущении описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \alpha x^3 = x_0 \cos \Omega t. \quad (5.165)$$

При определенных предположениях этот осциллятор может совершать гармонические колебания, частота которых составляет одну треть частоты возмущения. Положив

$$x = A \cos [(\Omega/3)t],$$

после подстановки в (5.165) и тригонометрических преобразований найдем

$$\cos \frac{\Omega}{3} t \left[A \left(\omega_0^2 - \frac{\Omega^2}{9} \right) - \frac{3\alpha A^3}{4} \right] + \cos \Omega t \left[\frac{\alpha A^3}{4} - x_0 \right] = 0. \quad (5.166)$$

Полученное условие выполняется для

$$A = \sqrt[3]{\frac{4x_0}{\alpha}}, \quad \Omega = 3 \sqrt{\omega_0^2 + \frac{3\alpha A^2}{4}} = 3\omega_A. \quad (5.167)$$

При этом частота ω_A снова является зависящей от амплитуды частотой собственных колебаний нелинейного осциллятора. Впрочем, этот пример показывает также, что в нелинейных системах возможны гармонические колебания. Их возникновение можно объяснить тем, что из-за наличия нелинейного члена колебания тройной частоты непосредственно компенсируются возмущением (см. формулу (5.166)). Правда, такая компенсация возможна только при совершенно определенной амплитуде возмущения.

Аналогично тому как это было сделано в приведенном выше примере, в общем случае можно показать, что при других восстанавли-

вающих функций $f(x)$ возможны также колебания с нижними частотами любых других порядков, так что осциллятор может колебаться с частотами Ω/m (m — целое число). Если теперь принять во внимание, что колебания с нижними и верхними частотами могут существовать одновременно, то становится ясным, что возможны и колебания, частоты которых находятся в произвольном рациональном отношении к возмущающей частоте, $\omega_A = (n/m)\Omega$, где m и n — целые числа. Если на систему одновременно действуют возмущения с различными частотами, то из-за возникающих комбинационных колебаний число возможных частот колебаний становится гораздо больше.

Колебания с нижними частотами находят важное применение в технике, например при понижении частоты в кварцевых и атомных часах

5.4.5. Выпрямление вынужденных колебаний

При исследовании уравнения (5.160) в начале предыдущего раздела не учитывалось появление постоянных членов при образовании выражений в правой части рекуррентной формулы (5.162). Чтобы оценить влияние этих членов, ограничимся анализом простого случая, предполагая, что возмущение представлено лишь одной гармонической функцией. Тогда в уравнение (5.160) следует подставить

$$x_{10} = x_0, \quad x_{20} = 0, \quad \Omega_1 = \Omega, \quad \delta_1 = 0.$$

При этом первое приближение (5.163) переходит в

$$x_1 = \frac{x_0}{a_1 - \Omega^2} \cos \Omega t = A \cos \Omega t.$$

Если теперь образовать степени от x_1 , то во всех четных степенях, кроме периодических составляющих, появятся еще не зависящие от времени коэффициенты, а именно:

$$\text{в } x_1^2 \quad 1/2 A^2, \quad \text{в } x_1^4 \quad 3/8 A^4, \quad \text{в } x_1^6 \quad 5/16 A^6 \text{ и т. д.}$$

Эти постоянные составляющие дают для второго приближения смещение положения равновесия на величину

$$x_{20} = \frac{a_2}{2a_1} A^2 + \frac{3a_4}{8a_1} A^4 + \frac{5a_6}{16a_1} A^6 + \dots \quad (5.168)$$

Приближения более высоких порядков x_3, x_4 и т. д. дают для общего решения дополнительные составляющие смещения положения равновесия. В общем случае смещение x_{n0} является функцией амплитуды A , а тем самым и амплитуды возмущения x_0 .

Заметим, что амплитуду возмущения можно определить также по величине смещения положения равновесия, не обращая внимания на

колебания, происходящие относительно положения равновесия, поскольку, приняв надлежащие меры, эти колебания можно отфильтровать, так что останется только постоянная составляющая — смещение положения равновесия. При этом вынужденные колебания выпрямляются.

Из сказанного выше ясно, что выпрямление возмущения может достигаться только тогда, когда восстанавливающая функция $f(x)$ несимметрична относительно положения равновесия (нелинейна), так как только в этом случае члены ряда Тейлора с четными степенями дают постоянные слагаемые.

Выпрямление при помощи нелинейных элементов широко используется в радиотехнике для того, чтобы отделить модуляционные колебания звуковой частоты от высокочастотных колебаний несущей частоты передатчика. (Этот процесс носит название демодуляции или детектирования. — *Ред.*) В механических осцилляторах также имеет место эффект выпрямления колебаний. Он может проявляться в виде ошибочных показаний измерительных приборов, механические части которых подвергаются колебаниям и сотрясениям. Очень опасно появление постоянной составляющей (выпрямление) и в гироскопических приборах, где из-за него происходит уход гироскопа

5.4.6. Вынужденные колебания в автоколебательных системах

В качестве классического примера дифференциального уравнения автоколебательной системы в разд. 3.3.2 было приведено уравнение Ван дер Поля, которое описывало поведение лампового генератора. Теперь рассмотрим, какие явления следует ожидать, если на генератор дополнительно воздействует внешнее периодическое возмущение. Для этого дополним уравнение Ван дер Поля (3.55) членом, соответствующим гармоническому возмущению:

$$x'' - (\alpha - \beta x^2)x' + x = x_0 \cos \eta t. \quad (5.169)$$

Нелинейный член этого уравнения был «гармонически линеаризован» уже при исследовании автоколебаний, причем в линеаризованном выражении стоящий перед x' коэффициент определялся по формуле (3.18):

$$b^* = \frac{1}{4}\beta A^2 - \alpha = 2D. \quad (5.170)$$

При этом вместо исходного уравнения (5.169) получается линейное уравнение

$$x'' + 2Dx' + x = x_0 \cos \eta t,$$

периодическое решение которого известно:

$$x = A \cos(\eta t - \psi),$$

$$A = \frac{x_0}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \quad (5.171)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}. \quad (5.172)$$

В силу (5.170) соотношение (5.171) снова является уравнением для A :

$$A^2 \left[(1 - \eta^2)^2 + \eta^2 \left(\frac{\beta}{4} A^2 - \alpha \right)^2 \right] = x_0^2. \quad (5.173)$$

Это уравнение кубическое относительно A^2 и лишь квадратное относительно η^2 . Поэтому сгруппируем члены по η^2 и получим уравнение

$$\eta^4 + \eta^2 \left[\left(\frac{\beta}{4} A^2 - \alpha \right)^2 - 2 \right] + \left(1 - \frac{x_0^2}{A^2} \right) = 0,$$

имеющее решение

$$\eta_{1,2}^2 = \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{4} A^2 - \alpha \right)^2 \right] \pm \sqrt{\left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{4} A^2 - \alpha \right)^2 \right]^2 - \left(1 - \frac{x_0^2}{A^2} \right)}. \quad (5.174)$$

Отсюда для каждого A можно найти соответствующее значение η и рассчитать таким образом амплитудные характеристики $A(\eta)$. На рис. 180 некоторые из таких характеристик построены в плоскости A, η для различных значений x_0 .

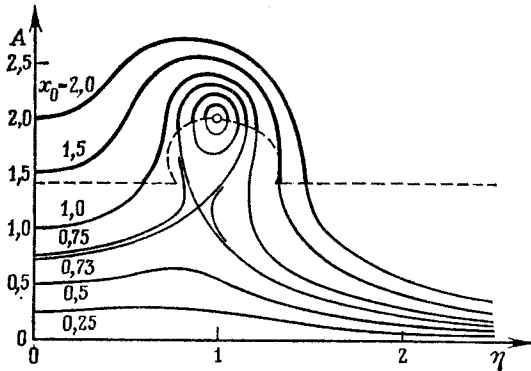


Рис. 180. Амплитудные характеристики автоколебательной системы при вынужденных колебаниях.

Прежде всего видно, что при $x_0 = 0$, т. е. при отсутствии внешнего возмущения, получается уже известное решение для автоколебаний:

$$\eta^2 = 1, \quad A = A_0 = 2\sqrt{\alpha/\beta}. \quad (5.175)$$

Для выбранных на рис. 180 значений $\alpha = \beta = 1$ имеем $A_0 = 2$. Теперь посмотрим, что получится из стационарного решения при малых

x_0 , отличных от нуля. В этом случае следует ожидать, что решения будут находиться в окрестности стационарного решения (5.175). Поэтому, полагая $A = A_0 + \Delta A$, где $\Delta A \ll A_0$, преобразуем выражение (5.174) в следующее:

$$\eta^2 \approx 1 \pm \sqrt{\frac{\beta x_0^2}{4\alpha} - \alpha\beta (\Delta A)^2},$$

что после возведения в квадрат дает

$$(1 - \eta^2)^2 + \alpha\beta (\Delta A)^2 = \beta x_0^2 / (4\alpha). \quad (5.176)$$

Близкие к стационарному решению (5.175) кривые (5.176) в плоскости A , η^2 представляют собою эллипсы, полуоси которых с ростом x_0 увеличиваются. При $x_0 \rightarrow 0$ эти эллипсы стягиваются к стационарной точке $\eta=1$, $A=A_0$.

Для больших значений x_0 амплитудные характеристики должны определяться из уравнения (5.174). Как и в ранее рассмотренных примерах, предполагается, что не все определяемые уравнением (5.174) ветви амплитудных характеристик соответствуют устойчивым, т. е. физически реализуемым колебаниям. Опустим здесь довольно сложное исследование устойчивости и приведем только его результаты. Все части амплитудных характеристик, расположенные на рис. 180 ниже штриховой кривой, не могут быть реализованы, т. е. неустойчивы. Граница области устойчивости в своей средней части является геометрическим местом точек, в которых амплитудные характеристики имеют вертикальные касательные, а по краям представляет собой горизонтальную прямую

$$A = A_0 / \sqrt{2} = \sqrt{2\alpha/\beta}. \quad (5.177)$$

Поясним этот результат, рассмотрев энергетический баланс системы. Энергия демпфирования, которая вследствие возможности автоколебаний может теперь превращаться в энергию возбуждения, будет, как и прежде, равна

$$E_D^* = 2\pi D\eta A^2 = (1/4)\beta A^2 - \alpha\pi\eta A^2. \quad (5.178)$$

Ее зависимость от амплитуды A показана на рис. 181. Кривая E_D^* пересекает ось A при амплитуде автоколебаний $A=A_0$. Поступающая от возмущения энергия E_e^* , как было уже показано ранее, равна

$$E_e^* = \pi x_0 A \sin \psi. \quad (5.179)$$

Для простейшего случая $\eta=1$ кривая E_e^* представляет собой прямую, так как $E_e^* = \pi x_0 A$ при $\sin \psi=1$. Эта прямая нанесена на рис. 181. Равенство энергий соответствует точке пересечения кривых E_D^* и E_e^* , т. е. одному и только одному значению A , большему A_0 . Эта амплитуда отвечает верхним частям кривых, построенных на рис. 180. Соответствующие колебания устойчивы, так как при меньшей амплитуде энергия поступает в осциллятор, а при большей, наоборот, отбирается. Таким образом, в обоих случаях амплитуда колебаний стремится к стационарной.

Согласно представленной на рис. 181 энергетической диаграмме, для других значений амплитуд не может иметь места равенство энергий, так что необходимое

условие осуществления периодических колебаний не выполняется. Однако, как видно из рис. 180, при $\eta=1$ по меньшей мере для малых значений x_0 возможны периодические колебания с тремя различными амплитудами. Это противоречие можно объяснить при более детальном исследовании устойчивости. Такое исследование

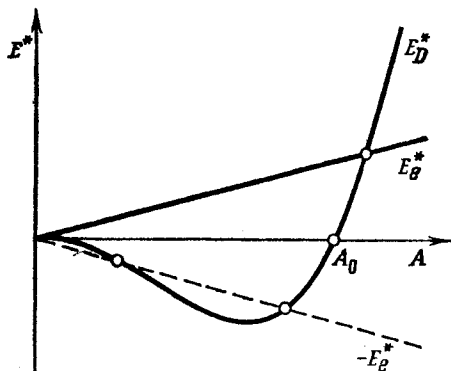


Рис. 181. Энергетическая диаграмма для автоколебательной системы при вынужденных колебаниях.

показывает, что система *неустойчива по фазе*, т. е. должно быть справедливым не только равенство $\sin \psi = 1$, но и равенство $\sin \psi = -1$. Поэтому во внимание нужно принимать и штриховую прямую $-E_c^*$, показанную на рис. 181. Точки пересечения этой прямой с кривой E_D^* в точности соответствуют изображенным на рис. 180 нижним ветвям характеристик.

Полученный результат заслуживает особого внимания. Он показывает, что возможны устойчивые вынужденные колебания, частота которых близка к $\eta=1$. Если происходят эти вынужденные колебания, то автоколебания как бы «затягиваются» (или «захватываются») возмущением по частоте и их частота отклоняется от значения $\eta=1$. В этом случае говорят об *эффекте затягивания*.

Область *затягивания* тем шире, чем больше амплитуда возмущения. В окрестности установившегося решения (5.175) ее нетрудно найти, так как она соответствует горизонтальной оси эллипса, описываемого уравнением (5.176). Таким образом,

$$1 - \Delta\eta \leq \eta \leq 1 + \Delta\eta,$$

где

$$\Delta\eta = \frac{x_0}{4} \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{x_0}{2A}. \quad (5.180)$$

Эффект *затягивания* используется в технике для *синхронизации* генераторов колебаний (например, часов). Он может проявляться и как сопутствующее явление и быть желательным или нежелательным. Явление *затягивания* положительно сказывается на игре большого оркестра, где смычковые и духовые инструменты являются автоколебательными системами, подвергающимися воздействиям звуковых волн остального оркестра. Если на одном из инструментов играют не совсем

чисто, то при не слишком большой расстройке остальной оркестр вследствие явления затягивания сможет изменить тон этого инструмента, так что расстройка не будет сказываться. Весь оркестр можно рассматривать как систему автоколебательных осцилляторов, которые при игре самостоятельно настраиваются на некоторый средний тон.

5.5. Задачи

36. Осциллятор с коэффициентом демпфирования $D > 1$ выводится из состояния покоя $x=0$ и приходит в новое положение равновесия $x=x_0$. Необходимое для этого возмущение состоит из ступенчатой функции, вызывающей смещение положения равновесия, и из импульсной функции, увеличивающей начальную скорость на величину v_0 . Какова должна быть v_0 , чтобы переход в новое положение равновесия совершился как можно быстрее и чтобы не сказывалась медленно затухающая составляющая общего решения?

37. В случае переходной функции (5.6) найти наиболее благоприятное значение коэффициента демпфирования D , используя критерий

$$F_4 = \int_0^{\infty} \{ [x''_i(\tau) - 1]^2 + k [x'_i(\tau)]^2 \} d\tau = \min, \quad k - \text{произвольная постоянная.}$$

38. Определить значения коэффициента демпфирования D , которые получают в случае импульсных переходных функций $x_i(\tau)$ при применении следующих критериев:

а) наименьшая постоянная времени,

$$\text{б) } F_1 = \int_0^{\infty} x_i(\tau) d\tau = \min,$$

$$\text{в) } F_2 = \int_0^{\infty} |x_i(\tau)| d\tau = \min,$$

$$\text{г) } F_3 = \int_0^{\infty} x_i^2(\tau) d\tau = \min.$$

39. При помощи интеграла Дюамеля (5.25) найти реакцию осциллятора с $D=1$ на возмущение вида

$$f(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau \leq 0, \\ \alpha\tau & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_0, \\ \alpha\tau_0 & \text{при } \tau \geq \tau_0. \end{cases}$$

При $\tau < 0$ осциллятор находится в покое ($x=0$).

40. Для несбалансированного осциллятора определить коэффициент усиления по ускорению x'' и найти относительную частоту η_{extr} , соответствующую экстремальному значению. Каково наибольшее значение коэффициента демпфирования D , при котором еще существует экстремальное значение?

41. Рассчитать положение максимума для активной и реактивной мощности возмущающей силы в случае Б (формулы (5.49)).

42. Найти параметрические уравнения обратных передаточных функций (согласно формулам (5.59)) в случаях Б и В (формулы (5.41) и (5.42)) и определить вид соответствующих кривых.

43. Виброграф (рис. 144) снабжен индуктивным датчиком, посредством которого снимаются величины \dot{x}_R . Какие величины измеряются

а) при сверхкритической настройке ($\eta > 1$).

б) при докритической настройке ($\eta < 1$)?

В каком интервале η можно пользоваться прибором, если при $D=1$ ошибка по амплитуде не должна превышать 5%?

44. Докритически настроенный виброграф с $D=1$ должен использоваться в интервале $0 < \eta < 0,2$. Как зависит от η сдвиг по времени $\Delta t = d\psi/d\eta$ от отдельных составляющих колебаний? Какова величина максимальной ошибки по фазе $\delta = \Delta(\Delta t)/\Delta t$ в заданном интервале?

45. Подрессоренная машина совершает 1000 об/мин. Подвеска недемпфирована ($D \approx 0$). Какова должна быть величина статического прогиба f_0 под действием собственного веса машины, если допустимое воздействие упругой подвески на фундамент составляет 5% от сил дисбаланса?

46. Каков должен быть ход пружины линейно действующего упругого амортизатора ударов в автомобиле, чтобы при аварии (внезапное уменьшение скорости до нуля) силы ускорения были снижены таким образом, чтобы при скорости $v = 40$ км/час ускорение не превосходило бы $10 g$?

47. Рассчитать спектр частот колебаний при частотной модуляции

$$x_e = x_0 \cos \int \Omega dt, \text{ где } \Omega(t) = \Omega_0 (1 + k \cos \Omega_m t)$$

и сравнить результат с формулой (5.108) для амплитудной модуляции. Исследовать случай $k^* = k(\Omega_0/\Omega_m) \ll 1$.

48. Каково максимально допустимое значение коэффициента демпфирования D , при котором резонансные пики описанного в разд. 5.4.3.1 осциллятора (рис. 174) не будут изгибаться? Найти предельное значение D^* , а также соответствующие значения амплитуды A^* и частоты η^* в той точке амплитудной характеристики, в которой эта характеристика имеет вертикальную касательную.

49. Рассчитать амплитудную характеристику $A=A(\eta)$ осциллятора с квадратичным демпфированием в случае гармонического возмущения:

$$x'' + q|x'| + x = x_0 \cos \eta t,$$

применив метод гармонической линеаризации или условие энергетического баланса (равенство (5.112)). Исследовать, возможны ли скачкообразные изменения амплитуды.

50. Считая $\eta \approx 1$, вывести приближенную формулу для резонансного максимума амплитуды осциллятора, описанного в задаче 49.

51. Предположив, что возмущение имеет вид $x = x_1 + \alpha x_2$, найти приближенно среднее положение x_m стационарных вынужденных колебаний осциллятора, движение которого описывается дифференциальным уравнением

$$x'' + x + \alpha x^{2n} = x_0 \cos \eta t.$$

Коэффициент α считать малой величиной, а n — целым числом.

52. Рассчитать амплитудную характеристику $A=A(\eta)$ и область затягивания для случая внешнего возмущения автоколебательной системы

$$x'' + 2Dx' - a \operatorname{sign} x' + x = x_0 \cos \eta t,$$

предполагая, что x_0 — малая величина (см. при этом также задачу 23).

6. Связанные колебания

Встречающиеся в технике колебательные системы большей частью обладают несколькими степенями свободы. Колебания в таких системах можно возбудить различными способами, причем форма колебаний и их частота будут зависеть от способа возбуждения. Если колебания влияют друг на друга, то они называются связанными. Чем сильнее эта связь, тем эффективнее взаимное влияние и тем более колебания и наблюдаемые при их возникновении процессы отличаются от исследованных до сих пор. Некоторые из таких процессов рассматриваются в данной главе. Однако здесь еще в большей степени, чем в предыдущих главах, мы вынуждены ограничиться рассмотрением небольшого количества примеров и задач, так как происходящие при связанных колебаниях процессы чрезвычайно разнообразны, и здесь мы сможем описать лишь некоторые типичные случаи.

При этом особое внимание следует обратить на то, что многие явления в системах с несколькими степенями свободы могут быть описаны с помощью рассмотренных в предыдущих главах методов. Даже при наличии нескольких степеней свободы большую роль играют колебательные процессы с одинаковым периодом, т. е. имеющие единственную частоту. В дальнейшем мы покажем, что в общем случае весьма сложные связанные колебания часто удается исследовать и рассчитать, представляя движение как суперпозицию однопериодических *главных колебаний*. Тем самым оправдывается принятая в этой книге система изложения, при которой прежде всего рассматриваются простые осцилляторы с одной степенью свободы.

6.1. Колебательные системы с двумя степенями свободы

Колебательная система обладает двумя степенями свободы, если ее движение однозначно определяется указанием двух координат как функций времени. Некоторые простые примеры систем такого вида изображены на рис. 182. Это

а) связанные пружиной два плоских гравитационных маятника, каждый из которых имеет одну степень свободы;

б) два гравитационных плоских маятника, один из которых подвешен к другому;

в) две подвешенные на пружинах вертикально колеблющиеся массы;

г) два индуктивно связанных электрических колебательных контура;

д) два электрических колебательных контура с емкостной связью.

Перечень таких примеров нетрудно продолжить; некоторые из них будут рассмотрены в последующих разделах.

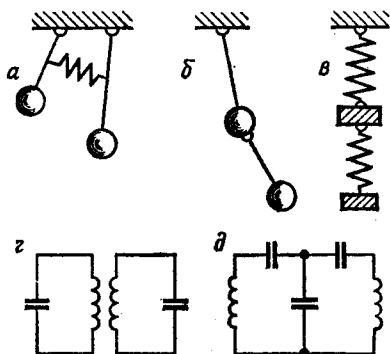


Рис. 182. Примеры осцилляторов с двумя степенями свободы.

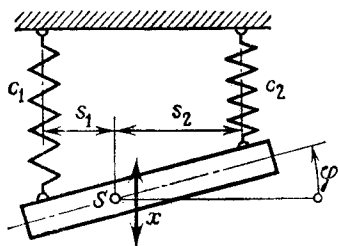


Рис. 183. Осциллятор с двумя степенями свободы, совершающий связанные колебания.

6.1.1. Связанные колебания недемпфированного осциллятора

Рассмотрим изображенный на рис. 183 осциллятор: твердое тело, подвешенное на двух пружинах жесткости c_1 и c_2 , может совершать плоское движение, которое однозначно описывается координатами x (вертикальное движение центра тяжести S) и φ (вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости движения). Предположим, что тело имеет главную ось инерции, перпендикулярную плоскости движения (в противном случае движение было бы пространственным) и что угол φ мал (это позволяет провести соответствующую линеаризацию). Кроме того, предположим, что демпфирование отсутствует.

Для вывода уравнений движения используем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0 \quad (q = x, \varphi), \quad (6.1)$$

где кинетическая энергия E_k и потенциальная энергия E_p выражаются соотношениями

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\Theta_s\dot{\varphi}^2, \quad (6.2)$$

$$E_p = \frac{1}{2}c_1(x + s_1\varphi)^2 + \frac{1}{2}c_2(x - s_2\varphi)^2. \quad (6.3)$$

Подстановка выражений (6.2) и (6.3) в уравнение (6.1) дает

$$m\ddot{x} + (c_1 + c_2)x + (c_1s_1 - c_2s_2)\varphi = 0,$$

$$\Theta_s\ddot{\varphi} + (c_1s_1^2 + c_2s_2^2)\varphi + (c_1s_1 - c_2s_2)x = 0.$$

Полагая для сокращения записи

$$\frac{c_1 + c_2}{m} = \omega_x^2, \quad \frac{c_1s_1^2 + c_2s_2^2}{\Theta_s} = \omega_\varphi^2, \quad (6.4)$$

$$\frac{c_1s_1 - c_2s_2}{m} = k_1^2, \quad \frac{c_1s_1 - c_2s_2}{\Theta_s} = k_2^2, \quad k_1^2k_2^2 = k^4, \quad (6.5)$$

получаем уравнения движения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_x^2x + k_1^2\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2\varphi + k_2^2x &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где ω_x и ω_φ являются соответственно собственными частотами колебаний смещения (т. е. таких колебаний, при которых стержень перемещается поступательно.— *Ред.*) и крутильных колебаний при отсутствии связи между координатами ($k_1 = k_2 = 0$). При подстановке

$$x = Xe^{\lambda t}, \quad \varphi = \Phi e^{\lambda t}$$

уравнения (6.6) дают для определения амплитуд X и Φ систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} X(\lambda^2 + \omega_x^2) + \Phi k_1^2 &= 0, \\ Xk_2^2 + \Phi(\lambda^2 + \omega_\varphi^2) &= 0, \end{aligned} \quad (6.7)$$

которая имеет нетривиальное решение только тогда, когда ее детерминант равен нулю. Это приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \omega_x^2 & k_1^2 \\ k_2^2 & \lambda^2 + \omega_\varphi^2 \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^2(\omega_x^2 + \omega_\varphi^2) + (\omega_x^2\omega_\varphi^2 - k^4) = 0 \quad (6.8)$$

с двумя решениями для λ^2 :

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1^2 &= \omega_1^2 \\ -\lambda_2^2 &= \omega_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_\varphi^2) \mp \sqrt{\frac{1}{4}(\omega_x^2 - \omega_\varphi^2)^2 + k^4}, \quad (6.9)$$

где ω_1 и ω_2 — собственные частоты рассматриваемой колебательной системы, которые, как сразу видно из подкоренного выражения,

всегда отличаются друг от друга. Их зависимость от отношения «несвязанных собственных частот», а также от коэффициента связи k показана на рис. 184. Из этих зависимостей, представленных в безразмерном виде, можно видеть, что при исчезающе малом коэффи-

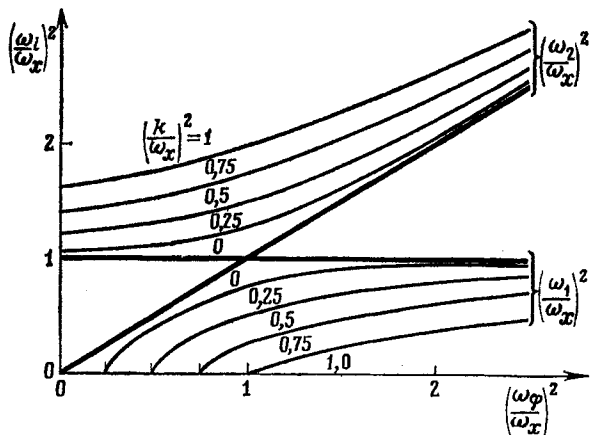


Рис. 184. Зависимость между частотами связанных колебаний, основными частотами и коэффициентом связи.

циенте связи $k \rightarrow 0$ получаются прямые $\omega/\omega_x = 1$ и $\omega = \omega_\phi$. Чем больше коэффициент связи, тем больше собственные частоты ω_1 и ω_2 отличаются друг от друга. При этом ω_2 всегда больше большего, а ω_1 меньше меньшего из значений частот ω_x и ω_ϕ .

Теперь решения для обеих координат x и φ можно выразить через тригонометрические функции

$$\begin{aligned} x &= X_1 \cos(\omega_1 t - \psi_{x1}) + X_2 \cos(\omega_2 t - \psi_{x2}), \\ \varphi &= \Phi_1 \cos(\omega_1 t - \psi_{\varphi1}) + \Phi_2 \cos(\omega_2 t - \psi_{\varphi2}). \end{aligned} \quad (6.10)$$

В эти выражения входят восемь постоянных, для определения которых имеются лишь четыре начальных условия. Тем не менее задача может быть решена, так как амплитуды и фазы обеих координат связаны друг с другом. Из уравнений (6.7) легко установить, что существуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_1}{X_1} &= \frac{\omega_1^2 - \omega_x^2}{k_1^2} = \frac{k_2^2}{\omega_1^2 - \omega_\phi^2} = \kappa_1, \\ \frac{\Phi_2}{X_2} &= \frac{\omega_2^2 - \omega_x^2}{k_1^2} = \frac{k_2^2}{\omega_2^2 - \omega_\phi^2} = \kappa_2, \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\psi_{x1} = \psi_{\varphi1} \pm 2\pi n, \quad \psi_{x2} = \psi_{\varphi2} \pm 2\pi n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Таким образом, выражения (6.10) принимают вид

$$\begin{aligned} x &= X_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + X_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2), \\ \varphi &= \kappa_1 X_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + \kappa_2 X_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

Если при $t=0$ заданы начальные условия

$$x = x_0, \quad \dot{x} = \dot{x}_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0,$$

то амплитудные коэффициенты и фазовые смещения, входящие в выражения (6.12), имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \sqrt{(x_0 \kappa_2 - \varphi_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 \kappa_2 - \dot{\varphi}_0}{\omega_1} \right)^2}, \\ X_2 &= \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \sqrt{(x_0 \kappa_1 - \varphi_0)^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 \kappa_1 - \dot{\varphi}_0}{\omega_2} \right)^2}, \\ \psi_1 &= \text{arctg} \frac{\dot{x}_0 \kappa_2 - \dot{\varphi}_0}{\omega_1 (x_0 \kappa_2 - \varphi_0)}, \quad \psi_2 = \text{arctg} \frac{\dot{x}_0 \kappa_1 - \dot{\varphi}_0}{\omega_2 (x_0 \kappa_1 - \varphi_0)}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

6.1.2. Главные колебания и главные координаты

Общее решение (6.12) показывает, что колебательный процесс представляет собой сумму двух гармонических колебаний. Выясним, существуют ли такие начальные условия, при которых колебательный процесс происходит только с какой-нибудь одной частотой. Из соотношений (6.13) легко видеть, что это возможно в двух случаях:

$$\begin{aligned} 1) \quad X_1 \neq 0; \quad X_2 = 0 & \quad \text{при} \quad \frac{x_0}{\varphi_0} = \frac{\dot{x}_0}{\dot{\varphi}_0} = \frac{x}{\varphi} = \frac{1}{\kappa_1}, \\ 2) \quad X_1 = 0; \quad X_2 \neq 0 & \quad \text{при} \quad \frac{x_0}{\varphi_0} = \frac{\dot{x}_0}{\dot{\varphi}_0} = \frac{x}{\varphi} = \frac{1}{\kappa_2}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

При выполнении этих условий координаты x и φ в течение всего колебательного процесса жестко связаны между собой. Легко пред-

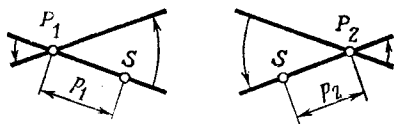


Рис. 185. Формы главных колебаний осциллятора, изображенного на рис. 183.

ставить себе, что это возможно лишь тогда, когда сам колебательный процесс представляет собой чистое вращение вокруг неподвижного полюса P , который находится на расстоянии p_i ($i=1, 2$) от центра тяжести S тела (рис. 185). Считая, что $\varphi \ll 1$, для обоих возможных

случаев находим

$$\begin{aligned} 1) \quad \rho_1 &= \left(\frac{x}{\varphi} \right)_1 = \frac{1}{\kappa_1} = \frac{k_1^2}{\omega_1^2 - \omega_x^2} < 0, \\ 2) \quad \rho_2 &= \left(\frac{x}{\varphi} \right)_2 = \frac{1}{\kappa_2} = \frac{k_1^2}{\omega_2^2 - \omega_x^2} > 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Первой форме колебаний соответствует частота ω_1 , второй — частота ω_2 . Эти однопериодические колебания называют *главными* или *нормальными колебаниями*. Общее движение можно рассматривать как суперпозицию двух главных колебаний.

Рассмотрим еще два частных случая, допускающих простое исследование.

а) $\omega_x = \omega_\varphi = \omega_0$. При равенстве двух несвязанных собственных частот из уравнения (6.9) легко найти собственные частоты

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - k^2, \quad \omega_2^2 = \omega_0^2 + k^2,$$

а затем из формул (6.15) — расстояние от центра тяжести до полюсов:

$$\rho_1 = -k_1/k_2 = -\rho, \quad \rho_2 = k_1/k_2 = \rho \quad (\rho = \sqrt{\Theta_s/m});$$

здесь ρ — радиус инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести. В этом случае полюсы расположены справа и слева от центра тяжести на расстоянии, равном радиусу инерции.

б) $k_1 = k_2 = 0$. Этот случай осуществляется при $c_1 s_1 = c_2 s_2$. Теперь, как это видно из формулы (6.9), $\omega_1 = \omega_\varphi$ и $\omega_2 = \omega_x$. Но при этом из первого равенства (6.15) следует, что $\rho_1 = 0$ и одно из главных колебаний превращается в чистое вращение вокруг центра тяжести. Для другого главного колебания второе равенство (6.15) при рассматриваемых условиях приводит к неопределенности. Однако если в формуле (6.9) величину k взять сначала очень малой, подставить ее во второе равенство (6.15) и затем осуществить предельный переход $k \rightarrow 0$, то будем иметь $\rho_2 \rightarrow 0$. При этом становится ясным, что главное колебание представляет собою чистые колебания смещения. Разумеется, этот результат можно было бы получить непосредственно из дифференциальных уравнений (6.6), которые при $k_1 = k_2 = 0$ становятся несвязанными.

Результат, полученный в частном случае б), можно обобщить: в самом общем случае можно подобрать специальные координаты, так называемые *главные координаты*, такие, что в этих координатах происходит только однопериодическое движение. При преобразовании системы дифференциальных уравнений (6.6) к главным координатам она распадается на два несвязанных дифференциальных уравнения. Главные координаты находят, например, рассматривая общее решение (6.12) как систему уравнений относительно составляющих колебаний $X_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1)$ и $X_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2)$. Решая эту

систему, находим

$$\begin{aligned}\xi &= x\kappa_2 - \varphi = X_1(\kappa_2 - \kappa_1) \cos(\omega_1 t - \psi_1), \\ \eta &= x\kappa_1 - \varphi = X_2(\kappa_1 - \kappa_2) \cos(\omega_2 t - \psi_2).\end{aligned}\quad (6.16)$$

Таким образом, главные координаты ξ и η получаются из исходных координат x и φ линейным преобразованием. С введением ξ и η в исходные дифференциальные уравнения (6.6), последние переходят в несвязанную форму:

$$\begin{aligned}\ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi &= 0, \\ \ddot{\eta} + \omega_2^2 \eta &= 0.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Эти же выражения можно было бы получить даже еще раньше, рассмотрев выражения для кинетической E_k и потенциальной E_p энергии, которые используются при выводе дифференциальных уравнений методом Лагранжа. При этом методе несвязанные дифференциальные уравнения могут получиться только тогда, когда выражения как для кинетической, так и потенциальной энергии не содержат квадратичных членов с произведением координат. Поэтому нужно найти такое линейное преобразование координат, которое одновременно переводит выражения для E_k и E_p в суммы квадратов. В алгебре эта операция называется *преобразованием к главным осям*. Проведем его для данного случая и покажем, что при этом снова получатся уравнения движения в главных координатах ξ и η .

С учетом обозначений (6.4) и (6.5) выражения (6.2) и (6.3) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}E_k &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (k_1^2/k_2^2)\dot{\varphi}^2), \\ E_p &= \frac{1}{2}m(\omega_1^2 x^2 + 2k_1^2 x\varphi + (k_1^2/k_2^2)\omega_\varphi^2 \varphi^2).\end{aligned}\quad (6.18)$$

Теперь введем новые координаты u и v , которые зависят линейно от x и φ и обладают тем свойством, что записанные в этих координатах выражения для E_k и E_p не содержат членов с произведением координат. Для этого положим

$$x = u + v, \quad \varphi = au + bv. \quad (6.19)$$

После подстановки в выражения (6.18) и некоторых преобразований находим, что суммы квадратов получаются только тогда, когда

$$\begin{aligned}1 + (k_1^2/k_2^2)ab &= 0, \\ \omega_x^2 + k_1^2(a+b) + (k_1^2/k_2^2)\omega_\varphi^2 ab &= 0.\end{aligned}$$

Эти два уравнения можно рассматривать как систему для определения входящих в преобразование (6.19) постоянных a и b . Ее решение с учетом соотношений (6.9) и (6.11) дает

$$a = \kappa_2, \quad b = \kappa_1. \quad (6.20)$$

Если теперь уравнения (6.19) разрешить относительно u и v и воспользоваться соотношениями (6.16), то будем иметь

$$u = \frac{\kappa_1 x - \Phi}{\kappa_1 - \kappa_2} = \frac{\eta}{\kappa_1 - \kappa_2}, \quad v = \frac{\kappa_2 x - \Phi}{\kappa_2 - \kappa_1} = \frac{\xi}{\kappa_2 - \kappa_1}.$$

Здесь ξ и η — уже известные главные координаты. Таким образом, если с самого начала энергетические выражения (6.2) и (6.3) упростить путем преобразования к главным осям, то объем дальнейших вычислений, связанных с получением двух независимых друг от друга уравнений главных колебаний, сократится. Любое другое движение можно получить сложением главных колебаний. Применяя главные координаты, можно существенно упростить расчет линейно связанных колебаний.

6.1.3. Собственные частоты как экстремальные значения частного Релея

Для колебаний систем с одной степенью свободы собственную частоту можно найти из простых энергетических соображений, а именно из равенства максимальных значений потенциальной и кинетической энергии. Для колебаний систем с несколькими степенями свободы исследование энергий также позволяет сделать некоторые важные выводы.

Если потенциальную энергию отсчитывать от положения покоя колебательной системы, то для консервативной системы всегда будет выполняться равенство

$$(E_k)_{\max} = (E_p)_{\max} \quad (6.21)$$

Применим это соотношение к исследуемой здесь колебательной системе и для этого введем пока неизвестную частоту ω :

$$x = X \cos \omega t, \quad \varphi = \Phi \cos \omega t = \kappa X \cos \omega t. \quad (6.22)$$

Из полученных подстановкой (6.22) в формулы (6.18) выражений для энергии можно найти максимальную величину кинетической энергии (в момент прохождения положения равновесия $\cos \omega t = 0$) и соответственно максимальную величину потенциальной энергии (в момент изменения направления движения $\sin \omega t = 0$), т. е.

$$(E_k)_{\max} = \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 (1 + \kappa^2 (k_1^2/k_2^2)), \\ (E_p)_{\max} = \frac{1}{2} m X^2 (\omega_x^2 + 2\kappa k_1^2 + \kappa^2 \omega_\varphi^2 (k_1^2/k_2^2)).$$

Отсюда в силу равенства (6.21) можем получить выражение для квадрата частоты:

$$\omega^2 = \frac{\omega_x^2 + 2\kappa k_1^2 + \kappa^2 \omega_\varphi^2 (k_1^2/k_2^2)}{1 + \kappa^2 (k_1^2/k_2^2)} = R. \quad (6.23)$$

Это известное частное Релея можно использовать для определения частоты связанных колебаний двояким образом. Прежде всего видно, что ω полностью определена, если кроме параметров колебательной системы известно отношение амплитуд κ , найденное, например, экспериментально. Но и без этих сведений из частного

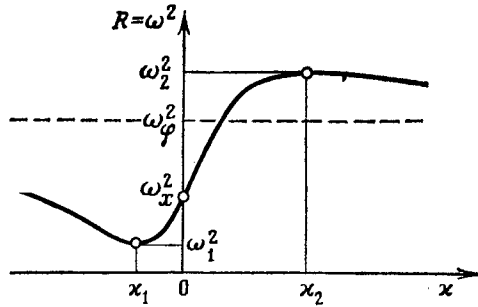


Рис. 186. Частное Релея R как функция отношения амплитуд κ .

Релея можно найти собственные частоты и соответствующие значения κ . Рассматривая R как функцию от κ , можно показать, что экстремальные значения этой функции в точности соответствуют квадратам собственных частот ω_1 и ω_2 . Если построить график $R(\kappa)$, как это сделано на рис. 186, то по нему находятся как ω_1 и ω_2 , так и соответствующие им отношения амплитуд κ_1 и κ_2 .

Это общее утверждение можно в данном случае подтвердить следующим образом. Продифференцировав (6.23) по κ и положив $dR/d\kappa = 0$, получают квадратное уравнение относительно κ :

$$\kappa^2 - \kappa \frac{\omega_\varphi^2 - \omega_x^2}{k_1^2} - \frac{k_2^2}{k_1^2} = 0,$$

решение которого после соответствующих преобразований снова дает уже известные из формул (6.11) значения κ_1 и κ_2 . Если полученные выражения подставить в равенство (6.23), то соответственно получится

$$R(\kappa_1) = \omega_1^2, \quad R(\kappa_2) = \omega_2^2.$$

Следует, конечно, заметить, что на практике расчет собственных частот как экстремальных значений частного Релея требует примерно столько же времени, как и непосредственное решение характеристического уравнения. Однако преимущество метода Релея состоит в том, что в окрестности собственной частоты величина R почти не меняется при изменении κ . Поэтому если непосредственно подставить в выражение (6.23) грубо приближенные значения κ , то для собственных частот обычно получаются удивительно хорошие приближения. Дальнейшие итерации позволяют еще улучшить эти значения. Ценность данного способа оценки собственных частот становится еще более очевидной для систем высокого порядка, когда характеристическое уравнение нельзя решить в явном виде.

6.1.4. Гравитационный маятник на упругой нити

На частном примере гравитационного маятника, подвешенного на упругой нити (рис. 187), покажем, что связанные колебания не всегда можно представить путем простого сложения главных колебаний и что здесь могут иметь место значительно более сложные явления.

Если нить (или спиральная пружина) маятника, массой которой пренебрегают, в ненапряженном состоянии имеет длину L_0 , то

$$E_k = \frac{1}{2}m(L^2\dot{\varphi}^2 + \dot{L}^2), \quad E_p = \frac{1}{2}c(L - L_0)^2 + mgh, \quad (6.24)$$

где $h = L_0(1 - \cos \varphi) - (L - L_0) \cos \varphi = L_0 - L \cos \varphi$. Используя эти выражения и уравнения Лагранжа второго рода, получаем

$$\begin{aligned} m\ddot{L} - mL\dot{\varphi}^2 - mg \cos \varphi + c(L - L_0) &= 0, \\ L\ddot{\varphi} + 2\dot{L}\dot{\varphi} + g \sin \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Теперь целесообразно ввести новую переменную x и следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= L - L_0 - mg/c, \quad L_s = L_0 + mg/c, \\ \omega_x^2 &= c/m, \quad \omega_\varphi^2 = g/L_s. \end{aligned}$$

При этом уравнения (6.25) принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_x^2 x &= (L_s + x)\dot{\varphi}^2 - g(1 - \cos \varphi), \\ \ddot{\varphi} + \omega_\varphi^2 \sin \varphi &= -\frac{1}{L_s} x\ddot{x} - \frac{2}{L_s} \dot{x}\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Общее решение этой нелинейной системы уравнений неизвестно. Однако нетрудно найти частное решение, для которого $\varphi = \varphi^* = 0$. Маятник в этом случае колеблется только вертикально, поэтому

$$x = x^* = X \cos(\omega_x t - \psi), \quad \varphi = \varphi^* = 0. \quad (6.27)$$

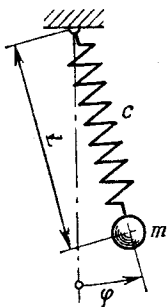


Рис. 187. Маятник на упругой нити.

Это однопериодическое движение можно рассматривать как главное колебание. Однако второе главное колебание находится лишь тогда, когда предполагается, что $\varphi \ll 1$, и соответственно этому в уравнениях опускаются все члены высшего порядка (по переменным x и φ), начиная со второго порядка. Тогда сами переменные x и φ оказываются главными координатами, так как в уравнениях движения (6.26) остаются лишь левые части, в каждую из которых входит только одна переменная. Хотя, таким образом, при $\varphi \ll 1$ дифференциальные уравнения формально становятся совершенно несвязанными, все же возможно взаимное влияние обеих колебаний. В данном случае оно состоит в неустойчивости основного колебания (6.27).

Чтобы объяснить это взаимное влияние, рассмотрим близкие к основному колебанию (6.27) движения и для этого положим

$$x = x^* + \tilde{x}, \quad \varphi = \varphi^* + \tilde{\varphi},$$

причем отклонения от главных координат, отмеченные волной, предполагаются столь малыми, что по ним возможна линеаризация. При этом из уравнения (6.26) получаются новые уравнения для координат близкого движения:

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{x}} + \omega_x^2 \tilde{x} &= 0, \\ \ddot{\tilde{\varphi}} \left(1 + \frac{x^*}{L_s}\right) + \frac{2x^*}{L_s} \dot{\tilde{\varphi}} + \omega_\varphi^2 \tilde{\varphi} &= 0. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Хотя для отклонений \tilde{x} и $\tilde{\varphi}$ эти уравнения и не связаны друг с другом, все же в силу второго из них движение по координате φ зависит от основного движения x^* . Поэтому уравнение для $\tilde{\varphi}$ имеет периодические коэффициенты, и его нужно исследовать способом, рассмотренным в гл. 4 для параметрических колебаний. Уравнение (6.28) для $\tilde{\varphi}$ совпадает с уравнением типа (4.31) при

$$p_1(t) = -\frac{2X\omega_x \sin(\omega_x t - \psi)}{L_s + X \cos(\omega_x t - \psi)}, \quad p_2(t) = \frac{L_s \omega_\varphi^2}{L_s + X \cos(\omega_x t - \psi)}.$$

Оба коэффициента имеют одинаковую круговую частоту ω_x , так что замена переменного (4.32) приводит к дифференциальному уравнению Хилла (4.33), причем единственный входящий в это уравнение коэффициент $P(t)$ является периодическим с частотой ω_x .

Из теории уравнения Хилла, которая ранее была рассмотрена для частного случая, а именно для уравнения Матье, известно, что если между собственной частотой осциллятора и частотой изменения коэффициента $P(t)$ существуют определенные целочисленные отношения, то могут появляться области неустойчивости решения. В данном случае возможны неустойчивые решения в окрестности частот

$$\omega_x = 2\omega_\varphi/n \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.29)$$

Приближенно можно использовать полученные для уравнений Матье области устойчивости (рис. 128), отложив по оси абсцисс величину

$$\lambda = (\omega_\varphi/\omega_x)^2.$$

Тогда видно, что область для $n=1$, т. е. для $\omega_x \approx 2\omega_\varphi$, является наиболее опасной в смысле возникновения связанных колебаний, так как она обладает наибольшей шириной. Область неустойчивости в данном случае расширяется тем больше, чем больше возрастает амплитуда X основного колебания.

Из этих рассуждений следует, что всегда возможное основное колебание (6.27), когда масса маятника колеблется вертикально, при определенном соотношении собственных частот может вызывать колебания по координате φ . В силу закона сохранения энергии это, конечно, возможно лишь за счет амплитуды основного колебания. Таким образом, в процессе колебаний энергия колебаний по координате x перекачивается в энергию колебаний по координате φ , и, как показывают эксперименты, этот процесс происходит периодически в обоих направлениях. Происходящие при этом процессы внешне очень похожи на обычные связанные колебания, однако в их основе лежит совершенно другой механизм возникновения. В то время как обычные связанные колебания ранее рассмотренного типа можно исследовать методом малых колебаний, т. е. путем линеаризации уравнений движения, описанные здесь явления принципиально нельзя объяснить, работая с линеаризованными уравнениями. На эти важные обстоятельства указал Меттлер (Ing.-Arch., 1959, Bd. XXVIII, 213—228).

6.1.5. Вынужденные колебания связанных осцилляторов

В качестве примера вынужденных колебаний связанных осцилляторов рассмотрим систему, изображенную на рис. 188. Внешнее воздействие осуществляется за счет колебания точки подвеса по вертикали, причем будем считать, что входная величина меняется по гармоническому закону:

$$x_e = X_e \cos \Omega t. \quad (6.30)$$

Пренебрегая демпфированием, непосредственно из второго закона Ньютона получим уравнения движения

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= \sum K_1 = -c_1(x_1 - x_e) - c_2(x_1 - x_2), \\ m_2 \ddot{x}_2 &= \sum K_2 = -c_2(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Введя обозначения

$$\frac{c_1 + c_2}{m_1} = \omega_1^2, \quad \frac{c_2}{m_2} = \omega_2^2, \quad \frac{m_2}{m_1} = \mu, \quad \frac{c_1}{m_1} = \omega_{10}^2,$$

запишем эти уравнения так:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 - \mu \omega_2^2 x_2 &= \omega_{10}^2 X_e \cos \Omega t, \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 - \omega_1 x_1 &= 0. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Как и в случае вынужденных колебаний с одной степенью свободы, здесь можно ожидать, что решения имеют период, равный периоду возмущения. Будем искать эти решения в виде

$$x_1 = X_1 \cos \Omega t, \quad x_2 = X_2 \cos \Omega t. \quad (6.32)$$

Подставив эти выражения в дифференциальные уравнения (6.31), обычным путем приходим к системе из двух уравнений для двух амплитуд. Ее решение будет таково:

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{\omega_{10}^2 (\omega_2^2 - \Omega^2) X_e}{(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \mu \omega_2^4}, \\ X_2 &= \frac{\omega_{10}^2 \omega_2^2 X_e}{(\omega_1^2 - \Omega^2) (\omega_2^2 - \Omega^2) - \mu \omega_2^4}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Представление о форме амплитудных характеристик получают, приравнявая нулю числитель и знаменатель. Знаменатель обращается в нуль при

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1^2 \\ \Omega_2^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \mp \sqrt{\frac{1}{4} (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \mu \omega_2^4}. \quad (6.34)$$

Таким образом, снова получаются собственные частоты, т. е. частоты свободных колебаний системы. Здесь также можно утверждать, что частоты ω_1 и ω_2 всегда расположены между собственными частотами Ω_1 и Ω_2 .

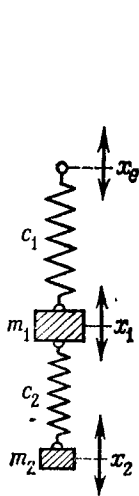


Рис. 188. Двойной пружинный маятник с подвижной точкой подвеса.

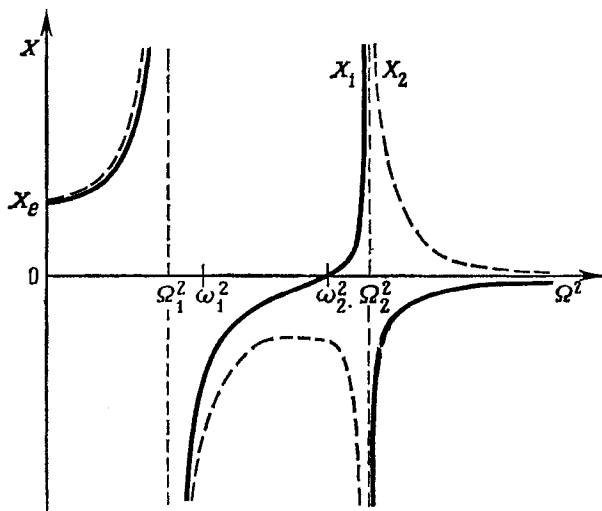


Рис. 189. Резонансные кривые недемпфированного двойного маятника, изображенного на рис. 188.

тами Ω_1 и Ω_2 . Следовательно, единственный нуль X_1 лежит между частотами, где обе амплитуды принимают бесконечное значение.

Резонансные кривые для (6.33) построены на рис. 189, где по оси абсцисс откладывается Ω^2 . Обе кривые начинаются при $\Omega=0$

и $X = X_e$, уходят в бесконечность при $\Omega = \Omega_1$ и $\Omega = \Omega_2$ и стремятся к нулю при $\Omega \rightarrow \infty$. В то время как X_2 для всех значений Ω отлично от нуля, X_1 принимает нулевое значение при $\Omega = \omega_2$. Этот факт заслуживает особого внимания: он показывает, что первая масса, на которую возмущающая сила действует раньше, чем на вторую, может оставаться в покое, если частота возмущения имеет некоторую определенную величину.

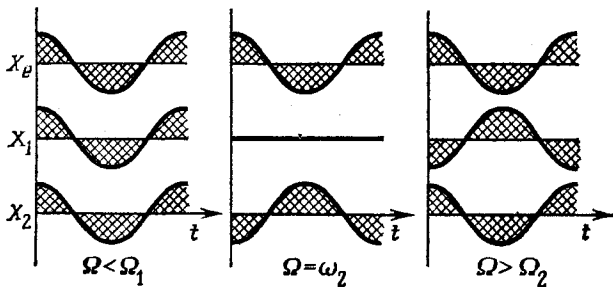


Рис. 190. Фазы вынужденных связанных колебаний в различных интервалах частот.

Данный эффект используется при конструировании гасителей колебаний. Если колеблющиеся части конструкций, например фундаменты машин, подвергаются возмущению с постоянной частотой, то колебания можно полностью погасить за счет того, что к первому осциллятору присоединяют соответствующим образом настроенный второй осциллятор, подобно тому как это схематически изображено на рис. 188. Явление гашения колебаний можно объяснить следующим образом. При правильной настройке вторая масса колеблется в противофазе с возмущением и как раз с такой амплитудой, что сила, с которой вторая пружина действует на первую массу, уравновешивает возмущающую силу, передающуюся через первую пружину. Для этого амплитуда колебаний второй массы, как это видно из второй формулы (6.33), должна быть равна

$$X_2 = -\frac{\omega_{10}^2 X_e}{\mu \omega_2^2} = -\frac{c_1}{c_2} X_e.$$

Величину сдвига фазы колебаний в различных интервалах частот легко представить при помощи знаков амплитудных функций. Эти соотношения схематически представлены на рис. 190 для трех случаев. При малых частотах возмущения ($\Omega < \Omega_1$) обе массы колеблются в фазе с возмущением; в местах резонанса, а также в нулях происходит скачок фазы; наконец, при достаточно больших частотах ($\Omega > \Omega_2$) колебания протекают в противофазе.

Следует указать, что конструкция гасителей колебаний, построенных по описанному принципу, конечно, имеет смысл только тогда, когда частота возмущения остается постоянной. Это условие выполняется для многих механических устройств. Если частоты возмущения переменны, то для того, чтобы получить надлежащие амплитудные характеристики, нужно установить дополнительные демпфирующие осцилляторы. Однако здесь мы не можем вдаваться в подробности.

Описанный принцип используют в радиотехнике в конструкции *отсасывающих контуров* (*фильтра-пробки*); см. рис. 191. Благодаря связи второго колебательного контура с первым контуром, находящимся под воздействием внешнего возмущения (например, радиопередачи), при подходящей настройке может быть достигнуто такое состояние, что одна определенная частота в первом контуре совершенно не будет проявляться.

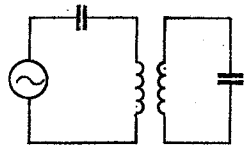


Рис. 191. Отсасывающий контур.

6.1.6. Влияние демпфирования на связанные колебания

До сих пор мы рассматривали лишь недемпфированные связанные колебания, а теперь исследуем влияние демпфирования в общем виде, не имея при этом в виду конкретный осциллятор. Как при исследовании простых осцилляторов с одной степенью свободы, примем силы демпфирования пропорциональными скоростям. В самом общем случае линейной колебательной системы с двумя степенями свободы нужно исследовать следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + b_{11}\dot{x}_1 + c_{11}x_1 + a_{12}\ddot{x}_2 + b_{12}\dot{x}_2 + c_{12}x_2 &= 0, \\ a_{21}\ddot{x}_1 + b_{21}\dot{x}_1 + c_{21}x_1 + a_{22}\ddot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2 + c_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Считая решения экспоненциальными функциями, как обычно делается при решении линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, получаем характеристическое уравнение четвертой степени

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + b_{11}\lambda + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + b_{12}\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 + b_{21}\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + b_{22}\lambda + c_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.36)$$

Если $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — четыре корня этого уравнения, то общее решение уравнений движения можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= X_{11}e^{\lambda_1 t} + X_{12}e^{\lambda_2 t} + X_{13}e^{\lambda_3 t} + X_{14}e^{\lambda_4 t}, \\ x_2 &= X_{21}e^{\lambda_1 t} + X_{22}e^{\lambda_2 t} + X_{23}e^{\lambda_3 t} + X_{24}e^{\lambda_4 t}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Коэффициенты отдельных составляющих в обоих координатах, как и в предыдущих случаях, не являются независимыми друг от друга, а связаны соотношением

$$x_j = \frac{X_{2j}}{X_{1j}} = -\frac{a_{11}\lambda_j^2 + b_{11}\lambda_j + c_{11}}{a_{12}\lambda_j^2 + b_{12}\lambda_j + c_{12}} = -\frac{a_{21}\lambda_j^2 + b_{21}\lambda_j + c_{21}}{a_{22}\lambda_j^2 + b_{22}\lambda_j + c_{22}} \quad (j = 1, 2, 3, 4). \quad (6.38)$$

Таким образом, в решение (6.37) входят четыре постоянные, которые нужно определить из начальных условий.

В зависимости от величины коэффициентов демпфирования b_{ij} корни характеристического уравнения (6.36) могут быть действительными или комплексными. В частности, возможен случай, когда два корня являются действительными, а два — комплексно сопряженными. Здесь мы остановимся лишь на наиболее интересном случае комплексных корней, которые должны быть попарно сопряженными. Тогда следует записать

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = -\mu_1 \pm i\omega_1, \quad \left. \begin{matrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{matrix} \right\} = -\mu_2 \pm i\omega_2, \quad (6.39)$$

причем μ_i и ω_i — действительные величины.

Теперь в уравнении (6.37) можно объединить два члена решения в один колебательный член точно так же, как это уже было сделано для колебаний с одной степенью свободы, и решение примет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= C_{11}e^{-\mu_1 t} \cos(\omega_1 t - \varphi_{11}) + C_{12}e^{-\mu_2 t} \cos(\omega_2 t - \varphi_{12}), \\ x_2 &= C_{21}e^{-\mu_1 t} \cos(\omega_1 t - \varphi_{21}) + C_{22}e^{-\mu_2 t} \cos(\omega_2 t - \varphi_{22}), \end{aligned} \quad (6.40)$$

где

$$\begin{aligned} C_{11} &= \sqrt{X_{11}^2 + X_{12}^2}, & C_{12} &= \sqrt{X_{13}^2 + X_{14}^2}, \\ C_{21} &= \sqrt{\kappa_1^2 X_{11}^2 + \kappa_2^2 X_{12}^2}, & C_{22} &= \sqrt{\kappa_3^2 X_{13}^2 + \kappa_4^2 X_{14}^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi_{11} &= \frac{X_{12}}{X_{11}}, & \operatorname{tg} \varphi_{12} &= \frac{X_{14}}{X_{13}}, & \operatorname{tg} \varphi_{21} &= \frac{\kappa_2 X_{12}}{\kappa_1 X_{11}}, & \operatorname{tg} \varphi_{22} &= \frac{\kappa_4 X_{14}}{\kappa_3 X_{13}}. \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение представляется суммой двух демпфированных колебаний. И в этом случае можно было бы разрешить систему (6.40) относительно демпфированных составляющих колебаний, чтобы таким путем найти главные колебания и главные координаты. Однако соотношения здесь намного сложнее, чем в недемпфированном случае, так как отношения амплитуд (6.38) также становятся комплексными. Поэтому в преобразование, приводящее к главным координатам, должны были бы входить комплексные коэффициенты; при этом преобразование становится запутанным и не имеет какого-либо практического значения, тем более что наглядность, присущая главным координатам, теперь утрачивается.

В вынужденных колебаниях влияние демпфирования сказывается прежде всего в том, что разрывы резонансных кривых заменяются конечными пиками. Но одновременно исчезает и показанный на рис. 189 нуль резонансной функции первой массы.

6.2. Колебательная система с произвольным числом степеней свободы

В дальнейшем будут рассмотрены совершенно общие колебательные системы со сколь угодно большим числом степеней свободы. Число координат x_p ($p=1, \dots, n$), необходимое для однозначного описания движения таких систем, равно числу степеней свободы. При принципиально несложных, но из-за наличия многих степеней свободы весьма трудоемких вычислениях мы будем придерживаться обозначений, принятых в тензорном исчислении и позволяющих сократить записи. Различные координаты x_p отличаются индексами и могут рассматриваться как компоненты одного вектора x . Соответствующим образом характеризуются двойными индексами и входящие в уравнение движения коэффициенты, например a_{pq} . В общем случае коэффициенты образуют квадратные матрицы и оба индекса могут пробегать свои интервалы значений независимо друг от друга. В особых случаях, например при записи определителей миноров или производных, применяются дополнительные индексы.

Далее мы будем следовать известному правилу суммирования Эйнштейна, согласно которому в выражениях произведений следует суммировать по всем индексам, встречающимся хотя бы дважды.

Это правило мы распространим и на произведения функций, но не на суммы и разности, для которых правило суммирования недействительно. Если в виде исключения нельзя суммировать по одному из многократно встречающихся индексов, то он заключается в круглые скобки; таким образом, стоящие в скобках индексы при следовании правилу суммирования не учитываются.

Для наглядности приведем некоторые примеры использования принятых обозначений:

$$\begin{aligned} x_p y_p &= \sum_{p=1}^n x_p y_p = z, & a_{pq} x_q &= \sum_{q=1}^n a_{pq} x_q = y_p, \\ a_{pq} x_p x_q &= \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{pq} x_p x_q = Q, & A_p \cos \alpha_p &= \sum_{p=1}^n A_p \cos \alpha_p. \\ x_{pq} y_{(pq)} &= z_{pq}, & x_{pq} y_{p(q)} &= z_q, & x_{pq} y_{pq} &= z. \end{aligned}$$

6.2.1. Уравнения движения линейного недемпфированного осциллятора и их решение

Рассмотрим консервативный (т. е. недемпфированный) осциллятор и снова используем при составлении уравнений его движения уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{x}_p} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x_p} + \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x_p} = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, n), \quad (6.41)$$

где каждому значению p соответствует одно из уравнений движения. Чтобы составить выражения для энергии, прежде всего обратим внимание на то, что потенциальная энергия E_{pot} в самом общем случае является функцией координат. Разложим эту функцию в ряд Тейлора относительно некоторого определенного состояния:

$$E_{\text{pot}} = (E_{\text{pot}})_0 + \left(\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x_p} \right)_0 x_p + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial x_p \partial x_q} \right)_0 x_p x_q + \dots \quad (6.42)$$

$(p, q = 1, 2, \dots, n).$

Надлежащим выбором начала отсчета энергии устраняется первый член правой части. Однако второй член также исчезнет, если разложение провести относительно такого состояния, которое соответствует положению равновесия. В консервативных системах положения равновесия характеризуются экстремальными значениями потенциальной энергии и для них первые производные обращаются в нуль. Если положение равновесия устойчиво, то потенциальная энергия имеет в нем минимум, и следовательно, третий член разложения должен быть в этом случае положительной квадратичной формой координат системы. Далее мы будем рассматривать *малые колебания* около положения равновесия и поэтому сможем пренебрегать членами высших порядков. Это полностью соответствует обычной при методе малых колебаний линеаризации уравнений движения. Если использовать обозначения

$$\left(\frac{\partial^2 E_{\text{pot}}}{\partial x_p \partial x_q} \right) = c_{pq} = c_{qp},$$

то выражение потенциальной энергии запишется в виде квадратичной формы

$$2E_{\text{pot}} = c_{pq} x_p x_q. \quad (6.43)$$

Отсюда для системы с одной степенью свободы будем просто иметь

$$2E_{\text{pot}} = c_{11} x_1^2.$$

Если речь идет о потенциальной энергии напряженной пружины, то c_{11} равно удвоенной жесткости пружины (поскольку x_1 означает деформацию пружины).

Если x — пространственные координаты, то кинетическая энергия E_k произвольной механической системы представляется интегралом

$$E_k = \frac{1}{2} \int x^2 dm,$$

причем интегрирование проводится по всем входящим в систему массам. По определению это выражение всегда положительно. В дальнейшем нам потребуются некоторые результаты аналитической механики, которые мы будем приводить без доказательства. Один из них состоит в следующем: для системы твердых тел, обычно

рассматриваемой в теории колебаний, интеграл кинетической энергии может быть вычислен и значительно упрощен. Для этого целесообразно ввести *обобщенные координаты*, в которых x , например, может являться углом. Тогда E_k будет положительно определенной квадратичной формой

$$2E_k = a_{pq} \dot{x}_p \dot{x}_q, \quad (6.44)$$

матрица коэффициентов которой симметрична ($a_{pq} = a_{qp}$). В механических осцилляторах коэффициенты a_{pq} представляют собой численные меры масс или моментов инерции.

Применение уравнений Лагранжа (6.41) и выражений (6.43) и (6.44) для энергий приводит к уравнениям движения

$$a_{pq} \ddot{x}_q + c_{pq} x_q = 0. \quad (6.45)$$

Полагая $x_q = X_q e^{\lambda t}$, получаем систему уравнений для коэффициентов X_q

$$(a_{pq} \lambda^2 + c_{pq}) X_q e^{\lambda t} = 0, \quad (6.46)$$

которая имеет ненулевые решения только тогда, когда определитель из коэффициентов при X_q равен нулю:

$$|a_{pq} \lambda^2 + c_{pq}| = 0. \quad (6.47)$$

Вычисление этого определителя приводит к алгебраическому уравнению n -й степени относительно λ^2 , все корни которого являются отрицательными действительными величинами. Это также можно видеть непосредственно из уравнения (6.46), которое для наших целей можно записать в следующем виде:

$$a_{pq} X_q \lambda^2 + c_{pq} X_q = 0.$$

Умножив это уравнение на X_p , получим

$$a_{pq} X_p X_q \lambda^2 + c_{pq} X_p X_q = 0,$$

или

$$\lambda^2 = - \frac{c_{pq} X_p X_q}{a_{pq} X_p X_q}.$$

Если теперь рассматривать колебания, происходящие около положения равновесия, то в силу (6.43) и (6.44) числитель и знаменатель этой дроби будут положительно определенными квадратичными формами, так что $\lambda^2 < 0$. Теперь можно положить $\lambda_p^2 = -\omega_p^2$, где ω_p — действительная величина. Каждому корню λ^2 соответствуют два корня λ , которые отличаются только знаком:

$$\lambda_{p1} = +i\omega_p, \quad \lambda_{p2} = -i\omega_p.$$

Если исключить вырожденные случаи, когда имеют место кратные корни, то общее решение уравнений движения можно записать в

виде

$$x_q = X_{pq1} e^{i\omega_p t} + X_{pq2} e^{-i\omega_p t}. \quad (6.48)$$

В этом решении содержится $2n^2$ постоянных, которые мы сначала заменим таким же количеством других постоянных, положив

$$X_{pq1} = 1/2 X_{(pq)} \exp(-i\varphi_{pq}), \quad X_{pq2} = 1/2 X_{(pq)} \exp(+i\varphi_{pq}).$$

При этом выражение (6.48) примет простой вид:

$$x_q = X_{p(q)} \cos(\omega_p t - \varphi_{pq}). \quad (6.49)$$

Между $2n^2$ постоянных X_{pq} и φ_{pq} существуют еще другие зависимости, которые получаются при подстановке в систему исходных уравнений (6.45) частного решения, обозначенного, например, индексом r :

$$x_{qr} = X_{(qr)} \cos(\omega_r t - \varphi_{qr}),$$

что дает

$$(c_{pq} - \omega_r^2 a_{pq}) X_{q(r)} \cos \varphi_{q(r)} \cos \omega_{(r)} t + \\ + (c_{pq} - \omega_r^2 a_{pq}) X_{q(r)} \sin \varphi_{q(r)} \sin \omega_{(r)} t = 0. \quad (6.50)$$

Так как эти равенства должны выполняться в любой момент времени, отсюда получаются две системы уравнений для определения считающихся теперь неизвестными постоянных $X \cos \varphi$ и $X \sin \varphi$:

$$(c_{pq} - \omega_r^2 a_{pq}) X_{q(r)} \cos \varphi_{q(r)} = 0, \\ (c_{pq} - \omega_r^2 a_{pq}) X_{q(r)} \sin \varphi_{q(r)} = 0. \quad (6.51)$$

Поскольку каждая из этих систем, содержащая n уравнений, однородна, она имеет ненулевые решения только тогда, когда ее определитель равен нулю, так что из нее можно найти только отношения искомых величин. Поэтому положим

$$\kappa_{qr} = \frac{X_{(qr)} \cos \varphi_{qr}}{X_{(1r)} \cos \varphi_{1r}}, \quad \kappa_{qr}^* = \frac{X_{(qr)} \sin \varphi_{qr}}{X_{(1r)} \sin \varphi_{1r}}. \quad (6.52)$$

Из того факта, что получающиеся из систем (6.51) уравнения для определения κ_{qr} и κ_{qr}^* идентичны, следует, что

$$\kappa_{qr} = \kappa_{qr}^* = \frac{X_{qr}}{X_{1(r)}}, \quad \varphi_{qr} = \varphi_{1r} = \varphi_r, \quad X_{qr} = \kappa_{qr} X_{1(r)} = \kappa_{qr} X_r. \quad (6.53)$$

Таким образом решение (6.49) принимает вид

$$x_q = \kappa_{pq} X_p \cos(\omega_p t - \varphi_p). \quad (6.54)$$

В это общее решение входят только $2n$ постоянных — как раз столько, сколько нужно для того, чтобы удовлетворялись начальные условия. Согласно формулам (6.54), общее решение состоит

из n гармоник, которые в общем случае входят в каждую координату и складываются, не оказывая никакого влияния друг на друга. В различных координатах отдельные гармоники находятся или в одинаковой фазе ($\kappa > 0$), или в противофазе ($\kappa < 0$); при отсутствии демпфирования другие сдвиги по фазе невозможны. Если задана амплитуда одной гармоники для какой-либо координаты, то тем самым определяются амплитуды этой гармоники и для всех остальных координат. Матрица κ_{pq} полностью определяет распределение амплитуд отдельных гармоник во всех координатах. Поэтому κ_{pq} называют *коэффициентами распределения*.

6.2.2. Главные координаты и главные колебания

Каждая гармоника в общем решении (6.54) может быть представлена в виде новой координаты

$$\xi_p = X_{(p)} \cos(\omega_p t - \varphi_p); \quad (6.55)$$

при этом (6.54) принимает вид

$$x_q = \kappa_{pq} \xi_p, \quad (6.56)$$

где величины ξ_p можно теперь рассматривать как главные координаты. По определению каждая из главных координат может описывать только одно гармоническое колебание с одной из собственных частот системы, так что движение в исходных координатах x_q складывается из различных возможных главных колебаний.

Между исходными координатами x_q и главными координатами ξ_p существует заданная уравнениями (6.56) линейная зависимость. Разрешая эти уравнения относительно ξ_p , получаем

$$\xi_p = \kappa_{pq}^{-1} x_q, \quad (6.57)$$

где κ_{pq}^{-1} — матрица, обратная матрице κ_{pq} .

Из равенств (6.55) видно, что каждая из главных координат удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{\xi}_p + \omega_p^2 \xi_p = 0. \quad (6.58)$$

Но такие уравнения движения можно получить из уравнений Лагранжа только тогда, когда в главных координатах кинетическая энергия E_k и потенциальная энергия $E_{\text{пот}}$ не содержат членов с произведениями координат, например

$$2E_k = a_{pp}^* \dot{\xi}_p \dot{\xi}_p, \quad 2E_{\text{пот}} = c_{pp}^* \xi_p \xi_p.$$

Точно так же как это было сделано для колебаний с двумя степенями свободы, в самом общем случае линейной колебательной системы для определения главных координат нужно найти такое линейное преобразование координат, которое одновременно приво-

дит квадратичные формы для кинетической и потенциальной энергий к главным осям (т. е. к сумме квадратов). Практически это преобразование к главным осям осуществляется при помощи уравнений (6.56) и (6.57).

Теперь мы выведем еще одно важное соотношение между коэффициентами распределения κ , относящимися к различным главным колебаниям. Согласно уравнениям (6.51) и (6.52), коэффициенты κ для r -го колебания удовлетворяют уравнениям

$$(c_{pq} - \omega_{(r)}^2 a_{pq}) \kappa_{qr} = 0, \quad (6.59)$$

которые можно записать в виде

$$c_{pq} \kappa_{qr} = \omega_{(r)}^2 a_{pq} \kappa_{qr}. \quad (6.60)$$

Заметим, между прочим, что отсюда находится выражение для частоты

$$\omega_{(r)}^2 = \frac{c_{pq} \kappa_{qr}}{a_{pq} \kappa_{qr}}. \quad (6.61)$$

Если известно распределение амплитуд для r -го колебания, т. е. известны элементы r -го столбца матрицы κ , то частота этого колебания может быть вычислена по формуле (6.61).

Припишем теперь к уравнению (6.60), записанному для r -го колебания, соответствующее уравнение для s -го колебания, умножив первое уравнение на κ_{ps} , а второе — на κ_{pr} :

$$\begin{aligned} c_{pq} \kappa_{qr} \kappa_{ps} &= \omega_{(r)}^2 a_{pq} \kappa_{qr} \kappa_{ps}, \\ c_{pq} \kappa_{qs} \kappa_{pr} &= \omega_{(s)}^2 a_{pq} \kappa_{qr} \kappa_{pr}. \end{aligned}$$

Так как $c_{pq} = c_{qp}$, мы имеем

$$c_{pq} \kappa_{qr} \kappa_{ps} = c_{qp} \kappa_{qr} \kappa_{ps} = c_{pq} \kappa_{pr} \kappa_{qs} = c_{pq} \kappa_{qs} \kappa_{pr}.$$

Следовательно, входящие в левые части равенств выражения имеют одинаковую величину. Далее, $a_{pq} = a_{qp}$, и поэтому коэффициенты при частотах в правых частях равенств тоже равны. Вычитая одно уравнение из другого, получаем

$$[\omega_{(r)}^2 - \omega_{(s)}^2] a_{pq} \kappa_{pr} \kappa_{qs} = 0.$$

Так как по предположению частоты должны быть различными, это условие выполняется только в том случае, когда

$$a_{pq} \kappa_{pr} \kappa_{qs} = 0 \quad (r \neq s). \quad (6.62)$$

Это — общая форма так называемого *соотношения ортогональности*, которому удовлетворяют коэффициенты распределения амплитуд. По аналогии с соответствующими формулировками векторного исчисления говорят, что «векторы» $\kappa_{p(r)}$ и $\kappa_{q(s)}$ (r и s при этом — фиксированные числа!) ортогональны относительно матри-

цы a_{pq} , которая определяется распределением масс колебательной системы.

Соотношение ортогональности (6.62) упрощается, если в системе отсутствуют связи между массами. Тогда все a_{pq} при $p \neq q$ обращаются в нуль и двойная сумма (6.62) переходит в одинарную сумму

$$a_{pp} \kappa_{pr} \kappa_{ps} = 0 \quad (r \neq s). \quad (6.63)$$

С учетом равенств (6.53) это соотношение можно записать также в виде

$$\frac{a_{pp} \chi_{pr} \chi_{ps}}{\chi_{1r} \chi_{1s}} = 0. \quad (6.64)$$

Значение соотношения ортогональности состоит прежде всего в том, что оно позволяет существенно упростить весьма сложное выражение для кинетической энергии, а ведь именно на этом выражении основываются многочисленные способы расчета колебаний, например собственных колебаний. Если в формулу (6.44) подставить выражения (6.54), то получится

$$2E_k = a_{pq} \omega_r \kappa_{pr} \chi_r \sin(\omega_r t - \varphi_r) \omega_s \kappa_{qs} \chi_s \sin(\omega_s t - \varphi_s). \quad (6.65)$$

В силу равенств (6.62) эта четырехкратная сумма (по индексам p, q, r, s) существенно упрощается и принимает вид

$$2E_k = \omega_r^2 \chi_r^2 \sin^2(\omega_r t - \varphi_r) a_{pq} \kappa_{ps} \kappa_{qr}. \quad (6.66)$$

Отсюда видно, что общая кинетическая энергия складывается из значений энергии, которые вычисляются для отдельных гармоник (главных колебаний).

Впрочем, выражения для энергии, относящиеся к одной из гармоник колебаний, можно использовать (как это было показано выше для случая двух степеней свободы) для того, чтобы составить *частное Релея*, позволяющее определить собственные частоты. При этом следует использовать тот факт, что из-за отсутствия сил демпфирования максимальные значения кинетической и потенциальной энергии должны быть равны. Для максимальной кинетической энергии из формулы (6.66) получаем

$$(2E_k)_{\max} = \omega_r^2 \chi_{(r)}^2 a_{pq} \kappa_{p(r)} \kappa_{q(r)}. \quad (6.67)$$

Соответственно для потенциальной энергии из формулы (6.43) с учетом (6.54) имеем

$$2(E_{\text{пот}})_{\max} = \chi_r^2 c_{pq} \kappa_{p(r)} \kappa_{q(r)}. \quad (6.68)$$

Приравняв эти выражения, получим частное Релея

$$R = \omega_r^2 = \frac{c_{pq} \kappa_{p(r)} \kappa_{q(r)}}{a_{pq} \kappa_{p(r)} \kappa_{q(r)}}. \quad (6.69)$$

Если входящую в κ частоту $\omega_r = \omega$ рассматривать как независимую переменную, то R будет функцией ω . Как и в случае с двумя степенями свободы, собственные частоты ω_r характеризуются тем, что при них $R(\omega)$ принимает экстремальные значения. На этом свойстве основывается широко используемый метод Релея для нахождения собственных частот.

6.2.3. Колебательные цепи

С технической точки зрения важен частный случай, когда осцилляторы включены последовательно таким образом, что n -й осциллятор связан только с предыдущим ($n-1$)-м и последующим

$(n+1)$ -м осцилляторами. Систему такого рода называют колебательной цепью. В качестве примера можно привести вал с насаженными на него дисками. При этом диски ведут себя как колеблющиеся массы, а упругая связь осуществляется расположенными между отдельными дисками частями вала.

Подробно рассмотрим лишь частный случай однородной колебательной цепи, состоящей из одинаковых осцилляторов. На рис. 192 изображены некоторые типичные примеры. Колебательную цепь,

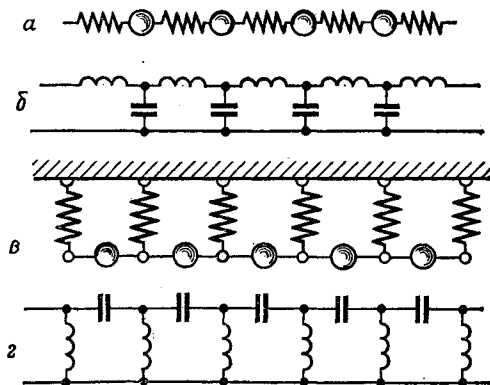


Рис. 192. Колебательные цепи.

показанную на рис. 192, а, можно рассматривать как модель вала с равномерно распределенными на нем дисками. Связь между массами в этом случае является чисто *силовой*, так как взаимное влияние происходит исключительно через пружины. Электрическим аналогом этой цепи является изображенная на рис. 192, б цепочка из *LC*-контуров. Соответствующие уравнения колебаний в обоих случаях однотипны. Несколько иной вид имеют уравнения колебаний в цепях, показанных на рис. 192, в и 192, г. В механическом осцилляторе связь осуществляется за счет инерции масс, в электрическом — за счет индуктивности катушек.

Колебательные цепи — в зависимости от их реакции на периодические возмущения на входе — называют фильтрами низких или высоких частот. На рис. 192, а и 192, б показаны *фильтры низких частот*, через которые могут проходить только возмущения с частотами, лежащими ниже определенной граничной частоты. Наоборот, на рис. 192, в и 192, г представлены *фильтры высоких частот*, пропускающие лишь колебания, частота которых лежит выше некоторой граничной частоты.

Для расчета собственных колебаний рассмотрим схему, изображенную на рис. 192, а. При одинаковых массах $m_p = m$ и жестко-

стях пружин $c_p = c$ получим уравнение движения p -й массы:

$$m\ddot{x}_p = -c(x_p - x_{p-1}) - c(x_p - x_{p+1}), \quad (6.70)$$

или

$$m\ddot{x}_p + 2cx_p - c(x_{p-1} + x_{p+1}) = 0.$$

Заведомо существующее главное колебание p -й массы будем искать в следующем виде:

$$x_p = X_p \cos(\omega t - \varphi).$$

Подставив это решение в уравнение (6.70), будем иметь

$$[(2c - \omega^2 m)X_p - c(X_{p-1} + X_{p+1})] \cos(\omega t - \varphi) = 0.$$

Это уравнение выполняется для любого момента времени t только тогда, когда выражение, стоящее в квадратных скобках, равно нулю. Положив

$$\omega^2 m / c = (\omega / \omega_0)^2 = \eta^2, \quad (6.71)$$

получим уравнение

$$(2 - \eta^2) X_p - X_{p-1} - X_{p+1} = 0. \quad (6.72)$$

При $p=1, 2, \dots, n$ для амплитуд X получается система линейных уравнений, которую можно решить методом итераций. Так как амплитуды опять-таки можно найти с точностью до некоторого неопределенного множителя, целесообразно ввести уже многократно использовавшиеся отношения амплитуд

$$\kappa_p = X_p / X_1$$

и привести уравнения (6.72) к следующему виду:

$$\kappa_p = (2 - \eta^2) \kappa_{p-1} - \kappa_{p-2}. \quad (6.73)$$

Отсюда можно последовательно вычислить все κ_p , поскольку граничные условия, т. е. условия на обоих концах цепи, известны. Мы ограничимся здесь случаем, когда оба конца цепи закреплены, так что

$$X_0 = 0 \text{ и } X_{n+1} = 0; \quad (6.74)$$

тогда уравнения (6.73) приводят к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 1, & \kappa_2 &= -\eta^2 + 2, \\ \kappa_3 &= \eta^4 - 4\eta^2 + 3, \\ \kappa_4 &= -\eta^6 + 6\eta^4 - 10\eta^2 + 4, \\ &\dots \end{aligned}$$

Эти отношения амплитуд являются функциями отношения частот η и поэтому называются *частотными функциями*. Они часто использовались для расчета собственных частот колебательных це-

пей; см., в частности, книгу Бицено и Граммеля [2]. Собственные частоты можно определить как нули $(n+1)$ -й частотной функции, т. е. для безразмерных собственных частот η_q справедливо соотношение $\kappa_{n+1}(\eta_q)=0$. Таким образом, собственные частоты отличаются тем особым свойством, что для них автоматически выполняется граничное условие $\kappa_{n+1}=0$, заданное на конце цепи. Таблицы нулей частотных функций до $n=11$ приведены в работе [2, т. II, гл. XIII].

Собственную частоту, однако, можно выразить и в явном виде. С этой целью попытаемся найти решение итерационной системы (6.72), положив

$$X_p = C \sin p\alpha. \quad (6.75)$$

При этом первое из граничных условий (6.74) удовлетворяется. Для того чтобы вместе с тем удовлетворялось и второе, должно выполняться равенство

$$(n+1)\alpha = q\pi, \quad q=1, 2, \dots,$$

или

$$\alpha = \frac{\pi q}{n+1}. \quad (6.76)$$

С другой стороны, при подстановке выражения (6.75) в уравнения (6.72) будем иметь

$$C \sin p\alpha (2 - \eta^2 - 2 \cos \alpha) = 0.$$

Так как значения $C=0$ и $\sin p\alpha=0$ нас не интересуют, это условие может выполняться лишь тогда, когда

$$\eta^2 = 2(1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2(\alpha/2). \quad (6.77)$$

Принимая во внимание соотношения (6.71) и (6.76), собственные частоты можно определить непосредственно:

$$\omega = \eta\omega_0 = 2\omega_0 \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \omega_q = 2\omega_0 \sin \frac{\pi q}{2(n+1)}. \quad (6.78)$$

Это решение легко найти и графически, как показано на рис. 193 для случая $n=4$. На оси ω откладывается отрезок, равный $2\omega_0$, и из начальной точки этого отрезка описывают четверть окружности радиусом $2\omega_0$. Затем полученную таким образом четверть круга делят на $n+1$ равных секторов. Если теперь из точек пересечения окружности с ограничивающими эти секторы радиусами опустить перпендикуляры на ось ω , то расстояния от начала отсчета до оснований перпендикуляров будут представлять собой величины собственных частот. С учетом соотношений (6.75) и (6.76) для распределения амплитуд получается следующая формула:

$$X_{pq} = C_q \sin \frac{\pi pq}{n+1}. \quad (6.79)$$

В случае $n=4$ распределения амплитуд для каждой из четырех собственных частот ($q=1, 2, 3, 4$) показаны на рис. 194.

Общее решение снова получается сложением отдельных главных колебаний

$$x_p = C_q \sin \frac{\pi pq}{n+1} \cos(\omega_q t - \varphi_q). \quad (6.80)$$

Входящие сюда постоянные C_q и φ_q , как известно, находятся из начальных условий, заданных для каждой из масс. При $t=0$ из

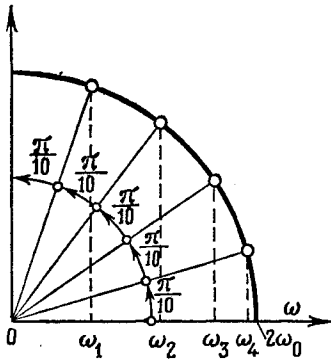


Рис. 193. Определение собственных частот однородной колебательной цепи с $n=4$.

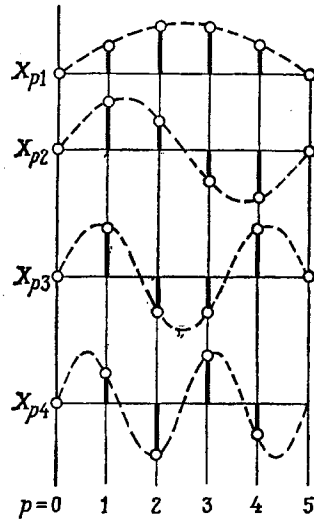


Рис. 194. Распределение амплитуд для собственных частот однородной колебательной цепи с $n=4$.

уравнения (6.80) непосредственно получаются две системы из уравнений каждая:

$$x_p(0) = C_q \cos \varphi_q \sin \frac{\pi pq}{n+1},$$

$$\dot{x}_p(0) = C_q \sin \varphi_q \omega_q \sin \frac{\pi pq}{n+1},$$

которые позволяют определить величины $C_q \cos \varphi_q$ и $C_q \sin \varphi_q$. В случае рассматриваемой здесь колебательной цепи полученное выше условие ортогональности, соотношение (6.63), принимает вид

$$\sin \frac{\pi pr}{n+1} \sin \frac{\pi ps}{n+1} = 0, \quad r \neq s. \quad (6.81)$$

При других граничных условиях решения можно найти аналогично тому, как это было сделано для колебательной цепи с закрепленными концами, однако на этом мы здесь не будем останавливаться.

6.2.4. Фильтры

При помощи рассмотренных в предыдущем разделе методов можно рассчитывать и вынужденные колебания в колебательной цепи. Так как в колебательных цепях свойства избирательности проявляются еще сильнее, чем в простом осцилляторе с одной степенью свободы, эти цепи часто применяют в качестве фильтров, чтобы из смеси возбуждаемых колебаний отфильтровать определенные частоты или определенные интервалы частот.

В качестве примера снова рассмотрим изображенную на рис. 192, а колебательную цепь, однако теперь ее левый конец не закрепляется, а совершает периодическое движение

$$x_0 = x_e = X_e \cos \Omega t. \quad (6.82)$$

При этом в уравнениях движения (6.70) для отдельных масс ничего не изменится, и мы можем искать периодическое решение, обладающее такой же частотой, что и возмущение, и происходящее либо в фазе с возмущением, либо в противофазе с ним, положив

$$x_p = X_p \cos \Omega t. \quad (6.83)$$

Приведенное выше выражение (6.75) для амплитуды X_p теперь мы запишем так:

$$X_p = C \sin(\rho\alpha + \beta). \quad (6.84)$$

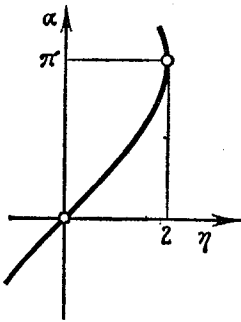


Рис. 195. Вспомогательная величина $\alpha = \alpha(\eta)$.

Нововведенная постоянная β дает возможность «подогнать» решение к граничному условию в начале цепи. Величина α не позволяет этого сделать, ибо при подстановке выражения (6.84) в амплитудное соотношение (6.72) выясняется, что зависимость между α и η определяется равенством (6.77). Отличие от соотношения из предыдущего раздела здесь состоит в том, что при исследовании

собственных колебаний сначала должна была быть определена η как относительная собственная частота, а для вынужденных колебаний, наоборот, η — относительная частота возмущения — известна.

Зависимость между α и η представлена на рис. 195. Из него видно, что выбранная зависимость (6.84) имеет смысл только для $\eta \leq 2$ (случай $\eta > 2$ мы рассмотрим ниже) и что в дальнейшем для упрощения вычислений за меру частоты возмущения можно принять ве-

личину α . (Как показывает рис. 195, при $\eta < 2$ величина α примерно пропорциональна величине η .)

При заданных здесь граничных условиях с учетом (6.84) на амплитуды накладываются следующие требования:

$$\begin{aligned} X_0 &= X_e = C \sin \beta, \\ X_{n+1} &= 0 = C \sin [(n+1)\alpha + \beta], \end{aligned} \quad (6.85)$$

из которых находятся постоянные β и C :

$$\begin{aligned} \beta &= q\pi - (n+1)\alpha \quad (q = 1, 2, 3, \dots), \\ C &= \frac{X_e}{\sin \beta} = \frac{X_e}{(-1)^{q+1} \sin (n+1)\alpha}, \end{aligned}$$

так что решение (6.83) принимает следующий вид:

$$x_p = X_e \frac{\sin (n+1-p)\alpha}{\sin (n+1)\alpha} \cos \Omega t. \quad (6.86)$$

Наибольший интерес снова представляют коэффициенты усиления, т. е. отношения амплитуд колебания отдельных масс к амплитуде возмущения. В данном случае коэффициентами усиления являются отношения двух функций синуса в (6.86):

$$V_p = \frac{\sin (n+1-p)\alpha}{\sin (n+1)\alpha}. \quad (6.87)$$

Графики этих выражений как функций величины α в основном соответствуют амплитудным характеристикам. В случае $\Omega=0$, т. е. $\alpha=0$, эти графики начинаются при

$$V_{p0} = 1 - \frac{p}{n+1}.$$

Величины V_{p0} представляют собой статические отклонения отдельных масс при единичном смещении начала цепи. С ростом порядкового номера p массы ее статическое отклонение убывает по линейному закону.

Знаменатель выражения (6.87) обращается в нуль при тех значениях α , которые соответствуют собственным частотам цепи. Это непосредственно вытекает из соотношения (6.76), определяющего собственные частоты. В интересующем нас интервале $0 < \alpha < \pi$ существуют n нулей знаменателя, а следовательно, и n резонансных разрывов амплитудной характеристики. Числитель выражения (6.87) имеет нули при

$$\alpha = \frac{q\pi}{n+1-p}.$$

Поскольку в рассматриваемом интервале должно выполняться неравенство $\alpha < \pi$, существуют $n-p$ нулей. Таким образом, амплитудная характеристика первой массы цепи имеет $n-1$ нулей. Для

каждой следующей массы один из нулей исчезает, и так происходит до тех пор, пока, наконец, амплитудная характеристика последней n -й массы не будет иметь ни одного нуля.

Для *граничной частоты* $\Omega = 2\omega_0$ мы имеем $\eta = 2$ и $\alpha = \pi$, так что всегда выполняются равенства

$$V_p(\alpha = \pi) = \pm \left(1 - \frac{p}{n+1}\right) = \pm V_{p0}, \quad (6.88)$$

т. е. снова получаются статические отклонения, причем знаки перемещения масс каждый раз меняются. Это указывает на то, что при возмущении с граничной частотой соседние массы цепи всегда колеблются в противофазе.

Но что же будет происходить при частотах возмущения, больших граничной частоты $\Omega = 2\omega_0$? В этом случае в выражении (6.84) тригонометрический синус следует заменить синусом гиперболическим и положить

$$X_p = C \operatorname{sh}(p\alpha + \beta). \quad (6.89)$$

После подстановки этого выражения в уравнение (6.72) снова получается соотношение между α и η , которое теперь принимает вид

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 - \frac{1}{2}\eta^2. \quad (6.90)$$

Так как это соотношение не может выполняться для действительных значений α , введем

$$\alpha = \alpha^* + i\pi$$

и используем теорему сложения для гиперболических функций, что даст

$$\operatorname{ch} \alpha^* = \frac{1}{2}\eta^2 - 1. \quad (6.91)$$

Также и в этом случае α^* можно рассматривать как меру величины частоты возмущения.

Две другие постоянные, входящие в выражение (6.89), находятся из граничных условий

$$X_0 = X_e = C \operatorname{sh} \beta, \quad X_{n+1} = 0 = C \operatorname{sh}[(n+1)\alpha + \beta]$$

и соответственно составляют $\beta = -(n+1)\alpha^*$, $C = X_e / \operatorname{sh} \beta$, что дает

$$X_p = X_e \frac{\operatorname{sh}(p\alpha + \beta)}{\operatorname{sh} \beta} = (-1)^p X_e \frac{\operatorname{sh}(p\alpha^* + \beta)}{\operatorname{sh} \beta}.$$

Таким образом, решение теперь принимает вид

$$x_p = (-1)^p X_e \frac{\operatorname{sh}(n+1-p)\alpha^*}{\operatorname{sh}(n+1)\alpha^*} \cos \Omega t. \quad (6.92)$$

Отсюда прежде всего видно, что для всех частот $\Omega > 2\omega_0$, т. е. для всех α^* , знаки коэффициентов усиления чередуются, и поэтому массы цепи всегда колеблются в противофазе с соседними массами.

Далее можно убедиться в том, что при граничной частоте, когда

$$\Omega = 2\omega_0, \quad \eta = 2, \quad \alpha^* = 0,$$

коэффициент усиления имеет указанную выше величину (6.88). Из поведения функции гиперболического синуса следует, что в самом общем случае для каждой массы значение коэффициента усиления (т. е. входящий в выражение (6.92) множитель) с увеличением α^* уменьшается, причем в тем большей мере, чем дальше отстоит масса от начала цепи. Для последней массы цепи ($p=n$) коэффициент усиления равен

$$V_n = (-1)^n \frac{\text{sh } \alpha^*}{\text{sh } (n+1) \alpha^*}. \quad (6.93)$$

При достаточно больших n эта функция настолько убывает при возрастании частоты, что практически можно говорить о запирании: частоты выше граничной частоты $\Omega = 2\omega_0$ цепью не пропускаются, и она действует как фильтр низких частот.

6.2.5. Переход к колебаниям сплошной среды

С увеличением числа n степеней свободы можно без особых трудностей перейти к колебаниям сплошной среды. Хотя в общем случае колебания сплошной среды целесообразнее непосредственно описывать уравнения движения этой среды, мы все же опишем соответствующий предельный переход в частном случае однородной колебательной цепи.

Если представить себе, что на рис. 192, a количество масс и пружин бесконечно увеличивается, а сами массы и пружины соответственно уменьшаются, то рассматриваемая цепь постепенно превратится в струну. Таким образом, представляется возможность получить формулы для продольных колебаний струны из результатов предшествующих разделов посредством предельного перехода. Чтобы обозначения совпадали с обозначениями разд. 2.1.1.6, где было выведено уравнение колебаний струны, обозначим смещение элементарной массы через ξ , а ее координату через x . Если расстояние между двумя массами цепи составляет Δx , а общая длина цепи равна L , то в пределе будем иметь

$$n \rightarrow \infty, \quad \Delta x \rightarrow 0, \quad n \Delta x \rightarrow L, \quad p \Delta x \rightarrow x.$$

Вместе с этим оказывается возможным непосредственно использовать результат (6.80), полученный для собственных колебаний цепи. Так как

$$\frac{\pi r q}{n+1} = \frac{\pi q p \Delta x}{(n+1) \Delta x} \rightarrow \frac{\pi q x}{L},$$

решение (6.80) принимает вид

$$\xi(x, t) = C_q \sin(\pi q x / L) \cos(\omega_q t - \varphi_q). \quad (6.94)$$

Это решение удовлетворяет заданным граничным условиям

$$\xi(0, t) = \xi(L, t) = 0$$

для всех собственных частот ω_q и, кроме того, имеет уже признанную возможной выше форму произведения $\xi = G(x)F(t)$ (см. формулу (2.47)). Функции G и F удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2.49) и (2.50), откуда видно, что для согласования с предыдущими обозначениями следует положить

$$\pi q/L = \omega_q/c^*. \quad (6.95)$$

(Здесь c заменено на c^* , чтобы не спутать его с жесткостью пружины, ранее обозначавшейся тоже через c .) Таким образом, решение (6.94) принимает следующий вид:

$$\xi(x, t) = C_q \sin(\omega_q x/c^*) \cos(\omega_q t - \varphi_q). \quad (6.96)$$

Согласно этому, общее решение состоит из суммы бесконечно большого числа гармоник — однопериодических собственных колебаний. Каждое такое собственное колебание представляет собой *стоячую волну*, которая имеет тем больше узлов и пучностей, чем выше частота этого колебания. Распределение амплитуд, приведенное на рис. 194, можно рассматривать и как распределение амплитуд колеблющейся струны.

Решение (6.96) содержит два бесконечных набора постоянных, которые снова должны быть определены из начальных условий при $t=0$; таким образом,

$$\begin{aligned} \xi(x, 0) &= C_q \cos \varphi_q \sin(\omega_q x/c^*), \\ \dot{\xi}(x, 0) &= C_q \sin \varphi_q \omega_q \sin(\omega_q x/c^*). \end{aligned} \quad (6.97)$$

Поскольку q принимает замечания 1, 2, 3, . . . и выполняется равенство (6.95), эти бесконечные суммы можно считать рядами Фурье для начальной формы и начальной скорости струны. Но тогда искомые постоянные оказываются просто коэффициентами Фурье:

$$\begin{aligned} C_{(q)} \cos \varphi_q &= \frac{1}{L} \int_0^L \xi(x, 0) \sin \frac{\pi q x}{L} dx, \\ C_{(q)} \sin \varphi_q &= \frac{1}{\pi c^* q} \int_0^L \dot{\xi}(x, 0) \sin \frac{\pi q x}{L} dx. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Для рассматриваемого здесь случая струны с закрепленными концами соотношение ортогональности (6.81) принимает вид

$$\int_0^L \sin(\omega_s x/c^*) \sin(\omega_r x/c^*) dx = 0. \quad (6.99)$$

Оно относится только к *формам* собственных колебаний, так как время в него не входит. При других граничных условиях его следует соответствующим образом обобщить.

6.3. Задачи

53. Два одинаковых гравитационных маятника, каждый из которых имеет момент инерции Θ и собственную частоту ν_0 , связаны пружиной жесткости c (рис. 196). Каково должно быть расстояние a , чтобы при малых колебаниях собственные частоты, отнесенные к ν_0 , отличались друг от друга на 10%?

54. К математическому маятнику массой m и длиной L нити подвешен второй точно такой же маятник. Система может совершать плоское движение, при котором углы φ_1 и φ_2 нитей с вертикалью остаются малыми. Найти нормальные координаты ξ (φ_1, φ_2) и η (φ_1, φ_2) исходя из того, что в этих координатах кинетическая и потенциальная энергии представляют собой суммы квадратов.

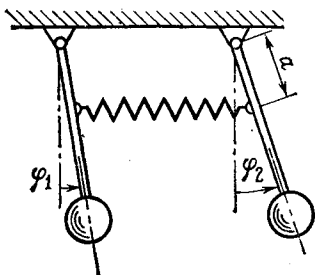


Рис. 196. К задаче 53.

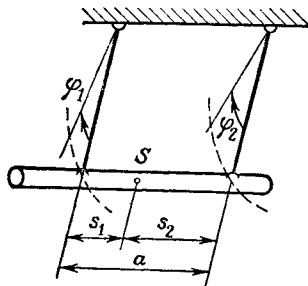


Рис. 197. К задачам 55—57.

55. Прямой стержень массой m и длиной L подвешен на двух нитях, массой которых пренебрегают (рис. 197). В положении покоя нити вертикальны, а расстояние между ними равно a . Точки закрепления нитей находятся на расстояниях s_1 и s_2 от центра тяжести S стержня ($s_1 + s_2 = a$); радиус инерции стержня относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести, равен ρ . Считая, что $\varphi_1 \ll 1$ и $\varphi_2 \ll 1$, вывести уравнения движения для связанных маятниковых и крутильных колебаний стержня. Маятниковые колебания вдоль оси стержня не учитывать.

56. Найти собственные частоты ω_1 и ω_2 осциллятора, изображенного на рис. 197. Указать условие равенства собственных частот $\omega_1 = \omega_2$ и определить расстояния s_1 и s_2 до центра тяжести, обеспечивающие это условие.

57. Осциллятор, изображенный на рис. 197, совершает при начальных отклонениях φ_{10} и φ_{20} и нулевой начальной скорости нормальные колебания с частотами ω_1 и ω_2 (см. задачу 56). Определить необходимые для этого значения отношения $\varphi_{10}/\varphi_{20}$ и указать характер происходящих колебаний.

58. Посередине фундамента, имеющего опоры с обеих сторон, установлена машина, которая при рабочем числе оборотов, равном 600 об/мин, из-за наличия дисбаланса возбуждает колебания амплитудой $X=2$ мм. Собственная частота основного колебания равна 15 Гц. Вынужденные колебания устраняются присоединением дополнительного осциллятора (гасителя). Какова амплитуда Y колебаний гасителя при его правильной настройке, если масса гасителя составляет 10% эффективной массы основного осциллятора — машины (отношение масс $m=0,1$)?

59. Резиновый жгут длиной $4L$ натянут с силой S и закреплен на обоих концах. На расстояниях L от концов жгута и соответственно друг от друга укреплены три равные массы m . Собственный вес жгута пренебрежимо мал по сравнению с натяжением S , а вертикальные смещения масс x_1, x_2, x_3 малы по сравнению с длиной жгута L . Найти три собственные частоты.

60. Для осциллятора, описанного в задаче 59, составить матрицу отношений амплитуд x_{pq} ($p, q=1, 2, 3$) и показать, что выполняются условия ортогональности (формула (6.62)).

61. Для колебательной цепи, изображенной на рис. 192, *в*, выписать рекуррентное соотношение, аналогичное соотношению (6.73). Определив соответствующие частотные функции, найти по ним собственные частоты для состоящей из трех масс однородной цепи с закрепленными концами ($X_0=X_4=0$).

62. Путем сравнения рекуррентных формул (см. соотношение (6.73) и результат, полученный в задаче 61) или частотных функций вывести общее соотношение между безразмерными собственными частотами η для однородной колебательной цепи, показанной на рис. 192, *в*, и η^* для цепи, показанной на рис. 192, *а*.

Ответы к задачам

1. $c = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$, или $\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$.
2. $c = c_1 + c_2$.
3. $\omega = \sqrt{EF/(mL)}$.
4. $\ddot{x} + \frac{\rho f g}{\rho L} x = 0$, $\omega = \sqrt{\rho f g / (\rho L)}$.
5. $A = a/2$, $T = 2\pi \sqrt{a/(2g)}$.
6. а) $A^* = (1/2) \sqrt{a^2 + A^2}$, б) $A^* = a/2 + A$, в) $A^* = |a/2 - A|$.
7. $\dot{x} = \sqrt{2ga(x_0^2 - x^2)/(1 + 4a^2x^2)}$, $\omega = \sqrt{2ga}$.
8. $s = \rho_S = L/\sqrt{12} = 0,289L$.
9. $\omega_R = \sqrt{g/L}$, $\omega_S = \sqrt{2g/L}$.
10. $T = 84,3$ мин.
11. $T = 4 \sqrt{m/c} \arccos \frac{1}{1 + cA/h}$.
12. $T = 2 \sqrt{m/c} [\pi + 2x_t/(A - x_t)]$.
13. $D = 0,378$.
14. $x_m = 0,955$ мм, $\vartheta = 0,826$, $D = 0,131$.
15. $\vartheta = 0,4$, $D = 0,0635$.
16. $D = 0,075$, $(x_{\max})_2 = 78,7\%$.
17. $T_{z1} = 1,230$ с, $T_{z2} = 0,348$ с.
18. $x_0 = -\sqrt{9}$, $x_1 = \sqrt{7}$, $x_2 = -\sqrt{5}$, $x_3 = \sqrt{3}$, $x_4 = -1$,
4,5 полуколебания.
19. $D = 3kA^2\omega^3/(8c)$, $\Delta x = 3\pi kA^3\omega^3/(4c)$.
20. $\ddot{x} - (\alpha - 3/4\beta A^2\omega^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$, $\omega \approx \omega_0$, $A \approx (2/\omega_0) \sqrt{\alpha/(3\beta)}$.
21. $A \approx (2/\omega_0) \sqrt{\alpha/(3\beta)}$.
22. $\ddot{x} - \frac{A\omega}{\pi} \left(\frac{8\alpha}{3} - \beta A \right) \dot{x} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{3\gamma A^2}{4} \right) x = 0$,
 $\omega \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{16\gamma\alpha^2}{3\beta^2}}$, $A \approx \frac{8\alpha}{3\beta}$.
23. а) $A = a \operatorname{cth} \frac{\pi D}{2 \sqrt{1 - D^2}}$, б) $A \approx \frac{2\alpha}{\pi D}$.
24. $2Dv < a \sin(v\tau_0)$.
25. $v_{\text{кр.т}} = \frac{\omega_0}{b \sin \psi}$.

$$26. \frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{x_r}{A-x_r} - \arcsin \frac{x_r}{A+x_r} \right), \quad 5,5 \text{ с.}$$

$$27. \frac{\Delta T}{T} = \mp \frac{1}{\pi} \arcsin \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{Ax_r}}{A-x_r}, \quad \text{случай а): знак минус,}$$

$\Delta T = 5560 \text{ с}$ в сутки.

$$28. T = 4h^2 t_{00} / (h^2 - h_0^2), \quad A = ht_0, \quad x_m = h_0 t_0.$$

$$29. \alpha_0 = 3, \quad \omega \approx \omega_0 = 1/(RC), \quad A \approx \sqrt{4(\alpha - 3)/(3\beta)}.$$

$$30. \alpha_0 = 2R, \quad A \approx 2\beta C \left(\frac{\alpha - 2R}{3} \right)^{3/2}.$$

$$31. \Delta E_D = \frac{2qg\Phi_0^3}{3} (L_1^2 + L_2^2), \quad \Phi_0^* = \frac{3mhL_1(L_1^2 + L_1L_2 + L_2^2)}{4qL_2^2(L_1^2 + L_2^2)}.$$

Колебание устойчиво, так как $\Delta E_D > \Delta E$ при $\Phi_0 > \Phi_0^*$ и $\Delta E_D < \Delta E$ при $\Phi_0 < \Phi_0^*$.

$$32. 0,99792 < (\Omega/\omega_0) < 1,00042, \quad 1,83 < (\Omega/\omega_0) < 2,24.$$

$$33. \Omega \geq 14,14\omega_0.$$

$$34. \lambda = \frac{c_0 R^2}{16v^2 J}, \quad \gamma = \frac{\Delta c R^2}{16v^2 J}, \quad v_1 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{1}{J} \left(c_0 - \frac{\Delta c}{2} \right)},$$

$$v_2 = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{1}{J} \left(c_0 + \frac{\Delta c}{2} \right)}.$$

35. Подстановка $y = a_1 \cos(\tau/2) + b_1 \sin(\tau/2) + \dots$ в уравнение (4.41) дает

$$a_1 \cos \frac{\tau}{2} \left[-\frac{1}{4} + \lambda + \frac{\gamma}{2} \right] + b_1 \sin \frac{\tau}{2} \left[-\frac{1}{4} + \lambda - \frac{\gamma}{2} \right] + \dots = 0.$$

Приравнявая нулю выражения, стоящие в квадратных скобках, получаем уравнения (4.46).

$$36. v_0^* = x_0(D+k) = x_0(D + \sqrt{D^2 - 1}).$$

$$37. F_4 = (1 + 4D^2 + k)/(4D), \quad D_{\text{opt}} = (1/2) \sqrt{1+k}.$$

38. а) $D = 1$; в) критерий отказывает, так как $F_1 = v_0$ не зависит от D ; в) критерий также отказывает, так как F_2 при $D < 1$ монотонна, а при $D \geq 1$ постоянна; г) $F_3 = v_0^2/(4D)$, $D_{\text{opt}} \rightarrow \infty$.

$$39. x(\tau) = \alpha [\tau - 2 + (\tau + 2)e^{-\tau}] \quad \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_0,$$

$$x(\tau) = \alpha [\tau_0 - (2 + \tau - \tau_0)e^{-(\tau - \tau_0)} + (\tau + 2)e^{-\tau}] \quad \text{при } \tau \geq \tau_0.$$

$$40. V = \frac{x\eta^4}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}},$$

$$\eta_{\text{extr}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(1 - 2D^2) \pm \sqrt{1 - 36D^2(1 - D^2)}}, \quad D \leq 0,1691.$$

$$41. (\eta_{\text{max}})_m = \frac{1}{\sqrt{1 - 2D^2}}, \quad (\eta_{\text{max}})_s = \sqrt{2(1 - 2D^2) \pm \sqrt{1 - 16D^2(1 - D^2)}}.$$

$$42. \text{Б) } u = \frac{1 - \eta^2}{2D\eta}, \quad v = 1, \quad \text{прямая, проходящая параллельно оси } u \text{ на расстоянии } v = 1.$$

В) $u = 1/\eta^2 - 1$, $v = 2D/\eta$, парабола, как в случае А, но вместо параметра η берется $1/\eta$.

$$43. \text{а) } \dot{x}_R \approx -\dot{x}_G, \quad 4,36 < \eta < \infty;$$

$$\text{б) } \dot{x}_R \approx -\dot{x}_G, \quad 0 < \eta < 0,229.$$

44. $\Delta\tau = \frac{2}{1+\eta^2}$, $\delta = 0,040$ (соответственно 4%).

45. $\eta = 4,58$, $\omega_0 = 22,8 \text{ с}^{-1}$, $f_0 = 1,88 \text{ см}$.

46. $x_{\max} = 1,26 \text{ м}$.

47. $x_e = x_0 J_0(k^*) \cos \Omega_0 t + x_0 J_1(k^*) [\cos(\Omega_0 + \Omega_m)t - \cos(\Omega_0 - \Omega_m)t] +$
 $+ x_0 J_2(k^*) [\cos(\Omega_0 + 2\Omega_m)t + \cos(\Omega_0 - 2\Omega_m)t] +$
 $+ x_0 J_3(k^*) [\cos(\Omega_0 + 3\Omega_m)t - \cos(\Omega_0 - 3\Omega_m)t] + \dots$

При $k^* \ll 1$ функции Бесселя можно заменить первыми членами их разложения в ряд

$$J_0(k^*) \approx 1, \quad J_1(k^*) \approx k^*/2, \quad J_2(k^*) \approx k^{*2}/8 \dots$$

При сохранении только членов первого порядка по k^* амплитудная и частотная модуляции дают одинаковые спектры, если глубина модуляции k для амплитудной модуляции равна безразмерной глубине модуляции k^* для частотной модуляции.

48. Из условия для трехкратного корня уравнения (5.147) получается

$$A^* = \sqrt[3]{4x_0/(3\alpha)}, \quad \eta^* = \sqrt{1 + 9\alpha A^{*2}/8}, \quad D^* = 3\sqrt{3\alpha A^{*2}/(16\eta^*)}$$

49. $A = \frac{3\pi(1-\eta^2)}{8\sqrt{2}q\eta^2} \sqrt{\pm \sqrt{1 + \frac{256x_0^2 \eta^4}{9\pi^2(1-\eta^2)^4} - 1}}$;

так как для A существует только одно действительное значение, скачки происходить не могут.

50. $A_{\max} \approx \sqrt{3\pi x_0/(8q)}$.

51. $x_m \approx \alpha C_{2n}^n \left[\frac{x_0}{2(1-\eta^2)} \right]^{2n}$.

52. $A = \frac{8aD\eta}{\pi[(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2]} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{(16a^2 - \pi^2 x_0^2)[(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2]}{64a^2 D^2 \eta^2}} \right\}$,

$$1 - \Delta\eta \leq \eta \leq 1 + \Delta\eta, \quad \text{где } \Delta\eta = \frac{\pi D x_0}{4a\sqrt{1+D^2}}$$

53. $a = v_0 \sqrt{\Theta, 105\Theta/c}$.

54. $\xi = c(\varphi_1 - \sqrt{0,5}\varphi_2)$, $\eta = c(\sqrt{2}\varphi_1 + \varphi_2)$, где c — произвольная постоянная.

55. $\ddot{\varphi}_1(s_2^2 + \rho^2) + \ddot{\varphi}_2(s_1 s_2 - \rho^2) + (g a s_2/L)\varphi_1 = 0$,

$\ddot{\varphi}_1(s_1 s_2 - \rho^2) + \ddot{\varphi}_2(s_1^2 + \rho^2) + (g a s_1/L)\varphi_2 = 0$.

56. $\omega_1 = \sqrt{g/L}$, $\omega_2 = \sqrt{g s_1 s_2 / (L\rho^2)}$, $s_1 s_2 = \rho^2$,

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \rho^2}; \text{ значения } s_1 \text{ и } s_2 \text{ действительны только при } \rho < a/2.$$

57. $\left(\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{20}} \right)_{\omega_1} = 1$: маятниковое колебание стержня, движущегося поступательно;

$\left(\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{20}} \right)_{\omega_2} = -\frac{s_1}{s_2}$: крутильное колебание вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести.

58. $Y = \frac{v_0^2 - \omega^2}{\pi\omega^2} X = 25 \text{ мм}$.

$$59. \omega_1 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)/\sqrt{2}} v_0 = 0,5412v_0, \text{ где } v_0 = \sqrt{2S/(mL)},$$

$$\omega_2 = v_0,$$

$$\omega_3 = \sqrt{(\sqrt{2}+1)/\sqrt{2}} v_0 = 1,3065v_0.$$

$$60. \kappa_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \kappa_{p1}\kappa_{p2} &= 1+0-1=0, \\ \kappa_{p1}\kappa_{p3} &= 1-2+1=0, \\ \kappa_{p2}\kappa_{p3} &= 1+0-1=0. \end{aligned}$$

$$61. \kappa_p = (4/\eta^2 - 2) \kappa_{p-1} - \kappa_{p-2}; \quad \omega_1 = 1,032\omega_0, \quad \omega_2 = 1,414\omega_0, \quad \omega_3 = 2,613\omega_0,$$

$$\text{где } \omega_0 = \sqrt{c/m}.$$

$$62. \eta = \frac{2}{\sqrt{4-\eta^{*2}}}.$$

Список литературы ¹⁾

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— 2-е изд., перераб.— М.: Физматгиз, 1959
2. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика: Пер. с нем.— М.: Гостехиздат, Т. I, 1950; Т. II, 1952.
- 3*. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Физматгиз, 1963.
- 4*. Булгаков Б. В. Колебания.— М.—Л.: Гостехиздат, 1954.
- 5*. Бутенин Н. В. Элементы теории нелинейных колебаний.— М.: Судпромгиз, 1962.
6. Вейганд (Weigand A.). Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen.— Berlin: Bd. 1, 1955; Bd. 2, 1958.
7. Ден Гартог Дж. Механические колебания: Пер. с англ.— М.: Физматгиз, 1960.
- 8*. Капчинский И. М. Методы теории колебаний в радиотехнике.— М.: Госэнергоиздат, 1954.
- 9*. Карман Т., Бюно М. Математические методы в инженерном деле: Пер. с англ.— М.—Л.: Гостехиздат, 1946.
10. КAUDERER Г. Нелинейная механика: Пер. с нем.— М.: ИЛ, 1961.
11. Клоттер (Klotter K.). Technische Schwingungslehre.— Berlin — Göttingen — Heidelberg: Bd. 1, 1951; Bd. 2, 1960.
- 12*. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику.— Киев: Изд-во АН УССР, 1937.
13. Лер (Lehr E.). Schwingungstechnik.— Berlin: Bd. 1, 1930; Bd. 2, 1934.
14. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения.— М.: Гостехиздат, 1952.
- 15*. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д., Андронов А. А., Витт А. А., Горелик Г. С., Хайкин С. Э. Новые исследования нелинейных колебаний.— М.: Радиониздат, 1936.
16. Миорский (Minorsky N.). Introduction to non-linear mechanics.— Ann Arbor: 1947.
- 17*. Обморшев А. Н. Введение в теорию колебаний.— М: Наука, 1965.
18. Основы автоматического регулирования: Сборник/Под ред. В. В. Солодовникова.— М.: Машгиз, 1954.
19. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах: Пер. с англ.— М.: ИЛ, 1952.
- 20*. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы.— М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
- 21*. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле: Пер. с англ.— М.: ГНТИ, 1931.
22. Траксел (Truxal J. G.) Design of automatic control systems.
- 23*. Фельдбаум А. А. Введение в теорию нелинейных цепей.— М.: Госэнергоиздат, 1948.
- 24* Фуфаев Н. А., Бутенин Н. В., Наймарк Ю. И. Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
- 25*. Харкевич А. А. Автоколебания.— М.: Гостехиздат, 1954.
26. Хюбнер (Hübner E.). Technische Schwingungslehre in ihren Grundzügen.— Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1957.
- 27*. Шмидт Г. Параметрические колебания: Пер. с нем.— М.: Мир, 1978.
28. Шулер (Schuler M.). Mechanische Schwingungslehre.— Leipzig: Bd. 1, 1958; Bd. 2, 1959.

¹⁾ Звездочкой отмечены номера работ, дополнительно включенных в этот список при переводе.— *Прим. ред.*

Предметный указатель

- Автоколебания 29, 30, 105—151
Автоколебательная система накопительного типа 105, 107—108
— — осцилляторного типа 105—107
Автономные колебания 29
Амплитуда колебания 11
Амплитудная частотная характеристика 26, 27, 195—199, 204
Амплитудно-модулированные колебания 18
Амплитудно-фазовая частотная характеристика 26, 27, 204, 205
— — — обратная 27, 204—206
Апериодические движения 81, 85—87
Апериодический предельный случай 81
Аппроксимация произвольной возмущающей функции импульсными функциями 190—191
— — — ступенчатыми функциями 189—190
- Баланс часовой 36, 37, 47
Безразмерный коэффициент демпфирования 78
Биения 18, 208
Боковые частоты 228
- Ван дер Поля* уравнение 113, 117, 119—121, 129—131, 167, 249
Верхние частоты 245, 246, 248
Виброграф 219, 220
Вибронаправляющий момент 170
Влияние демпфирования на связанные колебания 269, 270
— массы пружины на период колебания 50—52
Возбуждение автоколебаний жесткое 112
— — мягкое 112
Возмущение внешнее непериодическое 182—191
— — периодическое 192—215
- Возмущение внешнее периодическое гармоническое 192—209
— — — общего вида 209—211
Возмущения статистически распределенные 211—213
Волна стоячая 286
Волновое уравнение одномерное 43, 45, 155
Волномер 220
Времени постоянная 81—82
Временное запаздывание регулятора 142, 144—146
Время собственное системы 78
Входная функция 24, 203
Выбор оптимальных параметров приборов 186—189
Вынужденные колебания 29, 30, 181—254
— — в автоколебательных системах 249—253
— — нелинейных осцилляторов 228—253
— — связанных осцилляторов 266—269
Выпрямление вынужденных колебаний 248, 249
Выходная функция 24, 203
- Галеркина* правило 118
Гармонические колебания 13, 15
Гаситель колебаний 268, 269
Гейзер 137, 138
Гельмгольца комбинационные тоны 246
— резонатор 35, 36, 43—44, 47
Гетерономные колебания 29
Гидравлический ударный подъемник 138, 139
Гистерезис 142
Главные колебания 259, 260, 275
— координаты 259, 260, 275
Глубина модуляции 227
Годограф обратной передаточной функции 27, 204—206

- Гравитационный маятник 38—42, 57—61
 — — на упругой нити 264—266
 Гравитационного маятника применения 61—64
 Граница самовозбуждения 131
 Граничные условия 45
Гюйгенса — *Штейнера* теорема 62
- Движение в окрестности стационарных колебаний 156, 157
 — маятника при импульсном периодическом возмущении и линейном демпфировании 124—128
 — — — — — сухом трении 128, 129
 — — — — — постоянном возмущении и квадратичном демпфировании 122—124
 Двойной пружинный маятник с подвижной точкой подвеса 266—268
 Демодуляция вынужденных колебаний 249
 Демпфирование абсолютное 223
 — относительное 223
 Демпфирования коэффициент безразмерный 78
 — — эквивалентный 102
 — учет 75—77
 Демпфированные колебания 14, 22
 Детектирование вынужденных колебаний 249
 Диаграмма устойчивости решения уравнения *Матье* (диаграмма *Айнса* — *Стретта*) 165—169
 Динамичности коэффициент 196. *См. также* Усиления коэффициент
Дирака функция 24, 25, 184, 185
 Добротность контура 226
Дюамеля интеграл 189, 191, 224, 253
- Жесткое возбуждение автоколебаний 112
- Затухающие колебания 13, 14
 Затягивания область 252
 — эффект 252
 Защита от воздействия колебаний 221—225
 Значения собственные 45
- Избирательность 225—227
 Измерение докритическое 218
 Измерение квазистатическое 218
 Измеритель ускорения 220
 Изображение колебаний в плоскости x, t 12—14
 — — векторное 14—18, 48
 Изохрона 66
 Изохронный маятник 64—67
 Импульсная функция 24, 25. *См. также Дирака* функция
 Инерция измерительного прибора 142
 Искажение при измерении колебаний амплитудное 218
 — — — — фазовое 218
 Искажения в радиотехнике 225, 227, 228
 Испытательные функции 24, 25
- Качения осциллятор 40—42
 — — нелинейный 67
 Колебания в спарнике электровоза 153—154
 — вынужденные *см.* Вынужденные колебания
 — главные 259, 260, 275
 — жидкости в U-образной трубке 35, 47
 — качелей 157—162
 — линейные 28
 — нелинейные 28
 — параметрические 29, 30, 152—180
 — — линейных систем 163—171
 — пилообразные 13
 — под действием силы тяжести по произвольной плоской кривой 40, 41
 — почти периодические 12
 — продольные пружины 42, 43
 — — упругого стержня 43
 — прямоугольные 13
 — разрывные 108, 136—149
 — — гидравлического осциллятора 136, 137
 — релаксационные 136
 — с параметрическим возбуждением *см.* Параметрические колебания
 — самовозбуждающиеся *см.* Автоколебания
 — свободные 29. *См. также* Колебания собственные
 — связанные 29, 30, 255—288
 — синусоидальные 13, 14
 — собственные 29—104
 — — демпфированные 75—103
 — — недемпфированные 31—75
 — сплошной среды 285—287
 — трапецидалные 13

- Колебания треугольные симметричной формы 13
 — фрикционные 106, 131—136
 Колебательная система с произвольным числом степеней свободы 271—287
 Колебательные системы с двумя степенями свободы 255—270
 — цепи 277—282
 Колебательный контур электрический 34, 47
 — — — с периодическими параметрами 154, 155
 — — — — сопротивлением 76
 Колеблящаяся струна 44, 45
 — с переменным натяжением 155—156
 Комбинационные частоты 229, 245, 246, 248
 Коэффициент усиления по координате 199. *См. также* Усиления коэффициент
 — — — мощности 200, 201
 — — — скорости 199
 — — — ускорению 199
 Кривошипный механизм 14
 Круговая частота 11, 46
 Кулоново трение *см.* Сухое трение

Лагранжа уравнения второго рода 256, 271
 Ламповый генератор 129—131
 Линейные осцилляторы 46—53, 77—90
 Линия скачка 133, 134
 Логарифмический декремент затухания 84—85
Льенара метод 74, 75

Матве уравнение 164—170
 Маятник гравитационный *см.* Гравитационный маятник
 — изохронный 64—67
 — математический 39, 47
 — — переменной длины 157—162
 — с параметрическим возбуждением 171—180
 — минимальный 62, 63
 — оборотный 63
 — реверсивный 63
 — скомпенсированный 62
 — физический 39, 47
 — опрокинутый 169, 170
 — с периодически движущейся точкой подвеса 153, 167—170
 — *Фруда* 131—136
 Маятник циклоидальный 64—67
 — часовой 110, 122—129
Мейсснера уравнение 164
 Мертвая зона 68, 92
 Метод гармонического баланса 71, 115—117
 — изоклин 73, 74, 87—89
 — малых колебаний 70, 71, 114, 115, 272
 — медленно меняющихся амплитуд 119—121
 — приспособывания 70, 213—215
 — разделения переменных 44, 155
 — *Ритца* — *Галеркина* 118, 119
 — энергетический 100—103
 — энергетического баланса 100, 102
 Модуляции частота 18, 227, 228
 Мощность активная 199
 — реактивная 199

 Нарастающие колебания 13, 14
 Настройка 225, 226
 — докритическая 220
 — закритическая 220
 Недемпфированные колебания 14
 Незатухающие колебания 13, 14
 Несущая частота 18, 227, 228
 Нижние частоты 245, 247, 248
 Нормальные колебания 260
 Неустойчивая в большом система 112
 — — малом система 111
 Неустойчивый предельный цикл 111

 Область затягивания 252
 — нарастающих колебаний 110
 — уменьшающихся колебаний 110
 Обобщенные координаты 11, 273
 Обратная амплитудно-фазовая характеристика 27, 204—206
 Определение момента инерции по периоду колебания гравитационного маятника 64
 — собственной частоты по величине стрелы прогиба 52, 53
 — ускорения свободного падения по периоду колебания гравитационного маятника 63, 64
 Оптимума интегральные критерии 187—189
 Ортогональности соотношение 276
 Особая точка 21
 — — типа седла 22, 23
 — — — узла 22
 — — — фокуса 22
 — — — центра 22

- Осциллятор релейный с разрывной восстанавливающей силой 67—69
 — с квадратичным демпфированием 96—100
 — — кусочно линейной восстанавливающей силой 67—70
 — — равномерно распределенными накопителями энергии 42—45
 — — сухим трением 90—96
 — типа органной трубы 44
 Осцилляторы крутильные 36—38, 47
 — линейные 46—53, 77—90
 — нелинейные 53—75, 90—103
 Отсасывающий контур 269
- Передачная функция 26, 204
 — — обратная 27, 205
 Передаточной функции аргумент 204
 — — модуль 204
 Переходная функция 24—26, 182
 — — импульсная (ударная) 184, 185
 — — при возмущении в виде ступенчатой функции 152—154
 — — — — импульсном 184, 185
 — — ступенчатая 184
 Переходные процессы при вынужденных колебаниях 207—211
 — — — резонансе 209
 Период колебания 11
 Плотность спектральная 212
 Покоя состояние 12
 Поле изоклин 74
 — линейных элементов 74, 87, 88
 Положение равновесия 12
 Постоянная времени 81, 82
 Предельный цикл 109
 — — неустойчивый 111
 — — устойчивый 111
 Представление колебаний в комплексной плоскости 14—18
 — фазового портрета на цилиндре 59
 Преобразование к главным осям 261, 275—276
 Приближенные методы решения нелинейных уравнений 70—75, 113—121
 — — — уравнений параметрических колебаний 170, 171
 Приборы для измерения колебаний 216—220
 Приведенная длина физического маятника 61
 Принцип суперпозиции 47
 Прямая переключения 145
- Размах колебания 11
 Разрывные колебания *см.* Колебания разрывные
 Распределения коэффициенты 275
 Расстройки эффект 178
 Регулятор с гистерезисом 142—144
 Резонансная кривая 196
 Резонансные кривые осциллятора с жесткой восстанавливающей силой 240—243
 — — — — разрывной восстанавливающей силой 234
 Резонатор Гельмгольца 35, 36, 43—44, 47
 Релейный контур регулирования 139—146
 — осциллятор *см.* Осциллятор релейный
Релея уравнение 149, 150
 — частное 262, 263, 277
 Реономные колебания 152
Ритца — *Галеркина* метод 118, 119
 — теорема 118
Рунге параболы 205
RC-генератор 144—146
- Сверхкритические частоты 220
 Свободные колебания 29. *См. также* Колебания собственные
 Связи коэффициенты 258
 Сдвиг фазы 15
 Сейсмограф 220
 Сепаратриса 23, 54—56
 Синфазные колебания 233
 Система колебательная *см.* Колебательная система
 — консервативная 31
 — неконсервативная 31
 Сложение двух колебаний векторное 16—18
 Случайные функции 212
 Собственная частота 46
 Собственное время системы 78
 Собственные значения 45
 — колебания *см.* Колебания собственные
 Спектр частотный 211
 Спектральная плотность 212
 Среднее значение 12
 Статистически распределенные возмущения 211—213
 Ступенчатая функция 24, 25, 182, 183
 Сухое трение 102, 103

- Таухохрона 66
Точка срыва маятника *Фруда* 133, 134
Турбулентное сопротивление 96
- Уравнение *Ван дер Поля* см. *Ван дер Поля* уравнение
— волновое одномерное 43, 45, 155
— *Мейсснера* 164
— *Релея* 149, 150
Уравнения *Лагранжи* второго рода 256, 271
Усиления коэффициент 26, 196—198, 204
— — комплексный 26, 204
Устойчивая в большом система 111
— — малом система 111
Устойчивый предельный цикл 111
Устранение колебаний активное 221—223
— — пассивное 221, 223—225
- Фазовая плоскость 19
— траектория 19, 48, 49
— частотная характеристика 26, 27, 195—199, 204
Фазовый портрет 19, 21—23
— угол 15
Фазовых траекторий общие свойства 21
Фильтр 228
— высоких частот 278, 285
— низких частот 278, 285
Фильтр-пробка 269
Фильтры 282—285
Фрикционные колебания 106, 131—136
Фруда маятник 131—136
Фундаментальная система решений линейных уравнений 246
Функция *Дирака* см. *Дирака* функция
— типа меандра 164, 210
- Характеристики частотные 24, 26, 203
- Хилла* уравнение 163
— уравнения характеристические показатели 163
- Циклоидальный маятник 64—67
- Часовой баланс 36, 37, 47
— маятник 110, 122—129
Частное *Релея* см. *Релея* частное
Частота колебания 11
— модуляции 18, 227, 228
— несущая 18, 227, 228
Частотный спектр 211
Частоты боковые 228
— верхние 245, 246, 248
— комбинационные 229, 245, 246, 248
— нижние 245, 247, 248
Число степеней свободы 28
- Ширина относительная полосы пропускания частот бокового спектра 228
Шлейфовый осциллограф 216
- Эйнштейна* правило суммирования 271
Эквивалентный коэффициент демпфирования 102
Электрический звонк 106
— колебательный контур см. Колебательный контур
Эллиптические интегралы 57, 59—61, 175, 176
— функции 57
Энергетические соотношения 49, 50
- Язычковый измеритель частот 220
Якоби эллиптические функции 59, 60, 175—177

Именной указатель

- Айнс** 165
Андронов А. А. 293
- Био** 293
Бицено 280, 293
Боголюбов Н. Н. 71, 293
Бронштейн И. Н. 22
Булгаков Б. В. 293
Бутенин Н. В. 293
- Ван дер Поль** 120, 136
Вейганд (Weigand А.) 293
Вышнеградский И. А. 78
Витт А. А. 293
- Галеркин Б. Г.** 118
Горелик Г. С. 293
Граммель 280, 293
Гюйгенс 293
- Ден Гартог** 293
Дроздов Ф. В. 124
- Ишлинский А. Ю.** 166
- Капчинский И. М.** 293
Карман 293
Каудерер 293
Клоттер (Klotter К.) 160, 170, 293
Коллатц (Collatz L.) 22
Крылов Н. М. 71, 293
- Лер (Lehr E.)** 78, 293
Леш (Lösch F.) 59
Льенар 74
- Малкин И. Г.** 163, 171, 293
Мандельштам Л. И. 155, 293
- Меттлер** 156, 266
Митропольский Ю. А. 293
Минорский (Minorsky N.) 293
- Обморшев А. Н.** 293
- Папалекси Н. Д.** 155, 293
Прандтль (Prandtl L.) 35
Пугачев В. С. 212
- Рунге** 205
- Семендяев К. А.** 22
Солодовников В. В. 293
Стокер 163, 171, 293
Стретт 165
- Теодорчик К. Ф.** 293
Тимошенко С. П. 293
Траксел (Truxal J. G.) 293
- Фельдбаум А. А.** 293
Флюгге-Лотц 23
Фуфаев Н. А. 293
- Хайкин С. Э.** 293
Харкевич А. А. 293
Хюбнер (Hübner E.) 293
- Челомей В. Н.** 156
- Шмидт** 163, 292
Шулер (Schuler M.) 62, 293
- Эмде (Emde F.)** 59
- Янке (Jahnke E.)** 59

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к переводу	5
От автора	6
Предисловие	7
1. Основные понятия и определения. Графическое изображение колебательных процессов	11
1.1. Колебания и характеризующие их величины	11
1.2. Изображение колебаний в плоскости x, t	12
1.3. Векторное изображение колебаний и их представление в комплексной плоскости	14
1.4. Фазовые траектории и фазовый портрет	19
1.5. Переходная функция, частотные характеристики и годограф колебательной системы	24
1.6. Типы колебаний и их признаки	28
2. Собственные колебания	31
2.1. Недемпфированные собственные колебания	31
2.1.1. Колебательные системы и дифференциальные уравнения их движения	31
2.1.1.1. Масса, колеблющаяся на пружине (31). 2.1.1.2. Электрический колебательный контур (34). 2.1.1.3. Жидкость в U-образной трубке и резонатор Гельмгольца (35). 2.1.1.4. Крутильные осцилляторы (36). 2.1.1.5. Гравитационный маятник (38). 2.1.1.6. Осциллятор с непрерывно распределенными накопителями энергии (42).	
2.1.2. Поведение линейных осцилляторов	46
2.1.2.1. Решение дифференциального уравнения (2.51) (46). 2.1.2.2. Энергетические соотношения (49). 2.1.2.3. Влияние массы пружины (50). 2.1.2.4. Определение собственной частоты по величине стрелы прогиба (52).	
2.1.3. Поведение нелинейных осцилляторов	53
2.1.3.1. Общие зависимости (53). 2.1.3.2. Плоский гравитационный маятник (57). 2.1.3.3. Применения гравитационного маятника (61). 2.1.3.4. Циклоидальный маятник (64). 2.1.3.5. Осциллятор с кусочно линейной восстанавливающей силой (67). 2.1.3.6. Приближенные методы (70).	
2.2. Демпфированные собственные колебания	75
2.2.1. Учет демпфирования	75
2.2.2. Линейный осциллятор	77
2.2.2.1. Преобразование общего уравнения (77). 2.2.2.2. Решение уравнений движения (78). 2.2.2.3. Поведение решений (81). 2.2.2.4. Фазовый портрет (87).	

2.2.3. Нелинейный осциллятор	90
2.2.3.1. Общий случай (90). 2.2.3.2. Осциллятор с сухим трением (90). 2.2.3.3. Сила демпфирования, пропорциональная квадрату скорости (96). 2.2.3.4. Энергетический метод решения уравнений колебаний. Метод энергетического баланса (100).	
2.3. Задачи	103
3. Автоколебания	105
3.1. Структура и принцип действия автоколебательной системы	105
3.1.1. Системы осцилляториого и накопительного типов	105
3.1.2. Баланс энергии и фазовый портрет	108
3.2. Методы расчета	113
3.2.1. Общие методы	113
3.2.2. Линеаризация исходных уравнений	114
3.2.3. Метод Ритца — Галеркина	118
3.2.4. Метод медленно меняющихся амплитуд	119
3.3. Примеры автоколебательных систем	122
3.3.1. Часовой маятник	122
3.3.1.1. Движение маятника при постоянном возмущении и квадратичном демпфировании (122). 3.3.1.2. Движение маятника при импульсном периодическом возмущении и линейном демпфировании (124). 3.3.1.3. Движение маятника при импульсном возмущении и сухом трении (128).	
3.3.2. Ламповый генератор	129
3.3.3. Фрикционные колебания маятника Фроуда	131
3.4. Разрывные колебания	136
3.4.1. Примеры систем с разрывными колебаниями	136
3.4.2. Колебания в релейном контуре регулирования (регулятор температуры)	139
3.4.2.1. Регулятор с гистерезисом (142). 3.4.2.2. Регулятор с временным запаздыванием (144).	
3.4.3. RC -генератор	146
3.5. Задачи	149
4. Параметрические колебания	152
4.1. Примеры осцилляторов с параметрическим возбуждением	153
4.1.1. Физический маятник с периодически перемещающейся осью подвеса	153
4.1.2. Колебания в спарнике электровоза	153
4.1.3. Электрический колебательный контур с периодическими параметрами	154
4.1.4. Колеблющая струна с переменным натяжением	155
4.1.5. Движение в окрестности стационарных колебаний	156
4.1.6. Математический маятник переменной длины	157
4.2. Колебания качелей	157
4.2.1. Нарастание амплитуды колебаний	158
4.2.2. Влияние демпфирования и сухого трения	160
4.3. Параметрические колебания линейных систем	163
4.3.1. Общие математические зависимости	163
4.3.2. Поведение осциллятора, описываемого уравнением Матье	165
4.3.3. Приближенные методы решений	170
4.4. Математический маятник с параметрическим возбуждением	171
4.4.1. Постановка задачи и ее решение по областям	171
4.4.2. Периодические решения	173

4.4.3.	Амплитудная частотная характеристика для периодических решений при $\Omega \approx 2\omega_0$	175
4.4.4.	Приближенные решения для случая $\varphi_0 \ll 1$ или $\epsilon \ll 1$	179
4.5.	Задачи	180
б.	Вынужденные колебания	181
5.1.	Реакция линейной системы на внешние непериодические возмущения	182
5.1.1.	Переходные функции при возмущении в виде ступенчатой функции	182
5.1.2.	Переходные функции при импульсном возмущении	184
5.1.3.	Выбор оптимальных параметров приборов	186
5.1.4.	Возмущающие функции общего вида	189
5.2.	Периодические возмущения в линейных системах	192
5.2.1.	Гармонические возмущающие функции	192
5.2.1.1.	Уравнения движения осцилляторов с гармоническим возмущением (192). 5.2.1.2. Амплитудные и фазовые характеристики (195). 5.2.1.3. Мощность и работа при вынужденных колебаниях (199). 5.2.1.4. Передаточная функция и частотные характеристики (203). 5.2.1.5. Переходные процессы при вынужденных колебаниях (207)	
5.2.2.	Периодическое возмущение общего вида; решение методом разложения в ряд Фурье	209
5.2.3.	Статистически распределенные возмущения	211
5.2.4.	Общее периодическое возмущение; решение методом припасовывания	213
5.3.	Применение теории резонанса	216
5.3.1.	Приборы для измерения колебаний	216
5.3.2.	Защита машин и приборов от воздействия колебаний	221
5.3.3.	Настройка, избирательность и искажения в радиотехнике.	225
5.4.	Вынужденные колебания нелинейных осцилляторов	228
5.4.1.	Постановка задачи и возможности ее решения	229
5.4.2.	Гармоническое возмущение недемпфированного осциллятора с разрывной восстанавливающей силой	232
5.4.2.1.	Точные решения для равнопериодических колебаний (232). 5.4.2.2. Сравнение точного и приближенного решений (234). 5.4.2.3. Устойчивость периодических решений (235).	
5.4.3.	Гармоническое возмущение демпфированных нелинейных осцилляторов	238
5.4.3.1.	Линейное демпфирование и жесткая восстанавливающая сила (238). 5.4.3.2. Сухое трение и линейная восстанавливающая сила (244).	
5.4.4.	Верхние, нижние и комбинационные частоты при вынужденных колебаниях	245
5.4.5.	Выпрямление вынужденных колебаний	248
5.4.6.	Вынужденные колебания в автоколебательных системах	249
5.5.	Задачи	253
в.	Связанные колебания	255
6.1.	Колебательные системы с двумя степенями свободы	255
6.1.1.	Связанные колебания недемпфированного осциллятора	256
6.1.2.	Главные колебания и главные координаты	259
6.1.3.	Собственные частоты как экстремальные значения частного Релея	262
6.1.4.	Гравитационный маятник на упругой нити	264
6.1.5.	Вынужденные колебания связанных осцилляторов	266
6.1.6.	Влияние демпфирования на связанные колебания	269

6.2. Колебательная система с произвольным числом степеней свободы	271
6.2.1. Уравнения движения линейного недемпфированного осциллятора и их решение	271
6.2.2. Главные координаты и главные колебания	275
6.2.3. Колебательные цепи	277
6.2.4. Фильтры	282
6.2.5. Переход к колебаниям сплошной среды	285
6.3. Задачи	287
Ответы к задачам	289
Список литературы	293
Предметный указатель	294
Именной указатель	299