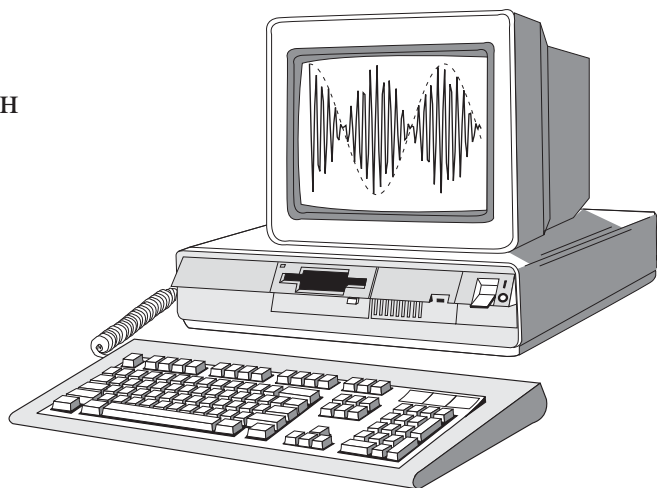


Х. М. Биккин



КОЛЕБАНИЯ

Екатеринбург 2001

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Уральский государственный университет им. А. М. Горького
Специализированный учебно-научный центр

Х. М. Биккин

КОЛЕБАНИЯ

Учебное пособие

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2001

УДК 535.12(075.8)

ББК 22.343я.7

Б 603

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Уральского государственного
университета им. А.М. Горького

Рецензенты: *А. П. Танкеев*, зав. лабораторией кинетических
явлений ИФМ УРО РАН, докт. физ.-мат. наук, проф. ;
В.М. Антропов, учитель высшей категории
гимназии № 117 г. Екатеринбурга, канд. физ.-мат. наук, доц.

Биккин Х.М. Колебания: Учеб. пособие. Екатеринбург:
Б 603 Изд-во Урал. ун-та, 2001. 136 с.
ISBN 5 – 7996 –0114 – 9

В учебном пособии рассмотрены механические и электромагнитные колебания.

Изложение материала сопровождается большим числом примеров, задач и качественных вопросов, которые позволяют значительно лучше усвоить излагаемый материал.

Пособие предназначено для учащихся 11-х классов школ с углубленным изучением физики. Оно может быть использовано и преподавателями в качестве дополнительного пособия, содержащего задачи повышенной сложности.

УДК 535.12(075.8)

ББК 22.343я.7

ISBN 5–7996–0114–9

© Х. М. Биккин, 2001

© СУНЦ УрГУ, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА	5
Глава 1. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ	7
1.1. Виды колебаний. Условие возникновения колебаний	7
1.2. Уравнение колебаний и его решение	9
Классификация уравнений (10). Пробное решение (10). Общее решение уравнения колебаний для осциллятора (11). Амплитуда, фаза, частота и период колебаний (11). Уравнение колебаний при наличии постоянной силы (12).	
1.3. Затухающие и вынужденные колебания	13
Уравнение затухающих колебаний и его решение (13–14). Частота затухающих колебаний, режимы затухания (14). Колебания при наличии вынуждающей силы (15). Метод векторных диаграмм в теории колебаний (16). Амплитуда, фаза вынужденных колебаний (17). Сдвиг фаз δ (17).	
1.4. Резонансные явления	17
Резонансная частота (18). Сдвиг фаз при резонансе (19).	
1.5. Превращение энергии при колебаниях	20
Сохранение энергии в случае собственных колебаний (20). Энергетический метод вывода уравнения колебаний (21). Добротность колебательной системы (22). Энергия системы при вынужденных колебаниях (23). Устойчивость режима установившихся вынужденных колебаний (25).	
1.6. Колебания в системах с двумя степенями свободы	26
Уравнения колебаний маятника при произвольных углах отклонения (27). Нормальные колебания, частоты и координаты (28). Биения, возникающие при сложении колебаний (29).	
1.7. Параметрический резонанс	32
Параметрическое возбуждение колебаний при изменении длины маятника (33).	
1.8. Фазовый портрет колебаний	34
Фазовое пространство, фазовая точка (34). Фазовая траектория для собственных и затухающих колебаний осциллятора (35). Параметрическое задание фазовой траектории (35). Фазовый портрет осциллятора с параметрическим возбуждением (36). Предельный цикл автоколебательной системы (39). <i>ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ</i>	40
Глава 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	71
2.1. Наблюдение электромагнитных колебаний	71
2.2. Уравнение электромагнитных колебаний	73

	Собственная частота колебаний в контуре(74). Формула Томсона для периода колебаний (75).	
2.3.	Превращение энергии в колебательном контуре	76
	Аналогия между электрическими и механическими колебаниями (76).	
2.4.	Активное сопротивление, индуктивность и емкость в цепи переменного тока	80
	Способы получения переменного тока (80). Активное сопротивление в цепи переменного тока (81). Действующее значение силы тока и напряжения (82). Конденсатор в цепи переменного тока (82). Индуктивность в цепи переменного тока (83).	
2.5.	Затухающие электромагнитные колебания. Добротность	84
	Использование правил Кирхгофа для вывода уравнения колебаний (84).Выражение для константы затухания (85). Вывод формулы для добротности колебательного контура (85.)	
2.6.	Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс в цепи переменного тока	87
	Метод векторных диаграмм (89). Амплитуда тока и сдвиг фаз между колебаниями тока и напряжения в цепи (90).	
2.7.	Закон Ома и мощность в цепи переменного тока	91
	Вывод формулы для средней мощности, выделяющейся на активном сопротивлении(92). Различные виды этой формулы (93).	
2.8.	Импеданс. Расчет сложных цепей переменного тока . . .	93
	Определение понятия комплексного импеданса (93). Правила расчета импеданса и токов для сложных цепей (94).	
2.9.	Резонанс токов и резонанс напряжений	97
	<i>ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ</i>	99
	<i>ПРИЛОЖЕНИЕ 1</i>	121
	<i>ПРИЛОЖЕНИЕ 2</i>	128
	<i>ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ</i>	133
	<i>Механические колебания</i>	133
	<i>Электромагнитные колебания</i>	140
	<i>Ответы на качественные вопросы</i>	149
	<i>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</i>	153

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Предлагаемое вашему вниманию пособие посвящено колебаниям в различных средах. Колебания широко распространены в природе и встречаются буквально на каждом шагу: это звуковые и электромагнитные колебания, колебания поверхности воды, колебание струн музыкальных инструментов и крыла самолета, сейсмические колебания почвы при землетрясениях, колебание элементов конструкций зданий и сооружений и т. д.

Перечисление физических процессов, в которых мы сталкиваемся с колебаниями, можно было бы продолжить, но уже из приведенных примеров ясно, насколько распространенным является этот тип движения в материальных средах. При этом в колебательном движении могут участвовать совершенно разные по природе физические объекты. Так, например, распространение звука в воздухе связано с колебаниями плотности воздуха, распространение света – с колебаниями вектора электрической и магнитной индукции электромагнитного поля световой волны, колебания грузика, прикрепленного к пружине, сопровождается изменением его координаты и скорости, а колебания электрического тока в электрической цепи сопровождается периодическим изменением плотности тока и заряда.

Тем не менее колебания в различных средах имеют общие черты, присущие всем колебательным движениям. Эта универсальность колебаний, т.е. известная независимость способа описания колебательного движения от конкретной физической природы объекта и материальной среды, и позволяют рассмотреть достаточно широкий круг вопросов – от механических колебаний и волн в упругих средах до электрических колебаний и электромагнитных волн в вакууме и конденсированных средах в рамках единого подхода.

Поскольку учебное пособие является лишь дополнением к основному учебнику физики¹, оно не предполагает последовательного изложения всего материала программы с необходимой полнотой и тщательностью.

Каждая глава учебного пособия начинается с конспективного изложения основ теории. Далее следует разбор нескольких принципиальных задач и обсуждение различных методик их решения. В конце главы приводится список задач для самостоятельного решения и качественные вопросы, которые позволяют легко выявить плохо усвоенные темы.

Такая структура учебного пособия, на наш взгляд, позволяет разобрать сложные вопросы теории на примерах решения конкретных задач, а, как известно, в естественных науках примеры зачастую важнее правил.

Следует сказать несколько слов о подборе материала и задач, которые включены в учебное пособие. Основная цель пособия – сделать доступными для учащихся материалы и задачи по указанной теме, разбросанные по различным изданиям. Поэтому приведенные задачи в большинстве случаев не являются оригинальными, а взяты из различных сборников задач повышенной сложности, список которых приведен в конце книги, журнала «Квант»(1970 – 2001) и различных олимпиад.

Наконец, хотелось отметить, что при написании этого пособия автор стремился сохранить стиль живого общения, отказавшись от строгой и более привычной академической манеры изложения материала. Насколько это удалось, судить вам, уважаемые читатели.

Ваши пожелания и замечания, которые будут с благодарностью приняты, можно присылать по электронному адресу: halid.bikkin@usu.ru

¹См.: Физика: Учеб. пособие для 11 кл. шк. и классов с углубл. изуч. физики/ А.Т. Глазунов, О.Ф. Кабардин, А.Н. Малинин и др.; Под ред. А.А. Пинского. М., 1995. 432 с.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

1.1. Виды колебаний. Условие возникновения колебаний

Если какая-либо физическая величина, характеризующая движение, принимает повторяющиеся значения, то такое движение принято называть *колебанием*. Колебания могут быть *периодическими* или *непериодическими*. Если колебания периодические, то динамическая величина принимает повторяющиеся значения через равные промежутки времени, которые называют *периодом*. В дальнейшем мы будем рассматривать только периодические колебания. В этом случае, например, для координаты материальной частицы $x(t)$, участвующей в колебательном движении, можно записать: $x(t + T) = x(t)$, где t – время, а T – период колебаний.

Периодические колебания могут быть гармоническими или негармоническими. *Гармоническими* называются колебания, в которых динамическая величина изменяется по *гармоническому закону*, т. е. ее изменение во времени характеризуется синусоидальным или косинусоидальным законом. Все другие типы колебаний называются *негармоническими*.

Хотя на практике чаще приходится иметь дело со сложными и в общем случае негармоническими колебаниями, мы ограничимся рассмотрением только гармонических колебаний. Это ограничение не является на самом деле очень принципиальным, поскольку, как это выяснится в дальнейшем, негармонические колебания всегда могут быть представлены в виде суперпозиции, т. е. наложения гармонических колебаний с кратными значениями периодов колебания T .

Рассмотрим условия, при которых возникают колебания в механических системах.

Можно утверждать, что колебания возникают в системах, находящихся вблизи состояния устойчивого равновесия. *Устойчивым* называется такое состояние равновесия механической системы, при котором любое отклонение системы от состояния равновесия сопровождается возникновением возвращающей силы, т. е. силы, стремящейся вернуть систему в исходное положение. В случае систем, находящихся в состоянии *неустойчивого равновесия*, при отклонении системы от равновесия развиваются силы, стремящиеся еще дальше увести систему из равновесия.

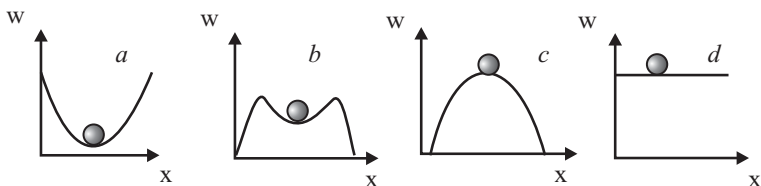


Рис.1. Потенциальная энергия системы:

а – устойчивое, б – метастабильное, в – неустойчивое, г – безразличное равновесия

Могут существовать еще случаи метастабильного и безразличного равновесия. В случае *метастабильного* равновесия при достаточно малых отклонениях система ведет себя как устойчивая, а при больших – как неустойчивая система. При *безразличном* равновесии любое возможное положение системы является равновесным.

Графики зависимости потенциальной энергии системы W в зависимости от величины x , характеризующей отклонения системы от положения равновесия, приведены на рис. 1.

Поскольку устойчивые системы в природе встречаются достаточно часто (неустойчивые системы либо распались, либо перешли в устойчивое состояние), то и колебательный тип движений возможен, по существу, в каждой системе.

Другой причиной возникновения механических колебаний является присущее всем материальным телам свойство инертности.

Если тело выведено из состояния равновесия, то, ускоряясь под действием возвращающей силы, оно проходит положение

равновесия с некоторой скоростью и, благодаря инертности, движется в сторону от равновесного положения до тех пор, пока действие возвращающей силы не приведет к его остановке в крайнем положении. Затем картина движения повторяется снова и снова. Так возникают *собственные колебания* системы. Естественно предположить, что в реальных условиях, кроме возвращающей силы, могут действовать и силы трения. Такие колебания не будут продолжаться неограниченно долго, поскольку энергия колеблющегося тела постепенно переходит в тепло. В этом случае колебания называются *затухающими*.

Колебания могут вызываться и периодически действующей внешней (вынуждающей) силой. Такие колебания называются *вынужденными*.

1.2. Уравнение колебаний и его решение

Выведем уравнение, которому подчиняется движение материальной точки, совершающей гармонические колебания. Простейшей колебательной системой является *гармонический осциллятор*. Моделью одномерного гармонического осциллятора может служить система, изображенная на рис. 2.

Пружина жесткостью K одним концом прикреплена к вертикальной стенке. На другом ее конце размещен грузик массой m , который может скользить без трения по гладкому горизонтальному стержню. Если сила упругости пружины подчиняется закону Гука $F_{\text{упр}} = -Kx$, то изображенная на рис. 2 система как раз и является моделью одномерного гармонического осциллятора.

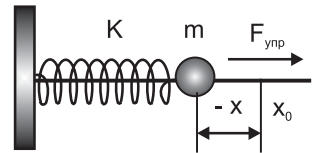


Рис. 2. Модель одномерного гармонического осциллятора

В рассматриваемом примере масса m движется только под действием квазиупругой силы $F_{\text{упр}}$, поскольку действие силы тяжести скомпенсировано силой реакции опоры, а трение отсутствует. Запишем уравнение динамики Ньютона для массы m : $ma = -Kx$. Здесь a – ускорение материальной точки, а x – ее перемещение. Начало отсчета координатной системы выбрано в точке x_0 , что соответствует недеформированному

состоянию пружины. При растяжении пружины координата x положительна, при сжатии – отрицательна.

Поскольку

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta}{\Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 x}{(\Delta t)^2}$$

и ускорение является второй производной перемещения x по времени t , то уравнение движения гармонического осциллятора можно записать в форме¹

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx; \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + Kx = 0. \quad (1.1)$$

Очень часто вводят более компактное обозначение для первой и второй производных, полагая $v = x'$, $a = x''$. Тогда уравнение колебаний гармонического осциллятора записывается в виде

$$mx'' + Kx = 0. \quad (1.2)$$

По математической классификации уравнение (1.2), которое описывает *собственные колебания* осциллятора, является линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение *линейно и однородно*, так как все его члены содержат неизвестную величину x в первой степени. Уравнение (1.2) – *второго порядка с постоянными коэффициентами*, поскольку старшая производная по времени имеет второй порядок, а коэффициенты при неизвестных не зависят от времени.

Получим решение этого уравнения простым подбором подходящей функциональной зависимости для $x(t)$. Будем искать пробное решение уравнения (1.2) в следующем виде:

$$x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega t), \quad (1.3)$$

где C_1 и ω – некоторые неизвестные постоянные величины.

Подставляя пробное решение (1.3) в уравнение (1.2) и учитывая правила вычисления второй производной от функции $\sin(\omega t)$ (см. пример 1 приложения 1), получаем

$$-\omega^2 m + K = 0. \quad (1.4)$$

¹В приложении 1 подробно рассматривается определение производных и их вычисление для некоторых элементарных функций.

Уравнение (1.4) называется характеристическим и позволяет найти собственную частоту колебания системы $\omega_0 = \sqrt{K/m}$. Очевидно, что выражение

$$x(t) = C_2 \cdot \cos(\omega_0 t) \quad (1.5)$$

также является частным решением уравнения (1.2) при произвольных значениях постоянной C_2 . Поэтому можно утверждать, что наиболее общим видом решения уравнения (1.2) является суперпозиция решений (1.4), (1.5):

$$x(t) = C_1 \cdot \sin(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(\omega_0 t). \quad (1.6)$$

Таким образом, общее решение задачи о колебаниях одномерного гармонического осциллятора содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 , которые могут быть найдены из начальных условий. Можно переопределить константы, записав решение в более удобном виде. Действительно, введя новые константы x_0 и δ ; $C_1 = x_0 \cos(\delta)$, $C_2 = x_0 \sin(\delta)$, можно записать общее решение (1.6) в виде

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (1.7)$$

где x_0 – амплитуда колебаний, δ – начальная фаза колебаний.

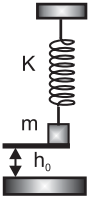
Амплитуда колебаний характеризует величину максимального отклонения колебательной системы от положения равновесия. *Фазой колебания* называется величина $\omega_0 t + \delta$, характеризующая состояние колебательного процесса в произвольный момент времени t . Найдем связь периода колебаний T с частотой $\nu = \omega_0/(2\pi)$. Поскольку период T – это время, за которое совершается одно полное колебание, то из формулы (1.7) следует, что должно выполняться условие $\omega_0 T = 2\pi$. Отсюда для периода колебаний гармонического осциллятора получаем

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (1.8)$$

Константы x_0 и δ определяются из начальных условий возбуждения колебаний, которые могут варьироваться. Чтобы продемонстрировать методику определения констант, рассмотрим простой пример.

Пример 1

Тело массой m , подвешенное на пружине жесткостью K , лежит на подставке (см. рис.). Подставку мгновенно убирают. Найти зависимость координаты тела от времени, если в начальный момент времени высота тела над столом h_0 и пружина не была деформирована.



К примеру 1

Решение

Запишем уравнение движения массы m после того, как подставка будет убрана. Рассмотрим случай, когда расстояние h_0 настолько велико, что груз не будет соприкасаться со столом. Тогда масса m будет двигаться только под действием силы тяжести mg и квазиупругой силы Kx . Выберем начало отсчета координатной системы в точке, где находится центр масс груза, лежащего на подставке, а за положительное направление примем направление, вдоль которого действует сила тяжести. Тогда уравнение движения массы будет иметь вид

$$x'' + \frac{K}{m}x - g = 0.$$

Если сделать замену переменных $z = x - gm/K$, то уравнение можно привести к виду

$$z'' + \frac{K}{m}z = 0,$$

что совпадает с уравнением (1.2). Это значит, что постоянная сила не изменяет частоту колебаний системы. Она изменяет лишь положение равновесия. В поле сил тяжести колебания будут происходить вокруг нового положения равновесия, координата которого определяется условием $z = 0$ или $x = gm/K$.

Таким образом, движение массы m после того, как будет убрана подставка, определяется уравнением

$$z(t) = z_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \delta).$$

Неизвестные константы определим из начальных условий. При $t = 0$ $z(0) = -gm/K$, поскольку относительно положения равновесия в поле сил тяжести в начальный момент времени пружина была деформирована. Поэтому $-gm/K = z_0 \sin(\delta)$. Второе условие состоит в том, что в начальный момент времени (сразу после того, как

была убрана подставка) скорость груза была равной нулю. Поэтому $z'(0) = z_0\omega_0 \cos(\delta) = 0$.

Таким образом, для определения неизвестных параметров имеем систему уравнений

$$-gm/K = z_0 \sin(\delta); \quad z_0\omega_0 \cos(\delta) = 0.$$

Поскольку $z_0\omega_0 \neq 0$, то из второго уравнения системы сразу получаем $\delta = \pi/2$, а из первого уравнения находим амплитуду колебаний $z_0 = -gm/K$. С учетом сделанной ранее замены переменных в итоге получаем

$$x(t) = -\frac{gm}{K} \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}) + \frac{gm}{K}.$$

Следует заметить, что полученный результат справедлив лишь при условии $2gm/K < h_0$.

1.3. Затухающие и вынужденные колебания

Если в колебательной системе действуют диссипативные силы, то, как уже отмечалось, колебания будут затухать. Рассмотрим частный случай, когда силы трения зависят линейно от скорости. Такого рода силы возникают при наличии вязкого трения в жидкостях или газах, если скорости движущихся тел достаточно малы.

Уравнение колебаний при наличии дополнительной силы трения $F_{\text{тр}} = -\beta x'$, где β – некоторый коэффициент пропорциональности (аналог уравнения (1.2) для собственных колебаний) – будет иметь вид

$$x'' + \frac{K}{m}x + \frac{\beta}{m}x' = 0. \quad (1.9)$$

Для упрощения в уравнении (1.9) введем обозначения $\omega_0^2 = K/m$, $\beta/m = 2\gamma$. Тогда вместо (1.9) получаем

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.10)$$

Поскольку уравнение (1.10) имеет тот же вид, что и уравнение (1.2), то и методика решения остается прежней².

²Полное решение уравнения (1.9) приведено в приложении 2.

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что общее решение уравнения (1.10) для затухающих колебаний имеет вид

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (1.11)$$

где, как и раньше, x_0 и δ — произвольные постоянные, значения которых определяются из начальных условий.

Следует обратить внимание на то, что частота затухающих колебаний ω_1 отличается от собственной частоты колебаний осциллятора ω_0 . При больших затуханиях γ колебаний не будет вообще. Такой режим затухания колебаний называется *апериодическим*.

Огибающая кривая колебаний на рис. 3а отображает поведение амплитуды колебаний $x_0 \exp(-\gamma t)$.

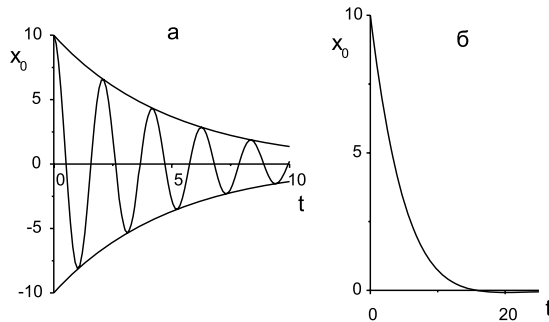


Рис. 3. Различные случаи затухания колебаний:

а — $\gamma = 0, 2$, $\omega_1 = 3$; б — апериодическое затухание $\gamma = 0, 2$, $\omega_1 = 0, 1$

Затухающие колебания можно характеризовать временем затухания. *Временем затухания колебаний* называется такое время τ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Очевидно, что константа затухания $\gamma = 1/\tau$.

Пусть теперь на колебательную систему действует внешняя вынуждающая сила $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$, зависящая от времени по

гармоническому закону. При наличии затухания и вынуждающей силы уравнение движения гармонического осциллятора имеет вид

$$x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t). \quad (1.12)$$

Это уравнение, в отличие от уравнения для собственных колебаний (1.2) и затухающих колебаний (1.10), является неоднородным, поскольку правая часть (1.12) не зависит от переменной x . Общее решение такого уравнения является суммой общего решения однородного уравнения $x'' + 2\gamma x' + \omega_0^2 x = 0$ и частного решения неоднородного уравнения (1.12). Однако, как мы уже установили, собственные колебания при наличии силы трения затухают за достаточно короткое время порядка времени τ , и поэтому через некоторое время останутся только колебания с частотой вынуждающей силы ω . Таким образом, вынужденные колебания происходят не на собственной частоте колебания системы ω_0 , а на частоте вынуждающей силы.

Пусть все переходные процессы уже закончились и в системе остались лишь колебания с частотой вынуждающей силы. Будем искать решение уравнения в виде

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta), \quad (1.13)$$

где, как и раньше, x_0 — неизвестная амплитуда колебаний, а δ — неизвестная начальная фаза. Вычислим значение скорости и ускорения для перемещения, определяемого выражением (1.13):

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x_0 \omega \sin(\omega t - \delta) = x_0 \omega \cos\left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2}\right); \\ x''(t) &= -x_0 \omega^2 \cos(\omega t - \delta). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя результаты (1.13), (1.14) в уравнение (1.12), получаем уравнение для определения амплитуды и фазы вынужденных колебаний

$$\begin{aligned} -\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \delta) + 2\gamma \omega x_0 \cos\left(\omega t - \delta + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + \omega_0^2 x_0 \cos(\omega t - \delta) = \frac{f_0}{m} \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим важную особенность уравнения (1.15): все члены этого уравнения изменяются со временем по гармоническому закону, и сдвиг фаз остается неизменным во времени. Для определения амплитуды и фазы вынужденных колебаний в этом случае применим *метод векторных диаграмм*.

Примем во внимание, что мгновенное значение любой величины, изменяющейся по гармоническому закону, можно представить проекцией соответствующего вектора, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω , и представим каждый из членов левой части уравнения (1.15) в виде вращающегося вектора (рис. 4). Проекция вектора $\omega_0^2 x_0$ соответствует слагаемому $\omega_0^2 x_0 \cos(\omega t - \delta)$, вектор $\omega^2 x_0$ сдвинут по фазе на π и соответствует члену $-\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \delta)$. Наконец, вектор $2\gamma\omega x_0$ опережает вектор $\omega_0^2 x_0$ по фазе на $\pi/2$ и соответствует в уравнении (1.15) слагаемому $2\gamma\omega x_0 \cos(\omega t - \delta + \pi/2)$.

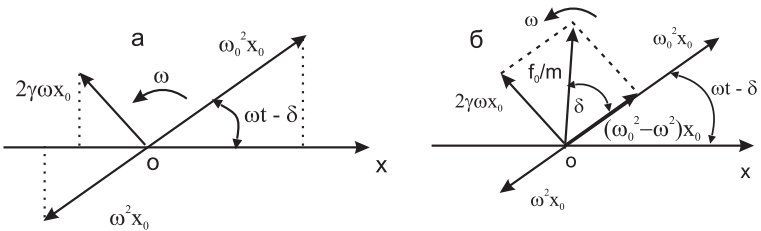


Рис. 4. Векторная диаграмма вынужденных колебаний: а — представление членов левой части уравнения (1.15) вращающимися векторами; б — векторная интерпретация уравнения (1.15)

Вся система векторов вращается с угловой скоростью ω , как это показано на рис. 4а. Поскольку сумма проекций векторов равна проекции суммарного вектора, то можно все вектора на диаграмме рис. 4а сложить по правилам сложения векторов. Тогда вместо трех векторов рис. 4а мы получим один вектор (рис. 4б), который равен правой части выражения (1.15). Результат сложения векторов представлен на векторной диаграмме рис. 4б.

Применяя теорему Пифагора, имеем

$$(f_0/m)^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 x_0^2 + 4\gamma^2 \omega^2 x_0^2.$$

Это уравнение позволяет определить амплитуду вынужденных колебаний

$$x_0 = \frac{f_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (1.16)$$

Сдвиг фазы вынужденных колебаний, т. е. разность фаз вынуждающей силы $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ и смещения $x(t) = x_0 \cos(\omega t - \delta)$, также может быть определен с помощью векторной диаграммы (рис. 4). Действительно, из рисунка следует, что вынуждающая сила опережает смещение на угол δ , тангенс которого определяется выражением

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.17)$$

В следующем разделе мы проанализируем поведение амплитуды вынужденных колебаний x_0 и сдвига фаз δ в зависимости от частоты и амплитуды вынуждающей силы, а также параметра затухания γ .

1.4. Резонансные явления

Исследуем поведение амплитуды колебаний x_0 в зависимости от амплитуды f_0 , частоты ω вынуждающей силы и параметра затухания γ .

Из выражения для амплитуды смещения (1.16) следует, что смещение x_0 линейно зависит от амплитуды вынуждающей силы f_0 .

Для исследования зависимости смещения от частоты найдем, при каком значении частоты подкоренное выражение в знаменателе формулы (1.16) имеет минимум. Сначала определим частоту, при которой производная от подкоренного выражения в знаменателе равна нулю (равенство нулю производной при некотором значении аргумента означает наличие экстремума функции в этой точке). Используя правила вычисления производных, сформулированные в приложении 1, получаем

$$\frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] = -(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 2\gamma^2\omega = 0. \quad (1.18)$$

Сократив общий множитель ω в последнем равенстве выражения (1.18), получаем

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (1.19)$$

Покажем теперь, что частота $\omega_{\text{рез}}$ действительно соответствует минимуму знаменателя выражения для амплитуды (1.16). Если при $\omega = \omega_{\text{рез}}$ реализуется минимум, а не максимум, то вторая производная подкоренного выражения в формуле (1.16) в этой точке будет положительной, в чем нетрудно убедиться, если продифференцировать выражение в квадратных скобках формулы (1.18) еще один раз и подставить затем значение $\omega = \omega_{\text{рез}}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\omega^2} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2] &= 4\frac{d}{d\omega} [-(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 2\gamma^2\omega] = \\ &= 4(3\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 8\omega_{\text{рез}}^2. \end{aligned} \quad (1.20)$$

При записи последнего равенства в формуле (1.20) мы подставили $\omega = \omega_{\text{рез}}$.

Таким образом, максимальное значение амплитуда вынужденных колебаний принимает при частоте $\omega = \omega_{\text{рез}}$, которая не совпадает с частотой собственных колебаний ω_0 , а несколько сдвинута в сторону меньших частот [см. (1.19)] и существенно зависит от константы затухания γ . Если константа затухания γ достаточно мала, то при стремлении ω к $\omega_{\text{рез}}$ амплитуда колебаний может очень сильно вырасти.

Резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний при $\omega \rightarrow \omega_{\text{рез}}$ называется *резонансом амплитуды*. Резонанс скорости и резонанс ускорения обсуждается в приложении 1. На рис. 5 изображена амплитуда вынужденных колебаний x_0 , рассчитанная по формуле (1.16) при следующих значениях параметров: $f_0/m = 10 [cm \cdot c^{-2}]$, $\omega_0 = 5 [c^{-1}]$. Кривая 1 соответствует значению параметра $\gamma = 0,3$; кривая 2: $\gamma = 0,15$; кривая 3: $\gamma = 0,1$ и кривая 4: $\gamma = 0,03$ (γ имеет размерность c^{-1}).

Как следует из результатов расчета, изменение резонансной частоты колебаний весьма незначительно и для $\gamma = 0,3$ равно 4,99 (на рис. 5 резонансная частота для $\gamma = 0,3$ обозначена ω_2 и отмечена стрелкой).

Оценим величину отношения амплитуды колебаний при резонансном воздействии $x_{0\text{рез}}$ к величине смещения при статическом действии той же силы (на нулевой частоте) $x_{\text{стат}}$.

Величина $x_{\text{стат}}$ может быть получена из формулы (1.16), если в нее подставить значение $\omega = 0$:

$$x_{\text{стат}} = \frac{f_0}{m\omega_0^2}.$$

Амплитуду колебаний на частоте $\omega_{\text{рез}}$ найдем из формулы (1.16), подставив в нее значение

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2},$$

$$x_{0\text{рез}} = \frac{f_0}{2m\gamma\omega_0}; \quad \frac{x_{0\text{рез}}}{x_{\text{стат}}} = \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Из этой формулы следует, что амплитуда колебаний в резонансе может быть в сотни раз больше амплитуды смещения, вызываемой такой же, но статической силой.

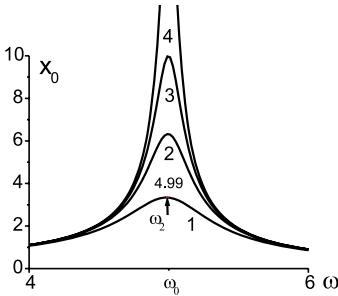


Рис. 5. Резонансные кривые при различных значениях γ

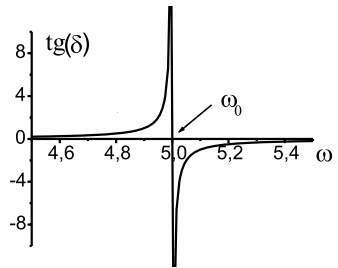


Рис. 6. Зависимость $\text{tg}(\delta)$ от частоты в окрестности резонанса

Исследуем теперь фазовые соотношения при резонансе. Разложим выражение в знаменателе формулы (1.17): $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega + \omega_0)(\omega_0 - \omega)$. Поскольку в окрестности резонанса $\omega \simeq \omega_0$, то $\omega + \omega_0 \simeq 2\omega_0$. Поэтому в окрестности резонанса получаем

$$\text{tg}(\delta) = \frac{\gamma}{\omega_0 - \omega}.$$

Вид этой кривой изображен на рис. 6. При построении графика на рис. 6 были использованы следующие значения параметров: $\gamma = 0,1c^{-1}$, $\omega_0 = 5c^{-1}$.

Из приведенного графика следует, что при малых частотах смещение осциллятора совпадает по фазе с вынуждающей силой. Если $\omega \gg \omega_0$, то $\text{tg}(\delta)$ снова стремится к нулю, но на сей раз со стороны отрицательных значений. Таким образом, в этом случае смещение осциллятора происходит в противофазе с вынуждающей силой. В резонансе сдвиг фаз между вынуждающей силой и смещением равен четверти периода, причем вынуждающая сила опережает смещение.

1.5. Превращение энергии при колебаниях

Для определенности будем рассматривать колебательную систему, изображенную на рис. 2. Полная энергия колебательной системы складывается из кинетической энергии массы m , движущейся со скоростью $v = x'(t)$, и потенциальной энергии деформированной пружины. Рассмотрим превращения энергии в случаях собственных, затухающих и вынужденных колебаний.

Собственные колебания

В случае собственных колебаний на систему не действуют внешние силы, и поэтому полная энергия системы сохраняется. Пользуясь выражением для смещения $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ (для простоты мы полагаем, что начальная фаза колебаний $\delta = 0$), запишем выражение для кинетической энергии $E_{\text{кин}}$, потенциальной энергии $E_{\text{пот}}$ и полной энергии W :

$$E_{\text{кин}} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t)}{2}; \quad E_{\text{пот}} = \frac{Kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t)}{2};$$

$$W = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{Kx_0^2}{2}. \quad (1.21)$$

При записи последнего равенства в формуле (1.21) мы учли, что $\omega_0^2 = \sqrt{K/m}$. Из этой формулы следует, что кинетическая и потенциальная энергии системы при собственных колебаниях зависят от времени, но полная энергия остается постоянной.

Постоянство полной энергии колебательной системы можно использовать для получения уравнения движения движущейся массы. Рассмотрим этот полезный прием на примере.

Пример 2

На невесомом стержне длиной L находится груз массой m . К середине стержня прикреплена невесомая пружина жесткостью K . Второй конец пружины укреплен на стене (см. рис.). При вертикальном положении стержня пружина не деформирована. Найти собственную частоту и период колебаний такой системы. Трением пренебречь. Колебания можно считать малыми.

Решение

Найдем выражение для полной энергии системы. В данном случае полная энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий массы m и потенциальной энергии деформированной пружины. Выберем начало отсчета системы координат в точке закрепления стержня и введем угол φ между стержнем и положительным направлением оси X , совпадающим с вертикалью (см. рис. к примеру). Ось Y направим по горизонтали. Тогда координаты маятника можно выразить через угол φ : $x = L \cos \varphi$, $y = L \sin \varphi$.

Кинетическая энергия колеблющейся массы $E_{\text{кин}} = m(v_x^2 + v_y^2)/2$. Компоненты скорости, в свою очередь,

$$v_x = \frac{dL \cos(\varphi)}{dt} = -L \sin(\varphi) \varphi';$$

$$v_y = \frac{dL \sin(\varphi)}{dt} = L \cos(\varphi) \varphi'.$$

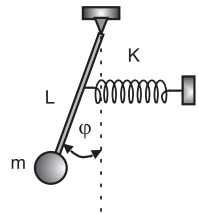
Таким образом,

$$E_{\text{кин}} = \frac{mL^2(\varphi')^2}{2}.$$

Примем, что в равновесном положении потенциальная энергия маятника равна нулю. Тогда при отклонении на малый угол φ потенциальная энергия массы m

$$E_{\text{пот}} = mgL(1 - \cos(\varphi)) = 2mgL \sin^2(\varphi/2) \simeq \frac{mgL\varphi^2}{2},$$

причем мы воспользовались малостью углов и заменили $\sin(\varphi) \simeq \varphi$, g — ускорение свободного падения.



К примеру 2

Потенциальная энергия деформированной пружины $E_{\text{пруж}}$ также может быть легко выражена через угол отклонения маятника от вертикали:

$$E_{\text{пруж}} = \frac{KL^2 \sin^2(\varphi)}{8} \simeq \frac{KL^2 \varphi^2}{8}.$$

Теперь мы можем записать полную энергию системы

$$W = \frac{mL^2(\varphi')^2}{2} + \frac{mgL\varphi^2}{2} + \frac{KL^2\varphi^2}{8},$$

которая является постоянной величиной, не зависящей от времени.

Если теперь продифференцировать W по времени, то мы получим дифференциальное уравнение, описывающее колебания этой механической системы. Действительно, дифференцируя W , находим

$$mL^2\varphi'\varphi'' + mgL\varphi\varphi' + \frac{KL^2\varphi\varphi'}{4} = 0.$$

Разделим левую и правую части уравнения на $mL^2\varphi'$:

$$\varphi'' + \left[\frac{g}{L} + \frac{K}{4m} \right] \varphi = 0.$$

Полученное выше уравнение имеет вид стандартного уравнения колебаний (1.2), а выражение, стоящее в квадратных скобках, и есть квадрат собственной частоты колебаний системы.

Таким образом, мы нашли собственную частоту и период колебаний рассматриваемой системы:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{K}{4m}}, \quad T = 2\pi\omega_0^{-1}.$$

Затухающие колебания

При наличии силы трения энергия колебательной системы будет убывать, поскольку часть механической энергии будет переходить в тепло. Обычно для характеристики колебательных систем с затуханием вводят понятие добротности.

Добротностью колебательной системы Q называется отношение энергии, запасенной системой, к энергии, которую она теряет за один период. Полная энергия колебательной системы

определяется формулой (1.21), а потерю энергии за один период можно легко оценить, поскольку она равна работе силы трения за один период. Силу трения можно записать следующим образом: $F_{\text{тр}} = \beta x'(t) = \beta \omega_0 x_0 \cos(\omega_0 t)$ (мы полагаем, что сила трения мала и частота колебаний не отличается от собственной частоты ω_0). Вычислим среднюю мощность потерь $P_{\text{тр}}$, возникающих за счет действия силы трения:

$$P_{\text{тр}} = \langle \beta(x')^2 \rangle = \langle \beta \omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \rangle = \gamma m \omega_0^2 x_0^2. \quad (1.22)$$

При выводе последнего из равенств формулы (1.22) мы учли, что $\beta = 2\gamma m$ и что среднее значение

$$\langle \cos^2(\omega_0 t) \rangle = 1/2.$$

В этом легко убедиться, если вспомнить, что $\cos^2(\omega_0 t) = (1 + \cos(2\omega_0 t))/2$ и что среднее значение по времени от периодической функции равно нулю.

Чтобы найти работу сил трения $E_{\text{тр}}$ за период колебаний T , нужно умножить среднюю мощность на $T = 2\pi/\omega_0$. В результате простых преобразований получаем:

$$E_{\text{тр}} = 2\pi\gamma m \omega_0 x_0^2; \quad Q = \frac{W}{E_{\text{тр}}} = \frac{\omega_0}{4\pi\gamma}. \quad (1.23)$$

Обычно множитель $(2\pi)^{-1}$ в формуле (1.23) опускают, определяя добротность отношением $Q = \omega_0/(2\gamma)$. Таким образом, *добротность колебательной системы* Q — это умноженное на 2π отношение средней энергии, запасенной колебательной системой, к работе силы трения за один период колебаний.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что приведенная выше формула добротности (1.23) справедлива лишь для частного случая, когда силы трения линейно зависят от скорости и декремент затухания $\gamma \ll \omega_0$. В случае аperiodического затухания вся запасенная колебательной системой энергия переходит в тепло за время $t < T/4$, и понятие добротности теряет смысл.

Вынужденные колебания

Установившиеся под действием синусоидальной силы вынужденные колебания внешне очень похожи на собственные колебания. Однако между ними есть весьма важное различие.

Запишем выражение для полной энергии в случае вынужденных колебаний

$$W = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}Kx^2;$$

$$W = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 \sin(\omega t - \delta)^2 + \frac{1}{2}Kx_0^2 \cos(\omega t - \delta)^2. \quad (1.24)$$

При выводе формулы (1.24) мы воспользовались аналогом выражения (1.13) для $x(t)$. Отличие формулы (1.24) от формулы для собственных колебаний (1.21) в том, что здесь колебания происходят на частоте вынуждающей силы ω , а не на собственной частоте $\omega_0 = \sqrt{K/m}$. Поэтому полная энергия системы не остается постоянной. Это наглядно демонстрируют графики кинетической, потенциальной и полной энергии колебательной системы, изображенные на рис. 7.

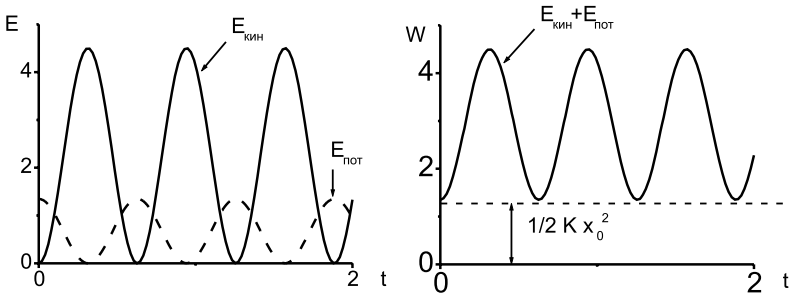


Рис. 7. Зависимость кинетической $E_{\text{кин}}$, потенциальной $E_{\text{пот}}$ и полной энергии W при вынужденных колебаниях: кривые построены при следующих значениях параметров: $m = 0,04$; $\omega = 5$; $x_0 = 3$; $K = 0,3$ (в произвольной системе единиц)

Средние значения кинетической и потенциальной энергии при вынужденных колебаниях могут сильно отличаться друг от друга. При низких частотах $E_{\text{пот}} > E_{\text{кин}}$, а при частотах $\omega > \omega_0$, наоборот, $E_{\text{пот}} < E_{\text{кин}}$ (на рис. 7 изображен как раз случай $\omega > \omega_0$).

Полная энергия колебательной системы изменяется от некоторой минимальной величины (отмечена пунктирной линией в

правой части рис.7) до максимума, причем в течение четверти периода колебательная система получает энергию за счет работы внешних сил, а в течение другой четверти периода система отдает энергию. Чем ближе мы будем подходить к резонансу, тем меньше будет становиться разрыв между максимумом $E_{\text{пот}}$ и $E_{\text{кин}}$. В точке резонанса они станут равными, и полная энергия системы будет снова постоянной величиной. Поэтому колебания системы в резонансе очень похожи на собственные. Роль вынуждающей силы здесь сводится лишь к компенсации потерь энергии, связанной с работой сил трения.

До сих пор мы рассматривали мгновенное значение энергии колебательной системы. Проанализируем теперь поведение средней энергии колебательной системы как функции времени (имеется в виду среднее значение за один период колебаний) для системы, в которой колебания еще не являются установившимися. Средняя энергия системы меняется по двум причинам: за счет работы внешних сил и работы сил трения. Мощность, развиваемая внешними силами,

$$P_{\text{вн}}(t) = \langle f(t)v(t) \rangle = \langle f_0 \cos(\omega t)x'(t) \rangle. \quad (1.25)$$

В отличие от мощности внешних сил, которые, как следует из формулы (1.25), линейны по смещению $x(t)$, мощность потерь квадратична по смещению:

$$P_{\text{тр}}(t) = \langle 2\gamma m(x')^2 \rangle. \quad (1.26)$$

Поэтому амплитуда колебаний растет до тех пор, пока кривые зависимости средней поглощаемой $P_{\text{вн}}$ и средней рассеиваемой мощности $P_{\text{тр}}$ не пересекутся (рис. 8). В точке пересечения кривых амплитуда колебаний будет такой, при которой средняя энергия, получаемая системой за период, равна средней диссипируемой энергии за период. При этом дальнейший рост амплитуды колебаний прекратится. Это и будет режимом установившихся колебаний.

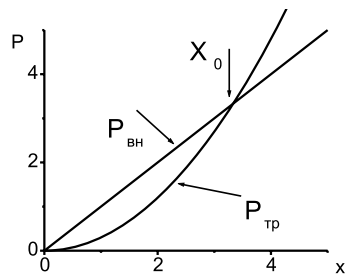


Рис. 8. Зависимость поглощаемой и теряемой мощности от амплитуды колебаний

Важно подчеркнуть, что режим установившихся колебаний является устойчивым. Действительно, если амплитуда колебаний в результате действия случайных причин вырастет, то мощность потерь вырастет быстрее и система отдаст энергию, если же амплитуда станет меньше x_0 , то, наоборот, средние потери будут меньше и амплитуда колебаний увеличится.

1.6. Колебания в системах с двумя степенями свободы

До сих пор мы рассматривали колебания в системах с одной степенью свободы (*числом степеней свободы поступательного движения называется число направлений, вдоль которых материальные частицы, составляющие систему, могут двигаться независимо*). Очевидно, что материальная точка имеет три степени свободы, а маленький шарик, который может двигаться лишь вдоль одной оси (например, шарик на спице), — одну.

В системах с несколькими степенями свободы колебания оказываются значительно более сложными, поскольку здесь возникает многомодовый режим колебаний, т. е. система будет иметь не одну собственную частоту колебаний, а несколько (колебания на одной из собственных частот называются *модой*).

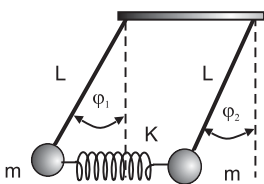


Рис. 9. Система с двумя степенями свободы

Можно высказать следующее утверждение: число колебательных мод равно числу степеней свободы в системе. Поэтому в системе с несколькими степенями свободы каждая частица участвует в сложном колебательном движении, которое представляет собой суперпозицию (наложение) колебаний, происходящих с разными частотами.

Поскольку рассмотреть общий случай колебаний с n степенями свободы не представляется возможным, рассмотрим простейшую систему с двумя степенями свободы (рис. 9) — два одинаковых маятника, связанных между собой пружиной жесткостью K .

Хотя массы m и длины нитей L для обоих маятников одинаковы, отклонения маятников от вертикали в общем случае будут разными. Обозначим угол отклонения первого маятника от вертикали φ_1 , второго — φ_2 .

Получим уравнения колебаний обоих маятников. Рассмотрим первый маятник и будем учитывать на первых порах только действие силы тяжести. Тогда мы получим систему, изображенную на рис. 10. Очевидно, что смещение груза маятника по периметру окружности равно $L\varphi_1$, мгновенная тангенциальная скорость равна $L\varphi_1'$, а мгновенное тангенциальное ускорение — $L\varphi_1''$. Векторная сумма сил тяжести mg и натяжения нити T определяет возвращающую силу $F_{\text{в}} = -mg \sin(\varphi_1)$. Знак «минус» здесь стоит потому, что сила направлена в сторону, противоположную смещению.

По второму закону динамики Ньютона

$$mL\varphi_1'' = -mg \sin(\varphi_1). \quad (1.27)$$

Это уравнение описывает колебания маятника при произвольных углах отклонения φ_1 . В отличие от малых колебаний, колебания при произвольных углах отклонения не являются *изохронными*, и период колебаний зависит от амплитуды. В случае малых колебаний $\sin(\varphi_1) \simeq \varphi_1$, и поэтому уравнение колебаний простого маятника можно упростить:

$$mL\varphi_1'' + mg\varphi_1 = 0. \quad (1.28)$$

Маятник, движение которого можно описать уравнением (1.28), обычно называют *математическим*.

Учтем теперь действие пружины. Сила, действующая со стороны пружины на первый маятник, $F_{1\text{упр}} = -KL(\varphi_1 - \varphi_2)$. Добавляя эту силу в правую часть уравнения (1.28), получаем

$$mL\varphi_1'' + mg\varphi_1 = -KL(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.29)$$

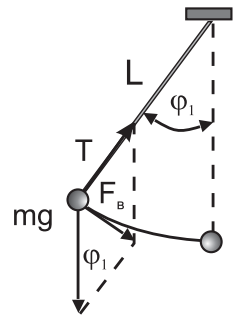


Рис. 10. Простой маятник

Вводя обозначения $\omega_0^2 = g/L$; $\Omega^2 = K/m$, получаем

$$\varphi_1'' + \omega_0^2 \varphi_1 + \Omega^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (1.30)$$

Совершенно аналогично можно записать уравнение движения и для второго маятника:

$$\varphi_2'' + \omega_0^2 \varphi_2 - \Omega^2(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (1.31)$$

Таким образом, мы получили систему двух дифференциальных уравнений (1.30) и (1.31).

Можно доказать, что такая система уравнений с помощью подходящего выбора переменных всегда может быть преобразована к совокупности независимых уравнений, каждое из которых описывает колебание с одной из собственных частот. Покажем, как могут быть выбраны эти переменные (они называются *нормальными координатами*) в случае системы с двумя степенями свободы.

Если сложить уравнения (1.30) и (1.31), то получаем уравнение для переменной $u_1 = \varphi_1 + \varphi_2$:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)'' + \omega_0^2(\varphi_1 + \varphi_2) = 0. \quad (1.32)$$

Теперь вычтем из уравнения (1.30) уравнение (1.31). Тогда получим уравнение для переменной $u_2 = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$(\varphi_1 - \varphi_2)'' + (\omega_0^2 + 2\Omega^2)(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \quad (1.33)$$

Таким образом, мы получили два независимых уравнения, описывающих нормальные колебания с нормальными частотами $\omega_1 = \omega_0$ и $\omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$. Решение уравнений дает зависимость переменных u_1 и u_2 как функции времени:

$$u_1(t) = a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1); \quad u_2(t) = a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2). \quad (1.34)$$

Решение (1.34) содержит четыре неизвестных параметра: a_1 , a_2 , δ_1 , δ_2 , которые могут быть найдены из четырех начальных условий (должны быть заданы координаты и скорости масс в начальный момент времени).

Для нахождения реальных положений первой и второй масс в различные моменты времени необходимо вернуться к исходным переменным $\varphi_1 = 1/2(u_1 + u_2)$, $\varphi_2 = 1/2(u_1 - u_2)$:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1/2[a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)]; \\ \varphi_2 &= 1/2[a_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)].\end{aligned}\quad (1.35)$$

Как следует из выражения для углов отклонения φ_1 и φ_2 (1.34), каждый из маятников одновременно участвует в двух колебаниях с разными частотами ω_1 и ω_2 , а результирующее отклонение определяется суперпозицией этих двух нормальных колебаний.

Если система обладает большим числом степеней свободы, то принципиально уже ничего не меняется: просто станет больше нормальных мод и колебания станут еще более сложными.

Биения

Во многих физических явлениях мы сталкиваемся с суперпозицией двух гармонических колебаний. Эти колебания могут соответствовать нормальным модам в системах с большим числом степеней свободы или вызываться внешними гармоническими силами. Примером такого рода колебаний, вызываемых внешними силами, являются колебания плотности воздуха, создаваемые двумя звучащими камертонами с частотами ω_1 и ω_2 . В этом случае колебания, воспринимаемые нашим ухом, будут суперпозицией гармонических колебаний плотности воздуха, которые генерируются каждым из камертонов.

Математические выкладки в обоих случаях совершенно одинаковы, но пример с камертоном наглядней, поскольку он легко может быть реализован экспериментально.

Для того чтобы раньше времени не поднимать вопрос о распространении колебаний (т. е. о волнах), будем считать, что оба камертона и прибор, регистрирующий звуковые колебания, находятся в непосредственной близости друг от друга. Предположим, кроме того, что амплитуды колебаний A одинаковы, а начальные фазы равны нулю.

Запишем выражение для результирующего смещения частиц среды ψ в виде суперпозиции смещений ψ_1 и ψ_2 , вызываемых каждым из камертонов:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t).\quad (1.36)$$

Интересно рассмотреть частный случай, когда частоты колебаний ω_1 и ω_2 близки. Введем новые понятия средней частоты $\omega_{\text{ср}}$ и частоты модуляции $\omega_{\text{мод}}$:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2), \quad \omega_{\text{мод}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2). \quad (1.37)$$

Сумма и разность этих частот

$$\omega_1 = (\omega_{\text{ср}} + \omega_{\text{мод}}), \quad \omega_2 = (\omega_{\text{ср}} - \omega_{\text{мод}}). \quad (1.38)$$

Выразим результирующее смещение (1.36) через определенные уравнениями (1.37) частоты $\omega_{\text{ср}}$ и $\omega_{\text{мод}}$:

$$\begin{aligned} \psi &= A \cos(\omega_{\text{ср}} t + \omega_{\text{мод}} t) + A \cos(\omega_{\text{ср}} t - \omega_{\text{мод}} t) = \\ &= 2A \cos(\omega_{\text{мод}} t) \cos(\omega_{\text{ср}} t); \quad \text{или} \\ \psi(t) &= A_{\text{мод}}(t) \cos(\omega_{\text{ср}} t), \quad A_{\text{мод}}(t) = 2A \cos(\omega_{\text{мод}} t). \end{aligned} \quad (1.39)$$

Уравнения (1.39) описывают колебания, происходящие с частотой $\omega_{\text{ср}}$, амплитуда которых циклически изменяется с частотой $\omega_{\text{мод}}$.

Биениями называется периодическое изменение амплитуды колебаний при сложении двух гармонических колебаний.

Естественно, что запись результирующих колебаний в форме (1.39) целесообразна лишь в том случае, когда $\omega_1 \simeq \omega_2$. Именно в этом случае результирующее колебание будет восприниматься как высокочастотное колебание с медленно осциллирующей амплитудой.

В качестве примера практической реализации возьмем два камертона с частотой 440 Гц, которые генерируют музыкальный тон «ля». Человеческое ухо обычно не в состоянии различить колебания, отличающиеся по частоте на 3–5 Гц, и взятые наугад камертоны скорее всего будут иметь не точно равные частоты. Поэтому если возбудить камертоны и поставить их рядом, то мы услышим биения.

На рис. 11 приведен результат сложения двух гармонических колебаний с частотами 40 и 44 Гц и одинаковыми амплитудами и начальными фазами.

Как видно из рисунка, в результате сложения высокочастотные колебания получают модулированными по амплитуде. Период модуляции $T_{\text{мод}} = 2\pi/\omega_{\text{мод}}$, а период биений оказывается в два раза меньше: $T_{\text{биен}} = \pi/\omega_{\text{мод}}$ ³.

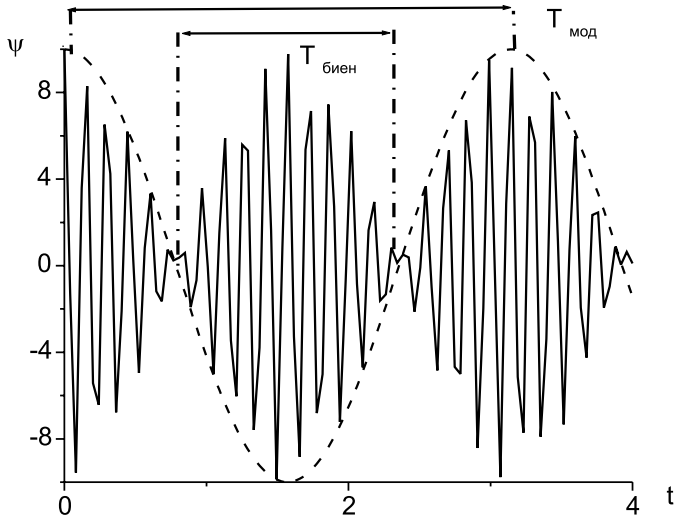


Рис. 11. Биения, возникающие в результате сложения двух колебаний с одинаковой амплитудой и фазой: частота $\omega_1 = 44$ Гц; $\omega_2 = 40$ Гц; по оси ординат откладывается значение функции $\psi = 10 \cos(44t) + 10 \cos(40t)$, по оси абсцисс — время t

Человеческое ухо является *квадратичным детектором* и воспринимает только изменение квадрата амплитуды колебаний. По этой причине период биений (интервал времени между двумя последовательными моментами ослабления звука) будет вдвое меньше периода модуляции.

В изображенном на рис. 11 примере $\omega_{\text{мод}} = 2 \text{ с}^{-1}$, следовательно, период модуляции $T_{\text{мод}} = 2\pi/\omega_{\text{мод}} \simeq 3.14 \text{ с}$, а период биений $T_{\text{биен}} \simeq 1.57 \text{ с}$. В случае с камертонами период биений

³Мы взяли для примера частоту не 440 Гц, а существенно меньшую, поскольку при частоте 440 Гц колебания были бы просто неразличимы на графике.

будет примерно таким же, поскольку он зависит только от разности частот колебаний.

Биения используют настройщики музыкальных инструментов. Если колебания струны точно соответствуют эталону, то биения будут отсутствовать.

1.7. Параметрический резонанс

Существуют такие незамкнутые колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению параметров колебательной системы. Простым примером системы с параметрическим возбуждением колебаний является математический маятник, длина которого периодически изменяется со временем (рис. 12).

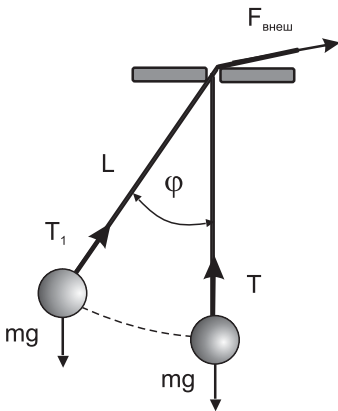


Рис. 12. Параметрическое возбуждение колебаний

то внешней силой совершается работа, равная $F_{\text{вн}} \Delta L = T \Delta L$, а когда длина маятника снова становится равной L в точке амплитудного отклонения, то система совершает работу, но эта работа меньше, поскольку $T_1 < T$ (см рис. 12).

Явлением параметрического резонанса объясняется возможность самораскачивания на качелях. Хорошо известно, что человек, стоя на качелях, в состоянии увеличить амплитуду

Если теперь в системе, изображенной на рис. 12, периодически изменять длину L маятника, то легко добиться того, что любые малые колебания будут усиливаться. Действительно, представим себе, что в тот момент, когда масса m проходит положение равновесия, длина нити уменьшается на величину ΔL , а когда маятник находится в крайнем положении, длина нити становится прежней — L ⁴.

Ясно, что при таком воздействии внешняя сила совершает положительную работу. Когда длина маятника уменьшается при прохождении положения равновесия,

⁴Мы рассматриваем случай, когда внешняя сила изменяется периодически, но не по гармоническому закону. Результаты в случае действия гармонической силы принципиально не изменяются, но математические выкладки существенно сложнее.

колебаний. Утверждение, которое часто приходится слышать, что человек раскачивается за счет мускульной силы, является не совсем корректным, поскольку мускульная сила — это внутренняя сила, которая не может привести в движение центр масс системы. Ясно, что должна существовать внешняя сила, роль которой играет сила реакции опоры качелей.

Пример 3

Пусть в начальный момент времени маятник отклонен на угол φ_0 (см. рис. к примеру). На какую величину изменится угол за половину периода за счет параметрического усиления колебаний, если длина маятника изменяется на величину ΔL ?

Решение

Пусть масса шарика на конце нити будет m , длина нити — L . Найдем скорость, которую приобретет шарик в момент прохождения положения равновесия. Из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgL(1 - \cos(\varphi_0)) \quad \text{или}$$

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos(\varphi_0))}.$$

При прохождении положения равновесия длина нити становится меньше на величину ΔL , и это приведет к увеличению линейной скорости. Действительно, из закона сохранения момента импульса⁵ следует:

$$mvL = mv_1(L - \Delta L) \quad \text{или} \quad v_1 = v \frac{L}{L - \Delta L}.$$

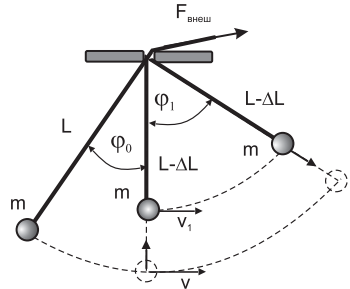
Поскольку скорость массы m выросла, то увеличится угол φ_1 , на который отклонится масса через четверть периода. Его снова можно найти из закона сохранения энергии:

$$mv_1^2/2 = mg(L - \Delta L)(1 - \cos(\varphi_1))$$

Подставляя в это выражение найденные выше значения v_1 и v , получаем

$$(1 - \cos(\varphi_0)) \left(\frac{L}{L - \Delta L} \right)^3 = (1 - \cos(\varphi_1)).$$

⁵Момент импульса сохраняется, поскольку сила, действующая на массу, направлена вдоль радиуса, и поэтому момент силы равен нулю.



К примеру 3

Пользуясь формулой $(1 - \cos(\alpha)) = 2 \sin^2(\alpha/2)$, получаем

$$\sin(\varphi_1/2)/\sin(\varphi_0/2) = \left(\frac{L}{L - \Delta L}\right)^{3/2}.$$

В случае малых углов $\sin(\varphi_0) \simeq \varphi_0$, $\sin(\varphi) \simeq \varphi_1$. Тогда

$$\varphi_1 = \varphi_0 \left(\frac{L}{L - \Delta L}\right)^{3/2}.$$

1.8. Фазовый портрет колебаний

В некоторых случаях является полезным рассмотреть движение системы в фазовом пространстве. *Фазовым пространством* называется пространство, образованное переменными, которые характеризуют движение динамической системы.

Поясним понятие фазового пространства на примере гармонического осциллятора. Как известно, состояние гармонического осциллятора однозначно определяется заданием координаты x и скорости v колеблющейся массы в некоторый момент времени (см. пример 1 гл. 1). По этой причине для рассматриваемой системы фазовое пространство двумерно и имеет две независимые координаты x и v . В каждый момент времени координата и скорость частицы имеют определенное значение и определяют в фазовом пространстве некоторую точку, которая называется фазовой. Фазовая точка однозначно определяет состояние системы в данный момент времени. Если последовательно изобразить фазовые точки системы для различных моментов времени, то мы получим некоторую кривую, называемую фазовой траекторией.

В случае гармонического осциллятора фазовая траектория является эллипсом. Действительно, пусть энергия E колебательной системы остается постоянной, тогда

$$\frac{Kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = E. \quad (1.40)$$

Разделив обе части уравнения (1.40) на E , приведем его к виду

$$\frac{x^2}{2E/K} + \frac{v^2}{2E/m} = 1. \quad (1.41)$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a = \sqrt{2E/K}$ и $b = \sqrt{2E/m}$ (см. рис. 13). При колебаниях координата $x = x_0 \cos \omega_0 t$ и скорость $v = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$ меняется таким образом, что фазовая точка, двигаясь по часовой стрелке, как это показано на рис. 13, за один период колебания $T = 2\pi/\omega_0$ совершает полный оборот.

Мы рассматриваем случай, когда в системе нет затухания и энергия осциллятора E остается постоянной. В этом случае фазовая траектория является линией постоянного значения энергии в фазовом пространстве. Если энергия осциллятора будет больше, то фазовая траектория будет изображаться эллипсом с большим значением полуосей.

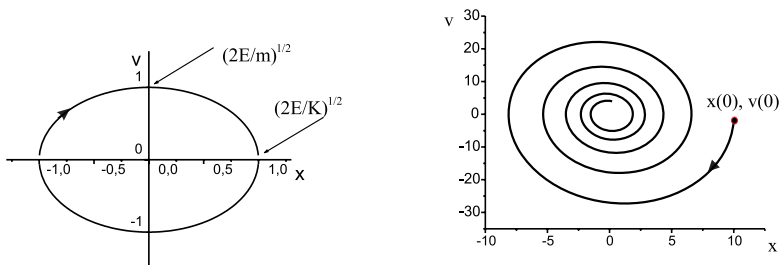


Рис. 13. Фазовые портреты различных гармонических осцилляторов:

слева – осциллятор без затухания; справа – фазовый портрет затухающего осциллятора: $\omega_1 = 3$, $\gamma = 0,2$, $0 < t < 10$

Рассмотрим теперь затухающие колебания. В этом случае механическая энергия колеблющейся системы уменьшается за счет действия диссипативных сил. При малых значениях декремента затухания маятник успеет сделать большое число колебаний, амплитуда которых уменьшается по экспоненциальному закону. Параметрическое уравнение для фазовой траектории можно получить, если воспользоваться выражением (1.11) для смещения осциллятора

$$x(t) = x_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta)$$

и формулой для скорости движения осциллятора как функции времени, которая получается дифференцированием формулы (1.11):

$$v(t) = -x_0(\omega_1 \exp(-\gamma t) \sin(\omega_1 t + \delta) + \gamma \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta)).$$

Построим фазовый портрет гармонического осциллятора с параметрами $\omega_1 = 3 c^{-1}$, $\gamma = 0,2 c^{-1}$. Будем считать, что в начальный момент времени $t = 0$, $x_0 = 10 \text{ см}$, $\delta = 0$. Результат вычисления $x(t)$, $v(t)$ по формулам, приведенным выше, представлен на рис. 13 справа. Как следует из рисунка, в случае затухающих колебаний фазовый портрет осциллятора представляет собой закручивающуюся спираль. Амплитуда колебаний смещения $x(t)$ и скорости $v(t)$, уменьшаясь, через некоторое время станет равной нулю.

Фазовый портрет осциллятора с параметрическим возбуждением

Рассмотрим теперь более общий случай, когда есть вынуждающая сила и сила трения. Если вынужденные колебания являются установившимися, то фазовая траектория, как это следует из формул (1.13), (1.14), (1.16), будет представлять собой эллипс. Отличие от случая свободных колебаний сводится лишь к тому, что размер полуосей эллипса будет зависеть от частоты вынуждающей силы ω и декремента затухания γ .

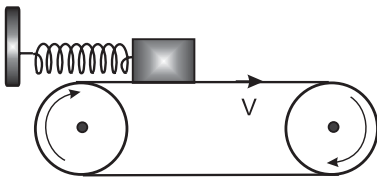


Рис. 14. Осциллятор с параметрическим возбуждением колебаний

Наиболее интересным является режим установления вынужденных колебаний. В качестве такого примера рассмотрим механическую систему, которая представляет собой гармонический осциллятор, установленный на ленте транспортера, движущегося с постоянной скоростью V (рис. 14).

Параметрическое возбуждение колебаний в этой системе возникает из-за зависимости силы трения между бруском массой m и лентой транспортера. Теоретически рассчитать силу

трения $R(v)$, зависящую от скорости v , не представляется возможным. По это причине мы воспользуемся эмпирической формулой

$$R(v) = -\rho v \pm \left(\frac{R_0 - R_1}{1 + \lambda |V - v|} + R_1 \right). \quad (1.42)$$

В формуле (1.42) первый член описывает сопротивление воздуха, величина R_0 – сила трения покоя бруска, R_1 – сила трения при бесконечно большой относительной скорости массы. Коэффициент λ в знаменателе формулы учитывает тот эмпирический факт, что сила сухого трения несколько уменьшается при возрастании относительной скорости. Знак «плюс» перед скобкой в формуле (1.42) выбирается при $V > v$, знак «минус» при $V < v$. Запишем уравнение движения бруска массой m под действием квазиупругой силы и силы трения

$$m \frac{dv}{dt} = R(v) - m\omega_0^2 x, \quad (1.43)$$

где x – отклонения массы от положения равновесия, а ω_0 – собственная частота. В действительности, поскольку лента транспортера движется с постоянной скоростью V , колебания будут происходить в окрестности смещенного положения равновесия (если бы колебаний не было, то со стороны ленты транспортера действовала бы постоянная сила). Величину смещения массы x_0 в стационарном случае (когда она не колеблется) можно найти из уравнения (1.43), полагая левую часть равной нулю:

$$0 = R(0) - m\omega_0^2 x_0,$$

$$x_0 = \frac{R(0)}{m\omega_0^2}.$$

Примем за начало отсчета координату x_0 . Вводя обозначение для отклонения от стационарного положения

$$z = x - x_0,$$

получаем

$$m \frac{dv}{dt} = R(v) - m\omega_0^2 z - m\omega_0^2 x_0. \quad (1.44)$$

Для наших целей удобно преобразовать уравнение (1.43) в систему уравнений первого порядка:

$$\frac{dz}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 z - \frac{1}{m}(R(v) - R(0)) = 0. \quad (1.45)$$

Для получения последнего равенства в уравнении (1.45) мы в формулу (1.43) подставили значение x_0 , которое было найдено выше.

Для построения фазового портрета системы необходимо найти значения $x(t)$ и $z(t)$, т. е. решить систему уравнений (1.45). Аналитическое решение этой системы уравнений является достаточно сложным. По этой причине мы прибегнем к численному решению этих уравнений методом Эйлера.

Пусть в некоторый начальный момент времени t_0 нам известны начальная координата $z(t_0) = z_0$ и начальная скорость $v(t_0) = v_0$. Найдем значение координаты и скорости в момент времени $t_1 = t_0 + dt$. Из формул (1.45) следует, что приращения

$$dz = v_0 dt, \quad dv = \left(\frac{1}{m}(R(v_0) - R(0)) - \omega_0^2 z_0 \right) dt.$$

Таким образом, значение координаты $z(t_0 + dt) = z(t_1) = z_0 + dz$, $v(t_0 + dt) = v(t_1) = v_0 + dv$. Теперь мы знаем координату и скорость в момент времени t_1 . Повторяя только что написанную процедуру, можно выполнить следующий шаг и найти значения координаты и скорости в момент времени $t_2 = t_1 + dt = t_0 + 2dt$. Очевидно, что можно записать рекуррентное соотношение, позволяющее найти координату и скорость на $n + 1$ -м шаге, если они известны на n -м шаге:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= z_n + v_n dt, \\ v_{n+1} &= v_n + \left(\frac{1}{m}(R(v_n) - R(0)) - \omega_0^2 z_n \right) dt. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Это рекуррентное соотношение и представляет собой алгоритм Эйлера для решения нашей системы уравнений. Конечно, все вычисления можно было бы выполнить и вручную, но лучше доверить эту рутинную работу ЭВМ.

Зададим следующие значения параметров, определяющих значение силы трения в формуле (1.42) и характеристики гармонического осциллятора: $R_0 = 50$, $R_1 = 10$, $V = 5$, $\lambda = 0,2$, $\rho = 0,2$, $m = 2$, $\omega_0 = 2$, Размерность численных значений здесь опущена, но можно считать, что параметры заданы в системе СИ. Пусть при $t = 0$ $z(0) = 0,2$, $v(0) = 0,2$. Последовательно применяя алгоритм Эйлера [см. формулу (1.46)] с временным шагом $0,001c$, получим фазовую траекторию, изображенную на рис. 15.

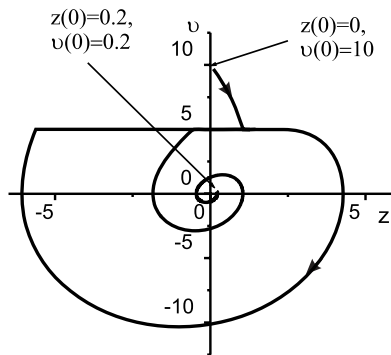


Рис. 15. Предельный цикл автоколебательной системы, изображенной на рис. 14

Как следует из рисунка, при малых значениях времени t амплитуда колебаний осциллятора возрастает (раскручивающийся участок спирали), а затем выходит на предельный цикл, который напоминает эллипс со «срезанной» верхней частью. Режим установившихся колебаний здесь интересен тем, что как только масса приобретает скорость $V > 5 \text{ м/с}$, т. е. скорость становится больше скорости движения ленты транспортера, лента начинает тормозить осциллятор, и поэтому скорость массы $v \leq 5 \text{ м/с}$.

Другой интересной особенностью поведения анализируемой системы является то, что предельный цикл является устойчивым в том смысле, что его вид не зависит от стартовых значений координаты и скорости массы. В качестве примера на

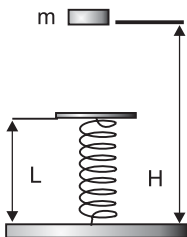
рис. 15 приведен фазовый портрет той же системы, но с начальными значениями $z(0) = 0$, $v(0) = 10$. Из рисунка ясно видно, что установившиеся колебания выходят на тот же предельный цикл. Фазовая траектория, к которой стягиваются все другие фазовые траектории, называется аттрактором.

На этом закончим краткое знакомство с теорией механических колебаний. Конечно, ряд тем остался вне поля нашего зрения, и поэтому мы рекомендуем читателю обратиться к списку литературы в конце книги для более глубокого знакомства с этой тематикой.

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Рассмотрим решения некоторых задач. В качестве примеров выбраны задачи, решение которых, на наш взгляд, позволяет еще раз остановиться на принципиальных вопросах теории, рассмотренной в предыдущих разделах.

Пример 4⁶



К примеру 4

Груз массой m падает с высоты H на пружинку жесткостью K и длиной L , нижний конец которой прикреплен к столу (см. рис.). Определить время контакта груза с пружиной, если деформацию пружины можно считать малой. Массой пружинки можно пренебречь.

Решение

Предположим, что пружина деформируется слабо и силы упругости подчиняются закону Гука. Выберем начало отсчета системы координат на расстоянии L от стола, а ось x направим вниз. После падения тело массой m будет двигаться под действием квазиупругой силы и силы тяжести:

$$mx'' = mg - Kx,$$

где g — ускорение свободного падения. Если за начало отсчета системы координат принять точку x_0 , в которой сила тяжести уравновешена квазиупругой силой ($mg = Kx_0$), и ввести новую переменную $z = x - x_0$, то уравнение движения приводится к виду уравнения движения гармонического осциллятора

$$z'' + \omega_0^2 z = 0; \quad \omega_0^2 = K/m.$$

⁶Первые три примера приведены в предыдущих разделах.

Общее решение уравнения запишем в следующем виде [см. формулу (1.7)]:

$$z(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta); \quad z'(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta).$$

Неизвестные величины a , δ будем искать из условий, что в момент времени $t = 0$, $z(0) = x_0$, $z'(0) = \sqrt{2g(H - L)}$. Отсюда получаем два уравнения:

$$-x_0 = a \cos(\delta); \quad \sqrt{2g(H - L)} = -a\omega_0 \sin(\delta).$$

Решение этой системы дает

$$a = \frac{mg}{K} \sqrt{1 + \frac{2K(H - L)}{mg}}; \quad \text{tg}(\delta) = \sqrt{\frac{2K(H - L)}{mg}}.$$

Для того чтобы правильно найти угол δ , необходимо заметить, что он находится в третьей четверти, поскольку из начальных условий следует, что $\cos(\delta) < 0$, $\sin(\delta) < 0$. Поэтому

$$\delta = \pi + \text{arctg} \sqrt{\frac{2K(H - L)}{mg}}.$$

Найдем условия отрыва массы от пружины. Очевидно, что отрыв произойдет тогда, когда $g = z''$:

$$-\omega_0^2 a \cos(\omega_0 t + \delta) = g,$$

поскольку, когда тело оторвется, оно будет двигаться только под действием силы тяжести.

Подставляя в это уравнение значение $a = -x_0 / \cos(\delta)$, которое следует из начальных условий, и учитывая, что $x_0 = mg/K$, имеем

$$\omega_0^2 \frac{x_0}{\cos(\delta)} \cos(\omega_0 t + \delta) = g \quad \text{или} \quad \cos(\omega_0 t + \delta) = \cos(\delta).$$

Таким образом, если бы масса была жестко связана с пружиной, то ее ускорение было бы равно g в моменты времени $t = 0 + nT$, где $n = 1, 2, \dots, T$ — период колебаний. Поскольку ускорение определяется только силами, а в нашем случае силы будут одинаковы, если одинаковы смещения массы от положения равновесия, то при движении массы вверх отрыв ее будет происходить в точке с координатой $z = -x_0$.

Рассчитаем теперь время контакта груза с пружиной $t_{\text{конт}}$. Представим себе, что масса жестко связана с пружиной. Тогда $t_{\text{конт}} = T - 2t_0$, где t_0 — время, за которое масса m из точки с координатой $-a$ переместится в точку с координатой $-x_0$. Время t_0 найдем из условия

$$a \cos(-\omega_0 t_0 + \delta) = -a.$$

При выводе этого соотношения мы учли, что при $t = 0$ тело находилось в точке x_0 . Тогда в более ранний момент времени $-t_0$ оно имело амплитудное смещение (мы считаем тело жестко связанным с пружиной).

Полученное выше уравнение позволяет найти t_0 :

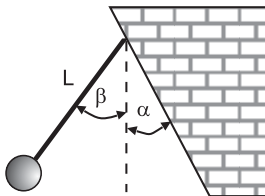
$$-\omega_0 t_0 + \delta = \arccos(-1); \quad -t_0 = \sqrt{m/K} (\pi - \delta).$$

Подставляя в эту формулу значение δ , найденное ранее, и значение периода колебаний $T = 2\pi\sqrt{m/K}$, получаем

$$t_{\text{конт}} = 2\sqrt{\frac{m}{K}} \left(\pi - \arctg \sqrt{\frac{2K(H-L)}{mg}} \right).$$

Пример 5

К стене, наклоненной под углом α к вертикали, подвешен маятник длиной L . Маятник отклонили в плоскости, перпендикулярной стене, на небольшой угол $\beta > \alpha$ и отпустили. Найти период колебаний маятника, если удары о стену можно считать абсолютно упругими.



К примеру 5

Решение

Если бы стенки не было, маятник совершал бы гармонические колебания с угловой амплитудой (максимальным углом отклонения от вертикали) β и периодом $T_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$.

При упругом столкновении со стенкой абсолютное значение скорости маятника не изменяется, а направление движения меняется на противоположное. Это

означает, что при наличии стенки период колебаний маятника T меньше периода колебаний T_0 на время τ . За время τ маятник, совершая свободные колебания, отклонился бы вправо от угла α до

угла β и вернулся обратно. Таким образом,

$$T = T_0 - \tau.$$

Для нахождения промежутка времени τ запишем решение уравнения колебаний для угловой переменной φ :

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \delta),$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_0$, φ_0 — амплитуда колебаний, δ — начальная фаза колебаний. Неизвестные параметры φ_0 и δ определим из начальных условий. Поскольку при $t = 0$ $\varphi = \beta$ и угловая скорость маятника $\varphi' = 0$, получаем

$$\varphi_0 = \beta, \quad \delta = 0, \quad \varphi = \beta \cos(\omega_0 t).$$

Время τ_1 , через которое угол отклонения станет равным α , найдем из условия

$$\alpha = \beta \cos(\omega_0 \tau_1); \text{ отсюда } \tau_1 = \frac{T_0}{2\pi} \arccos\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

В силу симметрии задачи интересующее нас время $\tau = 2\tau_1$, и поэтому окончательно получаем

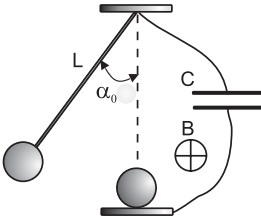
$$T = T_0 \left(1 - \frac{1}{\pi} \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right) = 2\sqrt{\frac{L}{g}} \left(\pi - \arccos \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Пример 6

Математический маятник, который состоит из тяжелого металлического шара массой m и тонкой проводящей нити длиной L , совершает малые колебания в горизонтальном однородном магнитном поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости колебания маятника. В начальный момент времени маятник отклонен от вертикали на угол α_0 . Каким будет амплитудное отклонение маятника α_1 через половину периода, если в момент, когда маятник проходит положение равновесия, к нему подсоединить конденсатор емкости C (см. рис.). Предполагается, что за время контакта, которое очень мало, конденсатор успевает полностью зарядиться.

Решение

Поскольку проводящая нить движется в магнитном поле, то на концах нити возникает некоторая разность потенциалов. Именно поэтому при подключении конденсатора он будет заряжаться. Поскольку предполагается, что время контакта очень мало, то можно считать, что зарядка происходит при постоянном значении разности потенциалов U . Из условия задачи следует, что конденсатор успел полностью зарядиться. Тогда разность потенциалов на обкладках конденсатора тоже равна U , а это означает, что по цепи прошел заряд $q = CU$ и сторонние силы совершили работу $A = qU = CU^2$, которая частично перейдет в джоулево тепло, а частично будет запасена конденсатором⁷.



К примеру 6

Таким образом, задача может быть решена с использованием закона сохранения энергии. В начальный момент времени маятник обладал потенциальной энергией $W_0 = mgL(1 - \cos \alpha_0)$. Энергия, которая частично превратилась в тепло, частично запасена конденсатором ($A = CU^2$). В крайнем правом положении маятник будет обладать энергией $W_1 = mgL(1 - \cos \alpha_1)$.

Поэтому на основании закона сохранения энергии можно записать равенство:

$$mgL(1 - \cos \alpha_1) = mgL(1 - \cos \alpha_0) - CU^2.$$

Воспользуемся тригонометрической формулой $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \alpha/2$. Тогда находим

$$\sin^2 \alpha_1/2 = \sin^2 \alpha_0/2 - \frac{CU^2}{2mgL}. \quad (1)$$

Для получения окончательного результата необходимо найти значение разности потенциалов на концах проводящей нити в момент прохождения маятником положения равновесия. Эта разность потенциалов численно равна работе силы Лоренца по перемещению единичного заряда с одного конца проводника на другой. Сила Лоренца, однако, не является постоянной. Она растет линейно — от нуля в точке подвеса маятника до максимального значения $F_{\max} = e\omega LB$ на противоположном конце, где e — заряд электрона, ω — угловая

⁷Следует подчеркнуть, что ровно половина работы сторонних сил превратится в тепло, поскольку энергия, запасенная конденсатором W_k , равна $CU^2/2$.

скорость маятника при прохождении им положения равновесия. Если сила растет линейно, то для вычисления работы можно использовать среднее значение силы $F_{\text{ср}} = F_{\text{макс}}/2 = e\omega LB/2$. С учетом всего сказанного запишем выражение для разности потенциалов

$$U = \omega L^2 B/2. \quad (2)$$

Угловая скорость $\omega = v/L$ может быть найдена из закона сохранения энергии, поскольку начальная потенциальная энергия равна кинетической энергии маятника в положении равновесия:

$$mgL(1 - \cos \alpha_0) = mv^2/2, \quad \text{или} \quad v = 2\sqrt{gL} \sin \alpha_0/2.$$

С учетом последнего результата и выражения (2) найдем значение разности потенциалов

$$U = \sqrt{gL^3} B \sin \alpha_0/2. \quad (3)$$

Подставляя формулу (3) в выражение (1), получаем

$$\sin^2 \alpha_1/2 = \sin^2 \alpha_0/2 \left(1 - \frac{CL^2 B^2}{2m} \right). \quad (4)$$

Если учесть, что углы отклонения являются малыми, то формулу (4) можно упростить. Полагая $\sin \alpha_0 \simeq \alpha_0$, $\sin \alpha_1 \simeq \alpha_1$, получаем

$$\alpha_1^2 = \alpha_0^2 \left(1 - \frac{CL^2 B^2}{2m} \right).$$

Пример 7

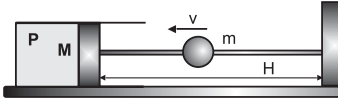
На гладкий горизонтальный стержень надеты поршень массой M и легкий шар массой $m \ll M$. Шару сообщают скорость v так, как показано на рисунке. На каком расстоянии H от стенки будет находиться поршень? Каким будет период T его малых колебаний? Площадь поршня S , давление газа остается постоянным и равно P . Все удары можно считать абсолютно упругими. Трение между поршнем и стенками цилиндра пренебрежимо мало.

Решение

Слева на поршень со стороны газа действует постоянная сила $F = PS$. Справа на газ действует некоторая средняя сила $F_{\text{ср}}$, величину которой можно легко оценить из второго закона Ньютона:

$$F_{\text{ср}} = \frac{\Delta p}{\Delta t},$$

где Δp — импульс, переданный шаром поршню за время Δt .



К примеру 7

Поскольку $M \gg m$, то можно предполагать, что скорость шара при отскоке от поршня не меняется по абсолютной величине, изменяясь только по направлению. Если частота ударов шара о поршень $\nu = v/2H$ достаточно велика, то поршень будет совершать небольшие колебания вблизи равновесного состояния.

При каждом ударе шара о поршень ему передается импульс $2mv$. За единицу времени шар столкнется с поршнем $\nu = v/2H$ раз, поэтому

$$PS = 2m\nu v = mv^2/H; \quad \text{отсюда}$$

$$H = \frac{mv^2}{PS}. \quad (1)$$

Для того чтобы найти период колебаний, предположим, что поршень сместился на величину Δx в сторону стенки. Найдем изменение результирующей силы, действующей на поршень. Сила, действующая со стороны газа, не изменяется, а средняя сила, действующая со стороны шара, увеличится, поскольку шар будет чаще сталкиваться с поршнем. Изменение средней силы $\Delta F_{\text{ср}}$, таким образом, будет равно возвращающей силе $F_{\text{возвр}}$

$$F_{\text{возвр}} = \frac{mv^2}{H} - \frac{mv^2}{H - \Delta x} = \frac{-mv^2 \Delta x}{H(H - \Delta x)} \simeq -\frac{mv^2 \Delta x}{H^2} \quad (2)$$

В выражении (2) мы пренебрегли величиной Δx в знаменателе, поскольку выражение $\Delta F_{\text{ср}}$ уже пропорционально Δx . Как следует из формулы (2), возвращающая сила может быть записана в виде $F_{\text{возвр}} = -K_{\text{эфф}} \Delta x$, где

$$K_{\text{эфф}} = \frac{mv^2}{H^2} = \frac{P^2 S^2}{mv^2}. \quad (3)$$

Легко проверить, что при смещении поршня в противоположном направлении на величину $-\Delta x$ возникнет такая же по абсолютной величине возвращающая сила.

Таким образом, движение поршня действительно будет колебательным. Период колебаний найдем, пользуясь стандартными определениями:

$$T = 2\pi/\omega_0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{\text{эфф}}}{M}}.$$

Подставляя в последнее выражение найденное выше значением эффективной упругой константы $K_{\text{эфф}}$, окончательно получаем

$$T = 2\pi \frac{mv}{PS} \sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Пример 8

Шар-зонд, имеющий нерастяжимую оболочку, поднялся на некоторую максимальную для данных условий высоту и совершает малые колебания около равновесного уровня. Найти период этих колебаний, считая, что на такой высоте плотность воздуха ρ убывает с высотой с постоянной скоростью $\delta = 1,2 \cdot 10^{-4} \rho_0$ на каждый метр подъема, ρ_0 — плотность воздуха на равновесной для шара высоте. Трением шара о воздух пренебречь.

Решение

Прежде всего покажем, что шар-зонд действительно совершает колебания. Пусть масса шара равна m . На шар действуют сила тяжести mg и сила Архимеда $F_A = \rho Vg$, где V — объем шара. Обе силы направлены по вертикали, но действуют в противоположные стороны. Очевидно, что в положении равновесия $mg = \rho_0 Vg$.

Предположим теперь, что в силу каких-то случайных обстоятельств шар сместился вверх на величину Δx . Найдем, как при этом изменится результирующая сила, действующая на шар. Поскольку смещения шара малы, то можно пренебречь изменением силы тяжести при смещении шара. Сила Архимеда при смещении шара вверх уменьшится, поскольку с ростом высоты плотность воздуха падает, и поэтому на шар будет действовать результирующая возвращающая сила, направленная вниз.

При смещении шара-зонда вниз, рассуждая аналогичным образом, получаем, что возвращающая сила будет направлена вверх. Таким образом, действительно шар-зонд будет совершать колебания.

Найдем период этих колебаний. Для этого необходимо найти эффективную возвращающую силу $F_{\text{возвр}}$ и представить ее в виде $F_{\text{возвр}} = -K_{\text{эфф}} \Delta x$, где константа $K_{\text{эфф}}$ играет роль эффективной

жесткости пружины, а Δx — смещение шара из положения равновесия. Выберем начало отсчета системы координат в точке, где сила Архимеда уравновешена силой тяжести, а ось x направим вертикально вверх. Как уже отмечалось выше, возвращающая сила связана только с изменением силы Архимеда ΔF_A :

$$\Delta F_A = F_{\text{возвр}} = \Delta \rho V g,$$

где $\Delta \rho$ — изменение плотности воздуха при смещении шара:

$$\Delta \rho = -\delta \Delta x;$$

$$\text{отсюда получаем } F_{\text{возвр}} = -\delta V g \Delta x; \quad K_{\text{эфф}} = \delta V g. \quad (1)$$

Период колебаний шара-зонда

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{\text{эфф}}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\delta V g}}.$$

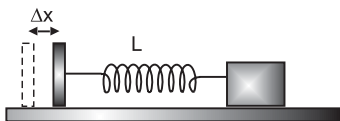
Поскольку $m = \rho_0 V$, то

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_0}{\delta g}}. \quad (2)$$

Подставляя в формулу (2) численные значения, получаем $T \simeq 183,1$ (с).

Пример 9

На гладком горизонтальном столе расположен пружинный маятник — тяжелый груз на легкой пружине, длина которой в свободном состоянии $L = 50$ см (см. рис.).



К примеру 9

Из-за небольшого вязкого трения о воздух колебания маятника медленно затухают, и колебательная система имеет добротность $Q = 100$. Для поддержания неизменной амплитуды прибегают к параметрическому возбуждению колебаний: конец пружины, прикрепленный к

подвижной стенке, быстро сдвигают на расстояние $\Delta x = 1$ мм навстречу грузу в тот момент, когда длина пружины минимальна, и возвращают в прежнее положение, когда она максимальна. Найти установившуюся амплитуду колебаний.

Решение

Будем считать, что добротность колебательной системы не изменилась при возбуждении в ней вынужденных колебаний с амплитудой $x_{\text{вын}}$. Тогда запасенная системой энергия $W = Kx_{\text{вын}}^2/2$, а энергия, теряемая за период W_{T} , в соответствии с определением добротности, (см. определение на с. 23)

$$W_{\text{T}} = \frac{2\pi W}{Q} = \frac{\pi K x_{\text{вын}}^2}{Q}. \quad (1)$$

Если вынужденные колебания являются установившимися, то потери энергии должны быть скомпенсированы работой внешней вынуждающей силы. Поэтому выполняется условие $W_{\text{T}} = A$, где A – работа внешних сил за один период. Если амплитуда колебаний $x_{\text{вын}} \gg \Delta x$ (это условие еще предстоит проверить), то работу внешних сил очень просто найти. Действительно, в крайних положениях упругая сила $F_{\text{упр}} = Kx_{\text{вын}}$. Поскольку за период работа производится дважды, то

$$A = 2Kx_{\text{вын}}\Delta x,$$

и мы имеем очевидное условие для определения амплитуды колебаний:

$$2Kx_{\text{вын}}\Delta x = \frac{\pi K x_{\text{вын}}^2}{Q}. \quad (2)$$

Из уравнения (2), производя простые преобразования, получаем и окончательный результат

$$x_{\text{вын}} = \frac{2\Delta x Q}{\pi}.$$

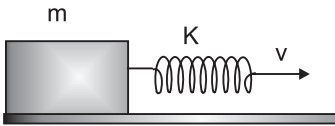
Подставляя численные значения в эту формулу, получаем $x_{\text{вын}} \simeq 6,6$ см, что оправдывает сделанные ранее предположения о том, что $x_{\text{вын}} \gg \Delta x$.

Пример 10

На шероховатом столе лежит брусок массой $m = 1$ кг; коэффициент трения покоя бруска о стол $\mu_0 = 1$, коэффициент трения скольжения $\mu = 0,9$. К бруску прикреплена пружина жесткостью $K = 100$ Н/м. Пружину начинают тянуть в горизонтальном направлении так, что ее свободный конец движется с постоянной скоростью $v = 0,1$ м/с (см. рис.). Как будет двигаться брусок?

Решение

Задача достаточно сложна и является, по существу, исследовательской. Это своеобразный пример параметрического возбуждения колебаний, когда изменяемым параметром системы является сила трения. Решение задачи позволяет понять, как возбуждаются, например, колебания струны в таких смычковых инструментах, как скрипка или виолончель.



К примеру 10а

При анализе движения массы нужно выделить три временных интервала. На первом временном интервале t_1 тело покоится, а правый конец пружины движется со скоростью v . Обозначим координату свободного конца пружины $x_{\text{пр}}$. Ясно, что до тех пор, пока сила

упругости пружины $F_{\text{упр}} = Kx_{\text{пр}}$ не достигнет значения максимальной силы трения покоя $F_{\text{пок}} = \mu_0 mg$, брусок двигаться не будет. Таким образом, на первом временном отрезке

$$t_1 = \frac{\mu_0 mg}{Kv} \quad (1)$$

брусок будет оставаться на месте. Подстановка численных значений дает оценку для величины $t_1 \simeq 1$ с.

Для анализа движения бруска на втором временном интервале выберем начало отсчета лабораторной системы координат в точке, где брусок покоился.

С момента времени $t = t_1$ брусок начинает двигаться. Проще рассмотреть движение бруска в системе, движущейся с постоянной скоростью v в том же направлении, что и правый конец пружины (координаты бруска, относящиеся к подвижной системе отсчета, будем отмечать штрихом).

В этой системе отсчета в момент времени t_1 брусок имеет скорость v и координату $x' = 0$ (в начальный момент начало отсчета подвижной и неподвижной координатных систем совпадают), а пружина растянута на величину $vt_1 = \mu_0 g / \omega_0^2$, где, как обычно, мы ввели обозначение $\omega_0^2 = K/m$. Кроме упругой силы, действует еще постоянная сила трения скольжения $F_{\text{ск}} = \mu mg$, которая остается неизменной по величине и направлению в течение всего второго временного интервала.

Под действием этих двух сил брусок будет совершать колебания

(напоминаем, что наличие постоянной силы не изменяет частоту колебаний, приводя лишь к смещению положения равновесия). Координату x'_0 нового равновесного положения можно найти из очевидного условия: в равновесии сила упругости, умноженная на удлинение пружины, должна скомпенсировать постоянную приложенную силу. Отсюда получаем

$$K(x_{\text{пр}} - x'_0) = \mu mg; \quad x'_0 = x_{\text{пр}} - \mu mg/K.$$

Численная оценка дает значение $x'_0 = 0,01$ м.

Запишем общее решение уравнения колебаний бруска относительно положения равновесия

$$x'(t) = a \cos(\omega_0 t + \delta), \quad (2)$$

$$v(t) = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta). \quad (3)$$

Неизвестные константы a , δ , входящие в уравнения (2)–(3), найдем из начальных условий: при $t = 0$ $x'(0) = -x'_0$, $v(0) = -v$. Подставляя значение $t = 0$ в эти уравнения, получаем систему для определения параметров a и δ :

$$-x'_0 = a \cos \delta; \quad -v = -a\omega_0 \sin \delta, \quad (4)$$

решая которую, легко находим

$$a = \sqrt{\frac{v^2}{\omega_0^2} + (x'_0)^2}; \quad \text{tg } \delta = -\frac{v}{x'_0 \omega_0}. \quad (5)$$

Чтобы правильно определить значение угла δ в выражении (5), необходимо заметить, что этот угол находится во второй четверти, поскольку, как следует из уравнений (4), $\sin \delta > 0$, а $\cos \delta < 0$. Отсюда получаем, что

$$\delta = \pi - \text{arctg } \frac{v}{x'_0 \omega_0}. \quad (6)$$

Переходя к лабораторной системе координат, получаем

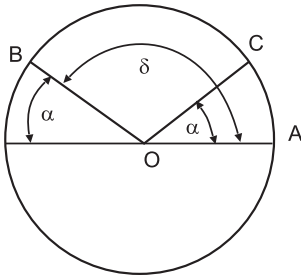
$$x(t) = v(t - t_1) + x'_0 + a \cos(\omega_0(t - t_1) + \delta), \quad t_1 < t < t_2, \quad (7)$$

$$v(t) = v - a\omega_0 \sin(\omega_0(t - t_1) + \delta), \quad t_1 < t < t_2. \quad (8)$$

Легко проверить, что приведенные решения удовлетворяют начальным условиям задачи, и при $t = t_1$ из уравнений (7) и (8) мы получаем значения $x = 0$, $v = 0$.

Найдем момент времени t_2 , когда брусок снова остановится. Очевидно, что в момент времени t_2 скорость бруска в лабораторной системе отсчета станет равной нулю, и из уравнения (8) для этого момента времени получаем

$$v = a\omega_0 \sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \delta). \quad (9)$$



К примеру 10б

Сравнивая уравнения (9) и второе из уравнений (4), можно записать равенство $\sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \delta) = \sin \delta$. На рисунке к примеру 10б показана начальная фаза колебаний δ . Как следует из рисунка, $\delta = \pi - \alpha$. Сравнивая этот результат и формулу (6), получаем выражение для угла α :

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{v}{x'_0 \omega_0}.$$

Итак, в момент времени t_1 фаза колебаний была равна δ . Численная оценка дает $\alpha = \pi/4$, $\delta = 3/4\pi$. С увеличением времени фаза колебаний $\omega(t - t_1) + \delta$ будет расти, что соответствует повороту вектора OB на рисунке против часовой стрелки. Ясно, что равенство $\sin(\omega_0(t_2 - t_1) + \delta) = \sin \delta$ будет выполняться тогда, когда вектор OB повернется на угол $\pi + 2\alpha$ и займет положение OC . Отсюда для определения времени t_2 получаем простое уравнение

$$\omega_0(t_2 - t_1) = \pi + 2\alpha.$$

Таким образом,

$$t_2 = t_1 + \frac{1}{\omega_0} \left(\pi + 2 \operatorname{arctg} \frac{v}{x'_0 \omega_0} \right). \quad (10)$$

Численная оценка дает $t_2 - t_1 = 0,47$ с.

В момент времени t_2 брусок останавливается. В этот момент времени пружина сжата, и сила упругости направлена против направления движения. С этого момента начинается третий временной интервал, в течение которого брусок неподвижен.

Найдем значение силы упругости в момент остановки бруска. Очевидно, что самый простой способ сделать это — найти удлинение пружины. Действительно, к моменту времени t_2 координата правого конца пружины $x_{\text{пр}} = vt_2$, а координата бруска определяется

выражением (7). Разность этих величин и дает удлинение пружины $\Delta x(t_2)$ в момент времени t_2 :

$$\Delta x(t_2) = vt_2 - v(t_2 - t_1) - x'_0 - a \cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \delta) \quad \text{или}$$

$$\Delta x(t_2) = vt_1 - x'_0 - a \cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \delta). \quad (11)$$

Любопытно произвести численную оценку величины $\Delta x(t_2)$. Напоминаем, что $t_1 = 1$ с, $x'_0 = 0,01$ м, $a = 0,01\sqrt{2}$, а из рис. к примеру 10б следует, что $\cos(\omega_0(t_2 - t_1) + \delta) = \cos \alpha = 1/\sqrt{2}$. Подставляя эти численные значения в формулу (11), получаем $\Delta x(t_2) = -0,01$ м. Таким образом, пружина действительно сжата, и численное значение силы упругости пружины $F_{\text{упр}} = 1$ Н.

Поскольку брусок покоится, то сила упругости будет изменяться только за счет движения свободного конца пружины. Брусок придет в движение, когда $F_{\text{упр}} = K\Delta x(t_3)$ будет равна силе трения покоя $F_{\text{пок}} = \mu_0 mg$. Время t_3 найдем из условия $t_3 = [\Delta x(t_3) - \Delta x(t_2)]/v$:

$$\Delta x(t_3) = \frac{\mu_0 mg}{K} = 0,1 \text{ м.}$$

Этот результат позволяет получить окончательную оценку времени $t_3 = 1,1$ с, в течение которого брусок будет оставаться в покое.

Таким образом, движение является колебательным. Повторяющиеся значения принимает скорость бруска. Колебания, которые возникают в этой задаче, являются периодическими, но не гармоническими.

Пример 11

Построить фазовый портрет осциллятора, совершающего колебания произвольной амплитуды.

Решение

Для определенности предположим, что маятник представляет собой груз массой m , который может свободно колебаться на жестком подвесе длиной L . Запишем полную энергию маятника E при его отклонении на произвольный угол θ :

$$E = \frac{mL^2\omega^2}{2} + mgL(1 - \cos \theta).$$

Выразив из этого уравнения

$$\omega = \pm \sqrt{2E/(mL^2) - 2\omega_0^2(1 - \cos \theta)},$$

где $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, можно построить и фазовый портрет маятника при произвольных углах отклонения, изображенный на рисунке.

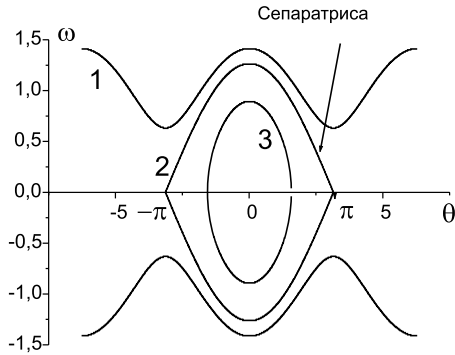


Рис. К примеру 11. Фазовый портрет маятника при произвольных углах отклонения

По оси абсцисс отложен угол отклонения, измеренный в радианах. Значение угла отклонения маятника может быть произвольно большим, если маятник может совершать вращательное движение вокруг точки подвеса. Кривой 3 ($E = 0,4$) соответствуют колебания, а кривой 3 ($E = 1$) – вращательное движение. Сепаратриса 2 ($E = 0,8$) разделяет эти два режима. Остальные параметры для кривых одинаковы: $m = 1, L = 1, \omega_0 = 0,4$. Все параметры приведены в системе СИ. Точки $\theta = \pm\pi$ соответствуют неустойчивому равновесию маятника.

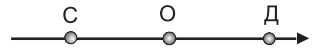
Задачи для самостоятельного решения

1.1. Тело массой $m = 0,1$ кг совершает колебания по закону $x = 0,3 \sin \pi(t+0,5)$ м. Найти амплитуду x_0 , период T , линейную ν и циклическую ω_0 частоты, начальную фазу колебаний δ , запасенную системой энергию W , а также смещение x , скорость v и ускорение a в момент времени $t = 0,5$ с.

1.2. Шарик массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания с амплитудой $x_0 = 0,2$ м и периодом $T = 4$ с. В момент времени $t = 0$ шарик имел отклонение, равное половине амплитудного: $x(0) = x_0/2$. Найти зависимость координаты шарика x от времени, кинетическую E_k , потенциальную E_p энергии шарика, а также силу, действующую на шарик в момент времени $t = 1/3$ с.

1.3. Определить максимальную скорость шарика математического маятника длиной L , совершающего малые колебания в одной плоскости, если амплитуда смещения x_0 .

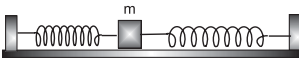
1.4. Тело совершает гармонические колебания вдоль прямой между точками С и Д (см. рис.). Зная, что максимальная скорость точки $v_{\max} = 10$ м/с, найти среднюю скорость $v_{\text{ср}}$ при движении от точки С до точки Д.



К задачам 1.4, 1.5

1.5. Точка совершает гармонические колебания между точками С и Д (см. рис.) Зная, что путь от О до Д она проходит за $t_1 = 3$ с, вычислить время t_2 , которое она затрачивает на первую половину этого пути (О — середина отрезка СД).

1.6. Колебания описываются уравнением $x = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$. Какова амплитуда A этих колебаний? Являются ли они гармоническими?



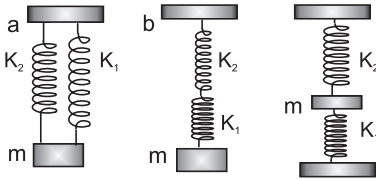
К задаче 1.7

1.7. Груз имеет массу $m = 1$ кг, результирующая жесткость связанных с ним пружин $K = 2500$ Н/м (см. рис). Какова амплитуда колебаний груза A , если в положении равновесия ему сообщить начальную скорость $v = 2$ м/с? Поверхность, по которой скользит груз, — горизонтальная; трением можно пренебречь.

1.8. Горизонтальная платформа совершает гармонические ко-

лебания в своей плоскости с частотой $\omega_0 = 2$ Гц и амплитудой $A = 1$ см. На платформе лежит груз, коэффициент трения которого о платформу $\mu = 0,2$. Будет ли груз скользить по платформе?

1.9. Неподвижный груз, подвешенный на пружине, растягивает ее, находясь в положении равновесия, на длину ΔL . Каков период вертикальных колебаний груза?



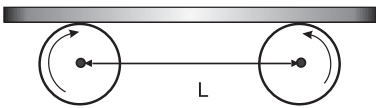
К задаче 1.10

1.10. Найдите период колебаний осцилляторов, изображенных на рисунке; K_1, K_2 — жесткость пружин, m — масса тела.

1.11. Тело массой m под действием пружины совершает колебания амплитудой A на гладком горизонтальном столе. В момент, когда тело проходило положение равновесия, на него сверху упал и прилип кусок пластилина массой m_1 . Как при этом изменится амплитуда колебаний?

1.12. Показать, что период T движения по окружности математического маятника, описывающего конус (конический маятник), равен периоду его колебаний, совершающихся в одной плоскости при малых углах отклонения.

1.13. В жидкости плотностью $\rho_{ж}$ плавает цилиндр высотой h и плотностью ρ . Определить частоту собственных колебаний цилиндра ω_0 . Трение не учитывать.



К задаче 1.14

1.14. Доска массой m лежит на двух катках, вращающихся с большой скоростью навстречу друг другу. Расстояние между осями катков равно L , коэффициент трения скольжения доски по катку — μ . Найти частоту продольных колебаний доски.

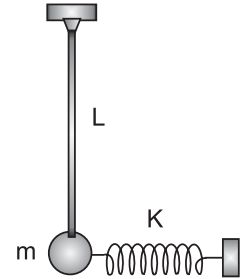
1.15. Два грузика массой m_1 и m_2 , находящиеся на гладкой горизонтальной поверхности, соединены невесомой пружиной. Жесткость пружины K . Каков период свободных колебаний системы, если при колебаниях грузы движутся вдоль одной прямой?

1.16. Чему равен период малых колебаний системы, изобра-

женной на рисунке? Каким станет этот период, если пружину заменить полоской резины той же длины и жесткости. Массой пружины (полоски резины) можно пренебречь.

1.17. К пружине жесткостью K подвешена чашка. На чашку с высоты H падает без начальной скорости пластилиновый шарик массой m и прилипает к ней. Чему равна амплитуда возникающих колебаний? Массой пружины и чашки можно пренебречь.

1.18. Горизонтальная подставка с лежащим на ней бруском совершает горизонтальные гармонические колебания с периодом $T = 0,5$ с. Коэффициент трения бруска о подставку $\mu = 0,1$. При какой амплитуде колебаний A брусок начнет проскальзывать на подставке при колебаниях?



К задаче 1.16

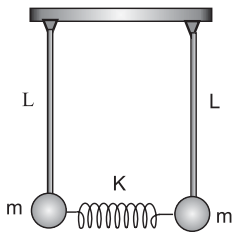
1.19. Определить отставание маятниковых часов (ходиков) за сутки, если их поднять на высоту $h = 5$ км над поверхностью земли. Радиус Земли $R \simeq 6400$ км. Вращение Земли не учитывать.

1.20. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T = 1$ с. С каким ускорением a движется лифт, если период колебаний маятника стал равным $T_1 = 1,1$ с? В каком направлении движется лифт?

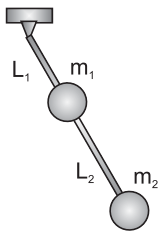
1.21. Найти период колебаний T математического маятника длиной L , подвешенного в вагоне, движущемся горизонтально с ускорением a .

1.22. Два одинаковых математических маятника длиной L связаны невесомой пружиной жесткостью K . На рисунке показано равновесное положение системы. Маятники отклоняют в плоскости рисунка на одинаковые по величине углы и отпускают. Найти период T малых колебаний связанных маятников, если: а) маятники отклонены в одну сторону (синфазные колебания); б) маятники отклонены в противоположные стороны (колебания в противофазе).

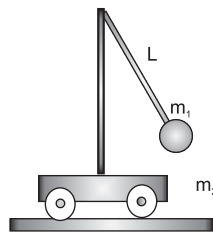
1.23. Найти период малых колебаний изображенного на рисунке маятника. Массой стержня можно пренебречь.



К задаче 1.22



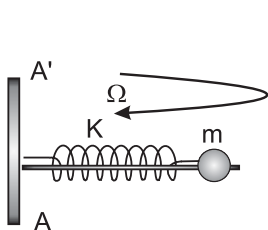
К задаче 1.23



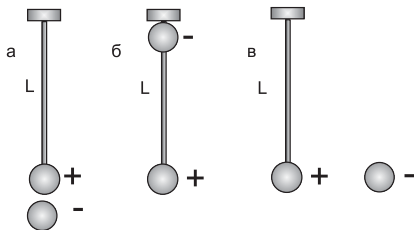
К задаче 1.24

1.24. На гладкой горизонтальной поверхности находится тележка массой m_2 с установленным на ней математическим маятником длиной L и массой m_1 . Найти период колебаний системы.

1.25. Шарик массой m , насаженный на стержень, вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси $A A'$, с которой он соединен пружиной жесткостью K . Определить частоту собственных колебаний шарика ω_0 , если трение отсутствует и выполняется условие $\Omega < K/m$.



К задаче 1.25

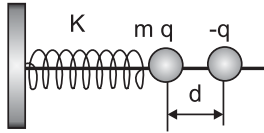


К задаче 1.26

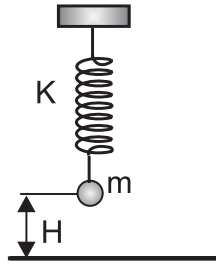
1.26. Маятник состоит из металлического шарика, подвешенного на длинной шелковой нити. Дать качественный ответ на вопрос, как изменится период колебаний маятника ω_0 , если шарик зарядить положительным зарядом, а отрицательный заряд поместить: а) снизу, на одной вертикали с точкой подвеса; б) сверху, в точке подвеса; в) сбоку, на одном уровне с шариком. Заряды можно считать точечными.

1.27. Гармонический осциллятор представляет собой шарик массой m , несущий заряд q и прикрепленный к невесомой пружине жесткостью K . Другой конец пружины жестко связан со стенкой. Шарик может без трения скользить по горизонтальному стержню.

На стержне укреплен другой шар, имеющий заряд $-q$. В равновесном положении расстояние между центрами шаров равно d . Найти частоту ω_0 малых колебаний системы.



К задаче 1.27



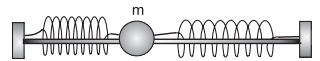
К задаче 1.28

1.28. Заряженный шарик массой m подвешен над проводящей плоскостью с помощью пружины жесткостью K . В состоянии равновесия расстояние между плоскостью и шариком равно H , а удлинение пружины — l . Шарик выводят из положения равновесия, и он начинает совершать малые колебания. Во сколько раз изменится частота колебаний, если проводящую плоскость убрать?

1.29. Определить период колебаний полярной молекулы в однородном электрическом поле, напряженность которого $E = 300$ В/см. Полярную молекулу можно представить в виде жесткой гантельки длиной l ($l \simeq 10^{-8}$ см), на концах которой находятся две материальные точки массой m ($m \simeq 10^{-24}$ г), несущие заряды $+q$ и $-q$ соответственно ($q \simeq 1,610^{-19}$ Кл).

1.30. Тонкий тяжелый обруч радиусом R с очень легкими спицами может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси. К обручу прикрепили маленький шарик, масса которого равна массе обруча. Найти период малых колебаний обруча с шариком.

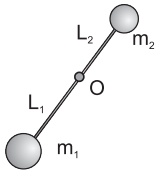
1.31. Пружину длиной L и жесткостью K разрезали на две неравные части с длинами b и $L - b$. Одним концом получившиеся пружины прикреплены к неподвижным опорам, а другим — к шару массой m , который может скользить без трения по направляющей. Определить период малых колебаний шара.



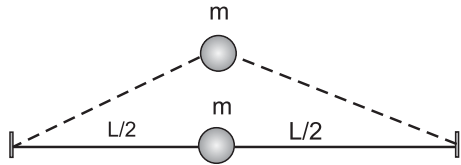
К задаче 1.31

1.32. На горизонтальную мембрану насыпан мелкий песок. Мембрана совершает колебания с частотой $\nu = 500$ Гц в вертикальной плоскости. Какова амплитуда A колебаний мембраны, если песчинки подсакаивают на высоту $h = 3$ мм по отношению к положению равновесия мембраны?

1.33. Цилиндр длиной $2L$ перегороден пополам поршнем массой m . В каждой части цилиндра находится один моль идеального газа при температуре T . Определить период колебаний, возникающих при малом смещении поршня. Трением можно пренебречь. Процессы расширения и сжатия газа считать изотермическими.



К задаче 1.34

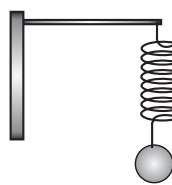
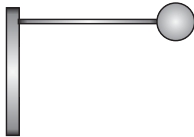


К задаче 1.35

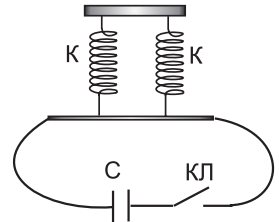
1.34. Невесомый стержень с закрепленными на нем грузами m_1 и m_2 (см. рис.) может вращаться вокруг горизонтальной оси (точки O). Каков период T его малых колебаний?

1.35. Закрепленная на концах струна длиной L растянута с силой F . К середине струны прикреплен точечный груз массой m . Определить период малых колебаний прикрепленного груза. Массой струны можно пренебречь.

1.36. Частота малых гармонических колебаний тяжелого шара на легкой, закрепленной в стене спице (см. рис.) равна ν_1 , а частота колебаний этого шара на прикрепленной к потолку пружине равна ν_2 . Какова частота ν колебаний этого шара на той же пружине, прикрепленной к спице?



К задаче 1.36

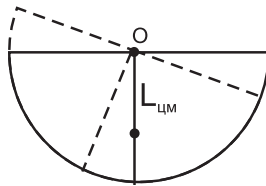


К задаче 1.37

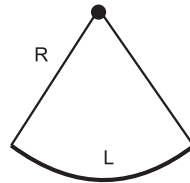
1.37. Прямолинейный проводник длиной L и массой m подвешен на двух пружинах жесткостью K в однородном магнитном поле с индукцией B (см. рис). Конденсатор емкостью C подключен к проводнику с помощью гибких и невесомых проводов. При замыкании ключа КЛ предварительно заряженный до разности потенциалов U конденсатор замыкается на проводник и полностью разряжается. При этом возникают колебания проводника. Определить частоту ω_0 и амплитуду A этих колебаний, если смещением проводника в начальный момент времени можно пренебречь.

1.38. Однородный массивный стержень длиной L подвешен к потолку и может совершать колебания вокруг оси, проходящей через его верхний конец. Чему равен период колебаний такой системы? Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов, $I = mL^2/3$.

1.39. Из тонкой проволоки сделали замкнутую фигуру, изображенную на рисунке. Радиус окружности равен R . Где находится центр тяжести этой фигуры? Чему равен период малых колебаний относительно точки O ?



К задаче 1.39



К задаче 1.41

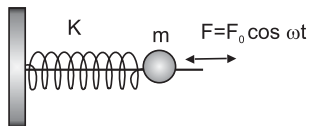
1.40. Два одинаковых математических маятника имеют общую точку подвеса. Одному маятнику толчком сообщили некоторую скорость, а затем через время τ другому маятнику толчком сообщили точно такую же скорость. Через какое время t_1 после начала движения второго маятника оба маятника встретятся, если период колебаний равен T , а $\tau < T/2$?

1.41. На двух легких нерастяжимых нитях длиной R каждая подвешена проволочная дуга такого же радиуса R , имеющая длину L (см. рис.). Найти период малых колебаний такого маятника, если нити и дуга движутся в вертикальной плоскости.

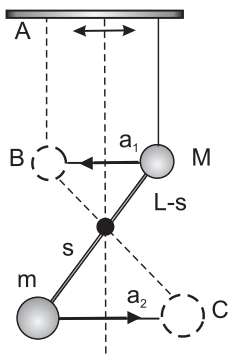
1.42. На подвижную шайбу массой m , которая может двигаться без трения по стержню, действует сила, изменяющаяся по гармоническому закону $F = F_0 \cos \omega t$. Между шайбой и стенкой размещена

невесомая пружина (см. рис.). Какой должна быть ее жесткость K , чтобы амплитуда силы, действующая на стенку, отличалась от F_0 в 3 раза?

1.43. Тела массой m_1 и m_2 связаны между собой легкой, первоначально не деформированной пружиной. Телу массой m_1 ударом сообщают скорость v , направленную вдоль пружины. Как с течением времени станут меняться скорости этих тел, если частота их свободных колебаний равна ω_0 ?



К задаче 1.42



К задачам 1.46, 1.47

1.44. Тело массой m , подвешенное на пружине, колеблется по закону $x = A_0 \cos \omega_0 t$. С момента времени t_0 на тело начинает действовать вдоль пружины постоянная сила F . Определить амплитуду колебаний относительно нового положения равновесия. При каком t_0 эта амплитуда наибольшая? Наименьшая?

1.45. Тело массой m колеблется по закону $x = A \cos(\omega t + \varphi)$. Найти зависимость силы, действующей на тело, от времени. Чему равна ее амплитуда? В какие моменты времени сила принимает наибольшие по модулю значения?

1.46. Точка подвеса A двойного маятника совершает гармонические колебания с малой амплитудой в горизонтальном направлении (см. рис.). Длина нижней нити равна L , масса нижнего шарика m , верхнего — M . Каким должен быть период колебаний точки подвеса A , чтобы верхняя нить все время оставалась вертикальной? Можно ли считать эти колебания вынужденными?

Указание. Если верхняя нить остается вертикальной, значит сумма всех внешних сил, приложенных к верхнему шару, направлена по вертикали. Отсюда следует, что центр масс системы не перемещается в горизонтальном направлении. Поэтому шары в любой момент времени движутся в противофазе и $a_1/a_2 = s/(L-s)$.

1.47. К маятнику AB с шариком массой M подвешен маятник BC с шариком массой m . Точка A совершает гармонические колебания по горизонтали с частотой ω . Найти длину нити BC , если

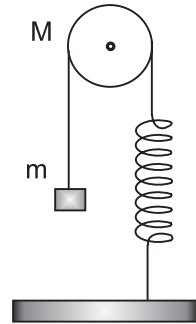
известно, что нить AB все время остается вертикальной.

1.48. Доказать, что период колебаний физического маятника увеличивается с увеличением максимального угла отклонения от положения равновесия.

1.49. Чашка пружинных весов массой m_1 совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой A . Когда чашка находилась в крайнем нижнем положении, на нее положили груз массой m_2 . В результате колебания прекратились. Определить первоначальный период колебаний чашки.

1.50. Часы с маятником на поверхности Земли идут точно. В каком случае эти часы отстанут больше за сутки: если их поднять на высоту 200 м или же опустить в шахту на глубину 200 м?

1.51. Механическая система состоит из груза массой m , пружины жесткостью K и блока массой M , представляющего собой тонкостенный цилиндр. Груз посредством невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, связан с пружиной (см. рис.). Чему равен период колебаний груза?

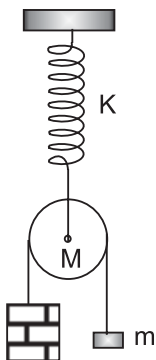


К задаче 1.51

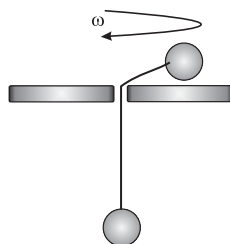
1.52. В сообщающиеся сосуды цилиндрической формы налита ртуть. Чему равен период колебаний ртути, если площадь поперечного сечения каждого сосуда $S = 0,3 \text{ см}^2$, а масса ртути $m = 484 \text{ г}$. Плотность ртути $\rho = 13,6 \text{ г/см}^3$.

1.53. Представим себе шахту, пронизывающую земной шар по одному из его диаметров. За какое время тело, брошенное в эту шахту, достигнет центра Земли?

1.54. Чему равен период вертикальных колебаний груза массой m в системе, изображенной на рисунке? Рассмотреть случаи, когда масса блока а) сосредоточена на его оси и б) равномерно распределена по внешнему периметру блока. Жесткость пружины K , нить невесомая и нерастяжимая.

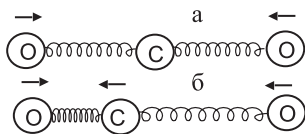


К задаче 1.54

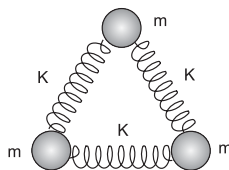


К задаче 1.55

1.55. Два одинаковых шарика прикреплены к концам невесомой нерастяжимой нити. Верхний шарик движется по горизонтальной круговой траектории с угловой частотой ω так, что нижний шарик остается неподвижным. Если слегка дернуть за нижний шарик, то возникнут малые колебания. Чему равна их частота? Трения нет.



К задаче 1.56



К задаче 1.57

1.56. Модель молекулы углекислого газа CO_2 – три шарика, соединенные пружинками и расположенные в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать колебания двух типов – а или б (см. рис.). Найти отношение частот этих колебаний. Жесткость пружинок считать равной K , отношение масс атомов кислорода и азота $M_o/M_c = 4/3$.

1.57. Найти частоту «симметричных» колебаний системы, изображенной на рисунке. Массы всех шаров m , коэффициенты жесткости пружинок – K .

1.58. Точка, совершающая гармонические колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях X, Y , движется по траектории, которая называется фигурой Лиссажу. Доказать, что если

частоты колебаний относятся как целые числа, то фигура Лиссажу является замкнутой кривой.

1.59. Малые колебания маятников, связанных пружиной, происходят по закону

$$x_1 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos \omega t,$$

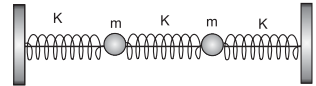
$$x_2 = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \cos \omega t.$$

Определить жесткость пружины, если известно, что в положении равновесия маятники вертикальны, а масса каждого шарика равна m (см. рис. к задаче 1.22).

1.60. Частица, на которую действует сила $F = F_0 \cos \omega t$, колеблется по гармоническому закону $x = x_0 \cos(\omega t - \varphi)$. Какова средняя мощность этой силы?

1.61. Двум шарикам массой m , которые связаны друг с другом и со стенками тремя пружинами жесткостью K (см. рис.), одновременно сообщили одинаковые по модулю скорости, направленные вдоль пружин. Найти частоты колебаний шариков для случаев, когда их начальные скорости одинаково направлены; противоположно направлены.

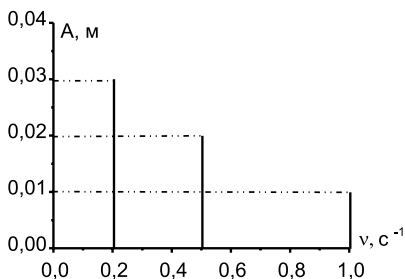
1.62. Свободные колебания сложных систем являются суперпозицией нескольких гармонических колебаний с разными частотами. Если первому шарiku в задаче 1.61 сообщить вдоль пружины скорость v , то последующее движение шариков будет суммой двух движений: движения шариков, которым сообщили скорость $v/2$ и $-v/2$, и движения шариков, которым сообщили скорости $v/2$ и $v/2$. Определить, пользуясь принципом суперпозиции, скорости шариков в последующие моменты времени. Чему равно максимальное смещение первого шарика? Второго? Максимальное удлинение средней пружины?



К задаче 1.61

1.63. Найти амплитуду и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения двух колебаний, в каждом из которых смещение задается уравнениями $x_1 = 4 \sin(\pi t)$ см и $x_2 = 3 \sin(\pi t + \pi/2)$ см. Записать уравнение результирующего колебания. Нарисовать векторную диаграмму сложения амплитуд.

1.64. На рисунке дан спектр сложного колебания. Пользуясь данными этого рисунка, записать уравнения колебаний, из которых составлено сложное колебание.



К задаче 1. 64

баниях $x = 2 \sin \omega t$ (м) и $y = 2 \cos \omega t$ (м). Найти траекторию движения точки.

1.67. Маятник массой m подвергается кратковременным ударам, с каждым из которых ему передается импульс p_0 . Построить фазовый портрет такого маятника, если в начальный момент маятник покоился, а удары следуют через временной интервал, равный периоду колебаний.

1.68. Затухание осциллятора может быть столь велико, что движение его перестанет носить колебательный характер. Оценить, при каком соотношении параметров γ и ω_0 это может произойти.

1.69. Период затухающих колебаний равен 4 с, логарифмический декремент затухания $\kappa = 1,6$, начальная фаза колебаний равна нулю. Смещение точки при $t = T/4$ равно 4,5 см. Записать уравнение для смещения материальной точки в этом колебании. (Логарифмическим декрементом затухания называется натуральный логарифм отношения амплитуд колебаний для двух соседних максимумов, т. е. $\kappa = \ln e^{\gamma T} = \gamma T$.)

1.70. Пусть кинетическая энергия осциллятора $E_{\text{кин}} = mv^2/2$, потенциальная энергия — $E_{\text{пот}} = Kx^2/2$, а мощность потерь за один период пропорциональна квадрату скорости: $P_{\text{пот}} = bv^2$. Определить характер сил сопротивления, действующих на осциллятор.

1.65. Точка участвует в двух колебаниях одинакового периода с одинаковыми начальными фазами. Амплитуда колебаний $A_1 = 3$ см, $A_2 = 4$ см. Найти амплитуду результирующего колебания, если: а) колебания совершаются в одном направлении, б) колебания взаимно перпендикулярны.

1.66. Точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях

1.71. Два следующих друг за другом наибольших отклонения в одну сторону секундного маятника отличаются на 1 %. Чему равен декремент затухания этого маятника γ ?

1.72. Добротностью осциллятора называется отношение его начальной энергии к энергии, потерянной им за время изменения фазы на 1 радиан. Выразить добротность через коэффициент затухания γ и частоту свободных колебаний ω_0 ($\omega_0 \gg \gamma$). Как связана добротность с числом колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз?

1.73. У монокристалла сапфира в вакууме добротность механических колебаний при низких температурах и соответствующей подвеске является чрезвычайно высокой: $Q = 10^8 - 10^9$. Частота собственных колебаний кристалла $\omega_0 = 10^4 \text{ с}^{-1}$. Оценить, во сколько раз изменится амплитуда колебаний кристалла за сутки.

1.74. Куб с ребром $a = 10 \text{ см}$, имеющий массу $m = 1 \text{ кг}$, подвешен на пружине жесткостью $K = 400 \text{ Н/м}$ так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток упругих шариков, обладающих скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$, на высоте первоначального положения основания кубика. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно. Найти период этих колебаний. Оценить время, в течение которого амплитуда колебаний уменьшится в e раз. Масса каждого шарика $m = 1 \text{ г}$, концентрация шариков в потоке $n = 1000 \text{ м}^{-3}$, столкновениями шариков между собой можно пренебречь.

1.75. Как следует из решения задачи 1.22, если отклонить грузики в одну сторону (см. рис. к задаче 1.22), то возбудятся колебания с частотой $\omega_0 = \sqrt{g/L}$. Если же отклонить их на равные углы в разные стороны, то возбуждаются колебания с частотой $\omega = \sqrt{g/L + 2K/m}$. В общем случае движение грузиков есть результат наложения этих двух колебаний:

$$x_1(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) + A \cos \omega t,$$

$$x_2(t) = B \cos(\omega_0 t + \varphi) - A \cos \omega t.$$

Рассматривая силу, действующую на левый грузик со стороны пружины, $F(t) = F_0 \cos \omega t$ как вынуждающую, общее выражение для смещения $x_1(t)$ можно представлять как суперпозицию собственных и вынужденных колебаний. Слагаемое $A \cos \omega t$ описывает колебания под действием вынуждающей силы, а $B \cos(\omega_0 t + \varphi)$ – свободные колебания (затухания нет). Выразить величину A через параметры за-

дачи F_0 , m , ω , и ω_0 . Записать уравнения, позволяющие определить константы B и φ .

1.76. Какова должна быть вынуждающая сила, чтобы осциллятор массой m с коэффициентом затухания γ начал совершать гармонические колебания с собственной частотой ω_0 по закону $x = A \cos(\omega_0 t - \varphi)$?

1.77. Осциллятор движется по закону $x = x_0 \sin \omega t$, а вынуждающая сила, действующая на него, $F = F_0 \cos \omega t$. Чему равен коэффициент затухания осциллятора? Масса осциллятора m .

1.78. На груз массой m , подвешенный на пружине жесткостью K , действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости груза, и вертикальная вынуждающая сила, которая меняется по гармоническому закону $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Зная, что груз движется поступательно, найти амплитуду v_0 скорости установившихся колебаний груза, если коэффициент вязкого трения равен γ .

1.79. Найти амплитуду a_0 ускорения установившихся вынужденных колебаний груза, рассмотренного в задаче 1.78

1.80. Амплитуда вынуждающей силы равна F_0 , ее частота $\omega = \omega_0$. Определить амплитуду вынужденных колебаний. Во сколько раз она больше отклонения осциллятора под действием постоянной силы F_0 ?

1.81. Для резонансного обнаружения малых вынуждающих сил можно использовать монокристалл сапфира с добротностью $Q = 10^9$ и частотой собственных колебаний $\omega_0 = 10^4 \text{ c}^{-1}$. Сколько времени (по порядку величины) нужно ждать, чтобы в монокристалле установились колебания?

1.82. С момента времени $t = 0$ на частицу массой m в направлении оси x начинает действовать сила $F_x = F_0 \sin \omega t$, а в направлении оси y — сила $F_y = F_0 \cos \omega t$. Найти траекторию частицы, если в начальный момент времени она покоится. Чему равна средняя скорость частицы за большое время? Какую начальную скорость должна иметь частица, чтобы при наличии этих сил двигаться по окружности? Чему равен радиус этой окружности?

Качественные вопросы

1.1. Часы-ходики установлены в вагоне электрички. Отстанут или забегут часы, когда электричка, вышедшая из Екатеринбурга, прибудет, например, в Нижний Тагил, сделав примерно тридцать остановок на промежуточных станциях.

1.2. Длина секундного маятника подобрана для широты города Москва. Как будут идти часы с таким маятником на Северном полюсе и на экваторе?

1.3. Два шара одинаковых размеров подвешены на одинаковых нитях. Один шар сделан из свинца, а другой – из алюминия. Шары покрыты краской так, что внешне они неразличимы. Как, наблюдая за колебаниями шаров, найти свинцовый шар?

1.4. Как будет изменяться период колебаний ведерка с водой, если из него вода будет постепенно вытекать через небольшое отверстие в днище?

1.5. В наручных механических часах, в отличие от ходиков, установлен крутильный маятник. Как отразится на суточный ход наручных часов увеличение температуры?

1.6. Существует гравиметрический способ разведки рудных полезных ископаемых – таких, например, как железная руда. Он основан на измерении ускорения свободного падения тел. Придумайте устройство простейшего гравиметра.

1.7. Лозоходцы используют тонкий ивовый прут для поиска тех мест, где следует рыть колодцы для воды. Вызывая легкие колебания ивового прута, они пытаются уловить небольшие изменения в характере его колебаний. Постарайтесь придумать разумное объяснение действиям лозоходцев.

1.8. Какой стратегии должен придерживаться человек, желающий раскачаться на качелях?

1.9. Если неумело нести воду в ведрах на коромысле, то она начинает сильно выплескиваться. От каких факторов зависит степень расплескивания воды? Какие существуют способы, чтобы уменьшить количество расплескиваемой воды при переносе ее с помощью коромысла?

1.10. Почему при некоторой частоте вращения двигателя грузовых автомобилей, проезжающих по дороге, начинают дребезжать

стекла в нижних этажах зданий, стоящих неподалеку?

1.11. В ракете, поднимающейся вертикально вверх с некоторым ускорением a , находится математический маятник с нитью длиной L . Построить качественный график зависимости периода колебаний от высоты подъема ракеты h . Существует ли такая точка, в которой период колебаний станет равным снова $T = \sqrt{L/g}$, где g – ускорение свободного падения на Земле?

1.12. Фазовой траекторией гармонического осциллятора является эллипс в координатных осях p, x . По часовой или против часовой стрелки движется фазовая точка для этой системы?

1.13. Что нужно сделать с маятником часов-ходиков, если они спешат?

1.14. Как с помощью математического маятника определить ускорение свободного падения в данном месте?

1.15. Космический корабль с включенным двигателем движется в пространстве вдали от небесных тел, гравитационным взаимодействием с которыми можно пренебречь. Каким способом можно определить его ускорение?

1.16. С какой целью установки, в которых не удается избежать колебаний (например, вибростолы на мельницах), устанавливаются не на жесткий фундамент, а на упругие резиновые амортизаторы?

1.17. Почему при вынужденных колебаниях осциллятора с частотой, меньшей его собственной частоты, направления смещения и вынуждающей силы совпадают, а при частоте больше собственной – противоположны?

1.18. Приведите пример системы, в которой воздействие со стороны одной ее части на другую описывается силой, меняющейся со временем по гармоническому закону.

1.19. Казалось бы, стреляя из рогатки в мост в такт его собственным колебаниям и сделав очень много выстрелов, мост можно сильно раскачать. В действительности таким способом раскачать мост практически невозможно. Почему?

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Наблюдение электромагнитных колебаний

Наряду с механическими колебаниями значительную роль в окружающем нас мире играют электромагнитные колебания, которые связаны с циклическими изменениями электрического тока, разности потенциалов или заряда в различных устройствах. Конечно, электромагнитные колебания могут быть периодическими и непериодическими, синусоидальными и несинусоидальными, но, как и в случае механических колебаний, основное внимание будет уделено рассмотрению периодических синусоидальных колебаний.

Хотя между механическими и электромагнитными колебаниями существует много общего, условия наблюдения колебаний совершенно различны. Механические колебания, как правило, имеют достаточно низкие частоты, и поэтому возможно их непосредственное визуальное наблюдение. Электромагнитные колебания обычно имеют существенно большие частоты, и, что очень важно, их непосредственное визуальное наблюдение невозможно.

Чтобы наблюдать электромагнитные колебания, их необходимо визуализировать, т. е. сделать зримыми. Для этих целей широко используются осциллографы.

В осциллографе с помощью устройства, которое называется электронной пушкой, создается узкий пучок высокоскоростных электронов. Попадая на экран, пучок электронов вызывает явление люминесценции люминофора, которым покрыт экран электронно-лучевой трубки изнутри.

Движение электронного луча по экрану управляется вертикальными и горизонтальными отклоняющими пластинами. Этот способ управления обычно называют электростатическим, в отличие от магнитного, который используется для управлением электронным лучом в телевизионных ЭЛТ и мониторах ЭВМ.

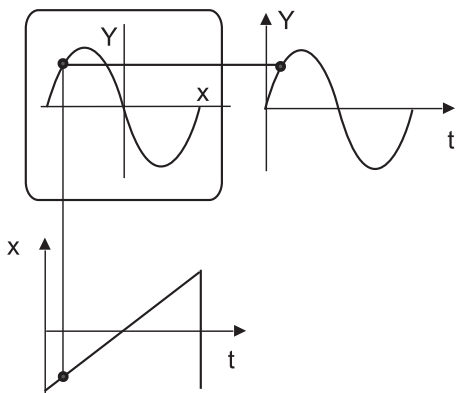


Рис. 16. Получение горизонтальной развертки в осциллографе

Представим себе, что мы подаем на вертикальные отклоняющие пластины напряжение $U = U_0 \cos \omega t$. Отклонение луча по вертикали будет различным в разные моменты времени, и мы увидим на экране светящуюся вертикальную прямую линию. Чтобы на экране появилось изображение синусоиды, необходима горизонтальная развертка. Когда напряжение на пластинах, отклоняющих луч в горизонтальном направлении, будет линейно расти, то луч начнет смещаться вдоль горизонтальной оси. Если на пластины, отклоняющие луч в вертикальном направлении, одновременно подать периодически меняющееся напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$, то на экране будет изображаться отрезок синусоиды. Схему получения изображения с использованием развертки по оси x приведена на рис. 16.

После того как электронный луч дошел до правой грани-

цы экрана, его нужно вернуть в исходное состояние. Для этих целей и используется пилообразное напряжение, которое подается на пластины горизонтальной развертки (на рис. 16 изображен лишь один период напряжения, обеспечивающего горизонтальную развертку).

Важно отметить, что период горизонтальной развертки должен быть синхронизирован с периодом изучаемых колебаний, иначе при повторном проходе луч прочертит новую кривую и на экране осциллографа не будет устойчивой синусоидальной кривой. В демонстрационном школьном осциллографе частоту развертки нужно подбирать вручную, а в осциллографах, предназначенных для профессионального использования, частота развертки может подбираться автоматически. Такие осциллографы позволяют определять как величину исследуемого напряжения, так и его частоту, поскольку легко измерить на экране длину X , на которой укладывается одно полное колебание. Зная частоту развертки и длину всего экрана, можно подсчитать, какому временному интервалу соответствует единица длины экрана (например, 1 см). Для упрощения такого рода расчетов экран осциллографа обычно снабжается измерительной сеткой.

2.2. Уравнение электромагнитных колебаний

Простейшей системой, в которой возникают затухающие электромагнитные колебания, является колебательный контур, схема которого изображена на рис. 17.

Будем считать, что колебательный контур является идеальным. Это означает, что можно пренебречь сопротивлением проводников, излучением электромагнитной энергии проводниками с током, рассеянием электрической и магнитной энергий в конденсаторе электрической емкостью C и в катушке индуктивностью L . В этом случае полная энергия системы сохраняется:

$$W_{\text{маг}} + W_E = \text{const}; \quad W_{\text{маг}} = \frac{LI^2}{2}, \quad W_E = \frac{q^2}{2C};$$

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \text{const}, \quad (2.1)$$

где $W = W_{\text{маг}} + W_E$ – полная энергия колебательной системы.

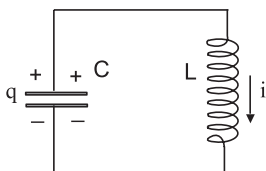


Рис. 17. Схема идеального колебательного контура

В формуле (2.1) значение электрического тока I в катушке и значение заряда q на обкладках конденсатора относятся к произвольному моменту времени t . Значение константы в правой части уравнения (2.1) задается начальными условиями возбуждения колебаний. Если в начальный момент времени ток в катушке отсутствует и $I(0) = 0$,

то $\text{const} = q_0^2/(2C)$, где q_0 – амплитудное (максимальное) значение заряда на обкладках конденсатора. В другом предельном случае, когда колебания возникают путем возбуждения индукционного тока в катушке, $\text{const} = LI_0^2/2$, где I_0 – амплитудное значение тока.

Поскольку энергия W остается постоянной, то

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C} \right) = 0.$$

В этом выражении от времени зависят только величины $I(t)$ и $q(t)$. Поэтому, выполняя дифференцирование по времени t величин I^2 и q^2 с учетом правил дифференцирования, изложенных в приложении 1, получаем

$$LII' + qq' \frac{1}{C} = 0. \quad (2.2)$$

Поскольку электрический ток определяется скоростью изменения заряда и $I = \Delta q/\Delta t$, то $I = q'$, $I' = q''$.

Поэтому выражение (2.2) может быть преобразовано к виду

$$q'' + \frac{q}{CL} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет уже хорошо знакомый вид уравнения колебаний гармонического осциллятора с одной степенью свободы для переменной $q(t)$. Решение такого типа уравнений подробно было рассмотрено в главе 1 [см. формулы (1.1) – (1.9)]. Используя эти результаты, сразу можно записать общие выражения для временной зависимости заряда на обкладках конденсатора $q(t)$ и тока в катушке $I(t)$:

$$q(t) = q_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}; \quad (2.4)$$

$$I(t) = -q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta). \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) символ δ обозначает начальную фазу колебаний. Как и в случае механических колебаний, величины q_0 и δ определяются из начальных условий. Собственная частота незатухающих колебаний в колебательном контуре ω_0 , линейная частота ν и период колебаний T связаны соотношениями

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega_0.$$

Отсюда получаем *формулу Томсона* для периода колебаний в колебательном контуре

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2.6)$$

Как следует из выражений (2.4) – (2.5), колебания заряда на обкладках конденсатора и тока в цепи сдвинуты по фазе на $\pi/2$, причем колебания заряда отстают по фазе. Здесь также просматривается аналогия со сдвигом фаз между смещением из положения равновесия и скоростью гармонического осциллятора.

Приведенный выше способ вывода уравнений колебаний в колебательном контуре является достаточно формальным и

физическая природа возникновения колебаний осталась невыясненной. Другой способ вывода уравнений колебаний мы обсудим позднее, после рассмотрения вопроса о преобразовании энергии в колебательном контуре.

2.3. Превращение энергии в колебательном контуре

Физическая сущность процессов, происходящих в колебательном контуре, выясняется лучше, если изобразить схему преобразования энергии в колебательном контуре и сравнить ее с превращениями энергии при механических колебаниях (рис 18).

Если в момент времени $t = 0$ конденсатор заряжен и $q = q_0$, а ток в катушке индуктивности равен нулю, то полная энергия колебательной системы равняется электростатической энергии заряженного конденсатора $W_E = q_0^2/(2C)$ и сосредоточена внутри объема, занимаемого конденсатором. Для механической колебательной системы это состояние соответствует максимальному отклонению массы из положения равновесия $x = x_0$, $v = 0$, а ее энергия равна потенциальной энергии деформированной пружины $W_{\text{пот}} = Kx_0^2/2$.

Через четверть периода, когда $t = T/4$, конденсатор полностью разряжается, а через катушку индуктивности течет максимальный ток $I = I_0$. Энергия колебательного контура при этом является энергией магнитного поля и сосредоточена в основном внутри объема катушки индуктивности. Для механических колебаний осциллятора эта фаза колебаний соответствует прохождению колеблющейся массой положения равновесия: $x = 0$, $v = v_0$, а вся энергия осциллятора равна кинетической энергии $W_{\text{кин}} = mv_0^2/2$.

Поскольку катушка обладает индуктивностью, то уменьшающийся поток магнитной индукции, пронизывающий витки, приводит в возникновению ЭДС самоиндукции, благодаря которой конденсатор к моменту времени $t = T/2$ зарядится до

максимальной разности потенциалов, но другой полярности, нежели исходная.

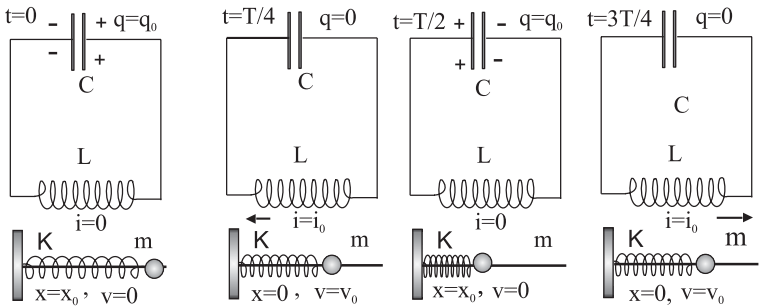


Рис. 18. Аналогия между электромагнитными и механическими колебаниями

Поскольку катушка обладает индуктивностью, то уменьшающийся поток магнитной индукции, пронизывающий витки, приводит к возникновению ЭДС самоиндукции, благодаря которой конденсатор к моменту времени $t = T/2$ зарядится до максимальной разности потенциалов, но другой полярности, нежели исходная. Поскольку затухания нет, такой процесс преобразования электромагнитной энергии из одной формы (электростатической) в другую (магнитную) будет продолжаться неограниченно долго (в реальных условиях колебания, конечно, затухают, в чем легко убедиться, наблюдая колебания в колебательном контуре с помощью осциллографа).

Глубокая аналогия между механическими и электромагнитными колебаниями позволяет поставить в соответствие друг другу величины, характеризующие механические и электромагнитные колебания (см. табл.).

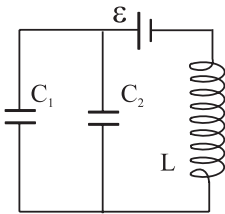
x	\longleftrightarrow	q	v	\longleftrightarrow	I
K	\longleftrightarrow	$1/C$	m	\longleftrightarrow	L
$Kx^2/2$	\longleftrightarrow	$q^2/(2C)$	$mv^2/2$	\longleftrightarrow	$LI^2/2$

Пользуясь этой аналогией, можно было бы сразу записать формулу Томсона для периода колебаний в колебательном кон-

туре, заменив в формуле (1.9) $K \iff 1/C$, $m \iff L$. Подмеченная аналогия позволяет в некоторых случаях свести задачу об электромагнитных колебаниях к механической задаче.

Пример 1

Колебательный контур состоит из двух параллельно соединенных емкостей C_1 и C_2 , катушки индуктивности L и идеального источника тока с ЭДС ε (см. рис. к примеру 1а). Вывести выражение для уравнения колебаний и определить их период. Найти амплитудные значения тока I_{\max} в катушке индуктивности и зарядов $q_{1\max}$ $q_{2\max}$ на обкладках конденсаторов C_1 , C_2 . Изобразить механический аналог рассматриваемого колебательного контура.



К примеру 1а

Решение

Поскольку емкости соединены параллельно, то их общая емкость $C = C_1 + C_2$. Используя данные приведенной выше таблицы, получаем, что результирующая обратная жесткость пружин $1/K = 1/K_1 + 1/K_2$. Таким образом, механический аналог рассматриваемой системы представляет собой две пружины жесткостью K_1 и K_2 , которые соединены последовательно.

Для вывода уравнения колебаний применим правило Кирхгофа: сумма падений напряжений на элементах цепи равна результирующей ЭДС, действующей в контуре. Разность потенциалов на обкладках конденсатора $U = q/C$. В соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея ЭДС индукции $\varepsilon_{\text{инд}} = -LI'$. Суммируя полученные результаты, получаем

$$\frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = \varepsilon.$$

Учитывая, что $I' = q''$, запишем уравнение, которому подчиняется колебание заряда на обкладках конденсатора:

$$q'' + \omega_0^2 q = \frac{\varepsilon}{L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Записанное дифференциальное уравнение колебаний является неоднородным. Такого типа уравнение было получено в примере 1 гл. 1 для колебаний гармонического осциллятора при наличии

постоянной внешней силы. Можно воспользоваться приведенной в этом примере методикой решения уравнения. Механическим аналогом рассматриваемой системы будет система, изображенная на рис. 16, которая совершает колебания в поле силы тяжести.

Во-первых, сразу можно сказать, что включение в колебательный контур источника постоянного напряжения не приводит к изменению частоты и периода колебаний. Поэтому для периода колебаний рассматриваемой системы получаем

$$T = 2\pi\sqrt{L(C_1 + C_2)}.$$

Для нахождения амплитудных значений зарядов на обкладках конденсаторов необходимо учесть, что при наличии источника тока колебания зарядов будут происходить относительно величины $q_0 = \varepsilon C$ – заряда, который был бы на обкладках конденсатора при отсутствии колебаний.

Величину заряда, отсчитанную от стационарного значения $q_0 = \varepsilon C$, обозначим $z = q - q_0$. В этих переменных уравнение колебаний принимает стандартный вид

$$z'' + \omega_0^2 z = 0; \quad z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \delta), \quad I(t) = -z_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \delta).$$

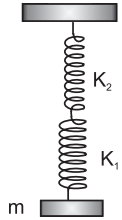
Будем считать, что в начальный момент времени $z(0) = q_0$, $I(0) = 0$. Из этой системы находим, что $z_0 = q_0$, $\delta = 0$, а значения заряда на обкладках конденсатора и ток в цепи имеют вид

$$q(t) = \varepsilon C(1 + \cos \omega_0 t), \quad I(t) = -\varepsilon C \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Таким образом, максимальное значение заряда на обкладках обоих конденсаторов $q_{\max} = 2\varepsilon C$, а максимальный ток в цепи $I_{\max} = \varepsilon C \omega_0$.

Для нахождения величин $q_{1 \max}$ и $q_{2 \max}$ можно записать два очевидных уравнения $C = C_1 + C_2$, $q_{1 \max} + q_{2 \max} = 2\varepsilon C$. Решение этой системы уравнений позволяет найти искомый результат:

$$q_{1 \max} = 2\varepsilon C_1, \quad q_{2 \max} = 2\varepsilon C_2.$$



К примеру 16

2.4. Активное сопротивление, индуктивность и емкость в цепи переменного тока

Цепями переменного тока называются такие электрические цепи, в которых падение напряжения на элементах цепи или электрический ток являются функциями времени.

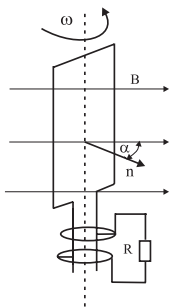


Рис. 19. Схема генератора переменного тока

Цепи переменного тока весьма широко используются в радиоэлектронике и электротехнике. Типичной цепью переменного тока является колебательный контур. Другим примером цепи, в которой возникает переменный ток, является проволочная рамка, которая вращается вокруг своей оси в постоянном магнитном поле (рис. 19).

Если в начальный момент времени $t = 0$, вектор индукции магнитного поля B и вектор нормали к плоскости рамки n имели одинаковое направление, то к некоторому моменту времени t рамка повернется на угол $\alpha = \omega t$, где ω – угловая частота вращения рамки. Поток вектора магнитной индукции, пронизывающий рамку, $\Phi(t) = BS \cos \omega t$ будет зависеть от времени, поэтому в рамке возникнет ЭДС индукции, которая, согласно закону электромагнитной индукции Фарадея, будет также функцией времени: $\varepsilon(t) = BS\omega \sin \omega t$. Здесь S – площадь поперечного сечения рамки. Если полное сопротивление рамки и цепи, к которой она подключена, равно R , то возникающий ток

$$I(t) = \frac{BS\omega}{R} \cos \omega t$$

также зависит от времени. По существу, так и получается переменный ток, который используется для различных приложений в быту, промышленности и на транспорте. Конечно, существуют и другие способы получения переменного тока (например,

с помощью радиоэлектронных устройств), но на них мы останавливаться не будем.

Активное сопротивление в цепи переменного тока. Действующее значение силы тока и напряжения

Пусть на вход цепи, изображенной на рис. 20, подается переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$.

Ток в этой цепи будет определяться выражением $I(t) = U_0/R \cos \omega t = I_0 \cos \omega t$, где $I_0 = U_0/R$.

Таким образом, если в цепь включено только активное сопротивление, то сдвиг фаз между напряжением и током отсутствует.

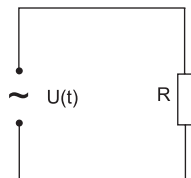


Рис. 20. Сопротивление в цепи переменного тока

Найдем значение мощности, которая выделяется на активном сопротивлении. В цепи переменного тока можно говорить лишь о мгновенном значении мощности $P(t) = I_0^2 R \cos^2 \omega t$ или о среднем значении мощности $\overline{P}_{\text{ср}} = I_0^2 R \overline{\cos^2 \omega t}$ за некоторый период времени.

Преобразуем последнее выражение, используя известное тригонометрическое соотношение

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}.$$

В результате выражение для средней мощности может быть записано в виде

$$\overline{P}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} I_0^2 R (1 + \overline{\cos 2\omega t}).$$

Очевидно, что среднее значение периодической функции за достаточно большой промежуток времени будет равно нулю, и поэтому получаем простой результат:

$$\overline{P}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (2.7)$$

Введем понятия *действующего значения силы тока* и *действующего значения напряжения*.

Действующее значение силы тока I_d в цепи равно такому значению постоянного тока, при пропускании которого выделяется равная тепловая мощность :

$$\overline{P}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_d^2 R, \quad I_d = I_0 / \sqrt{2}.$$

Действующее значение напряжения U_d определяется произведением действующего значения силы тока на электросопротивление: $U_d = I_d R$. Очевидно, что действующее и амплитудное значения напряжения связаны простым соотношением $U_d = U_0 / \sqrt{2}$. Смысл введения действующих значений напряжения и тока состоит в том, что, используя эти понятия, закон Джоуля – Ленца для цепи переменного тока можно записать в таком же виде, как и для цепи постоянного тока:

$$Q = I_d^2 R t = I_d U_d t,$$

где Q – количество тепла, которое выделяется в цепи за время t . Так, сеть переменного тока, которая используется для питания бытовых приборов в городских квартирах, имеет действующее значение напряжения $U_d = 220$ В, а амплитудное значение напряжения $U_0 = 220\sqrt{2} \simeq 311$ В.

Конденсатор в цепи переменного тока

Рассмотрим цепь переменного тока, изображенную на рис. 21. Пусть на вход цепи подается переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Тогда заряд на обкладках конденсатора $q(t) = C U_0 \cos \omega t$, а ток в цепи $I(t) = \Delta q / \Delta t = -\omega C U_0 \sin \omega t$. Запишем это выражение, вводя амплитудное значение силы тока $I_0 = \omega C U_0$: $I(t) = I_0 \cos \omega(t + \pi/2)$. Сравнивая два выражения:

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \text{ и } I(t) = \omega C U_0 \cos(\omega t + \pi/2), \quad (2.8)$$

замечаем, что колебания напряжение на обкладках конденсатора и тока в цепи сдвинуты по фазе на $\pi/2$, причем колебания тока опережают колебания напряжения.

Соотношение (2.8) позволяет ввести понятие *емкостного сопротивления* X_c .

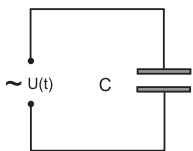


Рис. 21. Конденсатор в цепи переменного тока

Действительно, амплитудное значение напряжения на обкладках конденсатора можно записать в виде

$$U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0, \quad U_0 = X_c I_0, \quad (2.9)$$

где $X_c = 1/(\omega C)$ – емкостное сопротивление.

Емкостное сопротивление падает как с ростом частоты, так и с ростом емкости конденсатора. Следует особо подчеркнуть, что емкостное сопротивление позволяет связать между собой только амплитудные или действующие значения напряжения и силы тока; мгновенные значения напряжения и тока сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Индуктивность в цепи переменного тока

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 22. Будем считать, что активное сопротивление проводников мало и им можно пренебречь. Пусть ток в этой цепи меняется по гармоническому закону $I(t) = I_0 \sin \omega t$.

Напряженность электрического поля внутри проводника катушки индуктивности равна нулю в произвольный момент времени. Это требование следует из нашего предположения, что активное сопротивление проводников равно нулю, поскольку иначе в цепи будет течь бесконечный ток.

В свою очередь, разность потенциалов на клеммах катушки индуктивности складывается из приложенной разности потенциалов $U(t)$ и ЭДС самоиндукции катушки $\varepsilon_{\text{инд}}$. Поскольку результирующая разность потенциалов должна быть равной нулю,

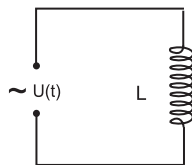


Рис. 22. Индуктивность в цепи переменного тока

имеем

$$U(t) + \varepsilon_{\text{инд}}(t) = 0.$$

Отсюда, вспоминая закон электромагнитной индукции Фарадея, получаем

$$U(t) = -\varepsilon_{\text{инд}}(t) = L \frac{dI(t)}{dt} = LI_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.10)$$

Из соотношения (2.10) следует, что если в цепь включена катушка индуктивности, то колебания напряжения на клеммах катушки опережают колебания тока в цепи на $\pi/2$:

$$I(t) = I_0 \sin \omega t, \quad U(t) = U_0 \sin(\omega t + \pi/2).$$

Введем понятие *индуктивного сопротивления* X_L катушки, которое связывает между собой амплитудное значение разности потенциалов на зажимах катушки U_0 и амплитудное значение тока I_0 в катушке : $U_0 = X_L I_0$, $X_L = \omega L$. Из определения емкостного сопротивления следует, что оно растет линейно с ростом частоты колебаний. Индуктивное сопротивление тем больше, чем больше индуктивность катушки. Ясно, что в реальной электрической цепи могут быть включены одновременно активное сопротивление, индуктивность и емкость. Поэтому в дальнейшем мы обобщим понятия активного емкостного и индуктивного сопротивлений и введем понятие комплексного сопротивления – *импеданса* цепи переменного тока.

2.5. Затухающие электромагнитные колебания. Добротность

Колебания, рассмотренные в разделах 2.2 – 2.3, являются незатухающими. Если учесть механизмы потери энергии, то колебания будут затухать. Из всех возможных механизмов затухания рассмотрим лишь один – диссипацию энергии за счет джоулевых потерь. Этот механизм является основным при достаточно низких частотах колебаний.

Выведем уравнения затухающих колебаний в этом случае, используя, как и в примере 1, правила Кирхгофа. В нашем случае колебательный контур содержит три элемента: индуктивность L , емкость C и активное сопротивление R (рис. 23). Падение напряжения на емкости $U_C = q/C$, на активном сопротивлении $U_R = IR$, а ЭДС индукции в катушке $\varepsilon_{\text{инд}} = -LI'$. Поэтому можно записать

$$\frac{q}{C} + RI + LI' = 0.$$

Если вспомнить, что $I' = q''$, а $I = q'$ и разделить левую и правую части уравнения на L , то получим хорошо известное уравнение, описывающее затухающие колебания,

$$q'' + 2\gamma q' + \omega_0^2 q = 0, \quad (2.11)$$

где $2\gamma = R/L$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$.

Методика решения уравнения (2.11) подробно изложена в приложении 2. Решение аналогичного уравнения обсуждалось нами в предыдущей главе, посвященной механическим колебаниям [см. формулы (1.11), (1.12)]. Легко заметить, что уравнения для механических и электромагнитных затухающих колебаний (2.11) и (1.11) отличаются только обозначениями. Поэтому сразу можно привести конечный результат:

$$q(t) = q_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \delta), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (2.12)$$

Практически все, что ранее было сказано по отношению к затухающим механическим колебаниям, применимо и к электромагнитным. В частности, затухание электромагнитных колебаний может быть аperiodическим. В случае аperiodического затухания константа γ , определяющая затухание, должна

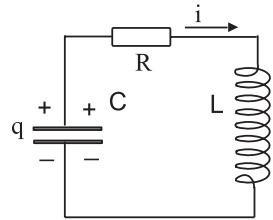


Рис. 23. Колебательный контур с активным сопротивлением

удовлетворять условию $\gamma/\omega_1 \geq 1$. Конечно, это неравенство является чисто эмпирическим и к нему следует относиться лишь как к некоторой оценке, но оно позволяет указать условия, когда колебания можно считать слабо затухающими ($\gamma \ll \omega_1$; см. рис. 3).

Для случая слабо затухающих электромагнитных колебаний можно ввести понятие добротности колебательной системы, которое, по существу, остается прежним: *Добротностью колебательной системы называется умноженное на 2π отношение энергии, запасенной системой, к энергии, которая теряется в колебательной системе за один период*. Различие состоит лишь в механизме диссипации энергии: в случае механической системы диссипация энергии бала связана с работой сил трения, тогда как в случае электромагнитных колебаний диссипация энергии связана либо с выделением джоулева тепла в проводниках контура, либо с рассеянием энергии в окружающей среде.

Получим выражение для добротности колебательного контура в случае, когда потери определяются лишь джоулевым нагревом проводников.

Для вывода интересующей нас формулы можно просто воспользоваться соотношением $Q = \omega_0/(2\gamma)$ (1.23). Подставив значения $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, $2\gamma = R/L$, получаем

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.13)$$

Естественно, тот же самый результат получается, если воспользоваться определением добротности колебательного контура. Действительно, запасенная в колебательном контуре энергия выражается через амплитудное значение тока I_0 : $W_{\text{зап}} = LI_0^2/2$. Энергия, теряемая контуром за один период колебаний, $E_R = RI_0^2/2 \cdot T$, где $T = 2\pi\sqrt{LC}$ – период колебаний. Если подставить эти результаты в выражение для добротности колебательного контура, то получим прежний результат:

$$Q = \frac{2\pi W_{\text{зап}}}{E_R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.14)$$

Выражением (2.14) можно пользоваться лишь в случае, если колебания затухают слабо и можно пренебречь изменением амплитуды тока в цепи за один период колебаний. На практике добротность колебательного контура может быть достаточно высокой и иметь значение порядка нескольких тысяч ($Q \simeq 3000 \div 5000$).

2.6. Вынужденные электромагнитные колебания. Резонанс в цепи переменного тока

Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 24. Будем считать, что все параметры цепи: значение активного сопротивления R , емкости C , индуктивности L – нам известны.

Пусть на вход цепи подается переменное напряжение $U(t) = U_0 \sin \omega t$. Найдем амплитуду установившихся колебаний тока в цепи, а также падение напряжения и сдвиг фазы колебаний тока и падения напряжения на отдельных элементах.

Для решения поставленной задачи выведем уравнение, которому подчиняются колебания тока в этой цепи. Для этой цели вновь используем известное правило Кирхгофа: при обходе по замкнутому контуру сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС, действующей в контуре.

В контур включен внешний источник питания с ЭДС $U_B = U_0 \sin \omega t$ и катушка индуктивности, в которой возникает ЭДС самоиндукции $\varepsilon_{\text{инд}} = -L\Delta I/\Delta t$.

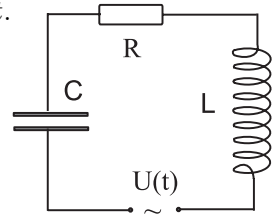


Рис. 24. Возбуждение вынужденных колебаний

Падение напряжения на активном сопротивлении $U_R = IR$, разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_C = q/C$. Таким образом, применение правила Кирхгофа позволяет найти уравнение колебаний тока в цепи

$$U_{\text{в}} - L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}. \quad (2.15)$$

Записанное выше уравнение позволяет получить уравнение колебаний заряда на обкладках конденсатора или тока в цепи. Получим уравнение колебаний тока. Для этих целей продифференцируем по времени уравнение (2.15):

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I = U_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.16)$$

Это уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение такого рода уравнений ищется в два этапа: сначала находится общее решение однородного уравнения

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \cdot I = 0, \quad (2.17)$$

а затем частное решение неоднородного уравнения (2.16).

Мы можем существенно упростить задачу, если будем интересоваться только установившимися вынужденными колебаниями. Действительно, мы знаем, что общее решение уравнения (2.17) описывает затухающие собственные колебания. Поэтому, если не интересоваться режимом установления вынужденных колебаний, решение однородного уравнения можно не рассматривать вообще, считая, что собственные колебания уже затухли. Тогда для нахождения интересующего нас результата нужно найти частное решение неоднородного уравнения (2.16).

Будем искать решение уравнения (2.16) в виде $I(t) = I_0 \sin(\omega t - \varphi)$, где I_0 и φ – неизвестные пока величины. Подставим пробное решение в уравнение (2.16) и произведем необходимые операции дифференцирования. В результате получаем

$$-L\omega^2 I_0 \sin(\omega t - \varphi) + R\omega I_0 \cos(\omega t - \varphi) +$$

$$+\frac{I_0}{C} \sin(\omega t - \varphi) = U_0 \omega \cos \omega t. \quad (2.18)$$

Разделим левую и правую части уравнения (2.18) на ω . Вспоминая формулу приведения $\sin(\omega t - \varphi) = -\cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$ и группируя слагаемые, получаем

$$\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + RI_0 \cos(\omega t - \varphi) = U_0 \cos \omega t. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.19) позволяет найти неизвестные значения I_0 и φ . Воспользуемся методом векторных диаграмм и представим каждый из членов этого уравнения вектором, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω в плоскости XY (рис. 25).

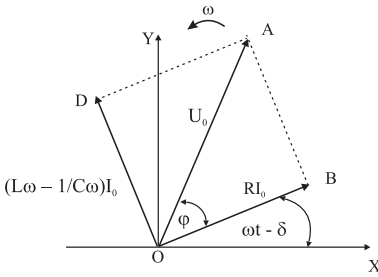


Рис. 25. Представление уравнения (2.19) в виде векторной диаграммы

На рис. 25 каждый из членов уравнения (2.19) представлен векторами (OA, OB, OD), выходящими из начала координат. Отсчет углов производится от оси абсцисс.

Поскольку каждый из векторов вращается с одинаковой угловой скоростью ω , взаимное расположение векторов не изменяется со временем и вся система векторов вращается против часовой стрелки. Проектируя векторы в произвольный момент времени на ось абсцисс, возвращаемся к уравнению (2.19).

Пользуясь теоремой Пифагора, из треугольника AOB можно выразить I_0 через U_0 :

$$U_0^2 = I_0^2 R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 I_0^2.$$

Или, выполняя простые преобразования, получаем

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}. \quad (2.20)$$

Векторная диаграмма позволяет легко найти $\operatorname{tg} \varphi$, определяющий сдвиг фаз между колебаниями напряжения $U(t)$ и тока в цепи. Действительно, из прямоугольного треугольника AOB находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}. \quad (2.21)$$

Результаты (2.20), (2.21) необходимо прокомментировать. Из выражения (2.20) следует, что резонанс, т. е. резкое увеличение амплитуды тока в цепи, возникает при совпадении частоты колебаний внешнего напряжения (вынуждающей силы) с частотой собственных колебаний $\omega_0 = (LC)^{-1}$ в контуре. В этом проявляется различие механических и электрических колебаний (для механических колебаний резонансная частота сдвинута в сторону меньших частот). В каком-то смысле в резонансе колебательный контур ведет себя как простое омическое сопротивление. Это становится ясным, если заметить, что при $\omega = \omega_0$ сдвиг фаз между приложенным напряжением U и током в цепи I на основании формулы (2.21) становится равным нулю.

Полученный результат нужно понимать следующим образом: в резонансе падение напряжения на емкости и индуктивности равны по величине, сдвинуты по фазе на π и компенсируют друг друга.

Сдвиг фаз $\delta = \angle AOD$ между напряжением на индуктивности $U_L = L\omega I_0$ и напряжением на клеммах внешнего источника тока U ведет себя совершенно иначе. Действительно, из $\triangle AOD$ находим

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{ctg} \varphi = \frac{R\omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)}. \quad (2.22)$$

Проанализируем выражение (2.22) в окрестности резонанса $\omega \simeq \omega_0$, $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \simeq 2\omega(\omega - \omega_0)$. Если воспользоваться определением константы затухания $2\gamma = R/L$ [см. формулу (2.11)], то выражение (2.22) преобразуется к знаменитому виду

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\gamma}{\omega - \omega_0}. \quad (2.23)$$

Таким образом, как и в случае механических колебаний, в резонансе сдвиг фаз между вынуждающей силой (напряжением на клеммах генератора) и смещением (напряжением на зажимах катушки индуктивности) равен $\pi/2$, а частотная зависимость $\operatorname{tg} \delta$ от ω имеет вид, изображенный на рис. 6.

2.7. Закон Ома и мощность в цепи переменного тока

Изучая поведение индуктивности и емкости в цепях переменного тока, мы нашли, что в общем случае существует сдвиг фаз между колебаниями напряжения и электрического тока в цепи. По этой причине падение напряжения на элементах цепи и протекающий через них ток имеют различающуюся функциональную зависимость от времени (например, ток изменяется по закону синуса, а напряжение – по закону косинуса). По этой причине закон Ома для цепи переменного тока в полном смысле этого слова записать нельзя. Можно установить лишь связь амплитудных значений тока и напряжения [см. формулу (2.20)], которая и играет роль закона Ома для цепи переменного тока.

Мощность в цепи переменного тока выделяется только на активном сопротивлении. На конденсаторе или катушке индуктивности напряжение и ток сдвинуты по фазе на $\pi/2$, и поэтому усредненное по времени значение произведения напряжение на ток равно нулю. В действительности индуктивность и емкость в какие-то моменты времени поглощают энергию из электри-

ческой цепи, с тем чтобы в следующие моменты времени вернуть ее обратно.

Получим выражение для мощности, которая выделяется на активном сопротивлении в цепи переменного тока, рассматривая конкретный пример.

Пример 2

Последовательно с электроплиткой в городскую электрическую сеть подключена катушка индуктивности. При этом мощность электроплитки упала вдвое. Найти индуктивность катушки L , если активное сопротивление плитки $R = 50$ Ом.

Решение

Обозначим амплитудное значение напряжения U_0 , а амплитудное значение тока I_0 . В нашем случае цепь переменного тока содержит только индуктивность и активное сопротивление. Поэтому векторная диаграмма мгновенных значений напряжения на элементах цепи будет совпадать с диаграммой, изображенной на рис. 25, если учесть, что теперь длина вектора $OD = L\omega I_0$.

Выражение для выделяемой в цепи мощности $\overline{P}_{\text{ср}}$, как уже отмечалось, определяется средним значением произведения мгновенных значений тока $I(t)$ и $U(t)$: $P = \overline{I(t)U(t)}$. Конечно, можно найти временную зависимость $I(t)$, $U(t)$ и затем усреднить их произведение по времени. Однако значительно проще свести задачу к уже рассмотренному нами случаю, когда в цепи имеется только активное сопротивление. Разложим вектор OA (см. рис. 25) по двум взаимно перпендикулярным направлениям вдоль векторов OD и OB . Проекция Напряжения на направление вектора OD не даст вклада в среднюю мощность, поскольку векторы OD и OB взаимно перпендикулярны. Проекция напряжения U_0 на направление тока $U_I = U_0 \cos \varphi$, где косинус угла φ находим из $\triangle AOD$:

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}.$$

Поскольку векторы U_I и I_0 сонаправлены, то для среднего значения мощности, выделяющейся на активном сопротивлении, получаем

$$\overline{P}_{\text{ср}} = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi. \quad (2.24)$$

Выражение (2.24) является справедливым для любой цепи переменного тока. Подставляя в это уравнение значение $\cos \varphi$, полученное выше, находим

$$\overline{P}_{\text{ср}} = \frac{I_0 U_0}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}. \quad (2.25)$$

Если вспомнить теперь выражение для закона Ома

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad (2.26)$$

то выражение для мощности потерь преобразуется к хорошо знакомому виду

$$\overline{P}_{\text{ср}} = \frac{I_0^2 R}{2}, \quad (2.27)$$

где I_0 – амплитудное значение тока в цепи. Таким образом, мощность потерь в цепи переменного тока всегда можно вычислять по формуле (2.27), подставляя найденное для этой цепи амплитудное значение тока и активное сопротивление.

Вернемся теперь к решению задачи. Обозначим мощность, выделяющуюся на электроплитке до включения катушки индуктивности P' , амплитудное значение тока I'_0 , а соответствующие величины после включения индуктивности – P , I_0 . Из условия задачи следует, что $I'_0 = U_0/R$; I_0 определяется формулой (2.26). Поэтому

$$\frac{P'}{P} = \frac{I_0'^2}{I_0^2} = \frac{R^2 + L^2 \omega^2}{R^2} = 2.$$

Последнее из приведенных выше равенств позволяет получить искомый результат:

$$L = \frac{R}{\omega} \simeq 0,16(\text{Гн}).$$

2.8. Импеданс. Расчет сложных цепей переменного тока

Для расчета сложных цепей переменного тока использовать метод векторных диаграмм затруднительно. К счастью, существует достаточно простой прием, позволяющий, по существу, рассчитывать цепи переменного тока по тем же правилам,

что и цепи постоянного тока. Этот прием связан с введением комплексного сопротивления Z , которое называют также импедансом.

Сущность метода векторных диаграмм в применении к цепям переменного тока состоит в том, что мы, не анализируя уравнения, сразу рисуем вектор, изображающий мгновенное значение напряжения на индуктивности, повернутым на $\pi/2$ против часовой стрелки, а вектор, изображающий падение напряжения на емкости, — повернутым на угол $\pi/2$ по часовой стрелке относительно вектора, изображающего падение напряжения на активном сопротивлении. По существу, того же самого можно добиться, если договориться считать полное сопротивление цепи Z комплексным числом (о комплексных числах подробнее см. приложение 2). При этом активное сопротивление будет изображаться действительным числом R , индуктивности сопоставим мнимое число $i\omega L$, емкости — мнимое число $-i/(\omega C)$, где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Используя эти правила, легко записать импеданс цепи, изображенной на рис. 24: $Z = i\omega L - i/(\omega C) + R$. В общем случае цепь переменного тока, содержащая комплексное сопротивление Z , изображена на рис. 26, а на рис. 27 приведена векторная диаграмма напряжений для этой цепи.

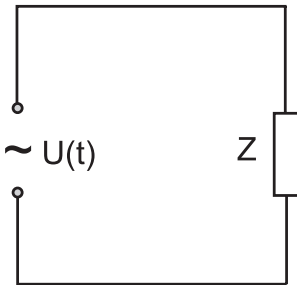


Рис. 26. Цепь переменного тока с комплексным сопротивлением

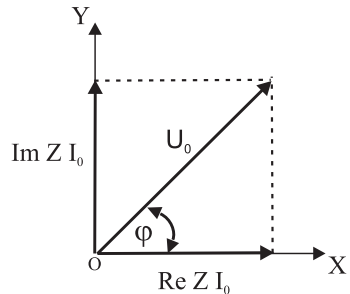


Рис. 27. Векторная диаграмма напряжений для схемы на рис. 26

Строится эта диаграмма следующим образом: комплексное сопротивление $Z = ReZ + iImZ$ представляется в виде дей-

ствительной (ReZ) и мнимой (ImZ) или реактивной частей. Падение напряжения на активном сопротивлении откладывается вдоль оси абсцисс, а на реактивном сопротивлении – вдоль оси ординат (с учетом знака). Этим сразу достигается следующее: мы автоматически учитываем, что напряжение на реактивной нагрузке сдвинуто по фазе на $\pi/2$ по сравнению с напряжением на активной нагрузке.

Результирующее падение напряжения на комплексном сопротивлении определяется вектором U_0 и может быть найдено по теореме Пифагора

$$U_0^2 = (ImZI_0)^2 + (ReZI_0)^2.$$

Таким образом, мы снова приходим к закону Ома (2.26):

$$I_0 = \frac{U_0}{|Z|}, \quad \text{где } |Z| = \sqrt{(ReZ)^2 + (ImZ)^2}. \quad (2.28)$$

Формула для сдвига фаз между током в цепи и напряжением на комплексной нагрузке

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{ImZ}{ReZ},$$

по существу, является обобщением формулы (2.21) и приводит к тем же результатам.

Преимуществом метода расчета цепей переменного тока с использованием комплексных сопротивлений является то, что можно пользоваться стандартными формулами расчета цепей постоянного тока, для последовательного и параллельного соединений и применять правила Кирхгофа для расчета сложных цепей. Для иллюстрации сказанного рассмотрим несколько примеров.

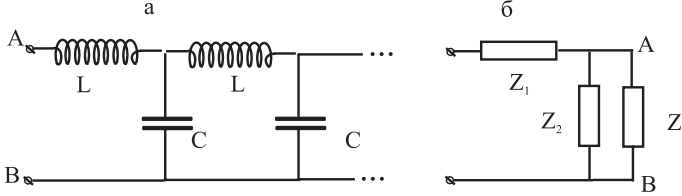
Пример 3

На рисунке к примеру 3а изображена бесконечная электрическая цепь, составленная из одинаковых катушек индуктивностью L и конденсаторов емкостью C . Найти импеданс цепи. Активным сопротивлением проводников можно пренебречь.

Решение

Пусть $Z_1 = i\omega L$ – импеданс катушек индуктивности, а $Z_2 = -i/(\omega C)$ – импеданс конденсаторов, из которых состоит цепь.

Найдем импеданс этой цепочки, пользуясь приемом, который очень часто используется для решения задач. Обозначим импеданс бесконечной цепочки буквой Z .



К примеру 3. Бесконечная цепь, содержащая индуктивности и емкости (а) и ее эквивалентная схема (б)

Если подключить еще один элемент ко входу цепочки АВ, то ее импеданс не изменится. В итоге мы получаем эквивалентную электрическую цепь, изображенную на рис. 3б, импеданс которой тоже равен Z . Поскольку Z и Z_2 соединены параллельно, а импеданс Z_1 подсоединен последовательно, то, используя формулы для вычисления сопротивления параллельно и последовательно соединенных проводников, получаем

$$Z = Z_1 + \frac{ZZ_2}{Z + Z_2}.$$

Приводя последнее выражение к общему знаменателю, получаем квадратное уравнение для величины Z :

$$Z^2 - ZZ_1 - Z_1Z_2 = 0,$$

решение которого имеет два корня:

$$Z = \frac{Z_1}{2} \pm \sqrt{Z_1^2/4 + Z_1Z_2}.$$

Чтобы разобраться в том, какой из корней уравнения имеет физический смысл, подставим в последнюю формулу значения импедансов $Z_1 = i\omega L$ и $Z_2 = -i/(\omega C)$. В итоге для импеданса цепи получаем два значения:

$$Z = \frac{i\omega L}{2} \pm \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}.$$

При $\omega < 4/(LC)$ подкоренное выражение в приведенной выше формуле положительно и корень является действительным числом. Таким образом, при $\omega < 4/(LC)$ эта часть импеданса описывает активное сопротивление, а оно из физических соображений отрицательным быть не может. Поэтому знак минус перед корнем следует опустить.

В связи с полученным результатом возникает важный вопрос: почему цепь, составленная из реактивных элементов, обладает активным сопротивлением и диссипирует энергию?

Причина этого явления в бесконечности цепи. В действительности в условиях задачи в цепи будет распространяться электромагнитная волна. Это означает, что во все новых и новых элементах цепи будут возникать электрические колебания, энергия для возбуждения которых передается со входа цепи.

Конечно, остается еще один вопрос об удивительной эффективности математики в физических исследованиях. Как оказалось, что та нехитрая математика, которую мы применили для решения задачи, привела нас к столь радикальному физическому выводу о распространении электромагнитной волны в бесконечной цепочке?

2.9. Резонанс токов и резонанс напряжений

Используем метод вычисления комплексных сопротивлений для изучения резонанса в цепях переменного тока различной конфигурации. Рассмотрим цепь переменного тока, изображенную на рис. 28, которая содержит последовательно соединенные индуктивность с импедансом $Z_1 = i\omega L$, емкость с импедансом $Z_2 = -i/(\omega C)$ и активное сопротивление R .

Найдем полный импеданс цепи, изображенной на рис. 28. Поскольку элементы цепи соединены последовательно, полный импеданс $Z = Z_1 + Z_2 + R$. Подставляя в эту формулу значения Z_1 и Z_2 и выделяя в импедансе действительную и мнимую части, получаем

$$Z = i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) + R.$$

Из этой формулы видно, что при $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ мнимая часть импеданса обращается в нуль, а амплитудное значение тока в цепи будет максимальным: $I_0 = U_0/R$.

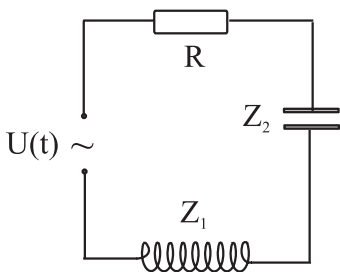


Рис. 28. Электрическая цепь, в которой возникает резонанс напряжений

последовательного резонанса.

При резонансе напряжение, снимаемое с индуктивности или емкости, может быть во много раз больше напряжения U_0 , если $\omega_0 L \gg R$. Резонанс напряжений используется в радиотехнике для повышения напряжения в высокочастотных устройствах.

Рассмотрим теперь цепь, изображенную на рис. 29, в которой импедансы $Z_1 = i\omega L$, $Z_2 = -i/(\omega C)$ и активное сопротивление R соединены параллельно.

Для упрощения расчетов вычислим только импеданс параллельно соединенных индуктивности и емкости, обозначив эту

Поскольку мнимая часть импеданса в резонансе, когда $\omega = \omega_0$, обращается в нуль, то результирующее падение напряжение на индуктивности и емкости равно нулю. При этом падение напряжения на индуктивности U_L и емкости U_C максимально по абсолютной величине и сдвинуто по фазе на π : $U_L = -U_C = U_0\omega_0 L/R$. Явление возрастания падения напряжения на реактивных элементах цепи получило название *резонанса напряжений*, или *последовательного резонанса*.

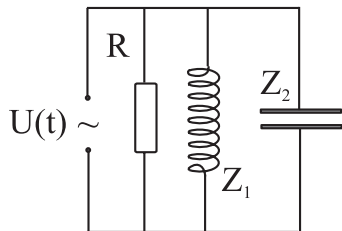


Рис. 29. Электрическая цепь, в которой возникает резонанс токов

величину буквой Z :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = \frac{1 - \omega^2 CL}{i\omega L}.$$

При записи последней формулы мы учли, что $1/i = -i$. Отсюда следует, что реактивная часть импеданса цепи

$$Z = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 CL}$$

стремится к бесконечности при стремлении частоты ω к резонансной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Поэтому в резонансе суммарный ток, протекающий через индуктивность и емкость, равен нулю. Амплитуда тока в цепи в резонансе может быть найдена из закона Ома: $I_0 = U_0/R$. При этом через индуктивность и емкость будут протекать равные по величине и противоположные по направлению токи с амплитудой $I_L = -I_C = U_0/(\omega_0 L)$. Величины токов, протекающих через индуктивность и емкость, могут оказаться много больше тока I_0 . Действительно, если выполняется условие $R \gg \omega_0 L$, то $I_L \gg I_0$. Явление резкого возрастания амплитуды токов, протекающих через индуктивность и емкость при стремлении частоты ω к резонансной частоте ω_0 , называется *резонансом токов*.

Резонанс токов используется в радиотехнике в резонансных усилителях. Таким образом, можно добиться избирательного усиления сигнала лишь одной (резонансной) частоты.

ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ

Пример 4¹

Генератор с ЭДС $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ в момент времени $t = 0$ подключается к катушке индуктивности L . Определить зависимость тока в цепи от времени. Активным сопротивлением можно пренебречь.

¹Первые три примера приведены в предыдущих разделах этой главы.

Решение

Поскольку активное сопротивление катушки равно нулю, то результирующее электрическое поле внутри катушки тоже должно равняться нулю (иначе по катушке протекал бы бесконечный ток). Это требование позволяет записать уравнение

$$\varepsilon_0 \sin \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0.$$

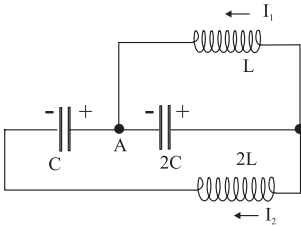
Из начальных условий следует, что при $t = 0$, $I = 0$ (в начальный момент ток в катушке отсутствовал). Будем искать решение уравнения в виде $I(t) = I_0 \cos \omega t + const$. Подставляя пробное решение в уравнение, находим неизвестное значение $I_0 = -\varepsilon_0 / (L\omega)$. Значение еще одной неизвестной константы находим из начального условия в момент времени $t = 0$:

$$I(0) = -\frac{\varepsilon_0}{L\omega} + const = 0.$$

Откуда $const = \varepsilon_0 / (L\omega)$. Подставляя найденные значения неизвестных констант в пробное решение, получаем искомый результат:

$$I(t) = \frac{\varepsilon_0}{L\omega} (1 - \cos \omega t).$$

Пример 5



К примеру 5

Конденсаторы, емкости которых C и $2C$, заряжены каждый до напряжения U_0 и подсоединены последовательно, как показано на рисунке. К ним одновременно подключаются две катушки: катушка индуктивности L – к конденсатору большей емкости, а катушка индуктивностью $2L$ – к разноименным концам батареи конденсаторов. Найти зависимость тока от времени в каждой из катушек.

Решение

Для получения системы уравнений, определяющей токи через катушки, используем правила Кирхгофа. Поскольку активное сопротивление равно нулю, то для контура, содержащего индуктивность

L и емкость $2C$, находим

$$-LI'_1 = \frac{q_2}{2C},$$

где q_2 – заряд на пластинах конденсатора емкостью $2C$.

Аналогично для другого контура, в который включена катушка $2L$:

$$-2LI'_2 = \left(\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{2C} \right),$$

q_1 – заряд на пластинах конденсатора емкостью C .

Из условия задачи следует, что в начальный момент времени $t = 0$ ток, протекающий через катушки, был равен нулю: $I_1 = I_2 = 0$, а из приведенных выше уравнений следует и равенство их производных $I'_1(0) = I'_2(0) = -U_0/L$, поскольку в начальный момент времени разности потенциалов на пластинах конденсаторов одинаковы и равны U_0 .

Продифференцируем полученные уравнения для токов еще раз и учтем, что $q'_1 = I_2$, $q'_2 = I_1 + I_2$ (последнее равенство следует из правила Кирхгофа для узла А). В результате получаем систему двух уравнений для токов I_1 и I_2 :

$$I''_1 + \frac{\omega_0^2}{2}(I_1 + I_2) = 0; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC};$$

$$I''_2 + \frac{\omega_0^2}{2}I_2 + \frac{\omega_0^2}{4}(I_1 + I_2) = 0.$$

Полученная система уравнений с учетом сформулированных выше начальных условий

$$I_1(0) = 0 \quad I_2(0) = 0;$$

$$I'_1 = -U_0/L; \quad I'_2 = -U_0/L$$

однозначно определяет токи I_1 , I_2 .

Можно существенно упростить решение, если заметить, что токи I_1 и I_2 равны не только в начальный момент времени, но и во все последующие моменты времени. Действительно, комбинируя уравнения для токов, легко получаем равенство

$$I''_1 + \frac{\omega_0^2}{4}I_1 = I''_2 + \frac{\omega_0^2}{4}I_2.$$

Поскольку одинаковы дифференциальные уравнения и одинаковы начальные условия, то одинаковыми будут и решения. Отсюда следует, что $I_1(t) = I_2(t)$, и мы приходим к выводу, что можно рассматривать одно уравнение для тока I_1 :

$$I_1'' + \omega_0^2 I_1 = 0; \quad I_1(0) = 0; \quad I_1' = -U_0/L,$$

общее решение которого хорошо известно:

$$I_1(t) = I_{01} \cos(\omega_0 t + \delta).$$

Неизвестные константы I_{01} и δ находим из начальных условий:

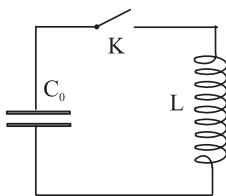
$$I_{01} \cos \delta = 0; \quad I_{01} \omega_0 \sin \delta = U_0/L.$$

Таким образом, $\delta = \pi/2, I_{01} = U_0/L$ и

$$I_1(t) = I_2(t) = \frac{U_0}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t + \pi/2).$$

Пример 6

В цепи, состоящей из заряженного конденсатора емкости C_0 и катушки индуктивности L , замыкают ключ K .



К примеру 6

По какому закону должна изменяться во времени емкость конденсатора, чтобы ток в цепи нарастал прямо пропорционально времени?

Решение

Пусть ток меняется линейно по закону $I(t) = \alpha t$, $U(t)$ – напряжение, $C(t)$ – электрическая емкость, $q(t)$ – заряд конденсатора в произвольный момент времени t . Поскольку активное сопротивление катушки предполагается равным нулю,

$$U(t) = U_0 = \frac{q(t)}{C(t)} = -L\alpha,$$

и разность потенциалов на обкладках конденсатора не будет зависеть от времени:

$$\frac{q_0}{C_0} = \frac{q(t)}{C(t)}.$$

Заряд на обкладках конденсатора в произвольный момент времени t можно вычислить, воспользовавшись формулой для среднего тока

$$\overline{I(t)} = \frac{1}{2}\alpha t; \quad \alpha = -\frac{q_0}{C_0 L}; \quad q(t) = q_0 - \frac{q_0 t^2}{2C_0 L}.$$

Подставляя в предыдущее выражение значение $q(t)$, находим:

$$C(t) = C_0 - \frac{t^2}{2L}.$$

Таким образом, емкость конденсатора должна уменьшаться как квадратичная функция времени.

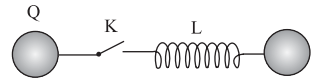
Пример 7

Две металлические сферы радиусом R каждая удалены друг от друга на большое расстояние и соединены тонким проводником, в разрыв которого включена катушка индуктивностью L . На одну из сфер помещают электрический заряд. Через какое время заряд этой сферы уменьшится в два раза? Чему будет равна частота возникших электрических колебаний?

Решение

При замыкании ключа ток I , протекающий через индуктивность, будет изменяться по закону $LI' = U$, где U – разность потенциалов между шарами.

Поскольку шары образуют электрическую емкость, то в цепи возникнут электрические колебания. Поэтому нужно найти взаимную емкость системы двух шаров C . Эта емкость не равна емкости уединенного металлического шара, поскольку часть силовых линий электростатического поля шаров будет замыкаться на других зарядах, распределенных в пространстве.



К примеру 7

Если имеется два уединенных проводника с электрической емкостью C_1 и C_2 , то их взаимная электрическая емкость

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \quad \varphi_1 = \frac{q}{C_1}, \quad \varphi_2 = \frac{-q}{C_2}, \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

При записи этой формулы мы считаем, что проводники имеют заряд $+q$ и $-q$. Поскольку шары одинаковы и $C_1 = C_2 = 4\pi\epsilon_0 R$, то взаимная емкость шаров $C = 2\pi\epsilon_0 R$.

Отсюда сразу находим период колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$.

Найдем время τ , через которое заряд первой сферы уменьшится в два раза. В этот момент времени оба шара будут иметь равный заряд $Q/2$, а разность потенциалов между шарами будет равна нулю. Следовательно, этот период времени равен четверти периода колебаний $\tau = \pi/2 \cdot \sqrt{LC}$.

Можно решить эту задачу иначе, если вывести уравнение колебания заряда q_2 на второй сфере. В произвольный момент времени разность потенциалов между шарами

$$U = \frac{Q - q_2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q/2 - q_2}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Поэтому колебания заряда q_2 описываются уравнением

$$Lq_2'' + \frac{q_2}{2\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q/2}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Чтобы привести это уравнение к стандартному уравнению колебаний, достаточно сделать замену переменных $q = Q/2 - q_2$.

Пример 8

В колебательном RLC -контуре сопротивление невелико и колебания затухают слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период колебаний в тот момент, когда ток через катушку достигает амплитудного значения, катушку индуктивности очень быстро растягивают, изменяя длину от l до $l + \Delta l$, а в момент, когда ток, протекающий через нее, равен нулю, быстро сжимают до прежнего размера (параметрический резонанс). Чему должно быть равно относительное удлинение катушки, чтобы колебания в контуре не затухали? Индуктивность представляет собой соленоид, площадь поперечного сечения которого не изменяется при изменении длины.

Решение

При увеличении длины катушки увеличивается объем, занимаемый магнитным полем, а значит, и энергия магнитного поля тока. При наличии тока в катушке между витками катушки действует сила Ампера, которая приводит к эффективному притяжению витков между собой. Увеличение энергии магнитного поля тока катушки при ее быстром растяжении равно работе внешних сил, растягивающих катушку.

Рассмотрим предел очень быстрого растяжения витков, когда $\Delta t \rightarrow 0$. Из закона электромагнитной индукции Фарадея $I = -\frac{\Delta\Phi}{R\Delta t}$ находим, что в этом случае и $\Delta\Phi \rightarrow 0$, поскольку иначе энергия магнитного поля тока была бы произвольно большой. Таким образом, при быстром изменении длины катушки магнитный поток, пронизывающий ее витки, не изменяется. Поэтому изменение энергии магнитного поля катушки

$$\Delta W = \frac{LI_0^2}{2} \frac{\Delta l}{l},$$

I_0 – амплитудное значение тока в катушке. Если колебания тока в цепи не затухают, то потери энергии за половину периода, связанные с джоулевым нагревом, равны работе внешних сил:

$$Q_{\text{Дж}} = \frac{1}{2} RI_0^2 \pi \sqrt{LC} = \frac{LI_0^2}{2} \frac{\Delta l}{l}.$$

Таким образом, колебания будут незатухающими, если выполняется условие

$$\frac{\Delta l}{l} \geq \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Пример 9

К точкам A и B схемы, показанной на рисунке 9а, подается напряжение $U_{AB} = U_0 \cos \omega t$. Выходное напряжение U_{ED} снимается с точек E и D . При каких условиях амплитудное значение напряжения $U_{ED} = U'_0$ совпадает с амплитудой входного напряжения? Каким будет при этом сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями?

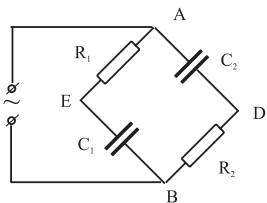
Решение

Для решения задачи воспользуемся методом векторных диаграмм. Обозначим падение напряжения на элементах цепи U_{R_1} , U_{R_2} , U_{C_1} , U_{C_2} . С учетом того, что напряжение на конденсаторе отстает по фазе от напряжения на активном сопротивлении, построим диаграмму падений напряжения в левой ветви цепи AEB (рис. 9б).

Опишем вокруг прямоугольного треугольника AEB окружность. Тогда гипотенуза этого треугольника U_0 является диаметром окружности. Проводя аналогичное построение для ветви ADB , получаем диаграмму, изображенную на рис. 9б. Выходное напряжение изображается на этой диаграмме вектором ED . Для того чтобы входное и выходное напряжения были одинаковыми по модулю, необходимо,

чтобы вектор ED также был диаметром окружности. Это возможно в том случае, когда $U_{C_1} = U_{C_2}$ и $U_{R_1} = U_{R_2}$. Векторная диаграмма для этого случая изображена на рис. 9в.

Угол $\varphi/2$ легко находится из геометрических соображений:



К примеру 9а

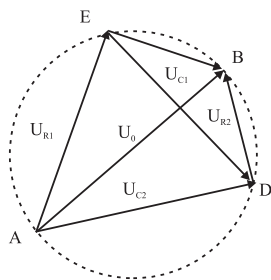
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{U_{C_1}}{U_{R_1}} = \frac{U_{C_2}}{U_{R_2}}.$$

Поскольку токи, текущие в последовательно соединенных участках цепи, одинаковы, то отношение амплитудных значений напряжения равно отношению абсолютных значений сопротивлений, и мы можем выразить искомый сдвиг фаз между входным и выходным напряжением через известные по условию задачи величины:

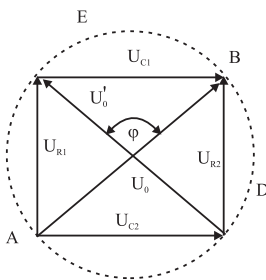
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\omega C_1 R_1} = \frac{1}{\omega C_2 R_2}.$$

Второе из записанных выше равенств эквивалентно условию $C_1 R_1 = C_2 R_2$, которое должно выполняться, если $U_0 = U'_0$.

Рассматриваемая схема представляет собой фазовращатель, т. е. прибор, который может изменить фазу электрического колебания, не изменяя его амплитуду.



К примеру 9б



К примеру 9в

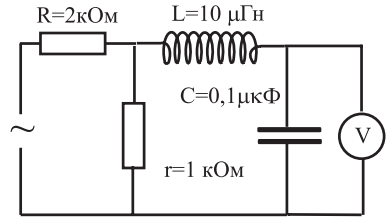
Пример 10

Для исследования резонанса собрана схема, показанная на рисунке. При какой частоте генератора показания вольтметра будут максимальными? Чему равно это максимальное напряжение, если

амплитуда напряжения генератора $U_0 = 1$ В? Значения параметров цепи приведено на рисунке. Все элементы цепи можно считать идеальными.

Решение

Для упрощения задачи заменим идеальный источник и подключенные к нему два сопротивления $R = 2$ кОм и $r = 1$ кОм эквивалентным источником тока с некоторой амплитудой выходного напряжения U'_0 и внутренним сопротивлением Z . Если временно отсоединить индуктивность и емкость, то легко сообразить, что



К примеру 10

$$U'_0 = \frac{U_0 r}{r + R}, \quad Z = \frac{rR}{r + R}.$$

Чтобы получить последний результат, представим, что сопротивление r замкнено. Ток короткого замыкания I вычисляется, с одной стороны, по формуле $I = U_0/R$, а с другой стороны, если считать, что эквивалентный источник обладает внутренним сопротивлением Z , – по формуле $I = U'_0/Z$. Отсюда получаем $ZU_0 = U'_0R$. Если подставить в это выражение найденное выше значение U'_0 , то приходим к записанному выше результату. Теперь схема получилась совсем простой и амплитуду напряжения на конденсаторе U_C можно записать сразу:

$$U_C = \frac{U'_0}{\omega C \sqrt{Z^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}}.$$

Исследуем полученное выражение на максимум. Для этого следует найти минимальное значение квадрата знаменателя

$$D = \omega^2 C^2 (Z^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2).$$

Условием экстремальности функции является равенство нулю ее производной. Найдем производную $dD/d\omega$ и приравняем ее к нулю:

$$2\omega^2 Z^2 + 4\omega^2 L^2 C^2 - 4\omega LC = 0,$$

откуда находим значение частоты, при которой знаменатель будет принимать экстремальное значение:

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 - Z^2C/(2L)).$$

Если подставить в эту формулу численные значения параметров ($R = 2 \text{ кОм}$, $r = 1 \text{ кОм}$, $Z = 667 \text{ кОм}$, $C = 0,1 \text{ мкФ}$, $L = 10 \text{ мГн}$), то обнаружим, что резонанс в этой системе при заданных значениях параметров невозможен и максимальное напряжение $U_m = U'_0 = 0,33 \text{ В}$ вольтметр покажет на нулевой частоте.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. После того как конденсатору колебательного контура был сообщен заряд $q = 10^{-6} \text{ Кл}$, в контуре начались затухающие электрические колебания. Какое количество теплоты выделится в контуре к тому времени, когда колебания полностью прекратятся? Емкость конденсатора $C = 0,01 \text{ мкФ}$.

2.2. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью $L = 0,003 \text{ Г}$ и плоского конденсатора, состоящего из двух пластинок в виде дисков радиусом $r = 1,2 \text{ см}$, расположенных на расстоянии $d = 0,3 \text{ мм}$ друг от друга. Определить период T собственных колебаний контура. Каким будет период колебаний, если конденсатор заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$?

2.3. Ток в колебательном контуре изменяется по закону $I = 0,01 \cos 1000 \cdot t$. Найти индуктивность контура, зная, что емкость конденсатора, включенного в контур, равна 10 мкФ .

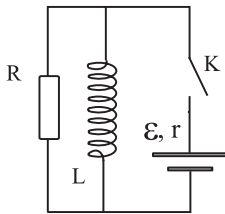
2.4. В контуре индуктивностью L и емкостью C совершаются свободные незатухающие колебания. Зная, что максимальное значение напряжения на конденсаторе равно U_0 , найти максимальный ток в этом контуре.

2.5. Батарейку из двух параллельно соединенных одинаковых конденсаторов емкостью $C = 10 \text{ нФ}$ каждый заряжают от источника постоянного напряжения до максимальной разности потенциалов $U_0 = 200 \text{ В}$ и подключают к катушке индуктивностью $L = 8 \text{ мГн}$. Найти амплитудное значение силы тока в колебательном контуре,

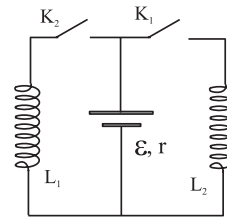
значение силы тока через $t_1 = 0,31$ мкс после подключения батареи, значение тока в момент времени t_2 , когда напряжение на батарее конденсаторов равно 100 В.

2.6. Параллельно соединенные катушка индуктивности L и резистор с сопротивлением R подключены через ключ K к батарее с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рис.). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд протечет через резистор после замыкания ключа?

2.7. Две катушки индуктивности L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рис.). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. После того как ключ K_1 замкнули и ток через катушку L_1 достиг некоторого значения I_0 , замыкают ключ K_2 . Определить установившиеся значения токов через катушки L_1 и L_2 после замыкания ключа K_2 . Активным сопротивлением катушек можно пренебречь.



К задаче 2.6

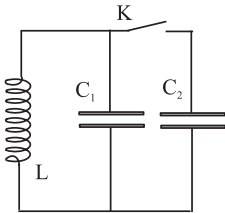


К задаче 2.7

2.8. В цепи, изображенной на рисунке, $C_1 = C_2 = C$. До замыкания ключа напряжение на первом конденсаторе равно U_1 , а второй конденсатор не заряжен. Найти максимальное значение силы тока через катушку I_0 с индуктивностью L после замыкания ключа. Сопротивлением катушки можно пренебречь.

2.9. Две катушки индуктивности $L_1 = L_2 = L$ подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику тока с постоянной ЭДС ε и внутренним сопротивлением r (см. рис. к задаче 2.7). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают ключ K_1 . Определить ток, протекающий через ключ K_1 , перед замыканием ключа K_2 , если известно, что установившийся ток через ключ K_1 после замыкания ключа K_2 в два раза больше установившегося тока через ключ K_2 . Активным сопротивлением катушек можно пренебречь.

2.10. Батарея без внутреннего сопротивления подключена к соленоиду индуктивностью L . Определить зависимость тока в цепи от времени, если ЭДС батареи \mathcal{E} . Найти работу за время τ . В какой вид энергии превращается эта работа?

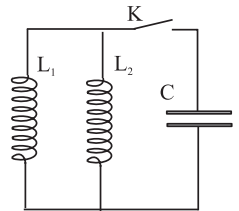


К задаче 2.8

2.11. Как должно меняться напряжение в электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки индуктивности L и сопротивления R , чтобы ток в ней: а) линейно возрастал по закону $I(t) = at$; б) менялся по закону $I(t) = I_0 \sin \omega t$?

2.12. Конденсатор емкостью C , заряженный до разности потенциалов U , через ключ K подключен к двум параллельно соединенным катушкам индуктивности L_1 и L_2 (см. рис.). Если замкнуть ключ K , то через некоторое время конденсатор полностью перезарядится. Какие заряды q_1 и q_2 протекнут через катушки за это время? Сопротивлением катушек можно пренебречь.

2.13. Заряженный конденсатор емкостью C через ключ K подключен к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 . В начальный момент времени ключ разомкнут. Если замкнуть ключ K , то через катушку потечут токи. Максимальный ток, протекающий через катушку L_1 , оказался равным I_1 . Найти первоначальный заряд на конденсаторе.

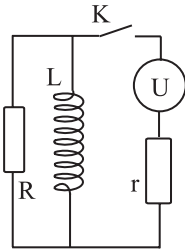


К задачам 2.12, 2.13

2.14. В схеме, изображенной на рисунке, постоянное напряжение генератора $U = 10$ В, сопротивление резисторов $r = 2,5$ Ом, $R = 100$ Ом, индуктивность катушки $L = 0,1$ Гн. Вначале ключ K разомкнут. В момент времени $t = 0$ ключ замыкают. Чему равен заряд q , прошедший через резистор R ?

2.15. Колебательный контур состоит из вакуумного конденсатора емкостью C , расстояние между пластинами которого равно d , и катушки индуктивности. Собственная частота колебаний контура равна ω_0 . Какой будет собственная частота, если между пластинами конденсатора поместить свободную точечную частицу массой m , имеющей заряд q ? Сила тяжести отсутствует. Изменением электрического поля за счет наличия заряженной частицы между пласти-

нами конденсатора можно пренебречь.

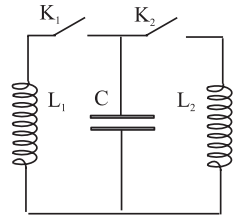


К задаче 2.14

2.16. Разность потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид $U(t) = 50 \cos 10^4 \pi t$ В. Емкость конденсатора $C = 0,1$ мкФ. Найти: а) период колебаний; б) индуктивность контура; в) закон изменения силы тока в цепи. Чему равно отношение магнитной энергии контура к электрической для момента времени $t = T/8$, где T – период колебаний?

2.17. Катушки $L_1 = L_2 = L$ подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору емкостью C (см. рис.). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов U_0 . Сначала замыкают ключ K_1 , а когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Определить максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа K_2 . Активным сопротивлением катушек пренебречь.

2.18. Две катушки индуктивности L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к конденсатору емкостью C (см. рис.). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты, а конденсатор заряжен до разности потенциалов U_0 . Сначала замыкают ключ K_1 , а когда напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ K_2 . Определить максимальный и минимальный токи, протекающие через катушку L_1 после замыкания ключа K_2 . Активным сопротивлением катушек пренебречь.



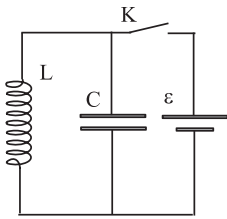
К задачам 2.17, 2.18

2.19. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 7$ мкФ, катушки индуктивностью $L = 0,23$ Гн и сопротивления $R = 40$ Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $q = 5,610^{-4}$ Кл. Найти период колебаний контура T , записать уравнение зависимости разности потенциалов $U(t)$ на обкладках конденсатора от времени, вычислить коэффициент затухания γ и добротность Q колебательного контура.

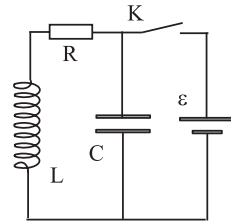
2.20. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 0,2$ мкФ и катушки индуктивностью $L = 5,07 \cdot 10^{-3}$ Гн. При каком логарифмическом декременте затухания $\kappa = \gamma T$ (γ –

коэффициент затухания, T – период колебаний) напряжение на обкладках конденсатора уменьшится в 3 раза за время $t = 10^{-3}$ с? Чему равно активное сопротивление контура R ?

2.21. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C , через ключ K подключен к источнику тока с ЭДС \mathcal{E} и внутренним сопротивлением r (см. рис.). Первоначально Ключ K замкнут. После установления стационарного режима ключ размыкают, и в колебательном контуре возникают колебания с периодом T . При этом амплитуда напряжения на конденсаторе в n раз больше ЭДС батареи. Найти индуктивность катушки и емкость конденсатора.



К задаче 2.21



К задаче 2.22

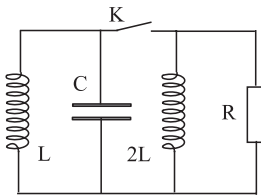
2.22. Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C , катушки индуктивностью L и сопротивления R , через ключ K подключен к источнику тока с постоянной ЭДС \mathcal{E} (см. рис.). Через некоторое время после замыкания ключа K устанавливается стационарный режим с постоянным значением тока в цепи. После этого ключ K снова размыкают. Какое количество тепла выделится после размыкания ключа?

2.23. Контур состоит из катушки индуктивностью $L = 28$ мкГн, сопротивления $R = 1$ Ом и конденсатора емкостью $C = 2222$ пФ. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе $U_0 = 5$ В?

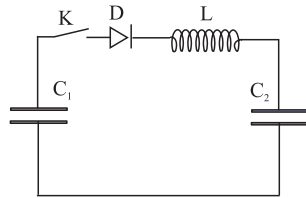
2.24. К источнику тока напряжением $U = 10$ В подключили последовательно соединенные катушку индуктивностью $L_0 = 0,1$ Гн и резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. Через некоторое время ток в цепи установился. После этого начинают вдвигать и выдвигать сердечник катушки таким образом, чтобы индуктивность изменялась

по закону $L = L_0(1 + 0,1 \sin \omega t)$. При этом в цепи появляется переменная составляющая тока. Найти амплитуду этой составляющей на частоте $\omega = 1$ рад/с. Какой станет амплитуда, если частоту увеличить в 10000 раз?

2.25. В идеальном LC -контуре происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно U , а ток, протекающий через катушку, равен I , замыкают ключ K , подсоединяя параллельно контуру цепь, состоящую из параллельно соединенных резистора сопротивлением R и катушки индуктивностью $2L$ (см. рис.). Определить полное количество теплоты, которое выделится в резисторе.



К задаче 2.25



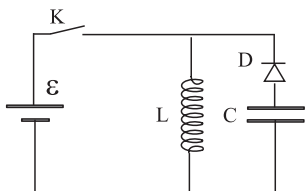
К задаче 2.26

2.26. Конденсатор емкостью $C_1 = 1$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_0 = 300$ В. К нему через идеальный диод D и катушку индуктивностью L подключают незаряженный конденсатор емкости $C_2 = 2$ мкФ (см. рис.). До какой разности потенциалов он зарядится после замыкания ключа K ? Индуктивность L достаточно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.

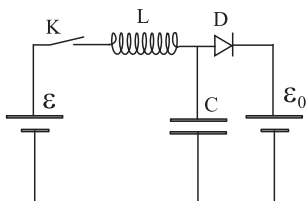
2.27. Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и идеального диода D (см. рис.), через ключ K на время τ подключают к источнику постоянной ЭДС \mathcal{E} , а затем отключают. Найти зависимость напряжения на конденсаторе от времени после размыкания ключа. Представить эту зависимость графически. Активным сопротивлением элементов цепи можно пренебречь.

2.28. В схеме, изображенной на рисунке, ЭДС батареи \mathcal{E}_0 больше ЭДС батареи \mathcal{E} . Определить заряд, который протечет через батарею с ЭДС \mathcal{E}_0 при замыкании ключа K . Внутренним сопротивлением батарей и сопротивлением катушки можно пренебречь. Конденсатор до замыкания ключа был не заряжен. Диод имеет идеальную вольт-амперную характеристику.

2.29. Найти индуктивность катушки, если амплитуда переменного напряжения на ее концах $U_0 = 160$ В, амплитуда тока в ней $I_0 = 10$ А, а частота тока $\nu = 50$ Гц. Активным сопротивлением катушки пренебречь.



К задаче 2.27



К задаче 2.28

2.30. Последовательно с активным сопротивлением $R = 1$ кОм включена катушка индуктивностью $L = 0,5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Определить индуктивное сопротивление X_L , емкостное сопротивление X_C и полное сопротивление Z переменному току на частотах $\nu_1 = 50$ Гц и $\nu_2 = 10$ кГц.

2.31. В сеть переменного тока напряжением $U_{\text{эфф}} = 120$ В последовательно включены проводник с активным сопротивлением $R = 15$ Ом и катушка индуктивностью $L = 50$ мГн. Найти частоту тока ν , если амплитуда тока в цепи $I_0 = 7$ А.

2.32. В цепь переменного тока напряжением 220 В включены последовательно емкость C , активное сопротивление R и индуктивность L . Найти падение напряжения U_R на омическом сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C = 2U_R$ и падение напряжения на индуктивности $U_L = 3U_R$.

2.33. Переменный ток возбуждается в рамке из $n = 200$ витков с площадью витка $S = 300$ см² в магнитном поле с индукцией $B = 1,5 \cdot 10^{-2}$ Тл. Определить ЭДС индукции через $t = 0,01$ с после начала движения рамки из нейтрального положения. Амплитуда ЭДС $\mathcal{E}_0 = 7,2$ В.

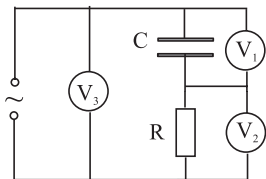
2.34. Найти частоту n вращения прямоугольной рамки в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,50$ Тл, если в рамке индуцируется ЭДС амплитудой $\mathcal{E}_0 = 20$ В. Площадь рамки $S = 200$ см², число витков $N = 40$. Ось вращения рамки перпендикулярна вектору индукции магнитного поля.

2.35. В цепь последовательно включены резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L . По цепи протекает переменный ток $I = I_0 \cos \omega t$. Найти амплитуды напряжения на каждом из элементов цепи и амплитуду напряжения, приложенную к цепи. По какому закону изменяется это напряжение?

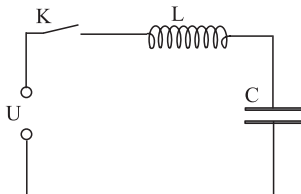
2.36. В цепь переменного тока включены последовательно резистор сопротивлением R , конденсатор емкостью C и катушка индуктивностью L . Амплитуда силы тока равна I_0 . Какую среднюю мощность потребляет за период каждый из элементов цепи? Конденсатор и катушку можно считать идеальными.

2.37. В цепь переменного тока включены последовательно резистор, конденсатор и катушка. Выразить среднюю мощность P , потребляемую всей цепью, через действующие значения силы тока I_3 и напряжения U_3 . Сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения равен φ .

2.38. В цепи переменного тока, изображенной на рисунке, показания первого и второго вольтметров $U_1 = 10$ В и $U_2 = 9$ В. Каково показания U_3 третьего вольтметра?



К задаче 2.38

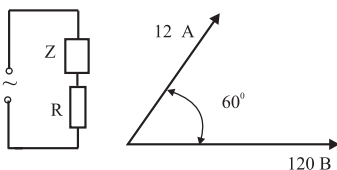


К задаче 2.39

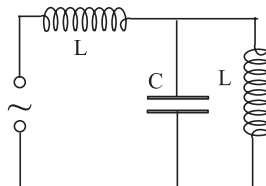
2.39. В схеме, изображенной на рисунке, в момент времени $t = 0$ замыкают ключ K . Определить ток в цепи, если источник дает: а) постоянное напряжение U_0 ; б) косинусоидальное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Определить максимальный ток, если $U_0 = 100$ В, $L = 10^{-2}$ Гн, $C = 10^{-3}$ Ф, $\nu = 50$ Гц.

2.40. Если подать на катушку постоянное напряжение 30 В, сила тока в катушке будет равна 1,0 А. Если же на эту катушку подать переменное напряжение 30 В частотой 50 Гц, сила тока составит только 0,6 А. Какова индуктивность катушки? Какая мощность выделяется при прохождении постоянного тока? Переменного?

2.41. В цепь переменного тока последовательно подключены некоторая нагрузка Z , имеющая активную и реактивную составляющие, и активное сопротивление R . Значение напряжения U , тока I и сдвига фаз между током и напряжением в цепи нагрузки показаны на векторной диаграмме (см. рис.). Определить амплитуду ЭДС источника тока, если $R = 10$ Ом. Найти значение активной и реактивной составляющих нагрузки Z .



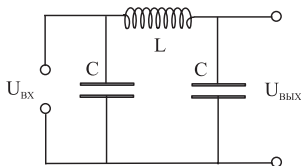
К задаче 2.41



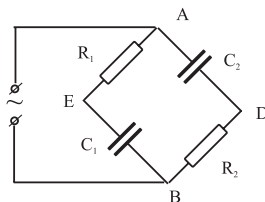
К задаче 2.42

2.42. Найти установившийся ток в цепи, изображенной на рисунке, если ЭДС источника тока меняется по закону $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$.

2.43. Подобрать индуктивность дросселя таким образом, чтобы амплитуда напряжения на выходе фильтра при частоте 100 Гц была в 10 раз меньше амплитуды на входе.



К задаче 2.43



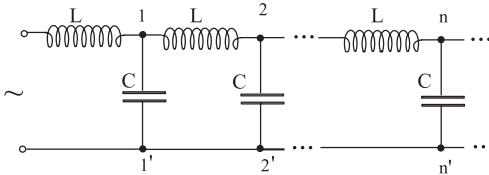
К задаче 2.44

2.44. Имеется фазовращательная цепь. К клеммам А и В подводится напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Какое напряжение снимается с клемм Е D, если $R_1 C_1 = R_2 C_2$?

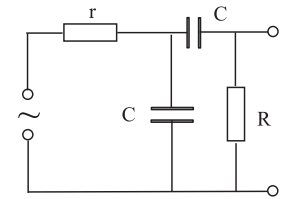
2.45. В сеть переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно лампа накаливания, катушка индуктивностью $L = 0,5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Как изменится накал лампы, если к конденсатору параллельно подключить второй такой же конденсатор? Третий?

2.46. В сеть переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включены последовательно лампа накаливания, конденсатор емкостью $C = 20$ мкФ и катушка. Индуктивность катушки без сердечника $L_1 = 50$ мГн, а при полностью введенном сердечнике $L_2 = 1,5$ Гн. Как будет меняться накал лампы по мере введения в катушку сердечника?

2.47. На вход бесконечной цепочки подано напряжение $U = U_0 \sin \omega t$. Что показывает идеальный вольтметр, подключенный к точкам $n - n'$ (см. рис.), если его показания не зависят от номера узла подключения. При каких частотах это возможно.

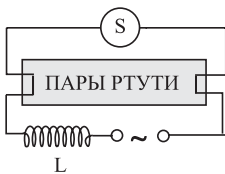


К задаче 2.47



К задаче 2.48

2.48. К генератору звуковой частоты подключена цепь из двух резисторов и двух конденсаторов (см. рис.). При какой частоте генератора сдвиг фаз между его напряжением и током через резистор сопротивлением R окажется равным нулю? Во сколько раз при этом напряжение на резисторе R будет меньше выходного напряжения генератора?

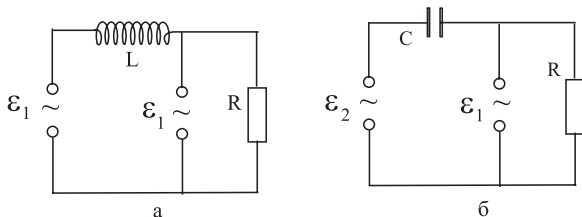


К задаче 2.49

2.49. Люминесцентная лампа включена в сеть переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц. Общее (сетевое) напряжение $U = 228,5$ В, сила тока в цепи $I = 0,60$ А, напряжение на клеммах люминесцентной лампы $U_{\text{л}} = 84$ В, омическое сопротивление балластного дросселя $R_L = 26,3$ Ом. Люминесцентная лампа может рассматриваться как омическое сопротивление. Требуется найти: а) какой индуктивностью L обладает дроссель; б) значение сдвига

фазы φ между напряжением и током; в) величину тепловой мощности, выделяющейся в цепи. Для каких целей в цепь включены дроссель и стартер? Стартер представляет собой биметаллическую

пластину, которая при выключенном токе замыкает контакты; при пропускании тока она, разогреваясь, изгибается и размыкает контакты, затем охлаждается, снова замыкает контакты и т. д. У лампы такого типа можно последовательно к дросселю подключать конденсатор емкостью $C = 4,7 \text{ мкФ}$. Для каких целей предусмотрена эта возможность?

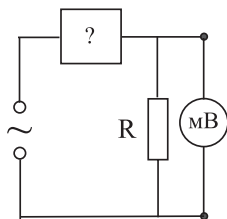


К задаче 2.50

2.50. Найти установившиеся токи в электрических цепях, изображенных на рисунке. Внутреннее сопротивление источников тока равно нулю. Определить среднюю мощность, выделяющуюся в цепях, если $\varepsilon_0 = 200 \text{ В}$, $R = 100 \text{ Ом}$, $C = 10^{-4} \text{ Ф}$, $L = 1 \text{ Гн}$. Частота источника тока $\nu = 50 \text{ Гц}$.

Источники тока генерируют переменное напряжение, которое изменяется по гармоническому закону: $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \sin \omega t$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_0 \cos \omega t$.

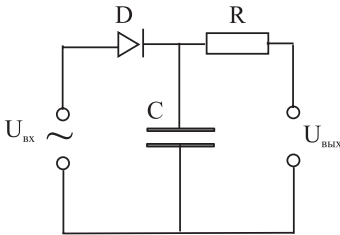
2.51. При исследовании на переменном токе «черного ящика» была использована схема, показанная на рисунке. Напряжение звукового генератора на всех частотах было равно 1 В, показания милливольтметра на различных частотах приведены в таблице. Что может находиться внутри черного ящика? Оценить значения параметров элементов предложенной вами схемы (следует рассматривать простейший возможный вариант схемы). Сопротивление $R \simeq 1 \text{ кОм}$.



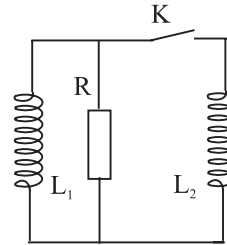
К задаче 2.51

ν , КГц	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$U_{\text{вых}}$, мВ	540	90	196	380	520	620	690	750	790	820

2.52. На рисунке показана схема простейшего выпрямителя. Емкость конденсатора $C = 500 \text{ мкФ}$, сопротивление резистора $R = 1 \text{ кОм}$. Каково максимально возможное значение напряжение $U_{\text{вых}}$ на выходе выпрямителя? Какое обратное напряжение должен выдерживать диод? Входное напряжение имеет амплитудное значение напряжение $U_0 = 36 \text{ В}$ и частоту $\nu = 50 \text{ Гц}$

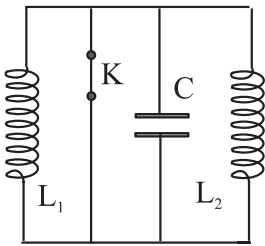


К задаче 2.52



К задаче 2.53

2.53. К моменту времени, когда ток в катушке индуктивностью L_1 был равен I , ключ K замкнули. Какое количество теплоты выделилось на сопротивлении R после замыкания ключа?



К задаче 2.54

2.54. При замкнутом ключе K ток в катушке индуктивностью L_1 равен I_1 , а в катушке индуктивностью L_2 равен I_2 . Определить, в каких пределах будет изменяться ток в катушках индуктивностью L_1 и L_2 после размыкания ключа K .

2.55. Из-за наличия активного сопротивления проводов в колебательном контуре, состоящем из конденсатора емкостью 1 мкФ и катушки индуктивностью 1 мкГн , амплитуда тока за 1 мс уменьшилась в два раза. Определить сопротивление проводов.

2.56. Неоновая лампа с напряжением зажигания $U_3 = 156 \text{ В}$ включена в сеть напряжением 220 В , 50 Гц . Найти частоту n вспышек лампы. В течение какой части периода лампа горит? Напряжение гашения лампы можно считать равным напряжению зажигания.

Качественные вопросы

2.1. Что произойдет, если заряженный конденсатор соединить сверхпроводником с таким же, но не заряженным конденсатором?

2.2. Как известно, график зависимости ЭДС от времени при равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле представляет собой синусоиду. Как изменится график, если частота вращения удвоится?

2.3. Входящий в колебательный контур плоский конденсатор таков, что его пластины могут перемещаться друг относительно друга. Каким образом посредством перемещения пластин можно осуществить параметрическую раскачку контура?

2.4. Электрическая цепь, состоящая из двух катушек индуктивности и лампочки, подключена к генератору переменного напряжения. Если в одну из катушек вставить железный сердечник, то свечение лампочки усиливается; если же сердечник вставить в другую катушку, то свечение лампочки ослабевает. Нарисовать схему возможной электрической цепи.

2.5. Имеются две одинаковые лампы накаливания с амперметрами, регистрирующими протекающий через них ток. Одна из ламп подключена к источнику переменного, другая – к источнику постоянного тока. Показания амперметров одинаковы. Какая лампа горит ярче?

2.6. Почему при параллельном подключении конденсатора к дросселю в цепи лампы дневного света повышается ее мощность?

2.7. При последовательном включении в цепь переменного тока активного сопротивления R , индуктивности и емкости полное сопротивление, казалось бы, должно вырасти и стать большим, чем R . Однако если подобрать частоту тока так, чтобы выполнялось резонансное условие, оно будет практически равно R . Как это следует понимать?

2.8. Имеется цепь переменного тока, составленная из последовательно соединенных индуктивности, емкости и активного сопротивления. Может ли фаза напряжения в такой цепи отличаться от фазы тока на 110° ?

2.9. Почему в колебательном контуре резонансной является частота, на которой равны реактивные сопротивления емкости и индуктивности?

Вычисление производных от элементарных функций

Дадим краткую сводку правил вычисления производных от элементарных функций. Эти правила достаточно просты, и мы надеемся, что одиннадцатиклассники в состоянии овладеть ими самостоятельно. В конце предлагается небольшое число примеров и задач, которые мы рекомендуем решить.

Пусть $y(x)$ – некоторая функция независимой переменной x . Производной функции $y(x)$ по переменной x [обозначается $y'(x)$] называется предел отношения приращения функции $\Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x)$ к приращению аргумента Δx , если таковой существует, при Δx , стремящемся к нулю :

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} \quad (\text{П 1.1})$$

при $\Delta x \rightarrow 0$. Часто используется и другое обозначение

$$y'(x) \equiv \frac{dy}{dx}. \quad (\text{П 1.2})$$

Скорость может служить примером производной перемещения s по времени t . Действительно,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}, \quad (\text{П 1.3})$$

что полностью соответствует определению (П 1.1), если заменить независимую переменную x на переменную t . Аналогично ускорение a является производной скорости v по времени:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \quad (\text{П 1.4})$$

Поскольку ускорение является производной скорости по времени, а скорость, в свою очередь, является производной перемещения по времени, то можно сказать, что ускорение является второй производной от перемещения по времени:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Delta s}{\Delta t \Delta t} = \frac{d^2 s}{dt^2} \equiv s''(t), \quad (\text{П 1.5})$$

Найдем значение производных для некоторых элементарных функций.

1. Если $y(x) = x^2$, то $\Delta y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, а вычисляя предел отношения $\Delta x^2/\Delta x$, получаем

$$\frac{dx^2}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x, \quad (\text{П 1.6})$$

поскольку $(\Delta x)^2/\Delta x$ стремится к нулю в пределе при Δx , стремящемся к нулю.

Полученный результат легко обобщается на случай произвольной целой положительной или отрицательной степени n :

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}. \quad (\text{П 1.7})$$

Для целого n доказательство результата (П 1.7) может быть получено методом математической индукции, но, вообще говоря, результат справедлив для любого n .

Из формулы (П 1.7) следует, в частности, что при $n = 1$ $y = x$, а $y' = 1$. Если функция $y = \text{const}$, то очевидно, что $y' = 0$.

2. Пусть $y = \sin(x)$, тогда $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x)$. Пользуясь формулой для синуса суммы двух углов, имеем

$$\Delta y = \sin(x) \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cos(x) - \sin(x).$$

При

$$\Delta x \rightarrow 0 \quad \cos(\Delta x) \rightarrow 1, \quad \sin(\Delta x) \rightarrow \Delta x, \quad (\text{П 1.8})$$

поэтому

$$\frac{d \sin(x)}{dx} = \cos(x). \quad (\text{П 1.9})$$

3. Если $y = \cos(x)$, то $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos(x)$. Воспользовавшись формулой для косинуса суммы двух углов и предельным переходом (П 1.8) при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(\Delta x) - \sin(x) \sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \\ = \frac{d \cos(x)}{dx} = -\sin(x). \end{aligned} \quad (\text{П 1.10})$$

4. Пусть $y = \ln(x)$ $x > 0$. Здесь знак \ln используется для обозначения логарифмической функции по основанию e . Число e играет в математическом анализе примерно ту же роль, что и число π в алгебре или геометрии. Иррациональное число $e = 2,71828818\dots$ в действительности является замечательным пределом

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (\text{П 1.11})$$

Выражение (П 1.11) мы оставим без доказательства. Возвращаясь теперь к вычислению производной от логарифмической функции, и следуя определению производной, имеем

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (\text{П 1.12})$$

Для получения последнего равенства в выражении (П 1.12) мы сделали замены переменных $\Delta x/x = h$, $z = 1/h$ и воспользовались замечательным пределом (П 1.11):

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + h)}{h} &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right)^z = \ln(e) = 1. \end{aligned} \quad (\text{П 1.13})$$

5. Пусть $y = c \cdot f(x)$, c – некоторая константа, а $f(x)$ – произвольная функция x . Тогда

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{cf(x + \Delta x) - cf(x)}{\Delta x} = \\ &= c \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = cf'(x). \end{aligned} \quad (\text{П 1.14})$$

Производная от произведения постоянной величины на переменную равна произведению этой постоянной на производную от переменного множителя, или, другими словами, константа выносится за знак производной.

6. Рассмотрим производную от суммы нескольких функций. Для определенности возьмем случай, когда складываются две функции $y(x) = u(x) + v(x)$. Тогда очевидно: $\Delta y = \Delta u + \Delta v$, и для производной имеем простой результат:

$$y' = u' + v'. \quad (\text{П 1.15})$$

Таким образом, можно сформулировать правило:

Производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций

7. Рассмотрим теперь производную от произведения двух функций $y = u \cdot v$. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x).$$

Прибавляя и вычитая в правой части записанного выше выражения произведение

$$u(x + \Delta x)v(x),$$

после простых преобразований получаем

$$\begin{aligned} \Delta y &= u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + \\ &+ v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]. \end{aligned} \quad (\text{П 1.16})$$

Теперь, используя определение производной (П 1.1), получаем окончательный результат:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + \\ &+ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u(x)v'(x) + v(x)u'(x). \end{aligned} \quad (\text{П 1.17})$$

Производная от произведения функций равна сумме произведений производных каждого из сомножителей на все остальные.

Мы доказали этот результат для произведения двух функций, но, применяя метод математической индукции, результат легко обобщается на произвольное число сомножителей.

8. Рассмотрим теперь правила вычисления производной от сложной функции $y(x) = y(f(x))$, когда y зависит от x через посредство

функции $f(x)$. Общее правило вычисления производных в этом случае состоит в замене переменных. Введем переменную $z = f(x)$. Тогда очевидно, что

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}. \quad (\text{П 1.18})$$

Таким образом, можно сформулировать следующее правило дифференцирования сложных функций:

Производная сложной функции равна произведению производной по промежуточной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной.

9. Рассмотрим частный, но важный случай применения правила (П 1.18). Пусть $y(x) = y(c \cdot x)$, где c – некоторая константа, не зависящая от x . Применяя правило (П 1.18), получаем: $y'_x = y'_z \cdot c$.

Пример 1

Пусть смещение материальной точки от положения равновесия определяется выражением $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$. Найти зависимость скорости и ускорения частицы в зависимости от времени.

Решение

Скорость частицы определяется производной смещения по времени t . Выполняя дифференцирование в соответствии с правилом (П 1.18), получаем

$$v(t) = x_0 \frac{d \sin(z)}{dz} \cdot \frac{dz}{dt}, \quad z = \omega t.$$

Воспользовавшись определением (П 1.9), получаем

$$v(t) = x_0 \omega \cos(\omega t). \quad (\text{П 1.19})$$

Найдем теперь ускорение $x''(t) = v'(t)$. Для этого необходимо вычислить производную скорости по времени. Повторяя проделанные выше выкладки, с учетом формулы (П 1.10) получаем

$$x''(t) = -x_0 \omega^2 \sin(\omega t). \quad (\text{П 1.20})$$

Пример 2

Определить, при какой частоте вынуждающей силы скорость и ускорение колеблющейся частицы принимают максимальные значения (резонанс скоростей и резонанс ускорений).

Решение

Скорость и ускорение при вынужденных колебаниях определяются формулами (1.14), (1.16). Максимум амплитудного значения скорости достигается при тех значениях частот ω , для которых производная по частоте

$$\frac{d}{d\omega} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = 0.$$

Вычисляя производную по правилам вычисления производной от сложной функции, находим

$$\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} - \frac{2\omega[4\gamma^2\omega - 2\omega(\omega_0^2 - \omega^2)]}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{3/2}}.$$

После выполнения необходимых упрощений получаем значение частоты вынуждающей силы, при которой возникает резонансное увеличение амплитуды скорости $\omega = \omega_0$. Легко сообразить, что точно такой же результат получается и для резонанса ускорений: максимальная амплитуда ускорения возникает при $\omega = \omega_0$. Строго говоря, необходимо доказать, что полученные значения соответствуют именно максимуму. Предоставляем читателю возможность убедиться в этом самостоятельно.

10. Правило вычисления производных от обратных функций. Пусть имеется функция $y = f(x)$ и обратная ей функция $x = \varphi(y)$. Приращения функций

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x);$$

$$\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y).$$

Так как $\Delta y \neq 0$, $\Delta x \neq 0$, то очевидно, что можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}. \quad (\text{П } 1.21)$$

Поскольку Δx и Δy одновременно стремятся к нулю, то формула (П 1.21) позволяет сформулировать следующее утверждение:

Если $f(x)$ в некоторой точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$, отличную от нуля, то обратная функция $\varphi(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (\text{П } 1.22)$$

Применим правило дифференцирования обратных функций к показательной функции $y = a^x$. Обратной функцией для $\varphi(y)$ будет логарифмическая функция $x = \log_a(y)$. Поскольку $\log_a(y) = \ln(y)/\ln(a)$, то, применяя правило вычисления производной от логарифмической функции, получаем

$$\varphi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{d \log_a(y)}{dy} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln(a)}.$$

Откуда, по правилу дифференцирования обратных функций, получаем

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = \ln(a)y. \quad \text{Или} \quad \frac{da^x}{dx} = a^x \ln(a). \quad (\text{П 1.23})$$

На этом мы закончим краткое рассмотрение правил дифференцирования элементарных функций. Приведем таблицу рассмотренных нами правил дифференцирования.

Таблица производных

- 1) $(const)' = 0$.
- 2) $(const \cdot y)' = const \cdot y'$.
- 3) $(f_1 + f_2 + \dots + f_n)' = f_1' + f_2' + \dots + f_n'$.
- 4) $(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'$.
- 5) $(1/f)' = -1/(f^2) \cdot f'$.
- 6) $(x^n)' = n \cdot x^{(n-1)}$.
- 7) $(\ln(x))' = 1/x$.
- 8) $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$; $(\exp(x))' = \exp(x)$.
- 9) $(\sin(x))' = \cos(x)$.
- 10) $(\cos(x))' = -\sin(x)$.

Упражнения

Вычислить производные следующих функций:

- | | |
|----------------------------------|------------------------------------|
| 1) $y = \operatorname{tg}(x)$. | Ответ: $y' = 1/\cos^2(x)$. |
| 2) $y = \operatorname{ctg}(x)$. | Ответ: $y' = -1/\sin^2(x)$. |
| 3) $y = \cos^2(x)$. | Ответ: $y' = -2 \cos(x) \sin(x)$. |
| 4) $y = \sin^2(x)$. | Ответ: $y' = 2 \sin(x) \cos(x)$. |
| 5) $y = \cos(cx)$. | Ответ: $y' = -c \sin(cx)$. |
| 6) $y = \cos(x^2)$. | Ответ: $y' = -2x \sin(x^2)$. |
| 7) $y = \sqrt{x}$. | Ответ: $y' = 1/2 \cdot x^{-1/2}$. |

Комплексные числа

Комплексные числа являются естественным обобщением действительных чисел и весьма широко используются в различных разделах физики. Существуют два основных способа введения комплексных чисел: алгебраический и геометрический. Рассмотрим кратко оба способа.

Алгебраический способ введения

В области вещественных чисел можно решить не всякое квадратное уравнение. Например, уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет действительных корней. Можно однако «наделить» это уравнение решением. Обозначим его решение $x = \sqrt{-1}$ буквой i . Если теперь это «число» присовокупить к системе вещественных чисел, то мы получим новую систему чисел, так как сумма и произведение таких чисел снова являются числами этого же типа. При этом важно заметить, что среди получаемых чисел будут и числа вида $a + bi + ci^2 + di^3 + gi^4 + \dots$. Однако все четные степени (положительные или отрицательные) числа i дают действительное число -1 . Нечетные положительные степени числа i равны $-i$, а нечетные отрицательные равны i .

Поэтому достаточно рассмотреть лишь числа вида $a + ib$, где a и b — действительные числа. Эти числа называются *комплексными числами*. Они могут быть заданы парой действительных чисел a и b .

Геометрический способ введения чисел

Задание комплексных чисел с помощью пары действительных чисел наводит на мысль изображать их в виде точек на плоскости. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат и сопоставим комплексному числу $a + ib$ точку на плоскости, имеющую абсциссу, равную a , и ординату, равную b . Очевидно, что соответствие комплексных чисел и точек плоскости является взаимно однозначным, а действительные числа соответствуют тому частному случаю, когда точки попадают на ось абсцисс.

Для большей наглядности комплексному числу можно сопоставить вектор, один конец которого совпадает с началом координат, а другой имеет координаты (a, b) , как это изображено на рис. П2.

Для комплексных чисел определены операции сложения, вычитания, умножения и деления. Операции сложения и вычитания определяются исходя из смысла комплексного числа: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$; $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$. Операции сложения и вычитания комплексных чисел в точности соответствуют правилам сложения и вычитания векторов на плоскости.

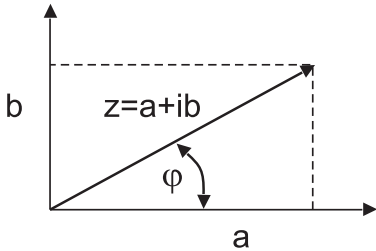


Рис. П2. Геометрическое представление числа $a + ib$

Необходимо показать, что при делении комплексных чисел снова возникает комплексное число. Пусть имеется два комплексных числа $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$. Покажем, что их отношение

$$z_3 = \frac{a + ib}{c + id}$$

также является комплексным числом. Для этих целей умножим числитель и знаменатель дроби на число $z_2^* = c - id$, которое называется числом, комплексно-сопряженным числу z_2 . В результате умножения получаем

$$z_3 = \frac{ac - bd + i(cb - ad)}{c^2 + d^2},$$

что действительно убеждает нас, что и в результате деления комплексных чисел мы вновь получаем комплексное число.

Познакомимся еще с одной формой представления комплексных чисел — тригонометрической, которая находит широкое применение в математике при решении дифференциальных уравнений и в физике при рассмотрении колебаний.

Операция умножения комплексных чисел определяется также просто. Действительно, $(a + ib) \cdot (c + id) = a \cdot c + ia \cdot d + ib \cdot c + i^2 b \cdot d$. Группируя члены, получаем

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c).$$

Этот результат показывает, что желаемое расширение действительных чисел возможно. Рассмотрим теперь деление комплексных чисел.

Тригонометрическая и экспоненциальная формы комплексного числа

Рассмотрим вектор, соответствующий комплексному числу $z = a + ib$ (см. рис. П2). Компоненты этого вектора по осям равны соответственно a и b . Число $\sqrt{a^2 + b^2}$, равное длине вектора, соответствующего комплексному числу, называется модулем комплексного числа $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол φ между вектором z и осью действительных чисел называется аргументом комплексного числа z . Очевидно, что модуль и аргумент комплексного числа определяют его однозначно, поскольку $a = |z| \cos \varphi$, $b = |z| \sin \varphi$. Поэтому всякое комплексное число может быть представлено в *тригонометрической форме*, т. е. записано в виде

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (\text{П } 2.1)$$

где r — другая запись модуля комплексного числа $r \equiv |z|$.

Найдем в качестве примера тригонометрическую форму числа $z = 1 + i$. Очевидно, что модуль числа $r = \sqrt{2}$, $\cos \varphi = 1/\sqrt{2}$. Отсюда $\varphi = 45^\circ$ или $360^\circ - 45^\circ$. Поскольку в нашем случае $\sin \varphi$ положителен, то подходит лишь одно значение: $\varphi = 45^\circ$. Поэтому в тригонометрической форме $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$.

Тригонометрическая форма представления комплексных чисел особенно удобна при выполнении операций умножения и деления комплексных чисел. Пусть имеется два комплексных числа $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$ и $z_2 = r_2 \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)$. Найдем произведение этих чисел:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi). \quad (\text{П } 2.2)$$

Раскрывая скобки и группируя члены с помощью известных формул для суммы косинусов и синусов двух углов, получаем

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)). \quad (\text{П } 2.3)$$

Формула (П 2.3) для произведения комплексных чисел называется формулой Муавра, согласно которой, модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент равен сумме аргументов. Формула Муавра значительно упрощает умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел. Действительно, на основании формулы (П 2.3) не представляет никакого труда доказать и справедливость следующих выражений:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)); \quad (\text{П } 2.4)$$

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)); \quad (\text{П } 2.5)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{П } 2.6)$$

Найдем тригонометрическое представление комплексно-сопряженного числа

$$z^* = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)^* = r(\cos \varphi - i \sin \varphi).$$

Это выражение еще не определяет в действительности тригонометрическую форму комплексного числа z^* , поскольку перед мнимой единицей стоит знак «минус», а не «плюс». Для приведения этого выражения к стандартной форме достаточно заметить, что косинус является четной функцией аргумента, а синус – нечетной, и поэтому

$$z^* = r(\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)).$$

Отсюда следует простое правило: для того чтобы получить вектор комплексно-сопряженного числа на плоскости, нужно вектор z отразить относительно действительной оси (см. рис. П2).

Приведенные выше примеры показывают, что аргумент комплексного числа ведет себя так же, как показатель степени. Это наводит на мысль представлять комплексные числа в следующем виде:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}, \quad (\text{П } 2.7)$$

где буква e – основание натуральных логарифмов. Эту запись принято называть *экспоненциальным представлением комплексного числа*. Пользуясь экспоненциальным представлением комплексного числа, легко получить связь между экспоненциальными и тригонометрическими функциями. Действительно, полагая $r = 1$, можно записать

$$\cos(\varphi) + i \sin(\varphi) = e^{i\varphi}, \quad \cos(\varphi) - i \sin(\varphi) = e^{-i\varphi}. \quad (\text{П } 2.8)$$

Выражая отсюда $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, приходим к так называемым *формулам Эйлера*:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \quad (\text{П } 2.9)$$

Справедливости ради необходимо отметить, что приведенные выше рассуждения нельзя считать доказательством формул (П 2.8). Доказательство их легко получается прямым разложением левой и правой частей соотношений (П 2.8) в ряды Тейлора, которые изучаются в курсе математического анализа.

Решение уравнения для затухающих колебаний

Получим решение уравнения (1.10), используя связь тригонометрических и экспоненциальных функций. Будем искать решение уравнения (1.10) в форме $x(t) = ae^{i\lambda t}$. Подставляя пробное решение в уравнение и производя необходимые операции дифференцирования, получаем характеристическое уравнение

$$-\lambda^2 + 2i\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0, \quad (\text{П 2.10})$$

решение которого относительно λ дает два значения корня

$$\lambda_{1,2} = i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (\text{П 2.11})$$

Поскольку мы получили два возможных значения λ , то это означает, что могут существовать два различных решения с $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$. Общее решение уравнения является суммой всех возможных пробных решений. Поэтому, обозначая, как и раньше, $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$, запишем общее решение уравнения (1.10):

$$x(t) = ae^{-\gamma t + i\omega_1 t} + be^{-\gamma t - i\omega_1 t}. \quad ((\text{П 2.12}))$$

Как следует из формулы (П 2.12), общее решение уравнения зависит от двух произвольных постоянных a и b . Выразим эти две произвольные константы через две другие: x_0 и δ , полагая

$$a = x_0 e^{i\delta} / 2, \quad b = x_0 e^{-i\delta}. \quad (\text{П 2.13})$$

Теперь, используя формулы Эйлера (П 2.9), уже нетрудно записать решение уравнения в привычной форме:

$$x(t) = \frac{1}{2} x_0 e^{-\gamma t} (e^{i\omega_1 t + \delta} + e^{-i\omega_1 t - \delta}) \quad \text{или}$$

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \delta),$$

что полностью совпадает с приведенным ранее решением (1.11).

ОТВЕТЫ И КОММЕНТАРИИ

МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

- 1.1.** $x_0 = 0.5$ м; $T = 2$ с; $\nu = 1/2$ с⁻¹; $\omega_0 = \pi$ рад/с; $\delta = \pi/2$; $W = m\omega_0^2 x_0^2 / 2 \simeq 0.44$ Дж; $x = 0$; $v \simeq -0.94$ м/с; $a = 0$ (Парфентьева, т. 2, с. 127).
- 1.2.** $x(t) = 0.2 \cos(\pi/2 \cdot t + \pi/3)$; $E_k = 4.910 \cdot 10^{-4}$ Дж; $E_{\text{п}} = 0$; $F = 0$ (Парфентьева, т. 2, с. 127).
- 1.3.** $v_{\text{макс}} = x_0 \sqrt{g/L}$ (Воробьев, № 3.1.6).
- 1.4.** $v_{\text{ср}} = 2v_{\text{макс}}/\pi \simeq 6.4$ м/с (Коган, № 240).
- 1.5.** $t_2 = 1$ с (Коган, № 239).
- 1.6.** $x(t) = 5 \sin(\omega t + \delta)$; $\text{tg } \delta = 4/3$. Таким образом, $A = 5$, колебания гармонические (Коган, № 241).
- 1.7.** $A = v \sqrt{m/K} = 4$ см (Коган, № 233).
- 1.8.** $\mu \text{tg} > mA\omega_0^2$. Поэтому груз скользить не будет (Коган, № 230).
- 1.9.** $T = 2\pi \sqrt{\Delta L/g}$ (Воробьев, № 3.2.2).
- 1.10.** Для случаев а, с: $T = 2\pi \sqrt{m/(K_1 + K_2)}$; для случая в: $T = 2\pi \sqrt{m/(1/K_1 + 1/K_2)}$ (Воробьев, № 3.2.4).
- 1.11.** Новая амплитуда $A_1 = A \sqrt{m/(m + m_1)}$ (Баканина, № 1.129).
- 1.12.** $T = 2\pi \sqrt{L \cos \alpha / g}$. При малых углах α $T = 2\pi \sqrt{L/g}$ (Гольдфарб, № 9.4).
- 1.13.** $\omega_0 = \sqrt{\rho_{\text{ж}} g / \rho h}$ (Парфентьева, т. 2, с. 130).
- 1.14.** $\omega_0 = \sqrt{2\mu g / L}$ (Воробьев, № 3.2.14).
- 1.15.** $T = 2\pi \sqrt{m_1 m_2 (K(m_1 + m_2))^{-1}}$ (Гельфгат, № 7.12).
- 1.16.** $T = 2\pi \sqrt{mL/(KL + mg)}$; $T' = \pi(\sqrt{mL/(KL + mg)} + \sqrt{l/g})$. (Гельфгат, № 7.15).

1.17. $A = \sqrt{(mg/K)^2 + 2mgH/K}$. *Указание.* Для решения нужно записать уравнение колебаний груза массой m относительно положения равновесия в поле сил тяжести и найти амплитуду и фазу колебаний из начальных условий (Гельфгат, № 7.25).

1.18. $A > \mu g T^2 / (4\pi^2) \simeq 6.2$ мм (Гельфгат, № 7.23).

1.19. Период колебаний маятника на высоте h $T = \sqrt{L/g}(1+h/R)$, L — длина маятника. Отсюда $\Delta t = th/R \simeq 67.5$ с. (Гольдфарб, № 9.6)

1.20. $a = g[1 - (T/T_1)^2] \simeq 0.17g$. Ускорение направлено вниз. Направление скорости лифта значения не имеет (Гольдфарб, № 9.9).

1.21. $T = 2\pi\sqrt{L/\sqrt{g^2 + a^2}}$ (Гольдфарб, № 9.10).

1.22. а) $T = 2\pi\sqrt{g/L}$; б) $T = 2\pi\sqrt{mL/(mg + 2KL)}$ (Гельфгат, № 7.17).

1.23. $T = 2\pi\sqrt{(m_1L_1^2 + m_2L_2^2)/(gm_1L_1 + gm_2L_2)}$. *Указание.* Воспользоваться постоянством полной механической энергии и получить уравнение колебаний для угла отклонения стержня от вертикали (Гельфгат, № 7.21).

1.24. $T = 2\pi\sqrt{Lm_2/[(m_1 + m_2)g]}$ (Воробьев, № 3.2.28).

1.25. $\omega_0 = \sqrt{K/m - \Omega^2}$ (Воробьев, № 3.2.18).

1.26. а) Поскольку возвращающая сила возрастет, то и период колебаний маятника станет меньше; б) В этом случае период колебаний маятника не изменится, поскольку сила взаимодействия зарядов направлена вдоль нити и возвращающая сила остается прежней; в) Возвращающая сила уменьшится в одном из полупериодов и несколько увеличится в другом полупериоде. Но сила кулоновского взаимодействия обратно пропорциональна расстоянию между зарядами. Поэтому уменьшение возвращающей силы будет более значительным, нежели ее увеличение, и в результате период колебаний увеличится. Кроме того, изменится положение равновесия шарика. (Шаскольская, № 7.12)

1.27. $\omega_0^2 = K/m - q^2/(2\pi\epsilon_0 d^3 m)$

1.28. $\omega/\omega_0 = \sqrt{1 - 2(l - mg/K)/H}$. *Указание.* Нужно воспользоваться методом изображений и записать выражение для приращения силы ΔF при небольшом смещении массы Δx .

1.29. $T = 2\pi\sqrt{lm/(2qE)} \simeq 2 \cdot 10^{-11}$ с (Квант, 1974, вып. 6, № Ф236).

- 1.30.** $T = 2\pi\sqrt{2R/g}$ (Квант, 1974, вып. 9, № Ф248).
- 1.31.** $T = 2\pi\sqrt{mb(L-b)/(KL^2)}$ (Кабардин, с. 160).
- 1.32.** $A = (\sqrt{2gh\omega^2 - g^2})/\omega^2 \simeq 0,077\text{ мм}$ (Квант, 1975, вып. 10, № Ф321).
- 1.33.** $T = 2\pi\sqrt{mL^2/(2RT)}$ (Кабардин, с. 161).
- 1.34.** $T = 2\pi\sqrt{(m_1L_1^2 + m_2L_2^2)/(g|m_1L_1 - m_2L_2|)}$. При $m_1L_1 = m_2L_2$ любое положение стержня является положением безразличного равновесия. Поэтому колебания не возникают. (Гельфгат, № 7.22)
- 1.35.** $T = 2\pi\sqrt{mL/(4F)}$ (Буховцев, № 664).
- 1.36.** $\nu = \nu_1\nu_2/\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ (Квант, 1975, вып. 11, № Ф325).
- 1.37.** $\omega_0 = \sqrt{2K/(m + cL^2B^2)}$, $CULB/(m\omega_0)$.
- 1.38.** $T = 2\pi\sqrt{2L/(3g)}$.
- 1.39.** $L_{\text{цм}} = 2R/(2 + \pi)$, $T = 2\pi\sqrt{(2 + 3\pi)/(6g)}$. Указание. Записать выражение для полной энергии системы и, пользуясь постоянством этой величины, получить уравнение для колебаний (Квант, 1991, вып. 6, № Ф1277).
- 1.40.** $t_1 = T/4 - \tau/2$ (Воробьев, № 3.3.17).
- 1.41.** $T = 2\pi\sqrt{L/(2g\sin\alpha)}$, $\alpha = L/(2R)$. (Квант, 1995, вып. 3, № Ф1482).
- 1.42.** Нас интересуют значения K , при которых $T_{\text{max}} = 3F_0$ и $T_{\text{max}} = F_0/3$. Отсюда $K_1 = 3/2 m\omega^2$, $K_2 = 3/4 m\omega^2$, $K_3 = 1/4 m\omega^2$ (Воробьев, № 3.3.17).
- 1.43.** $v_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v(1 + \frac{m_2}{m_1}\cos\omega_0t)$, $v_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}v(1 - \cos\omega_0t)$. (Воробьев, № 3.3.21).
- 1.44.** $A = \sqrt{A_0^2 + F^2/K^2 - 2A_0F/K \cdot \cos\omega_0t_0}$. $K = m\omega_0^2$. При $t_0 = \pi(2n + 1)/\omega - 0$, где n — целое число, амплитуда наибольшая; при $t_0 = 2\pi n/\omega_0$ — наименьшая (Воробьев, № 3.3.24).
- 1.45.** $F = mx'' = -m\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$, наибольшее по модулю значение силы $m\omega^2 A$ достигается в моменты времени $t = (n\pi - \varphi)/\omega$, где n — целое число (Воробьев, № 3.3.29).
- 1.46.** $T = 2\pi\sqrt{s/g}$, $s = ML/(M+m)$. При отсутствии трения колебания не являются вынужденными, поскольку сила и перемещение всегда ортогональны и колебательная система энергию не получает. (Бутиков, с. 359)

1.47. Период колебаний T массы m совпадает с периодом колебаний точки подвеса. Поэтому $T = 2\pi\sqrt{s/g} = 2\pi/\omega$, $s = ML/(M + m)$. Отсюда $L = (M + m)d/(\omega M)$ (Бутиков, с. 359).

1.48. *Указание.* Необходимо учесть, что при больших углах отклонения возвращающая сила пропорциональна $\sin \alpha$, а не углу α . (Буховцев, № 642)

1.49. Колебания прекратятся, если упругая сила, действующая на чашку в крайнем нижнем положении, будет равна силе тяжести: $(m_1 + m_2)g = K(\Delta x_0 + A)$, где Δx_0 определяется условием $m_1 g = K\Delta x_0$, K – жесткость пружины. Окончательно $T = 2\pi\sqrt{m_1 A/m_2 g}$. (Квант, 1987, вып. 1, с. 53)

1.50. *Указание.* Необходимо учесть, что при погружении в шахту сила тяжести в действительности станет меньше, поскольку уменьшится масса Земли, которая формирует силу притяжения.

При подъеме часы за сутки отстанут на величину $\Delta t_1 = 24 \cdot 60 \cdot 60(1 - T_0/T)$, где T_0 – период колебаний часов на земле, T – период колебаний часов на высоте h . Подставляя численные значения получаем $\Delta t_1 \simeq 2,7c$. Аналогично при опускании часов в шахту они отстанут на величину $\Delta t_2 \simeq 1,35c$ (Буховцев, № 649).

1.51. *Указание.* Использовать закон сохранения энергии для вывода уравнения колебаний. $T = 2\pi\sqrt{(M + m)/K}$ (Буховцев, № 660).

1.52. $T = 2\pi\sqrt{m/(2\rho g S)} \simeq 1,54c$ (Буховцев, № 662).

1.53. В такой шахте тело будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{g/R}$, поэтому искомое время $\tau = T/4 = \pi/2\sqrt{R/g} \simeq 21\text{мин}$ (Буховцев, № 663).

1.54. Если масса блока сосредоточена в его центре, $\omega_0 = \sqrt{K/(M + 4m)}$. В случае, когда блок представляет тонкостенный цилиндр и его масса равномерно распределена по окружности, необходимо учесть еще и кинетическую энергию вращения блока. В результате получаем $\omega_0 = \sqrt{K/(5M + 4m)}$ (Квант, 1985, вып. 10, с. 49).

1.55. $\Omega = \sqrt{3/2}\omega$ (Квант, 1993, вып. 10, с. 83).

1.56. Обозначим смещения атомов кислорода u_1 и u_2 , а смещение атома углерода u_3 . Запишем уравнения движения атомов кислорода и углерода

$$\begin{aligned} m_o u_1'' &= -K(u_1 - u_3); \\ m_c u_3'' &= -K(2u_3 - u_1 - u_2); \end{aligned}$$

$$m_o u_2'' = -K(u_2 - u_3).$$

Поскольку при колебаниях молекулы ее центр масс остается в покое, то можно записать еще одно уравнение, связывающее между собой смещения атомов u_1, u_2, u_3 : $m_o u_1 + m_o u_2 + m_c u_3 = 0$. Выразим из этого уравнения u_2 и подставим полученный результат в уравнение движения атома углерода. В результате получаем систему двух независимых уравнений движения, описывающих колебания этой молекулы:

$$\begin{aligned} m_o u_1'' &= -K(u_1 - u_3); \\ m_c u_3'' &= -K(2 + m_c/m_o)u_3. \end{aligned}$$

Случаю *a* соответствуют колебания, при которых $u_1 = u_2, u_3 = 0$. Как следует из первого уравнения, частота таких колебаний $\omega_1 = \sqrt{K/m_o}$. Случаю *b* соответствуют колебания, частота которых определяется вторым уравнением: $\omega_2 = \sqrt{K/m_c \cdot (2 + m_c/m_o)} = \sqrt{11/4 \cdot K/m_c}$. Таким образом, отношение частот $\omega_1/\omega_2 = \sqrt{3/11}$. (Квант, 1993, вып. 10, с. 83)

1.57. При колебаниях шарики будут смещаться вдоль линий, соединяющих центр треугольника с каждой из вершин. Результирующая возвращающая сила, которая будет действовать на каждый шарик, $F_{\text{рез}} = 3K\Delta x$, а частота колебания $\omega_0 = \sqrt{3K/m}$. (Квант, 1975, вып. 2, № Ф282)

1.59. Если перейти к нормальным координатам $U_1 = x_1 + x_2, U_2 = x_1 - x_2$, то можно заметить, что нормальные координаты совершают простые гармонические колебания с частотами ω_0 и ω , которые соответствуют синфазным и антифазным колебаниям масс и легко могут быть найдены (см. задачу 1.22), что позволяет сразу записать ответ: $K = m(\omega^2 - \omega_0^2)/2$ (Воробьев, № 3.4.18).

1.60. $\bar{P} = 1/2F_0A \sin \varphi$ (Воробьев, № 3.4.14).

1.61. В случае синфазных колебаний длина средней пружины неизменна, поэтому $\omega_2 = \sqrt{K/m}$. Если шарики движутся в противофазе, то неподвижной остается точка симметрии системы и $\omega_1 = \sqrt{3K/m}$ ((Воробьев, 3.4.15).

1.62. Смещения шариков для первого способа возбуждения $x_1 = a \sin \omega_1 t, x_2 = -a \sin \omega_1 t$; для второго способа возбуждения $x'_1 = b \sin \omega_2 t, x'_2 = -a \sin \omega_2 t$. Результирующее смещение будет

$$x_1 = a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t,$$

$$x_2 = -a \sin \omega_1 t + b \sin \omega_2 t.$$

Дальнейшее решение задачи не представляет труда. Нужно записать скорости шариков и из полученной системы, с учетом указанных в задаче начальных условий, определить коэффициенты a и b . В результате получаем

$$v_1 = v/2(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t), \quad v_2 = v/2(\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t);$$

$$x_{1\max} = x_{2\max} = v/2(1/\omega_1 + 1/\omega_2); \quad \Delta x = v/\omega_1.$$

(Воробьев, № 3.4.15)

1.63. $A = 5$ см, $\varphi = 36^{\circ}52' \simeq 0.2\pi$, $x = x_1 + x_2 = 5 \sin(\pi t + 0.2\pi)$ см. (Волькенштейн, № 12.33)

1.64. $x_1 = 0.03 \sin 0.4\pi t$ м, $x_2 = 0.02 \sin \pi t$ м, $x_3 = 0.01 \sin 2\pi t$ м. (Волькенштейн, № 12.34)

1.65. а) $A = 7$ см, б) $A = 5$ см (Волькенштейн, № 12.38).

1.66. $x^2 + y^2 = 4$ – уравнение окружности радиусом 2 см (Волькенштейн, № 12.39).

1.67. При первом толчке энергия осциллятора станет равной $p_0^2/(2m) = p^2/(2m) + Kx^2/2$. До следующего толчка энергия маятника останется постоянной. Поэтому фазовая траектория в переменных p, z ($z = \sqrt{Kmx}$) будет окружностью радиуса p_0 . При последующих толчках радиус окружности скачком будет увеличиваться, становясь равным $2p_0, 3p_0, \dots, np_0$ (Воробьев, № 3.5.2).

1.68. Ответ может быть лишь качественным. Исходя из формулы (1.11), можно заключить, что затухание будет аperiодическим при $\gamma \simeq \omega_0$ (Воробьев, № 3.5.14).

1.69. Уравнение затухающих колебаний имеет вид $x(t) = Ae^{-\gamma t} \times \sin(\omega t + \varphi)$. В нашем случае $\omega = 2\pi/T = \pi/2$, $\varphi = 0$, $\gamma = 0,4$. Эти соотношения позволяют найти и начальную амплитуду колебания $A = 6,7$ см. Таким образом, окончательно $x(t) = 6.7e^{0,4t} \sin \pi/2$ см. (Волькенштейн, № 12.43)

1.70. Для решения задачи достаточно обратиться к формуле (1.22). $F_{\text{тр}} = -\beta v$. (Воробьев, № 3.5.10).

1.71. Из условия задачи следует, что $e^{\gamma T} = 1,01$. Поскольку $T = 1$ с, то $\gamma = \ln 1,01 = \lg_{10} 1,01 / \lg_{10} 2,71 = 0,01$ (Воробьев, № 3.5.20).

1.72. Для решения задачи нужно исходить из выражения (1.23). $Q = \omega_0/(2\gamma)$. Отношение амплитуд колебаний двух максимумов

$x(t)/x(t+nT) = e^{\gamma nT}$ по условию задачи равно e . Отсюда $1/\gamma = nT = n2\pi/\omega_0$. Используя определение добротности, получаем $n = \omega_0/(2\pi\gamma) = Q/\pi$ (Воробьев, № 3.5.21).

1.73. Нужно воспользоваться результатами предыдущей задачи. Примерно в 50 раз при $Q = 10^8$ и только в 1,5 раза при $Q = 10^9$ (Воробьев, № 3.5.21).

1.74. Поскольку $M \gg m$, то импульс, переданный кубу при каждом столкновении с шариком, $\Delta p = 2m(v_0 - v)$, а число ударов N за время Δt подсчитывается по формуле $N = (v_0 - v)a^2n\Delta t$. Сила, действующая на кубик со стороны шариков, равна

$$N\Delta p/\Delta t = 2m(v_0 - v)^2a^2n \simeq 2ma^2nv_0^2 - 4ma^2nv_0v.$$

Отбрасывая постоянное слагаемое, получаем уравнение движения осциллятора с затуханием

$$Mx'' + 4x'v_0mna^2 + Kx = 0.$$

Это выражение позволяет уже просто ответить на все вопросы задачи: $T \simeq 2\pi\sqrt{M/K} \simeq 0,31$ с. Амплитуда колебаний уменьшается в e раз за время $t = \gamma^{-1} = M/(2v_0mna^2) = 2,5$ с. (Квант, 1991, вып. 7, № Ф1282)

1.75. В общем случае решение неоднородного уравнения, например уравнения, описывающего вынужденные колебания (1.12), складывается из частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. Подставляя пробное решение $x(t) = A \cos \omega t$, получаем $A = F_0/(m(\omega_0^2 - \omega^2))$. Константы B и φ можно определить из начальных условий $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ (Воробьев, № 3.5.27).

1.76. Для решения задачи следует воспользоваться формулой (1.16) и учесть, что в резонансе вынуждающая сила опережает смещение на $\pi/2$. Учитывая сказанное выше вынуждающая сила должна иметь вид $F(t) = 2Am\gamma\omega\omega_0 \cos(\omega_0 - \varphi + \pi/2) = -2Am\gamma\omega\omega_0 \sin(\omega_0 - \varphi)$ (Воробьев, № 3.5.36).

1.77. Частота является резонансной, поэтому из формулы (1.16) сразу получаем ответ: $\gamma = F/(2mx_0\omega)$ (Воробьев, № 3.5.37)

1.78. Скорость при вынужденных колебаниях определяются формулами (1.14), (1.16), поэтому

$$v_0 = F_0\omega/(m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}).$$

(Гомонова, № 6.49)

1.79. $a_0 = F_0\omega^2 / (m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2})$ (Гомонова, № 6.50).

1.80. $A = -F_0 / (2\gamma m\omega_0)$; в $\omega_0 / (2\gamma)$ раз (Воробьев, № 3.5.366).

1.81. Около $10^5 c$ (Воробьев, № 3.5.39).

1.82. Циклоида; средняя скорость $v_{cp} = F_0 / (m\omega)$ направлена по оси x . Если при $t = 0$, $v_x = -F_0 / (m\omega)$, а $v_y = 0$, то частица будет двигаться по окружности радиусом $R = F_0 / (m\omega^2)$ (Воробьев, № 3.5.42).

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

2.1. Пренебрегая излучением электромагнитной энергии, получаем $Q = W = q^2 / (2C) = 510^5$ Дж (Бендриков, № 945).

2.2. $T = 2\pi\sqrt{LC} = 1,2610^{-6}$ с. При заполнении емкости диэлектриком с $\varepsilon = 4$ период увеличится вдвое (Бендриков, № 947).

2.3. $L = 0,1$ Гн (Коган, № 606).

2.4. $I_0 = U_0\sqrt{C/L}$ (Коган, № 610).

2.5. $I_0 = 10$ А $I(t_1) = 7$ А; $I(t_2) = 8,7$ В (Гельфгат, №17.3).

2.6. Через резистор R ток течет только в процессе установления равновесия. В этот момент на катушке и на сопротивлении R имеется напряжение $\mathcal{E}_1 = -L\Delta I_1 / \Delta t$, где I_1 – ток, текущий через индуктивность. Ток через сопротивление $I_2 = \mathcal{E}_1 / R = \Delta q / \Delta t$. Отсюда получаем $R\Delta q = -L\Delta I_1$. Подставляя сюда значение $\Delta I_1 = \mathcal{E} / r$, получаем $q = -L\mathcal{E} / (Rr)$ (Баканина, № 3.185).

2.7. После замыкания ключа K_2 ЭДС индукции на катушках должны быть равны:

$$L_1\Delta I_1 / \Delta t = L_2\Delta I_2 / \Delta t, \text{ или } \Delta I_1 = (L_2 / L_1)\Delta I_2.$$

Начальные значения токов $I_1(0) = I_0$; $I_2(0) = 0$ Следовательно, для любого момента времени выполняется условие $I_1 - I_0 = (L_2 / L_1)I_2$. В установившемся режиме должно выполняться равенство $I_1 + I_2 = \mathcal{E} / r$. Решая полученную систему, находим установившиеся значения токов

$$I_1 = (L_2\mathcal{E} / r + L_1I_0) / (L_1 + L_2), \quad I_2 = (L_1\mathcal{E} / r - L_1I_0) / (L_1 + L_2).$$

(Баканина, № 3.186)

2.8. Сразу после замыкания ключа до возникновения тока происходит перераспределение заряда, и система теряет половину энергии, запасенной конденсатором C_1 . В дальнейшем потерь энергии не происходит, и поэтому $I_0 = U_0 \sqrt{C/(2L)}$ (Гельфгат, № 17.17).

2.9. Задача аналогична задаче **2.7**: $I = \varepsilon/(3r)$ (Баканина, № 3.187).

2.10. $I(t) = \varepsilon t/L$; $A = \varepsilon^2 \tau^2/(2L)$; Эта работа превращается в энергию магнитного поля тока. Легко показать, что $A(t) = LI^2(t)/2$. (Воробьев, № 11.4.1)

2.11. а) $U(t) = \alpha(Rt + L)$; б) $U(t) = I_0(R \sin \omega t + L\omega \cos \omega t)$ (Воробьев, №11.4.2).

2.12. Поскольку начальные токи, протекающие через катушки, равны нулю, то из равенства разности потенциалов, приложенных к катушкам, получаем, что $L_1 I_1 = L_2 I_2$ для любого момента времени. Отсюда следует и равенство для зарядов $L_1 q_1 = L_2 q_2$. К моменту окончания перезарядки полный заряд, протекший через катушки, равен удвоенному исходному заряду конденсатора: $q_1 + q_2 = 2CU$. Решая полученную систему уравнений, получаем:

$$q_1 = 2CUL_2/(L_1 + L_2); \quad q_2 = 2CUL_1/(L_1 + L_2).$$

(Баканина, № 3.188)

2.13. Как следует из решения предыдущей задачи, между токами имеется соотношение $L_1 I_1 = L_2 I_2$ и токи в катушках достигают максимального значения одновременно. Отсюда, используя закон сохранения энергии, нетрудно получить искомым результат $q = I_1 \sqrt{CL_1(L_1 + L_2)}/(L_2)$ (Баканина, № 3.189).

2.14. Эта задача аналогична задаче **2.6**. Поэтому сразу можно записать ответ: $q = -LU/(Rr)$. Подстановка числовых данных дает $q = -0,04$ Кл.

2.15. Запишем полную энергию системы в произвольный момент времени

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} + \frac{mv^2}{2} - \frac{qUx}{d},$$

v, x – скорость и координата частицы соответственно. Полагая, что $U = U_0 \cos \omega t$, найдем закон изменения других величин: $x =$

$-qU_0/(md\omega^2) \cos \omega t$, $v = qU_0/(md\omega) \sin \omega t$, $I = -CU_0\omega \sin \omega t$. Подставляя эти величины в закон сохранения энергии, потребуем равенства коэффициентов при $\cos^2 \omega t$ и $\sin^2 \omega t$ (только в этом случае энергия постоянна). Из этого условия получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2/2 + \sqrt{(\omega_0^2/2)^2 + (q\omega_0/d)^2/(mC)}.$$

(Квант, 1989, вып. 1, № Ф1130)

2.16. а) $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с; б) $L = 10, 15$ мГн; в) $I = -157 \sin 10^4 \pi t$ мА. $W_M/W_\Sigma = LC\omega_0^2 \operatorname{tg}^2 \omega_0 T/8 = 1$ (Волькенштейн, № 14,7).

2.17. В момент замыкания ключа K_2 $I_1(0) \equiv I_1^0 = U_0 \sqrt{C/L}$ (этот результат следует из закона сохранения энергии). При дальнейшем изменении токов должно выполняться условие $L\Delta I_1(t) = L\Delta I_2(t)$. Поскольку $I_2(0) = 0$, получаем, что $I_1(t) - I_1^0 = I_2(t)$. Ток I_2 достигнет максимального значения $I_2^0 = -I_1^0$, когда ток $I_1(t) = 0$. В этот момент конденсатор разряжен. Следовательно, максимальный потенциал на конденсаторе будет тогда, когда токи, текущие через катушки, будут равны половине их амплитудного значения (в этот момент времени скорость изменения токов будет максимальной). Записывая закон сохранения энергии

$$LI^2 + CU_{\max}^2/2 = CU_0^2/2$$

при $I = I_1^0/2$, получаем простой ответ: $U_{\max} = U_0/\sqrt{2}$. (Баканина, № 3.190)

2.18.

$$I_{\max} = U_0 \sqrt{C/L_1}; \quad I_{\min} = \frac{L_1 - L_2}{L_1 + L_2} U_0 \sqrt{C/L_1}.$$

(Баканина, № 3.191)

2.19. $T = 8 \cdot 10^{-3}$ с; $\gamma = R/(2L) \simeq 87$ с⁻¹; $Q = 1/R \cdot \sqrt{L/C} \simeq 4, 53$. (Волькенштейн, № 14,10)

2.20. $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с; $U_1(t) = U_0 \exp(-\kappa t/T)$. Отсюда

$$\kappa = \frac{T \ln(U_0/U_1)}{t} = \frac{\ln 3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{10^{-3}} = 0, 22.$$

$R = 2\gamma L = 2\kappa L/T = 11, 1$ Ом (Волькенштейн, № 14,11).

2.21. Если ключ замкнут, через катушку течет ток $I_0 = \mathcal{E}/r$. При размыкании ключа в контуре возникают электрические колебания

и амплитудное значение напряжения на конденсаторе может быть найдено из закона сохранения энергии $L(\varepsilon)^2/(2r^2) = C(n\varepsilon)^2/2$. Запишем выражение для периода колебаний $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Из полученной системы уравнений находим $C = T/(2\pi rn)$, $L = nrT/(2\pi)$. (Баканина, № 3.192)

2.22. $Q = LI^2/2 + C\varepsilon^2/2 = \varepsilon^2(CR^2 + L/(2R^2))$.
(Баканина, № 3.193)

2.23. $P = 10^{-3}$ Вт (Гольдфарб, №24.12).

2.24. Константа затухания $\gamma = R/(2L) \simeq 200$ с⁻¹. Следовательно, колебания тока будут затухать за время $\tau \simeq 10^{-2}$ с. В первом случае период колебаний $T_1 = 6,28$ с и $T_1 \gg \tau$. Поэтому переходные процессы можно не учитывать. Запишем закон Ома

$$I \frac{dL}{dt} + IR = U.$$

Подставляя в эту формулу значение для L , получаем

$$I = \frac{U}{R(1 + 0,1L_0\omega \cos \omega t/R)} \simeq \frac{U}{R} \left(1 - \frac{0,1L_0\omega}{R} \cos \omega t \right).$$

Для получения последнего выражения нужно числитель и знаменатель умножить на

$$\left(1 - \frac{0,1L_0\omega}{R} \cos \omega t \right)$$

и оставить линейные по малому параметру $0,1L_0\omega/R$ члены. Таким образом, в первом случае амплитуда переменной составляющей тока равна $I_{01} = 0,1L_0U/R^2 = 10^{-3}$ А.

Во втором случае период изменения индуктивности $T_2 = 6,28 \cdot 10^{-4}$ с $\ll \tau$, и изменения индуктивности происходят так быстро, что ток не успевает следовать за этими изменениями. Поэтому можно считать, что магнитный поток остается постоянным: $\Phi = LI = L_0U/R$. Из этого выражения получаем значение тока

$$I = \frac{L_0U}{LR} = \frac{L_0U}{L_0(1 + 0,1 \sin 10^4 \omega t)R}.$$

Выделяя линейный по малому параметру член, получаем

$$I = \frac{U}{R}(1 - 0,1 \sin 10^4 \omega t).$$

Таким образом, амплитуда переменной составляющей в этом случае $I_{02} = 0,1 A$ и не зависит от частоты (Квант, 1992, вып. 5, № Ф1331).

2.25. После замыкания ключа колебания тока в цепи прекратятся, но, поскольку катушки идеальные (хорошей моделью для этой задачи могут служить катушки из сверхпроводника), через них будет течь некоторый ток I_x . Выделившееся в резисторе тепло Q найдем из закона сохранения энергии

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2} = \frac{2L + L}{2} I_x^2 + Q.$$

Остаточный ток найдем из условия $L\Delta I_1 + 2L\Delta I_2 = 0$, которое следует из правила Кирхгофа. В начальный момент времени ток через катушку L равен I , а через катушку $2L$ равен нулю. Поэтому

$$\frac{I - I_x}{I_x} = \frac{2L}{L} = 2.$$

Полученная система уравнений позволяет найти искомый результат:

$$Q = \frac{1}{2} \left(CU^2 + \frac{2L}{3} I^2 \right).$$

(Квант, 1991, вып. 10, № Ф1296)

2.26. Если не учитывать потери на излучение, то энергия системы сохраняется. Колебаний в системе не будет из-за наличия диода. Поэтому

$$\frac{C_1 U_0^2}{2} = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}.$$

Кроме того, должен сохраняться заряд: $C_1 U_0 = C_1 U_1 + C_2 U_2$. Решая эту систему уравнений, находим результат $U_2 = 2C_1 U_0 / (C_1 + C_2) = 200$ В. Результат не зависит от индуктивности. Она нужна лишь для того, чтобы процесс перераспределения заряда происходил медленно и не было потерь на излучение.

(Баканина, № 3.194)

2.27. При замыкании ключа ток через катушку индуктивности будет нарастать линейно по закону $I = \varepsilon / Lt$, а конденсатор останется незаряженным. После размыкания ключа ток будет поддерживаться за счет явления электромагнитной индукции, и на верхней пластине возникнет отрицательный заряд, а на нижней – положительный. Конденсатор зарядится до максимальной разности потенциалов $U_0 = \varepsilon / L\tau / \sqrt{LC}$. После этого диод будет заперт и разность

потенциалов на обкладках конденсатора изменяться больше не будет.

(Баканина, № 3.196)

2.28. При замыкании ключа в контуре начнутся колебания, причем амплитудное напряжение на конденсаторе будет равно $2\mathcal{E}$. Если $\varepsilon_0 > 2\mathcal{E}$, то диод заперт и через батарею \mathcal{E}_0 заряд не протекает. При выполнении обратного неравенства диод откроется, как только напряжение на конденсаторе U станет равным ε_0 . Начиная с этого момента, пока через батарею будет течь ток, напряжение на конденсаторе останется неизменным. Можно записать два выражения, связывающих заряд q , прошедший через батарею с ЭДС \mathcal{E} , и заряд q_0 , прошедший через батарею с ЭДС ε_0 . С одной стороны, из закона сохранения заряда следует, что $q = q_0 + C\varepsilon_0$, а с другой, работа первого источника тока идет на создание электрического поля в конденсаторе и работу против ЭДС ε_0 : $q\mathcal{E} = C\varepsilon_0^2/2 + q_0\varepsilon_0$. Решение этих двух уравнений и дает искомый результат

$$q_0 = C\varepsilon_0 \frac{2\mathcal{E} - \varepsilon_0}{2(\varepsilon_0 - \mathcal{E})}.$$

При дальнейших колебаниях диод открываться больше не будет.
(Баканина, № 3.197)

2.29. $L = 0,051$ Гн (Бендриков, № 924).

2.30. При $\nu_1 = 50$ Гц: $X_L = 157$ Ом, $X_C = 3,18$ кОм, $Z = 3,33$ кОм. При частоте $\nu_2 = 10$ кГц: $X_L = 31,4$ кОм, $X_C = 15,9$ Ом, $Z = 31,4$ кОм (Бендриков, № 927)

2.31. $\nu = 61$ Гц (Бендриков, № 930).

2.32. $U_R = 156$ В (Волькенштейн, № 14.28).

2.33. $\mathcal{E} = 5,04$ В (Гольдфарб, № 24.6).

2.34. $n = 8,0$ с⁻¹ (Гельфгат, № 17.18).

2.35. $U_R = I_0R$; $U_C = I_0/(\omega C)$; $U_L = I_0\omega L$;

$$U_0 = I_0\sqrt{R^2 + (\omega L + 1/(\omega C))^2}.$$

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}.$$

(Гельфгат, № 17.19)

2.36. Идеальный конденсатор и катушка в среднем не потребляют энергии. Мощность потерь на активном сопротивлении $P = I_0^2/2 \cdot R$.
(Гельфгат, № 17.22)

2.37. $P = I_3 U_3 \cos \varphi$ (Гельфгат , № 17.23).

2.38. $U_3 = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 15 \text{ В}$ (Гельфгат , № 17.24).

2.39. а) $I = U_0 \sqrt{C/L} \sin \omega_0 t$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

$$\text{б) } I = \frac{U_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} (\omega_0 \sin \omega_0 t - \omega \sin \omega t), I_{\max} = \frac{U_0}{L|\omega_0 - \omega|} \simeq 4,8 \text{ кА.}$$

(Воробьев , № 11.4.11)

2.40. 0,13 Гн, 30 ВТ, 11 Вт (Гельфгат , № 17.26).

2.41. Обозначим ReZ и ImZ – действительную и мнимую части комплексного импеданса. Тогда из векторной диаграммы следует, что $\text{tg } 60^\circ = ImZ/ReZ = \sqrt{3}$, $Z = ReZ(1 + i\sqrt{3})$. Используя закон Ома для участка с реактивной нагрузкой $U^2 = I^2|Z|^2 = I^2(ReZ)^2 \cdot (1 + 3)$, сразу получаем: $ReZ = 5 \text{ Ом}$, $ImZ = 5\sqrt{3} \text{ Ом}$. ЭДС находим из закона Ома, учитывая, что в цепи имеется еще и сопротивление R : $\mathcal{E} = I\sqrt{(ReZ + R)^2 + ImZ^2} = 207,8 \text{ В}$.

(Воробьев , № 11.4.13)

2.42. Найдем импеданс Z_1 параллельно соединенных емкости и индуктивности:

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C.$$

Отсюда $Z_1 = -i\omega L/(\omega^2 CL - 1)$. Полный импеданс цепи

$$Z = i\omega L \frac{\omega^2 LC - 2}{\omega^2 CL - 1}.$$

Видно, что импеданс рассматриваемой цепи напоминает импеданс обычной катушки и ток будет сдвинут по фазе по сравнению с напряжением на $\pi/2$. Поэтому

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0(\omega^2 CL - 1)}{\omega L(\omega^2 CL - 2)} \cos \omega t.$$

(Воробьев , № 11.4.14)

2.43. $L = 2,8 \text{ Гн}$ (Воробьев , № 11.4.15).

2.44. Решение задачи приведено в примере 2.9. $U_{ED} = U_0 \cos \omega t$. (Воробьев , № 11.4.16)

2.45. Накал увеличится. Накал уменьшится, но будет больше первоначального. Резонанс в цепи наступает при емкости $C_1 =$

$1/(4\pi^2\nu^2L) = 20 \text{ мкФ} = 2\text{С}$. Вначале общее сопротивление катушки и конденсатора 160 Ом, при подключении еще одного конденсатора оно падает до нуля, а при подключении третьего становится равным 51 Ом (Гельфгат, № 17.28).

2.46. Сначала возрастает, а затем убывает (Гельфгат, № 17.27).

2.47. Решение задачи разобрано в примере 2.3 (см. рисунок на с. 93). Вольтметр покажет напряжение $U_0|Z_2|/(|Z| + |Z_2|)$. Здесь Z – импеданс бесконечной цепочки, $Z - 2$ – импеданс емкости C . Полученный результат не будет зависеть от точки подключения тогда, когда выполняется условие $\omega < 4/(LC)$. В этом случае по цепочке распространяется волна, и все звенья цепи физически эквивалентны (задача предлагалась на украинской олимпиаде по физике. Одесса, 1996 г.)

2.48. Обозначим ток через резистор R I_R , импеданс конденсатора – Z . Тогда напряжение на последовательно соединенных резисторе R и конденсаторе будет равно $U = I(R + Z)$. Ток через второй конденсатор при этом составляет $I_C = U/Z = I(R + Z)/Z$. Ток через сопротивление r $I_r = I_R + I_C$. Применяя правила Кирхгофа, можно записать $\varepsilon U = r(I + U/Z)$. Это выражение позволяет получить соотношение между I и ε :

$$I = \frac{\varepsilon}{R + 2r + Z + rR/Z}.$$

Напомним, что $Z = -1/(\omega C)$. Если мнимая часть в знаменателе не равна нулю, то между током и напряжением генератора будет сдвиг фаз. Поскольку его нет, то получаем условие $Z + rR/Z = 0$, которое выполняется при частоте $\omega = 1/(rRC)^2$. При этом напряжение на выходе в $1 + 2r/R$ раз меньше, чем на входе. (Квант, 1993, вып.9.10, № Ф1382)

2.49.

$$L = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - \left(R_L + \frac{U_{\text{л}}}{I}\right)^2} \simeq 1,09 \text{ Гн},$$

$\text{tg } \varphi = 64,1^0$. $P \simeq 60 \text{ Вт}$. Стартер и дроссель нужны для создания большой разности потенциалов в начальный момент времени. Дополнительный конденсатор не сказывается на работе одной лампы, но при включенном конденсаторе сдвиг фаз оказывается равным $-63,6^0$. Поэтому если параллельно лампе без конденсатора подключить лампу с конденсатором, то сдвиг фаз в цепи будет скомпенсирован.

рован и для питания ламп будет нужен меньший ток.
(Кабардин, Орлов, № 54)

2.50. а) $I_L = 0$, $I_R = \varepsilon_0/R \cdot \sin \omega t$, $P = 200$ Вт. б) $I_R = \varepsilon_0/R \cdot \sin \omega t$, $I_C = -\varepsilon_0 \omega C (\sin \omega t + \cos \omega t)$, $P = 200$ Вт (Воробьев, № 11.4.17).

2.51. Резонансная частота «черного ящика» $\nu = 400$ Гц. Простейшая схема черного ящика изображена на рисунке. На высоких частотах сопротивление ящика определяется емкостью. Поэтому

$$U_0 \simeq \sqrt{X_C^2 + R^2} = U/R \cdot \sqrt{X_C^2 + R^2}.$$

Численная оценка дает значение $X_C \simeq 700$ Ом, что соответствует емкости $C \simeq 0,14$ мкФ. Значение индуктивности можно оценить по резонансной частоте $\nu = 400$ Гц и найденному значению C . Численная оценка дает $L \simeq 0,9$ Гн. Значение активного сопротивления r можно оценить по значению сопротивления на самой низкой частоте. В этом случае сопротивление емкости очень велико, а сопротивлением индуктивности можно пренебречь. Численная оценка дает значение $r \simeq 300$ Ом.

(Квант, 1992, вып. 6, № Ф1337)

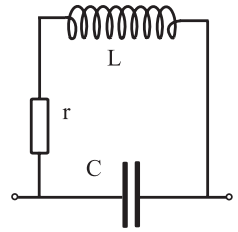
2.52. После подключения устройства к источнику питания конденсатор зарядится до напряжения $U_{\text{вых}} \sqrt{2} U_{\text{вх}} = 51$ В. Поскольку обратным током через диод можно пренебречь, то за время одного периода напряжение на конденсаторе практически не изменится (постоянная времени RC -цепочки $\tau = RC \simeq 0,5$ с). Поэтому диод должен быть рассчитан на обратное напряжение 102 В. (Гельфгат, № 17.31)

2.53. После замыкания ключа в катушках установится некоторый постоянный ток I_0 . Значение выделившейся теплоты тогда можно найти из закона сохранения энергии

$$W = \frac{L_1 I^2}{2} - \frac{(L_1 + L_2) I_0^2}{2}.$$

I_0 найдем из условия постоянства напряжения: $L_1 I = (L_1 + L_2) I_0$. Поэтому окончательно

$$W = \frac{L_1 L_2}{2(L_1 + L_2)} I^2 \quad (\text{Воробьев, № 11.4.22a}).$$



К задаче 2.51

2.54. Ток I_1 изменяется в пределах от I_1 до $I_1 - 2(I_1 - I_2)/(1 + L_1/L_2)$; I_2 изменяется в пределах от I_2 до $I_2 - 2(I_1 - I_2)/(1 - L_2/L_1)$. (Воробьев, № 11.4.226)

2.55. $R = 1.4 \cdot 10^{-3}$ Ом (Воробьев, № 11.4.23).

2.56. Частота вспышек лампы $n = 100 \text{ c}^{-1}$. Лампа горит, когда $U(t) = 220\sqrt{2} \sin \omega t \geq U_3$. Отсюда находим время, когда лампа вспыхнет:

$$t_1 = \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{U_3}{U_0}; \quad U_0 = 220\sqrt{2}.$$

Время t_2 , когда лампа погаснет, определяется условием

$$\omega t_2 = \pi - \omega t_1.$$

За первую половину периода лампа будет гореть в течение времени $\tau = t_2 - t_1 = T/2 - T/\pi \cdot \arcsin(U_3/U_0)$. Такое же время лампа горит и во второй половине периода (Гельфгат, № 17.29).

ОТВЕТЫ НА КАЧЕСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ

1.1. Следует пренебречь возможными колебаниями вагона. Тогда изменение хода часов может быть связано с ускоренным движением электрички при разгоне и торможении. В обоих случаях величина эффективного ускорения возрастает, а период колебаний уменьшается. Следовательно, ходики в электричке будут спешить.

1.2. На полюсе часы будут спешить, а на экваторе отставать. (Аганов, № 6.4)

1.3. Период колебаний будет одинаков. Сила сопротивления воздуха, действующая на шары $F_{\text{сопр}} = \beta v$, тоже будет одинаковой, но константа затухания $2\gamma = \beta/m$ свинцового шара будет меньше. Колебания свинцового шара будут затухать медленнее.

1.4. Если исходить из модели математического маятника и считать, что ведро вначале заполнено полностью, то первоначально период колебаний будет увеличиваться, т. к. центр тяжести при вытекании воды вначале понижается. Затем период колебаний будет уменьшаться из-за поднятия центра тяжести ведерка (Аганов, № 6.7).

1.5. С увеличением температуры жесткость пружины уменьшается, а момент инерции маятника возрастает. Оба этих фактора приводят к возрастанию амплитуды колебаний. Поскольку для реальных маятников с ростом амплитуды растет и период, то часы начнут отставать.

1.6. Гравиметрия позволяет определять ускорение свободного падения g для некоторой локальной точки Земли. Очевидно, что локальное увеличение ускорения свободного падения в некотором регионе может быть интерпретировано как локальное увеличение плотности Земли, что и означает залегание рудного тела. Гравиметром может служить обычный математический маятник, период колебаний которого можно измерить с очень большой точностью.

1.7. Изменение характера колебаний может быть связано с локальным изменением влажности или локальным изменением силы гравитации. Неизвестным является лишь то, может ли человек с помощью своих органов чувств зафиксировать эти небольшие изменения.

1.8. Для того чтобы раскачаться на качелях, необходимо присесть в крайних точках отклонения качелей от вертикали и встать при прохождении положения равновесия (см. пример 3 гл. 1).

1.9. При «неумелой» ходьбе с коромыслом создаются интенсивные колебания ведер, что является одной из причин сильного расплескивания воды. Другая причина состоит в том, что в ведре создается стоячая волна, амплитуда которой усиливается, если колебания ведер происходят в такт с колебаниями воды. Чтобы бороться с этими явлениями, нужно двигаться плавно или положить в воду деревянные кружки, которые препятствуют созданию стоячих волн в воде. (Аганов, № 6.12, 6.14)

1.10. Дребезжание объясняется совпадением частоты вращения вала двигателя автомобиля и собственной частоты колебания листа стекла в оконной раме (Аганов, № 6.13).

1.11. Эффективное ускорение свободного падения на высоте h $g(h) = gR_3^2/(R_3^2 + h)^2$. Здесь g – ускорение свободного падения на Земле. Поэтому период колебаний маятника в ракете растет с ростом h и будет равным периоду колебаний на земле на высоте $h = R_3(\sqrt{1/(1 - a/g)} - 1)$ (Аганов, № 6.5).

1.12. Фазовая точка движется по часовой стрелке. Причина такой асимметрии в том, что смещение и ускорение при колебаниях

изменяются в противофазе.

1.13. Маятник следует удлинить (Аганов, № 6.8).

1.14. Следует измерить период колебаний маятника и рассчитать ускорение по формуле для периода колебаний математического маятника (Аганов, № 6.10).

1.15. Одним из способов определения ускорения является измерение периода колебаний математического маятника (Аганов, № 6.17).

1.16. Упругие амортизаторы уменьшают величину силы, с которой действует вибрирующая установка на несущие конструкции здания (Аганов, № 6.15).

1.17. Между смещением частицы и вынуждающей силой существует сдвиг фаз, который зависит от частоты. Если $\omega \rightarrow 0$, то сдвиг фаз равен нулю. Затем он нарастает по величине, и при $\omega = \omega_0$ сдвиг фаз равен $\pi/2$. При дальнейшем возрастании частоты сдвиг фаз будет расти, и при $\omega \rightarrow \infty$ $\delta \rightarrow \pi$. Физическая причина такого поведения состоит в том, что при низких частотах система успевает подстраиваться, и смещение частицы, отставая по фазе, все же следует вынуждающей силе (Воробьев, № 3.5.30).

1.18. Простейшей такой системой является система двух гармонических осцилляторов, связанных пружиной (Воробьев, № 3.5.23).

1.19. Передаваемая за один удар энергия мала по сравнению с энергией, теряемой мостом за половину периода. Поэтому раскочки моста происходить не будет (Воробьев, № 3.5. 8).

2.1. В системе возникнут незатухающие колебания. Задача является аналогом примера 7 гл. 2 (Буховцев, № 674).

2.2. Период уменьшится вдвое, а амплитуда увеличится в два раза. (Гольдфарб, № 24.3)

2.3. Пластины следует раздвигать, когда заряд на них будет максимальным, и возвращать в прежнее положения, когда заряд будет равен нулю. При увеличении расстояния между пластинами совершается механическая работа, которая идет на увеличение электрической энергии конденсатора (Буховцев, № 678).

2.4. Одна из катушек индуктивности подсоединена к лампочке последовательно, а другая – параллельно (Воробьев, № 11.4.19).

2.5. Средняя тепловая мощность одинакова, поэтому и яркость ламп в среднем одинакова (Аганов, № 5.189).

- 2.6.** Уменьшается реактивное сопротивление (Аганов, № 5.191).
- 2.7.** Падение напряжения на емкости и на индуктивности находятся в противофазе, так, что суммарное падение напряжения на этих элементах равно нулю. (Аганов, № 5.192).
- 2.8.** Не может (Коган, № 581).
- 2.9.** В этом случае падения напряжения на элементах цепи в резонансе равны по абсолютной величине и находятся в противофазе. Поэтому их вклад в полное сопротивление цепи равен нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Аганов А. В. и др. Физика вокруг нас: Качественные задачи по физике / А. В. Аганов, Р. К. Сафиуллин, А. И. Скворцов и др. Казань: Изд-во КГУ, 1996.

Баканина Л. П. и др. Сборник задач по физике: Учеб. пособие / Л. П. Баканина, В. Е. Белонучкин, С. М. Козел, И. П. Мазанько; Под ред. С. М. Козела. 2-е изд., испр. М.: Наука, 1990.

Бендриков Г. А. и др. Задачи по физике для поступающих в вузы: Учеб. пособие / Г. А. Бендриков, Б.Б. Буховцев, В. В. Керженцев и др. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1979.

Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Физика: В 3 кн. Кн. 1. Механика. М.: Физматлит, 1994.

Бутиков Е.И. и др. Физика в примерах и задачах / Е. И. Бутиков, А. А. Быков, А. С. Кондратьев. М.: Наука, 1979.

Буховцев Б. Б. и др. Сборник задач по элементарной физике / Б. Б. Буховцев, В. Д. Кривченков, Г. В. Мякишев и др. М.: Наука, 1974.

Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1979.

Воробьев И. И. и др. Задачи по физике: Учеб. пособие / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузов и др.; Под ред. О. Я. Савченко. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1988.

Гельфгат И. М. и др. 1001 задача по физике с ответами, указаниями и решениями / И.М. Гельфгат, Л. Э. Генденштейн, Л. А. Кирик. М.: Изд-во Илекса, 1997.

Гольдфарб Н.И. Сборник вопросов и задач по физике: Учеб. пособие. 6-е изд., стер. М.: Высш. шк., 1993.

Гомонова А. И. и др. Сборник задач по физике. Ч. 1. Механика: Пособие для поступающих в вузы / А. И. Гомонова, Д. И. Пеньгьева, В. А. Плетюшкин, В. А. Погожев; Под ред. В. А. Погожева. М.: УНЦ ДО МГУ, 1995.

Кабардин О. Ф., Орлов В. А. Международные физические олимпиады школьников / Под ред. В.Г. Разумовского. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1985.

Кабардин О. Ф. и др. Методика факультативных занятий по физике: Пособие для учителя / О. Ф. Кабардин, С. И. Кабардина, В. А. Орлов и др.; Под ред. О. Ф. Кабардина, В. А. Орлова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1988.

Коган Б. Ю. Задачи по физике: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1971.

Меледин Г. В. Физика в задачах: Экзаменационные задачи с решениями: Учеб. пособие. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1985.

Шаскольская М. П., Эльцин И. А. Сборник избранных задач по физике. М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1974.

Использованы также выпуски журнала «Квант» за разные годы (научно-популярный физико-математический журнал Академии наук РФ и Академии педагогических наук РФ. Вых. с января 1970 г.).

Учебное издание

Биккин Халид Мирхасанович

КОЛЕБАНИЯ

Учебное пособие

Редактор и корректор Р. Н. Кислых
Оригинал-макет подготовлен автором
с использованием пакета $\text{\LaTeX}2\epsilon$.

Лиц. № 020257 от 22.11. 96 г. Подписано в печать 20.09 .2001 г.
Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$.

Бумага для множительных аппаратов. Усл. печ. л. 7,91.
Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 150 экз. Заказ 2233 .

Издательство Уральского университета.
620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51.

Отпечатано на ризографе в СУНЦ УрГУ.
620137, Екатеринбург, ул. Данилы Зверева, 30.