ОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
КАФЕДРА КИБЕРНЕТИКИ

А.К. Гуц

ФИЗИКА РЕАЛЬНОСТИ

Омск 2012

УДК 530.12+523.112

Г 97

Гуц А.К. Физика реальности. – Омск: Издательство КАН, 2012. – 424 с.

ISBN 987-5-9931-0191-0

Книга посвящена проблемам теории пространства-времени, гравитации и структуре физической Реальности.

Изучаются спонтанные изменения размерности пространства-времени, времени и пространства. Описывается топология и геометрия образования кротовых нор в пространстве и в пространстве-времени. Обсуждается проблема экзотичности топологии односвязного некомпактного 4-мерного пространства-времени. Описывается топология вселенной Гёделя. Дается теория пружинного расположения пространства-времени в объемлющем гиперпространстве, решающая проблему путешествий во времени и сверхдальних перемещений в пространстве.

Продемонстрированы антигравитирующие свойства искривленного пространства-времени общей теории относительности и экранирующий эффект гравитационных волн.

Излагается тетрадная теория гравитации (ТТГ). Дается формула для гравитационного аналога эффекта Зеемана и выводится уравнение скалярного поля. Определяется понятие гравитационно-инерциального излучения.

Даны основы квантовой теории гравитации Уилера-ДеВитта. Обсуждаются вопросы квантовой космологии. Предлагается схема квантового самовозникновения Вселенной (реальности) вследствие реализации идей-фантазий множества индивидуальных сознаний.

Излагается теория гравитации, основанная на интуиционистской логике.

Для аспирантов и научных работников.

————-

ISBN 987-5-9931-0191-0

Моей маме

Лице свое скрывает день,
Поля покрыла мрачна ночь,
Взошла на горы чорна тень,
Лучи от нас склонились прочь.
Открылась бездна звезд полна;
Звездам числа нет, бездне дна.

Песчинка как в морских волнах,
Как мала искра в вечном льде,
Как в сильном вихре тонкой прах,
В свирепом, как перо, огне,
Так я, в сей бездне углублен,
Теряюсь, мысльми утомлен!

М. Ломоносов (1743)

Оглавление

Предисловие

Окружающая нас физическая *Реальность*, иначе называемая *Внешним Миром*, дана нам в форме пространства и времени, а основная естественная сила, с которой человек вынужден считаться и подчиняться в своей деятельности, – это гравитация.

Понятия пространства и времени являются фундаментальными понятиями в науке и философии. Существование человека в окружающем Внешнем Мире необъяснимым образом сопряжено с пространственной и временной формами представления Реальности. Структура Реальности, её обширность – галактики, звезды, планеты – связаны с гравитационным взаимодействием объектов Реальности.

Двадцатый век уступил место началу XXI века, и вполне уместно задать вопрос: в чём представления[1] о пространстве, времени и гравитации существенно отличаются от воззрений на пространство, время и гравитацию в других столетиях?

Надо сказать, что если в XIX веке особых различий в представлениях о пространстве, времени и гравитации по сравне-

[1] Представления о тех или иных сущностях, характерные для той или иной исторической эпохи существования разумных существ, всего лишь один их возможных *вариантов представлений*, каждый из которых может существовать независимо от других и совсем не обязательно быть результатом эволюции воззрений «предыдущих» эпох. Понятие смены эпох, эволюции, смены воззрений в ходе развития человеческой цивилизации – это результат линейного восприятия Мира событий. Мир более сложно устроен, и линейный взгляд слишком примитивен и груб для того, чтобы с его помощью понять структуру Реальности, строение Внешнего Мира.

нию с XVIII веком нет, то в век XX-й на эти сущности стали смотреть совсем иными глазами.

Во-первых, метрика пространства могла быть не только неевклидовой, но и меняться со временем. Более того, топология пространства, т.е. его форма могла быть самой разнообразной и иметь как конечный, так и бесконечный объем[2].

Во-вторых, величина длительности явления, не воспринималась больше как некий абсолют, а фактически постулировалась её зависимость от скорости системы отсчёта, в которой находится *субъект*, наблюдающий за изучаемым явлением. Кроме того, что принципиально важно, и на это указал впервые Анри Пуанкаре, два причинно несвязанные события $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ могли быть для разных наблюдающих субъектов как одновременными, так и неодновременными. Причем в последнем случае как $\mathcal{A}$ могло оказаться в прошлом $\mathcal{B}$, так и $\mathcal{B}$ в прошлом $\mathcal{A}$.

Наконец, благодаря логику Курту Гёделю был обоснован физический принцип работы машины времени, т.е. устройства, возвращающего субъект в его собственное прошлое.

В-третьих, Герман Минковский объединяет пространство и время в единую сущность – *Мир событий*, который позже стал именоваться *пространством-временем*. Однако в XX веке так и не решили, *реально* ли пространство-время?

В-четвертых, Эйнштейн *отождествляет гравитационное поле с метрикой* четырёхмерного пространства-времени[3]. Некоторые его последователи, например Синг, стали отождествлять гравитацию с кривизной пространства-времени. Но вряд ли это правомерно, поскольку в искривлённом пространстве-времени возможно как *притяжение* частиц, так и *отталкивание*. Но XX век практически ничего не сказал о сущности антигравитации. Скорее это связано с тем, что в человеческой практике антигравитация никоим образом себя не

---

[2]Более того, конечность или бесконечность объема пространства может зависить, как показал А.Л. Зельманов, от системы отсчета, в которой находится наблюдатель.

[3]Теория гравитации Эйнштейна была названа им *общей теорией относительности*.

проявила.

Двадцатый век начался с расставания с призрачной сущностью, составляющей основу мира и называемой *эфиром*, но, заканчиваясь, оставил исследователей с не менее призрачными мировыми сущностями – *тёмной материей* и *тёмной энергией*.

Наконец, во второй половине прошлого века физики заговорили о необходимости привлечения в физические теории *сознания*, т.е. того, от чего в других просвещённых столетиях старательно избавлялись, хотя во все времена то и дело озвучивалась мысль Канта о субъективности времени и пространства.

Предложенная Эвереттом в 1957 году интерпретация квантовой механики говорит о ветвлении Реальности, которое в каждой ветви даёт разные значения для наблюдаемой физической величины. При этом ни один наблюдатель не замечает данного ветвление, и поэтому следует говорить о ветвлении сознания.

Будем надеяться, что XXI век даст ответ на вопрос о связи сознания и Вселенной, хотя для Канта было очевидным, что реально существующим является такой мир, частью которого мы являемся [122, с.187].

Почему и во всём непременно
Мне охота себе объяснить
И осенней воды перемену,
И осоки железную нить?

Г. Шпаликов

Введение

Вещи, находящиеся вне нас, явления, происходящие вокруг нас независимо от наших мыслей и желаний, – всё это *Внешний Мир*, который окружает нас и в котором мы живем.

Наука XX века уверяет нас, что *Мир* сделан из элементарных частиц[4]. Они образуют атомы, атомы складываются в молекулы, из молекул состоят вещи, а вещи бывают жёсткими и твёрдыми, как бетонная стена. И нельзя пробиться сквозь эту стену, если сильно разбежаться и налететь на неё, потому что она *реальная*, а не во сне, не на экране кино или не порождена с помощью компьютерных технологий.

Все люди науки убеждены, что Внешнему Миру нет дела до нашего Я, что *он*, Внешний Мир, существует сам по себе, независимо от наших желаний; он самодостаточен, и в силу этого *реален*.

Думать так, как только что описано, – значит быть реалистом, стоять на реальной почве и отдавать себе отчёт в тщетности большинства наших фантазий и умонастроений. Более того, любые попытки подвергнуть сомнению нарисованную картину Мира, подобные, скажем, антропному принципу, рассматриваются как наивные и идеалистические.

Для реалиста сказанное выше о Внешнем Мире есть *истина*. Ею овладевает каждый человек в процессе своего об-

[4]В конце XX века место элементарных частиц, воспринимаемых образно как этакие сгустки, шарики, заняли *струны*. По сути дела это все те же элементарные частицы, но с особой, струнной организацией.

разования, и не знает этого разве маленький ребёнок. Истинность нарисованной картины Внешнего Мира опирается на нашу *убежденность*, что Мир устроен именно *так*, и никак иначе.

Мы *видим*, что вещи вне нас занимают то или иное *место* в окружающем нас мире. Этот окружающий нас Мир размещается в *пространстве*.

Тем не менее, всегда есть смысл «разбежаться в мыслях» и воспарить над нарисованной классической картиной реального Мира и вновь задаться вопросами его устройства.

0.1. Вселенная, время и пространство

Весь Внешний Мир часто называют *Вселенной* (the Universe). Большая Советская Энциклопедия сообщает, что Вселенная – «это весь существующий материальный мир, безграничный во времени и пространстве и бесконечно разнообразный по формам, которые принимает материя в процессе своего развития. Вселенная существует объективно, независимо от сознания человека, её познающего» (В. Амбарцумян, БСЭ). Вселенная, изучаемая астрономией, – часть материального мира, которая доступна исследованию астрономическими средствами, соответствующими достигнутому уровню развития науки (иногда эту часть Вселенной называют Метагалактикой).

Очевидно, что современная теория Вселенной, теория Мира феноменов (фактов, вещей) должна содержать прежде всего формальные принципы организации чувственно воспринимаемого мира феноменов: время и пространство.

Однако до сей поры сущность времени не удавалось объяснить с помощью разума, несмотря на то что научные теории становились всё более сложными и изощренными.

Мы полагаем, дело в том, что хотя теории становились все более сложными математически, они оставались простыми относительно их интерпретации: каждый раз выбиралось наиболее простое объяснение их множества возможных. Иначе говоря, наука неустанно следовала своему классическому постулату, называемому *лезвием Оккама.*

0.2. Постоккамовская наука

Принцип Оккама – «Не умножай сущностей сверх необходимого» – оказал благотворное влияние на становление и развитие классической науки. Но уже во второй половине XX века постулирование простоты для описаний Мира феноменов становится похожим на заявление Шарикова из булгаковского «Сабачьего сердца»: «Не согласен я с Энгельсом, намудрил он. Всё проще: взять всё, да и поделить!»

Чтобы осознать, что современная наука неявно начинает отказываться от принципа Оккама, достаточно вспомнить, что теория суперструн столь сложна и абстрактна, что доступна для восприятия лишь для тех, кто лет 5-7 усиленно и напряженно изучал самые умудренные и абстрактные разделы математики и физики. Более того, теория суперструн практически *экспериментально непроверяема.* Но ведь проверка теории посредством эксперимента есть основное положение классической науки! Заметим дополнительно к этому, что теория суперструн далеко не единственная такая теория.

Главным для многих таких теорий является то, что в основании, как уже говорилось, лежат положения, которые следует отнести к рассудочным в понимании Канта, т.е. никоим образом не получаемые посредством чувственного созерцания, через опыт.

0.3. Логика и время

Понятие «Мир событий», которое было введено в науку Германом Минковским в 1908 году, позволило наконец-то метафизику воспарить, подобно Господу Богу, над Вселенной, представить её в форме пространства-времени и увидеть её вневре́менье.

Пространство-время, содержащее в себе целиком и прошлое, и настоящее, и будущее, предстало перед человеком как единая вечная сущность, разные области которого суть куски того, что человек понимает под Историей своей цивилизации. Но не только цивилизации, а также и того, что ей предшествовало, и того, что за ней последует: и рождение Вселенной, галактик и звёзд, и их разрушение, и смерть Вселенной.

Этой мёртвой вечной сущности как нельзя кстати отвечает классическая математика с её незыблемыми вечными истинами. Факт, утверждаемый в математической теореме, доказанной 1 января 1970 года, истинен *всегда*, т.е. не только после того, как было найдено доказательство теоремы, но даже до того, как была найдена формулировка этой теоремы.

Это говорит о том, что, во-первых, сознание человека способно быть как во времени (мыслить, творить, осознавать), но и, во-вторых, быть вне времени (в форме математических истин, в форме пространства-времени).

Первое – общеизвестный факт, саморазумеющийся и для учёного и для домработницы с начальным образованием[5]. Но раз (классическая) математика[6] относится к вневременной, вечной форме (бытия) сознания, то существует ли временно́й способ научного исследования, существует ли временна́я математика?

Временна́я математика, следовательно, есть математика неклассическая, и истины в ней не должны быть вечными. Более того, поскольку она является математикой, не связанной с Божественным взором [71, с.308-310] на распростирающееся где-то там, внизу, вечное пространство-время, то она должна быть *беднее* классической математики (но *не проще*), т.е. не все методы осознания истины ей должны быть доступны.

Математика, в которой факт признается истинным лишь после того, как было выполнено построение, показывающее, как этот факт достигается, – это математика конструктивная,

[5]Благодаря стараниям Минобразнауки начальное образование скоро будут называть высшим.

[6]И математика, и логика исследователя, и то, что мы считаем *научным* способом рассуждения – всё это является *классическим*, двузначным.

или, в общем случае, математика интуиционистская. Пока построения нет, нет и факта. Построение – это алгоритм, *пошаговая* конструкция, итогом которой является интересующий нас факт. Таким образом, утверждение теоремы, ещё не доказанной до 1 января 1970 года посредством демонстрации необходимого построения, не может считаться истинным до 1 января 1970 года, поскольку до 1 января 1970 года не было сделано необходимое построение [26, с.10-11]. Временно́й характер такой математики очевиден.

Интуиционистская математика обязана своим происхождением направлению, носящему название *интуиционизм*, появившемуся в науке в начале XX века благодаря работам Брауэра и Гейтинга [26].

Интуиционистская математика отвергает теоремы существования (пространство-время *есть*; всё сразу и целиком), которыми столь насыщена классическая математика, и, как следствие, интуиционистская логика отказывается от закона исключённого третьего. Поэтому она беднее по средствам, но богаче по интерпретации, получаемых с её помощью фактов.

Дело в том, что для интерпретации факта (утверждения) классической математики, достаточно обратиться к теории множеств. Теоретико-множественная Вселенная – это привычная нам современная космология и квантовая механика в копентгагентской интерпретации, где нет места неоднозначности и многовариантности окружающего нас Внешнего Мира. Напротив, для интерпретации интуиционистских фактов нельзя обращаться к теории множеств, приходится обратиться к теории топосов [30], внутренний мир объектов которой интуиционистичен, и это приводит к многовариантному описанию Внешнего Мира. Вселенная теряет однозначный характер и предстает перед Божественным взором в бесчисленном числе вариантов (ветвей) [66, 71]. В результате, мы приходим к многомировой квантовой космологии ДеВитта и квантовой механике в эвереттовской интерпретации (см. § 15.9 и [209]).

Коль скоро в интуиционистской математике то, что не доказано (построено) до 1 января 1970 года, того и нет, то принцип соответствия математики реальности заставляет задаться вопросом: имелось ли во Вселенной то, что не было установлено до 1 января 1970 года? Следуя логике рассуждений интуициониста надо заявить, что нет, не имелось.

Грубо говоря, если я закрыл глаза, то Внешний Мир исчез, его нет. Конечно, такое высказывание – это всего лишь яркий образ, направленный на опровержение нашего заявления. Оставим столь эффектное, но малосодержательное опровержение в стороне и попытаемся разобраться со следующим вопросом. Вопрос таков: был ли Внешний Мир до появления людей? Останется ли Внешний Мир после того, как вдруг человечество исчезнет?

Чтобы усомниться в ответе «Да, был, существовал!» на первый вопрос, постараемся убедить читателя в правильности ответа «Да, Мир исчезнет» на второй вопрос.

Внешний Мир, скажет просвещенный читатель, – это объективная физическая Реальность. Другими словами, его существование не зависит от желаний людей, он существует и без людей. Но интуиционист сразу скажет, что это утверждение не имеет чётко очерченного значения, оно метафизично, поскольку «если «существовать» не означает «быть построенным», то оно должно иметь какое-то метафизическое значение» [26, с.10]. А метафизика – дело тёмное, всё только запутывает, и к ней обращаются тогда, когда нечего сказать по существу.

0.4. Внешний Мир и сознание

Хорошо, – скажет просвещённый читатель, – оставим смысл слова «существовать» для философов, но отметьте, что слово «физика» точно указывает на нечто объективно-материальное.

Это действительно так, но следует отметить, что традиции современной физики, заложенные 300-400 лет тому назад, изгоняют человека, его сознание, его восприятие Внешнего Мира, из законов и принципов, на основе которых строится наука физика. И хотя квантовая механика неоднократно намекала, что надо бы учитывать сознание при анализе сути вещей, это оставалось на уровне философствования, хотя бы потому что нет *формализованного определения и понимания*, что такое сознание.

Однако физика исчезает вместе с сознанием. Действительно, каждый человек знает, что Внешний Мир остается, хотя он умирает, – Мир остается для живущих. Но если исчезнет ра́зом всё человечество, то нет никаких доказательств того, что Мир останется существовать без людей. И доказательств этого утверждения быть не может по той простой причине, что их некому будет проверить, т.е. подтвердить. Довод, что Мир будет наблюдаться *другим* сознанием, т.е. *другими* разумными существами, вряд ли может рассматриваться как скольнибудь серьёзный, поскольку, опять-таки, для исчезнувшего человечества нет как Внешнего Мира, так и других существ.

В голову приходит крамольная мысль, что Внешний Мир, Вселенная существует вместе с сознанием, а значит, не могла появиться *до* сознания. Вселенная порождается сознанием в том смысле, что структура *окружения* носителей сознания *коррелируется* со *схемами* (идеями) представления о сущности этого окружения, существующими в их сознании (см. гл. 17). И в силу этого пространство и время не просто формы существования Мира, но формы восприятия Мира. Другими словами, пространство и время – именно то, о чём говорил Кант; они субъективные условия чувственности, под которыми единственно возможны для нас внешние наглядные представления [99, с.54,57].

Гоним прочь эту крамольную мысль. Но на ум приходит другая.

Представим, что эволюция Вселенной проходит в темпе T_0. Темп – это число новых структурных деталей в единицу времени. Человек познает Вселенную, т.е. осознает её детали. Пока ещё, на *сегодня* человеческого бытия, Вселенная имеет массу ещё не осознанных человечеством деталей и порождает новые. Но допустим, что темп T_1 эволюции познающих возможностей человека существенно превысит T_0. Тогда в какой-то момент X Вселенная не сможет предъявить человеку новых деталей. Познание закончено? Смысл существования человека как познающего, любознательного существа нечем далее подпитывать?

Можно, конечно, заявить, что Вселенная сколлапсирует, т.е. погибнет до этого момента X, но вряд допустимо так думать, поскольку это означало бы, что время отведённое Вселенной Конструктором на её временнóе существование мажорируется темпом любознательности случайно возникшей букашки, именуемой человеком.

Остается задуматься о правомерности современной картины эволюции Вселенной от «точки» до необъятных космических просторов. А точнее, о правильности представления о том, что Вселенная *линейно*, *последовательно*, стадия за стадией, состояние за состоянием проходит развитие в неком универсальном космическом времени t.

Не наличествует ли Вселенная вся целиком и сразу? Опустим вопрос «а где она размещена?» и отметим, что при таком подходе мы должны принять, что если «да, наличествует», то в таком случае она, Вселенная, наличествует сразу вместе с осознающими её людьми!

Но если *всё* уже наличествует, то что же, люди ничего в этом наличествовании уже не могут поменять?

Мы все хорошо знаем, как часто отдельным людям удается сделать всё так, как им хотелось. Это всего лишь реализация свободы человеческого выбора, идущего наперекор необходимости. Значит, люди могут вносить изменения в наличествующую Вселенную? Но она же уже дана и неизменна!?

Выход один: Вселенная с внесёнными изменениями – это *другая*, *не наша* вселенная.

Следовательно, наличествующих, позволим себе выразиться более сильно – заранее готовых к использованию вселенных должно быть много, бесконечно много. Для чьего использования? Ответ: для использования людьми, воплощающих свои идеи, свои фантазии.

Иначе говоря, Вселенная существует в форме множества вариантов различных вселенных, Вселенная *многовариантна*!

Считается, что реальный Внешний Мир появился задолго до появления человека, эволюционирует по определенным естественным законам и никоим образом не может существенно подвергнуться изменениям по воле людей. Люди могут, конечно, воздействовать на Мир через материальную деятельность, и только через неё. Мысли людей способны разбегаться до любых фантазий, но далеко не все из них способны к воплощению в форме материальных, реальных вещей в реальном Мире.

Но снова хочется напомнить, что если человечество ра́зом исчезнет, то бессмысленно говорить, что реальный Внешний Мир остается и продолжает существовать как ни в чем не бывало. Для исчезнувшего человечества уже *ничего* не существует! Впрочем, также, как и не существовало!

Таким образом, настолько ли объективен на самом деле реальный Внешний Мир?

На этот вопрос надо ответить так: «И да, и нет». «Да», поскольку Мир строится из того, что вне сознания. «Нет», поскольку Мир существует вместе с сознанием. Из чего строится Мир? Ответим словами Шекспира («Буря»): «Мы сделаны из вещества того же, что наши сны».

Часть I

Классическая теория

Внешний Мир существует, если он соответствует нашим мыслям.

А. Г.

Так же как при смерти мир не изменяется, но прекращается.

Л. Витгенштейн.

Глава 1

Пространство, время и пространство-время

Принцип Оккама в какой-то мере подтверждает мысль Бейтсона [10, с.19], что, возможно, в «культурной эволюции действует что-то вроде закона Грэшема[1], согласно которому примитивные идеи будут всегда вытеснять сложные». Усложнение чего бы то ни было есть допущение большего количества элементов в «этом чего бы то ни было» (или большего количества связей «этого чего бы то ни было» с иными «теми чего бы то ни было»). Большее количество элементов требует их *размещения* – так появляется понятие пространства. Прикосновение к моему телу в таком-то месте всегда только «круглого» менее сложно, чем допущение *смены* круглого на острое – два варианта в одном месте сложнее, чем один вариант. Смена – это *время.* Усложнение в культурной революции совершается посредством новых мыслей, т.е. посредством *сознания*, которое осознает «примитивность идеи» и усложняет её.

Таким образом, сознанию мы обязаны действием «принци-

[1]Закон Грэшема: «Менее ценная из двух видов валюты циркулирует более свободно вплоть до полного вытеснения более ценной, поскольку последняя тезаврируется».

па усложения» в «культурной эволюции», и оно предопределяет существование пространства и времени и, тем самым, более сложной их комбинации – пространства-времени.

1.1. Пространство

Специальная теория относительности (СТО) показала относительность того, что понималось под пространством. Интуитивно пространство – это всё то, что существует в данный момент времени, т.е. в Настоящем. Иначе говоря, всё то, что одновременно. Но одновременность относительна. То, что для одного наблюдателя одновременно, совсем не обязано быть таковым для другого. Казалось бы, стройное и точно описанное понятие пространства распадается...

Но человек не может видеть, ощущать Внешний Мир, мир феноменов иначе как расположенный, лежащий в пространстве. Объективно, в соответствии со СТО, пространство – это фикция; субъективно, в восприятии Внешнего Мира сознанием, оно реально. Что это: логическое противоречие или недостаток, связанный с выбором логики?

1.1.1. Внешний Мир → сознание → пространство

Слепой человек, к которому прикасаются, чувствует, что одно прикосновение было «там», а другое – «здесь», первое было «дальше» от головы, где сосредоточено его Я, второе – «ближе». Тем самым слепой человек в его познании *Внешнего Мира*[2] различает *места* прикосновения и слово «место» как раз и означает специфическое различие между двумя прикосновениями.

По мере дления жизни слепому требуется всё больше *разных мест* для разных *вещей извне*. Совокупность задействованных мест стремительно нарастает и заполняет Внешний Мир.

[2]Для слепого Внешний Мир действительно внешний!

То, что заполнено вещами, и сами вещи, которые имеют *место* в этом «то», требуют для упорядочения жизни, и в частности, для нахождения понимания в *общении* с другими людьми, *слова*, которое и означает это «то».

И слово это, как мы знаем, – *пространство.*

> *Пространство – это то, что можно чем-то заполнить.*

Слепой человек, набираясь жизненного опыта, осознает существование других людей и признает за ними право на независимое существование и, более того, наделяет их способностью иметь такое же представление о пространстве, которым располагает он сам. В результате появляется понятие объективного (и абсолютного), т.е. независимого от воли и желания Я каждого отдельного человека, *пространства*, в котором каждому человеку предоставлено *место для размещения* его самого и его вещей, о существовании которых он знает. Другими словами, рождается мысль, что

Пространство дает место вещам.

Понятия «ближе», «дальше» – это исходные понятия, с помощью которых определяется *топология* пространства. Более того, поскольку Я *отделяю* себя от другого «я», т.е. каждый человек из своего опыта знает, что его тело имеет *границы* в пространстве, в которые не вторгается чужое «я», а на языке топологии это звучит как условие существования окрестности данного Я, не содержащей другого «я», то топология пространства, как минимум, удовлетворяет аксиоме отделимости T_1. В действительности следует постулировать более сильное условие отделимости – наличие непересекающихся окрестностей (и Я, и чужое «я» имеем отдельные тела). Иначе говоря, следует предполагать, что пространство обладает *хаусдорфовой отделимостью* (аксиома T_2).

Обратим внимание, что, для того чтобы возникло понятие *объёма* вещи, слепому нужно трогать вещи, зрячий же вещи видит объёмными. Впрочем, возможно, слепой сможет обойтись и без осязания.

1.1.2. Сознание $\to$ Внешний Мир $\to$ пространство

Мы описали понятие пространства, считая, что исходным фактом является существование сигналов извне (прикосновения к телу слепого). Другими словами, *Мир извне*[3] первичен в нашем построении. Верно ли это? Быть может, слепой способен *породить* Мир извне, исходя только от осознания своего существования? Для этого надо принять, что есть *другие*, которые также обладают самосознанием. Далее нужно уже решать задачу *размещения* этих *других* вне *Я*. А размещение – это выделение места, т.е. толчок к порождению понятия пространства.

1.2. Время

Жизненный опыт слепого человека говорит ему, что прикосновения к одному и тому же *месту его тела* могут повторяться и повторного прикосновения часто приходиться *ждать*! Ожидание *длится*, и это дле́ние обозначается[4] словом *время*.

Однако, если прекращаются ощущения, то исчезнет пространство и останется только ожидание, останется время, и это время есть (блуждающее) сознание. Это красочно описано у Станислава Лема в рассказе «Условный рефлекс».

Стоит отметить, что сколько-нибудь разработанной теории времени в современной науке нет. Теория Ньютона лишь ввела то, что называется *длительностью*[5], появляющейся в уравнениях в качестве временной переменной t, а теория относительности уточнила, что при постулате непревышения скорости

---

[3] Термин «Мир извне» не гладок с точки зрения литературного языка, но он подчеркивает аксиоматичность первичности внешнего материального Мира, который воздействует на слепого *извне*, сигнализируя ему тем самым о своем существовании.

[4] Процедура «обозначения» – это процедура абстрагирования; при абстрагировании яблоко, груша и др. становятся *плодом*. Разные ожидания становятся *временем*.

[5] Ньютон уточняет: длительность, или продолжительность, существования вещей [134, с.32].

света материальными телами длительность становится зависимой от движения прибора, измеряющего эту длительность (или *ход времени*). При этом, естественно, выяснилась относительность того, что называли одновременностью.

Теория времени Козырева, столь популярная среди ищущих умов, не является математической, хотя ей отчасти можно придать формальный вид.

Какие принципы следует положить в основу новой формальной теории времени? Вряд ли стоит не использовать то, что думали и говорили о времени лучшие умы. Коль эти мысли не имели математического оформления, следует искать среди философов.

> «Время есть субъективное условие познания и понимания, и познание времени – это выявление различных уровней субъективных условий познания, что является задачей трансцендентальной философии» (В.И. Молчанов, [130]).

Но кому следовать? Может, кому-то и покажется странным, но взгляды Канта на время наиболее глубоки и допускают изощренную формализацию. Почему формализация должна быть изощренной? Да потому, что время у Канта – это то, как человек созерцает Мир феноменов. Значит, если допустить существование гипотетического нечеловека, то следует допустить *иное* созерцание Мира феноменов. Поэтому теорию надо строить так, чтобы в ней, кроме человека с его временем, было возможно иное существо с «иным временем». Но в таком случаем *Мир может созерцаться в разных вариантах* и, следовательно, становиться *многовариантным!* Не будем увлекаться поиском иных существ-нечеловеков, а сосредоточим внимание на различных *типах созерцания* фактов в Мире.

1.2.1. Время как акт созерцания. Формализация созерцания фактов

Время, согласно Канту, есть созерцание. Внешний Мир $\mathcal{M}$ можно представлять как совокупность (атомных) фактов, как это виделось Витгенштейну, или как совокупность (атомных) событий, если обратиться к Минковскому:

$$\mathcal{M} = \{x, y, z, ...\}.$$

Но в общем случае не следует рассматривать $\mathcal{M}$ как канторово множество; $\mathcal{M}$ – это категория (см. § A.1). Введем некоторую категорию $\mathbf{L} = \{\ell A, \ell B, \ell C, ...\}$, объекты[6] которой – это различные «субъективные условия познания и понимания» фактов, или различные возможные *типы созерцания*. В таком случае, созерцание есть морфизм

$$x : \ell A \to \mathcal{M}, \tag{1.1}$$

который в теории категорий означает утверждение «x – это обобщённый элемент Мира фактов-событий $\mathcal{M}$». При этом используется обозначение

$$x \in_{\ell A} \mathcal{M}.$$

В случае, когда $\ell A = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ – терминальный объект, x – *глобальный элемент*, т.е. элемент, из которых состоят множества Кантора.

Мир $\mathcal{M}$ – это абсолютный 4-мерный Мир событий Минковского. В нем прошлое, настоящее и будущее *одинаково реальны*. В Мире $\mathcal{M}$ нет времени, нет изменений, нет движения. Вещи в нём пребывают *вне времени*. Время в Мир $\mathcal{M}$ превносится извне, при созерцании фактов [66, § 9.5]. Иначе говоря, морфизмы вида (1.1) позволяют просматривать, созерцать факты! Это скольжение, просмотр фактов, областей и всего Мира фактов.

Конкретное созерцание, т.е. конкретный морфизм – это еще и созерцающий аппарат, созерцающее устройство, такое, как, например, мозг человека. Структура этого устройства должна максимально отвечать возможностям, предоставляемым заданным типом созерцания $x : \ell A \to \mathcal{M}$, который мы связываем с выбором локуса ℓA.

[6] Символ ℓ – первая буква в слове locus, которое переводится как место, ситуация.

1.2.2. Время как акт созидания

Сознание, известное нам, – это сознания разных индивидов. Это различные сознания; они не тождественны, и в силу этого обладают различным ви́дением того, как как устроен Внешний Мир. Более того, даже если они обладают одной и той же идеей A, они видят ее во Внешнем Мире по-разному.

Индивиды находятся во Внешнем Мире, их сознания (квантово) *скоррелированы* с их окружением, т.е. с Внешним Миром, называемым часто Природой. Это означает, что любая мысль, идея, которая осознаётся, неизбежно отражается на структуре Внешнего Мира, структуре окружающей Природы.

Реализация «идеи» A разными сознаниями – это две разные квантовые корреляции, касающиеся Природы. Они вынуждены быть *последовательными*, если направлены на одну и ту же *вещь*, а значит, рождается то, что мы называем *физическим объективным временем.* Следовательно, сознания рождают Реальность во времени (см. подробности в гл. 17).

Вещь, скоррелированная с сознанием, – это *вещь для нас*, она оснащается структурой, являющейся реализацией идеи A. Два индивидуальных сознания могут иметь разные реализации идеи A, поэтому либо две разные реализации *последовательно коррелируют* с A, и это называется *временем*, либо реализации, остается сказать, *одновременны*, и вещь приобретает два лика, – это *ветвление*, вещь с разными ликами, две *разные вещи для нас.* Они относятся к разным, т.е. параллельным вселенным-реальностям.

Но, скорее всего, имеет место и то и другое. Внешний Мир состоит из разных вселенных-реальностей, и в каждой реальности есть время, ассоциированное с совокупностью индивидуальных сознаний, созидающих и наблюдающих эту реальность.

Ветвление, приводящее к многоликости вещей, к параллельным вселенным-реальностям, должно проявиться в математическом описании Внешнего Мира. Эта уверенность основывается на том, что математика не раз демонстрировала, и это отмечали многие выдающиеся умы, своё умение удивительно точно описывать реальный вещественный Мир.

Как раз это и проявляется в том, что решение уравнения Шрёдингера для одного начального данного имеет вид

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k, \tag{1.2}$$

где $|c_k|^2$ есть амплитуда вероятности обнаружить систему при измерении в состояние ψ_k. Доминирующая в физике копенгагенская интерпретация квантовой механики говорит о коллапсе волновой функции ψ

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k \to \psi_{k_0},$$

трактуемого как принцип *реализации* только одного состояния из бесконечного числа потенциально возможных состояний ψ_k.

В эвереттовской интерпретации квантовой механики говорится о *ветвлении вещи* и *сознания*: реализуются все состояния ψ_k, но каждое в своей вселенной со своим способом осознания.

Безотносительно к этим двум интерпретациям квантовой механики, в формуле (1.2) отражены параллельные возможности (лики) для существования вещи.

Следует уточнить понятие квантовой корреляции, использованное выше. Это современная терминология для понятия, которое возникло благодаря заявлению о неполноте квантовой механике и известному как парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена (ЭПР-парадокс). Сейчас существание квантовой корреляции является общепризнанным фактом, но впервые о необходимости признать дальнодействующий (мгновенный) *несиловой* способ взаимодействия частиц заговорил А.Д. Александров. Он писал: «связь частиц, отражаемая в наличии у них общей (волновой – А.Г.) функции не есть, конечно, механическая связь посредством веревок или сил; это есть особая форма связи в зависимости от условий. Но именно взаимная связь, выражаемая наличием общей функции ψ, есть главная основа всех успехов квантовой теории систем из многих частиц. Одна из важнейших особенностей квантовой механики состоит именно в том, что она открыла новую форму взаимной связи явлений в атомной области. Понимание этой особенности в свете учения диалектического материализма о всеобщей связи явлений имеет решающее значение для понимания квантовой механики» [2].

К этому утверждению остаётся только добавить, что в XXI веке для многих физиков становится ясным, что квантовой механике, вопреки воззрениям её создателей, подвластны не только явления в атомной области, но и макрообластях.

1.2.3. Сознание и Вселенная

Сознание меняет Вселенную. Человек придумывает комфортный вариант жизни, и Вселенная перестраивается под этот вариант. Ощущая (отражая) этот новый вариант Внешнего Мира и осознавая своё присутствие в этом мире [72], Человек придумывает научную теорию, объясняющую представший пред ним Внешний Мир. Какое-то время система «Внешний Мир – Человек» находится в равновесии. Однако наступает момент, когда реализованный вариант Внешнего Мира не устраивает человека: он стал некомфортной. Вселенная вновь меняется, старые научные теории выбрасываются (или дополняются), придумываются новые научные теории. И так далее. Ещё недавно, в 1980-е годы, считалось, что Вселенная состоит из вещества и излучения; но сегодня веществу и излучению отдано 4-6%, а всё остальное – тёмные энергия и материя. Приходится науке вновь взяться за дело, хотя совсем недавно казалось, что всё во Вселенной понято и разъяснено, за исключением мелких деталей. Эти детали суть скрытое желание человека переустроить Вселенную поудобнее [79].

1.2.4. Исторические эпохи

В какой форме человек придумывает комфортный вариант жизни? В форме, которая есть скоррелированный результат замыслов-идей, фантазий множества индивидуальных сознаний, представленных в «миру» и это форма, раз она результат согласованных мыслей-идей, должна быть достаточно устойчивой и стационарной, т.е. слабо изменяемой, замороженной, а также целостной.

Во вступлении к своей работе по морфологии Гёте пишет: «Для описания комплекса бытия какого-либо реального существа немец использует понятие гештальт. В этом выражении он абстрагируется от изменчивого, он предполагает, что нечто взаимосвязанное является определённым, законченным и в своем характере фиксированным». Под реальным существом Гёте понимает не только растения и животных, но и, например, город, стихотворение, народ. Индивидуальные сознания порождают устойчивые формы своего бытия, подобные гештальтам Гёте. Назовём эти стационарные устойчивые формы бытия *историческими эпохами*.

Мир существует в форме исторических эпох. Каждая историческая эпоха – это совокупность бытующих среди (поколений(я)) людей представлений о Внешнем Мире; это соответствующие этим представлениям наука, культура и искусство. Это типы вооружения, одежда, мода, транспорт и т.д.

Историческая эпоха – это «замороженное» целостное (вечное) бытие людей. Изменения в жизни практически отсутствуют на протяжении всего существования, точнее, всего дления эпохи. Аналоги наблюдаются на Земле – это, например, первобытно-общинные цивилизации в лесах Амазонки.

Есть эпоха Античности, есть эпоха Возрождения, эпоха Пушкина, эпоха «XX век» (после первой мировой войны и до Интернета) и др.

Все исторические эпохи *существуют*, они не сменяют одна другую, они являются *образцами* (паттерны) Реальности. Их описывали разные ученые: это гештальты Гёте и Шпенглера, культурно-исторические типы Данилевского, цивилизации Тойнби. Они могут вступать во взаимодействие типа квантовой интерференции, и результат их взаимодействия может осознаваться как эволюция некоторой объективно существующей реальности, воспринимаемой и описываемой людьми как смена исторических эпох в их земном существовании (развитии). В этом случае мы имеем дело с проявлением *последовательной* корреляции разных индивидуальных сознаний с окружением, которую мы называем временем. Само разнообразие различных исторических эпох – это результат *ветвления* корреляции разных индивидуальных сознаний с окружением.

1.2.5. Исторические последовательности

Мы пребываем в иллюзии, что сознание – это только пошаговые акты, акты мышления и осознания. Такое представление о сознании – следствие того, что мы пребываем во времени, которое есть лишь реализация сознания в форме последовательности. Но, как мы говорили, сознание может реализовываться и как многообразие параллельно существующих форм (исторических эпох). Действительно, мы привычно утверждаем, «что человек способен *осознавать* одновременно только что-то одно». Но «само понятие «чего-то одного» далеко не ясно: сколько явлений (или вещей) присутствуют в моём сознании, когда я слушаю оркестровую музыку, смотрю балет, веду машину и т.д.» «Полагаю, что люди сообщают о единичности сознания главным образом потому, что этого требуют философские постулаты нашей культуры (исторической эпохи – А.Г.): мы все умеем приводить эти постулаты в соответствие с нашей психической жизнью и опускать всё то, что им не соответствует» (Найсер, [131, с.121,122]).

Один из этих постулатов – это парадигма эволюции. Эволюционирует, согласно науке XX века, абсолютно всё: и Земля (от пылевого облака до планеты), и Вселенная (от сингулярности через Большой Взрыв до наших дней), и жизнь на Земле (от жирных плёнок в тёплых лужах до многоклеточных организмов), и человек (от обезьяны до Homo Sapiens). Усомниться в наличии локомотива эволюции – значит выступить противно нашей культуре.

Сказанное совсем не означает, что наука XX века ошибается. Эта наука описывает результат взаимодействия множества исторических эпох, представляющий собой *линейно упорядоченную реальность*, состоящую из последовательности (кусков) исторических эпох. В этой ленте, в которой мы *живём*, всё воспринимается во времени и, естественно, описывается как эволюция. Но рядом есть другие ленты с иной эволюцией и есть, быть может, нелинейно упорядоченные реальности.

Линейно упорядоченную реальность можно было бы назвать *исторической последовательностью*. В таком названии отражается факт смены (последовательность!) фрагментов разных исторических эпох.

Историческая последовательность есть сумма исторических эпох; она подобна функции, разложенной в ряд Фурье по гармоникам (см. формулу (17.39)).

В линейно упорядоченной реальности «течёт» время. Его проявлением мы считаем старение нашего организма. Наша жизнь возникает в чреве женщины, а заканчивается в старости. Данное обстоятельство считается неизбежностью, демонстрирующей объективность времени, т.е. его независимость от воли людей.

Но легко можно представить, благодаря развитию нашей науки и робототехники, историческую эпоху, где жизнь начинается в форме взрослой особи, появляющейся на свет в ходе «самосборки», а заканчивается «саморазборкой» практически неизменившегося организма по причине «усталости от жизни». Мы будем иметь цивилизацию, бытие субъектов которой не знает физического старения и, следовательно, неподвластно времени.

Является ли сказанное фантастикой? Быть может. Но во всяком случае это уже *идея*, которая может быть реализована совокупностью индивидуальных сознаний и предстать как линейно упорядоченная реальность, т.е. историческая последовательность, равно вселенная-реальность.

1.2.6. Раздвоение материи и сознания

Многоликое бытие вещей, приводящее к распараллеливанию мира вещей, к появлению параллельных вселенных-реальностей и отражённое в форме (1.2) решения уравнения Шрёдингера, – это диалектический процесс раздвоения (дивергенции) форм движения материи в терминологии диалектического материализма, о котором заговорил впервые Энгельс и подробно исследовал Б.М. Кедров [103].

Однако каждая параллельная историческая реальность (=вселенная-реальность), представляемая волновой функцией ψ_k, осознается. В эвереттовской интерпретации квантовой механики говорится не только о ветвлении мира, но и о ветвлении сознания. Иначе говоря, к ветви-реальности ψ_k привязана ветвь сознания. В классической логике это отвечает однозначному выбору элемента $\psi_k \in \Psi$ в множестве вселенных-реальностей

$$\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_k, ...\}.$$

Но осознание любого факта, события, осознание вселенной-реальности ψ_k зависит от *субъективных условий познания и понимания*, от уровня образования, от традиций культуры, когда очевидное может не замечаться.

> «Нечёткость «со-бытия» порождается совокупностью частных разумов, которые не способны одинаковым образом «со-быть» – одинаково воспринимать одно и то же бытие[7]...» (Воробьев, [15, с.38]).

Вводя поэтому набор типов *осознания*

$$\{\ell A, \ell B, \ell C, ...\},$$

мы можем ввести неоднозначный выбор элемента ψ_k из множества Ψ, учитывающий типы осознания:

$$\psi_k \in_{\ell A} \Psi, \quad \psi_k \in_{\ell B} \Psi, \quad \psi_k \in_{\ell C} \Psi...$$

Такая процедура называется введением обобщённого элемента и ведёт к интуиционистской логике [66]. На языке Б. М. Кедрова, мы должны говорить о раздвоении сознания, а формулу

[7] До восприятия бытия вещи для нас она предварительно оказалась неодинаковым образом реализованной частными разумами вещью в себе.

(1.2) переписать в виде:

$$\psi(\ell A) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\ell A),$$

$$\psi(\ell B) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\ell B),$$

$$\psi(\ell C) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(\ell C),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

1.2.7. Многовариантная история

Линейно упорядоченных эволюционирующих реальностей множество; они не совсем независимы. Они могут иметь *склейки* [116], т.е. «общие места». «Общие места» в прошлом нашей реальности проявляются в том, что исторические факты неоднозначны, многолики, многовариантны. Вот почему для любого исторического факта обнаруживаются исключающие друг друга документы, совершенно подлинные и правдивые. Другими словами, историки никогда не смогут докопаться до истины и представить нам абсолютно правдивый и достоверный учебник «Всемирной истории» [62, 66].

Учебников Всемирной истории и любого государства великое множество продается в магазинах. Историки уверены, что они с каждым разом отражают прошлое всё более объективно, правдиво, сводя к минимуму разночтения и субъективизм. Но при внимательном чтении, при размышлении над прочитанном, неизбежно возникнут вопросы, на которые не так легко подчас ответить и, более того, при поиске ответа разрушается казалось бы стройная и логично воссозданная историческая картина прошлого.

Историк судорожно начинает искать нужный, подтверждающий вызвавшее сомнение историческое событие документ в архивах и... находит документ, противоречащий тому, что он хотел бы обосновать. Почему это происходит, описано в книгах автора [62, 66].

1.3. Пространство-время

Основным объектом исследования общей теории относительности Эйнштейна является 4-мерное псевдориманово многообразие, объединяющее в единое целое пространство и время и именуемое в силу этого *пространством-временем.*

Единое пространство-время введено в науку не Эйнштейном, не Пуанкаре, а Германом Минковским. Но надо сказать, что Минковский первоначально говорил о Мире событий. Термин «пространство-время» казался на заре развития ОТО очень удачным, хотя собственное время наблюдателя плохо согласовывалось со временем, упоминаемым в термине «пространство-время». В результате сегодня появляются несколько странные фразы, такие как «пространство-время – это объект вневременной», «пространство-время лишено времени» [71, с.13].

1.3.1. Мир событий Минковского

21 сентября 1908 г. выдающийся математик Герман Минковский ярко, просто, изящно и без каких-либо сложных математических формул пояснил научному миру сущность специальной теории относительности, построенной усилиями Пуанкаре, Лоренца и Эйнштейна [125].

Было заявлено, что окружающий нас Мир есть абсолютное Не́что, являющееся симбиозом пространства и времени. Сами же пространство и время относительны; они лишь формы, проявления, тени, проекции единого абсолютного Не́что, названного позже *пространством-временем*[8].

> «Сценой действия реальности является не трёхмерное евклидово пространство, а четырёхмерный мир, в котором неразрывно связаны вместе пространство и время. Однако глубока пропасть, отделяющая интуитивную сущность пространства от интуитивной сущности времени в нашем опыте,

[8]Видимо, Минковский первым ввел термин «пространство-время». По крайней мере, в работе [126] он писал «Raum-Zeitpunkte» (точка пространства-времени), «Raum-Zeit-Vektor» (пространственно-временной вектор).

> и ничто из этого качественного различия не входит в объективный мир, который удалось выкристаллизовывать физике из непосредственного опыта. Это четырёхмерный континуум, который не является ни «временем», ни «пространством». Только сознание, которое схватывает часть этого мира, испытывает обособленный кусок, который ему приходится встретить и оставить позади себя как историю, т. е. как процесс, который протекает во времени и имеет место в пространстве» (Г. Вейль, 1923 г., [304, с.218]).

Важно отметить, что Минковский сразу заметил, что *геометрия пространства-времени — это геометрия четырёхмерного псевдоевклидова пространства.*

Объединение времени и пространства в единое пространство-время, осуществленное Германом Минковским и названное им *Миром* (*событий*), породило иллюзию, что тайна времени раскрыта и геометрия пространства-времени — это прежде всего геометрия времени.

Как известно, исследуя такой объект как пространство-время, не удается понять сущность времени по той простой причине, что исследователь, моделируя на фоне пространства-времени физические явления, вынужден обращаться к дополнительному понятию *собственное время.* Фактически это означает, что, пытаясь геометризировать собственное время, мы вынуждены ввести ***пятое измерение***. Но нетрудно сообразить, что вскоре нам придётся ввести шестое измерение и т. д. Иначе говоря, раскрытие тайны времени сведется к абсурдному увеличению размерности Мира событий.

Следовательно, остается предположить, что Мир событий (пространство-время) — это объект *вневременной.* Мир событий (пространство-время) лишен времени и является просто вместилищем *событий* (вещей в себе), оно *абсолютно.* Будучи вневременной сущностью, Мир событий (пространство-время) оказывается вне классической физики, становясь благодаря Минковскому понятием новой, релятивистской физики.

Вневременной характер Мира событий, т.е. пространства-времени наиболее ярко выражен в теории *абсолютного пространства-времени.* Согласно этой теории, события прошлого, настоящего и будущего одинаково реальны и все вместе составляют то, что Минковский назвал четырехмерным Миром событий.

1.3.2. Абсолютность пространства-времени

Абсолютность пространства-времени понимается как его самодостаточность, вневременность, вечность, как полнейшая независимость от чего бы то ни было.

Теория абсолютного пространства-времени означает, что «во вселенной дано всё: для неё нет прошлого и будущего, она – вечное настоящее; ей нет пределов ни в пространстве, ни во времени. Перемены происходят в индивидуальностях и соответствуют их перемещению по мировым путям в четырёхмерном, вечном и беспредельном многообразии» (П.Д. Успенский [158, с.204]).

Данность сразу всего пространства-времени, всего Мира событий позволяет говорить о том, что будущее, коль оно уже есть, можно предсказывать, и теория дифференциальных уравнений – один из инструментов такого предсказания (§ 2.2.1).

> «Объективный мир, пространство-время только существует, а не происходит; как целое оно не имеет истории. Только перед взглядом сознания, поднимающегося по моей мировой линии, сечение этого мира «оживает» и движется мимо как пространственный образ, подвергаемый временно́му преобразованию» (Г. Вейль [20, с.106]).

1.3.3. Реальность пространства-времени

Объективность Мира, окружающего моё Я, понимается как *то*, что вне меня, вне моего осознания факта присутствия моего *Я* в *Мире*, во Вселенной, независимо от того, что это *Я* воспринимаю Мир, существуют вещи в Мире, отличные от меня, моего сознания, моего тела, моих мыслей и желаний.

И то что я должен считаться с тем, что есть вещи вне меня, независящие от меня и могущие принести мне вред или пользу подчас вопреки моим мыслям и желаниям[9], есть то, что называется *реальностью* вещей вне меня, есть *реальный Мир.*

Теория относительности в изложении Минковского связала пространство и время в единое целое. И, хотя классическая метафизика считает реальными и пространство, и время, она не спешит объявлять столь же реальным объединённое пространство-время, которое сам Минковский называл *Миром событий.*

Дело в том, что наше *обыденное* восприятия Мира событий Минковского реальным считает лишь то, что лежит в окружающем нас *пространстве.* Более того, это обыденное восприятие находит опору в знаниях, во всех институтах системы образования, основанной на стереотипах аристотелево-ньютоновской физики[10]. Поэтому нашему сознанию претит мысль о реальности абсолютного Мира событий, об объективности, реальности пространства-времени.

Этому способствует скудность доводов, имеющихся в распоряжении исследователей и преподавателей, в пользу реальности Мира событий Минковского.

Существуют, по сути дела, четыре аргумента в пользу утверждения об объективности, реальности пространства-времени, т.е. о таком же существовании пространства-времени, как вещи, которое подобно тому, как существует вещь, называемая столом и на котором пишутся эти строки.

Перечислим эти аргументы:

1. *Реальность Мира событий как следствие относительности одновременности* (Пуанкаре, Минковский) (рис. 1.1).

Либо пространство-время *есть* целиком сразу и в этом смысле абсолютно, либо абсолютна одновременность. Но пре-

---

[9] С Миром во сне мы не считаемся, его вызовы нам не страшны. И мы часто это осознаем прямо во время сна, когда сталкиваемся с опасностью или с нежелаемым.

[10] Исключением не являются физические факультеты университетов, где теория относительности преподносится всего лишь как набор систем отсчёта со своими индивидуальными временной и пространственными координатами.

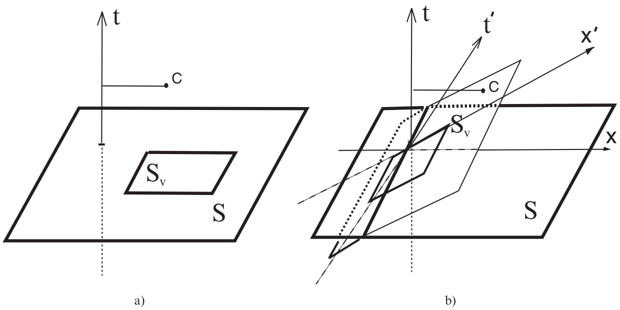

Рис. 1.1: Пространство как совокупность одновременных событий. a) *Пространство-время Галилея-Ньютона.* В момент абсолютного времени t пространство движущегося тела S_v находится в едином покоящемся абсолютном пространстве S, т.е. в том же пространстве. Событие C находится в будущем; оно еще «не наступило». b) *Пространство-время Минковского.* В момент времени t пространство движущегося S_v лишь частично находится в покоящемся пространстве S, частично в будущем покоящегося пространстве S (по времени t), а частично в прошлом покоящегося пространства S по времени t. По времени t' всё пространство движущегося тела S_v находится в одном моменте времени (одновременность). Событие C находится в будущем покоящегося пространства S, но в настоящем пространства движущегося тела S_v; оно для S_v уже «наступило». Следовательно, то что с точки зрения теории пространства и времени Ньютона еще не принадлежит Реальности – событие C, поскольку его еще нет, с точки зрения теории пространства и времени Минковского лежит в настоящем движущегося тела, и значит, оно *есть*, оно реально.

образования Лоренца и эксперименты говорят об относительности одновременности.

2. *Реальность Мира событий как следствие асимметрии во времени и в пространстве* (Флоренский, [159]).

Наиболее веское доказательство реальности пространства-времени лежит в указании на факт существования в природе асимметрии и необратимости [159].

Реально существующая асимметрия во времени и в пространстве, о которой говорит Флоренский, означает отсутствие симметрии в пространстве-времени, равно в Мире событий Минковского, которая делает возможной следующие два преобразования:

$$t \to -t \quad \text{и} \quad x \to -x, \quad y \to y, \quad z \to z. \tag{1.3}$$

При этом такие преобразования должны сохранять световые конусы.

Общая группа Лоренца содержит дискретные преобразования (1.3). Но стоит нам начать говорить о связной непрерывной группе и считать, что пространственно-временная асимметрия должна быть непрерывно меняющейся подгруппой общей группы Лоренца, то остается только одна такая подгруппа:

$$(t, x, y, z) \to \tau(t, x, y, z), \quad -1 < \tau < +1. \tag{1.4}$$

Здесь τ – это время, связанное с сознанием человека, т.е. настоящее, истинное время. Это обеспечивает плавное обращение во «времени», ассоциированном с четвёртым измерением t безвременного Мира Минковского, и одновременную с этим смену левой руки на правую. Но достигается это через вырождение преобразования при $\tau = 0$. При вырождении происходит склейка всех событий в одно событие, что вряд ли приемлемо. Следовательно, Мир Минковского не допускает преобразования (1.4), о чём и говорил Флоренский.

3. *Реальность Мира событий как проявление инерции тел* (Petkov, [276]).

«Если мировая трубка частицы является реальным четырехмерным объектом, из этого следует, что она будет противиться её деформации. Так как мировая трубка ускоряющейся частицы деформированная (не геодезическая), сопротивление, которое оказывает частица ее ускорению, по-видимому, возникает из четырехмерного напряжения, которое появляется в деформированной мировой трубке частицы. Это напряжение, которое вызывается смещениями составных элементов ускоряющейся частицы от положений равновесия, увеличивает возвращающую силу, которая пытается вернуть все элементы обратно на их прежние [неускоренные] положения. $<\ldots>$

Можно привести довод, что механизм инерции, рассмотренный в этой главе, может быть с таким же успехом описан

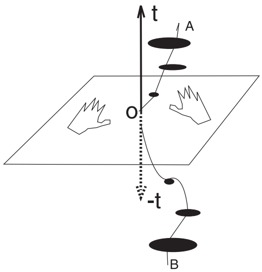

Рис. 1.2: Асимметрия в пространстве (левая рука и правая руки) и асимметрия во времени (необратимость). Необратимость рождается в силу того, что при движении от O к A во времени t мы из малых областей попадаем во все большие (Пенроуз), а при движении B к O во времени t из больших в меньшие. Хотя при обращении времени, т.е. при движение во времени $-t$ также идем от меньших к большим областям.

на обычном трёхмерном языке. Это верно. Настоящий вопрос, однако, в том, существует ли инерция в трёхмерном мире. Мы не ответили здесь на этот вопрос. То, что мы показали, заключается в том, что, если пространство-время реально, инерция должна существовать. Одним из проявлений четырёхмерности мира будет существование инерции посредством механизма, который будет тем механизмом, что здесь был изучен» [276, p.271-272].

4. *Реальность Мира событий как проявление гравитации.*

В самом деле, если пространственно-временной континуум – это вымысел, т. е. пространство-время всего лишь плод воображения, удобный инструмент познания, тогда что является причиной гравитации, если не его искривление? (Гаухман, [24, с.183]).

5. *Реальность Мира событий экспериментальный факт* (Козырев, [104]).

Имеется в виду заявление известного астронома Н.А. Козырева, что ему с помощью созданной аппаратуры удалось получить сигналы из того места, где в данный момент находится звезда, а также еще из двух мест: 1) место, где она была в прошлом, когда был испущен свет, достигший Земли в момент наблюдения (место видимого изображения с точностью до рефракции), и 2) то место, где будет находиться звезда в тот момент, когда ее достиг бы световой сигнал, посланный с Земли в момент наблюдения [87, с.160-166].

Эксперименты Н.А. Козырева были повторены исследователями из Института математики СО РАН (г. Новосибирск) [86, 111, 112], [87, с.160-166]. Они утверждали, что были обнаружены мгновенные воздействия от звёзд, когда те находились на световом конусе прошлого и будущего, в вершине которых находилась аппаратура наблюдателя. Иначе говоря, когда звезда и аппаратура были разделены нулевым интервалом $ds^2 = 0$. Кроме того, сигнал фиксировался от истинного положения звезды.

Как видим, аргументов немного. Причем не все из них убедительны для каждого физика.

1.3.4. Двойственный характер пространства-времени

В книге [66] отмечался двойственный характер пространства-времени: с одной стороны каждая его точка – это субстанция-объект, о чём писал Минковский, а с другой стороны, точки – это элементарные события. Но события, например исторические события, вещь крайне расплывчатая, неопределённая, многоликая. Лик события – есть проявление некоторой совокупности индивидуальных сознаний. Многоликость (многовариантность) Мира – это событийное проявление многообразия индивидуальных сознаний – субъектов разума.

Известная в классической математике числовая характеристика многоликости события – это его вероятность. Изучение связи событийного подхода, вероятности, вещей (материи) и сознания предмет новой науки *эвентологии*, развиваемой О.Ю. Воробьёвым и его учениками [22, 117].

Индивидуальные сознания квантово связаны с бесчисленным множеством ликов вещей, что отражается в существовании множества линейно упорядоченных эволюционирующих реальностей, т.е. множества различных пространств-времён. Бог (совокупность индивидуальных сознаний) породил не один Мир, а множество [71, с.310].

Вероятность события – это не только число удачных исходов в серии испытаний, но, скорее, число миров, в которых событие наблюдается.

Поскольку многовариантность Мира событий, т.е. существование множества эвереттовских миров, – вещь, понимаемая с трудом, то события часто наделяются атрибутом случайности. Случайность, по Гегелю, – это непознанная необходимость, и поэтому все исходы испытания реализуются с неизбежностью, но в разных мирах. Но познание других миров достоверно для сознания лишь в случае их непосредственного созерцания-наблюдения. Принципиальное ограничение на возможность созерцания-наблюдения других (параллельных) миров приводит к тому, что мы констатируем случайность исходов испытания.

1.4. Гравитация

Под *гравитацией* имеется ввиду свойство тел притягивать друг друга.

Ньютон писал: «Под словом «притяжение» я разумею здесь вообще какое бы то ни было стремление тел к взаимному сближению, происходит ли это стремление от действия самих тел, которые или стараются приблизиться друг к другу, или которые приводят друг друга в движение посредством испускаемого эфира, или это стремление вызывается эфиром или воздухом, или вообще какою-либо средою, материальною или нематериальною, заставляющей погруженные в нее тела приводить друг друга в движение» [134, с.244]. Причину «свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю. Все же, что не выводится из явлений, должно называться *гипотезою*, гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам, не место в экспериментальной философии. В такой философии предложения выводятся из явлений и обобщаются помощию наведения. Так были изучены непроницаемость, подвижность и напор тел, законы движения и тяготение. Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря» [134, с.662].

М.В. Ломоносов в свое время не мог согласиться с теорией гравитации Ньютона, поскольку не мог согласиться, что одно тело действует на другое на расстоянии без каких-либо промежуточных агентов. Он говорил о том, что причиной проявления притяжения является «тяготительная материя», наполняющая Вселенную. Взаимодействие частиц этой материи с телами и вызывает эффект тяготения друг к другу. В 1782 г. Ж. Лесаж предположил, в общем-то развивая мысль Ломоносова, что всю вселенную заполняют бесчисленные очень малые «мировые» частицы. Они двигаются хаотически во всех направлениях с очень большими скоростями и при соударении с телами передают им свой импульс. Тела являются друг для друга экраном от этих частиц и разница переданных импульсов создает силу тяготения этих тел.

Общая теория относительности трактует гравитацию как кривизну пространства-времени. Потенциалы гравитационного поля, а их десять, – это метрика пространства-времени, или, на языке дифференциальной геометрии, первая квадратичная форма, с помощью которой измеряются длины мировых линий, площади и объемы областей, (внутренняя) кривизна.

ОТО дает объяснение природе гравитации (притяжению), говоря, что мы наблюдаем *силу притяжения*, поскольку тело оказывается в точке пространства-времени с ненулевой кривизной. Кривизна пространства-времени и есть причина гравитации[11].

---

[11] Впрочем, Мак-Витти считал, что сказать, «что тяготение есть проявление кривизны четырехмерного геометрического многообразия, это значит объяснить некоторую тайну с помощью загадки и придать физическое значение одной из математических функций, полезной при описании физической ситуации» [120, с.24]. Иначе говоря, кривизна, по его мнению, как и поле, например гравитационное, – это не более чем вспомогательное

1.5. Антигравитация

Под *антигравитацией* имеется ввиду свойство тел отталкивать друг друга. Иначе говоря, явление отдаления одного тела от другого. Причем это отталкивание никоим образом не обязано наличию у этих тел одноимённого электрического заряда.

Диалектический взгляд на Природу требует существования антигравитации наравне с гравитацией, поскольку это два противостоящих полюса, две противоположности. И хотя в нашей практической деятельности, в нашей повседневности, в нашей исторической эпохе нет места для антигравитации, она должна присутствовать во Внешнем Мире. И её следует обнаруживать.

Космологическая антигравитация, связанная с космологической постоянной, способствует тому, что Вселенная является *пространственно большой*. Хотя не совсем понятно, почему она столь большая. Общая теория относительности предсказывает также антигравитацию в *малом*. Но её смысл неясен, как не ясно, насколько схожи антигравитация в «малом» и в «большом».

1.6. Кривизна

Общая теория относительности создавалась Эйнштейном как теория гравитации, т.е. притяжения. Гравитация, как ему казалось, проявляется как кривизна пространства-времени. Поскольку никто не наблюдал падающих вверх вещей, то вопрос, может ли кривизна проявиться как отталкивание, как-то выпадал из внимания. Все силы исследователей были направлены на проблемы *тяготеющей материи*, и хотя сам Эйнштейн, вводя космологическую постоянную, ввёл в теорию антигравитацию на большом расстоянии, а Гильберт [236] и Бауэр [188] обнаружили её на малых расстояниях, все эти странные,

---

средство при вычислениях [120, с.25].

непривычные проявления кривизны не считались характерными для общей теории относительности и поэтому не включались в учебники.

Обнаружение *тёмной энергии*, т.е. антитяготеющей материи, говорит нам о том, что общая теория относительности не есть теория только тяготеющей материи, а есть теория пространства, времени и материи. Материя искривляет пространство-время, и кривизна проявляется то как притяжение, то как отталкивание.

1.7. Speculatio

1. Академик В.И. Вернадский связывал жизнь с особым состоянием пространства-времени:

> «Процессы, создающие живое, естественное тело, необратимы во времени. Возможно, что это окажется следствием особого состояния пространства-времени, имеющего субстрат, отвечающий неевклидовой геометрии» (В.И.Вернадский, 1991, [16, с.176]).

Реальность пространства-времени как Мира с псевдоевклидовой геометрией связана с тем, что общая группа Лоренца запрещает непрерывные обращения времени и зеркальные отражения без вырождений. Это и есть особое состояние пространства-времени по Вернадскому. Реальность – это то, что рождается сознанием (людей). Мы не можем поменять непрерывно правое на левое. Такова Реальность, созданная нами, поэтому и созданная нами псевдоевклидова Реальность (пространство-время) реальна.

Особое состояние пространства-времени: что под этим следует понимать? Необратимость – это констатация асимметрии. Иначе говоря, то, что понимается под состоянием пространства-времени, должно содержать, например, некоторое несимметричное отношение между событиями пространства-времени.

Переход к несимметричному отношению, который для человека естественен, поскольку он четко знает, что прошлое не возвращается, может объясняться следующим образом.

Мир событий становится несимметричным сразу после того, как в нем появляется Наблюдатель – человек. В силу самой организации Наблюдателя как объекта, *не способного отразить в себе* весь Мир событий *целиком*, он воспринимает Мир с теми или иными ограничениями. Для человека это ограничение сводится к понятию времени, которое «течет только от прошлого к будущему».

2. Кажется, в одной из книг Энгельса была высказана мысль, что если человек подойдет к «границе» пространства и сделает шаг вовне, то достроятся новые кубометры пространства. И так каждый раз, когда подходят к «границе» пространства.

Нечто подобное находим у Бартини: «Я думаю, что не следует представлять себе бесконечную Вселенную таким образом, что вокруг нас галактика за галактикой распределены более или менее равномерно без конца в бесконечном 3-мерном пространстве. Я думаю, что Природа квантована не только в малом, но и в большом: вытекающая из современной теории замкнутость, конечность являются атрибутами не Вселенной как целого, а лишь отдельных частей этого целого. Выше мы видели, что протяжённости претерпевают разрывы на рубеже ρ (кинематический гравитационный радиус электрона), r (классический радиус электрона) и R (радиус нашего космического скопления). Эта метагалактическая система конечна и замкнута, она является космологическим «атомом». Основная ошибка буржуазных учёных в этом вопросе заключается в том, что они отождествляют эту конечную частицу Вселенной с бесконечной Вселенной, подобно тому, как в древние времена наша планета отождествлялась с миром. Мне кажется возможным, что пространство не существует в «готовой», статической «форме» и вне нашей системы; может быть, что и вне нашего космического скопления пространство генерируется последовательно, скачкообразно, беспредельно» [9, с.86].

Глава 2

Классическая логика и классический анализ

Цель любой науки – получение *истинных* знаний об объекте исследования. Только истинные знания гарантируют, в случае их использования, достижение практически значимого результата. Поиск истинных знаний ведется как посредством эксперимента, *опыта*, так и посредством *умозрительных построений.*

Для различных исторических эпох человеческого бытия при проведении исследования характерным является отдание предпочтения то умозрительным конструкциям, то экспериментальным действиям. Но для любой эпохи важным является прояснение вопроса: в какой мере *истинно* то знание, которое добыто в ходе проведенного исследования?

Произнеся слово «истинно», исследователь прежде всего должен задуматься над его содержанием и определиться с его смыслом.

Логика, логические законы, по мнению знаменитого логика Фреге, направлены на раскрытие содержания слова *истинно.* Для этого логика предлагает исследователю набор *допустимых* средств рассуждения, которые предохраняют нас от ошибок или заблуждений [127, с.19].

Любая научная книга, статья и т.д. изложены, написаны в соответствии с тем, что в научном сообществе понимается под строгим научном изложением предлагаемой теории, полученных выводов, достигнутых результатов. Современный физик использует в научном поиске, при получении и изложении результатов классическую *двузначную логику.* Он не изучает её специально, подобно тому, как это происходит при обучении юристов, но овладевает ею в ходе получения образования через чтение учебников и статей, которые служат для него *образцом* проведения *правильных рассуждений.* Сами образцы были сформированы в конце XVII и в начале XVIII века.

2.1. Классическая логика

Современная наука основывается на том, что высказываемые в ходе научного анализа утверждения с необходимостью *доказываются.* Доказательства представляют собой тексты, которые пишутся в строгом соответствии с принятыми *классическими логическими правилами* (законами). Правила эти установились на момент начала эпохи классической науки и были сформулированы Аристотелем, Лейбницем и другими логиками.

В наши дни физик, излагая выполненную работу на бумаге, подчас не задумывается над тем, что он строго соблюдает эти правила. Для него очевидным является правило, согласно которому «противоречащие одно другому утверждения не могут быть истинными относительно одного и того же предмета в одно и то же время и в одном и том же смысле»[1]. Но ведь это первоначальная формулировка так называемого *закона противоречия* Аристотеля [127, с.32].

[1]Это само собой разумеющееся для нас логическое положение совсем не было таковым в эпоху античности. В платоновском диалоге «Эвтидем» описано, как два брата побеждают в споре своих оппонентов, утверждая, что ответ «нет» не исключает ответа «да». «Разве почтенное не есть всегда почтенное, а низкое – низкое? – спрашивает их Сократ. «Это как мне нравится», – отвечает Дионисодор» [127, с.32].

Иначе говоря, само собой разумеющимся является положение, что научные высказывания не должны противоречить друг другу. Более того, столь же естественным считается положение, что установленное, доказанное утверждение A полностью исключает истинность утверждения *не-A*. Это уже *закон исключенного третьего*, разрешающий вести доказательства «от противного».

Таким образом, легко видеть, что все те рассуждения, которыми наполнены учебники физики, статьи и монографии, все они строго соответствуют законам классической аристотелевской логики. Поскольку существуют и *другие* логики, не менее строгие и формализованные, чем классическая, то это означает, что результаты, полученные в ходе традиционных физических теоретических выкладок и традиционных интерпретаций экспериментальных данных, являются далеко не полными и отнюдь не исчерпывающими. Отчасти на это намекает квантовая механика, логика которой не является классической[2].

2.2. Классическое дифференциальное исчисление

Физика немыслима без дифференциальных уравнений. Теория дифференциальных уравнений – основа теоретического инструментария современной физики. Появился этот инструмент познания Внешнего Мира до обнародования Ньютоном своих законов физики, но получил логическое обоснование своей (классической) истинности лишь в XIX веке.

Традиционно считается, что дифференциальное уравнение – это условие, которому должна удовлетворять скорость (или ускорение) изменяющейся величины, описывающей эволюцию физической системы. Но при внимательном изучении вопроса раскрывается более глубокая сущность способа изу-

[2]Давно замечено, что классический двухщелевой эксперимент не описывается в рамках классической логики, что и послужило поводом для создания особой квантовой логики [72].

чения Внешнего Мира с помощью дифференциальных уравнений.

2.2.1. Дифференциальное уравнение: что оно означает?

Пусть состояние физической системы в момент времени t описывается функцией $f(t) \in \mathbb{R}^n$. Есть ли какая-то связь между состоянием физической системы в разные моменты времени, скажем, в моменты t и $t+h$ $(h>0)$? Опыт классической науки говорит, что это может быть причинно-следственная связь. *Считается*, что знание состояние в момент t *предопределяет* состояние в момент $t+h$. Математически это должно означать возможность *вычисления* $f(t+h)$ с помощью $f(t)$.

В таком случае, если мы стоим на позициях *детерминизма*, то должны иметь уравнение

$$f(t+h) = F(t,h,f(t)), \tag{2.1}$$

которое при стремлении к простоте может сводиться к уравнению

$$f(t+h) = f(t) + A(t,h). \tag{2.2}$$

Если же предполагаем лишь *вероятностное предсказание будущего* системы, то должны иметь уравнение для вычисления вероятности $P(t,t+h)$ перехода из состояния системы в момент t к состоянию системы в момент $t+h$, т.е.

$$P(t,t+h) = A(t,h). \tag{2.3}$$

В детерминистском случае, предполагая, что $A(t,h) = a(t)h + o(h)$, $o(h)/h \to 0$ при $h \to 0$, получаем вместо уравнения (2.2) то, что называется *дифференциальным уравнением*:

$$\frac{df}{dt}(t) = a(t). \tag{2.4}$$

Само же уравнение (2.2) переписывается в виде:

$$f(t+h) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)h + o(h). \tag{2.5}$$

Этот случай продиктован классической трактовкой *бесконечно малой* величины $o(h)$ в математическом анализе, которая связывается с именем французского математика Коши. По определению, $o(h)$ есть бесконечно малая при $h \to 0$ более высокого порядка, чем h, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только $|h| < \delta$, то $|o(h)/h| < \varepsilon$. Это определение, эта фраза в соответствии с принципами математики, вводящей всегда для фраз естественного языка *формульную* запись на *языке символов*, представляется формулой

$$\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

Понятие бесконечно малой величины, основанное на языке $\varepsilon - \delta$, предложенное Коши, не является единственно возможной.

В XVII-XVIII веках много рассуждали по-поводу того, что следует понимать под бесконечно малой величиной. Было ясно, что она «не есть нуль, но ведет себя в известных случаях, как обыкновенный нуль» [169, с.13]. Лопиталь (1696) при оперировании с бесконечно малой величиной h пренебрегал ее квадратом.

Поэтому возможна такая трактовка при определении производной df/dt: принимается, что $o(h) = h^2 = 0$, хотя при этом $h \neq 0$.

В таком случае, также имеем дифференциальное уравнение

$$\frac{df}{dt}(t) = a(t), \tag{2.6}$$

но уравнение (2.5) примет уже иной вид:

$$f(t+h) = f(t) + \frac{df}{dt}(t)h, \quad h^2 = 0. \tag{2.7}$$

Это уже неклассическое представление функции $f(t)$, базирующееся, как будет показано в части II (§ 18.5.3), на интуиционистской логике, для которой не действует логический закон исключенного третьего.

Более того, данная трактовка бесконечно малой величины несовместима с обычным пониманием h как действительного числа, но допустима, если **расширить** множество классических действительных чисел $\mathbb{R}$ за счет добавления *бесконечно малых чисел* со свойством $h^2 = 0$.

Но в любом случае, классическом и неклассическом, дифференциальное уравнение – это один из самых естественных и традиционных способов прогноза будущего состояния физической системы по настоящему ее состоянию. Разница – в *качестве* предсказания. Неклассические предсказания более полные, более богатые, они *многовариантны*!

То, что дифференциальное уравнение – это эффективный инструмент предсказания будущего, есть следствие *реальности* Мира событий Минковского, в котором будущее *уже существует*, и поэтому может быть описано. Вопрос: насколько точным может быть это описание в настоящем? Видимо, здесь будет сказываться то, насколько близко будущее к настоящему.

2.2.2. Допустимые траектории дифференциальных уравнений

Поскольку будущее системы, так уж устроен наш Мир, неизвестно, то, располагая дифференциальным уравнением, найденным для изучаемой системы, мы надеемся, что оно даст нам будущее $x(t+h)$ системы по ее настоящему $x(t)$.

Важно ли при этом знать промежуточные состояния системы $x(s)$, $t < s < t+h$? В классическом дифференциальном исчислении процедура решения дифференциального уравнения при предположении *гладкости* изучаемых функций, удовлетворяющих дифференциальному уравнению, дает нам непрерывную траекторию $T(t, t+h) = \{x(s),\ t \leq s \leq t+h\}$, автоматически предоставляя нам описание всех промежуточных состояний системы. При этом, и это очень важно, траектория $T(t, t+h)$ является гладкой, т.е. не имеет *зазубрин*, ни в одной точке. Тем самым обеспечивается однозначность при предсказании будущего (Пименов, [141]).

Поскольку эволюция системы разворачивается в пространстве-времени, то желание иметь однозначно предсказуемое будущее системы обеспечивается тем, что с самого начала пространство-время рассматривается как *гладкое многообразие.*

Но если гладкость пространства-времени неоднозначна, т.е. могут существовать разные, принципиально различные гладкости, которые гладкую траекторию в одной гладкости не делают гладкой в другой, то одно и тоже дифференциальное уравнение не дает однозначного предсказания состояния для будущего. Разве что допустить, что траектория, являющаяся негладкой в *нашей* гладкости, а значит, не имеющая права считаться решением *нашего* дифференциального уравнения, не может быть траекторией *наших* систем. Вырисовывается странная ситуация наличия иных, теневых, параллельных миров.

Если же разрешить траекториям дифференциального уравнения быть негладкими, т.е. рассматривать обобщенные траектории, переходя фактически от дифференциальных уравнений к интегральным, то сталкиваемся с ситуация многовариантного будущего (Пименов, [141]). Стоит ли воспользоваться этой возможностью, вопрос сложный, но то, что на 4-мерном пространстве-времени, гомеоморфном $\mathbb{R}^4$, существуют принципиально разные гладкие структуры, – научный факт, открытый математикой в 1980-е годы (см. гл. 4).

2.3. Speculatio

1. Научное познание основывается на логике. Логика – это разрешенные, строго оговоренные правила построения суждений и вывода одних суждений из других.

Знание законов логики способствует совершенствованию интеллекта, указывает ему пути к истине и предохраняет его от ошибок.

> Чувства не обманывают, а обманывает суждение (Гёте, [28, с.151]).

2. «Совсем недавно, вплоть до конца девятнадцатого века, математические теории обычно строились интуитивно или аксиоматически. Другими словами, они основывались либо на интуитивных идеях – идеях, почерпнутых из реальности, – относительно основных понятий теории, либо на свойствах этих понятий, выраженных системами аксиом.

Однако историческое развитие показало, что чисто интуитивное понимание таких понятий недостаточно как основа теорий» (Расёва, Сикорский, [142, с.171]).

В начале XX века логик Витгенштейн писал:

> 2.0121. Логика трактует каждую возможность, и все возможности суть её факты.
>
> Или в другом переводе [17, с.5]:
>
> 2.0121. Логическое не может быть только возможным. Логика имеет дело с любой возможностью, а ее факты суть все возможности.

Если учесть, что в конце XX века рухнула конструкция под названием «классическая логика»[3], и в этом же XX веке создано великое множество иных логик, то возникает вопрос, какова та логика, чьи факты суть все возможности?

И какие возможности не способна трактовать классическая логика, на которой основывается математический аппарат общей теории относительности?

---

[3] Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетия. (Интернет-статья).

Глава 3

Гравитационное поле и пространство-время

В 1915 году, благодаря усилиям Эйнштейна и Гильберта, была создана релятивистская теория гравитации, названная Эйнштейном *общей теорией относительности* (ОТО). Название, как впервые разъяснил советский физик В.А. Фок [161], было неудачным и искажало истинное содержание теории. В настоящее время ОТО излагается как теория искривленных лоренцевых многообразий, подчиняющихся уравнениям Эйнштейна.

ОТО описывает гравитацию как свойство пространственно-временной формы представления Реальности.

3.1. Искривленное псевдориманово пространство-время

Пространство-время – это 4-мерное гладкое многообразие M^4, оснащенное лоренцевой метрикой[1] g_{ik}.

[1] Латинские буквы в качестве индексов пробегают значения 0,1,2,3, греческие – 1,2,3.

Наличие лоренцевой метрики, т.е. псевдоримановой метрики сигнатуры $< + - -- >$, означает, что в общем случае пространство-время – это *искривленное* псевдориманово многообразие. Кривизна описывается с помощью тензора кривизны Римана-Кристоффеля:

$$R^i{}_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl},$$

где Γ^i_{jk} – коэффициенты линейной связности, называемые символами Кристоффеля 2-го рода, и вычисляемые в общей теории относительности по формуле:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{is} \left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^s} \right).$$

Искривленность пространства-времени понимается как наличие точки $x \in M^4$, для которой

$$R^i{}_{klm}(x) \neq 0.$$

Эйнштейн отождествлял гравитационное поле с метрикой g, Синг [149, с.102] – с ненулевым тензором кривизны.

3.2. Уравнения гравитационного поля

Самой важной и главной главой общей теории относительности являются *уравнения Эйнштейна*, которые часто называют уравнениями гравитационного поля.

Эти уравнения имеют множество самых различных решений. И если для отдельно взятого (сферически-симметричного) тела такое решение фактически единственно, для Вселенной в целом теория предлагает множество решений, выбор между которыми сделать достаточно трудно. Очень часто, изучая Вселенную в рамках ОТО, исследователь берет то космологическое решение, которое ему представляется наиболее подходящим. Как правило, выбор решения связан с выбором начальных и граничных условий, с предположениями о тех или иных симметриях, а подчас аргументом в пользу выбора является простота решения. Неопределенность с выбором решения, имеющая место в ОТО, как следует признать, говорит о *непредсказуемости* ОТО как теории.

3.2.1. Уравнения Эйнштейна

Создавая релятивистскую теорию гравитации как обобщение специальной теории относительности и теории гравитации Ньютона, Эйнштейн никак не мог найти вид уравнений гравитационного поля. Уравнения, к которым он пришел, имели вид:

$$R_{ik} = \varkappa\, T_{ik}, \tag{3.1}$$

где $\varkappa$ – константа. В случае пустого пространства они сводились к уравнениям $R_{ik} = 0$ и в таком виде позволили Эйнштейну найти объяснение смещению перигелия Меркурия и вычислить правильное значение смещения, равное $43''$ за 100 лет.

В это время Эйнштейн постоянно переписывался с Гильбертом, они оба искали вид уравнений гравитационного поля, и успех Эйнштейна с объяснением смещения перигелия Меркурия, видимо, особо стимулировал активность Гильберта и тот первым нашел правильную форму искомых уравнений:

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}} \tag{3.2}$$

Эйнштейн, ознакомившись с письмом Гильберта, в котором были правильно написаны уравнения, первым их обнародовал.

3.2.2. Модификация уравнений Эйнштейна

Тензор Эйнштейна $G_{ik} \equiv R_{ik} - (1/2) g_{ik} R$ и тензор энергии-импульса T^{ik} удовлетворяют соответственно тождеству

$$\nabla_k G^{ik} = 0$$

и «закону сохранения»

$$\nabla_k T^{ik} = 0.$$

Поскольку метрика g^{ik} ковариантно постоянна, т.е. $\nabla_k g^{ik} = 0$, то уравнения Эйнштейна (3.2) допускают модификацию вида:

$$\boxed{R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik}} \tag{3.3}$$

где Λ – постоянное число, названное Эйнштейном *космологической постоянной.*

Уравнения (3.3) с $T_{ik} = 0$ перепишем в виде:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} \left[\left(-c^2 \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) u_i u_k - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ik} \right]. \tag{3.4}$$

Уравнения (3.4) говорит, что поле g_{ik} создается материей с тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$(T_\Lambda)_{ik} = (c^2 \rho_\Lambda + p_\Lambda) u_i u_k - p_\Lambda g_{ik},$$

где

$$\rho_\Lambda = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad p_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

с уравнением состояния

$$c^2 \rho_\Lambda + p_\Lambda = 0. \tag{3.5}$$

Из уравнения состояния следует, что поскольку должно быть $\rho_\Lambda > 0$, то $\Lambda < 0$. Но тогда $p_\Lambda < 0$.

3.2.3. Случай слабого поля

Беря след уравнений (3.3), найдем

$$-R + 4\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T.$$

Используя данное соотношение, перепишем уравнения (3.3) в виде:

$$R_{ik} - \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{3.6}$$

Рассмотрим слабое поле $g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}$, где h_{ik} – возмущение метрики Минковского η_{ik}. Если пренебречь вариациями поля h_{ik} во времени, произведениями его производных и принять, что $g_{00} = 1 + 2U/c^2$, то R_{00} можно записать через потенциал U как $R_{00} = (1/2)\triangle h_{00} = \triangle U/c^2$. Полагая, что поле создается идеальной жидкостью и $|p| \ll \rho$, имеем $T_{00} \simeq -T \simeq \rho$. Тогда 00-компонента уравнений (3.6) дает

$$\triangle U = 4\pi G\rho - \Lambda c^2. \tag{3.7}$$

Для $\Lambda = 0$ это уравнение переходит в уравнение Пуассона для гравитационного потенциала теории гравитации Ньютона. Следовательно, теория гравитации Эйнштейна переходит (при $c \to \infty$) в теорию гравитации Ньютона.

3.2.4. Теорема Картана

Эйнштейн искал уравнения гравитационного поля, исходя из предположения, что они являются тензорными и имеют следующий вид:

$$G^{ik} = \varkappa T^{ik}, \tag{3.8}$$

где T^{ik} – тензор энергии-импульса материи, создающей гравитационное поле, который должен удовлетворять тензорному обобщению закону сохранения:

$$\nabla_k T^{ik} = 0. \tag{3.9}$$

Необходимо было найти вид тензора G^{ik}, который называют *тензором Эйнштейна*. Вид этого тензора был найден Гильбертом. Много позже Эли Картан, исходя из того, что из уравнений поля (3.8) и из (3.9) вытекает тождество

$$\nabla_k G^{ik} = 0,$$

доказал [201, 202], что этому тождеству удовлетворяет только тензор вида

$$G^{ik} = const \cdot \left[R^{ik} - \frac{1}{2}g^{ik}(R - 2\Lambda)\right].$$

3.3. Принцип эквивалентности Эйнштейна

Принцип эквивалентности, сформулированный Эйнштейном, гласит:

> Пребывание в условиях пространства, в котором гравитационное поле постоянно и ускорение свободного падения равно g, эквивалентно пребыванию в равномерно ускоренной системе отсчета, движущейся с ускорением g в пространстве, свободном от гравитационных сил.

Отсюда следует, что если человек находится в стоящем лифте, то он находится под воздействием поля гравитации с ускорением свободного падения g. Если вдруг лифт начинает свободно падать, т.е. двигаться ускоренно с ускорением g по направлению к поверхности Земли, то в лифте на человека начинает действовать сила в направлении противоположном направлению падения лифта с ускорением g. Следовательно, внутри лифта перестает ощущаться поле гравитации и наступает невесомость.

Математически нахождение *пробного* тела в поле гравитации означает, что мировая линия этого тела $L(s) : x^i = x^i(s)$ удовлетворяет уравнению геодезических

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\Gamma^i_{jk}(L(s))\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds}. \tag{3.10}$$

Невесомое движение тела в лифте в общей теории относительности традиционно описывается как переход к такой локальной карте $x^{i'}$, в которой в отдельно взятой точке x_0

пространства-времени

$$\Gamma^{i'}_{j'\,k'}(x_0) \equiv 0. \tag{3.11}$$

При этом считается, что в Реальности точка x_0 соответствует некоторому достаточно малому объему пространства, рассматриваемому на достаточно малом отрезке времени. Следовательно, уравнение (3.10) переписывается в новой локальной карте в виде

$$\frac{d^2 x^{i'}}{ds^2}(x_0) = 0, \tag{3.12}$$

что означает пребывание в покое или в состоянии прямолинейного и равномерного движения, т.е. вне сил гравитации.

Исторически такое пояснение всех устраивало, тем более, что можно доказать нечто большее (см. [143, с.428-430]), чем равенство (3.11): найдется такая локальная карта, в которой на всей мировой линии пробного тела

$$\Gamma^{i'}_{j'\,k'}(L'(s)) \equiv 0, \tag{3.13}$$

т.е. вдоль мировой линии пробного тела относительно системы отсчёта, связанной с локальной картой $x^{i'}$, исчезает сила гравитации. Иначе говоря, сила гравитации нейтрализуется на относительно долгое время, хотя при этом размеры лифта имеют математически нулевой объём. Но большего в классической римановой геометрии получить невозможно.

3.4. Сферически-симметричное решение Шварцшильда-Коттлера

Уравнения Эйнштейна (3.3) записываем для вакуума, т.е. с *нулевым* тензором энергии-импульса:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik}(R - 2\Lambda) = 0, \tag{3.14}$$

которые сводятся к уравнениям

$$R_{ik} = \Lambda g_{ik}. \tag{3.15}$$

Рассмотрим случай, когда гравитационное поле обладает центральной симметрией и создается сферическим телом с массой M. Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени может быть взята в виде

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}dt^2 - e^{\lambda(r,t)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).$$

Отметим, что такой вид метрики не определяет еще выбора временной координаты однозначным образом: данная метрика может еще быть подвергнута любому преобразованию вида $t = h(t')$, не содержащему r.

Подставляя это выражение для метрики в уравнения (3.15), получаем:

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 0, \tag{3.16}$$

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) + \\ +\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\nu}\dot{\lambda}}{2}\right) - \Lambda = 0, \end{gathered} \tag{3.17}$$

$$-\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 0, \tag{3.18}$$

$$\dot{\lambda} = 0. \tag{3.19}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r, а точка – дифференцирование по t.

Уравнение (3.17), как известно [149, с.235], является следствием уравнений (3.16),(3.18), (3.19). Поэтому в дальнейшем уравнение (3.17) опускаем.

Из уравнения (3.19) следует, что $\lambda(r,t) = \lambda(r)$, т.е. λ не зависит от координаты t.

Складывая уравнения (3.16), (3.19), получаем $\nu' + \lambda' = 0$, т.е. $\nu + \lambda = f(t)$, где $f(t)$ – произвольная функция, зависящая только от координаты t. В силу того что мы оставили за собой еще возможность произвольного преобразования времени вида $t = h(t')$, которое эквивалентно прибавлению к ν произвольной функции времени, то с его помощью $f(t)$ всегда можно обратить в нуль. Итак, не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda + \nu = 0$.

Уравнение (3.18) легко интегрируется. Получаем, что

$$e^{\nu} = e^{-\lambda} = 1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}. \tag{3.20}$$

Подставляя эти значения для λ и ν в выражение для ds^2, получаем, что

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{C}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{C}{r}\right)^{-1} dr^2 - \\ -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2). \tag{3.21}$$

Эту метрику будем называть решением Шварцшильда-Котлера вакуумных уравнений Эйнштейна.

Как видим, гравитационное поле на бесконечности $r = \infty$ исчезает. Считая, что для больших r 00-уравнение Эйнштейна переходит в уравнение (3.7), находим, что

$$C = -r_g \equiv -\frac{2GM}{c^2}$$

Таким образом, гравитационное поле Шварцшильда-Коттлера[2] имеет вид

$$\boxed{ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) dt^2 - \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} dr^2 - \\ -r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).} \tag{3.22}$$

[2]Карл Шварцшильд нашел решение в 1916 г. для случая $\Lambda = 0$. Коттлер обобщил это решения для $\Lambda \neq 0$ в 1922 году.

3.5. Проблема энергии-импульса гравитационного поля

Общая теория относительности создает проблемы с утвердившимся к XX веку представлением о фундаментальности законов сохранения энергии в описании физической Реальности. Более того, теория не дает общепризнанного способа вычисления энергии-импульса гравитационного поля.

3.5.1. Отсутствие законов сохранения энергии и импульса материи в общей теории относительности

Тождество

$$\nabla_k T^{ik} = 0 \tag{3.23}$$

часто называют законом сохранения энергии-импульса в ОТО. Название это пришло из специальной теории относительности, где уравнение (3.23) имеет вид

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{3.24}$$

Убедимся, что в случае специальной относительности, тождества (3.24) ведут к закону сохранения 4-импульса.

Пусть Ω – область в пространстве-времени Минковского, ограниченная двумя гиперплоскостями $x^0 = x^0_1,\ x^0 = x^0_2$. Примем, что на пространственной бесконечности $T^{ik} = 0$.

Тогда

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k}\sqrt{-g}\,d^4x = \int\limits_{\{x^0=x^0_1\}\cup\{x^0=x^0_2\}} T^{ik} dS_k = 0,$$

или

$$\int\limits_{x^0=x^0_1} T^{ik} dS_k = \int\limits_{x^0=x^0_2} T^{ik} dS_k = \int\limits_{\mathbb{R}^3} T^{i0} d^3x = (const)^i.$$

Определяя 4-импульс как

$$P^i = \int\limits_{\mathbb{R}^3} T^{i0} d^3x,$$

в силу предыдущих равенств имеем закон сохранения 4-импульса

$$P^i = (const)^i.$$

Однако в искривленном пространстве-времени тождества (3.23) имеют вид:

$$\nabla_k T^{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} T^{ik})}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kn} T^{kn} = 0. \tag{3.25}$$

Первое слагаемое привело бы к закону сохранения, но мешает второе слагаемое.

Следовательно, *в искривленном пространстве-времени ОТО, вообще говоря, не выполняются законы сохранения энергии и импульса материи* [18, с.156].

3.5.2. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля

Однако в ОТО существуют выражение t^{ik}, не являющееся тензором, а представляющее собой так называемый псевдотензор, благодаря которому справедливо тождество:

$$\frac{\partial}{\partial x^k}[\sqrt{-g}(T^{ik} + t^{ik})] = 0. \tag{3.26}$$

Выражение t^{ik} называют *псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля.*

Начиная с Эйнштейна, псевдотензоры использовались с целью решить проблему несохранения энергии-импульса в гравитационном поле. Было найдено множество разных формул для t^{ik}. Но поскольку t^{ik} нековариантен относительно замены координат, то не стоит удивляться, что использование псевдотензоров часто приводило к весьма нелепым физическим результатам. Столь неприятная для физиков ситуация получила название *проблемы энергии-импульса гравитационного поля.*

3.5.3. Неразрешимость проблемы энергии-импульса в ОТО

Для удовлетворительного решения проблемы энергии нужно, чтобы существовал «комплекс энергии-импульса»

$$\top_i^k = \sqrt{-g}\ (T_i^k + t_i^k), \tag{3.27}$$

где t_i^k – комплекс энергии-импульса гравитационного поля, исчезающий в пределе специальной теории относительности, для которого выполнены условия:

I. Величина $\top_i^k$ есть аффинная тензорная плотность, зависящая алгебраически от переменных гравитационного поля и их производных и удовлетворяющая дивиргенциальному закону

$$\frac{\partial \top_i^k}{\partial x^k} = 0.$$

II. Для замкнутых систем в пространстве-времени, имеющем плоскую на пространственной бесконечности асимптотику, где, следовательно, можно использовать асимптотически прямоугольные координаты, величины

$$P_i = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \top_i^0 d^3x$$

постоянны во времени и преобразуются как ковариантные компоненты свободного вектора при линейных пространственно-временных преобразованиях.

Это свойство весьма существенно для интерпретации вектора как вектора полного импульса-энергии.

III. Величина $\top_i^0$ преобразуется как 4-мерная векторная плотность относительно группы чисто пространственных преобразований

$$\overline{x}^\alpha = f^\alpha(x^1, x^2, x^3), \quad \overline{x}^0 = x^0.$$

Это последнее свойство необходимо для того, чтобы количество энергии, содержащееся в конечном объеме V пространства, именно

$$E_V = \int\limits_V \top^0_0 d^3x, \tag{3.28}$$

не зависело от выбора пространственных координат, используемых при вычислении интеграла (3.28). Таким образом, свойство III есть условие локализуемости энергии в гравитационном поле.

Мёллер показал [123, с.38], «что удовлетворительное решение проблемы энергии возможно только в том случае, если уравнения гравитационного поля допускают вывод из вариационного принципа, в котором лагранжева плотность $\mathcal{L} = \sqrt{-g}L$ обладает следующими свойствами:

а) $\mathcal{L}$ зависит алгебраически от переменных гравитационного поля и их первых производных, причем является однородной квадратичной функцией последних;

б) $\mathcal{L}$ есть истинная скалярная плотность относительно произвольных преобразований пространства-времени».

Этим двум условиям невозможно удовлетворить, если в качестве переменных гравитационного поля брать компоненты метрического тензора g_{ik} [123, с.38].

Мёллер предложил отказаться от основной идеи ОТО, что гравитационное поле описывается метрикой g_{ik}, и решать проблему энергии-импульса гравитационного поля в рамках *тетрадной теории гравитации* (см. гл.13).

3.6. Причинная структура пространства-времени

Представление о причинно-следственных связях, представление о фундаментальности принципа причинности является одним из основополагающих принципов классической физики.

В теории относительности причинность появляется посредством наделения Мира событий лоренцевой метрикой, с помощью которой мировые линии разделяются на классы времениподобных, причинных, изотропных и пространственноподобных кривых. В зависимости от того, какие кривые соединяют два события, говорят о том, в каком причинно-следственном отношении находятся эти события.

3.6.1. Классификация причинных структур пространства-времени

Для изучения причинных свойств пространства-времени были введены понятия хронологического, причинного и т.д. пространств-времён [12].

Пусть M – C^∞-гладкое связное паракомпактное хаусдорфово многообразие.

Лоренцевой метрикой на многообразии M называется гладкое симметричное тензорное поле типа $(0,2)$, заданное на M так, что в каждой точке $p \in M$ тензор $g : M_p \times M_p \to \mathbb{R}$ представляет собой невырожденное скалярное произведение с сигнатурой $< + - \cdots - >$.

Пара $< M, g >$ называется *лоренцевым многообразием.*

Ненулевой вектор $v \in TM$ называется *времениподобным* (соответственно причинным, изотропным, пространственноподобным), если $g(v,v) > 0$ (соответственно $\geq 0, = 0, < 0$). Соответствующие названия сохраняются и для векторных полей на M.

Лоренцево многообразие $< M, g >$ называют *ориентируемым во времени* (посредством поля X), если существует времениподобное векторное поле $X : M \to TM$, определенное на всем многообразии.

Временная ориентация порождает следующую классификацию причинных векторов $v \in M_p$: касательный вектор v называется направленным в будущее (соответственно в прошлое), если $g(X_p, v) > 0$ (соответственно $g(X_p, v) < 0$).

Определение 3.1. *Пространством-временем* $< M, g >$ называется связное C^∞-гладкое хаусдорфово многообразие размерности не меньше двух со счётным базисом, лоренцевой метрикой сигнатуры $< + - \cdots - >$ и временной ориентацией.

Гладкая кривая на $< M, g >$ называется *времениподобной* (соответственно *причинной, изотропной, пространственноподобной*), если в каждой точке этой кривой её касательный вектор является времениподобным (соответственно причинным, изотропным, пространственноподобным). Гладкая кривая направлена в будущее (прошлое), если в каждой точке её касательный вектор направлен в будущее (прошлое).

Множество U_p называется *выпуклой окрестностью* точки p, если любые две точки из U_p можно соединить единственным геодезическим сегментом в $< M, g >$, целиком лежащим в U_p.

Выпуклая окрестность U_p называется *выпуклой нормальной окрестностью*, если для для любой точки $q \in U_p$, множество U_p является выпуклой окрестностью точки q. Так же, как и в случае риманова многообразия, для любой точки лоренцева многообразия существует выпуклая нормальная окрестность (см. [167], [232]).

Непрерывная кривая $L : (a, b) \to M$, $(a, b) \subset \mathbb{R}$ называется *направленной в будущее причинной кривой*, если для любого $t_0 \in (a, b)$ существует $\varepsilon > 0$ и выпуклая нормальная окрестность U_p точки $p = L(t_0)$ такая, что $L(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset U_p$, и для всех $t_1, t_2 : t_0 - \varepsilon < t_1 < t_2 < t_0 + \varepsilon$, найдётся гладкая направленная в будущее причинная кривая γ в $(U_p, g_{|U_p})$, идущая из $L(t_1)$ в $L(t_2)$.

Аналогично определется направленная в будущее времениподобная кривая.

Вводим следующие обозначения:

1) $p \ll q$, если существует направленная в будущее времениподобная (непрерывная) кривая, идущая из p в q;

2) $p \leq q$, если либо $p = s$, либо существует направленная в будущее причинная кривая, идущая из p в q;

3) *хронологическое будущее* точки $p : I_p^+ = \{s \in M : p \ll s\}$;

4) *хронологическое прошлое* точки $p : I_p^- = \{s \in M : s \ll p\}$;
5) *причинное будущее* точки $p : J_p^+ = \{s \in M : p \leq s\}$;
6) *причинное прошлое* точки $p : J_p^- = \{s \in M : s \leq p\}$.

Далее приведём классификацию пространств-времён, дающую представление об их причинной структуре.

Определение 3.2. Пространство-время называется:

– *хронологическим*, если оно не содержит ни одной замкнутой времениподобной кривой (т. е. $p \notin I_p^+, \forall p \in M$);

– *причинным*, если не содержит замкнутых причинных кривых (т. е. нет точек p, q, таких, что: $p \neq q, p \leq q \leq p$);

Рис. 3.1: Диаграмма условий причинности.

– *различающим*, если для разных точек p, q различны множества I_p^+, I_q^+ и, соответственно, I_p^-, I_q^-, т. е. из любого из равенств $I_p^+ = I_q^+, I_p^- = I_q^-$ следует: $p = q$;

– *сильно причинным*, если каждая его точка p обладает достаточно малыми окрестностями U_p со следующими свойством: любая причинная кривая, выходящая из U_p, никогда в неё не возвращается;

– *устойчиво причинным*, если метрика g имеет окрестность U_g в C^0-топологии такую, что ни g, ни любая метрика $g' \in U_g$ не допускают гладких времениподобных замкнутых кривых;

– *причинно простым*, если оно различающее и множества J_p^+, J_p^- замкнуты в M для всех точек $p \in M$;

– *глобально гиперболическим*, если оно сильно причинно и для любых точек $p, q \in M$ множество $J_p^+ \cap J_q^-$ компактно.

Ясно, что одни из условий являются более сильными, а другие более слабыми. Связи между выше определёнными условиями причинности можно выразить диаграммой (см. рис.3.1).

3.6.2. Лоренцева функция расстояния

Введём теперь понятия лоренцевой длины для причинных кривых и лоренцева расстояния между точками.

Пусть $p, q \in M, p \leq q$. Обозначим через Ω_{pq} пространство путей, образованное всеми направленными в будущее причинными кривыми $L : [0,1] \to M$, соединяющими p с q, то есть для которых $L(0) = p, L(1) = q$. Выберем разбиение отрезка $[0,1]$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ так, чтобы кривая $L[t_i, t_{i+1}]$ была гладкой для каждого $i = 0 \ldots n-1$.

Лоренцева длина кривой $L : [0,1] \to M$ определяется формулой:

$$s(L) = s_g(L) = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{-g[\dot{L}(t), \dot{L}(t)]} dt$$

где $\dot{L}(t)$– касательный вектор к кривой L.

Лоренцева функция расстояния $d = d(g) : M \times M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ в пространстве-времени $< M, g >$ задаётся по следующему правилу:

$$d(p,q) = \begin{cases} sup\{s_g(L) : L \in \Omega_{pq}\}, & \text{если } q \in J_p^+, \\ 0, & \text{если } q \notin J_p^+. \end{cases}$$

Заметим, что функция $d(p,q)$ в некоторых случаях может принимать и бесконечные значения.

Теорема 3.1. *Пусть $< M, g, d >$ – различающее пространство-время и $< \widetilde{M}, \widetilde{g}, \widetilde{d} >$ – произвольное пространство-время. Если f сохраняет лоренцево расстояние, т.е.*

$$d(p,q) = \widetilde{d}(f(p), f(q)), \tag{3.29}$$

то f есть гладкая изометрия, т.е.

$$g_p(df_p(u), df_p(v)) = \widetilde{g}_{f(p)}(df_p(u), df_p(v))$$

(см. [249]). ■

Определение 3.3. Гомеоморфизм двух лоренцевых многообразий $f :< M, g > \to < \widetilde{M}, \widetilde{g} >$ будем называть *хронологическим*, если для всех точек $p, q \in M$ справедливо соотношение:

$$p \ll q \iff f(p) \ll f(q),$$

или, что эквивалентно,

$$d(p,q) > 0 \iff \widetilde{d}(f(p), f(q)) > 0\,,\ \forall p, q \in M,$$

где d – лоренцева функция расстояния в пространстве-времени $< M, g >$, а $\widetilde{d}$ – лоренцева функция расстояния в пространстве-времени $< \widetilde{M}, \widetilde{g} >$.

Теорема 3.2. *Пусть $< M, g >$ и $< M', g' >$ – два различающих пространства-времени и $f : M \to M'$ – хронологический гомеоморфизм. Тогда f является гладким конформным преобразованием* [258]. ■

3.6.3. Теорема Романова

Пусть $L : [a, b) \to M$ – кривая на многообразии M. Точка $p \in M$ называется *концевой точкой кривой* L, соответствующей значению параметра $t = b$, если $\lim_{t \to b-0} L(t) = p$.

Если $L : [a, b) \to M$ – направленная в будущее (соответственно в прошлое) причинная кривая с концевой точкой p, соответствующей $t = b$, то p называется *концевой точкой в будущем* (соответственно в прошлом) кривой L.

Причинная кривая называется *непродолжаемой в будущее* (соответственно *в прошлое*), если у неё нет концевой точки в будущем (соответственно в прошлом).

Причинную кривую будем называть *непродолжаемой*, если она непродолжаема ни в прошлое, ни в будущее.

Определим несколько видов *явления захвата* причинных кривых.

Непродолжаемая причинная кривая $L : (a, b) \to M$ называется *захваченной* компактным множеством K, если целиком содержится в нём.

Будем говорить, что непродолжаемая в будущее причинная кривая $L : [a, b) \to M$ *захвачена в будущем* компактным множеством K, если существует число $t_0 < b$ такое, что $L(t) \in K$ для всех $t_0 < t < b$.

Аналогично определяется явление захвата в прошлом.

Если в пространстве-времени может реализовываться один из вышеописанных видов захвата, будем говорить, что пространство-время *допускает явление захвата* причинных кривых.

Определим явление *конечной недостижимости.*

Определение 3.4. Пусть $< M, g >$ – пространство-время. Будем говорить, что точка $q \in M$ *конечно недостижима причинными кривыми*, выходящими из точки p, если любую окрестность U_q точки q можно достичь причинными кривыми, выходящими из точки p, но в то же время для любого числа

$N > 0$ существует окрестность U_q точки q такая, что лоренцева длина любой причинной кривой L_{pU}, начинающейся в p и заканчивающейся внутри окрестности U_q, больше числа $N: s(L_{pU}) > N$.

Отметим, что определённая выше конечная недостижимость точки q причинными кривыми, выходящими из точки p, может быть *конечной недостижимостью в будущем и в прошлом.* В первом случае (недостижимость в будущем) существуют точки $z \in U_q$ такие, что $p \leq z$, то есть часть окрестности U_q находится в будущем от точки p. Во втором случае (недостижимость в прошлом) существуют точки $z \in U_q$ такие, что $z \leq p$, то есть часть окрестности U_q находится в прошлом от точки p.

Следуя определению 3.5, будем говорить, что в пространстве-времени имеет место *явление конечной недостижимости* (причинными кривыми), если конечная недостижимость выполняется для прошлого или для будущего некоторой точки p.

Определение 3.5. Пространство-время $< M, g >$ будем относить к *классу* A в двух случаях:

1) если пространство-время $< M, g >$ не допускает явление захвата (причинных кривых компактным множеством).

2) если в пространстве-времени $< M, g >$ присутствует явление захвата, но в нём нет явления конечной недостижимости.

Таким образом, к классу A не относятся лишь те пространства, в которых одновременно имеет место как явление захвата причинных кривых, так и явление конечной недостижимости (между некоторыми точками).

Пространство-время $< M, g >$ удовлетворяет *условию конечности расстояния*, если для любых $p, q \in M$

$$d(p, q) < \infty.$$

Теорема 3.3. *Пусть* $< M, g >$ *и* $< M', g' >$ *– два причинных пространства-времени класса* A*, удовлетворяющих усло-*

вию конечности расстояния для всех метрик, глобально конформных данным. Тогда, если $f : M \to M'$ – гомеоморфизм, гомотетично преобразующий лоренцево расстояние (в частности, сохраняющий его), то есть для любых точек $p, q \in M$, выполнено равенство $d(p,q) = cd'(f(p), f(q))$, где $c > 0$ – некоторая постоянная, то f является гладким конформным преобразованием [145]. ■

3.7. Speculatio

1. Какова причина гравитации (тяготения)? В наше время принято считать, что причиной гравитации является кривизна пространства-времени.

В свое время Ломоносов писал: «Так как тело, толкающее тяжелые тела к центру земли, недоступно чувствам, то оно есть тончайшая жидкость. Пояснение. Это жидкое тело мы будем называть тяготительной жидкостью. Так как его существование постигается рассуждением, то оно ему не противоречит, хотя его тонкость превосходит силы воображения. Так как повсюду, куда может проникнуть человеческая деятельность, тяжесть тел оказывается постоянной, то отсюда следует, что тяготительная жидкость присутствует везде. ... она движется постоянно с одной и той же скоростью» [114, с.243].

С кривизной-тяготением мы сегодня связываем гравитоны. Они распространены повсеместно и движутся всегда с постоянной скоростью – со скоростью света.

О Боже, что есть человек,
Что ты ему себя являешь,
И так его ты почитаешь,
Котораго толь краток век.

М. Ломоносов (1751)

2. «Общая теория относительности есть открытие, что пространство-время и гравитационное поле есть одна и та же сущность. То, что мы называем «пространство-время» есть само по себе физический объект, во многих отношениях анало-

гичный электромагнитному полю. Можно сказать, что ОТО есть открытие того, что пространства-времени вовсе нет» (Ровелли, 2004, [278, p.9]).

3. «The antigravity at the beginning is necessary for our existence because it was a source of expansion which created large and suitable for life universe but it seems unnecessary now, or we do not understand its necessity» (Dolgov, [207, p.2]).

Мы также не понимаем, когда искривлённые области пространства-времени обнаруживают свойства гравитации, а когда антигравитации.

4. Общая теория относительности говорит о том, что если Внешний Мир представлен в форме пространства-времени, не обладающего максимальной группой симметрий[3], то в этом Мире сила тяжести (гравитация) существует.

О существовании гравитации, а не просто об учёте возможности силы тяжести заявляет также теория (супер)струн. «Виттен назвал это осознание «самой великой интеллектуальной победой в своей жизни» (Виттен, по источнику [166, с.111]). Поскольку ОТО – это теория гравитации, а теория (супер)струн – единая теория поля, то теории (супер)струн удалось не только закрепить успех Эйнштейна, но и претендовать на роль теории, которую мечтал построить Эйнштейн.

Однако ОТО – это экспериментально проверяемая теория, а теория (супер)струн до сих не подтверждена экспериментально [168, с. 32].

Звучит почти как приговор. Классическая наука требует эксперимента для проверки теории. Но как-то забывают, что в принципе нельзя экспериментально измерить скорость света в одном направлении. и это никого не смущает [13].

[3]Максисмальная группа симметрий – это 10-параметрическая группа Пуанкаре. Пространство-время Минковского обладает максимальной группой симметрий, его кривизна равна нулю, и, следовательно, в мире Минковского нет гравитации.

Глава 4

Экзотические гладкие пространства-времена

Общая теория относительности строилась на основе принципа общей ковариантности, означающего неизменность формулировок физических законов относительно произвольных замен систем координат (локальных карт). Фактически при этом неявно предполагается, что гладкая структура пространства-времени остается той же самой после любой замены системы координат.

Но поскольку на топологическом многообразии $\mathbb{R}^4$ открыто существование несчётного числа экзотических, т.е. недиффеоморфных гладких структур [182, 193], геометрия которых неоднородна [47], то мы можем с удивлением констатировать, что на одном множестве, т.е. на одном и том же наборе элементов, наконец, на одном и том же наборе *вещей в себе*, образующих математическое топологическое многообразие, возможны описания *вещей для нас* с разными физически несовместимыми свойствами.

В ОТО пространство-время – это 4-мерное хаусдорфово топологическое многообразие, оснащённое гладкой структурой и лоренцевой метрикой. Свободному движению вещи в гравитационном поле отвечает мировая линия частицы, являющаяся *гладкой* геодезической, несвободному – произвольная, но опять-таки гладкая кривая. Но, к примеру, гладкая кривая в $\mathbb{R}^4$ может иметь изломы в недиффеоморфном экзотическом $\mathbb{R}^4_{экз}$, следовательно, летательный аппарат с такой мировой линией в одном мире движется в соответствии с законами механики, а в другом – видится как совершающий мгновенное изменение направления движения, невозможное с точки зрения закона инерции. Однако важно при этом отметить, что все экзотические гладкие структуры, в том числе и стандартное $\mathbb{R}^4$, *локально эквивалентны* и, в силу этого в *локальных* координатах выражение физических законов неизменно. Значит, экзотическая гладкость проявляется только при изучении дифференцируемой структуры пространства-времени *в целом*, т.е. *глобально* [183, p.13].

Поскольку мы трактуем Вселенную как гладкое многообразие, т.е. многообразие с конкретной гладкой структурой, то же самое топологическое многообразие с другой, недиффеоморфной гладкой структурой следует рассматривать как иную, скажем, *параллельную* вселенную[1].

Таким образом, оказывается, что наши вещи одновременно являются вещами параллельной вселенной и наоборот. Параллельные миры лежат внутри нашего! Мы и есть все параллельные миры! Но мы их не ощущаем, поскольку они соответствуют гладкой структуре недиффеоморфной нашей. А вот переходы между параллельными вселенными можно осуществлять с помощью 4-мерных кротовых нор [49, 50, 51].

4.1. Гладкие структуры и диффеоморфизмы

Для лучшего понимания феномена экзотичности гладких структур на $\mathbb{R}^n$ полезно в зависимости от ситуации использо-

[1] На сегодня не существует ясного понимания, что следует иметь в виду под термином «параллельная вселенная».

вать различные (эквивалентные) определения гладкой структуры.

4.1.1. Гладкая структура по Борисову

Приведем определения гладкой структуры, принадлежащее проф. Ю.Ф. Борисову[2], который давал его в своем спецкурсе по римановой геометрии в Новосибирском университете в 1968 году.

Пусть M – непустое множество, допускающее покрытие $(M_\alpha)_{\alpha\in A}$, т.е. $\cup_\alpha M_\alpha = M$, причем для каждого V_α существует биективное отображение $\varphi_\alpha : M_\alpha \to U_\alpha$, где $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество.

Предполагаем, что выполняются условия:

1) для любого $x \in M_\alpha \cap M_\beta$ существуют $V_x \subset M_\alpha \cap M_\beta$ и $\varphi : V_x \to U \subset \mathbb{R}^n$ – биекция, а U – открытое множество; при этом отображения $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : \varphi_\alpha(V_x) \to \varphi_\beta(V_x)$, $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) : \varphi_\alpha(V_x) \to \varphi_\beta(V_x)$, называемые ***функциями перехода***, принадлежат классу гладкости C^m $(m \geq 0)$ (условие гладкости функций перехода).

2) каковы бы ни были $x, y \in M$, существует отображение $f : [0,1] \to V$ такое, что $f(0) = x, f(1) = y$, и если $f(t_0) = x_0 \in M_\alpha,\ t_0 \in [0,1]$, то для всех $t \in [0,1]$, достаточно близких к t_0, $f(t) \in M_\alpha$ и $(\varphi_\alpha \circ f)(t)$ – непрерывное отображение (условие связности)[3].

Пара $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$ называется ***локальной картой***, или ***локальными координатами*** на M. Совокупность $\mathcal{A}$ всех локальных карт на M, удовлетворяющих условиям 1), 2), называется ***атласом*** класса C^m.

[2]Борисов Юрий Федорович (1925-2007) – замечательный советский геометр, д.ф.-м.н. профессор Новосибирского государственного университета, ученик А.Д. Александрова. Читал в 1960-е годы в НГУ спецкурс «Риманова геометрия».

[3]Условие связности не является обязательным при определении гладких многообразий. Оно гарантирует топологическое свойство *связности* (линейной связности) гладкого многообразия, т.е. то, что оно не состоит из «двух кусков».

Два разных атласа $\mathcal{A}$ $\mathcal{A}'$ класса C^m *эквивалентны*, если объединение их локальных карт образует атлас класса C^m.

Таким образом, на множестве всех атласов класса C^m на M введено отношение эквивалентности, которое разбивает совокупность всех атласов на *классы эквивалентности*.

Пример 4.1. На $M^1 = \mathbb{R}^1$ существуют неэквивалентные атласы. Пусть первый атлас $\mathcal{A}_1$ содержит карту $\varphi(x) = x$, а второй класс $\mathcal{A}_2$ – карту $\phi(x) = x^{1/3}$. Тогда функция перехода

$$(\phi \circ \varphi^{-1})(x) = x^{1/3} \notin C^\infty.$$

Следовательно, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ не являются эквивалентными.

Определение 4.1. Класс эквивалентных атласов класса C^m – это гладкая структура на M класса C^m.

Множество M с выбранной для него конкретной гладкой структурой класса C^m называется *n-мерным гладким многообразием класса C^m* или *C^m-многообразием* и обозначается M^n.

В случае, когда $m = 0$, говорят о топологическом n-мерном многообразии.

Определение 4.2. Отображение $f : M^n \to N^k$, где M^n, N^k – C^m-гладкие многообразия, называется *C^m-гладким*, если для любой точки $x \in M^n$ и любых карт $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$ многообразия M^n и $< N_\beta, \psi_\beta >$ многообразия N^k, $x \in M_\alpha$, $f(x) \in N_\beta$ функция $\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^m$.

Определение 4.3. Отображение $f : M^n \to N^k$, где M^n, N^k – C^m-гладкие многообразия, называется *C^m-диффеоморфизмом*, если f гомеоморфизм и отображения $f, f^{-1} \in C^m$.

Ясно, что диффеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность. Диффеоморфизм M^n, N^n обозначаем как $M^n \simeq N^n$.

4.1.2. Касательные векторы и касательное расслоение

Пусть M^n – гладкое многообразие и $x \in M^n$ – точка на нем. Рассмотрим множество $\{f\}_x$ всевозможных гладких отображений $f : [0,1] \to M^n$, таких, что $f(0) = x$.

Два такие отображения f, g *эквивалентны*, если для (координатных) представлений данных отображений в любой локальной карте $< M_\alpha, \varphi_\alpha >$

$$(f^1(t), ..., f^n(t)) \text{ и } (g^1(t), ..., g^n(t)), \quad t \in [0,1],$$

имеем
$$\frac{df^i}{dt}(0) = \frac{dg^i}{dt}(0) \quad (i = 1, ..., n).$$

Мы имеем отношение эквивалентности на указанном множестве $\{f\}_x$ отображений, которое разбивает его на классы эквивалентных отображений $[f]_x, [g]_x, ...$

Определение 4.4. *Касательный вектор ξ в точке x* к гладкому многообразию M^n – это класс эквивалентных отображений $[f]_x$. Множество всех классов эквивалентных отображений называется *касательным пространством в точке x* к многообразию M^n и обозначается как M^n_x.

Касательное пространство в точке x к многообразию M^n снабжается структурой n-мерного векторного пространства.

Объединение
$$TM^n = \bigcup_{x \in M^n} M^n_x$$

называется *касательным расслоением многообразия M^n*.

4.1.3. Погружения, вложения, подмногообразия

Определение 4.5. C^m-гладкое отображение $f : N^k \to M^n$, где N^k, M^n – C^m-гладкие многообразия, называется *иммерсивным в точке $x \in N^k$*, если дифференциал $df_x : N^k_x \to M^n_{f(x)}$

инъективен, и *субмерсивным в точке* x, если df_x – сюрьективен. Если f иммерсивно в каждой точке многообразия N^k, то f называется *иммерсией*, или *погружением*; если f субмерсивно в каждой точке, то – *субмерсией*.

C^m-*гладкое* отображение $f : N^k \to M^n$ называется (гладким) *вложением*, если f есть погружение, гомеоморфно отображающее N^k на $f(N^k)$. Вложение *собственное*, если прообраз каждого компактного множества компактен.

Определение 4.6. Подмножество $N^k \subset M^n$, снабженное структурой гладкого многообразия, называется *подмногообразием* в M^n, если отображение $i : N^k \to M^n$, $i = id_{M^n}|_{N^k}$, $i(x) = x$, является вложением.

Локально в координатах подмногообразие N^k задается уравнением

$$x^i = F^i(u^1, ..., u^k) \ (k < n), \quad i = 1, ...n,$$

причем:

1) ранг якобиевой матрицы $J = \left\|\dfrac{\partial x^i}{\partial u^j}\right\|$ равен k на подмногообразии N^k (регулярность i);

2) i является гомеоморфизмом на свой образ $i(N^k)$.

Атлас подмногообразия N^k эквивалентен индуцированному атласу, образованному картами $< M_\alpha \cap N^k, \varphi_\alpha \circ i >$.

4.1.4. Гладкая структура по де Раму

Топологическое многообразие M^n оснащено (*гладкой*) C^∞-*структурой*, если для каждой точки $x \in M^n$ определена совокупность функций $\mathcal{F}_x = \{f_x : M^n \to \mathbb{R}\}$, называемая C^∞-*функциями в точке* x, такая, что выполняются условия [83]:

а) если отображение $\phi : U \to V$, где U открыто в M^n, а V открыто в $\mathbb{R}^n$, есть гомеоморфизм и $g : \widetilde{U} \to \mathbb{R}, \widetilde{U} \subseteq U$, то функция g может быть записана как функция, зависящая от координат $x^1, ..., x^n$:

$$\tilde{g}(x^1, ..., x^n) = (g \circ \phi^{-1})(x^1, ..., x^n);$$

b) функция $f \in \mathcal{F}_z$, где $z \in U$, тогда и только тогда, когда существует окрестность W_z точки z, $W_z \subset U$, на которой f определена и

$$\tilde{f}(x^1, ..., x^n) = (f \circ \phi^{-1})(x^1, ..., x^n) \in C^\infty$$

при $(x^1, ..., x^n) \in \phi(W_x)$.

Каждая функция $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n$, описанная в пункте a), называется *локальной картой на* M^n,

$$\phi(x) = (\phi^1(x), ..., \phi^n(x)),$$

а функции $x^i = \phi^i(x)$ – *локальными координатами.*

Заметим, что согласно b), локальные координаты являются C^∞-функциями на U.

Предложение 4.1. *На многообразии* $\mathbb{R}^n$ *имеется* ***глобальная*** *карта*

$$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$\varphi(x) = (x^1, ..., x^n), \quad x = (x^1, ..., x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

локальные координаты которой

$$x^i = \varphi^i(x) = \varphi^i(\varphi^{-1}(x^1, ..., x^n)) = [\varphi \circ \varphi^{-1}]^i = x^i$$

являются, очевидно, C^∞*-гладкими функциями на* $\mathbb{R}^n$. ■

Определение 4.7. Будем называть C^∞-*многообразием* любое многообразие M^n, снабженное гладкой C^∞-структурой.

4.1.5. Гладкая структура по Телеману

Дифференцируемым (гладким) многообразием называется многообразие M^n, в котором определена дифференцируемая структура [155].

Чтобы ввести понятие дифференцируемой (гладкой) структуры многообразия, рассмотрим точку x многообразия M^n и обозначим через C_x множество пар (U, f), состоящих из окрестности U точки и функции f, определенной и непрерывной на U. Если (U, f) – пара из C_x , то будем говорить, что

f – функция многообразия M^n, непрерывная в точке x, а U – область определения этой функции.

Дифференцируемой (гладкой) структурой класса C^m, $m \geq 0$, на многообразии M^n размерности n называется отображение Φ, ставящее в соответствие каждой точке x из M^n подмножество Φ_x множества C_x, удовлетворяющее следующим условиям.

Для любой точки x из M^n в подмножестве Φ_x существует n пар $(U, f_1), ..., (U, f_n)$, таких, что:

1) точка x содержится внутри U;

2) функции $f_1, , ..., f_n$ реализуют гомеоморфизм окрестности U на некоторое множество из $\mathbb{R}^n$;

3) если $y \in V \subset U$, то пара $(V, f) \in C_y$ принадлежит Φ_y тогда и только тогда, когда существует такая вещественная функция F класса C^m от n вещественных переменных $y^1, ..., y^n$, что $f(x') = F[f_1(x'), ..., f(x')]$ для любой точки x' из M^n.

Функции $f_1, ..., f_n$ называются *допустимыми координатами* точки x в окрестности U. Эти координаты определены с точностью до преобразования вида

$$g_i = G_i(f_1, ..., f_n), \quad (i = 1, ..., n), \tag{4.1}$$

где G_i – функции класса C^m с отличным от нуля якобианом $|\frac{\partial G_i}{\partial f_j}|$ в окрестности U, т.е. при значениях переменных f_i, соответствующих текущей точке из U. В соответствии с условием 3) формулы (4.1) определяют n функций g_i таких, что $(U, g_i) \in \Phi_x$ тогда и только тогда, когда G_i являются функциями класса C^m в U. Если якобиан $|\frac{\partial G_i}{\partial f_j}|$ не равен нулю в U, то, в силу теоремы о неявных функциях, получаем формулы вида

$$f_i = F_i(g_1, ..., g_n) \quad (i = 1, ..., n), \tag{4.2}$$

где F_i – функции класса C^m в U. Если $(V, f) \in \Phi_y$, то

$$f = F(f_1, ..., f_n) = F(F_1(g), ..., F_n(g))$$

на пересечении $V \cap U$. Следовательно, функции $g_1, ..., g_n$, удовлетворяют условиям 1)-3).

Обратно, если $g_1, ..., g_n$ – допустимые координаты в окрестности U, то из формул (4.1), (4.2) находим, что в окрестности U выполняются тождества

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial g_k} = \delta_k^i,$$

откуда следует, что $\left| \dfrac{\partial G_i}{\partial f_j} \right| \neq 0$ в окрестности U.

Многообразие M^n, снабженное дифференцируемой структурой класса C^m, называется *дифференцируемым (гладким) многообразием класса* C^m.

Дифференцируемыми (гладкими) функциями на таком многообразии будут такие функции f, что $(U, f) \in \Phi_x$ для любого открытого множества U из M^n и любой точки из U.

4.2. Экзотические $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$

Гладкое многообразие M^4, гомеоморфное $\mathbb{R}^4$, может быть диффеоморфно C^∞-гладкому многообразию $\mathbb{R}^4$, но может быть не диффеоморфно[4]. В последнем случае говорят об *экзотическом* C^∞-гладком многообразии $\mathbb{R}^4$, которое обозначается через $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. Экзотические $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ были открыты в 1980-е годы.

Экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ называется *малым*, если оно может быть гладко вложено как открытое подмножество в стандартное $\mathbb{R}^4$.

Экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ называется *большим*, если оно не может быть гладко вложено как открытое подмножество в стандартное $\mathbb{R}^4$.

М. Фридман и Л. Тэйлор [211] показали, что существует единственное максимальное экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, в которое все

[4]Точнее, любое биективное отображение M^4 на $\mathbb{R}^4$ будет недифференцируемым хотя бы в одной точке.

другие $\mathbb{R}^4$ могут быть гладко вложены как открытые подмножества [183, p.244].

4.2.1. Построение малых $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$

Малые $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ (рис. 4.1) строятся с использованием теоремы о гладком 5-мерном h-кобордизме, ручек Кэйсона, пробок Акбулута и техники разложения на ручки [183, § 8.6].

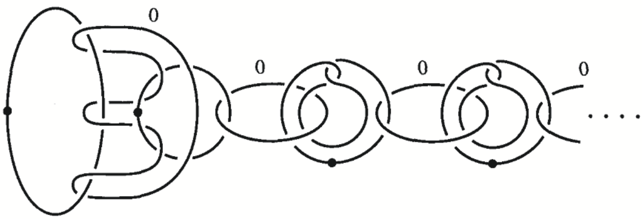

Рис. 4.1: Экзотическое (малое) $\mathbb{R}^4$ (оно является внутренностью изображенной фигуры, представлющей собой слегка модифицированную ручку Кэйсона) (Bizaca, Gompf, [192]).

4.2.2. Построение больших $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$

Форма пересечений

Пусть Y^n, Y^m – трансверсально пересекающиеся подмногообразия многообразия X^{n+m}. *Алгебраическое число пересечений* Y^n *и* Y^m по определению есть сумма знаков точек пересечений.

Определение 4.8. Пусть M^4 – компактное ориентированное топологическое 4-многообразие и $a, b \in H_2(M^4; \mathbf{Z})$ представляются ориентированными поверхностями A, B в M^4. Определим *форму пересечений* многообразия M^4

$$Q_{M^4} : H_2(M^4; \mathbf{Z}) \times H_2(M^4; \mathbf{Z}) \to \mathbf{Z}$$

как $Q_{M^4}(a, b) = A \cdot B$, где $A \cdot B$ есть число точек пересечений в $A \cap B$, взятых со знаком[5].

[5]Предполагаем, что A и B выбраны в общем положении, т.е. пере-

Поверхность Куммера. Рассмотрим множество

$$K3 = \{[z_1, z_2, z_3, z_4] \in CP^3 : z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 = 0\},$$

которое есть комплексное 2-многообразие, и вещественное 4-многообразие. Его называют поверхностью Куммера или $K3$-поверхностью.

Форма пересечения $K3$-поверхности имеет вид

$$Q_{K3} = E_8 \oplus E_8 \oplus (\oplus_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \equiv 2E_8 \oplus 3H,$$

где последнее выражение содержит три копии матрицы H, известной как гиперболическая форма [259], и

$$E_8 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определение 4.9. Для $i = 1, 2$ пусть $D_i^n \subset M_i^n$ – вложенные диски[6], и пусть $\phi : D_1^n \to D_2^n$ – сохраняющий ориентацию диффеоморфизм. Гладкое многообразие $(M_1^n \setminus int\ D_1^n) \cup_{\phi|D_1^n} (M_2^n \setminus int\ D_2^n))$ получаем отождествлением граничных точек диска D_1^n с граничными точками диска D_2^n, связанными отображением ϕ, называется ***связной суммой*** многообразий M_1^n и M_2^n и обозначается как $M_1^n \sharp M_2^n$.

Будем использовать обозначение

$$\sharp_m Y = \underbrace{Y \sharp ... \sharp Y}_{m-\text{раз}}.$$

секаются трансверсально. Ориентации A и B вместе с фиксированной ориентацией M^4 дают знак точке пересечения $p \in A \cap B$, который находится следующим образом. Если положительные реперы в A_p и B_p дают положительный репер в M_p^4, то точке p приписывается знак $+1$, и -1 – в противном случае [214, p.9].

[6]Назовем *n-мерным диском* множество $D^n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$.

Пусть

$$X = \sharp_3(S^2 \times S^2) \setminus D^4.$$

Подмножество поверхности $K3$, представляющее гомологию для $3H$ в форме пересечения $K3$-поверхности, можно описать как топологическое вложение $j : X \to K3$ такое, что окрестность множества $i(\partial X)$ имеет вид $C_j = \partial j(X) \times \mathbb{R}$. Можно выбрать j так, что $j(X)$ будет гомеоморфным образом X [183, p.240-241].

Теорема 4.1. *Рассмотрим гладкое 4-многообразие*

$$W = \sharp_3(S^2 \times S^2) \setminus j(X),$$

где $j(X)$ – гомеоморфный образ X. Тогда W гомеоморфно $\mathbb{R}^4$, но не диффеоморфно $\mathbb{R}^4$, и, следовательно, является примером $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ [183, p.241-242]. ■

4.2.3. Автодиффеоморфизмы и принцип общей ковариантности

На практике пространство-время как гладкое многообразие *строят*, вводя новые локальные карты как новые координаты $< M', \psi >$, к которым переходят $(x')^i = [\psi \circ \phi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n)$ от старых $< M, \phi >$, производя тем самым *расширение*[7] пространства-времени от M к $M \cup M'$. Цель – получить максимальное расширение. Например, как максимальное расширение пространства-времени Шварцшильда, было в свое время получено пространство-время Крускала.

Стремясь к максимальному расширению пространства-времени, мы тем самым строим атлас локальных карт, и, следовательно, процесс расширения заканчивается, когда получаем *максимальный атлас.*

Заметим, что в силу того, что $[\psi \circ \phi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n) = (\psi \circ id_{M^4} \circ \phi^{-1}]^i(x^1, ..., x^n)$, процесс расширения карт можно трактовать как получение такого атласа, в котором тождественное отображение является диффеоморфизмом $id_{M^4} : M^4 \simeq M^4$.

[7] В этом случае на пересечении $M \cap M'$ старые и новые координаты должны быть связаны преобразованием с ненулевым якобианом.

Эйнштейн, создавая общую теорию относительности, постулировал *принцип общей ковариантности*, который разрешал использовать все допустимые локальные карты (системы координат). При этом под допустимостью понималась не только гладкость функций перехода, но и выполнение условия незануления якобиана

$$J(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) \neq 0,$$

или

$$\left| \frac{\partial(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})'}{\partial x^j}(x^1, ..., x^n) \right| \neq 0.$$

Пусть $f : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм. Поскольку, в соответствии с определением 4.2

$$\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} = (\varphi_\beta \circ f) \circ \varphi_\alpha^{-1} = \overline{\varphi}_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \in C^m,$$

где $\overline{\varphi}_\beta = \varphi_\beta \circ f$, то фактически мы осуществляем расширение атласа локальных карт, добавляя новые карты вида $\overline{\varphi}_\beta$. Но исходный атлас был максимальным, поэтому мы остаемся в том же самом атласе, в той же самой гладкой структуре. Иначе говоря, осуществление диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ – это просто добавление новых карт к атласу, что приветствуется принципом общей ковариантности.

Гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4$ является фактически автогомеоморфизмом, но никак не автодиффеоморфизмом. Следовательно, его применение нельзя подвести под действие принципа общей ковариантности. Хотя это возможно для автодиффеоморфизмов $f : \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4_{\text{экз}}$.

Иначе говоря, мы имеем две *разные физики*, в рамках каждой из которых справедлив принцип общей ковариантности Эйнштейна. Одна физика связана с гладким 4-многообразием $\mathbb{R}^4$, а другая с $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. В действительности разных физик много, поскольку существует бесконечное число экзотических $\mathbb{R}^4$, и многие их них не диффеоморфны.

Важно отметить, что если два многообразия недиффеоморфны, то имеется физическое различие между ними.

4.2.4. Свойства экзотических $\mathbb{R}^4_{экз}$

Очевидно, что глобальная карта класса C^0 на $\mathbb{R}^4_{экз}$ не может быть гладкой в каждой точке, иначе $\mathbb{R}^4_{экз}$ было бы диффеоморфно $\mathbb{R}^4$. Экзотичность, как показано в следующих двух теоремах, может заключаться в пространственно ограниченных областях.

Теорема 4.2. *Существует $\mathbb{R}^4_{экз}$, для которого глобальные C^0-координаты являются гладкими в некоторой окрестности. Другими словами, существует $\mathbb{R}^4_{экз} = \{x = (x^i)\}$, для которого $x^i \in C^\infty$ при $|x| < \varepsilon$* [183, p.270]. ■

Теорема 4.3. *Существует $\mathbb{R}^4_{экз}$, для которого глобальные топологические координаты (t, x, y, z) являются гладкими для $x^2 + y^2 + z^2 \geq \varepsilon^2 > 0$, но не глобально. Существует лоренцева метрика на $\mathbb{R}^4_{экз}$, для которой граница этой области времениподобна. Иначе говоря, экзотичность пространственно ограничена* [183, p.271]. ■

4.2.5. Неоднородность экзотических $\mathbb{R}^4_{экз}$

Известно, что связная односвязная разрешимая 4-мерная группа Ли G_4 диффеоморфна $\mathbb{R}^4$. Группа Ли G_4, действующая гладко и просто транзитивно на гладком 4-многообразии M^4, диффеоморфна ему, т.е. $M^4 \simeq G_4 \simeq \mathbb{R}^4$. Отсюда следует, что $\mathbb{R}^4_{экз}$ не может допускать просто транзитивного действия группы G_4 [47, 48]. Другими словами, $\mathbb{R}^4_{экз}$ неоднородно.

Говорим, что гладкое многообразие M^4 имеет *немного симметрий*, если для любого выбора гладкого метрического тензора g на M^4 группа изометрий $Is(M^4, g)$ конечна.

Р. Тейлор построил примеры экзотических $\mathbb{R}^4$ с немногими симметриями [293]. Тогда группа изометрий на таких $< \mathbb{R}^4_{экз}, \widetilde{g} >$ конечна, и, следовательно, отсутствуют нетривиальные векторные поля Киллинга. Это означает, что гравитационное поле $\widetilde{g}$ существенно нестационарно, т.е. является изменяющимся. И причина этого – экзотичность гладкой структуры [283].

4.2.6. Невосстановимость прошлого

Экзотические $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ могут обладать многими удивительными свойствами, позволяющими иначе посмотреть на проблему восстановления фактов прошлого. Например, глобальные координаты (t, r) не являются гладкими на всем $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$. Это означает, что если что-то «вещает» нам из прошлого, то это может происходить вдоль временных радиальных кривых $t = s, r = r(s), s \in [\alpha, \beta]$. Но такие кривые, соединяющие факт b с точкой a его восприятия в настоящем, не являются гладкими с какого-то момента при следовании вдоль кривой от a к b (см. рис. 4.2, [182]).

Поскольку современная физика предполагает использование только гладких кривых, то мы можем заявить о том, что прошлое факта a не может быть восстановлено.

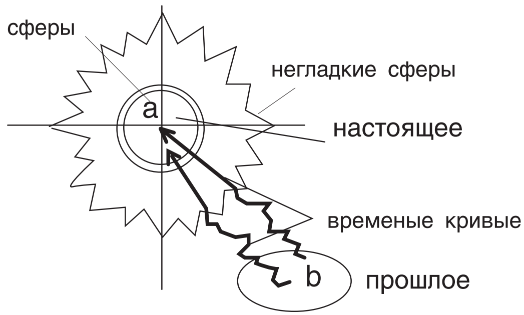

Рис. 4.2: Невозможность гладкого продолжения временных кривых из a в область прошлого b в экзотическом $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$.

4.2.7. Причинные свойства $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$

Рассмотрим пространства-времена $< \mathbb{R}^4, g >$ и $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$. Для каждого многообразия найдём лоренцевы функции расстояния d и $\widetilde{d}$.

Пусть отображение $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ – биекция, являющая изометрией относительно лоренцевых расстояний d и $\widetilde{d}$, т.е.

$$d(p, q) = \widetilde{d}(f(p), f(q)). \tag{4.3}$$

Поскольку $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ и $\mathbb{R}^4$ не диффеоморфны, то f не может быть гладким отображением. Можно ли из этого извлечь информацию о причинных свойствах пространства-времени $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$? [47, 48]

Если существует биекция $f : \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \to \mathbb{R}^4$, сохраняющая расстояние, то $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ не может быть различающим, поскольку по теореме Кима из [249] f было бы гладким. Но это означает, что либо $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ содержит временные петли, либо они появляются в слабо возмущенной метрике [47, 48].

Если же $< \mathbb{R}^4, g >$ различающее (что возможно), то не существует биекции $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, сохраняющей расстояние, в силу той же теоремы Кима из [249]. Это говорит о том, что для хотя бы двух событий p и q лоренцево расстояния между ними в $< \mathbb{R}^4, d >$ и $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$ существенно различны.

Теорема 3.3 А.Н.Романова позволяет относительно усилить этот результат и говорить о либо о непричинности пространства-времени $< R^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$, либо о нарушении условия конечности расстояния, либо о выпадении пространства-времени $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ из класса A. Из теоремы 3.2 вытекает, что либо $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{g} >$ не может быть различающим, либо любой гомеоморфизм между $< \mathbb{R}^4, d >$ и $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$ не является хронологическим. Фактически это означает, что если p прошлое для q в $< \mathbb{R}^4, d >$, то это неверно в $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$.

Иначе говоря, истинностное значение причинно-следственного отношения между двумя вещами в себе – p и q – различно после того, как они становятся вещами для нас в $< \mathbb{R}^4, d >$ и в $< \mathbb{R}^4_{\text{экз}}, \widetilde{d} >$.

4.2.8. Экзотическое $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ не может быть слоем в 5-мерном Гиперпространстве?

Стандартное $\mathbb{R}^4$ может быть слоем гладкого слоения 5-мерного (замкнутого) гладкого многообразия. Как следствие, становится возможным переход к 5-мерной теории грави-электрослабого взаимодействия типа Калуцы-Клейна и построение теории «схода со своего слоя», т.е. выхода за пределы «своего» пространства-времени в 5-е измерение и перемещений в объемлющем Гиперпространстве (гл. 7). Источником энергии, необходимой для таких перемещений, в таком случае выступает внешнее скалярное поле и электрическая заряженность перемещаемого объекта (Гуц, [56]).

В силу сказанного, особого внимания заслуживает тот факт, что в теории слоений известна следующая нерешенная задача (2003), сформулированная в «сессии проблем» известным специалистом в теории слоений Хардером: доказать, что гладкое многообразие L, которое есть экзотическое $\mathbb{R}^4$, не может быть слоем C^1-слоения $\mathcal{F}$ компактного многообразия M [239, p.5].

Если это окажется верным, то экзотическое $\mathbb{R}^4$ совсем иначе размещается в объемлющем Гиперпространстве, чем стандартное $\mathbb{R}^4$, и это ограничит перемещения в прошлое.

4.3. Физическая наблюдаемость изменения гладкой структуры

Рассмотрим пространство-время $< \mathbb{R}^4, g >$, где g – метрика. Поскольку при смене локальной карты $x^i \to x^{i'}$ метрика подвергается преобразованию

$$g_{ik} \to g_{i'k'} = g_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}, \tag{4.4}$$

то гладкость метрики может нарушиться, если произошел переход к экзотическому гладкому атласу.

Смена локальной карты, замена координат физически означает переход к *новым физическим условиям*[8]. Таким образом, изменения гладкой структуры вполне можно *измерить*, т.е. они *могут быть наблюдаемым* эффектом (Гуц, 1987, [47]; Asselmeyer, 1996, [178]).

Но можно к этому вопросу подойти с другой стороны: возможно ли, что при определенных физических условиях происходит смена гладкой структуры? В § 4.2.5 и § 4.2.7 было показано, что переход к экзотической гладкой структуре – это переход к крайне неоднородному гравитационному полю $\widetilde{g}$ в $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ от однородного поля g в $\mathbb{R}^4$. Следовательно, экзотичность может проявляться как источник возмущения, наблюдаемого до этого постоянного (однородного) гравитационного поля (Гуц, 1987, [47]).

В 1990-е годы было сформулировано следующее утверждение:

> Локализованная экзотичность может выступать как источник некоторого регулярного внешнего поля в форме материи или черной дыры (Бранс, 1994, [193]).

Основой для такого заявления является, в частности, теорема 4.3, которая локализует экзотичность глобальных координат во времениподобном цилиндре $S^3 \times \mathbb{R}$. Обратим внимание на то, что скачки производных метрики $h_{\alpha\beta}$, обеспечивающие разрыв пространства (§ 6.1.2), можно трактовать как проявление экзотичности, приводящее к скачку энергии и, как следствие, к разрыву пространства.

4.3.1. Изменение тензора Эйнштейна при переходе к экзотической гладкой структуре

Пусть M обладает двумя недиффеоморфными гладкими структурами M' и M''. Тогда любой гомеоморфизм

---

[8] Например, переход к координатам, в которых $\Gamma^i_{jk}(x_0) = 0$, означает переход от ощущения силы тяжести к невесомости (лифт Эйнштейна).

$f : M' \to M''$ будет недифференцируемым хотя бы в одной точке, скажем в точке x_0. Тогда в некоторой ее окрестности U_{x_0} можно представить $df : TM' \to TM''$ в виде $df|U_{x_0} = (b_1, b_2)$ и выразить изменение связности при преобразовании f:

$$\nabla'' = \nabla' + (b_1^{-1} db_1) \oplus (b_2^{-1} db_2).$$

Поскольку в исчислении Кошуля тензор кривизны

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

то изменение связности приведет к изменению тензора кривизны и тензора Эйнштейна $G' \to G''$ так, что даже если $G'(X,Y) = 0$, то

$$G''(X,Y) = Ric(X,Y) - \frac{1}{2} g(X,Y) R \neq 0.$$

Таким образом, переход к экзотичному многообразию приводит к появлению источника гравитационного поля (Asselmeyer, 1996, [181]).

Sladkowski [284] приводит такую интерпретацию этого результата: «Предположите, что мы обнаружили некоторый странный астрофизический источник тяготения, который не ведёт к любому приемлемому решению уравнений Эйнштейна. Это может означать, что мы используем неправильную гладкую структуру при описании пространства-времени и наблюдение этого странного источника указывает нам на нашу ошибку. Если мы изменяем гладкую структуру, то всё будет в порядке» [283].

4.3.2. Экзотичность как источник спинорного поля

Многообразия $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ можно представить как обладающие соответственно тривиальной ручкой Кэйсона $CH_0 = D^2 \times \mathbb{R}^2$ и нетривиальной CH так, что

$$\mathbb{R}^4 \setminus CH_0 \simeq \mathbb{R}^4_{\text{экз}} \setminus CH.$$

Действие

$$S = \int R_{\mathbb{R}^4}\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x$$

распишем с граничным членом:

$$S = \int\limits_{\mathbb{R}^4\setminus CH_0} R_{\mathbb{R}^4}\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x + \int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH_0)} K_{CH_0}\sqrt{g_\partial}d\sigma. \tag{4.5}$$

Приклеиваемая область ∂CH может быть описана как погружение $D^2 \times (0,1)$ в $\mathbb{R}^4$. В [180] показано, как может быть осуществлено спинорное представление погруженной поверхности D^2 в $\mathbb{R}^3$, которое легко продолжается до погружения приклеенной области $D^2 \times (0,1)$ в $\mathbb{R}^4$. Как результат имеем

$$\int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH_0)} K_{CH_0}\sqrt{g_\partial}d\sigma = \int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH_0)} \psi\gamma^k D_k\overline{\psi}\sqrt{g_\partial}d\sigma. \tag{4.6}$$

Спинорное представление обладает свойством: действие исчезает, если граница есть вложение, т.е. не имеет самопересечений. Поэтому получается ненулевой вклад граничного члена в действие только для $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ с границей $\partial(\mathbb{R}^4 \setminus CH)$:

$$\int\limits_{\partial(\mathbb{R}^4\setminus CH)} \psi\gamma^k D_k\overline{\psi}\sqrt{g_\partial}d\sigma,$$

который можно продолжить с границе на всё $\mathbb{R}^4_{\text{экз}} \setminus CH$. В результате имеем для экзотического $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$ совместное действие гравитационного поля со спинорным источником:

$$S_{\mathbb{R}^4_{\text{экз}}} = \int\limits_{\mathbb{R}^4_{\text{экз}}\setminus CH} [R_{\mathbb{R}^4} + \psi\gamma^k D_k\overline{\psi}]\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x,$$

появившимся благодаря экзотичности гладкой структуры, непосредственно относящейся к приклеенной области ручки Кэйсона (Asselmeyer-Maluga, Brans, 2011, [180]).

Глава 5

Скачки размерности пространства и времени

Вещи во Внешнем Мире *объёмны*. Зрячие такими видят их, слепые осязают. Объёмность вещей вполне характеризуется шириной, глубиной и высотой. Поскольку вещь занимает место в пространстве, то названные три характеристики объёмности сводятся к одному понятию, которое мы относим к свойствам пространства. Это свойство называется *трёхмерностью* пространства.

Вещь в наших ощущениях не дана нам *одномоментно*. Ощущение вещи имеет свою *длительность*. Длительность в нашем восприятии Мира тесно связана с терминами «начало» и «конец», причем «начало» всегда бывает *до* «конца», а не *после*. Мир воспринимается последовательно, во времени, и это обстоятельство характеризуется наделением времени таким свойством как *одномерность*.

Но эксперименты подтверждают утверждение СТО об относительности пространства и времени. Поэтому следует говорить о едином пространстве-времени, которое с учетом трёхмерности пространства и одномерности времени должно обладать таким свойством, как *четырёхмерность*.

5.1. Четырехмерное пространство-время как базовая модель Реальности

Мы ощущаем, а физические эксперименты это подтверждают, что размерность нашего физического пространства равна 3. Это базовая размерность, и 3-мерное пространство является базовым физическим пространством, к которому привязан человеческий способ осознания (и созидания) Вселенной.

То же мы можем сказать о времени. Мы уверены, что оно одномерно. Это базовая размерность времени.

Следовательно, 4-мерное лоренцево многообразие – 4-мерное пространство-время – это базовая модель окружающей нас Реальности, частью которой являемся и мы сами.

Однако вполне допустимы локальные и глобальные изменения размерности физического пространства или времени. Размерность – это топологическая характеристика топологического пространства. С ней связан конкретный набор чисел Бетти. Для 3-мерного пространства 3-мерное число Бетти не равно нулю, а все m-мерные числа Бетти β_m с $m \geq 4$ являются нулевыми. Если вдруг 4-мерное число Бетти окажется отличным от нуля, то это скажет о том, что физическое пространство стало 4-мерным.

Ясно, что с точки зрения физики спонтанные (или искусственные) изменения размерности пространства или времени должны характеризоваться скачками (плотности) энергии.

Как оценить эти скачки плотности энергии?

Существуют различные интегральные формулы (интегралы по многообразию), связывающие скаляры, образованные из скалярной кривизны, секционных кривизн, сверток тензора Риччи и тензора кривизны с самими собой, с числами Бетти, с характеристикой Эйлера-Пуанкаре, с числами Понтрягина, с сигнатурой (формула Хирцебруха) [73]. Такие формулы называют чаще всего формулами Гаусса-Бонне-Черна. Подынтегральные выражения в этих формулах можно выразить через плотность энергии, которая входит в уравнения гравитационного поля, принимаемой к рассмотрению теории гравитации. Этой теорией может быть традиционная теория гравитации Эйнштейна или, к примеру, теория гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне.

Пишем одну формулу Гаусса-Бонне-Черна для базового пространства, а вторую – для пространства с изменённой размерностью. Обе дают оценку усреднённой плотности энергии; одна для базового пространства, а вторая для изменённого. Разница и есть искомый скачок энергии, характеризующий изменение такой топологической характеристики пространства-времени, как размерность.

Ясно, что существенные скачки плотности энергии могут быть обнаружены в астрономических наблюдениях обширных областей физического пространства. Поэтому не исключено, что размерность пространства-времени в таких областях Вселенной может быть отличной от 4, а размерность физического пространства – вообще меняться с течением времени.

5.2. Формула Гаусса-Бонне-Черна для псевдоримановых многообразий M^{2k}

Пусть $< M^{2k}, g >$ – $2k$-мерное компактное ориентированное псевдориманово многообразие сигнатуры $< \underbrace{+...+}_{p} \underbrace{-...-}_{2k-p} >$.

Пусть $dv = \sqrt{|det(g)|}dx^1 \wedge ... \wedge dx^{2k}$ – $2k$-форма объема и

$$Pf_k(R) =$$

$$= \frac{(-1)^{[p/2]}}{2^{2k}(2\pi)^k k!} \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_{2k}}_{j_1 j_2 \dots j_{2k}} Ri_1 i_2 j_1 j_2 Ri_3 i_4 j_3 j_4 ... Ri_{2k-1} i_{2k} j_{2k-1} j_{2k},$$

где

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_{2k}}_{j_1 j_2 \ldots j_{2k}} = \begin{cases} +1, \{i_1 i_2 \ldots i_{2k}\} & \text{четная перестановка,} \quad \{j_1 j_2 \ldots j_{2k}\} \\ -1, \{i_1 i_2 \ldots i_{2k}\} & \text{нечетная перестановка,} \quad \{j_1 j_2 \ldots j_{2k}\} \\ \quad 0, \ \text{среди} \ \{i_1 i_2 \ldots i_{2k}\} & \text{или среди} \{j_1 j_2 \ldots j_{2k}\} \ \text{есть} \\ & \text{одинаковые.} \end{cases}$$

Тогда [186, 203]

$$\int\limits_{M^{2k}} Pf_k(R)dv = \chi(M^{2k}), \tag{5.1}$$

где

$$\chi(M^{2k}) = \sum_{m=0}^{2k} (-1)^m \beta_m(M^{2k})$$

– характеристика Эйлера-Пуанкаре многообразия M^{2k}.

5.3. Скачки размерности пространства-времени. Случай замкнутого многообразия

Из уравнений поля для $2k$-мерного псевдориманова пространства, т.е. для $2k$-мерного пространства-времени

$$R^{(2k)}_{ik} - \frac{1}{2} g^{(2k)}_{ik} R^{(2k)} = \kappa \varepsilon_{(2k)} u_i u_k,$$

а также из структуры формулы для компонент тензора кривизны получаем, что

$$R^{(2k)} \sim \kappa\varepsilon_{(2k)}, \ R^{(2k)}_{ik} \sim \kappa\varepsilon_{(2k)}, \ R^{(2k)}_{iklm} \sim \kappa\varepsilon_{(2k)},$$

$$R^{(2k)}_{iklm} R^{(2k)}_{abcd} \sim [\kappa\varepsilon_{(2k)}]^2, \ R^{(2k)}_{iklm} R^{(2k)}_{jspt} R^{(2k)}_{abcd} \sim [\kappa\varepsilon_{(2k)}]^3, \ldots$$

Поэтому

$$Pf_k(R) \sim (\kappa\varepsilon_{(2k)})^{2k-1}.$$

Следовательно, с помощью формулы Гаусса-Бонне-Черна (5.1) получаем следующую оценку для среднего значения плотности энергии $2k$-мерной реальности:

$$(\kappa\langle\varepsilon_{(2k)}\rangle)^{2k-1} vol(M^{2k}) \sim \chi(M^{2k}).$$

Предположим, что базовым является 4-мерное пространство-время M^4, для которого $k = 2$, и объем $vol(M^4) \sim l^4$.

Предположим также: Реальность такова, что размерность пространства-времени как модели Реальности «колеблется спонтанно» около размерности базового пространства-времени, т.е. следует наравне с M^4 рассматривать модели M^{2k}. Примем, что дополнительные размерности характеризуются величиной λ, малой по сравнению с числом l, т.е. $l/\lambda > 1$, и совершенно не важно, идет ли речь о пространственном дополнительном измерении или о временном.

Таким образом, при $k \geq 2$

$$vol(M^{2k}) \sim l^4\lambda^{2k-4} = l^{2k}(\lambda/l)^{2k-4},$$

и поэтому

$$\langle\varepsilon_{(2k)}\rangle \sim \frac{1}{\kappa\lambda}\left(\frac{\chi(M^{2k})\lambda^3}{l^4}\right)^{1/(2k-1)}.$$

Следовательно, так как очевидно $[\chi(M^{2k})\lambda^3]/l^4 < 1$, то[1]

$$\langle\varepsilon_{(4)}\rangle \leq \langle\varepsilon_{(6)}\rangle \leq ... \leq \langle\varepsilon_{(2k)}\rangle \leq ...$$

Таким образом, мы видим, что переход к более мерному пространству-времени требует «затрат» энергии, а уменьшение размерности означает «сброс» энергии. При этом 4-мерная реальность, которую мы назвали базовой, является основным энергетическим уровнем с минимальной средней энергией.

Образно можно сказать, что реальность с размерностью большей, чем 4, – это возбужденное состояние базового состояния Реальности

[1] С учетом, например, того, что $M^{2k} = S^{2k}$ и $\chi(S^{2k}) = 2$.

Может ли случиться, что при более точных оценках базовым состоянием Реальности окажется не 4-мерная Реальность, а, скажем, 6-мерная? Напомним, что фундаментальность 6-мерной размерности предсказывалась Бартини [8].

Думается, в пользу размерности 4 говорит то, что среди всех $\mathbb{R}^n$ только $\mathbb{R}^4$ допускает бесконечное число недиффеоморфных гладких структур, для всех прочих – гладкие структуры диффеоморфны (см. гл. 4).

5.4. Вероятности переходов при смене размерности

Как вычислить вероятности переходов $M^{2k} \to M^{2p}$? Для этого можно воспользоваться подходом, предложенным в книге [66] и частично в части II данной книги.

Реальность может представляться нам как псевдориманово многообразие M^n любой размерности n в зависимости от нашего способа созидания Реальности и её осознания.

Фактически мы считаем, что переходы $M^{2k} \to M^{2p}$, влекущие скачки размерности пространства и времени, происходят не в силу того, что это некоторый естественный природный процесс, а в силу того, что люди вынуждают Реальность (природу) совершать это в силу скачкообразной эволюции своих представлений (схем) о том, как устроена эта Реальность. Смена представлений (схем) – это смена способа осознания Реальности, смена своих идей-фантазий о структуре Реальности (см. гл.17 и [72]).

Базовым является 4-мерное лоренцево многообразие $< R^4, g^{(4)} >$.

В §§ 1.2.1, 1.2.6 предлагалось связывать типы осознания с объектами некоторой категории.

Обозначаем способы осознания как $\ell A, \ell B, ...$ В [66] способы осознания отождествляются с объектами категории локусов, являющейся двойственной к категории гладких колец (см.

приложение А):

$$\ell A = \ell C^{\infty}(\mathrm{I\!R}^m), \quad \ell A = \ell C^{\infty}(\mathrm{I\!R}^n), ...$$

В случае способа осознания ℓA Реальность предстает как $(4+m)$-мерное гиперпространство $R^4_{\ell A}$ с метрикой $g^{(4)}(\ell A)$ (см. §§ 18.7.4, 18.8):

$$\sum_{I,J=1}^{4+m} g^{(4)}(\ell A)_{IJ} dz^I dz^J =$$

$$= g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a) dx^i dx^k + 2 s_{i\alpha} dx^i da^{\alpha} + h_{\alpha\beta} da^{\alpha} da^{\beta}, \qquad (5.2)$$

$$z = (x, a), \quad x \in \mathrm{I\!R}^4, \ a \in \mathrm{I\!R}^m.$$

Имеем для амплитуды вероятности перехода

$$R^4_{\ell A} \to R^4_{\ell B}$$

от $(4+m)$-мерной среды (реальности) $R^4_{\ell A}$ к $(4+n)$-мерной среде (реальности) $R^4_{\ell B}$:

$$\langle g^{(4)}_1(\ell A) | g^{(4)}_2(\ell B) \rangle = \int\limits_{g^{(4)}_1(\ell A)}^{g^{(4)}_2(\ell B)} \mathcal{D}[g^{(5)}(\ell A, \ell B)] e^{\frac{i}{\hbar} S[g^{(5)}(\ell A, \ell B)]}, \qquad (5.3)$$

где

$$S[g^{(5)}(\ell A, \ell B)] = \kappa_m \int \sqrt{|g^{(5)}(\ell A, \ell B)|} R^{(5)}(\ell A, \ell B) d^5 x. \qquad (5.4)$$

Для того чтобы написать эти формулы в более осмысленном виде, необходимо учесть наличие морфизма $\Phi : \ell B \to \ell A$ между способами осознания (стадиями) $\ell A = \ell C^{\infty}(\mathrm{I\!R}^n)$ и $\ell B = \ell C^{\infty}(\mathrm{I\!R}^m)$. Это означает, что $a = \phi(b)$, где $a \in \mathrm{I\!R}^n, \ b \in \mathrm{I\!R}^m$.

Иначе говоря, вместо (5.3)-(5.4) пишем

$$\langle g^{(4)}_1(\ell A) | g^{(4)}_2(\ell B) \rangle = \int\limits_{g^{(4)}_1(x, \phi(b))}^{g^{(4)}_2(x, b)} \mathcal{D}[g^{(5)}(b)] e^{\frac{i}{\hbar} S[g^{(5)}(b)]}, \qquad (5.5)$$

где

$$S[g^{(5)}] = \kappa_m \int\int \sqrt{|g^{(5)}(x,b)|}R^{(5)}(x,b)d^5xd^mb. \qquad (5.6)$$

Формулы (5.5)-(5.6) дают нам искомые амплитуды вероятности переходов вида $M^{2k} \to M^{2p}$, где $M^{2k} = R^4_{\ell A}$ и $M^{2p} = R^4_{\ell B}$. Правда, совершенно неясно, как их можно вычислить.

5.5. Формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем

Пусть M^{2k} – псевдориманово многообразие с краем ∂M^{2k} и $q : T_1M^{2k} \to M^{2k}$ – расслоение на сферы, ассоциированное с касательным расслоением TM^{2k} (т.е. состоящее из векторов касательного расслоения с нормой 1). Существует дифференциальная $(2k-1)$-форма σ на T_1M^{2k}, для которой

$$\int\limits_{q^{-1}(x)} \sigma = 1 \quad \text{для всех } x \in M^{2k}$$

и $q^*Pf_k(\Omega) = d\sigma$.

Всякое векторное поле T, нормальное к ∂M^{2k}, задает несингулярное сечение $\tau : \partial M^{2k} \to T_1M^{2k}$.

Тогда имеет место формула Черна-Гаусса-Бонне для псевдоримановых многообразий M^{2k} с краем [274]:

$$\int\limits_{M^{2k}} Pf(\Omega) = ind_{\partial M^{2k}}T + \int\limits_{\partial M^{2k}} \tau^*\sigma, \qquad (5.7)$$

где $ind_{\partial M^{2k}}$ определяется следующим образом.

Если T – ненулевое векторное поле на ∂M^{2k}, $\overline{T}$ – продолжение векторного поля T на все многообразие M^{2k} и $a_1, ..., a_k$

– конечное число особых точек (нулей) поля $\overline{T}$ на M^{2k} [85, с.516], то

$$ind_{\partial M^{2k}} T = \sum_{j=1}^{k} ind_{a_j} \overline{T}.$$

Если поле T трансверсально (в частности, нормально) к ∂M^{2k}, то

$$ind_{\partial M^{2k}} T = \chi(M^{2k}).$$

В общем случае для ориентированного компактного многообразия с краем:

$$ind_{\partial M^{2k}} T = \chi(M^{2k}) - deg(K_T),$$

где $deg(K_T)$ – степень отображения $K_T : \partial M^{2k} \to S^{2k-1}$ [85, с.502], $K_T(x)$ равно точке на S^{2k-1}, отмеченной концом вектора $v = v^0 T + v^1 u_1 + ... + v^{2k-1} u_{2k-1}$, $\{u_1, ..., u_{2k-1}\}$ – базис в $T_x(\partial M^{2k})$, $x \in \partial M^{2k}$, $\sum_j v^j = 1$ [174].

Если Q^{2k} – $2k$-мерная компактная область в M^{2k} с границей ∂Q^{2k}, то формулу (5.7) можно переписать в виде

$$\int\limits_{Q^{2k}} Pf(\Omega) = ind_{\partial Q^{2k}} T + \int\limits_{\partial Q^{2k}} \tau^* \sigma, \tag{5.8}$$

где все формы и поля определяются, как выше, с заменой буквы M на букву Q.

5.6. Скачки размерности пространства и времени. Общий случай

Пусть у пространства-времени M^n размерности n область Q^n с границей (краем) ∂Q^n становится внутренней частью более мерной области Q^{n+1} (см. рис.5.1).

Поскольку формула Гаусса-Бонне-Черна нетривиальна для чётномерных многообразий, то считаем, что $n = 2k$, и включаем область Q^{n+1} как часть в $(n+2)$-мерную область Q^{n+2}.

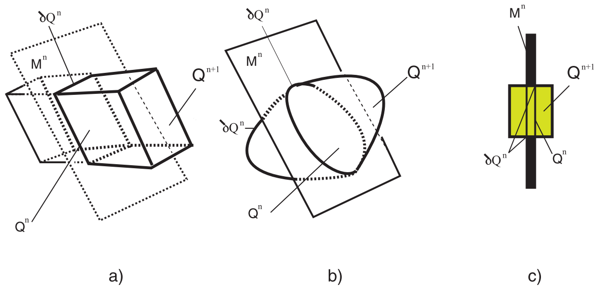

Рис. 5.1: a) Многообразие M^n, в котором клетка Q_0^n с границей (краем) ∂Q_0^n становится внутренней частью клетки Q^{n+1} большей размерности; b) сглаженный вариант левого рисунка ; c) вид «сбоку» на процедуру увеличения размерности многообразия в «месте» Q_0^n.

Теперь, для того чтобы оценить скачки энергии, нам нужно выписать формулы Гаусса-Бонне-Черна (5.8) для многообразия с краем: одна для пары $(Q^n, \partial Q^n)$, а другая для пары $(Q^{n+2}, \partial Q^{n+2})$.

Следует заметить, что получение точных оценок скачков энергии на пути, указанном в данной заметке, является весьма трудной математической задачей, поскольку сложно выразить геометрические члены, входящие в формулы типа Гаусса-Бонне-Черна, через плотность энергии, содержащуюся в уравнениях поля.

5.7. Расчет изменения размерности физического пространства

Физическое пространство моделируется математически как риманово многообразие, т.е. как пара $< V^n, g >$, где V^n – гладкое многообразие, а g – положительно определенная риманова метрика.

Мы можем считать, глядя на Реальность как на Нечто, находящееся в пространстве, что это Нечто меняется с течением времени t. Таков классический, доминковианский взгляд на

Реальность.

Физическое пространство может иметь размерность $\dim = n$ с базовым значением $\dim = 3$. Предположим, что размерность в момент времени t_0 меняется и вместо значения n принимает значение m. Какая для этого требуется энергия?

Ясно, что расчёт скачка энергии можно провести по схеме, изложенной в предыдущих параграфах, с той только разницей, что пишутся формулы Гаусса-Бонне-Черна для римановых многообразий $< V^n, g^{(n)} >$ и $< V^m, g^{(m)} >$ и используются пространственные компоненты уравнения поля.

5.8. Speculatio

1. «Если возможно, чтобы существовали протяжения с другими измерениями, то весьма вероятно, что Бог где-то их действительно разместил» (Кант, [101]).

Поскольку, благодаря Риману, жившему позже Канта, многомерные протяженности-пространства были формально описаны, т.е. они возможны, то их интерпретации и есть вселенные-реальности, наличествующие во Внешнем Мире по воле Божией, если говорить на языке Канта. Внешний Мир меняет форму (= топологию), обладающую той или иной размерностью, в зависимости от воззрений на Вселенную и от практических задач, стоящих перед людьми, в конкретной исторической эпохе.

2. Как показали Калуца и Клейн, пространство-время может иметь дополнительные к четырём измерения. «Дополнительные измерения могут быть намного больше, чем ранее думали физики: размер этих измерений может быть порядка десятой доли миллиметра» [146, с.305]. Большой размер дополнительных измерений может объяснить, почему гравитация слабее электромагнитных, слабых и сильных сил [146, с.305]. Иными словами, топология (форма) и геометрия Вселенной задает сравнительную силу известных нам взаимодействий, т. е. априорная форма представления сознанием (в духе Канта) Внешнего Мира определяют физику Реальности.

Глава 6

Разрывы пространства и кротовые норы

Классическое представление о физическом пространстве наделяет его таким фундаментальным топологическим свойством как *связность*. Физическое пространство – есть связное 3-мерное многообразие, оно объединяется с временем в единое 4-мерное пространство-время.

Топология 3-пространства, а точнее такие его топологические свойства, как связность и односвязность, как показано в этой главе, могут изменяться при скачках энергии естественного (взрывы) или искусственного происхождения.

При нарушении связности пространства рождаются либо ответвления в пространстве-времени, либо 4-мерные кротовые норы. Образовавшееся ответвление – это, по сути дела, параллельный мир.

В случае нарушения односвязности пространства появляются 3-мерные кротовые норы.

И 4-мерные, и 3-мерные кротовые норы могут использоваться как для переходов в Прошлое (машина времени), так и для сверхбыстрых по часам Земли сверхдальних космических перелетов [42].

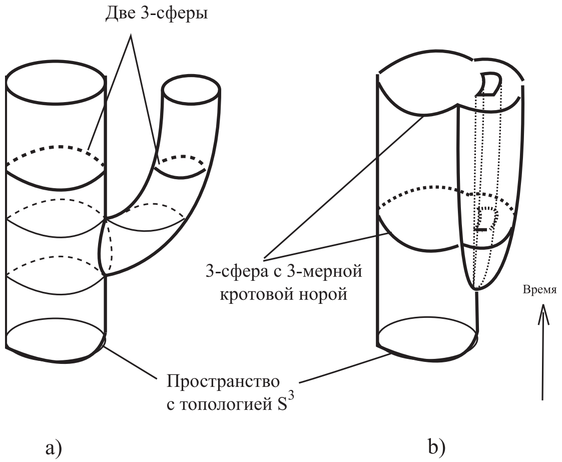

Рис. 6.1: a) Рождение 4-мерной кротовой норы. Пространство с топологией 3-сферы теряет связность. Образуются два пространства, каждое из которых гомеоморфно 3-сфере. b) Рождение 3-мерной кротовой норы в пространстве с топологией 3-сферы. Пространство теряет односвязность.

6.1. Физика образования 4-мерных кротовых нор

Если в пространстве-времени не существует или существует, но не доступна естественная кротовая нора, то придется создавать её искусственный аналог.

В качестве одного из способов можно рассмотреть образование 4-мерной кротовой норы, начало которой находится в настоящем, а конец – либо в историческом прошлом, либо в историческом будущем. Следует заметить, что пространство-время с 4-мерной кротовой норой уже не является односвязным, оставаясь связным. Поэтому существует пространственно-подобные несвязные гиперповерхности. При этом процесс рождения 4-мерной кротовой норы можно рассматривать как отрыв от 3-мерного пространства M^3 некоторой области $D_0 \subset M^3$.

Другими словами, образование 4-мерной кротовой норы

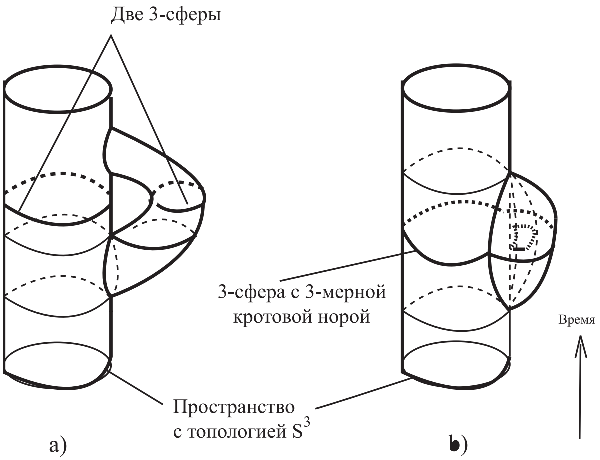

Рис. 6.2: a) Рождение и исчезновение 4-мерной кротовой норы. Пространство с топологией 3-сферы теряет связность и вновь ее обретает. b) Рождение 3-мерной кротовой норы в пространстве с топологией 3-сферы. Пространство теряет односвязность, а затем опять становится односвязным.

означает нарушение связности пространственно-подобной гиперповерхности. Топологически (и геометрически) этот процесс может быть реализован стягиванием в точку границы отрываемой 3-мерной области D_0. В дальнейшем мы вклеим оторванную область в необходимую точку пространства-времени.

Следует отметить, что математически процедура склеивания двух несвязанных областей 3-мерного пространства представляется более сложным процессом, чем разрыв связной области на несвязные компоненты. Это вызвано тем, что при разрыве на две компоненты процесс стягивания границ в точку можно обратить, так как эта точка является в действительности некоторой двумерной областью нулевой площади, полученной в результате непрерывной деформации. При склеивании двух несвязных компонент мы сначала выберем по точке в каждой области, а потом отождествим их. После этого точка, соединяющая склеенные части 3-мерной гиперповерхности, остается истинной точкой, в отличие от предыдущего случая. И мы не сможем так же просто растянуть точку в двумерную область.

6.1.1. Разрыв пространства

Разрыв пространства, а точнее отрыв от него 3-мерной области D_0 осуществим за счет рассмотрения изменяющейся топологии и геометрии на одном и том же множестве M^3.

Можно построить вложение рассматриваемого множества M^3 в объемлющее 4-мерное пространство в виде семейства римановых 3-пространств, реализующих привычную картину разрыва на два несвязных куска. Эту картину оставляем как тренировку воображения читателя, её строгая математическая формализация не является сложной задачей.

Внешний наблюдатель при отрыве 3-мерной области (шара) D_0 будет видеть его постепенное исчезновение буквально «на глазах». Оторвавшийся кусок D_0, *продолжая существовать*, начнет путешествовать в *потоке времени*[1] в объемлющем Гиперпространстве (рис. 6.1, а)) и либо вернется в исходное пространство, образуя 4-мерную кротовую нору (рис. 6.2, а)), либо начнет блуждание в Гиперпространстве (рис. 6.1, а)), возможно, «пристав» к *другому* пространству *иного* пространства-времени.

6.1.2. Оценка скачка энергии, необходимого для разрыва пространства

Если теперь рассмотреть модель связного, но неодносвязного пространства-времени, то вполне можно обнаружить несвяз-

[1] *Поток времени* – выбранная временная ориентация в объемлющем Гиперпространстве, содержащем наше пространство-время (которое получает индуцированную временную ориентацию). Временная ориентация – это заданное ненулевое времениподобное векторное поле, т.е. конкретный непрерывный выбор половин светового конуса. Почему временная ориентация, т.е. направление времени, существует, можно как-то объяснять (см., например, [77, с.253]), но важно, что оно реально наличествует во Внешнем Мире.

ные трехмерные пространственноподобные сечения. Более того, несвязное сечение M_1^3 может получиться из связного M_0^3 с помощью сферической перестройки [308], и, следовательно, связное и несвязное сечения можно рассматривать как начальное и конечное состояния некоторого геометродинамического процесса (лоренцев кобордизм, см.[308]). В ходе этого процесса 3-геометрия претерпевает переход через некоторое критическое состояние $M_{1/2}^3$, которое отвечает нарушению связности пространственноподобного сечения.

Было бы интересно выяснить [308], при каких условиях происходит нарушение связности пространственноподобных сечений, или, если оставить в стороне конкретную дифференциально-топологическую модель, выяснить, возможно ли, что в ходе некоторого физического процесса трехмерное пространство M_0^3 становится несвязным. Допуская вольность в словах, можно сказать, что нарушение связности означает отрывание области D_0 от M_0^3.

Рождение 4-мерной кротовой норы означает, что 3-мерный кусок D_0 отделяется, оставляет 3-мерное физическое пространство M_0^3.

Переход от M_0^3 к M_1^3 можно осуществить, стягивая в точку α^* границу ∂D_0 замкнутой области $D_0 \subset M_0^3$. Получается пространство $M_{1/2} = C_{1/2} \bigcup D_{1/2}$, где $C_{1/2}$ и $D_{1/2}$ имеют одну общую точку α^* (результат стягивания ∂D_0) и является связными гладкими многообразиями, диффеоморфными связными компонентами пространства M_1^3. Затем идет отрыв $C_{1/2}$ от $D_{1/2}$; получаем M_1^3.

Геометрически (метрически) нарушение связности можно охарактеризовать как процесс уменьшения до нуля площади поверхности ∂D_0, ограничивающей отрывающуюся область D_0. Значит, связность пространства нарушается вследствие возмущения 3-метрики $h_{\alpha\beta} \to h_{\alpha\beta} + \delta h_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Локальное возмущение 3-метрики ведет к изменению кривизны 3-пространства. В рамках общей теории относительности 3-пространство рассматривается как пространственноподобное сечение пространства-времени. Поэтому следует исходить из возмущения 4-метрики g_{ik} $(i,k = 0,1,2,3)$ пространства-времени, индуцирующего возмущение 3-метрики $h_{\alpha\beta}$ 3-пространства. Согласно уравнениям Эйнштейна, исходной причиной возмущения метрики является появление дополнительного локального энергетического источника. Необходимые затраты энергии, влекущие нарушение связности 3-пространства, можно было бы легко подсчитать, если бы имелась формула, связывающая некоторую числовую характеристику связности пространства с кривизной этого пространства.

В случае замкнутого 3-пространства M^3 такой числовой характеристикой является нульмерное число Бетти $\beta_0(M^3)$ [152]. Необходимая же формула также имеется, правда лишь для частного случая замкнутого ориентированного риманова 3-пространства M^3 с метрикой $h_{\alpha\beta}$, допускающего регулярное единичное киллингово векторное поле ξ [277]:

$$\frac{1}{2\pi l(\xi)}\int\limits_{M^3}\{K(\xi^{\perp})+3K(\xi)\}dv = 2\beta_0(M^3)-\beta_1(M^3)+d_0, \quad (6.1)$$

где $d_0 = 0$ или 1 в зависимости от чётности или нечётности одномерного числа Бетти $\beta_1(M^3)$; $K(\xi^{\perp})$ – значение римановой кривизны в плоскости, ортогональной ξ; $K(\xi)$ – значение римановой кривизны для любой плоскости, содержащей ξ (отметим, что $K(\xi)$ не зависит от выбора плоскости); dv — форма объема; $l(\xi)$ – длина интегральной траектории поля ξ (она постоянна).

Осуществим отрывание области D_0 следующим образом. На 3-многообразии M_0^3 зададим семейство римановых метрик $h_{\alpha\beta}(t)$, $t\in[0,1]$, удовлетворяющее условиям:

а) $h_{\alpha\beta}(t)$ при $0\le t<1/2$ – C^2-гладкое тензорное поле, а при $t\ge 1/2$ оно имеет разрывы производных первого рода на границе ∂D_0 замкнутой области D_0;

б) (стягивание ∂D_0 в точку α^*) площадь σ_t границы ∂D_0, вычисленная в метрике $h_{\alpha\beta}(t)$, стремится к нулю при $t\to\frac{1}{2}-0$

или, иначе,

$$dv_t\big|_{\partial D_0} \underset{t\to\frac{1}{2}-0}{\longrightarrow} 0$$

и

$$dv_t\big|_{\partial D_0} = 0 \text{ при } t \geq 1/2,$$

где dv_t — форма объёма в метрике $h_{\alpha\beta}(t)$; $dv_s/dv_t \leq 1$ на M_0^3, $t < \frac{1}{2} < s$;

в) пространство $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(0) >$, т.е. M_0^3 с метрикой $h_{\alpha\beta}(0)$ является связным C^2-гладким римановым многообразием, а $C_t \equiv (M_0 \setminus D_0) \bigcup \{\alpha^*\}$ и $D_t \equiv D_0 \bigcup \{\alpha^*\}$ с метрикой $h_{\alpha\beta}(t)$, $t \geq 1/2$ и дополненные точкой α^* представляют собой C^2-гладкие связные римановы замкнутые многообразия;

г)$\partial h_{\alpha\beta}/\partial n$, где n — нормаль к пространству $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(t) >$, непрерывны;

д) $h_{\alpha\beta}(t) = h_{\alpha\beta}(0)$ вне окрестности O_ε области D_0;

е) пространство $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(t) >$, $t > 1/2$ имеет неотрицательную кривизну;

ж) пространство $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(t) >$, $t \in [0,1]$, допускает регулярное единичное киллингово поле ξ_t.

Последнее предположение самое неприятное, так как в ходе отрыва D_0 от M_0^3 симметрия 3-пространства, по-видимому, может исчезнуть при приближении к критическому значению $t = 1/2$. Но, понимая это, мы вынуждены вводить условие «ж» для того, чтобы иметь право пользоваться формулой (6.1). Отметим, что на необходимость допустить симметрию как средство хоть как-то продвинуться в решении поставленной нами задачи, указывал автор работы [308].

Индексом t будем помечать объекты, относящиеся к пространству $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(t) >$.

Для простоты будем считать, что всегда $\beta_1 = 0$. Пространство $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(t) >$ при $t < 1/2$ связно, и поэтому

$$\int\limits_{M_0^3} f(\xi_t) dv_t = 4\pi l(\xi_t), \tag{6.2}$$

где
$$f(\xi_t) = K(\xi_t^{\perp}) + 3K(\xi_t).$$

При $s > 1/2$ пространство $< M_0^3, h_{\alpha\beta}(s) >$ имеет уже две связные компоненты. Следовательно,

$$\int\limits_{C_s} f(\xi_s) dv_s = 4\pi l(\xi_s'), \qquad \int\limits_{D_s} f(\xi_s) dv_s = 4\pi l(\xi_s''), \tag{6.3}$$

где штрихи над ξ_s различают поле ξ_s на связных компонентах.

Из (6.2), (6.3) получаем

$$\int\limits_{O_\varepsilon} \{f(\xi_s) dv_s - f(\xi_t) dv_t\} = 4\pi\{l(\xi_s') + l(\xi_s'') - l(\xi_t)\}.$$

Естественно считать, что объем области D_0 мал по сравнению со всем пространством. Поэтому $l(\xi_s') \sim l(\xi_t)$, а $l(\xi_s'')$ по порядку величины совпадает с линейным размером λ области D_0. Далее, в O_ε для достаточно близких к $1/2$ значений t, s $dv_s/dv_t \leq 1$ в силу «б». Но тогда благодаря условию «е» имеем

$$\int\limits_{O_\varepsilon} f(\xi_s) dv_t \geq \int\limits_{O_\varepsilon} f(\xi_s) \frac{dv_s}{dv_t} dv_t \sim 4\pi\lambda + \int\limits_{O_\varepsilon} f(\xi_t) dv_t,$$

т.е.
$$\int\limits_{O_\varepsilon} \delta f \cdot dv_t \sim 4\pi\lambda, \tag{6.4}$$

где $\delta f \equiv f(\xi_s) - f(\xi_t)$, точнее

$$\delta f \equiv \lim_{s\to 1/2+0} f(\xi_s) - \lim_{t\to 1/2-0} f(\xi_t).$$

Вводя среднее значение величины g

$$\langle \mathrm{g} \rangle = \frac{1}{v_t(O_\varepsilon)} \int\limits_{O_\varepsilon} \mathrm{g}\, dv_t,$$

где $v_t(O_\varepsilon)$ – объем области O_ε в метрике $h_{\alpha\beta}(t)$, перепишем (6.4) в следующем виде:

$$\langle\delta f\rangle \cdot\ v_t(O_\varepsilon) \sim 4\pi\lambda. \tag{6.5}$$

Это соотношение говорит о том, что отрыв области D_0 сопровождается скачком кривизны 3-пространства. Так как для скалярной кривизны $R^{(3)}$ 3-пространства можно написать [170, с.140]

$$R_t^{(3)} = 2\{K(\xi_t^\perp) + 2K(\xi_t)\},$$

то следует предположить, что

$$\langle\delta R^{(3)}\rangle \ \sim\ \langle\delta f\rangle. \tag{6.6}$$

Из уравнений Эйнштейна имеем [124, с.157]

$$R_t^{(3)} + K_{2,t} = \frac{16\pi G}{c^4}\,\varepsilon(t), \tag{6.7}$$

где

$$K_{2,t} = (K_{\alpha}^{\cdot\alpha})^2 - K_{\alpha\beta}K^{\alpha\beta}$$

и $K_{\alpha\beta}$ – тензор внешней кривизны пространственного сечения; $\varepsilon(t)$ – плотность энергии.

Благодаря условию «г», инвариант $K_{2,t} = K_{2,t}(x)$, $x\in M_0$, $t\in[0,1]$, будет непрерывной функцией на $M_0^3\times[0,1]$. Следовательно, если $\delta K_2 = K_{2,s} - K_{2,t}$, то

$$\langle\delta K_2\rangle\ = [K_{2,s} - K_{2,t}]\big|_{x=x_0(t,s)}\ \underset{\substack{t\to\frac{1}{2}-0\\ s\to\frac{1}{2}+0}}{\longrightarrow}\ 0.$$

Поэтому для некоторых $t_0 < 1/2$ и $1/2 < s_0$ величина $\langle\delta K_2\rangle$ пренебрежимо мала, и тогда из (6.5), (6.6), (6.7) получаем

$$\langle\delta\varepsilon\rangle \sim \frac{c^4}{4\pi G}\,\frac{\lambda}{v_{t_0}(O_\varepsilon)}\,,$$

или, можно написать,

$$\boxed{\langle\delta\varepsilon\rangle \sim \frac{c^4}{4\pi G}\,\frac{1}{\sigma},} \tag{6.8}$$

где σ – характерное сечение области D_0.

Требуемая оценка получена[2].

6.1.3. Учет скачка внешней кривизны 3-пространства

Мы получили оценку (6.8) скачка энергии при условии г), означающего непрерывность внешней кривизны $K_{\alpha\beta}$ пространственно-подобной гиперповерхности. Величина $\langle\delta\varepsilon\rangle$ обратно пропорциональна площади характерного сечения σ отрываемой области D_0. Для уменьшения скачка плотности энергии необходимо отказаться от непрерывного изменения внешней кривизны 3-мерного пространства в процессе нарушения его связности [138].

Отметим, что тензор $K_{\alpha\beta}$ задается соотношением

$$K_{\alpha\beta} = -e_\beta \nabla_\alpha n,$$

в котором базисные векторы e_β на гиперповерхности M_0^3 мы выбрали совпадающими с соответствующими базисными векторами в пространстве-времени, а временную координату x^0 зададим таким образом, чтобы вектор нормали n совпадал с e_0. Такая система координат в 4-мерном пространстве-времени будет синхронной, а система координат на гиперповерхности – гауссовой нормальной (если мы дополнительно будем полагать $g_{00} = 1$). В этом случае

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial n} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^0}.$$

[2] В статье [43] оценка (6.8) выведена без предположения о компактности 3-пространства.

Предполагаем, что при $t = 1/2$ производная по времени от метрического тензора $h_{\alpha\beta}(t)$ имеет разрыв первого рода. Это означает разрыв первого рода компонент тензора внешней кривизны.

Тогда из уравнения (6.7) имеем:

$$\langle \delta R^{(3)} \rangle + \langle \delta K_2 \rangle = \frac{16\pi G}{c^4} \langle \delta \varepsilon \rangle. \tag{6.9}$$

Из (6.5), (6.6) следует, что

$$\langle \delta R_t^{(3)} \rangle \sim \frac{4\pi}{\sigma}. \tag{6.10}$$

Таким образом, можно надеяться снизить затраты на скачок энергии для разрыва пространства, если принять, что скачок внешней кривизны равен

$$\langle \delta K_2 \rangle \sim \frac{1}{\sigma},$$

или, что равносильно,

$$\left\langle \delta \left(\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right) \right\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma}}. \tag{6.11}$$

Отметим, что внешняя кривизна имеет значение не только в момент разрыва двух областей пространственно-подобной гиперповерхности, но и при стягивании границы области D_0 в точку. Внешняя кривизна, по своей сути, определяет характер вложения гиперповерхности в объемлющее пространство. Поэтому стягивание границы отрываемой области в точку α^*, несомненно влекущее непрерывную деформацию гиперповерхности, соответствует изменению внешней кривизны пространства M_t^3.

6.2. Топологическое описание образования 4-мерной кротовой норы

До сих пор основные результаты о нарушении связности пространственноподобной гиперповерхности касались физической стороны вопроса. Давайте посмотрим на это явление с топологической точки зрения. Покажем, как реализовывается разрыв некоторой области на две области.

Разрыв будем осуществлять за счёт рассмотрения семейства изменяющихся топологий на одном и том же множестве M.

Но прежде напомним полезное для наших целей определение топологии.

6.2.1. Топология и её задание

Если дано множество точек, то можно задать вопрос о форме, которую это множество имеет. В современной математике слово «форма» заменяется на слово «топология».

Топология (форма) множества M зависит от того, как для каждой точки задается то, что называется её *окрестностями.* Окрестность U_x точки x – это перечень тех других точек множества M, которые объявляются *близкими* к точке x.

Топология на множестве M – это семейство $\mathcal{T} = \{(U_x^\alpha)_{\alpha\in A_x} : x \in M\}$ окрестностей точек множества M, удовлетворяющих двум условиям:

a) для любых $x \in M$ и $\alpha \in A_x$ $x \in U_x^\alpha$;

b) для любых $U_x^\alpha, U_x^{\alpha'}$ существует $U_x^{\alpha''} \subset U_x^\alpha \cap U_x^{\alpha'}$.

На одном и том же множестве M можно задать разные топологии, переопределяя то, что считать близким к той или иной точке. В результате *форма* (топология) у одного и того же множества может меняться кардинальным образом. Например, множество может иметь форму отрезка прямой, а может быть парой отрезков. Как это может быть сделано, показано в § 6.2.2.

6.2.2. Нарушения связности отрезка

Для начала разорвём отрезок [0,1] на два: [0,1/2] и [1/2,1]; при этом единственная на отрезке [0,1] точка 1/2 раздваивается.

На отрезке [0,1] определим параметрическое семейство функций $f_t(x)$, $t \in [0,1]$, такое, что для любого $x \in [0,1]$

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = 2|x - 1/2|,$$

а при $t \in (0,1)$ семейство функций f_t представляет непрерывную деформацию функции f_0 в функцию f_1, причем все $f_t(x)$ $(t < 1)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого в точке $x = 1/2$, является $f_1(x)$ (см. рис. 6.3). Более того, для любого t

$$f_t(1) = f_t(1) = 1.$$

Рассмотрим топологическое подпространство

$$\Gamma_t = \{(x, f_t(x), f_t'(x-0),\ (x, f_t(x), f_t'(x+0)\}$$

с индуцированной топологией трёхмерного арифметического пространства $\mathbb{R}^3$, где $f_t(x\pm 0) = \lim\limits_{z\to x\pm 0} f_t(z)$. Две точки (a,b,α) и (c,d,β) пространства Γ_t назовем эквивалентными тогда и только тогда, когда

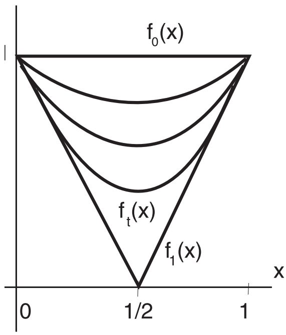

Рис. 6.3: Семейство $f_t(x)$.

1) $a = c$;
2) $b = d$;
3) $\alpha \equiv \lim\limits_{x\to a-0} f_t'(x) = \lim\limits_{x\to c+0} f_t'(x) \equiv \beta$.

Профакторизуем пространство Γ_t по введенному отношению эквивалентности $\sim$. Получаем фактор-пространство $\Gamma_t/_\sim$.

Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство при $t < 1$ гомеоморфно отрезку [0,1], а при $t = 1$ – несвязному пространству $[0,1] \cup [2,3]$. Удобно последнее несвязное пространство обозначить как $\Gamma_1/_\sim = [0,(1/2)_-] \cup [(1/2)_+, 1]$. Итак, мы определили семейство топологических пространств $\{\langle \Gamma_t/_\sim, \mathcal{T}_t\rangle\}$, где $\mathcal{T}_t$ – рассмотренная фактор-топология на $\Gamma_t/\sim$. При этом, если $t \neq 1$, то $\Gamma_t/_\sim \approx [0,1]$, а $\Gamma_1/_\sim = [0,(1/2)_-] \cup [(1/2)_+, 1]$, и справедливы соотношения $[0,(1/2)_-] \approx [0,1]$ и $[(1/2)_+, 1] \approx [0,1]$. Таким образом, мы рассмотрели разрыв отрезка на два с топологической точки зрения.

6.2.3. Нарушение связности для сфер S^2 и S^3

Деление сферы S^2. Разрыв сферы S^2 проведем по аналогии с представленными выше результатами. Введем линейное отображение $\mu(\theta) : [-\pi/2, +\pi/2] \to [0,1]$, такое, что $\mu(-\pi/2) = 0, \mu(0) = 1/2, \mu(\pi/2) = 1$. Далее, на сфере зададим семейство функций $\widetilde{f}_t(\theta,\varphi)$ (здесь $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$), такое, что:

1) $\widetilde{f}_t(\theta,\varphi) = \widetilde{f}_t(\theta)$;

2) $\widetilde{f}_t(\theta) = f_t(x), x = \mu(\theta)$, где $f_t(x)$ определена в предыдущем параграфе.

Рассмотрим множество пар

$$\Gamma_t = \{((\varphi,\theta), \widetilde{f}_t(\theta), \frac{d\widetilde{f}_t}{d\theta}(\theta - 0)),\ ((\varphi,\theta), \widetilde{f}_t(\theta), \frac{d\widetilde{f}_t}{d\theta}(\theta + 0))\}.$$

Тогда точки A и B множества Γ_t, такие, что $A = ((a,b),\alpha,u)$ и $B = ((c,d),\beta,v)$, назовем эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

во-первых,

1) $a = c$, $b = d$;

2) $\alpha = \beta$;

3) $v \equiv \lim\limits_{\theta\to b-0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} = \lim\limits_{\theta\to b+0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \equiv u$;

во-вторых,

1) $b = d = 0$;

2) $\alpha = \beta$;

3) $v \equiv \lim\limits_{\theta\to 0-0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} = \lim\limits_{\theta\to 0-0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \equiv u$ и $\lim\limits_{\theta\to 0-0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \neq \lim\limits_{\theta\to 0+0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta}$

или, в-третьих,
1) $b = d = 0$;
2) $\alpha = \beta$;
3) $v \equiv \lim\limits_{\theta \to 0+0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} = \lim\limits_{\theta \to 0+0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \equiv u$ и $\lim\limits_{\theta \to 0-0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta} \neq \lim\limits_{\theta \to 0+0} \dfrac{d\widetilde{f}_t(\theta)}{d\theta}$.

Два последних условия эквивалентности отождествляют все точки экватора $\theta = 0$, стягивают экватор в точку. Причем экватор раздваивается в зависимости от того, что $\theta \to 0+0$ (верхний берег экватора – см. рис. 6.4) или $\theta \to 0-0$ (нижний берег экватора – см. рис. 6.4). Поэтому при стягивании появляются две точки, и, следовательно, сфера делится на две разные сферы (рис. 6.4).

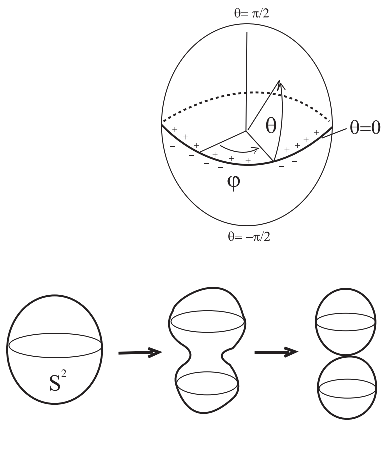

Рис. 6.4: Рождение 4-мерной кротовой норы в пространстве с топологией S^2. Пространство теряет связность, образуются две сферы.

Таким образом, мы определили семейства топологических пространств $\{\langle \Gamma_t/_\sim, \mathcal{T}_t \rangle\}$. Нетрудно понять, что при $t \neq 1$ $\langle \Gamma_t/_\sim, \mathcal{T}_t \rangle \approx S^2$, а при $t = 1$ $\quad \langle \Gamma_1/_\sim, \mathcal{T}_t \rangle \approx S^2 \cup S^2$, т.е. имеем две сферы (рис. 6.4).

Деление сферы S^3. Разрыв осуществляется аналогично разрыву двумерной сферы S^3. На экваторе для стягивания экваториальной 2-сферы в точку углы φ и θ берутся любыми, а третья угловая координата χ выполняет роль θ.

6.3. Топологическое описание образования 3-мерной кротовой норы

Аналогично процессу нарушения связности, означающего рождение 4-мерной кротовой норы за счёт изменения топологии на множестве M, описанному в предыдущем параграфе § 6.2.3, можно таким же образом описать возникновение 3-мерной кротовой норы в пространстве.

6.3.1. Нарушение односвязности $\mathbb{R}^2$

Начнём с описания рождения 2-мерной кротовой норы на 2-мерной плоскости $\mathbb{R}^2$.

На отрезке [0,1] определим параметрическое семейство функций $h_t(x)$, $t \in [0,1]$, такое, что для любого $x \in [0,1]$ $h_0(x) = 1$, $h_t(0) = h_t(1) = 1$, и при $t \in (0,1)$ семейство функций h_t представляет непрерывную деформацию функции h_0 в функцию h_1, причем все $h_t(x)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрывы первого рода в точках $x = 1/3$ и $x = 2/3$, является $h_1(x)$. Наконец, пусть

$$\lim_{z\to 1/3-0} h_1'(z) = -1, \quad \lim_{z\to 1/3+0} h_1'(z) = +1$$

$$\lim_{z\to 2/3-0} h_1'(z) = -1, \quad \lim_{z\to 2/3+0} h_1'(z) = +1$$

(см. рис. 6.5).

Рассмотрим топологическое подпространство

$$\Gamma_t = \{((x,y), h_t(x), h_t'(x-0)), \quad ((x',y'), h_t(x'), h_t'(x'+0))\}$$

с индуцированной топологией 4-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^4$, где $h_t'(x \pm 0) = \lim\limits_{z\to x\pm 0} h_t'(z)$. Две точки

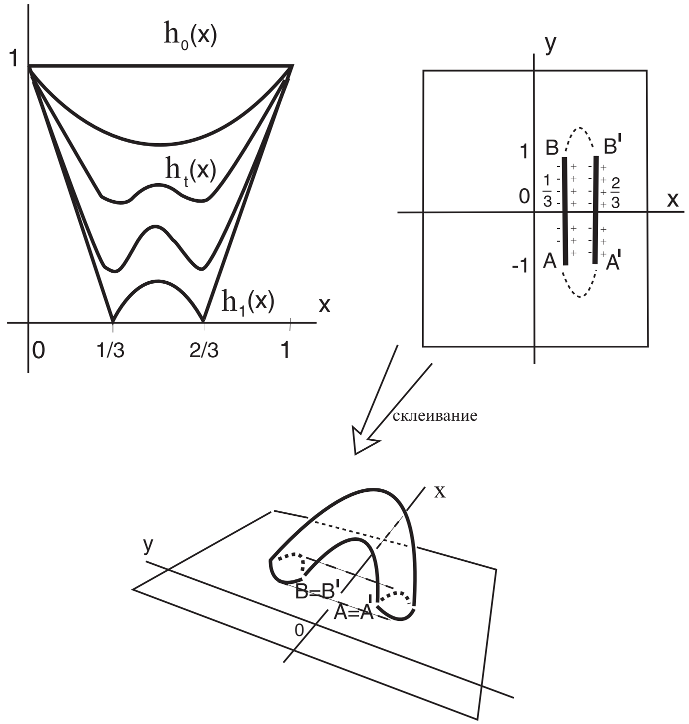

Рис. 6.5: Переход к неодносвязной поверхности за счет разрезов по отрезкам AB, $A'B'$ и склеивания «левого берега» (минусы) отрезка AB с «правым берегом» отрезка $A'B'$ (плюсы) и склеивания «правого берега» (плюсы) отрезка AB с «левым берегом» отрезка $A'B'$ (минусы). Получается плоскость с приклеенной 2-ручкой (2-мерная кротовая нора).

$((x,y),a,\alpha)$ и и $((x',y'),b,\beta)$ пространства Γ_t назовем эквивалентными тогда и только тогда, когда, во-первых,

1) $(x,y)=(x',y')$;

2) $a=b$;

3) $\lim\limits_{z\to x-0} h'_t(z) = \lim\limits_{z\to x'+0} h'_t(z)$.

и, во-вторых, если

1) $x=1/3, x'=2/3,\ -1\le y\le 1$;

2) $a=b$;

3) $(\lim\limits_{z\to 1/3-0} h_t'(z) = -1 \ \&\ \lim\limits_{z\to 2/3+0} h_t'(z) = +1)$ или $(\lim\limits_{z\to 1/3+0} h_t'(z) = +1 \ \&\ \lim\limits_{z\to 2/3-0} h_t'(z) = -1)$.

Профакторизуем пространство Γ_t по введенному отношению эквивалентности $\sim$. Получаем фактор-пространство $\Gamma_t/_\sim$. Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство при $t < 1$ гомеоморфно плоскости $\mathbb{R}^2$, а при $t = 1$ – неодносвязной поверхности с 2-мерной ручкой, которую называют 2-мерной кротовой норой.

Таким образом, мы подробно рассмотрели процесс образований 2-мерной кротовой норы.

6.3.2. Нарушение односвязности $\mathbb{R}^3$

Рассмотрим параметрическое семейство функций $s_t(r)$, $t \in [0,1]$, $r \in [0,+\infty)$, такое, что для любого $r \in [0,+\infty)$

$$s_0(r) \equiv 1, \quad s_t(0) = 1, \quad \lim_{r\to+\infty} s_t(r) = 1$$

и при $r \in (0,+\infty)$ семейство функций s_t представляет непрерывную деформацию функции s_0 в функцию s_1, причем все $s_t(x)$ непрерывны вместе с первыми производными. Единственной функцией, производная которой имеет разрыв первого рода в точке $r = 1$ является $s_1(x)$. Наконец, пусть

$$\lim_{r\to 1-0} s_1'(r) = -1, \quad \lim_{r\to 1+0} s_1'(r) = +1$$

(см. рис. 6.6).

Используем цилиндрическую систему координат в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть $Z = \{(r,\varphi,z) : r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$ – цилиндр (см. рис. 6.7).

Рассмотрим топологическое подпространство $\Gamma_t = \{(r,\varphi,z), s_t(r), s_t'(r \pm 0)\}$ с индуцированной топологией пятимерного арифметического пространства $\mathbb{R}^5$, где $s_t'(r\pm 0) = \lim\limits_{\rho\to r\pm 0} s_t'(\rho)$.

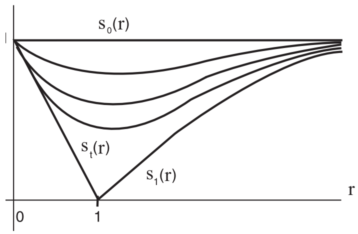

Рис. 6.6: Графики функций $s_t(r)$, $t \in [0,1]$.

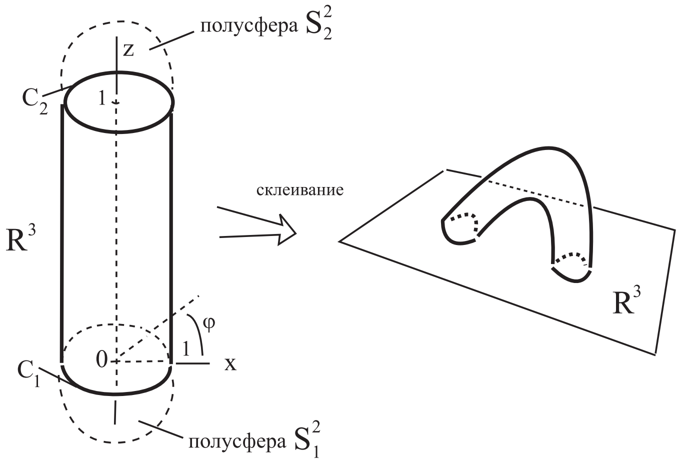

Рис. 6.7: Переход к неодносвязному 3-многообразию за счет разреза по цилиндру $Z = \{(r,\varphi,z) : r = 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 1\}$ и склеивания «внешнего берега» по диаметрально противовоположным точкам ($(1,\varphi,z)$ с $(1,\varphi+\pi,z)$) и «внутреннего берега» по диаметрально противоположным точкам. Окружности C_1 и C_2 каждая стягивается в точку; при этом полусферы S_1^2 и S_2^2 перестраиваются в сферы, к которым приклеен 3-мерный цилиндр $S^2 \times [0,1]$, получаемый из цилиндра Z при факторизации по отношению эквивалентности $\sim$. Как результат, имеем 3-многообразие с приклеенной 3-ручкой (3-мерной кротовой норой).

Две точки $((r,\varphi,z),a,\alpha)$ и $((r',\varphi',z'),b,\beta)$ пространства Γ_t назовем эквивалентными тогда и только тогда, когда, во-первых,

1) $(r, \varphi, z) = (r', \varphi', z')$;

2) $a = b$;

3) $\lim\limits_{\rho \to r-0} s'_t(\rho) = \lim\limits_{\rho \to r+0} s'_t(\rho)$;

и, во-вторых,

1) $r = 1, \varphi' = \varphi + 2\pi, z' = z \ (0 \le z, z' \le 1)$;

2) $a = b$;

3) $(\alpha = \beta = \lim\limits_{\rho \to 1-0} s'_t(\rho) = -1)$;

и, в-третьих,

1) $r = 1, \varphi' = \varphi + 2\pi, z' = z \ (0 \le z, z' \le 1)$;

2) $a = b$;

3) $(\alpha = \beta = \lim\limits_{\rho \to 1+0} s'_t(\rho) = +1)$.

Профакторизуем пространство Γ_t по введенному отношению эквивалентности $\sim$. Получаем фактор-пространство $\Gamma_t/_\sim$. Нетрудно увидеть, что это фактор-пространство при $t < 1$ гомеоморфно плоскости $\mathbb{R}^3$, а при $t = 1$ – неодносвязному некомпактному 3-многообразию с 3-мерной ручкой, которую физики называют 3-мерной кротовой норой.

Изменение геометрии. Зададим семейство римановых метрик

$$dl_t^2 = A_t^2(r, z)[dr^2 + dz^2] + r^2[B_t(r, z)]^{-2} d\varphi^2,$$

отражающих изменение геометрии по мере изменения топологии, где функции A_t, B_t выбираются так, что, во-первых, при $t < 1$ они C^2-гладкие и, во-вторых, при $t = 1$ имеем: $\lim\limits_{r \to 1+0} A_t \ne \lim\limits_{r \to 1-0} A_t$, $\lim\limits_{r \to 1+0} B_t \ne \lim\limits_{r \to 1-0} B_t$ при $0 < z < 1$ и

$$A_t(1, c)[B_t(1, c)]^{-1} \to 0 \ \text{ при } \ t \to 1,$$

$$c = 0, 1.$$

Последнее условие – это геометрическое отражение условия стягивания окружностей C_1, C_2 в точку, при котором их длина должна стремиться к нулю.

6.4. Энергетическое условие в случае кротовых нор

6.4.1. Нарушение энергетического условия в случае 3-мерной кротовой норы в четырёхмерном пространстве-времени

Известно, что существование 3-мерных кротовых нор в 4-мерном пространстве-времени, т.е. в рамках ОТО, требует присутствие в пространстве *экзотической материи*[3], означающее нарушение разумных классических физических ограничений, таких, как, например, выполнение энергетического условия [233, 187, 301, 302].

Однако Kanti, Kleihaus и Kunz [245, 246] показали, что в дилатонической теории гравитации Эйнштейна-Гаусса-Бонне, являющейся обобщением ОТО, 3-мерные норы могут существовать и без наличия экзотической материи.

6.4.2. Выполнение энергетического условия в случае 3-мерной кротовой норы в пятимерном пространстве-времени

В статье [247] показано, что можно найти класс 4-мерных решений уравнений Эйнштейна с проходимыми 3-мерными кротовыми норами типа Торна с соавторами [264], который, будучи погруженными в 5-мерное Гиперпространство, приводит к 5-мерному тензору энергии-импульса, удовлетворяющему сильному и доминирующему энергетическим условиям.

При этом сами 4-мерные решения с 3-мерной кротовой норой требуют наличия экзотической материи (см. § 6.4.1).

[3] Для экзотической материи плотность энергии отрицательна [264].

6.5. Speculatio

1. Утверждение Торна и соавторов [264, 265, 132], что 3-мерную кротовую нору можно использовать для построения машины времени, перемещая одно из отверстий в пространстве со скоростью, близкой к скорости света, не является справедливым. Имеется в виду их рассуждение о движении с возвращением в исходное положение отверстия B кротовой норы, после чего входят в кротовую нору через B, выходят через отверстие A и возвращаются к отверстию B. Торн и соавторы, И.Д. Новиков и др., уверяют, что при этом образуется временная петля, т.е. замкнутая времениподобная кривая, поскольку часы движущегося отверстия B испытывают замедление времени либо за счет лоренцева сокращения, либо за счет сильного гравитационного поля в случае, когда отверстие B помещено в него. Однако:

1) эффект лоренцева замедления времени выводится на основе формул преобразований Лоренца, которые были получены только для односвязного 4-мерного пространства $\mathbb{R}^4$. Пространство же с кротовой норой неодносвязно;

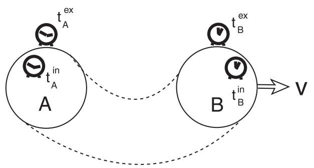

Рис. 6.8: Внешние и внутренние часы кротовой норы.

2) мы должны рассматривать две пары часов: внешние t_A^{ex} и внутренние t_A^{in} (т.е. внутри кротовой норы) вблизи левого отверстия кротовой норы A и внешние t_B^{ex} и внутренние t_B^{in} вблизи правого отверстия кротовой норы B (см. рис. 6.8). Всегда часы t_A^{ex} и t_A^{in} синхронны, и часы t_B^{ex} и t_B^{in} синхронны, поскольку эти пары часов находятся в одинаковых физических условиях. Значит, часы t_A^{in} и t_B^{in} не могут быть синхронизованы, и переход от конца B к A через кротовую не ведет к выходу в прошлое. А как раз на синхронности этих часов и построены рассуждения Торна и др.;

3) временная петля появляется за счет априорного наклона световых конусов. В конструкции машины времени Торна

световые конусы в пространстве-времени заданы изначально.

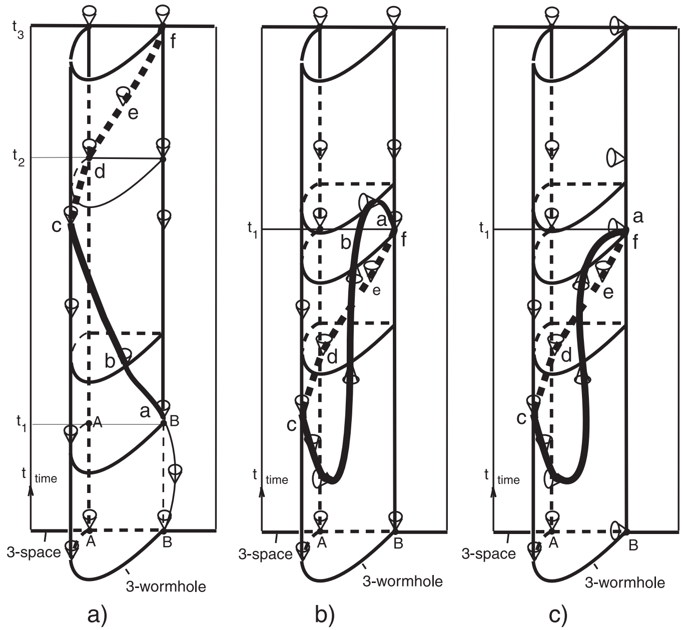

Рис. 6.9: Временные петли в 3-мерной кротовой норе.

Следовательно, если изначально нужного наклона световых конусов в пространстве-времени для существования временной петли не было, то за счёт перемещения туда-сюда или размещения второго отверстия B кротовой норы в сильном гравитационном поле временная петля не появится. И тогда проход через кротовую норы от отверстия B к отверстию (выходу) A (кривая $abcd$ на рис. 6.9) и последующее движения от отверстия A к отверстию B (кривая def на рис. 6.9) приведёт лишь к выходу в будущую эпоху t_3 по отношению к началу всего движения по кривой $abcdef$ в эпоху $t = t_1$ (см. рис. 6.9, а)). Обратим внимание на то, что наклон конусов внутри и вне кротовой норы у каждого отверстия не должны сильно отличаться. Более того, наклон конусов не должен сильно отличаться для обоих отверстий, иначе время течет на концах по-разному, и бессмысленно говорить о какой-либо синхронизации часов вдоль кротовой норы в её внутреннем пространстве.

Единственная надежда на то, что внутри кротовой норы световые конусы кардинально меняют свою ориентацию. Действительно, на рис. 6.9, b) изображена такая ситуация, содержащая временную петлю. Но совершенно невозможно, чтобы во внутреннем пространстве кротовой норы длиной в 1 метр было возможно такое кувыркание светового конуса.

Если отверстие B лежит в сильном гравитационном поле, то имеем такую же ситуацию с кувырканием светового конуса (см. рис. 6.9, c));

4) Все известные нам примеры 3-мерных кротовых нор – это метрики, заданные на 3-мерном цилиндре без необходимого для образования временной петли кувыркания светового конуса. Цилиндр не есть 3-пространство с 3-мерной кротовой норой, и заявления, что его легко превратить в таковое, производя определенного рода отождествления точек, и что при этом во вновь образованном пространстве с неодносвязной топологией будут наблюдаться лоренцевы сокращения времени, есть всего лишь сомнительные заявления.

2. Допустим тем не менее теперь, что лоренцево сокращение будет наблюдаться при движении на конце B при его движении в пространстве. Убедимся, что утверждение о синхронности часов у отверстия A и у отверстия B является ошибочным.

Заметим, что всегда пишут об *одной* паре часов, которые называют часами «у отверстий A и B». В действительности надо рассматривать *две* пары часов у отверстий A и B. Одна пара находится у отверстий во внешнем пространстве – это пара внешних часов, а вторая во внутреннем пространстве, т.е. внутри кротовой норы (рис. 6.10, a), c)) – это пара внутренних часов.

Подчеркнем, что мы говорим о *сопутствующих часах*, т.е. о часах, которые покоятся.

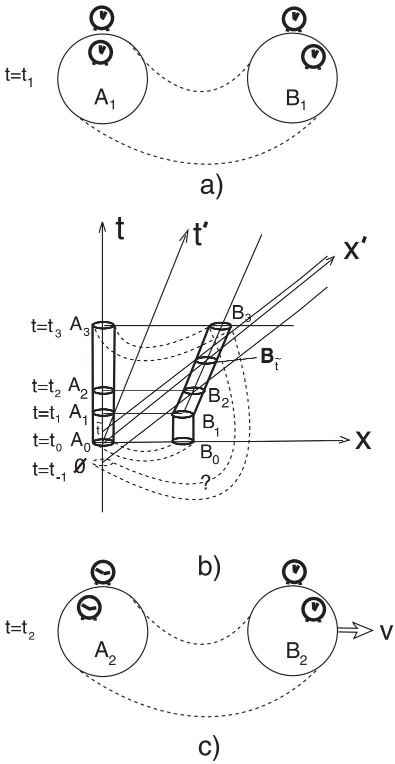

Рис. 6.10: Движение конца B кротовой норы. Кротовая нора создана в момент времени $t = t_0$. Ее отверстия A_0 B_0 одновременны по земным часам t. a) Момент $t = t_1$ – это момент перед началом движения отверстия B. Все часы идут синхронно. b) Диаграмма на плоскости Минковского. Отверстие B_2 одновременно по часам t' (но не по земным часам t) с событием $\emptyset$, на месте которого будет «прорыто» отверстие A_0; они лежат в одном относительном пространстве по внешним часам t' отверстия B_2. c) Момент $t = t_2$. Отверстие B движется со скоростью v. Часы t' – это внешние часы отверстия B, которые отстают от внешних часов отверстия A.

Отверстие A в момент времени $t = t_i$ обозначаем через A_i, аналогично метим отверстие B.

Ситуация изображена на рис. 6.10. Время t' измеряют внешние часы t_B^{ex} отверстия B. Они отстают от внешних часов

t_A^{ex} отверстия A. На рисунке все события-точки, лежащие на параллельных оси x' прямых, одновременны по часам t_B^{ex}.

Если в момент $t = t_0$ внешних часов отверстия A все часы были синхронизированы (рис. 6.10, a)) и отверстие B начинает движение со скоростью v в момент $t = t_1 > t_0$, то внешние часы отверстия B – это временная координата t', являющаяся собственным временем космонавта, который находится на сфере-корабле, содержащем отверстие B, – начинают отставать от внешних часов отверстия A (рис. 6.10, c)).

Важно понимать, что отставание часов сопутствующего наблюдателя у отверстия B, т.е. внешних часов t_B^{ex} отверстия B от часов сопутствующего наблюдателя у отверстия A, т.е. внешних часов t_A^{ex} отверстия A, не зависит от того, в каком пространстве – во внешнем или во внутреннем (через кротовую нору) – их показания сравниваются [108].

Что будет происходить, когда космонавт, летящий на сфере-корабле, содержащем отверстие B, начнет нырять в это отверстие в момент $t = t_2$?

Внутренние часы t_B^{in} отверстия B_2 находятся в одинаковых физических условиях с внешними часами отверстия B_2 и поэтому идут с ними синхронно. Поскольку внутренние часы отверстия A всегда в одних физических условиях с внешними часами t отверстия A, они должны быть с ними синхронны. Поэтому, ныряя в нору через отверстие B_2, космонавт попадает не в прошлое $t = t_{-1}$, поскольку там нет выхода – отверстия A_{-1}, – есть только «пустая строительная площадка» $\emptyset$, а в относительное пространство $t = t_2$, выйдя через отверстие A_2. Выйти раньше момента старта отверстия B также нельзя, поскольку отверстие A на отрезке земного времени $[t_0, t_1]$ «заколочено», т.е. кротовая нора ещё не функционирует.

3. Схема машины времени Торна вводит исследователей в заблуждение, что если есть в пространстве 3-мерная кротовая нора, то её легко превратить в машину времени, производя определенные манипуляции с одним из отверстий. Но построение машины времени гораздо более сложная задача, от решения которой мы ещё очень далеки (см. гл. 7).

Глава 7

Пружинное пространство-время

Окружающая нас физическая Реальность находится в тесном взаимодействии с нашим сознанием. Для всё более комфортного существования людям необходимо признавать, что физическая Реальность, Внешний Мир, не может оставаться прежним. Перестройка окружающего Мира возможна, если усложняются наши знания, наши представления о физической Реальности, и, следовательно, усложняется мир *вещей для нас*, составляющих основу Внешнего Мира.

В главе 1 мы выяснили, что размерности пространства, времени и пространства-времени могут изменяться. Наше базовое 4-мерное пространство-время тем самым, при использовании геометрических образов, можно представлять как поверхность, *слой* в мире большей размерности. Но в таком случае, естественно пытаться понять, как оно может размещаться в объемлющем мире большей размерности, называемом Гиперпространством, как соотноситься *наш* слой с *чужими* слоями? Более того, интересно при решении этого вопроса, задать другой вопрос: может ли изменяться «форма» этого размещения, дает ли это изменение «формы» нечто полезное для воплощения новых идей, касающихся человеческого бытия, и есть ли возможность *менять* способ размещения пространства-времени в объемлющем Гиперпространстве.

7.1. Слоения

Пусть M^n – n-мерное гладкое многообразие без края, и пусть $0 \leq p \leq n$.

Определение 7.1. Говорят, что на M^n задано (гладкое) *слоение* $\mathcal{F}$ размерности p, если M^n снабжено разбиением на (линейно) связные подмножества F_α, т.е.

$$M^n = \bigcup_\alpha F_\alpha, \quad F_\alpha \cap F_{\alpha'} = \emptyset,$$

обладающие следующим свойством: для произвольной точки x многообразия M^n найдется локальная карта $\varphi : U \to (x^1, ..., x^n),\ x \in U$, принадлежащая выбранной гладкой структуре многообразия M^n и такая, что связные компоненты пересечений $U \cap F_\alpha$ с областью определения U этой локальной карты задаются уравнениями вида $x^{p+1} = const, ..., x^n = const$.

Множества F_α называются *слоями* слоения $\mathcal{F}$, многообразие M^n – *тотальным многообразием слоения*. Числа p и $q = n - p$ называются *размерностью* и *коразмерностью слоения*; размерность и коразмерность слоения обозначаются через $dim\mathcal{F}$ и $codim\mathcal{F}$ соответственно.

Заметим, что каждый слой слоения $\mathcal{F}$ – это $(n-q)$-мерное, вложенное подмногообразие многообразия M^n. Вложение, однако, может не быть собственным. Но слои могут быть плотными в M^n множествами.

Касательное расслоение $T(M^n)$ (тотального) многообразия M^n со слоением $\mathcal{F}$ обладает подрасслоением, которое естественно считать *касательным расслоением слоения*: его составляют векторы, касающиеся слоев. Соответствующее фактор-расслоение называется *нормальным расслоением слоения* $\nu(\mathcal{F})$; его размерность равна коразмерности слоения.

Определение 7.2. Слоение называется *ориентированным*, если ориентировано его нормальное расслоение.

Важно отметить, что ни слои, ни тотальное многообразие ориентированного слоения не обязаны даже быть ориентируемыми.

Существует следующее эквивалентное определение слоения.

Определение 7.1′. Слоение $\mathcal{F}$ размерности p и коразмерности q на гладком многообразии M^n $(n = p + q)$ – это атлас локальных карт на M^n такой, что карты $\varphi_i : U_i \subset M^n \to V_i \subset \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ удовлетворяют условию сохранения функциями перехода $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \to \varphi_i(U_i \cap U_j)$ разложения $\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p$ на множества вида $\{x\} \times \mathbb{R}^p$, $x \in \mathbb{R}^q$.

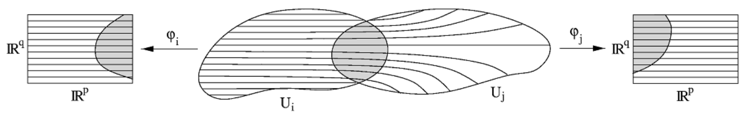

Рис. 7.1: Атлас слоения: листы переходят в листы

Каждая карта слоения определяет субмерсию $f_i = pr_1 \circ \varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^q$. Множества $f^{-1}(x) = \varphi_i^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R}^p)$, $x \in \mathbb{R}^q$, называются *листами* (plaques) слоения $\mathcal{F}$.

Пусть $\mathcal{F}$ – слоение коразмерности 1 на многообразии M^n. Говорим, что $\mathcal{F}$ *трансверсально аффинно*, если M^n накрывается семейством ($\mathcal{F}$-различающих) карт, для которых функции перехода являются аффинными преобразованиями, т.е. имеют вид $x \to ax + b$, $a \neq 0$, в трансверсальном к $\mathcal{F}$ направлении.

Теорема 7.1 (Тёрстон). *Замкнутое многообразие M^n допускает слоение коразмерности 1 тогда и только тогда, когда характеристика Эйлера-Пуанкаре $\chi(M^n) = 0$ [199, с.207].*

■

Теорема 7.2 (P. Schweitzer). *На каждом замкнутом гладком многообразии M^n, $n \geq 4$, с нулевой характеристикой Эйлера-Пуанкаре существует слоение коразмерности* 1 *с некомпактными гладкими слоями, задаваемые локально C^1-формой* [281]. ■

Теорема 7.3 (N. A'Campo). *Каждое компактное односвязное 5-многообразие имеет гладкое слоение коразмерности* 1 [196]. ■

Теорема 7.4. *Каждое открытое*[1] *многообразие имеет слоение коразмерности* 1 [230]. ■

7.1.1. Топологическое поведение слоев

Пусть $\mathcal{F}$ – слоение коразмерности 1 на связном многообразии M^n.

Подмножество $A \subset M^n$ называется *насыщенным* (для $\mathcal{F}$) или *$\mathcal{F}$-насыщенным*, если $x \in A$ влечет, что A содержит слой, проходящий через x. Иначе говоря, насыщенное множество есть объединение слоёв.

Слой L может быть трёх типов:

(1) L *собственный*, т.е. его топология[2] совпадает с индуцированной топологией (из M^n) . (Например, любой замкнутый слой является собственным);

(2) L *локально плотный*, т.е. существует насыщенное открытое множество O такое, что $\overline{L} \cap O = O$;

(3) L *исключительный*, т.е. ни собственный, ни локально плотный.

Определение 7.3. *Минимальное множество* (относительно $\mathcal{F}$) – это замкнутое насыщенное подмножество $Z \subset M^n$, для которого каждый слой $L \subset Z$ является плотным, т.е. $\overline{L} = Z$.

---

[1] *Открытое* – значит не имеющее компактных компонент.

[2] Топология слоя индуцируется *топологией слоения* $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. Для этого на $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ вводим топологию произведения $\mathcal{T}_p$, считая, что на $\mathbb{R}^{n-p}$ имеем дискретную топологию. Топология слоения $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ появляется, когда считаем, что все $\varphi : U \to \varphi(U) \subset <\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_p>$ – это гомеоморфизмы. Связными компонентами в топологии слоения являются слои [154, с.127].

Эквивалентно, подмножество $Z \subset M^n$ называется *минимальным*, если оно непустое, замкнутое, насыщенное и минимально относительно перечисленных трёх свойств: если $Z' \subset Z$ имеет такие же свойства, то $Z' = Z$.

Замкнутый слой, ясно, является минимальным множеством.

Минимальное множество может быть трёх типов:

1) Z собственный слой (компактный, если M^n компактно);

2) Z совпадает с M^n; в этом случае каждый слой слоения $\mathcal{F}$ является плотным. Будем называть такое слоение *минимальным*;

3) Z объединение исключительных слоёв. Будем говорить, что Z есть *исключительное минимальное множество.*

7.1.2. Когомологии де Рама

Когомологии де Рама, определяемые с помощью внешних дифференциальных форм, изоморфны сингулярным когомологиям над $\mathbb{R}$, т.е.

$$H^*_{deR}(M^n) \cong (H_*(M^n; \mathbb{R}))^* = H^*(M^n; \mathbb{R}),$$

и, следовательно,

$$H^*_{deR}(M^n) \cong H_*(M^n; \mathbb{R}).$$

Теорема двойственности Пуанкаре, справедливая для n-мерных ориентируемых замкнутых многообразий M^n и для компактных многообразий с краем, утверждает, что k-мерные группы когомологий изоморфны $(n-k)$-мерным группам гомологий M^n, т.е.

$$H^k(M^n; \mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M^n; \mathbb{R}),$$

и тем самым

$$H_k(M^n; \mathbb{R}) \cong H_{n-k}(M^n; \mathbb{R}).$$

Числа Бетти. Гомологии позволяют определять число дыр в каждой размерности многообразия M^n. Каждая группа гомологий $H_k(M^n, \mathbb{R})$ представляет собой векторное пространство. Полагаем

$$\beta_k(M^n) = \dim(H_k(M^n; \mathbb{R})).$$

Числа $\beta_k(M^n)$ называются *k-мерными числами Бетти.*

Число $\beta_0(M^n)$ – это число компонент связности; $\beta_1(M^n)$ – число 2-мерных, или круговых дыр (соответствует числу 1-мерных циклов, ограничивающих 2-мерные диски D^2); $\beta_2(M^n)$ – число 3-мерных дыр, или пустот (соответствует числу 2-мерных циклов, ограничивающих 3-мерные диски D^3); $\beta_k(M^n)$ – число $(k+1)$-мерных дыр.

Из теоремы двойственности Пуанкаре следует, что

$$\beta_k(M^n) = \beta_{n-k}(M^n).$$

Характеристика Эйлера-Пуанкаре многообразия M^n определяется как

$$\chi(M^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n \beta_k(M^n).$$

Справедливо также равенство

$$\chi(\partial M^n) = (1 + (-1)^n)\chi(M^n).$$

Если $L \subset M^n$, то имеем гомоморфизмы

$$H_k(L; \mathbb{R}) \to H_k(M^n; \mathbb{R}), \quad H^k(M^n; \mathbb{R}) \to H^k(L; \mathbb{R}).$$

Следовательно, наличие $(k+1)$-мерной дыры в L не означает наличие $(k+1)$-мерной дыры в M^n.

7.2. Характеристические классы слоений на многообразиях

Пусть дано C^1-слоение $\mathcal{F}$ коразмерности q. Тогда C^∞-отображение $f : N^k \to M^n$ называется *трансверсальным к* $\mathcal{F}$, если

$$M^n_{f(x)} = F_{f(x)} + (f_*)_x(N^k_x)$$

для всякой $x \in N^k$, где F_z – слой, проходящий через точку z. Обозначение для трансверсальности $f \pitchfork \mathcal{F}$.

Определение 7.4. Пусть дано слоение $\mathcal{F}$ коразмерности q. Тогда *характеристическим классом слоения* называется когомологический класс $\alpha(\mathcal{F}) \in H^*(M^n; \mathbb{R})$, удовлетворяющий следующему естественному условию: для любого C^∞-отображения $f : N^k \to M^n$, которое трансверсально к $\mathcal{F}$, справедливо равенство

$$\alpha(f^*(\mathcal{F})) = f^*(\alpha(\mathcal{F})) \in H^*(N^k; \mathbb{R}).$$

(см. [266, p.91]).

Класс Годбийона-Вея, определяемый ниже, является примером характеристического класса слоения.

7.2.1. Класс Годбийона-Вея

Пусть слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1 на многообразии M^n является ориентируемым. Тогда оно глобально задается дифференциальной 1-формой γ, нигде не равной нулю. Эта форма определяется слоением с точностью до умножения на не обращающуюся в нуль функцию и равна нулю на векторах, образующих поле гиперплоскостей, касательных к $\mathcal{F}$.

В локальной карте $x^A (A = 1, ..., n)$ форма γ имеет вид $\gamma = \gamma_A dx^A$.

Форма γ должна удовлетворять условию интегрируемости Фробениуса $\gamma \wedge d\gamma = 0$. Это означает, что существует 1-форма α (определенная с точностью до кратного γ), такая, что $d\gamma = \alpha \wedge \gamma$.

Определение 7.5. Внешняя дифференциальная 3-форма $\alpha \wedge d\alpha$ является замкнутой, и её класс когомологий $[\alpha \wedge d\alpha] \in H^3(M^n; \mathbb{R})$ называется *классом Годбийона-Вея слоения* $\mathcal{F}$ и обозначается $GV(\mathcal{F})$.

«Геометрический смысл класса Годбийона-Вея по сей день остается загадочным. Имеется целый ряд теорем, показывающих, что слоение с нетривиальным классом Годбийона-Вея является достаточно запутанным» [162, с.473].

7.2.2. Обобщенный класс Годбийона-Вея

Пусть слоение $\mathcal{F}$ коразмерности q ориентируемо. Выберем определяющую q-форму ω, т.е. $\omega = 0$ точно на касательных плоскостях слоения $\mathcal{F}$.

Иначе говоря, нормальное расслоение ориентируемо и слоение задаётся определяющей q-формой, локально представимой в виде внешнего произведения 1-форм: $\omega = \omega_1 \wedge ... \wedge \omega_q$.

Существует 1-форма α такая, что $d\omega = \omega \wedge \alpha$.

Определение 7.6. Форма $\alpha\wedge(d\alpha)^q$ есть замкнутая $(2q+1)$-форма, класс когомологий $[\alpha \wedge (d\alpha)^q] \in H^{(2q+1)}(M^n;\mathbb{R})$ которой зависит лишь от $\mathcal{F}$. Он называется *обобщённым классом Годбийона-Вея* [199, с.192].

Слой L называется *собственным*, если он является собственно вложенным подмногообразием многообразия M^n. Слоение называется *собственным*, если все его слои собственные.

Теорема 7.5 (Hurder-Katok). *Если слоение $\mathcal{F}$ собственное, то все обобщенные классы Годбийона-Вея исчезают* [199, с.232]. ■

7.2.3. Характеристические классы слоений коразмерности $q = 2$

1. Случай оснащённого слоения. Предполагаем, что слоение $\mathcal{F}$ коразмерности q на многообразии M^n является *оснащённым*, или, что эквивалентно, наделено глобальной системой $\omega_1, ..., \omega_q$ определяющих форм.

Определяющая система форм слоения $\mathcal{F}$ в открытом множестве $U \subset M^n$ – зто набор гладких 1-форм $\omega_1, ..., \omega_q$, заданных в U и обладающих следующими свойствами:

(i) формы $\omega_1, ..., \omega_q$ линейно независимы в каждой точке множества U;

(ii) сужение каждой из этих форм на любую компоненту пересечения любого слоя с U тривиально.

Очевидно, для задания слоения достаточно задать определяющие системы форм в открытых множествах, составляющих покрытие тотального многообразия.

Если $U = M^n$, то мы имеем дело с глобальной определяющей системой форм.

Критерий интегрируемости. Система $\omega_1, ..., \omega_q$ гладких 1-форм, заданных в открытом множестве $U \subset M^n$, является определяющей системой форм, если при каждом i

$$d\omega_i = \sum_j \eta_{ij} \wedge \omega_j,$$

где η_{ij} – некоторые гладкие 1-формы.

Можно составить многочлены от η_{ij} и $d\eta_{ij}$, являющиеся замкнутыми дифференциальными формами на M^{4+q}, когомологические классы которых будут зависеть только от слоения и оснащения. Они называются *характеристическими классами оснащённого слоения.*

Оказывается, что при $q = 1$ такая форма (с точностью до множителя) всего одна: $\eta_{11} \wedge d\eta_{11}$, т.е. форма Годбийона-Вея.

При $q = 2$ пространство таких форм пятимерно и порождается формами [162, с.478]:

$$\begin{aligned}
&d(\eta_{11} + \eta_{22})^2 \wedge (\eta_{11} + \eta_{22}), \\
&(d\eta_{11} \wedge d\eta_{22} - d\eta_{12} \wedge d\eta_{21}) \wedge (\eta_{11} + \eta_{22}), \\
&(d\eta_{11} \wedge d\eta_{22} - d\eta_{12} \wedge d\eta_{21}) \wedge (\eta_{11} - \eta_{22}) \wedge \eta_{12} \wedge \eta_{21}, \qquad (7.1) \\
&(d\eta_{11} \wedge d\eta_{22} - d\eta_{12} \wedge d\eta_{21}) \wedge \eta_{11} \wedge \eta_{22} \wedge \eta_{12} \wedge \eta_{21}, \\
&d(\eta_{11} + \eta_{22})^2 \wedge \eta_{11} \wedge \eta_{22} \wedge \eta_{12} \wedge \eta_{21}.
\end{aligned}$$

Таким образом, оснащённые слоения коразмерности 2 имеют 5 характеристических классов размерностей 5, 5,7, 8, 8. Каждый из этих классов обобщает класс Годбийона-Вея.

2. Случай неоснащённого слоения. Соответствующие характеристические классы существуют, их построение требует значительных знаний в области алгебраической топологии.

Для слоения коразмерности $q = 2$ имеем три характеристических класса, представляемые формами [162, с.478]:

$$\begin{aligned} &d\eta_{11} \wedge d\eta_{22} - d\eta_{12} \wedge d\eta_{21}, \\ &(d\eta_{11} \wedge d\eta_{22} - d\eta_{12} \wedge d\eta_{21}) \wedge (\eta_{11} + \eta_{22}), \\ &d(\eta_{11} + \eta_{22})^2 \wedge (\eta_{11} + \eta_{22}). \end{aligned} \tag{7.2}$$

7.3. Деформация слоений

Существует несколько способов произвести деформацию, т.е. постепенное преобразование одного слоения $\mathcal{F}_0$ на многообразии M^n в другое слоение $\mathcal{F}_1$.

Определение 7.7. Слоения $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ на M^n, оба коразмерности q, *интегрируемо C^r-гомотопны*, если существует C^r-слоение $\mathcal{F}$ на $M^n \times [0, 1]$ коразмерности q такое, что оно трансверсально к $M \times \{t\}$ для $t = 0, 1$ и индуцирует $\mathcal{F}_0$ на $M^n \times \{0\}$ и $\mathcal{F}_1$ на $M^n \times \{1\}$.

Определение 7.8. Слоения $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ на M^n, оба коразмерности q, *C^r-гомотопны*, если существует C^r-слоение $\mathcal{F}$ на $M^n \times [0, 1]$ коразмерности $q + 1$ такое, что $M \times \{t\}$ является $\mathcal{F}$-насыщенным, $0 < t < 1$, и $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|(M^n \times \{i\})$, $i = 0, 1$.

Для гладкого многообразия со слоением коразмерности 1 (не обязательно компактного) интегрируемо гомотопные слоения имеют одинаковый класс Годбийона-Вея, но имеются примеры, показывающие, что $GV(\mathcal{F})$ может непрерывно и нетривиально изменяться[3] с изменением t для общих гладких гомотопий F_t [198, с.99].

7.4. Машина времени в слоении

В случае, когда пространство-время M^4 как слой в 5-мерном Гиперпространстве размещено особым образом, то возможно

[3]Впервые пример таких слоений на S^3 построил Тёрстон [296].

путешествие в прошлое.

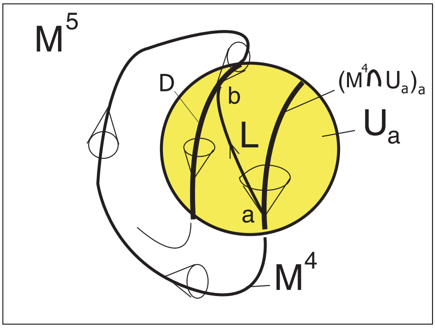

Рис. 7.2: Возможный переход по кривой L в прошлое b события a в слоении.

Действительно, предположим, что $M^4 \subset M^5$ является слоем ориентированного слоения $\mathcal{F}$ коразмерности 1 многообразия M^5. Для наших целей было бы важно, чтобы слой M^4 вёл себя следующим образом. Пусть $U_a \subset M^5$ – окрестность точки a. Тогда компонента связности $(M^4 \cap U_a)_a$ множества $M^4 \cap U_a$ в точке a – это события, близкие к a в пространстве-времени M^4. Это как бы события Настоящего события a с точностью до некоторого пренебрежимого отрезка времени. Если $D \subset M^4$ – множество событий отдалённого Прошлого события a, то предположим, что $b \in D \subset U_a \cap M^4, \quad D \cap (M^4 \cap U_a)_a = \emptyset$; причём существует временная кривая $L \subset U_a$ (относительно метрики $g^{(5)}_{AB}$ объемлющего 5-мерного Гиперпространства) с началом a и концом $b \in D$. Такая ситуация является как раз желанной для наших целей (см. рис. 7.2).

Само перемещение в Гиперпространстве по временной кривой L может осуществляться за счет процесса отрыва 3-мерной области D_0 от пространства пространства-времени M^4, описанного в гл. 6.

Но возможно ли такое поведение слоёв слоения? Возможно. Это либо когда слой является *плотным* в M^5, либо это так называемые *пружинные слои*[4] [162], которые бесконечно наматываются сами на себя.

7.4.1. Плотные слои

Слой $L \subset M^5$ называется *плотным* (в M^5), если его замыкание совпадает с M^5, т.е. $\overline{L} = M^5$.

Если L плотный слой, то для любой точки $x_0 \in M^5$ существует последовательность точек $\{x_k\} \subset L$, стремящихся к x_0. Иначе говоря, всегда найдутся сколь угодно близкие к друг другу в топологии Гиперпространства M^5 точки x_{k_1}, x_{k_2}, одна из которых, пусть это x_{k_1}, обозначим её через b, лежит в прошлом другой точки x_{k_2}, обозначим её через a. [5]

Как видим, в плотном слое есть возможность совершить переход в прошлое, выйдя в Гиперпространство и пройдя сравнительно небольшое расстояние. Вопрос: в любой ли момент, т.е. из любой ли точки плотного слоя такой переход возможен? Но принципиальная возможность такого путешествия существует.

Если все слои слоения плотные, т.е. слоение является минимальным, то путешествия в прошлое возможны из **любого** слоя.

А что делать, если слоение не минимальное и мы живем не в плотном слое?

7.4.2. Пружинные слои

Пусть $\tau : [0,1] \to M^5$ – путь, содержащийся в слое слоения $\mathcal{F}$ и связывающий точки $\tau(0)$ и $\tau(1)$. Пусть T_0 и T_1 – окрестности точек $\tau(0)$ и $\tau(1)$ в слоях трансверсального[6] к $\mathcal{F}$ одномерного

---

[4] В английской литературе «resilient leaf». Термин «resilient» (пружинный) – неудачный перевод французского слова «ressort», означающий «рессоро-подобный» («пружино-подобный»). В русском переводе происходит возврат к французскому термину.

[5] С точностью до замены, если это не так, одной из этих двух точек на близкую к ней в слое, но уже удовлетворяющую искомому условию.

[6] Трансверсальность означает то, что общим касательные пространства к слоям слоений $\mathcal{F}$ и $\mathcal{N}$ имеют только нулевой вектор.

слоения $\mathcal{N}$. При движении вдоль слоёв слоения $\mathcal{F}$, следуя τ, получаем локальный диффеоморфизм T_0 на T_1, переводящий $\tau(0)$ в $\tau(1)$. Это – *голономия* h_τ при τ.

Если для всякой петли $\tau : [0,1] \to M^5$, т.е. замкнутому пути с $\tau(0) = \tau(1)$, при обходе по ней получаем тождественный (локальный) диффеоморфизм, то говорят, что этот слой не имеет голоногии. Если ни один слой не имеет голономии, то говорят, что слоение $\mathcal{F}$ *не имеет голономии.* Если голономию имеют только компактные слои, то говорим, что слоение *почти не имеет голономии.*

Как видим, при нетривиальной голономии нашего пространства-времени можно ожидать, что в окрестности некоторых событий во внешнем Гиперпространстве находятся другие события нашего пространства-времени, принадлежащие либо Прошлому, либо Будущему.

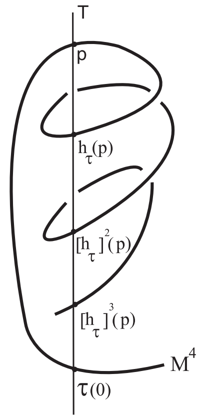

Рис. 7.3: Пружинный слой.

Теорема 7.6. *Пусть $\mathcal{F}$ – слоение коразмерности* 1 *без голономии на замкнутом многообразии M^n. Тогда $GV(\mathcal{F}) = 0$* [148, с.165]. ∎

Теорема 7.7 (Мацутани-Морита-Цубой). *Если слоение коразмерности* 1 *почти не имеет голономии, то $GV(\mathcal{F}) = 0$* [162, с.474]. ∎

Определение 7.9. Слой M^4 слоения коразмерности 1 является *пружинным*, если существует петля τ в M^4 и интервал T, трансверсальный к слоению $\mathcal{F}$, содержащий $\tau(0)$ такие, что

1) существует точка p на $M^4 \cap T$, $p \neq \tau(0)$, которая принадлежит области определения голономии h_τ (определённой на некоторой окрестности $\tau(0)$ в T);

2) $[h_\tau]^n(p)$ стремится к $\tau(0)$ при $n \to +\infty$.

Иначе говоря, слой слоения коразмерности 1 является *пружинным*, если он бесконечно наматывается сам на себя (рис.7.4).

Пружинный слой можно определить также как несобственный слой с нетривиальной голономией [240].

В пружинном пространстве-времени M^4 существуют события, принадлежащие Настоящему, сколь угодно близко (в топологии многообразия M^5) от которых в 5-мерном мире M^5 лежат события из M^4 сколь угодно далекого Прошлого (или Будущего).

Рис. 7.4: Пространство-время, свернутое в пружину в объемлющем пятимерном Гиперпространстве.

Движение вдоль пятой координаты (в направлении, задаваемом вектором γ^A, дуальным к 1-форме γ) приводит к бесконечному «протыканию» физического пространства-времени в точках Прошлого или Будущего. Прошлое находится буквально рядом, его не надо долго искать в недрах 5-мерного мира. Метрическая степень близости Прошлого характеризуется вектором γ^A, и связана она со скалярным и электромагнитным полями (см. § 7.5.1).

Таким образом, если наше пространство-время представляет собой пружинный слой в объемлющем Гиперпространстве, то остается лишь определить место и время – событие a, откуда и когда может быть совершено *реальное и вполне успешное* путешествие в отдалённое Прошлое b, поскольку оно находится в Гиперпространстве более, чем рядом с Настоящим, и в силу этого его не придется долго разыскивать. Иначе говоря, может быть запущена машина времени, работающая посредством создания 4-мерной кротовой норы, соединяющий близкие события a и b.

Однако как понять, что наше пространство-время представляет собой пружинный слой в объемлющем Гиперпространстве? Ответ дает следующая

Теорема 7.8 (Думини). *Если* $GV(\mathcal{F}) \neq 0$*, то слоение* $\mathcal{F}$ *имеет пружинные слои* [148, с.169]. ∎

Хардер [238] показал, что $GV(\mathcal{F}) \neq 0$ влечёт существование пружинного слоя, который не содержится в исключительном минимальном множестве и, следовательно, должен существовать пружинный слой, который лежит в открытом локальном минимальном множестве слоения $\mathcal{F}$.

Поскольку $GV(\mathcal{F}) \in H^3(M^5, \mathbb{R})$, то условие $GV(\mathcal{F}) \neq 0$ означает наличие 4-мерных дыр в объемлющем пространство-время 5-мерном Гиперпространстве M^5, а с учетом двойственности Пуанкаре в M^5 должны быть и 3-мерные дыры, т.е. пустоты.

Для того чтобы ответить на вопрос, почему именно «наш» слой свернут в пружину, потребуются скорее философские соображения, чем физические. Ведь как-то надо объяснить, почему для описания пространства-времени достаточно одного слоя, а многомерные модели с необходимостью предоставляют континуум «лишних» слоев.

Теорема 7.9 (Думини-Кантвелл-Конлон). *Если слоение коразмерности 1 не имеет пружинных слоев, то* $GV(\mathcal{F}) = 0$ [162, с.474].

Пусть $\mathcal{A}ff(\mathbb{R})$ – группа аффинных преобразований прямой $\mathbb{R}$. Трансверсально аффинное слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1 на многообразии M^n индуцирует гомоморфизм голономии $h : \pi_1(M) \to \mathcal{A}ff(\mathbb{R})$. Называем образ гомоморфизма h *глобальной группой голономий* слоения $\mathcal{F}$.

Имеет место

Теорема 7.10. *Пусть $\mathcal{F}$ – ориентируемое трансверсально аффинное слоение коразмерности 1 на замкнутом многообразии и Γ – его глобальная группа голономий. Тогда одно из следующих двух утверждений справедливо* [240]*:*

(1) *$\mathcal{F}$ почти без голономии, и группа Γ абелева.*

(2) *$\mathcal{F}$ содержит локально плотный пружинный слой, и группа Γ неабелева.* ■

7.4.3. Возможность свёртывания пространства-времени в пружину в случае тривиального класса Годбийона-Вея

Но что делать, если вычисление показало, что $GV(\mathcal{F}) = 0$? Возникает вопрос, существуют ли пружинные слои в случае, когда $GV(\mathcal{F}) = 0$?

Ответ нам неизвестен, однако когда класс Годбийона-Вея тривиален, то можно пытаться проварьировать его, т.е. включить слоение $\mathcal{F}$ в гладкое однопараметрическое семейство слоений $\mathcal{F}_t$, характеристический класс [163]

$$Char_{\mathcal{F}_t}(\alpha) = GV(\mathcal{F}_t), \quad \alpha \in H^3(W_1),$$

$$Char_{\mathcal{F}_t}(\alpha) : H^*(W_q) \to H^*(M^{4+q}; \mathbb{R}),$$

которых меняется с изменением параметра t по закону

$$GV(\mathcal{F}_t) \cdot \frac{d}{dt} GV(\mathcal{F}_t) = 0$$

(имеется в виду когомологическое умножение) так, что $GV(\mathcal{F}_{t_0}) \neq 0$ для некоторого t_0.

Здесь W_1 – бесконечномерная алгебра Ли, алгебра формальных векторных полей на прямой $\mathbb{R}$. Её элементы имеют вид $h(x)d/dx$, где $h(x)$ – формальный степенной ряд (a formal power series). Единственные нетривиальные когомологии алгебры Ли W_1 (с тривиальными коэффициентами) – это $H^0(W_1;\mathbb{R}) = H^3(W_1;\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Нетривиальный 3-коцикл, представляющий класс Годбийона-Вея, даётся формулой

$$\widetilde{c}\left(h_1(x)\frac{d}{dx}, h_2(x)\frac{d}{dx}, h_3(x)\frac{d}{dx}\right) = \begin{vmatrix} h_1(0) & h_2(0) & h_3(0) \\ h_1'(0) & h_2'(0) & h_3'(0) \\ h_1''(0) & h_2''(0) & h_3''(0) \end{vmatrix}.$$

В случае оснащённого слоения необходимое варьирование возможно [163, теорема 3.1.1], если $\alpha \in H^k(W_1)$ не принадлежит образу гомоморфизма включения $H^k(W_{q+1}) \to H^k(W_q)$, $H^3(W_2) = 0$. [7].

Здесь W_q бесконечно-мерная алгебра Ли векторных полей на $\mathbb{R}^q$. Характеристические классы слоений коразмерности q соответствуют $H^q(W_q;\mathbb{R})$.

Наконец, как отмечалось в § 7.3, может быть найдена общая неинтегрируемая гомотопия $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,1]}$, деформирующая исходное слоение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ с $GV(\mathcal{F}_0) = 0$ в слоение $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ с $GV(\mathcal{F}_1) \neq 0$.

Принципиальным является другой вопрос: какая физика скрывается за чисто математической процедурой желанного варьирования или деформации слоения?

Ниже приводятся три физические теории, в которых определяющие слоение 1-формы самым тесным образом связаны с чисто физическими полями. Эти физические поля можно порождать или изменять посредством физических экспериментом (например, на ускорителях) или при функционировании специально созданной физической аппаратуры. Как результат,

[7] При $q > 1$ класс Годбийона-Вея заменяется несколькими характеристическими классами [163].

получим изменение определяющих 1-форм, означающее возникновение деформации слоения, которая изменит конфигурацию слоения в объемлющем Гиперпространстве и, как следствие, появятся пружинные слои.

7.4.4. Оценка энергии, необходимой для свертывания пространства-времени в пружину

Пусть $< M^5, g^{(5)}_{AB} >$ – 5-мерное замкнутое риманово многообразие. Поскольку для замкнутого 5-мерного многобразия $\chi(M^5) = 0$, то на M^5 существует единичное гладкое векторное поле ξ. Рассмотрим базис $e_0 = \xi, e_1, ..., e_4$ в M^5_x и двойственный к нему $\theta_0, ..., \theta_4$.

Тогда имеем форму кривизны

$$\Omega_{AB} = \frac{1}{2} R^{(5)}_{ABCD} \theta^C \wedge \theta^D.$$

Предположим, что многообразие является сасакиевым, т.е.

$$R^{(5)}(X, \xi)Y = g^{(5)}(X, Y)\xi - g^{(5)}(\xi, Y)X,$$

а поле ξ регулярное, т.е. все траектории поля ξ имеют общую длину $l(\xi)$.

Тогда справедлива формула[8] Гаусса-Бонне-Танно [292]

$$\begin{gathered}
\frac{l}{4\pi^2 l(\xi)} \int_{M^5} [\Omega_{12} \wedge \Omega_{34} + \Omega_{13} \wedge \Omega_{42} + \Omega_{14} \wedge \Omega_{23} + \\
+3\theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \Omega_{24} + 3\theta_2 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{13} + 15\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \theta_4 - \\
-\theta_1 \wedge \theta_2 \wedge \Omega_{12} + 2\theta_1 \wedge \theta_3 \wedge \Omega_{13} - \theta_1 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{14} - \\
-\theta_2 \wedge \theta_3 \wedge \Omega_{23} + 2\theta_2 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{24} - \\
-\theta_3 \wedge \theta_4 \wedge \Omega_{34}] \wedge \theta_0 = 3 - 2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5).
\end{gathered} \tag{7.3}$$

[8]В статье [277] дается аналогичная формула, но без требования сасакиевости геометрии многообразия.

Для того чтобы оценить энергию, которая необходима для свёртывания пространства-времени $< M^4, g >$ в пружинный слой в лоренцевом Гиперпространстве $< M^5, g^{(5)}_{AB} >$, мы перейдем к евклидовой 5-мерной метрике, совершая поворот Вика, меняющего время на мнимое время. Тогда Гиперпространство, которое, по-прежнему, обозначаем $< M^5, g^{(5)}_{AB} >$, становится римановым (евлидовым), и мы можем воспользоваться формулой (7.3) для оценки энергии.

Из уравнений гравитационного поля для 5-мерного лоренцева Гиперпространства, ставшего евклидовым,

$$R^{(5)}_{AB} - \frac{1}{2} g^{(5)}_{AB} R^{(5)} = \varkappa\, \varepsilon_{(5)} u_A u_B,$$

а также из структуры формулы для компонент тензора кривизны получаем, что

$$R^{(5)} \sim \varkappa\varepsilon_{(5)}, \quad R^{(5)}_{ABCD} \sim [\varkappa\varepsilon_{(5)}], \quad R^{(5)}_{AB} \sim [\varkappa\varepsilon_{(5)}].$$

Тогда из (7.3) имеем:

$$\frac{l}{4\pi^2 l(\xi)}[const \cdot (\varkappa\varepsilon_{(5)})^2 + const \cdot (\varkappa\varepsilon_{(5)}]v(M^5) \sim$$

$$\sim 3 - 2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5). \tag{7.4}$$

Рассматривая случаи $\delta[\varkappa\varepsilon_{(5)}] < 1$ и $\delta[\varkappa\varepsilon_{(5)}] > 1$, легко понять, что они сводятся к одному условию:

$$\frac{l}{4\pi^2 l(\xi)}[\varkappa\varepsilon_{(5)}]v(M^5) \sim 3 - 2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5). \tag{7.5}$$

При этом следует помнить, что свёртывание пространства-времени M^4, т.е. появление пружинного слоя, означает (неинтегрируемую) деформацию слоения в новое слоение, имеющего пружинный слой. Следовательно, после деформации в силу того, что возможно изменение геометрии, т.е. изменятся G_{AB} и ξ, их новые значения помечаем штрихом $'$. Тогда имеем вместо (7.4) следующую оценку:

$$\frac{l}{4\pi^2 l(\xi')}[\varkappa\varepsilon'_{(5)}]v'(M^5) \sim -2\beta'_1(M^5) + \beta'_2(M^5). \tag{7.6}$$

Поэтому из (7.5), (7.6) получаем оценку для скачка энергии $\delta[\varepsilon_{(5)}] = \varepsilon'_{(5)} - \varepsilon_{(5)}$:

$$\delta[\varepsilon_{(5)}] \sim \frac{4\pi^2}{\varkappa}\left[\frac{l(\xi')}{v'(M^5)}[-2\beta'_1(M^5) + \beta'_2(M^5)] - \right.$$

$$\left. - \frac{l(\xi)}{v(M^5)}[-2\beta_1(M^5) + \beta_2(M^5)]\right]. \tag{7.7}$$

Деформация не меняет топологию и гладкую структуру. Поэтому числа Бетти не меняются, т.е. $\beta'_A(M^5) = \beta_A(M^5)$; меняется метрика и объём.

Но если изначально $\beta_2(M^5) = 0$, например $\beta_2(S^5) = 0$, то любая деформация слоения без пружинных слоёв не даст слоение с пружинными слоями. Поэтому следует предположить, что за счёт скачка энергии происходит переход к новой топологии, к новой гладкости в M^5 с $\beta_2(M^5) \neq 0$. Другими словами, имеем переход

$$< M^5, \mathcal{T}, F, \beta_2(M^5) = 0 > \to < (M')^5, \mathcal{T}', F', \beta_2((M')^5 \neq 0 >,$$

где штрих $'$ говорит о новой топологии $\mathcal{T}'$ и новой гладкости F' на M^5 (как на множестве, т.е. на носителе топологии и гладкости), дающий возможность появиться пружинному слоению. При этом Гиперпространство $< (M')^5, \mathcal{T}', F' >$ приобретает необходимые нам 3- и 4-мерные дыры.

Таким образом, локальное силовое (энергетическое) действие способно изменить размещение пространства-времени в Гиперпространстве.

7.4.5. Ручки в пружинных слоях

Пусть M^n – компактное ориентируемое многообразие, а $\mathcal{F}$ – трансверсально ориентированное слоение коразмерности 1. Полагаем, что каждая компонента края ∂M^n, если она есть, есть слой.

Локальное минимальное множество слоения $\mathcal{F}$ есть множество $X \subset M^n$, для которого существует такое открытое связное насыщенное подмножество $U \subset M^n$, что X – минимальное множество для подслоения $\mathcal{F}|U$.

Определение 7.10. *Ручка в слое* L есть компактное связное неотделимое[9] подмногообразие H коразмерности 1 такое, что $\partial H = \emptyset$. *Род слоя* L – это максимальное число попарно непересекающихся ручек в L, которые линейно независимы в $H^*(L; \mathbb{R})$ [200].

Поскольку в нашем случае слой $L = M^4$, т.е. является 4-мерным пространством-временем, то ручка в слое – это 4-мерная кротовая нора в пространстве-времени, но отнюдь не 4-мерная дыра в Гиперпространстве M^5.

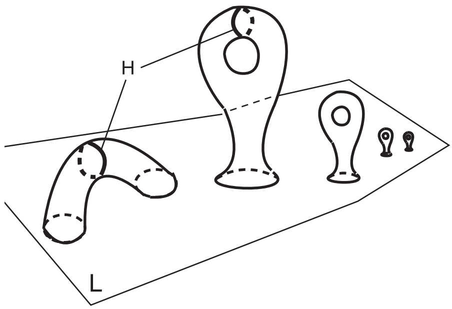

Рис. 7.5: Ручки в слое.

Теорема 7.11. *Пусть* $X \subset M^n$ *– локальное минимальное множество Маркова в слоении* $\mathcal{F}$. *Тогда* X *содержит точно счётное число пружинных слоёв. Дальше, либо род каждого пружинного слоя* $L \subset X$ *равен 1, а род остальных слоёв в* $\mathcal{F}|X$ *равен 0, либо каждый слой* $L \subset X$ *имеет бесконечный род* [200]. ■

7.5. Связь характеристических классов слоений с физическими полями

Изучим, каким образом характеристические классы слоений могут быть связаны с различными физическими полями?

[9] Неотделимость (nonseparating) подмногообразия $H \subset L$ означает, что $L \setminus H$ связно.

7.5.1. Случай 5-мерной теории ($q = 1$) грави-электро-скалярных взаимодействий

Рассмотрим слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1 в 5-мерном многообразии M^5, в рамках которого строится теория грави-электро-скалярного взаимодействия [19, гл. 2].

Слоение $\mathcal{F}$ задается 1-формой γ. Локально в координатах x^A $(A = 0, 1, 2, 3, 5)$ на M^5 можно ввести лоренцеву метрику $\overset{\circ}{g}{}^{(5)}_{AB}$ сигнатуры $(+----)$ вида [19, с.39] (где вместо γ написано $\overset{\circ}{\lambda}$):

$$\overset{\circ}{g}{}^{(5)}_{AB} = -\gamma_A\gamma_B + \overset{\circ}{g}{}^{(4)}_{AB}, \quad \overset{\circ}{g}{}^{(4)}_{5A} = 0,$$
$$\gamma = \gamma_A dx^A,$$

где $\overset{\circ}{g}{}^{(4)}_{AB}$ – метрический тензор пространства-времени V^4.

Для описания гравитационного поля в пространстве-времени M^4 и вне его – во внешнем 5-мерном Гиперпространстве – необходимо использовать либо вариант теории Калуцы-Клейна, либо brane-теории.

В случае варианта теории Калуцы-Клейна в 5-мерной теории электрогравитации со скалярным полем [19] предпочтительней рассматривать конформную метрику $g^{(5)}$:

$$g^{(5)}_{AB} = \phi^{-2}\,\overset{\circ}{g}{}^{(5)}_{AB}, \qquad g^{(4)}_{AB} = \phi^{-2}\,\overset{\circ}{g}{}^{(4)}_{AB}, \qquad \phi = \gamma_5,$$
$$g^{(5)}_{AB} = -\lambda_A\lambda_B + g^{(4)}_{AB}, \tag{7.8}$$
$$\lambda = \phi^{-1}\gamma,$$

$$(d\mathrm{I})^2 = \overset{\circ}{g}{}^{(5)}_{AB}\, dx^A dx^B = \phi^2 g^{(5)}_{AB} dx^A dx^B = \phi^2 dI^2$$

с дополнительным условием цилиндричности, означающим, что $g^{(5)}_{AB}$ не зависят от x^5, а также с требованием, что $g^{(5)}_{55} = -1$. При этом ϕ является скалярным полем, а 5-мерные уравнения Эйнштейна

$$\overset{\circ}{R}{}^{(5)}_{AB} - \frac{1}{2}\,\overset{\circ}{g}{}^{(5)}_{AB}\overset{\circ}{R}{}^{(5)} - \Lambda\,\overset{\circ}{g}{}^{(5)}_{AB} = \varkappa T^{(5)}_{AB} \tag{7.9}$$

сводятся [19, с.71] к 4-мерным уравнениям Эйнштейна, уравнениям Максвелла и уравнению Клейна-Фока для поля ϕ

$$R_{ik}^{(4)} - \frac{1}{2}g_{ik}^{(4)}R^{(4)} - \Lambda\phi^2 g_{ik}^{(4)} = -\frac{2G}{c^4}(F_{im}F_{k\cdot}^{\cdot m} - \frac{1}{4}g_{ik}^{(4)}F_{mn}F^{mn})+$$

$$+\frac{3}{\phi}(\nabla_i\nabla_k\phi - g_{ik}^{(4)}(g^{(4)})^{mn}\nabla_m\nabla_n\phi) - \frac{6}{\phi^2}\phi_{,i}\phi_{,k} + \varkappa T_{ik}, \quad (7.10)$$

$$-\nabla_m F^{mk} - 3F^{mk}\frac{\phi_{,m}}{\phi} = \frac{c^2\varkappa}{\sqrt{G}}\phi^3 T_A^k\lambda^A,$$

$$(g^{(4)})^{mn}\nabla_m\nabla_n\phi - \frac{1}{6}R^{(4)}\phi + \frac{1}{3}\Lambda\phi^3 - \frac{G\phi}{2c^4}F_{mn}F^{mn} = -\frac{\varkappa}{3}\phi^3 T_{AB}\lambda^A\lambda^B,$$

где $\varkappa = 8\pi G/c^4$.

Поиск пружинного пространства-времени сводится к вычислению когомологического класса $GV(\mathcal{F})$, определяемого в общем-то 1-формой λ, непосредственно связанной со скалярным (электрически заряженным [19, с.51]) полем ϕ и 4-потенциалом λ_i электромагнитного поля F_{ik}. Если $GV(\mathcal{F}) \neq 0$, то пружинные слои существуют.

7.5.2. Случай 6-мерной теории ($q = 2$) грави-электро-слабых взаимодействий

Рассмотрим слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 2 в 6-мерном многообразии M^6, в рамках которого строится теория грави-электрослабого взаимодействия [19, гл. 4], объединяющая 5-мерную теорию электромагнитных и гравитационных взаимодействий с моделью электрослабых взаимодействий Вайнберга-Салама.

Слоение $\mathcal{F}$ задается 1-формами λ и σ. Локально в координатах x^A $(A = 0,1,2,3,5,6)$ на M^6 можно ввести лоренцеву метрику $G_{AB}^{(6)}$ сигнатуры $(+-----)$ вида [19, с.96]:

$$G_{AB}^{(6)} = g_{AB} - \lambda_A\lambda_B - \sigma_A\sigma_B,$$

$$\lambda = \lambda_A dx^A, \quad \sigma = \sigma_A dx^A,$$

$$\lambda_A\lambda^A = \sigma_A\sigma^A = -1, \ \lambda_A\sigma^A = 0, \ g_{AB}\lambda^B = g_{AB}\sigma^B = 0,$$

где g_{AB} – метрика пространства-времени M^4.

Дифференциальные 1-формы λ, σ определяют характеристические классы слоения $\mathcal{F}$. Вычисление этих когомологических классов даёт ответ на наш вопрос о расположении пространства-времени в объемлющем 6-мерном Гиперпространстве и отчасти на вопрос степени метрической близости Прошлого и Будущего к Настоящему. Значит, исследование электрослабых взаимодействий позволяет решать принципиальные вопросы, касающиеся теории машины времени или сверхдальних перемещений в пространстве.

Дифференциальные 1-формы λ и σ связаны с нейтральными векторными полями B_i и $A(3)_i$ (или Z_i и A_i) :

$$B_i = -\frac{2\alpha\lambda^5\hbar c}{g_1}\lambda_i,\ A(3)_i = -\frac{2\beta\hbar c}{g_2}(\sigma^6\sigma_i + \lambda^6\lambda_i),$$

где α, β – константы, g_1, g_2 – известные константы взаимодействия с векторными полями B_i и $A(3)_i$.

Векторное поле B_i отвечает абелевой $U(1)$-симметрии (изотопический синглет), и три поля $A(1)_i$, $A(2)_i$, $A_i(3)_i$ отвечают локальной неабелевой $SU(2)$-симметрии (изотопический триплет).

Поле

$$Z_i = \frac{1}{\zeta}[\lambda_i(\alpha\lambda^5 - \beta\lambda^6) - \sigma_i(\beta\sigma^6)],$$

где ζ – некоторая размерная постоянная, – это поле нейтрального векторного бозона в модели Вайнберга-Салама.

Таким образом, можно предположить, что чисто физические эксперименты, проводимые по определённым проектам, способны оказать влияние на расположение пространства-времени как слоя в объемлющем многообразии, заставляя его бесконечно наматываться на себя, образуя своего рода пружину, т.е. пружинный слой.

7.5.3. Случай 7-мерной теории ($q = 3$) грави-электро-сильных взаимодействий

Рассмотрим слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 3 в 7-мерном многообразии M^7, объединяющая гравитационные, электромагнитные и сильные взаимодействия [19, гл. 6] (без слабых взаимодействий).

Слоение $\mathcal{F}$ задается 1-формами λ, σ и ω. Локально в координатах x^A $(A = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7)$ на M^6 можно ввести лоренцеву метрику $G^{(7)}_{AB}$ сигнатуры $(+ - - - - --)$ вида:

$$G^{(7)}_{AB} = g_{AB} - \lambda_A \lambda_B - \sigma_A \sigma_B - \omega_A \omega_B,$$

$$\lambda = \lambda_A dx^A, \quad \sigma = \sigma_A dx^A, \quad \omega = \omega_A dx^A$$

$$\lambda_A \lambda^A = \sigma_A \sigma^A = \omega_A \omega^A = -1,$$

$$\lambda_A \sigma^A = \lambda_A \omega^A = \sigma_A \omega^A = 0, \quad g_{AB} \lambda^B = g_{AB} \sigma^B = g_{AB} \omega^B = 0,$$

где g_{AB} – метрика пространства-времени M^4.

Дифференциальные 1-формы λ, σ, ω определяют характеристические классы слоения $\mathcal{F}$. Они связаны [19, с.169] с электромагнитным полем A_i и с двумя глюонами $A(3)_i$ и $A(9)_i$:

$$A_i = \pm \frac{c^2}{2\sqrt{3k}} (\lambda_i + \sigma_i + \omega),$$

$$A(3)_i = \pm \frac{c^2}{2\sqrt{2k}} (\lambda_i - \sigma_i),$$

$$A(8)_i = \pm \frac{c^2}{2\sqrt{6k}} (\lambda_i + \sigma_i - 2\omega_i).$$

7.6. Speculatio

1. Мы вполне можем представлять реально существующим 4-мерное пространство-время, которое является слоем в 5-мерном Гиперпространстве. Можно искать экспериментальные подтверждение этому, а также тому, что наше

пространство-время – это пружинный слой. Но что делать, если все эксперименты упорно говорят об отсутствии свойства пружинности. Поскольку с пружинными слоями мы связываем путешествия во времени и «мгновенные» сверхдальние перемещения в пространстве, то остаётся надеяться на то, что мы сможем перестроить наше слоение в другое, в котором свойство пружинности станет доказуемым фактом. Именно о такой желанной перестройке слоения, в которое входит наше пространство-время, написано в данной главе.

Так что? Получается, что человек способен скручивать, свёртывать пространство-время, в котором он обитает, в нечто похожее на пружину-рессору по своему усмотрению? Не слишком ли фантастичны такие идеи?

Не слишком. Что бы сказал Ломоносов, если бы ему сказали, что расставленная на лугу сотня-другая больших «водородных бочек», разом взорвавшись, уничтожат Земной шар? Как гений науки подивился бы и стал уточнять. А вот вельможа из царского окружения посмеялся на глупым, читай фантастичным, заявлением.

Энергия, требуемая на скручивание пространства-времени, сколь бы гигантской нам не казалась, вполне сравнима с тем потрясением, которое испытал бы Ломоносов, когда назвали бы ему энергию, освобождаемую при термоядерном взрыве. В каждой исторической эпохе свои представление о фантастике.

2. В пружинном пространстве-времени пробное тело с массой m и зарядом e может то неоднократно исчезать и появляться в будущем, то обнаруживаться в прошлом. Но для этого должно выполняться некоторое соотношения для m и e [66, с.109]. Ю.А. Лебедев[10] предложил эксперимент, состоящий в наблюдении ускоряющегося электрона. При достижении им рассчётной скорости электрон должен исчезать из нашего пространства, унося с собой и энергию и импульс, т.е. не порождая ливня вторичных частиц. Однако его расчёты показали, что «технические параметры крупнейших ускорителей электронов еще далеки от требуемых для постановки эксперимента».

[10]См. Лебедев Ю.А. http://www.everettica.org/art/1eksev.pdf

Глава 8

Топология вселенной Гёделя

При нахождении решения уравнений Эйнштейна, как правило, их записывают в конкретной локальной карте. Другими словами, находится только локальное решение, справедливое только в области $\Omega \subset M^4$ пространства-времени M^4. Совпадает ли Ω со всем пространства-временем M^4 – вопрос, нуждающийся в отдельном исследовании.

Для нахождения ответа на этот вопрос находят различные локальные решения уравнений Эйнштейна и пытаются склеить их в единое глобальное решение. При такой склейке происходит составление полного атласа карт, покрывающих всё пространство-время, и выявляется топология пространство-времени.

Если локальное решение обладает группой симметрий G, то часто с помощью найденной группы можно выявить глобальную структуру всего пространства-времени. При этом может выясниться, что такая топология не единственна и могут существовать разные глобальные варианты пространства-времени, содержащие как одну из локальных карт исходное локальное решение уравнений Эйнштейна.

В этом параграфе в качестве примера определения глобальной структуры пространства-времени, обладающего группой симметрий, мы исследуем глобальную топологическую структуру Вселенной Гёделя.

8.1. Вселенная Гёделя

Метрика Гёделя имеет следующий вид [213]:

$$ds^2 = a^2 \left(dx^{0^2} - dx^{1^2} - dx^{3^2} + \frac{1}{2} e^{2x^1} dx^{2^2} + 2e^{x^1} dx^0 dx^2 \right), \tag{8.1}$$

где $a = const$. Она удовлетворяет уравнениям Эйнштейна с космологической постоянной $\Lambda = -1/2a^2 = -4\pi G\rho/c^2$ [213, 167]. В случае, когда $\Lambda = 0$, правую часть уравнений гравитационного поля следует брать в виде тензора энергии-импульса идеальной жидкости с плотностью ρ и давлением p [149].

8.2. Группа симметрий Вселенной Гёделя

Координаты x^0, x^1, x^2, x^3 в (8.1) принимают любые вещественные значения; следовательно, пространство-время Гёделя $\widetilde{M}^4$ гомеоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^4$. Однако это не единственная возможная глобальная структура лоренцева многообразия с метрикой (8.1).

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим группу движений $\widetilde{G}_4$ вселенной Гёделя $\widetilde{M}^4$:

$$\begin{cases} \overline{x}^0 = x^0 + \alpha \\ \overline{x}^1 = x^1 + \beta \\ \overline{x}^2 = e^{-\beta} x^2 + \gamma \\ \overline{x}^3 = x^3 + \delta, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – произвольные вещественные параметры.

Группа $\widetilde{G}_4$ действует транзитивно на $\widetilde{M}^4$ и имеет тривиальную стационарную подгруппу $(\widetilde{G}_4)_x$ относительно произвольной точки $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ многообразия $\widetilde{M}^4$. Следовательно, группа $\widetilde{G}_4$ диффеоморфна лоренцеву многообразию $\widetilde{M}^4$ (см. [165, с.129,132]), и можно далее отождествить $\widetilde{G}_4$ со Вселенной Гёделя $\widetilde{M}^4$.

Группа $\widetilde{G}_4$ имеет тип G_4VI_2 в обозначениях М.Е. Осиновского, и топология групп Ли этого типа эквивалентна топологии следующих многообразий [135]:

$$\mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}^3 \times S^1, \quad \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1, \tag{8.2}$$

S^1 – окружность.

Обозначим через $\widetilde{G}_4$, $(G_4)_1$ и $(G_4)_2$ соответствующие указанным топологическим структурам (8.2) группы Ли. Группа $(G_4)_i$ $(i = 1, 2)$ получается из группы $\widetilde{G}_4$ факторизацией по дискретному центральному нормальному делителю H_i, т.е. $(G_4)_i = \widetilde{G}_4 / H_i$.

Известно [270], что группа $(G_4)_i$ будет обладать метрикой g, которая индуцируется метрикой (8.1) на $\widetilde{G}_4$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$g_e(dx) = g_e(Ad_{\widetilde{G}_4}(h)[dx]) \tag{8.3}$$

для любого элемента $h \in H_i$. Так как для центра связной группы присоединенное представление $Ad_{\widetilde{G}_4}$ является тождественным автоморфизмом алгебры Ли группы $\widetilde{G}_4$ [165, с.138], то равенство (8.3) выполняется автоматически. Следовательно, метрика (8.1) допускается группой $(G_4)_i$ $(i = 1, 2)$, превращая последнюю в топологическую разновидность Вселенной Гёделя M_i^4 (т.е. M_i^4 – это лоренцево многообразие, изометричное $(G_4)_i$).

Подытоживая, мы можем сказать, что возможны три топологически различные Вселенные Гёделя:

$$\widetilde{M}^4, \quad M_1^4, \quad M_2^4.$$

Их глобальная топология перечислена в (8.2). Модели $\widetilde{M}^4$, M_1^4, M_2^4 назовем соответственно *универсальной*, *цилиндрической* и *торической* вселенными Гёделя.

Важно отметить, что группа $\widetilde{G}_4$ действует транзитивно не только на $\widetilde{M}^4$, но также на M_1^4 и M_2^4 [165, с.132], т.е. вселенные M_1^4 и M_2^4 однородные.

Переход $\widetilde{M}^4$ от к M_i^4 $(i = 1, 2)$ происходит с помощью отождествления точек определенных подмножеств, которые легко определяются благодаря заданию дискретного нормального делителя H_i.

8.2.1. Цилиндрическая Вселенная Гёделя M_1^4

Центр группы $(G_4)_1$ изоморфен группе $\mathbb{R} \oplus S^1$ [135]. Поэтому надо рассмотреть два случая:

a) H_1 состоит из преобразований вида

$$\overline{x}^a = x^a \ (a = 0, 1, 2), \quad \overline{x}^3 = x^3 + n,$$

где n – любое целое число.

В этом случае имеем Вселенную $M_1^4(a)$, которая получается отождествлением события (x^0, x^1, x^2, x^3) с событием $(x^0, x^1, x^2, x^3 + n)$. При этом ось x^3 превращается в окружность S^1, а $\widetilde{M}_4$ в $M_1^4(a) \approx \mathbb{R}^3 \times S^1$.

Цилиндрическая Вселенная $M_1^4(a)$, также как и Вселенная Гёделя $\widetilde{M}_4$, содержит гладкие замкнутые времениподобные кривые (временные петли)[1].

b) H_1 состоит из преобразований вида

$$\overline{x}^0 = x^0 + n, \quad \overline{x}^\alpha = x^\alpha \ (\alpha = 1, 2, 3),$$

где n – любое целое число.

В этом случае точка (x^0, x^1, x^2, x^3) отождествляется с точкой $(x^0 + n, x^1, x^2, x^3)$. Получаемая цилиндрическая Вселенная Гёделя $M_1^4(b)$ обладает замкнутым временем и, следовательно,

[1] Отметим здесь, что в работе [34] в доказательстве отсутствия временных петель во Вселенной $\widetilde{M}_4$ содержится ошибка.

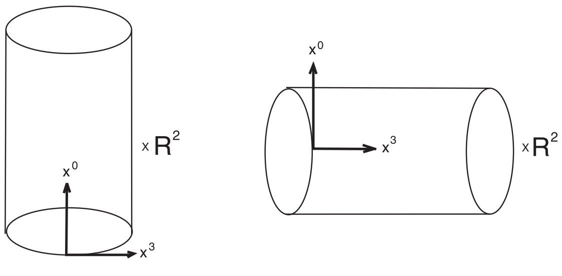

Рис. 8.1: a) Цилиндрическая Вселенная $M_1^4(a)$. b) Цилиндрическая Вселенная $M_1^4(b)$.

добавочными временными петлями [34]. Таким образом, хотя топологии Вселенных Гёделя $M_1^4(a)$, $M_1^4(b)$ эквивалентны, их геометрические и физические свойства различны.

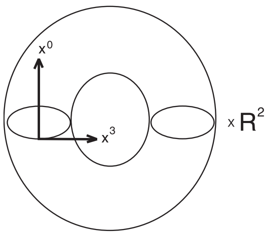

Рис. 8.2: Торическая Вселенная M_2^4.

8.2.2. Торическая Вселенная Гёделя M_2^4

Центр группы $(G_4)_2$ изоморфен двумерному тору $S^1 \oplus S^1$ [135].

Дискретный нормальный делитель H_2 состоит из преобразований вида

$$\overline{x}^0 = x^0 + n \quad \overline{x}^1 = x^1, \quad \overline{x}^2 = x^2, \quad \overline{x}^3 = x^3 + m,$$

где n, m – произвольные целые числа.

Поэтому торическая Вселенная M_2^4 получается при отождествлении точки (x^0, x^1, x^2, x^3) с точкой (x^0+n, x^1, x^2, x^3+m).

Вселенная M_2^4 имеет замкнутое время и добавочные временные петли.

8.3. Временные петли во Вселенных Гёделя

Существование временных петель во Вселенных Гёделя рассматривают иногда как довод в пользу того, что эти модели не имеют физического смысла [167]. Такое мнение совсем не оправдано (см. [34], [95, с.679]).

В самом деле, если воспользоваться координатами Гёделя (t, r, φ, y) для $\widetilde{M}_4$, в которых метрика (8.1) принимает вид [213]

$$ds^2 = 4a^2(dt^2 - dr^2 - dy^2 + (sh^4 r - sh^2 r)d\varphi^2 + 2\sqrt{2}sh^2 r d\varphi dt,$$

а временные петли задаются соотношениями

$$r, t, y = const, \quad r \geq \ln(1+\sqrt{2}), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

то истинное время жизни «путешественника в прошлое» равно [34]:

$$\tau = \frac{1}{c}\oint \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{g_{0\alpha}dx^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{c}\int\limits_0^{2\pi} 8\sqrt{2}\pi a \cdot sh^2 r d\varphi \geq 4\frac{\pi}{\sqrt{G\rho}} \sim 10^{10}\text{лет},$$

где мы приняли $\rho \sim 10^{-31}$ *г/см*^{3}. Аналогичная оценка справедлива для добавочных временных петель во вселенных $M_1^4(b)$ и M_2^4.

Таким образом, мы имеем дело с явлениями, далеко выходящими за пределы наших знаний и наших обычных представлений о причинно-следственных связях. Более общий случай, приводящий к такому же выводу, анализировался нами в [66].

Глава 9

Динамика симметрий пространства

Реальное физическое пространство, точнее его геометрия, обладает рядом симметрий (перемещение, вращение, отражение). Общая теория относительности породила представление о меняющейся с течением времени геометрии пространства. Следовательно, можно говорить о динамике пространственных симметрии. Поскольку пространство только «тень четырёхмерного пространства-времени», то это утверждение Минковского, будучи распространённым на симметрии пространства, должно означать, что пространственные симметрии лишь одно из проявлений симметрии пространства-времени. Другими словами, если G – группа симметрий пространства-времени, то ограничение её действия на пространственноподобных сечениях и есть пространственные симметрии. Такой подход к проблеме симметрии пространства приводит с необходимостью к математической теории G-многообразий, т.е. многообразий с действием группы G [14].

Здесь уместно напомнить, что любое риманово многообразие с группой симметрий (изометрий) G является G-многообразием. Одновременно вопрос о динамике пространственных симметрии решается на основе теории эквивариантных бордизмов или G-бордизмов [45, 105]. Ниже будет показано, как с помощью этих теорий решается вопрос о приобретении в ходе эволюции Вселенной пространством таких важных свойств, как однородность и изотропность.

9.1. G-бордантные многообразия

Пусть G – группа и M^n – n-мерное гладкое ориентированное многообразие. Пусть $G \to Diff_+(M^n)$ – гомоморфизм, где $Diff_+(M^n)$ – группа сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов многообразия M^n. Тогда говорят, что M^n есть *G-многообразие* и что G действует на M^n.

Образ элемента $g \in G$ при $G \to Diff_+(M^n)$ обозначим через g, и пишем $g(x)$ для образа точки $x \in M^n$ при действии на неё элементом g. Если G – группа Ли, то добавочно требуем, чтобы отображение $G \times M^n \to M^n$, $(g,x) \to g(x)$ из нашего определения действия было гладким.

Будем обозначать G-многообразие M^n с фиксированным действием группы G через $\langle G, M^n\rangle$.

Два G-многообразия $\langle G, M_1^n\rangle$, $\langle G, M_2^n\rangle$ *эквивалентны*, если существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\varphi : M_1^n \to M_2^n$, являющийся эквивариантным отображением, т.е. $\varphi(g(x)) = g(\varphi(x))$ для всех $g \in G, x \in M_1^n$.

Пусть $\langle G, M^n\rangle$ – ориентируемое замкнутое, т.е. компактное без края G-многообразие. Оно *бордантно нулю*, если найдется компактное ориентированное G-многообразие $\langle G, M^{n+1}\rangle$, для которого $\langle G, \partial M^{n+1}\rangle$ эквивалентно $\langle G, M^n\rangle$. Здесь ∂M^{n+1} – край многообразия M^{n+1}.

Для двух G-многообразий $\langle G, M_1^n\rangle$, $\langle G, M_2^n\rangle$ существует обычное несвязное объединение $\langle G, M_1^n \cup M_2^n\rangle$. Пусть $-\langle G, M^n\rangle = \langle G, -M^n\rangle$, где $-M^n$ – многообразие M^n, взятое с противоположной ориентацией.

Пара $\langle G, M_1^n\rangle$ *бордантна* паре $\langle G, M_2^n\rangle$, если несвязное объединение $\langle G, M_1^n \cup (-M_2^n)\rangle$ бордантно нулю.

Если $\langle G, M_1^n\rangle$ бордантно $\langle G, M_2^n\rangle$, то в силу определения бордантности G-многообразий существует G-многообразие $\langle G, M^{n+1}\rangle$ такое, что $\partial M^{n+1} = M_1^n \cup (-M_2^n)$. Данное G-многообразие $\langle G, M^{n+1}\rangle$ называется ***бордизмом*** (плёнкой) для G-многообразий $\langle G, M_1^n\rangle$ и $\langle G, M_2^n\rangle$.

Отношение эквивариантной бордантности является отношением эквивалентности на множестве всех замкнутых ориентированных n-мерных многообразий [105].

Обозначим класс бордизмов G-многообразия $\langle G, M^n\rangle$ через $[G, M^n]$, а совокупность всех таких классов – через $\Omega_n(G)$.

Несвязное объединение G-многообразий индуцирует в $\Omega_n(G)$ структуру абелевой группы. Если во всех определениях опустить требование ориентируемости многообразий, то имеют группу неориентируемых n-мерных бордизмов $N_n(G)$.

9.2. Эволюция симметрии пространства

Два бордантных G-многообразия $\langle G, M_1^3\rangle$, $\langle G, M_2^3\rangle$ трактуем как начальное и конечное состояния эволюции группы симметрии G физического пространства.

Отсутствие симметрии G – это тривиальность действия группы G, т.е. гомоморфизм $G \to Diff_+(M^3)$ тривиален. Соответственно рождение симметрии означает, что действие группы G в M_2^3 нетривиально.

Аналогично понимается нарушение симметрии G. В этом случае конечное G-многообразие $\langle G, M_2^3\rangle$ обладает тривиальным действием группы G.

Бордизм $\langle G, M^4\rangle$, край которого $\partial M^4 = M_1^3 \cup (-M_2^3)$, – это пространство-время, начальным и конечным пространственноподобными сечениями которого должны быть M_1^3 и M_2^3. Действительно, бордизм (плёнка) $\langle G, M^4\rangle$ оснащается лоренцевой метрикой вида [307, 173]:

$$g_{ik} = \gamma_{ik} - a \cdot \omega_i \otimes \omega_k, \tag{9.1}$$

где γ_{ik} – некоторая риманова метрика, а ω_i – 1-форма, для которой M_1^3 и M_2^3 – это пространственноподобные трёхмерные поверхности. Риманову метрику γ_{ik} можно взять так, чтобы группа G была её группой симметрии (изометрий) [14, с.294].

Если многообразие M^4 допускает пространственно-временное слоение [173] такое, что слои суть орбиты группы, а M_1^3, M_2^3 также слои, то можно считать, что данное слоение порождено 1-формой ω. Но тогда ω инвариантна относительно действия группы G и, следовательно, метрика g допускает группу симметрии G. Пространство-время $\langle M^4, g\rangle$ становится симметричным относительно группы G, впрочем, также, как $\langle M_1^3, g|_{M_1^3}\rangle$ и $\langle M_2^3, g|_{M_2^3}\rangle$, где $g|_{M_i^3}$ – риманова метрика на M_i^3, индуцированная лоренцевой метрикой g. Более того, коль скоро M_i^3 $(i = 1, 2)$ – орбиты группы G, то это означает однородность соответствующего физического пространства.

Описанный выше бордизм $\langle G, M^4\rangle$ с симметричной относительно g лоренцевой метрикой g назовем *лоренцевым эквивариантным бордизмом* или *лоренцевым G-бордизмом.*

Хотя пространство в случае лоренцева G-бордизма однородно (относительно G), остаются многие другие проблемы, связанные с динамикой симметрии. Это, например, проблема изотропности пространства. Конечное G-многообразие $\langle G, M_2^3\rangle$ должно в таком случае обладать таким действием группы G, что стабилизатор G_x группы G в каждой точке $x \in M_2^3$ изоморфен группе $SO(3)$. Понятно, этим свойством не обязано обладать начальное состояние $\langle G, M_1^3\rangle$. Решить данную проблему чисто математическим путем можно, если вычислить класс $[G, M_2^3]$. В случае, когда $\langle G, M_1^3\rangle \in [G, M_2^3]$, следует сказать, что изотропия неизбежно возникает из начального состояния $\langle G, M_1^3\rangle$. Более того, если $\Omega_3(G) \neq 0$, то изотропность возникает из любого начального состояния. Если же $\Omega_3(G) = 0$, то изотропия порождается далеко не из каждого начального состояния, и знание элементов группы $\Omega_3(G)$ – это знание путей эволюции симметрии начальных состояний, равно как и определение прошлого (настоящих) симметричных состояний.

При $\Omega_3(G) \neq 0$ следует говорить о конкретном типе топологии и симметрии исходного состояния Вселенной, а также о допустимых типах топологических перестроек, происходящих с пространством в ходе развития Вселенной. Наконец, если для G-многообразий $\langle G, M_1^3\rangle$, $\langle G, M_2^3\rangle$ лоренцева G-бордизма нет, но возможен G-бордизм $\langle G, M^4\rangle$, то, предполагая, что M_2^3 – орбита группы G, а M_1^3 этим свойством не обладает, мы заключаем, что бордизм $\langle G, M^4\rangle$ – это динамика рождающегося однородного физического пространства.

Сказанное показывает, какое фундаментальное значение имеет вычисление групп 3-мерных G-бордизмов. К сожалению, в литературе содержится мало сведений об $\Omega_3(G)$, особенно для тех случаев, когда G не является конечной группой. Нам, тем не менее, удалось найти ряд результатов, которые позволяют ответить на ряд вопросов, освещённых выше.

Существует полезная формула для случая свободного действия группы G ([298], [105, теорема 14.1]):

$$\Omega_n^{free}(G) \cong \Omega_{n-k}(BG) \cong \sum_{p+q=n-k} H_p(BG, \Omega_q) mod\ C, \qquad (9.2)$$

где k – размерность группы G; BG – классифицирующее пространство для G; Ω_q – q-мерная группа бордизмов Тома [298]; C – класс конечных групп нечетного порядка; $H_p(A, F)$ – p-мерная группа гомологии с коэффициентами в группе F.

9.2.1. Однородность пространства

Мы должны здесь предполагать, что G действует транзитивно на M_2^3. Но тогда $dim\ G \geq 3$. Если $G = M_2^3$, т.е. M_2^3 есть компактная группа Ли, действующая на себе левыми сдвигами, то $\Omega_3(G) = 0$ [197]. Следовательно, однородность физического пространства (группового пространства, например сферы S^3 или тора $S^1 \times S^1 \times S^1$) возникает из произвольного, возможно полностью несимметричного, начального состояния $\langle G, M_1^3\rangle$.

Если G действует свободно на 3-многообразии M_2^3, то из (9.2) получаем

$$\Omega_3^{free}(G) \cong H_0(BG, \Omega_0).$$

Так как $\Omega_0 \cong \mathbf{Z}$, то $H_0(BG, \Omega_0) \cong \mathbf{Z}$ и, следовательно, $\Omega_3^{free}(G) = \mathbf{Z}$. Поэтому свободная симметрия возникает не из каждой свободной, если соответствующая плёнка M^4 не имеет неподвижных точек при действии группы G.

9.2.2. Изотропность пространства

Для полусвободного действия группы S^3 (т.е. стабилизатор в любой точке либо тривиален, либо совпадает со всей группой S^3) известно, что $\Omega_3^{sfree}(S^3) = 0$ [197]. Поскольку $S^3 \cong SU(2)$, а $SU(2)$ локально изоморфна $SO(3)$, то тривиальность группы $\Omega_3^{sfree}(S^3)$ означает возможность зарождения изотропии пространства из любого начального состояния. Перечисление многообразий M^3 с полусвободным действием S^3 – это исследование топологических типов изотропного физического пространства.

9.2.3. Аксиальная симметрия

Зарождение цилиндрической симметрии из произвольного начального состояния возможно в силу того, что $\Omega_3^{sfree}(S^1) = 0$ при полусвободном действии S^1 на M_2^3 [298]. В случае свободного действия S^1 известно [286], что $[S^1, M_2^3] = 0$ в $N_3(S^1)$.

Связное компактное S^1-многообразие называется многообразием Зейферта. Они широко изучались [269, 282] и были классифицированы. С их помощью строятся общие 3-многообразия [241].

9.2.4. Дискретные симметрии

Они являются наиболее изученными в математической литературе. Например, $\Omega_3(\mathbf{Z}_2) = 0$ [253]. Поскольку $\mathbf{Z}_2$-действие на M^3 – это инволюция $P: M^3 \to M^3,\ P^2 = id_{M^3}$, т.е. повторное применение дает тождественное преобразование, то под $\mathbf{Z}_2$-действие попадает такая симметрия, как четность. Следовательно, если в ходе топологической перестройки геометрия 3-пространства теряет четность, то она способна восстановиться через некоторое время. Действие $\mathbf{Z}_2$ на M^4 можно рассматривать как PT-симметрию (если только γ_{ik} и ω $\mathbf{Z}_2$-симметричны, см. (9.1)). Интересно отметить, что $\Omega_4(\mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}_2$ (см. [253]), т. е. PT-симметрия – «тень» четырёх различных типов 5-симметрий. Для конечных групп лоренцевы G-бордизмы изучены в [231]. Группы $\Omega_n(G)$, где G – конечная подгруппа $SU(2)$, найдены в [248].

9.2.5. Внутренние симметрии

Рождение внутренних симметрий физических полей при условии неизменности пространства-времени, по-видимому, следует из работы [197], где показано, что пространство главного G-расслоения над замкнутым гладким многообразием бордантно нулю.

9.3. Speculatio

1. Симметрия пространства определяет пространственную геометрию. Если фиксируется группа симметрий, то вычисляются связанные с ней геометрии. Этот принцип был сформулирован Феликсом Клейном в его Эрлангенской программе.

Гельмгольц высказал иное положение: наличие возможности вращать тела вокруг точек, называемых центром вращения, переводя тело из одного положение в другое, должно предопределять евклидовость геометрии пространства. Ли дал доказательство этому положению, уточнив, что при этом могут появляться ещё сферическая геометрия и геометрия Лобачевского.

В течение XX века положение Гельмгольца, получившее название *проблема Гельмгольца-Ли*, многократно уточнялось, и были найдены самые различные решения этой проблемы.

Известна *локальная проблема Гельмгольца-Ли*, для которой характерно ограничение сверху на размеры радиусов, по которым совершаются вращения. Это отвечает тому, что человек в своей практической деятельности реально сталкивается только с вращениями тел в пределах области своего проживания. Возможность вращений по большим радиусам – следствие малых вращений, определяющих пространственную геометрию, в которой такие вращения допустимы.

Как показали исследования, нет необходимости фиксировать размерность пространства; она есть следствие определённых топологических свойств сфер. Например, в [38, 40] показано, как конкретное свойство окружностей влечёт двумерность геометрии и конечномерность объемлющего метрического пространства, универсальное накрывающее для которого является либо евклидовым пространством E^n, либо пространством Лобачевского H^n, либо сферой S^n ($n \geq 2$) [58].

2. Представление о том, что Вселенная эволюционирует, связано с законом возрастания энтропии, который традиционно трактуется как переход к хаосу, т.е. переход к полному беспорядку во Вселенной. Это так называемое приближение тепловой смерти Вселенной.

Однако сами мы, люди, а точнее, человеческая цивилизация, являем пример системы, которая, напротив, эволюционирует от беспорядка к порядку, к симметрии. Поэтому вряд ли стоит считать, что энтропия – это мера дезорганизации (беспорядка). Действительно, Реальность есть порождение совокупности индивидуальных сознаний (гл. 17). При созидании Внешнего Мира вначале даётся грубый набросок всего Мира, который постепенно уточняется, затем делается новый более пространственно обширный грубый набросок, включающий проработанные детали прежнего наброска с новым этапом проработки деталей. И так далее.

Поскольку с какого-то этапа «Мир бесконечен», то нарастание энтропии в нём есть сигнал для созидающих Реальность сознаний о том, что количество непрорисованных деталей постоянно увеличивается. Иначе говоря, энтропия – это мера дефицита порядка и симметрии во Вселенной. Увеличение энтропии говорит о том, что Вселенная нуждается в наведении порядка. И чем больше человек её меняет, тем больше приходится приводить всё в порядок (усложнять).

Глава 10

Антигравитация

Общая теория относительности создавалась Эйнштейном как релятивистская теория притяжения (гравитации). Она должна была свести воедино теорию гравитации Ньютона и специальную теорию относительности. В действительности новая теория сумела преодолеть ограниченность, «половинчатость» ньютоновской теории, описав не только притяжение, но и отталкивание.

Тем самым Эйнштейн построил теорию пространства, времени и материи, о необходимости которой писал философ-диалектик Энгельс:

> «Всё учение о тяготении покоится на утверждении, что притяжение есть сущность материи. Это, конечно, неверно. Там, где имеется притяжение, оно должно дополняться отталкиванием. Поэтому уже Гегель вполне правильно заметил, что сущность материи составляет притяжение *и* отталкивание» [172, с.558-559]).

Источником гравитации являются вещество и поля; источником антигравитации – космологическая постоянная и темная энергия. Уравнения Эйнштейна связывают кривизну пространства-времени с материей (вещество и поля, тёмная материя, космологическая постоянная и тёмная энергия). Поэтому кривизна проявляется или как гравитация (притяжения), или как антигравитация (отталкивание).

10.1. Космологическая антигравитация

В 1917 году при построении модели Вселенной Эйнштейн ввел в общую теорию относительности космологическую постоянную. Вселенная, по мнению Эйнштейна, должна была быть статичной и пространственно замкнутой. Для того чтобы получить нужную модель, ему пришлось подправить уравнения гравитационного поля, добавляя к ним член $g_{ik}\Lambda$.

Модифицированные уравнения поля были записаны в следующем виде:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}. \tag{10.1}$$

Присутствие космологической постоянной означало наличие отрицательного давления, сказывающегося на больших расстояниях и *препятствующего гравитационному сжатию материи* во Вселенной. Другими словами, космологическая постоянная означала *наличие антигравитационных сил на больших расстояниях.*

Фактически было обнаружено, что кривизна пространства-времени, которая рассматривалась как геометризация гравитации, физически воспринимаемой только как притяжение, может проявиться как *отталкивание.* Таким образом, подтвердилось утверждение Энгельса о том, что истинная теория материи должно описывать как универсальное и свойство притяжения материи, и свойство отталкивания.

Позже, благодаря статье Фридмана, в которых были найдены нестационарные модели Вселенной с расширяющимся пространством, Эйнштейн отказался от необходимости учитывать космологическую постоянную.

10.1.1. Модель Вселенной Фридмана-Робертсона-Уолкера

Однородная и изотропная Вселенная может быть описана нестационарной (т.е. зависящей от времени) метрикой специального вида, часто называемой метрикой Фридмана-Робертсона-Уокера:

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\ \varphi\ d\varphi^2\right), \quad (10.2)$$

$$K = -1, 0, +1,$$

где постоянная k определяет одну из трех возможных глобальных топологий пространства (плоское, $K = 0$; постоянной положительной кривизны, $K = +1$; постоянной отрицательной кривизны, $K = -1$), а функция $a(t)$ – масштабный фактор – зависящая от времени величина.

Подставляя метрику (10.2) в уравнения Эйнштейна с тензором энергии-импульса для идеальной жидкости в правой части:

$$T_{ik} = (c^2\rho + p)u_u u_k - pg_{ik}, \quad (10.3)$$

получаем *уравнения Фридмана* для эволюции масштабного фактора

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \left(\frac{Kc^2}{a^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (10.4)$$

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad (10.5)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = -5H\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad (10.6)$$

где

$$H \equiv \dot a / a$$

– «постоянная» Хаббла.

10.1.2. Статичная Вселенная Эйнштейна

В случае статичной вселенной, когда $a = const$ и $\Lambda = 0$, имеем $H = \dot{a}/a = 0$, $\ddot{a}/a = 0$ и

$$\rho = -3p = \frac{3k}{8\pi G c^2}. \tag{10.7}$$

Из (10.7) следует, что либо ρ, либо p отрицательно.

Эйнштейн, строя в 1916 году модель статической вселенной, чтобы обеспечить положительность ρ и p, ввёл в уравнения поля космологическую постоянную. Тогда при $p = 0$ и $\Lambda \neq 0$ из уравнений (10.4) (10.5) вытекает, что

$$\rho = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}, \quad \Lambda = \frac{K}{a^2}. \tag{10.8}$$

Поскольку $\rho > 0$, то $\Lambda > 0$. Значит $K = +1$, т.е. пространство является 3-мерной сферой с радиусом $a = 1/\sqrt{\Lambda}$.

Гравитация стремится собрать всё вещество в точку, но Эйнштейн предполагал радиус Вселенной неизменным. Следовательно, космологическая постоянная обеспечивает противодействие притяжению и действует как антигравитация.

10.2. Антигравитация на малых расстояниях

10.2.1. Гильбертово отталкивание

В 1917 году Гильберт сделал выдающееся открытие – он обнаружил *гравитационное отталкивание* в поле Шварцшильда [234, 235, 236, 237]. Удивительно, но об этом никогда не упоминается в многочисленных учебниках по общей теории относительности.

Радиальная компонента уравнений геодезических в пространстве-времени Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \tag{10.9}$$

$$m = GM/c^2,$$

имеет вид ($\alpha = 2m$):

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r(r-\alpha)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha(r-\alpha)}{2r^3} = 0. \tag{10.10}$$

Запишем первый интеграл:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^2 + A\left(\frac{r-\alpha}{r}\right)^3, \tag{10.11}$$

где константа A отрицательна для массивной пробной частицы и равна нулю для фотона.

Уравнение (10.10) показывает, что радиальное ускорение либо отрицательно, либо положительно. Другими словами, гравитация (кривизна) действует либо как притяжение к центру, либо как отталкивание от центра, в зависимости от абсолютной величины скорости частицы.

Если

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| < \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r}, \tag{10.12}$$

то имеет место притяжение, а если

$$\left|\frac{dr}{dt}\right| > \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{r-\alpha}{r} \tag{10.13}$$

– наблюдается *отталкивание.*

10.2.2. Переход притяжения в отталкивание

Рассмотрим метрику

$$\begin{aligned} g_{00}(a) &= \quad 1 + \frac{1}{6}(\varkappa c^2\rho_2 a - 2\Lambda_1)ar^2, \\ g_{11}(a) &= -\left[1 - \frac{(\varkappa c^2\rho_2 a + \Lambda_1)}{3}\cdot r^2 a\right]^{-1}, \\ g_{22}(a) &= -r^2, \quad g_{33}(a) = -r^2\sin^2\theta, \end{aligned} \tag{10.14}$$

зависящую от параметра $a \in \mathbb{R}$ $(\varkappa, \rho_2, \Lambda_1 = const)$. Гравитационную силу, действующую на пробное тело в данном пространстве-времени, можно вычислить по формуле [113, с.327]:

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left\{-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\ln\sqrt{g_{00}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{g_{00}}\left[\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}}\right)-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{g_{0\beta}}{g_{00}}\right)\right]\frac{v^\beta}{c}\right\}.$$

Имеем

$$f_r = -\frac{mc^2}{6\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{\left[\varkappa c^2\rho_2 a - 2\Lambda_1\right]ar}{\left[1+\dfrac{1}{6}(\varkappa c^2\rho_2 a - 2\Lambda_1)ar^2\right]},$$

$$f_\varphi = f_\theta = 0.$$

В этом случае очевидно, что можно подобрать функции $\Lambda = \Lambda_1 a, \rho = \rho_2 a^2$ так, что $\rho_2 > 0$, а f_r меняет знак в точках $a = 0$ и $a = 2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2)$ внутри обширной пространственной области с радиусом $r < c\sqrt{6\varkappa\rho_2}/|\Lambda_1|$, [1] т.е. притяжение к центру $r = 0$ заменяется отталкиванием от центра $r = 0$.

При переходе через $a = 0$ меняет знак «космологическая постоянная» Λ, и наблюдаемую смену гравитации на антигравитацию можно расценивать как проявление космологического отталкивания. Но при переходе через точку $a = 2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2)$ «космологическая постоянная» сохраняет знак, а значит, мы имеем иной тип антигравитации.

Если $r > c\sqrt{6\varkappa\rho_2}/|\Lambda_1|$, то знаменатель выражения для f_r остается положительным при

$$a > a_+(r) = \frac{1}{\varkappa c^2\rho_2}[\Lambda_1 + \sqrt{\Lambda_1^2 - (6\varkappa c^2\rho_2/r^2)}]$$

[1] Неравенство получено как условие положительности знаменателя в формуле для f_r при любом a.

или
$$a < a_(r) = \frac{1}{\varkappa c^2 \rho_2}[\Lambda_1 - \sqrt{\Lambda_1^2 - (6\varkappa c^2\rho_2/r^2)}].$$

При $\Lambda_1 > 0$ имеем $a_+(r) < 2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2)$. Следовательно, для любого $r > c\sqrt{6\varkappa\rho_2}/\Lambda_1$ параметр a, изменясь в некотором (достаточно малом) интервале

$$(2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2) - \varepsilon(r), 2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2) + \varepsilon(r)),$$

изменит знак величины f_r, меняя тем самым притяжение на отталкивание.

При $\Lambda_1 < 0$ имеем $2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2) < a_-(r)$. Следовательно, для любого $r > c\sqrt{6\varkappa\rho_2}/\Lambda_1$ параметр a, изменясь в том же интервале, также поменяет знак гравитационной силы.

Параметр a можно рассматривать как 5-ю координату и, следовательно, метрика (19.31) – это метрика 4-мерной браны в 5-мерном балке. Получаем, что при смене браны по мере продвижения в 5-мерном балке гравитация заменяется на антигравитацию.

10.3. Speculatio

1. Космологическая постоянная – это однородно распределённая энергия, «современный отголосок старого и дискредитированного понятия «эфир», который заполняет всё пространство» (Б. Грин, [31, с.12]).

2. Антигравитация – это вечная мечта-идея-фантазия человека о возможности летать как птица. ОТО, как показал Гильберт, воплотила эту мечту. Ньютоновская теория гравитации также предоставляет подобную возможность, если допустить существование отрицательных масс [2].

[2] Bondi H. Negative mass in general relativity // Rev. Mod. Phys. 1957. V.29, P.423.

Глава 11

Духи и теневые частицы Дойча

Динамика самогравитирующей спинорной материи в рамках общей теории относительности (ОТО) описывается системой уравнений Эйнштейна-Дирака

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ik}(\psi), \tag{11.1}$$

$$i\hbar\gamma^k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \Gamma_k\psi\right) - mc\psi = 0, \tag{11.2}$$

где ψ – биспинор,

$$T_{ik}(\psi) =$$

$$= \frac{i\hbar c}{4}\left\{\psi^*\gamma^{(0)}\gamma_i\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \Gamma_k\psi\right) - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\gamma^{(0)} + \psi^*\gamma^{(0)}\Gamma_k\right)\gamma_i\psi + \right.$$

$$\left. +\psi^*\gamma^{(0)}\gamma_k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i} - \Gamma_i\psi\right) - \left(\frac{\partial\psi^*}{\partial x^i}\gamma^{(0)} + \psi^*\gamma^{(0)}\Gamma_i\right)\gamma_k\psi\right\} \tag{11.3}$$

– тензор энергии-импульса спинорного поля (символ $*$ у ψ обозначает эрмитово-сопряженную величину) [15, с.381].

Далее

$$\Gamma_k = \frac{1}{4} g_{ml} \left(\frac{\partial \lambda_r^{(s)}}{\partial x^k} \lambda^l_{(s)} - \Gamma^l_{rk} \right) s^{mr},$$

$$s^{mr} = \frac{1}{2}(\gamma^m \gamma^r - \gamma^r \gamma^m), \quad \gamma^k = \lambda^k_{(l)} \gamma^{(l)}, \tag{11.4}$$

где $\lambda^k_{(i)}$ – i-й вектор тетрады; $\gamma^{(k)}$ – матрицы Дирака.

Напомним, что малые латинские буквы в качестве индексов принимают значения 0, 1, 2, 3, а греческие – 1, 2, 3.

Изучение различных решений уравнений Эйнштейна-Дирака позволяет находить ответы на самые разнообразные вопросы. Нас будет интересовать гравитационное излучение нейтрино ($m = 0$), *нейтринные* и *спинорные духи*.

Под *духами* понимаются решения с нулевым тензором энергии-импульса $T_{ik}(\psi)$. Много таких решений было найдено в 1970-80 годы [37, 289, 290]. Однако они не были физически проинтерпретированы, и о них забыли. В XXI веке духи удалось связать с так называемыми теневыми частицами Дойча [84]. Духи – это частицы из параллельной эвереттовской вселенной, которые способны вступать во взаимодействие с обычными частицами посредством квантовой интерференции.

11.1. Гравитационное излучение нейтринного потока

Мы будем рассматривать лишь нейтринные поля, т.е. в уравнении (11.2) примем $m = 0$. Предположим, что нейтринное поле является плоским и распространяется в положительном направлении оси x, а создаваемое им гравитационное поле является волновым. Поскольку метрика g_{ik} при этом должна описывать поле плоских гравитационных волн, распространяющихся также вдоль оси x, то её удобно взять в следующем виде [149, с.292]:

$$ds^2 = 2dx^0 dx^1 - \exp[2P(x^0)] dx^{2^2} - \exp[2Q(x^0)] dx^{3^2}, \tag{11.5}$$

где координаты x^0, x^1, x^2, x^3 связаны с координатами x, y, z и временем t соотношениями

$$x^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct - x), \quad x^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ct + x), \quad x^2 = y, \quad x^3 = z.$$

Мы выбираем следующую тетраду:

$$\lambda^i_{(0)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right), \quad \lambda^i_{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right),$$

$$\lambda^i_{(2)} = (0, 0, e^{-P}, 0), \quad \lambda^i_{(3)} = (0, 0, 0, e^{-Q}),$$

и γ-матрицы Дирака:

$$\gamma^{(0)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{(\alpha)} \\ -\sigma_{(\alpha)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полагаем, что ψ зависит лишь от x^0 и

$$\psi = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Производя несложные вычисления по формулам (11.3), (11.4), получаем (штрих означает дифференцирование по x^0):

$$\Gamma_0 = \Gamma_1 = 0, \quad \Gamma_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} P' e^P \begin{pmatrix} -i\sigma_{(3)} & \sigma_{(2)} \\ \sigma_{(2)} & -i\sigma_{(3)} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} Q' e^Q \begin{pmatrix} i\sigma_{(2)} & \sigma_{(3)} \\ \sigma_{(3)} & i\sigma_{(2)} \end{pmatrix},$$

$$T_{00} = \frac{i\hbar c}{2\sqrt{2}} \{(u_0^* - u_3^*)(u_0' - u_3') + (u_1^* - u_2^*)(u_1' - u_2') -$$

$$-[(u_0^*)' - (u_3^*)'](u_0 - u_3)] - [(u_1^*)' - (u_2^*)'](u_1 - u_2)]\},$$

$$T_{01} = \frac{i\hbar c}{4}\{(u_0^* + u_3^*)(u_0' + u_3') + (u_1^* + u_2^*)(u_1' + u_2')-$$

$$-[(u_0^*)' + (u_3^*)'](u_0 + u_3)] - [(u_1^*)' + (u_2^*)'](u_1 + u_2)]\},$$

$$T_{02} = -\frac{\hbar c}{4}\left\{\frac{1}{2}P' \quad e^P[-(u_0^* - u_3^*)(u_0 + u_3) + (u_1^* - u_2^*)(u_1 + u_2)-\right.$$

$$-(u_0^* + u_3^*)(u_0 - u_3)] + (u_1^* + u_2^*)(u_1 - u_2)]+$$

$$+e^P[u_0^* u_3' - u_1^* u_2' + u_2^* u_1' - u_3^* u_0' - (u_0^*)' u_3 + (u_1^*)' u_2-$$

$$\left.-(u_2^*)' u_1 + (u_3^*)' u_0]\right\},$$

$$T_{03} = \frac{i\hbar c}{4}\left\{\frac{1}{2}Q' e^Q[(u_0^* - u_3^*)(u_1 + u_2) - (u_1^* - u_2^*)(u_0 + u_3)+\right.$$

$$+(u_0^* + u_3^*)(u_1 - u_2)] - (u_1^* + u_2^*)(u_0 - u_3)]-$$

$$-e^Q[u_0^* u_2' - u_1^* u_3' - u_3^* u_1' - (u_0^*)' u_2 + (u_1^*)' u_3-$$

$$\left.-(u_2^*)' u_0 + (u_3^*)' u_1]\right\},$$

$$T_{23} = \frac{\hbar c}{4\sqrt{2}}(Q' - P')e^{P+Q}[(u_0^* + u_3^*)(u_1 + u_2) + (u_1^* + u_2^*)(u_0 + u_3)].$$

Система уравнений Эйнштейна-Дирака (11.1), (11.2) примет вид

$$\left\{\begin{array}{l} -R_{00} = P'' + Q'' + (P')^2 + (Q')^2 = -\dfrac{8\pi G}{c^4}T_{00} \\ T_{0\alpha} = 0 \\ T_{\alpha\beta} = 0 \\ 2(u_0' + u_3') - (P' + Q')(u_0 + u_3) = 0 \\ 2(u_1' + u_2') - (P' + Q')(u_1 + u_2) = 0. \end{array}\right. \tag{11.6}$$

В общем случае решение системы (11.6) не существует. Однако при дополнительном предположении о виде волновой функции ψ система (11.6) сводится к одному единственному уравнению. Предположим, что биспинор ψ удовлетворяет условиям

$$u_0 + u_3 = 0, \quad u_1 + u_2 = 0, \quad u_0 = A + iB, \quad u_1 = C + iD. \tag{11.7}$$

Отсюда видно, что обращаются в нуль компоненты $T_{0\alpha}, T_{\alpha\beta}$ и, значит, (11.6) сводится к одному дифференциальному нелинейному уравнению:

$$P''+Q''+(P')^2+(Q')^2 = \frac{1}{2}\kappa[(AB'-A'B)+(CD'-C'D)], \quad (11.8)$$

где

$$\kappa = \frac{32\sqrt{\pi}G\hbar}{c^3}.$$

Если нам известна волновая функция ψ, то соответствующее нейтринному потоку гравитационное поле g_{ik} находится посредством интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения (11.8).

Функции P и Q определяют два различных состояния поляризации гравитационной волны, поэтому, задав Q, мы из (11.8) найдем P, т.е. определим гравитационную волну с вполне определённой поляризацией. Действительно, пусть Q нам известна. Положим $P = \ln\ y(x^0)$. Тогда (11.8) сводится к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$y'' = F(x^0)y, \quad (11.9)$$

где

$$F(x^0) = \kappa[(AB' - A'B) + (CD' - C'D)] - (Q')^2 - Q''.$$

Как известно из теории дифференциальных уравнений [150, с.75-76], задача Коши для (11.9) однозначно разрешима (правда, разрешимость в квадратурах возможна лишь в частных случаях) для любой непрерывной функции $F(x^0)$. Таким образом, мы получаем целый класс решений уравнений Эйнштейна-Дирака (11.1), (11.2).

Метрика (11.5) всегда может быть интерпретирована как гравитационное излучение нейтринного потока, распространяющегося вдоль оси x. В самом деле, если g_{ik} не соответствует пустому 3-пространству, то $P''+Q''+(P')^2+(Q')^2 \neq 0$. Значит, задав функции P и Q, мы из уравнения (11.8) можем найти соответствующую волновую функцию ψ.

11.1.1. Учет поляризации нейтрино

Как известно, нейтрино обладает строго определённой продольной поляризацией (нейтрино имеет спиральность, равную -1, антинейтрино $+1$). Математически это выражается в том, что волновая функция ψ допустимых состояний должна удовлетворять условию [15, с.394]:

$$(I - i\gamma_5)\psi = 0, \tag{11.10}$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!\sqrt{-g}}\varepsilon^{iklm}\gamma_i\gamma_k\gamma_m\gamma_l.$$

Так как (11.10) эквивалентно равенствам

$$u_0 + u_2 = 0, \quad u_1 + u_3 = 0, \tag{11.11}$$

то рассматриваемые нами волновые функции (11.7) являются допустимыми; само же условие (11.7) фиксирует знак энергии, т.е. определяет частицу либо античастицу.

Из (11.7), (11.11) следует, что $A = C$, $B = D$, т.е. (11.8) принимает вид:

$$P'' + Q'' + (P')^2 + (Q')^2 = \kappa(AB' - A'B). \tag{11.12}$$

11.1.2. Решения специального вида

Уравнения (11.12), (11.9) тесно связаны с уравнением Риккати, общее решение которого не выражается в квадратурах. Следовательно, для того, чтобы указать класс решений уравнения (11.12), мы должны как-то заранее задавать функцию Q (т.е. фиксировать поляризацию гравитационной волны) и волновую функцию ψ или функции A и B. При этом будем получать конкретные дифференциальные уравнения, сведения о которых собраны в [98]. Тем не менее можно указать целые классы различных решений уравнения (11.12). Некоторые из них мы сейчас укажем.

1. Предположим, что мы имеем дело с единственной частицей (античастицей), находящейся в состоянии с определённым

импульсом. Тогда, как следует из (11.7), (11.11), её волновая функция определяется однозначно и имеет вид

$$\psi(x^0) = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{ix^0}. \tag{11.13}$$

Примем $Q = P$ и $P = \ln\ y(x^0)$. Тогда, подставляя (11.13) в (11.12), получим $y'' = y$, т.е. $P(x^0) = Q(x^0) = \ln\ (C_1 e^{x^0} + C_2 e^{-x^0})$.

2. Предположим, что волновая функция $\psi(x^0)$ нам известна. Допустим, $P'' = -Q''$ или

$$Q(x^0) = -P(x^0) + c_1 x^0 + c_2. \tag{11.14}$$

Тогда (11.12) примет вид

$$(P')^2 + (-P' + c_1)^2 = \kappa(AB' - A'B). \tag{11.15}$$

Из (11.15) получаем следующее решение:

$$P(x^0) = \frac{c_1}{2} x^0 \pm \frac{1}{2} \int \sqrt{2\kappa(AB' - A'B) - c_1^2}\, dx^0 + c_3. \tag{11.16}$$

Гравитационная волна (11.14), (11.16) является достаточно полным решением поставленной в этой статье задачи, поскольку по произвольной волновой функции ψ мы нашли порождаемое ею поле тяготения.

11.2. Нейтринные духи

Пусть теперь $A = C$ и $B = D$ и $AB' = A'B$. В силу сказанного в конце параграфов §§ 11.1, 11.1.1, это означает, что тензор энергии-импульса нейтринного поля равен тождественно нулю.

При этом, однако, плотность нейтринного тока отлична от нуля:

$$j^{(k)} = \{4(A^2 + B^2), -4(A^2 + B^2), 0, 0\},$$

$$j^{(k)} = \lambda_i^{(k)} \psi^+ \gamma^i \psi.$$

В подобном случае говорят о *нейтринном духе* [289, 290]. Поле тяготения при этом может иметь тип N по Петрову (например, пространство максимальной подвижности T_2).

В [289] поле с плоской симметрией и нейтринным духом, в отличие от нашего, принадлежит к типу D, т.е. не имеет волновой структуры.

Заметим, что нейтринные духи возможны и в плоском пространстве-времени Минковского. Это следует из того, что в наших рассуждениях функции P и Q могут быть константами.

11.3. Спинорные духи

Нейтринные духи не создают гравитационного поля, поскольку их тензор энергии-импульса равен тождественно нулю. Существуют и массивные духи, т.е. решения уравнений Дирака с массой покоя $m \neq 0$. Их называют *спинорными духами*, и их существование нарушает универсальность принципа, согласно которому всё, что имеет массу, порождает гравитационное поле.

Исследованию спинорных духов, а также получению физической интерпретации соответствующих спинорных полей была посвящена кандидатская диссертация Е.В. Палешевой ([137], Омск, ОмГУ, 2004). Было, например, обнаружено, что, хотя спинорный дух не обладает ни энергией, ни импульсом, он способен взаимодействовать с обычной спинорной частицей.

11.3.1. Спинорные духи в пространстве-времени Минковского

Определение 11.1. *Спинорными духами* будем называть решения ψ уравнения Дирака

$$i\hbar\gamma^k \overrightarrow{\nabla}_k \psi = mc\psi,$$

для которых тензор энергии-импульса

$$T_{ik} = \frac{i\hbar c}{4}\left(\psi^+\gamma_i\overrightarrow{\nabla}_k\psi - \overleftarrow{\nabla}_k\psi^+\gamma_i\psi + \psi^+\gamma_k\overrightarrow{\nabla}_i\psi - \overleftarrow{\nabla}_i\psi^+\gamma_k\psi\right)$$

всюду равен нулю, причем плотность тока

$$j^k = c\psi^+\gamma^k\psi \tag{11.17}$$

отлична от нуля.

Здесь

$$\psi^+ = \psi^*\gamma^{(0)}$$

$$\overrightarrow{\nabla}_k\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \Gamma_k\psi,$$
$$\overleftarrow{\nabla}_k\psi^+ = \frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \psi^+\Gamma_k.$$

Теорема 11.1 (Е.В. Палешева). *Пусть $\psi = u\cdot G(x)$ – решение уравнения Дирака в пространстве-времени Минковского, где u – постоянный спинор, удовлетворяющее условию $\psi^*\psi \neq 0$, а*

$$G(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + i\cdot g(\mathbf{x}), \tag{11.18}$$

при этом $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ – гладкие вещественные функции, а

$$u = \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

причем $u_i \in \mathbb{R}$ для каждого i. В рассмотренных условиях ψ является спинорным духом тогда и только тогда, когда $g(\mathbf{x}) = a\cdot f(\mathbf{x})$, где $a = const \in \mathbb{R}$ [136].

Следствие 11.1 (Е.В.Палешева). *Если в условиях теоремы 9.1 положить*

$$G(\mathbf{x}) = e^{\alpha(\mathbf{x})+i\beta(\mathbf{x})},$$

где $\alpha(\mathbf{x})$ и $\beta(\mathbf{x})$ — гладкие вещественные функции, то ψ является спинорным духом тогда и только тогда, когда $\beta(\mathbf{x}) = const \in \mathbb{R}$.

Пример 11.1. Возьмем решение уравнения Дирака в пространстве-времени Минковского в следующем виде:

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar}x^2 + f(x^0+x^3) + ig(x^0+x^3)} \tag{11.19}$$

где $g(x^0 + x^3)$ и $f(x^0 + x^3)$ — гладкие вещественные функции.

Опираясь на результаты следствия 11.1, получаем, что (11.19) описывает спинорный дух только в том случае, когда $g(x^0 + x^3) = const \in \mathbb{R}$. При этом, используя формулу (11.17) для вычисления дираковского тока, а также учитывая, что в пространстве-времени Минковского $\gamma^k = \gamma^{(k)}$, получим

$$j^k = \left(4c \cdot e^{\frac{2mc}{\hbar}x^2 + 2f(x^0+x^3)}, 0, 0, -4c \cdot e^{\frac{2mc}{\hbar}x^2 + 2f(x^0+x^3)}\right).$$

11.3.2. Спинорные духи в искривленном пространстве-времени

Спинорный дух, перемещаясь в искривленном пространстве-времени, не вносит вклада в кривизну, но его движение в пространстве согласуется с априорной кривизной пространстве-времени.

Теорема 11.2 (Е.В. Палешева). *Пусть решение уравнения Дирака определяется условием*

$$\overrightarrow{\nabla}_k \psi = g_k(\mathbf{x})\psi,$$

выполненным для любого k, где $g_k(\mathbf{x})$ — некоторые функции, а решение ψ удовлетворяет условию $\psi^*\psi \neq 0$. Тогда ψ будет спинорным духом в том и только в том случае, когда $g_k(\mathbf{x})$ будут вещественными функциями, удовлетворяющими условию $g_k(\mathbf{x})j^k = 0$ [137].

11.4. Спинорные духи как теневые частицы Дойча

Английский ученый Дэвид Дойч ввел в теорию *теневые частицы* для объяснения известного эксперимента по интерференции электрона на двух щелях (см. рис. 11.1), основанного на эвереттовской интерпретации квантовой механики [84].

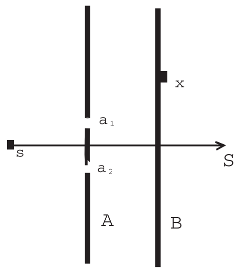

Рис. 11.1: Опыт по интерференции на двух щелях.

В начале эксперимента частица находится в точке s, на экране B в точке x установлен детектор, фиксирующий попадание электрона в данную область экрана. На экране A расположены две щели a_1 и a_2, симметричные относительно оси S, вдоль которой происходит распространение волны. Нас интересует распределение частиц на экране B. Для того чтобы исключить влияние на результат эксперимента столкновений между частицами, будем испускать электроны по одному и с достаточно большим интервалом между двумя излучениями. Как известно, в таких случаях интерференционная картина такая же, как и при излучении потока электронов. Соответствующее распределение интенсивности представляет собой чередование максимумов и минимумов (см. рис. 11.2).

Если же теперь мы закроем одну из щелей, например щель a_1, то интенсивность попадания электрона на экран B будет иметь нормальное распределение. Заметим, что в нашем случае электроны испускаются по одному, и поэтому картину рас-

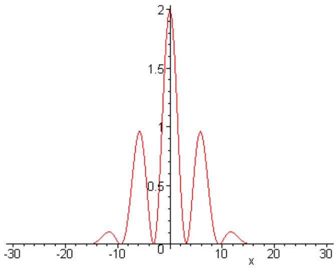

Рис. 11.2: Распределение интенсивности электрона в эксперименте по интерференции на двух щелях.

пределения интенсивности их фиксирования на экране B, данную на рис. 11.2, нельзя объяснить столкновением одного электрона с другим.

Стандартное объяснение, принятое в современной физике, постулирует наличие волновых свойств у электронов.

Дэвид Дойч предположил, что кроме *реальных* частиц, фиксируемых нашими приборами, существуют еще и *теневые* частицы, которые мы не можем никак зафиксировать, но столкновение с которыми испускаемых электронов и дало картину распределения интенсивности, приведенную на рис. 11.2.

Теневые частицы он отождествляет с частицами из параллельных эвереттовских вселенных, а окружающую нас Реальность представил как *мультиверс*, т.е. как совокупность всевозможных вселенных, взаимодействующих посредством квантовой интерференции.

Каждая реальная частица имеет множество *собственных* теневых частиц. *Собственная* теневая частица – это частица, «идентичная» реальной, но находящаяся в некоторой другой вселенной, отличной от нашей. При этом теневые частицы проявляются в реальной вселенной только тем, что взаимодействуют с собственными реальными частицами, и именно этим взаимодействием вызвано появление соответствующих интерференционных картин. Точнее говоря, рассматриваемое взаимодействие является столкновением реальной частицы с собственными теневыми частицами.

В описанном выше эксперименте (см. рис. 11.1) источник s испускает ровно один реальный электрон, при этом некоторый теневой источник s также испускает ровно один электрон – теневой.

Пусть соответствующие реальный и теневой электроны таковы, что реальный электрон проходит через щель a_1, а теневой проходит через щель a_2. За экраном A «столкновение» электронов вызывает изменение «траектории» движения реального электрона. Именно таким взаимодействием объясняется получаемое распределение частиц на экране B.

Е.В. Палешева высказала гипотезу, что *спинорные духи являются теоретической моделью теневых частиц Дойча со спином* 1/2.

В подтверждение этого она продемонстрировала, что спинорный дух (теневая частица) и обычная частица могут взаимодействовать так, что можно наблюдать интерференционную картину.

Рассмотрим спинорное поле с ненулевым тензором энергии-импульса

$$\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar}x^2 + i(x^0 + x^3)} \tag{11.20}$$

и спинорный дух

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{\frac{mc}{\hbar}x^2}. \tag{11.21}$$

Спиноры (11.20) и (11.21) имеют одинаковый 4-вектор тока

$$j^k = (4e^{\frac{mc}{\hbar}x^2}, 0, 0, -4e^{\frac{mc}{\hbar}x^2}).$$

Так как оба решения имеют одинаковое распределение вероятности и одинаковое направление тока, то мы можем посчитать их результирующее поле при наложении этих полей.

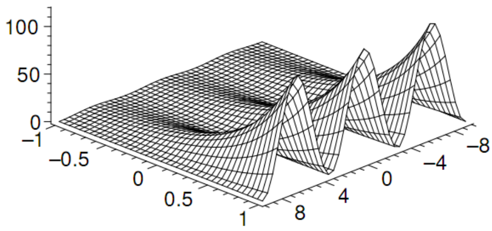

Рис. 11.3: Интенсивность распределения квадрата модуля амплитуды вероятности при интерференции спинорного духа и реальной частицы при $x^0 = 0$.

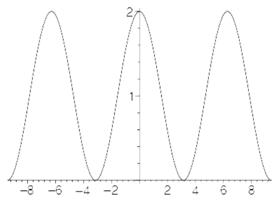

Рис. 11.4: Интенсивность распределения квадрата модуля амплитуды вероятности при интерференции спинорного духа и реальной частицы в точке $8e^{2\frac{mc}{\hbar}x^2} = 1,\ x^0 = 0$.

Квадрат модуля амплитуды вероятности результирующего поля $(\psi + \theta)$ равен

$$|\psi + \theta|^2 = (\psi + \theta)^*(\psi + \theta) = 8e^{2\frac{mc}{\hbar}x^2}(1 + \cos(x^0 + x^3)). \quad (11.22)$$

График этой функции при $x^0 = 0$ имеет вид, представленный на (рис.11.3).

При фиксированных x^0 и x^2 получим следующую интерференционную картину, представленную на рис. 11.4.

Таким образом, при наложении двух спинорных полей, одно из которых является спинорным духом, может наблюдаться такое явление, как интерференция.

11.5. Speculatio

1. Можно ли как-то объяснить появление в нашей вселенной теневых частиц, или спинорных духов из параллельных вселенных?

Если под параллельными вселенными понимать экзотические гладкие структуры на $\mathbb{R}^4$, то можно воспользоваться тем, что говорилось в § 4.3.2 о появлении в $\mathbb{R}^4_{\text{экз}}$, благодаря экзотичности гладкой структуры, спинорного источника:

$$S_{\mathbb{R}^4_{\text{экз}}} = \int\limits_{\mathbb{R}^4_{\text{экз}} \setminus CH} [R_{\mathbb{R}^4} + \psi\gamma^k D_k\overline{\psi}]\sqrt{g_{\mathbb{R}^4}}d^4x.$$

Является ли такой подход правильным – сказать трудно, но появляется идея, во-первых, описать, что следует понимать под параллельными мирами, о которых писал Дойч, и, во-вторых, показать, как в этих параллельных мирах (вселенных) появляются теневые частицы, являющиеся спинорными духами.

2. «Выходов (входов) в другие миры (а это значит и в другие времена) бесконечно много. Среди этих миров есть и близкие и далекие (необозримый спектр: от почти неразличимых до «противоположных», т.е. совсем других). Это очевидно и связано с тем, что любой мир – это мир объектов, а значит, он зависит от выбора системы координат наблюдателя (человека, цивилизации и многих других наблюдателей между данными и вне них». (А.Д. Егоров, И.Д. Егоров, [88, с.428]).

Выход в параллельный мир другой гладкой структуры можно, видимо, осуществить с помощью разрыва пространства (§ 6.1.2), при котором производные метрики $h_{\alpha\beta}$ теряют непрерывность, и это может означать смену гладкости.

Глава 12

Гравитационная волна как защитный экран

Гравитационные волны обладают многими свойствами, отличными, к примеру, от электромагнитных волн. В этой главе продемонстрируем экранирующие свойства, отражающие возможности гравитационных волн.

Первой опубликованной работой, демонстрирующей экранирующие свойства гравитационных волн по отношению к падающим электромагнитным волнам, была статья Ю.Г. Сбытова (1972, [147]).

Разные случаи столкновения и взаимодействия гравитационных и электромагнитных волн подробно исследовал В.Ф. Панов [271, 272, 273].

Отражение нейтрино от пересовской гравитационной волны изучал С.А. Сошников (1982, [151]), скалярных частиц – А.К. Гуц (1983, [44]). Столкновение гравитационной волны и скалярных волн рассматривал также Wu Zhong Chao (1982, [306]).

Столкновение двух гравитационных волн впервые исследовал P. Szekeres (1970, [288]), и этому теоретически возможному явлению посвящена книга J.B. Griffiths [215].

12.1. Отражение электромагнитных волн

Покажем, что плоская электромагнитная волна, столкнувшись с гравитационным волновым пакетом, сначала проникает за передний фронт распространения пакета, а затем меняет направление распространения на противоположное, т. е. отражается (Ю. Сбытов, [147]).

12.1.1. Описание гравитационного волнового пакета

Используем формализм оптических реперов. В каждой точке пространства-времени берётся репер, состоящий из двух действительных векторов k^i, m^i и одного комплексного t^i:

$$k_i k^i = m_i m^i = 0,\ k_i m^i = 1,$$

$$t_i t^i = t_i k^i = t_i m^i = 0, \quad t_i \bar{t}^i = -1,$$

для которого метрика записывается в виде

$$g_{ik} = 2k_{(i}m_{k)} - 2t_{(i}\bar{t}_{k)}.$$

Пусть электромагнитная волна с фронтом v идет навстречу гравитационному волновому пакету с фронтом u. Фазы u, v – аналоги запаздывающего и опережающего потенциалов.

Берём

$$k_i = \frac{\partial u}{\partial x^i}, \quad m_i = \frac{\partial v}{\partial x^i}.$$

Гравитационный пакет – это искривлённая область пространства-времени $\Omega_1 = \{u_1 < u < u_2\}$. Рассматриваем также плоские области $\Omega_0 = \{u < u_1\}$ и $\Omega_2 = \{u_2 < u\}$.

Выбираем следующую локальную карту $x^0 = u, x^1 = v$ и в области Ω_0 репер

$$k^k = \delta_1^k,\ m^k = \delta_0^k,\ t^k = 2^{-1/2}(\delta_2^i + i\delta_3^k),$$

$$ds^2 = 2dudv - dx^{2^2} - d^{3^2},$$

а в области Ω_1 –

$$k^k = \delta_1^k, \ m^k = \delta_0^k + Q_2\delta_2^k + Q_3\delta_3^k, \ t^k = 2^{-1/2}(\delta_2^i + i\delta_3^k),$$

$$Q = Q_2 + iQ_3,$$

$$ds^2 = -Q\overline{Q}du^2 + 2dudv + 2Q_2dudx^2 + 2Q_3dudx^3 - dx^{2^2} - dx^{3^2}.$$

Изучаем гравитационную волну, которая удовлетворяет условию

$$R_{ikml} - iR_{ikml} = \Psi(u)V_{ik}V_{ml},$$

$$V_{ml} = k_m t_l - k_l t_m$$

и для которой расширяющий параметр $\rho = -1/2\nabla_i k^i = 0$, что говорит о плоскости волны

Берётся $\Psi(u) \neq 0$ в Ω_1 и $\Psi(u) = 0$ в Ω_0, Ω_2.

Функция Q находится из уравнений Эйнштейна. Но в данном случае вместо уравнений Эйнштейна рассматриваются уравнения, вытекающие из системы Ньюмена-Пенроуза, эквивалентной уравнениям Эйнштейна:

$$\frac{\partial Q}{\partial \overline{z}} = \overline{\lambda}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \mu, \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\lambda}{\partial u} + Q\frac{\partial\lambda}{\partial z} + \overline{Q}\frac{\partial\lambda}{\partial\overline{z}} &= -2\mu\lambda + \frac{1}{2}\Psi, \\ \frac{\partial\mu}{\partial u} + Q\frac{\partial\mu}{\partial z} + \overline{Q}\frac{\partial\mu}{\partial\overline{z}} &= -\mu^2 - \lambda\overline{\lambda}, \end{aligned} \tag{12.2}$$

где

$$\mu = \overline{\mu} = -\nabla_l m_k t^k \overline{t}^l, \ \lambda = -\nabla_l m_k \overline{t}^k \overline{t}^l,$$

$$z = x^2 + ix^3, \quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x^3}\right).$$

Начальное условие для этих уравнений имеет вид:

$$\text{при} \ \ u \le u_1 \quad \mu = \lambda = Q = 0. \tag{12.3}$$

Так как $\Psi = \Psi(u)$, то при начальных условиях (12.3) функции μ, λ будут зависеть только от u, и систему (12.2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial u} &= -2\mu\lambda + \frac{1}{2}\Psi, \\ \frac{\partial \mu}{\partial u} &= -\mu^2 - \lambda\overline{\lambda}, \end{aligned} \tag{12.4}$$

Из уравнения (12.1) следует, что

$$Q = \overline{\lambda}(u)\overline{z} + \mu(u)z + q(u). \tag{12.5}$$

С помощь преобразования координат

$$z' = z - a(u),$$

где

$$\frac{da}{du} = \mu a + \overline{\lambda}\overline{a} + q,$$

можно обратить функцию q в нуль. Будем поэтому считать, что $q \equiv 0$.

12.1.2. Отражение электромагнитных волн

Электромагнитное поле можно представить в виде следующего разложения:

$$F_{kj} - iF^*_{kj} = F_1 V_{kj} + F_2 U_{kj} + F_3 W_{kj},$$

где

$$V_{kj} = k_k t_j - k_j t_k,\ U_{kj} = m_k \bar{t}_j - m_j \bar{t}_k,\ \ W_{kj} = k_k m_j - k_j m_k - t_k \bar{t}_j + t_j \bar{t}_k.$$

Уравнения Максвелла $\nabla_j(F^{kj} - iF^{*kj}) = 0$ в репере (k^j, m^j, t^j) принимают вид:

$$
\begin{gathered}
2^{1/2}\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial v} = 0, \\
2^{1/2}\frac{\partial F_1}{\partial \overline{z}} + Q\frac{\partial F_3}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial u} + \overline{Q}\frac{\partial F_3}{\partial \overline{z}} + 2\mu F_3 = 0, \\
\frac{\partial F_2}{\partial u} + Q\frac{\partial F_2}{\partial z} + \overline{Q}\frac{\partial F_2}{\partial \overline{z}} - 2^{1/2}\frac{\partial F_3}{\partial \overline{z}} + \mu F_2 = 0, \\
\frac{\partial F_1}{\partial v} + 2^{1/2}\frac{\partial F_3}{\partial z} - \lambda F_2 = 0.
\end{gathered}
\tag{12.6}
$$

Задача прохождения электромагнитной волны через гравитационный пакет сводится к решению уравнений (12.6) с функциями μ, λ, определяемыми уравнениями (12.5) при $u > u_1$, в то время как при $u \leq u_1$ $\mu = \lambda = 0$. Начальные условия для функций F_1, F_2, F_3 задаются следующим образом:

$$F_1 = F_3 = 0,\ F_2 = f(v) \text{ при } u \leq u_1. \tag{12.7}$$

Из (12.6) и (12.7) находим, что F_α не зависят от x^2, x^3 и

$$F_1 = \lambda(u)\exp\left(-\int\limits_{u_1}^{u}\mu(\xi)d\xi\right)\int\limits_{v_1}^{v} f(x)dx, \tag{12.8}$$

$$F_2 = f(v)\exp\left(-\int\limits_{u_1}^{u}\mu(\xi)d\xi\right), \quad F_3 = 0. \tag{12.9}$$

До столкновения с гравитационной волной электромагнитная волна является изотропным полем, т.е. $F_{kl}F^{kl} = F_{kl}F^{*kl} = 0$, но после попадания в гравитационное поле перестаёт быть таковым.

Вводим тетраду

$$\lambda^i_{(0)} = m^i + (1/2)k^i, \quad \lambda^i_{(1)} = m^i - (1/2)k^i,$$

$$\lambda^j_{(2)} = 2^{-1/2}(t^j + \overline{t}^j), \quad \lambda^j_{(3)} = -i2^{-1/2}(t^j - \overline{t}^j).$$

Плотность потока электромагнитной энергии

$$P_{(\alpha)} = -T_{ik}^{\text{э.м.}} \lambda^i_{(0)} \lambda^i_{(\alpha)},$$

равна

$$P^{(\alpha)} = (P, 0, 0),$$

где

$$P = -\frac{1}{8}|F_2|^2 - \frac{1}{2}|F_1|^2 = \frac{1}{2}\exp\left(\int\limits_{u_1}^{u} \mu(\xi)d\xi\right) \times$$

$$\times \left[\frac{1}{4}|f(v)|^2 - |\lambda(u)|^2 \left|\int\limits_{v_1}^{v} f(x)dx\right|^2\right]. \qquad (12.10)$$

Выражение в квадратных скобках в (12.10) при некотором значении $\widetilde{u}$ ($\widetilde{u} < \overline{u}$) обращается в нуль, а затем становится отрицательным. Это говорит о том, что электромагнитная энергия (волна), соответствующая фазе $v = const$, проникает в гравитационный волновой пакет или за его задний фронт на определённое расстояние. Затем происходит её отражение, и электромагнитная энергия распространяется вслед гравитационной волне.

12.2. Отражение скалярных частиц

Покажем теперь, что экранирующее свойство гравитационной волны распространяется и на поток скалярных частиц.

12.2.1. Плоская гравитационная волна Переса

Рассмотрим столкновение гравитационной волны Переса с распространяющимся скалярным полем.

Метрика Переса удовлетворяет различным критериям гравитационного излучения [92]. Поэтому полученный результат справедлив независимо от того или иного взгляда на природу гравитационных волн. Метрика Переса ещё интересна тем, что в ряде случаев можно указать источник, создающий эти волны [21]. Будем предполагать, что плоская гравитационная волна распространяется в положительном направлении оси x, а скалярная частица движется ей навстречу. Фронт распространения волны задаётся соотношением $x^0 = ct - x = const$, а скалярной волны-частицы $x^1 = (1/\alpha)[ct + (\alpha - 1)x] = const$. Здесь $\alpha \geq 2$ – константа, связанная со скоростью v частицы формулой: $v = c/(\alpha - 1)$.

Метрика Минковского

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

в координатах

$$x^0 = ct - x, \quad x^1 = (1/\alpha)[ct + (\alpha - 1)x], \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

имеет вид:

$$ds^2 = (1 + 2\beta)dx^{0^2} + 2dx^0dx^1 - dx^{2^2} - dx^{3^2}, \tag{12.11}$$

где $\beta = -1/\alpha$.

Будем считать, что часть пространства-времени, которая соответствует движению частицы до момента столкновения, задаётся неравенствами $x^0 \leq 0,\ x^1 \geq 0$, а часть пространства-времени, отвечающая распространению волны до момента столкновения – $x^0 \geq 0,\ x^1 \leq 0$. Столкновение происходит в момент $x^0 = 0$ при $x^1 = 0$. Передний фронт распространения волны Переса описывается уравнением: $x^0 = 0$. Течению времени от прошлого к будущему отвечает увеличение координаты x^0.

Мы пренебрегаем вкладом скалярного поля в кривизну пространства-времени и при $x^0 < 0$ метрику берём в виде (12.11), а при $x^0 \geq 0$ используем метрику Переса:

$$ds^2 = [1+2\beta+f(x^0, x^2, x^3)]dx^{0^2} + 2dx^0dx^1 - dx^{2^2} - dx^{3^2}, \tag{12.12}$$

где

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2^2}} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^{3^2}} = 0 \tag{12.13}$$

(см. [92, с.113]). Выполнение уравнения (12.13) эквивалентно предположению, согласно которому метрика (12.12) удовлетворяет уравнениям Эйнштейна для вакуума $R_{ik} = 0$. Функция f должна не только удовлетворять (12.13), но и выбираться так, чтобы кривизна пространства-времени была ненулевой. А для этого полезно иметь в виду, что

$$R_{2020} = -\frac{2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{2^2}},\ R_{2030} = R_{2023} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial x^3},\ R_{3030} = -\frac{2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^{3^2}}.$$

Предполагаем, что

$$f(0, x^2, x^3) = 0. \tag{12.14}$$

Это условие обеспечивает непрерывную сшивку метрик (12.11) и (12.12).

12.2.2. Отражение скалярных частиц

Уравнение скалярного поля в псевдоримановом многообразии имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}g^{ik}\frac{\partial \psi}{\partial x^k}\right) + \sqrt{-g}\mu^2\psi = 0$$

или

$$\mu^2\psi + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^0 \partial x^1} - (1 + 2\beta + f)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{1^2}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{2^2}} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^{3^2}} = 0, \tag{12.15}$$

где $\mu = mc/\hbar$ ([129, с.127]).

Плотность 3-импульса частицы $P_{(\alpha)}$ (поляризованный поток энергии сквозь единичную площадку за единицу времени) ([149, с.146]) будем вычислять по отношению к следующему ортореперу:

$$\lambda^i_{(0)} = \left(1, -\frac{1}{2}(f + 2\beta), 0, 0\right),$$

$$\lambda^i_{(1)} = \left(-1, \frac{1}{2}(f+2+2\beta), 0, 0\right),$$

$$\lambda^i_{(2)} = (0, 0, 1, 0),$$

$$\lambda^i_{(3)} = (0, 0, 0, 1),$$

где

$$g_{ik}\lambda^i_{(m)}\lambda^k_{(n)} = \eta_{(mn)}$$

и $\eta_{(mn)} = diag\{1, -1, -1, -1\}$ – тензор Минковского.

Тогда

$$P_{(\alpha)} = -T_{ik}\lambda^i_{(0)}\lambda^i_{(\alpha)},$$

где

$$T_{ik} = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}\frac{\partial\psi}{\partial x^k} + \frac{1}{2}g_{ik}\left(\mu^2\psi^2 - g^{mn}\frac{\partial\psi}{\partial x^m}\frac{\partial\psi}{\partial x^n}\right)$$

– тензор энергии-импульса скалярного поля.

Вычисляя, получаем:

$$P_{(1)} = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(1+2\beta+f) - \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]^2 =$$

$$= -\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^0} - \frac{1}{2}(f+2\beta)\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(2+2\beta+f) - \frac{\partial\psi}{\partial x^0}\right],$$

$$P_{(2)} = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^0} - \frac{1}{2}(f+2\beta)\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^2},$$

$$P_{(3)} = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial x^0} - \frac{1}{2}(f+2\beta)\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^3}.$$

Предположим, что все функции $\partial\psi/\partial x^i$ ограничены по переменной x^0; $\partial\psi/\partial x^2, \partial\psi/\partial x^3$ сохраняют знак при любом x^0 и, наконец, $\partial\psi/\partial x^1 \neq 0$, ($\partial\psi/\partial x^1 \neq 0$, так как мы рассматриваем частицу, движущуюся навстречу гравитационной волне). Эти ограничения не являются обременительными и, в общем-то, отвечают реальной физической задаче (см. примеры ниже).

До столкновения $\psi = \psi(x^1, x^2, x^3)$ т.е. не зависит от x^0, $f \equiv 0$, поэтому

$$P_{(1)} = \beta(1+\beta) \cdot \left[\frac{\partial\psi}{\partial x^1}\right]^2 < 0.$$

Если теперь рассматривать $P_{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ как функции от переменной f, то легко заметить, что все они одновременно изменяют знак при одном и том же значении $f = f_0$ по мере изменения $|f|$ от нуля до бесконечности. Но $f = f(x^0, x^2, x^3)$. Поэтому мы можем предположить, что изменение значения f происходит при возрастании переменной x^0 от нуля до бесконечности. Пусть $f_0 = f(x_0^0, x^2, x^3)$, где $x_0^0 > 0$. Таким образом, скалярные частицы, пройдя передний фронт распространения гравитационной волны, не смогут проникнуть за фронт $x^0 = x_0^0$, на котором происходит радикальное изменение направления распространения потока частиц. По существу, происходит отражение потока частиц сильной гравитационной волной. Заметим, что наши рассуждения одинаково справедливы для лобового и не лобового «соударения» полей.

12.2.3. Примеры экранов

1. Рассмотрим безмассовую частицу с $\psi \equiv x^1$, удовлетворяющей перечисленным выше условиям. В этом случае ($\mu = 0$, $\beta = -1/2$)

$$P_{(\alpha)} = \left(\frac{1}{4}f^2 - \frac{1}{4}, 0, 0\right),$$

и отражение происходит тогда, когда имеется $x_0^0 > 0$ такое, что $|f(x_0^0, x^2, x^3)| > 1$.

Возникает вопрос: существует ли такая функция f? Ведь она должна удовлетворять уравнениям (12.13), (12.14) и существенно зависеть от x^2, x^3, так как последнее обеспечивает искривлённость пространства-времени. Нетрудно видеть, что искомая функция может иметь вид

$$f(x^0, x^2, x^3) = x^{0^2} \cdot [1 + \sqrt{x^2 + \sqrt{x^{2^2} + x^{3^2}}}], \quad x_0^0 = 2.$$

Напротив, если взять

$$f(x^0, x^2, x^3) = \frac{1}{\pi}(\sin\ x^0) \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^3}{x^2},$$

то

$$|f(x^0, x^2, x^3)| < 1, \tag{12.16}$$

и отражения не происходит. Этот результат закономерен, ибо неравенство (12.16) указывает на относительную слабость гравитационной волны.

Если взять следующие функции: $f = x^0 x^2 x^3$ или $f = x^0 \ln\ (x^{2^2} + x^{3^2})$, – то в плоскости $x^2 x^3$, ортогональной направлению движения потока частиц, появляются «щели», через которые частицы проходят сквозь волновой гравитационный пакет. В первом случае «щель» описывается уравнением $x^2 x^3 = 0$, а во втором – $x^{2^2} + x^{3^2} = 1$.

2. Рассмотрим массивную частицу. Решением уравнения (12.15) будет функция $\psi(x^1, x^2, x^3) = x^1 \varphi(x^2, x^3)$, где $\varphi(x^2, x^3) \neq 0$ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi = \mu^2 \varphi$. Как видим, $\partial\psi/\partial x^i$ ограничены по x^0, $\partial\psi/\partial x^1 = \varphi \neq 0$. Следовательно, для рассматриваемого решения будет наблюдаться изучаемое нами явление отражения.

Итак, скалярные частицы, столкнувшись с сильной гравитационной волной Переса, обязательно меняют направление своего распространения, и, более того, наблюдается явление, которое мы назвали отражением. Оно заключается в том, что частицы не проникают за некоторый вполне определённый фронт распространения гравитационной волны. Однако в любом случае отражение не происходит на переднем фронте распространения волны.

Глава 13

Тетрадная теория гравитации

В тетрадной теории гравитации (ТТГ) гравитация описывается тетрадным полем $\lambda^i_{(a)}, a = 0, 1, 2, 3$, которое связано с метрическим тензором соотношениями:

$$g^{ik} = \eta^{(ab)}\lambda^i_{(a)}\lambda^k_{(b)},$$

где $\eta^{(ab)} = diag\{+1, -1, -1, -1\}$ – тензор Минковского.

В поисках единой теории гравитации и электромагнетизма Эйнштейн обращался к тетрадной теории [208]. Однако он отказался от неё, поскольку в рассмотренной им теории не было решения Шварцшильда.

Мёллер показал, что невозможно найти удовлетворительное выражение для комплекса энергии-импульса в рамках римановой геометрии [260], т.е. в ОТО, и нашёл удовлетворительное выражение для комплекса энергии-импульса в ТТГ в случае пространства абсолютного параллелизма.

Лагранжева формулировка тетрадной теории гравитации была дана Пеллегрини и Плебаньским [275]. Авторы при этом ограничивались лагранжианами, для которых уравнения, определяющие метрический тензор, должны совпадать с уравнениями Эйнштейна. Мёллер отказался от этого ограничения и допускал лагранжианы, дающие уравнения поля, отличные от эйнштейновых [261]. Для одной из подобных тетрадных теорий гравитации в 2001 году была найдена сферически-симметричная *несингулярная* чёрная дыра, которая как метрическое поле совпадает при больших r с решением Шварцшильда [267].

Тетрадный формализм позволил Фоку и Иваненко (1929, 1930) описать в ОТО фермионы (т.е. электроны, нейтрино, протоны и т.д.). Это было невозможно, как показал Картан (1947), сделать в чисто метрической ОТО [129, с.131]. Иначе говоря, влияние гравитационного поля на фермионное поле материи описывается через тетрадное, а не непосредственно через метрическое поле.

Один из вариантов тетрадной теории гравитации, развиваемых в наши дни, – это так называемые телепараллельные теории гравитации [176], основанные на пространствах с абсолютным параллелизмом.

13.1. Формулы тетрадного формализма

Пусть $\lambda^i_{(a)}, \lambda_{i(a)}$ обозначают соответственно контрвариантные и ковариантные компоненты тетрады, отмечаемой индексом (a), причём

$$\lambda^{i(a)} = \eta^{(ab)}\lambda^i_{(b)}, \quad \lambda^i_{(a)} = \eta_{(ab)}\lambda^{i(b)}, \quad g_{ik}\lambda^i_{(0)}\lambda^k_{(0)} > 0,$$

где $\eta_{(ab)} = diag\{1, -1, -1, -1\}$ – метрический тензор Минковского. Связь между тетрадным полем и метрическим полем даётся соотношениями

$$g_{ik} = \lambda_{i(a)}\lambda^{(a)}_k, \quad g^{ik} = \lambda^i_{(a)}\lambda^{k(a)}, \quad \lambda^i_{(a)}\lambda^{(a)}_k = \delta^i_k.$$

Тетрадное поле задаётся с точностью до *локальных* лоренц-поворотов

$$\lambda^i_{(a)} \to \Omega^{(b)}_{(a)}(x)\lambda^i_{(b)}, \tag{13.1}$$

$$\eta_{ab} = \eta_{cd}\Omega^{(c)}_{(a)}(x)\Omega^{(d)}_{(b)}(x).$$

Последнее равенство показывает, что $||\Omega^{(b)}_{(a)}(x)||$ – однородное преобразование Лоренца. В случае, когда функции $\Omega^{(b)}_{(a)}(x)$ являются постоянными, говорят, что имеем *глобальные* лоренц-повороты тетрады.

Тетрада $\lambda^i_{(a)}$ позволяет формировать локальные объекты из тензоров:

$$V_{(a)} = \lambda^i_{(a)} V_i, \quad V^{(a)} = \lambda^{(a)}_i V^i,$$

$$\frac{\partial}{\partial x^{(a)}} = \lambda^i_{(a)} \frac{\partial}{\partial x^i},$$

$$A^k_{j(a)} = \lambda^m_{(a)} A^k_{jm}, \quad W^{(ab)} = \lambda^{(a)}_i \lambda^{(b)}_j W^{ij}, \ldots$$

13.2. Решение проблемы гравитационной энергии-импульса в ТТГ

Мёллер показал [123, с.38], что удовлетворительное решение проблемы энергии в ТТГ возможно, т.е. будут выполняться условия I-III и а) и б) из § 3.5.3, если под гравитационным полем понимать тетраду $\lambda^i_{(a)}$, а плотность лагранжиана $\mathcal{L}$ взять в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}L \equiv \sqrt{-g}[\gamma_{kst}\gamma^{tsk} - G_n G^n], \tag{13.2}$$

где

$$G^n \equiv \lambda^{n(s)} \nabla_k \lambda^k_{(s)} = \gamma^{ns\cdot}{}_{s},$$

$$\gamma_{kst} = \lambda^{(a)}_k \nabla_t \lambda_{s(a)}.$$

Действительно, для этого лагранжиана, во-первых, при варьировании

$$\delta \int (\mathcal{L} + \mathcal{L}^m) d^4x = 0$$

по $\lambda^i_{(a)}$ получаются уравнения поля

$$\boxed{R^i_{(a)} - \frac{1}{2}\lambda^i_{(a)} R = \varkappa T^i_{(a)},} \tag{13.3}$$

совпадающие с уравнениями Эйнштейна, и, во-вторых, комплекс энергии-импульса

$$\top^i_k = \sqrt{-g}\ (T^i_k + t^k_i), \tag{13.4}$$

где

$$t^i_k = \frac{c^4}{8\pi G}\left[\gamma^{km\cdot}{}_l \Delta^l{}_{mi} - G^l \Delta^k{}_{il} + G^k \Delta^l{}_{li} - \frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta^k_i \mathcal{L}\right], \tag{13.5}$$

$$\Delta^i{}_{kl} = \lambda^{i(a)} \frac{\partial \lambda_{k(a)}}{\partial x^l},$$

удовлетворяет условиям I-III из § 3.5.3 (см. [123, с.50]).

Уравнения поля (13.3) инвариантны относительно любых поворотов (13.1), тогда как лагранжиан (13.2) и комплекс энергии-импульса гравитационного поля (13.4), предложенные Мёллером, инвариантны относительно (13.1) лишь в случае постоянности функций $\Omega^{(b)}_{(a)}(x)$.

Такая ситуация породила определённые трудности на пути развития тетрадной трактовки ОТО (см. [123, 144]).

13.3. Гравитационно-тетрадный аналог эффекта Зеемана

Целью данного параграфа является получение формулы, позволяющей рассчитывать спин-гравитационное взаимодействие, аналогичное эффекту Зеемана. Предсказавший это явление Я.Б. Зельдович [93], высказывал мысль, что эффект вызывают компоненты $g_{0\alpha}(\alpha = 1, 2, 3)$ [94, с.51]. Однако это не совсем так: указанные компоненты могут быть отличными от нуля, тем не менее эффект отсутствовать. Полученная нами ниже формула – инвариант по отношению к произвольным преобразованиям координат.

13.3.1. Формула для гравитационного эффекта Зеемана

Запишем уравнение Дирака в виде

$$i\hbar\gamma^k\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^k}-\Gamma_k\psi\right)+\frac{e}{c}\gamma^k A_k\psi - mc\psi = 0, \tag{13.6}$$

где ψ – биспинор и

$$\Gamma_k = \frac{1}{4}g_{ml}\left(\frac{\partial\lambda_r^{(s)}}{\partial x^k}\lambda^l_{(s)} - \Gamma^l_{rk}\right)s^{mr},$$

$$s^{mr}=\frac{1}{2}(\gamma^m\gamma^r-\gamma^r\gamma^m), \quad \gamma^k=\lambda^k_{(l)}\gamma^{(l)},$$

где $\gamma^{(k)}$ – матрицы Дирака ([133, с.381]; [129, с.131]).

Мы предположим теперь, что искомая формула имеет вид

$$З = \frac{\hbar c}{2}\sum_\alpha B^{(\alpha)}\sigma_{(\alpha)},$$

где величины $B^{(\alpha)}$ вещественны, не содержат постоянной Планка $\hbar$, и являются функциями только от компонент тетрад, а $\sigma_{(\alpha)}$ $(\alpha = 1,2,3)$ – матрицы Паули.

Уравнение (13.6) можно записать в виде

$$\widehat{D}_\mp u_\pm + \sum_\tau C_{(\tau)}\sigma_{(\tau)}u_\mp = 0, \tag{13.7}$$

где

$$\widehat{D}_\mp \equiv i\hbar\lambda^k_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^k}+\frac{\hbar}{2}\sum_\alpha B^{(\alpha)}\sigma_{(\alpha)}+\frac{e}{c}\lambda^k_{(0)}A_k \mp mc,$$

$$B^{(\alpha)} \equiv A_{mr,k} \left\{ \lambda^k_{(0)} \sum_{\gamma<\beta} \lambda^{mr}_{(\gamma\beta)} \varepsilon_{(\gamma\alpha\beta)} + \sum_{\mu} \lambda^k_{(\mu)} \sum_{\gamma} \lambda^{mr}_{(0\gamma)} \varepsilon_{(\mu\gamma\alpha)} \right\},$$

$$C_{(\tau)} \equiv i\hbar \lambda^k_{(\tau)} \frac{\partial}{\partial x^k} - i\hbar P_{(\tau)} + \frac{e}{c} \lambda^k_{(\tau)} A_k,$$

$$P_{(\tau)} \equiv \frac{1}{2} A_{mr,k} \left\{ \lambda^k_{(0)} \lambda^{mr}_{(0\tau)} - \sum_{\mu} \lambda^k_{(\mu)} \sum_{\alpha<\beta} \lambda^{mr}_{(\alpha\beta)} \sum_{\gamma} \varepsilon_{(\alpha\gamma\beta)} \varepsilon_{(\mu\gamma\tau)} \right\},$$

$$A_{mr,k} = \frac{1}{2} g_{ml} \left(\frac{\partial \lambda^{(s)}_r}{\partial x^k} \lambda^l_{(s)} - \Gamma^l_{rk} \right),$$

$$\lambda^{mr}_{(ik)} \equiv \lambda^m_{(i)} \lambda^r_{(k)} - \lambda^m_{(k)} \lambda^r_{(i)},$$

где $\varepsilon_{(\alpha\beta\gamma)}$ – символ Леви-Чевитта в специальной теории относительности.

Выпишем компоненты $B^{(\alpha)}$ подробнее:

$$\begin{aligned}
B^{(1)} &= A_{mr,k} \{ -\lambda^k_{(0)} \lambda^{mr}_{(23)} + \lambda^k_{(2)} \lambda^{mr}_{(03)} - \lambda^k_{(3)} \lambda^{mr}_{(02)} \},\\
B^{(2)} &= A_{mr,k} \{ \lambda^k_{(0)} \lambda^{mr}_{(13)} - \lambda^k_{(1)} \lambda^{mr}_{(03)} + \lambda^k_{(3)} \lambda^{mr}_{(01)} \},\\
B^{(3)} &= A_{mr,k} \{ -\lambda^k_{(0)} \lambda^{mr}_{(12)} + \lambda^k_{(1)} \lambda^{mr}_{(02)} - \lambda^k_{(2)} \lambda^{mr}_{(01)} \},
\end{aligned}$$

откуда сразу получаем

$$B^{(\alpha)} = \frac{1}{2} A_{mr,k} \sum_{i,p,l} \varepsilon^{(ipl\alpha)} \lambda^{mr}_{(ip)} \lambda^k_{(l)} = \frac{1}{2} \varepsilon^{(bpm\alpha)} \lambda^j_{(p)} \lambda^k_{(m)} \frac{\partial \lambda_{j(b)}}{\partial x^k}.$$

Нетрудно видеть, что только эти величины обладают вышеприведенными условиями. Таким образом, требуемая формула получена.

Она обладает следующими свойствами:

а) величина З не изменяется при произвольных преобразованиях координат, поскольку $A_{mr,k}$ и $\lambda^{mr}_{(ip)} \lambda^k_{(l)}$ – тензоры третьего ранга;

б) по отношению к чисто пространственным поворотам тетрад с постоянными коэффициентами, то есть когда матрица

$\Omega^{(a)}_{(b)}$ имеет вид

$$\Omega^{(0)}_{(0)} = 1,\ \Omega^{(\alpha)}_{(0)} = \Omega^{(0)}_{(\alpha)} = 0\ (\alpha = 1, 2, 3),$$

величины B^α ведут себя как псевдовектор. И, значит, З ведет себя так же, как её аналог в квантовой теории поля.

Более интересно свойство а). Из него следует независимость эффекта от произвола в выборе системы координат.

13.3.2. Свойства величины З

В синхронной системе отсчёта метрику можно записать в виде

$$ds^2 = dx^{0^2} + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

[113, с.374]. Всегда можно в этом случае выбрать тетрады следующим образом:

$$\lambda^{(0)}_i = (1, 0, 0, 0), \quad \lambda^{(\alpha)}_i = -\lambda_{(\alpha)i} = (0, \lambda^{(\alpha)}_1, \lambda^{(\alpha)}_2, \lambda^{(\alpha)}_3).$$

Вычисляя, получаем

$$B^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma<\nu} \varepsilon^{(0\gamma\nu\alpha)} \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^0} \lambda^{\beta\mu}_{(\gamma\nu)} +$$

$$+ \sum_{\gamma<\beta} \sum_{\delta<\mu} \left(\lambda_{\delta(s)} \frac{\partial \lambda^{(s)}_\mu}{\partial x^0} - \lambda_{\mu(s)} \frac{\partial \lambda^{(s)}_\delta}{\partial x^0} \right) \varepsilon^{(\gamma\beta 0\alpha)} \lambda^{\delta\mu}_{(\gamma\beta)}.$$

Замечая, что первое слагаемое равно нулю, получим

$$B^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \lambda^{(s)}_{[\delta} \frac{\partial \lambda^{(s)}_{\mu]}}{\partial x^0} \varepsilon^{(\gamma\beta 0\alpha)} \lambda^{\delta\mu}_{(\gamma\beta)}. \tag{13.8}$$

Так как для статического поля можно считать, что компоненты тетрад не зависят от времени, то в этом случае эффект отсутствует.

Очевидно эффект отсутствует, если метрику можно некоторым преобразованием координат привести к диагональному виду.

В случае стационарного поля, создаваемого вращающимся телом, эффект присутствует ([93]; [129, с.144-147]). Однако если перейти к синхронной системе отсчёта, то по а) эффект не исчезает и, значит, (13.8) может быть отличным от нуля.

Мы можем сделать следующие выводы:

(i) равенство нулю компонент $g_{0\alpha}$ не означает отсутствие эффекта, и, наоборот, если компоненты $g_{0\alpha}$ отличны от нуля, то эффект может отсутствовать;

(ii) равенство или неравенство нулю 3-векторов

$$\widetilde{\Omega}_\alpha = -\frac{c}{2}\frac{\sqrt{-g}}{g_{00}}\varepsilon_{(\alpha\beta\gamma)}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\beta\gamma}}{\partial x^0} + g^{\beta i}\Gamma^\gamma_{i0}\right),$$

$$\overrightarrow{\Omega} = -\frac{c}{2} rot\overrightarrow{(g_{01}, g_{02}, g_{03})}$$

не означает отсутствие или присутствие эффекта [94, с.29-30].

13.3.3. Уравнение Паули

Получим в общем виде обобщение уравнения Паули на случай тетрадной теории гравитации. Считая, что скорость фермиона намного меньше скорости света, и не вдаваясь в математические тонкости, можем написать

$$\widehat{D}^{-1}_{\mp} \approx \frac{1}{2mc}\left\{1 \pm \frac{1}{2mc}\widehat{D}_{\pm}\right\}.$$

Поступая далее так же, как в [129, с.145-146], получим

$$\left(\pm\, i\hbar\lambda^k_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^k} \pm \frac{1}{c}З \pm \frac{e}{c}\lambda^k_{(0)}A_k - mc\right)u_{\pm} = \tag{13.9}$$

$$= \left\{\frac{1}{2mc}\sum_{\alpha,\beta} C_{(\alpha)}C_{(\beta)}\sigma_{(\alpha)}\sigma_{(\beta)}\mp\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{4m^2c^2}\sum_{\alpha,\beta} C_{(\alpha)}\sigma_{(\alpha)}[\widehat{D}_{\mp}, C_{(\beta)}\sigma_{(\beta)}]_{-}\right\}u_{\pm}.$$

Определим теперь квантовомеханические операторы энергии и импульса следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{E}_{\pm} &= \pm\, i\hbar c \lambda^k_{(0)} \frac{\partial}{\partial x^k} \\ \widehat{p}_{(\alpha)} &= \pm\, i\hbar \lambda^k_{(\alpha)} \frac{\partial}{\partial x^k}\end{aligned}\right\} \tag{13.10}$$

Тогда (13.9) можно записать в виде

$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{E}_{\pm} \approx mc^2 + \frac{1}{2m}\sum_{\alpha} \widehat{p}_{(\alpha)}\widehat{p}_{(\alpha)} \mp З \mp \\ \mp e\lambda^k_{(0)} A_k \mp \frac{1}{4m^2 c}\sum_{\alpha,\beta} C_\alpha \sigma_\alpha [\widehat{D}_{\mp}, C_\beta \sigma_\beta]_- + \ldots\end{aligned}}$$

Требуемое уравнение Паули получено. Из него видно, что величина З действительно играет роль спин-гравитационного энергетического добавка.

13.4. Уравнение скалярного поля в тетрадной теории гравитации

В этом параграфе попытаемся ответить на следующий вопрос: как выглядит в тетрадной гравитации (ТТГ) максимально общее уравнение (без учёта его конформности), описывающее скалярное поле?

13.4.1. Вывод уравнения скалярного поля

В ОТО уравнение скалярного поля имеет вид:

$$\left(g^{ik}\nabla_i\nabla_k + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0, \tag{13.11}$$

где ∇_i – ковариантная производная относительно римановой связности по переменной x^i.

В ТТГ естественным образом вводится понятие обобщённой ковариантной производной [128]:

$$\mathcal{D}_k \xi_n = \nabla_k \xi_n - \gamma_{mnk} \xi^m, \tag{13.12}$$

где

$$\gamma_{mnk} = \lambda_{m(s)} \nabla_k \lambda^{(s)}_n$$

– коэффициенты вращения Риччи.

Следовательно, можно вводить уравнения скалярного поля в ТТГ, производя формальную замену производных $\partial/\partial x^k$ на $\mathcal{D}_k$ и метрики η^{ik} на метрику g^{ik} в уравнении Клейна-Фока квантовой теории поля

$$\left(\eta^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = 0. \tag{13.13}$$

В результате получаем искомое уравнение

$$\boxed{\left(g^{ik} \mathcal{D}_i \mathcal{D}_k + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = 0,} \tag{13.14}$$

или

$$\boxed{\left(g^{ik} \nabla_i \nabla_k - G^n \frac{\partial}{\partial x^n} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) \varphi = 0,} \tag{13.15}$$

где

$$G^n \equiv \lambda^{n(s)} \nabla_k \lambda^k_{(s)} = \gamma^{ns\cdot}{}_{s}. \tag{13.16}$$

Как легко видеть, уравнение (13.14) (или (13.15)) обобщает уравнение (13.11) в соответствии с нашим замыслом. Более того, уравнение (13.14) мы получили из (13.13) по той же схеме, по которой (13.11) получают из (13.13), т.е. формальной заменой производных $\partial/\partial x^k$ на ковариантные ∇_k.

Уравнение (13.14) существенно неметрическое, инвариантное по отношению к любым преобразованиям голономных координат x^i и по отношению к глобальным лоренц-поворотам тетрады

$$\lambda^i_{(a)} \to \Omega^{(b)}_{(a)} \lambda^i_{(b)}, \tag{13.17}$$

где $\Omega^{(b)}_{(a)}$ – матрица с постоянными компонентами.

Однако уравнение (13.14) нарушает требование локальной инвариантности теории (имеются в виду преобразования (13.17), в которых $\Omega^{(b)}_{(a)}$ – произвольные функции точки x). Заметим, что подобная ситуация уже наблюдалась в теории калибровочных полей [106, с.43]. Но следует заметить, что нековариантность относительно группы (13.17) с $\Omega^{(b)}_{(a)}(x)$, являющимися произвольными функциями, встречается в ТТГ довольно часто, и её объясняют переходом к новой неинерциальной системе отсчета и, следовательно, переходом к новым физическим условиям [144, с.6, гл.III].

13.4.2. Второй способ получения уравнения

Уравнение Клейна-Фока (13.13) появляется в квантовой теории поля как квантовомеханическое обобщение известного релятивистского соотношения между импульсом и энергией

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\overrightarrow{p}^2. \tag{13.18}$$

Искомое уравнение получается с помощью формальной замены E и $\overrightarrow{p}$ на операторы энергии и импульса

$$E \to \widehat{E} = i\hbar c \frac{\partial}{\partial x^0},$$

$$p_\alpha \to \widehat{p}_\alpha = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

в уравнении (13.18). В результате замены получается уравнение (13.13).

Используя эту же идею, обобщим уравнение (13.18) на случай ТТГ. Для этого ранее найденные в § 13.3.3 операторы импульса и энергии (см. 13.10)

$$\left.\begin{aligned} \widehat{E} \equiv c\widehat{p}_{(0)} &= \pm\, i\hbar c\lambda^k_{(0)}\frac{\partial}{\partial x^k} \\ \widehat{p}_{(\alpha)} &= -\, i\hbar\lambda^k_{(\alpha)}\frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}\right\} \tag{13.19}$$

подставляем в (13.18).

Получаем уравнение

$$\boxed{\left[\widehat{E}^2 - c^2\sum_{\alpha=1}^{3}\widehat{p}_{(\alpha)}\widehat{p}_{(\alpha)} - m^2c^4\right]\varphi = 0,} \tag{13.20}$$

или

$$\boxed{(\eta^{(ab)}\widehat{p}_{(a)}\widehat{p}_{(b)} - m^2c^4)\varphi = 0.} \tag{13.21}$$

С точки зрения геометрии касательного расслоения, (13.19) – обычные операторы энергии и импульса в плоском локальном касательном пространстве (в точке x), записанные с использованием неголономных координат [144, с.32]. Значит, (13.21) – обычное уравнение Клейна-Фока, но, опять-таки, записанное в неголономных координатах.

Используя (13.19), перепишем (13.21) в виде

$$\left[\eta^{(ab)}\lambda^i_{(b)}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda^j_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\varphi = 0. \tag{13.22}$$

Если теперь воспользоваться соотношением

$$\lambda^{i(a)}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\lambda^j_{(a)}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \lambda^{i(a)}\frac{\partial\lambda^j_{(a)}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j},$$

то (13.22) перейдёт в следующее уравнение

$$\left(g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \lambda^i_{(a)}\frac{\partial \lambda^{j(a)}}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением скалярного поля (13.15) (и значит, с (13.14)), в чем нетрудно убедиться, если заметить, что

$$G^j\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \lambda^{j(a)}\frac{\partial \lambda^i_{(a)}}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \Gamma^m_{lm}g^{lk}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

и

$$g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(g^{ij}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j}\right) + \Gamma^m_{lm}g^{lk}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} =$$

$$= g^{ij}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial \lambda^{i(a)}}{\partial x^i}\lambda^j_{(a)}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \lambda^i_{(a)}\frac{\partial \lambda^{j(a)}}{\partial x^i}\frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \Gamma^m_{lm}g^{lk}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Таким образом, уравнения (13.14) и (13.21) совпадают.

13.4.3. Разница в описании скалярного поля в ОТО и ТТГ

Тетрадное уравнение гравитационного поля в вакууме

$$R_{i(a)} = 0$$

имеет следующее сферически-симметричное решение [153]:

$$h^{(a)}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\dfrac{r_g}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} & \dfrac{\sin\theta\sin\varphi}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} & \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}} \\ 0 & r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta \\ 0 & -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{bmatrix}, \tag{13.23}$$

где

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

– гравитационный радиус.

Вычисляя, получаем

$$G^k = \left(0, \frac{1}{r^2}[-2r + \frac{3}{2}r_g + 2r\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}], 0, 0\right). \qquad (13.24)$$

Пусть

$$\Delta(\varphi) = (13.11) - (13.15) = G^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

– разница между описанием скалярного поля уравнениями (13.11) и (13.15). В случае (13.23) с учётом (13.24) имеем:

$$\Delta(\varphi) = \frac{r_g}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{GM}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Следовательно, в системе отсчёта, соответствующей тетраде (13.24), поведение скалярной нерелятивистской частицы отличается от того поведения, которое предсказывалось бы классическим общерелятивистским уравнением скалярного поля (13.11).

13.4.4. Физический смысл добавочного члена $G^k \partial\varphi/\partial x^k$

Если рассмотреть слабое гравитационное поле, то

$$\begin{cases} c^2 G_{(\alpha)} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial (c^2 \lambda_\alpha^{(0)})}{\partial t} - (grad\ U_{\text{ньютон}})_{(\alpha)} + O\left(\dfrac{1}{c}\right), \\ G_{(0)} \approx 0, \end{cases}$$

т.е. с $c^2 G_{(\alpha)}$ – «напряжённость» гравитационного метрико-тетрадного поля.

Если проводить аналогию с электромагнитным полем, то метрика g_{ik} играет роль электрического поля, а тетрада $\lambda_k^{(0)}$ играет роль магнитного поля. При этом член $G^{(\alpha)}\partial/\partial x^\alpha$ аналогичен члену $\mathbf{E}\cdot\mathbf{p}$, входящему в уравнение Паули [129, с.142].

Здесь **E** – напряжённость электрического поля, **p** – оператор импульса.

Замечание 13.1. Метод, которым мы воспользовались в § 13.4.1 для получения уравнения скалярного поля, применялся в [89] для обобщения уравнений Максвелла на случай ТТГ.

Замечание 13.2. В [176, p.58] приводится другой вариант уравнения скалярного поля.

13.5. Внешнее скалярное поле черной дыры в тетрадной теории гравитации

Как показано рядом авторов [189, 294], статичная чёрная дыра в общей теории относительности (ОТО) не имеет внешнего скалярного поля.

Можно ли утверждать, что в ТТГ так же, как в общей теории относительности (ОТО), отрицательно решается вопрос о существовании внешнего скалярного поля у чёрной дыры (отсутствие «волос» у чёрной дыры)?

Полученное в § 13.4 уравнение скалярного поля самым непосредственным образом обобщает уравнение скалярного поля (13.11), использующееся в ОТО. Более того, они совпадают в том случае, когда тетрадное поле удовлетворяет калибровочному условию Родичева

$$\nabla_k \lambda^k_{(a)} = 0. \tag{13.25}$$

Следовательно, на основании выводов, сделанных Бекенштейном [189] (для ОТО) мы можем утверждать следующее. Если чёрная дыра статична и описывается тетрадным полем, удовлетворяющим условию (13.25), то она не имеет внешнего скалярного статичного поля, т.е. у неё отсутствуют «волосы».

Но этим вопрос о «волосах» у чёрной дыры не исчерпывается. Дело в том, что существуют решения тетрадных уравнений Эйнштейна с метрикой Шварцшильда, не удовлетворяющие (13.25). Поэтому требуется дополнительное исследование.

Будем под ТТГ понимать теорию, уравнения поля в которой совпадают с уравнениями Эйнштейна. Скалярное поле описываем обобщённым уравнением Клейна-Фока:

$$(\eta^{(ab)}\widehat{p}_{(a)}\widehat{p}_{(b)} - m^2c^2)\varphi = 0. \tag{13.26}$$

Уравнение (13.26), как мы знаем, не инвариантно при самых общих лоренц-поворотах тетрады.

Определение 13.1. Вакуумное решение $\lambda^i_{(a)}$ уравнений поля описывает чёрную дыру в ТТГ, если метрика $g_{ik} = \eta_{(ab)}\lambda^{(a)}_i\lambda^{(b)}_i$ описывает чёрную дыру в ОТО. Причем чёрная дыра – это компактный объект в 3-пространстве.

Определение 13.2. Поле $\lambda^i_{(a)}$ статично, если его компоненты не зависят от временной координаты x^0 и $\lambda^{(a)}_0 = \lambda^{(0)}_\alpha = 0$ ($\alpha = 1.2.3$).

Будем предполагать, что метрика g_{ik} асимптотически плоская, и во внешней области чёрной дыры координаты x^i выбраны так, что g_{ik} на бесконечности переходят в компоненты метрики Шварцшильда, заданные в сферических координатах. Горизонт событий описывается уравнением $F(x^1, x^2, x^3) = 0$, и нормаль n_i к нему, а также элемент поверхности dS_i имеют нулевую временную компоненту.

Теорема 13.1. *Пусть $\lambda^i_{(a)}$ – статичное гравитационное поле, описывающее чёрную дыру, а $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ – статичное внешнее скалярное поле. Если выполнены условия:*

1) $\nabla_m G^m \geq 0$*;*
2) $\sqrt{-g}g^{ik}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}$ *ограничено на горизонте;*
3) $g\varphi^4 G^i G_i$ *ограничено на горизонте;*
4) G^m *имеет на бесконечности вид* $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{r^i}$*,*

то $\varphi \equiv 0$, т.е. чёрная дыра не имеет внешнего скалярного поля. ■

Эта теорема обобщает результат [189]. Исследования показали, что, в отличие от ОТО, даже в случае шварцшильдова пространства-времени, условия 1) - 3) теоремы могут не выполняться.

13.6. Определение гравитационно-инерциального излучения

Одной из важных задач общей теории относительности (ОТО) является проблема строгого определения понятия гравитационных волн, т.е. проблема формулировки в общековариантном виде необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять метрика пространства-времени, для того чтобы она описывала волновое гравитационное поле. Достаточно полный обзор полученных в этом направлении результатов дан в [92].

В этом параграфе приводится критерий гравитационно-инерциального излучения для ТТГ, полученный нами при изучении уравнения Дирака.

Критерий формулируется, опираясь на аналогичный критерий электромагнитного излучения. Для этого с помощью тетрады строятся два векторных поля, интерпретируемых как *гравитационно-инерциальное поле.* Эти векторные поля по отношению к лоренц-поворотам тетрады ведут себя аналогично комплексу энергии-импульса Мёллера.

13.6.1. Гравитационно-инерциальное излучение

Многое говорит о том, что слабое гравитационное поле проявляет аналогию с электромагнитным. Реализуя эту аналогию, введём два векторных поля, одно из которых, $\mathcal{G}^i$, – это напряженность гравитационного поля, а другое, $\mathcal{I}^i$, – напряженность инерциального поля (см., например, [92]). Таким образом, гравитацию и инерцию объединяем в единое гравитационно-инерциальное поле.

Невозможно при этом провести полную аналогию с электродинамикой, где напряжённости $\overrightarrow{E}$ и $\overrightarrow{B}$ можно охарактеризовать одним векторным полем 4-потенциалом A^i. Но положим, что гравитационно-инерциальному полю отвечают четыре 4-потенциала $\lambda^i_{(a)}$ $(a = 0, 1, 2, 3)$, и рассмотрим

$$\mathcal{G}_{(a)} = -c^2 \left(\lambda^{(b)}_k \frac{\partial \lambda^k_{(a)}}{\partial x^{(b)}} + \Gamma^j_{j(a)} \right), \tag{13.27}$$

$$\mathcal{I}^{(a)} = \frac{c^2}{2} \varepsilon^{(bpma)} \lambda^j_{(p)} \frac{\partial \lambda_{j(b)}}{\partial x^{(m)}}. \tag{13.28}$$

Посредством этих двух полей $\mathcal{G}^i$ и $\mathcal{I}^i$ происходит учёт взаимодействия фермиона с гравитационным полем. Это видно из уравнения Дирака (13.7), записанного для спиноров, если заметить, что

$$B^{(a)} = \frac{1}{c^2} \mathcal{I}^{(a)}, \quad P_{(a)} = -\frac{1}{2c^2} \mathcal{G}_{(a)}.$$

Следовательно, формула эффекта Зеемана может быть переписана в виде:

$$З = \frac{\hbar}{2c} \sum_{\alpha} \mathcal{I}^{(\alpha)} \sigma_{(\alpha)}.$$

Отметим также, что в случае отсутствия гравитационно-инерциального поля, т.е. при $\mathcal{G}^i = \mathcal{I}^i = 0$, плотность энергии поля, подсчитанная с помощью комплекса (13.5), равна плотности энергии гравитационного поля в ньютоновской теории тяготения $w = -(1/8\pi G)(grad\ \varphi)^2$ ([113, с.427]; [129, с.105]).

Если же, скажем, $\mathcal{I}^{(a)} \neq 0$, то в разложении $\varkappa t^k_0$ по степеням $1/c$ первые отличные от нуля члены появляются раньше, чем в случае отсутствия гравитационно-инерциального поля.

Дадим теперь определение гравитационно-инерциального излучения.

Определение 13.3. Говорим, что в окрестности точки x пространства-времени имеется гравитационно-инерциальное излучение, если выполняются соотношения

$$\boxed{\begin{gathered}(\mathcal{G}_i\mathcal{G}^i - \mathcal{I}_i\mathcal{I}^i)(x) = 0, \quad (\mathcal{G}_i\mathcal{I}^i)(x) = 0, \\ \mathcal{G}_i(x) \neq 0, \quad \mathcal{I}_i(x) \neq 0.\end{gathered}} \tag{13.29}$$

Перейдём к рассмотрению слабого поля и покажем, что соотношения (13.29) взяты по аналогии с подобными же соотношениями, определяющими электромагнитное излучение.

13.6.2. Слабое поле

Будем предполагать, что гравитационное поле g_{ik} соответствует изолированной материальной системе, и на бесконечности пространство-время становится плоским.

Разложим g_{ik} в ряд по степеням $1/c$:

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{n}{h}_{ik},$$

где $\underset{n}{h}_{ik}$ – члены, соответствующие $1/c^n$.

Нетрудно убедиться, что существует такая тетрада $\lambda_i^{(a)}$, для которой

$$\lambda_i^{(a)} = \delta_i^a + \sum_{n=1}^{\infty} \underset{n}{\lambda}{}_i^{(a)},$$

$$\left.\begin{aligned} &\underset{n}{\lambda}{}_\beta^{(\alpha)} = \underset{n}{\lambda}{}_\alpha^{(\beta)} \ (\alpha \neq \beta), \\ &div\ \underset{n}{\vec{\chi}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \underset{n}{\chi}{}^\alpha = 0, \ (n = 1, 2) \\ &\underset{n}{\vec{\chi}} \equiv (\underset{n}{\chi}{}^1, \underset{n}{\chi}{}^2, \underset{n}{\chi}{}^3) = (\underset{n}{\lambda}{}_1^{(0)}, \underset{n}{\lambda}{}_2^{(0)}, \underset{n}{\lambda}{}_3^{(0)}). \end{aligned}\right\} \tag{13.30}$$

Тогда, предполагая возможность разложения

$$\mathcal{I}^{(a)} = \sum_{n=-2}^{+\infty} \underset{n}{\mathcal{I}}{}^{(a)}, \quad \mathcal{G}^{(a)} = \sum_{n=-2}^{+\infty} \underset{n}{\mathcal{G}}{}^{(a)},$$

после несложных вычислений, получаем

$$\underset{-1}{\overrightarrow{\mathcal{G}}} = -\frac{c^2}{2} rot\overrightarrow{(\underset{1}{\lambda_i^{(3)}}, \underset{1}{\lambda_i^{(1)}}, \underset{1}{\lambda_i^{(2)}})} = 0,$$

$$\underset{-2}{\overrightarrow{\mathcal{I}}} = 0$$

и

$$\left.\begin{aligned} \underset{0}{\overrightarrow{\mathcal{G}}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial(c^2 \underset{1}{\overrightarrow{\chi}})}{\partial t} - grad\ \varphi \\ \underset{-1}{\overrightarrow{\mathcal{I}}} &= rot\ (c^2 \underset{1}{\overrightarrow{\chi}}) \end{aligned}\right\} \tag{13.31}$$

$$\left.\begin{aligned} \underset{1}{\overrightarrow{\mathcal{G}}} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial(c^2 \underset{2}{\overrightarrow{\chi}})}{\partial t} - \frac{1}{2} grad\ (c^2 \underset{3}{h_{00}}) \\ \underset{0}{\overrightarrow{\mathcal{I}}} &= rot\ (c^2 \underset{2}{\overrightarrow{\chi}}), \end{aligned}\right\} \tag{13.32}$$

где

$$\underset{n}{\overrightarrow{\mathcal{G}}} = (\underset{n}{\mathcal{G}^{(1)}}, \underset{n}{\mathcal{G}^{(2)}}, \underset{n}{\mathcal{G}^{(3)}}), \quad \underset{n}{\overrightarrow{\mathcal{I}}} = (\underset{n}{\mathcal{I}^{(1)}}, \underset{n}{\mathcal{I}^{(2)}}, \underset{n}{\mathcal{I}^{(3)}}),$$

$$\varphi = \frac{1}{2}(c^2 \underset{2}{h_{00}})$$

– ньютоновский потенциал гравитационного поля (см. [90]) и $grad, rot$ – известные дифференциальные операторы.

Кроме того,

$$\underset{-1}{\mathcal{I}^{(0)}} = \underset{-1}{\mathcal{G}^{(0)}} = \underset{0}{\mathcal{I}^{(0)}} = \underset{0}{\mathcal{G}^{(0)}} = 0.$$

При получении соотношений (13.31)-(13.32) использовались равенства (13.30), а также условия

$$\sum_{k=0}^{3} \underset{3}{h_{kk}} = 3\underset{3}{h_{00}}, \quad \sum_{\beta=1}^{3} \frac{\partial \underset{3}{h_{\alpha\beta}}}{\partial x^\beta} = 0,$$

которые можно считать выполненными без нарушения всех формул [90], используемых нами. Дело в том, что этих соотношений легко добиться, делая допустимые (см. [90]) преобразования координат.

Кроме (13.31)-(13.32), мы имеем следующие равенства:

$$\underbrace{div\ \overrightarrow{\mathcal{I}}}_{n} = 0 \quad (n = -1, 0), \tag{13.33}$$

$$\underbrace{div\ \overrightarrow{\mathcal{G}}}_{n} = -\delta_{-1,n} \triangle\ \varphi = -4\pi G\rho \cdot \delta_{-1,n}\ (n = -1, 0, 1), \tag{13.34}$$

$$\underbrace{rot\ \overrightarrow{\mathcal{G}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{I}}}{\partial t}}_{n} \quad (n = -1, 0, 1), \tag{13.35}$$

$$\underbrace{rot\ \overrightarrow{\mathcal{I}} - \frac{1}{c}\frac{\partial \overrightarrow{\mathcal{G}}}{\partial t}}_{n} = -\triangle \underbrace{(c^2 \overrightarrow{\chi})}_{n} \quad (n = -1, 0), \tag{13.36}$$

где δ_{ik} – символ Кроннеккера.

Как видим, $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{I}}$ удовлетворяют уравнениям Максвелла в понятном (связанным с разложением по степеням $1/c$) смысле.

Для условий (13.29), определяющих излучение, имеем

$$\underbrace{\mathcal{G}_i\mathcal{G}^i - \mathcal{I}_i\mathcal{I}^i}_{n} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{G}}^2 - \overrightarrow{\mathcal{I}}^2}_{n} = 0, \quad \underbrace{\mathcal{G}_i\mathcal{I}^i}_{n} = \underbrace{\overrightarrow{\mathcal{G}} \cdot \overrightarrow{\mathcal{I}}}_{n} = 0,$$

$$(n = -1, 0, 1, 2, 3).$$

Эти соотношения соответствуют соотношениям

$$\overrightarrow{E}^2 - \overrightarrow{H}^2 = 0, \quad \overrightarrow{E} \cdot \overrightarrow{H} = 0,$$

определяющим изотропное электромагнитное поле.

Таким образом, гравитационно-инерциальные волны в смысле определения 13.3 в случае слабого поля в некоторой системе отсчёта, которая отождествляется с тетрадой, проявляют хорошую аналогию с электромагнитными волнами.

Глава 14

Соотношение неопределённости для радиуса Вселенной

В космологии особую роль играют решения Робертсона-Уокера вида

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)[d\chi^2 + S^2(\chi)d\Omega^2].$$

Эволюция Вселенной начинается от «точки», имеющей радиус $R = 0$, который затем возрастает. Можем ли мы быть уверены, что радиус всегда имеет строго определённое значение? И не может ли быть всё так устроено, что точное определение значения радиуса невозможно. Более того, не может ли так быть, что точное определение радиуса Вселенной становится всё более безнадёжной задачей, если мы погружаемся во всё более отдалённое прошлое?

Радиус Вселенной меняется со временем. Временной параметр t непосредственно связан с постулированием эволюции Вселенной. Следовательно, любое изменяющееся свойство Вселенной играет роль часов. Поэтому в качестве временной координаты можно взять температуру микроволнового фонового излучения и т.д. [11, с.312-313]. В частности, можно взять и радиус Вселенной. Другими словами, изучая свойства времени, мы тем самым изучаем свойства радиуса Вселенной.

14.1. Случайность даты события

В Мире событий $\mathcal{M}$ мы наблюдаем такое свойство, как *временной порядок.* Временной порядок времени связан с таким понятием, как течение времени. События развиваются, развертываются перед наблюдателем последовательно, во времени. Это означает, что для измерения времени, а точнее, для измерения *продолжительности* явления (сложного события) во времени используется специальный инструмент измерения, называемый *часами.* С помощью часов каждому событию приписывается конкретное число, именуемое его (временным) моментом или его *эпохой.* Временной порядок позволяет сравнивать эпоху любых событий.

Однако поток времени, вследствие которого явления, состоящие из событий, раскрываются, развёртываются последовательно, событие за событием, дан человеку, как отметил философ Кант, априорно, с рождения. Другими словами, время как поток – это только субъективное восприятие (осознание) явлений Мира событий, являющееся для человека частью его врождённых чувств.

Однако такое представление о времени связано только с восприятием Внешнего Мира, с его отражением в сознании. В § 1.2.2 говорилось, что время – это еще и акт созидания. Два разных субъекта, реализуя одну идею A посредством одной вещи (в себе), либо разветвляют Вселенную, либо порождают акт следующего мига времени. Непредсказуемо, «случится» ли первое или второе. Это вносит *элемент случайного* в сам акт *сотворения времени.* Появление того или иного лика вещи в себе в форме вещи для нас в случае рассмотрения во времени актов реализации любой идеи разными субъектами всего лишь *вероятно.* И это относится к такой вещи в себе, как эпоха события.

Поэтому необходимо предположить, что время может проявлять себя в нашем, человеческом мире, мире человеческих субъективных представлений о Мире событий абсолютно иначе, чем только как нечто являющееся потоком времени (временным порядком), приписывающим эпохи событиям строго в возрастающем порядке. Фактически это означает, что время может проявить себя как что-то, что может *нарушать* временной порядок в развёртывании событий! Следовательно, события, из которых состоят явление, могут получать эпохи (=даты) с нарушением временного порядка.

Означает ли это, что время может иметь свойства, подобные случайной переменной? Так или иначе, необходимо попытаться применить принципы теории вероятности к описанию времени.

Принимаем далее, что выбор эпох (моментов, дат) времени, которые являются приписанными событиям явления с помощью некоторых неподвижных часов, может быть случайным.

Забудем для простоты о таком понятии, как место события. В этом случае события в Мире событий можно различить только с помощью временного порядка, и формально это означает, что Мир событий $\mathcal{M}$ есть линейный упорядоченный континуум, изоморфный вещественной прямой линии $\mathbb{R}$.

Давайте предполагать, что мы выбираем часы t, которые позволяют каждому событию x приписать момент времени, соответствующего ему, то есть эпоху τ. Мы признаём, что каждое событие получает *случайную эпоху.* Это понимается следующим образом. Поскольку событие – это некоторая идеализация, оно должно занять только мгновение τ в потоке времени t. Так принято в теории относительности. Но фактически это событие имеет *дление* в потоке времени t и, следовательно, его эпоха τ абсолютно точно неизвестна, хотя должна лежать на некотором сегменте $[\tau, \tau + \Delta\tau]$ времени t. Значит, эпоха τ для события x есть случайная величина $\tau :< X, \mathbf{S}, \mathbf{P} >\to \mathbb{R}$, где X – вероятностное пространство, $\mathbf{S}$ – σ-алгебра на X, $\mathbf{P}$ – мера вероятности на X.

Идентифицируя пространство событий X с Миром событий $\mathcal{M}$, можем взглянуть на $\mathcal{M}$ как на вещественную прямую $\mathbb{R}$ и увидеть временную эпоху (даты) $\tau(t)$ как случайную величину, данную в потоке времени t.

Событие в теории вероятностей – это $\mathbf{S}$-измеримое множество в пространстве X. В нашей терминологии понятие явления соответствует понятию события теории вероятностей.

События теории вероятностей состоят из элементарных событий, являющихся точками пространства X. В терминологии Минковского точки Мира событий $\mathcal{M}$ суть события. Как видим, имеем неплохое согласование терминов обеих теорий.

Итак, свойство времени, состоящее в случайности приписывания эпохи (даты) событию следует рассматривать как случайную величину. Будем её называть временем-эпохой.

14.2. Соотношение неопределенности для даты события

Пусть $f_\tau(t)$ плотность распределения вероятностей для времени-эпохи τ удовлетворяет двум условиям:

$$\mathbf{M}\tau = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t f_\tau(t) dt = 0, \ \lim_{t\to\pm\infty} t f_\tau(t) = 0. \tag{14.1}$$

Пусть

$$D(t) = -c_1 \frac{d}{dt} \ln f_\tau(t), \tag{14.2}$$

где $c_1 = const > 0$.

Поясним смысл величины D, определённой формулой (14.2). Поскольку $f_\tau(t)$ – плотность распределения величины τ, то её смысл – это вероятность того, что событие получит эпоху, лежащую на отрезке времени-потока $[t, t+1]$, где 1 – условная единица измерения времени. По аналогии с формулой Больцмана для энтропии, можно заявить, что $\ln f_\tau(t)$ – это энтропия времени-эпохи. Другими словами, она характеризует меру дезорганизации события как явления. Поэтому величина $D(t)$ характеризует *скорость нарастания дезорганизации* события-явления.

Теорема 14.1. *Если условия* (14.1) *выполнены, то справедливо соотношение неопределённости*

$$\Delta\tau\Delta D \geq c_1. \tag{14.3}$$

■

Доказательство теоремы дано в [63, 77].

Теорема говорит, что скорость дезорганизации события-явления тем больше, чем ближе друг к другу границы локализации явления в потоке времени t.

14.3. Соотношение неопределенности для радиуса Вселенной

Описываем геометрию Всленной с помощью метрики Фридмана вида

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t_0 + t)[d\chi^2 + S^2(\chi)d\Omega^2], \quad -t_0 < t < +\infty,$$

где мы изменили время рождения Вселенной: 0 заменили на $-t_0$. Временной параметр t напрямую связан с постулатом эволюции Вселенной, и, значит, любое изменяющее свойство Вселенной играет роль часов.

Пусть эпоха $t = 0$ есть момент измерения радиуса Вселенной.

Если допустить, что радиус R Вселенной является случайной величиной, подобной времени-дате τ, то, вычисляя известным образом [119, с.43-49] среднее квадратичное отклонения ΔR через $\Delta\tau$, получим соотношение «неопределённости», связывающее величины ΔR и ΔD. Значение измеряемого радиуса Вселенной будет зависеть от таких характеристик вселенских явлений (событий), как скорость их становления или разрушения.

Для критической пылевой модели Фридмана $R(t_0+t) = A + Bt + o(t)$. Значит, в первом приближении $\Delta R = B\Delta\tau$, $dR = Bdt$,

$$D = -c_1 \frac{d}{dt} \ln f_\tau(t) = -c_1 B \frac{d}{Bdt} \ln\ f_\tau \left(\frac{R(t_0+t) - A + o(t)}{B} \right) =$$

$$= -c_1 B \frac{d}{dR} \ln\ f_R\ (R) \equiv D_R.$$

Поэтому

$$\Delta R \Delta D_R \sim c_2. \tag{14.4}$$

Функция $f_R(R)$ – плотность вероятности **случайной** величины R. Её смысл – вероятность того, что Вселенная получит значение радиуса, лежащее на отрезке $[R, R+1]$, где 1 – условная единица измерения длины. По аналогии с формулой Больцмана для энтропии, можно заявить, что $\ln f_R(R)$ – это энтропия; она характеризует меру дезорганизации события-явления, означающего принятие Вселенной конкретного радиуса. Поэтому величина $D_R(R)$ характеризует *скорость нарастания дезорганизации* размеров Вселенной.

Формула (14.4) говорит, что чем точнее мы желаем узнать значение радиуса Вселенной, её объём, тем больше скорость потери полученного знания.

Точное, очень точное значения радиуса R важно уметь определять при крайне малых значениях R, в момент так называемого рождения Вселенной. Но как раз в этих условиях, как говорит формула (14.4), получаемые знания о размерах Вселенной абсолютно дезорганизованы, т.е. в огромной степени противоречивы. Иначе говоря, бессмысленно надеяться узнать что-то определённое о геометрии Вселенной тогда, когда она имеет малые размеры, т.е. в момент её рождения, именуемый Большим взрывом.

С этим согласуется то, что, согласно второму закону времени (см. [221, 66]), момент t измерения радиуса Вселенной должен быть достаточно удалён в прошлом.

Глава 15

Квантовая гравитация

В начале XX века наряду с парадигмой классического описания вещей (физических тел) стала использоваться парадигма квантового описания вещей. Вещь в квантовой физике рассматривается уже не как материальная точка, занимающая конкретное место (x, y, z) в пространстве в каждый момент времени t и, соответственно, кривая (мировая линия) $x^i = x^i(s)$ в пространстве-времени, а как *система*, свойства которой в пространстве-времени описываются комплекснозначной волновой функцией $\psi = \psi(t, x, y, z)$.

Квантовая теория – это новый, более богатый язык описания физической Реальности. Он отличается от языка классической физики не только использованием существенно более сложного математического аппарата, но и тем, что наделяет вещи массой новых, необычных с классической точки зрения свойств. Использование квантовой парадигмы требует переформулировки классических теорий физических явлений. Общая теория относительности – это чисто классическая теория. Поэтому возникает проблема построения её квантового варианта. Одним из таких *вариантов квантовой общей теории относительности*, или, как обычно говорят, *квантовой гравитации*, является созданная Уилером квантовая геометродинамика.

По мнению Уилера, уравнения Эйнштейна описывают временну́ю динамику геометрии пространства, т.е. общая теория относительности – это, в действительности, *геометродинамика.*

Квантовая геометродинамика основывается на идее суперпространства. Язык теории суперпространства Уилера – это язык квантовой теории, более сложный, чем язык общей теории относительности; он описывает пространство-время как *классическую* траекторию в суперпространстве, появляющуюся в результате квантовой интерференции.

Поскольку Вселенная развёрнута в форме пространства-времени, то квантовая геометродинамика Уилера – это квантовая теория Вселенной.

Важно заметить, что при суперпространственном описании могут при интерференции появляться несколько классических траекторий, а не только одна-единственная. Другими словами, квантовая суперпространственная теория открывает возможность для развития *многовариантной классической истории* физической Реальности, состоящей из множества вселенных.

15.1. Геометродинамика Уилера

Геометродинамика считает пространство, его геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G} = (h, K)$, где h – метрика, а K – внешняя кривизна геометрии пространства, вложенного в пространство-время, исходными понятиями. Геометрия пространства рассматривается как динамически изменяющаяся во времени t величина ${}^{(3)}\mathcal{G}_t$. При этом считается, что пространство-время ${}^{(4)}\mathcal{G}$ является вторичным понятием и строится как склейка семейства $\{{}^{(3)}\mathcal{G}_t : t \in \mathbb{R}\}$ геометрий пространства.

Изменяющаяся во времени t геометрия 3-пространства ${}^{(3)}\mathcal{G}_t = (h_t, K_t)$ должна удовлетворять фундаментальным динамическим уравнениям, которые являются иной формой уравнений Эйнштейна.

Искомые уравнения имеют вид

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial h_t}{\partial t} = \alpha K_t + L_\beta h_t, \\ &\frac{\partial K_t}{\partial t} = \alpha[2K_t \times K_t - K_t tr(K_t) - Ric(h_t)] + \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + L_\beta K_t + Hess(\alpha). \end{aligned}} \tag{15.1}$$

При почти любых α, β и начальных данных h_0, K_0 решением уравнений (15.1) будет метрика

$$g = (\alpha^2 - h_t(\beta,\beta))dt \otimes dt - \widetilde{\beta}_t \otimes dt - dt \otimes \widetilde{\beta}_t - h_t \tag{15.2}$$

$$\widetilde{\beta}_t := h_t(\beta, \cdot).$$

Таким образом, геометрия пространства-времени определяется заданием функций α, β и вычислением геометрии пространства, которое сводится к нахождению в каждый момент времени t 3-метрики пространства h_t и его внешней кривизны K_t, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений (15.1).

Покажем, как были получены уравнения (15.1) в статье Арновитта-Дизера-Мизнера [7].

Пусть

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta},\ N = (-g^{00})^{-\frac{1}{2}},\ N_\alpha = g_{0\alpha}$$

$$\pi^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}[\Gamma^0_{\mu\nu} - h_{\mu\nu}\Gamma^0_{\lambda\sigma}h^{\lambda\sigma}]h^{\alpha\mu}h^{\beta\nu}.$$

Здесь $h^{\alpha\beta}$ – матрица обратная для матрицы $h_{\alpha\beta}$.

Запишем тензоры g_{ik} g^{ik} в виде:

$$g_{00} = -(N^2 - N_\alpha N^\alpha),\quad g^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} - \frac{N^\alpha N^\beta}{N^2},$$

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2},\quad g^{0\alpha} = \frac{N^\alpha}{N^2},\quad \sqrt{-g} = N\sqrt{h},$$

где $N^\alpha = h^{\alpha\beta} N_\beta$.

Лангранжиан ОТО можно представить в следующей форме:

$$\mathcal{L}_g = \sqrt{-g}R = -h_{\alpha\beta}\frac{\partial \pi^{\alpha\beta}}{\partial t} - NR^0 - N_\alpha R^\alpha -$$

$$-2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\pi^{\alpha\beta}N_\beta - \frac{1}{2}\pi N^\alpha + N^{|\alpha}\sqrt{h}\right), \qquad (15.3)$$

где

$$R^0 \equiv -\sqrt{h}\left[{}^{(3)}R + h^{-1}\left(\frac{1}{2}\pi^2 - \pi^{\alpha\beta}\pi_{\alpha\beta}\right)\right]$$

$$R^\alpha \equiv -2\pi^{\alpha\beta}_{|\beta}$$

и $|$ означает ковариантную производную относительно метрики h. Пространственные индексы $\alpha, \beta, ... = 1, 2, 3$ опускаются и поднимаются с помощью тензоров $h_{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta}$. Индекс ${}^{(3)}$ говорит о том, что объект построен из метрики h.

Варьирование лагранжиана по π, h, а также по N^μ соответственно даёт следующие три уравнения

$$\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial t} = 2Nh^{-\frac{1}{2}}\left(\pi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\pi\right) + N_{\alpha|\beta} + N_{\beta|\alpha}, \qquad (15.4)$$

$$\frac{\partial \pi^{\alpha\beta}}{\partial t} = -N\sqrt{h}\left({}^{(3)}R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h^{\alpha\beta\,(3)}R\right) +$$

$$+\frac{1}{2}Nh^{-\frac{1}{2}}h^{\alpha\beta}\left(\pi^{\mu\nu}\pi_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\pi^2\right) - 2Nh^{-\frac{1}{2}}\left(\pi^{\alpha\nu}\pi_\nu^\beta - \frac{1}{2}\pi\pi^{\alpha\beta}\right) +$$

$$+\sqrt{h}(N^{|\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}N^\mu{}_{|\mu}) + (\pi^{\alpha\beta}N^\mu)_{|\mu} - N^\alpha{}_{|\mu}\pi^{\mu\beta} - N^\beta{}_{|\mu}\pi^{\mu\alpha}, \qquad (15.5)$$

$${}^{(4)}R^0_\mu - \frac{1}{2}\delta^0_\mu{}^{(4)}R = 0, \qquad (15.6)$$

являющиеся уравнениями Эйнштейна или их линейной комбинацией.

15.2. Суперпространство Уилера

Суперпространство Уилера было придумано с целью создания квантовой геометродинамики, т.е. варианта квантовой гравитации, основанной на представлении, что теория гравитации Эйнштейна – это *геометродинамика*, т.е. теория динамически эволюционирующей 3-мерной геометрии.

Пространство-время Вселенной является общей сценой для представления и классических, и квантовых процессов. Поскольку, с точки зрения геометродинамики, пространство-время складывается, склеивается из семейства 3-пространств, 3-геометрий ${}^{(3)}\mathcal{G}$, т.е. описывается на языке 3-геометрий, то квантовое описание Вселенной должно также исходным понятием считать множество 3-геометрий, заданных на некотором 3-мерном гладком многообразии M^3.

Во второй половине XX века наиболее проблематичной считалась космология замкнутого пространства. Поэтому Уилер рассматривал множество 3-геометрий, заданных на компактном 3-мерном гладком многообразии M^3.

В квантовой теории первичным понятием является понятие *состояния системы*. Поэтому Уилер вводит понятия состояния Вселенной и ставит ему в соответствие *функцию от 3-геометрий* – $\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})$, которую следует понимать как *волновую функцию Вселенной*.

В широко распространенной копенгагенской интерпретации квантовой механики акт измерения (наблюдения) – это взаимодействие классического прибора (аппарата) с квантовым объектом, который на этапе создания квантовой механики являлся, как правило, атомным микрообъектом. Наблюдатель должен находиться *вне* квантовой системы. Таким образом, копенгагенская школа предполагает существование особой, классической сферы. Измерение ведет к коллапсу волновой функции, имеющей вид суперпозиции. От всех слагаемых суперпозиции в результате коллапса остаётся единственное слагаемое, которое и наблюдается в классической сфере.

Однако применительно к квантовой космологии копенгагенская трактовка сталкивается с затруднением наблюдения ранней Вселенной, в которой не существует никакого классического наблюдателя. Более того, в квантовой гравитации сама Вселенная является квантовым объектом, и, следовательно, с точки зрения образования, полученного современным физиком по курсу квантовой механики, а оно проникнуто духом и идеологией копенгагенской школы, введение такой волновой функции Вселенной лишено смысла, поскольку в теории нет места для внешнего классического наблюдателя Вселенной: никто, кроме Бога, не может наблюдать квантовую Вселенную со стороны.

Очевидно, что, для того чтобы допустить в теорию волновую функцию Вселенной, необходимо позабыть принципы копенгагенской школы и перейти к новой трактовке основ квантовой механики. Такая трактовка была предложена еще в 1950-е годы Эвереттом и Уилером [209, 205]. Её краткое изложение дано ниже в § 15.9.

Дадим теперь более формальное определение суперпространства.

> *Суперпространство Уилера* $\mathcal{S}(M^3)$ – это множество всех 3-мерных римановых геометрий ${}^{(3)}\mathcal{G}$, заданных на компактном 3-мерном гладком многообразии M^3. Эти геометрии возникают при рассмотрении пространственно-подобных сечений 4-мерного пространства-времени.

Пусть $Riem(M^3)$ – множество всех римановых метрик $h_{\alpha\beta}$ на многообразии M^3.

Каждая риманова метрика определена с точностью до диффеоморфизма. Иначе говоря, метрика задаётся в той или иной локальной карте, и эти карты можно менять, изменяя при этом вид метрики. При этом, однако, все изменённые посредством диффеоморфизма метрики $h_{\alpha\beta}$ отвечают одной и той же римановой геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}$.

Обозначим допустимые диффеоморфизмы символом $Diff(M^3)$. Отождествим все метрики-точки в $Riem(M^3)$, преобразуемые друг в друга посредством диффеоморфизма $Diff(M^3)$.

В результате получим суперпространство Уилера:

$$\mathcal{S}(M^3) = Riem(M^3)/Diff_0(M^3).$$

Теорема 15.1. *Суперпространство* $\mathcal{S}(M^3)$ *– это связное метризуемое топологическое пространство со счётной базой.*

15.3. Геометрия суперпространства

В этом параграфе показано, что в суперпространстве можно определить некоторый аналог псевдоримановой геометрии.

15.3.1. Суперметрика

В суперпространстве вводится суперметрика ДеВитта («расстояние» между двумя близкими 3-мерными римановыми пространствами):

$$\delta\sigma^2 = \int\limits_{M^3} G_{\alpha\beta\gamma\delta}\delta h^{\alpha\beta}\delta h^{\gamma\delta} d^3x, \tag{15.7}$$

где

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{\alpha\gamma}h_{\delta\beta} + h_{\alpha\delta}h_{\gamma\beta} - h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}), \tag{15.8}$$

и

$$G^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\sqrt{h}(h^{\alpha\gamma}h^{\delta\beta} + h^{\alpha\delta}h^{\gamma\beta} - 2h^{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}), \tag{15.9}$$

$$G_{\alpha\beta\mu\nu}G^{\mu\nu\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta + \delta^\delta_\alpha\delta^\gamma_\beta). \tag{15.10}$$

Можно записать, что

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(h_{\alpha(\gamma}h_{\delta)\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}\right). \tag{15.11}$$

Поскольку суперметрика появляется во всех выкладках, как правило, в произведениях вида $G_{\alpha\beta\gamma\delta}h^{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}$, где $h^{\alpha\beta}$ – симметричный тензор, то часто вместо выражения (15.8) или (15.11) используют выражение [177, p.49]

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{\sqrt{h}}\left(h_{\alpha\gamma}h_{\delta\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}\right) = \tag{15.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h}}\left(\frac{1}{2}h_{\alpha(\gamma}h_{\delta)\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha[\gamma}h_{\delta]\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}\right).$$

15.3.2. Сигнатура суперметрики

Суперметрика ДеВитта может быть записана как

$$G_{AB} = G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}(x),$$

где $A, B = 1, ..., 6$ – парный индекс, определяемый следующим образом:

$$A, B \in \{h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{22}, h_{23}, h_{33}\}.$$

Форма $G_{AB}h^A h^B$ имеет сигнатуру $(- + + + ++)$ в каждой точке.

15.3.3. Аффинная связность и уравнение геодезических

Рассмотрим другой вариант суперметрики [191]:

$$G_{AB} = G_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\gamma}h_{\delta\beta} + h_{\alpha\delta}h_{\gamma\beta} - 2h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}) \tag{15.13}$$

и

$$G^{AB} = G^{(\alpha\beta)(\gamma\delta)} = \frac{1}{2}(h^{\alpha\gamma}h^{\delta\beta} + h^{\alpha\delta}h^{\gamma\beta} - h^{\alpha\beta}h^{\gamma\delta}). \tag{15.14}$$

Положим, что

$$\Gamma^A_{BC} = \frac{1}{2}G^{AD}\left(\frac{\partial G_{BD}}{\partial h^C} + \frac{\partial G_{DC}}{\partial h^B} - \frac{\partial G_{BC}}{\partial h^D}\right), \tag{15.15}$$

определяя тем самым аналог аффинной связности.

Тогда для эволюционирующей в силу уравнений Эйнштейна 3-геометрии $h_A(\lambda)$ справедливо равенство:

$$\frac{d^2 h^A}{d\mu^2} + \Gamma^A_{BC} \frac{dh^B}{d\mu} \frac{dh^C}{d\mu} = \frac{1}{2} G^{AB} \frac{\partial(h\ {}^{(3)}R)}{\partial h^B}. \tag{15.16}$$

Как видим, оно отлично от уравнений геодезических. Однако если произвести преобразования

$$\widetilde{G}_{AB} = h\ {}^{(3)}R G_{AB}, \quad \widetilde{G}^{AB} = (h\ {}^{(3)}R)^{-1} G^{AB},$$

$$d\widetilde{\mu} = h\ {}^{(3)}R d\mu,$$

то уравнения (15.16) принимают следующий вид [191]:

$$\frac{d^2 h^A}{d\widetilde{\mu}^2} + \widetilde{\Gamma}^A_{BC} \frac{dh^B}{d\widetilde{\mu}} \frac{dh^C}{d\widetilde{\mu}} = 0. \tag{15.17}$$

Аналогичное свойство было доказано Ю.С. Владимировым (см. § 15.4).

Ясно, что, по аналогии с ОТО, с помощью аффинной связности (15.15) можно определить тензор кривизны R^A_{BCD} и вывести *уравнение деривации* [191]:

$$\frac{D^2 \xi^A}{D\widetilde{\mu}^2} = -R^A_{BCD} \frac{dg^B}{d\widetilde{\mu}} \xi^C \frac{dg^D}{d\widetilde{\mu}}. \tag{15.18}$$

15.4. Уравнения Эйнштейна как геодезические в суперпространстве

Покажем, что уравнения Эйнштейна в суперпространстве соответствуют движению по геодезической линии под воздействием дополнительной «силы» [5].

15.4.1. Уравнения Эйнштейна как кинеметрически-инвариантные канонические уравнения

Выберем так называемую кинеметрическую локальную карту, в которой тензор g_{ik} представляется в виде [18]:

$$g^{ik} = \tau^i \tau^k - h^{ik}, \tag{15.19}$$

причем

$$\tau^i = \frac{g^{0i}}{\sqrt{g^{00}}}, \quad h^{ik} = \frac{g^{0i}g^{0k}}{g^{00}} - g^{ik},$$

$$h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}, \quad h_{0\alpha} = -g_{0\alpha}, \quad h^{0i} = 0,$$

$$h_{00} = \frac{1 - g_{00}g^{00}}{g^{00}}.$$

Это означает, что выбрано семейство пространственно-подобных 3-многообразий, на которых задана риманова метрика $h_{\alpha\beta}$ – выбор *пространства*, – и которым трансверсально времениподобное векторное поле τ^i – ось времени.

Метрика $h_{\alpha\beta}$ ведёт себя как тензор относительно *кинеметрических преобразований*

$$\begin{cases} x'^0 = x'^0(x^0), \\ x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3). \end{cases}$$

Вводим кинеметрически-инвариантные производные для к.и. тензоров:

$$\frac{\partial A^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots}}{\partial\tau} = \tau^i \frac{\partial A^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots}}{\partial x^i} - N^\gamma_\nu A^{\nu\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots} - N^\delta_\nu A^{\gamma\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots} - \ldots$$

$$\ldots + N^\nu_\alpha A^{\gamma\delta\ldots}_{\nu\beta\ldots} + N^\nu_\beta A^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\nu\ldots} + \ldots, \tag{15.20}$$

$$\widehat{\partial}_\mu A^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots} = \frac{\partial A^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots}}{\partial x^\mu} + L^\gamma_{\nu\mu} A^{\nu\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + L^\delta_{\nu\mu} A^{\gamma\nu\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \ldots$$

$$\ldots - L^\nu_{\alpha\mu} A^{\gamma\delta\ldots}_{\nu\beta\ldots} - L^\nu_{\beta\mu} A^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\nu\ldots} - \ldots, \tag{15.21}$$

где

$$N^{\alpha}_{\nu} = \frac{\partial \tau^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} - \tau^{\alpha} F_{\nu},$$

$$F_{\alpha} = \tau_0 \frac{\partial \tau^0}{\partial x^{\alpha}},$$

$$L^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} h^{\gamma\nu} \left(\frac{\partial h_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right).$$

Рассмотрим лагранжиан

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} g^{ik} (\Gamma^{l}_{ik} \Gamma^{s}_{ls} - \Gamma^{m}_{in} \Gamma^{n}_{mk}). \tag{15.22}$$

Имеем первичные уравнения связи

$$\pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial \tau^k}{\partial x^0} \right)} = 0.$$

Этим первичным связям соответствуют дираковские вторичные связи, гамильтонова и продольные:

$$\mathcal{H} = \sqrt{h}[(D_{\alpha\beta} D^{\alpha\beta} - D^2) + {}^{(3)}R] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{h}} (\pi_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \pi^2) + \sqrt{h}\ {}^{(3)}R = 0, \tag{15.23}$$

$$\mathcal{H}_{\alpha} = -2\sqrt{h} \left(-\widehat{\partial}_{\alpha} D + \widehat{\partial}_{\beta} D^{\beta}_{\alpha} \right) =$$

$$= 2 \frac{\partial \pi^{\beta}_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \pi_{\beta\gamma} \frac{\partial h^{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = 0, \tag{15.24}$$

где

$$\pi_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\dfrac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial x^0} \right)} = -\sqrt{h} (D_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} D), \tag{15.25}$$

$${}^{(3)}R = -h^{\alpha\beta}\,{}^{(3)}R_{\alpha\beta}$$

– скалярная кривизна 3-пространственных сечений,

$${}^{(3)}R_{\alpha\beta} = \frac{\partial L^{\nu}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial L^{\nu}_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + L^{\nu}_{\alpha\beta} L^{\mu}_{\nu\mu} - L^{\nu}_{\alpha\mu} L^{\mu}_{\beta\nu},$$

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\tau^m \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^m} + h_{\alpha i}\frac{\partial \tau^i}{\partial x^\beta} + h_{i\beta}\frac{\partial \tau^i}{\partial x^\alpha}\right). \quad (15.26)$$

Уравнения (15.23), (15.24) – это четыре уравнения Эйнштейна ($G_{00} = G_{0\alpha} = 0$). Оставшиеся шесть уравнений Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$ – это канонические уравнения

$$\boxed{\tau_0 \frac{\partial \pi_{\alpha\beta}}{\partial \tau} = -\frac{\delta \mathcal{H}_{\text{эфф}}}{\delta h^{\alpha\beta}}} \quad (15.27)$$

или

$$\frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial \tau} + 2D_{\alpha\nu}D^\nu_\beta - DD_{\alpha\beta} - F_\alpha F_\beta + \frac{1}{2}(\widehat{\partial}_\alpha F_\beta + \widehat{\partial}_\beta F_\alpha) +$$
$$+ {}^{(3)}R_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\Bigg(2\frac{\partial D}{\partial \tau} + 2\widehat{\partial}_\mu F^\mu -$$
$$-2F_\mu F^\mu - D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} - D^2 + {}^{(3)}R\Bigg) = 0, \quad (15.28)$$

где

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} = \frac{1}{\tau_0}\mathcal{H}.$$

Другая половина канонических уравнений имеет вид:

$$\boxed{\tau_0 \frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial \tau} = \frac{\delta \mathcal{H}_{\text{эфф}}}{\delta \pi_{\alpha\beta}}} \quad (15.29)$$

или

$$\tau_0 \frac{\partial h^{\alpha\beta}}{\partial \tau} = \frac{2\tau_0}{\sqrt{h}}\left(\pi^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\pi\right).$$

15.4.2. Уравнения Эйнштейна как геодезические

Вводим аналог символов Кристоффеля в суперпространстве

$$\Gamma^{\gamma\delta\mu\nu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}G_{\alpha\beta\lambda\tau}\left(\frac{\delta G^{\mu\nu\lambda\tau}}{\delta h_{\gamma\delta}} + \frac{\delta G^{\gamma\delta\lambda\tau}}{\delta h_{\mu\nu}} - \frac{\delta G^{\gamma\delta\mu\nu}}{\delta h_{\lambda\tau}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{8}[h^{\gamma\mu}(\delta^\delta_\beta\delta^\nu_\alpha + \delta^\delta_\alpha\delta^\nu_\beta) + h^{\gamma\nu}(\delta^\delta_\beta\delta^\mu_\alpha + \delta^\delta_\alpha\delta^\mu_\beta) + h^{\delta\mu}(\delta^\gamma_\alpha\delta^\nu_\beta + \delta^\gamma_\beta\delta^\nu_\beta) +$$
$$+ h^{\delta\nu}(\delta^\gamma_\alpha\delta^\mu_\beta + \delta^\gamma_\beta\delta^\mu_\alpha) - h^{\gamma\delta}(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta + \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha) - h^{\mu\nu}(\delta^\gamma_\alpha\delta^\delta_\beta + \delta^\gamma_\beta\delta^\delta_\alpha) -$$
$$-\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}(h^{\gamma\mu}h^{\delta\nu} + h^{\gamma\nu}h^{\delta\mu} - 2h^{\gamma\delta}h^{\mu\nu})]. \tag{15.30}$$

Используя (15.26) и (15.30), находим

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial\tau} = 2\frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial\tau}, \tag{15.31}$$

$$\Gamma^{\gamma\delta\mu\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial\tau}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial\tau} = 4D_{\alpha\lambda}D^\lambda_\beta - 2DD_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} - D^2)h_{\alpha\beta}. \tag{15.32}$$

Для получения уравнений Эйнштейна (15.28) надо к формулам (15.31) и (15.32) добавить выражения, равные нулю в пустом пространстве, т.е.

$${}^{(4)}R = {}^{(3)}R + 2\frac{\partial D}{\partial\tau} - (D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} + D^2) + 2(\widehat{\partial}_\mu F^\mu - F_\lambda F^\lambda) = 0,$$
$$\frac{R^{00}}{g^{00}} = \frac{\partial D}{\partial\tau} - D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} + (\widehat{\partial}_\mu F^\mu - F_\lambda F^\lambda) = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}[(15.31) + (15.31)]_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\left(\frac{R^{00}}{g^{00}} + \frac{1}{2}{}^{(4)}R\right) =$$
$$= \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial\tau} + 2D_{\alpha\lambda}D^\lambda_\beta - DD_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\left(2\frac{\partial D}{\partial\tau} - D_{\mu\nu}D^{\mu\nu} - D^2\right) +$$
$$+ \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\left(2\widehat{\partial}_\mu F^\mu - 2F_\lambda F^\lambda + \frac{1}{2}{}^{(3)}R\right). \tag{15.33}$$

Откуда

$$\frac{\delta(\sqrt{h}\ {}^{(3)}R)}{\delta h^{\alpha\beta}} = \sqrt{h}[-{}^{(3)}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}{}^{(3)}R - h_{\alpha\beta}(\widehat{\partial}_\mu F^\mu - F_\mu F^\mu) -$$
$$-\frac{1}{2}(\widehat{\partial}_\alpha F_\beta + \widehat{\partial}_\beta F_\alpha) + F_\alpha F_\beta]; \tag{15.34}$$

$$h^{\mu\nu}\frac{\delta(\sqrt{h}\ {}^{(3)}R)}{\delta h^{\mu\nu}} = \sqrt{h}\left(-\frac{1}{2}{}^{(3)}R - 2\widehat{\partial}_\lambda F^\lambda + 2F_\lambda F^\lambda\right), \qquad (15.35)$$

где

$$\frac{\delta}{\delta h^{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial}{\partial h^{\mu\nu}} - \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial h^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}\right)}.$$

Из (15.34), (15.34) и (15.35) получаем, что уравнения Эйнштейна в виде (15.28) могут быть записаны в виде:

$$\boxed{\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial\tau^2} + \Gamma^{\gamma\delta\mu\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial\tau}\frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial\tau} = -2G_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\delta(\sqrt{h}\ {}^{(3)}R)}{\delta h_{\mu\nu}}.} \qquad (15.36)$$

Это уравнения геодезических в суперпространстве. Правая часть, отличная от нуля, появляется из-за выбора параметра τ вдоль геодезической.

15.5. Уравнение Уилера-ДеВитта

С точки зрения квантовой теории, физическое пространство M^3, как физическая система, должно иметь ту или иную 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ с той или иной амплитудой вероятности. Иначе говоря, необходимо ввести волновую функцию $\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})$, определённую на суперпространстве Уилера, квадрат модуля которой $|\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})|^2$ следует рассматривать как амплитуду вероятности физического пространства иметь 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$.

Но этого ещё мало. Необходимо найти уравнение, которому должна удовлетворять волновая функция $\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})$, поскольку наличие уравнения не допускает в теорию любые функции, а только те, которые действительно связывают пространство M^3 как протяженности с его возможной геометрией ${}^{(3)}\mathcal{G}$.

Это уравнение было найдено Уилером и ДеВиттом, и часто называется WDV-уравнением.

15.5.1. Вывод WDV-уравнения

Вернемся к представлению ОТО в ADM форме (см. § 15.1). Определяем сопряжённые к $h_{\alpha\beta}$, N, N_α переменные:

$$\pi^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^0}\right)} = -\frac{\sqrt{h}\; m_p^2}{16\pi}(K^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}K), \tag{15.37}$$

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial\left(\dfrac{\partial N}{\partial x^0}\right)} = 0,$$

$$\pi^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial\left(\dfrac{\partial N_\alpha}{\partial x^0}\right)} = 0,$$

где $\mathcal{L}_g$ – гравитационный лагранжиан, данный формулой (15.3), а $K_{\alpha\beta}$, K – тензор внешней кривизны 3-пространства и его след.

Равенство нулю переменных π^0, π^α означает, что имеем *первичные связи* в терминологии Дирака.

Гамильтониан представляется в следующем виде:

$$H = \int\left(\pi^{\alpha\beta}\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^0} - \mathcal{L}_g\right)d^3x =$$

$$= \int\left(\pi^0\frac{\partial N}{\partial x^0} + \pi^\alpha\frac{\partial N_\alpha}{\partial x^0} + N^0\mathcal{H} + N^\alpha\mathcal{H}_\alpha\right)d^3x =$$

$$= \int(N^0\mathcal{H} + N^\alpha\mathcal{H}_\alpha)d^3x, \tag{15.38}$$

где

$$\mathcal{H} = 2\pi\varkappa\, G_{\alpha\beta\gamma\delta}\pi^{\alpha\beta}\pi^{\gamma\delta} - \frac{\sqrt{h}}{2\pi\varkappa}\,{}^{(3)}R, \tag{15.39}$$

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4},$$

$$\mathcal{H}^\alpha = -2\pi^{\alpha\beta}_{|\beta} \tag{15.40}$$

и

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{\alpha\gamma}h_{\delta\beta} + h_{\alpha\delta}h_{\gamma\beta} - h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}).$$

Для действия имеем

$$S_g = \int H dx^0 = \int (N^0\mathcal{H} + N^\alpha \mathcal{H}_\alpha) d^4x.$$

Вариация S_g по $\pi^{\alpha\beta}$ дает формулу (15.37). Функции N, N_α рассматриваем как лагранжевы множители. Тогда вариация по ним дает *вторичные связи*:

$$\begin{aligned} &\mathcal{H} = 0, \\ &\mathcal{H}_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{15.41}$$

Эти связи суть не что иное, как (00)- и (0α)-компоненты уравнений Эйнштейна.

Основываясь на методе Дирака по проведению квантования системы со связями, произведем замены переменных на дифференциальные операторы

$$\pi^{\alpha\beta} \to -i\hbar \frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}}.$$

Делая эту замену во вторичных связях, получаем уравнения

$$\begin{aligned} &\hat{\mathcal{H}}\Psi = 0, \\ &\hat{\mathcal{H}}_\alpha \Psi = 0, \end{aligned} \tag{15.42}$$

первое из которых называется *уравнением Уилера-ДеВитта.*

Из уравнений (15.42) видно, что волновая функция Ψ есть функция от переменной $h_{\alpha\beta}$, а точне от 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}$, которая определяется 3-метрикой $h_{\alpha\beta}$. Другими словами, уравнение Уилера-ДеВитта задано на суперпространстве Уилера.

С учётом негравитационных материальных полей, обозначаемых через φ и космологической постоянной Λ, уравнение

Уилера-ДеВитта принимает следующий вид:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\frac{16\pi G\hbar^2}{c^4}G_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}}\frac{\delta}{\delta h_{\gamma\delta}}+\right.\\&\left.+\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{h}({}^{(3)}R-2\Lambda-2\pi\varkappa\hat{T}^{00}(\varphi))\right]\Psi({}^{(3)}\mathcal{G},\varphi)=0,\end{aligned}} \tag{15.43}$$

где

$$\hat{T}^{00}=\hat{T}^{00}\left(\frac{\delta}{\delta\varphi},\varphi\right).$$

Дополнительно к нему имеем также уравнения

$$-i\hbar\left[\frac{\delta\Psi({}^{(3)}\mathcal{G},\varphi)}{\delta h_{\alpha\beta}}\right]_{|\beta}=\frac{8\pi G}{c^4}\hat{T}^{0\alpha}(\varphi)\Psi({}^{(3)}\mathcal{G},\varphi).$$

Как видим, квантовая геометродинамика не содержит никакого временного параметра, она *вневременна*.

15.5.2. Граничное условие ДеВитта

Для уравнения (15.43) ДеВитт сформулировал граничное условие [205]

$$\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})=0 \tag{15.44}$$

для всех 3-геометрий ${}^{(3)}\mathcal{G}$, отнесённых к «барьерам», например имеющих сингулярности. По идее, краевая задача (15.43), (15.44) должна иметь единственное решение. Так ли это? – Неизвестно.

15.5.3. Граничное условие Хоукинга-Хартли

При повороте Вика $t\to -i\tau$ псевдориманова метрика g сигнатуры $<+---->$ переходит в риманову метрику g_E сигнатуры $<++++>$, а действие S становится *евклидовым* действием I, точнее, $iS[g]=-I[g_E]$.

Граничное условие Хоукинга-Хартли (no-boundary proposal)

$$\Psi({}^{(3)}\mathcal{G}) = \sum_{\substack{M^4, \\ M^4 - \text{компактное} \\ \partial M^4 = M^3}} \int\limits_{\langle M^4, {}^{(4)}g_E \rangle} e^{-I({}^{(4)}g_E)} \mathcal{D}[{}^{(4)}\mathcal{G}_E] \qquad (15.45)$$

говорит о том, что рассматриваются только те пространства-времена M^4, которые имеют только одну границу – наблюдаемое M^3. Значит, в прошлом у Вселенной нет сингулярной границы.

15.5.4. Граничное условие туннелирования

Идея рождения Вселенной из *ничего* путём квантового туннелирования была впервые предложена Аткатцем и Пагелсом [185] и развита Виленкиным [300].

Граничное условие туннелирования (tunneling proposal) имеет вид

$$\Psi({}^{(3)}\mathcal{G}) = \sum_{\substack{M^4, \\ \partial M^4 = M^3}} \int\limits_{\emptyset}^{{}^{(3)}\mathcal{G}} e^{-\frac{i}{\hbar} S({}^{(4)}g)} \mathcal{D}[{}^{(4)}\mathcal{G}], \qquad (15.46)$$

т.е. состояние Вселенной $\langle M^3, {}^{(3)}\mathcal{G} \rangle$ появляется из ничего, из $\emptyset$, обозначающего исчезающую 3-геометрию ($h_{\alpha\beta} \equiv 0$).

15.6. Уравнение Эйнштейна-Гамильтона-Якоби

Примем, что

$$\Psi({}^{(3)}\mathcal{G}) = A(h) e^{\frac{iS}{\hbar}}, \qquad (15.47)$$

где

$$\left| \frac{\delta A}{\delta h_{\alpha\beta}} \right| \ll \left| A \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} \right|. \qquad (15.48)$$

Подставляя (15.47) в уравнение Уилера-ДеВитта и используя условие (15.48), позволяющее пренебречь некоторыми членами, выводим *уравнение Эйнштейна-Гамильтона-Якоби* для фазы:

$$\boxed{G_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}}\right)\left(\frac{\delta S}{\delta h_{\gamma\delta}}\right)-\sqrt{h}\ {}^{(3)}R=0} \tag{15.49}$$

и одновременно уравнение для амплитуды

$$\frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}}\left(A^2 G_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\delta S}{\delta h_{\gamma\delta}}\right)=0.$$

Данный подход получения приближенного решения уравнения Уилера-ДеВитта называется *квазиклассическим приближением*.

15.7. Классическое пространство-время, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна, как интерференция волн вида $\exp(iS/\hbar)$

Покажем [212], как появляется в суперпространстве в форме траектории классическое пространство-время, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна, впрочем, как и сами уравнения Эйнштейна, в результате интерференции волновых функций вида

$$\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})\sim e^{\frac{i}{\hbar}S(h)},$$

где $S(h)$ – решение уравнения Эйнштейна-Гамильтона-Якоби

$$\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}\left(\frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}}\right)\left(\frac{\delta S}{\delta h_{\gamma\delta}}\right)+{}^{(3)}R=0, \tag{15.50}$$

$$\tilde{G}_{\alpha\beta\gamma\delta}=h^{-1}(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta}-h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta}).$$

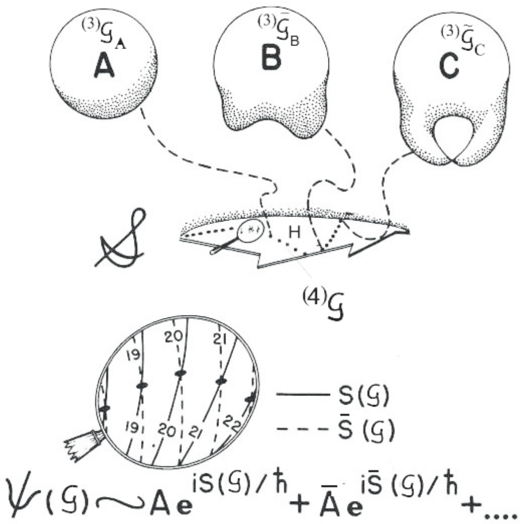

Рис. 15.1: Появление классического пространства-времени в результате интерференции: точки A, B, C на линии H – конкретные 3-пространства, оснащённые геометрией ${}^{(3)}\mathcal{G}_A, {}^{(3)}\overline{\mathcal{G}}_B, {}^{(3)}\widetilde{\mathcal{G}}_C$ соответственно (и топологией); линия H – пространство-время ${}^{(4)}\mathcal{G}$. Рис. из [157].

Точнее, рассматривается волновая функция

$$\psi({}^{(3)}\mathcal{G}) = Ae^{\frac{i}{\hbar}S({}^{(3)}\mathcal{G})} + \overline{A}e^{\frac{i}{\hbar}\overline{S}({}^{(3)}\mathcal{G})} + \widetilde{A}e^{\frac{i}{\hbar}\widetilde{S}({}^{(3)}\mathcal{G})} + ...$$

15.7.1. Условие интерференции волновых функций

Классическое пространство-время состоит из всех тех пространственно-подобных 3-геометрий, которые составляют разрез определённой 4-геометрии ${}^{(4)}\mathcal{G}$ (рис. 15.1). Входящие в неё 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}_A, {}^{(3)}\overline{\mathcal{G}}_B, {}^{(3)}\widetilde{\mathcal{G}}_C$ отличаются от других тем, что для них выполняется условие интерференции:

$$S({}^{(3)}\mathcal{G}) = \overline{S}({}^{(3)}\mathcal{G}) = \widetilde{S}({}^{(3)}\mathcal{G}) = ...$$

Иначе говоря, в точках суперпространства, где волновые гребни встречаются и фазы их совпадают, имеет место интерференция и там локализуется волновой пакет (линия H на рис. 15.1) и появляется классическое пространство-время ${}^{(4)}\mathcal{G}$.

15.7.2. Вывод уравнений Эйнштейна в гамильтоновой форме

Помимо удовлетворения уравнению Эйнштейна-Гамильтона-Якоби, действие S, коль скоро оно является функционалом от 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}$, должно удовлетворять дополнительно еще уравнениям

$$\left[\frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}}\right]_{|\beta} = 0, \tag{15.51}$$

где $|$ означает ковариантное 3-мерное дифференцирование по x^β (см.[212, с.1932]).

Примем как гипотезу что решение уравнения (15.50)

$$S({}^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u), \beta(u))$$

зависит от двух функций: $\alpha(u), \beta(u)$, где $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Волновой пакет

$$e^{\frac{i}{\hbar}S({}^{(3)}\mathcal{G},\alpha(u),\beta(u))} + e^{\frac{i}{\hbar}S({}^{(3)}\mathcal{G},\alpha(u)+\delta\alpha(u),\beta(u)+\delta\beta(u))}, \tag{15.52}$$

во-первых, содержит 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}_A, {}^{(3)}\mathcal{G}_B, {}^{(3)}\mathcal{G}_C, \ldots$, фиксируемые условием вида[1]

$$\begin{aligned} 19 = S({}^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u) + \delta\alpha(u), \beta(u) + \delta\beta(u)) = \\ = S({}^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u), \beta(u)), \end{aligned} \tag{15.53}$$

во-вторых, содержит 3-геометрии ${}^{(3)}\overline{\mathcal{G}}_A, {}^{(3)}\overline{\mathcal{G}}_B, {}^{(3)}\overline{\mathcal{G}}_C, \ldots$, фиксируемые условием вида

$$20 = S({}^{(3)}\mathcal{G} + d{}^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u) + \delta\alpha(u), \beta(u) + \delta\beta(u)) =$$

[1] Числа 19; 20; 21 не являются какими-то особенными и взяты как пример.

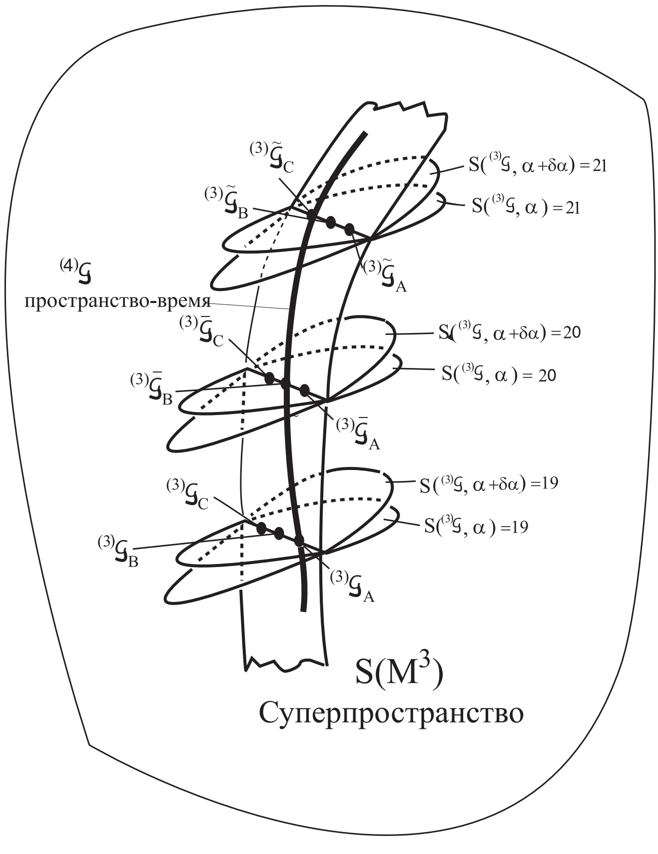

Рис. 15.2: Пространство-время возникает как интерференция волновых функций.

$$= S(^{(3)}\mathcal{G} + d^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u), \beta(u)), \tag{15.54}$$

в-третьих, содержит 3-геометрии $^{(3)}\widetilde{\mathcal{G}}_A, {}^{(3)}\widetilde{\mathcal{G}}_B, {}^{(3)}\widetilde{\mathcal{G}}_C, ...$, фиксируемые условием вида

$$21 = S(^{(3)}\mathcal{G} + \delta^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u) + \delta\alpha(u), \beta(u) + \delta\beta(u)) =$$

$$= S({}^{(3)}\mathcal{G} + \delta{}^{(3)}\mathcal{G}, \alpha(u), \beta(u)),$$

и так далее (см. рис. 15.2).

В суперпространстве $\mathcal{S}(M^3)$ через 3-геометрии с разным значением фазы $S(\mathcal{G}^{(3)}, \alpha(u), \beta(u))$ проходят 1-параметрические траектории, например ${}^{(3)}\mathcal{G}_A \to {}^{(3)}\overline{\mathcal{G}}_B \to {}^{(3)}\widetilde{\mathcal{G}}_C$ (см. рис. 15.2). Это классические траектории, несущие 4-мерную лоренцеву геометрию и удовлетворяющие, как показывается ниже, уравнениям Эйнштейна. Они являются результатом интерференции в волновом пакете (15.52).

Метрика $h_{\alpha\beta}(x)$ – это 6 функций, зависящих от 3-мерной величины $x = (x^1, x^2, x^3)$. Каждое x^α – это ∞ значений. Значит, метрика $h_{\alpha\beta}(x)$ задаётся $6 \times \infty^3$ значений. Наличие 4-х связей (15.50), (15.51) есть использование $4 \times \infty^3$ значений. Таким образом, для описания 3-метрики остаётся $2 \times \infty^3 = 6 \times \infty^3 - 4 \times \infty^3$ значений.

Фиксация (выбор) конкретной 3-геометрии ${}^{(3)}\mathcal{G}$ – это фиксация класса 3-метрик $(f_* h)_{\alpha\beta}(x)$, связанных диффеоморфизмом $f = (f^1, f^2, f^3)$, описываемом $3 \times \infty^3$ значениями. С учётом свободы в $2 \times \infty^3$ значений для задания 3-метрики получаем, что при фиксации 3-геометрии в нашем распоряжении остается $1 \times \infty^3 = 3 \times \infty^3 - 2 \times \infty^3$ значений, которым соответствует 1 функция от x'. Обозначим ее через $\sigma(x')$.

Следовательно, указание на фиксированную 3-геометрию ${}^{(3)}\mathcal{G}$ символически можно обозначить как ${}^{(3)}\mathcal{G}(\sigma(x'))$ или, посредством 3-метрики, $h_{\alpha\beta}(x, \sigma(x'))$. Тем самым, 3-метрика – это функционал от $\sigma(x')$.

Тогда принимаем, что

$$\delta h_{\alpha\beta}(x) = \int \frac{\delta h_{\alpha\beta}(x, \sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} \delta\sigma(x') d^2x'. \tag{15.55}$$

Вычитая (15.53) из (15.54), имеем

$$\frac{\delta S}{\delta{}^{(3)}\mathcal{G}}(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta) d{}^{(3)}\mathcal{G} = \frac{\delta S}{\delta{}^{(3)}\mathcal{G}}(\alpha, \beta) d{}^{(3)}\mathcal{G}. \tag{15.56}$$

Разницу между

$${}^{(3)}\mathcal{G} \ \text{ и } \ {}^{(3)}\overline{\mathcal{G}} = {}^{(3)}\mathcal{G} + d{}^{(3)}\mathcal{G},$$

т.е. $d^{(3)}\mathcal{G}$, примем равной

$$\frac{\delta^{(3)}\mathcal{G}}{\delta\sigma(x')}.$$

Тогда (15.56) можно представить в виде

$$\delta\left(\frac{\delta S}{\delta^{(3)}\mathcal{G}}\right)\frac{\delta^{(3)}\mathcal{G}}{\delta\sigma(x')} = 0, \tag{15.57}$$

где

$$\delta\left(\frac{\delta S}{\delta^{(3)}\mathcal{G}}\right)$$

обозначает изменение $\delta S/\delta^{(3)}\mathcal{G}$, обязанное бесконечно малому изменению параметров $\alpha(u), \beta(u)$.

Делая подстановки

$$\frac{\delta^{(3)}\mathcal{G}}{\delta\sigma(x')} \to \frac{\delta h_{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')},$$

$$\frac{\delta S}{\delta^{(3)}\mathcal{G}} \to \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}} = \pi^{\alpha\beta},$$

где $\pi^{\alpha\beta}$ должно удовлетворять равенству

$$\pi^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0, \tag{15.58}$$

условие (15.57) и уравнение Эйнштейна-Гамильтона-Якоби приводим к виду

$$\int \delta\pi^{\alpha\beta}\frac{\delta h_{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}d^3x = 0, \tag{15.59}$$

$${}^{(3)}R + h^{-1}(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} - h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta})\pi^{\alpha\beta}\pi^{\gamma\delta} = 0. \tag{15.60}$$

Умножим (15.59) на $\delta\sigma(x')$, проинтегрируем по d^3x' и воспользуемся (15.56). Получим

$$\int \delta\pi^{\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta}(x)d^3x = 0. \tag{15.61}$$

Это уравнение означает, что ищется условный экстремум

$$\delta_{\pi^{\alpha\beta}} \int \pi^{\alpha\beta} \delta h_{\alpha\beta}(x) d^3x = 0 \tag{15.62}$$

относительно $\pi^{\alpha\beta}$ с наложенными четырьмя связями:

$$r_0 \equiv \sqrt{h}[^{(3)}R + h^{-1}(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} - h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta})\pi^{\alpha\beta}\pi^{\gamma\delta}] = 0, \tag{15.63}$$

$$\pi^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0, \tag{15.64}$$

где

$$\pi^{\alpha\beta} = \frac{\delta S}{\delta h_{\alpha\beta}}. \tag{15.65}$$

Условный экстремум сводится к безусловному путём умножения связей на неопределённые коэффициенты и добавление к (15.62):

$$\delta_{\pi^{\alpha\beta}} \int [\pi^{\alpha\beta}\delta h_{\alpha\beta}(x) + \delta M r_0 + 2\delta M_\alpha \pi^{\alpha\beta}{}_{|\beta}] d^3x = 0. \tag{15.66}$$

Варьируя, получаем:

$$\int\limits_{M^3} \left[\delta h_{\alpha\beta}\delta\pi^{\alpha\beta} + \delta M \left(\frac{\partial r_0}{\partial \pi^{\alpha\beta}}\right)\delta\pi^{\alpha\beta} - 2\delta M_{\alpha|\beta}\delta\pi^{\alpha\beta}\right] d^3x +$$

$$+ \int\limits_{\partial M^3} \delta M_\alpha \delta\pi^{\alpha\beta} dS_\beta = 0. \tag{15.67}$$

Поверхностный интеграл равен нулю в силу граничного условия. Поэтому из (15.67) имеем

$$\delta h_{\alpha\beta} = -\delta M \left(\frac{\partial r_0}{\partial \pi^{\alpha\beta}}\right) + 2\delta M_{\alpha|\beta}$$

или

$$\delta h_{\alpha\beta} = -2\delta M (h)^{-\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} h_{\alpha\beta}\pi^\lambda_\lambda - \pi_{\alpha\beta}) + 2\delta M_{(\alpha|\beta)}, \tag{15.68}$$

где

$$M_{(\alpha|\beta)} = \frac{1}{2}(M_{\alpha|\beta} + M_{\beta|\alpha}).$$

Пусть

$$\delta M(x) = \int \frac{\delta M(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}\delta\sigma(x')d^2x',$$

$$\delta M_\alpha(x) = \int \frac{\delta M_\alpha(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}\delta\sigma(x')d^2x'.$$

Подставляя это в (15.68) и используя (15.56), получим, в силу произвольности вариации $\delta\sigma(x')$,

$$\frac{\delta h_{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} = -2\frac{\delta M(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}(h)^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\pi^\beta_\beta - \pi_{\alpha\beta}) +$$

$$+2\frac{\delta M_{(\alpha|\beta)}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}. \tag{15.69}$$

Пусть

$$H_0(x') = -\int \frac{\delta M(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}r_0(x)d^3x, \tag{15.70}$$

$$H_1(x') = -2\int \frac{\delta M_\alpha(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}\pi^{\alpha\beta}{}_{|\beta}(x)d^3x. \tag{15.71}$$

Тогда (15.69) можно переписать в виде:

$$\frac{\delta h_{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} = \frac{\delta[H_0(x') + H_1(x')]}{\delta\pi^{\alpha\beta}(x)}. \tag{15.72}$$

Введем параметр для гиперповерхности

$$\sigma(x') = t$$

и определим

$$\int \frac{\delta h_{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')}d^3x' = \frac{\partial h_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t}. \tag{15.73}$$

Используя (15.73) и интегрируя (15.69) по x', имеем

$$\frac{\partial h_{\alpha\beta}(x,t)}{\partial t} = -2N(h)^{-1/2}(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}\pi^{\lambda}_{\lambda} - \pi_{\alpha\beta}) + 2N_{\alpha|\beta}, \qquad (15.74)$$

где были использованы обозначения

$$N_{\alpha|\beta} = \int \frac{\delta M_{\alpha|\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} d^3x',$$

$$N = \int \frac{\delta M(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} d^3x'.$$

Найдем уравнения для изменения $\pi_{\alpha\beta}$, аналогичное уравнению (15.72).

Имеем

$$\frac{\delta\pi^{\alpha\beta}(x,\sigma)}{\delta\sigma(x')} = \int \frac{\delta\pi^{\alpha\beta}(x)}{\delta h_{\gamma\delta}(x'')}\frac{\delta h_{\gamma\delta}(x'')}{\delta\sigma(x')} d^3x'' =$$

$$= \int \frac{\delta\pi^{\gamma\delta}(x'')}{\delta h_{\alpha\beta}(x)}\frac{\delta h_{\gamma\delta}(x'')}{\delta\sigma(x')} d^3x''. \qquad (15.75)$$

Подставляя сюда (15.72), имеем:

$$\frac{\delta\pi^{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} =$$

$$= \int \frac{\delta\pi^{\gamma\delta}(x'',\sigma(x'))}{\delta h_{\alpha\beta}(x)}\left(\frac{\delta H_0(x')}{\delta\pi^{\gamma\delta}(x'')} + \frac{\delta H_1(x')}{\delta\pi^{\gamma\delta}(x'')}\right) d^3x''. \qquad (15.76)$$

Поскольку

$$0 = \int \frac{\delta H_0(x')}{\delta\pi_{\gamma\delta}(x'')}\frac{\delta\pi^{\gamma\delta}(x'')}{\delta h_{\alpha\beta}(x)} d^3x'' + \frac{\delta H_0(x')}{\delta h_{\alpha\beta}(x)}, \qquad (15.77)$$

$$0 = \int \frac{\delta H_1(x')}{\delta\pi_{\gamma\delta}(x'')}\frac{\delta\pi^{\gamma\delta}(x'')}{\delta h_{\alpha\beta}(x)} d^3x'' + \frac{\delta H_1(x')}{\delta h_{\alpha\beta}(x)}, \qquad (15.78)$$

то, благодаря этим равенствам, уравнение (15.76) может быть записано в виде

$$\frac{\delta\pi^{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} = -\frac{\delta[H_0(x') + H_1(x')]}{\delta h_{\alpha\beta}(x)}. \qquad (15.79)$$

Это искомое уравнение для изменения $\pi^{\alpha\beta}$.

15.7.3. Десять вакуумных уравнений поля

Итак, из условия интерференции волновых функций выведены следующие уравнения:

$$ {}^{(3)}R + h^{-1}(\frac{1}{2}h_{\alpha\beta}h_{\gamma\delta} - h_{\alpha\gamma}h_{\beta\delta})\pi^{\alpha\beta}\pi^{\gamma\delta} = 0, \tag{15.80} $$

$$ \pi^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0, \tag{15.81} $$

$$ \frac{\delta h_{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} = \frac{\delta[H_0(x') + H_1(x')]}{\delta\pi^{\alpha\beta}(x)} \quad , \tag{15.82} $$

$$ \frac{\delta\pi^{\alpha\beta}(x,\sigma(x'))}{\delta\sigma(x')} = -\frac{\delta[H_0(x') + H_1(x')]}{\delta h_{\alpha\beta}(x)}. \tag{15.83} $$

Эти четыре уравнения выводятся из вариационного принципа, для которого лагранжиан имеет вид:

$$ L = \int \left[\frac{\delta h_{\alpha\beta}}{\delta\sigma(x')}\pi^{\alpha\beta} + \frac{\delta M}{\delta\sigma(x')}[\sqrt{h}{}^{(3)}R + \right. $$

$$ +h^{-1/2}(\frac{1}{2}\pi^{\alpha}_{\alpha}\pi^{\beta}_{\beta} - \pi_{\alpha\beta}\pi^{\alpha\beta})] + 2\frac{\delta M_{\alpha}}{\delta\sigma(x')}\pi^{\alpha\beta}{}_{|\beta} - $$

$$ \left. -2\left(\pi^{\alpha\beta}\frac{\delta M_{\beta}}{\delta\sigma(x')} - \frac{1}{2}\pi^{\gamma}_{\gamma}\frac{\delta M^{\alpha}}{\delta\sigma(x')} + \sqrt{h}\frac{\delta M^{,\alpha}}{\delta\sigma(x')}\right)_{,\alpha}\right] d^3x'. \tag{15.84} $$

Вводим 4-метрику ${}^{(4)}g_{ik}$:

$$ {}^{(4)}g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}, \quad {}^{(4)}g^{00} = -N^2, \quad {}^{(4)}g_{0\alpha} = N_{\alpha}, $$

$$ (Nh)^{1/2} = (-{}^{(4)}g)^{1/2}, $$

т.е.

$$ ds^2 = -N^2(dx^0)^2 + 2N_{\alpha}dx^0dx^{\alpha} + h_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}, $$

и полагаем, что

$$ \pi^{\alpha\beta} = h({}^{(4)}\Gamma^0_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}{}^{(4)}\Gamma^0_{\tau\lambda}g^{\tau\lambda}){}^{(4)}g^{\alpha\mu}{}^{(4)}g^{\beta\nu}. $$

Тогда лагранжиан (15.84) можно переписать в виде

$$L = \sqrt{-^{(4)}g}\ ^{(4)}R,$$

известном в общей теории относительности. Получаемые с его помощью вакуумные уравнения Эйнштейна обозначим как

$$G_{ik} = 0, \quad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Тогда, как легко проверить, уравнения (15.80), (15.81) – это

$$G_i^0 = 0,$$

уравнения (15.83) – линейная комбинация этих четырех уравнений с остающимися шестью уравнениями Эйнштейна $G_{\alpha\beta} = 0$, а уравнение (15.82) служит для определения $\pi^{\alpha\beta}$.

Уравнения Эйнштейна получены.

15.8. Минисуперпространство

Суперпространство имеет бесконечное число измерений, или, на языке физики, бесконечное число степеней свободы. Ограничивая бесконечное число степеней свободы, допуская только их конечное число, приходим к *минисуперпространству.*

Другими словами, мы рассматриваем r-параметрическое семейство 3-геометрий $^{(3)}\mathcal{G}(a) = {}^{(3)}\mathcal{G}(a_1, ..., a_r)$, задаваемых r-параметрическим семейством римановых 3-метрик

$$h_{\alpha\beta}(x, a)dx^\alpha dx^\beta, \quad x \in M^3,$$

$$a = (a_1, ...a_r) \in \mathbb{R}^r,$$

где среди шести компонент $h_{\alpha\beta}(x, a)$ имеются r ненулевых, каждая из которых зависит только от одного параметра a_i. Как появляются в теории такие компоненты? Если рассматривать 4-метрику:

$$ds = g_{00} + 2g_{0\alpha}dx^0 d^\alpha - h_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta,$$

то обращаем внимание на те $h_{\alpha\beta}$, которые зависят только от временной координаты x^0. Пусть из всего r. Тогда либо саму эту компоненту обозначаем через a_j, либо эту компоненту записываем как некоторую функцию от a_j.

Таким образом, каждая 3-геометрия ${}^{(3)}\mathcal{G}$ имеет в минисуперпространстве координаты $(a_1, ..., a_r)$.

Напомним, что уравнение Уиллера-ДеВитта – это *функциональное* уравнение второго порядка в бесконечномерном суперпространстве. Мы *не знаем*, как решать такое уравнение, но мы можем надеяться получить некоторое представление о природе его решения, рассматривая его на некотором конечномерном подпространстве, называемом минисуперпространством. При этом уравнение Уилера-ДеВитта оказывается дифференциальным уравнением второго порядка, способы решения которого достаточно изучены.

Действительно, переход к дифференциальному уравнению происходит за счёт того, что в уравнении связи

$$\mathcal{H}(a_1, ..., a_r, \pi_{a_1}, ..., \pi_{a_r}) = 0,$$

при квантовании делаем подстановки:

$$a_j \to a_j, \quad \pi_{a_j} \to i\hbar \frac{\partial}{\partial a_j}.$$

В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\hat{\mathcal{H}}\left(a_1, ..., a_r, i\hbar\frac{\partial}{\partial a_1}, ..., i\hbar\frac{\partial}{\partial a_r}\right)\Psi(a_1, ..., a_r) = 0,$$

являющееся минисупепространственным аналогом уравнения Уилера-ДеВитта.

Такой подход позволяет «решать» уравнение Уилера-ДеВитта. Конечно, минисуперпространства не заменяют самого суперпространства, но на данном этапе отсутствия сколько-нибудь приемлемой теории вариационных функциональных уравнений типа Уилера-ДеВитта обращение к минисуперпространствам позволяет продвинуться в исследовании квантовой космологии.

15.8.1. Примеры минисуперпространств

Пример 15.1. Метрика Фридмана

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t)[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

дает следующее 1-параметрическое семейство 3-геометрий ${}^{(3)}\mathcal{G}(a),\ a \in \mathbb{R}$:

$$a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

Следовательно, соответствующее минисуперпространство одномерно и каждая 3-геометрия имеет координату a.

Поскольку

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2a}(\pi_a^2 + a^2)$$

и

$$a \to a, \quad \pi_a \to i\hbar\frac{\partial}{\partial a},$$

то уравнение Уилера-ДеВитта приобретает форму

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial a^2} - a^2\right)\Psi(a) = 0.$$

Пример 15.2. Для вселенной Фридмана

$$ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)d\Omega_3^2,$$

где $d\Omega_3^2$ – линейный элемент пространства постоянной кривизны с кривизной $K = 0, \pm 1$.

Имеем для действия системы гравитационного и однородного скалярного полей

$$S = S_g + S_m =$$

$$= \frac{3}{\varkappa}\int dtN\left(-\frac{a\dot{a}^2}{N^2} + Ka - \frac{\Lambda a^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\int dtNa^3\left(\frac{\dot{\varphi}^2}{N^2} - 2V(\varphi)\right).$$

Таким образом, имеем 2-мерное минисуперпространство $\mathcal{S}_m(M^3)$ с двумя координатами a, φ.

Имеем

$$\pi_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = -\frac{6a\dot{a}}{\varkappa^2 N},\ \pi_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{a^3\dot{\varphi}}{N},\ \pi_N = \frac{\partial L}{\partial \dot{N}} = 0$$

и

$$\mathcal{H} = \pi_a\dot{a} + \pi_\varphi\dot{\varphi} + \pi_N\dot{N} - L =$$
$$= -\frac{\varkappa^2}{12a}\pi_a^2 + \frac{1}{2a^3}\pi_\varphi^2 + \frac{a^3\Lambda}{\varkappa^2} + a^3V(\varphi) - \frac{3Ka}{\varkappa^2} = 0.$$

При квантовании

$$a \to a,\quad \pi_a \to i\hbar\frac{\partial}{\partial a},\quad \pi_\varphi \to i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi},$$

получаем уравнение Уилера-ДеВитта в форме [244]

$$\left[\frac{\varkappa^2\hbar^2}{12a}\frac{\partial^2}{\partial a^2} - \frac{\hbar^2}{2a^3}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + a^3\left[V(\varphi) + \frac{\Lambda}{\varkappa^2}\right] - \frac{3Ka}{\varkappa^2}\right]\Psi(a,\varphi) = 0.$$

Часто вместо этого уравнения рассматривают другое, использующее упорядочение Лапласа-Бельтрами:

$$\left[\frac{\varkappa^2\hbar^2}{12}a\frac{\partial}{\partial a}a\frac{\partial}{\partial a} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + a^6\left[V(\varphi) + \frac{\Lambda}{\varkappa^2}\right] - \frac{3Ka^4}{\varkappa^2}\right]\Psi(a,\varphi) = 0. \tag{15.85}$$

Делая замену $\alpha = \ln a$, получаем иную форму этого уравнения:

$$\left[\frac{\varkappa^2\hbar^2}{12}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\hbar^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + e^{6\alpha}\left[V(\varphi) + \frac{\Lambda}{\varkappa^2}\right] - 3e^{4\alpha}\frac{K}{\varkappa^2}\right]\Psi(\alpha,\varphi) = 0. \tag{15.86}$$

15.8.2. Принцип конструктивной интерференции

Принцип конструктивной интерференции гласит, что классическая траектория вселенной в минисуперпространстве

$\mathcal{S}_m(M^3)$ является совокупностью его точек a, в которых квазиклассический волновой пакет

$$\Psi(a) = \int \rho(\lambda) A(a) e^{\frac{\hbar}{i} S(a,\lambda)} d\lambda,$$

где $\rho(\lambda)$ – гауссова плотность распределения вероятности с математическим ожиданием $\overline{\lambda}$, имеет максимум модуля (см. рис. 15.3).

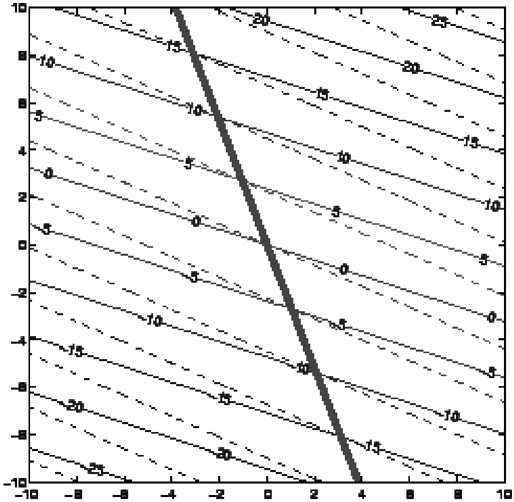

Рис. 15.3: Конструктивная интерференция между двумя множествами волновых фронтов; сплошные линии соответствуют $S(a,\lambda)$, а пунктирные – $S(a,\lambda+\delta\lambda)$. Классическая пространственно-временная траектория Вселенной состоит из точек, в которых сплошные и пунктирные линии отвечают равным значениям действий, т.е. когда $S(a,\lambda+\delta\lambda) = S(a,\lambda)$ (на рисунке изображено толстой линией).

Следовательно, условием возможной принадлежности точки $a \in \mathcal{S}_m(M^3)$ классической траектории служат равенства

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda_j}(a, \overline{\lambda}) = 0 \quad (j = 1, ..., m).$$

15.9. Многомировая трактовка квантовой механики Эверетта

Трактовка квантовой механики, данная Эвереттом, основывается на следующих принципах:

1. Нет необходимости представлять существование каких-либо внешних наблюдателей или постулировать существование сферы, где господствуют законы классической физики.

2. Имеет смысл говорить о векторе состояния для целой Вселенной. Этот вектор состояния никогда не коллапсирует, и, следовательно, Вселенная в целом эволюционирует строго детерминировано.

3. Статистическая интерпретация волновой функции не должна быть задана априорно.

4. Любая *квантовая система*, и Вселенная в частности, разложима на две подсистемы: подсистему S и подсистему A. Подсистема A способна производить измерения, наблюдения некоторой физической величины $\hat{A}$. Измеряющую подсистему A называем *аппаратом* (прибором). Нет фундаментального различия между измеряющим аппаратом и другими физическими системами [206, p.53].

Измерение, которому в классической копенгагенской интерпретации уделяется особое внимания, с точки зрения Эверетта, есть просто специальный случай взаимодействия между подсистемами S и A. Это взаимодействие имеет свойство *корреляции* величины в одной подсистеме с величиной в другой подсистеме. Если две системы взаимодействуют, то их независмость немедленно исчезает, и они вступают в отношение корреляции.

15.9.1. Измерение

В традиционной копенгагенской интерпретации квантовой механики измерение – это вмешательство классического макроприбора в состояние $|\psi\rangle$ физической микросистемы. Результатом этого вмешательства – измерения – является коллапс волновой функции, т.е. переход микросистемы в состояние $|\psi_{i_0}\rangle$ с вероятностью $|c_{i_0}|^2$ конкретным значением s_{i_0} измеряемой величины $\hat{A}$ из множества потенциальных её значений $(s_i)_{i\in I}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i\in I} c_i|\psi_i\rangle, \tag{15.87}$$

$$\hat{A}\psi_i = s_i\psi_i.$$

Таким образом, выделяется особая сфера, в которой господствуют законы классической физики и тем самым постулируется существование особого классического мира. При измерение *реализуется*, т.е. признаётся единственно объективно существующим только одно значение измеряемой величины из множества возможных её значений. Остальные *не реализуются*, т.е. объявляются несуществующими. Измерение, эксперимент, использующий классические приборы, объективизирует, придаёт (вероятностный) *реальный* смысл, *значение* предсказаниям квантовой механики с помощью найденной при решении дифференциального уравнения волновой функции.

Мы видим, что сугубо непрерывная детерминистская эволюция физической системы (процесс 1), описываемая дифференциальным уравнением, например Шрёдингера, претерпевает разрывный вероятностный характер (процесс 2) в результате измерения. Эверетт считал это недопустимым. С его точки зрения, для описания физической системы достаточно использовать только процесс 1.

Традиционная, копенгагенская интерпретация страдает двойственностью подхода, разделяя Внешний Мир на классический уровень, макромир, приписывая ему «реальность» (и, следовательно, допуская его объективное описание), и на микромир – квантовую область, – отказывая ему в том же самом [206, p.111]

Однако по мнению Эверетта, постулирование существования особой классической сферы является чуждым дополнением к формализму квантовой механики, основанной только на уравнении Шрёдингера. Это дополнение – механизм коллапса волновой функции. Суперпозиция (15.87) и есть весь *реальный* Мир, имеющий *ветви*, которые как слагаемые входят в суперпозицию. Не существует никакого внешнего ведомства, которое может определять, которая из ветвей представляет собой *реальный мир*. Все ветви – одинаково реальные миры, и каждый из них не сознает существование других.

Эвереттовское видение Мира хорошо согласуется с теорией квантовой гравитации Уилера, в которой появляется необходимость говорить о волновой функции Вселенной, а в эвереттовской интерпретации это можно делать самым естественным образом и без каких-либо затруднений.

15.9.2. Относительные состояния Эверетта

Рассмотрим систему с подсистемами S и A. Пространство состояний первой подсистемы – это гильбертово пространство $\mathcal{H}_S$, второй – $\mathcal{H}_A$. Состояния составленной системы принадлежать пространству $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_A$.

Подсистема A, производящая наблюдение (измерение), т.е. являющаяся наблюдателем, подсистемы S, оказывается скоррелированной с ней.

Если $|s\rangle$ – состояние измеряемой подсистемы S, а состояние системы A наблюдателя (аппарата) обозначим через $|A\rangle$, то через $|A[s]\rangle$ обозначаем скоррелированное состояние подсистемы A.

Эверетт называл состояние $|A[s]\rangle$ *относительным состоянием* (relative state) подсистемы A по отношению к состоянию $|s\rangle$ подсистемы S. Относительное состояние $|A[s]\rangle$ единственным образом соответствует состоянию $|s\rangle$ [209].

Результат измерения в случае пребывания подсистемы S в собственном состоянии $|s_i\rangle$ физической величины $\hat{A}$ – это состояние всей системы $S + A$ вида

$$|\psi_{S+A}\rangle = |s_i\rangle \otimes |A[s_i]\rangle.$$

Если же подсистема S пребывала в суперпозиции

$$|\psi_S\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle,$$

то состоянием всей системы $S + A$ с учётом всех возможных измерений будет вектор

$$|\psi_{S+A}\rangle = \sum_i c_i |s_i\rangle \otimes |A[s_i]\rangle.$$

При этом ни одно из состояний системы S не имеет основания считаться более реальными, чем остальные [206, p.116].

Если измерение (наблюдение) системы S осуществляется двумя пространственно разделенными системами-наблюдателями A_1, A_2, то обе они оказываются скоррелированными с S.

15.9.3. Результат наблюдения (измерения) квантовой системы по Эверетту

Пусть волновая функция Вселенной (системы) $S+A$ при $t = 0$ имеет вид

$$|\Psi^0_{S+A}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Phi\rangle. \tag{15.88}$$

Измерение – это воздействие на вектор (15.88) эволюционным унитарным оператором $\hat{U}(t)$, т.е

$$|\Psi^0_{S+A}\rangle \to \hat{U}(t)|\Psi^0_{S+A}\rangle = |\Psi_{S+A}(t)\rangle.$$

Вектор $|\Psi_{S+A}(t)\rangle$ находят, решая дифференциальное уравнение (например Шрёдингера), описывающее эволюцию системы $S+A$ с начальным данным (15.88). Получаем, что результатом эволюции в момент $t = T$, будет суперпозиция векторов, представляющая собой возможные собственные векторы $|s\rangle$ величины $\hat{A}$ с соответствующими аппаратными «чтениями» $|A[s]\rangle$:

$$|\Psi_{S+A}(T)\rangle = \sum_s c_s |s\rangle \otimes |A[s]\rangle. \tag{15.89}$$

Этот вектор представляет Вселенную как *Реальность*, состоящую из всех одновременно существующих и, следовательно, одинаково реальных *миров* $|s\rangle \otimes |A[s]\rangle$, в каждом из которых измерение величины $\hat{A}$ дает разные значения s.

Таким образом, в ходе эволюции, которая имела форму проведения процедуры измерений-наблюдений-чтений, Вселенная расщепилась на бесконечное число ветвей (вселенных), каждая из которых может выглядеть совершенно иначе, чем при всех иных наблюдениях.

15.10. Speculatio

1. Эверетт о своей теории: «Те аргументы, согласно которым картине мира, представленной этой теорией, противоречит опыт, потому что мы не сознаем никакого процесса ветвления, подобны критике коперниканской теории на том основании, что подвижность Земли как реальный физический факт является несовместимой с интерпретацией природы здравым смыслом, поскольку мы не чувствуем такого движения. В обоих случаях аргумент терпит неудачу, когда оказывается, что сама теория предсказывает, в чем фактически будет состоять наш опыт. (В коперниканском случае дополнение ньютоновой физики было обязано показать, что жители Земли не будут осознавать любое её движение)» [209].

2. Реальность в классической физике пронизана представлением о причинно-следственных связях. Постклассическая физика открыла представление о квантовой корреляции.

«Причинная связь – это свойство модели, а не свойство мира опыта. Понятие причинной связи имеет смысл только при обращении к теории, в которой имеются логические зависимости среди элементов. Теория содержит отношения вида «$\mathcal{A}$ влечёт $\mathcal{B}$», которые могут быть прочитаны как «$\mathcal{A}$ причина $\mathcal{B}$», в то время как наш опыт, неинтерпретируемый любой теорией, не говорит ни о чём подобном, но только заявляет о *корреляции* между событием, соответствующим $\mathcal{A}$, и событием, соответствующим $\mathcal{B}$» (Эверетт, [206, p.136-137]).

Глава 16

Квантовая космология

В середине XX века принципы квантовой теории были распространены на космологию – возникла квантовая космология. Поскольку реальная Вселенная является классическим макро-пространством-временем, то одной из задач квантовой космологии стало объяснение его существования («появления») в терминах квантовой теории. Слово «появление» намеренно взято в скобки после слова «существование». Дело в том, что теория суперпространства Уилера не содержит времени, а термин «появление» несёт в себе временной атрибут.

Космологи унаследовали общерелятивистское представление о *рождении* Вселенной из «точки» (сингулярности), описываемое с помощью нестационарных решений уравнений Эйнштейна, найденных Фридманом. Классическая космология довлела над умами квантовых космологов, и те поневоле искали квантовые описания появления-рождения-возникновения Вселенной.

Четырёхмерное пространство-время Вселенной не может возникать, оно просто существует, оно *вневременно.* Однако для Уилера, и не только для него, исходным, первичным понятием является пространство, оснащённое меняющейся, эволюционирующей 3-геометрией ${}^{(3)}\mathcal{G}$, а не пространство-время с вечной и неизменной 4-геометрией ${}^{(4)}\mathcal{G}$. В большой степени это объясняется тем, что абсолютный 4-мерный Мир событий, превнесённый в физику Минковским, физиками и космологами подсознательно воспринимается всего лишь как удобная геометрическая описательная картина, диаграмма Реальности, но никак не сама Реальность.

16.1. Условия рождения классического пространства-времени в суперпространстве

Если волновая функция $\Psi({}^{(3)}\mathcal{G})$ такова, что способна описывать *позднюю* вселенную, то она должна предсказывать, что в *большой* вселенной пространство-время является *классическим.*

«По меньшей мере, два условия гарантируют возможность рассмотрения квантовой системы как классической:

1. Волновая функция должна предсказывать сильную корреляцию канонических переменных q и p в соответствии с классическими законами, т.е. в виде

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}.$$

Иначе говоря, волновая функция должна сконцентрироваться как цепь горных пиков вдоль одной или нескольких классических траекторий в суперпространстве.

2. Квантовомеханическая интерференция между такими траекториями (конфигурациями) должна быть пренебрежимой, т.е. траекториям следует декогерировать.

Думается, первое, что необходимо сделать для того, чтобы обнаружилось *классическое поведение* – это построить аналог когерентных состояний.

Выполнение этих условий – непростая задача, но она достижима в некоторых простых случаях. Так как волновая функция не зависит от времени, то аналог когерентных состояний в минисуперпространстве можно представить в виде:

$$\Psi(q^\alpha) = e^{i\phi(q^\alpha)} \exp(-f^2(q^\alpha)) \tag{16.1}$$

где $f(q^\alpha) = 0$ – уравнение единственной классической траектории в минисуперпространстве. Поэтому в двумерной модели, к примеру, волновая функция будет состоять из резко взметнувшихся горных пиков в минисуперпространстве вдоль единственной классической траектории.

Волновые функции этого типа не возникают естественным образом в квантовой космологии потому, что они нуждаются в специфичных граничных условиях. Однако они обладают типичной особенностью для волновых функций, что предсказывает классическое пространство-время, – они имеют пики около целостной истории. Более того, хотя оригинальная волновая функция не зависит от какой-либо величины, играющей роль времени, понятие времени может появляться для определённого типа волновых функций, например для таких, как (16.1): как правило, это аффинный параметр вдоль историй, около которых волновая функция имеет пики, т.е. расстояние вдоль горного хребта в случае (16.1). Время, а точнее, пространство-время – это понятие, соответствующее определённым областям конфигурационного пространства-времени и зависящее от начальных условий.

Волновые функции в наиболее общем случае появляются в квантовой космологии не в форме волнового пакета, а в ВКБ-форме и могут быть классифицированы как осциляторы вида e^{iS} или экспоненциала вида e^{-I}. Осциляторные волновые функции соответствуют классическому, т.е. *псевдо*риманову пространству-времени, а экспоненциалы – нет.

Напомним, что способ, посредством которого мы интерпретируем волновую функцию, заключается в том, что высокий пик в волновой функции или в каком-либо распределении, построенной из неё, рассматривается как предсказание. Классическое пространство-время поэтому предсказано, когда волновая функция или какое-либо распределение, построенное из неё, концентрируется как цепь пиков около одной или более классических конфигураций.

Как идентифицировать такие пики? В наиболее общем случае волновая функция не будет давать пики около некоторой области конфигурационного пространства: e^{iS}, как правило, будет определять лишь некоторую корреляцию между координатами и импульсом. Возможно, самый простой путь нахождения таких корреляций – это введение квантово-механической функции распределения $F(p, q)$, которая зависит от координат и импульсов. Функция Вигнера – это как раз такая функция. Она оказывается полезной в квантовой космологии для идентификации наличия корреляций для данной волновой функции. Опустим подробности и отметим только, что функция Вигнера показывает, что

(i) волновая функция вида e^{-I} не предсказывает корреляции между координатами и импульсами и не может соответствовать классическому поведению;

(ii) волновая функция вида e^{iS} предсказывает сильную корреляцию между p и q вида

$$p_\alpha = \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}, \tag{16.2}$$

где S – решение уравнения Гамильтона-Якоби. Выражение (16.2) есть первый интеграл уравнения движения. Он определяет множество решений полевых уравнений. Волновая функция вида e^{iS}, следовательно, имеет пики не около единственного классического решения, а около множества классических решений полевых уравнений. В этом смысле она соответствует классическому пространству-времени[1].

Иногда утверждают, что волновые функции вида e^{-I} не являются классическими потому, что соответствуют евклидову пространству-времени. Это, конечно, верно, что они неклассические, и также верно, что если волновая функция является ВКБ-решением, то I есть действие классического евклидова решения. Однако это не значит, что они соответствуют евклидову пространству-времени. По сравнению с волновой функ-

[1] Все это говорит в пользу многовариантности классической истории; Мир – не универс (вселенная), а мультиверс (множество вселенных).

цией вида e^{iS}, которая дает пики около классических лоренцевых решений (пространств-времён), волновая функция e^{-I} не дает пиков около евклидовых решений. Она неклассическая потому, что не способна предсказывать классическую корреляции между лоренцевым импульсом p и её сопряженной q» [229, p.180].

16.2. Возникновение классической вселенной Фридмана из «ничего»

Покажем в этом параграфе, каким образом происходит возникновение классического замкнутого пространства-времени Фридмана в рамках квантовой геометродинамики[2]

Примем как сценарий происхождения Вселенной её спонтанное квантовое рождение из *ничего* в форме пустого замкнутого пространства-времени Фридмана, соответствующего гравитирующему вакууму.

16.2.1. Классическая эволюция вселенной

Уравнения Эйнштейна с $T_{ik} = 0$ (пустое пространство)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R + \Lambda g_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} = 0$$

перепишем в виде

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R =$$

$$= \frac{8\pi G}{c^4} \left[\left(-c^2 \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} + \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \right) u_i u_k - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{ik} \right]. \qquad (16.3)$$

Это означает, что космологическую постоянную Λ связываем с вакуумом, которому приписываем следующие плотность и

[2]Использована статья Atkatz'a [184].

давление
$$\rho_{vac} = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad p_{vac} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$
с уравнением состояния
$$c^2\rho_{vac} + p_{vac} = 0. \tag{16.4}$$

Рассматриваем вселенную Фридмана
$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\ \varphi\ d\varphi^2\right), \tag{16.5}$$
удовлетворяющую уравнениям Эйнштейна с нулевой космологической постоянной и с
$$T_{vac,ik} = (c^2\rho_{vac} + p_{vac})u_iu_k - p_{vac}g_{ik}.$$

В этом случае уравнения Эйнштейна сводятся к двум *уравнениям Фридмана* для эволюции масштабного фактора:
$$(\dot{a})^2 = \frac{8\pi G\rho_{vac}a^2}{3} - Kc^2, \tag{16.6}$$
$$\ddot{a} = -\frac{4\pi Ga}{3}\left(\rho_{vac} + \frac{3p_{vac}}{c^2}\right). \tag{16.7}$$

Дифференцируя первое и используя (16.7), получаем уравнение, заменяющее уравнение (16.7):
$$\frac{d\rho_{vac}}{da} = -\frac{3}{ac^2}(c^2\rho_{vac} + p_{vac}). \tag{16.8}$$

Имея в виду уравнение состояния (16.4), из уравнения (16.8) получаем, что
$$\rho_{vac} = const.$$

Заметим, что, как показали Аткатц и Пагелс [185], возникнуть из ничего посредством квантового туннелирования могла только замкнутая вселенная. Поэтому берем $K = +1$.

Решение уравнения (16.6) имеет вид

$$a(t) = a_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{Kc^2}t}{a_0}\right), \quad a_0 = \sqrt{\frac{3Kc^2}{8\pi G\rho_{vac}}}. \tag{16.9}$$

Величина a_0 соответствует инфляционной эпохе Гута – крайне малому отрезку времени, за который происходит крайне быстрое расширение Вселенной.

Используя выражение для a_0, запишем уравнение Эйнштейна (16.6) в следующем виде:

$$(\dot{a})^2 = Kc^2\left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right). \tag{16.10}$$

16.2.2. Квантование, минисуперпространство и уравнение Уилера-ДеВитта

Имеем действие для метрики (16.5)

$$S_g = \int L_g(t)dt,$$

где

$$L_g = \frac{3\pi c^4}{4G}\left[-(\dot{a})^2 a + Kc^2 a\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right], \tag{16.11}$$

и гамильтониан

$$H_g = p_a\dot{a} - L_g, \tag{16.12}$$

где

$$p_a = \frac{\partial L_g}{\partial a} = -\frac{3\pi c^4}{2G}\dot{a}a \tag{16.13}$$

– импульс частицы-вселенной.

Если подставить выражение для p_a из (16.13) в (16.12) и воспользоваться уравнением Эйнштейна (16.10), то убеждаемся, что

$$H_g \equiv 0.$$

Если заменить $\dot{a}$ в (16.12), используя (16.13), то имеем

$$H_g = \frac{1}{2}\left(\frac{p_a}{a}\right)^2 a - p_a \frac{p_a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 aKc^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0.$$

Это уравнение можно записать либо в виде

$$\left(\frac{p_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 Kc^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0, \qquad (16.14)$$

либо в виде

$$p_a{}^2 + \left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 a^2Kc^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right) = 0. \qquad (16.15)$$

Заметим, что уравнения (16.14), (16.15) получаются при непосредственной подстановке выражения для p_a в уравнение Эйнштейна (16.10).

Вводя операторы

$$p_a \to \widehat{p}_a = -i\hbar\frac{\partial}{\partial a}, \quad a \to \widehat{a} = a,$$

можно произвести квантование, подставляя их либо в (16.14), либо в (16.15). Получим две разные формы уравнения Уилера-ДеВитта для минисуперпространства с каноническими переменными p_a, a и волновой функцией $\psi(a)$, $0 < a < \infty$:

$$\left[-\hbar^2\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a}\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial a} + \left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 Kc^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right]\psi(a) = 0 \qquad (16.16)$$

и

$$\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial a^2} + \left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 a^2Kc^2\left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)\right]\psi(a) = 0. \qquad (16.17)$$

Какую форму уравнения Уилера-ДеВитта выбрать? Мы имеем дело с так называемой ситуацией «неопределенности упорядочивания операторов»; она не отражается на нахождении квазиклассического приближения, поэтому мы выбираем более простое уравнение в форме (16.17).

16.2.3. Граничные условия и волновая функция

Уравнение (16.17) рассматриваем как уравнение Шрёдингера для частицы с нулевой энергией, находящейся в потенциальном поле с потенциалом

$$V(a)=\left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 a^2Kc^2\left(1-\frac{a^2}{a_0^2}\right). \tag{16.18}$$

Другими словами, Вселенная подобна частице, координата a для которой – это вселенная с масштабным фактором a. Область $0<a<a_0$ – классически запрещённая область для частицы с нулевой энергией; напротив, область $a\geq a_0$ – классически допустимая.

Но частица-вселенная способна родиться из *ничего*, которое фактически есть состояние $a=0$, когда квантовая вселенная Фридмана имеет нулевой размер, и квантово туннелировать под энергетически запрещённой областью $0<a<a_0$ и появиться вдруг в состоянии с $a=a_0$. Это и есть спонтанное квантовое рождение несингулярной (так как её размер ненулевой: $a_0\neq 0$) Вселенной.

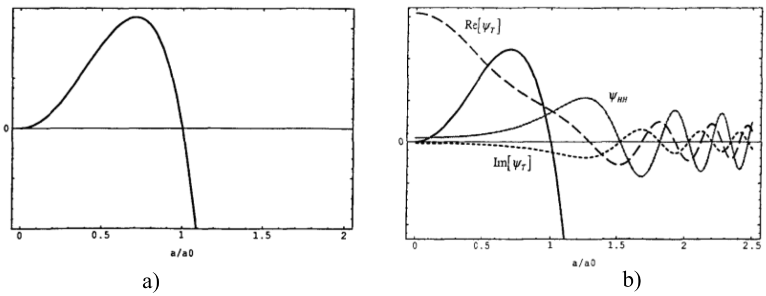

Рис. 16.1: a) График потенциала $V(a)$; b) Графики волновой функции.

Туннелирующее граничное условие для волновой функции приводит к следующим туннелирующим волновым функциям[3] [184]:

$$\psi_T(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k_0(a)}} \left\{ \frac{1}{2} \exp\left[-\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{3/2} \right] + \right.$$

$$\left. + i \exp\left[\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{3/2} \right] \right\}, \qquad (16.19)$$

где

$$k_0(a) = \frac{3\pi}{2G} a \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{1/2},$$

и

$$\psi_T(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k(a)}} \exp\left[-i \frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)^{3/2} \right], \qquad (16.20)$$

где

$$k(a) = \frac{3\pi}{2G} a \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)^{1/2}.$$

В случае граничного условия Хоукинга-Хартли волновая функция имеет следующий вид:

$$\psi_{HH}(0 < a < a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k_0(a)}} \exp\left[-\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{a_0^2}\right)^{3/2} \right],$$

$$\psi_{HH}(a > a_0) \propto \frac{1}{\sqrt{k(a)}} \cos\left[\frac{\pi}{2G} a_0^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)^{3/2} \right]. \qquad (16.21)$$

Из рис. 16.1 мы видим, что оба типа волновых функций имеют осцилляции в классической области ($a > a_0$) минисуперпространства, которые отсутствуют в подбарьерной области ($0 < a < a_0$).

[3] Выражения для волновых функций даны в единицах измерения, в которых $c = \hbar = 1$.

16.2.4. Возникновение классической вселенной

Переходим к квазиклассическому приближению: в этом случае волновая Фридмана – функция $\psi(a)$ – ищется в виде

$$\psi(a) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}S(a)\right). \qquad (16.22)$$

Так как целью является исследование поведения Вселенной в случае классического предела $\hbar \to 0$, то берем

$$S = S_0 + \frac{i}{\hbar}S_1 + \left(\frac{i}{\hbar}\right) S_2 + ... \qquad (16.23)$$

Подставляя (16.22), (16.23) в (16.17), находим

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial a}\right)^2 = \left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right)^2 a^2 K c^2 \left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right)$$

или

$$\frac{\partial S_0}{\partial a} = \pm\left(\frac{3\pi c^4}{2G}\right) a\sqrt{Kc^2}\sqrt{\frac{a^2}{a_0^2} - 1}. \qquad (16.24)$$

Как показал Halliwell ([228], см. § 16.1), осцилляторная волновая функция (16.22) приводит к сильной корреляции канонических переменных a и p_a, т.е.

$$p_a = \frac{\partial S_0}{\partial a}. \qquad (16.25)$$

Подставляя (16.24) и выражение (16.13) для p_a в (16.25), получаем

$$-\dot{a} = \pm\sqrt{Kc^2}\sqrt{\frac{a^2}{a_0^2} - 1}$$

или

$$(\dot{a})^2 = Kc^2\left(\frac{a^2}{a_0^2} - 1\right). \qquad (16.26)$$

Это выражение в точности совпадает с уравнением (16.10), являющимся уравнением Эйнштейна для метрики Фридмана (16.5). Другими словами, *в области минисуперпространства, для которой волновая функция является осциллятором вида* $e^{iS/\hbar}$*, возникает классическое пространство-время Фридмана, удовлетворяющее уравнениям Эйнштейна.*

16.2.5. Что означает термин «спонтанность» в описании рождения Вселенной

Итак, физики не только говорят о рождении Вселенной из *ничего* – они предлагают математическую модель её рождения из *ничего*. Вселенная рождается *спонтанно*! В переводе на ненаучный, повседневный язык, предполагающий по умолчанию обязательное наличие причинно-следственных связей, спонтанный – значит по неизвестной причине.

Верующий человек верит, что Вселенную породил Бог. Иначе говоря, причина происхождения Вселенной трансцендентна, т.е., в понимании Канта, она выходит за пределы возможного опыта («мира явлений») и является недоступной теоретическому познанию.

Однако до сих пор физики не включали в мир явлений человеческое сознание. Сознание трансцендентно для физиков. Так, быть может, сознание и порождает Вселенную или даже множество разных вселенных?

16.3. Появление классической вселенной Фридмана

Рассмотрим [242] минисуперпространство, отвечающее плоской ($K = 0$) вселенной Фридмана с нулевой космологической константой (см. § 15.8.1, пример 15.2).

Полагаем, что пространство заполнено жидкостью, представляемой однородным скалярным полем φ с плотностью ρ и давлением p, связанных античаплыгинским уравнением состояния $p = A/\rho$:

$$p = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi),\ \rho = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + V(\varphi),$$

где

$$V(\varphi) = V_0 \left(sh(\sqrt{3\kappa^2}|\varphi|) - \frac{1}{sh(\sqrt{3\kappa^2}|\varphi|)} \right),$$

где $V_0 = \sqrt{A/4}$, $\kappa^2 = 8\pi G/c^4$. (Далее в этом параграфе $c = 1$).

Решение уравнений Эйнштейна дает соотношение

$$\varphi_{\pm}(a) = \pm\sqrt{\frac{1}{3\kappa^2}} arcth \left(\sqrt{1 - \frac{Aa^6}{B}} \right), \qquad (16.27)$$

где $B = const > 0$, отвечающее классической траектории в минисуперпространстве, изображенной на рис. 16.2, и соответствующей классической эволюционирующей плоской вселенной Фридмана.

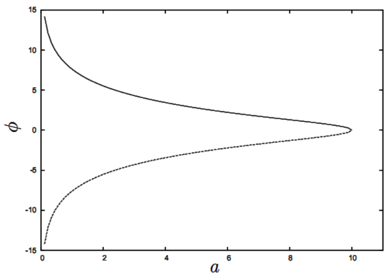

Рис. 16.2: График классической траектории в минисуперпространстве.

Уравнение Уилера-ДеВитта имеет вид

$$\left[\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\kappa^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + V_0 e^{6\alpha} \left(sh(\sqrt{3\kappa^2}|\varphi|) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{sh(\sqrt{3\kappa^2}|\varphi|)} \right) \right] \psi(\alpha, \varphi) = 0, \qquad (16.28)$$

где $\alpha = \ln a$.

Для поля $\varphi \approx 0$ это уравнение можно заменить следующим приближением:

$$\left[\frac{\hbar^2}{2}\left(\frac{\kappa^2}{6}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{\widetilde{V}_0}{|\varphi|}e^{6\alpha}\right]\psi(\alpha,\varphi) = 0, \tag{16.29}$$

где $\widetilde{V}_0 = V_0/(3\kappa^2)$.

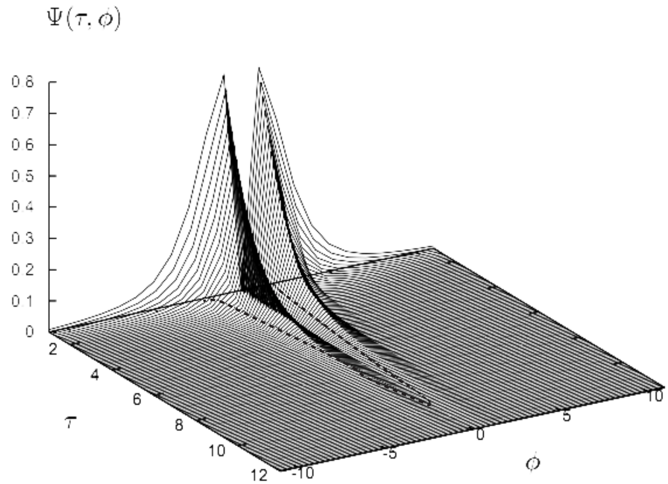

Рис. 16.3: График волнового пакета (волновой функции) в минисуперпространстве, имеющего «горный хребет» около классической траектории. Здесь $\tau = a^6$.

Решением этого уравнения будет волновой пакет [243]

$$\Psi(\alpha,\varphi) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} A(k)k^{3/2}K_0\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{V_\alpha}{\hbar^2 k\kappa^2}\right)\left(\frac{2V_\alpha}{k}|\varphi|\right)e^{-\frac{V_\alpha}{k|\varphi|}}L^1_{k-1}\left(\frac{2V_\alpha}{k}|\varphi|\right). \tag{16.30}$$

где K_0 – функция Бесселя, L_k^1 – полином Лагера и $V_\alpha = \widetilde{V}_0 e^{6\alpha}$.

Это решение исчезает при $\varphi = 0$, что соответствует классической сингулярности вселенной Фридмана. Иначе говоря, сингулярность Большого Взрыва избегается в квантовой теория.

Как видно из рис. 16.3, волновой пакет (16.30) образует «горный хребет» в минисуперпространстве в окрестности классической траектории, делая её наиболее вероятной на классическом уровне. При этом данный волновой пакет удовлетворяет принципу конструктивной интерференции (см. [242]).

16.4. Speculatio

1. «Чем более Вселенная кажется понятной, тем более она кажется бессмысленной» (С. Вайнберг, [303, p.154]).

Понимание – для ученого – означает наличие удовлетворительной теории, дающей ответы на все вопросы. Любая теория основывается на очевидных положениях, т.е. на открываемых физиками законах Природы, которые математики называют аксиомами. Но, согласно теореме Гёделя о неполноте, любая достаточно «разумная» система аксиом неизбежно порождает вопросы, на которые аксиомы ответить не могут. Теория, по мере обнаружения таких «проклятых» вопросов, начинает рассматриваться как бессмысленная, и эта бессмысленность переносится на саму Вселенную.

Помимо этого, процесс стремления ученых к всё более полному пониманию сути Вселенной сопровождается втягиванием в этот процесс всё большего количества физиков, космологов и математиков, каждый из которых имеет свои *различающиеся* друг от друга идеи-фантазии на предмет сущности структуры и устройства Реальности. Эти идеи, материализуясь (см. гл. 17), вносят во Внешний Мир массу противоречивых деталей. Вселенная предстает перед наблюдателями данной исторической эпохи в неудовлетворительном, бессмысленном виде.

Глава 17

Квантовое созидание Вселенной сознанием

> Мы сделаны из вещества того же,
> что наши сны.
>
> Шекспир «Буря»

Мы воспринимаем окружающий нас Внешний Мир как нечто само собой нам данное, как сцену, на которой мы появляемся, живём и исчезаем. А нам на смену на эту же сцену приходят новые люди.

Для верующего человека Внешний Мир, Вселенная создана Богом, куда был помещён человек, т.е. создан Мир для людей, и он исчезнет вместе с людьми в момент Конца Света.

Для человека науки Внешний Мир возник задолго до появления в нём людей и останется существовать как ни в чем не бывало в случае исчезновения человечества.

В таком случае неизбежен вопрос, откуда и как появилась Вселенная и как долго она существует?

Если был момент рождения Вселенной, т.е. время существования Вселенной конечно, а так мыслят современные космологи, то что было до рождения Вселенной? Хоукинг считает последний вопрос лишенным смысла, поскольку само время появилось вместе с Вселенной.

Классические научные представления о Вселенной, классическая физика устраняют человека из поля зрения исследователя. Мир возникает, развивается без участия человека. Человек, его мысли и идеи, с точки зрения классической науки, не имеют никакого значения для решения космологических проблем эволюции Вселенной.

Такова научная традиция, отражающая *материалистический взгляд* на природу Внешнего Мира.

Однако антропологический принцип, впервые сформулированный Г.М. Идлисом, связал физические величины, характерные для Вселенной, с условиями, необходимыми для наличия, *присутствия* в ней именно человека, т.е. нас с вами. Следствием это принципа является мысль о возможном существовании иных вселенных, обладающих иными физическими характеристиками, предназначенных для *иных форм* носителей разума.

Антропологический принцип заставляет думать, что имеется тонкая, скрытая, несиловая связь между человеческим разумом и свойствами Вселенной. Не является ли в таком случае сама Вселенная продуктом разума, продуктом человеческого сознания, а точнее, результатом сложной (квантовой) связи (квантовой корреляции) сознания и материи?

Покажем в этой главе, как может осуществляться созидание вселенных совокупностью индивидуальных сознаний.

17.1. Сознание

Форма сознания, известная нам, – это наше человеческое сознание ℓA. Оно сопряжено с классическим объектом – нашим телом. Следовательно, наш Внешний Мир является классическим. Внешний Мир – это объективной Реальность. Существует она *для нас* в форме пространства-времени, которое порождается, как мы попытаемся показать в этой главе, сознанием, точнее, *всем набором индивидуальных сознаний*, сознанием же и воспринимается. Мир порождается и существует в той форме, в которой воспринимается.

Созданный сознанием мир $\mathcal{M}_\alpha$, а точнее, совокупностью индивидуальных сознаний (=поколением), – это историческая эпоха. «Созидание миров» – это неизбежное их *ветвление*, т.е. созидается сразу множество параллельных миров $(\mathcal{M}_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Но миры не только созидаются, но и созерцаются (наблюдаются, воспринимаются, отражаются), т.е. имеет место морфизм вида

$$x : \ell A \to \mathcal{M}_\alpha, \tag{17.1}$$

описанный в § 1.2.1. Это означает наличие процедуры просмотра событий, принадлежащих миру, т.е. наличие временного порядка. Восприятие мира посредством различных типов созерцания ведет к наличию многовариантности (§ 1.2.1, [66]):

$$x : \ell A \to \mathcal{M}_\alpha, \quad x : \ell B \to \mathcal{M}_\alpha, \quad x : \ell C \to \mathcal{M}_\alpha, \ldots$$

Заявляемое нами созидание *Реальности* сознанием, людьми, знакомыми с историей философии, воспринимается как проявление идеализма. Еще недавно высказывание идеалистических идей в нашей стране считалось идеологически вредным, враждебным для устоев пролетарского государства. Думается, что в науке важен поиск знаний, как тех, которые принесут практические результаты, так и тех, что способствуют пониманию окружающего нас Мира. Деление воззрений на идеализм и материализм есть не что иное, как проявление умонастроений XIX века и отчасти начала XX-го. Мир не белый и не чёрный, он сложный, и мы сами его постоянно усложняем. Философия Канта, например, ценна именно сложными построениями в понимании Мира, поэтому она и притягивает к себе уже двести лет. И нам мало дела до того, являются ли мысли Канта идеалистическими, материалистическими или дуалистическими.

17.2. Реальность: что это?

Физическая Реальность – это то, с чем человек не может не считаться в своей повседневной жизни. Надо считаться с тем, что огонь обжигает, можно погибнуть, упав с балкона, нельзя пройти сквозь стену и так далее. Со всем этим надо считаться и принимать в расчёт [72, с.142].

Но это скорее представление о Реальности, идущее от обыденного существования человека, не сильно задумывающегося о том, насколько принципиально различие между Внешним Миром и Миром Сна.

Что заставляет нас наделить атрибутом реального те или иные наблюдаемые нами явления. Например, почему реально вращение тела, перемещающегося в пространстве. Эйнштейн пишет по этому поводу:

> «Механическое поведение свободно несущейся в пустом пространстве системы тел зависит не только от относительных положений (расстояний) и относительных скоростей, но еще и от её состояния вращения, которое физически не может быть рассматриваемо как присущий самой системе признак. Для того чтобы хотя бы формально можно было рассматривать вращение системы как нечто реальное, Ньютон объективирует пространство. Вследствие того, что он свое абсолютное пространство причисляет к реальным вещам, – и вращение относительно абсолютного пространства делается для него чем-то реальным» (Эйнштейн, [171, с.19-20]).

Таким образом, если мы признаём пространство реальным, то реально всё то, что в какой-то мере совершается или просто находится в нём. Равным образом объявление о реальности пространства-времени делает реальными его объекты, вещи, лежащие в пространстве-времени. Реальны вещи, созерцаемые в пространстве и во времени, с которыми должен считаться не только Я, но и чужие «я». Но откуда взялись такие вещи в пространстве-времени, с которыми надо считаться? И остануться ли они существовать, если человечество исчезнет?

17.3. О реальности социального и ментального полей

Абсолютность пространства означает неизменность его геометрических свойств от состояния движения наблюдателя.

Теория относительности продемонстрировала несостоятельность придания пространству абсолютного характера. Геометрия пространства становится зависимой от состояния наблюдателей. Можно ли после этого приписывать пространство к реальным вещам?

Для любого современного физика безусловно реальным является *поле*. Но только ли физические поля реальны?

17.3.1. Что такое поле

Современная физика не может обходиться без своего фундаментального понятия – *поле*.

> «Если бы физики решили написать свою библию, они начали бы ее словами: «Сначала было поле» [6, с.51].

Для физика поле настолько является «своим», что он с трудом подчас воспринимает употребление этого термина с прилагательным, имеющим нефизическое происхождение. Например, сколь естественны для него понятия «электромагнитное поле», «гравитационное поле», «слабое поля», «ядерное поле», столь же противоестественны для него сочетания слов «социальное поле», «этническое поле», «ментальное поле», употребляемые в гуманитарных науках. Для физика такие понятия – это всего лишь безграмотные словосочетания, за которыми в реальности ничего не стоит.

Что такое поле? Воспользуемся следующим определением поля, принадлежащим Эйнштейну [118, с.265]:

> Совокупность сосуществующих фактов[1], которые понимаются как взаимозависимые, называется **полем**.

Прокомментируем абстрактное определение поля, данное Эйнштейном, перефразируя другое его утверждение: все фак-

[1] *Факт* – 1) действительное, невымышленное происшествие, событие, явление; 2) действительность, реальность, то, что объективно существует.

ты, взятые вместе, создают в окружающем *жизненном пространстве группы* людей определённое состояние, которое, в свою очередь, производит характерное воздействие на определённые объекты, появляющиеся в данном жизненном пространстве. Это состояние пространства и есть *социальное поле.*

17.3.2. О реальности социального поля

Каковы упомянутые объекты, на которые воздействует социальное поле? Это зависит от типа рассматриваемой социальной системы, для описания свойств которой и привлекается теория поля или полевые модели. К примеру, этническое поле обнаруживается по поведению определённого типа индивидов, называемых в теории этнических систем Л.Н. Гумилёва пассионариями. В случае гендерной системы, описывающей процесс образование семьи [61], поле, названное «запахом денег», сказывается на поведении женщин. Другими словами, женщины являются теми «пробными зарядами», которые обнаруживают данное поле.

«Полевая теория, как правило, считает полезным начинать с характеристики ситуации в целом... Такой метод предполагает, что существует нечто вроде свойств поля в целом... Некоторые из этих общих свойств – например, величина «пространства свободного движения» или «атмосфера дружелюбия» – характеризуются терминами, которые, возможно, звучат очень ненаучно для уха человека, привыкшего думать на языке физики. Однако если этот человек на мгновение задумается о фундаментальном значении, которое имеет поле силы тяжести, электрическое поле или величина давления для физических событий, он будет меньше удивлён, обнаружив похожую значимость проблем атмосферы в психологии. К тому же можно вполне точно определить и измерить психологические атмосферы... Каждый ребёнок чувствителен даже к небольшим изменениям в социальной атмосфере, как, например, степени дружелюбия или безопасности. Учитель знает, что успех преподавания французского языка или любого предмета в значительной мере зависит от атмосферы, которую он может создать» (Левин, [118, с.84]).

Поле в социологии (и психологии) – это то, что обеспечивает взаимосвязь различных частей *жизненного пространства* изучаемой группы (соотв.: индивида). Жизненное пространство определяется так, чтобы в любой данный момент оно включало все факты, которые обладают существованием, и исключало те, которые не обладают существованием для данной группы индивидов. При этом существование приписывается всему, что оказывает демонстрируемое воздействие [118, с.12-13].

Социальные поля реальны, они действуют на людей, являющимися своеобразными «пробными зарядами». Люди считаются с величиной напряжённости социального поля, поскольку, к примеру, ощущают (или не замечают, или игнорируют) атмосферу недружелюбия (или дружелюбия), появляясь в определённых общественных местах, и именно это указывает на реальность социального поля.

Величина «заряда», его «знак», от которых зависит реакция на наличие социального поля, – это проявление «силы воли» или, напротив, «безволие», «неспособность постоять за себя» и т.д.

17.3.3. О реальности ментального поля

Проявления социальных полей в реальном мире, как мы неявно предполагаем, происходят через *силовые* коллективные действия массы людей (возбуждённая и подталкиваемая экстремистами (пассионариями) толпа сметает на своем пути стены, крепости и т.д.). Понятие «силовое» восходит к понятию «сила», являющимся фундаментальным понятием классической физики (все действия осуществляются через силу). В классической физике вещь (тело) движется лишь постольку, поскольку на него воздействует какая-то *сила*. Сила – причина изменения состояния вещи. Реальность, по воззрениям классической науки, является причинным миром.

В обществе, не охваченном умонастроениями классической физики, требующей указания (материальной) силы как причины факта изменения, а таковым было средневековое общество, практически любая вещь была способна «повлиять» на что угодно. Злые духи отравляли воздух, и люди заболевали. В частности, сознание, являющееся духовной субстанцией по Декарту, вполне могло «воздействовать» на вещи [139, с.103]. Иначе говоря, имело место изменение состояния без какой-либо причины, отождествляемой с силой. «Воздействие» было *несиловым.*

В силу сказанного, в достаточно распространённом в наше время мнении, что действие ментального поля индивида может быть *несиловым*, казалось бы, есть возврат к средневековому стилю мышления.

Однако во второй половине XX века стало ясным, что квантовая механика открывает для нас существование квантовых, *несиловых* взаимодействий, осуществляемых мгновенно. А.Д. Александров назвал их квантовой связью [2]. В современной терминологии речь идет о квантовой корреляции. Для реализации квантовой корреляции необходимо наличие *сцепленного* состояния двух подсистем. В простейшем случае это сцепленное состояние вида

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1 \otimes |1\rangle_2 - |1\rangle_1 \otimes |0\rangle_2\right)$$

для двух подсистем 1 и 2, каждая их которых может быть только в одном их двух состояний – $|0\rangle$ или $|1\rangle$. Если первая подсистема в состоянии $|0\rangle_1$, то вторая – в состоянии $|1\rangle_2$, и наоборот: если первая подсистема в состоянии $|1\rangle_1$, то вторая – в состоянии $|0\rangle_2$.

Применительно к социальному явлению можно рассмотреть две подсистемы: «женщина» и «мужчина». Подсистема «женщина» находится в двух состояниях: «замужняя», «вдова», а подсистема «мужчина» в состояниях «живой», «мёртвый».

«Женщина» и «мужчина» образуют сцепленное состояние «брак»:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\text{замужняя}\rangle \otimes |\text{живой}\rangle - |\text{вдова}\rangle \otimes |\text{мёртвый}\rangle\big).$$

Если муж живой, то женщина замужняя; если мужчина уехал в другой город и там погиб, то в то же самый миг женщина стала вдовой и по всем юридическим нормам, и по человеческому разумению. Смена состояния подсистемы «женщина» произошла без какой-либо силовой связи[2].

Все преобразования Природы, производимые людьми с целью проживания в тех или иных комфортных условиях (к примеру, дома с печным отоплением, дома с электрическим отоплением), рассматриваются в классической науке только как достигаемые через силовые связи, или, как выражаются философы, через материальную деятельность.

Но ведь следует предположить и возможность несиловых, квантовых корреляций между *набором коллективных* «умонастроений» большой группы людей – квантового состояния совокупности r подсистем-субъектов $S_1, ..., S_r$ – и соответствующим квантовым состоянием окружающего мира – той или иной реальностью. Смена «умонастроения» (от домов с печами к домам с электрообогревателями) означает в таком случае смену реальности.

Много-много мышей[3] *взглянули на мир, и мир вдруг заполнился корками хлеба*! Поскольку такой мощи мышиного общества мы не наблюдали, то, скорее всего, кроме условия *скоррелированности сознания и реальности*, нужна ещё, скажем, *согласованность в мыслях* мышиных мозгов.

Ясно, что говорить о таких вещах можно лишь в том случае, если эффекты квантовой механики распространяются не только на микромир, но и на макромир.

17.4. Квантовая механика

Классическая механика описывает движение тел в пространстве, понимая под их физическим состоянием смену места и

[2]Этот пример автор услышал от А.Д. Александрова в 1971 году.

[3]В одном из возражений против квантовой механики Эйнштейн восклицал, что состояние Вселенной не может меняться от того, что на него смотрит мышь.

пребывание во вращении. Если принять, что этим физическое состояние тела не ограничивается, и оставить за собой свободу не уточнять, что именно нас может интересовать при физическом изучении тела, принимаем, что физическое состояние тела описывается некоторой величиной ψ, которая принимает комплексные значения, меняющиеся при переходе от одной точки (события) в пространстве-времени к другому. Иначе говоря, полагаем, что

$$\psi = \psi(x, y, x, t).$$

Поскольку желательно отойти от классического рассмотрения тела как материальной точки, то исчезает возможность приписывания телу в любой данный момент t точных координат (x, y, z) местонахождения тела.

Взамен вводим среднее значение координат $\langle\overrightarrow{r}\rangle = (\langle x\rangle, \langle y\rangle, \langle z\rangle)$ местонахождения тела – координаты центра массы тела, если прибегнуть к классической терминологии, – которое вычисляется по правилу

$$\langle x\rangle = \int \overline{\psi}(x, y, x, t)x\psi(x, y, x, t)dxdydz,$$

$$\langle y\rangle = \int \overline{\psi}(x, y, x, t)y\psi(x, y, x, t)dxdydz,$$

$$\langle z\rangle = \int \overline{\psi}(x, y, x, t)z\psi(x, y, x, t)dxdydz.$$

Пусть тело находится в потенциальном поле $U(x, y, z, t)$. Примем как постулат[4] следующее уравнение движения тела с массой m в поле U:

$$\boxed{m\frac{d^2}{dt^2}\langle\overrightarrow{r}\rangle = \int \overline{\psi}(x, y, x, t)(\nabla U)\psi(x, y, x, t)dxdydz.} \qquad (17.2)$$

[4]Постулируемое уравнение движения (17.2) известно как теорема Эренфеста и оно было выведено Эренфестом из уравнения Шрёдингера. Традиционно это трактовалось как то, что классическая механика Ньютона – это предельный случай квантовой.

Для того чтобы описывать физические состояния тела, нам теперь требуется найти уравнение движения для функции $\psi(x, y, x, t)$, которую будем называть *волновой функцией.* Это было сделано А.Д. Александровым в 1934 году [1].

В результате будет построена механика, которая отличается от классической только тем, что вводится описание физического состояния тела с помощью волновой функции и за основу взято не уравнение движения Ньютона для материальной точки

$$m\frac{d^2}{dt}\overrightarrow{r} = \nabla U, \tag{17.3}$$

а уравнение (17.2).

Для краткости ограничимся рассмотрением одномерного случая.

Определим оператор импульса $\hat{p}$ с помощью уравнения

$$m\frac{\partial}{\partial t}\int \overline{\psi} x\psi d\tau = \int \overline{\psi}\hat{p}\psi d\tau. \tag{17.4}$$

Тогда уравнение (17.2) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \overline{\psi}\hat{p}\psi d\tau = \int \overline{\psi}\ \frac{\partial U}{\partial x}\psi d\tau. \tag{17.5}$$

Будем полагать, что

$$\psi(t) = S(t)\psi(0), \tag{17.6}$$

где $S(t)$ – оператор, зависящий от времени и от условий, в которых находится тело.

Для того чтобы

$$\int |\psi(t)|^2 d\tau$$

можно было трактовать как вероятность, необходимо, чтобы

$$\int |\psi(t)|^2 d\tau = \int |\psi(0)|^2 d\tau, \tag{17.7}$$

т.е.

$$\int \overline{S}\ \overline{\psi}(0) S\psi(0) d\tau = \int \overline{\psi}(0)\psi(0) d\tau,$$

что возможно тогда и только тогда, когда оператор унитарный, т.е. $SS^+ = I$. Отсюда $\dot{S}S^+ + S\dot{S}^+ = 0$, так что $(\dot{S}S^+)^+ = -\dot{S}S^+ = i\hat{L}$, где $\hat{L}$ – самосопряженный оператор.

Далее

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(t) = \dot{S}(t)\psi(0) = \dot{S}(t)S^+(t)\psi(t) = -i\hat{L}\psi(t).$$

Следовательно,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{L}\psi. \tag{17.8}$$

Производя в (17.4) и (17.5) дифференцирование под знаком интеграла и используя (17.8), получаем из (17.4)

$$x\hat{L} - \hat{L}x = i\frac{\hat{p}}{m} \tag{17.9}$$

и из (17.5)

$$\hat{p}\hat{L} - \hat{L}\hat{p} = -i\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{17.10}$$

При $U = 0$, переобозначая в этом случае оператор $\hat{L}$ как $\hat{L}_0$, последнее равенство переписываем в виде

$$\hat{p}\hat{L}_0 - \hat{L}_0\hat{p} = 0. \tag{17.11}$$

Отсюда следует, что $\hat{L}_0$ есть функция только от $\hat{p}$, т.е. $\hat{L}_0 = P(\hat{p})$. Тогда из (17.9) имеем

$$xP - Px = i\frac{\hat{p}}{m}.$$

Вычитая это равенство из (17.9), получаем

$$x(\hat{L} - P) - (\hat{L} - P)x = 0. \tag{17.12}$$

Откуда следует, что $(\hat{L} - P) = Q(x)$, т.е. функция x. Поэтому имеем

$$\hat{L} = P + Q, \tag{17.13}$$

$$xP - Px = i\frac{\hat{p}}{m}, \tag{17.14}$$

$$\hat{p}Q - Q\hat{p} = -i\frac{\partial U}{\partial x}. \tag{17.15}$$

Умножая уравнение (17.14) на $\hat{p}$ сперва справа, потом слева и приравнивая левые части, получаем после преобразований

$$(\hat{p}x - x\hat{p})Q = Q(\hat{p}x - x\hat{p}). \tag{17.16}$$

Аналогичным способом, используя умножение (17.15) на x, получаем

$$(\hat{p}x - x\hat{p})P = P(\hat{p}x - x\hat{p}). \tag{17.17}$$

Если теперь сложить (17.16) и (17.17), то имеем

$$(\hat{p}x - x\hat{p})\hat{L} = \hat{L}(\hat{p}x - x\hat{p}).$$

Поскольку оператор произволен, то заключаем, что $(\hat{p}x - x\hat{p})$ коммутирует с любым оператором. Но это означает, что $(\hat{p}x - x\hat{p})$ есть абсолютно постоянный оператор.

Если $U = x$, то, полагая в этом случае $Q = Q_1$, получаем из (17.15)

$$\hat{p}Q_1 - Q_1\hat{p} = -i. \tag{17.18}$$

Из этого равенства следует, что в соответствующем представлении $Q_1 = i\frac{\partial}{\partial p}$. Подставляя это в (17.16), получаем

$$(\hat{p}x - x\hat{p})i\frac{\partial}{\partial p} = i\frac{\partial}{\partial p}(\hat{p}x - x\hat{p}) \tag{17.19}$$

и, так как собственные значения оператора $i\frac{\partial}{\partial p}$ не выражены,

$$\hat{p}x - x\hat{p} = F(i\frac{\partial}{\partial p}). \tag{17.20}$$

Подставляя это в (17.17), имеем

$$P(\hat{p})F(i\frac{\partial}{\partial p}) = F(i\frac{\partial}{\partial p})P(\hat{p}), \tag{17.21}$$

что возможно только тогда, когда

$$F(i\frac{\partial}{\partial p}) = c \quad (c - \text{число}), \tag{17.22}$$

так как из (17.14) ясно, что P не может быть c-числом.

Имеем

$$\bar{c} = (\hat{p}x - x\hat{p})^{+} = x^{+}\hat{p}^{+} - \hat{p}^{+}x^{+} = x\hat{p} - \hat{p}x = -c,$$

откуда ясно, что c мнимо, так что, полагая $c = -i\hbar$, получаем

$$\boxed{\hat{p}x - x\hat{p} = -i\hbar.} \tag{17.23}$$

Отсюда следует, что

$$\hat{p}^2 x - x\hat{p}^2 = -2i\hbar\hat{p}. \tag{17.24}$$

Сравнивая это уравнение с уравнением (17.14), получаем

$$P = \frac{1}{2m\hbar}P^2. \tag{17.25}$$

Кроме того, из (17.23) вытекает, что в x-представлении

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial p} + f(x).$$

Подставляя это в уравнение (17.15), получаем, отбрасывая аддитивную постоянную,

$$Q = \frac{1}{\hbar}U. \tag{17.26}$$

Следовательно,

$$\hat{L} = P + Q = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + U\right)$$

Подставляя это в уравнение (17.8), получаем уравнение Шрёдингера:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + U\right)\psi.} \tag{17.27}$$

Таким образом, слегка модифицируя классическую механику Ньютона, заменив уравнение (17.3) на уравнение (17.2), мы вывели основное коммутационное соотношение (17.23) квантовой механики и её главное уравнение – уравнение Шрёдингера (17.27)[5]. Это говорит о том, что квантовая механика не может рассматриваться только как механика микромира: квантовая механика – это более совершенный вариант классической механики, способный одинаково хорошо описывать как явления микромира, так и явления макромира. Однако, в силу довлеющего над физиками представления, что квантовая механика – это механика микромира, универсальный характер квантовой теории осознается далеко не всеми физиками и, более того, об этом не пишут учебниках по квантовой механике.

17.5. Макроскопические квантовые эффекты

Могут ли квантовые эффекты, т.е. характерные эффекты поведения объектов, изучаемых квантовой механикой, проявляться в макромире? Такие эффекты называются *макроскопическими квантовыми эффектами.*

Макроскопические проявления квантовых эффектов отмечены достаточно давно, но «при этом, ссылаясь на странные выводы, к которым приходили в случае применения квантовой теории к явлениям макромира, её отлучали *a priori*, как, например, в копенгагенской интерпретации, от макроскопической области физической реальности» [279].

17.5.1. Физические макроскопические квантовые эффекты

«Макроскопические квантовые эффекты – совокупность явлений, в которых характерные особенности квантовой меха-

[5]Это было продемонстрировано А.Д. Александровым в 1934 году.

ники непосредственно проявляются в поведении макроскопических объектов. Как правило, поведение макроскопических (содержащих большое число атомов) тел с высокой точностью описывается уравнениями классической физики, в которые не входит характерная для квантовой механики величина – постоянная Планка h.

Но, например, при низких температурах существует важный класс вполне макроскопических явлений, в наблюдаемые данные по которым постоянная Планка входит в явном виде и может быть из них непосредственно измерена.

Спектр физических макроскопических квантовых эффектов в их современном понимании достаточно широк – от традиционных теплового излучения, фотоэффекта, оптического квантового генератора (лазера), радиоактивности и эффектов сверхтекучести жидкого гелия и сверхпроводимости металлов до синхротронного излучения, низкотемпературных туннельных химических реакций, дробного квантового эффекта Холла и квантовых эффектов в полупроводниковых наноструктурах» [97, с.13], макроскопических квантовых когерентных эффектов, индуцированных нестационарным магнитным полем в динамике высокоспиновых магнитных нанокластеров, молекул и ионов.

Развитие квантовой кибернетики обнаружило проявления эффектов *квантовой телепортации* и *квантовой корреляции* между квантовыми объектами на расстояниях в тысячу километров.

17.5.2. Нефизические макроскопические квантовые эффекты

Квантовый компьютер – это особая вычислительная машина, обладающая функциональным свойством: в неё закладывается программа, реализующая квантовый алгоритм. Это свойство является *нефизическим* в том смысле, что оно может быть определено при помощи терминов, не содержащих ссылок на физическое или химическое строение компьютера.

Мозг может действовать по определённой программе, компьютер может действовать по определённой программе, и функциональная организация мозга и компьютера может быть полностью одинаковой, несмотря на то что материал, из которого они состоят, целиком и полностью различен (Патнэм, [139, с.108]).

Мозг, по современным воззрениям Пенроуза и Хамероффа, – это квантовая система [140]. Мысль, идея, фантазия, появляющаяся в мозгу, есть результат макроскопического процесса, описываемого квантовомеханически (и не допускающего точного измерения), и в силу этого представляет собой квантовое состояние в мозгу индивида (субъекта). Субъект – это всего лишь подсистема системы, называемой Миром, Реальностью, Вселенной. С состоянием этой подсистемы соотносятся другие подсистемы-субъекты и особая подсистема, которая носит название *Природа*.

17.6. Дальнодействующая квантовая связь

Эйнштейн вместе с Подольским и Розеном, пытаясь доказать неполноту квантовой механики, продемонстрировали парадокс, который привёл к открытию дальнодействующих квантовых связей между квантовыми объектами. Сейчас эти связи называются *квантовыми корреляциями.* Первым на них обратил внимание и разъяснил их сущность в 1952 году А.Д. Александров [2].

С точки зрения законов релятивистской физики дальнодействующая связь – это нефизическое явление и, следовательно, не может существовать в Природе. Но, как показали эксперименты, оно существует.

17.6.1. Квантовые корреляции

Две частицы, описываемые единой волновой функцией, разъяснял А.Д. Александров, даже если они разошлись на большое расстояние, продолжают взаимодействовать, но это взаимодействие является неклассическим, несиловым.

Причина наличия такой связи достаточно тривиальна – просто взаимодействующие частицы имеют общую волновую функцию [2]. В наши дни существование этих квантовых корреляций считается твёрдо установленным научным фактом.

17.6.2. Вневременность квантовых корреляций

Слово «взаимодействие» содержит в себе время, поскольку оно говорит о действии, а действие – это временно́й акт. Квантовые корреляции мгновенны; они вневременны. Следовательно, в случае макроскопической квантовой корреляции акт в одной точке пространства тут же вызывает отклик в удалённой. Мысль, возможно, – это квантовый акт, который способен перестроить материю на дальнем расстоянии.

17.7. Реализация «умонастроений»

Предполагаем, что существует Не́что, обозначаемое как 0 и называемое *материальной Природой*, которая существует объективно, т.е. независимо от того, есть ли люди или их нет вообще (например, все погибли в мировом катаклизме). Природе приписываем ψ-функцию состояния $|\psi^0\rangle$. События $A, B, ..., C$, происходящие в Природе, оставляют свой «след», и это записываем следующим образом:

$$|\psi^0_{[A,B,...,C]}\rangle.$$

Субъект S, наделённый индивидуальным сознанием, которое обладает «идеей» (=«фантазией») A с собственной волновой функцией $|\phi_i\rangle$ в системе S, вступает во взаимодействие с Природой, начальное состояние которой $|\psi^0\rangle$. Результатом взаимодействия, проистекающего во *времени* и занимающего промежуток времени $[0, T]$, является попытка реализации идеи A.[6] Иными словами, начальное состояние ($t = 0$)

$$|\psi^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots]}\rangle \tag{17.28}$$

преобразуется в новое состояние

$$|\widetilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots,a_i]}\rangle,$$

где a_i характеризует состояние $|\phi_i\rangle$, т.е. отражает i-ю форму реализации «идеи» (фантазии) A. Под преобразованием мы понимаем решение $|\psi^{S+0}\rangle(t)$ уравнения Шрёдингера с начальным данным (17.28) при $t = 0$ и с

$$|\widetilde{\psi}^{S+0}\rangle = |\psi^{S+0}\rangle(T).$$

Мы описали идеальный случай, когда индивидуальное сознание остаётся в собственном состоянии $|\phi_i\rangle$. В общем случае, если начальное состояние индивидуального сознания является несобственным, а общим состоянием $\sum_i a_i|\phi_i\rangle$, конечное состояние системы «субъект-Природа» будет иметь вид

$$|\widetilde{\psi}^{S+0}\rangle = \sum_i a_i|\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots,a_i]}\rangle. \tag{17.29}$$

Мы видим, что в каждом элементе суперпозиции $|\phi_i\rangle|\psi^0_{[\dots,a_i]}\rangle$ состояние Природы есть особенное собственное состояние *потенциальной реальности* (вселенной), и, *более того, состояние Природы описывает Природу как определённо состоящую из набора потенциальных вселенных (реальностей). Таким*

[6] Скорее надо говорить не о *взаимодействии, проистекающем во времени*, – это фразеология классической физики, а о квантовой корреляции Природы и сознания индивида. Но сознания разных индивидов не скоррелированы. Реализация «идеи» A разными сознаниями – это две разные квантовые корреляции, касающиеся Природы. Они вынуждены быть *последовательными*, если направлены на одну и ту же вещь, а значит, рождается то, что мы называем *физическим объективным временем*. Следовательно, сознания рождают Реальность во времени. Эту мысль подсказал автору проф. А.А. Берс.

образом, Природа ветвится! В каждой потенциальной реальности субъект обнаружит различные наблюдаемые значения a_i идеи A, и его сознание разветвится, оказываясь в состояниях $|\phi_i\rangle$.

Рассмотрим еще более общую ситуацию, когда имеем несколько субъектов $S_1, S_2, ..., S_n$, находящихся в состояниях $|\psi^{S_1}\rangle, |\psi^{S_2}\rangle, ..., |\psi^{S_n}\rangle$. Пусть первый субъект S_1 начинает реализовывать идею-фантазию A^1. Тогда начальное состояние

$$|\psi^{S_1+S_2+...+S_n+0}\rangle = |\psi^{S_1}\rangle|\psi^{S_2}\rangle...|\psi^{S_n}\rangle|\psi^0_{[...]}\rangle$$

преобразуется в конечное состояние

$$|\psi_1^{S_1+S_2+...+S_n+0}\rangle = \sum_i a_i^1|\phi_i^{S_1}\rangle|\psi^{S_2}\rangle...|\psi^{S_n}\rangle|\psi^0_{[...a_i^1]}\rangle, \qquad (17.30)$$

где $|\phi_i^{S_1}\rangle$ – собственные функции сознания субъекта S_1.

И здесь мы видим ветвление сознания и Природы.

Если теперь во взаимодействие вступает второй субъект S_2, реализующий свою идею-фантазию A^2, то состояние (17.30) даст состояние

$$|\psi_2^{S_1+S_2+...+S_n+0}\rangle =$$
$$= \sum_i \sum_j a_i^1 a_j^2|\phi_i^{S_1}\rangle|\phi_j^{S_2}\rangle|\psi^{S_3}\rangle...|\psi^{S_n}\rangle|\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2]}\rangle. \qquad (17.31)$$

Действия второго субъекта ведут к новому ветвлению Природы и индивидуального сознания и, естественно, того, что он наблюдает.

Потенциальная реальность (вселенная) $|\psi^0_{[...a_i]}\rangle$, навязываемая Природе субъектом S_1, будет поддержана вторым субъектом в форме a_j^2, если потенциальная реальность (вселенная) $|\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2]}\rangle$ *согласуется* с потенциальной реальностью $|\psi^0_{[...a_i^1]}\rangle$. Под согласованием можно понимать, например, пропорциональность двух указанных потенциальностей реальностей (вселенных) как векторов гильбертова пространства состояний Природы, т.е. если

$$\exists\lambda \in \mathbb{C}\ (|\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2]}\rangle = \lambda|\psi^0_{[...a_i^1]}\rangle). \qquad (17.32)$$

И вообще, после действия r субъектов по реализации своих идей-фантазий ($r \leq n$) получим состояние

$$|\psi_r^{S_1+S_2+...+S_n+0}\rangle =$$

$$= \sum_{i,j,...,m,k} a_i^1 a_j^2 ... a_m^{r-1} a_k^r |\phi_i^{S_1}\rangle |\phi_j^{S_2}\rangle ... |\phi_m^{S_{r-1}}\rangle |\phi_k^{S_r}\rangle |\psi^{S_{r+1}}\rangle ...$$

$$... |\psi^{S_n}\rangle |\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2 ... a_m^{r-1} a_k^r]}\rangle. \tag{17.33}$$

Если число субъектов достаточно велико, то реализуемые ими идеи в форме потенциальных реальностей (вселенных) приведут к рождению[7] актуальной **физической реальности (вселенной)**

$$\boxed{R = |\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2 ... a_m^{r-1} a_k^r]}\rangle,} \tag{17.34}$$

если

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \ (|\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2 ... a_m^{r-1} a_k^r]}\rangle = \lambda |\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2 ... a_m^{r-1}]}\rangle = ...$$

$$... = \lambda |\psi^0_{[...a_i^1 a_j^2]}\rangle = \lambda |\psi^0_{[...a_i^1]}\rangle). \tag{17.35}$$

Очевидно, таких физических реальностей (вселенных) может быть много – $R, R', R'', ...$ – это всё эвереттовские параллельные вселенные, но одновременно существует множество потенциальных реальностей, так и не ставших актуальной физической реальностью. Это происходит потому, что действия индивидуальных сознаний не оказались согласованными. Иначе говоря, не все идеи-фантазии реализуются; многие из них остаются снами-миражами.

17.8. Осознание

Осознание – это отдавание себе отчёта, что мы есть в данном месте и в данное время, т.е. *присутствуем.* Как это описать математически? Традиционно считается, что Вселенная,

[7]Несогласованные потенциальные реальности (вселенные) остаются с нами в форме грёз субьектов, их породивших.

Внешний Мир в нас отражается; отражается в нашем мозгу. Но почему мозг знает, что он отражает реальность?

Физическая реальность (вселенная) R, данная формулой (17.34), есть, в частности, нечто, созданное по «матрице» M, состоящей из набора идей-фантазий $A, B, ...$ Это первый этап на пути к осознанию – рождение физической реальности (мира). На втором этапе рождённая реальность (вселенная) отражается, т.е. воспринимается мозгом. В мозгу появляется отпечаток $\widetilde{M}$. На третьем этапе матрица M сравнивается с отпечатком $\widetilde{M}$. При совпадении (почти совпадении) мозг «видит себя в реальности (17.34)» [72]. Это и есть отдавание себе отчёта о присутствии (местонахождении), т.е. акт осознания: «...сущее, которое мы сами всегда суть и которое среди прочего обладает бытийной возможностью спрашивания, мы терминологически схватываем как *присутствие*» (Хайдеггер, [164, с.22]).

Осознание, как мы видим, не может быть сведено только к отражению внешней объективной реальности. Отражённый внешний мир должен быть с необходимостью *узнан*. Узнавание происходит посредством того, что Я сообщает самому себе, что оно присутствует в *том*, что отразилось в моём Я, что это *тот мир*, это *та вселенная*, которую Я же и порождало, на который моё Я согласилось с другими я [8].

Но способны ли на такое ментальные поля?

17.9. Как разум заменяет вселенную-реальность

Правильнее было бы говорить не об изменении вселенной-реальности, а о смене вселенной-реальности. Формула (17.33) показывает, что на каждом шаге вселенная-реальность

$$R = |\psi^0_{[\dots a^1_i a^2_j \dots a^{r-1}_m a^r_k]}\rangle \tag{17.36}$$

[8]См. подробности в книге [72].

находится в квантовой корреляции (связи) с состояниями n субъектов

$$|\phi_i^{S_1}\rangle|\phi_j^{S_2}\rangle...|\phi_m^{S_{r-1}}\rangle|\phi_k^{S_r}\rangle|\psi^{S_{r+1}}\rangle...|\psi^{S_n}\rangle, \qquad (17.37)$$

из которых к данному моменту r субъектов реализовали свои идеи-фантазии $A^1, ..., A^r$.

Иначе говоря, фантазиям отвечает конкретная вселенная-реальность, которая *есть*. Вселенных-реальностей *много, и все они есть*. Вселенная-реальность R существует, но видится всеми субъектами сразу и устойчиво от поколения к поколению постольку, поскольку идеи-фантазии субъектов сами *согласованы*, как это определено условием (17.35).

Совокупность идей-фантазий множества субъектов («умонастроение»), которым отвечает состояние (17.37), – это духовная составляющая конкретной исторической эпохи (конкретный гештальт Гёте и Шпенглера, цивилизация Тойнби), существующая в рамках соотнесенной материальной реальности вида (17.36). Смена исторической эпохи (гештальта) – это радикальная замена представления о Мире, в котором хотелось бы существовать. К примеру, в наши дни мы наблюдаем, как идет «уход» из вселенной-реальности, состоящей из вещества и излучения, и совершается «размещение» в реальности, на 95% состоящей из тёмной материи и тёмной энергии[9]. Это *наше* очередное усложнение заселяемой *нами* вселенной-реальности.

Вселенные-реальности и совокупности идей-фантазий субъектов, как видно из формулы (17.33), на каждом шаге «эволюции» представляют собой *сцепленные* квантовые состояния всего Бытия как гигантской квантовой системы.

---

[9]Другой пример: вот уже почти сто лет мужчин вполне устраивает их основной костюм, состоящий из брюк, пиджака, рубашки и галстука. Незначительно меняются лишь ширина брюк, лацканов, галстука. В XIX веке мужчины были бо́льшими «модниками».

17.10. В какой форме созидается Вселенная?

Как конкретно созидается Вселенная в форме пространства-времени?

Человек, его мозг так устроен, что он видит внешний мир в форме *пространства*[10]. *Пространство даёт место вещам*!

Но созидается ли Внешний Мир, Вселенная индивидуальным сознанием как сразу целостное 3-мерное пространство, в котором все размещаемые вещи одновременны? Последнее является важным условием, поскольку для человека то, что мозг воспринимает, является одновременным.

Примем, что это так[11]. Тогда то, что рождается, – это пространство, оснащённое геометрией ${}^{(3)}\mathcal{G}$ с метрикой $h_{\alpha\beta}$. Но геометрии бывают разными, поэтому символ ${}^{(3)}\mathcal{G}$ следует понимать как переменную величину.

Индивидуальное сознание могло создать множество разных 3-геометрий, и этот факт в обозначениях квантовой механики обозначим как введение в рассмотрение вместо вектора (17.36) амлитуды вероятностей

$$\Psi\big({}^{(3)}\mathcal{G}_{[\dots a_i^1 a_j^2 \dots a_m^{r-1} a_k^r]}\big), \tag{17.38}$$

или просто

$$\Psi\big({}^{(3)}\mathcal{G}\big).$$

Пространство с 3-геометрией ${}^{(3)}\mathcal{G}$ – это арена, на которой развернута историческая эпоха. Однако для комфортного существования человека одной геометрии мало, необходимо иметь вполне определенные материальные условия, основанные на наличии в пространстве физической материи. А также необходимо наличие планетной системы с конкретной биосферой, этносферой, социосферой и ноосферой.

---

[10] Думается, боязнь ограниченного пространства – клаустрофобия – это следствие того, что созидается обширное пространство, вмещающее мыслимый мир.

[11] Создание 3-пространства индивидуальным сознанием не означает создание актуального 3-пространства, единого для всех сознаний.

Историческая эпоха α – это мода u_α – комплекснозначная волна в конфигурационном суперпространстве, являющемся произведением суперпространства 3-мерных геометрий Уилера, физической материи, биосферы, этносферы, социосферы и ноосферы. Историческая эпоха не включает времени, поскольку историческая эпоха есть «замороженное состояние», но включает знание о геометрии пространства ${}^{(3)}\mathcal{G}$, о материи μ, о состоянии окружающей среды, т.е. природы B, о состоянии этнического поля e, социального поля σ и ноосферного поля ν. Следовательно,

$$u_\alpha = \Psi_\alpha({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu).$$

Знание о материи μ, как правило, при написании уравнения Уилера-ДеВитта, – это физические поля. Иначе говоря, это привычная для физиков часть моды u_α, хотя нами предполагается, что «состояние» μ означает сформировавшуюся «твердь земную», B – это конкретная биосфера на «тверди земной», e – существование этносов на «тверди земной», σ – рождаются государства, а ν – процветает разум.

Линейная упорядоченная реальность, или, в иной терминологии, историческая последовательность – это результат *интерференции*[12] (рис. 17.1) суммы исторических эпох-волн

$$\Psi = c_\alpha u_\alpha + c_\beta u_\beta + ...$$

Функция Ψ удовлетворяет уравнению Уилера-ДеВитта[13]

$$\Big[G_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{\delta}{\delta h_{\alpha\beta}}\frac{\delta}{\delta h_{\gamma\delta}} + \sqrt{h}\ {}^{(3)}R +$$

$$+\mathcal{E}(h_{\alpha\beta}, \mu, B, e, \sigma, \nu)\Big]\Psi({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) = 0,$$

[12]Интерференцией волн называется явление усиления колебаний в одних и ослабление колебаний в других точках пространства в результате наложения двух или нескольких волн, приходящих в эти точки пространства.

[13]Уравнение Уилера-ДеВитта позволяет описать рождение 4-мерного пространства-времени.

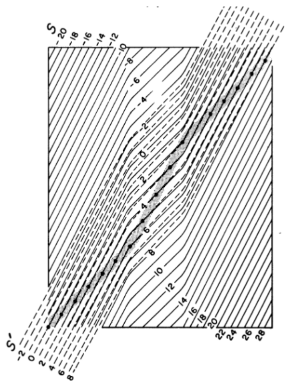

Рис. 17.1: Появление классического пространства-времени в результате интерференции: числа -20, -18, ..., +28,... – пронумерованы гребни моды u_α. Пунктирные линии – гребни моды u_β. Заштрихованная область есть область интерференции (волновой пакет), в которой усиливаются амплитуды волн-мод. Чёрные точки отмечают классическую траекторию в суперпространстве, являющуюся классическим пространством-временем. Рис. из [157].

где $\mathcal{E}(h_{\alpha\beta}, \mu, B, e, \sigma, \nu)$ – член, учитывающий вклад материальных источников μ, окружающей среды (природы) B и полей e, σ и ν.

В (квази)классическом приближении, к которому мы должны с неизбежностью перейти как к *определённому условию* существования человеческого сознания, каждой исторической эпохе α отвечает волновая функция

$$\Psi_\alpha({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) =$$

$$= \left(\begin{array}{c} \text{медленно меняющаяся} \\ \text{амплитудная функция} \end{array} \right) e^{-\frac{i}{\hbar} S_\alpha({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu)}, \qquad (17.39)$$

а всем типам исторических эпох (типам общественного сознания) соответствует волновой пакет:

$$\Psi({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) =$$

$$= c_\alpha \Psi_\alpha({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) + c_\beta \Psi_\beta({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) + ...$$

Там, где «фазы отдельных исторических эпох-сознаний $\alpha, \beta, ...$» совпадают, т.е.

$$S_\alpha({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) = S_\beta({}^{(3)}\mathcal{G}, \mu, B, e, \sigma, \nu) = ... =, \qquad (17.40)$$

происходит (конструктивная) интерференция, приводящая *к рождению единой* для всех исторических эпох исторической последовательности, представляющей собой *пространство-время* (реальность) (рис. 15.1), в котором идут эволюционные процессы, в форме *последовательной совокупности точек* в суперпространстве. Данная последовательность точек – это цепь горных пиков, или горный хребет (см. § 16.1).

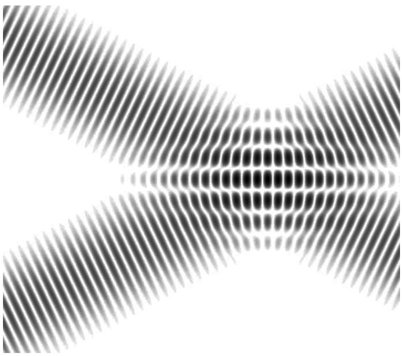

Рис. 17.2: Интерференция двух плоских волн. Видны параллельные исторические вселенные-реальности (как несколько цепей горных пиков, по выражению Halliwell'а [229, p.180]).

Появляется возможность упорядочивания «горных пиков», и это упорядочивание есть не что иное, как *время* t, с течением которого изменяется геометрия 3-пространства ${}^{(3)}\mathcal{G}(t)$, состояние материи $\mu(t)$ (рождаются планеты) и биосферы $B(t)$, идут этнические $e(t)$ и социальные $\sigma(t)$ процессы, бьётся человеческая мысль $\nu(t)$.

Очевидно, что если в (17.40) взять не все эпохи, то появятся *частичные* интерференционные возможности, появятся параллельные исторические последовательности, параллельные вселенные-реальности. Волновая функция Ψ концентрируется как цепь горных пиков вдоль одной или *нескольких классических траекторий* в суперпространстве (см. рис. 17.2).

Каждая такая классическая траектория есть историческая последовательность. Квантовомеханическая интерференция между такими траекториями-последовательностями (конфигурациями) должна быть пренебрежимой, т.е. траекториям следует декогерировать [229, p.180]. Иначе говоря, они являют собой параллельные, т.е. практически не взаимодействующие вселенные-реальности.

Заметим, что условие (17.40), ведущее к рождению актуального пространства-времени, является аналогом условия рождения актуальной вселенной-реальности (17.35).

17.11. Паттерны: по какому образцу построена Вселенная

> «Ты спрашиваешь, из чего это сделано – из земли, огня, воды и т.д.?» Или ты спрашиваешь: «По какой модели, по какому *паттерну* это сделано?»
>
> Бейтсон, 1972

Паттерн[14] – это модель, по которой сделаны объекты, или явления природы и общества.

Сегодня ответ на вопрос: «По какой модели, по какому *паттерну* всё сделано?..» не имеет ответа. Почему-то никто не искал универсального паттерна, по которому сделан Внешний Мир.

До сей поры наука больше задавалась вопросом: «Из чего всё это сделано?» И отвечала: «Из земли, огня, воды, молекул, атомов, протонов и электронов, кварков и т.д.».

[14]Паттерн (англ. pattern) – английское слово, значение которого передается по-русски словами «образец», «шаблон», «модель», «форма», «тип», «структура»; также это слово имеет значение «узор».

Как видим, искали и ищут универсальное *вещество*, из которого слеплено, сделано всё сущее в Мире. Во всяком случае, все мы уверены сегодня, что всё состоит из кварков. Но наши желания сделать мир ещё комфортнее (колесницы, тройки, автомобили, самолеты, досветовые звездолёты, «сверхсветовые» звездолеты) и интереснее (театр, кино, телевизор, осмотр вулканов на Марсе, восход двух-трёх светил по «утрам») приводят к тому, что «старого» строительного вещества не хватает для реализации наших мечтаний, – поэтому мы обнаруживаем всё «новое» вещество, из которого строим, достраиваем и перестраиваем нашу Вселенную. Мы всё время усложняем свой мир. Мир приобретает свойства параллельно с осознанием Мира[15].

Для нас столь важно узнать «из чего сделано», что упускается значимость паттерна, образца.

> Крис Кельвин, герой романа Лема «Солярис», рассматривая в микроскоп кровь существа с именем Хэри, появившегося из сна, неожиданно обнаруживает, что кровяные тельца ещё образованы из молекул, но сами молекулы ни из чего не состоят. Хэри «сделана» по образцу людей, но не «сделана», как люди.

Так, может быть, *паттерн вещи* позволяет её *создать* (*овременить*) в *реальности*, иначе говоря, *реализовать*, не сильно заботясь о том, из какого вещество её делать.

17.11.1. Структуры Кулакова как паттерны

В 1960-е годы новосибирский физик Ю.И. Кулаков открыл набор элементарных алгебраических формул, которые присутствуют в геометрии и в физике [109, 110]. Его учитель, нобелевский лауреат И.В. Тамм назвал их *первоструктурами*, объясняющими единство мироздания.

[15]Матурано и Варела считали, что «есть материальный мир, но он не обладает никакими предопределёнными свойствами... «ни одна вещь не существует» независимо от процесса познания» (Капра, [102, с.291]).

Претензии структур Кулакова на роль паттернов, лежащих в основе всего Сущего, в основе структуры Реальности, подкрепляются тем, что они обнаружены в геометрии и физике [109, 110], социологии и психологии [61], микроэкономике (выручка предприятия, потенциальная потребность в товаре, финансирование предприятия с помощью заёмного капитала) [64], макроэкономике (потребительский спрос, валовый внутренний продукт) [65], теории рынка труда (равновесие на рынке труда) [67], в геоботанике (конкретные флоры, коэффициент В.И. Василевича для измерения степени различия флористических списков двух растительных сообществ). Задачей является их обнаружение в ботанике, биологии, космологии.

Реальность не собирается по частям из частиц вещества в ходе эволюции от прошлого к будущему, как считает классическая наука, а является вся сразу целиком от прошлого до будущего по заданным образцам, т.е. по конкретным паттернам, как определяет квантовая теория.

17.11.2. Определение структур Кулакова

В теории Ю.И. Кулакова постулируется наличие одного или нескольких множеств $\mathcal{M}, \mathcal{F}, ...$ элементов, между которыми определены отношения, обладающие двумя свойствами. Во-первых, некоторый набор этих отношений, выраженных в виде чисел, должен удовлетворять специальному уравнению, именуемому *законом*, и, во-вторых, в данном законе можно одни элементы заменять на другие по правилу, называемому *фундаментальной симметрией.*

В простейшем случае отношение – это вещественное число, сопоставляемое паре, тройке, четвёрке и т.д. элементов [109]. В качестве элементов могут выступать объекты любой природы: физические тела, индивиды социальной группы, мужчины и женщины, элементарные частицы и т.д., а в качестве отношений между элементами могут рассматриваться расстояния между телами (точками), родственные связи, отношения между полами, взаимодействия между частицами. Если ограничиваются одним множеством, то теория, которая строится, называется *унарной структурой фундаментальных отношений.*

В случае двух множеств $\mathcal{M}$ и F соответствующая теория носит название *бинарной структуры фундаментальных отношений.*

Бинарное отношение – это отображение $\phi : \mathcal{M} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$. Будем обозначать элементы множества $\mathcal{M}$ малыми латинскими буквами $i, k, j, ...$, а множества $\mathcal{F}$ – малыми греческими: $\alpha, \beta, \gamma, ...$ Если $i \in \mathcal{M}$ и $\alpha \in \mathcal{F}$, то значение отношения между i и α представляется в виде формулы

$$a_{i\alpha} = \phi(i, \alpha). \tag{17.41}$$

Другими словами, бинарное отношение между i и α характеризуется вещественным числом $a_{i\alpha}$.

Будем предполагать, что бинарное отношение ϕ является *универсальным* в том смысле, что существуют два натуральных числа r и s, такие, что найдется отображение $\Phi : \mathbb{R}^{rs} \to \mathbb{R}$, обладающее следующим свойством: для любого произвольного набора из r элементов $i_1, ..., i_r \in \mathcal{M}$ и любого набора из s элементов $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathcal{F}$ справедливо равенство

$$\Phi \begin{pmatrix} a_{i_1\alpha_1} & \cdots & a_{i_1\alpha_s} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_r\alpha_1} & \cdots & a_{i_r\alpha_s} \end{pmatrix} = 0. \tag{17.42}$$

Пара чисел (r, s) называется *рангом* рассматриваемой бинарной структуры. В данном определении отчётливо видна постулируемая симметрия данной структуры: любой элемент множества $\mathcal{M}$ может быть заменён на любой элемент множества $\mathcal{F}$, и наоборот. Но при этом элементы из $\mathcal{M}$ берут в количестве r, а из $\mathcal{F}$ – s.

Каждая система отношений отличается от любой другой парой натуральных чисел (r, s), называемой рангом. Ю.И. Кулаков [109] и его ученик Г.Г. Михайличенко показали, что существует классификация систем отношений, и нашли соответствующие алгебраические формулы для ϕ и Φ для всех рангов (r, s).

Ю.И. Кулаков, Ю.С.Владимиров и их ученики, ограничивая свои исследования рамками физики, продемонстрировали, что каждая структура бинарных отношений, описываемая очень простыми алгебраическими формулами, приводит после некоторых преобразований и выкладок к строго определённому физическому закону, например ко второму закону Ньютона, закону Ома или к той или иной геометрии (геометрии Евклида, геометрии Лобачевского и т.д.).

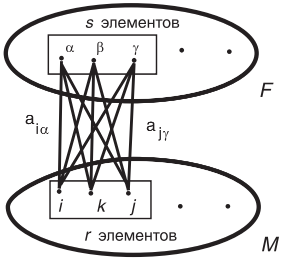

Рис. 17.3: Бинарная система отношений.

Успех теории структур отношений в физике заставляет подумать о возможности применения этой теории в социологии, психологии, экономике и т.д. Это имеет смысл сделать, несмотря на то что в начале XXI века ещё существует предубеждение против перенесения методов естествознания на науки об обществе. Такое предубеждение удерживается, как правило, среди исследователей, которых называют узкими специалистами. Те же, кто более склонен к философским обобщениям, чаще пытаются увидеть за достижением в конкретной области знаний пути к получению новых результатов в других областях науки.

17.11.3. Структуры Кулакова и логика

Структуры отношений Кулакова – это наборы элементарных алгебраических формул, каждая из которых представляет конкретный паттерн.

Но может ли алгебраическая формула, являющаяся основой теории Кулакова и сущностью, принадлежащей элементарной математике, описывать любое явление в природе и в обществе? Ведь существуют более сложные формулы – сущности высшей, а не элементарной математики, например дифференциальные уравнения, с помощью которых успешно описываются многие явления реальности.

Различие между алгеброй и дифференциальным исчислением – это факт классической математики, основанной на классической двузначной (булевой) логике.

Но существуют математики, для которых это не так. Так, в инфинитозимальном анализе Кока-Ловера принята аксиома

$$\forall(f \in R^D)\exists!(a,b) \in R \times R\ \forall d \in D(f(d) = a + b \cdot d),$$

где $D = \{x \in R : x^2 = 0\}$, которая показывает, что производная $f'(x)$ функции f в точке x – это число, удовлетворяющее семейству алгебраических уравнений

$$f(x+d) = f(x) + f'(x) \cdot d, \qquad d \in D.$$

Формально говоря, производная $f'(x)$ функции f в точке x определяется посредством чисто алгебраического выражения:

$$f'(x) = \frac{f(x+d) - f(x)}{d},$$

тогда как в классическом дифференциальном исчислении имеем формулу вида

$$f'(x) = \lim_{d \to 0} \frac{f(x+d) - f(x)}{d},$$

в которой под $\lim\limits_{d \to 0}$ понимается сложное, не сводящееся к алгебре построение.

Остается заметить, что аксиома Кока-Ловера несовместима с двузначной булевой логикой, а сам инфинитозимальный анализ Кока-Ловера развивается в рамках интуиционистской логики (см. гл. 18).

Мы опять пришли к логике, с необходимостью используемой в научных построениях. Во всех научных текстах используется двузначная логика. Фактически нет учебников, описывающих Реальность на языке интуиционистской логики. Почему? Не потому ли, что в таких учебниках были бы совмещены противоречия? Кто мог бы читать такую книгу?

Известен, по крайней мере, такой ответ на этот вопрос: «Бог мог бы создать мир, в котором противоречия были бы совмещены, но «мы не должны пытаться это понять, потому что наша натура не такова, чтобы мы могли это понимать» (Мамардашвили, «Картезианские размышления», [121, с.89]).

17.12. Speculatio

1. Теория – это обыкновенно результаты чрезмерной поспешности нетерпеливого рассудка, который хотел бы избавиться от явлений и подсовывает поэтому на их место образы, понятия, часто даже одни слова (Гёте, [27, с.338]).

2. «Декарт говорил – можешь только ты. Суть его философии можно выразить одной сложноподчиненной фразой: мир, во-первых, всегда нов (в нём как бы ничего ещё не случилось, а только случится вместе с тобой) и, во-вторых, в нём всегда есть для тебя место, и оно тебя ожидает. Ничто в мире не определено до конца, пока ты не занял пустующее место для доопределения какой-то вещи: восприятия, состояния объекта и т.д. И третье (не забудем, что прошлое – враг мысли, борясь с прошлым, мы восстанавливаем себя): если в этом моём состоянии всё зависит только от меня, то, следовательно, без меня в мире не будет порядка, истины, красоты. Не будет чисел, не будет законов, идеальных сущностей, ничего этого не будет» (М. Мамардашвили, [121, с.37]).

Иначе говоря, мир рождается вместе с моим его осознанием, «то есть Бог не предшествует нам во времени» (М. Мамардашвили, [121, с.38]).

3. «Шрёдингер задавал такой вопрос: вот вам было 16 лет, и вас раздирали страсти. А что осталось от того «я», которое было носителем этих страстей? Как некое воплощение «я», ведь это были вы – вместе с вашим телом, с вашими переживаниями и т.д., но вы же его не помните. А вы есть. Значит, вы – другое «я»! В каждый данный момент ваши прошлые «я» казались вам, что они самые важные, самые последние, а они

сменились, даже не породив понятия смерти. Они все умерли, а термин «смерть» даже не возник, И, может быть, ваше «я» – сейчас – есть также воображаемый, воплощённый на несколько часов, на несколько дней или месяцев персонаж, который тоже сменится другим, как и все предшествующие персонажи. Зачем же, говорит Шрёдингер, бояться смерти? Конечно же, мы бессмертны. Это несомненно» (М. Мамардашвили, [121, с.36]).

Нетрудно в словах Шрёдингера увидеть то, что в § 1.2.3 было описано как результат взаимодействия множества исторических эпох, представляющий собой *историческую последовательность* (линейно упорядоченную реальность), состоящую из последовательности (кусков) исторических эпох. Прошлые «я» – объекты разных **вечных** исторических эпох; прошлые «я» бессмертны, но собираются они в последовательно сменяющееся Я, к которому применяется термин «смерть».

Поскольку реальность – квантовый акт множества индивидуальных сознаний, то смерть индивида в момент t – это отсутствие сознания индивида в конкретной вселенной-реальности $R = |\psi^0_{[\dots a^1_i a^2_j \dots a^{r-1}_m a^r_k]}\rangle$. Другими словами, его идея-фантазия с момента t скоррелирована с другими вселенными-фантазиями, и там его сознание и присутствует. Шрёдингер прав: мы бессмертны, но можем претерпевать смерть в отдельно взятой вселенной-реальности (= исторической последовательности).

4. Чем больше численность населения Земли, т.е. чем больше живущих индивидуальных сознаний, тем богаче и сложнее устроен Внешний Мир. Иначе говоря, чем больше идей-фантазий, тем больше вселенных-реальностей.

На языке исторических эпох, это говорит о том, что историческая эпоха с бо́льшим числом рефлексирующих индивидуальных сознаний, т.е. с бо́льшим населением, является более разнообразной в определённых сферах культуры и техники. Сами эти сферы, точнее, их перечень, набор суть то, что называют культурными традициями.

Каждый слышит только то, что он понимает (Гёте, [28, с.152]).

5. По Гуссерлю вторичная память (фантазия, по Э. Гуссерлю; воспоминание) – немодифицируемое сознание: «оно есть ощущение, или, что означает то же самое, «импрессия». Или более точно: оно может содержать фантазмы, но оно само не есть (производимая) фантазией модификация (по отношению) к некоторому другому сознанию как соответствующему ощущению» (Гуссерль, [32, С.116]).

Тем самым воспоминание, если содержит фантазмы, но не есть фантазия, – это объединенные факты разных склеенных параллельных вселенных. То, что есть фантазм, – это факт чужой вселенной, поэтому он и есть для нас, наблюдателя Нашей вселенной, фантазм. Констатируя наличие фантазмов при воспоминании, мы констатируем наличие взаимодействующего (склеенного) прошлого разных вселенных.

6. Первичная память (память-удержание, ретенция) относится к недавним событиям и является удержанием «теперь», растягиванием настоящего («только что было», «вчера», «прежде», «прошлое»). Первичная память связана с восприятием и всегда имеет своим пределом «улавливание Теперь».

Следовательно, первичная память – это квант времени. Пока он «длится», мы и имеем удержание.

7. Психофизиологами замечена чрезвычайно важная особенность в работе сознания бодрствующего здорового человека – его прерывистость [107, с.14]. Иначе говоря, сознание квантовано; оно прерывается в моменты акта созидания.

8. Необратимость времени, т.е. течение времени от прошлого к будущему, есть аксиома современного естествознания.

> Её следствием является положение, что человечество может исчезнуть, а Внешний Мир продолжает своё пребывание во времени. Человека неизбежно ожидает смерть. Никто не может этого отменить.

Необратимость времени пытаются объяснить в рамках физики. Но используемая физика – это физика линейного объективного времени эпохи от Ньютона до Больцмана. В этой физике проблема необратимости времени не находит удовлетворительного объяснения (рост энтропии, стрела времени и т.д.).

Проблема необратимости времени должна решаться только с учетом понятия сознания. Внешний Мир – итог реализаций идей-фантазий индивидуальных сознаний. Вклад каждого индивидуального сознания в то, что есть Внешний Мир, *независим в принципе* от вклада других индивидуальных сознаний. Этот вклад, если он реализовался (осуществлялся) *до*[16] вашей реализации, Вы не вольны отменить. Это и есть необратимость времени. Другими словами, *необратимость времени – это право каждого индивидуального сознания на реальность*[17] *своего вклада в то, что становится (общим) Внешним Миром.*

9. «Непонятно, каким образом, чем вещество осознаёт своё существование, чем осознаёт своё сознание и свою волю» (Бартини, [9, с.175]).

10. Каждая историческая последовательность (17.34) – это вселенная-реальность. «Реальности не только ветвятся, но и склеиваются... Понятие эвереттических склеек возникло из осознания простого тезиса – всё реальное должно быть познаваемо. К этому подталкивало и то, что невообразимо огромное число ветвлений ... (около 10^{100} по первоначальной оценке ДеВитта), не будучи скомпенсированным каким-то процессом, противостоящим лавинообразному ветвлению, вызывает шок даже у таких «крепких профессионалов», как ДеВитт» (Ю.А. Лебедев, [116, с.109]). Иначе говоря, горные хребты Halliwell'a (§ 16.1) должны иметь общие пики.

---

[16] Право индивидуального сознания на свой вклад в то, что воспринимается потом как Внешний Мир, становится реальным, если вещь в себе делается вещью для себя. А поскольку такое право дано каждому индивидуальному сознанию, а вещь в себе либо становится вещью для нас, либо сразу для обоих индивидуальных сознаний, но при условии *распараллеливания* (раздвоения) Внешнего Мира, либо последовательно, т.е. *во времени.*

[17] Вклад всегда реален в своей реальности, которая может существовать параллельно данной.

Часть II

Неклассическая теория

Чем сложнее логика, тем богаче Внешний Мир

А. Г.

Логика наполняет мир; границы мира являются также ее границами

Л. Витгенштейн.

Глава 18

Неклассическая логика и неклассический анализ

Ньютон, пытаясь найти решение физических проблем, сделал это, введя в физику принципиально новый математический аппарат, получивший название дифференциального и интегрального исчисления. Были использованы понятия производной, дифференциала, были написаны дифференциальные уравнения[1]. Мощный, специально созданный математический инструмент принёс успех ньютоновской физике, и этот инструмент успешно применяется в физике по сей день.

Рассуждения при получении научных результатов велись и ведутся в соответствии с законами классической двузначной логики Аристотеля-Лейбница, которая стала логикой науки.

Следует, однако, напомнить, что и Ньютон, и Лейбниц при определении производной и дифференциала использовали понятие *бесконечно малой величины*. Во многом смысл понятия

[1] Однако прижились терминология и обозначения Лейбница, создавшего дифференциальное и интегральное исчисление параллельно с Ньютоном, в 70-80-х годах XVII века. Производную Ньютон называл флюксией.

бесконечно малой величины был неясным и не поддавался удовлетворяющему всех определению. На протяжении всего XVIII века многими выдающимися математиками предпринимались попытки дать строгое обоснование для бесконечно малых величин. Но закончилось всё тем, что от него вообще отказались, благодаря тому, что Коши дал строгое определение *предела*, после чего началось бурное строительство современного математического анализа.

Современная физика пространства-времени имеет много неразрешенных проблем, и вполне естественно попытаться, как во времена Ньютона, ввести в физику новый математический аппарат, в котором наконец-то осмыслено понятие бесконечно малой величины, задумавшись при этом о допустимости иной, чем классическая, логики научных рассуждений.

18.1. Неклассическая логика

Логика классической физики двузначна. Она имеет дело с высказываниями, которые либо истинны, либо ложны. Но уже в квантовой механике есть высказывания, которые, по сути дела, содержат слово «вероятно». Логика таких высказываний не является классической, это модальная логика. Интерпретации высказываний такой логики, как показывает семантика Крипке, содержит множество классических вариантов, реализующих то или иное числовое значение слова «вероятно», т.е. вероятности.

Дуализм частица-волна в квантовой механике – это логическое противоречие, обнаруживаемое при описании квантового микрообъекта – электрона.

Как примирить два противоречащих друг другу утверждения: «электрон – это волна» и «электрон – это частица»? Очень просто – отменить двузначную аристотелеву логику в научных построениях. Иначе говоря, теория времени должна строиться на основе интуиционистской логики, отвергающей закон исключенного третьего: кроме $\mathcal{A}$ и не-$\mathcal{A}$ допустим и третий вариант.

Но это уже отход от принципа Оккама. Мы усложняем логику научных рассуждений при построении теории.

Однако привычная двузначная логика может быть возвращена в форме интерпретаций формальной теории. Сюрприз, который нас ожидает, заключается в том, что таких *истинных* интерпретаций **одной** формальной теории может быть бесконечно много! Каждая интерпретация – это аристотелев вариант со своим временем интуиционистского вневременного Мира феноменов.

18.2. Интуиционистская логика

Интуиционистская логика – пример неклассической логики, созданной Гейтингом, благодаря критике классической математики, появившейся в начале XX века в серии работ голландского математика Брауэра.

Любое высказывание в интуиционистской логике считается осмысленным, только если оно выражает возможность некоторого умственного построения, и считается истинным, только если исследователю удалось выполнить соответствующее построение [2].

Для интуициониста формула в арифметике

$$\exists x \mathcal{A}(x),$$

т.е. «существует такое число n, что истинно высказывание $\mathcal{A}(n)$», трактуется как предъявление способа построения этого числа n тогда, как в классической логике достаточно только доказать, что такое число n существует [142, с.434].

В интуиционистской логике высказывание $\neg A$ считается истинным, если принятие $\mathcal{A}$ ведет нас к противоречию; а дизъюнкция $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ истинна, если истинно либо $\mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}$ и существует способ, позволяющий распознать, какое из этих двух высказываний истинно [142, с.435]..

[2]Интуиционизм / Википедия. – http://ru.wikipedia.org/

В силу такого понимания дизъюнкции, интуиционист не принимает закона исключенного третьего

$$\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A},$$

поскольку нет общего метода распознавания по высказыванию $\mathcal{A}$, истинно $\mathcal{A}$ или $\neg\mathcal{A}$. Высказывание вида $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ может и не быть истинным, если проблема истинности $\mathcal{A}$ не решена к настоящему времени.

Закон исключенного третьего позволяет конструировать функции следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \neq 0; \end{cases}$$

отказ от закона исключенного третьего лишает нас такой возможности, привычной в классической математике.

В интуиционистской логике не принимается аксиома

$$\neg\neg\mathcal{A} \Longrightarrow \mathcal{A}. \tag{18.1}$$

Поэтому нельзя доказывать теоремы от противного. Действительно, при доказательстве теоремы $\mathcal{A}$ от противного предполагают, что верно на самом деле $\neg\mathcal{A}$, и затем приходят к некоторому противоречию. Это показывает, что «не истинно» $\neg\mathcal{A}$, т.е «истинно» $\neg\neg\mathcal{A}$. Последнее позволяет утверждать, благодаря (18.1), что «верно» $\mathcal{A}$. Однако при этом не дается метода проверки истинности $\mathcal{A}$, что для интуициониста неприемлемо и, следовательно, аксиома (18.1) отвергается.[3]

Отличительной особенностью интуиционистской точки зрения на бесконечные множества является то, что интуиционисты смотрят на бесконечное множество как на нечто, постоянно находящееся в состоянии образования. Например, множество положительных чисел бесконечно в том смысле, что

[3]Продемонстрированное рассуждение доказательства от противного, как нетрудно видеть, использует закон исключенного третьего. Поэтому отказ от закона исключенного третьего приводит к отказу от правила (18.1).

к любому конечному множеству положительных чисел можно добавить превосходящее их всех целое положительное число [142, с.435].

18.3. Метаязык физической теории

Предположим, что мы примем в качестве логики физической теории вместо классической логики какую-нибудь иную, неклассическую логику. Возникает вопрос, какая при этом логика должна быть использована физиком в ходе научного размышления и при изложении в форме текста, учебника научных результатов? Ведь при размышлении, которые состоят из рассуждений, мы помним, что любое рассуждение состоит из простых шагов, каждый из которых заключается в опознавании того, что одни предложения являются непосредственными *логическими* следствиями других.

В этой ситуации физику придется стать двуязычным, различая классические язык и логику своих размышлений от языка и логики собственно физической теории. Поскольку язык физической теории – это язык используемого математического аппарата, то логика физической теории совпадает с логикой, используемого математического языка. Язык же рассуждений физика, остающийся во власти классической логики, следует именовать *метаязыком* физической теории.

18.4. Анализ бесконечно малых

Новый математический аппарат следует строить, вернув в теорию понятие бесконечно малой величины. От этого понятия отказались в XIX веке в силу его противоречивости с точки зрения классической логики.

Действительно, по мнению многих математиков XVIII века, бесконечно малая величина – это такое число, которое меньше любого наперед заданного положительного числа, но при этом не равное нулю.

Правда, Эйлер говорил, что бесконечно малая величина обязана быть равной нулю, поскольку если она не равна нулю, то можно было бы задать число равное ей, а это противоречит тому, что она меньше любого числа [169, с.91].

По Эйлеру, dx – это бесконечно малая и поэтому равна нулю, т.е. $dx = 0$. Значит, равно нулю и $2dx$. Но при этом $2dx : dx = 2 : 1 = 2$. Иначе говоря, $(2 \cdot 0) : 0 = 2$ [169, с.91-92]. Явное противоречие с арифметикой[4].

Таким образом, стоит задача ввести бесконечно малые величины, *расширив* множество действительных чисел $\mathbb{R}$, не допуская при этом противоречий с классической логикой при изложении теории нового множества чисел:

$$R = \mathbb{R} + \{\text{бесконечно малые числа}\}.$$

Можно, однако, ожидать, что изменится алгебраическая структура «нового моножества чисел».

18.5. Гладкий инфинитозимальный анализ Кока-Ловера

Лейбниц всегда говорил: «Точку нельзя рассматривать как часть кривой». Кривая – это совокупность бесконечного множества бесконечно малых прямых (Лопиталь, [115, с.63]). В современной классической дифференциальной геометрии, основанной на дифференциальном и интегральном исчислении, кривая, однако, состоит из точек. Но была построена Синтетическая дифференциальная геометрия, где мысли Лейбница и Лопиталя полностью реализованы.

Синтетическая дифференциальная геометрия (СДГ) строится аксиоматически, и одна из аксиом – аксиома Кока-Ловера – как раз и представляет кривую как ломаную, т.е. совокупность прямолинейных «отрезков».

[4]Эйлер говорит, видя противоречие, что равенство $2dx : dx = 2$ с $dx = 0$ – это *геометрическое*, а не арифметическое отношение [169, с.92].

18.5.1. Аксиомы кольца R

Основным для СДГ Кока-Ловера является замена поля действительных чисел $\mathbb{R}$ на коммутативное кольцо R. В идеале хотелось бы, чтобы оно удовлетворяло следующим аксиомам[5]:

(A1) $\langle R, +, \cdot, 0, 1\rangle$ – коммутативное кольцо.

(A2) R – локальное кольцо, т.е.

$$\begin{array}{l} 0 = 1 \Longrightarrow \bot \\ \exists y\ (x \cdot y = 1) \vee \exists y\ (1 - x) \cdot y = 1. \end{array}$$

(A3) $\langle R, <\rangle$ – действительное евклидово упорядоченное локальное кольцо, т.е. $<$ – транзитивное отношение, совместимое с кольцевой структурой в том смысле, что

$$\begin{array}{l} (a)\ 0 < 1,\ (0 < x \ \&\ 0 < y \Longrightarrow 0 < x + y \ \&\ 0 < x \cdot y), \\ (b)\ \exists y (x \cdot y = 1) \Longleftrightarrow (0 < x \vee x < 0), \\ (c)\ 0 < x \Longrightarrow \exists y (x = y^2) \text{ (евклидовость).} \end{array}$$

(A4) $\leq$ – предпорядок, совместимый с кольцевой структурой, т.е. рефлексивное и транзитивное отношение, и

$$\begin{array}{l} (a)\ 0 \leq 1,\ (0 \leq x \ \&\ 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq x + y \ \&\ 0 \leq x \cdot y),\ 0 \leq x^2, \\ (b)\ (x - \text{нильпотент, т.е. } x^n = 0) \Longrightarrow 0 \leq x. \end{array}$$

(A5) $<$ и $\leq$ – совместимы, т.е.

$$\begin{array}{l} (a)\ x < y \Longrightarrow x \leq y, \\ (b)\ x < y \ \&\ y \leq x \Longrightarrow \bot. \end{array}$$

(A6) (**Аксиома Кока-Ловера**).

$$\forall (f \in R^D) \exists ! (a, b) \in R \times R \forall d \in D (f(d) = a + b \cdot d),$$

где $D = \{x \in R : x^2 = 0\}$.

---

[5] Мы приводим только часть аксиом. Другие аксиомы см. в [262, Гл.VII].

(A7) (Аксиома интеграла).

$$\forall f \in R^{[0.1]} \exists! g \in R^{[0.1]} (g(0) = 0 \,\&\, \forall x \in [0,1]\ (g'(x) = f(x)),$$

где $[0,1] = \{x \in R : 0 \leq x \,\&\, x \leq 1\}$ и $g'(x)$ – это единственное b такое, что $\forall d \in D(g(x+d) = g(x) + b \cdot d)$.

Используется символическая запись

$$g(x) = \int\limits_0^x f(t)dt.$$

(A8) $\forall x \in [0,1]\ (0 < f(x)) \Longrightarrow 0 < \int\limits_0^1 f(x)dx.$

(A8′) $\forall x \in [0,1]\ (0 \leq f(x)) \Longrightarrow 0 \leq \int\limits_0^1 f(x)dx.$

(A9) (Существование обратной функции).

$$\forall f \in R^R\ \forall x \in R\ \ (f'(x) - \text{обратимо} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \exists \text{ открытые } U, V (x \in U \,\&\, f(x) \in V \,\&$$

$$\& \ f|_U : U \to V - \text{биекция})).$$

(A10) $N \subset R$, т.е. $\forall x \in N\ \exists y \in R(x = y)$.

(A11) R – архимедово, т.е. $\forall x \in R\ \exists n \in N(x < n)$.

(A12) (Аксиомы Пеано).

$$\begin{array}{l} 0 \in N \\ \forall x \in R\ (x \in N \Longrightarrow x + 1 \in N) \\ \forall x \in R\ (x \in N \,\&\, x + 1 = 0 \Longrightarrow \bot). \end{array}$$

Кольцо R, дополнительно к обычным действительным числам из $\mathbb{R}$, располагает ещё элементами, называемыми *инфинитозималами* и входящими в «множества»

$$D = \{d \in R : d^2 = 0\}, \quad ..., \quad D_k = \{d \in R : d^{k+1} = 0\}, ...,$$

$$\mathbb{\Delta} = \{x \in R : f(x) = 0, \ \forall f \in m_0^g\},$$

где $m_{\{0\}}^g$ – идеал функций, имеющих нулевой росток в 0 [6], причём

$$D \subset D_2 \subset ... \subset D_k \subset ... \subset \mathbb{\Delta}.$$

Теорема 18.1. $D = \{0\}$ *невозможно.*[7]

Доказательство. Предположим противное, т.е. $D = \{0\}$ истинно. Рассмотрим функцию $f : D \to R$ такую, что $f(x) = x$. В силу аксиомы Кока-Ловера, должен существовать единственный $b \in R$, для которого

$$f(d) = f(0) + bd \tag{18.2}$$

для любого $d \in D$. Поскольку любое $d = 0$, то $f(d) = f(0)$ и (18.2) сводится к $b \cdot 0 = 0$. Причём это верно и для $b = 0$ и для $b = 1$. Но по аксиоме (A2) $0 \neq 1$. Получается, что b не единственно для взятой функции f, а это противоречит утверждению аксиомы Кока-Ловера. Таким образом, теорема 18.1 справедлива [190]. ■

Замечание 18.1. Обратим внимание, что мы здесь не пользуемся запрещённым в интуиционистской логике правилом двойного отрицания

$$\neg\neg\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A},$$

поскольку доказываем, что некоторое высказывание не является истинным, предполагая, что оно истинно. При применении правила двойного отрицания, мы желаем доказать, что высказывание истинно, предполагая, что это не так [254].

---

[6] Иначе говоря, исчезающих в некоторой окрестности точки 0.

[7] Точнее, в соответствии с интуиционистской логикой (см. § 18.2) справеливо утверждение $\neg(D = \{0\})$, т.к. мы докажем, что $D = \{0\}$ ведет к противоречию.

Теорема 18.2. *Для любых $a, b \in R$, если $ad = bd$ для любого $d \in D$, то $a = b$. В частности, если $da = 0$ для любого $d \in D$, то $a = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(d) = ad$. По аксиоме Кока-Ловера $g(d) = g(0) + g'(0)d = g(0) + ad = g(0) + bd$. И a и b есть $g'(0)$ – угловой коэффициент, единственно определенный. Значит, $a = b$. ■

18.5.2. Интуиционизм аксиомы Кока-Ловера

Покажем, что аксиома Кока-Ловера (A6) несовместима с законом исключённого третьего [250] и что в теории гладкого инфинитозимального анализа неприемлемы рассуждения с использованием классической логики.

Чтобы убедиться в этом, покажем, что, принимая аксиому Кока-Ловера и допуская классические логические рассуждения, мы придем к противоречию.

В самом деле, рассмотрим функцию $g : D \to R$ такую, что $g(0) = 0$ и $g(d) = 1$ для $d \neq 0$. В силу аксиомы Кока-Ловера, должен существовать единственный $b \in R$, для которого

$$g(d) = g(0) + bd = bd \tag{18.3}$$

для любого $d \in D$. Применение закона исключенного третьего к утверждению теоремы 18.1 приводит к утверждению $D \neq \{0\}$. Поэтому существует $d_0 \neq 0$. Подставим d_0 в (18.3). Имеем $1 = g(d_0) = g(0) + bd_0 = bd_0$, т.е. $1 = bd_0$. Возводя это в квадрат, получаем $1 = 0$. Но из аксиомы (A2) имеем $0 \neq 1$. Противоречие.

Причина этого противоречия в том, что при доказательстве утверждений мы использовали закон исключенного третьего, когда определяли функцию g недопустимым в интуиционистской логике способом.

Таким образом, в **гладком инфинитозимальном анализе все рассуждения должны вестись только на основе интуиционистской логики.**

Замечание 18.2. Для того чтобы убедиться в непротиворечивости формальной теории, мало стараться избегать неинтуиционистских рассуждений, продемонстрированных в этом подпараграфе и ведущих к катастрофическим результатам; надо иметь хорошую её интерпретацию (модель) [255, p.3]. Однако, поскольку в классической теории множеств Кантора классическая логика является её стержнем, теоретико-множественные модели не могут служить подходящими интерпретациями для теории и необходимо искать модели, обладающие внутренней интуиционистской логикой, используемой при оперировании с объектами, подъобъектами и с функциями. Таковыми являются теоретико-топосные модели (см. Приложение A, [250, 262]).

18.5.3. Инфинитозимальное дифференциальное исчисление

Производная. Из аксиомы Кока-Ловера следует, что если дана функция $f : R \to R$, то для каждой точки $x \in R$ существует единственное число, обозначаемое как $f'(x)$, такое, что

$$f(x+d) = f(x) + f'(x) \cdot d \tag{18.4}$$

для любого $d \in D$.

Тем самым мы дали определение производной $f'(x)$ функции $f : R \to R$ в точке $x \in R$.

Правила дифференцирования. Справедливы следующие традиционные правила дифференцирования функций:

$$\begin{aligned}
&(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g', \quad \alpha, \beta \in R,\\
&(fg)' = f'g + fg',\\
&\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (g(x) \neq 0),\\
&(f \circ g)' = (f' \circ g)g',\\
&(\alpha)' = 0, \quad \alpha \in R,\\
&(id_R)' = 1, \quad id_R(x) = x.
\end{aligned} \tag{18.5}$$

Таким образом, производные от любой функции вычисляются по привычным правилам, и результат совпадает с классическими выражениями.

Геометрический смысл производной. Аксиома Кока-Ловера говорит о том, что для графика функции $f(x)$ существует прямая ℓ с угловым коэффициентом $f'(0)$, которая на «отрезке» D не только касательна к графику f в точке $(0, f(0))$, но график содержит кусок прямой ℓ (рис. 18.1), и в силу равенства (18.4), это верно для любой точки $(x, f(x))$ графика.

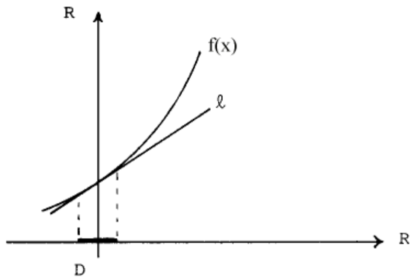

Рис. 18.1: График f есть ломаная.

Следовательно, в инфинитозимальном гладком анализе реализуется мысль Лопиталя о кривой как ломаной.

Формула Тейлора. Если дана функция $f : R \to R$, то для каждой точки $x \in R$ справедлива формула

$$f(x + d) = f(x) + f'(x) \cdot d \tag{18.6}$$

для любого $d \in D$.

Условие экстремума. Говорим, что функция $f : R \to R$ имеет экстремум в точке $a \in R$, если $f(a + d) = f(a)$ для любого $d \in D$.

Теорема 18.3. *Функция $f : R \to R$ имеет экстремум в точке $a \in R$ тогда и только тогда, когда $f'(a) = 0$.*

Доказательство.

1. Пусть $a \in R$ точка экстремума. По аксиоме Кока-Ловера, $f(a+d) = f(a)+f'(a)d$. Но $f(a+d) = f(a)$. Поэтому $f'(a)d = 0$ для любого $d \in D$. По теореме 18.2, $f'(a) = 0$.

2. Пусть $f'(a) = 0$. Из аксиомы Кока-Ловера имеем $f(a + d) = f(a) + f'(a)d = f(a)$. Значит, a – точка экстремума. ■

Частные производные. Пусть дана функция $f : R^n \to R$. Рассмотрим функцию

$$g(d) = f(x^1 + d, x^2, ..., x^n).$$

По аксиоме Кока-Ловера,

$$g(d) = g(0) + b \cdot d. \tag{18.7}$$

Обозначим b через $\frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, ..., x^n)$. Подставляя это в (18.7), получаем равенство

$$f(x^1 + d, x^2, ..., x^n) = f(x^1, x^2, ..., x^n) + \frac{\partial f}{\partial x^1}(x^1, ..., x^n)d,$$

$$f \in D,$$

которое характеризует функцию

$$\frac{\partial f}{\partial x^1} : R^n \to R,$$

называемую *частной производной* f *по* x^1.

Аналогично определяются другие производные

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^{i^2}}, ...$$

При этом справедлива формула

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Пусть

$$D_1(n) = \{\delta = (\delta^1, ..., \delta^n) \in R^n : \forall ij(\delta^i \delta^j = 0)\}.$$

Тогда [190, p.71]

$$
\begin{gathered}
f(x^1+\delta^1, x^2+\delta^2, ..., x^n+\delta^n) = \\
= f(x^1, x^2, ..., x^n) + \sum_{i=1}^{n} \delta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(x^1, ..., x^n).
\end{gathered} \tag{18.8}
$$

Теорема 18.4. *Если* $x = (x^1, ..., x^n) \in R^n$ *и*

$$\sum_{i=1}^{n} x^i \delta^i = 0 \quad \textit{для любого } \delta \in D_1(n),$$

то $x = 0$ [190, p.72]. ■

Условие экстремума для функции многих переменных. Говорим, что функция $f : R^n \to R$ имеет экстремум в точке $a \in R^n$, если $f(a+\delta) = f(a)$ для любого $\delta \in D_1(n)$.

Теорема 18.4. *Функция* $f : R \to R$ *имеет экстремум в точке* $a \in R$ *тогда и только тогда, когда*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = 0.$$

для любого $i = 1, ..., n$.

Доказательство. Следует из формулы (18.8) и теоремы 18.4. ■

18.6. Гладкая псевдориманова геометрия в СДГ

Объекты R, D, R^n мы рассматриваем как объекты некоторой категории $\mathcal{E}$, достаточно сходной с теорией множеств **Sets**. Известно, что таковыми являются *топосы* (см. Приложение A).

Обозначим через M объект изучаемой категории $\mathcal{E}$, под которым в дальнейшем можно подразумевать R^n и которое будем называть *многообразием*[8].

[8] Мы описали элементарное многообразие, которое накрывается одной локальной картой, т.е. когда $M \equiv R^n$. В СДГ определяется и общий случай многообразия, накрываемого атласом локальных карт (см. [250]).

Построим *гладкую псевдориманову геометрию* на многообразии M.

Все формулы неклассической гладкой псевдоримановой геометрии, как будет показано ниже, имеют тот же вид, что и в классическом случае.

18.6.1. Касательное пространство

Определение 18.1. *Касательным вектором к* M *в точке* x будем называть произвольное отображение $t : D \to M$, такое, что $t(0) = x$.

Определение 18.2. *Касательным расслоением* TM *к* M будем называть объект M^D всех касательных векторов с морфизмом $\pi : M^D \to M$, определяемой формулой $\pi(t) = t(0)$.

Под *касательным пространством в точке* x будем понимать $M_x = \{t \in TM : t(0) = x\}$.

Определение 18.3. Многообразие M называется *микролинейным*[9] [190, p.101], если для любой точки $x \in M$ и любых n касательных векторов $t_1, ..., t_n$ в точке x существует единственное отображение $\tau : D_1(n) \to M$, такое, что

$$t_j(d) = \tau(0, ..., 0, \underset{j}{d}, 0, ..., 0), \quad d \in D,\ j = 1, ..., n.$$

Замечание 18.3. Для микролинейного многообразия M определяется операция сложения касательных векторов в каждом касательном пространстве M_x так, что M_x становится векторным пространством. В самом деле, если $t_1, t_2 \in M_x$, то

$$(t_1 + t_2) = \tau(d, d), \quad d \in D,$$

где $t_1(d) = \tau(d, 0), t_2(d) = \tau(0, d)$ и $\tau : D_1(2) \to M$ – отображение, описанное в определении 18.3. Умножение вектора $t \in M_x$ на число $\alpha \in R$ задается как $(\alpha t)(d) = t(\alpha d)$.

Предложение 18.1. R^n *– микролинейное многообразие.* ■

---

[9] В книге Кока [250] вместо термина «микролинейный» используется термин «инфинитозимально линейный».

18.6.2. Псевдориманова метрика

Псевдориманова метрика M может быть определена либо в терминах касательного расслоения, либо в терминах точек самого многообразия M.

Псевдориманова метрика M в терминах касательного расслоения.

Определение 18.4. *Псевдориманова метрика на M* – это отображение $g : M^D \times_M M^D \to R$, где

$$M^D \times_M M^D = \{(t_1, t_2) : t_1, t_2 \in M^D,\ t_1(0) = t_2(0)\},$$

такое, что функция

$$g_x(t_1, t_2) \equiv g(t_1, t_2)|_{t_1(0)=t_2(0)=x} = g(t_1, t_2)|_{t_1,t_2 \in M_x}$$

удовлетворяет условиям:

1) $g_x : M_x \times M_x \to R$ билинейно;

2) $g_x(u, v) = g_x(v, u)$ для любых $u, v \in M_x$ (симметрия);

3) если $g_x(u, v) = 0$ для всех $v \in M_x$, то $u = 0$ (невырожденность).

Пусть $M_x \equiv R^n$. Касательные векторы $t_1, t_2 \in M_x$, задаваемые как $t_1 : d \to x + u_1 d,\quad t_2 : d \to x + u_2 d$, ассоциируются с элементами $u_1, u_2 \in R^n$. В $M_x = R^n$ зададим базис $\{e_1, ..., e_n\}$. Тогда

$$u_j = \alpha_j^k e_k$$

и

$$g_x(u_1, u_2) = g_x(\alpha_1^k e_k, \alpha_2^l e_l) = \alpha_1^k \alpha_2^l g_x(e_k, e_l) = g_{kl}(x)\alpha_1^k \alpha_2^l,$$

где

$$g_{kl}(x) = g_x(e_k, e_l).$$

Многообразие M, снабженное псевдоримановой метрикой g, называется *псевдоримановым многообразием* и обозначается как $< M, g >$.

Можно ввести функцию $G : M \times R^n \times R^n \to R$, билинейную относительно второго и третьего аргументов:

$$G(x, u_1, u_2) = g_x(t_1, t_2).$$

Псевдориманова метрика M **в терминах точек многообразия**.

Пусть

$$\begin{aligned} &D_1(n) = \{a = (\delta^1, ..., \delta^n) \in M = R^n : \forall ij(\delta^i\delta^j = 0)\}, \\ &D_2(n) = \{a = (\delta^1, ..., \delta^n) \in M = R^n : \forall ijk(\delta^i\delta^j\delta^k = 0)\}. \end{aligned} \tag{18.9}$$

Тогда полагаем, что

$$M_{(1)} = \{(x, y) \in M : x - y \in D_1(n)\},$$

$$M_{(2)} = \{(x, y) \in M : x - y \in D_2(n)\}.$$

Ясно, что

$$M_{(1)} \subset M_{(2)}.$$

Точки x, y, входящие в $M_{(k)}$, являются k-близкими (пишут $x \sim_k y$); они отличаются на инфинитозимал (бесконечно малую величину порядка k).

Определение 18.5. *Псевдориманова метрика на* M – это функция $g : M_{(2)} \to R$, такая, что $g(x, y) = 0$ для $(x, y) \in M_{(1)}$.

В силу определения, псевдориманова метрика $g(x, y)$ есть квадрат расстояния между двумя бесконечно 2-близкими точками x, y.

Поскольку при $M = R^n$ касательное пространство M_x изоморфно R^n, то $u \in R^n = M_x$ ассоциируется с касательным вектором t в x, данном как $d \to x + du$, где $d \in D$. В этом случае g представляется в виде

$$g(x, z) = G(x; z - x, z - x),$$

где $G : M \times R^n \times R^n \to R$ – билинейная относительно второго и третьего аргументов функция [252, § 3].

В классической римановой геометрии квадрат расстояния ds^2 между двумя бесконечно близкими точками x^i и $y^i = x^i + dx^i$, задаваемый римановой метрикой g, символически записывается в виде

$$ds^2 = g_{ik}(x)dx^i \otimes dx^k, \tag{18.10}$$

где дифференциалы dx^i понимаются как бесконечно малые величины.

Таким образом, вполне уместно в СДГ использовать классическое представление римановой метрики в виде (18.10).

18.6.3. Линейная связность

Определение 18.6. Пусть M – микролинейное многообразие. *Линейная связность на* M – это отображение

$$\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D},$$

удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\nabla(t_1, t_2)(d_1, 0) = t_1(d_1),\ \nabla(t_1, t_2)(0, d_2) = t_2(d_2)$;

2) $\nabla(\alpha \cdot t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(\alpha \cdot d_1, d_2)$,

$$\nabla(t_1, \alpha \cdot t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_1, t_2)(d_1, \alpha \cdot d_2)$$

для всех $(t_1, t_2) \in M^D \times_M M^D, d_i \in D, \alpha \in R$ [262, p.189].

Заметим, что когда M – микролинейное многообразие, то ∇ будет билинейным.

Линейная связность ∇ называется *симметричной*, если

$$\nabla(t_1, t_2)(d_1, d_2) = \nabla(t_2, t_1)(d_2, d_1).$$

Пусть $M = R^n$, т.е. имеем дело с элементарным многообразием, покрываемом одной картой.

Если t_1, t_2 – векторы в точке a, то по аксиоме Кока-Ловера $t_i(d) = a + b_i d$. Всё из той же аксиомы Кока-Ловера получаем, что

$$\nabla(t_1, t_2)(d_1, d_2) = a + b_1 d_1 + b_2 d_2 + \tilde{\nabla}_a(b_1, b_2)d_1 d_2. \tag{18.11}$$

Таким образом, ∇ полностью определяется 4-й компонентой

$$\tilde{\nabla}_a(-,-) : R^n \times R^n \to R^n.$$

Или, в том случае, когда точка $a \in M$ не фиксирована:

$$\tilde{\nabla}(-,-,-) : M \times R^n \times R^n \to R^n.$$

Введём теперь на $M = R^n$ координаты и базис $\{x, e_1, \dots, e_n\}$. Тогда линейную связность можно записать следующим образом через базис:

$$\tilde{\nabla}(x, e_i, e_j) = \tilde{\nabla}^l(x, e_i, e_j)e_l. \tag{18.12}$$

Вводим обозначение

$$\Gamma^l_{ji}(x) = -\tilde{\nabla}^l(x, e_i, e_j), \tag{18.13}$$

и будем эти функции называть *символами Кристоффеля второго рода.*

18.6.4. Параллельный перенос

Определение 18.7. Пусть M – произвольное многообразие и $M^D \xrightarrow{\pi} M$ – касательное расслоение. *Параллельный перенос на* M есть функция, которая каждой паре $(t, d) \in M^D \times D$ сопоставляет биекцию:

$$\tau_d(t,-) : \pi^{-1}(t(0)) \to \pi^{-1}(t(d)),$$

подчиненную условиям:

$$\tau_0(t_1, t_2) = t_2,$$

$$\tau_d(t_1, \lambda t_2) = \lambda \tau_d(t_1, t_2),$$

$$\tau_d(\lambda t_1, t_2) = \lambda \tau_d(t_1, t_2)$$

для любого $\lambda \in R$ [262, p.190].

Будем говорить, что $\tau_d(t_1, t_2)$ – это «результат переноса вектора t_2 параллельно самому себе вдоль кривой t_2 за d секунд».

Предложение 18.2. *Если τ – параллельный перенос на M, то отображение $\nabla : M^D \times_M M^D \to M^{D\times D}$, определённое как*

$$\nabla(t_1, t_2)(d_1, d_2) = \tau_{d_1}(t_1, t_2)(d_2), \tag{18.14}$$

$$t_1, t_2 \in M^D, \quad d_1, d_2 \in D,$$

является линейной связностью на M. Обратно, если M – микролинейное многообразие, то каждая линейная связность ∇ на M задаёт параллельный перенос τ, определённый также по формуле (18.14). ∎

18.6.5. Геодезические

Пусть M – микролинейное многообразие и $\gamma : R \to M$ – кривая.

Определяем *касательное векторное поле* $\dot\gamma : R \to M^D$ *на* γ

$$R \ni t \xrightarrow{\dot\gamma} \dot\gamma(t) \in M^D,$$

$$[\dot\gamma(t)](d) = \gamma(t+d).$$

Определение 18.8. Кривая $\gamma : R \to M$ называется *геодезической относительно линейной связности* ∇, если

$$\dot\gamma(t) = \tau_{-d}(\dot\gamma(t+d), \dot\gamma(t+d)), \tag{18.15}$$

где параллельный перенос τ_d задается связностью в соответствии с формулой (18.14).

Замечание 18.4. В классических обозначениях равенство (18.15) записывается в виде

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = 0,$$

которое определяет классическую геодезическую и которое можно получить и в СДГ.

Предложение 18.3. *Геодезическая* $\gamma = (x^1(t), ..., x^n(t))$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\Gamma^i_{jk}(\gamma(t))\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^i}{dt}. \tag{18.16}$$

■

18.6.6. Риманова связность

Пусть ∇ – линейная связность на псевдоримановом многообразии $< M, g >$.

Связность ∇ *совместима с метрикой* g, если параллельный перенос вдоль любой кривой $\gamma : R \to M$

$$\tau_d(\gamma, -) : \pi^{-1}(\gamma(t)) \to \pi^{-1}(\gamma(t+d))$$

является изометрией евклидовых[10] касательных пространств $< M_{\gamma(t)}, g_{\gamma(t)}(-,-) >$ и $< M_{\gamma(t+d)}, g_{\gamma(t+d)}(-,-) >$.

Теорема 18.5. *На псевдоримановом многообразии* $< M, g >$ *существует единственная симметричная линейная связность, совместимая с метрикой* g *и называемая римановой связностью.*

Доказательство.

Полагаем

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right). \tag{18.17}$$

Из формул (18.11)-(18.13) видно, что функции Γ^i_{kl} однозначно задают линейную связность на $M = R^n$. Поскольку $\Gamma^i_{kl} = \Gamma^i_{lk}$, то эта связность симметрична. Проверяется, что определённая таким способом связность совместима с метрикой g. ■

[10] Евклидово пространство – векторное пространство, снабженное скалярным произведением.

18.6.7. Кривизна

Тензор кривизны можно определять различными способами. Один из них, предложенный Ели Картаном, состоит в том, что подсчитывается, насколько изменился вектор при его параллельном переносе вдоль замкнутой бесконечно малой петли.

Будем переносить параллельно вектор t_3 вдоль инфинитозимального параллелограмма Γ с координатами $(0,0),(d_1,0),(d_1,d_2),(0,d_2)$. Пусть $\gamma : D \times D \to M$.

Следуя [262], определим тензор кривизны как отображение

$$R : M^D \times_M M^D \times_M M^D \to M^D,$$

такое, что

$$R(t_1,t_2,t_3) = \tilde{R}(\nabla(t_1,t_2),t_3),$$

где

$$\tilde{R} : M^{D\times D} \times_M M^D \to M^D$$

определяется посредством формулы

$$\overset{\approx}{R}(\gamma,d_1,d_2,t_3) = d_1 d_2 \tilde{R}(\gamma,t_3).$$

Здесь

$$\overset{\approx}{R}\colon (M^{D\times D} \times D \times D) \times_M M^D \to M^D,$$

такое, что

$$\overset{\approx}{R}(\gamma,d_1,d_2,t_3) =$$

$$= \tau_{d_2}^{-1}(\gamma(0,-),\tau_{d_2}^{-1}(\gamma(-,d_2),\tau_{d_1}(\gamma(d_1,-),\tau_{d_1}(\gamma(-,0),t_3)))) - t_3$$

– разница между вектором t_3 и результатом его переноса вдоль Γ.

При введении координат фактически можем считать, что $M = R^n$. В этом случае связность ∇ полностью определяется 4-й компонентой $\tilde{\nabla}$ (см. § 18.6.3). При выборе базиса $\{x,e_1,\ldots,e_n\} \in M_x = R^n$

$$\tilde{\nabla}^l(x,e_i,e_j) = -\Gamma^l_{ji}(x).$$

и l-я компонента $\widetilde{R}\,(\gamma,(x,e_k))$ тензора кривизны R записывается в виде

$$R^l_{kji}(x) := R((x,e_i),(x,e_j),(x,e_k))^l =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ki}(x) - \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{kj}(x) + \Gamma^n_{ki}(x)\Gamma^l_{nj}(x) - \Gamma^m_{kj}(x)\Gamma^l_{mi}(x),$$

т.е. совпадает с классической формулой для тензора кривизны.

Тензор Риччи также вычисляется по известной формуле

$$R_{kj} = R^l_{kjl},$$

$$R_{kj} = \frac{\partial\Gamma^l_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^l_{kj}}{\partial x^l} + \Gamma^n_{kl}\Gamma^l_{nj} - \Gamma^m_{kj}\Gamma^l_{ml},$$

а скалярная кривизна –

$$R = g^{kj}R_{kj}.$$

18.6.8. Использование векторных полей

Связность, кривизну и кручения, как и в классической дифференциальной геометрии, можно определить с помощью понятия векторного поля.

Определение 18.9. *Векторное поле X на M* есть сечение[11] $X : M \to M^D$ касательного расслоения $\pi : M^D \to M$.

Множество всех векторных полей на M обозначим через $\chi(M)$.

Векторное поле можно определять эквивалентным способом как отображение

$$X : D \to M^M,$$

такое, что $X(0) = id_M$. Другими словами, векторное поле представляется как касательный вектор к многообразию M^M

[11] Сечение – это отображение $X : M \to M^D$, такое, что $(\pi \circ X)(x) = \pi(X(x)) = x$.

преобразований многообразия M в тождественном преобразовании id_M.

Образ $X_d = X(d) : M \to M$ элемента $d \in D$ называется инфинитозимальным преобразованием.

Определение 18.10. *Скобка Ли* $[X, Y]$ векторных полей X и Y есть единственное векторное поле $[X, Y] : D \to M^M$, удовлетворяющее условию

$$[X, Y](d_1 \cdot d_2) = Y_{-d_2} \circ X_{-d_1} \circ Y_{d_2} \circ X_{d_1}.$$

Определение 18.11. Пусть M – микролинейное многообразие. *Ковариантная производная* есть отображение $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$, $\nabla(X, Y) \equiv \nabla_X Y$, удовлетворяющее условиям:

1) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$;

2) $\nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f) \nabla_X Y$

для каждого $f \in R^M$.

Определение 18.12. *Тензор поле кривизны* R *на* M есть отображение $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$, описываемое формулой:

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Определение 18.13. *Поле кручения* T *на* M есть отображение $T : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$, такое, что

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

18.7. Интерпретации. Стадии

Аксиоматически изложенный в § 18.5 гладкий анализ Кока-Ловера – это чисто формальная теория $\mathcal{T}$, практическое применение которой, как известно из математической логики, требует придания смысла, значения формулам теории.

Это делается с помощью построения конкретной *интерпретации* (модели) $\mathcal{M}$ теории, или, символически

$$i : \mathcal{M} \models \mathcal{T}.$$

Интерпретации важны: они наполняют теорию конкретным содержанием, позволяющим судить о непротиворечивости теории. В свое время именно благодаря интерпретациям, данным Бельтрами, Клейном и Пуанкаре, геометрия Лобачевского нашла признание среди математиков.

Известно, что формальная теория может иметь множество различных интерпретаций. В нашем случае интерпретация теории определяется тем, какое кольцо будет выбрано в качестве интерпретации кольца R. Как было показано в § 18.5.2, мы не можем использовать теоретико-множественный язык. Иначе говоря, R не может быть множеством, а отношение принадлежности $x \in R$ не может интерпретироваться как двузначное отношение «да-нет».

Таким образом, мы должны покинуть привычную для математики XX века теорию множеств **Sets**, являющуюся так называемой *категорией*, объекты которой, именуемые множествами, совершенно не подходят для интерпретации кольца R.

Известно, что наиболее близкой к категории теории множеств **Sets** являются категории, известные как *топосы* (см. Приложение A).

18.7.1. Топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}}$ как интерпретация гладкого анализа

Выбираем для интерпретации гладкого анализа Кока-Ловера гладкие топосы (см. Приложение A), а конкретно топос

$$\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}.$$

Здесь $\mathbf{L}$ – это дуальная категория для категории конечно порождённых C^∞-колец. Она называется *категорией локусов*

[262]. Объектами категории $\mathbf{L}$ являются всё те же конечно порождённые C^∞-кольца, а морфизмами – обращённые морфизмы категории конечно порождённых C^∞-колец. Во избежание путаницы принято объекты (локусы) категории $\mathbf{L}$ обозначать как ℓA, где A – C^∞-кольцо. Следовательно, $\mathbf{L}$-морфизм $\ell A \to \ell B$ – это C^∞-гомоморфизм $B \to A$.

Конечно порождённое C^∞-кольцо ℓA изоморфно кольцу вида $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ (для некоторого натурально числа n и некоторого конечно порождённого идеала I).

При интерпретации

$$i : \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}} \models \mathcal{T}$$

кольцу R отвечает функтор $F_R = i(R)$.

Интерпретация отношения $x \in R$. При интерпретации i элементам x кольца R ставятся в соответствие «элементы» $i(x)$ функтора F_R из $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$. Но сделать это не так просто, потому что функтор F_R определён на категории локусов $\mathbf{L}$:

$$F_R : \mathbf{L} \to \mathbf{Sets},$$

т.е. переменной (аргументом) является произвольный локус ℓA, а значением – множество $F(\ell A) \in \mathbf{Sets}$.

Выход из затруднения заключается в определении *обобщённых элементов* $f \in_{\ell A} F_R$ функтора F_R.[12]

Определение 18.14. Обобщённым элементом $f \in_{\ell A} F$, или *элементом f функтора F в стадии (at stage) ℓA*, называется элемент $f \in F(\ell A)$.

Теперь сопоставляем элементу $x \in R$ обобщённый элемент $i(x) \in_{\ell A} F_R$. Но, как видим, таких элементов $i(x)$ столько, сколько локусов. При переходе к интерпретации (модели) $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ происходит «размножение» элемента x. Он начинает существовать в бесконечном числе вариантов

$$\{i(x) : i(x) \in_{\ell A} F_R, \ell A \in \mathbf{L}\}.$$

[12]Кроме обозначения для обобщённого элемента $f \in_{\ell A} F_R$, используется и другое обозначение, которое имеет вид $f : \ell A \to F_R$.

Замечание 18.5. Важно отметить, что модель $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ обладает патологическими свойствами: многие из аксиом (A1)-(A12) не выполняются в $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$. Например, оказывается, что *гладкая прямая* R, будучи коммутативным кольцом с единицей 1, не является при этом даже локальным кольцом, т.е. нарушается аксиома (A2). Более того, R не обладает свойством архимедовости (аксиома (A11)); неверно условие (b) аксиомы (A4). Можно рассматривать в качестве моделей топосы $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ и $\mathcal{Z}$ и многие другие (Приложение A; [262, Appendix 2]). Для них выполнены все аксиомы (A1)-(A12) (см. [262, с.300]). Однако работа с топосом $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ позволяет быстрее ознакомиться с излагаемой теорией, не усложняя изложение математическими конструкциями.

18.7.2. Стадии (сцены, stages)

Английское слово «stage», упомянутое в определении 18.1, используется в книге [262], написанной на английском языке. Оно переводится на русский язык либо как «стадия», «фаза», «этап», либо как «сцена», «эстрада», «подмостки», «театр».

В русском языке *стадия* – это определенная ступень, период, этап в развитии чего-либо, со своими качественными особенностями, а *сцена* – место театрального действия.

Если перевести «element $i(x)$ of F_R at stage ℓA» как «элемент $i(x)$ из F_R на сцене ℓA», то мы говорим о том, что при интерпретации элемента x из R допускается возможность различного его представления, проявления при выборе различных сцен ℓA, подобно тому, как драма может быть по-разному разыграна на разных театральных сценах.

С другой стороны, поскольку существуют морфизмы $\ell A \to \ell B$, т.е. переходы от одной *сцены* к другой, то, имея в виду последовательную смену сцен, получаем представления x в *развитии*, качественно меняющиеся от одной сцены к другой, и в этом случае «представление, даваемое» элементом x на той или иной сцене, всего лишь конкретные *стадии* этого развивающегося представления.

Физика интересуют не только констатация качественных проявлений явления, но и их возможные изменения, причём последнее есть динамика явления, тогда как первое всего лишь статика. Поэтому мы предпочитаем использовать для слова «stage» перевод «стадия».

18.7.3. Вложение Ионеды

Рассмотренная интерпретация с помощью функторов крайне сложна и неудобна при проведении вычислений и в практической работе.

Однако ситуация разрешается благодаря тому, что можно воспользоваться *вложением Ионеды* (Yoneda):

$$y : \mathbf{L} \hookrightarrow \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}},$$

$$y(\ell A)(-) = Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell A).$$

Примем, что кольцо R интерпретируется как функтор $y(\ell C^{\infty}(\mathbb{R}))$, т.е. $i(R) = F_R = y(\ell C^{\infty}(\mathbb{R}))$. Будем далее писать ℓA вместо $y(\ell A)$ и опустим символ i. Тогда имеем

$$R(-) = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})(-) = Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell C^{\infty}(\mathbb{R})).$$

Это указывает на то, что числа из кольца R – это гладкие функции из кольца $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Постоянные функции суть обычные действительные числа из поля $\mathbb{R}$, но непостоянные функции – это дополнительные новые изменяющиеся числа, представляющие собой, в частности, бесконечно малые величины.

Однако необходимо уточнить сказанное. Дело в том, что правильнее надо говорить не о «числе из кольца R», или, символически, $x \in R$, а о «числе из кольца R в стадии ℓA», или $x \in_{\ell A} R$.

В действительности правильным является следующее утверждение:

> *Вещественное число в стадии* $\ell A = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}^n)/I$ – это класс эквивалентности $f(a) mod\ I$, где $f \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n) = A$.

18.7.4. Смысл стадий

Стадии существенным образом сказываются при интерпретации функций $f : R \to R$:

> *Функция f из R в R в стадии ℓA* – это класс $F(x,a) mod\ \pi^*(I)$, где $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ и $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – проекция; $\pi^*(I)$ – идеал, порожденный $\{f \circ \pi : f \in I\}$. Поэтому представитель F функции из R^R есть функция $F(-,a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, зависящая гладко от параметра $a \in \mathbb{R}^n$.

Какой смысл имеют «скрытые» параметры $a \in \mathbb{R}^n$? Точный ответ автору неизвестен. Тем не менее попытаемся его найти. Для этого посмотрим, как проинтерпретируется в топосе метрика g в 4-пространстве R^4. Метрика в R^4 – это квадратичная форма, которая есть элемент объекта $R^{R^4 \times R^4}$. Иначе говоря, нам надо понять, что означает символическая запись

$$g \in_{\ell A} R^{R^4 \times R^4}.$$

Используя вложение Ионеды и принятые упрощения для обозначений, имеем

$$R^{R^4 \times R^4}(\ell A) = Hom_{\mathbf{L}}(\ell A, R^{R^4 \times R^4}) = Hom_{\mathbf{L}}(\ell A \times (R^4 \times R^4), R) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I \times \ell C^\infty(\mathbb{R}^4) \times \ell C^\infty(\mathbb{R}^4), \ell C^\infty(\mathbb{R})) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}^{op}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^m)/I \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^4) \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^4)) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}^{op}}(C^\infty(\mathbb{R}), C^\infty(\mathbb{R}^{m+8})/(I, \{0\})) =$$

$$= Hom_{\mathbf{L}}(\ell C^\infty(\mathbb{R}^{m+8})/(I, \{0\}), \ell C^\infty(\mathbb{R})),$$

где $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ и $\otimes_\infty$ – символ копроизведения C^∞-колец. При этом при вычислении были использованы формулы

$$C^\infty(\mathbb{R}^n) \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^k) = C^\infty(\mathbb{R}^{n+k}),$$

$$\frac{\ell A \to \ell C^{\ell B}}{\ell B \times \ell A \to \ell C}.$$

Отсюда следует, что при $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$

$$g^{(4)}(\ell A) = [g \in_{\ell A} R^{R^4 \times R^4}] \equiv g^{(4)}_{ik}(a)dx^i dx^k,$$

$$a = (a^1, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m,$$

т.е. метрика зависит от «скрытых» параметров $a = (a^1, ..., a^m) \in \mathbb{R}^m$.

Если рассматривать метрику, зависящую ещё от точки $x = (x^0, ..., x^3)$ пространства-времени R^4, то

$$g^{(4)}(x)(\ell A) = [g(x) \in_{\ell A} R^{R^4 \times R^4}] \equiv g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)dx^i dx^k.$$

Зависимость 4-метрики не только от пространственно-временных координат, но ещё от дополнительных параметров $a = (a^1, ..., a^m)$ может трактоваться как указание на существование дополнительных измерений, идущих вдоль *балка*.

Дополним метрику $g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)$ до (4+m)-мерной метрики в пространстве $\mathbb{R}^{4+m}$, например, следующим образом:

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a)dx^i dx^k - \sigma_1 da^{1^2} - ... - \sigma_m da^{m^2}, \qquad (18.18)$$

где $\sigma_j = \pm 1$ (знак выбирается из физических соображений).

Для каждой стадии ℓA получаем $(4+m)$-мерные псевдоримановы *гиперпространства*

$$\langle R^4_{\ell A}, g^{(4)}(\ell A)\rangle \equiv \langle \mathbb{R}^{4+m}, g^{(4)}(\ell A)\rangle,$$

для которых при выявлении зависимости метрики $g^{(4)}(\ell A)$ от «скрытых» параметров a, видимо, необходимо либо применять многомерные уравнения Эйнштейна, либо проводить варьирование по физическим константам (см. [69], [77, § 9.13]).

Другими словами, 4-мерная синтетическая (интуиционистская) теория содержит в себе несчётное число многомерных теорий, описывающих «скрытые» параллельные вселенные, лежащие в гиперпространствах $R^4_{\ell A}$. Таким образом, интуиционистская логика дает новое представление о строении Реальности.

18.7.5. Объекты из топоса $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$

Вложение Ионеды и принятые упрощения (опускание символов i и y) позволяет представить объекты и морфизмы топоса $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ в более наглядном виде, удобном для практических вычислений.

Приведем кратко необходимые нам сведения и формулы, касающиеся топосной модели $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{op}}$ для СДГ [262, с.75-78].

Гладкая прямая, или гладкие действительные числа:

$$R = \ell C^\infty(\mathbb{R}).$$

Точка[13]:

$$\mathbf{1} = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(x).$$

Инфинитозималы 1-го порядка:

$$D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(x^2) = \{x \in R : x^2 = 0\}.$$

Инфинитозималы:

$$\mathbb{\Delta} = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(m^g_{\{0\}}),$$

где $m^g_{\{0\}}$ – идеал функций, имеющих нулевой росток в 0.

Действительное число в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ – это класс эквивалентности $f(x) mod\ I$, где $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = A$.

Инфинитозимал 1-го порядка в стадии ℓA (элемент из D) – это класс $f(x) mod\ I$ с $f^2 \in I$.

Инфинитозимал в стадии ℓA (элемент из $\mathbb{\Delta}$) – это класс $f(x) mod\ I$, такой, что для каждой $\phi \in m^g_{\{0\}} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ имеем $\phi \circ f \in I$.

Функция из R в R в стадии ℓA – это класс $F(x,a) mod\ \pi^*(I)$, где $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ и $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – проекция; $\pi^*(I)$ – идеал, порождённый $\{f \circ \pi : f \in I\}$. Поэтому представитель F функции из R^R есть функция $F(-,a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, зависящая гладко от параметра $a \in \mathbb{R}^n$.

[13] Через $(f_1, ..., f_k)$ обозначается идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, порожденный функциями $f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеющий вид $\sum_{i=1}^k g_i f_i$, где $g_1, ..., g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

18.7.6. Переходы от стадии (сцены) к стадии (сцене)

Переход от сцены (стадии) ℓA к сцене (стадии) ℓB – это морфизм между стадиями

$$\ell B \xrightarrow{\Phi} \ell A. \tag{18.19}$$

Морфизм Φ осуществляет переход от гиперпространства $R^4_{\ell A}$ к гиперпространству $R^4_{\ell B}$. Убедимся в этом.

Пусть, например, $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\ell B = \ell C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Тогда переход Φ между стадиями дается гладким отображением

$$\phi : \mathbb{R}^m \ni b \to a \in \mathbb{R}^n,$$

$$a = \phi(b).$$

В таком случае метрика

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, a) dx^i dx^k - \sigma_1 da^{1^2} - ... - \sigma_m da^{m^2} \tag{18.20}$$

гиперпространства $R^4_{\ell A}$ преобразуется в метрику

$$g^{(4)}_{ik}(x^0, ..., x^3, \phi(b)) dx^i dx^k - \sigma_1 [d\phi^1(b)]^2 - ... - \sigma_m [d\phi^m(b)]^2 \tag{18.21}$$

гиперпространства $R^4_{\ell B}$.

18.8. Многовариантный Мир

Использование интуиционистской синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера (СДГ), в которой поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ заменяется на коммутативное кольцо $\mathbf{R}$ и дифференциальное исчисление сводится к алгебре [250], с необходимостью привело к привлечению топосов в качестве интерпретации теории.

В результате мы пришли к многовариантному Миру. Каждый вариант Мира – это различные совокупности $R^4_{\ell A}$ интерпретаций событий x из пространства-времени R^4:

$$R^4_{\ell A} = \{(x^0, ..., x^3, a) : (x^0, ..., x^3, a) \in \mathbb{R}^4, \quad a \in \mathbb{R}^m\},$$

оснащённые метриками

$$\sum_{i,k=1}^{4} g_{ik}(x,a)dx^i dx^k \ mod\ I,$$

$$x \in \mathbb{R}^4,\ a \in \mathbb{R}^m,\ A = C^\infty(\mathbb{R}^m)/I,$$

и I – идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ [262].

Многозначная логика становится причиной многовариантности явлений, и каждый вариант так же реален, как и любой другой.

18.9. Speculatio

1. Идея использовать интуиционистскую логику привлекательна. Она приводит к совершенно новому математическому аппарату и дает надежду на открытие новых физических закономерностей, нового ви́дения Внешнего Мира.

Если наша идея правильная, то опыт её подтвердит. Этот тезис отражает культурную традицию современного физика. Однако, «разве может быть такой опыт, который соответствовал бы идее? Ведь всё своеобразие идеи как раз в том и состоит, что опыт никогда не может вполне соответствовать ей». Так возразил Шиллер на фразу Гёте: «Стало быть, я могу радоваться, что, сам того не ведая, обладаю идеями и даже могу видеть их глазами» (цит. по статье Гейзенберга [25, с.246-247].).

Глава 19

Интуиционистская теория гравитации

В этой главе строится интуиционистская теория гравитация на основе Синтетической дифференциальной геометрии.

Переход от классического дифференциального и интегрального исчисления к анализу Кока-Ловера означает переход от классической двузначной логики к интуиционистской логике. Теория множеств не может уже служить способом интерпретации объектов такой теории, и приходится использовать теорию гладких топосов (см. Приложение А, § А.6). Топосные модели представляют окружающий нас Внешний Мир более многогранным, многовариантным, наделённым новыми физическими свойствами.

Физические величины в этой инфинитозимальной теории могут иметь бесконечно малые значения. Бесконечно малая величина – это, к примеру, элемент объекта $D = \{d : d^2 = 0\}$, который может быть проинтерпретирован в *стадии* $\ell C^\infty(\mathbb{R}^m)/I$ как гладкая функция $d(a) \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, $d^2(a) \in I$ (см. § А.6).

Какая физика может нас ожидать, если мы рассмотрим уравнения Эйнштейна, в правой части которых стоит инфинитозимальная плотность материи?

19.1. Интуиционистские уравнения Эйнштейна

19.1.1. Случай, когда физические константы – это действительные числа

Уравнения Эйнштейна в СДГ, описывающие гравитационное поле, создаваемое некоторой материальной системой, в случае, когда $c, G \in \mathbb{R}$, должны иметь следующий вид:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = \varkappa T_{ik}, \tag{19.1}$$

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4}.$$

19.1.2. Случай, когда физические константы не являются действительными числами

Предположим, что физические константы c, G не являются действительными числами и имеют вид

$$c = c_0 + d, \quad G = G_0 + \delta, \tag{19.2}$$

где

$$c_0, G_0 \in \mathbb{R}, \qquad d, \delta \in D.$$

Тогда

$$\varkappa = \frac{8\pi G}{c^4} = 8\pi \frac{G_0 + \delta}{c_0^4 + 4c_0^3 d} =$$

$$= \frac{8\pi G_0}{c_0^4} - \frac{32\pi G_0}{c_0^5}d + \frac{8\pi}{c_0^4}\delta - \frac{32\pi}{c_0^5}d\delta. \tag{19.3}$$

Уравнения Эйнштейна в этом случае надо записывать в прежнем виде (19.1), но с учётом выражения (19.3) для $\varkappa$.

19.2. Принцип эквивалентности

Также, как в ОТО, для любой данной точки $x_0 \in R^n$ существует локальная карта, в которой

$$\begin{aligned} &g_{ik}(x_0) = \eta_{ik}, \\ &\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x_0) = 0, \\ &\Gamma^i_{jk}(x_0) = 0. \end{aligned} \tag{19.4}$$

Последнее равенство в ОТО трактуется как принцип эквивалентности (см. § 3.3). Равенство нулю символов Кристоффеля в классической римановой геометрии, как говорилось в § 3.3, можно добиться на кривой, но не целиком в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 19.1. $D_1(n) = \{x = (x^1, ..., x^n) \in R^n : \forall ij(x^i x^j = 0\}$. Пишем $x \sim_1 y$, если $x - y \in D_1(n)$.

Однако в гладкой инфинтозимальной римановой геометрии имеется множество $\mathcal{O}(x_0) = \{x \in R^n : x \sim_1 x_0\}$, и для любой $x \in \mathcal{O}(x_0)$ справедливы равенства [254]

$$\begin{aligned} &g_{ik}(x) = \eta_{ik}, \\ &\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x) = 0, \\ &\Gamma^i_{jk}(x) = 0. \end{aligned} \tag{19.5}$$

В самом деле, если $x \sim_1 x_0$, то $x = x_0 + \delta$, $\delta = (\delta_1, ..., \delta_n), \delta_i \delta_j = 0$. Тогда, применяя формулы (18.8), (19.4) имеем:

$$g_{ik}(x) = g_{ik}(x_0 + \delta) = g_{ik}(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x_0) = g_{ik}(x_0).$$

Далее, по определению частной производной,

$$g_{ik}(x + (0, ..., 0, d, 0, ..., 0)) = g_{ik}(x) + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x) d \tag{19.6}$$

для любого $d \in D$, и, значит, для любого $\overline{d} \in D$, такого, что $\overline{d}d' = 0$ для любого[1] $d' \in D$. Поскольку $x + (0,...,0,\overline{d},0,...,0) = x_0 + (\delta_1,...,\delta_{j-1},\delta_j + \overline{d},\delta_{j+1},...,\delta_n)$ и $(\delta_1,...,\delta_{j-1},\delta_j+\overline{d},\delta_{j+1},...,\delta_n) \in D_1(n)$, то $x+(0,...,0,\overline{d},0,...,0) \in \mathcal{O}(x_0)$ и, следовательно,

$$g_{ik}(x + (0,...,0,\overline{d},0,...,0)) = \eta_{ik}. \tag{19.7}$$

Подставляя (19.7), получаем

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}(x)\overline{d} = 0. \tag{19.8}$$

Теорема 18.2 справедлива и в том случае, если ограничить d выбором чисел $\overline{d} \in D$, таких, что $\overline{d}d' = 0$ для любого[2] $d' \in D$. Следовательно, из (19.8) получаем $(\partial g_{ik}/\partial x^j)(x) = 0$.

Таким образом, мы получаем более удовлетворительную формулировку принципа эквивалентности по сравнению с ОТО в форме (19.8).

19.3. Интуиционистское сферически-симметричное решение Шварцшильда-Котлера

19.3.1. Почтивакуумные уравнения Эйнштейна

Рассматриваем уравнения Эйнштейна в СДГ с ненулевым *почтивакуумным* тензором энергии-импульса:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}(R - 2\Lambda) = \frac{8\pi G}{c^2}\ d \cdot u_i u_k, \tag{19.9}$$

$$g_{ik}u^u u^k = 1,$$

[1] Достаточно для конечного числа чисел $d' \in D$.
[2] См. предыдущее примечание.

где плотность материи $d \in D$ – произвольно взятый инфинитозимал.

Неклассическая плотность вакуумной материи согласуется с привычным занулением правой части уравнений Эйнштейна в случае вакуума в общей теории относительности, поскольку в классическом случае $d = 0$.

19.3.2. Сферически-симметричное решение

Рассмотрим случай, когда гравитационное поле является статичным и обладает центральной симметрией. Центральная симметрия поля означает, что интервал пространства-времени может быть взят в виде

$$ds^2 = e^{\nu(r)}dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2).$$

Простые вычисления приводят в результате к следующим уравнениям:

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \varkappa T_1^1, \tag{19.10}$$

$$-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right) - \Lambda = \kappa T_2^2 = \varkappa T_3^3, \tag{19.11}$$

$$-e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = \varkappa T_0^0, \tag{19.12}$$

$$0 = \varkappa T_0^1. \tag{19.13}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r, а точка – дифференцирование по t.

Уравнение (19.11), как известно [149, с.235], является следствием уравнений (19.10), (19.12), (19.13) и закона сохранения

$$T^{ik}{}_{;k} = 0. \tag{19.14}$$

Поэтому в дальнейшем уравнение (19.11) опускаем.

Возьмем

$$T_k^i = c^2 \rho u^i u_k,$$

т.е. рассматриваем пылевидную материю. Здесь ρ – плотность пыли в пространстве, которую будем считать в дальнейшем постоянной величиной.

Считая теперь, что система находится в сопутствующей системе координат, получаем, что $u_i = (e^{\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0)$, а $u^k = g^{ik} u_i = (e^{-\frac{\nu}{2}}, 0, 0, 0)$. Таким образом, $T_0^0 = c^2 \rho$, $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = 0$, и уравнения (19.10), (19.12), (19.14) примут следующий вид:

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = 0, \tag{19.15}$$

$$-e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} - \Lambda = c^2 \varkappa \rho, \tag{19.16}$$

$$\rho \nu' = 0. \tag{19.17}$$

Ищем решение этих уравнений. Поскольку ρ и Λ постоянны, то уравнение (19.16) нетрудно проинтегрировать. В самом деле, приняв $e^{-\lambda}$ за u, получаем:

$$u' r + u = 1 - (\Lambda + \varkappa c^2 \rho) r^2. \tag{19.18}$$

Решая однородное уравнение $u'r + u$, находим, что $u = Ar^{-1}$, где $A = const$. Таким образом, решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$$u = \frac{A(r)}{r}.$$

Подставляя его в (19.18), выводим условие на $A(r)$:

$$A'(r) = 1 - (\Lambda + \varkappa c^2 \rho) r^2.$$

Интегрируем это уравнение и получаем, что

$$A(r) = r - \frac{(\Lambda + \varkappa c^2 \rho) r^3}{3} + C.$$

Отсюда
$$u(r) = 1 - \frac{(\Lambda + \varkappa c^2\rho)r^2}{3} + \frac{C}{r}.$$
Или, возвращаясь к прежним обозначениям,
$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{(\Lambda + \varkappa c^2\rho)r^2}{3} + \frac{C}{r}. \tag{19.19}$$
Здесь C – постоянная интегрирования.

Рассмотрим теперь уравнение (19.17). Нетрудно заметить, что $\rho = d$, $\nu' = d$ при любом $d \in D$ является его решением. Таким образом, из существования такого объекта, как D, следует, что, кроме классических решений
$$(\rho = 0 \ \& \ \nu' \neq 0) \vee (\nu' = 0 \ \& \ \rho \neq 0) \vee (\rho = 0 \ \& \ \nu' = 0),$$
существуют и другие, неклассические. Первый из указанных классических случаев приводит к известному классическому решению Шварцшильда. Рассмотрим неклассический случай решения уравнения (19.17), когда обе величины ρ и ν' одновременно неотделимы от нуля. В этом случае тензор энергии-импульса становится инфинитозимальным.

Подставляя (19.19) в (19.15) и учитывая (19.17), получаем:
$$\frac{\nu'}{r}\left(1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) + \frac{2}{3}\Lambda - \frac{\varkappa c^2\rho}{3} + \frac{C}{r^3} = 0. \tag{19.20}$$

Отсюда легко заметить, что $\frac{2}{3}\Lambda + \frac{C}{r^3}$ неотделимо от нуля. Кроме того, при рассмотрении этого выражения в некоторой модели СДГ в стадии **1** это выражение становится равным нулю, что возможно лишь в том случае, когда и Λ и C в этой стадии равны нулю. Таким образом, заключаем, что C и Λ также необратимы, а значит, и $\frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}$ необратимо. Используя теперь (19.17), преобразуем (19.20) к виду
$$\nu'\left(1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\varkappa c^2\rho r^2}{6}\right) = \frac{\varkappa c^2\rho r}{3} - \frac{2}{3}\Lambda \cdot r - \frac{C}{r^2},$$

или, что эквивалентно,

$$\nu' = \frac{\frac{1}{3}\cdot\varkappa c^2\rho r - \frac{2}{3}\Lambda\cdot r - Cr^{-2}}{1 + Cr^{-1} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{1}{6}\varkappa c^2\rho r^2}. \tag{19.21}$$

Решая это уравнение, находим,

$$\nu = \ln\left|1 + \frac{C}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{\varkappa c^2\rho r^2}{6}\right|. \tag{19.22}$$

Подставляя эти значения для λ и ν в выражение для ds^2, получаем, что

$$ds^2 = \left(1 + \frac{(\varkappa c^2\rho - 2\Lambda)r^2}{6} + \frac{C}{r}\right)dt^2 -$$
$$-\left(1 - \frac{(\Lambda + \varkappa c^2\rho)r^2}{3} + \frac{C}{r}\right)^{-1}dr^2 -$$
$$-r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\cdot d\varphi^2). \tag{19.23}$$

Эту метрику будем называть решением Шварцшильда почтивакуумного уравнения Эйнштейна.

Естественно считать, что гравитационное поле не имеет сингулярностей во всем пространстве. Это означает, что метрика не имеет особенностей в $r = 0$. Поэтому будем считать, что C равно нулю. Исходя из этого и умножая правую и левую часть уравнения (19.20) на ρ, получаем, что

$$2\Lambda\rho = \varkappa c^2\rho^2 \tag{19.24}$$

и, кроме того, Λ – необратимая величина кольца R.

Другими словами, материя имеет неклассическую плотность, а гравитационное поле имеет вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{(\varkappa c^2\rho - 2\Lambda)r^2}{6}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{(\Lambda + \varkappa c^2\rho)r^2}{3}\right)^{-1}dr^2 -$$

$$-r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\varphi^2), \tag{19.25}$$

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{(\varkappa c^2 \rho - 2\Lambda) r^2}{6}}}, 0, 0, 0 \right).$$

В гладко топосной модели синтетической дифференциальной геометрии Кока-Ловера в стадии **1** (см. § A.6.3) эта метрика совпадает с метрикой пространства-времени Минковского. Грубо говоря, неклассический «пылевидный» вакуум имеет «бесконечно малое» слабое гравитационное поле.

19.3.3. Интерпретации интуиционистского решения Шварцшильда-Котлера

Почтивакуумные уравнения Эйнштейна, условия инфинитезимальности для космологической постоянной и плотности и их соотношение

$$2\Lambda\rho = \varkappa\rho^2$$

на стадии[3] $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ принимают следующий вид:

$$R_{ik}(a) - \frac{1}{2} g_{ik}(a)(R(a) - 2\Lambda(a)) = \varkappa\rho(a) u_i(a) u_k(a) \mathrm{mod} I,$$

$$f \circ \Lambda(a) = 0 \bmod I, \tag{19.26}$$

$$f \circ \rho(a) = 0 \bmod I, \tag{19.27}$$

$$2\Lambda(a)\rho(a) - \varkappa\rho^2(a) = 0 \bmod I \tag{19.28}$$

для любого $f \in m_0^g$, где $s \in \mathbb{R}^n$.

Решение g_{ik} в этом случае можно записать следующим образом[4]:

[3]Теория гладких колец дана в Приложении A, § A.6.

[4]Здесь и далее рассматривается случай $C = 0$.

$$
\begin{gathered}
g_{ik}(a)dx^i dx^k = \left(1+\frac{\varkappa\rho(a)-2\Lambda(a)}{6}r^2\right)dx^{0^2}-\\
-\frac{dr^2}{1-\frac{1}{3}(\varkappa\rho(a)+\Lambda(a))r^2}-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)
\end{gathered}
\tag{19.29}
$$

по модулю $I\cdot C^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^4)$.

Проиллюстрируем вышеописанные уравнения на некоторых конкретных примерах, ограничиваясь случаем конечнопорождённых идеалов.

Стадия 1

Классической общей теории относительности отвечает стадия **1**. В этой стадии метрика (19.25) является метрикой пространства–времени Минковского:

$$
g_{ik}(t,r,\varphi,\theta)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-r^2\sin^2\theta&0\\0&0&0&-r^2\end{pmatrix},
$$

т.е. Λ и ρ равны нулю. Действительно, для инфинитозималов из $\mathbb{\Delta}$

$$
\varphi(\rho(a))=\varphi(\rho(0))+\varphi'(\rho(0))\rho'(0)a+o(|a|). \tag{19.30}
$$

Поскольку $\varphi(\rho(a))\in I=(a)$, то $\varphi(\rho(0))=0$. Следовательно, $\rho(0)=0$, так как $\varphi\in m^g_{\{0\}}$. Тогда $\rho \bmod I=0$. Аналогично $\Lambda \bmod I=0$, $C \bmod I=0$.

В этой стадии метрика (19.25) совпадает с метрикой специальной теории относительности. Таким образом, космологическая модель с этой метрикой может быть названа обобщённой моделью специальной теории относительности.

Стадия $D=\ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^2)$

В этом случае

$$
g_{00}(a)=1+\frac{1}{6}(\kappa c^2\rho_1-2\Lambda_1)ar^2+C_1ar^{-1},
$$

$$g_{11}(a) = -\left(1 - \frac{1}{3}(\kappa c^2\rho_1 + \Lambda_1)ar^2 + C_1 ar^{-1}\right)^{-1},$$

а другие g_{ik} являются классическими. Действительно, как следует из (19.30),

$$\varphi(\rho(0)) = \varphi'(\rho(0))\rho'(0) = 0.$$

Поскольку $\varphi|_U \equiv 0$, $\varphi'|_U \equiv 0$ для некоторой окрестности 0, тогда $\rho(0) = 0$. Таким образом, $\rho \bmod I = \rho_1 a$, $\rho_1 \in \mathbb{R}$. Аналогично $\Lambda \bmod I = \Lambda_1 a$, $\Lambda_1 \in \mathbb{R}$.

Стадия $D_p = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^{p+1})$

Здесь получаем

$$g_{00}(a) = 1 + \sum_{k=1}^{p}\left[\frac{(\kappa c^2\rho_k - 2\Lambda_k)}{6}\cdot r^2 + \frac{C_k}{r}\right]a^k,$$

$$g_{11}(a) = -\left[1 - \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{(\kappa c^2\rho_k + \Lambda_k)}{3}\cdot r^2 - \frac{C_k}{r}\right)a^k\right]^{-1},$$

$$\Lambda = \Lambda_1 a + ... + \Lambda_p a^p, \quad \rho = \rho_1 a + ... + \rho_p a^p,$$

$$2\Lambda\rho = \varkappa c^2\rho^2.$$

19.4. Изменение сигнатуры пространства-времени

Заметим очень интересный факт: сигнатура интуиционистской метрики Шварцшильда-Котлера g_{ik} зависит от вида функций Λ, ρ и C.

Например, в стадии $D = \ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^2)$ $\rho \bmod I = \rho_1 a$, $\Lambda \bmod I = \Lambda_1 a$, $C \bmod I = C_1 a$, где $\rho_1, \Lambda_1, C_1 \in \mathbb{R}$ суть простые вещественные числа (при $C = 0$ условие (19.24) выполняется для всех $a \in \mathbb{R}$). Следовательно, гравитационное поле $g_{ik}(a)$ не является слабым в соответствующем пятимерном пространстве–времени с координатами $(t, r, \theta, \varphi, a)$, и сигнатура в R^4_D может меняться.

19.5. Антигравитация

Для решения Шварцшильда-Котлера (19.25) *в стадии* $\ell C^\infty(\mathbb{R})/(a^3)$, когда Λ, ρ зависят только от одной переменной, например от $a \in \mathbb{R}$ [1, с.295], рассматривая случай $\Lambda = \Lambda_1 a, \rho = \rho_2 a^2$, имеем

$$g_{00}(a) = 1 + \frac{1}{6}(\kappa c^2 \rho_2 a - 2\Lambda_1) a r^2. \tag{19.31}$$

Гравитационная сила в постоянном поле [113, с.327]

$$f_\alpha = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \ln \sqrt{g_{00}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{g_{00}} \left[\frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \right) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{g_{0\beta}}{g_{00}} \right) \right] \frac{v^\beta}{c} \right\},$$

действующая на пробную частицу, равна

$$f_r = -\frac{mc^2}{6\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{\left[\varkappa c^2 \rho_2 a - 2\Lambda_1\right] ar}{\left[1 + \frac{1}{6}(\varkappa c^2 \rho_2 a - 2\Lambda_1) a r^2\right]} (mod(a^3)),$$

$$f_\varphi = f_\theta = 0.$$

Следовательно[5],

$$f_r = -\frac{mc^2}{6\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\left(\varkappa c^2 \rho_2 - \frac{2}{3}\Lambda_1^2 r^2 \right) a - 2\Lambda_1 \right] ar,$$

$$f_\varphi = f_\theta = 0.$$

Пусть $\rho_2 > 0$, т.е. плотность материи положительна.

---

[5]Используется формальная формула:

$$\frac{1}{1-a} = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots = 1 + a + a^2 (mod(a^3)).$$

Если $r \neq c\sqrt{(3/2)\varkappa\rho_2}/|\Lambda_1|$, то на каждой сфере радиуса r при переходе изменяющегося параметра a через значение $a(r) = 2\Lambda_1/(\varkappa c^2\rho_2 - 2/3\Lambda_1^2 r^2)$ направление вектор-силы f меняется на противоположное, т.е. гравитационное притяжение заменятся на гравитационное отталкивание.

На сфере $r = c\sqrt{(3/2)\varkappa\rho_2}/|\Lambda_1|$ гравитация переходит в антигравитацию при переходе a через значение $a = 0$.

Таким образом, можем наблюдать антигравитацию для любого $r > 0$.

Аналогичное явление для метрики (19.31) в классическом случае было описано в § 10.2.2.

Параметр a как в классическом случае, так и в интуиционистском, можно рассматривать как 5-ю координату. Получаем, что при смене браны по мере продвижения в 5-мерном балке гравитация заменяется на антигравитацию. Уравнение для балка в интуиционистской теории гравитации – это уравнения для физических констант, зависящих от a и представленное в книге [77]. В классическом случае прибегают, как правило, к многомерным обобщениям общей теории относительности.

19.6. Speculatio

1. Одной из самых ярких идей современной космологии является представление об эволюции Вселенной. Однако, согласно уравнениям Эйнштейна четырёхмерная геометрия ${}^{(4)}\mathcal{G}$ с метрикой g_{ik} соответствует четырёхмерному наполнению субстанцией Мира событий, описываемой тензором энергии-импульса T_{ik}. Но отсюда заключаем, что коль скоро субстанция дана *сразу* в форме четырёхмерного Мира, то *предопределены* все её трёхмерные срезы, т.е. её размещения в пространстве во все времена, то никакой эволюции ничего сущего не существует. Другими словами, *эволюция* всего лишь иллюзия, декларируемая как научный факт исследователем, вынужденным просматривать четырёмерный Мир событий поэтапно, срез за срезом, иначе говоря, во времени, и не признающим реальности пространства-времени.

Приложение A

Элементарные топосы

Топос – это частный случай более общего понятия *категория*. Теория категорий базируется на двух первичных понятиях: *объекты* и *морфизмы*.

A.1. Категории

Определение A.1. *Категория* $\mathcal{K}$ включает в себя:

1) объекты $A, B, C, \ldots$;

2) морфизмы $f, g, h, \ldots$;

3) каждый морфизм f связан с двумя объектами A, B; первый называют областью определения морфизма, а второй – областью значений. Используются обозначения $f : A \longrightarrow B$ или $A \xrightarrow{f} B$;

4) для каждого объекта A имеется тождественный морфизм $1_A : A \longrightarrow A$;

5) для каждой пары морфизмов $f : A \longrightarrow B$ и $g : B \longrightarrow C$ определена композиция морфизмов $g \circ f : A \longrightarrow C$. Композиция должна удовлетворять двум условиям:

(i) Закон идентичности. Если дан морфизм $f : A \longrightarrow B$, то $1_B \circ f = f$ и $f \circ 1_A = f$.

(ii) Закон ассоциативности. Если даны морфизмы $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$, $h : C \longrightarrow D$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Совокупность морфизмов из A в B обозначают как $Hom_{\mathcal{K}}(A, B)$ или просто как $Hom(A, B)$.

Пример A1. Простым, но очень важным примером категории является теория множеств Кантора **Sets**. Объекты этой категории – это множества $A, B, C, D, ...$ а морфизмы – отображения $f : A \longrightarrow B,\ g : C \longrightarrow D, ...$ из множества в множество.

Пример A2. Теория топологических пространств **Top** также является примером категории. Ее объекты – это топологические пространства $X, Y, Z, T, ...$, а морфизмы – непрерывные отображения $f : X \longrightarrow Y,\ g : Z \longrightarrow T, ...$

Пример A3. Экзотическим примером категории является категория **N**. Она обладает только одним объектом, обозначаемым как N, а морфизмами является натуральные числа $0, 1, ..., n, ...$, и имеют они запись в следующем виде: $0 : N \longrightarrow N, 1 : N \longrightarrow N, ..., n : N \longrightarrow N, ...$ Композицией морфизмов n и m является натуральное число $n \circ m = n + m$. Единичная стрелка 1_N объекта N задается числом 0.

Двойственная категория. Если дана категория $\mathcal{K}$, то легко строится *двойственная категория* $\mathcal{K}^{op}$. Она имеет те же самые объекты, что категория $\mathcal{K}$, а морфизмы получаются из морфизмов категории $\mathcal{K}$ «обращением стрелки», т.е. если в $\mathcal{K}$ есть морфизм $f : A \longrightarrow B$, то в $\mathcal{K}^{op}$ рассматривается морфизм $f : B \longrightarrow A$.

Определение A.2. Морфизм $f : A \longrightarrow B$ называется *мономорфизмом*, если для любой пары морфизмов $g : C \longrightarrow A$, $h : C \longrightarrow A$ из равенства $f \circ g = f \circ h$ следует $g = h$.

Определение A.3. *Диаграммой* в категории $\mathcal{K}$ называется совокупность объектов $A_i, A_j, ...$ вместе с некоторыми морфизмами $f : A_i \longrightarrow A_j$ между отдельными объектами из этой диаграммы (между данной парой объектов может быть несколько морфизмов, а может и не быть их вовсе).

Диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

называется *декартовым квадратом*, если

1) она коммутативна, т.е. $k \circ f = h \circ g$;

2) для любых $\phi : C \longrightarrow X$, $\psi : C \longrightarrow Y$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & X \arrow[d, "k,"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & B \end{tikzcd}$$

существует единственный морфизм $j : C \longrightarrow A$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "j"'] \arrow[drr, "\phi"] \arrow[ddr, "\psi"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "g"] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Определение А.4. *Конусом* для диаграммы $\mathcal{D}$ с объектами $A_i, A_j, ...$ называется такой объект C вместе с морфизмами $f_i : C \longrightarrow A_i$ для каждого объекта A_i из $\mathcal{D}$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "g"] & & A_j \\ & C \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_j"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна для любого морфизма $g : A_i \longrightarrow A_j$ из $\mathcal{D}$.

Конус для диаграммы $\mathcal{D}$ обозначаем через $(f_i : C \longrightarrow A_i)$.

Определение А.5. *Предел диаграммы* $\mathcal{D}$ есть конус $(f_i : C \longrightarrow A_i)$, такой, что для любого другого конуса $(f'_i : C' \longrightarrow A_i)$ для $\mathcal{D}$ существует единственный морфизм $f : C' \longrightarrow C$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A_i & \\ C' \arrow[ur, "f'_i"] \arrow[rr, "f"'] & & C \arrow[ul, "f_i"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна для каждого объекта A_i из $\mathcal{D}$.

Диаграмма *конечная*, если она состоит их конечного числа объектов и конечного числа морфизмов.

Определение А.6. Категория $\mathcal{K}$ называется *конечно полной,* если она содержит предел любой конечной диаграммы.

Конечный объект. Пусть $\mathcal{D}$ – пустая диаграмма

,

т.е. без объектов и без морфизмов. Тогда конус для $\mathcal{D}$ – это просто любой объект. (Нет никаких морфизмов). Предел для пустой $\mathcal{D}$ есть объект C, такой, что любого объекта C' существует единственный морфизм $f : C' \to C$.

Этот удивительный объект C получает специальное название *конечный объект* и обозначается как 1.

В категории множеств **Sets** конечный объект – это любое одноэлементное множество.

Определение А.7. Объект 1 называется *конечным*, если для каждого объекта A существует один и только один морфизм из A в 1.

А.2. Функторы. Категория функторов $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$

Функтором F из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{E}$ называется функция, которая ставит в соответствие:

1) каждому объекту A категории $\mathcal{K}$ объект $F(A)$ категории $\mathcal{E}$;

2) каждому морфизму $f : A \longrightarrow B$ категории $\mathcal{K}$ морфизм $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ категории $\mathcal{E}$, такой, что

a) $F(1_A) = 1_{F(A)}$;

b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ для любых морфизмов f, g, для которых определена композиция $g \circ f$.

Категория функторов. Пусть даны две категории $\mathcal{K}$, $\mathcal{E}$. Построим *категорию функторов* $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$, объектами которой являются функторы из $\mathcal{K}$ в $\mathcal{E}$.

Определим морфизмы категории $\mathcal{E}^{\mathcal{K}}$. Возьмем два функтора $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$ и $G : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{E}$. *Морфизм* $\tau : F \longrightarrow G$ *объекта* F *в объект* G называется *естественным преобразованием* функтора F в функтор G и состоит из семейства морфизмов $\{\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A),$ где A – любой объект категории $\mathcal{K}\}$. Причём морфизм $\tau_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ таков, что для любого морфизма $f : A \longrightarrow B$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & F(A) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ B & F(B) \arrow[r, "\tau_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Морфизмы τ_A называются *компонентами* преобразования τ.

А.3. Топосы

Теория категорий развивалась долгое время без какого-либо серьёзного к ней отношения со стороны математиков. Она рассматривалась как экзотическая теория обо всём и про всё. Именно это не способствовало её использованию при решении многих важных научных задач.

В 1960 г. А. Гротендик пришёл к открытию класса категорий, который впоследствии назвал топосами и которые являются исключительно сложными теоретико-множественными конструкциями». Топосы Гротендика имели непосредственное отношение к востребованной в математике теории пучков.

«Ловер к концу 60-х годов заметил, что каждый топос Гротендика имеет объект истинностных значений, а само двухэлементное множество $\{$*истина, ложь*$\}$ можно рассматривать как «объект истинностных значений» в категории множеств. Этим фундаментальным открытием была значительно продвинута разработка теории топосов. В результате появилось понятие классификатора подобъекта, которое, в свою очередь, вводит в обиход понятие «подобъекта», являющегося категорным аналогом понятия подмножества. Классификатор подобъектов обозначается посредством Ω, и следствием существования такого объекта является всё то, что мы можем сказать о подобъектах A объекта D и что может быть переведено в разговор об отображениях D в Ω»[6]. В итоге элементарный топос (т.е. его свойства могут быть описаны в первопорядковом языке) был определён как декартово замкнутая категория с классификатором подобъектов.

Топосы оказались теми категориями, которые достаточно близки к категории множеств **Sets**. Теория множеств стала оплотом математики XX века, отчасти благодаря тому, что обладает возможностью легко порождать объекты, которые нашли широкое использование при решении самых разнообразных задач. Речь идет о декартовых произведениях объек-

[6] Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетия.
– http://www.philosophy.ru/library/logic/karpenko/01.html

тов, а также об объектах, состоящих из того, что на языке теории множеств называется множеством отображений из одного множества A в другое множество B, т.е. о множествах вида $B^A = \{f : A \to B\}$. Кроме того, учитывается то, что подмножество A множества D описывается с помощью характеристической функции χ_A, которая принимает значение в двухэлементном множестве $\{0, 1\}$ (=$\{$ложь, истина$\}$). Эти свойства категории **Sets** берутся в качестве основных при сужении теории категорий до теории топосов.

Определение А.8. *Произведением* объектов A и B называется предел диаграммы, которая состоит только из двух объектов A и B и не имеет ни одного морфизма. Для произведения используется обозначение $A \times B$.

Поскольку $A \times B$ – конус, то имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & A \times B \arrow[ul, "p_A"] \arrow[ur, "p_B"'] & \end{tikzcd}$$

где морфизмы p_A, p_B называются *проекциями*.

Пусть даны объекты A, B, C, D и морфизмы $f : A \to C$, $g : B \to D$. Тогда существует единственный морфизм $f \times g : A \times B \to C \times D$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r, "f"] & C & \\ A \times B \arrow[ur, "p_A"] \arrow[rrr, "f \times g"] \arrow[dr, "p_B"'] & & & C \times D \arrow[ul, "p_C"'] \arrow[dl, "p_D"] \\ & B \arrow[r, "g"'] & D & \end{tikzcd}$$

Морфизм $f \times g : A \times B \to C \times D$ называется *произведением морфизмов* f и g.

Определение A.9. Категория $\mathcal{K}$ допускает *экспоненцирование*, если

1) в ней существует произведение любых двух объектов;

2) если для любых двух объектов A и B существует объект B^A («отображение» объекта A в объект B), называемый *экспоненциалом*, и морфизм $ev : B^A \times A \longrightarrow B$, называемый *морфизмом значения*, такие, что для любых объекта C и морфизма $g : C \times A \longrightarrow B$ существует единственный морфизм $\widehat{g} : C \longrightarrow B^A$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} B^A \times A \arrow[dr, "ev"] & \\ & B \\ C \times A \arrow[uu, "\hat{g} \times 1_A"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Многие категории обладают произведениями, но только некоторые имеют экспоненциалы.

Определение A.10. Категории с произведениями, в которых каждая пара объектов имеет экспоненциал, называются *декартово замкнутыми* категориями.

Определение A.11. *Классификатором подобъектов* для категории $\mathcal{K}$ называется объект Ω вместе с морфизмом $\top : 1 \longrightarrow \Omega$, такой, что выполняется следующая

Ω-**аксиома**. Для каждого мономорфизма $f : A \rightarrowtail D$ существует единственный морфизм $\chi_f : D \longrightarrow \Omega$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "!"'] & D \arrow[d, "\chi_f"] \\ 1 \arrow[r, "\top"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

является декартовым квадратом.

Здесь через $! : A \longrightarrow 1$ обозначен единственный морфизм из A в 1.

Морфизм χ_f называется *характеристическим*, или *характером* морфизма f, а объект Ω – *классифицирующим объектом*. Морфизм $\top$ носит название «истина».

Термин «классификатор подобъектов» для Ω связан с тем, что любой мономорфизм $f : A \mapsto D$ носит название *подобъекта* объекта D. В теории категорий подобъекты – это аналоги подмножеств $A \subset D$ в теории множеств.

Следствием существования классификатора подобъектов Ω является всё то, что мы можем сказать о подобъектах A объекта D и что может быть переведено в разговор об отображениях χ_f D в Ω. [7]

Определение А.12. *Элементарный топос* – это декартово замкнутая категория, обладающая классификатором.

А.4. Логика топоса

Рассмотрим совокупность $Sub(D)$ всех подобъектов объекта D. Можно (см. [30]) на $Sub(D)$ определить операции $\cup, \cap, \setminus$ и отношение $\subset$, аналогичные операциям объединения, пересечения, дополнения и включения, определяемые в теории множеств.

Но? в отличие от теории множеств, $Sub(D)$, в общем случае, не является булевой алгеброй. Поскольку булева алгебра связана с классической двузначной логикой, то говорят, что **топосы, в общем случае, подчиняются неклассической логике**.

Топос называется *булевым*, если $Sub(D)$ является булевой алгеброй. Для булева топоса справедлив закон исключённого третьего [30, с.172] и любые другие утверждения, которые доказуемы в рамках классической логики [30, с.173].

[7]Карпенко А.С. Логика на рубеже тысячелетия.
– http://www.philosophy.ru/library/logic/karpenko/01.html

Таким образом, в произвольном топосе, в общем случае, действуют законы интуиционистской логики, а совокупность $Sub(D)$ является так называемой *алгеброй Гейтинга* [30, с.196].

А.5. Топосы $\mathbf{Bn}(X)$, $\mathbf{Top}(X)$, $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$ и $\mathbf{M{-}Set}$

Категориями, как говорилось выше, являются теория множеств Кантора **Sets**, состоящая из множеств (объекты) и отображений (морфизмы), и теория топологических пространств **Top**, состоящая из топологических пространств (объекты) и непрерывных отображений (морфизмы). Но это простейшие примеры категорий. Ниже нам потребуются более сложно устроенные категории, являющиеся топосами.

Категория $\mathcal{E}$ называется *малой*, если в ней совокупности морфизмов $Hom(A, B)$ из A в B для любых объектов A, B являются настоящими множествами, т.е. объектами категории **Sets**.

Теорема А.1. *Если $\mathcal{E}$ – малая категория, то категория $\mathbf{Sets}^{\mathcal{E}}$ является топосом.* ■

А.5.1. Топос $\mathbf{Bn}(X)$

Пусть X – непустое множество. *Расслоением над X* называется пара (A, p), где A – множество и $p : A \longrightarrow X$ – отображение.

Объектами *категории $\mathbf{Bn}(X)$ всех расслоений над X* являются расслоения (A, p), а морфизмами $f : (A, p) \longrightarrow (B, q)$ – отображения $f : A \longrightarrow B$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Категория $\mathbf{Bn}(X)$ является топосом [30, с.103].

А.5.2. Топос $\mathbf{Top}(X)$

Пучок – это расслоение, обладающее некоторой дополнительной топологической структурой. Пусть X – топологическое пространство.

Пучком над X называется пара (A, p), где A – топологическое пространство и $p : A \longrightarrow X$ – непрерывное отображение, являющееся локальным гомеоморфизмом. Последнее означает, что каждая точка $x \in A$ имеет открытую окрестность O_x, которая посредством p гомеоморфно отображается на $p(O_x)$, являющееся открытым в X.

Объектами *категории* $\mathbf{Top}(X)$ *пучков над* X являются пучки (A, p), а морфизмами $f : (A, p) \longrightarrow (B, q)$ – непрерывные отображения $f : A \longrightarrow B$, такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Категория $\mathbf{Top}(X)$ является топосом и называется *пространственным топосом* [30, с.110].

А.5.3. Топос $\mathbf{Sets^P}$

Категория $\mathbf{P}$, в которой любые два объекта p, q связаны не более чем одним морфизмом $p \longrightarrow q$, называется *категорией предпорядка*. Если P есть совокупность всех объектов категории $\mathbf{P}$, то на P можно ввести предпорядок $\preceq$:

> $p \preceq q$ тогда и только тогда, когда в категории $\mathbf{P}$ существует морфизм $p \longrightarrow q$.

Отношение $\preceq$ обладает свойствами:

1) рефлексивность, т.е. для каждого p выполнено $p \preceq p$;

2) транзитивность, т.е. если $p \preceq s$ и $s \preceq q$, то $p \preceq q$.

Таким образом, отношение $\preceq$ – это обычное отношение предпорядка. Следовательно, $\mathbf{P} = \langle P, \preceq \rangle$ – частично предупорядоченное множество, которое является частично упорядоченным множеством, если отношение $\preceq$ удовлетворяет следующему условию:

3) антисимметричность, т.е. если $p \preceq q$ и $q \preceq p$, то $p = q$.

Обратно, если дано частично предупорядоченное множество $\mathbf{P} = \langle P, \preceq \rangle$, то легко строится категория предпорядка $\mathbf{P}$. Её объекты – это элементы множества P, а морфизм $p \longrightarrow q$ имеет место, если задано отношение $p \preceq q$. Рефлексивность предпорядка обеспечивает существование морфизмов 1_p, а транзитивность – возможность образовывать композиции морфизмов.

Если $\mathbf{P}$ – категория предпорядка, то категория $\mathbf{Sets}^{\mathbf{P}}$ является топосом.

A.5.4. Топос M–Set

Пусть $\mathbf{M} = \langle M, *, e \rangle$ – моноид[8] и X – произвольное множество.

Действием λ моноида $\mathbf{M}$ на X называется отображение $\lambda : M \times X \longrightarrow X$, удовлетворяющее условиям:

1) $\lambda(e, x) = x$ для любого $x \in X$;

2) $\lambda(m_1, \lambda(m_2, x) = \lambda(m_1 * m_2, x)$ для любых $m_1, m_2 \in M$ и $x \in X$.

Пара $\langle X, \lambda \rangle$ называется $\mathbf{M}$-множеством.

Вводим отображение $\lambda_m : X \longrightarrow X$, полагая, что

$$\lambda_m(x) \equiv \lambda(m, x).$$

Все $\mathbf{M}$-множества рассматриваем как объекты категории $\mathbf{M}$–$\mathbf{Set}$. Её морфизмы состоят из отображений $f : \langle X, \lambda \rangle$

[8] Моноидом называется тройка $\mathbf{M} = \langle M, *, e \rangle$, где 1) M – некоторое множество; 2) $* : M \times M \longrightarrow M$ – бинарная операция на M, которая ассоциативна, т.е. $x * (y * z) = (x * y) * z$; 3) $e \in M$ – единица, для которой $x * e = e * x = x$.

$\to \langle Y, \mu \rangle$, где $f : X \to Y$ – отображение, $\langle X, \lambda \rangle$, $\langle X, \lambda \rangle$ – **M**-множества, и диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda_m"'] & Y \arrow[d, "\mu_m"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

коммутативна для любого $m \in M$.

Категория **M–Set** является топосом [30, с.114].

А.6. Гладкие топосы

А.6.1. C^∞-кольца

Определение А.13. C^∞-*кольцо* – это унитарное коммутативное кольцо A, такое, что каждой гладкой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ можно сопоставить $A(f) : A^n \to A^m$ со свойствами:

1) $A(pr_i) = \pi_i, \quad pr_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ pr_i(x^1, ..., x^n) = x^i,\ \pi_i : A^n \to A, \quad \pi_i(a_1, ..., a_n) = a_i$;

2) $A(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$;

3) $A(f \circ g) = A(f) \circ A(g)$.

Очевидно, что $A : f \to A(f)$ – гомоморфизм.

Рассмотрим два произвольных C^∞-кольца A и B. Назовём C^∞-*гомоморфизмом* C^∞-колец A и B гомоморфизм $\varphi : A \to B$, такой, что для каждой гладкой функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ квадрат

$$\begin{array}{ccc} & A^n \to B^n & \\ A(f)\downarrow & & \downarrow B(f) \\ & A^m \to B^m & \end{array}$$

коммутативен.

Предложение A.1. *Кольцо $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – свободное C^∞-кольцо с n порождающими, являющимися проекциями $(x^1, ..., x^n) \to x^i$.* ■

Пример A4. Кольцо $\mathbb{R}[[X_1, ..., X_n]]$ формальных степенных рядов является C^∞-кольцом [262, p.19].

Пример A5. Кольцо дуальных чисел $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[X]/(X^2) = C^\infty(\mathbb{R})/(x^2)$ – это C^∞-кольцо [262, p.19].

Предложение A.2. *Пусть A – это C^∞-кольцо, а I – идеал в A (в теоретико-кольцевом смысле). Каноническая проекция* $\mathrm{p} : A \to A/I$ *индуцирует на A/I структуру C^∞-кольца, превращая* p *в C^∞-гомоморфизм.* ■

Категория $\mathcal{C}$ конечно порождённых C^∞-колец. Через $(f_1, ..., f_k)$ обозначим идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, порождённый конечным числом функций $f_1, ..., f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, т.е. элементы этого идеала имеют вид

$$\sum_{i=1}^{k} g_i f_i,$$

где $g_1, ..., g_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

Идеал $I = (f_1, ..., f_k)$ называется *конечно порождённым.*

Определим категорию $\mathcal{C}$, объектами которой являются *конечно порождённые* C^∞-кольца, т.е. кольца вида $C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$, где I – конечно порождённый идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Морфизмы категории $\mathcal{C}$ – это C^∞-гомоморфизмы вида

$$\Phi : C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \to C^\infty(\mathbb{R}^m)/J.$$

Нетрудно показать, что отображение Φ можно явным способом представить как класс эквивалентности гладких функций

$$\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,$$

таких, что для любого $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \in I \quad g \circ \varphi \in J$. Две такие функции, φ и φ', будут эквивалентны, если их компоненты эквивалентны по модулю J, т.е.

$$\varphi_i - \varphi_i' \in J \qquad \forall i = \overline{1, n}.$$

Предложение А.3. *Для каждого гладкого многообразия M^n $C^\infty(M^n)$ – конечно порождённое C^∞-кольцо* [263]. ■

Предложение А.4. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\chi_U(x)$ – характеристическая функция множества U. Тогда*

$$C^\infty(U) \cong C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})/(y \cdot \chi_U(x) - 1).$$

Следовательно, $C^\infty(U)$ – это конечно порождённое C^∞-кольцо. ■

Копроизведение в категории $\mathcal{C}$. Копроизведение [9] двух конечно порождённых C^∞-колец определяем как *тензорное произведение свободных колец* следующим образом:

$$C^\infty(\mathbb{R}^n)/I \quad \otimes_\infty C^\infty(\mathbb{R}^m)/J = C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})/(I, J),$$

где $(I, J) = (I \circ \pi_1 + J \circ \pi_2)$ – идеал кольца $C^\infty(\mathbb{R}^{n+m})$, и $\pi_1 : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^n, \pi_2 : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – проекции.

Предложение А.5. *Пусть M_1^n и M_2^m – два гладких многообразия. Тогда* [262, p.26]

$$C^\infty(M_1^n) \otimes_\infty C^\infty(M_2^m) \cong C^\infty(M_1^n \times M_2^m).$$

Если $U \subset M_1^n$ и $V \subset M_2^m$ – открытые множества, то

$$C^\infty(U) \otimes_\infty C^\infty(V) \cong C^\infty(U \times V).$$

■

[9] Определение копроизведения двух объектов в произвольной категории дано в [30, с.66].

Замкнутые конечно порождённые C^∞-кольца. Положим $T_0 : C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}) \to \mathrm{I\!R}[[x_1, \ldots, x_n]]$ – отображение, сопоставляющее каждой гладкой функции $f : \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}} \to \mathrm{I\!R}$ её разложение в ряд Тейлора в нуле, т.е. $f \to \sum\limits_{\alpha} \frac{1}{\alpha} \mathrm{D}^\alpha f(0)$ – ряд Тейлора в $x = 0$.

Аналогично определим и отображение T_x, сопоставляющее функции $f \in C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$ её разложение в ряд Тейлора в точке $x \in \mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}$.

Определение А.14. C^∞-кольцо A вида $C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})/I$ называется *замкнутым*, если для любой функции $f \in C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$ выполняется следующее утверждение:

$$\forall x \in \mathrm{Z}(I) \quad T_x(f) \in T_x(I) \Rightarrow f \in I,$$

здесь $\mathrm{Z}(I) = \cap\{f^{-1}(0) \mid f \in I\}$.

***Germ*-определённые конечно порождённые C^∞-кольца**.

Определение А.15. C^∞-кольцо A вида $C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})/I$ называется *germ-определённым кольцом*, если

$$\forall x \in \mathrm{Z}(I) \quad f|_x \in I|_x \Rightarrow f \in I,$$

для любой $f \in C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})$.

Здесь под $f|_x$ понимаем образ f в $C^\infty_x(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}}) \simeq C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})/\mathrm{m}^g_{\{x\}}$, где $\mathrm{m}^g_{\{x\}} = \{f : \mathrm{I\!R}^n \to \mathrm{I\!R} \mid V_x \ f|_{V_x} \equiv 0\}$.

Замкнутые и *germ*-определённые кольца являются подкатегориями категории $\mathcal{C}$.

А.6.2. Гладкий топос

Вместо категории $\mathcal{C}$ рассмотрим двойственную к ней *категорию локусов* $\mathbf{L}$. Значит, $\mathbf{L} = \mathcal{C}^{op}$.

Если A – объект категории $\mathcal{C}$, то объект двойственной категории $\mathbf{L}$ обозначим как ℓA. Таким образом, объект ℓA, именуемый *локусом*, сопоставлен C^∞-кольцу $A = C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})/I$. Вводим следующее обозначение: $\ell A = \ell C^\infty(\mathrm{I\!R}^{\mathrm{n}})/I$.

Также вместо категорий замкнутых и germ-определённых колец вводятся двойственные к ним категории, обозначаемые $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ соответственно. Для них верно следующее включение:

$$\mathbf{G} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{L}.$$

Отрицательным фактом является то, что $\mathbf{G}, \mathbf{F}, \mathbf{L}$ не имеют всех объектов степени, т.е. объектов вида $\ell A^{\ell B}$. Однако существуют погружения, которые называют *вложением Ионеды*,

$$y : \mathbf{L} \to \mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}},$$

$$y : \mathbf{G} \to \mathcal{G} = \mathbf{Sets}^{\mathbf{G}^{\mathrm{op}}},$$

$$y : \mathbf{F} \to \mathcal{F} = \mathbf{Sets}^{\mathbf{F}^{\mathrm{op}}}$$

в категории, являющиеся **топосами**.

Вложение Ионеды сопоставляет каждому объекту ℓA категории $\mathbf{L}$ *hom*-функтор $Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell A)$, т.е.

$$y(\ell A) = Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell A).$$

Соответственно, для $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ имеем:

$$y(\ell A) = Hom_{\mathbf{G}}(-, \ell A) \quad \text{и} \quad y(\ell A) = Hom_{\mathbf{F}}(-, \ell A).$$

Для любого объекта lB из категории $\mathbf{G}$

$$Hom_{\mathbf{G}}(\ell B, \ell A) \subset Hom_{\mathbf{F}}(\ell B, \ell A) \subset Hom_{\mathbf{L}}(\ell B, \ell A),$$

поэтому будем рассматривать только топос $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}}$, так как все полученные нами положительные результаты будут автоматически переноситься на $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$.

Таким образом, роль кольца R в модели $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}}$ будет играть *hom*-функтор $Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell C^{\infty}(\mathbb{R}))$. Нетрудно проверить, что это кольцо не локальное (см. [262]).

Однако ограничение этого *hom*-функтора на категориях $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ дает нам кольца, удовлетворяющие аксиоме локальности.

A.6.3. Объекты топоса $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}}$

Рассмотрим еще некоторые основные объекты, понятия и факты гладкого анализа в модели $\mathbf{Sets}^{\mathbf{L}^{\mathrm{op}}}$.

Гладкая прямая или гладкие вещественные числа:

$$R = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}),$$

а также

$$R^n = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}^n).$$

Точка[10]:

$$\mathbf{1} = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})/(x).$$

Инфинитозималы 1-го порядка:

$$D = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})/(x^2) = \{x \in R : x^2 = 0\}.$$

Инфинитозималы:

$$\Delta\!\!\!\Delta = \ell C^{\infty}(\mathbb{R})/(m^g_{\{0\}}),$$

где $m^g_{\{0\}}$ – идеал функций, имеющих нулевой росток в 0.

Тогда, положив $\ell A = \ell C^{\infty}(\mathbb{R}^n)/I$, получим:

1) инфинитозималом 1-го порядка d (элемент из D) в стадии ℓA называется класс $d(a)\mathrm{mod}\ I$, такой, что $d^2 \in I$, где $d \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$;

2) инфинитозималом k-го порядка δ (элемент из D_k) в стадии ℓA называется класс $\delta(a)\mathrm{mod}\ I$, такой, что $\delta^{k+1} \in I$, где $\delta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$;

3) инфинитозималом δ (т.е. элементом $\Delta\!\!\!\Delta$) в стадии ℓA называется класс $\delta(a)\mathrm{mod}\ I$, такой, что для каждого $\varphi \in m^g_{\{0\}} \subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$, $\varphi \circ \delta \in I$;

---

[10]Через $(f_1, ..., f_k)$ обозначается идеал кольца $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, порождённый функциями $f_1, ..., f_k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, т.е. имеющий вид $\sum_{i=1}^{k} g_i f_i$, где $g_1, ..., g_k \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ – произвольные гладкие функции.

4) действительным числом x (элементом R) в стадии ℓA называется класс эквивалентности $x(a)\mathrm{mod}\ I$, где $x \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\quad a \in \mathbb{R}^n$;

5) положительным числом p в стадии ℓA называется класс $p(a)\mathrm{mod}\ I$, такой, что для некоторого $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\quad g(a) \cdot \chi_{>0}(p(a)) - 1 \in I$. (Здесь $\chi_{>0}$ – характеристическая функция для $\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$);

6) функцией $f : R \longrightarrow R$ в стадии ℓA называется класс $F(x,a)\mathrm{mod}\ \pi^*(I)$, где $F \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ и π – проекция $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^n$, $\pi^*(I)$ – идеал, порождённый $\{g \circ \pi \mid g \in I\}$.

Следовательно, функция $f(x) \in R^R$ представляется при интепретации функцией $F(-,a) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, гладко зависящей от параметра $a \in \mathbb{R}^n$;

7) функция $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow R$ в стадии ℓA — это класс $F(x,a)\mathrm{mod}\ (\mathrm{m}^\infty_{[\alpha,\beta]}, I)$, где $\mathrm{m}^\infty_{[\alpha,\beta]} = \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g(x) = 0,\ x \in [\alpha, \beta]\}$;

8) значением функции $f \in R^R$ в числе $x \in R$ в стадии ℓA называется класс $F(x(a),a)\mathrm{mod}\ I$, где $F(x,a)\mathrm{mod}\ \pi^*(I)$ – интерпретация функции f и $x(a)\mathrm{mod}\ I$ – интерпретация числа x;

9) производной функции $f : R \to R$ в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ называется класс

$$\frac{\partial F(x,a)}{\partial x}\mathrm{mod}\ \pi^*(I),$$

где $F(x,a)\mathrm{mod}\ \pi^*(I)$ – интерпретация функции f [262, p.82].

Таким образом, равенство

$$f(x+d) = f(x) + f'(x)d$$

в классической интепретации в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ имеет вид

$$F(x(a) + d(a), a) = [F(x(a), a) +$$

$$+\frac{\partial F(x(a),a)}{\partial x} d(a) + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 F(x(a),a)}{\partial x^2} d^2(a) + ...\Big]\ mod\ I =$$

$$= \left[F(x(a), a) + \frac{\partial F(x(a), a)}{\partial x} d(a) \right] mod\ I.$$

Здесь мы учли, что $d \in D$ представляется функцией $d(a)$, такой, что $d^2(a) \in I$ и пункт 8);

10) определенным интегралом функции $f : [\alpha, \beta] \to R$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ в стадии $\ell A = \ell C^\infty(\mathbb{R}^n)/I$ называется класс

$$\int\limits_\alpha^\beta F(x, a)\, dx \ \mathrm{mod}\ (\mathrm{m}^\infty_{[\alpha,\beta]}, I),$$

где $F(x, a)\mathrm{mod}\ (\mathrm{m}^\infty_{[\alpha,\beta]}, I(a))$ – интерпретация функции f.

Тогда легко заметить, что если $f, g : R \to R$, удовлетворяют свойству $f' = g$, то

$$f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)\, ds.$$

11) Нулевой элемент кольца в стадии ℓA — это $0 \ \mathrm{mod}\ I$, а единица кольца в стадии ℓA — это $1 \ \mathrm{mod}\ I$.

12) Функции e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ — это константы объекта R^R $\big($а точнее, $Hom_{\mathbf{L}}(-, \ell C^\infty(\mathbb{R})^{\ell C^\infty(\mathbb{R})}) \simeq Hom_{\mathbf{L}}(- \times \ell C^\infty(\mathbb{R}), \ell C^\infty(\mathbb{R}))\big)$, поэтому на стадии ℓA они интерпретируются следующим образом:

$$e^x \equiv e^x \mathrm{mod}\ \pi^*(I),$$

$$\sin(x) \equiv \sin(x)\mathrm{mod}\ \pi^*(I),$$

$$\cos(x) \equiv \cos(x)\mathrm{mod}\ \pi^*(I).$$

Верны формулы

$$\exp(x) > 0, \quad \exp' = \exp, \quad \exp(0) = 1.$$

Заключение

> Материю каждый видит перед собой, содержание находит лишь тот, кто имеет какое-нибудь дело до него, а форма является тайной для большинства.
>
> Гёте, [28, с.155]

Какое бы описание физической Реальности Вы не нашли бы в книгах, всегда у современного физика возникает чувство неудовлетворённости прочитанным. Человек нашей исторической эпохи весьма образован; Внешний Мир, который ему доступен, наполнен множеством *различных* вещей. Пытаясь понять их различие, исследователь выпускает на волю данный человеку изначально дух противоречия. Дух противоречия не даёт уму согласиться с чем-либо без тени сомнения.

Люди каждой исторической эпохи представляют Внешний Мир по-своему, и довольны этим представлением далеко не все и не всегда.

Будь все исторические эпохи подобными друг другу, то не было бы динамически развивающихся исторических последовательностей. И чем больше различных исторических эпох, тем больше различных исторических последовательностей, т.е. параллельных вселенных-реальностей. Различие исторических эпох обуславливает многовариантность Реальности, множественность миров-вселенных в едином Внешнем Мире.

Человек, сознание, устранены из классической физики. Поэтому Не́что, оставшись в одиночестве, *отвердевает*[11], становясь *материей*, из которой создан Внешний Мир, существуя в нём, не нуждаясь в существовании духа-сознания.

Возвращение сознания в физику началось с момента осмысления суждений, выявленных в квантовой механике. *Нетвёрдость* духа-сознания заставляет усомниться в твёрдости материи. Но в таком случае в чём различие между тем, из чего «сделана» материя, и тем, из чего «сделано» сознание? Между явью и сном?

Человеческое сознание, точнее, множество индивидуальных сознаний, осознавая комфортность Внешнего Мира, меняют его содержание. И это происходит не только посредством материальной деятельности человечества, но и посредством квантовой корреляции составляющих Внешний Мир подсистем, одна их которых – идеи-фантазии людей, а другая – материальная Природа.

Но можно пытаться изменять и форму Внешнего Мира. И в той исторической эпохе, где раскрыли её тайну, люди расселяются по всей Вселенной и совершают путешествия во времени, как в Прошлое, так и в Будущее, как во сне, так и наяву.

[11] Стена тверда, через неё не пройдешь, трамвай твёрд, не отступишь – зарежет, и т.д. И это всё собрано из атомов, которые так далеки друг от друга, что фактически и стена, и трамвай суть пустота.

Окончен праздник. В этом представленье
Актерами, сказал я, были духи.
И в воздухе, и в воздухе прозрачном,
Свершив свой труд, растаяли они. –
Вот так, подобно призракам без плоти,
Когда-нибудь растают, словно дым,
И тучами увенчанные горы,
И горделивые дворцы и храмы,
И даже весь – о да, весь шар земной.
И как от этих бестелесных масок,
От них не сохранится и следа.
Мы созданы из вещества того же,
Что наши сны. И сном окружена
Вся наша маленькая жизнь.

У. Шекспир «Буря»

Литература

[1] Александров А.Д. Замечание о правилах коммутации и уравнении Шредингера // Доклады АН СССР. 1934. Т.4, № 4. С.198-202.

[2] Александров А.Д. О парадоксе Эйнштейна в квантовой механике // Доклады АН СССР. 1952. Т.84, № 2. С.253-256.

[3] Александров А.Д. О смысле волновой функции // Доклады АН СССР. 1952. Т.85, №2. С.291-294.

[4] Александров А.Д. Связь и причинность в квантовой области / В кн.: Современный детерминизм. Законы природы. М.: Мысль, 1973. С.335-363.

[5] Алиев Б.Г., Владимиров Ю.С. Уравнения Эйнштейна как кинематически инвариантные уравнения геодезических в суперпространстве. Препринт ИТФ-74-7. – Киев: изд-во ИТФ, 1974.

[6] Андреева О. Несколько слов на языке Вселенной // Русский репортер. 2010. Апрель 8-15.

[7] Арновитт Р., Дизер С., Мизнер К.В. Динамика общей теории относительности // Эйнштейновский сборник. 1967. – М.: Наука, 1976. С.233-286.

[8] Бартини Р.О. Некоторые соотношения между физическими константами // Доклады АН СССР. 1965. Т.163, №4. С.861-864. – Режим доступа: URL: http://www.univer.omsk.su/omsk/Sci/Bartini/s2.htm.

[9] Бартини Р.О. Статьи по физике и философии / Составитель А.Н. Маслов. – М.: «Самообразование», 2009. – 224 с.

[10] Бейтсон Г. Разум и природа. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

[11] Бёрке У. Пространство-время, геометрия, космология. – М.: Мир, 1985.

[12] Бим Дж., Эрлих П. Глобальная лоренцева геометрия. – М.: Мир, 1985.

[13] Борисов Ю.Ф. Экспериментальное обоснование теории относительности, идеализм, позитивизм и материализм // Математические структуры и моделирование. 2012. Вып.25. С.63-65.

[14] Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. – М.: Наука, 1980.

[15] Бриль Д., Уилер Дж. Новейшие проблемы гравитации. – М.: ИЛ, 1961.

[16] Вернадский В.И.. Научная мысль как планетное явление. М.: Наука. 1991.

[17] Витгенштейн Л. Логико-философский трактат / Сб.: Философские работы. Часть 1.– М.: Гнозис, 1994.

[18] Владимиров Ю.С. Системы отсчета в теории гравитации. – М.: Энергоиздат, 1982.

[19] Владимиров Ю.С. Размерность физического пространства-времени и объединение взаимодействий. – М.: МГУ, 1987.

[20] Вейль Г. Относительность / Эйнштейновский сборник. 1978–1979. – М.: Наука, 1983. – 390 с. – С.92-108.

[21] Власов Ю.П. Применение канонического формализма Арновита-Дезера-Мизнера к точным волновым решениям А. Переса, препринт ин-та теор. физики АН УССР, ИТФ-71-48Р. Киев, 1971.

[22] Воробьев О.Ю. Эвентология. – Красноярск: Изд-во СФУ, 2007.

[23] Гайденко П.П. Проблема времени у Канта: время как априорная форма чувственности и вневременность вещей в себе.
URL: http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/gaidenko_problema.htm

[24] Гаухман М.Х. Алгебра сигнатур. – М., 2004. – 816 с.

[25] Гейзенберг В. Избранные философские работы. – СПб.: Наука, 2006.

[26] Гейтинг А. Интуиционизм. – М.: Мир, 1965.

[27] Гёте И.-В. Избранные философские произведения. – М.: Наука, 1964.

[28] Гёте И.-В. Избранные сочинения по естествознанию. – М.: Изд-во АН СССР, 1957.

[29] Гололобова А.С., Кречет В.Г., Лапчинский В.Г. Теория относительности и гравитация. – М.: Наука, 1976.

[30] Гольдблатт Р. Топосы. – М.: Мир, 1983.

[31] Грин Б. Ткань космоса. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

[32] Гуссерль Э. Феноменология внутреннего сознания времени / Собрание сочинений. Т. 1. М.: «Гнозис», 1994.

[33] Гуц А.К. О гравитационном аналоге эффекта Зеемана // Известия вузов. Физика. 1973. №9. С.30-33.

[34] Гуц А.К. О времениподобных замкнутых гладких кривых в общей теории относительности // Известия вузов. Физика. 1973. №9. С.33-36.

[35] Гуц А.К. К проблеме определения гравитационно-инерциального излучения / Ред. журн. «Известия вузов. Физика». Томск, 1974. Деп. в ВИНИТИ Рег. №3225-74.

[36] Гуц А.К. О внешнем скалярном поле черной дыры в тетрадной теории гравитации // Материалы третьей отчетной научно-практической конференции Омского университета. Омск: ОмГУ, 1977. С.60-61.

[37] Гуц А.К. Новое решение уравнений Эйнштейна-Дирака // Известия вузов. Физика. 1979. №8. С.91-95.

[38] Гуц А.К. Замечание к проблеме Гельмгольца-Ли // Докл. АН СССР. 1979. Т.249, №4. С.780-783.

[39] Гуц А.К. Топологическая структура вселенной Геделя // Известия вузов. Физика. 1980. №6. С.109-110.

[40] Гуц А.К. Характеризация элементарных двумерных геометрий // Сиб. мат. ж. 1981. Т.22, №6. С.54-64.

[41] Гуц А.К. Изменение топологии физического пространства в замкнутой вселенной // Известия вузов. Физика. 1982. №5. С. 23-26.

[42] Гуц А.К. Космический корабль, разрушающий пространство? // Техника молодежи. 1983. №11. С.14-16.

[43] Гуц А.К. Нарушение связности физического пространства // Известия вузов. Физика. 1983. № 8. С. 3-6.

[44] Гуц А.К. Взаимодействие плоской гравитационной волны со скалярным полем // Известия вузов. Физика. 1983. № 1. С.46-49.

[45] Гуц А.К. Восстановление симметрий пространства при топологических перестройках // Тезисы докладов 6 Советской гравитационной конференции. М.: Из-во УДН им.П.Лумумбы, 1984. С.87-88.

[46] Гуц А.К., Фишкина Г.Б. Динамика симметрий физического пространства и теория эквивариантных бордизмов // Известия вузов. Физика. 1988. № 10. С.76-79.

[47] Гуц А.К. Хроногеометрия и экзотические $\mathbb{R}^4$ // Всесоюзная конференция по геометрии «в целом». Тезисы докладов. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1987. С.36.

[48] Гуц А.К. Экзотические $\mathbb{R}^4$ в теории гравитации / Сб.: Гравитация и фундаментальные взаимодействия. – М.: Из-во УДН им. П.Лумумбы, 1988. С.64-65.

[49] Гуц А.К. Теоретико-топосный подход к основаниям теории относительности // Докл. АН СССР. 1991. Т.318, № 6. С.1294-1297.

[50] Гуц А.К. Экзотические перемещения в пространстве-времени // Лобачевский и современная геометрия / Международная конференция к 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского. Тезисы докладов. – Казань, КГУ, 1992. Ч.2. С.23-24.

[51] Гуц А.К. Машина времени, кротовые норы и экзотические гладкие структуры. – Деп. в ВИНИТИ (1992), № 2267-В92. – 39 с.

[52] Гуц А.К. Уравнение скалярного поля в тетрадной теории гравитации // Ученый совет мат. фак. ОмГУ. – Деп. в ВИНИТИ 02.12.92, №3426-В92. 12 с.

[53] Guts A.K. The process of creation of wormholes in space-time // Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации. Тезисы докладов. 8-я Российская гравитационная конференция. Москва: РГА. 1993. С.168.

[54] Гуц А.К., Демидов В.В. Пространство-время как топос Гротендика // 8-я Российская гравитационная конференция. Тезисы докладов. Москва: РГА. 1993. С.40.

[55] Гуц А.К. Многомерная гравитация и класс Годбийона - Вея // Международная школа-семинар «Многомерная гравитация и космология». Тезисы докладов. Ярославль: ЯГПУ. 1994. С.13.

[56] Гуц А.К. Многомерная гравитация и машина времени // Известия вузов. Физика. 1996. №2. С.14-19.

[57] Гуц А.К. Машина времени как результат свертывания пространства-времени в пружину // Теоретические и экспериментальные проблемы гравитации. Тезисы докладов 9-й Российской гравитационной конференции. Часть I. Новгород, 24-30 июня 1996 г. М., 1996.

[58] Гуц А.К. Локальная проблема Гельмгольца-Ли // Математические структуры и моделирование. 1998. Вып.2. С.30-33.

[59] Гуц А.К., Звягинцев А.А. Интуиционистская логика и сигнатура пространства-времени // Логика и приложения. Международ. конференция, посвящ. 60-летию Ю.Л. Ершова. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т дискрет. мат-ки и информатики, 2000. С.38-39.

[60] Гуц А.К. Многозначная логика и многовариантный мир // Логика и приложения. Международ. конференция, посвящ. 60-летию Ю.Л.Ершова. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т дискрет. мат-ки и информатики, 2000. С.36-37.

[61] Гуц А.К., Лаптев А.А., Коробицын В.В., Паутова Л.А., Фролова Ю.В. Математические модели социальных систем: Учебное пособие. – Омск: ОмГУ, 2000. – 256 с.

[62] Гуц А.К. Многовариантная история России. – М./СПб.: АСТ/Полигон, 2001.

[63] Гуц А.К. Стохастические свойства времени и пространства // Математические структуры и моделирование. 2001. Вып.7. С.94-103.

[64] Гуц А.К., Добренко М.А. Первичные структуры отношений Кулакова в микроэкономике // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып.11. С.88-96.

[65] Гуц А.К., Добренко М.А. Макроэкономические первичные структуры отношений Кулакова // Математические структуры и моделирование. 2003. Вып.12. С.130-133.

[66] Гуц А.К. Элементы теории времени. – Омск: Издательство Наследие. Диалог-Сибирь, 2004. – 364 с.

[67] Гуц А.К., Ёлкина О.С. Описание равновесий на рынке труда с помощью структур Кулакова-Михайличенко // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып.15. С.112-115.

[68] Гуц А.К., Палешева Е.В. Машина времени, разрывы пространства и 4-мерные кротовые норы // Вестник Красноярского государственного университета. 2005. №.7. С.138-142.

[69] Гуц А.К. Уравнения для физических полей и времени в мультиверсе // Математические структуры и моделирование. 2006. Вып.16. С.51-55.

[70] Гуц А.К. Квантовое рождение физической реальности и математическое описание осознания // Математические структуры и моделирование. 2007. Вып.17. С.47-52.

[71] Гуц А.К. Хроногеометрия. – Омск: ООО «УниПак», 2008. 340 с.

[72] Гуц А.К. Основы квантовой кибернетики. – Омск: Полиграфический центр КАН, 2008. – 204 с.

[73] Гуц А.К. Формулы типа Гаусса-Бонне-Черна для псевдоримановых и римановых многообразий и формула Хирцебруха // Математические структуры и моделирование. 2009. Вып.20. С.12-26.

[74] Гуц А.К. Способ расчета скачков энергии при изменении размерности пространства и времени // Математические структуры и моделирование. 2009. Вып.19. С.78-84.

[75] Гуц А.К. Логика, мультиверс и антигравитация // Сб. тезисов Международной конференции «Современные проблемы гравитации, космологии и релятивистской астрофизики RUDN-10». – М.: РУДН, 2010. – С.70-71.

[76] Гуц А.К. Сто лет абсолютного Мира событий Минковского / Поиск математических закономерностей мироздания. Физические идеи, подходы, концепции / (под. ред. М. М. Лаврентьева, В. Н. Самойлова. – Новосибирск: Академическое изд-во «Гео», 2010. (Избранные труды VII Сибирской междисциплинарной конференции по математическим проблемам физики пространства-времени сложных систем, посвященной 100-летию доклада Г. Минковского «Пространство и время» (ФПВ-2008), Новосибирск, 21-24 сентября 2008 г.; вып.7). С.13-45.

[77] Гуц А.К. Элементы теории времени. – М.: Издательство ЛКИ, 2011. – 376 с.

[78] Гуц А.К. Метафизика времени и эвентология // Тр. X Международной конференции по финансово-актуарной математике и эвентоконвергенции технологий. Красноярск: КГТЭИ/СФУ, 2011. С.121-126.

[79] Гуц А.К. Метафизика времени и реальности / Сб.: «Метафизика. Век XXI». Вып.4. – М.: Изд-во «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2011. – С.255-274.

[80] Гуц А.К. Многовариантная Вселенная и теория исторических последовательностей // Математические структуры и моделирование. 2012. Вып.25. С.70-80.

[81] Гуц А.К. Антигравитация в классической и интуиционистской теориях гравитации // Вестник Омского университета. 2012. № 2. С.83-87.

[82] Гуц А.К. Аксиоматики А.Д.Александрова для квантовой механики и теории относительности // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: математика, механика, информатика. 2012. Т.12, Вып.3. С.19-30.

[83] Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. – М.: ИЛ, 1956.

[84] Дойч Д. Структура реальности. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

[85] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Современная геометрия. – М.: Наука, 1979.

[86] Еганова И.А. Аналитический обзор идей и экспериментов современной хроногеометрии // Деп. в ВИНИТИ. 1984. № 6423-84.

[87] Еганова И.А. Природа пространства-времени. – Новосибирск: Изд-во СО РАН. Филиал «ГЕО», 2005. – 272 с.

[88] Егоров А.Д., Егоров И.Д. Феномен возникновения. От реальности к смыслу. – М.: Изд-во физ.-мат. лит-ры, 2009.

[89] Иваницкая О.Г. Обобщенные преобразования Лоренца и их применения. – Минск: «Наука и техника», 1969.

[90] Инфельд Л., Плебаньский Е. Движение и релятивизм. – М.: ИЛ, 1962.

[91] Иосифьян А.Г. Вопросы единой теории электромагнитного и гравитационно-инерциальных полей. – Ереван, 1959.

[92] Захаров В.Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. – М.: Наука, 1972.

[93] Зельдович Я.Б. Аналог эффекта Зеемана в гравитационном поле вращающейся звезды // Письма в ЖЭТФ. 1965. Т.1. Вып.3. С.40-43.

[94] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Теория тяготения и эволюция звезд. – М., Наука, 1971.

[95] Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Строение и эволюция вселенной. – М.: Наука, 1975.

[96] Зельманов А.Л. Хронометрические инварианты. – New Mexico: American Research Press, 2006.

[97] Жуковский В.Ч., Кревчик В.Д., Семенов М.Б., Тернов А.И. Квантовые эффекты в мезоскопических системах. Ч.I. Квантовое туннелирование с диссипацией: Учебное пособие. – М.: Физический факультет МГУ, 2002. – 108 с.

[98] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976.

[99] Кант И. Критика чистого разума. – СПб.: Изд-во «Таум-аут», 1993.

[100] Кант И. О форме и принципах чувственно воспринимаемого и умопостигаемого мира / Метафизические начала естествознания. – М.: Мысль, 1999. СПб.: Изд-во «Таум-аут», 1993.

[101] Кант И. Мысли об истинной оценке живых сил (1746 г.).

[102] Капра Ф. Паутина жизни. – К.: «София»; М.: «Гелиос», 2002. – 336 с.

[103] Кедров Б.М. Взаимосвязь форм движения материи и их классификация / Пространство, время, движение. – М.: Наука, 1971.

[104] Козырев Н.А. Астрономическое доказательство реальности четырехмерной геометрии Минковского / В кн.: Проявление космических факторов на Земле и звездах. – М.-Л., 1980. – С.85-93.

[105] Коннер П., Флойд Э. Гладкие периодические отображения. – М.: Мир, 1969.

[106] Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. – М.: Атомиздат, 1972.

[107] Костандов Э.А. Психофизиология сознания и бессознательного. – СПб.: Питер, 2004. – 167 с.

[108] Константинов М.Ю. О кинематических свойствах топологически нетривиальных моделей пространства-времени // Известия вузов. Физика. 1992. № 12. С.83-88.

[109] Кулаков Ю.И. Теория физических структур. – М., 2004. – 847 с.

[110] Кулаков Ю.И., Владимиров Ю.С., Карнаухов А.В. Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику. – М.: Архимед, 1992.

[111] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О дистанционном воздействии звезд на резистор // Докл. АН СССР. 1990. Т.314, № 2. С.352-355.

[112] Лаврентьев М.М., Еганова И.А., Луцет М.К., Фоминых С.Ф. О регистрации истинного положения Солнца // Докл. АН СССР. 1990. Т.315, № 2. С.368-370.

[113] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М., 1967.

[114] Ломоносов М.В. Полное собрание сочинений. Т.1. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1950.

[115] Лопиталь Г.Ф. Анализ бесконечно малых. – М.-Л.: ГТТИ, 1935.

[116] Лебедев Ю.А. Многоликое мироздание. Эвереттическая аксиоматика. – М.: Фирма ЛеЖе, 2009.

[117] Лебедев Ю.А. Многоликое мироздание. Эвереттическая прагматика. – М.: Фирма ЛеЖе, 2009.

[118] Левин К. Теория поля в социальных науках. – СПб.: Речь, 2000.

[119] Левич Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989.

[120] Мак Витти Дж. Общая теория относительности и космология. – М.: ИЛ, 1961.

[121] Мамардашвили М. Картезианские размышления. – М.: Культура, 1993.

[122] Мамардашвили М. Кантианские вариации. – М.: «Аграф», 2000.

[123] Меллер Дж. Законы сохранения в тетрадной теории гравитации / В сб.: Гравитация и топология. Актуальные проблемы. – М.: Мир, 1966.

[124] Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 2. – М.: Мир, 1977.

[125] Минковский Г. Пространство и время. В кн.: Принцип относительности. – М.: Атомиздат, 1979. – 332 с.

[126] Minkowski H. Die Grundlangen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // Nachr. König. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. 1907. S.53-111. Русск. перевод: Эйнштейновский сб. 1978–79. – М.: Наука, 1983. – 390 с.

[127] Минто В. Дедуктивная и индуктивная логика. – Минск: Харвест, 2002. 252 с.

[128] Мицкевич Н.В. Системы отсчета и конструктивный подход к наблюдаемым в общей теории относительности / Эйнштейновский сб. 1971. – М.: Наука, 1972. – С.67-87.

[129] Мицкевич Н.В. Физические поля в общей теории относительности. – М.: Наука, 1969.

[130] Молчанов В.И. Время и сознание. Критика феноменологической философии. – М.: Высш. шк., 1998 – 144 с. – URL:http://www.philosophy.ru/library/mol/00.html

[131] Найссер У. Познание и реальность. – М.: Прогресс, 1981.

[132] Новиков И.Д. Анализ работы машины времени // ЖЭТФ. 1989. Т.95, N.3. С.769-776.

[133] Новейшие проблемы гравитации. – М.: ИЛ, 1961.

[134] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. – М.: Наука, 1989.

[135] Осиновский М.Е. Топология вещественных групп Ли небольшой размерности. III. – Препринт ИТФ-72-149 Р.К., 1972.

[136] Палешева Е.В. Вклад спинорных духов в интерференцию квантовых частиц // Математические структуры и моделирование. 2002. Вып.9. С.142-157. – arXiv: quant-ph/0207083.

[137] Палешева Е.В. Спинорные поля с нулевым тензором энергии-импульса: Дис. на соиск. ученой степ. канд. ф.-м. наук. – Омск: ОмГУ, 2004.

[138] Палешева Е.В. Внешняя кривизна 3-мерного пространства и энергетические затраты, необходимые для образования 4-мерной кротовой норы // Математические структуры и моделирование. 2005. Вып. 15. С.89-96

[139] Патнэм Х. Разум, истина и история. – М.: Праксис, 2002. – 296 с.

[140] Пенроуз Р. Тени разума. В поисках науки о сознании. Ч.II. – Москва/Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2005. – 352 с.

[141] Пименов Р.И. Дифференциальные уравнения – насколько они оправданы? – URL: http://re-tech.narod.ru/inf/sinergy/rv.htm

[142] Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. – М.: ФМ, 1972.

[143] Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Изд.3. – М.: Наука, 1967.

[144] Родичев В.И. Теория тяготения в ортогональном репере. – М.: Наука, 1974.

[145] Романов А.Н. Лоренцева функция расстояния и причинность: Дис. на соиск. ученой степ. канд. физ.-мат. наук: – Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2002. 120 с.

[146] Рэндалл Л. Закрученные пассажи. – М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.

[147] Сбытов Ю.Г. Столкновение электромагнитной волны с гравитационным полем // ЖЭТФ. 1972. Т.63, № 3. С.737-744.

[148] Семинар Н. Бурбаки за 1989 г. – М.: Мир, 1991.

[149] Синг Дж. Общая теория относительности. – М.: ИЛ, 1963.

[150] Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.2. – М.: Наука, 1974.

[151] Сошников С.А. Отражение нейтрино от пересовской гравитационной волны. – Деп. в ВИНИТИ, № 4824-82 Деп. РЖ Физика, реф. 1Б607 (1983).

[152] Спеньер Э. Алгебраическая топология. – М.: Мир, 1971.

[153] Сусурин Г.Э., Левашев А.Е. Решение тетрадного уравнения Эйнштейна при калибровке тетрад Швингера-Родичева // Гравитация и теория относительности. Казань: Изд-во КГУ, 1968. Вып.4-5. С.129-135.

[154] Тамура И. Топология слоений. – М.: Мир, 1976.

[155] Телеман К. Элементы топологии и дифференцируемые многообразия. – М.: Мир, 1976.

[156] Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства-времени. – М.: Мир, 1969.

[157] Уилер Дж. Предвидение Эйнштейна. – М.: Мир, 1970. – 112 с.

[158] Успенский П.Д. Tertium organium / Четвертое измерение. – Мн.: Харвест, 1998. – 832 с.

[159] Флоренский П.А. Сочинения в 4 т. Т.4: Письма с Дальнего Востока и Соловков / сост. и общ. ред. игумена Андроника (А.С.Трубачева), П.В.Флоренского, М.С.Трубачевой. – М.: Мысль, 1998. – 795 с.

[160] Флоренский П.А. Иконостас. – М.: АСТ, 2001.

[161] Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. – М., 1955.

[162] Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989.

[163] Фукс Д.Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. – М., 1984.

[164] Хайдеггер М. Бытие и время. – М.: Фолио, 2003. – 510 с.

[165] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир, 1964.

[166] Хорган Дж. Конец науки. – СПб.: Амфора/Эврика, 2001.

[167] Хоукинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. – М.: Мир, 1977.

[168] Цвибах Б. Начальный курс теории струн. – М.: Едиториал УРСС, 2011.

[169] Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

[170] Эйнзерхарт Л.П. Риманова геометрия. – М.: ИЛ, 1948.

[171] Эйнштейнъ А. Эфиръ и теорія относительности / О физической природѣ пространства. – Берлинъ: СЛОВО, 1922.

[172] Энгельс Ф. Диалектика природы. – М.: Изд-во полит. лит-ру, 1969.

[173] Янчевский В.П. Гравитационные сингулярности и нарушение причинности // Изв. вузов. Физика. 1985. № 4. С.41-45.

[174] Alty L.J. The Generalised Gauss-Bonnet-Chern Theorem // J. Math. Phys. 1995. V.36. P.3094-3105.

[175] de Andrade L.C.G. Ghost neutrinos and radiative Kerr metric in Einstein-Cartan gravity. – arXiv:gr-qc/0204084v1 (2002).

[176] Aldrovandi R., Pereira J.G. An introduction to teleparallel gravity. – Instituto de Física Teórica, UNESP São Paulo, Brazil, 2007. 107 p.

[177] Anderson E. Geometrodynamics: spacetime or space? – arXiv: gr-qc/0409123v1 (2004)

[178] Asselmeyer T. Generation of Source Terms in General Relativity by differential structures. – arXiv: gr-qc/9610009.

[179] Asselmeyer-Maluga T., Krol J. Topological quantum D-branes and wild embeddings from exotic smooth R^4.
URL: http://ru.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1105/1105.1557v1.pdf

[180] Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Gravitational sources induced by exotic smoothness.
URL: http://ru.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1101/1101.3168v1.pdf

[181] Asselmeyer T. Generation of source terms in general relativity by differential structures // Class. Quant. Grav. 1996. V.14. P.749-758. URL: http://ru.arxiv.org/PS_cache/gr-qc/pdf/9610/9610009v1.pdf

[182] Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Cosmological anomalies and exotic smoothness structures. – arXiv: gr-qc/0110043 (2001).

[183] Asselmeyer-Maluga T., Brans C.H. Exotic smoothness and physics: differential topology and spacetime models. – Singapur: World Scientific Publ., 2007. – 322 p.

[184] Atkatz D. Quantum cosmology for pedestrians // Am. J. Phys. 1994. V.62. P.619-627.

[185] Atkatz D., Pagels H. Origin of the universe as a quantum tunneling event // Phys. Rev. 1982. V.D 25. P.2065-2073.

[186] Avez A. Formula de Gauss-Bonnet-Chern en métrique de signature quelconque // C.R. Acad. Sci. Paris. 1962. T.255. P.2049-2051.

[187] Barcelo C., Visser M. Traversable wormholes from massless conformally coupled scalar fields // Phys. Lett. 1999. B466. P.127-134; gr-qc/9908029.

[188] Bauer H. Mathematische Einführung in die Gravitationstheorie Einsteins. – Leiptzig, 1922.

[189] Bekenstein J. Nonexistence of Baryon Number for Static Black Holes // Phys. Rev. 1972. V.D5, N.6. P.1239-1246.

[190] Bell J.L. A Primer of Infinitesimal Analysis. – Cambridge University, 1968.

[191] Biesiada M., Rugh S.E. Maupertuis principle, Wheeler's superspace and an invariant criterion for local instability in general relativity. – arXiv: gr-qc/9408030v1 (1994).

[192] Bizaco Z., Gompf R. Elliptic surfaces and some simple exotic $\mathbb{R}^4$'s // J. Diff. Geom. 1996. V.43. P.458-504.

[193] Brans C.H. Localized Exotic Smoothness // Class. Quant. Grav. 1994. V.11. P.1785-1792. – arXiv: gr-qc/9404003 (1994).

[194] Brans C.H. Exotic Smoothness and Physics // J. Math. Phys. 1994. V.35. P.5494-5506. – arXiv: gr-qc/9405010v1 (1994).

[195] Brans C.H., Randall D. Exotic differentiable structures and general relativity // Gen. Rel. Grav. 1993. V.25. P.205.

[196] A'Campo N. Feuilletages de codimension 1 sur les varietes de dimension 5 // Comment. Math. Helv. 1973. V.47. P.54-65.

[197] Cacciafesta F. Una proprietá di bordismo dei fibrati principali // Atti Асад. Naz. Lincei. Rend. C1. Sci. Fis., Math. e. Natur. 1973. V. 54, No.5. P.750-754.

[198] Candel A., Conlon L. Foliations I / Graduate Studies in Mathematics Volume. V.23. American Mathematical Society. – Providence, Rhode Island, 2000.

[199] Candel A., Conlon L. Foliations II / Graduate Studies in Mathematics Volume. V.60. American Mathematical Society. – Providence, Rhode Island, 2003.

[200] Cantwell J., Conlon L. Leaves of Markov local minimal sets in foliations of codimension one // Publicacions Matematiques. 1989. V.33. P.461-484.

[201] Cartan E. Sur les varietes a connexion affine et la theorie de la relativite generalisee // Ann. Ec. Norm. Sup. 1923. V.40. P.325-412; 1924. V.41.

[202] Cartan E. La méthode du repere mobilé. – Paris, 1935.

[203] Chern S.S. Pseudo-Riemannian Geometry and the Gauss-Bonnet Formula // Ann. Acad. Brasil Ci. 1963. V.35. P.17-26.

[204] de Andrade L.C.G. Ghost neutrinos and radiative Kerr metric in Einstein-Cartan gravity. – arXiv:gr-qc/0204084v1 (2002).

[205] DeWitt B.S. Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory // Phys. Rev. 1967. V.160, N.5. P.1113-1148.

[206] DeWitt B.S. The many-universe interpretation of quantum mechanics // The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics / Eds. B. DeWitt, N.Graham. Princeton/New Jersey: Princeton University Press, 1973. P.167-218.

[207] Dolgov A.D. Cosmic antigravity. – arXiv: 1206.3725v1 [astro-ph.CO] 17 Jun 2012. URL: http://xxx.lanl.gov/abs/1206.3725

[208] Einstein A. Riemann-Geometrie mit Aujrechterhaltungdes Begriffes des Fernparallelismus // Sitzungsber. preuss. Akad. Wiss., phys.-math. K.1. 1928. S.217-221.

[209] Everett Hugh III. "Relative State" Formulation of Quantum Mechanics // Reviews of Modern Physics. 1957. V.29, No.3. P.454-462.

[210] Everett Hugh III. Theory of the universal wave function // The Many-Worlds Interpretation of Quantum Mechanics / Eds. B. DeWitt, N.Graham. Princeton/New Jersey: Princeton University Press, 1973. P.3-140.

[211] Freedman M.H., Taylor L.R. A universal smoothing of four-space // Journal of Differential Geometry. 1986. V.24, no.1. P.69-78.

[212] Gerlach U.H. Derivation of the Ten Einstein Field Equations from the Semiclassical Approximation to Quantum Geometrodynamics // Phys. Rev. 1969. V.177, No.5. P.1929-1941.

[213] Gödel K. An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equtions of Gravitation // Rev. Mod. Phys. 1949. V.21, no.3. P.447-450.

[214] Gompf R., Stipsicz A. 4-manifolds and Kirby Calculus / Graduate Studies in Mathematics. Vol.20. American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 1999.

[215] Griffits J.B. Colliding plane waves in general relativity. – Oxford Univ. Press, 1991.

[216] Guts A.K. Time Machine as 4-Wormhole in the spring space-time // 14 Internat. Grav. Conference. Workshop A.3. Mathematical Studies of Relativistic Field Equations, 6-12, August 1995, Florence, Italy. 1995. A.106-A.107.

[217] Guts A.K. The mean number of 4-wormholes in the universe // 14 Internat.Grav. Conference, Workshop B.4. Theoretically and Mathematically Oriented Cosmology, 6-12, August 1995, Florence, Italy. 1995. B.77-B.78.

[218] Guts A.K., Grinkevich E.B. Toposes in General Theory of Relativity. Preprint gr-qc/9610073. – URL: http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9610073

[219] Guts A.K. Time machine as four-dimensional wormhole. – arXiv: gr-qc/9612064. – URL: http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9612064

[220] Guts A.K. Final stage of evolution of geometry and topology of space-time // Abstracts of AMS. 1997. V.18, no.3. (924-51-77).

[221] Guts A.K. Restoration of the Past and three Principle of Time. – arXiv: physics/9705014. – URL: http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9705014.

[222] Guts A.K., Zvjagintsev A.A. Solution of the vacuum Einstein equations in Synthetic Differential Geometry of Kock-Lawvere. – arXiv: physics/9909016.

[223] Guts A.K., Zvjagintsev A.A. Interpretation of intuitionistic solution of the vacuum Einstein equations in smooth topos. – arXiv: gr-qc/0001076

[224] Guts A.K., Zvyagintsev A.A. Interpretation of intuitionistic solution of the vacuum Einstein equations in smooth topos. – arXiv: gr-qc/0001076.

[225] Guts A.K. The Relation of Uncertainty for Radius of the Universe // Spacetime & Substance. 2000. V.1, N.4(4). P.163-164. (Ukraine, KhNU).

[226] Guts A.K., Shapovalova M.S. Large fluctuations of time and change of space-time signature. – arXiv: gr-qc/0012106v1 (2000). – URL: http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/0012106v1s.

[227] Guts A.K. The Deutsch theory of the Multiverse and physical constants // Gravitation & Cosmology. 2003. V.9, №.1 (33). P.33-36.

[228] Halliwell J.J. Correlations in the wave function of the universe // Phys. Rev. 1987. V.D 36. P.3626-3640.

[229] Halliwell J.J. Introductiry lectures on quantum cosmology // In: Quantum cosmology and baby universes / Eds. S. Coleman, J.B. Hartle, T. Piian and S. Weinberg. – World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1991. P.159-244.

[230] Haefliger A. Feuilletages sur les varietes ouvertes // Topology. 1970. V.9, no.2. P.183-194.

[231] Heithecher J. Äquivarianter Bordismus mit Vektorfeld // Math. Ann. 1978. B.234. S.1-8.

[232] Hicks N.J. Notes of Differential Geometry. – M.: Мир, 1982.

[233] Hochberg D., Visser M. General dynamic wormholes and violation of the null energy condition. – arXiv: gr-qc/9901020.

[234] Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Göttinger Nachr. 1915. S.395.

[235] Hilbert D. // Göttinger Nachr. Math. Phys. Kl. 1917. S.53.

[236] Hilbert D. Die Grundlagen der Physik // Math. Annalen. 1924. B.92. S.1-32.

[237] Hilbert D. Gesammelte Abhandlungen. – Berlin: Dritter Band (Verlag von J. Springer), 1935. – P.258.

[238] Hurder S. Exceptional minimal sets and the Godbillon-Vey class // Ann. Inst. Fourier, to appear.

[239] Hurder S. Foliation geometry/topology problem set [Электронный ресурс]. URL: http://homepages.math.uic.edu/~hurder/

[240] Inaba T. Resilient leaves in transversaly affine foliations // Tôhoku Math. J. 1989. V.41. P.625-631.

[241] Jaco, W., Shalen, P. Seifert fibred spaces in 3-manifolds // Mem. Amer. Math. Soc. 1979. No.220. 192 p.

[242] Kamenshchik A.Y., Kiefer C., Sandhöfer B. Quantum cosmology with big-brake singularity. – arXiv: gr-qc/0705.1688v2.

[243] Kiefer C. Quantum geometrodynamics: whence, whither? // Gen. Relativ. Gravit. 2009. V.41. P.877-901.

[244] Kiefer C., Sandhöfer B. Quantum Cosmology. – arXiv: 0804.0672v2.

[245] Kanti P., Kleihaus B., Kunz J. Stable Lorentzian wormholes in dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet theory // Phys. Rev. 2012. D85. P.044007.

[246] Kanti P., Kleihaus B., Kunz J. Wormholes in Dilatonic Einstein-Gauss-Bonnet Theory. – arXiv: gr-qc/1108.3003v2 (2012).

[247] Kao W.F., Chiao Tung. A note on 4-dimensional traversable wormholes and energy conditions in higher dimensions. – arXiv: gr-qc/0306004v1.

[248] Katsube Y. Principal oriented bordism modules of finite subgroups of S^3 // Hiroshima Math. J. 1977. V.7. no.1. P.71-91.

[249] Kim J.H. Homothetic maps of distinguishing space-times // Bull. Austral. Math. Soc. 1990. V.42. P.483-486.

[250] Kock A. Synthetic Differential Geometry. – Cambridge University Press, 1981.

[251] Kock A. Geometric construction of the Levi-Civita parallelism // Theory and Applications of Categories. 1998. V.4, No.9. P.195Ц207.

[252] Kock A. A geometric theory of harmonic and semi-conformal maps [Электронный ресурс]. – arXiv:math/0306203v1 [math.DG] 12 Jun 2003
URL: http://ru.arxiv.org/PS_cache/math/pdf/0306/0306203v1.pdf.

[253] Kosniowski C., Ossa E. The Structure of the Bordism Module of Oriented Involutions // Proc. London Math. Soc. 1982. V.44. P.267-290.

[254] Laat T. Synthetic Differential Geometry. An application to Einstein's Equivalence Principle. Bachelor thesis for Mathematis and Physics & Astronomy. – Radboud University Nijmegen, 2008. – 40 p.

[255] Lavendhomme R. Basic Concepts of Synthetic Differential Geometry. – Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996. 320 p.

[256] Lawson H.J.-Jr. Foliation // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1974. V.80, No.3. P.369-418.

[257] Loinger A., Marsico T. On Hilbert's gravitational repulsoin (a historical note). – arXiv: gen-ph/0904.1578v1 (2009).

[258] Malament D.B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime // J. Math. Phys. 1977. V.18, No.7. P.1399-1404.

[259] Milnor J. On simply connected 4-manifolds / In "Symposium International de Topologia Algebraira" (Univ. Nac. Autonoma de Mexico and UNESCO, Mexico City), 1958. P.122-128.

[260] Moller C. Further remarks on the localization of the energy in the general theory of relativity // Ann. of Phys. 1961. V.12. P.118-133.

[261] Moller C. On the crisis in the theory of gravitation and a possible solution // Mat.-Fys. Medd., K. Dan. Vidensk. Selsk. 1978. V.39, No.13, 31 p.

[262] Moerdijk I., Reyes G.E. Models for Smooth Infinitesimal Analysis. – Springer-Verlag, 1991.

[263] Moerdijk I., Reyes G.E. Spaces Versus Continuous Spaces In Models For Synthetic Differential Geometry // Journal of Pure and Applied Algebra. 1984. V.32. P.143-176.

[264] Morris M.S., Thorne K.S., Yurtsever U. Wormholes, Time machines, and the Weak Energy Condition // Phys. Rev. Lett. 1988. V.61, no. 13. P.1446-1449.

[265] Morris M.S., Thorne K.S. Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool teaching general relativity // Am. J. Phys. 1988. V.56, N.5. P.395-412.

[266] Morita S. Geometry of Characteristic Classes / Translations of Math. Monographs. V.199. – AMS, 2001.

[267] Nashed G.G.L. Vacuum Non Singular Black Hole in Tetrad Theory of Gravitation [Электронный ресурс]. – URL: http://arxiv4.library.cornell.edu/PS_cache/gr-qc/pdf/0109/0109017v1.pdf

[268] Nashed G.G.L. Energy Momentum Complex // Brazilian Journal of Physics. 2010. V.40, no.3. P.315-318.

[269] Orlik P. Seifert Manifolds // Lectures Notes in Math. 1972. N.291.

[270] Osinovski M.E. Highly mobile Einstein spaces in the large // Commun. Math. Phys. 1973. V.32. P.39-50.

[271] Panov V.F. Interaction of plane electromagnetic-gravitational waves // Sov. Phys. J. 1979. P.1303-1307. (Izv. VUZ. Fiz. 1978, no.10. P.65-70).

[272] Panov V.F. Collision of plane electromagnetic-gravitational waves // Sov. Phys. J. 1979. P.532-536. (Izv. VUZ. Fiz. 1979. no.5. P.91-96).

[273] Panov V.F. Interaction of plane gravitational waves with variable polarization // Sov. Phys. J. 1980. P.989-993. (Izv. VUZ. Fiz. 1979. no.9. P.79-84).

[274] Pelletier, F. Quelques proprietes géométriques des variétés pseudo-riemanniennes singuliéres // Annales de la faculé des sciences de Toulouse 6^{e} série. 1995. T.4, no.1. P.87-199.

[275] Pellegrini C., Plebanski J. Tetrad fields and gravitational fields // Mat.-Fys. Skr., Danske Vid. Selsk. 1963. V.2, No.4, 39 p.

[276] Petkov V. Inertia as a Manifestation of the Reality of Spacetime / In: Relativity and the Nature of Spacetime. – Berlin-Heidelberg: Springer Publ., 2005. – 305 p.

[277] Reventos A. On the Gauss-Bonnet formula on the odd-dimensional manifolds // Tohoku Math. J. 1979. V.31, no.2. P.165-178.

[278] Rovelli C. Quantum gravity. – Cambridge univ. press, 2004.

[279] Schlosshauer M. Experimental motivation and empirical consistency in minimal no-collapse quantum mechanics // Ann. Phys. (N.Y.). 2006. N.321. P.112-149. – arXiv: quant-ph/0506199 (2005).

[280] Sharif M., Bushra Majeed. Teleparallel Killing Vectors of Spherically Symmetric Spacetimes // Commun. Theor. Phys. (Beijing, China). 2009. V.52. P.435-440.

[281] Schweitzer P.A. Codimension one foliations without compact leaves // Comment. Math. Helv. 1995. V.70, No.2. P.171-209.

[282] Seifert H. Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume // Acta Math. 1933. V.60. P.147-238.

[283] Sladkowski J. Strongly gravitating empty spaces [Electronic Resourse]. arXiv: gr-qc/9906037.

[284] Sladkowski J. Exotic Smoothness and Astrophysics [Electronic Resourse]. arXiv: 0910.2828v1 [astro-ph.CO]. – URL: http://arxiv.org/abs/0910.2828v1.

[285] Sladkowski J.S. Gravity on exotic $\mathbb{R}^4$ with few symmetries // Int.J. Mod. Phys. 2001. D. V.10. P.311-313.

[286] Stong R.E. Free S^1 actions // Math. Ann. 1977. V.226, no.2. P.151-153..

[287] Swinburne R. Space and time. – London and Basingstoke: The MacMillan Press, 1981.

[288] Szekeres P. Colliding gravitational waves // Nature. 1970. no. 228. P.1183-1184.

[289] Talmadge D., Ray J. Ghost neutrinos in general relativity // Phys. Rev. 1974. V.D9, no.2. P.331-333.

[290] Talmadge D., Ray J. Ghost neutrinos in plane-symmetric spacetimes // J. Math. Phys. 1975. V.16, no.1. P.75-79.

[291] Talmadge D., Ray J. Neutrinos in cylindrically-symmetric spacetimes // J. Math. Phys. 1975. V.16. P.80.

[292] Tanno S. A formula on some odd-dimensional Riemannian manifolds related to the Gauss-Bonnet formula // J. Math. Soc. Japan. 1972. V.24, No. 2. P.204-212.

[293] Taylor R.L. Smooth Euclidean 4-spaces with few symmetries // Geometry & Topology Monographs. Volume 2: Proceedings of the Kirbyfest. 1999. P.563-569. – arXiv: math.QT/9807143

[294] Teitelboim C. Nonmeasurability of the Baryon Number of a Black-Hole // Lett. Nuov. Cim. 1972. V.3. P.326-328.

[295] Teitelboim C. Nonmeasurability of the Lepton Number of a Black Hole // Lett. Nuovo Cim. 1972. V.3. P.397-400.

[296] Thurston W. Non-cobordant foliations on S^3 // Bulletin Amer. Math. Soc. 1972. V.78. P.511-514.

[297] Torres Castillo G.F. Ghost neutrino fields in flat space-time // General Relativity and Gravitation. 1987. V.19, No.7. P.699-705.

[298] Uchida F. Cobordism groups of semi-free S^1- and S^3-actions // Osaka J. Math. 1970. V.7, no.2. P.345-351.

[299] VcGruder C.H. Gravitational repulsion in the Schwarzschild field // Phys. Rev. V.23D, no.12. P.3191-3194.

[300] Vilenkin A. Creation universes from nothing // Phys. Let. 1982. V. 117B. P.25-28.

[301] Visser M., Barcelo C. Energy conditions and their cosmological implications. – arXiv: gr-qc/0001099.

[302] Visser M., Kar S., Dadhich N. Traversable wormholes with arbitrarily small energy condition violations. – arXiv: gr-qc/0301003.

[303] Weinberg S. The first three minutes. – New York, 1977.

[304] Weyl H. Raum, Zeit, Materie. – Berlin, 1923. – 346 s.

[305] Weitzenböck R. Invarianten Theorie. – Noordhoft: Gronningen. 1923.

[306] Wu Zhong Chao. Scalar plane waves in general relativity // J. Phys. A. 1982. V.15. P.2429-2434.

[307] Yodzis P. Lorentz cobordism // Commun. Math. Phys. 1972. V.26. P.39-52.

[308] Yodzis P. Lorentz cobordisms // Gen. Relat. and Gravit. 1973. V.4. P.299.

ФИЗИКА РЕАЛЬНОСТИ

Александр Константинович Гуц

Редактор Д.В. Ильина

Лицензия ЛР 020380 от 29.01.97.
Подписано в печать 18.09.12.
Формат 84×60 1/16. Печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 27,71.
Тираж 200 экз.

Полиграфический центр КАН
тел. (3812) 24-70-79, 8-904-585-98-84
644050, Омск, ул. Красный путь, 30
Лицензия ПЛД № 58-47 от 21.04.97 г.