

# Физика лазеров

В. Г. Миногин

16 февраля 2010 г.



# Оглавление

<b>1</b>	<b>Физические основы лазеров</b>	<b>1</b>
1.1	Инверсия населенности . . . . .	1
1.2	Вынужденное поглощение и испускание . . . . .	3
1.3	Обратная связь . . . . .	5
1.4	Механизмы релаксации . . . . .	7
1.5	Схемы создания инверсной населённости . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Взаимодействие атомов с излучением</b>	<b>13</b>
2.1	Когерентное взаимодействие атома с излучением . . . . .	13
2.1.1	Амплитуды вероятности и волновая функция . . . . .	15
2.1.2	Вероятность возбуждения . . . . .	18
2.2	Атомная матрица плотности. Динамические уравнения . . . . .	20
2.2.1	Неподвижный атом . . . . .	20
2.2.2	Движущийся атом . . . . .	23
2.3	Релаксация атомной матрицы плотности . . . . .	24
2.3.1	Квантование вакуумного поля . . . . .	25
2.3.2	Релаксация состояний двухуровневого атома . . . . .	30
2.4	Некогерентное взаимодействие атома с излучением . . . . .	37
2.4.1	Возбуждение атома бегущей световой волной . . . . .	37
2.4.2	Возбуждение атома стоячей световой волной . . . . .	39
2.5	Спектр спонтанного излучения . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Взаимодействие материальной среды с излучением</b>	<b>45</b>
3.1	Уравнения электромагнитного поля . . . . .	45
3.2	Материальные уравнения . . . . .	46
3.2.1	Уравнения динамики среды . . . . .	46
3.2.2	Уравнения для медленных переменных среды . . . . .	50
3.3	Динамика среды в поле непрерывного излучения . . . . .	52
3.4	Когерентное взаимодействие среды с импульсным излучением . . . . .	56

3.5	Некогерентное взаимодействие. Однородно-уширенный переход . . . . .	59
3.5.1	Квазистационарная поляризация среды . . . . .	60
3.5.2	Электрическая восприимчивость среды . . . . .	61
3.5.3	Диссипация электромагнитного поля . . . . .	62
3.5.4	Поглощение и дисперсия среды . . . . .	64
3.6	Некогерентное взаимодействие. Неоднородно-уширенный переход . . . . .	66
3.6.1	Взаимодействие с бегущей световой волной . . . . .	66
3.6.2	Взаимодействие со стоячей световой волной . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Открытые оптические резонаторы</b>	<b>73</b>
4.1	Закрытые и открытые резонаторы . . . . .	73
4.1.1	Добротность резонатора . . . . .	76
4.1.2	Структура электромагнитного поля . . . . .	78
4.2	Плоскопараллельный резонатор . . . . .	79
4.3	Пучки Эрмита-Гаусса . . . . .	83
4.4	Пучки Лагерра-Гаусса . . . . .	88
4.5	Конфокальный резонатор . . . . .	89
4.6	Распространение световых лучей . . . . .	93
4.6.1	Параксиальные лучи . . . . .	93
4.6.2	Гауссов пучок . . . . .	97
4.7	Обобщённый сферический резонатор . . . . .	98
4.7.1	Расчёт геометрии . . . . .	98
4.7.2	Устойчивость сферического резонатора . . . . .	100
4.8	Неустойчивые резонаторы . . . . .	103
4.9	Интерферометр Фабри-Перо . . . . .	107
4.10	Кольцевой резонатор-интерферометр . . . . .	111
4.11	Методы селекции мод . . . . .	114
4.11.1	Селекция продольных мод . . . . .	114
4.11.2	Селекция поперечных мод . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Диэлектрические волноводы и резонаторы</b>	<b>119</b>
5.1	Планарные волноводы . . . . .	120
5.1.1	Поперечные электрические моды . . . . .	122
5.1.2	Поперечные магнитные моды . . . . .	125
5.2	Цилиндрический ступенчатый волновод . . . . .	126
5.2.1	Уравнения распространения поля . . . . .	126
5.2.2	Граничные условия для локализованных мод . . . . .	129
5.2.3	Волноводные моды . . . . .	132
5.2.4	Потери в волноводах . . . . .	136

5.3	Планарные резонаторы . . . . .	136
5.3.1	Поперечные моды . . . . .	137
5.3.2	Поляризация мод . . . . .	140
5.4	Микрорезонаторы . . . . .	141
5.4.1	Дисковые микрорезонаторы . . . . .	141
5.4.2	Сферические микрорезонаторы . . . . .	143
5.4.3	Квадратные микрорезонаторы . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Квазиклассическая теория лазера</b>	<b>147</b>
6.1	Уравнения многомодового лазера . . . . .	147
6.2	Уравнения одномодового лазера . . . . .	151
6.3	Непрерывная генерация . . . . .	155
6.4	Импульсная генерация при модуляции добротности . . . . .	157
6.5	Многомодовая генерация . . . . .	162
6.5.1	Конкуренция мод . . . . .	163
6.5.2	Захват мод в кольцевом лазере . . . . .	164
6.6	Шумы лазерного излучения . . . . .	167
6.6.1	Спектральная плотность оптического сигнала . . . . .	167
6.6.2	Теорема Винера-Хинчина . . . . .	168
6.6.3	Спектр лазерного излучения . . . . .	169
<b>7</b>	<b>Генерация оптических импульсов</b>	<b>175</b>
7.1	Метод синхронизации мод . . . . .	175
7.2	Активная и пассивная синхронизация мод . . . . .	179
7.3	Получение ультракоротких лазерных импульсов . . . . .	180
<b>8</b>	<b>Газовые лазеры</b>	<b>181</b>
8.1	Гелий-неоновый лазер . . . . .	181
8.2	Аргоновый лазер . . . . .	183
8.3	Лазер на смеси $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ . . . . .	184
8.4	Экимерные лазеры . . . . .	187
8.5	Химические газовые лазеры . . . . .	188
<b>9</b>	<b>Лазеры на люминесцентных кристаллах и стёклах</b>	<b>191</b>
9.1	Рубиновый лазер . . . . .	191
9.2	Неодимовые лазеры . . . . .	194
9.3	Твердотельные лазеры с полупроводниковой накачкой . . . . .	196
9.4	Твердотельные микролазеры . . . . .	197

<b>10 Жидкостные молекулярные лазеры</b>	<b>199</b>
10.1 Лазеры на красителях . . . . .	199
10.2 Методы перестройки частоты . . . . .	204
<b>11 Однородные полупроводники</b>	<b>205</b>
11.1 Плотность электронных состояний . . . . .	206
11.1.1 Представление бегущих волн . . . . .	208
11.1.2 Представление стоячих волн . . . . .	209
11.2 Полупроводники $A^{III}B^V$ . . . . .	211
11.3 Равновесные электронные состояния . . . . .	212
11.4 Квазиравновесные электронные состояния . . . . .	215
11.5 Накачка электронных состояний . . . . .	217
11.6 Поглощение и усиление света . . . . .	218
11.6.1 Вынужденные переходы . . . . .	218
11.6.2 Приведённая плотность состояний . . . . .	222
11.6.3 Коэффициент поглощения . . . . .	224
11.6.4 Коэффициент усиления . . . . .	226
<b>12 Полупроводниковые диодные лазеры</b>	<b>229</b>
12.1 Инжекционные лазеры на $p - n$ переходах . . . . .	230
12.2 Инжекционные лазеры на гетеропереходах . . . . .	234
12.3 Распределённая обратная связь . . . . .	240
12.4 Распределённые брэгговские отражатели . . . . .	246
<b>13 Квантоворазмерные полупроводники</b>	<b>249</b>
13.1 Структуры с квантовыми ямами . . . . .	249
13.1.1 Электронные состояния . . . . .	249
13.1.2 Плотность состояний . . . . .	253
13.1.3 Заселённости равновесных состояний . . . . .	256
13.1.4 Поглощение и усиление света . . . . .	256
13.2 Квантовые нити и квантовые точки . . . . .	260
13.2.1 Электронные состояния . . . . .	261
13.2.2 Плотность состояний . . . . .	263
<b>14 Лазеры на квантоворазмерных структурах</b>	<b>267</b>
14.1 Поверхностно-излучающие инжекционные микролазеры . .	267
14.1.1 Материальная структура . . . . .	267
14.1.2 Распределённые брэгговские отражатели . . . . .	268
14.1.3 Частота генерации . . . . .	274
14.2 Лазеры на квантовых нитях и квантовых точках . . . . .	275
14.2.1 Оптическое усиление . . . . .	275

14.3 Каскадные лазеры . . . . .	277
14.4 Лазеры на полимерах . . . . .	278
<b>15 Квантовые свойства световых полей</b>	<b>281</b>
15.1 Состояния чисел заполнения . . . . .	281
15.2 Когерентные состояния . . . . .	285
15.3 Сжатые состояния . . . . .	289
<b>16 Квантовая теория лазера</b>	<b>295</b>
16.1 Квантовомеханическая динамика активных частиц . . . . .	295
16.2 Квантостатистическая динамика активных частиц . . . . .	298
16.3 Статистика числа фотонов . . . . .	303
16.3.1 Подпороговый режим . . . . .	303
16.3.2 Надпороговый режим . . . . .	305
<b>17 Специфические лазерные системы</b>	<b>309</b>
17.1 Лазеры на свободных электронах . . . . .	309
17.1.1 Уравнения движения . . . . .	310
17.1.2 Усиление в ЛСЭ . . . . .	314
17.2 Рентгеновские лазеры . . . . .	317
17.3 Проблема гамма-лазера . . . . .	321





# Предисловие

Настоящее учебное пособие основано на курсе лекций, читаемых автором студентам четвёртого курса Московского физико-технического университета. В пособии изложены физические основы лазеров, включая основы теории взаимодействия квантовых систем с излучением и теоретические основы оптических резонаторов и волноводов. Описаны различные типы газовых, твердотельных и полупроводниковых лазеров, а также лазеры на свободных электронах и рентгеновские лазеры. Рассмотрены квантовые свойства световых полей и основы квантовой теории лазеров.

Книга рассчитана на студентов и аспирантов, обучающихся по специальностям, связанным с оптикой, спектроскопией и лазерной физикой. Она может быть полезной и для молодых специалистов, работающих в этих областях.

При написании данной книги автор во многом следовал советам, полученным от В. С. Летохова. Автор также признателен за обсуждение ряда вопросов А. А. Макарову и В. Р. Мироненко.

Таблица 1: Физические константы в системе СИ

Постоянная	Система единиц СИ
Постоянная Планка, $h$	$6,6261 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
$\hbar$	$1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Скорость света, $c$	$2,9979 \cdot 10^8$ м·с <sup>-1</sup>
Электрическая постоянная, $\varepsilon_0$	$8,8542 \cdot 10^{-12}$ Ф·м <sup>-1</sup>
Магнитная постоянная, $\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7}$ Г·м <sup>-1</sup>
Постоянная Больцмана, $k_B$	$1,3807 \cdot 10^{-23}$ Дж·К <sup>-1</sup>
Число Авогадро, $N$	$6,0221 \cdot 10^{23}$
Заряд электрона, $e$	$1,6022 \cdot 10^{-19}$ К
Масса электрона, $m$	$9,1094 \cdot 10^{-31}$ кг
Атомная единица массы, $M$	$1,6605 \cdot 10^{-27}$ кг
Постоянная Ридберга, $R_\infty$	$1,0974 \cdot 10^7$ м <sup>-1</sup>
Магнетон Бора, $\mu_B$	$9,2740 \cdot 10^{-24}$ Дж·Т <sup>-1</sup>

Таблица 2: Связь между единицами энергии, частоты и длины волны

	Энергия, $E$ [эВ]	Температура, $T$ [К]	Частота, $\nu$ [Гц]	Длина вол- ны, $\lambda$ [см]	Волновое чис- ло, $1/\lambda$ [см <sup>-1</sup> ]
Энергия, 1 эВ	1	$1,16 \cdot 10^4$	$2,42 \cdot 10^{14}$	$1,24 \cdot 10^{-4}$	$8,07 \cdot 10^3$
Температура, 1 К	$8,62 \cdot 10^{-5}$	1	$2,08 \cdot 10^{10}$	1,44	0,70
Частота, 1 Гц	$4,14 \cdot 10^{-15}$	$4,80 \cdot 10^{-11}$	1	$3,00 \cdot 10^{10}$	$3,34 \cdot 10^{-11}$
Длина волны, 1 см	$1,24 \cdot 10^{-4}$	1,44	$3,00 \cdot 10^{10}$	1	1
Волновое число, 1 см <sup>-1</sup>	$1,24 \cdot 10^{-4}$	1,44	$3,00 \cdot 10^{10}$	1	1

# Глава 1

## Физические основы лазеров

С физической точки зрения работа лазера основана на трёх фундаментальных принципах. Ими являются: инверсия населенности, вынужденное излучение и обратная связь. Второй из этих важнейших принципов даже нашел отражение в самом названии "лазер", в английском языке слово "laser" было составлено из первых букв словосочетания "light amplification by stimulated emission of radiation" – "усиление света посредством вынужденного испускания излучения".

### 1.1 Инверсия населенности

Как известно, в термодинамическом равновесии при не слишком низкой температуре любая квантовая система - совокупность атомов, молекул, ионов или каких либо иных частиц занимает уровни энергии в соответствии с распределением Больцмана. В случае одной квантовой частицы вероятность её нахождения в состоянии с энергией  $E_n$  при температуре  $T$  есть

$$p_n = \frac{g_n e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{m=0}^{\infty} g_m e^{-E_m/k_B T}}, \quad (1.1)$$

где  $g_n$  есть кратность вырождения уровня с энергией  $E_n$ ,  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана. Распределение Больцмана для одной частицы нормировано на единицу,  $\sum p_n = 1$ .

В том случае, когда квантовая система содержит  $N_a$  частиц в единице объёма, распределение Больцмана определяет плотность частиц  $N_n = p_n N_a$ , находящихся в состоянии с энергией  $E_n$ ,

$$N_n = \frac{N_a g_n e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{m=0}^{\infty} g_m e^{-E_m/k_B T}}. \quad (1.2)$$

Полная плотность частиц в состоянии с энергией  $E_n$  и кратностью вырождения  $g_n$  есть соответственно  $N_n = g_n n_n$ .

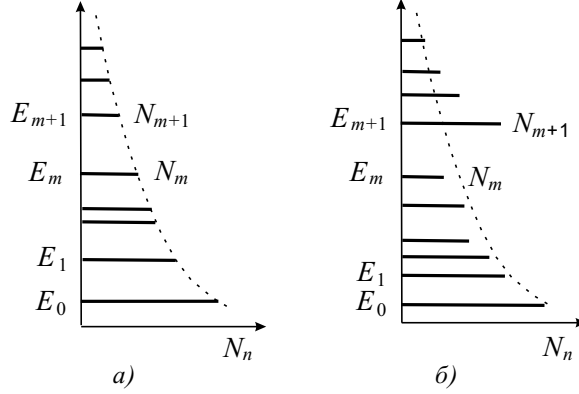


Рис. 1.1: Равновесное бoльцмановское распределение квантовых частиц по уровням энергии (а) и неравновесное распределение с инверсной населённостью между уровнями  $m + 1$  и  $m$  (б).

Распределение Больцмана в форме (1.2) нормировано на полную плотность частиц,  $\sum_{n=0}^{\infty} N_n = N_a$ .

При использовании распределения Больцмана следует иметь в виду, что число частиц  $n_n$ , находящихся в единице объёма в отдельном невырожденном квантовом состоянии, определяется соотношением

$$n_n = \frac{N_a e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{m=0}^{\infty} g_m e^{-E_m/k_B T}}. \quad (1.3)$$

Распределение Больцмана в виде (1.3) показывает, что при термодинамическом равновесии имеет место соотношение  $n_{n+1} < n_n$ , т. е. в верхних квантовых состояниях всегда находится меньше частиц, чем в нижних (рис. 1.1а). Соответственно при взаимодействии с излучением среда, находящаяся в термодинамическом равновесии, может только поглощать излучение. Принципиально иная ситуация возникает, если среда не находится в термодинамическом равновесии. В этом случае число частиц, находящихся в верхних квантовых состояниях, может превышать число частиц в нижних состояниях (рис. 1.1б). В таком случае в среде существует инверсия населённости, которая может приводить к усилению излучения. С формальной точки зрения среда в состоянии с инверсной населённостью отвечает отрицательной температуре.

Во многих практически важных случаях в инвертированной квантовой системе рассматривают два уровня энергии, которым отвечают кратности вырождения  $g_1$  и  $g_2$  и плотности числа частиц  $N_1$  и  $N_2$ , как показано на рис. 1.2. В случае вырожденных уровней плотность населённости

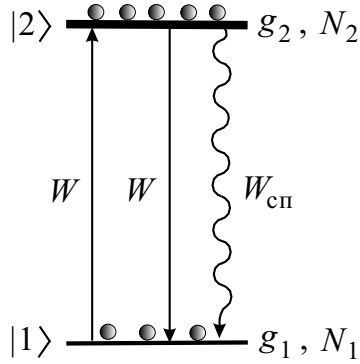


Рис. 1.2: Квантовая система с инвертированной населённостью уровней.

отдельного невырожденного состояния в верхнем уровне есть  $N_2/g_2$ , а в нижнем уровне  $N_1/g_1$ . Соответственно плотность инверсной населённости для двух невырожденных состояний есть  $\tilde{n} = N_2/g_2 - N_1/g_1$ , а полная плотность инверсной населённости между двумя уровнями определяется как  $N = g_2\tilde{n}$ , т. е. определяется соотношением

$$N = N_2 - \frac{g_2}{g_1}N_1. \quad (1.4)$$

Среда в состоянии с инверсной населённостью может быть получена многими способами. Наиболее распространёнными из них являются неравновесное возбуждение частиц в газовой среде электрическим разрядом, оптическое возбуждение частиц в твёрдом теле, создание неравновесного распределения носителей тока в полупроводниках электрическим током. Некоторые методы создания инверсной населённости рассматриваются в разделе 1.5.

## 1.2 Вынужденное поглощение и испускание

Положим, что через среду распространяется электромагнитное излучение, осуществляющее квантовые переходы частиц среды между двумя невырожденными состояниями  $m$  и  $m+1$  (рис. 1.1). В таком случае скорость изменения плотности энергии излучения  $w$  может быть записана в виде

$$\frac{dw}{dt} = -Bwn_m + Bwn_{m+1} - Aw, \quad (1.5)$$

где  $A$  и  $B$  есть коэффициенты Эйнштейна. В данном уравнении первый член описывает ослабление излучения за счёт вынужденного поглощения фотонов при возбуждении частиц среды в верхнее состояние, второй

член описывает усиление излучения за счёт вынужденного испускания фотонов при квантовых переходах частиц из верхнего в нижнее состояние, третий член описывает ослабление излучения, связанное с потерей энергии при спонтанных распадах возбуждённых состояний частиц среды. Как можно видеть, в термодинамически равновесной квантовой среде, когда  $n_{m+1} < n_m$ , всегда происходит поглощение излучения. Напротив, в неравновесной среде, когда  $n_{m+1} > n_m$ , возможно усиление излучения.

Таким образом, если на среду, находящуюся в термодинамическом равновесии, падает поток фотонов, то он вызывает квантовые переходы частиц среды из нижнего в верхнее состояние, что приводит к поглощению фотонов средой. При не слишком высокой интенсивности излучения ослабление плотности потока фотонов  $\mathcal{I}$  [фот·м<sup>-2</sup>·с<sup>-1</sup>] в среде осуществляется в соответствии с законом Бугера-Ламберта:

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = -WN, \quad (1.6)$$

где  $W$  [с<sup>-1</sup>] есть вероятность квантового перехода частицы в единицу времени, т. е. вероятность вынужденного поглощения (испускания) фотона,  $N$  [м<sup>-3</sup>] - плотность частиц, участвующих в поглощении (испускании) фотонов.

Вероятность квантового перехода частицы может быть также выражена через сечение процесса поглощения (испускания) фотонов  $\sigma$  [м<sup>2</sup>] и плотность потока фотонов в виде  $W = \sigma\mathcal{I}$ . После этого закон Бугера-Ламберта принимает вид

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = -\alpha\mathcal{I}, \quad (1.7)$$

где  $\alpha = \sigma N$  есть коэффициент поглощения излучения, имеющий размерность [м<sup>-1</sup>]. В пространственно однородной среде коэффициент поглощения  $\alpha$  постоянен и закон Бугера-Ламберта сводится к экспоненциальному падению плотности потока фотонов:

$$\mathcal{I}(z) = \mathcal{I}(0)e^{-\alpha z}. \quad (1.8)$$

В инвертированной среде падающий фотон вызывает переход квантовой частицы из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией. При этом возникает ещё один фотон, обусловленный вынужденным переходом частицы в состояние с меньшей энергией. Этот фотон, излучённый инвертированной средой, в соответствии с законами сохранения имеет ту же энергию, импульс и поляризацию, что и падающий фотон. Соответственно в инвертированной среде при достаточном числе возбуждённых частиц происходит усиление падающего излучения.

С классической точки зрения распространение излучения в инвертированной усиливающей среде описывается законом Бугера-Ламберта с положительным знаком производной, т. е. в виде

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = g\mathcal{I}, \quad (1.9)$$

где  $g = \sigma N$  есть коэффициент усиления излучения, а  $N$  есть плотность инверсной населённости. При положительном знаке показателя экспоненты в уравнении распространения излучения плотность потока фотонов экспоненциально нарастает:

$$\mathcal{I}(z) = \mathcal{I}(0)e^{gz}. \quad (1.10)$$

В достаточно распространённом случае, когда излучение усиливается в инвертированной среде, имеющей два вырожденных уровня как показано на рис. 1.2, коэффициент усиления имеет вид

$$g = \sigma N = \sigma \left( N_2 - \frac{g_2}{g_1} N_1 \right), \quad (1.11)$$

где в данном случае плотность инверсной населённости определена соотношением (1.4).

### 1.3 Обратная связь

Для того, чтобы обеспечить значительное усиление излучения, создаваемого инвертированной средой, необходимо, чтобы излучение, выходящее из среды, опять попадало в среду. Такая ситуация достигается с помощью обратной связи при помещении инвертированной среды в электромагнитный резонатор. В качестве последнего часто используется резонатор Фабри-Перо, состоящий из двух зеркал, отражающих излучение обратно в среду.

Рассмотрим прохождение излучения в лазере, содержащем инвертированную среду длиной  $l$  внутри резонатора Фабри-Перо (рис. 1.3). Если начальная плотность потока фотонов есть  $\mathcal{I}_0$ , то после первого прохождения инвертированной среды с коэффициентом усиления  $g$ , отражения от зеркала с коэффициентом отражения  $R_2$ , второго прохождения инвертированной среды и отражения от первого зеркала с коэффициентом отражения  $R_1$  плотность потока фотонов последовательно становится равной

$$\mathcal{I}_0 \rightarrow \mathcal{I}_0 e^{gl} \rightarrow R_2 \mathcal{I}_0 e^{gl} \rightarrow R_2 \mathcal{I}_0 e^{2gl} \rightarrow R_1 R_2 \mathcal{I}_0 e^{2gl}. \quad (1.12)$$

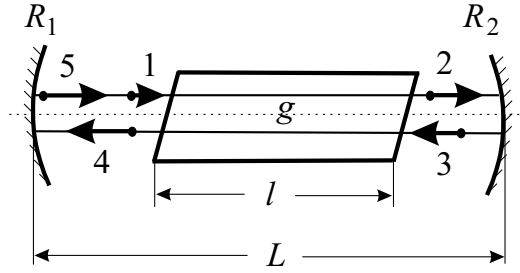


Рис. 1.3: Иллюстрация распространения излучения в лазере. Точка 1 отвечает интенсивности излучения до входа в инвертированную среду, точка 2 - после первого прохода инвертированной среды с коэффициентом усиления  $g$ , точка 3 - после отражения от зеркала с коэффициентом отражения  $R_2$ , точка 4 - после второго прохода инвертированной среды и точка 5 - после отражения от зеркала с коэффициентом отражения  $R_1$ .

Приравнявая последнее значение плотности потока фотонов исходному значению можно получить пороговое условие работы лазера:

$$R_1 R_2 e^{2gl} = 1, \quad (1.13)$$

которое даёт оценку минимального значения коэффициента усиления. Если, например, выбрать зеркала с коэффициентами отражения  $R_1 = R_2 = 0,99$ , а длину инвертированной среды  $l = 10$  см, то пороговое условие будет выполнено при коэффициенте усиления  $g = 0,001 \text{ см}^{-1}$ .

Пороговое условие работы лазера может быть записано и в несколько ином виде, показывающем, что для генерации лазерного излучения усиление лазерной среды должно быть не меньше потерь, вносимых обратной связью. Представим, что потери излучения, связанные с конечным пропусканием зеркал, распределены по всей длине резонатора  $L$ . Тогда соответствующий коэффициент распределённых потерь может быть записан в виде

$$\alpha = -\frac{\ln R_1 R_2}{2L}. \quad (1.14)$$

Теперь пороговое условие работы лазера (1.13) принимает вид

$$e^{2gl-2\alpha L} = 1, \quad (1.15)$$

из которого следует, что для достижения порога генерации лазерного излучения необходимо, чтобы усиление активной среды сравнялось с потерями, т. е. необходимо выполнение условия

$$gl = \alpha L. \quad (1.16)$$



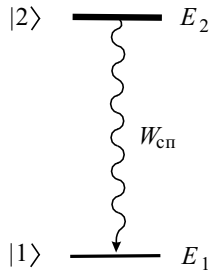


Рис. 1.4: Иллюстрация спонтанного распада частицы из верхнего квантового состояния  $|2\rangle$  в нижнее состояние  $|1\rangle$ .

## 1.4 Механизмы релаксации

При прохождении излучения через материальную среду вынужденные переходы осуществляют возбуждение и девозбуждение частиц среды. Наряду с этими процессами всегда существуют релаксационные процессы, осуществляющие девозбуждение частиц. Важными примерами таких процессов являются радиационная релаксация, обусловленная спонтанным испусканием фотонов возбуждёнными частицами, столкновительная релаксация возбуждённых состояний частиц в газовых средах, релаксация возбуждённых состояний ионов в кристаллах, обусловленная влиянием кристаллического поля. С физической точки зрения любой релаксационный процесс всегда приводит к релаксации населённости и релаксации фазы квантового состояния частицы. Рассмотрим несколько примеров процессов релаксации квантовых частиц.

Любая возбуждённая частица - атом, молекула или ион всегда подвержена радиационной релаксации, обусловленной взаимодействием частицы с вакуумными фотонами. Положим для простоты, что квантовая частица имеет два уровня: основной с энергией  $E_1$  и возбуждённый с энергией  $E_2$  (рис. 1.4). Будем также считать, что между этими двумя уровнями возможны электрические дипольные переходы. В таком случае возбуждённая частица распадается на нижний уровень со скоростью спонтанного распада

$$W_{\text{сп}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4}{3} \frac{d^2\omega_0^3}{\hbar c^3}, \quad (1.17)$$

где  $\epsilon_0$  есть электрическая постоянная,  $d$  есть матричный элемент дипольного момента частицы,  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  - частота квантового перехода. Для оптических дипольных переходов в атомах типичное значение матричного элемента дипольного момента  $d \simeq 10^{-29}$  К·м, а типичная скорость радиационной релаксации  $W_{\text{сп}} \simeq 10^9$  с $^{-1}$ . Соответственно в оптическом диапазоне характерное время спонтанной релаксации имеет

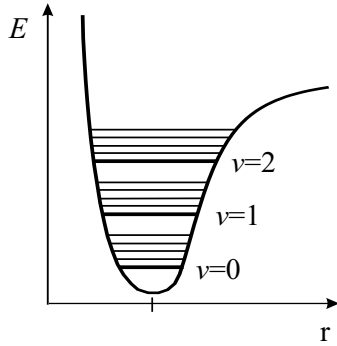


Рис. 1.5: Колебательно-вращательные уровни энергии молекулы.

порядок  $\tau_{\text{ст}} = 1/W_{\text{ст}} \simeq 10^{-9}$  с.

Ещё одним достаточно универсальным механизмом является столкновительная релаксация атомных или молекулярных частиц в газе. В этом случае при плотности частиц  $n$  время между столкновениями определяется известным соотношением

$$\tau_{\text{ст}} = \bar{l}/\bar{v} = 1/\sigma_{\text{ст}}n\bar{v},$$

где  $\bar{l}$  есть средняя длина свободного пробега частиц,  $\bar{v}$  - средняя скорость частиц в газе,  $\sigma_{\text{ст}}$  - сечение столкновений. При типичных значениях сечения столкновений  $\sigma_{\text{ст}} \simeq 10^{-16}$  см<sup>2</sup>, средней скорости  $\bar{v} \simeq 10^5$  см/с и плотности частиц  $n = 10^{19}$  см<sup>-3</sup>, отвечающей атмосферному давлению, время между столкновениями  $\tau_{\text{ст}} \simeq 10^{-8}$  с.

Отметим ещё колебательно-вращательную релаксацию в молекулах, обусловленную столкновениями в газовой фазе (рис. 1.5). При комнатной температуре  $T = 300$  К колебательная энергия обычно значительно превышает тепловую энергию,  $\Delta E_{\text{кол}} \gg k_{\text{Б}}T$ , в то время как вращательная энергия обычно меньше тепловой,  $\Delta E_{\text{вр}} \ll k_{\text{Б}}T$ . Соответственно характерное время релаксации колебательного состояния обычно существенно превышает характерное время релаксации вращательного состояния. Время релаксации молекулы по колебательным состояниям может быть оценено как  $\tau_{\text{кол}} \simeq \tau_{\text{ст}}Z_{\text{кол}}$ , где  $Z_{\text{кол}} \simeq 10^3 - 10^5$  есть типичное число столкновений, необходимых для изменения колебательного состояния. Более короткое время релаксации по вращательным состояниям оценивается как  $\tau_{\text{вр}} \simeq \tau_{\text{ст}}Z_{\text{вр}}$ , где типичное число столкновений, необходимых для изменения вращательного состояния молекулы имеет значение  $Z_{\text{вр}} \simeq 10 - 20$ .

Релаксация состояний квантовых частиц, находящихся в твёрдом теле, определяется разнообразными механизмами, связанными главным

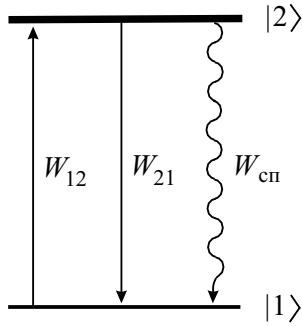


Рис. 1.6: Двухуровневая схема взаимодействия квантовой частицы с излучением.

образом с влиянием кристаллической решётки. Так, в случае примесных ионов в кристалле их возбуждённые состояния релаксируют благодаря влиянию локального электрического поля, создаваемого соседними ионами. Взаимодействие примесного иона с кристаллическим полем решётки как правило приводит к безизлучательной релаксации возбуждённых состояний, что естественно сопровождается уменьшением квантового выхода люминесценции.

## 1.5 Схемы создания инверсной населённости

Существуют разнообразные методы создания неравновесных распределений частиц по квантовым состояниям с образованием инверсии между одной из пар уровней. Наиболее часто используемые схемы создания инверсии включают всего три-четыре уровня реальной многоуровневой квантовой системы. Как правило, именно эти несколько уровней участвуют в основных процессах возбуждения и релаксации. Рассмотрим последовательно несколько простых схем создания инверсной населённости с помощью стационарного внешнего излучения.

С принципиальной точки зрения простейшей схемой создания инверсии могла бы быть двухуровневая схема (рис. 1.6). В этой схеме предполагается, что внешнее стационарное излучение возбуждает частицы из основного состояния с вероятностью  $W_{12}$ , а вероятность перехода частицы из возбуждённого в основное состояние есть  $W_{21}$ . В том случае когда не учитываются когерентные эффекты, населённости уровней в данной схеме могут быть определены из балансных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}N_1 &= -W_{12}N_1 + (W_{21} + W_{\text{сп}})N_2, \\ \frac{d}{dt}N_2 &= W_{12}N_1 - (W_{21} + W_{\text{сп}})N_2, \end{aligned}$$

где  $W_{\text{сп}}$  есть вероятность спонтанного распада из возбуждённого в основное состояние. Балансные уравнения естественно учитывают сохранение полного числа частиц,  $N_1 + N_2 = N$ .

Стационарное решение приведённых уравнений позволяет связать число частиц в возбуждённом состоянии с числом частиц в основном состоянии:

$$N_2 = N_1 \frac{W_{12}}{W_{21} + W_{\text{сп}}}. \quad (1.18)$$

В том случае, когда состояния двухуровневой системы являются невырожденными, т. е. когда каждый уровень отвечает только одному квантовому состоянию, вероятности прямых и обратных процессов одинаковы,  $W_{12} = W_{21} = W$ , и соотношение (1.18) показывает, что в двухуровневой схеме населённость верхнего состояния не превышает населённость нижнего состояния. Если уровни являются вырожденными с кратностями вырождения  $g_1$  и  $g_2$ , то вероятности вынужденных переходов под действием стационарного излучения с плотностью потока фотонов  $\mathcal{I}$  могут быть выражены через сечения вынужденных переходов в виде  $W_{12} = \sigma g_2 \mathcal{I}$ ,  $W_{21} = \sigma g_1 \mathcal{I}$ , где  $\sigma$  есть эффективное сечение квантового перехода. В таком случае связь между населённостями (1.18) может быть записана в виде

$$N_2 = N_1 \frac{\sigma g_2 \mathcal{I}}{\sigma g_1 \mathcal{I} + W_{\text{сп}}}. \quad (1.19)$$

Если теперь ввести населённости невырожденных подуровней  $n_2 = N_2/g_2$  и  $n_1 = N_1/g_1$ , то отсюда опять можно видеть, что в стационарном режиме в двухуровневой схеме невозможно создание инверсной населённости между парой невырожденных подуровней, поскольку всегда  $n_2 < n_1$ . Отметим вместе с тем, что при большой интенсивности излучения  $\mathcal{I} \rightarrow \infty$  населённости подуровней выравниваются, поскольку  $n_2 \rightarrow n_1$ .

Одной из простых схем, в которой возможно создание инверсной населённости в стационарном режиме, является трёхуровневая схема, показанная на рис. 1.7. В этой схеме предполагается, что внешнее излучение переводит частицы из основного состояния 1 в возбуждённое состояние 3, откуда возможен спонтанный распад в состояние 2, а затем спонтанный распад в основное состояние 1. Указанные процессы описываются балансными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} N_1 &= -W_{13} N_1 + W_{31} N_3 + A_{21} N_2 + A_{31} N_3, \\ \frac{d}{dt} N_2 &= -A_{21} N_2 + A_{32} N_3, \\ \frac{d}{dt} N_3 &= W_{13} N_1 - (W_{31} + A_{31} + A_{32}) N_3, \end{aligned}$$

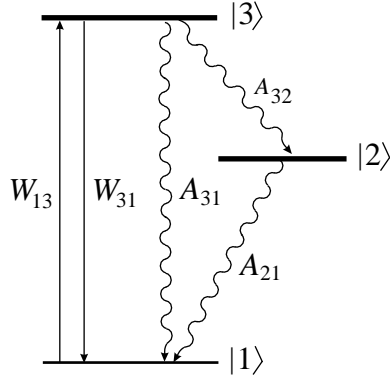


Рис. 1.7: Трёхуровневая схема создания инверсной населённости.

учитывающими сохранение полного числа частиц,

$$N_1 + N_2 + N_3 = N.$$

Стационарное решение данной системы уравнений показывает, что инверсная населённость может возникать на переходах 3–2 и 2–1. Положим для простоты, что в трёхуровневой системе скорости прямых и обратных переходов за счёт действия внешнего излучения одинаковы, т. е.  $W_{13} = W_{31} = W$ . Тогда стационарные разности населённостей в трёхуровневой схеме определяются выражениями

$$N_3 - N_2 = N \frac{W(A_{21} - A_{32})}{W(2A_{21} + A_{32}) + A_{21}(A_{31} + A_{32})},$$

$$N_2 - N_1 = N \frac{W(A_{32} - A_{21}) - A_{21}(A_{31} + A_{32})}{W(2A_{21} + A_{32}) + A_{21}(A_{31} + A_{32})}.$$

Отсюда можно видеть, что если скорости спонтанных распадов удовлетворяют условию  $A_{21} > A_{32}$ , то инверсия возникает на переходе 3–2 вследствие быстрого опустошения уровня 2. Такая ситуация часто реализуется в газовых лазерах. Если имеет место условие  $A_{32} > A_{21}$ , то при достаточно большой интенсивности излучения инверсия может возникать и на переходе 2–1 вследствие быстрой накачки уровня 2 и опустошения уровня 1. Эта схема типична для лазеров на люминесцентных кристаллах и стёклах, в частности, для рубинового лазера.

Весьма часто используемой является четырёхуровневая схема, пример которой показан на рис. 1.8. В данной схеме в зависимости от соотношений между скоростями индуцированных и спонтанных переходов инверсия может иметь место на любых переходах. Если скорость релаксации на переходе 2–1 выше скорости релаксации на "внутреннем

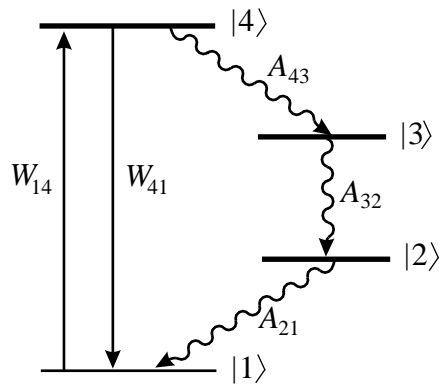


Рис. 1.8: Четырёхуровневая схема создания инверсной населённости.

переходе  $3-2$ , т. е.  $A_{21} > A_{32}$ , то инверсная населённость на переходе  $3-2$  определяется выражением

$$N_3 - N_2 = N \frac{(A_{21} - A_{32})A_{43}W}{W(A_{21}(2A_{32} + A_{43}) + A_{32}A_{43}) + A_{21}A_{32}A_{43}},$$

где для простоты скорости прямых и обратных вынужденных переходов выбраны одинаковыми,  $W_{14} = W_{41} = W$ . Четырёхуровневая схема создания инверсной населённости часто используется в лазерах на люминесцентных кристаллах и стёклах, органических красителях, полупроводниковых лазерах с оптической накачкой.

## Глава 2

# Взаимодействие атомов с излучением

### 2.1 Когерентное взаимодействие атома с излучением

Под когерентным взаимодействием атома, молекулы, иона или какой-либо иной квантовой частицы с излучением понимают взаимодействие, осуществляющееся при временах  $\tau_{\text{вз}}$  малых по сравнению с временами релаксации квантовых состояний частицы,  $\tau_{\text{вз}} \ll \tau_{\text{рел}}$ . Ниже для определённости мы будем говорить об атоме. При указанных малых временах взаимодействия релаксацией квантовых состояний атома можно пренебречь и полная энергия системы "атом + излучение" сохраняется.

Когерентная динамика атома, взаимодействующего с излучением, описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (2.1)$$

где как гамильтониан  $H = H(\boldsymbol{\xi}, t)$ , так и волновая функция  $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\xi}, t)$  зависят от координат  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \dots, \boldsymbol{\xi}_n$ , которые описывают внутренние движения в атоме, т. е. движения электронов. Волновая функция предполагается нормированной,

$$\int |\Psi(\boldsymbol{\xi}, t)|^2 d^3\xi = 1, \quad (2.2)$$

где использовано сокращённое обозначение для дифференциала по внутренним координатам,  $d^3\xi = d^3\xi_1 d^3\xi_2 \dots d^3\xi_n$ .

В случае дипольного взаимодействия неподвижного атома со световым полем, описываемым электрическим вектором  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , гамильтониан  $H$  включает собственно гамильтониан атома  $H_0$  и оператор электрического дипольного взаимодействия  $V = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$ ,

$$H = H_0 + V = H_0 - \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

где  $\hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi})$  - оператор электрического дипольного момента атома, или просто электрический дипольный оператор.

Прямой путь решения уравнения Шредингера состоит в разложении полной волновой функции  $\Psi(\boldsymbol{\xi}, t)$  по собственным волновым функциям гамильтониана  $H_0$ ,

$$\Psi_n(\boldsymbol{\xi}, t) = \psi_n(\boldsymbol{\xi})e^{-iE_n t/\hbar}, \quad (2.4)$$

где  $E_n$  - энергии стационарных состояний атома. Координатные волновые функции  $\psi_n(\boldsymbol{\xi})$  предполагаются удовлетворяющими стационарному уравнению Шредингера с гамильтонианом  $H_0 = H_0(\boldsymbol{\xi})$ ,

$$H_0\psi_n(\boldsymbol{\xi}) = E_n\psi_n(\boldsymbol{\xi}), \quad (2.5)$$

и условиям ортонормированности,

$$\int \psi_m^*(\boldsymbol{\xi})\psi_n(\boldsymbol{\xi})d^3\xi = \delta_{mn}. \quad (2.6)$$

Для двухуровневого атома с низшим (основным) состоянием  $|g\rangle$  и верхним (возбуждённым) состоянием  $|e\rangle$  разложение полной волновой функции может быть записано как

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}, t) = a_g(t)\psi_g(\boldsymbol{\xi})e^{-iE_g t/\hbar} + a_e(t)\psi_e(\boldsymbol{\xi})e^{-iE_e t/\hbar}, \quad (2.7)$$

где  $a_g(t)$  и  $a_e(t)$  - амплитуды вероятности нахождения атома в состояниях  $|g\rangle$  и  $|e\rangle$ , а  $E_g, E_e$  - энергии состояний (рис. 2.1). В случае двух уровней общее условие нормировки (2.2) даёт согласно уравнению (2.6) условие нормировки для амплитуд вероятности,

$$|a_g(t)|^2 + |a_e(t)|^2 = 1. \quad (2.8)$$

Подстановка разложения (2.7) в уравнение (2.1) и учёт условий ортонормированности (2.6) даёт уравнения

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial a_e}{\partial t} &= V_{eg}a_g e^{i\omega_0 t}, \\ i\hbar \frac{\partial a_g}{\partial t} &= V_{ge}a_e e^{-i\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (2.9)$$



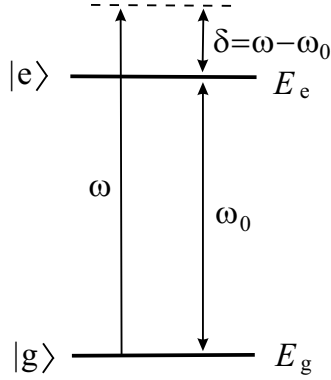


Рис. 2.1: Схема двухуровневого атома, возбуждаемого резонансным излучением.

где

$$V_{mn} = -\mathbf{d}_{mn} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{d}_{mn} = \int \psi_m^*(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \psi_n(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (2.10)$$

матричные элементы оператора дипольного взаимодействия и дипольного момента атома,

$$\omega_0 = (E_e - E_g)/\hbar \quad (2.11)$$

есть частота квантового перехода. Отметим, что оператор  $\hat{\mathbf{d}}$  дипольного момента является эрмитовым оператором. Соответственно матричные элементы дипольного момента удовлетворяют условию эрмитовости,  $\mathbf{d}_{eg}^* = \mathbf{d}_{ge}$ . Ниже мы будем считать для простоты, что матричные элементы дипольного момента для двухуровневого атома выбраны действительными, т. е. будем считать, что  $\mathbf{d}_{eg} = \mathbf{d}_{ge} = \mathbf{d}$ .

### 2.1.1 Амплитуды вероятности и волновая функция

Рассмотрим взаимодействие двухуровневого атома с монохроматическим излучением,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}), \quad (2.12)$$

частота которого  $\omega$  близка к частоте атомного перехода  $\omega_0$ . В случае монохроматического излучения правые части уравнений (2.9) включают члены двух типов: низкочастотные члены, осциллирующие с разностной частотой  $|\omega - \omega_0|$  и высокочастотные члены, осциллирующие с удвоенной оптической частотой  $\omega + \omega_0 \simeq 2\omega \simeq 2\omega_0$ . Высокочастотные члены дают малые вклады в уравнения (2.9) и этими членами можно пренебречь в так называемом приближении вращающейся волны (ПВВ), иногда называемым также резонансным приближением. В этом приближении рас-

стройка частоты излучения относительно частоты перехода,

$$\delta = \omega - \omega_0, \quad (2.13)$$

и частота Раби

$$\Omega = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0}{2\hbar}, \quad (2.14)$$

предполагаются малыми по сравнению с оптическими частотами,

$$|\delta|, \Omega \ll \omega, \omega_0. \quad (2.15)$$

При использовании ПВВ уравнения (2.9) могут быть сведены к простым уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_e}{\partial t} &= i\Omega e^{-i\delta t} a_g, \\ \frac{\partial a_g}{\partial t} &= i\Omega e^{i\delta t} a_e. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Воспользовавшись далее подстановкой  $a_e = a'_e \exp(-i\delta t)$  уравнения (2.16) могут быть сведены к уравнениям с постоянными коэффициентами.

Общее решение уравнений (2.16) определяет амплитуды вероятности в произвольный момент времени  $t$  как

$$\begin{aligned} a_e(t) &= \left[ \left( \cos \tilde{\Omega} t + i \frac{\delta}{2\tilde{\Omega}} \sin \tilde{\Omega} t \right) a_e(0) + i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} a_g(0) \sin \tilde{\Omega} t \right] e^{-i\delta t/2}, \\ a_g(t) &= \left[ i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} a_e(0) \sin \tilde{\Omega} t + \left( \cos \tilde{\Omega} t - i \frac{\delta}{2\tilde{\Omega}} \sin \tilde{\Omega} t \right) a_g(0) \right] e^{i\delta t/2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $a_e(0)$  и  $a_g(0)$  - амплитуды вероятности в начальный момент времени. Величина

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\delta/2)^2} \quad (2.18)$$

называется обобщённой частотой Раби.

Рассмотрим пример, когда в начальный момент времени  $t = 0$  двух-уровневый атом находится в основном состоянии и соответственно  $a_g(0) = 1$  and  $a_e(0) = 0$ . В этом случае уравнения (2.17) определяют амплитуды вероятности в виде

$$\begin{aligned} a_e(t) &= i \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} e^{-i\delta t/2} \sin \tilde{\Omega} t, \\ a_g(t) &= \left( \cos \tilde{\Omega} t - i \frac{\delta}{2\tilde{\Omega}} \sin \tilde{\Omega} t \right) e^{i\delta t/2}. \end{aligned}$$

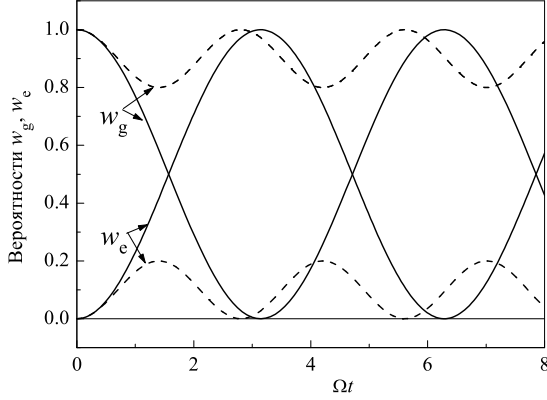


Рис. 2.2: Вероятности нахождения двухуровневого атома в квантовых состояниях.

Вероятности найти атом в состояниях  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$  соответственно есть

$$\begin{aligned} w_g &= |a_g|^2 = 1 - \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\right)^2 \sin^2 \tilde{\Omega}t, \\ w_e &= |a_e|^2 = \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\right)^2 \sin^2 \tilde{\Omega}t. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Последние уравнения показывают, что близкое к резонансу монохроматическое излучение приводит к осцилляциям атома между основным и возбуждённым состояниями с обобщённой частотой Раби  $\tilde{\Omega}$  (Рис. 2.2). При точном резонансе, когда  $\omega = \omega_0$  и  $\tilde{\Omega} = \Omega$ , вероятность найти атом в основном или возбуждённом состоянии осциллирует между 0 и 1. Если излучение находится вне точного резонанса, т. е.  $\delta \neq 0$ , вероятность найти атом в основном состоянии осциллирует между 1 и  $1 - (\Omega/\tilde{\Omega})^2$ , а вероятность найти атом в возбуждённом состоянии осциллирует между 0 и  $(\Omega/\tilde{\Omega})^2$ . Отметим, что осцилляции иногда называют осцилляциями Раби, а также оптическими нутациями.

Волновая функция (2.7) при выбранных начальных условиях есть

$$\begin{aligned} \Psi(\boldsymbol{\xi}, t) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \left(1 - \frac{\delta}{2\tilde{\Omega}}\right) \psi_g(\boldsymbol{\xi}) + \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} e^{-i\omega t} \psi_e(\boldsymbol{\xi}) \right] e^{i\tilde{\Omega}t} \right. \\ &\quad \left. + \left[ \left(1 + \frac{\delta}{2\tilde{\Omega}}\right) \psi_g(\boldsymbol{\xi}) - \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} e^{-i\omega t} \psi_e(\boldsymbol{\xi}) \right] e^{-i\tilde{\Omega}t} \right\} e^{-iE_g t/\hbar + i\delta t/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Волновая функция (2.20) позволяет найти любую наблюдаемую двух-

уровневого атома. Например, внутренняя энергия атома есть

$$\begin{aligned}\langle E \rangle &= \int \Psi^*(\boldsymbol{\xi}) H \Psi(\boldsymbol{\xi}) d^3 \xi \\ &= E_g |a_g|^2 + E_e |a_e|^2 - \hbar \Omega (a_g^* a_e e^{i\delta t} + a_g a_e^* e^{-i\delta t}) \\ &= E_g + \hbar \omega \left( \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \right)^2 \sin^2 \tilde{\Omega} t.\end{aligned}$$

Как можно было ожидать, внутренняя энергия атома в зависящем от времени излучении не является сохраняющейся величиной. Она осциллирует между минимальным значением  $E_g$  и максимальным возможным значением  $E_g + \hbar \omega \left( \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \right)^2$ .

В качестве другого примера можно вычислить наведённый дипольный момент атома

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{d} \rangle &= \int \Psi^*(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \Psi(\boldsymbol{\xi}) d^3 \xi \\ &= \mathbf{d} \frac{\Omega}{2\tilde{\Omega}} \left[ \left( 1 + \frac{\delta}{2\tilde{\Omega}} \right) \cos(\omega - 2\tilde{\Omega})t - \frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \cos \omega t - \left( 1 - \frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \right) \cos(\omega + 2\tilde{\Omega})t \right].\end{aligned}$$

Как можно здесь видеть, наведённый дипольный момент осциллирует как с частотой излучения  $\omega$ , так и со сдвинутыми частотами  $\omega \pm 2\tilde{\Omega}$ . Осцилляции дипольного момента естественно связаны с процессами, посредством которых атом поглощает энергию излучения и отдаёт её обратно излучению. Существование таких процессов может быть также видно из уравнения для скорости изменения внутренней энергии,

$$\frac{d\langle E \rangle}{dt} = \hbar \omega \frac{\Omega^2}{\tilde{\Omega}} \sin \tilde{\Omega} t,$$

которая положительна на одном осцилляционном полупериоде (поглощение энергии излучения) и отрицательна на другом осцилляционном полупериоде (передача энергии обратно излучению).

### 2.1.2 Вероятность возбуждения

Приведённые выше вероятности нахождения атома в квантовых состояниях применимы не только к атому, но и к любой квантовой системе, взаимодействующей с близким к резонансу излучением. Эти вероятности могут быть также использованы для нахождения вероятности перехода системы между квантовыми состояниями.

Положим, как и ранее, что в начальный момент времени квантовая система находится в нижнем состоянии и соответственно начальные амплитуды вероятности есть  $a_g(0) = 1$  и  $a_e(0) = 0$ . Рассмотрим далее вероятность нахождения системы в верхнем состоянии считая частоту Раби малой, т. е. считая  $\Omega/|\delta| \ll 1$ . В таком случае до второго порядка по малой частоте Раби имеем

$$w_e = \frac{4\Omega^2}{\delta^2} \sin^2 \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}. \quad (2.21)$$

Заметим далее, что при больших временах  $t$  можно связать правую часть выражения (2.21) с  $\delta$ -функцией согласно соотношению

$$\left( \frac{\sin xt/2}{x} \right)^2 = \frac{1}{2} \pi t \delta(x). \quad (2.22)$$

Это позволяет переписать вероятность нахождения квантовой системы в верхнем состоянии в виде

$$w_e = 2\pi\Omega^2 t \delta((\omega - \omega_0)x). \quad (2.23)$$

Последнее уравнение может быть использовано для введения вероятности перехода в единицу времени

$$W_{eg} = \frac{dw_e}{dt} = 2\pi\Omega^2 \delta((\omega - \omega_0)x) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0}{\hbar} \right)^2 \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.24)$$

Отметим, что вероятность перехода является резкой функцией частоты поскольку ширина линии квантового перехода предполагается бесконечно узкой.

Полезно сравнить полученную выше вероятность перехода с соответствующей вероятностью, следующей из теории возмущений. Положим, что под действием монохроматического излучения квантовая система переходит из начального состояния  $|g\rangle$  с энергией  $E_g$  в конечное состояние  $|e\rangle$  с энергией  $E_e$ . Полагая, что гамильтониан системы имеет общую форму

$$H = H_0 + 2V \cos \omega t \quad (2.25)$$

вероятность квантового перехода можно найти с помощью стандартной теории возмущений (золотого правила Ферми) как

$$W_{eg} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{eg}|^2 \delta(E_e - E_g - \hbar\omega), \quad (2.26)$$

где  $V_{eg}$  есть матричный элемент оператора взаимодействия. Если рассматривать вероятность перехода как функцию угловой частоты, то следует записать

$$W_{eg} = \frac{2\pi}{\hbar^2} |V_{eg}|^2 \delta(\omega - \omega_0). \quad (2.27)$$

В случае дипольного взаимодействия квантовой системы с монохроматическим электромагнитным полем матричный элемент оператора взаимодействия следует записать в виде

$$V_{eg} = -\frac{1}{2} \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}_0,$$

а энергию квантового перехода как  $E_e - E_g = \hbar\omega_0$ . Подставив данный матричный элемент в уравнение (2.27) можно видеть, что теория возмущений даёт значение вероятности перехода  $W_{eg}$ , которое совпадает с (2.24).

## 2.2 Атомная матрица плотности. Динамические уравнения

Когда квантовая система не является замкнутой её эволюция не может быть описана волновой функцией. Описание не замкнутой системы основывается на более общем формализме матрицы плотности. Ниже мы рассмотрим применение общей квантово-статистической концепции матрицы плотности к случаю дипольного взаимодействия атома с квазирезонансным электромагнитным полем.

### 2.2.1 Неподвижный атом

Удобно рассмотреть сначала неподвижный атом и пренебречь эффектами релаксации, т. е. рассмотреть, как и в предыдущем разделе, времена взаимодействия атома с электромагнитным полем, которые малы по сравнению с временами релаксации  $\tau_{\text{рел}}$ . В таком случае динамика атома описывается уравнением Шрёдингера (2.1) с гамильтонианом (2.3).

Положим, что волновая функция атома разложена по зависящим от времени собственным функциям  $\Psi_k(\boldsymbol{\xi}, t) = \psi_k(\boldsymbol{\xi}) \exp(-iE_k t/\hbar)$  невозмущённого атомного гамильтониана  $H_0$ ,

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum a_k \Psi_k(\boldsymbol{\xi}, t), \quad (2.28)$$

т. е. эволюция системы описывается в представлении взаимодействия. Взяв произведение волновой функции в точке  $\xi$  и комплексно сопряжённой функции в точке  $\xi'$  можно образовать новую функцию координат, называемую матрицей плотности:

$$\rho(\xi, \xi', t) = \Psi(\xi, t)\Psi^*(\xi', t) = \sum_{m,n} \rho_{mn}\psi_m(\xi)\psi_n^*(\xi')e^{-i(E_m-E_n)t/\hbar}. \quad (2.29)$$

Коэффициенты

$$\rho_{mn} = a_m a_n^*, \quad (2.30)$$

входящие в разложение матрицы плотности по собственным функциям гамильтониана  $H_0$  образуют матрицу, которая тоже называется матрицей плотности. Функция координат  $\rho(\xi, \xi', t)$  и матрица  $\rho$ , составленная из элементов  $\rho_{mn}$ , таким образом, называются одним и тем же термином *матрица плотности*. Как функция  $\rho(\xi, \xi', t)$  так и матрица  $\rho$  удовлетворяют условиям эрмитовости,

$$\rho^*(\xi, \xi', t) = \rho(\xi', \xi, t), \quad \rho_{mn}^* = \rho_{nm}, \quad (2.31)$$

и условиям нормировки, следующим из уравнений (2.2) и (2.6),

$$\int \rho(\xi, \xi, t)d^3\xi = 1, \quad \sum \rho_{mm} = 1. \quad (2.32)$$

Уравнение для матрицы плотности прямо следует из уравнения Шредингера. Взяв производную по времени от обеих частей уравнения (2.29) и используя уравнение (2.1) получим динамическое уравнение для матрицы плотности:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(\xi, \xi', t) = (H(\xi) - H^*(\xi')) \rho(\xi, \xi', t). \quad (2.33)$$

В данном уравнении предполагается, что гамильтониан  $H(\xi)$  действует на координаты  $\xi$ , а гамильтониан  $H(\xi')$  - на координаты  $\xi'$ .

Умножая уравнение (2.33) на функции  $\Psi_k^*(\xi, t)$ ,  $\Psi_l(\xi', t)$  и интегрируя по переменным  $\xi$  и  $\xi'$ , т. е. применяя к уравнению операцию

$$\int (\dots) \Psi_k^*(\xi, t)\Psi_l(\xi', t)d^3\xi d^3\xi',$$

и используя условия ортонормированности (2.6) можно получить динамические уравнения для элементов матрицы плотности,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{kl} = \sum_m V_{km} e^{i\omega_{km}t} \rho_{ml} - \sum_n \rho_{kn} V_{nl} e^{i\omega_{nl}t}. \quad (2.34)$$

Уравнения (2.34) имеют смысл уравнений для матрицы плотности в представлении взаимодействия. В данных уравнениях величины  $\omega_{kl} = (E_k - E_l)/\hbar$  определяют частоты квантовых переходов, величины

$$V_{kl} = \int \psi_k^*(\boldsymbol{\xi}) V(\boldsymbol{\xi}) \psi_l(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (2.35)$$

есть матричные элементы оператора взаимодействия  $V = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E}$ , а величины

$$\mathbf{d}_{kl} = \int \psi_k^*(\boldsymbol{\xi}) \hat{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\xi}) \psi_l(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi \quad (2.36)$$

являются матричными элементами дипольного момента.

Уравнения для матрицы плотности (2.34) определяют эволюцию населённостей  $n_k(t) = \rho_{kk}(t)$  и когерентностей  $\rho_{kl}(t)$  для неподвижного атома при малых временах взаимодействия, когда влияние релаксационных процессов не существенно. Среднее значение  $\langle f \rangle$  любой наблюдаемой  $f = f(\boldsymbol{\xi})$  определяется с помощью матрицы плотности  $\rho$  обычным способом,

$$\langle f \rangle = \int \Psi^*(\boldsymbol{\xi}, t) f(\boldsymbol{\xi}) \Psi(\boldsymbol{\xi}, t) d^3\xi = \sum_{k,l} \rho_{kl} f_{lk} e^{i\omega_{kl} t}, \quad (2.37)$$

где матричные элементы наблюдаемой определены правилами (2.35),

$$f_{lk} = \int \psi_l^*(\boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) \psi_k(\boldsymbol{\xi}) d^3\xi. \quad (2.38)$$

Наряду с определением (2.30) элементы матрицы плотности могут быть определены как произведения коэффициентов  $\tilde{a}_k$ , которые входят в разложение волновой функции по не зависящим от времени собственным функциям  $\psi_k(\boldsymbol{\xi})$ ,

$$\Psi(\boldsymbol{\xi}, t) = \sum \tilde{a}_k \psi_k(\boldsymbol{\xi}). \quad (2.39)$$

Когда разложение волновой функции выбрано в виде (2.39) разложение матрицы плотности не включает явной зависимости от времени,

$$\rho(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi}', t) = \sum_{m,n} \tilde{\rho}_{mn} \psi_m(\boldsymbol{\xi}) \psi_n^*(\boldsymbol{\xi}'). \quad (2.40)$$

В этой форме записи элементы матрицы плотности  $\tilde{\rho}_{mn}$  определены соотношениями

$$\tilde{\rho}_{mn} = \tilde{a}_m \tilde{a}_n^*,$$



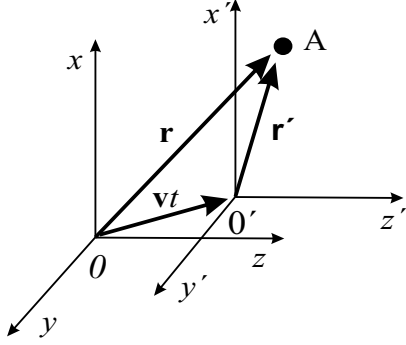


Рис. 2.3: Координаты атома в лабораторной системе и в собственной системе.

и связаны с ранее определёнными элементами матрицы плотности соотношениями

$$\tilde{\rho}_{mn} = \rho_{mn} e^{-i\omega_{mn}t}.$$

Динамические уравнения для элементов матрицы  $\tilde{\rho}$  включают члены с энергиями квантовых состояний:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{kl} = (E_k - E_l) \tilde{\rho}_{kl} + \sum_m V_{km} \tilde{\rho}_{ml} - \sum_n \tilde{\rho}_{kn} V_{nl}. \quad (2.41)$$

Матрица плотности  $\tilde{\rho}$  определяет средние значения  $\langle f \rangle$  наблюдаемой  $f = f(\xi)$  в виде

$$\langle f \rangle = \sum_{k,l} \tilde{\rho}_{kl} f_{lk} = \text{Tr}(\tilde{\rho}f), \quad (2.42)$$

где матричные элементы  $f_{lk}$  взяты по отношению к не зависящим от времени собственным функциям (2.38).

### 2.2.2 Движущийся атом

Структура уравнений для матрицы плотности для движущегося атома всегда может быть найдена преобразованием из системы атома в лабораторную систему координат.

Положим, что центр масс атома имеет координаты  $\mathbf{r}, t$  в лабораторной системе и координаты  $\mathbf{r}', t'$  в собственной системе (рис. 2.3). Для простоты две системы координат могут считаться совпадающими в начальный момент времени  $t = t' = 0$ . В любой произвольный момент времени координаты атома в двух системах отсчёта связаны преобразованием Галилея:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v}t', \quad t = t',$$

где  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$  есть скорость частицы в лабораторной системе координат. В ранее выведенных уравнениях (2.34), (2.41) производная по времени считалась взятой в системе атома, т. е. как  $\partial/\partial t'$ . Заменяя переменные  $\mathbf{r}'$  и  $t'$  на переменные  $\mathbf{r}$  и  $t$  согласно обратному преобразованию Галилея:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t,$$

можно выразить производную в системе атома через производные в лабораторной системе,

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}.$$

Последнее уравнение представляет общий результат. Уравнения для матрицы плотности движущегося атома включают не частную, а полную (конвективную) производную по времени

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (2.43)$$

Полная производная по времени описывает изменение матрицы плотности как во времени, так и в пространстве. Преобразование в лабораторную систему таким образом показывает, что для движущегося атома уравнения для матрицы плотности отличаются от уравнений (2.34) и (2.41) только смыслом производной по времени. Для движущегося атома уравнения движения для элементов матрицы плотности  $\rho$  есть

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho_{kl} = - \sum_m (\mathbf{d}_{km} \cdot \mathbf{E}) e^{i\omega_{km}t} \rho_{ml} + \sum_n \rho_{kn} (\mathbf{d}_{nl} \cdot \mathbf{E}) e^{i\omega_{nl}t}, \quad (2.44)$$

а для элементов матрицы плотности  $\tilde{\rho}$  есть

$$i\hbar \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{kl} = (E_k - E_l) \tilde{\rho}_{kl} - \sum_m (\mathbf{d}_{km} \cdot \mathbf{E}) \tilde{\rho}_{ml} + \sum_n \tilde{\rho}_{kn} (\mathbf{d}_{nl} \cdot \mathbf{E}). \quad (2.45)$$

Подчеркнём, что в приведённых уравнениях поле рассматривается в точке нахождения атома.

## 2.3 Релаксация атомной матрицы плотности

Члены спонтанной релаксации в уравнениях для атомной матрицы плотности следуют из анализа дипольного взаимодействия атома с вакуумным электромагнитным полем, рассматриваемым как квантованная фотонная система. Ниже мы кратко изложим стандартную процедуру квантования вакуумного поля, а затем рассмотрим дипольное взаимодействие атома с вакуумным полем и получим на этой основе явный вид релаксационных членов в уравнениях для атомной матрицы плотности.

### 2.3.1 Квантование вакуумного поля

В свободном пространстве, т. е. в отсутствии зарядов и токов, электрическое  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  и магнитное  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  поля удовлетворяют уравнениям Максвелла, которые мы записываем, как и все другие уравнения, в системе СИ:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

В данных уравнениях электрическая и магнитная индукции связаны с напряжённостями электрического и магнитного полей соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2.47)$$

Напомним, что электрическая  $\varepsilon_0$  и магнитная  $\mu_0$  постоянные удовлетворяют соотношению  $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ , где  $c$  есть скорость света в вакууме.

Вводя векторный потенциал  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющий условию поперечности,

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (2.48)$$

можно представить поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  в форме

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.49)$$

Подставив далее поля (2.49) в уравнения Максвелла можно убедиться, что векторный потенциал удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.50)$$

Введём теперь в рассмотрение некоторую большую, но конечную область пространства, выбрав её для простоты в форме куба с линейными размерами  $L$  и соответственно объёмом  $V = L^3$ . Электромагнитное поле, находящееся в данной области пространства, может быть разложено в трёхмерный ряд Фурье. Для векторного потенциала разложение в ряд Фурье может быть записано в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{c}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (2.51)$$

где коэффициенты  $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$  являются функциями времени. Считая далее, что бесконечное пространство может быть разбито на одинаковые области объёмом  $V = L^3$  естественно потребовать, чтобы векторный потенциал был периодичен на длине  $L$ . При таком выборе граничных условий компоненты волновых векторов  $\mathbf{k} = \{k_x, k_y, k_z\}$  пробегает значения

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L}, \quad (2.52)$$

определяемые значениями целых чисел  $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Зависимость коэффициентов разложения от времени согласно решениям волнового уравнения (2.50) имеет вид

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} \propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}, \quad \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^* \propto e^{i\omega_{\mathbf{k}}t},$$

где частоты  $\omega_{\mathbf{k}}$  и волновые векторы  $\mathbf{k}$  отдельных плоских бегущих волн связаны дисперсионным соотношением  $\omega_{\mathbf{k}} = kc$ , в котором  $k = |\mathbf{k}|$ . Согласно условию поперечности (2.48) коэффициенты разложения  $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$  ортогональны волновым векторам,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.53)$$

Заметим теперь, что поскольку функции  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  являются действительными, то для них естественным является представление в виде рядов, содержащих действительные коэффициенты разложения. Последние могут быть введены соотношениями

$$\mathbf{q}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_0} (\mathbf{c}_{\mathbf{k}} + \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^*), \quad \mathbf{p}_{\mathbf{k}} = -i\omega_{\mathbf{k}}\sqrt{\varepsilon_0} (\mathbf{c}_{\mathbf{k}} - \mathbf{c}_{\mathbf{k}}^*). \quad (2.54)$$

Между новыми коэффициентами существуют соотношения, идентичные соотношениям между координатой и импульсом гармонического осциллятора с единичной массой:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{p}_{\mathbf{k}}, \quad \dot{\mathbf{p}}_{\mathbf{k}} = -\omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}. \quad (2.55)$$

Новые коэффициенты разложения естественно по-прежнему удовлетворяют условию поперечности,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}_{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.56)$$

После введения действительных коэффициентов векторный потенциал, электрическое и магнитное поле принимают явный действительный

вид:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \left( \mathbf{q}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{k}}}{\omega_{\mathbf{k}}} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right), \quad (2.57)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} (\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{q}_{\mathbf{k}} \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p}_{\mathbf{k}} \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2.58)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{c}{\sqrt{\mu_0 V}} \sum_{\mathbf{k}} \left( [\mathbf{k} \times \mathbf{q}_{\mathbf{k}}] \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \frac{1}{\omega_{\mathbf{k}}} [\mathbf{k} \times \mathbf{p}_{\mathbf{k}}] \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right). \quad (2.59)$$

Отметим, что при выводе последних уравнений следует помнить, что в коэффициентах  $\mathbf{q}_{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$  содержится зависимость от времени, обусловленная гармонической зависимостью от времени коэффициентов  $\mathbf{c}_{\mathbf{k}}$ .

Рассмотрим теперь формулу для энергии вакуумного электромагнитного поля,

$$W_{\text{вак}} = \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) d^3 r. \quad (2.60)$$

Подстановка в эту формулу выражений для полей и учёт условий поперечности (2.56) приводят к выражению

$$W_{\text{вак}} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\mathbf{p}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{q}_{\mathbf{k}}^2), \quad (2.61)$$

которое идентично выражению для энергии системы гармонических осцилляторов единичной массы. Последнее выражение удобно переписать в несколько ином виде. Заметим, что будучи ортогональными волновому вектору  $\mathbf{k}$  векторы  $\mathbf{q}_{\mathbf{k}}$  и  $\mathbf{p}_{\mathbf{k}}$  имеют только две независимые компоненты  $q_i$  and  $p_i$ , где  $i = 1, 2$ . Вводя для величин  $\mathbf{k}$  и  $i$  одно удобное обозначение  $\lambda = (\mathbf{k}, i)$  можно представить энергию вакуумного поля в виде

$$W_{\text{вак}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (p_{\lambda}^2 + \omega_{\lambda}^2 q_{\lambda}^2). \quad (2.62)$$

Таким образом, выражения (2.61) и (2.62) формально совпадают с известным выражением для энергии бесконечной системы гармонических осцилляторов. Это обстоятельство позволяет рассмотреть величины  $q_{\lambda}$  и  $p_{\lambda}$  как квантовомеханические операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям для координаты и импульса квантовомеханической частицы,

$$[q_{\lambda}, q_{\lambda'}] = [p_{\lambda}, p_{\lambda'}] = 0, \quad [q_{\lambda}, p_{\lambda'}] = i\hbar \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.63)$$

Последние соотношения имеют выдающиеся физические следствия. Введение уравнений (2.63) кардинально изменяет взгляд на свободное электромагнитное поле. Вакуумное поле может теперь рассматриваться как

квантовомеханическая система, состоящая из осцилляторов поля, или вакуумных фотонных мод. Выражение (2.62) может соответственно считаться гамильтонианом  $H_{\text{вак}}$  свободного электромагнитного поля, выраженным через квантовомеханические операторы  $q_\lambda$  и  $p_\lambda$ .

В теоретическом анализе удобно использовать не операторы  $q_\lambda$  и  $p_\lambda$ , а их линейные комбинации - операторы уничтожения  $a_\lambda$  и рождения  $a_\lambda^+$  фотонов, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} a_\lambda &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\lambda}} (\omega_\lambda q_\lambda + ip_\lambda), \\ a_\lambda^+ &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_\lambda}} (\omega_\lambda q_\lambda - ip_\lambda). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_\lambda, a_{\lambda'}] = [a_\lambda^+, a_{\lambda'}^+] = 0, \quad [a_\lambda, a_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.65)$$

Гамильтониан свободного электромагнитного поля, будучи выражен через операторы рождения и уничтожения, принимает вид

$$H_{\text{вак}} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left( a_\lambda^+ a_\lambda + \frac{1}{2} \right), \quad (2.66)$$

где оператор  $\hat{n}_\lambda = a_\lambda^+ a_\lambda$  носит название оператора числа фотонов.

Действия операторов уничтожения и рождения на состояние отдельного осциллятора поля  $|n_\lambda\rangle$  определяются выражениями, которые следуют из соответствующих квантовомеханических соотношений для гармонического осциллятора:

$$\begin{aligned} a_\lambda |n_\lambda\rangle &= \sqrt{n_\lambda} |n_\lambda - 1\rangle, \\ a_\lambda^+ |n_\lambda\rangle &= \sqrt{n_\lambda + 1} |n_\lambda + 1\rangle, \\ \hat{n}_\lambda |n_\lambda\rangle &= a_\lambda^+ a_\lambda |n_\lambda\rangle = n_\lambda |n_\lambda\rangle. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Состояния осцилляторов поля, или вакуумных мод  $|n_\lambda\rangle$  и  $|n_\mu\rangle$ , удовлетворяют обычному условию ортонормированности

$$\langle n_\lambda | n_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}. \quad (2.68)$$

Последнее уравнение в системе (2.67) совместно с условием ортонормированности определяет число фотонов  $n_\lambda$  в моде вакуумного поля  $\lambda$ :

$$\langle n_\lambda | \hat{n}_\lambda | n_\lambda \rangle = \langle n_\lambda | n_\lambda | n_\lambda \rangle = n_\lambda. \quad (2.69)$$

Энергия квантованного вакуумного поля согласно приведённым уравнениям определяется соотношением

$$E_{\text{вак}} = \langle n_1 n_2 \dots n_\lambda \dots | H_{\text{вак}} | n_1 n_2 \dots n_\lambda \dots \rangle = \sum_{\lambda} \hbar \omega_{\lambda} \left( n_{\lambda} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.70)$$

Таким образом, процедура квантования трактует свободное электромагнитное поле как стационарную систему квантовомеханических гармонических осцилляторов поля, имеющих смысл вакуумных электромагнитных мод. Каждый осциллятор поля может находиться в различных квантовых состояниях, определяемых числом фотонов  $n_{\lambda}$  в данном типе осциллятора поля, или, другими словами, в данном типе вакуумной моды. Всё вакуумное поле соответственно характеризуется набором чисел фотонов  $\{n_1, n_2, \dots, n_{\lambda}, \dots\}$ , определяющих состояния отдельных вакуумных мод. Данный набор чисел показывает, что в вакуумной моде 1 находится  $n_1$  фотонов, в вакуумной моде 2 –  $n_2$  фотонов, ..., в вакуумной моде  $\lambda$  –  $n_{\lambda}$  фотонов, где каждая величина  $n_{\lambda}$  определяет число фотонов типа  $\lambda = (\mathbf{k}, i)$ , т. е. число фотонов с определённым волновым вектором  $\mathbf{k}$  и поляризацией  $i = 1, 2$ .

Придание переменным вакуумного поля смысла операторов одновременно означает, что как вектор-потенциал, так и электрическое и магнитное поле также становятся операторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\lambda} (\mathcal{A}_{\lambda} a_{\lambda} + \mathcal{A}_{\lambda}^* a_{\lambda}^+), \\ \mathbf{E} &= \sum_{\lambda} (\mathcal{E}_{\lambda} a_{\lambda} + \mathcal{E}_{\lambda}^* a_{\lambda}^+), \\ \mathbf{H} &= \sum_{\lambda} (\mathcal{H}_{\lambda} a_{\lambda} + \mathcal{H}_{\lambda}^* a_{\lambda}^+). \end{aligned} \quad (2.71)$$

В данных соотношениях величины  $\mathcal{A}_{\lambda}$ ,  $\mathcal{E}_{\lambda}$  и  $\mathcal{H}_{\lambda}$  могут рассматриваться как вектор-потенциал, электрическое и магнитное поле одного фотона,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\lambda} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_{\lambda}}} \mathbf{e}_{\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathcal{E}_{\lambda} &= i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\lambda}}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e}_{\lambda} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \\ \mathcal{H}_{\lambda} &= ic \sqrt{\frac{\hbar}{2\mu_0 V \omega_{\lambda}}} [\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\lambda}] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (2.72)$$

где  $\mathbf{e}_{\lambda}$  есть единичный вектор, определяющий поляризацию плоской бегущей волны фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

В шрёдингеровской картине квантовой механики каждому состоянию  $\{n\} = \{n_1, n_2, \dots, n_\lambda, \dots\}$  системы гармонических осцилляторов может быть сопоставлена стационарная волновая функция  $\varphi_{\{n\}} = \varphi_{n_1 n_2 n_3 \dots}$ , которая является произведением стационарных волновых функций  $\varphi_{n_\lambda}$  отдельных осцилляторов поля:

$$\varphi_{n_1 n_2 n_3 \dots} = \prod_{\lambda} \varphi_{n_\lambda}. \quad (2.73)$$

Волновые функции отдельных мод вакуумного поля  $\varphi_{n_\lambda}$  и  $\varphi_{n_\mu}$ , отвечающие состояниям вакуумных мод  $|n_\lambda\rangle$  и  $|n_\mu\rangle$ , удовлетворяют условию ортонормированности (2.68).

Гамильтониан отдельной моды вакуумного поля

$$H_\lambda = \hbar\omega_\lambda \left( a_\lambda^+ a_\lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (2.74)$$

определяет собственные функции моды

$$\Phi_{n_\lambda} = \varphi_{n_\lambda} e^{-iE_\lambda t/\hbar} \quad (2.75)$$

согласно стандартному квантовомеханическому уравнению на собственные функции и собственные значения

$$H_\lambda \varphi_{n_\lambda} = E_\lambda \varphi_{n_\lambda}, \quad (2.76)$$

где

$$E_\lambda = \hbar\omega_\lambda \left( n_\lambda + \frac{1}{2} \right) \quad (2.77)$$

есть энергия собственного состояния отдельной моды.

Приведённые выше соотношения полностью определяют вакуумное поле как квантовомеханическую систему.

### 2.3.2 Релаксация состояний двухуровневого атома

Обратимся теперь непосредственно к анализу релаксационных членов в уравнениях для атомной матрицы плотности, выбрав для простоты двухуровневую схему дипольного взаимодействия атома с вакуумным полем.

Предварительно отметим, что для того, чтобы обеспечить формальное сходство при квантовомеханическом описании вакуумного поля и двухуровневого атома удобно ввести операторы девозбуждения  $b$  и возбуждения  $b^+$  атома, определив их соотношениями:

$$b|g\rangle = 0, \quad b|e\rangle = |g\rangle, \quad b^+|g\rangle = |e\rangle, \quad b^+|e\rangle = 0, \quad (2.78)$$



где, как и прежде,  $|g\rangle$  есть основное, а  $|e\rangle$  – возбуждённое состояние атома. При таком определении атомных операторов гамильтониан двухуровневого атома, имеющего частоту оптического перехода  $\omega_0$ , может быть записан в виде

$$H_0 = \hbar\omega_0 b^+ b. \quad (2.79)$$

В соответствии с уравнениями (2.78) данный гамильтониан определяет основное и возбуждённое состояния атома с энергиями

$$E_g = \langle g | H_0 | g \rangle = 0, \quad E_e = \langle e | H_0 | e \rangle = \hbar\omega_0. \quad (2.80)$$

Матричные элементы оператора дипольного момента атома  $\hat{\mathbf{d}}$  при определении атомных операторов в виде (2.78) являются действительными,

$$\langle g | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle = \langle e | \hat{\mathbf{d}} | e \rangle = 0, \quad \langle e | \hat{\mathbf{d}} | g \rangle = \langle g | \hat{\mathbf{d}} | e \rangle = \mathbf{d}. \quad (2.81)$$

Явное выражение оператора дипольного момента через атомные операторы  $b$  и  $b^+$  может быть непосредственно видно из сравнения соотношений (2.81) с соотношениями (2.78):

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} (b + b^+). \quad (2.82)$$

С учётом данных определений оператор  $\tilde{V}$ , ответственный за дипольное взаимодействие атома с вакуумным полем, может быть записан в приближении вращающейся волны как

$$\tilde{V} = -\mathbf{d} \cdot \sum_{\lambda} (\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda} b^+ a_{\lambda} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda}^* b a_{\lambda}^+), \quad (2.83)$$

где, как обычно, суммирование распространяется на все моды вакуумного поля. Обозначим совместные состояния двухуровневого атома и одной из вакуумных мод в виде  $|g, n_{\lambda}\rangle = |g\rangle |n_{\lambda}\rangle$ ,  $|e, n_{\lambda}\rangle = |e\rangle |n_{\lambda}\rangle$ . Матричные элементы оператора дипольного взаимодействия  $\tilde{V}$ , определяющие переходы между такими состояниями, отличны от нуля только для однофотонных процессов поглощения и испускания:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{eg;n_{\lambda}, n_{\lambda}+1} &= \langle e, n_{\lambda} | \tilde{V} | g, n_{\lambda} + 1 \rangle = -\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda} \sqrt{n_{\lambda} + 1}, \\ \tilde{V}_{ge;n_{\lambda}+1, n_{\lambda}} &= \langle g, n_{\lambda} + 1 | \tilde{V} | e, n_{\lambda} \rangle = -\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda}^* \sqrt{n_{\lambda} + 1}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Действительно, из структуры выписанных матричных элементов видно, что они описывают переходы при которых возбуждение атома из состояния  $|g\rangle$  в состояние  $|e\rangle$  происходит совместно с поглощением одного

фотона из вакуумной моды и, наоборот, распад атома из состояния  $|e\rangle$  в состояние  $|g\rangle$  осуществляется совместно с испусканием одного фотона в вакуумную моду.

Теперь можно уже выписать полный гамильтониан системы "атом + вакуумное поле", который включает гамильтониан атома, гамильтониан вакуумного поля и оператор дипольного взаимодействия:

$$H = H_0 + H_{\text{вак}} + \tilde{V}. \quad (2.85)$$

В явном виде полный гамильтониан представляется соотношением

$$H = \hbar\omega_0 b^\dagger b + \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} \left( a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} + \frac{1}{2} \right) - \mathbf{d} \cdot \sum_{\lambda} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda} b^{\dagger} a_{\lambda} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\lambda}^* b a_{\lambda}^{\dagger} \right) \quad (2.86)$$

и определяет эволюцию системы "атом + вакуумное поле" в соответствии с уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi. \quad (2.87)$$

Уравнение Шредингера может быть использовано далее для получения уравнений для амплитуд вероятности, которые описывают совместные состояния атома и вакуумного поля. Для этого волновая функция системы "атом + вакуумное поле" должна быть разложена по собственным функциям атома и поля,

$$\Psi = \sum_a c_{a,n_{\lambda}} \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} \prod_{\lambda} \varphi_{n_{\lambda}} e^{-iE_{\lambda} t/\hbar}, \quad (2.88)$$

где индекс  $a$  определяет состояния атома  $a = g, e$  с энергиями  $E_a = E_g, E_e$ , заданными соотношениями (2.80). Напомним здесь, что собственные функции атома  $\psi_a$  удовлетворяют уравнениям

$$H_0 \psi_a = E_a \psi_a,$$

а собственные функции вакуумных мод удовлетворяют уравнениям

$$H_{\text{вак}} \varphi_{n_{\lambda}} = E_{\lambda} \varphi_{n_{\lambda}}, \quad E_{\lambda} = \hbar\omega_{\lambda} \left( n_{\lambda} + \frac{1}{2} \right).$$

Обратим также внимание, что для краткости сейчас мы указываем в амплитудах вероятности  $c_{a,n_{\lambda}}$  только один индекс поля  $n_{\lambda}$ . В таких обозначениях подразумевается, что перед и после индекса  $n_{\lambda}$  должны находиться все остальные индексы, определяющие всю совокупность квантовых чисел заполнения фотонов  $\{n\} = \{n_1, n_2, \dots, n_{\lambda}, \dots\}$ , где  $n_1$  - число

фотонов в вакуумной моде 1,  $n_2$  - число фотонов в вакуумной моде 2, ...,  $n_\lambda$  - число фотонов в вакуумной моде  $\lambda$ .

Подставляя разложение (2.88) в уравнение Шредингера (2.87) с гамильтонианом (2.86) можно стандартным образом получить систему уравнений для амплитуд вероятности  $c_{e,n_\lambda}$  и  $c_{g,n_\lambda}$ :

$$\begin{aligned} i \dot{c}_{e,n_\lambda} &= -\frac{1}{\hbar} \sum \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda \sqrt{n_\lambda + 1} e^{-i\Delta_\lambda t} c_{g,n_\lambda+1}, \\ i \dot{c}_{g,n_\lambda+1} &= -\frac{1}{\hbar} \sum \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\lambda^* \sqrt{n_\lambda + 1} e^{i\Delta_\lambda t} c_{e,n_\lambda}, \end{aligned} \quad (2.89)$$

где  $\Delta_\lambda = \omega_\lambda - \omega_0$  есть расстройка частоты вакуумной моды  $\omega_\lambda$  по отношению к частоте атомного перехода  $\omega_0$ . В данных формулах суммирование в правой части осуществляется по всем состояниям, в которых числа фотонов отличаются от чисел фотонов в левой части на единицу.

Бесконечная система уравнений (2.89) описывает состояния замкнутой системы "атом + вакуумное поле". Для данной системы можно ввести матрицу плотности с элементами, определёнными произведениями амплитуд вероятности в соответствии с соотношением (2.30):

$$\rho_{ab;n_\lambda n_\mu} = c_{a,n_\lambda} c_{b,n_\mu}^*. \quad (2.90)$$

Матрица плотности с элементами  $\rho_{ab;n_\lambda n_\mu}$  описывает как состояния атома (индексы  $a, b$ ), так и состояния вакуумного поля (индексы  $n_\lambda$  и  $n_\mu$ ). Взяв след по числам заполнения вакуумных мод можно ввести матрицу плотности атома с элементами  $\rho_{ab}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{ee} &= \sum_\lambda c_{e,n_\lambda} c_{e,n_\lambda}^*, \\ \rho_{eg} &= \sum_\lambda c_{e,n_\lambda} c_{g,n_\lambda+1}^*, \\ \rho_{gg} &= \sum_\lambda c_{g,n_\lambda+1} c_{g,n_\lambda+1}^*, \end{aligned} \quad (2.91)$$

для которой в соответствии с условием эрмитовости  $\rho_{ge} = \rho_{eg}^*$ .

Усреднение элементов матрицы плотности, осуществляемое суммированием по фотонным состояниям в формулах (2.91), должно производиться по бесконечному числу вакуумных мод, каждая из которых включает бесконечное число фотонных состояний. Весьма сложная процедура усреднения может быть, однако, значительно упрощена, если следуя теории спонтанного испускания Вейскопфа-Вигнера учесть, что явная форма релаксационных членов не может зависеть от конкретного состояния вакуумного поля (Weisskopf and Wigner, 1930; Agarwal, 1974). Согласно

данной важной идее можно при усреднении выбрать простейшее состояние вакуумного поля, отвечающее нулевым числам заполнения для всех мод вакуумного поля. Двухуровневый атом может быть соответственно рассмотрен как находящийся в начальный момент времени в возбуждённом состоянии  $|e\rangle$ .

Следуя указанной идее мы положим, что в начальный момент времени  $t = t_0$  система "атом + вакуумное поле" находится в состоянии  $|e, 0\rangle$ , для которого амплитуда вероятности  $c_{e,0}(t_0) = 1$ , а все остальные начальные амплитуды вероятности равны нулю. В частности, равны нулю начальные амплитуды вероятности состояний  $|g, 1_\lambda\rangle$ , в которые система может испустить фотон,  $c_{g,1_\lambda}(t_0) = 0$ . При данном простейшем выборе начальных условий можно выделить небольшое число уравнений, определяющих эволюцию амплитуд вероятности:

$$\dot{c}_{e,0} = \frac{i}{\hbar} \sum_{\lambda} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda} e^{-i\Delta_{\lambda} t} c_{g,1_{\lambda}}, \quad (2.92)$$

$$\dot{c}_{g,1_{\lambda}} = \frac{i}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda}^* e^{i\Delta_{\lambda} t} c_{e,0}. \quad (2.93)$$

Здесь первое уравнение описывает распад атома с излучением энергии во все моды вакуумного поля. Второе уравнение описывает приход атома в основное состояние при одновременном возбуждении вакуумных мод. Амплитуды вероятности, входящие в данные уравнения, определяют элементы атомной матрицы плотности в соответствии с соотношениями (2.91):

$$\begin{aligned} \rho_{ee} &= c_{e,0} c_{e,0}^*, \\ \rho_{eg} &= \sum_{\lambda} c_{e,0} c_{g,1_{\lambda}}^* = c_{e,0} \sum_{\lambda} c_{g,1_{\lambda}}^*, \\ \rho_{gg} &= \sum_{\lambda} c_{g,1_{\lambda}} c_{g,1_{\lambda}}^*. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Выписанных соотношений уже достаточно для нахождения релаксационных членов в уравнениях для атомной матрицы плотности. Взяв формальное решение уравнения (2.93)

$$c_{g,1_{\lambda}} = \frac{i}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda}^* \int_{t_0}^t e^{i\Delta_{\lambda} t'} c_{e,0}(t') dt', \quad (2.95)$$

и подставив его в уравнение (2.92) получим

$$\dot{c}_{e,0} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_{\lambda} |\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\lambda}|^2 \int_{t_0}^t e^{i\Delta_{\lambda}(t'-t)} c_{e,0}(t') dt'. \quad (2.96)$$

В последнем уравнении сумма по вакуумным модам  $\lambda = \mathbf{k}, i$  включает суммирование по волновым векторам  $\mathbf{k}$  и поляризациям  $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2$ ) вакуумных мод. Поскольку любые соседние моды имеют весьма близкие волновые векторы, то суммирование по волновым векторам может быть заменено интегрированием по волновым векторам. Учитывая, что в соответствии с правилом квантования волновых векторов (2.52) одна вакуумная мода занимает в пространстве волновых векторов "объём"

$$(\Delta k)^3 = (2\pi/L)^3 = (2\pi)^3/V,$$

где  $V = L^3$ , можно записать сумму по волновым векторам как

$$\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k.$$

В последнем интеграле можно перейти к интегрированию по частотам  $\omega_\lambda = kc$  и направлениям волновых векторов

$$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk do = \frac{V}{(2\pi c)^3} \int \omega_\lambda^2 d\omega_\lambda do,$$

где  $do = \sin\theta d\theta d\varphi$  есть элемент телесного угла.

Замечая далее, что согласно закону сохранения энергии частоты фотонов  $\omega_\lambda$  весьма близки к частоте квантового перехода атома,  $\omega_\lambda \simeq \omega_0$ , и соответственно амплитуды вероятности  $c_{e,0}(t')$  являются медленно меняющимися функциями частоты  $\omega_\lambda$  можно свести интеграл по частотам к известной формуле для  $\delta$ -функции:

$$\int e^{i(\omega_\lambda - \omega_0)(t' - t)} d\omega_\lambda = 2\pi\delta(t - t').$$

После этого интегрирование по времени, которое меняется в интервале  $t_0 < t' < t$ , сводится к интегрированию по половине  $\delta$ -функции и приводит уравнение (2.96) к промежуточному виду

$$\dot{c}_{e,0} = -\frac{V\omega_0^2}{8\pi^2 c^3 \hbar^2} \left( \sum_{i=1,2} \int |\mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_i|^2 do \right) c_{e,0}(t).$$

Для вычисления последнего интеграла удобно выбрать в качестве оси  $Oz$  направлением вектора  $\mathbf{d}$  и выбрать в качестве двух ортогональных векторов поляризации вектор  $\mathbf{e}_1$  ортогональный векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{d}$  и вектор  $\mathbf{e}_2$  лежащий в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{d}$  (рис. 4.2). При таком выборе геометрии спонтанного испускания фотонов единственное отличное от нуля

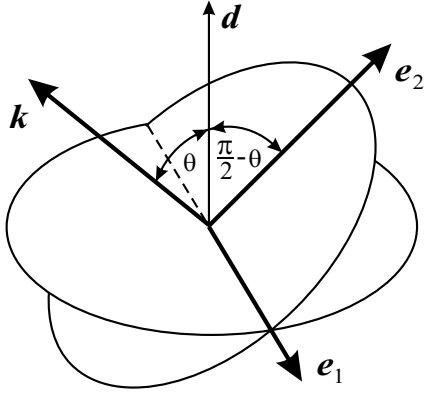


Рис. 2.4: Взаимное расположение векторов, определяющих спонтанное испускание фотонов двухуровневым атомом.

скалярное произведение сведётся к виду  $\mathbf{d} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_2 = |\mathbf{d}| |\boldsymbol{\mathcal{E}}_\lambda| \sin \theta$ , а интегрирование по углам - к результату  $\int \sin^2 \theta d\Omega = 8\pi/3$ . После этого уравнение (2.96) сводится уже к окончательному виду

$$\dot{c}_{e,0} = -\gamma c_{e,0}, \quad (2.97)$$

где  $\gamma$  есть половина скорости спонтанного распада

$$W_{\text{сп}} = 2\gamma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4|\mathbf{d}|^2 \omega_0^3}{3\hbar c^3}. \quad (2.98)$$

Если теперь взять производную по времени от первого уравнения (2.94) и воспользоваться уравнением (2.97), то можно получить одно из уравнений, описывающих релаксацию атомной матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{ee} = -2\gamma \rho_{ee}. \quad (2.99)$$

Взяв аналогичным образом производную по времени от второго уравнения (2.94) и замечая, что второй член производной обращается в нуль согласно первому уравнению (2.92) можно также получить уравнение, описывающее релаксацию недиагонального элемента матрицы плотности:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{eg} = -\gamma \rho_{eg}. \quad (2.100)$$

Для скорости изменения диагонального элемента матрицы плотности  $\rho_{gg}$  рассматриваемый метод даёт уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_{gg} = 2\gamma \rho_{ee}. \quad (2.101)$$

Это уравнение может быть также получено из уравнения (2.99) и условия нормировки,  $\rho_{gg} + \rho_{ee} = 1$ .

Найденные выше релаксационные члены (2.99)-(2.101), будучи добавлены к ранее выписанным динамическим членам, полностью определяют уравнения для матрицы плотности двухуровневого атома. Обратим внимание, что формальный вид релаксационных членов одинаков как для неподвижного, так и для движущегося атома, поскольку релаксационные члены инвариантны при преобразовании Галилея.

## 2.4 Некогерентное взаимодействие атома с излучением

Получив в предыдущем разделе релаксационные члены, входящие в уравнения для матрицы плотности двухуровневого атома, мы обсудим ниже дипольное взаимодействие двухуровневого атома с монохроматическими световыми полями.

### 2.4.1 Возбуждение атома бегущей световой волной

Рассмотрим взаимодействие двухуровневого атома с бегущей монохроматической волной, имеющей вектор электрического поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 (e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} + e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}). \quad (2.102)$$

Для данной задачи уравнения для матрицы плотности в приближении вращающейся волны есть

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{ee} &= i\Omega (e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)} \rho_{ge} - e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)} \rho_{eg}) - 2\gamma \rho_{ee}, \\ \frac{d}{dt} \rho_{eg} &= i\Omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)} (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - \gamma \rho_{eg}, \\ \frac{d}{dt} \rho_{gg} &= i\Omega (e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)} \rho_{eg} - e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)} \rho_{ge}) + 2\gamma \rho_{ee}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

где частота Раби  $\Omega$  и расстройка  $\delta$  определены уравнениями (2.13), (2.14). Напомним, что в приведённых уравнениях элементы матрицы плотности являются функциями координаты и времени,  $\rho_{ab} = \rho_{ab}(\mathbf{r}, t)$ , а скорость атома считается постоянной.

Явная зависимость от времени может быть исключена из уравнений (2.103) простой подстановкой недиагональных элементов,

$$\rho_{eg} = \sigma_{eg} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)}. \quad (2.104)$$

После этого уравнения (2.103) переходят в систему уравнений с постоянными коэффициентами,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{ee} &= i\Omega(\sigma_{ge} - \sigma_{eg}) - 2\gamma\rho_{ee}, \\ \frac{d}{dt}\sigma_{eg} &= i\Omega(\rho_{gg} - \rho_{ee}) - [\gamma - i(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})]\sigma_{eg}, \\ \frac{d}{dt}\rho_{gg} &= i\Omega(\sigma_{eg} - \sigma_{ge}) + 2\gamma\rho_{ee}.\end{aligned}\quad (2.105)$$

Данные уравнения могут быть решены в стационарном случае,

$$\begin{aligned}\rho_{ee} &= \frac{\Omega^2}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + 2\Omega^2}, \\ \rho_{eg} = \rho_{ge}^* &= -\frac{\Omega(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - i\gamma)}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + 2\Omega^2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \delta t)}, \\ \rho_{gg} &= \frac{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + \Omega^2}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + 2\Omega^2}.\end{aligned}\quad (2.106)$$

Решения (2.106) естественно удовлетворяют условию нормировки  $\rho_{gg} + \rho_{ee} = 1$ .

В пределе низкой интенсивности излучения, когда  $\Omega \rightarrow 0$ , радиационная релаксация переводит всю населённость в основное состояние,  $n_e = \rho_{ee} \rightarrow 0$  и  $n_g = \rho_{gg} \rightarrow 1$ . При высокой интенсивности излучения когда  $\Omega \gg \gamma$ , *оптическое насыщение* приводит к выравниванию населённостей,  $n_e \simeq n_g \simeq 1/2$ . Зависимости населённостей от скорости описываются лорентцевскими функциями, отражающими резонансный характер взаимодействия (рис. 2.5).

В соответствии с тем, что атомная матрица плотности полностью описывает состояния атома известные значения элементов атомной матрицы плотности (2.106) позволяют найти любые наблюдаемые для атома. Так среднее значение дипольного момента атома в квазистационарном состоянии согласно уравнению (2.37) есть

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{d} \rangle &= \mathbf{d} (\rho_{ge} e^{i\omega_0 t} + \rho_{eg} e^{-i\omega_0 t}) \\ &= \mathbf{d} [c \cdot \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + s \cdot \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)],\end{aligned}\quad (2.107)$$

где введены действительные коэффициенты

$$\begin{aligned}c &= -\frac{2\Omega\gamma(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + 2\Omega^2}, \\ s &= \frac{2\Omega\gamma}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + 2\Omega^2}.\end{aligned}$$



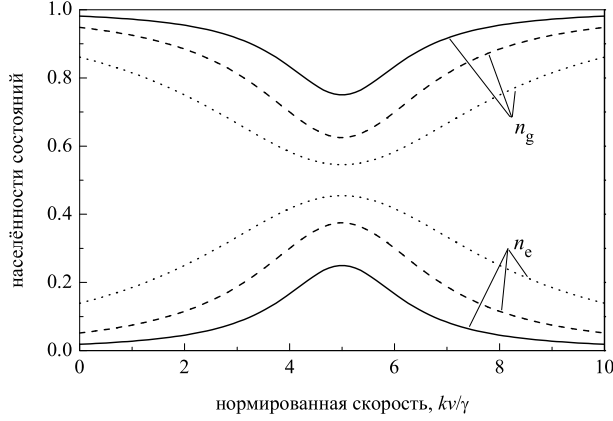


Рис. 2.5: Населённости состояний двухуровневого атома, возбуждаемого бегущей световой волной, как функции скорости вдоль направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

В квазистационарном состоянии наведённый дипольный момент осциллирует на частоте световой волны. Осцилляции дипольного момента происходят как синфазно, так и в противофазе с осцилляциями световой волны. Аналогичным образом может быть найдена средняя энергия взаимодействия атома с полем бегущей волны, которая с учётом ПВВ есть

$$\begin{aligned}
 U &= -\langle \mathbf{d} \rangle \cdot \mathbf{E} = -(\mathbf{d}_{ge}\rho_{eg} + \mathbf{d}_{eg}\rho_{ge}) \cdot \mathbf{E} \\
 &= 2\hbar (\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \frac{\Omega^2}{(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + \gamma^2 + 2\Omega^2}.
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что знак энергии взаимодействия зависит от эффективной расстройки частоты волны относительно частоты атомного перехода.

### 2.4.2 Возбуждение атома стоячей световой волной

Рассмотрим более сложную задачу взаимодействия двухуровневого атома со стоячей световой волной, созданной двумя встречными бегущими волнами. Для определённости будем считать, что волна распространяется вдоль оси Oz. Для такой волны вектор электрического поля может быть записан в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kz - \omega t) + \mathbf{E}_0 \cos(kz + \omega t) = 2\mathbf{E}_0 \cos kz \cos \omega t. \quad (2.108)$$

Для данной задачи уравнения для атомной матрицы плотности в приближении вращающейся волны есть

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{ee} &= 2i\Omega \cos kz (e^{-i\delta t}\rho_{ge} - e^{i\delta t}\rho_{eg}) - 2\gamma\rho_{ee}, \\ \frac{d}{dt}\rho_{eg} &= 2i\Omega e^{-i\delta t} \cos kz (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - \gamma\rho_{eg}, \\ \frac{d}{dt}\rho_{gg} &= 2i\Omega \cos kz (e^{i\delta t}\rho_{eg} - e^{-i\delta t}\rho_{ge}) + 2\gamma\rho_{ee},\end{aligned}\tag{2.109}$$

где частота Раби  $\Omega$  определена уравнением (2.14).

Выписанные уравнения могут быть сразу упрощены исключением явной зависимости от времени подстановками  $\rho_{eg} = \sigma_{eg} \exp(-i\delta t)$ , после которых уравнения (2.109) переходят в систему уравнений с периодическими коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_{ee} &= -2i\Omega \cos kz (\sigma_{eg} - \sigma_{ge}) - 2\gamma\rho_{ee}, \\ \frac{d}{dt}\sigma_{eg} &= 2i\Omega \cos kz (\rho_{gg} - \rho_{ee}) - (\gamma - i\delta)\sigma_{eg}, \\ \frac{d}{dt}\rho_{gg} &= 2i\Omega \cos kz (\sigma_{eg} - \sigma_{ge}) + 2\gamma\rho_{ee}.\end{aligned}$$

Рассмотрим подробно случай слабого насыщения, который может быть описан приближением скоростных уравнений при условии малости безразмерного параметра насыщения  $G = 2\Omega^2/\gamma^2$ . В ПСУ диагональные элементы матрицы плотности могут рассматриваться как не зависящие от координаты, а недиагональные элементы должны рассматриваться как включающие первые пространственные гармоники:

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\alpha} &= \rho_{\alpha\alpha}^0, \\ \sigma_{eg} &= \sigma_{eg}^1 e^{ikz} + \sigma_{eg}^{-1} e^{-ikz}.\end{aligned}$$

В таком приближении стационарное решение уравнений (2.109) имеет вид

$$\begin{aligned}\rho_{ee} &= \rho_{ee}^0 = \frac{1}{2} \frac{G(L_- + L_+)}{1 + G(L_- + L_+)}, \\ \rho_{gg} &= \rho_{gg}^0 = \frac{1 + \frac{1}{2}G(L_- + L_+)}{1 + G(L_- + L_+)}, \\ \rho_{eg} &= \frac{i\Omega/[\gamma - i(\delta - kv)]}{G(L_- + L_+)} e^{ikz} + \frac{i\Omega/[\gamma - i(\delta + kv)]}{G(L_- + L_+)} e^{-ikz},\end{aligned}$$

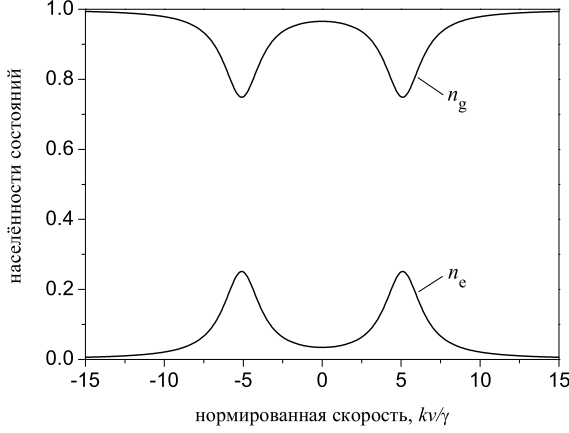


Рис. 2.6: Зависимость от скорости населённостей двухуровневого атома, возбуждаемого стоячей световой волной при слабом насыщении.

где  $L_{\pm}$  - лоренцевские функции скорости:

$$L_{\pm} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + (\delta \pm kv)^2}. \quad (2.110)$$

При рассматриваемом слабом насыщении атомные населённости  $n_g = \rho_{gg}$  и  $n_e = \rho_{ee}$  определяются однофотонными процессами возбуждения атома, обусловленными его взаимодействием с двумя встречными бегущими волнами (2.108). Зависимости населённостей двухуровневого атома от скорости при слабом насыщении показаны на рис. 2.6. При сильном насыщении зависимости населённостей от скорости становятся более сложными функциями вследствие возникновения многофотонных процессов возбуждения атома.

## 2.5 Спектр спонтанного излучения

Спектральное распределение спонтанного излучения, обусловленного радиационной релаксацией, может быть установлено из простых соображений. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двухуровневой квантовой частицы и фотона вакуумного поля. Когда частица находится в возбуждённом состоянии, то фотон отсутствует и полная энергия системы  $\mathcal{E}$  совпадает с энергией возбуждённого состояния частицы  $E_e$ , т. е.  $\mathcal{E} = E_e$ . После спонтанного испускания фотона полная энергия системы есть  $\mathcal{E} = E_g + \hbar\omega$ .

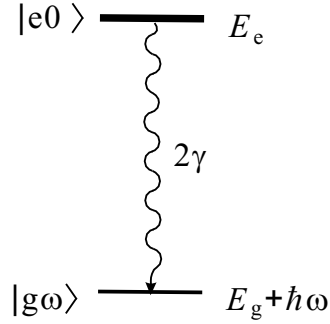


Рис. 2.7: Квантовые состояния системы "двухуровневая частица + фотон спонтанного излучения".

Эволюция системы "двухуровневый атом + вакуумный фотон" может быть опять установлена из уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (H + V)\Psi, \quad (2.111)$$

где гамильтониан  $H$  описывает состояния двухуровневой частицы и фотона, а  $V$  есть оператор дипольного взаимодействия. Раскладывая волновую функцию системы по невозмущённым волновым функциям системы "двухуровневый атом + вакуумный фотон"

$$\Psi = \sum_{\nu} c_{\nu}(t) \Psi_{\nu}^0 = \sum_{\nu} c_{\nu}(t) \psi_{\nu}^0 e^{-i\varepsilon_{\nu}t/\hbar} \quad (2.112)$$

и используя ортонормированность невозмущённых состояний получим уравнения для амплитуд вероятности

$$i \frac{\partial c_{\nu}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \sum_{\nu'} \langle \nu | V | \nu' \rangle c_{\nu'} e^{i(\varepsilon_{\nu} - \varepsilon_{\nu'})t/\hbar}. \quad (2.113)$$

Заметим теперь, что система имеет квантовые состояния  $|\nu\rangle$  двух типов, состояния  $|e0\rangle$  и  $|g1_{\omega}\rangle$  (рис. 2.7). Когда система находится в состоянии  $|e0\rangle$  частица находится на верхнем уровне, а фотон отсутствует. При нахождении системы в состоянии  $|g1_{\omega}\rangle$  частица находится на основном уровне и имеется один фотон типа частоты  $\omega$ . Положим далее, что в начальный момент времени  $t = 0$  частица находится на верхнем уровне, а фотон отсутствует. В таком случае амплитуда вероятности нахождения системы в верхнем состоянии  $c_{e0}(0) = 1$ , а остальные амплитуды  $c_{g1_{\omega}}(0) = 0$ . Учтём также, что согласно (2.97) амплитуда верхнего состояния распадается как  $c_{e0}(t) = e^{-\gamma t}$ . Тогда в системе достаточно рассмотреть только одно уравнение

$$i \frac{\partial c_{g1_{\omega}}}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \langle g1_{\omega} | V | e0 \rangle e^{i(E_g + \hbar\omega - E_e)t/\hbar} e^{-\gamma t} = \frac{1}{\hbar} \langle g1_{\omega} | V | e0 \rangle e^{[i(\omega - \omega_0) - \gamma]t}.$$

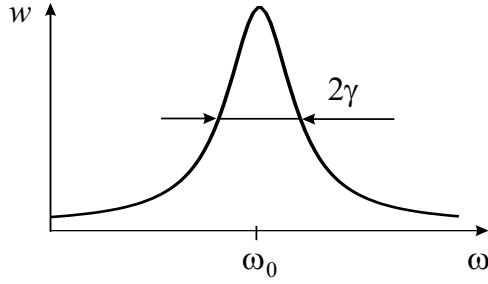


Рис. 2.8: Вероятность радиационной релаксации двухуровневой частицы как функция частоты испущенного фотона.

Решая это уравнение и рассматривая большие времена имеем

$$c_{g1\omega}(t \rightarrow \infty) = \frac{\langle g1\omega | V | e0 \rangle / \hbar}{\omega - \omega_0 + i\gamma}.$$

Отсюда следует, что при больших временах вероятность испускания фотона с определённой частотой определяется соотношением

$$w(\omega) = |c_{1g\omega}(\infty)|^2 = \frac{|\langle g1\omega | V | e0 \rangle|^2 / \hbar^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (2.114)$$

Таким образом, частотная зависимость вероятности радиационной релаксации определяется лоренцевской линией (рис. 2.7).

Отметим ещё, что наряду с безразмерной вероятностью спонтанного испускания на определённой частоте (2.114) можно ввести вероятность спонтанного испускания в единицу времени и единичном интервале частоты  $W(\omega)$ . В таком случае полная вероятность спонтанного испускания в единицу времени  $W_{\text{сп}} = 2\gamma$  может быть записана в виде

$$W_{\text{сп}} = \int_{-\infty}^{+\infty} W(\omega) d\omega.$$

Поскольку частотная зависимость вероятности спонтанного испускания уже известна из соотношения (2.114), то величина  $W(\omega)$  очевидно может быть представлена в виде

$$W(\omega) = \text{const} \cdot \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$

Из последних двух соотношений можно определить значение константы и найти окончательное выражение для вероятности спонтанного испускания в единицу времени в единичный частотный интервал

$$W(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$



## Глава 3

# Взаимодействие материальной среды с излучением

### 3.1 Уравнения электромагнитного поля

Приведём необходимые для дальнейшего обсуждения уравнения электромагнитного поля в материальной среде. Будучи записаны в системе СИ уравнения Максвелла для материальной среды имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (3.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (3.4)$$

где электрическая  $\mathbf{D}$  и магнитная  $\mathbf{B}$  индукции связаны с электрической  $\mathbf{E}$  и магнитной  $\mathbf{H}$  поляризацией среды уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (3.5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (3.6)$$

$\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  есть электрическая и магнитная постоянные,  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  - соответственно плотность заряда и плотность тока проводимости. Электрическая и магнитная индукции, а также плотность тока проводимости связаны с напряжённостями поля соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.9)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  - относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости,  $\sigma$  - удельная проводимость среды.

Из уравнений Максвелла можно получить дифференциальные уравнения второго порядка для напряжённостей поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Для этого следует применить операцию ротора к первым двум уравнениям Максвелла и воспользоваться тождеством, справедливым для произвольного вектора  $\mathbf{V}$ :

$$\text{rot rot } \mathbf{V} = \text{grad div } \mathbf{V} - \Delta \mathbf{V}.$$

Используя далее уравнения Максвелла вместе с материальными уравнениями (3.7)-(3.9) и рассматривая достаточно важный случай однородной среды, когда  $\varepsilon = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ , можно получить следующие уравнения для векторов электрического и магнитного поля:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \nabla \rho + \mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (3.10)$$

$$\Delta \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \mathbf{j}, \quad (3.11)$$

где как обычно соотношение

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad (3.12)$$

определяет скорость света в вакууме.

## 3.2 Материальные уравнения

### 3.2.1 Уравнения динамики среды

Рассмотрим уравнения, описывающие влияние оптического излучения на состояние материальной среды. Последнюю будем предполагать состоящей из двухуровневых атомов, взаимодействующих с излучением на дипольном переходе между нижним состоянием  $|1\rangle$  и верхним состоянием  $|2\rangle$ .

Как подчёркивалось в главе 2, в случае дипольного взаимодействия изолированного атома с оптическим излучением внутренняя динамика атома определяется не только вынужденными переходами атома, но и релаксацией состояний атома. В том случае, когда двухуровневые атомы находятся в среде, релаксация атомных состояний обычно может быть описана феноменологическим оператором релаксации  $\Gamma$ , включающим два характерных времени релаксации: время продольной релаксации  $T_1$  и время поперечной релаксации  $T_2$ . Диагональные элементы оператора



$\Gamma$  определяют релаксацию диагональных элементов матрицы плотности с временем  $T_1$  к стационарным значениям  $\rho_{11}^0$  и  $\rho_{22}^0$ , существующим в отсутствие внешнего излучения, а недиагональные элементы - релаксацию недиагональных элементов матрицы плотности  $\rho_{12}$  и  $\rho_{21}$  с временем  $T_2$  к нулевым значениям. Иначе говоря, с временем  $T_1$  релаксируют населённости квантовых состояний среды, а с временем  $T_2$  релаксирует поляризация среды.

В феноменологической модели среды, описываемой временами релаксации  $T_1$  и  $T_2$ , уравнение для матрицы плотности двухуровневого атома, взаимодействующего с излучением, может быть записано в виде

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H_0 - \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}, \rho] - i\hbar(\Gamma\rho), \quad (3.13)$$

где

$$[H, \rho] = H\rho - \rho H, \quad (3.14)$$

есть коммутатор (скобка Пуассона), а матрица

$$(\Gamma\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{11} - \rho_{11}^0}{T_1} & \frac{\rho_{12}}{T_2} \\ \frac{\rho_{21}}{T_2} & \frac{\rho_{22} - \rho_{22}^0}{T_1} \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

определяет релаксационные члены. Вектор  $\mathbf{E}$  определяет как обычно электрическое поле излучения, взаимодействующего со средой,  $\mathbf{d}$  есть оператор дипольного момента атома.

Раскрывая скобку Пуассона и учитывая элементы оператора релаксации можно выписать уравнения для элементов матрицы плотности двухуровневого атома, находящегося в среде. В том случае, когда элементы матрицы плотности определены по не зависящим от времени собственным функциям свободного атома уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) (\rho_{12} - \rho_{21}) - \frac{1}{T_1} (\rho_{22} - \rho_{22}^0), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) (\rho_{12} - \rho_{21}) - \frac{1}{T_1} (\rho_{11} - \rho_{11}^0), \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = i\omega_0 \rho_{12} - \frac{i}{\hbar} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{1}{T_2} \rho_{12}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \rho_{21}}{\partial t} = -i\omega_0 \rho_{21} + \frac{i}{\hbar} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) (\rho_{11} - \rho_{22}) - \frac{1}{T_2} \rho_{21}. \quad (3.19)$$

В данных уравнениях  $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$  есть частота квантового перехода атома,  $\mathbf{d}$  есть матричный элемент дипольного момента атома, считающийся выбранным действительным. При выписывании уравнений (3.16)-

(3.19) использованы соотношения для матричных элементов гамильтониана свободного атома,

$$(H_0)_{11} = E_1, \quad (H_0)_{22} = E_2, \quad (H_0)_{12} = (H_0)_{21} = 0,$$

и для матричных элементов дипольного момента атома

$$\mathbf{d}_{12} = \mathbf{d}_{21} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{d}_{11} = \mathbf{d}_{22} = 0.$$

Напомним, что диагональные элементы матрицы плотности двухуровневого атома удовлетворяют обычному условию нормировки

$$\rho_{11} + \rho_{22} = 1, \quad \rho_{11}^0 + \rho_{22}^0 = 1.$$

Введём теперь необходимую для дальнейшего анализа плотность атомов в среде  $N_a$ . Эта величина может быть представлена как  $N_a = N_1 + N_2$ , где величины  $N_1 = N_a \rho_{11}$  и  $N_2 = N_a \rho_{22}$  определяют плотности населённости нижнего и верхнего состояний среды. Введём также плотность разностной населённости

$$N = N_1 - N_2 = N_a(\rho_{11} - \rho_{22}) \quad (3.20)$$

и выпишем ещё выражение для дипольного момента единицы объёма среды, т. е. для поляризации среды

$$\mathbf{P} = N_a \text{Tr}(\rho \mathbf{d}) = N_a(\rho_{12} + \rho_{21})\mathbf{d}. \quad (3.21)$$

Теперь микроскопические уравнения (3.16)-(3.19) могут быть использованы для вывода уравнений, определяющих поляризацию и плотность разностной населённости среды. Умножим сначала уравнения (3.18) и (3.19) на  $\mathbf{d}$ , сложим получившиеся уравнения и умножим их ещё на число атомов в единице объёма  $N_a$ . После этого для поляризации среды получим уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{T_2} = \omega_0 \mathbf{S}, \quad (3.22)$$

где в правой части стоит величина

$$\mathbf{S} = iN_a(\rho_{12} - \rho_{21})\mathbf{d}. \quad (3.23)$$

Далее умножим уравнения (3.16) и (3.17) на плотность атомов  $N_a$  и вычтем получившиеся уравнения. После этого для плотности разностной населённости получим уравнение

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(N - N^0) = -\frac{2}{\hbar}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{S}), \quad (3.24)$$

где величина

$$N^0 = N_a(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \quad (3.25)$$

есть плотность разностной населённости в отсутствие оптического излучения. Замечая далее, что величина  $\mathbf{S}$  может быть выражена из уравнения (3.22) как

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\omega_0} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{T_2} \right) \quad (3.26)$$

и подставляя выражение (3.26) в уравнение (3.24) можно получить окончательное уравнение для плотности разностной населённости

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N^0) = -\frac{2}{\hbar\omega_0} \mathbf{E} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{T_2} \right). \quad (3.27)$$

Для получения окончательного уравнения для поляризации среды возьмём предварительно производную по времени от величины  $\mathbf{S}$ , определённой уравнением (3.23). Используя уравнения (3.18) и (3.19) получим

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{\mathbf{S}}{T_2} - \omega_0 \mathbf{P} + N \mathbf{R}, \quad (3.28)$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{2}{\hbar} (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{d}. \quad (3.29)$$

Подставляя далее величину  $\mathbf{S}$  из уравнения (3.26) в правую часть уравнения (3.28) можно переписать производную величины  $\mathbf{S}$  в виде

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_0 T_2} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \frac{\mathbf{P}}{T_2} \right) - \omega_0 \mathbf{P} + N \mathbf{R}. \quad (3.30)$$

Продифференцировав далее уравнение (3.22) по времени и подставив значение производной  $\partial \mathbf{S} / \partial t$  из уравнения (3.30) получим следующее уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \left( \omega_0^2 + \frac{1}{T_2^2} \right) \mathbf{P} = \frac{2\omega_0}{\hbar} N (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{d}. \quad (3.31)$$

Положим теперь для определённости, что ось квантования выбрана направленной вдоль вектора электрического поля, т. е.  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}$ . Тогда матричный элемент дипольного момента атома может быть записан в виде  $\mathbf{d} = d \mathbf{e}$ , а выражение в правой части уравнения (3.31) можно переписать как

$$(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{d} = d^2 \mathbf{E}. \quad (3.32)$$

Перед тем как выписать окончательные уравнения заметим, что поскольку время  $T_2$  значительно превышает период световых колебаний, а поляризация среды осциллирует на частоте поля, то последний член в правой части уравнения (3.27) и последний член в левой части уравнения (3.31) могут быть опущены ввиду их малости. После этого система уравнений, описывающих динамику атомной среды, принимает окончательный вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \omega_0^2 \mathbf{P} = \frac{2d^2 \omega_0}{\hbar} N \mathbf{E}, \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (N - N^0) = -\frac{2}{\hbar \omega_0} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (3.34)$$

О данных уравнениях часто говорят как о материальных уравнениях.

### 3.2.2 Уравнения для медленных переменных среды

Во многих задачах лазерной физики оптическое излучение является квазимонохроматическим с какой-либо центральной частотой  $\omega$  и медленно меняющейся амплитудой. Электрическое поле такого излучения может быть представлено в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{e} \left( \tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t} + \tilde{\mathcal{E}}^* e^{-i\omega t} \right), \quad (3.35)$$

где  $\tilde{\mathcal{E}}$  есть комплексная амплитуда электрического поля, являющаяся медленно меняющейся функцией времени, а  $\mathbf{e}$  есть единичный вектор поляризации. При такой форме электрического поля наведённая им поляризация также является квазимонохроматической и может быть представлена в аналогичном виде

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \mathbf{e} \left( \tilde{\mathcal{P}} e^{i\omega t} + \tilde{\mathcal{P}}^* e^{-i\omega t} \right), \quad (3.36)$$

где комплексная величина  $\tilde{\mathcal{P}}$  имеет смысл медленно меняющейся амплитуды поляризации.

В рассматриваемом случае материальные уравнения (3.33), (3.34) могут быть существенно упрощены посредством перехода к уравнениям для медленных переменных. Подставив выражения для электрического поля и поляризации в уравнения (3.33) и (3.34) можно учесть соотношения для медленно меняющихся функций

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathcal{E}}} &\ll \omega \dot{\tilde{\mathcal{E}}} \ll \omega^2 \tilde{\mathcal{E}}, \\ \ddot{\tilde{\mathcal{P}}} &\ll \omega \dot{\tilde{\mathcal{P}}} \ll \omega^2 \tilde{\mathcal{P}}, \end{aligned}$$

и произвести усреднение уравнений по интервалу времени  $\Delta t$ , удовлетворяющему условиям

$$\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega_0} \ll \Delta t \ll T_2, T_1. \quad (3.37)$$

Так, подставив выражения для электрического поля и поляризации в уравнение (3.34) и усреднив уравнение по интервалу времени  $\Delta t$  можно получить уравнение для сглаженной по времени плотности разностной населённости

$$\mathcal{N}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} N(\mathbf{r}, t) dt. \quad (3.38)$$

Аналогичным образом, учитывая в уравнении (3.33) медленную плотность разностной населённости в качестве главного члена, отбрасывая малые члены и усредняя по времени можно получить уравнение для медленной функции  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Проведя указанные процедуры и используя при этом приближение вращающейся волны, т. е. приняв во внимание, что частота квази-монохроматического излучения близка к частоте квантового перехода,  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ , можно преобразовать уравнения (3.33) и (3.34) в дифференциальные уравнения первого порядка:

$$\dot{\tilde{\mathcal{P}}} + \left( \frac{1}{T_2} + i\delta \right) \tilde{\mathcal{P}} = -\frac{id^2}{\hbar} \tilde{\mathcal{E}} \mathcal{N}, \quad (3.39)$$

$$\dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1} (\mathcal{N} - N^0) = \frac{i}{2\hbar} \left( \tilde{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{P}}^* - \tilde{\mathcal{E}}^* \tilde{\mathcal{P}} \right). \quad (3.40)$$

Следует обратить внимание, что наряду со сглаженной плотностью разностной населённости  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathbf{r}, t)$  в уравнение (3.40) входит плотность разностной населённости в отсутствие излучения  $N^0 = N^0(\mathbf{r})$ .

Электрическое поле и поляризация квазимонохроматического излучения могут быть представлены также в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \mathcal{E} \cos(\omega t + \varphi), \quad (3.41)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \mathcal{P} \cos(\omega t + \psi), \quad (3.42)$$

где  $\mathcal{E}$  и  $\varphi$  - медленно меняющиеся амплитуда и фаза электрического поля, а  $\mathcal{P}$  и  $\psi$  - медленно меняющиеся амплитуда и фаза поляризации.

Для получения уравнений для медленных переменных  $\mathcal{E}$ ,  $\varphi$ ,  $\mathcal{P}$  и  $\psi$  следует опять воспользоваться изложенной выше процедурой усреднения уравнений по времени. После подстановки выражений для поляризации и электрического поля в уравнение (3.34) его можно прямо усреднить по

интервалу времени  $\Delta t$ . После подстановки выражений для поляризации и электрического поля в уравнение (3.33) и учёта в данном уравнении средней плотности разностной населённости следует отбросить малые члены, разделить члены при разных осциллирующих функциях, а затем усреднить их по интервалу времени  $\Delta t$ , удовлетворяющему условиям (3.37). В результате указанных преобразований дифференциальное уравнение второго порядка для поляризации разделяется на дифференциальное уравнение первого порядка и алгебраическое уравнение, а уравнение для средней плотности разностной населённости остаётся дифференциальным уравнением первого порядка. Окончательно три получившихся уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{P}} + \frac{\mathcal{P}}{T_2} &= -\frac{d^2}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N} \sin \Phi, \\ (\omega - \omega_0) \mathcal{P} &= -\frac{d^2}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N} \cos \Phi, \\ \dot{\mathcal{N}} + \frac{\mathcal{N} - N^0}{T_1} &= \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P} \sin \Phi,\end{aligned}\tag{3.43}$$

где  $\Phi = \psi - \phi$  есть разность фаз поляризации среды и электрического поля. Подчеркнём, что уравнения (3.39), (3.40) и уравнения (3.43) являются эквивалентными и отличаются только формой записи.

### 3.3 Динамика среды в поле непрерывного излучения

Рассмотрим реакцию атомной среды на воздействие непрерывного оптического излучения. Для этой цели воспользуемся уравнениями для медленных переменных среды в форме (3.43). Для простоты будем считать, что оптическое излучение находится в резонансе с квантовым переходом, т. е. будем считать, что частота излучения совпадает с частотой квантового перехода,  $\omega = \omega_0$ . В этом случае из второго уравнения системы (3.43) следует, что разность фаз может быть выбрана как  $\Phi = \pi/2$ , а оставшиеся два уравнения (3.43) принимают вид

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{P}} + \frac{\mathcal{P}}{T_2} &= -\frac{d^2}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}, \\ \dot{\mathcal{N}} + \frac{\mathcal{N} - N^0}{T_1} &= \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}.\end{aligned}$$

Последние два уравнения могут быть преобразованы в одно неоднородное уравнение второго порядка либо для медленной поляризации  $\mathcal{P}$

либо для плотности разностной населённости  $\mathcal{N}$ . Так, исключив из второго уравнения медленную поляризацию и подставив в первое уравнение получим уравнение второго порядка для плотности разностной населённости:

$$\ddot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T} \dot{\mathcal{N}} + \left( \Omega^2 + \frac{1}{T_1 T_2} \right) \mathcal{N} = \frac{N^0}{T_1 T_2}, \quad (3.44)$$

где  $T$  есть новое характерное время, определённое соотношением

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2},$$

а величина  $\Omega$  имеет смысл частоты Раби,

$$\Omega = \frac{d\mathcal{E}}{\hbar}. \quad (3.45)$$

Структура решения неоднородного уравнения (3.44) определяется характеристическими показателями соответствующего однородного уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm \frac{\sqrt{D}}{2},$$

где

$$D = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right)^2 - 4\Omega^2.$$

В соответствии с двумя возможными знаками величины  $D$  рассматриваемое уравнение может иметь два типа решений. При малой частоте Раби, т. е. при условии

$$2\Omega < \left| \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right|,$$

величина  $D > 0$  и решение имеет аperiодический характер. Напротив, при большой частоте Раби, т. е. при обратном соотношении

$$2\Omega > \left| \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right|,$$

величина  $D < 0$  и решение имеет осцилляционно-аperiодический характер. Об осцилляциях разностной населённости среды часто говорят как об оптических нутациях.

Приведём явный вид решений для двух указанных случаев, считая, что начальная плотность разностной населённости совпадает с равновесной в отсутствие излучения, т. е.  $\mathcal{N}(0) = N^0$ . В случае малой частоты

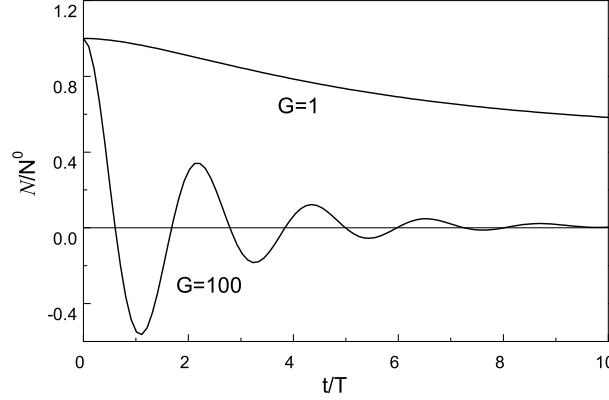


Рис. 3.1: Плотность разностной населённости двухуровневой среды как функция времени при отношении времён релаксации  $T_1/T_2 = 10$  и при параметрах насыщения  $G = 1$  и  $G = 100$ .

Раби аperiодическое решение имеет вид

$$\mathcal{N} = N^0 \left\{ 1 - \frac{G}{1+G} \left[ 1 - \left( \operatorname{ch} \frac{\sqrt{D}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{DT}} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{D}t}{2} \right) e^{-t/2T} \right] \right\}.$$

Осцилляционно-аperiодическое решение, отвечающее большой частоте Раби и описывающее оптические нутации среды, имеет вид

$$\mathcal{N} = N^0 \left\{ 1 - \frac{G}{1+G} \left[ 1 - \left( \cos \frac{\sqrt{|D|}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{|D|}T} \sin \frac{\sqrt{|D|}t}{2} \right) e^{-t/2T} \right] \right\}.$$

Входящая в данные решения безразмерная величина  $G$  определена соотношением

$$G = \Omega^2 T_1 T_2. \quad (3.46)$$

и носит название параметра насыщения. Данные два типа решений показаны на рис. 3.1.

Отметим в заключение данного вопроса, что поскольку обычно время поперечной релаксации мало по сравнению с временем продольной релаксации,  $T_2 \ll T_1$ , то условие осцилляторного отклика среды обычно сводится к виду  $\Omega > 1/2T_2$ . Для наблюдения оптических нутаций как правило требуется достаточно большая интенсивность излучения. Например, в случае атомов хрома в рубине время поперечной релаксации при комнатной температуре  $T_2 \simeq 10^{-12}$  с и для возникновения осцилляций необходима интенсивность излучения, превышающая  $3 \cdot 10^{11}$  Вт/см<sup>2</sup>.



При такой интенсивности в кристалле рубина становятся важными другие механизмы нелинейного взаимодействия, такие как многофотонное поглощение, оптический пробой и др. и поэтому эффект оптических нутаций практически не наблюдаем. Однако, при более низких температурах, например, при 77 К, поперечная релаксация более медленна,  $T_2 \simeq 3,5 \cdot 10^{-11}$  с, и эффект нутаций становится наблюдаем при интенсивности излучения превышающей меньшую величину  $3,8 \cdot 10^8$  Вт/см<sup>2</sup>.

Стационарное состояние среды, достигаемое при временах  $t \gg T_2, T_1$ , также может быть исследовано исходя из уравнений для медленных переменных. Если опять воспользоваться уравнениями (3.43), то из первого и второго уравнений (3.43) можно видеть, что в общем случае, когда частота излучения вообще говоря не совпадает с частотой квантового перехода, стационарная разность фаз определяется уравнением

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)}, \quad (3.47)$$

где для удобства представления формул введена полуширина линии однородного перехода, определяемая временем релаксации  $T_2$ :

$$\gamma = \frac{1}{T_2}. \quad (3.48)$$

После этого из первого и третьего уравнений (3.43) можно найти стационарное значение поляризации среды

$$\mathcal{P} = dN^0 \frac{\Omega \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}}{(\omega - \omega_0)^2 + (1 + G)\gamma^2}, \quad (3.49)$$

и стационарную плотность разностной населённости

$$\mathcal{N} = N^0 \frac{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (1 + G)\gamma^2}. \quad (3.50)$$

Последнее уравнение показывает, что в стационарном режиме электромагнитное поле уширяет область частот, при которых осуществляется эффективное взаимодействие среды с полем (рис. 3.2). Переписав соотношение (3.50) в виде

$$\mathcal{N} = N^0 \left[ 1 - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (1 + G)\gamma^2} \right].$$

можно сразу увидеть, что резонанс взаимодействия описывается лорентцевским контуром с полушириной

$$\omega - \omega_0 = \gamma_S = \gamma \sqrt{1 + G}, \quad (3.51)$$

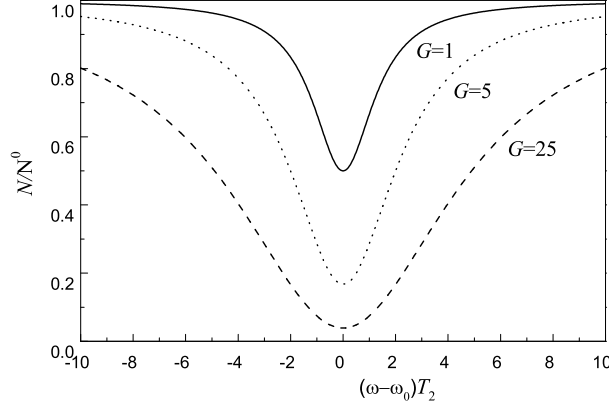


Рис. 3.2: Стационарная плотность разностной населённости как функция расстройки при параметре насыщения  $G = \Omega^2 T_1 T_2 = 1, 5, 25$ .

которая зависит от степени насыщения квантового перехода, определяемой безразмерным параметром насыщения  $G$ . Последний имеет удобное представление в виде отношения интенсивности излучения  $I$  к так называемой интенсивности насыщения  $I_S$ ,

$$G = \Omega^2 T_1 T_2 = I/I_S. \quad (3.52)$$

Если считать, что показатель преломления среды близок к единице, то интенсивность электромагнитного излучения, отвечающая амплитуде электрического поля  $\mathcal{E}$ , и интенсивность насыщения определяются соотношениями

$$I = \frac{c\varepsilon_0}{2} \mathcal{E}^2, \quad I_S = \frac{c\varepsilon_0 \hbar^2}{2d^2 T_1 T_2}. \quad (3.53)$$

Формула (3.51) показывает, что при интенсивности излучения равной интенсивности насыщения,  $I = I_S$ , резонанс взаимодействия уширяется в  $\sqrt{2}$  раз.

### 3.4 Когерентное взаимодействие среды с импульсным излучением

Как было показано выше, при большой скорости вынужденных переходов двухуровневая среда проявляет осцилляторный характер поведения. Особенно яркими осцилляции среды являются при временах взаимодействия малых по сравнению с временами релаксации. В этом случае релаксационные процессы не успевают повлиять на состояние среды,

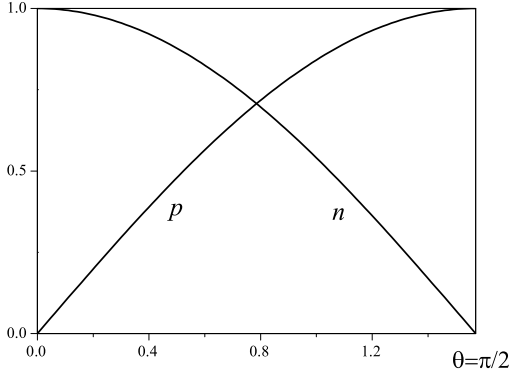


Рис. 3.3: Эволюция безразмерных поляризации  $p$  и плотности разностной населённости  $n$  при воздействии на среду  $\pi/2$ -импульса.

соответственно взаимодействие среды с излучением носит когерентный характер, а сама осциллирующая среда проявляет эффект фазовой памяти.

Рассмотрим особенности когерентного взаимодействия в простейшем случае точного резонанса, когда  $\omega = \omega_0$  и соответственно разность фаз  $\Phi = \pi/2$ . При малых временах взаимодействия в уравнениях (3.43) можно опустить релаксационные члены, получив два простых уравнения

$$\dot{\mathcal{P}} = -\frac{d^2}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}, \quad (3.54)$$

$$\dot{\mathcal{N}} = \frac{1}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{P}, \quad (3.55)$$

имеющих очевидный интеграл движения

$$\mathcal{P}^2 + d^2 \mathcal{N}^2 = \text{const.}$$

Если теперь задать начальные условия, например, в виде  $\mathcal{P}(0) = 0$ ,  $\mathcal{N}(0) = N^0$ , то интеграл движения может быть переписан в виде

$$\mathcal{P}^2 + d^2 \mathcal{N}^2 = d^2 N^{02}.$$

Отсюда видно, что безразмерные величины  $p = \mathcal{P}/dN^0$  и  $n = \mathcal{N}/N^0$  могут рассматриваться в качестве компонент единичного вектора на плоскости:

$$p = \sin \theta, \quad n = \cos \theta.$$

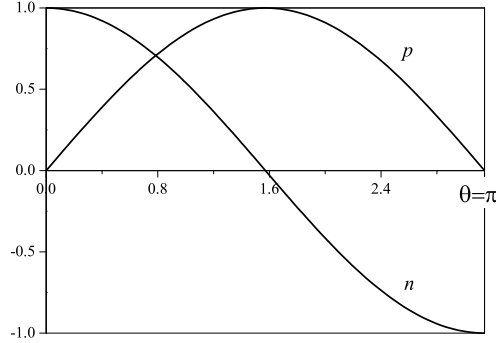


Рис. 3.4: Эволюция безразмерных поляризации  $p$  и плотности разностной населённости  $n$  при воздействии на среду  $\pi$ -импульса.

Соответственно решение уравнений (3.54), (3.55) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= dN^0 \sin \theta(t), \\ \mathcal{N}(t) &= N^0 \cos \theta(t),\end{aligned}$$

где зависящий от времени угол

$$\theta(t) = \frac{d}{\hbar} \int_{-\infty}^t \mathcal{E}(t') dt'$$

называют фазовым углом. Значение фазового угла определяет характер когерентного взаимодействия среды с импульсным излучением.

Рассмотрим основные режимы когерентного взаимодействия, предполагая, что импульс оптического излучения подействовал на среду до момента времени  $t$ , в который регистрируется состояние среды.

Пусть в момент времени  $t$  значение фазового угла есть  $\theta(t) = \pi/2$ . Такая величина угла означает, что импульс излучения навёл в среде поляризацию  $\mathcal{P}(t) = dN^0$  и одновременно выровнял населённости уровней, поскольку  $\mathcal{N}(t) = 0$  (рис. 3.3). В результате среда оказалась в своеобразном неравновесном состоянии с одинаковыми населённостями уровней, но с отличной от нуля поляризацией. Такая среда способна излучать в течение короткого времени, пока не произойдёт релаксация поляризации. Излучение среды, возникающее в результате действия  $\pi/2$ -импульса, лежит в основе явления, называемого фотонным эхом.

При значении фазового угла  $\theta(t) = \pi$  разностная населённость среды инвертируется. Если вначале среда находилась в поглощающем состоянии, т. е. было выполнено соотношение  $N_2^0 < N_1^0$ , то после воздействия

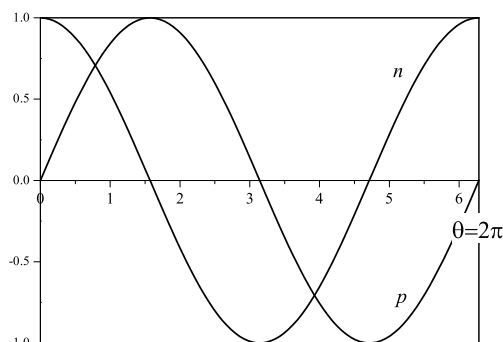


Рис. 3.5: Эволюция безразмерных поляризации  $p$  и плотности разностной населённости  $n$  при воздействии на среду  $2\pi$ -импульса.

светового импульса среда оказывается в инвертированном состоянии, для которого  $\mathcal{N}_2(t) > \mathcal{N}_1(t)$  (рис. 3.4). Такое состояние среды естественно усиливает излучение. Таким образом, воздействие  $\pi$ -импульса позволяет создать инверсную населённость в среде. Напротив, если вначале среда уже имела инверсную населённость  $N^0$ , то после воздействия  $\pi$ -импульса среда переходит в состояние с противоположным значением плотности разностной населённости  $-N^0$ , т. е. становится поглощающей.

Под действием излучения с фазовым углом  $\theta(t) = 2\pi$  двухуровневая среда оказывается в конечном состоянии, которое полностью совпадает с начальным состоянием (рис. 3.5). Если система находилась в поглощающем состоянии, то в процессе взаимодействия среда сначала поглощает излучение, переходя в инвертированное состояние, а затем излучает запасённую энергию. В результате импульс излучения проходит через среду без поглощения. Этот эффект получил название самоиндуцированной прозрачности среды для коротких импульсов света.

### 3.5 Некогерентное взаимодействие. Однородно-уширенный переход

В настоящем разделе рассматривается взаимодействие среды с излучением в том случае, когда все частицы среды находятся в одинаковых условиях и соответственно эффективность их взаимодействия с излучением одинакова. Об этом случае говорят как о взаимодействии среды с излучением на однородно-уширенном переходе. Везде ниже будет рассматриваться практически важный случай некогерентного взаимодействия,

возникающего при относительно больших временах взаимодействия, когда поляризация среды успевает достичь квазистационарного значения.

### 3.5.1 Квазистационарная поляризация среды

Обратимся ещё раз к уравнениям для медленных переменных среды, выведенных в разделе 3.2.2, и отметим возможность их значительного упрощения, связанную с тем, что в типичных средах время поперечной релаксации обычно значительно короче времени продольной релаксации, т. е.  $T_2 \ll T_1$ . Благодаря данному условию поляризация среды обычно быстро релаксирует к квазистационарному значению, определяемому мгновенными значениями напряжённости электрического поля и плотности разностной населённости.

Если воспользоваться уравнениями для медленных переменных среды, записанных в форме (3.43), то из первых двух уравнений этой системы при  $t \gg T_2$  прямо следует значение квазистационарной поляризации

$$\mathcal{P} = -d\mathcal{N} \frac{\Omega/\gamma}{\sqrt{1 + (\omega - \omega_0)^2/\gamma^2}}, \quad (3.56)$$

где  $\Omega$  есть частота Раби (3.45), а величина  $\gamma$  определена соотношением (3.48). Данное уравнение показывает, что в типичных средах поляризация среды адиабатически следует за напряжённостью электрического поля. Подставляя квазистационарное значение поляризации в третье уравнение системы (3.43) можно получить замкнутое уравнение, определяющее плотность разностной населённости

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(\mathcal{N} - N^0) = -\frac{\Omega^2 \gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \mathcal{N}.$$

Последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{1}{T_1}(\mathcal{N} - N^0) = -2\sigma(\omega)\mathcal{I}\mathcal{N}, \quad (3.57)$$

где  $\sigma(\omega)$  есть сечение радиационного перехода на частоте излучения,

$$\sigma(\omega) = \frac{d^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (3.58)$$

а  $\mathcal{I}$  есть плотность потока фотонов,

$$\mathcal{I} = \frac{\varepsilon_0 c}{2\hbar\omega} \mathcal{E}^2. \quad (3.59)$$

Отметим, что стационарное значение плотности разностной населённости определено соотношением (3.50).

### 3.5.2 Электрическая восприимчивость среды

При анализе взаимодействия среды с излучением иногда удобно использовать электрическую восприимчивость среды  $\chi$ . Если считать, что электрическое поле излучения  $\mathbf{E}$  и поляризация среды  $\mathbf{P}$  определены их комплексными значениями  $\tilde{\mathbf{E}}$  и  $\tilde{\mathbf{P}}$  как

$$\mathbf{E} = \text{Re } \tilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{P} = \text{Re } \tilde{\mathbf{P}}, \quad (3.60)$$

то комплексная восприимчивость среды  $\chi = \chi' - i\chi''$  определяется соотношением, связывающим комплексные амплитуды поляризации и поля. В системе СИ данная связь записывается в виде

$$\tilde{\mathbf{P}} = \varepsilon_0 \chi \tilde{\mathbf{E}}. \quad (3.61)$$

Для квазимонохроматических электрического поля и поляризации, введённых соотношениями (3.35) и (3.36) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \text{Re} \left( \tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \right), \quad (3.62)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \text{Re} \left( \tilde{\mathcal{P}} e^{i\omega t} \right), \quad (3.63)$$

использование определения (3.61) приводит к соотношению

$$\tilde{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 \chi \tilde{\mathcal{E}}. \quad (3.64)$$

Как уже отмечалось выше именно такого рода соотношение существует для квазистационарного значения поляризации среды. Воспользовавшись уравнением (3.39) при  $t \gg T_2$  можно видеть, что входящая в уравнение (3.64) квазистационарная поляризация имеет вид

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{-id^2}{\hbar} \frac{\mathcal{N}}{\gamma + i(\omega - \omega_0)} \tilde{\mathcal{E}}. \quad (3.65)$$

Сравнив далее уравнение (3.64) с уравнением (3.65) можно окончательно получить электрическую восприимчивость при условии квазистационарности, т. е. при  $t \gg T_2$ , имеет вид

$$\chi = \chi(\omega) = -\frac{id^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\mathcal{N}}{\gamma + i(\omega - \omega_0)}. \quad (3.66)$$

Действительная и мнимая части электрической восприимчивости определены соответственно соотношениями

$$\chi'(\omega) = -\frac{d^2}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{(\omega - \omega_0) \mathcal{N}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (3.67)$$

$$\chi''(\omega) = \frac{d^2 \gamma}{\varepsilon_0 \hbar} \frac{\mathcal{N}}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}. \quad (3.68)$$

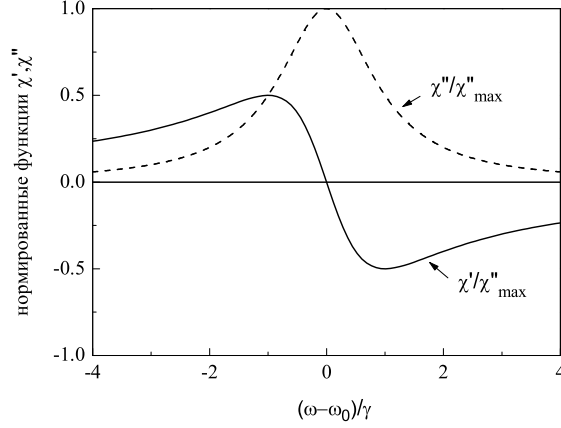


Рис. 3.6: Нормированные восприимчивости диэлектрической среды как функции частотной расстройки.

В стационарном режиме действительная и мнимая части электрической восприимчивости могут быть вычислены после подстановки в приведённые уравнения стационарной плотности разностной населённости (3.50). Частотная зависимость действительной и мнимой частей электрической восприимчивости показана на рис. 3.6. Значения функций  $\chi'$  и  $\chi''$  нормированы на максимальную величину мнимой части восприимчивости  $\chi''_{\max} = \chi''(\omega_0) = d^2 \mathcal{N} / \varepsilon_0 \hbar \gamma$ .

### 3.5.3 Диссипация электромагнитного поля

Внешнее электромагнитное излучение, поддерживающее неравновесную населённость в среде и неравновесную поляризацию среды, очевидно, теряет свою энергию при взаимодействии со средой. Потери излучения в среде могут быть определены на основании электромагнитной теории. Выпишем из полной системы уравнений Максвелла (3.1)-(3.4) необходимые для дальнейшего анализа первые два уравнения и подставим в них выражения (3.5),(3.6) для электрической  $\mathbf{D}$  и магнитной  $\mathbf{B}$  индукции. После этого выбранные уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \end{aligned}$$



### 3.5. Некогерентное взаимодействие. Однородно-уширенный переход 63

Взяв скалярные произведения этих уравнений с векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  и воспользовавшись тождеством

$$\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}$$

можно получить закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$-\operatorname{div} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}.$$

Интегрируя полученное уравнение по произвольному объёму и пользуясь теоремой Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS$$

получим закон сохранения энергии в интегральной форме:

$$\begin{aligned} & - \int_S ([\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n}) dS \\ & = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) dV + \int_V \left( \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mu_0 \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} \right) dV. \end{aligned} \quad (3.69)$$

В данном уравнении левая часть представляет мощность электромагнитного поля, входящего в среду, ограниченную поверхностью  $S$ . Первый интеграл в правой части уравнения определяет скорость изменения энергии собственно электромагнитного поля в объёме среды. Члены, описываемые вторым интегралом, имеют следующий смысл. Первый член есть мощность поля, рассеиваемая на движущихся зарядах, второй член есть мощность поля, теряемая на электрическую поляризацию среды, третий член есть мощность поля, теряемая на намагничивание среды.

Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что средняя объёмная плотность мощности, расходуемая полем на электрическую поляризацию среды, или другими словами, скорость изменения средней объёмной плотности электрической энергии  $w_{\text{эл}}$  среды есть

$$\frac{\partial w_{\text{эл}}}{\partial t} = \left\langle \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right\rangle_t, \quad (3.70)$$

где угловые скобки означают усреднение осциллирующего поля по времени. Представив квазимонохроматическое электрическое поле и поляризацию в форме (3.62), (3.63) и воспользовавшись соотношением (3.64), можно также видеть, что средняя объёмная плотность мощности, расходуемая на электрическую поляризацию среды, определяется мнимой частью электрической восприимчивости:

$$\frac{\partial w_{\text{эл}}}{\partial t} = -\frac{i\omega}{4} \left( \tilde{\mathcal{E}} \tilde{\mathcal{P}}^* - \tilde{\mathcal{E}}^* \tilde{\mathcal{P}} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \omega_0 \chi'' \left| \tilde{\mathcal{E}} \right|^2. \quad (3.71)$$

Отметим, что в данной формуле частота излучения  $\omega$  заменена на частоту квантового перехода  $\omega_0$  в соответствии с предположением о том, что резонанс взаимодействия является достаточно узким.

### 3.5.4 Поглощение и дисперсия среды

Отметим теперь, что объёмная плотность электрической мощности, теряемая электромагнитным излучением в диэлектрической среде, может быть записана как в форме (3.71), так и в форме, определяемой величиной изменения интенсивности излучения на единице длины распространения. Записав скорость изменения плотности электрической энергии в указанных двух формах

$$-\frac{\partial w_{\text{пол}}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\omega_0\chi'' \left| \tilde{\mathcal{E}} \right|^2 = \frac{dI}{dz} = -\alpha I, \quad (3.72)$$

где  $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0c \left| \tilde{\mathcal{E}} \right|^2$  есть интенсивность излучения, можно видеть, что мнимая часть электрической восприимчивости определяет коэффициент поглощения излучения

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega_0}{c}\chi''(\omega) = \frac{d^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \mathcal{N}. \quad (3.73)$$

Напомним, что величина  $\gamma$  определена соотношением (3.48).

Если учесть выражение (3.58) для сечения радиационного перехода  $\sigma(\omega)$ , то коэффициент поглощения может быть связан с сечением радиационного перехода и плотностью разностной населённости:

$$\alpha(\omega) = \sigma(\omega)\mathcal{N}. \quad (3.74)$$

В стационарном случае, когда плотность разностной населённости определена соотношением (3.50), коэффициент поглощения есть

$$\alpha(\omega) = \frac{d^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + (1 + G)\gamma^2} N^0. \quad (3.75)$$

Рассмотрим в заключение несколько более общий подход к распространению излучения в среде, который позволяет найти не только коэффициент поглощения, но и показатель преломления среды. Для этого воспользуемся комплексным представлением квазимонохроматической электрической индукции  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{D} = \text{eRe} \left( \tilde{\mathcal{D}} e^{i\omega t} \right). \quad (3.76)$$

### 3.5. Некогерентное взаимодействие. Однородно-уширенный переход 65

Примем далее во внимание, что полная электрическая поляризация среды  $\mathbf{P}_{\text{полн}}$  состоит из нерезонансной поляризации  $\mathbf{P}_{\text{нер}}$  и резонансной поляризации  $\mathbf{P}$ , создаваемой активными атомами,  $\mathbf{P}_{\text{полн}} = \mathbf{P}_{\text{нер}} + \mathbf{P}$ . Тогда в соответствии с (3.5) комплексная электрическая индукция может быть переписана в виде

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon_0 \tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{P}}_{\text{полн}} = (\varepsilon_0 \tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{P}}_{\text{нер}}) + \tilde{\mathcal{P}} = \varepsilon_0 \varepsilon_{\text{нер}} \tilde{\mathcal{E}} + \varepsilon_0 \chi \tilde{\mathcal{E}} = \varepsilon_0 \varepsilon \tilde{\mathcal{E}}, \quad (3.77)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{нер}} + \chi \quad (3.78)$$

есть комплексная диэлектрическая проницаемость среды, учитывающая вклад активных атомов.

Положим теперь, что в среде распространяется бегущая квазимонохроматическая электромагнитная волна. Электрическое поле бегущей волны запишем в стандартной форме

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \operatorname{Re} \left( \tilde{\mathcal{E}} e^{i(\omega t - \tilde{k} z)} \right). \quad (3.79)$$

В среде с комплексной диэлектрической постоянной волновой вектор также является комплексной величиной,

$$\tilde{k} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon} \simeq k \left( 1 + \frac{\chi}{2\varepsilon_{\text{нер}}} \right) = k \left( 1 + \frac{\chi}{2n^2} \right),$$

где  $k = \omega \sqrt{\varepsilon_{\text{нер}}} / c$  есть волновой вектор в среде без активных атомов, а  $n = \sqrt{\varepsilon_{\text{нер}}}$  есть показатель преломления для нерезонансной среды, причём выписанное приближённое выражение справедливо при невысокой концентрации активных атомов.

Таким образом, при не слишком большом вкладе активных атомов комплексный волновой вектор имеет следующий вид

$$\tilde{k} \simeq k \left( 1 + \frac{\chi'}{2n^2} \right) - i \frac{k \chi''}{2n^2}.$$

Соответственно электрическое поле бегущей волны описывается уравнением (3.79) как

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} \operatorname{Re} \left( \tilde{\mathcal{E}} e^{i(\omega t - (k + \kappa)z)} \right) e^{-\frac{1}{2}\alpha z},$$

где величина

$$\kappa(\omega) = k \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \quad (3.80)$$

описывает вклад активных атомов в волновой вектор, а величина

$$\alpha(\omega) = \frac{k \chi''(\omega)}{n^2} \quad (3.81)$$

определяет коэффициент поглощения среды, содержащей активные атомы.

Последние уравнения показывают, что активные частицы модифицируют показатель преломления среды изменяя его от значения  $n = (c/\omega)k$  до значения

$$\tilde{n} = \frac{c}{\omega} (k + \kappa(\omega)) = n \left( 1 + \frac{\chi'(\omega)}{2n^2} \right), \quad (3.82)$$

и создают поглощение в среде, определяемое коэффициентом поглощения (3.73).

## 3.6 Некогерентное взаимодействие. Неоднородно-уширенный переход

### 3.6.1 Взаимодействие с бегущей световой волной

В том случае, когда эффективность взаимодействия отдельных частиц среды с излучением различна для разных частиц, взаимодействие всей среды с излучением определяется неоднородно-уширенным переходом. Ниже мы рассмотрим практически важный случай газа низкого давления, когда распределение частиц по скоростям является максвелловским, а неоднородное уширение перехода возникает в результате доплеровского уширения. Световое поле выберем здесь в виде монохроматической бегущей волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ . Соответственно запишем электрическое поле волны в виде, обобщающем (3.41):

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}\mathcal{E} \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (3.83)$$

где  $k = \omega/c$  есть волновой вектор излучения.

Обратим сначала внимание, что если рассмотреть взаимодействие со световой волной только тех частиц среды, у которых проекция скорости на ось  $z$  есть  $v$ , то в собственной системе таких частиц электрическое поле (3.83) примет вид (3.41), где вследствие эффекта Доплера частота волны  $\omega$  должна быть заменена на  $\omega - kv$ . Фаза поля (3.41) при этом естественно останется постоянной, поскольку в собственной системе координата частицы постоянна. Для выбранной группы частиц плотность разностной населённости в отсутствие излучения есть очевидно  $N^0 w(v)$ , где функция

$$w(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi v}} e^{-(v/\bar{v})^2} \quad (3.84)$$

### 3.6. Некогерентное взаимодействие. Неоднородно-уширенный переход 67

определяет максвелловское распределение атомов по проекции скорости  $v$  на ось  $z$ ,  $\bar{v} = \sqrt{2k_B T/M}$  есть средняя тепловая скорость частиц. Соответственно для выбранной группы частиц стационарное решение для плотности разностной населённости будет отличаться от решения (3.50) заменой  $N^0$  на  $N^0 w(v)$ , а также заменой  $\omega$  на  $\omega - kv$ :

$$\mathcal{N}(v) = N^0 w(v) \frac{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + (1 + G)\gamma^2}, \quad (3.85)$$

где полуширина линии квантового перехода, обусловленная поперечной релаксацией, определена соотношением (3.48).

Если теперь учесть, что для выбранной группы частиц зависящие от скорости населённости уровней связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(v) + \mathcal{N}_2(v) &= N_a w(v), \\ \mathcal{N}_1(v) - \mathcal{N}_2(v) &= \mathcal{N}(v), \end{aligned} \quad (3.86)$$

то отсюда можно найти распределения частиц по скоростям в отдельных квантовых состояниях

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(v) &= \frac{1}{2} N_a w(v) \left[ 1 + \frac{N^0}{N_a} \frac{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2(1 + G)} \right], \\ \mathcal{N}_2(v) &= \frac{1}{2} N_a w(v) \left[ 1 - \frac{N^0}{N_a} \frac{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2(1 + G)} \right]. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Как можно видеть из последних соотношений, возбуждение атомов, резонансно взаимодействующих с излучением, приводит к изменению распределений атомов по скоростям на уровнях квантового перехода. На фоне широкого максвелловского распределения возникает узкий провал на нижнем уровне и узкий пик на верхнем уровне (рис. 3.7). О данных узких скоростных структурах говорят как о провале и пике Беннета. Скорость, при которой движущиеся атомы эффективно взаимодействуют с излучением, естественно определяется условием резонанса с учётом эффекта Доплера:

$$v_{\text{рез}} = \frac{\omega - \omega_0}{k}. \quad (3.88)$$

Полуширина провала (пика) Беннета на шкале скоростей составляет величину  $\delta v = \gamma_S/k$ , т. е. определяется полушириной линии однородно-уширенного оптического перехода (3.51).

Если опять рассмотреть группу атомов, движущихся со скоростью  $v$ , то коэффициент поглощения данной группы атомов  $\alpha(\omega, v) = \sigma(v)\mathcal{N}(v)$  будет естественно зависеть не только от частоты волны, но и от скорости атомов. Для получения истинного коэффициента поглощения среды

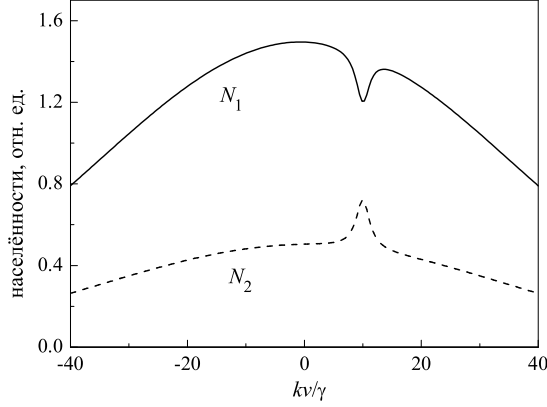


Рис. 3.7: Распределения частиц по скоростям на нижнем ( $N_1$ ) и верхнем ( $N_2$ ) уровнях неоднородно-уширенного перехода при возбуждении частиц бегущей световой волной при  $N^0/N_a = 0,5$ , доплеровской ширине  $\Delta\omega_D = 50\gamma$ , расстройке  $\omega - \omega_0 = 10\gamma$  и параметре насыщения  $G = 1$ .

следует усреднить выписанное соотношение по максвелловскому распределению скоростей (3.84):

$$\alpha(\omega) = \frac{d^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c\gamma} N^0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma^2 w(v)}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma_S^2} dv.$$

Вычисление последнего интеграла можно провести если учесть малость однородной ширины линии по сравнению с доплеровской шириной  $\Delta\omega_D = k\bar{v}$ , т. е. учесть условие  $\gamma_S/\Delta\omega_D \ll 1$ , и воспользоваться формулой для  $\delta$ -функции

$$\delta(x) = \frac{\epsilon^2}{x^2 + \epsilon^2},$$

справедливой при  $\epsilon \rightarrow 0$ . После этого можно получить для коэффициента поглощения выражение

$$\alpha(\omega) = \frac{d^2\omega_0}{\sqrt{\pi}\varepsilon_0\hbar c\Delta\omega_D} \frac{N^0}{\sqrt{1+G}} e^{-((\omega-\omega_0)/\Delta\omega_D)^2}. \quad (3.89)$$

Отличие коэффициента поглощения для неоднородно-уширенной линии (3.89) от коэффициента поглощения для однородно-уширенной линии (3.75) можно видеть из сравнения их максимальных значений:

$$\alpha_{\text{одн}}(\omega_0) = \frac{d^2\omega_0}{\varepsilon_0\hbar c\gamma} \frac{N^0}{1+G},$$

$$\alpha_{\text{неодн}}(\omega_0) = \frac{d^2\omega_0}{\sqrt{\pi}\varepsilon_0\hbar c\Delta\omega_D} \frac{N^0}{\sqrt{1+G}}.$$

### 3.6. Некогерентное взаимодействие. Неоднородно-уширенный переход 69

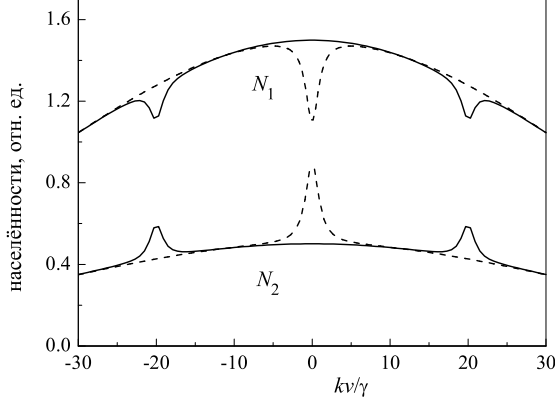


Рис. 3.8: Распределения частиц по скоростям на верхнем ( $N_2$ ) и нижнем ( $N_1$ ) уровнях неоднородно-уширенного перехода при возбуждении частиц стоячей световой волной при  $N^0/N_a = 0,5$ ,  $\Delta\omega_D/\gamma = 50$  и параметре насыщения  $G = 0.4$ . Сплошные линии отвечают расстройке  $\omega - \omega_0 = 20\gamma$ , штриховые линии - точному резонансу  $\omega = \omega_0$ .

Коэффициент поглощения неоднородно-уширенной линии меньше коэффициента поглощения однородно-уширенной линии в отношении  $\Delta\omega_D/\gamma S$ :

$$\alpha_{\text{неодн}}(\omega_0) = \alpha_{\text{одн}}(\omega_0) \frac{\gamma\sqrt{1+G}}{\sqrt{\pi}\Delta\omega_D}.$$

#### 3.6.2 Взаимодействие со стоячей световой волной

Для стоячей волны, являющейся суперпозицией двух встречных бегущих волн

$$\mathbf{E} = e\mathcal{E} \cos(\omega t - kz + \varphi) + e\mathcal{E} \cos(\omega t + kz + \varphi), \quad (3.90)$$

прямой расчёт даёт для плотности разностной населённости в случае малых значений параметра насыщения

$$\mathcal{N}(v) = N^0 w(v) \left[ 1 - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2} - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0 + kv)^2 + \gamma^2} \right].$$

Отсюда, воспользовавшись соотношениями (3.86) можно найти приближённые значения плотностей населённости уровней

$$\mathcal{N}_1(v) = \frac{1}{2} \mathcal{N}_a w(v) \left[ 1 - \frac{N^0}{N_a} \left( 1 - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2} - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0 + kv)^2 + \gamma^2} \right) \right],$$

$$\mathcal{N}_2(v) = \frac{1}{2} \mathcal{N}_a w(v) \left[ 1 + \frac{N^0}{N_a} \left( 1 - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0 - kv)^2 + \gamma^2} - \frac{G\gamma^2}{(\omega - \omega_0 + kv)^2 + \gamma^2} \right) \right].$$

Как можно видеть из рис. 3.8, когда частота стоячей световой волны находится вне центра линии поглощения она создаёт два провала Беннета в распределении атомов по скоростям на нижнем уровне квантового перехода и соответственно два пика в скоростном распределении атомов на верхнем уровне. Напротив, при точном резонансе с квантовым переходом стоячая световая волна создаёт один провал и один пик Беннета. Площадь центрального "резонансного" провала Беннета всегда меньше суммы площадей двух "нерезонансных" провалов Беннета из-за большего насыщения квантового перехода при одновременном поглощении двух бегущих волн. Благодаря этому обстоятельству каждая из встречных волн слабее поглощается вблизи центра линии. Как результат, коэффициент поглощения каждой из двух волн испытывает провал в центре линии поглощения, ширина которого определяется однородной шириной линии. Данный провал был теоретически предсказан В. Лэмбом и носит название лэмбовского провала.

В рассматриваемом здесь случае слабого насыщения перехода коэффициент поглощения одной бегущей волны на переходе, насыщаемом двумя встречными волнами, может быть вычислен аналогично вычислению коэффициента поглощения (3.89)

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 \left[ 1 - 2G \frac{2(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}{4(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \right] e^{-((\omega - \omega_0)/\Delta\omega_D)^2}, \quad (3.91)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{d^2 \omega_0}{\sqrt{\pi} \varepsilon_0 \hbar c \Delta\omega_D} N^0$$

есть значение коэффициента поглощения в центре перехода в пределе бесконечно слабого поля бегущей световой волны. Зависимость коэффициента поглощения одной из бегущих волн от частоты показана на рис.



### 3.6. Некогерентное взаимодействие. Неоднородно-уширенный переход 71

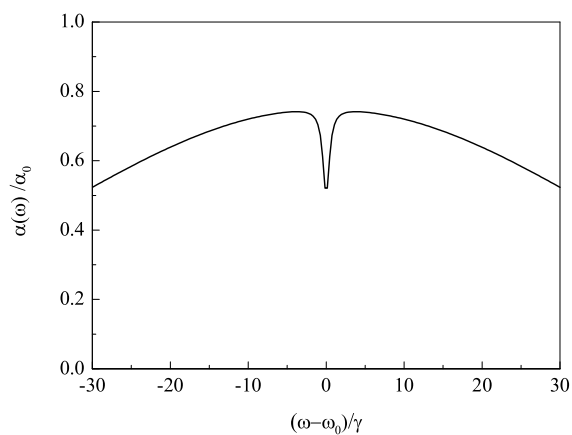


Рис. 3.9: Коэффициент поглощения одной бегущей световой волны на доплеровском переходе, возбуждаемом двумя встречными световыми волнами, как функция расстройки  $\omega - \omega_0$  при параметре насыщения  $G = 0.5$  и  $\Delta\omega_D/\gamma = 50$ .

3.9. Отметим, что провал в центре доплеровски-уширенной линии поглощения часто используется для стабилизации частоты газовых лазеров, работающих на стоячей световой волне.



## Глава 4

# Открытые оптические резонаторы

### 4.1 Закрытые и открытые резонаторы

Для того чтобы реализовать генератор оптического излучения необходимо иметь оптическую систему, формирующую световое поле определённой пространственной конфигурации на частоте близкой к частоте оптического перехода в активной квантовой среде. Естественно, распространение любого типа колебания в оптической системе сопровождается затуханием. Помещая внутрь оптической системы активную среду, обладающую усилением на частоте, близкой к частоте оптического колебания, можно скомпенсировать потери и обеспечить генерацию незатухающих колебаний. Таким образом, оптическая система генератора света должна удовлетворять по крайней мере двум условиям: скорость затухания поля в типе колебания должна быть меньше усиления за счёт активной среды, а в пределах полосы усиления активной среды должны существовать собственные типы колебания, на одном из которых могла бы осуществляться генерация света. Оба этих условия можно реализовать в оптическом диапазоне при использовании открытых резонаторов.

Особенности открытых резонаторов могут быть поняты исходя из свойств закрытых резонаторов электромагнитного поля. Линейные размеры практически реализуемых объёмных резонаторов обычно существенно больше длины волны оптического излучения. Согласно формуле Рэлея-Джинса в полости объёмом  $V$  в интервале частот  $(\nu, \nu + \Delta\nu)$  имеется число типов колебаний со всеми возможными направлениями распространения и определённой поляризацией

$$N_{\text{кол}} = 4\pi \frac{V}{c^3} \nu^2 \Delta\nu = 4\pi \frac{V}{\lambda^3} \frac{\Delta\nu}{\nu}. \quad (4.1)$$

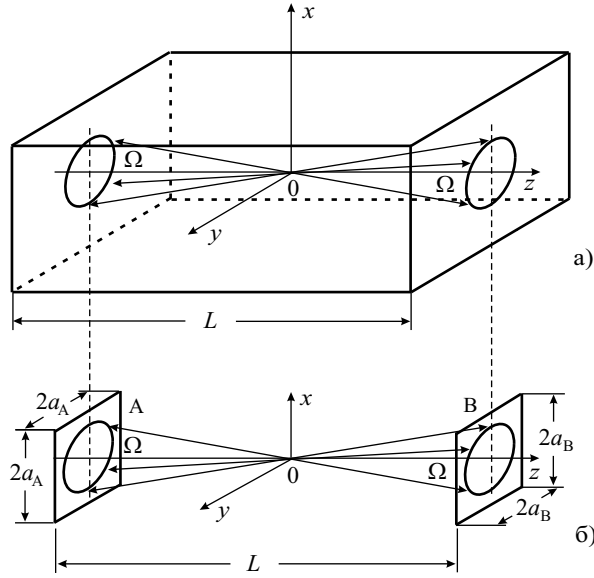


Рис. 4.1: Распространение малоугловых колебаний в закрытом резонаторе (а) и открытом резонаторе Фабри-Перо (б).

Например, в полости объёмом  $V = 10 \text{ см}^3$  при длине волны  $\lambda = 1 \text{ мкм}$  число типов колебаний  $N_{\text{кол}} \simeq 1,3 \cdot 10^{14} \Delta\nu/\nu$ , а расстояние между типами колебаний  $\Delta\nu/N_{\text{кол}} \simeq \nu/1,3 \cdot 10^{14} \simeq 2,4 \text{ Гц}$ . Даже в пределах относительно узкой доплеровской линии усиления с шириной  $\Delta\nu_{\text{доп}} \simeq 10^9 \text{ Гц}$  укладывается порядка  $4,2 \cdot 10^8$  колебаний. Огромное число типов колебаний, существующих в пределах одной линии усиления, делает невозможным выделение одного типа колебания и поддержание генерации на нём.

Существование гигантского числа типов колебаний в закрытом резонаторе объясняется не только его большим объёмом,  $V \gg \lambda^3$ , но и тем, что в закрытой полости существуют типы колебаний с любыми направлениями волновых векторов в пределах телесного угла  $4\pi$  стерадиан. В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть только типы колебаний, направления волновых векторов которых лежат в пределах небольших телесных углов  $\Omega$ , расположенных вдоль оси  $Oz$  в направлениях  $\pm z$  (рис. 4.1а). Число типов колебаний определённой поляризации с выбранными направлениями волновых векторов есть

$$N_{\Omega} = 4\pi \frac{V}{\lambda^3} \frac{\Delta\nu}{\nu} \frac{2\Omega}{4\pi} = 2\Omega \frac{V}{\lambda^3} \frac{\Delta\nu}{\nu}, \quad (4.2)$$

где объём резонатора  $V = (2a)^2 L = 4a^2 L$ . Подчёркнём, что формуле (4.2) учтены оба возможных направления распространения световых волн. Положим теперь, что выбран минимально возможный телесный угол,

определяемый дифракцией на отверстии:

$$\Omega = \Omega_{\text{диф}} \simeq \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2.$$

В таком случае число типов колебаний с определённой поляризацией и с направлениями волновых векторов в пределах телесного угла  $\Omega_{\text{диф}}$  есть

$$N_{\text{диф}} = \frac{2L}{\lambda} \frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{2L}{c} \Delta\nu. \quad (4.3)$$

Последнее уравнение показывает, что расстояние между отдельными типами колебаний с определённой поляризацией есть  $\Delta\nu/N_{\text{диф}} = c/2L$ . Таким образом, при вырождении трёхмерной полости в одномерную происходит существенное разряжение типов колебаний.

Оптической системой, в которой практически реализуется разряжение типов колебаний, характерное для одномерного случая, является резонатор Фабри-Перо, показанный на рис. 4.1б. Из физических соображений ясно, что между двумя параллельными зеркалами могут распространяться две встречные световые волны. Из-за дифракции волн на зеркалах часть излучения в резонаторе Фабри-Перо теряется. Волны, распространяющиеся под углом к оси резонатора, гораздо быстрее теряют энергию при последовательных отражениях. Благодаря большому радиационному затуханию внеосевых типов колебаний в резонаторе Фабри-Перо обеспечивается разряжение спектра собственных частот. Потери из-за дифракции также являются механизмом, обеспечивающим формирование слабозатухающих типов колебаний с определёнными устойчивыми пространственными конфигурациями электромагнитного поля.

Для резонатора Фабри-Перо можно указать общее условие, которое необходимо для обеспечения малых дифракционных потерь. Для этого необходимо, чтобы угол, под которым одно зеркало, например, зеркало А видно из центра другого зеркала, соответственно зеркала В, был больше дифракционного угла, т. е. чтобы выполнялись условия

$$\frac{a_A}{L} > \frac{\lambda}{a_B}, \quad \frac{a_B}{L} > \frac{\lambda}{a_A}, \quad (4.4)$$

где  $L$  - расстояние между зеркалами,  $2a_A$  и  $2a_B$  - линейные размеры зеркал. Каждое из этих условий может быть записано в виде

$$N = \frac{a_A a_B}{\lambda L} > 1, \quad (4.5)$$

где безразмерный параметр  $N = a_A a_B / \lambda L$ , называемый числом Френеля, является важной характеристикой открытого резонатора. Число Френеля приблизительно равно числу зон Френеля, наблюдаемых на одном

зеркале из центра другого зеркала. Дифракционные потери малы при  $N \gg 1$  и резко возрастают при  $N \ll 1$ .

#### 4.1.1 Добротность резонатора

Обратимся ещё раз к системе уравнений Максвелла (3.1)-(3.4) и выпишем из неё первые два уравнения, подставив в них выражения (3.7) и (3.8) для электрической  $\mathbf{D}$  и магнитной  $\mathbf{H}$  индукции. После этого выбранные уравнения Максвелла примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Взяв скалярные произведения этих уравнений с векторами  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  и повторив вывод раздела 3.5.3 можно получить интегральный закон сохранения энергии в форме, несколько отличной от (3.69):

$$-\int_S ([\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \cdot \mathbf{n}) dS = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_V (\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu \mathbf{H}^2) dV + \int_V (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) dV. \quad (4.6)$$

Левая часть уравнения (4.6), как и уравнения (3.69), описывает мощность электромагнитного поля, входящего в среду, ограниченную поверхностью  $S$ . В правой части уравнения первый интеграл определяет скорость изменения электромагнитной энергии объёма среды, второй интеграл описывает мощность поля, рассеиваемую на движущихся зарядах. Соответственно из уравнения (4.6) можно видеть, что среднее значение плотности электромагнитной энергии в среде есть

$$w = \frac{1}{2} \langle \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mu \mathbf{H}^2 \rangle_t, \quad (4.7)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Далее мы воспользуемся этим соотношением для определения понятия добротности резонатора.

Рассмотрим для определённости простейший резонатор, образованный двумя плоскими зеркалами, находящимися на расстоянии  $L$  вдоль оси  $z$ . Вектор электрического поля, существующего в таком резонаторе, может быть представлен в виде

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega t \sin kz.$$

Электрическая энергия осциллирующего в резонаторе поля согласно (4.7) есть

$$W_{\text{эл}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon \int \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t dS dz = \frac{1}{8} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 V,$$

где среднее по времени значение квадрата электрического вектора

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_t = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}^2(z, t) dt = \frac{1}{2} E_0^2 \sin^2 kz,$$

$T = 2\pi/\omega$  есть период поля,  $S$  есть площадь поперечного сечения,  $V = SL$  есть объём резонатора. Поскольку в рассматриваемом случае магнитная энергия равна электрической энергии,  $W_{\text{магн}} = W_{\text{эл}}$ , то полная электромагнитная энергия в объёме резонатора есть

$$W = 2W_{\text{эл}} = \frac{1}{4} \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 V.$$

Отметим теперь, что в стационарном режиме мощность электромагнитного излучения  $P_{\text{вх}}$ , входящего в резонатор, равна мощности  $P_{\text{расс}}$ , рассеиваемой резонатором,  $P_{\text{вх}} = P_{\text{расс}} = P$ . Учитывая данное обстоятельство можно ввести характеристику резонатора, называемую добротностью. По определению, добротностью резонатора  $Q$  является следующая безразмерная величина

$$Q = \omega \frac{\text{электромагнитная энергия в резонаторе}}{\text{мощность, рассеиваемая резонатором}} = \frac{\omega W}{P} = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 V}{4P}. \quad (4.8)$$

Определение добротности может быть также записано в виде

$$Q = 2\pi \frac{\text{электромагнитная энергия в резонаторе}}{\text{энергия, теряемая на периоде колебаний поля}} = \frac{2\pi W}{PT} = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon E_0^2 V}{4PT}. \quad (4.9)$$

В практических оценках бывает удобно использовать ещё одно выражение для добротности. Заметим, что распад электромагнитной энергии, заключённой в резонаторе, следует экспоненциальному закону

$$\frac{dW}{dt} = -P = -\frac{W}{\tau_{\Phi}},$$

где  $P$  есть мощность, рассеиваемая резонатором, а  $\tau_{\Phi}$  есть характерное время распада электромагнитной энергии, часто называемое временем

жизни фотона. Из приведённого уравнения можно видеть, что отношение электромагнитной энергии к рассеиваемой мощности есть  $W/P = \tau_{\text{ф}}$ . Соответственно добротность резонатора может быть записана ещё и в виде

$$Q = \omega\tau_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\Delta\omega_{\text{рез}}} = \frac{\nu}{\Delta\nu_{\text{рез}}}, \quad (4.10)$$

где величины  $\Delta\omega_{\text{рез}} = 1/\tau_{\text{ф}}$  и  $\Delta\nu_{\text{рез}} = 1/2\pi\tau_{\text{ф}}$  определяют частотную ширину моды резонатора.

Значения добротности оптических резонаторов варьируются в широких пределах. В лучших оптических резонаторах частотная ширина моды может иметь значения  $\Delta\nu_{\text{рез}} \simeq 10^2 - 10^3$  Гц и соответственно при оптической частоте  $\nu \simeq 5 \cdot 10^{14}$  Гц добротность может иметь значение порядка  $10^{12} - 10^{13}$ .

### 4.1.2 Структура электромагнитного поля

Электромагнитные поля мод открытого резонатора обычно рассматриваются в скалярном приближении. В этом приближении предполагается, что электромагнитное поле является поперечным и однородно поляризованным, либо линейно, либо по кругу. В соответствии с данным приближением в случае идеального резонатора без потерь электрическое поле моды представляется в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e} u(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (4.11)$$

где  $\mathbf{e}$  есть единичный вектор поляризации, а комплексная функция  $u(\mathbf{r})$  описывает пространственное распределение поля в резонаторе. В реальном оптическом резонаторе всегда имеются потери и электрическое поле моды определяется выражением, содержащим экспоненциальный фактор затухания

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e} u(\mathbf{r}) e^{-t/2\tau - i\omega t} + \text{к. с.}, \quad (4.12)$$

где величина  $\tau$  имеет смысл времени жизни фотона в резонаторе. Аналогичным образом может быть представлено магнитное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  моды резонатора. Последнее однако редко используется поскольку в приложениях основной интерес представляет электрическое поле лазерного излучения.

Приведём в качестве примера структуру электрического поля моды, существующей в идеальном резонаторе Фабри-Перо с металлическими зеркалами. В таком резонаторе имеются две встречные световые волны, бегущие вдоль оси резонатора  $z$ . Волна, бегущая в положительном



направлении оси  $z$ , может быть записана в виде

$$\mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}u(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)} + \text{к. с.} = \mathbf{e}u(\mathbf{r}) \cos(kz - \omega t). \quad (4.13)$$

Встречная бегущая волна отличается от исходной волны сдвигом фазы при отражении от металлического зеркала

$$\mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e}u(\mathbf{r})e^{-i(kz + \omega t - \pi)} + \text{к. с.} = \mathbf{e}u(\mathbf{r}) \cos(kz + \omega t - \pi). \quad (4.14)$$

Полное поле моды является стоячей световой волной

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_+(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_-(\mathbf{r}, t) = 2\mathbf{e}u(\mathbf{r}) \sin kz \sin \omega t. \quad (4.15)$$

## 4.2 Плоскопараллельный резонатор

Одним из простейших открытых резонаторов является резонатор, образованный двумя плоскими зеркалами. Если бы такой резонатор имел зеркала неограниченно больших размеров, то в нём могли бы существовать только плоские волны, распространяющиеся вдоль оси резонатора. Соответственно частоты собственных типов колебаний открытого резонатора с бесконечно большими плоскими зеркалами могли бы быть получены из условия, что при полном обходе резонатора набег фазы плоской световой волны, образующей оптическую моду резонатора, составляет величину кратную  $2\pi$ , т. е.  $k \cdot 2L = 2\pi q$ , где  $L$  есть расстояние между зеркалами,  $q$  есть целое число. Такое условие, очевидно, является необходимым для стационарности типов колебаний, поскольку после двойного прохода резонатора световая волна должна совпадать по фазе с исходной волной. Отсюда следует, что в случае резонатора с бесконечно большими зеркалами резонансные частоты  $\nu = \omega/2\pi = kc/2\pi$  определяются выражением

$$\nu_q = \frac{c}{2L} q. \quad (4.16)$$

В данном выражении индекс моды  $q$  представляется очень большим числом, поскольку при типичной оптической длине волны  $\lambda \simeq 5 \cdot 10^{-5}$  см и характерных размерах резонаторов  $L \simeq 10 - 100$  см для индекса моды следует оценка  $q \simeq 2L/\lambda \simeq 10^5 - 10^6$ . Отметим, что здесь и ниже мы считаем для простоты, что резонатор не заполнен материальной средой и соответственно полагаем диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon = 1$ .

Для любого реального резонатора соотношение (4.16) является приближённым поскольку учитывает распространение мод только вдоль оси

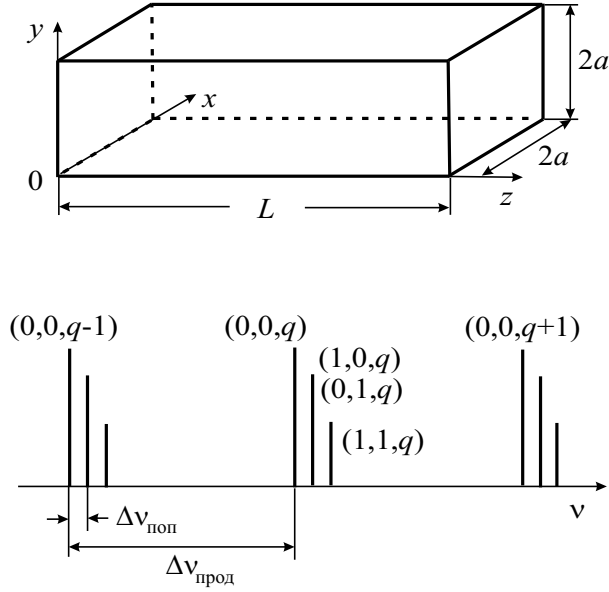


Рис. 4.2: Спектр собственных частот в вытянутом закрытом резонаторе.

резонатора, т. е. учитывает существование только продольных оптических мод. Вместе с тем, наряду с продольным распределением электромагнитного поля каждая реальная оптическая мода обладает также распределением поля поперёк оси резонатора. Оценка резонансной частоты, учитывающая как продольное, так и поперечное распределение поля в моде, может быть получена из анализа закрытого прямоугольного резонатора, рассматриваемого в случае, когда линейный размер резонатора по оси  $z$  значительно превышает два других линейных размера (рис. 4.2).

Как известно, в случае закрытого прямоугольного резонатора с размерами  $2a, 2a, L$  вдоль осей  $x, y, z$  частоты собственных типов колебаний определяются выражениями

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{q}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2a}\right)^2}, \quad (4.17)$$

где индексы  $m, n, q$  определяют распределение поля вдоль осей  $x, y, z$ . Для оптических мод с достаточно плавным поперечным распределением поля "поперечные" индексы  $m, n$  малы по сравнению с "продольным" индексом  $q$ . Продольный индекс, характеризующий оптическую частоту, как было отмечено выше, имеет типичное значение  $q \simeq 10^5 - 10^6$ , в то время как поперечные индексы имеют типичные значения  $m, n \simeq 1 - 10$ . Соответственно  $m, n \ll q$ , и уравнение (4.17) можно переписать в

приближённом виде, определяющем частоты мод открытого резонатора:

$$\nu_{mnq} \simeq \frac{c}{2} \left[ \frac{q}{L} + \frac{(m^2 + n^2)}{2q} \frac{L}{4a^2} \right]. \quad (4.18)$$

Как можно видеть, соотношение (4.18) содержит в себе в качестве низшего приближения более простую оценку (4.16).

Соотношение (4.18) позволяет также найти интервалы между частотами соседних продольных мод с индексами  $q$  и  $q + 1$ ,

$$\Delta\nu_{\text{прод}} = \frac{c}{2L}, \quad (4.19)$$

а также интервалы между частотами соседних поперечных мод, имеющих индексы  $m$  и  $m + 1$ ,

$$\Delta\nu_{\text{поп}} = \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{cL}{8qa^2}. \quad (4.20)$$

Отношение интервалов между поперечными и продольными модами обычно составляет малую величину,

$$\frac{\Delta\nu_{\text{поп}}}{\Delta\nu_{\text{прод}}} = \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{L^2}{4qa^2} \ll 1,$$

поскольку значение продольного индекса  $q$  весьма велико.

Распределение электромагнитного поля в открытом резонаторе может быть вычислено различными способами. Одним из часто используемых способов является анализ одного из дифракционных интегралов, основанных на принципе Гюйгенса-Френеля. Ниже мы отметим на примере открытого резонатора с плоскими зеркалами подход, основанный на формуле Рэлея-Зоммерфельда, представляющей одну из математических форм принципа Гюйгенса-Френеля.

При использовании формулы Рэлея-Зоммерфельда комплексные функции  $u_1(x_1, y_1)$  и  $u_2(x_2, y_2)$ , определяющие компоненты электрического поля на плоских зеркалах открытого резонатора, связаны интегральным соотношением

$$u_2(x_2, y_2) = -\frac{i}{\lambda} \int u_1(x_1, y_1) \frac{\exp(ikr)}{r} \cos \theta dx_1 dy_1. \quad (4.21)$$

Здесь  $x_1, y_1$  есть поперечные координаты точки на первом зеркале, рассматриваемым в качестве плоского источника излучения,  $x_2, y_2$  - поперечные координаты точки на втором зеркале, задающим плоскость наблюдения,  $r = \sqrt{L^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  есть расстояние между выбранными точками, угол  $\theta$  определяет направление радиус-вектора  $\mathbf{r}$ , соединяющего эти точки (рис. 4.3).

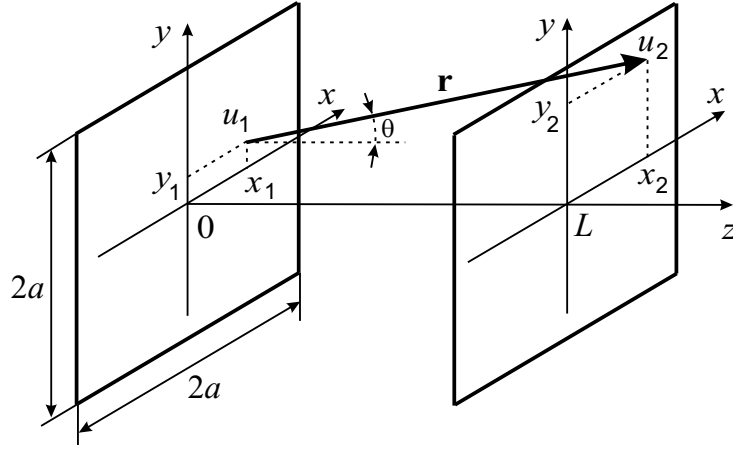


Рис. 4.3: Расположение точек на плоских зеркалах открытого резонатора, в которых определяются амплитуды полей в формуле Рэля-Зоммерфельда.

При условии  $L \gg a$  моды резонатора образуют параксиальные пучки, углы наклона которых к оси резонатора малы. Это позволяет положить  $\cos \theta \simeq 1$ . В приближении параксиального пучка в показателе экспоненты можно воспользоваться приближённым соотношением  $r \simeq L + (x_2 - x_1)^2/2L + (y_2 - y_1)^2/2L$ , в знаменателе подинтегрального выражения достаточно положить  $r \simeq L$ . После этого интеграл Рэля-Зоммерфельда может быть рассмотрен в приближении Френеля:

$$u_2(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikL)}{i\lambda L} \times \int u_1(x_1, y_1) \exp \left\{ \frac{ik}{2L} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \right\} dx_1 dy_1. \quad (4.22)$$

Как можно проверить, приближение Френеля справедливо, если в дополнение к условию  $L \gg a$  предполагается, что число Френеля  $N = a^2/\lambda L$  не слишком велико,  $N \ll L^2/a^2$ . Последнее условие, ограничивая допустимость очень больших значений числа Френеля, вместе с тем оставляет для рассмотрения практически важные значения  $N \simeq 5 - 10$ .

Если далее учесть стационарность мод резонатора, то приведённые интегральные соотношения могут быть преобразованы в интегральные уравнения. Действительно, когда распределение электромагнитного поля в резонаторе является стационарным, то поле на зеркале 2 с точностью до некоторого постоянного множителя  $\sigma$  совпадает с полем на зеркале 1. Отсюда следует, что для стационарных мод интеграл Рэля-Зоммерфельда может быть записан в виде интегрального уравнения. В приближении Френеля такое интегральное уравнение имеет вид уравне-

ния Фредгольма второго рода:

$$\sigma u(x_2, y_2) = \frac{\exp(ikL)}{i\lambda L} \int u(x_1, y_1) \exp \left\{ \frac{ik}{2L} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \right\} dx_1 dy_1. \quad (4.23)$$

Собственные функции данного уравнения определяют структуру поля на зеркалах резонатора. Собственные значения комплексной постоянной  $\sigma$  также имеют важное физическое значение. Представив комплексную константу в виде  $\sigma = |\sigma| \exp(i\phi)$  можно видеть, что величина  $\gamma = 1 - |\sigma|^2$  определяет дифракционные потери интенсивности за один проход резонатора. Величина  $\phi$  определяет изменение фазы электромагнитной волны за один проход резонатора. Приравнивая изменения фазы за полный проход резонатора  $2\phi$  числу кратному  $2\pi$  можно получить собственные частоты мод.

Уравнение (4.23) допускает разделение переменных, т. е. представление в виде  $u(x, y) = u(x)u(y)$ . Каждое из одномерных распределений поля может быть охарактеризовано индексом, возрастающим по мере усложнения структуры поля. Соответственно двумерное распределение поля характеризуется двумя индексами,  $u_{mn}(x, y) = u_m(x)v_n(y)$ . Поскольку поле в открытом резонаторе является поперечным, то для мод принято обозначение  $TEM_{mnq}$ .

### 4.3 Пучки Эрмита-Гаусса

Покажем, что уравнения Максвелла допускают существование электромагнитных полей, которые сосредоточены вблизи оси, определяющей направление распространения. Такие типы полей, как мы увидим ниже, являются основными полями, существующими в открытых резонаторах.

Положим, что электромагнитное поле распространяется в свободном пространстве, не содержащем свободных зарядов и токов, и выпишем волновое уравнение для электрического поля из (3.10) в виде

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (4.24)$$

Учитывая, что зависимость монохроматического поля от времени определяется соотношением (4.11) можно свести волновое уравнение к уравнению Гельмгольца для амплитуды электрического поля:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (4.25)$$

где  $k = \omega/c$ .

Положим далее, что поле распространяется вдоль оси  $z$ . Тогда амплитуда поля может быть представлена в виде

$$u = v(\mathbf{r})e^{ikz}. \quad (4.26)$$

Поскольку в последнем выражении уже учтены быстрые (оптические) осцилляции поля вдоль оси  $z$ , то далее естественно искать решение предполагая амплитуду поля  $v(\mathbf{r}) = v(x, y, z)$  медленно меняющейся функцией координаты  $z$ . Такой подход позволяет переписать уравнение Гельмгольца в виде приближённого параболического уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4.27)$$

Теперь можно учесть, что параболическое уравнение является симметричным относительно координат  $x$  и  $y$ . Это обстоятельство позволяет искать решение уравнения (4.27) в виде произведения двух функций:

$$v(\mathbf{r}) = v_m(x, z)v_n(y, z), \quad (4.28)$$

удовлетворяющих уравнению

$$v_n \left( \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial v_m}{\partial z} \right) + v_m \left( \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial v_n}{\partial z} \right) = 0. \quad (4.29)$$

В последнем уравнении естественно считать функции  $v_m$  и  $v_n$  независимыми и соответственно потребовать, чтобы выражения в скобках обращались в нуль, т. е. потребовать выполнения уравнений

$$\frac{\partial^2 v_l}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial v_l}{\partial z} = 0, \quad (4.30)$$

где  $l = m, n$ . После этого можно показать прямой подстановкой, что решениями уравнений (4.30) являются следующие функции

$$v_m(x, z) = \sqrt{C} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{z^2 + b^2}} H_m \left( \frac{x}{w} \right) \exp \left[ \frac{ikx^2}{2q} - i \left( m + \frac{1}{2} \right) \arctg \frac{z}{b} \right], \quad (4.31)$$

$$v_n(y, z) = \sqrt{C} \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{z^2 + b^2}} H_n \left( \frac{y}{w} \right) \exp \left[ \frac{iky^2}{2q} - i \left( n + \frac{1}{2} \right) \arctg \frac{z}{b} \right]. \quad (4.32)$$

В данных функциях  $C$  есть нормировочная константа,  $H_m(\xi)$  и  $H_n(\zeta)$  есть функции Эрмита, величина  $b$  является свободным параметром, определяющим значения функций  $w$  и  $q$ :

$$w = \sqrt{\frac{\lambda b}{2\pi}} \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}, \quad (4.33)$$

$$q = z - ib. \quad (4.34)$$

Отметим, что при проверке справедливости решений (4.31), (4.32) достаточно вычислить производные функций и воспользоваться соотношением для вторых производных полиномов Эрмита

$$H_m''(\xi) = 2\xi H_m'(\xi) - 2mH_m(\xi).$$

Окончательно, найденное распределение поля может быть представлено в виде

$$u_{mn}(x, y, z) = C \frac{w_0}{w(z)} H_m \left( \frac{x}{w(z)} \right) H_n \left( \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{2w^2(z)} \right) \times \exp \left\{ i \left[ kz - (m + n + 1) \operatorname{arctg} \frac{z}{b} + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \right\}, \quad (4.35)$$

где введены следующие обозначения

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda b}{2\pi}}, \quad (4.36)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{b^2}}, \quad (4.37)$$

$$R(z) = z \left( 1 + \frac{b^2}{z^2} \right). \quad (4.38)$$

Подчеркнём, что входящая в данное соотношение амплитудная константа  $C$  определяется величиной интенсивности поля.

Таким образом, приведённый выше анализ показывает, что световое поле вида (4.35) является приближённым решением точного волнового уравнения (4.25), а амплитудные части поля (4.31), (4.32) являются точными решениями приближённых параболических уравнений (4.30). Световые поля, описываемые функциями (4.35), определяют световые пучки, называемые пучками Эрмита-Гаусса.

Самым простым типом пучков Эрмита-Гаусса является гауссов пучок, характеризуемый индексами  $m = n = 0$ . Данный пучок имеет распределение поля

$$u_{00}(x, y, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{2w^2(z)} \right) \times \exp \left[ i \left( kz - \operatorname{arctg} \frac{z}{b} + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right) \right] \quad (4.39)$$

и соответственно распределение интенсивности, пропорциональное квадрату модуля амплитуды поля

$$|u_{00}(x, y, z)|^2 = C^2 \frac{w_0^2}{w^2(z)} \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right). \quad (4.40)$$

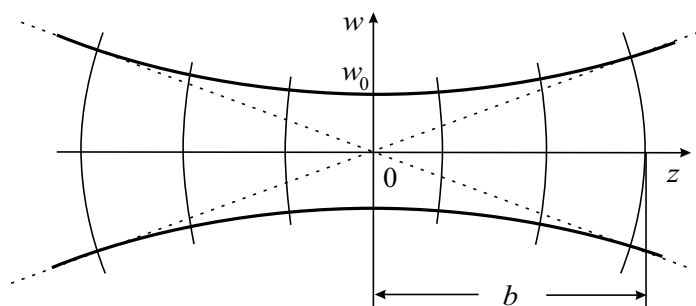


Рис. 4.4: Сечение гиперболической поверхности, определяющей изменение радиуса гауссова пучка  $w = w(z)$  вдоль оси распространения, и волновые фронты гауссова пучка.

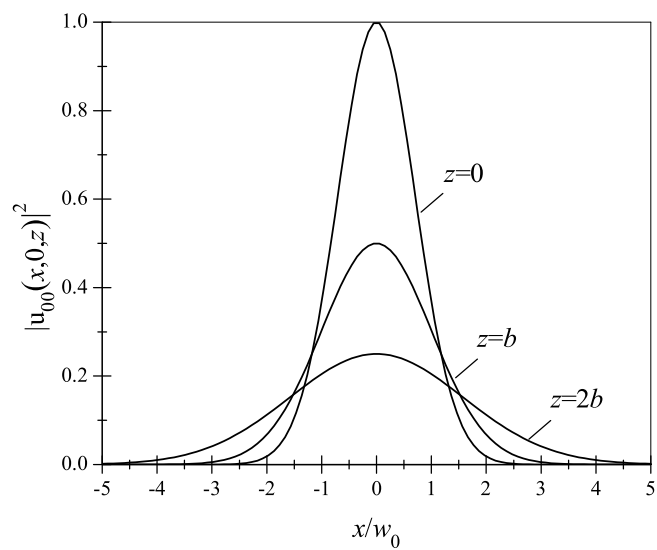


Рис. 4.5: Интенсивность электромагнитного поля в поперечном сечении гауссова пучка при различных расстояниях от перетяжки пучка.



Для гауссового пучка, сечение которого показано на рис. 4.4, величина  $w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/b^2}$  имеет смысл радиуса пучка на расстоянии  $z$  от центра симметрии пучка, считающегося расположенным в начале системы координат. Величина  $w_0 = \sqrt{\lambda b/2\pi}$  есть минимальный радиус гауссового пучка, достигаемый в центре симметрии пучка. Данная самая узкая часть гауссового пучка часто называется перетяжкой пучка. Свободный параметр  $b$ , определяющий форму гауссового пучка, называется параметром конфокальности. Как можно видеть из уравнения (4.37) данный параметр определяет расстояние на котором радиус пучка увеличивается в  $\sqrt{2}$  раз. Величину  $b$  иногда также называют рэлеевской длиной. Зависимость поперечного профиля гауссового пучка от расстояния до перетяжки иллюстрирована на рис. 4.5.

Гауссов пучок часто рассматривают в приближении, когда параметр конфокальности значительно превышает длину волны,  $kb \gg 1$ . В этом случае поверхность постоянной фазы, пересекающая ось распространения в точке  $z_0$ , определена приближённым уравнением

$$kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} = kz_0, \quad (4.41)$$

которое может быть представлено в виде

$$z = z_0 - \frac{x^2 + y^2}{2(z_0 + b^2/z_0)}. \quad (4.42)$$

Из уравнения (4.42) можно видеть, что волновой фронт гауссова пучка является параболоидом вращения. В этом же приближении волновой фронт может считаться сферическим с радиусом кривизны, зависящим от положения точки  $z_0$ :

$$R(z_0) = z_0 \left( 1 + \frac{b^2}{z_0^2} \right). \quad (4.43)$$

Последнее соотношение показывает, что в центре симметрии гауссового пучка волновой фронт является плоским, а на расстоянии параметра конфокальности, т. е. при  $z_0 = b$ , радиус кривизны волнового фронта в два раза превышает параметр конфокальности.

При отличных от нуля значениях индексов  $m, n$  распределение поля в поперечном сечении пучка Эрмита-Гаусса проявляет структуры, обусловленные вариациями функций Эрмита. Несколько простых типов структур для пучков Эрмита-Гаусса показаны на рис. 4.6.

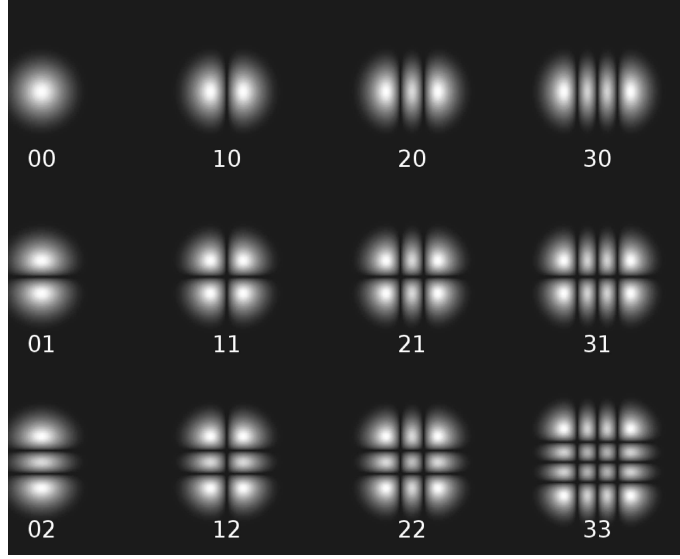


Рис. 4.6: Распределение интенсивности электромагнитного поля в поперечном сечении пучков Эрмита-Гаусса, отвечающих модам  $TEM_{mn}$  при значениях индексов  $m = 0 - 3$ ,  $n = 0 - 3$ .

#### 4.4 Пучки Лагерра-Гаусса

Выше было показано существование оптических полей, локализованных вдоль оси распространения, которые в декартовой системе координат описываются пучками Эрмита-Гаусса. Если использовать цилиндрическую систему координат, то также можно найти приближённые решения волнового уравнения. Последние получили название пучков Лагерра-Гаусса. Записав приближённое параболическое уравнение (4.27) в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (4.44)$$

можно прямой подстановкой проверить, что его решениями являются функции

$$u_{nm}(r, \varphi, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \mathcal{L}_n^{(m)}(\rho) \times \exp \left\{ i \left[ kz + m\phi - (2n + |m| + 1) \arctg \frac{z}{b} + \frac{kr^2}{2R(z)} \right] \right\}, \quad (4.45)$$

определяемые полиномами Лагерра  $L_n^{(m)}(\xi)$ . В данном решении

$$\rho = \sqrt{\frac{kb r^2}{b^2 + z^2}}, \quad (4.46)$$

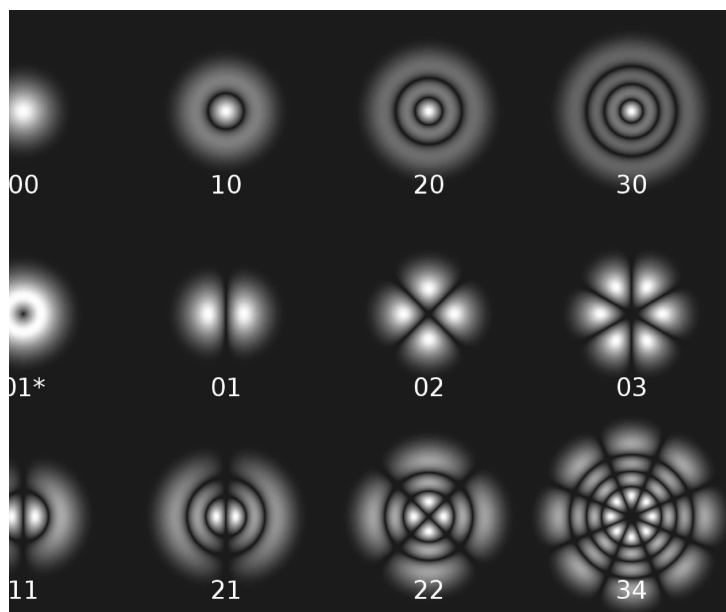


Рис. 4.7: Распределение интенсивности электромагнитного поля в поперечном сечении пучков Лагерра-Гаусса, отвечающих модам  $TEM_{nm}$ .

$$\mathcal{L}_n^{(m)}(\rho) = \rho^{|m|} L_n^{(m)}(\rho^2) e^{-\rho^2/2}, \quad (4.47)$$

а остальные функции определены соотношениями (4.36)-(4.38).

Простейшим типом пучка Лагерра-Гаусса является гауссов пучок, отвечающий значениям индексов  $m = 0, n = 0$ . Этот пучок определён соотношением идентичным соотношению (4.39)

$$u_{00}(r, \phi, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{r^2}{2w^2(z)}\right) \times \exp\left[i\left(kz - \arctg \frac{z}{b} + \frac{kr^2}{2R(z)}\right)\right] \quad (4.48)$$

Несколько простых типов структур для пучков Лагерра-Гаусса показаны на рис. 4.7. Следует обратить внимание, что для моды  $TEM_{01}^*$  интенсивность излучения равна нулю в центре моды.

## 4.5 Конфокальный резонатор

В теории оптических мод открытых резонаторов особое значение имеет конфокальный резонатор. Как будет показано ниже конфокальный резонатор имеет геометрию, из которой могут быть получены все остальные открытые резонаторы. Конфокальный резонатор состоит из двух

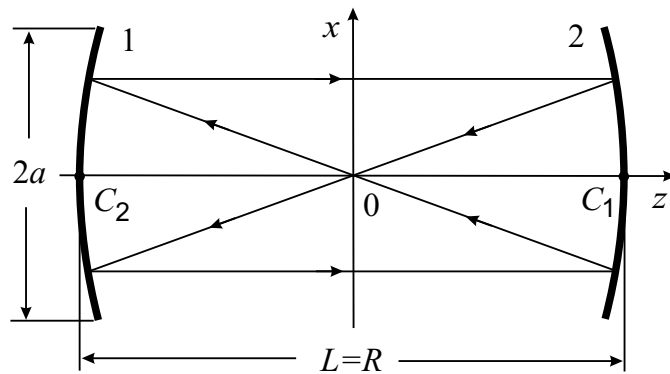


Рис. 4.8: Распространение световых лучей в конфокальном резонаторе, образованном зеркалами 1 и 2 с центрами кривизны  $C_1$  и  $C_2$ .

сферических зеркал, имеющих радиусы кривизны  $R$  и расположенных на расстоянии  $L = R$ . Благодаря такому расположению центр кривизны зеркала 1 находится на зеркале 2, а центр кривизны зеркала 2 - на зеркале 1 (рис. 4.8). Рисунок 4.8 также показывает распространение лучей в рамках геометрической оптики. Зеркала могут быть как квадратными так и круглыми.

При анализе конфокального резонатора можно заметить, что распределение поля в конфокальном резонаторе может определяться полями пучков Эрмита-Гаусса в случае квадратных зеркал и полями пучков Лагерра-Гаусса в случае круглых зеркал. В любом случае это возможно, если кривизна волнового фронта совпадает с кривизной зеркал (рис. 4.9). В связи с этим в случае конфокального резонатора можно определить параметр  $b$  исходя из свойств гауссового пучка. Потребуем, чтобы на расстояниях  $z = \pm R/2$  радиус кривизны волнового фронта гауссового пучка совпадал с радиусом кривизны зеркал резонатора. Это условие согласно (4.38) имеет вид

$$R = \frac{R}{2} \left( 1 + \frac{4b^2}{R^2} \right),$$

откуда следует, что параметр конфокальности  $b = R/2 = L/2$ .

Определив параметр конфокальности теперь можно уже окончательно переписать приведённые выше общие формулы для случая конфокального резонатора. Именно, в случае конфокального резонатора распределение электромагнитного поля в модах резонатора определяется соотношениями (4.35), в которых зависимость радиуса моды от расстоя-

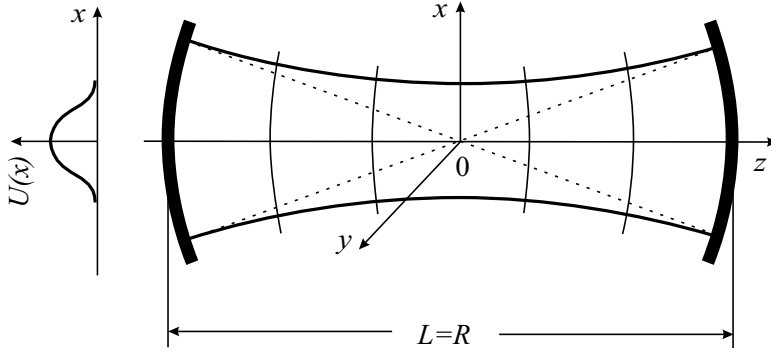


Рис. 4.9: Поверхности постоянной фазы поля для основной моды конфокального резонатора. Слева показан профиль поперечного распределения интенсивности поля основной моды.

ния определяется величиной

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{4z^2}{L^2}}. \quad (4.49)$$

Соответственно для гауссового пучка, распространяющегося в конфокальном резонаторе, минимальный радиус есть

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{4\pi}}. \quad (4.50)$$

Радиус кривизны гауссового пучка зависит от положения точки пересечения волнового фронта с осью  $z$  как

$$R(z) = z_0 \left( 1 + \frac{L^2}{4z_0^2} \right). \quad (4.51)$$

Медленно меняющаяся фаза поля зависит от расстояния как

$$\phi(z) = \arctg \left( \frac{2z}{L} \right). \quad (4.52)$$

Для произвольной моды конфокального резонатора распределение поля на зеркалах определяется соотношениями

$$u_{mn}(x, y) = \frac{C}{\sqrt{2}} H_m \left( x \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda L}} \right) H_n \left( y \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda L}} \right) \exp \left[ -\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda L} \right].$$

В случае основной гауссовой моды  $TEM_{00}$  распределение поля на зеркалах является гауссовым (рис. 4.10)

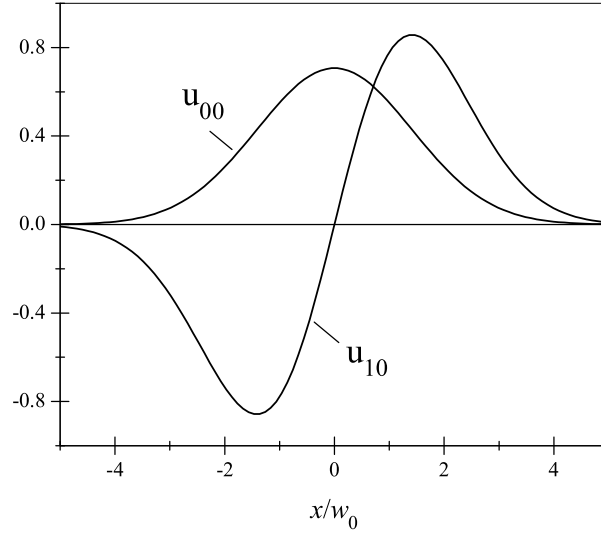


Рис. 4.10: Распределение амплитуды поля на зеркалах конфокального резонатора для основной моды  $TEM_{00}$  (а) и первой моды  $TEM_{10}$  (б).

$$u_{00}(x, y) = \frac{C}{\sqrt{2}} \exp \left[ -\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda L} \right].$$

Радиус основной моды на зеркале, т. е. расстояние от центра зеркала, при котором интенсивность поля уменьшается в  $e$  раз есть

$$w_3 = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi}}.$$

Расходимость основной моды определяется углом

$$\theta = \frac{4w_0}{L}.$$

Для моды  $TEM_{10}$  распределение поля на зеркалах имеет вид (рис. 4.10)

$$u_{10}(x, y) = C \sqrt{\frac{4\pi}{\lambda L}} x \exp \left[ -\frac{\pi(x^2 + y^2)}{\lambda L} \right].$$

Частоты мод конфокального резонатора с квадратными зеркалами определены соотношением

$$\nu_{mnq} = \frac{c}{4L} (2q + m + n + 1).$$

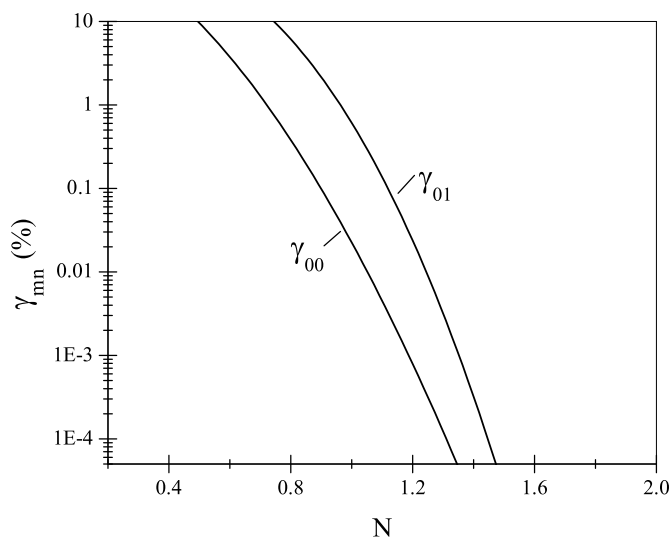


Рис. 4.11: Величина относительных потерь интенсивности за полный проход резонатора как функция числа Френеля для мод  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{01}$  конфокального резонатора с круглыми зеркалами.

Дифракционные потери в конфокальном резонаторе гораздо меньше потерь в резонаторах другой геометрии, поскольку поле сосредоточено главным образом вблизи оси резонатора. В качестве примера рис. 4.11 показывает дифракционные потери за проход резонатора  $\gamma_{mn} = 1 - |\sigma_{mn}|^2$  для мод  $TEM_{00}$ ,  $TEM_{01}$  конфокального резонатора с круглыми зеркалами.

## 4.6 Распространение световых лучей

### 4.6.1 Параксиальные лучи

Когда луч света проходит через поляризационно взаимную оптическую систему, состоящую из линз, зеркал и других оптических элементов, то состояние луча света на входе и выходе системы может быть охарактеризовано двумя параметрами: радиальными смещениями  $r_1, r_2$  и угловыми смещениями  $\theta_1, \theta_2$  (рис. 4.12). В приближении параксиальных лучей входные параметры  $r_1, \theta_1$  и выходные параметры  $r_2, \theta_2$  могут быть связаны линейными соотношениями

$$\begin{aligned} r_2 &= Ar_1 + B\theta_1, \\ \theta_2 &= Cr_1 + D\theta_1, \end{aligned} \quad (4.53)$$

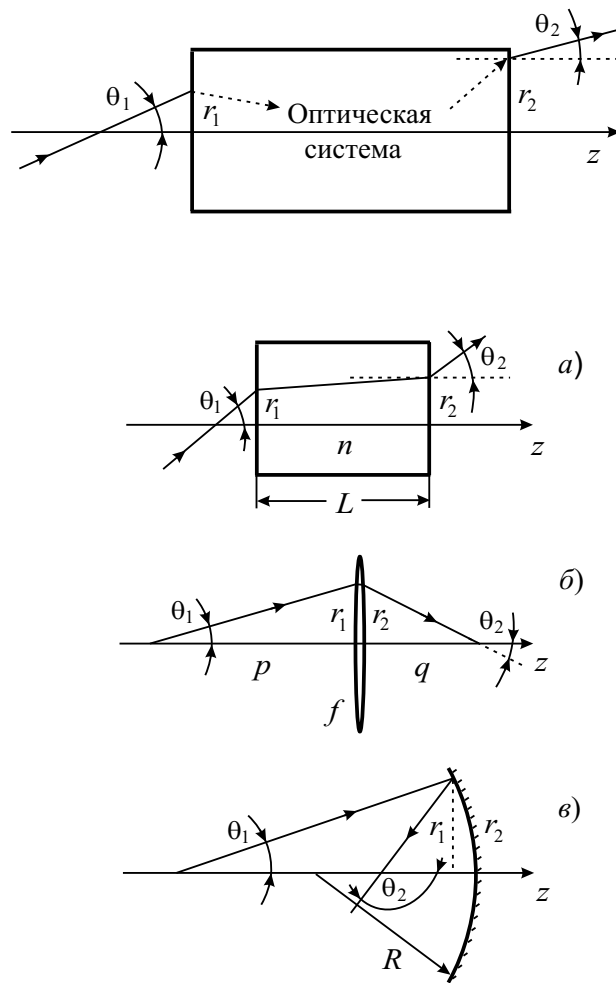


Рис. 4.12: Геометрия распространения параксиального луча в оптической системе, а также прохождение луча через среду с показателем преломления  $n$  (а), тонкую линзу с фокусным расстоянием  $f$  (б) и отражение луча от сферического зеркала радиусом кривизны  $R$  (в).



где  $A, B, C, D$  - постоянные, характеризующие оптическую систему. Уравнения распространения параксиального луча могут быть также записаны в удобном матричном виде

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (4.54)$$

где матрица  $ABCD$ , часто называемая лучевой матрицей, полностью характеризует оптическую систему.

Приведём несколько примеров матрицы  $ABCD$ . В случае прохождения луча света через однородную среду с показателем преломления  $n$  и длиной  $L$ , показанную на рис. 4.12а, уравнения распространения луча имеют вид

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + \theta_1 L/n, \\ \theta_2 &= \theta_1, \end{aligned} \quad (4.55)$$

и соответственно определяют матрицу  $ABCD$  в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.56)$$

При прохождении светового луча через тонкую линзу с фокусным расстоянием  $f$  распространение луча описывается уравнением линзы и простыми дополнительными соотношениями (рис. 4.12б)

$$\begin{aligned} 1/p + 1/q &= 1/f, \\ \theta_1 &= r_1/p, \\ \theta_2 &= -r_2/q, \\ r_2 &= r_1. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Из этих уравнений следует связь между входными и выходными параметрами

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1, \\ \theta_2 &= -r_1/f + \theta_1, \end{aligned}$$

и соответственно структура матрицы  $ABCD$  в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

В случае отражения луча от сферического зеркала радиуса  $R$  матрица  $ABCD$  может быть получена из матрицы (4.58) с учётом того, что фокусное расстояние вогнутого зеркала равно  $R/2$  (рис. 4.12в)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Сложные оптические системы, составленные из нескольких оптических элементов, могут быть описаны лучевыми матрицами, являющимися произведениями лучевых матриц отдельных элементов. Рассмотрим, например, ситуацию когда луч света проходит сначала оптический элемент 1, а затем оптический элемент 2. В этом случае луч света имеет входные параметры  $r_1, \theta_1$ , затем промежуточные параметры  $r_2, \theta_2$  и окончательные выходные параметры  $r_3, \theta_3$ . Записав связи между этими параметрами в виде (4.54) можно видеть, что лучевая матрица данной составной системы является произведением лучевых матриц второго и первого оптических элементов

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

Аналогичным образом может быть записана лучевая матрица для системы, состоящей из любого числа поляризационно взаимных оптических элементов.

Приведём один простой пример нахождения лучевой матрицы для оптической системы, состоящей из нескольких элементов. Пусть световой луч проходит сначала однородную среду толщиной  $L_1$  с показателем преломления  $n_1$ , а затем однородную среду толщиной  $L_2$  с показателем преломления  $n_2$ . Для данной составной системы в соответствии с уравнением (4.60) лучевая матрица есть

$$\begin{pmatrix} 1 & L_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_1/n_1 + L_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если обе среды имеют один и тот же показатель преломления  $n$ , а полная длина среды есть  $L = L_1 + L_2$ , то данная матрица очевидно совпадает с матрицей (4.56).

Отметим также, что лучевые матрицы, описывающие распространение световых лучей в поляризационно взаимных оптических элементах, имеют определители, равные единице:

$$AD - BC = 1. \quad (4.61)$$

Данное правило в частности выполняется для всех приведённых выше матриц  $ABCD$ .

### 4.6.2 Гауссов пучок

Рассмотрим гауссов пучок, распределение поля в котором описывается соотношением (4.35) при нулевых значениях поперечных индексов  $m = 0$ ,  $n = 0$ :

$$u_{00}(x, y, z) = C \frac{w_0}{w(z)} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2w^2(z)}\right) \times \exp\left[i\left(kz - \arctg \frac{z}{b} + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)}\right)\right]. \quad (4.62)$$

Для гауссового пучка существуют инвариантные способы описания, использующие только один параметр.

Один такой способ состоит в использовании в качестве параметра минимального радиуса пучка  $w_0$ . В этом случае параметр конфокальности  $b$ , радиус пучка  $w(z)$  и радиус кривизны волнового фронта  $R(z)$  могут быть записаны в следующем виде

$$\begin{aligned} b &= \frac{2\pi w_0^2}{\lambda}, \\ w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{2\pi w_0^2}\right)^2}, \\ R(z) &= z \left(1 + \left(\frac{2\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Другой способ состоит в использовании параметра конфокальности  $b$ . Подставив в соотношение (4.62) значения  $w(z)$  и  $R(z)$  в виде (4.37) и (4.38) можно получить для распределения поля в гауссовом пучке следующее соотношение:

$$u_{00}(x, y, z) = -C \frac{ib}{z - ib} \exp\left[i\left(kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2(z - ib)}\right)\right]. \quad (4.64)$$

Как можно теперь видеть, распределение поля в гауссовом пучке может также описываться одним комплексным параметром

$$q = z - ib, \quad (4.65)$$

называемым комплексным параметром пучка. Значение этого параметра определяет распределение поля в любом сечении пучка в виде

$$u_{00}(x, y, z) = -C \frac{ib}{q} \exp\left[i\left(kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2q}\right)\right]. \quad (4.66)$$

Отметим, что для комплексного параметра пучка можно также выписать соотношение

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{2\pi w^2(z)},$$

показывающее, что параметр  $q$  одновременно определяет как радиус кривизны волнового фронта, так и радиус пучка.

Используя представление гауссового пучка в форме (4.66) можно показать, что когда гауссов пучок проходит через оптическую систему, характеризуемую лучевой матрицей ABCD, изменение комплексного параметра пучка от значения  $q$  на входе в систему до значения  $q'$  на выходе системы описывается простым выражением

$$q' = \frac{Aq + B}{Cq + D}. \quad (4.67)$$

Это соотношение часто называют ABCD-законом распространения гауссового пучка. В справедливости данного закона преобразования можно в частности убедиться на простейшем примере распространения пучка в свободном пространстве. В этом случае матрица ABCD определена соотношением (4.56) при  $n = 1$  и изменение комплексного параметра пучка просто сводится к результату (4.65)

$$q' = q + L. \quad (4.68)$$

Отметим ещё, что, например, при прохождении через тонкую линзу с фокусным расстоянием  $f$  комплексный параметр пучка меняется в соответствии со значениями элементов матрицы (4.58)

$$q' = \frac{f}{f - q} q. \quad (4.69)$$

## 4.7 Обобщённый сферический резонатор

### 4.7.1 Расчёт геометрии

Проведённое в разделе 4.3 рассмотрение конфокального резонатора позволяет дать анализ общего случая резонатора, состоящего из двух сферических зеркал, имеющих радиусы  $R_1$  и  $R_2$  и расположенных на расстоянии  $L$  (рис. 4.13). Эффективный подход к анализу такого обобщённого резонатора состоит в сравнении его с конфокальным резонатором. Будем считать, что наряду с синфазными поверхностями  $1'$  и  $2'$ , определяющими положения зеркал обобщённого резонатора, существуют синфазные

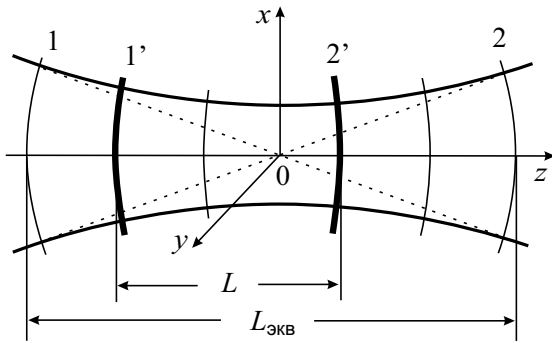


Рис. 4.13: Конфокальный резонатор с зеркалами 1 и 2 и обобщённый сферический резонатор с зеркалами 1' и 2'.

поверхности 1 и 2, отвечающие положению зеркал конфокального резонатора. Существование таких поверхностей означает, что можно удалить зеркала 1' и 2' и поместить зеркала конфокального резонатора вместо поверхностей 1 и 2. Такая замена очевидно не меняет распределения поля, которое по прежнему описывается уравнением (4.35). Таким образом, найдя связь между обобщённым и эквивалентным конфокальным резонатором можно установить распределение поля для обобщённого резонатора.

Согласно соотношению (4.38) для эквивалентного конфокального резонатора радиусы кривизны синфазных поверхностей есть

$$R(z) = z \left( 1 + \frac{L_{\text{экв}}^2}{4z^2} \right), \quad (4.70)$$

где  $L_{\text{экв}}$  есть длина эквивалентного конфокального резонатора. Записав данное соотношение для заданных радиусов кривизны зеркал обобщённого резонатора  $R_1, R_2$  и их положений  $z_1, z_2$  на оси  $z$  можно найти длину эквивалентного конфокального резонатора. После этого все параметры лазерного луча могут быть найдены из соотношений (??) - (4.38), в которых в качестве длины резонатора  $L$  берётся длина эквивалентного конфокального резонатора  $L_{\text{экв}}$ .

Указанная схема расчёта может быть в частности применена к важному случаю симметричного резонатора, когда зеркала имеют одинаковые радиусы кривизны  $R_2 = -R_1 = R$  и находятся на расстоянии  $L$ . В этом случае соотношение (4.70) записывается в виде

$$R = \frac{L}{2} \left( 1 + \frac{L_{\text{экв}}^2}{L^2} \right),$$

и даёт для длины эквивалентного конфокального резонатора значение

$$L_{\text{экв}} = \sqrt{L(2R - L)}. \quad (4.71)$$

Зная длину эквивалентного конфокального резонатора можно рассчитать по формулам (4.49)-(4.52) все необходимые параметры обобщённого сферического резонатора. Так, применив формулу (4.50) при значении  $L = L_{\text{экв}}$  можно найти для минимального радиуса луча симметричного резонатора значение

$$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda L}{4\pi} \sqrt{\frac{2R}{L} - 1}},$$

Для радиусов световых пятен на зеркалах из формулы (4.49) можно найти значения

$$w_{31} = w_{32} = \sqrt{\frac{\lambda L}{2\pi} \sqrt{\frac{R/L}{\sqrt{2R/L} - 1}}}.$$

### 4.7.2 Устойчивость сферического резонатора

Открытый резонатор с произвольно взятыми зеркалами очевидно может не обеспечить устойчивого распространения электромагнитного поля вблизи оси резонатора. Соответственно принято разделять открытые резонаторы на устойчивые, в которых электромагнитное поле может существовать вблизи оси, и на неустойчивые, в которых поле после некоторого числа проходов, выходит из резонатора. Естественно, что нахождение условий устойчивого распространения поля внутри резонатора имеет важное значение для многих приложений.

Условия устойчивости обобщённого сферического резонатора можно получить исходя из приближения геометрической оптики (рис. 4.14). Рассмотрим луч, выходящий из некоторой точки  $r_0, \theta_0$  внутри резонатора и приходящий после первого полного прохода резонатора в точку  $r_1, \theta_1$ , после второго полного прохода - точку  $r_2, \theta_2$  и т. д. Если полный проход резонатора описывается лучевой матрицей ABCD, то после  $n$ -го полного прохода резонатора координаты точки  $r_n, \theta_n$  будут определяться лучевой матрицей, которая является произведением  $n$  исходных матриц

$$\begin{pmatrix} r_n \\ \theta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}.$$

Как уже отмечалось выше, в рассматриваемом случае, когда оптическая система содержит поляризационно-взаимные элементы, определи-

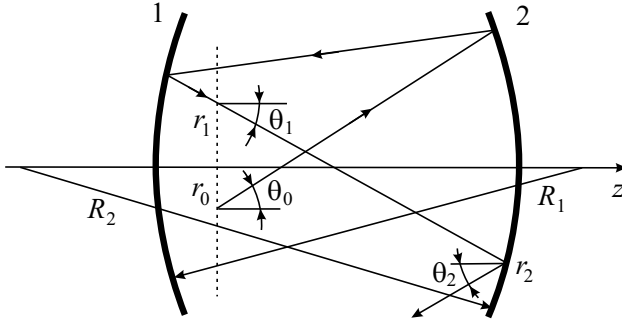


Рис. 4.14: Распространение луча в обобщённом сферическом резонаторе с радиусами кривизны зеркал  $R_1$  и  $R_2$ .

тель матрицы ABCD равен единице. В связи с этим произведение  $n$  матриц может быть представлено согласно теореме Сильвестра в виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^n = \frac{1}{\sin \theta} \begin{pmatrix} A \sin n\theta - \sin(n-1)\theta & B \sin n\theta \\ C \sin n\theta & D \sin n\theta - \sin(n-1)\theta \end{pmatrix}$$

где введён угол  $\theta$ , определённый соотношением

$$\cos \theta = \frac{1}{2}(A + D). \quad (4.72)$$

Резонатор, очевидно, будет устойчивым если последняя матрица не расходится, т. е. все её элементы конечны. Для этого должно быть выполнено условие  $|\cos \theta| \leq 1$ . Чтобы воспользоваться данным условием найдём предварительно элементы исходной матрицы. Положим, что исходная точка выбрана внутри резонатора перед зеркалом 1 как это показано на рис. 4.14. Тогда исходная матрица, описывающая полный проход резонатора, будет равна произведению четырёх матриц, из которых первая единичная матрица описывает свободное распространение луча от зеркала 1 до зеркала 2, вторая матрица описывает отражение от зеркала 2, третья единичная матрица описывает свободное распространение от зеркала 2 до зеркала 1 и, наконец, четвёртая матрица описывает отражение от зеркала 1. Таким образом, исходная матрица может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножив матрицы можно вычислить удобное выражение

$$\frac{1}{2}(\cos \theta + 1) = \frac{A + D + 2}{4} = g_1 g_2,$$

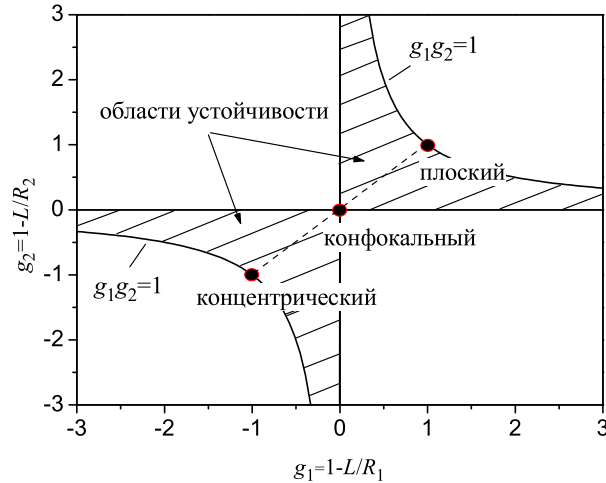


Рис. 4.15: Области устойчивости обобщенного сферического резонатора.

где введены обозначения

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 - \frac{L}{R_1}, \\ g_2 &= 1 - \frac{L}{R_2}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Окончательно, условие стабильности (4.72) принимает весьма простой вид

$$0 < g_1 g_2 < 1. \quad (4.74)$$

Области устойчивости показаны на рис. 4.15. Следует особо отметить три специальных случая, отвечающие симметричным резонаторам с зеркалами одинакового радиуса кривизны. Эти случаи, отмеченные на рис. 4.15 точками, относятся к концентрическому, конфокальному и плоскому резонаторам. Все эти три типа резонаторов лежат на границах, разделяющих области устойчивости и неустойчивости. По этой причине резонаторы этих типов весьма чувствительны к несоосности зеркал. С практической точки зрения более удобны резонаторы, образованные либо двумя вогнутыми зеркалами больших радиусов кривизны, либо резонаторы, образованные вогнутым зеркалом большого радиуса кривизны и плоского зеркала. Эти резонаторы обладают умеренной устойчивостью к несоосности зеркал и дают не слишком малый размер пятна.



## 4.8 Неустойчивые резонаторы

В устойчивом резонаторе электромагнитное поле сосредоточено вблизи оси. Соответственно размер пятна внутри резонатора весьма мал. Так, при длине резонатора порядка метра и длине волны в видимом диапазоне размер пятна составляет около 1 мм. Столь малый размер пятна затрудняет получение большой мощности излучения. Для преодоления этого недостатка в лазерной технике используются неустойчивые резонаторы, в которых объём, занимаемый излучением, может быть весьма велик. Особый интерес неустойчивые резонаторы представляют для лазеров с большим коэффициентом усиления, когда усиление активной среды компенсирует потери, обусловленные выходом излучения за пределы резонатора. Дополнительным преимуществом неустойчивых резонаторов является возможность селекции в них низших мод, потери в которых значительно меньше потерь в более высоких модах.

Анализ неустойчивых резонаторов может быть с достаточно высокой точностью проведён методами геометрической оптики. Дело в том, что потери излучения за счёт его выхода за размеры зеркал имеют смысл геометрических потерь. Соответственно, дифракция не играет большой роли в образовании модовой структуры излучения в неустойчивых резонаторах. Малый вклад дифракции в структуру поля в неустойчивых резонаторах также означает, что распределение поля в моде резонатора близко к однородному. Волновой фронт моды естественно остаётся сферическим поскольку его форма определяется сферическими зеркалами. Таким образом, мода неустойчивого резонатора представляет собой суперпозицию двух встречных сферических волн с однородным распределением интенсивности.

Основные свойства неустойчивого резонатора можно рассмотреть на достаточно общем примере резонатора, образованного двумя выпуклыми сферическими зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  с радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 4.16а). Положим, что волна, отражённая от зеркала  $M_1$ , является сферической с центром в точке  $P_1$ , которая вообще говоря не совпадает с центром кривизны или фокальной точкой этого зеркала. Часть этой волны отразится от зеркала  $M_2$ , часть пройдёт мимо. Аналогичным образом будем считать, что отражённая от зеркала  $M_2$  сферическая волна имеет центр в точке  $P_2$ .

Из геометрических соображений понятно, что необходимым условием существования моды в рассматриваемом резонаторе является согласованность световых лучей, именно, при отражении от зеркал сферические волны должны переходить друг в друга. Это означает, что точки  $P_1$  и  $P_2$  должны быть изображениями друг друга в соответствующих сфери-

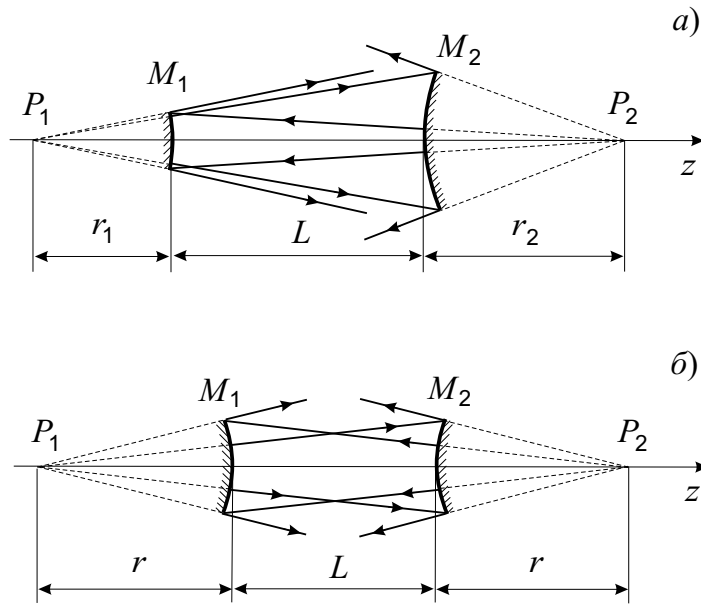


Рис. 4.16: а) Неустойчивый резонатор с двумя выпуклыми зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  с разными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ . б) Симметричный неустойчивый резонатор с одинаковыми выпуклыми зеркалами  $M_1$  и  $M_2$  с радиусом кривизны  $R_1 = R_2 = R$ .

ческих зеркалах. Иначе говоря, сферическая волна, исходящая из точки  $P_1$ , после отражения от зеркала 2 должна давать сферическую волну, исходящую из точки  $P_2$ , и наоборот. Применяв к попарно сопряжённым расстояниям  $r_1$  и  $L+r_2$ , а также  $r_1+L$  и  $r_2$  формулу сферического зеркала в параксиальном приближении можно записать два уравнения:

$$-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{L+r_2} = -\frac{2}{R_1},$$

$$\frac{1}{L+r_1} - \frac{1}{r_2} = -\frac{2}{R_2},$$

где расстояния  $r_1$ ,  $r_2$  и  $L$  считаются положительными. Напомним, что в формуле сферического зеркала радиус кривизны считается положительным для вогнутого зеркала и отрицательным для выпуклого зеркала. Решения этих уравнений определяют расстояния  $r_1$  и  $r_2$  и тем самым геометрию распространения лучей в неустойчивом резонаторе. В частном случае симметричного резонатора, показанного на рис. 4.16 б, когда зеркала имеют одинаковые радиусы кривизны  $R_1 = R_2 = R$ , а центры сферических волн расположены на одинаковых расстояниях  $r_1 = r_2 = r$ ,

приведённые уравнения дают значение расстояния

$$r = \frac{1}{2}L \left( \sqrt{1 + \frac{2R}{L}} - 1 \right).$$

Геометрия неустойчивого резонатора определяет также величину потерь на излучение. Положим, что  $m_1$  и  $m_2$  - коэффициенты увеличения сферических волн при однократном прохождении резонатора. Как можно видеть из рис. 4.16 а эти коэффициенты равны

$$m_1 = \frac{L + r_1}{r_1}, \quad m_2 = \frac{L + r_2}{r_2}.$$

Соответственно, при полном проходе резонатора луч увеличивает свой поперечный размер в отношении

$$M = m_1 m_2 = \frac{(L + r_1)(L + r_2)}{r_1 r_2}.$$

Таким образом, при полном проходе резонатора линейный размер пятна сферической волны возрастает в  $M$  раз. Положим, что в начальный момент интенсивность излучения в резонаторе есть  $I_0$ . При однородной освещённости зеркал интенсивность излучения после полного прохода резонатора уменьшается до значения  $I_0/M^2$ . Соответственно относительные потери интенсивности за полный проход резонатора составляют величину

$$\Gamma = \frac{I_0 - I_0/M^2}{I_0} = 1 - \frac{1}{M^2} = 1 - \frac{r_1^2 r_2^2}{(L + r_1)^2 (L + r_2)^2}.$$

Для симметричного резонатора относительные потери интенсивности определяются соотношением

$$\Gamma = 1 - \frac{r^4}{(L + r)^4}.$$

Другим достаточно общим примером неустойчивого резонатора является резонатор, образованный вогнутым и выпуклым зеркалами (рис. 4.17 а). Такой резонатор представляет практический интерес в связи с тем, что вывод излучения осуществляется в одну сторону. Положим, что в рассматриваемом резонаторе центр сферической волны, отражённой от зеркала  $M_1$ , находится в точке  $P_1$ , а центр волны, отражённой от зеркала  $M_2$ , - в точке  $P_2$ . Применяв формулу сферического зеркала к отражению

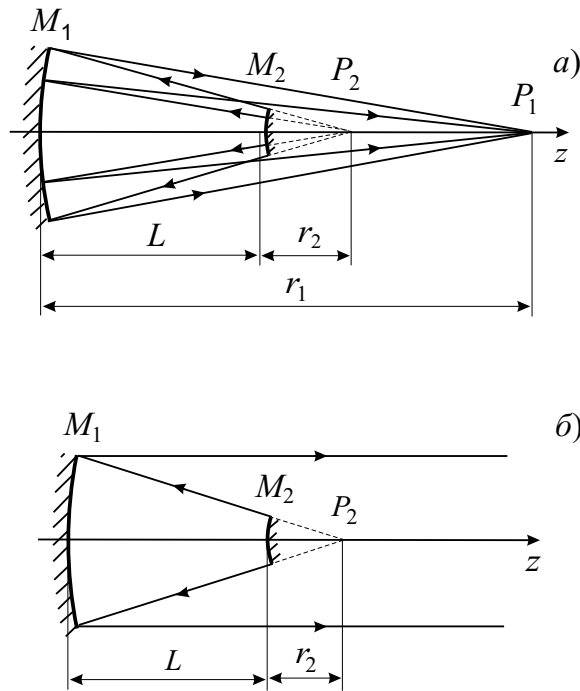


Рис. 4.17: Неустойчивый резонатор с вогнутым и выпуклым зеркалами (а) и неустойчивый телескопический резонатор (б).

лучей от зеркал  $M_1$  и  $M_2$  можно для рассматриваемого резонатора записать уравнения согласования сферических волн:

$$\frac{1}{L+r_2} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{R_1},$$

$$-\frac{1}{r_1-L} - \frac{1}{r_2} = -\frac{2}{R_2}.$$

Из этих уравнений можно выразить расстояние  $r_2$  через расстояние  $r_1$  в виде

$$r_2 = \frac{(r_1 - L)R_2}{2(r_1 - L) - R_2}$$

и получить уравнение для расстояния  $r_1$  в виде

$$r_1^2 + \frac{2L(L+r_2)}{R_1 - R_2 - 2L}r_1 - \frac{LR_1(L+r_2)}{R_1 - R_2 - 2L} = 0.$$

Важным специальным случаем рассмотренного резонатора является телескопический резонатор, для которого точка  $P_1$  располагается на бесконечности (рис. 4.17 б). Как видно из приведённых формул, при  $r_1 \rightarrow \infty$

расстояние  $r_2 \rightarrow R_2/2$ . Параметры телескопического резонатора естественно не могут быть произвольными, поскольку как видно из рис. 4.17 б точка  $P_2$  является общим фокусом зеркал  $M_1$  и  $M_2$ . Это означает, что для телескопического резонатора выполняются соотношения

$$L + r_2 = R_1/2, \quad r_2 = R_2/2.$$

Соответственно, при заданных радиусах кривизны зеркал длина телескопического резонатора должна удовлетворять соотношению  $2L = R_1 - R_2$ . Последнее соотношение имеет смысл условия конфокальности телескопического резонатора.

Как следует из рис. 4.17 б мода телескопического резонатора является суперпозицией сферической и плоской волн. Соответственно в телескопическом резонаторе увеличение поперечного сечения моды происходит при прохождении волны в одну сторону. Коэффициент увеличения телескопического резонатора имеет значение

$$M = \frac{L + r_2}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Относительные потери интенсивности в телескопическом резонаторе определяются величиной

$$\Gamma = 1 - \frac{1}{M^2} = 1 - \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Подчеркнём, что в телескопическом резонаторе всегда  $R_1 > R_2$  поскольку  $R_1 = 2L + R_2$ .

## 4.9 Интерферометр Фабри-Перо

Этот оптический прибор состоит из двух плоских параллельных зеркал, расположенных на расстоянии  $L$  и имеющих коэффициенты отражения  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 4.18). Среда между зеркалами имеет показатель преломления  $n$ .

Принцип действия интерферометра Фабри-Перо основан на многолучевой интерферометрии. Положим, что на интерферометр падает слева монохроматическая световая волна с амплитудой  $E_0 \exp(i\theta_0)$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$ , т. е. волна вида

$$E_0 e^{i\theta_0} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}.$$

Как можно видеть из рис. 4.18 прохождение световых волн через ин-

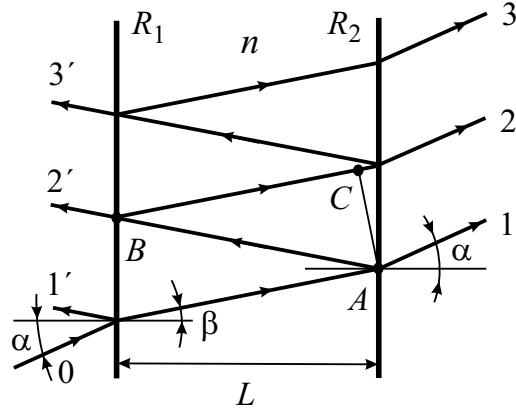


Рис. 4.18: Распространение лучей в интерферометре Фабри-Перо.

терферометр определяется амплитудными коэффициентами пропускания зеркал  $t_1$  и  $t_2$ , амплитудными коэффициентами отражения зеркал  $r_1$  и  $r_2$ , а также сдвигами фаз за счёт распространения волн между зеркалами интерферометра. Так, согласно рис. 4.18 первые три прошедшие волны (1,2,3) имеют амплитуды

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 e^{i\theta} t_1 t_2, \\ E_2 &= E_0 e^{i\theta} t_1 r_2 r_1 t_2 e^{2i\phi} = E_1 r_1 r_2 e^{2i\phi}, \\ E_3 &= E_0 e^{i\theta} t_1 r_2 r_1 r_2 r_1 t_2 e^{4i\phi} = E_1 r_1^2 r_2^2 e^{4i\phi}, \end{aligned}$$

где фаза  $\theta$  включает как начальную фазу, так и фазу, связанную с распространением волны между зеркалами. Величина  $2\phi$  есть набег фазы при прохождении волной пути ABC:

$$2\phi = k(L_{AB} + L_{BC}) = 2kL \cos \beta = \frac{2n\omega}{c} L \cos \beta. \quad (4.75)$$

Угол  $\beta$  связан с углом падения  $\alpha$  законом Снеллиуса:  $\sin \beta = \sin \alpha / n$ . В несколько более наглядном виде геометрический сдвиг фазы между двумя соседними прошедшими лучами можно записать как

$$2\phi = \frac{2\omega}{c} L', \quad L' = nL \cos \beta, \quad (4.76)$$

где величина  $L'$  имеет смысл оптической длины интерферометра.

В соответствии с рассмотренной многолучевой картиной амплитуда прошедшего светового поля может быть записана как

$$E_t = \sum E_n = E_0 t_1 t_2 e^{i\theta} \sum_{n=0}^{n=\infty} r_1^n r_2^n e^{2in\phi}.$$

Вычислив сумму геометрической прогрессии можно получить для амплитуды прошедшего поля выражение

$$E_t = E_0 e^{i\theta} \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}}.$$

Из последнего соотношения прямо следует коэффициент пропускания интерферометра по интенсивности

$$T = \frac{|E_t|^2}{E_0^2} = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 - 2r_1 r_2 \cos 2\phi + r_1^2 r_2^2}.$$

Если учесть связи между коэффициентами пропускания и отражения по амплитуде  $t_1, t_2, r_1, r_2$  и коэффициентами отражения по интенсивности  $R_1, R_2$ ,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{R_1}, & t_1 &= \sqrt{1 - r_1^2} = \sqrt{1 - R_1}, \\ r_2 &= \sqrt{R_2}, & t_2 &= \sqrt{1 - r_2^2} = \sqrt{1 - R_2}, \end{aligned}$$

то можно получить практически удобное выражение для коэффициента пропускания интерферометра:

$$T = \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2 + 4\sqrt{R_1 R_2} \sin^2 \phi}. \quad (4.77)$$

Напомним, что фазовый угол пропорционален частоте световой волны,  $\phi = n(\omega/c)L \cos \beta$ .

Зависимость коэффициента пропускания  $T$  от частоты волны показана на рис. 4.19. Согласно (4.77) интерферометр имеет максимумы пропускания при значениях фазы  $\phi = q\pi$ , где  $q$  - целое число. Подставив в данное соотношение значение фазы  $\phi$  можно видеть, что максимумы пропускания расположены на частотах

$$\nu_q = \frac{c}{2L} q = \frac{c}{2nL \cos \beta} q. \quad (4.78)$$

Пропускание в максимумах и минимумах определяется выражениями

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2}, \\ T_{\min} &= \frac{(1 - R_1)(1 - R_2)}{(1 + \sqrt{R_1 R_2})^2}. \end{aligned}$$

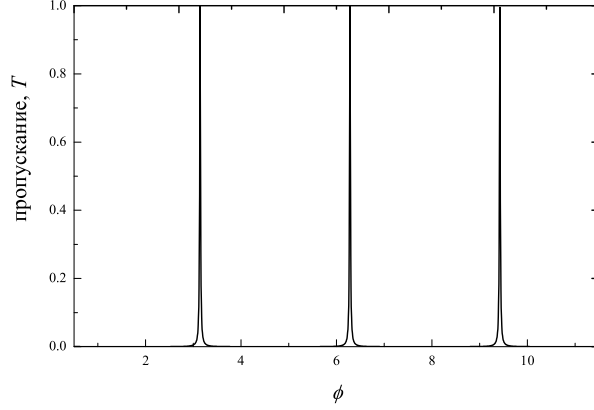


Рис. 4.19: Пропускание интерферометра Фабри-Перо как функция фазы  $\phi$  при коэффициентах пропускания зеркал  $R = 0.98$ .

Величина  $T_{\max}$  обычно весьма близка к единице, а величина  $T_{\min}$  весьма мала. При одинаковых коэффициентах отражения зеркал ( $R_1 = R_2 = R$ ) всегда  $T_{\max} = 1$ . Величина  $T_{\min}$  при одинаковых коэффициентах отражения зависит от величины коэффициента отражения. Например, при  $R_1 = R_2 = 0,98$  минимальное значение коэффициента пропускания  $T_{\min} = 10^{-4}$ .

Расстояние между соседними максимумами

$$\Delta\nu_d = \frac{c}{2nL \cos \beta} \quad (4.79)$$

называется областью дисперсии интерферометра. Ширина полосы пропускания интерферометра, определённая как ширина пика пропускания на полувысоте, есть

$$\Delta\nu_c = \frac{c}{2L'} \frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{\pi \sqrt[4]{R_1 R_2}}. \quad (4.80)$$

Важной характеристикой является также величина, называемая резкостью интерферометра  $F$ . Эта величина показывает во сколько раз ширина полосы пропускания меньше области дисперсии интерферометра,

$$F = \frac{\Delta\nu_d}{\Delta\nu_c} = \frac{\pi \sqrt[4]{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}}. \quad (4.81)$$

Например, при коэффициентах отражения  $R_1 = R_2 = 0,98$  величина резкости  $F = 150$ . Добротность интерферометра Фабри-Перо определяется



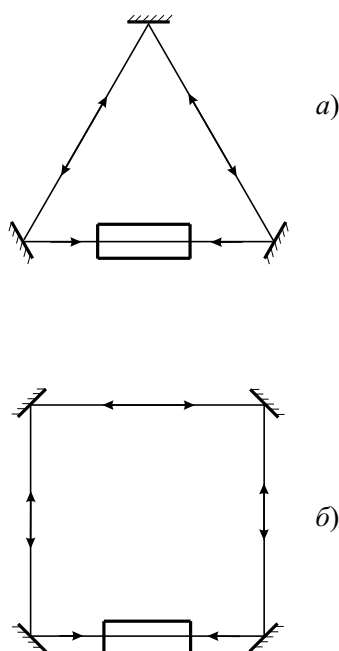


Рис. 4.20: Трёхзеркальный и четырёхзеркальный кольцевые резонаторы.

соотношением, которое отличается от резкости интерферометра только наличием в качестве множителя индекса моды интерферометра,

$$Q = \frac{\nu_q}{\Delta\nu_c} = \frac{\pi \sqrt[4]{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}} q. \quad (4.82)$$

Для интерферометра длиной  $L = 1$  см, содержащего среду с показателем преломления  $n = 1,5$ , индекс моды интерферометра на оптической частоте  $\nu_q \simeq 5 \cdot 10^{14}$  Гц имеет значение  $q \simeq 5 \cdot 10^4$ . Соответственно в указанном выше примере добротность интерферометра составляет величину  $8 \cdot 10^6$ .

## 4.10 Кольцевой резонатор-интерферометр

На рис. 4.20 показаны два примера кольцевых резонаторов, содержащих активную среду на одном из участков пути лазерного луча. В кольцевом резонаторе вообще говоря возможно распространение излучения в двух противоположных направлениях. Если в резонатор введён несимметричный оптический элемент, создающий наибольшие потери в одном из двух направлений, то в кольцевом резонаторе может работать в режиме только одной бегущей волны.

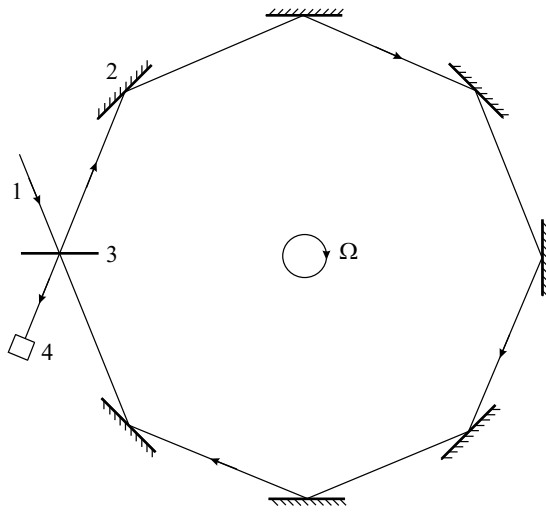


Рис. 4.21: Кольцевой резонатор-интерферометр, включающий источник излучения 1, зеркала 2, светоделительную пластинку 3 и приёмник излучения 4.

Частота любой из двух волн, распространяющихся в кольцевом резонаторе, определяется из обычного условия кратности набега фазы световой волны числу  $2\pi$ . Если оптическая длина кольцевого резонатора есть  $L$ , то условие  $kL = 2\pi q$  определяет частоты мод резонатора в виде

$$\omega_q = \frac{2\pi c}{L} q, \quad (4.83)$$

где  $q$  есть целое число.

Весьма интересным является распространение излучения во вращающемся кольцевом резонаторе показанном на рис. 4.21. Благодаря вращению резонатора с угловой скоростью  $\Omega$  одна бегущая волна распространяется через среду, которая движется в том же направлении со скоростью  $V = \Omega R$ , где  $R$  - средний радиус кольцевого резонатора. Другая волна распространяется через среду, движущуюся с противоположной по знаку скоростью  $-V$ . Положим для простоты, что резонатор имеет форму кольца (рис. 4.22). В отсутствие вращения частота дважды вырожденной моды резонатора определяется соотношением (4.83). Когда резонатор вращается с частотой  $\Omega$  встречные бегущие волны проходят расстояния

$$L_{\pm} = c\tau_{\pm} = L \pm \Omega R\tau_{\pm},$$

пропорциональные временам  $\tau_{\pm}$  кругового обхода резонатора. Отсюда следует, что расстояния, проходимые встречными бегущими волнами за

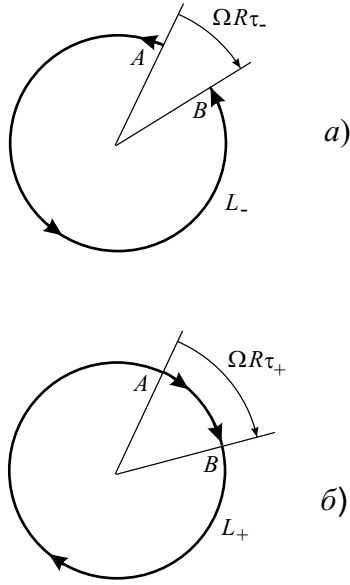


Рис. 4.22: Распространение волн во вращающемся кольцевом резонаторе. Волна, распространяющаяся навстречу вращению, проходит путь АВ, длина которого  $L_-$  меньше длины резонатора,  $L_- < L$  (а). Волна, распространяющаяся в направлении вращения, проходит путь АВАВ длиной  $L_+ > L$  (б).

времена обхода резонатора

$$L_{\pm} = c\tau_{\pm} = \frac{L}{1 \mp \Omega R/c}, \quad (4.84)$$

где в данном случае  $L = 2\pi R$ . Таким образом, вращение приводит к изменению длины пути света в кольцевом резонаторе.

Для того, чтобы каждая бегущая волна, совершившая обход резонатора, находилась в фазе с исходной волной необходимо, как обычно, чтобы набег фазы  $k_{\pm}L_{\pm}$  был кратен числу  $2\pi$ , где  $k_{\pm} = \omega_{\pm}/c$ . Таким образом, в случае вращения резонатора частоты волн определяются из условий  $k_{\pm}L_{\pm} = 2\pi q$ . Отсюда следуют значения частот встречных бегущих волн

$$\omega_q^{\pm} = \omega_q \left( 1 \mp \frac{\Omega R}{c} \right), \quad (4.85)$$

где частота исходной дважды вырожденной моды  $\omega_q$  определена соотношением (4.83). Частота биений двух встречных бегущих волн соответственно есть

$$\omega_q^+ - \omega_q^- = -2\omega_q \frac{\Omega R}{c} = - \left( 4A \frac{\omega_q}{Lc} \right) \Omega = -S\Omega, \quad (4.86)$$

где  $A = \pi R^2$  есть площадь кольцевого резонатора,  $S = 2\omega_q R/c = 2q$  есть постоянная Саньяка.

Как следует из последнего соотношения частота биений волн в кольцевом резонаторе значительно выше частоты вращения резонатора. Так, при радиусе резонатора  $R = 10$  см и частоте вращения всего 1 Гц частота биений для оптической частоты  $\nu = 5 \cdot 10^{14}$  Гц составляет  $3 \cdot 10^5$  Гц.

## 4.11 Методы селекции мод

С точки зрения ряда применений спектр мод в открытых резонаторах слишком густой. В связи с этим часто применяются методы селекции мод, т. е. методы выделения некоторых мод. Все методы селекции мод основаны на идее увеличения потерь для нежелательных мод при сохранении относительно малых потерь для сохраняемых мод.

### 4.11.1 Селекция продольных мод

Для селекции продольных мод используются два основных подхода. Один подход основан на селекции мод либо посредством использования узких линий усиления, либо посредством введения в резонатор узкополосных дисперсионных элементов: эталонов Фабри-Перо, призм, дифракционных решёток, зеркал с частотно зависимыми коэффициентами отражения и т. п. Второй подход использует различие в пространственном распределении полей продольных мод вдоль оси резонатора. При использовании узкой линии усиления активной среды ширина линии должна быть меньше интервала между продольными модами. Такой метод селекции, например, применим в случае  $\text{CO}_2$ -лазера низкого давления с шириной линии в области 50-100 МГц при длине резонатора около 1 м (при межмодовом расстоянии около 150 МГц). Достаточно широкое распространение получил метод дисперсионного зеркала, иллюстрированный на рис. 4.23. В показанном на рис. 4.23 трёхзеркальном резонаторе при  $l \ll L$  два правых зеркала  $M_2$  и  $M_3$  с одним и тем же коэффициентом отражения  $R$  можно приближённо рассмотреть как одно зеркало  $M'_2$ , свойства которого определяются образованным этими зеркалами интерферометром Фабри-Перо. Согласно формуле (4.77) коэффициент пропускания такого интерферометра при  $\beta = 0$  и  $n = 1$  есть

$$T_{M'_2} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos(4\pi l\nu/c)}.$$

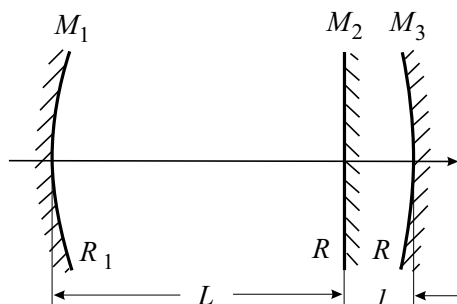


Рис. 4.23: Трёхзеркальный резонатор, используемый для селекции продольных мод.

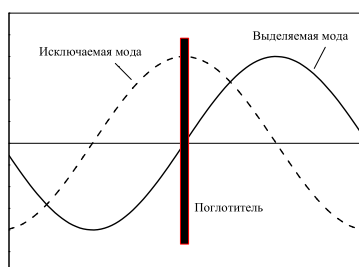


Рис. 4.24: Селекция продольных мод тонким поглотителем, расположенном в узле выделяемой моды.

Соответственно, коэффициент отражения есть

$$R_{M'_2} = R \frac{4 \sin^2(2\pi l\nu/c)}{1 + R^2 - 2R \cos(4\pi l\nu/c)}.$$

При частотах, обращающих в нуль величину  $\sin(2\pi l\nu/c)$ , правое зеркало не имеет отражения и соответственно резко возрастают потери, что приводит к селекции соответствующих продольных мод.

Идея селекции продольной моды с помощью поглотителя показана на рис. 4.24. Здесь тонкий полупрозрачный поглотитель помещён в узел выделяемой моды. Если толщина поглотителя гораздо меньше длины волны, то его наличие не вызывает потерь моды поскольку напряжённость электрического поля в узле близка к нулю. Остальные моды имеют высокие значения напряжённости поля в месте нахождения поглотителя и соответственно испытывают высокие потери. Этот метод, в частности, применяется в газах лазерах умеренной мощности. Полупрозрачные поглотители изготавливаются нанесением тонкой плёнки металла толщиной 1-10 нм на прозрачные подложки.

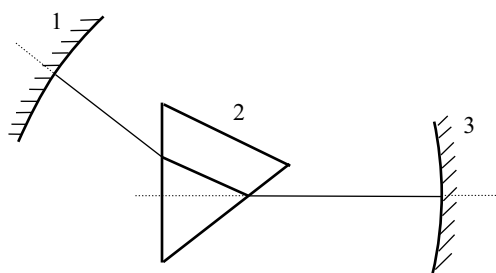


Рис. 4.25: Дисперсионный резонатор, содержащий зеркала 1 и 3 и призму 2.

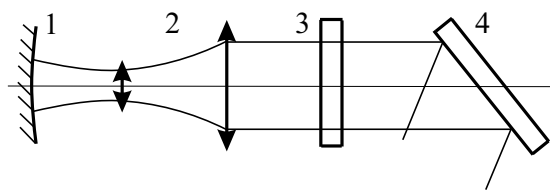


Рис. 4.26: Дисперсионный резонатор, содержащий зеркало 1, телескоп 2, эталон Фабри-Перо 3 и дифракционную решётку 4.

Существует большое разнообразие дисперсионных элементов, вводимых в резонатор лазера для селекции продольных мод и иногда одновременно для перестройки частот мод. Один из простейших дисперсионных резонаторов показан на рис. 4.25. Он включает в качестве дисперсионного элемента призму, устанавливаемую обычно под углом Брюстера для уменьшения потерь. Дисперсия призмы обычно недостаточна для достаточно селективного выделения мод. Поэтому на практике получили распространение более сложные дисперсионные резонаторы, пример одного из которых показан на рис. 4.26. В этом резонаторе интерферометр Фабри-Перо позволяет выделить одну продольную моду, дифракционная решётка подавляет моды, попадающие в максимумы пропускания интерферометра, телескоп расширяет пучок, что способствует более эффективной работе интерферометра и решётки. Отметим ещё резонаторы на основе распределённой обратной связи, РОС-резонаторы, используемые в РОС-лазерах. В таких лазерах обратная связь осуществляется путём пространственной модуляции оптических параметров активной среды. Рассеяние волн на периодической решётке в соответствии с условием Брэгга является частотно селективным.

### 4.11.2 Селекция поперечных мод

Основным подходом к селекции поперечных мод является увеличение потерь для нежелательных мод. На первый взгляд простейшим спосо-

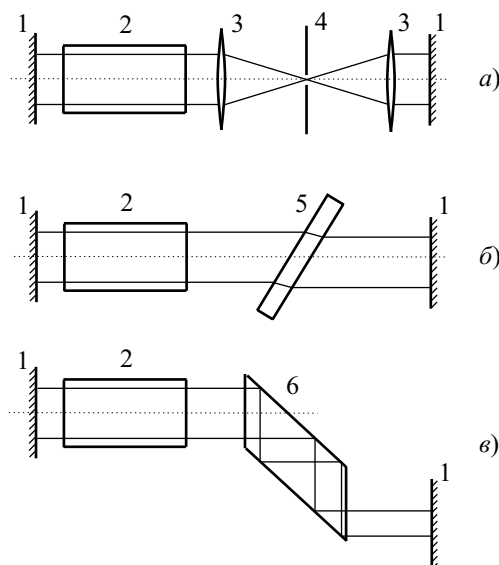


Рис. 4.27: Схемы угловых селекторов. 1 - зеркало, 2 - активная среда, 3 - линза, 4 - диафрагма, 5 - эталон Фабри-Перо, 6 - плоско-параллельная пластинка.

бом увеличения потерь могло бы быть увеличение длины резонатора до тех пор пока число Френеля не станет достаточно малым. Нетрудно однако видеть, что требуемая для этого длина резонатора слишком велика. Так, для получения числа Френеля  $N = 1$  при размерах зеркал  $2a = 1$  см и длине волны  $\lambda = 1$  мкм требуется длина резонатора  $L = a^2/\lambda = 25$  м. Поэтому обычно применяются специальные угловые селекторы, пропускание которых зависит от направления распространения излучения.

На рис. 4.27 показаны схемы нескольких угловых селекторов. В случае плоского резонатора применяется система из двух софокусных линз и диафрагмы, помещённой в общем фокусе (рис. 4.27 а). Иногда в качестве углового селектора применяется эталон Фабри-Перо (рис. 4.27 б). Здесь используется тот факт, что пропускание эталона зависит от направления распространения. При наклонном падении луча эта зависимость становится более резкой, поэтому эталон устанавливается под значительным углом к оси резонатора. Известен способ селекции, основанный на использовании зависимости коэффициента отражения от границы двух сред вблизи угла полного внутреннего отражения (рис. 4.27 в). Для увеличения угловой селекции выбирают геометрию, при которой свет совершает несколько отражений в пластинке. Для мощных лазеров с большим коэффициентом усиления используют неустойчивые резонаторы, обеспечивающие достижение дифракционной расходимости.





## Глава 5

# Диэлектрические волноводы и резонаторы

Настоящая глава посвящена рассмотрению двух типов диэлектрических волноводов. Одним из них являются планарные волноводы, другим - практически наиболее важные цилиндрические волноводы. Во второй части главы рассматриваются диэлектрические резонаторы малых размеров, используемые в полупроводниковых и твердотельных лазерах.

В диэлектрических волноводах, имеющих переменный показатель преломления, электромагнитное излучение может распространяться с очень низкими потерями благодаря линзовому эффекту. Увеличенное значение показателя преломления в центре волновода по сравнению с его значением на краях препятствует дифракционному расплыванию излучения и следовательно ослаблению излучения.

Основой анализа электромагнитного поля в диэлектрических волноводах являются уравнения Максвелла для изотропной среды при отсутствии свободных зарядов, имеющие вид

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

В приведённых уравнениях электрическая и магнитная индукции определены соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},\tag{5.2}$$

Таблица 5.1: Классификация волноводных мод

ТЕМ	поперечная электромагнитная мода	$E_z = 0, H_z = 0$
ТЕ	поперечная электрическая мода	$E_z = 0$
ТМ	поперечная магнитная мода	$H_z = 0$
EH, HE	гибридная мода	$E_z \neq 0, H_z \neq 0$

$\varepsilon$  есть относительная диэлектрическая проницаемость среды, относительная магнитная проницаемость среды  $\mu$  положена равной единице.

Применив операцию rot к первому и второму уравнениям (5.1) и воспользовавшись подходящими подстановками, из уравнений Максвелла можно получить волновые уравнения для электрического и магнитного полей

$$\left( \nabla^2 - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.3)$$

где  $\nabla^2$  есть оператор Лапласа. При анализе электромагнитного поля в волноводе обычно бывает удобно анализировать волновое уравнение совместно с уравнениями Максвелла.

Решения уравнений Максвелла, определяющие распространение волноводных мод, обычно разделяются на классы в зависимости от того отличны от нуля или нет компоненты поля в направлении его распространения. Положим, что электромагнитное поле распространяется в волноводе вдоль оси  $z$  и обозначим через  $E_z$  и  $H_z$  компоненты поля вдоль данной оси. Тогда согласно принятой классификации волноводные моды могут быть отнесены к одному из типов, указанных в таблице 5.1.

## 5.1 Планарные волноводы

Рассмотрим распространение оптического излучения в планарном диэлектрическом волноводе, показанном на рис. 5.1. В планарных диэлектрических волноводах могут распространяться электромагнитные поля, относящиеся к классам ТМ и ТЕ. Выбрав ось  $z$  в качестве оси распространения будем искать поля в виде бегущих волн с неоднородным по-

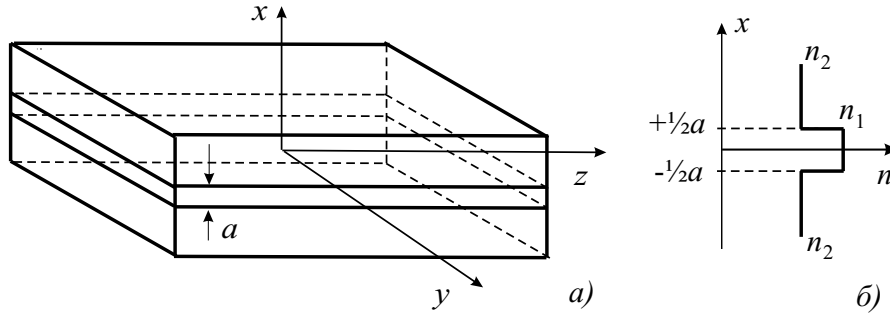


Рис. 5.1: а) Геометрия планарного волновода, б) показатель преломления планарного волновода.

перечным распределением амплитуд

$$\begin{pmatrix} E_x(\mathbf{r}, t) \\ E_y(\mathbf{r}, t) \\ E_z(\mathbf{r}, t) \\ H_x(\mathbf{r}, t) \\ H_y(\mathbf{r}, t) \\ H_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x(x, y) \\ \mathcal{E}_y(x, y) \\ \mathcal{E}_z(x, y) \\ \mathcal{H}_x(x, y) \\ \mathcal{H}_y(x, y) \\ \mathcal{H}_z(x, y) \end{pmatrix} e^{i\beta z - i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (5.4)$$

где неизвестная величина  $\beta$  имеет смысл константы распространения. Для данных двух классов полей распространение отличных от нуля компонент поля описывается волновыми уравнениями

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{U} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \mathcal{U} = 0, \quad (5.5)$$

где  $k_0 = \omega/c$  есть константа распространения в свободном пространстве. В случае ТМ поля в выписанных уравнениях  $\mathcal{U} = \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{E}_z, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y$ , а в случае ТЕ поля  $\mathcal{U} = \mathcal{E}_x, \mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_y, \mathcal{H}_z$ . Показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon}$  в уравнениях (5.5) является функцией поперечных координат, т. е.  $n = n(x, y)$ .

Из волновых уравнений (5.5) можно сразу видеть, что для локализации поля в центральной области волновода константа распространения должна удовлетворять условию  $\beta^2 < n_1^2 k_0^2$ , а для убывания поля в периферийных областях - условию  $\beta^2 > n_2^2 k_0^2$ . Таким образом, для распространяющихся мод константа  $\beta$  должна удовлетворять условиям

$$n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0. \quad (5.6)$$

Как будет показано далее этих условий достаточно для существования решений, описывающих поля, локализованные в центральной области с показателем преломления  $n_1$ .

Рассмотрим далее решения уравнений Максвелла предполагая, что размер волновода вдоль оси  $y$  значительно превышает размер вдоль оси  $x$  как показано на рис. 5.1. В таком случае можно считать, что электромагнитное поле является однородным по оси  $y$  и соответственно положить  $\partial/\partial y = 0$ . При таком предположении из максвелловских уравнений для роторов полей

$$\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = - \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H}. \quad (5.8)$$

можно выписать шесть уравнений. Анализируя эти уравнения можно видеть, что они разбиваются на две группы. Одна группа уравнений включает компоненты поля  $\mathcal{E}_y, \mathcal{H}_x, \mathcal{H}_z$ , которые согласно классификации таблицы 5.1 описывают моды типа ТЕ. Другая группа уравнений содержит компоненты  $\mathcal{E}_x, \mathcal{E}_z, \mathcal{H}_y$ , определяющие моды типа ТМ.

Волны типа ТЕ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}_y &= -i\beta\mathcal{H}_x + \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial x}, \\ i\omega\mu_0\mathcal{H}_x &= -i\beta\mathcal{E}_y, \\ i\omega\mu_0\mathcal{H}_z &= \frac{\partial\mathcal{E}_y}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Волны типа ТМ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}_x &= i\beta\mathcal{H}_y, \\ i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}_z &= -\frac{\partial\mathcal{H}_y}{\partial x}, \\ i\omega\mu_0\mathcal{H}_y &= i\beta\mathcal{E}_x - \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

### 5.1.1 Поперечные электрические моды

Рассмотрим структуру электромагнитного поля типа ТЕ. Как из волнового уравнения (5.5), так и из уравнений (5.9) можно видеть, что компонента поля  $\mathcal{E}_y$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_y}{\partial x^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \mathcal{E}_y = 0, \quad (5.11)$$

где показатель преломления имеет значения  $n = n_1, n_2$  в областях, показанных на рис. 5.1.

Решение данного уравнения, описывающее поле, локализованное в центральной области, может быть записано в виде

$$\mathcal{E}_y = \begin{cases} A_+ \exp[-h_2(x - a/2)] & x > a/2, \\ A \cos(h_1x + \varphi) & -a/2 < x < a/2, \\ A_- \exp[h_2(x + a/2)] & x < -a/2, \end{cases} \quad (5.12)$$

где неизвестные константы распространения определены соотношениями

$$\begin{aligned} h_1^2 &= n_1^2 k_0^2 - \beta^2, \\ h_2^2 &= \beta^2 - n_2^2 k_0^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

После учёта непрерывности функции  $\mathcal{E}_y$  при  $x = \pm a/2$  решение (5.12) может быть переписано в виде

$$\mathcal{E}_y = \begin{cases} A \cos(\frac{1}{2}h_1a + \varphi) \exp[-h_2(x - \frac{1}{2}a)] & x > a/2, \\ A \cos(h_1x + \varphi) & -a/2 < x < a/2, \\ A \cos(\frac{1}{2}h_1a - \varphi) \exp[h_2(x + \frac{1}{2}a)] & x < -a/2, \end{cases} \quad (5.14)$$

где  $\varphi$  есть неизвестная константа.

Взяв далее продольную компоненту магнитного поля из последнего уравнения (5.9),

$$\mathcal{H}_z = -\frac{i}{\omega\mu_0} \frac{\partial \mathcal{E}_y}{\partial x},$$

и воспользовавшись уравнениями (5.14) получим уравнения для продольной компоненты магнитного поля

$$\mathcal{H}_z = \begin{cases} \frac{ih_2}{\omega\mu_0} A \cos(\frac{1}{2}h_1a + \varphi) \exp[-h_2(x - \frac{1}{2}a)] & x > a/2, \\ \frac{ih_1}{\omega\mu_0} A \sin(h_1x + \varphi) & -a/2 < x < a/2, \\ -\frac{ih_2}{\omega\mu_0} A \cos(\frac{1}{2}h_1a - \varphi) \exp[h_2(x + \frac{1}{2}a)] & x < -a/2. \end{cases} \quad (5.15)$$

Воспользовавшись далее непрерывностью функции  $\mathcal{H}_z$  при  $x = \pm a/2$  получим уравнения на собственные значения

$$\begin{aligned} \tan(\frac{1}{2}h_1a + \varphi) &= \frac{h_2}{h_1}, \\ \tan(\frac{1}{2}h_1a - \varphi) &= \frac{h_2}{h_1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Последние уравнения могут быть сведены к трансцендентному уравнению для константы распространения

$$\tan(h_1a) = \frac{2h_1h_2}{h_1^2 - h_2^2} \quad (5.17)$$

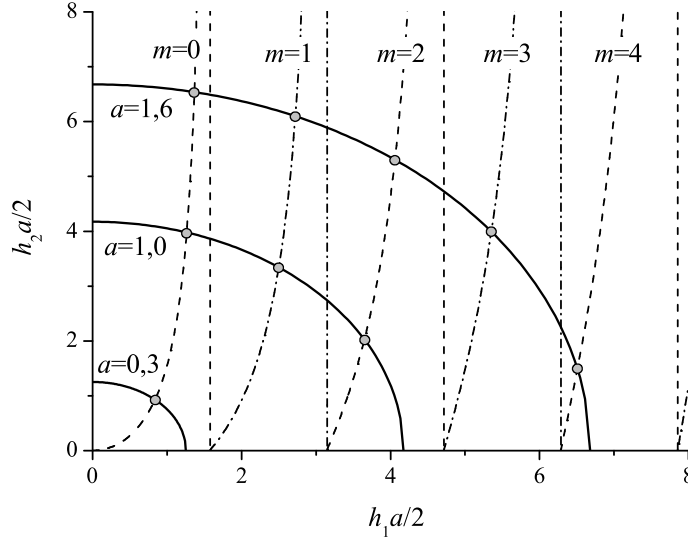


Рис. 5.2: Графическое определение констант распространения для мод TE типа в планарном волноводе. Толщина центральной части волновода  $a$  указана в микрометрах.

и к уравнению  $\tan 2\varphi = 0$ , которое определяет значения угла  $\varphi = m\pi/2$ , где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Анализ собственных значений константы распространения удобно проводить в координатах  $h_1$  и  $h_2$ . При чётных  $m$  уравнение на собственные значения может быть представлено в виде

$$\frac{h_1 a}{2} \tan \frac{h_1 a}{2} = \frac{h_2 a}{2}, \quad (5.18)$$

а при нечётных  $m$  в виде

$$\frac{h_1 a}{2} \cot \frac{h_1 a}{2} = -\frac{h_2 a}{2}. \quad (5.19)$$

При решении каждого из этих уравнений следует учитывать связь между двумя константами распространения, следующую из их определений (5.13)

$$\left(\frac{h_1 a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h_2 a}{2}\right)^2 = (n_1^2 - n_2^2) \left(\frac{k_0 a}{2}\right)^2. \quad (5.20)$$

Примеры графического определения констант распространения для TE мод показаны на рис. 5.2 для плоского волновода, образованного

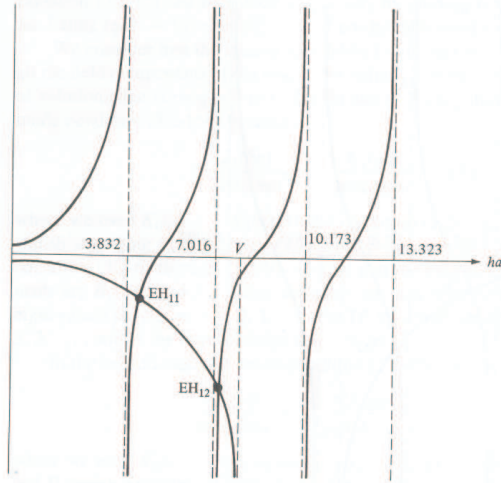


Рис. 5.3: Амплитуда электрического поля для трёх мод  $TE_m$  как функция поперечной координаты для планарного волновода с теми же параметрами, что и на рис. 5.2.

двойной гетероструктурой  $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$  с показателями преломления  $n_1 = 3,590$  и  $n_2 = 3,385$ . Толщина центральной части волновода выбрана равной  $a = 0,3; 1,0; 1,6$  мкм, длина волны излучения выбрана равной  $\lambda = 0,9$  мкм. Сплошные окружности описываются уравнением (5.20). Решения для чётных мод показаны кружками на пересечении окружностей со штриховыми линиями, описываемыми уравнением (5.18), а для нечётных мод - кружками на пересечении окружностей со штрих-пунктирными линиями, описываемыми уравнением (5.19).

Как можно видеть из рис. 5.2, при малой толщине  $a = 0,3$  мкм существует только одна чётная мода  $TE_0$ . При толщине  $a = 1,0$  мкм существует только две чётных моды  $TE_0$  и  $TE_2$  и одна нечётная мода  $TE_1$ . Наконец при толщине  $a = 1,6$  мкм существуют три чётных моды  $TE_0$ ,  $TE_2$ ,  $TE_4$  и две нечётных моды  $TE_1$  и  $TE_3$ .

Характер распределения электромагнитного поля по сечению волновода существенно зависит от индекса моды. В качестве примера рис. 5.3 показывает зависимость амплитуды электрического поля  $\mathcal{E}_y$  от поперечной координаты.

### 5.1.2 Поперечные магнитные моды

Анализ ТМ мод подобен предыдущему рассмотрению. Волновое уравнение для компоненты  $\mathcal{H}_y$  подобно уравнению (5.11). Соответственно решение для компоненты  $\mathcal{H}_y$  подобно по форме решению (5.12). Полагая что

форма решения для компоненты  $H_y$  известна и воспользовавшись уравнением (??) можно найти, что для однородного по оси  $y$  поля компонента  $\mathcal{E}_z$  удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{E}_z = \frac{i}{\omega \varepsilon_0 n^2} \frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial x}.$$

Далее, приняв во внимание граничные условия для  $\mathcal{H}_y$  и  $\mathcal{E}_z$  при значениях координаты  $x = \pm a/2$  можно выписать уравнения на собственные значения, подобные уравнению (5.17) и уравнению для фазы

$$\tan(h_1 a) = \frac{2n_1^2 n_2^2 h_1 h_2}{n_2^4 h_1^2 - n_1^4 h_2^2}, \quad (5.21)$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = 0. \quad (5.22)$$

Последние уравнения определяют константы распространения для возможных ТМ мод.

## 5.2 Цилиндрический ступенчатый волновод

В настоящем разделе мы рассмотрим цилиндрически симметричный диэлектрический волновод, показатель преломления которого ступенчато меняется в радиальном направлении. Анализ такого ступенчатого волновода достаточно прост поскольку уравнения Максвелла могут решаться отдельно для каждой области в которой показатель преломления постоянен.

### 5.2.1 Уравнения распространения поля

Будем для определённости считать, что ступенчатый волновод расположен вдоль оси  $z$ . В таком случае распространение электромагнитного поля в волноводе естественно описывать в цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  и соответственно рассматривать цилиндрические компоненты полей  $E_r, E_\varphi, E_z$  и  $H_r, H_\varphi, H_z$ . В рассматриваемой задаче естественно также считать, что поле имеет вид неоднородной бегущей волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , и соответственно представить поле в виде

$$\begin{pmatrix} E_r(\mathbf{r}, t) \\ E_\varphi(\mathbf{r}, t) \\ E_z(\mathbf{r}, t) \\ H_r(\mathbf{r}, t) \\ H_\varphi(\mathbf{r}, t) \\ H_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_r(r, \varphi) \\ \mathcal{E}_\varphi(r, \varphi) \\ \mathcal{E}_z(r, \varphi) \\ \mathcal{H}_r(r, \varphi) \\ \mathcal{H}_\varphi(r, \varphi) \\ \mathcal{H}_z(r, \varphi) \end{pmatrix} e^{i\beta z - i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (5.23)$$



где связь константы распространения  $\beta$  с частотой поля  $\omega$  должна быть определена из граничных условий.

При анализе цилиндрически симметричного волновода удобно сразу записать первое и второе уравнения Максвелла (5.1) в цилиндрической системе координат, используя для этого выражения для цилиндрических компонент оператора  $\text{rot}$ . Эти уравнения дают соотношения для компонент магнитного поля в виде

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0\mathcal{H}_r &= -i\beta\mathcal{E}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial\varphi}, \\ i\omega\mu_0\mathcal{H}_\varphi &= i\beta\mathcal{E}_r - \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r}, \\ i\omega\mu_0\mathcal{H}_z &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{E}_r}{\partial\varphi} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathcal{E}_\varphi)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

и подобные соотношения для компонент электрического поля

$$\begin{aligned} i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}_r &= i\beta\mathcal{H}_\varphi - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial\varphi}, \\ i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}_\varphi &= -i\beta\mathcal{H}_r + \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial r}, \\ i\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathcal{E}_z &= \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{H}_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\mathcal{H}_\varphi)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Решив первые два уравнения системы (5.24) совместно с первыми двумя уравнениями системы (5.25) можно выразить поперечные компоненты полей через продольные компоненты, получив соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_r &= \frac{i\beta}{n^2k_0^2 - \beta^2} \left( \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} + \frac{\omega\mu_0}{\beta} \frac{1}{r} \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial\varphi} \right), \\ \mathcal{E}_\varphi &= \frac{i\beta}{n^2k_0^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial\varphi} - \frac{\omega\mu_0}{\beta} \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial r} \right), \\ \mathcal{H}_r &= \frac{i\beta}{n^2k_0^2 - \beta^2} \left( \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial r} - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\beta} \frac{1}{r} \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial\varphi} \right), \\ \mathcal{H}_\varphi &= \frac{i\beta}{n^2k_0^2 - \beta^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\mathcal{H}_z}{\partial\varphi} + \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\beta} \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (5.26)$$

где мы воспользовались соотношением  $\varepsilon = n^2$  и ввели волновое число в свободном пространстве  $k_0 = \omega/c$ .

Отсюда можно видеть, что решения уравнений Максвелла (5.1) полностью определяются значениями продольных компонент полей  $\mathcal{E}_z$  и  $\mathcal{H}_z$ .

Остальные компоненты  $\mathcal{E}_r, \mathcal{E}_\varphi$  и  $\mathcal{H}_r, \mathcal{H}_\varphi$  могут быть вычислены из уравнений (5.26).

Обратимся теперь к волновым уравнениям (5.28), которые теперь достаточно записать для  $z$ -компонент поля

$$\left( \nabla^2 - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \begin{Bmatrix} E_z(\mathbf{r}, t) \\ H_z(\mathbf{r}, t) \end{Bmatrix} = 0. \quad (5.27)$$

Учитывая, что оператор Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

и подставляя  $z$ -компоненты полей из (5.23) в (5.27) получим волновые уравнения

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (n^2 k_0^2 - \beta^2) \right) \begin{Bmatrix} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_z \end{Bmatrix} = 0, \quad (5.28)$$

Подчеркнём, что входящие в волновые уравнения компоненты поля являются функциями поперечных координат:  $\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_z(r, \varphi)$ ,  $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_z(r, \varphi)$ .

Решения волновых уравнений можно найти методом разделения переменных в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{E}_z \\ \mathcal{H}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_z \\ \tilde{\mathcal{H}}_z \end{Bmatrix} e^{im\varphi},$$

где  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Данная форма решения сводит волновые уравнения (5.28) к уравнениям для функций  $\psi = \tilde{\mathcal{E}}_z, \tilde{\mathcal{H}}_z$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \left( n^2 k_0^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \psi = 0. \quad (5.29)$$

Отметим, что целое число  $m$  подобно квантовому числу проекции орбитального углового момента частицы в цилиндрически-симметричном потенциале. Соответственно, положительные и отрицательные значения величины  $l$  отвечают положительной и отрицательной проекции орбитального углового момента. Поскольку волновод обладает цилиндрической симметрией, то состояния поля со значениями  $\pm m$  являются вырожденными.

Таким образом, на данном этапе компоненты электромагнитного поля (5.23), распространяющегося в цилиндрическом волноводе, могут быть представлены в виде

$$\begin{Bmatrix} E_r \\ E_\varphi \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{E}}_r \\ \tilde{\mathcal{E}}_\varphi \\ \tilde{\mathcal{E}}_z \end{Bmatrix} e^{i(\beta z - \omega t + m\varphi)} + \text{к.с.}, \quad \begin{Bmatrix} H_r \\ H_\varphi \\ H_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathcal{H}}_r \\ \tilde{\mathcal{H}}_\varphi \\ \tilde{\mathcal{H}}_z \end{Bmatrix} e^{i(\beta z - \omega t + m\varphi)} + \text{к.с.}$$

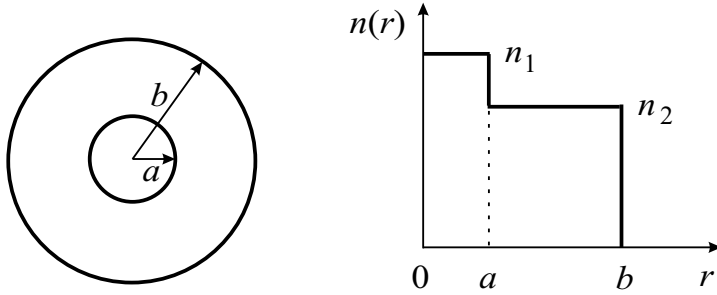


Рис. 5.4: Поперечное сечение и показатель преломления ступенчатого цилиндрического волновода.

Амплитуды компонент поля в соответствии с решениями уравнения (5.29) определяются функциями Бесселя. При  $\beta^2 < n^2 k_0^2$  общее решение уравнения (5.29) имеет вид

$$\psi(r) = c_1 J_m(hr) + c_2 Y_m(hr), \quad h^2 = n^2 k_0^2 - \beta^2, \quad (5.30)$$

где  $J_m$  и  $Y_m$  - функции Бесселя первого и второго рода. При  $\beta^2 > n^2 k_0^2$  общее решение уравнения (5.29) есть

$$\psi(r) = c_1 I_m(qr) + c_2 K_m(qr), \quad q^2 = \beta^2 - n^2 k_0^2, \quad (5.31)$$

где  $I_m$  и  $K_m$  - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Простейшим, но в то же время одним из самых важных является волновод, включающий центральную часть (сердцевину) с радиусом  $a$  и показателем преломления  $n_1$  и оболочку, расположенную между радиусами  $a, b$  и имеющую показатель преломления  $n_2 < n_1$  (рис. 5.4). Для этой структуры выбор функций Бесселя в решениях (5.30) и (5.31) может быть сделан исходя из граничных условий.

### 5.2.2 Граничные условия для локализованных мод

В центральной части волновода, когда  $r < a$ , решение не может быть описано функциями  $Y_m$  и  $K_m$  поскольку эти функции расходятся при  $r \rightarrow 0$ . Кроме того, для того чтобы поле не было полностью локализовано в центральной части, а также занимало часть оболочки, константа распространения  $\beta$  должна удовлетворять условию  $\beta < k_1 = n_1 k_0$ . Эти аргументы показывают, что электромагнитное поле в области  $r < a$  должно определяться частными решениями вида (5.30)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_z(\mathbf{r}, t) &= A J_m(hr), \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(\mathbf{r}, t) &= B J_m(hr), \end{aligned} \quad (5.32)$$

где  $A$  и  $B$  - константы интегрирования и

$$h^2 = n_1^2 k_0^2 - \beta^2. \quad (5.33)$$

Заметим далее, что в области оболочки, когда  $r > a$ , поле должно спасть при увеличении радиальной координаты. Такое поведение возможно если константа распространения  $\beta$  удовлетворяет условию  $\beta > k_2 = n_2 k_0$ . Поскольку функция  $I_l$  расходится при  $r \rightarrow \infty$ , то поле в области  $r > a$  должно определяться частными решениями вида (5.31)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_z(\mathbf{r}, t) &= CK_m(qr), \\ \tilde{\mathcal{H}}_z(\mathbf{r}, t) &= DK_m(qr), \end{aligned} \quad (5.34)$$

где  $C$  и  $D$  - константы интегрирования и

$$q^2 = \beta^2 - n_2^2 k_0^2. \quad (5.35)$$

Согласно приведённым рассуждениям константа распространения  $\beta$  должна одновременно удовлетворять двум неравенствам

$$n_2 k_0 < \beta < n_1 k_0, \quad (5.36)$$

где напомним  $k_0 = \omega/c$ . Эти неравенства могут рассматриваться как условия необходимые для существования мод, достаточно хорошо локализованных внутри волновода.

Таким образом, теперь можно подставить выбранные выше частные решения в соотношения (5.26) и записать амплитуды компонент электромагнитного поля в центральной области ( $r < a$ ) в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_r &= \frac{i\beta}{h^2} \left[ AhJ'_m(hr) + \frac{i\omega\mu_0}{\beta r} BmJ_m(hr) \right], \\ \tilde{\mathcal{E}}_\varphi &= \frac{i\beta}{h^2} \left[ \frac{il}{r} AJ_m(hr) - \frac{\omega\mu_0}{\beta} BhJ'_m(hr) \right], \\ \tilde{\mathcal{E}}_z &= AJ_m(hr), \\ \tilde{\mathcal{H}}_r &= \frac{i\beta}{h^2} \left[ BhJ'_m(hr) - \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{\beta r} AmJ_m(hr) \right], \\ \tilde{\mathcal{H}}_\varphi &= \frac{i\beta}{h^2} \left[ \frac{i}{r} BmJ_m(hr) + \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{\beta} AhJ'_m(hr) \right], \\ \tilde{\mathcal{H}}_z &= BJ_m(hr), \end{aligned} \quad (5.37)$$

где  $\varepsilon_1 = n_1^2$  и  $J'_m(x) = dJ_m(x)/dx$ .

Амплитуды компонент электромагнитного поля в области оболочки ( $r > a$ ) соответственно примут вид:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{E}}_r &= \frac{-i\beta}{q^2} \left[ CqK'_m(qr) + \frac{i\omega\mu_0}{\beta r} DmK_m(qr) \right], \\
\tilde{\mathcal{E}}_\varphi &= \frac{-i\beta}{q^2} \left[ \frac{i}{r} CmK_m(qr) - \frac{\omega\mu_0}{\beta} DqK'_m(qr) \right], \\
\tilde{\mathcal{E}}_z &= CK_m(qr), \\
\tilde{\mathcal{H}}_r &= \frac{-i\beta}{q^2} \left[ DqK'_m(qr) - \frac{i\omega\varepsilon_0\varepsilon_2}{\beta r} CmK_m(qr) \right], \\
\tilde{\mathcal{H}}_\varphi &= \frac{-i\beta}{q^2} \left[ \frac{i}{r} DmK_m(qr) + \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2}{\beta} CqK'_m(qr) \right], \\
\tilde{\mathcal{H}}_z &= DK_m(qr),
\end{aligned} \tag{5.38}$$

где  $\varepsilon_2 = n_2^2$  и  $K'_m(x) = dK_m(x)/dx$ .

Учтём далее, что тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей  $\mathcal{E}_\varphi, \mathcal{E}_z$  и  $\mathcal{H}_\varphi, \mathcal{H}_z$ , а также нормальные компоненты электрической и магнитной индукций  $\varepsilon_0\mathcal{E}_r$  и  $\mu_0\mathcal{H}_r$  должны быть непрерывны при  $r = a$ . Эти обычные граничные условия дают четыре дополнительных уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{im}{h^2a} AJ_m(ha) - \frac{\omega\mu_0}{h\beta} BJ'_m(ha) + \frac{im}{q^2a} CK_m(qa) - \frac{\omega\mu_0}{q\beta} DK'_m(qa) &= 0, \\
AJ_m(ha) - CK_m(qa) &= 0, \\
\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1}{h\beta} AJ'_m(ha) + \frac{im}{h^2a} BJ_m(ha) + \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2}{q\beta} CK'_m(qa) + \frac{im}{q^2a} DK_m(qa) &= 0, \\
BJ_m(ha) - DK_m(qa) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Система однородных алгебраических уравнений (5.39), где неизвестными являются величины  $A, B, C, D$ , имеет нетривиальное решение при обычном условии равенства нулю определителя. Это условие приводит к трансцендентному уравнению, которое определяет значения константы распространения  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{J'_m(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \right] \left[ \frac{n_1^2 J'_m(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{n_2^2 K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \right] \\
- \left( \frac{m\beta}{k_0} \right)^2 \left( \frac{1}{h^2a^2} + \frac{1}{q^2a^2} \right)^2 = 0. \tag{5.40}
\end{aligned}$$

После того как собственные значения величины  $\beta$  определены из трансцендентного уравнения (5.40), коэффициенты  $B$ ,  $C$ , и  $D$  могут быть найдены из уравнений (5.39) в виде

$$\begin{aligned} B &= A \frac{im\beta}{\omega\mu_0} \left( \frac{1}{h^2 a^2} + \frac{1}{q^2 a^2} \right) \left[ \frac{J'_m(ha)}{haJ_m(ha)} + \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \right]^{-1}, \\ C &= A \frac{J_m(ha)}{K_m(qa)}, \quad D = B \frac{J_m(ha)}{K_m(qa)}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Константа  $A$ , которая осталась произвольной, может быть определена исходя из величины интенсивности электромагнитного излучения, распространяющегося по диэлектрическому волноводу.

Следует обратить внимание, что в приведённом решении не были учтены граничные условия на внешней оболочке с радиусом  $r = b$ . Это связано с тем, что с практической точки зрения представляют интерес такие ступенчатые волноводы, в которых поле весьма сильно затухает в оболочке, не достигая её внешней границы.

### 5.2.3 Волноводные моды

Уравнение (5.40) является квадратным уравнением по отношению к величине  $X = J'_m(ha)/haJ_m(ha)$ . Два корня этого уравнения имеют вид:

$$\frac{J'_m(ha)}{haJ_m(ha)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \pm R, \quad (5.42)$$

где

$$R = \sqrt{\left( \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \right)^2 \left( \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} \right)^2 + \left( \frac{m\beta}{n_1 k_0} \right)^2 \left( \frac{1}{h^2 a^2} + \frac{1}{q^2 a^2} \right)^2}.$$

Данные два корня определяют два класса решений, которые при  $m \neq 0$  описывают моды типа EH и HE.

Воспользовавшись соотношениями для функций Бесселя

$$J'_m(x) = \mp J_{m\pm 1}(x) \pm \frac{m}{x} J_m(x)$$

можно в явном виде определить два класса решений уравнения (5.42): для мод типа EH ( $m \neq 0$ ):

$$\frac{J_{m+1}(ha)}{haJ_m(ha)} = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} + \frac{m}{(ha)^2} - R, \quad (5.43)$$

для мод типа HE ( $m \neq 0$ ):

$$\frac{J_{m-1}(ha)}{haJ_m(ha)} = -\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1^2} \frac{K'_m(qa)}{qaK_m(qa)} + \frac{m}{(ha)^2} - R. \quad (5.44)$$

В каждом из приведённых уравнений величина  $qa$  может быть выражена через величину  $ha$  согласно уравнению

$$(qa)^2 = (n_1^2 - n_2^2) (k_0a)^2 - (ha)^2. \quad (5.45)$$

После этого из уравнений (5.43), (5.44) могут быть найдены значения величины  $ha$ , определяющей значения константы распространения  $\beta$ :

$$\beta = \sqrt{n_1^2 k_0^2 - h^2}. \quad (5.46)$$

Поскольку решения приведённых выше трансцендентных уравнений нумеруются индексом  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то каждая мода характеризуется двумя индексами  $m, n$ . Соответственно указанные выше уравнения определяют моды типа EH<sub>mn</sub> и HE<sub>mn</sub>.

В специальном случае цилиндрически-симметричных решений, когда  $m = 0$ , можно воспользоваться соотношениями  $K'_0(x) = \mp K_{\pm 1}(x)$  и записать уравнение (5.43) в виде

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\frac{n_2^2}{n_1^2} \frac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)}. \quad (5.47)$$

В этом случае отличными от нуля компонентами поля являются две компоненты электрического поля  $E_r, E_z$  и только одна поперечная компонента магнитного поля  $H_\varphi$ . Моды, описываемые этими решениями, согласно классификации таблицы 5.1 являются поперечными магнитными модами и обозначаются TM<sub>0n</sub>, где второй индекс  $n = 1, 2, \dots$  нумерует решения уравнения (5.47).

Подобным же образом, уравнение (5.44) при  $m = 0$  может быть записано в виде

$$\frac{J_1(ha)}{haJ_0(ha)} = -\frac{K_1(qa)}{qaK_0(qa)}, \quad (5.48)$$

где использовано соотношение  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ . В этом случае отличны от нуля две компоненты магнитного поля  $H_r, H_z$  и одна поперечная компонента электрического поля  $E_\varphi$ . Моды, описываемые этими решениями, являются поперечными электрическими модами и обозначаются в виде TE<sub>0n</sub>, где  $n = 1, 2, \dots$

Удобным способом анализа структуры волноводных мод является графическое решение приведённых выше трансцендентных уравнений.

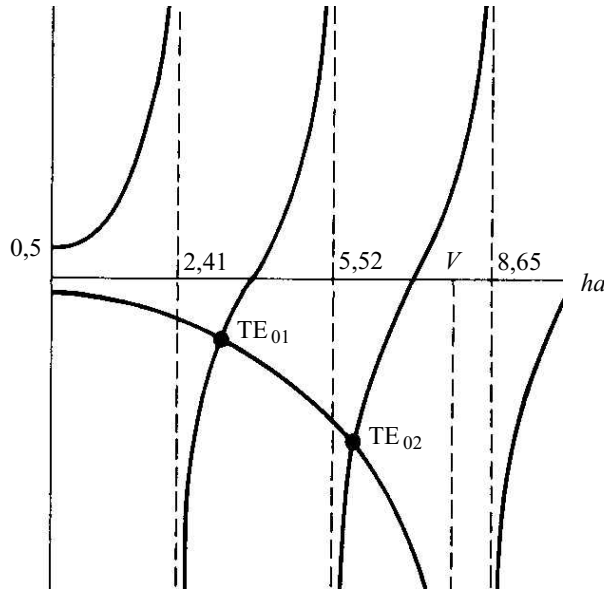


Рис. 5.5: Графическое определение констант распространения мод типа  $TE_{0n}$  в цилиндрическом волноводе со ступенчатым показателем преломления.

Рассмотрим, например, случай мод  $TE_{0n}$ , определяемых решениями уравнения (5.48). Левая и правая части данного уравнения показаны на рис. 5.5. Правая часть уравнения (5.48) отрицательна и стремится к  $-\infty$  при  $ha \rightarrow V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ . Левая часть уравнения (5.48) стремится к значениям  $\pm\infty$  когда переменная  $x = ha$  принимает значения нулей функции  $J_0(x)$ . Первые три нуля функции  $J_0(x)$  есть:  $x_{01} = 2.41$ ,  $x_{02} = 5.52$ ,  $x_{03} = 8.65$ . В области  $0 \leq ha \leq x_{01}$  левая часть положительна. При  $x > x_{01}$  левая часть уравнения принимает как отрицательные, так и положительные значения. Соответственно при  $V > x_{01}$  всегда существует по крайней мере одна точка пересечения кривых. В случае, показанном на рис. 5.5, параметр  $V > x_{01}, x_{02}$  и соответственно существуют две точки пересечения кривых и два решения:  $TE_{01}$  и  $TE_{02}$ .

Как мы убедились из графического анализа решения, при заданном значении параметра  $V$  существуют только такие решения, для которых нули функций Бесселя меньше значения  $V$ . Соответственно уравнения  $x_{0n} = V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$  определяют критические значения длин волн  $\lambda = 2\pi/k_0$  при которых могут существовать моды  $TE_{0n}$

$$\lambda_{0n} = \frac{2\pi a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{x_{0n}}. \quad (5.49)$$

Другими словами, уравнения (5.49) показывают, что при заданном радиусе волновода  $a$  и заданных показателях преломления  $n_1$  и  $n_2$  волновод-



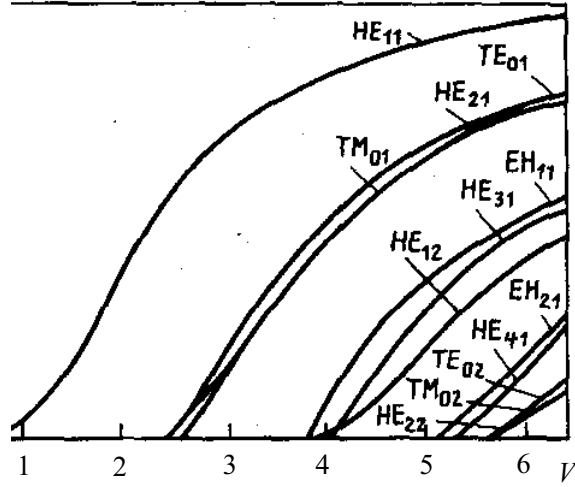


Рис. 5.6: Константа распространения для мод цилиндрического волновода как функция параметра  $V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ .

ные моды  $TE_{01}$  могут распространяться при длинах волн  $\lambda < \lambda_{01}$ , моды  $TE_{02}$  могут распространяться при длинах волн  $\lambda < \lambda_{02}$ , и т. п. Аналогичным образом могут быть графически исследованы моды EH, HE и TM.

Характер зависимости констант распространения от параметра  $V$  показан на рис. 5.6. Следует обратить внимание, что при  $V < x_{01} = 2.405$  может существовать только мода  $HE_{11}$ , называемая фундаментальной. Это означает, что при подходящем выборе длины волны цилиндрический волновод может пропускать только одну моду.

Отметим, что случаю фундаментальной моды  $HE_{11}$  отвечают четыре решения уравнения (5.44). Два из них отвечают двум возможным направлениям распространения поля  $\pm z$  и ещё два – двум возможным поляризациям поля. Компоненты поля, описывающие фундаментальную моду, распространяющуюся в положительном направлении оси  $z$  и имеющую положительную циркулярную поляризацию, в области ядра волновода имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_r &= iA \frac{q K_1(qa)}{h J_1(ha)} [(1-s)J_0(hr) - (1+s)J_2(hr)], \\ \tilde{\mathcal{E}}_\varphi &= -A \frac{q K_1(qa)}{h J_1(ha)} [(1-s)J_0(hr) + (1+s)J_2(hr)], \\ \tilde{\mathcal{E}}_z &= 2A \frac{q K_1(qa)}{\beta J_1(ha)} J_1(hr),\end{aligned}$$

а в области оболочки – вид

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{E}}_r &= iA[(1-s)K_0(qr) + (1+s)K_2(qr)], \\ \tilde{\mathcal{E}}_\varphi &= -A[(1-s)K_0(qr) - (1+s)K_2(qr)], \\ \tilde{\mathcal{E}}_z &= 2A\frac{q}{\beta}K_1(qr).\end{aligned}$$

В данных уравнениях  $s$  есть безразмерный параметр

$$s = \frac{1/h^2a^2 + 1/q^2a^2}{J_1'(ha)/haJ_1(ha) + K_1'(qa)/qaK_1(qa)},$$

а константа  $A$  как обычно определяется величиной интенсивности электромагнитного излучения.

### 5.2.4 Потери в волноводах

Практически используемые кремниевые стекловолокна имеют весьма низкие потери при длине волны  $\lambda \simeq 1,55$  мкм. В узкой спектральной области вблизи данной длины волны, называемой телекоммуникационной полосой, потери излучения обусловлены главным образом остаточными радикалами ОН. При указанной длине волны затухание оптического сигнала составляет около 0,2 дБ/км. Это означает, что исходный оптический сигнал с начальной интенсивностью  $I_0$  при прохождении расстояния в 1 км ослабляется до величины  $I_1 = I_0 \cdot 10^{0,1 \cdot 0,2} \simeq 0,955 I_0$ , т. е. ослабление сигнала составляет примерно 5% на длине распространения 1 км.

## 5.3 Планарные резонаторы

Кроме рассмотренных выше классических открытых резонаторов Фабри-Перо во многих типах полупроводниковых и твердотельных лазеров в качестве резонаторов используются небольшие отрезки диэлектрических волноводов.

Рассмотрим типичный резонатор полупроводникового диодного лазера, состоящий из трёх областей 1, 3, and 5, показанных на рис. 5.7. В таком резонаторе, являющемся по существу коротким диэлектрическим волноводом, могут распространяться электромагнитные поля, относящиеся к классам ТМ и ТЕ. Будем считать, что поля распространяются вдоль оси  $z$ , т. е. положим  $\mathbf{E}, \mathbf{H} \propto \exp(i\omega t - i\beta z)$ . Для ТМ поля компонента магнитного поля в направлении распространения равна нулю,  $H_z = 0$ , а для ТЕ поля равна нулю продольная компонента электрического поля,  $E_z = 0$ .

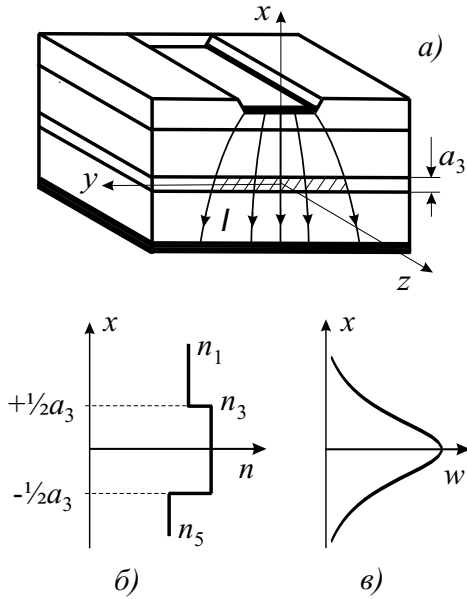


Рис. 5.7: а) Геометрическая структура полоскового лазера, б) показатель преломления лазерной среды, в) профиль интенсивности лазерного излучения.

Для данных двух классов полей распространение отличных от нуля компонент поля  $E_j, H_j \propto \exp(i\omega t - i\beta z)$  описывается волновыми уравнениями ( ).

Из волновых уравнений (??) можно сразу видеть, что для получения большой интенсивности поля в центральной области константа распространения должна удовлетворять условию  $\beta^2 < (\omega n_3/c)^2$  в центральной области и условиям  $\beta^2 > (\omega n_1/c)^2, (\omega n_5/c)^2$  в периферийных областях. Таким образом, для распространяющихся мод константа  $\beta$  должна удовлетворять условиям

### 5.3.1 Поперечные моды

Решения уравнений Максвелла для лазерного поля типа ТЕ предполагая, что поле поляризовано по оси  $y$  и считая в простейшем приближении, что лазерное поле является однородным вдоль оси  $y$ , т. е. считая  $\partial/\partial y = 0$ . При данном предположении компонента поля  $E_y$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} n^2 - \beta^2 \right) E_y = 0, \quad (5.50)$$

где  $n = n_1, n = n_3, n = n_5$  в трёх областях, показанных на рис. 12.6.

Решение данного уравнения, которое описывает поле, локализованное в центральной области, имеет вид

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= A_1 \exp[-h_1(x - a_3/2)], \\ E_y^{(3)} &= A_3 \cos h_3 x + B_3 \sin h_3 x, \\ E_y^{(5)} &= A_5 \exp[h_5(x + a_3/2)], \end{aligned} \quad (5.51)$$

где неизвестные константы распространения определены соотношениями

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \beta^2 - (\omega n_1/c)^2, \\ h_3^2 &= (\omega n_3/c)^2 - \beta^2, \\ h_5^2 &= \beta^2 - (\omega n_5/c)^2. \end{aligned}$$

После учёта непрерывности функции  $E_y$  при  $x = \pm a_3/2$  данное решение может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} E_y^{(1)} &= A \cos(\tfrac{1}{2}h_3 a_3 - \varphi) \exp[-h_1(x - \tfrac{1}{2}a_3)], \\ E_y^{(3)} &= A \cos(h_3 x - \varphi), \\ E_y^{(5)} &= A \cos(\tfrac{1}{2}h_3 a_3 + \varphi) \exp[h_5(x + \tfrac{1}{2}a_3)], \end{aligned} \quad (5.52)$$

где  $\varphi$  есть неизвестная константа.

Взяв далее продольную компоненту магнитного поля из уравнения (??),

$$H_z = \frac{i}{\omega \mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

и воспользовавшись уравнениями (5.52) получим уравнения для компонент магнитного поля

$$\begin{aligned} H_z^{(1)} &= -\frac{i h_1}{\omega \mu_0} A \cos(\tfrac{1}{2}h_3 a_3 - \varphi) \exp[-h_1(x - \tfrac{1}{2}a_3)], \\ H_z^{(3)} &= -\frac{i h_3}{\omega \mu_0} A \sin(h_3 x - \varphi), \\ H_z^{(5)} &= \frac{i h_5}{\omega \mu_0} A \cos(\tfrac{1}{2}h_3 a_3 + \varphi) \exp[h_5(x + \tfrac{1}{2}a_3)]. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Воспользовавшись ещё непрерывностью функции  $H_z$  при  $x = \pm a_3/2$  получим уравнения на собственные значения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}h_3 a_3 - \varphi) &= \frac{h_1}{h_3}, \\ \operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}h_3 a_3 + \varphi) &= \frac{h_5}{h_3}. \end{aligned}$$

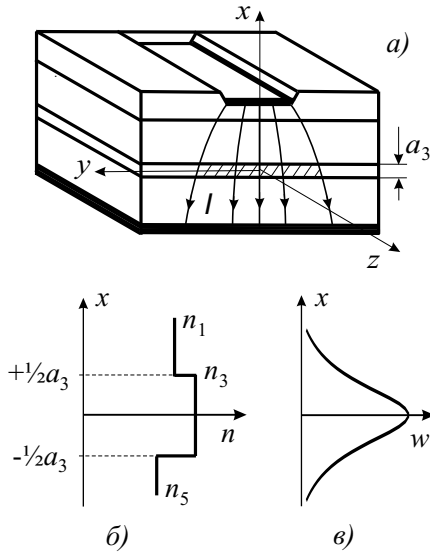


Рис. 5.8: Профиль распределения электрического поля низшей лазерной моды ТЕ.

Последние уравнения могут быть преобразованы к удобной форме

$$\operatorname{tg}(h_3 a_3) = \frac{h_3(h_1 + h_5)}{h_3^2 - h_1 h_5}, \quad (5.54)$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{h_3(h_5 - h_1)}{h_3^2 + h_1 h_5}. \quad (5.55)$$

Уравнения (5.54) и (5.55) определяют константы распространения для возможных ТЕ мод. Пространственная структура низшей ТЕ моды показана на рис. 12.7.

Анализ ТМ мод подобен предыдущему рассмотрению. Волновое уравнение для компоненты  $H_y$  подобно уравнению (5.50). Соответственно решение для компоненты  $H_y$  подобно по форме решению (5.52). Полагая что форма решения для компоненты  $H_y$  известна и воспользовавшись уравнением (??) можно найти, что для однородного по оси  $y$  поля компонента  $E_z$  удовлетворяет уравнению

$$E_z = -\frac{i}{\omega \varepsilon_0 n^2} \frac{\partial H_y}{\partial x}.$$

Далее, приняв во внимание граничные условия для  $H_y$  и  $E_z$  при значениях координаты  $x = \pm a_3/2$  можно выписать уравнения на собственные

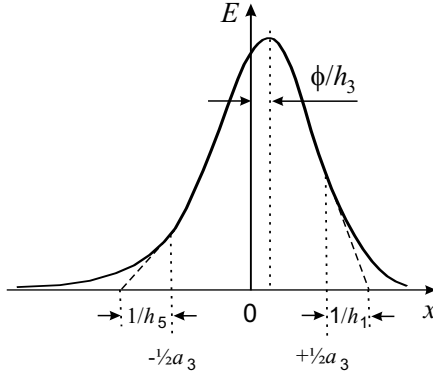


Рис. 5.9: Поляризации лазерных мод типов ТЕ и ТМ.

значения, подобные уравнениям (5.54) и (5.55),

$$\operatorname{tg}(h_3 a_3) = \frac{h_3}{n_3^2} \frac{h_1/n_1^2 + h_5/n_5^2}{(h_3/n_3^2)^2 - (h_1/n_1^2)(h_5/n_5^2)}, \quad (5.56)$$

$$\operatorname{tg}(2\varphi) = \frac{h_3}{n_3^2} \frac{h_5/n_5^2 - h_1/n_1^2}{(h_3/n_3^2)^2 + (h_1/n_1^2)(h_5/n_5^2)}. \quad (5.57)$$

Последние уравнения определяют константы распространения для возможных ТМ мод.

### 5.3.2 Поляризация мод

Большинство полупроводниковых лазеров работают на ТЕ модах поскольку для этих мод достаточно высоким является отражение от сколотых поверхностей. Учитывая, что в полупроводниковом резонаторе лазерное излучение распространяется приблизительно по нормали к боковой грани, т. е. угол падения  $\theta$  близок к нулю, коэффициент отражения от границы раздела полупроводник-воздух для ТЕ моды может быть оценен согласно формуле Френеля как

$$R = \left( \frac{n_3 - 1}{n_3 + 1} \right)^2.$$

При типичном для полупроводников значении коэффициента преломления  $n_3 = 3,6$  коэффициент отражения составляет значение  $R \simeq 0,32$ . Поляризации лазерных мод ТЕ и ТМ показаны на рис. 5.9.

## 5.4 Микрорезонаторы

В последние десятилетия разработаны несколько типов диэлектрических и полупроводниковых микрорезонаторов, размеры которых составляют десятки или даже единицы микрон, т. е. сравнимы с длиной волны оптического излучения. Наиболее часто микрорезонаторы изготавливают в форме дисков, сфер и квадратов.

### 5.4.1 Дисквые микрорезонаторы

В диэлектрическом микрорезонаторе, имеющем форму микродиска, распространение электромагнитного излучения определяется отражением излучения от плоских поверхностей микродиска, образующих резонатор Фабри-Перо, и циркуляцией излучения вдоль цилиндрической поверхности за счёт эффекта полного внутреннего отражения (рис. 5.10). Соответственно электрическое поле оптической моды дискового микрорезонатора может быть представлено в цилиндрических координатах как

$$E_{m,n}(r, \varphi, z) = J_m(k_t r) e^{\pm i m \varphi} e^{\pm i k_z z}, \quad (5.58)$$

где  $J_m$  есть функция Бесселя целого порядка ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ),  $k_z$  и  $k_t$  - продольная и поперечная компоненты волнового вектора. При угле падения  $\theta'$  компоненты волнового вектора могут быть представлены в виде

$$k_z = k \cos \theta', \quad k_t = k \sin \theta', \quad (5.59)$$

где  $k = (2\pi/\lambda)n$ ,  $\lambda$  есть длина волны в вакууме,  $n$  есть показатель преломления среды при данной длине волны.

Учитывая, что угол падения связан с углом излучения соотношением

$$\sin \theta = n \sin \theta' \quad (5.60)$$

и учитывая, что  $k_z = (2\pi/\lambda_0)n_0$ , где  $\lambda_0$  есть длина волны излучения, распространяющегося в вертикальном направлении,  $n_0$  есть показатель преломления на длине волны  $\lambda_0$ , можно переписать уравнение (5.59) как

$$\lambda = \lambda_0 \frac{n}{n_0} \sqrt{1 - \left( \frac{\sin \theta}{n} \right)^2}. \quad (5.61)$$

Учитывая далее, что для моды шепчущей галереи граничное условие может быть приближённо сформулировано в виде обращения поля моды в нуль на границе диэлектрического диска, т. е. в виде  $k_t R = x_m^1$ , где

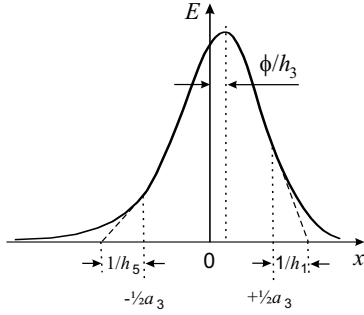
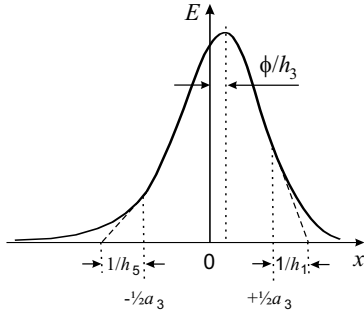


Рис. 5.10: Распространение световой волны в дисковом микрорезонаторе.

Рис. 5.11: Спектр дискового микрорезонатора радиуса  $R = 35\mu\text{m}$ , зарегистрированный при угле излучения  $\theta = 15^\circ$ . вертикальные линии показывают значения длин волн, вычисленных по формуле ??.

$R$  есть радиус диска, а  $x_m^1$  есть первый нуль функции Бесселя  $J_m(x)$ , правило квантования угла  $\theta'$  может быть получено из второго условия (5.59) в виде

$$\sin \theta'_m = \frac{x_m^1 \lambda}{2\pi R}. \quad (5.62)$$

Рассматривая далее Eqs. (3) and (4) совместно можно окончательно выписать дискретные значения длин волн и углов излучения. Для длин волн имеем

$$\lambda_m = \lambda_0 \frac{n_m}{n_0} \left[ 1 + \left( \frac{x_m^1}{a} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (5.63)$$

В последних уравнениях  $n_m$  есть эффективный показатель преломления на длине волны  $\lambda_m$ ,  $a = 2\pi R n_0 / \lambda_0$  есть безразмерный параметр.

Пример спектра диэлектрического микрорезонатора показан на рис. 5.11.



### 5.4.2 Сферические микрорезонаторы

В сферических микрорезонаторах могут быть возбуждены так называемые моды шепчущей галереи. Такие моды представляют собой электромагнитные моды локализованные вблизи границы раздела диэлектрик-воздух. С физической точки зрения моды шепчущей галереи распространяются в диэлектрических сферах благодаря эффекту полного внутреннего отражения, поскольку вблизи границы диэлектрик-воздух обеспечивается быстрый спад показателя преломления от его значения в диэлектрике до значения в воздухе. Такие моды могут иметь весьма высокое значение добротности порядка  $10^6 - 10^{10}$ .

Электромагнитные поля мод шепчущей галереи могут быть вычислены решением уравнения Гельмгольца в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \psi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \psi - n^2 k^2 \psi = 0, \quad (5.64)$$

и представлены в виде

$$E, H = \psi(r)\psi(\theta)\psi(\varphi), \quad (5.65)$$

где  $r, \theta, \varphi$  - сферические координаты. Соответствующие решения оказываются принадлежащими к двум классам ТМ и ТЕ. Электрическое поле моды ТЕ направлено параллельно поверхности сферы и имеет две нулевые компоненты ( $E_r = E_\varphi = 0$ ). Магнитное поле моды ТМ направлено также параллельно поверхности сферы и также имеет две нулевые компоненты ( $H_r = H_\varphi = 0$ ). Соответственно электрическое поле моды ТМ имеет преимущественно радиальный характер. Отдельные моды характеризуются тремя индексами, радиальное модовое число  $n$ , полярное модовое число  $l$  и азимутальное число  $m$ .

Азимутальные функции определяются обычным соотношением для собственных функций углового момента

$$\psi(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\pm im\varphi}. \quad (5.66)$$

Процедура разделения переменных позволяет ввести угловое модовое число

$$\frac{r}{\psi_r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (r\psi_r) = l(l+1). \quad (5.67)$$

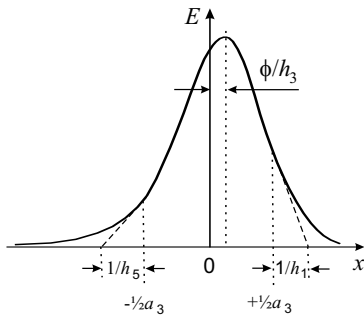


Рис. 5.12: Распространение световой волны в сферическом микрорезонаторе.

### 5.4.3 Квадратные микрорезонаторы

Распространение мод в квадратном микрорезонаторе иллюстрировано на рис. 5.???. Подобно случаю дискового микрорезонатора распространение устойчивых мод определяется отражением света от верхней и нижней плоскостей диэлектрической среды микрорезонатора и полным внутренним отражением света при его распространении в латеральной плоскости.

Волновые вектора, определяющие распространение света, могут быть также представлены в виде 5.59, где вертикальная компонента волнового вектора может быть связана с длиной волны, излучаемой в вертикальном направлении,  $k_z = (2\pi/\lambda_0)n_0$ . Для латеральной компоненты волнового вектора может быть выписано условие резонанса в виде  $k_l l = 2\pi m$ , где  $l = 2\sqrt{2}L$  есть длина пути моды с индексом  $m$ . Используя эти условия совместно с соотношением  $k^2 = k_z^2 + k_l^2$  можно выразить длину волны излучения

$$\lambda_m = \lambda_0 \frac{n_m}{n_0} \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_0 m}{2\sqrt{2}Ln_0} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (5.68)$$

На рис. 5.??? показаны два примера спектров квадратного микрорезонатора с длиной  $L = 20\mu\text{m}$ , зарегистрированных при углах  $\theta = 10$  и  $\theta = 15$ .

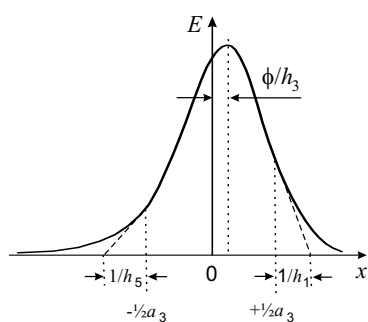


Рис. 5.13: Распространение световой волны в квадратном микрорезонаторе.

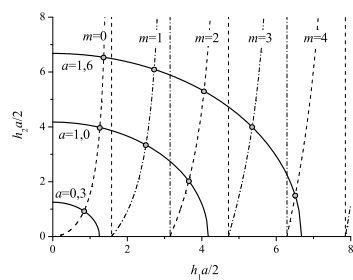


Рис. 5.14: Распространение световой волны в квадратном микрорезонаторе.



## Глава 6

# Квазиклассическая теория лазера

### 6.1 Уравнения многомодового лазера

Рассмотрим модель лазера в виде оптического резонатора, полностью заполненного активной средой. Активная среда рассматривается как совокупность двухуровневых квантовых частиц (атомов, молекул или ионов), находящихся в среде-матрице, состоящей из других частиц. Взаимодействие между частицами активной среды предполагается отсутствующим. Также предполагается, что внешняя накачка поддерживает плотность инверсной населённости  $N(\mathbf{r}, t) = N_2(\mathbf{r}, t) - N_1(\mathbf{r}, t)$ , где  $N_2(\mathbf{r}, t)$  есть плотность активных частиц на верхнем уровне, а  $N_1(\mathbf{r}, t)$  - плотность активных частиц на нижнем уровне. В отсутствие лазерного излучения плотность инверсной населённости вообще говоря зависит от координаты точки внутри активной среды:  $N^0(\mathbf{r}) = N_2^0(\mathbf{r}) - N_1^0(\mathbf{r})$ . Полная плотность активных частиц считается постоянной,  $N_a = N_1 + N_2 = N_1^0 + N_2^0$ , т. е. предполагается, что лазерное излучение только перераспределяет активные частицы между верхним и нижним уровнями.

Как было установлено в главе 3, в случае поглощающей среды эволюция поляризации  $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$  и плотности разностной населённости среды  $N(\mathbf{r}, t) = N_1(\mathbf{r}, t) - N_2(\mathbf{r}, t)$  описывается материальными уравнениями (3.33) и (3.34). Заменяя в данных уравнениях плотность разностной населённости  $N = N_1 - N_2$  на плотность инверсной населённости  $N = N_2 - N_1$ , т. е. поменяв знак величины  $N$ , можно сразу выписать материальные уравнения для лазерной среды:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \frac{2}{T_2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) + \omega_0^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = -\frac{2d^2\omega_0}{\hbar} N(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{T_1} (N(\mathbf{r}, t) - N^0(\mathbf{r})) = \frac{2}{\hbar \omega_0} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t). \quad (6.2)$$

Для получения замкнутых уравнений, описывающих эволюцию лазерной среды и лазерного поля, к приведённым материальным уравнениям следует добавить уравнения для лазерного поля. Будем считать, что активная среда является однородной диэлектрической средой без свободных зарядов. Распространение электромагнитного поля в такой среде описывается уравнениями Максвелла (3.1)-(3.4), в которых следует положить  $\rho = 0$ , но оставить плотность тока  $\mathbf{j}$ , рассматривая эту величину как фиктивную. Использование в уравнения Максвелла фиктивного тока позволяет феноменологически учесть потери лазерного излучения, т. е. затухание лазерного поля за счёт поглощения и рассеяния излучения в среде, а также за счёт выхода излучения из резонатора. В математическом отношении включение фиктивного тока весьма удобно, поскольку позволяет обойти сложную проблему граничных условий.

Таким образом, в рассматриваемом подходе лазерная среда считается проводящей. Соответственно феноменологический ток определён обычным уравнением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (6.3)$$

где  $\sigma$  есть удельная проводимость лазерной среды. К уравнениям Максвелла следует, как обычно, добавить материальные соотношения (3.7)-(3.8), которые для немагнитной лазерной среды имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}, \quad (6.5)$$

где  $\varepsilon$  есть относительная диэлектрическая проницаемость лазерной среды.

Используя уравнения Максвелла удобно далее записать волновое уравнение (3.10) для напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$ , которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\Delta \mathbf{E} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \quad (6.6)$$

Учтём далее, что в принятой модели двухкомпонентной лазерной среды полная поляризация среды  $\mathbf{P}_{\text{полн}} = \mathbf{P}_M + \mathbf{P}$  складывается из поляризации среды-матрицы  $\mathbf{P}_M$  и поляризации активных частиц  $\mathbf{P}$ . Это позволяет представить вектор электрической индукции в виде двух частей

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_{\text{полн}} = (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_M) + \mathbf{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_M \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (6.7)$$

где  $\varepsilon_m$  есть относительная диэлектрическая проницаемость среды-матрицы. Подставив последнее соотношение в (6.6) можно переписать уравнение для напряжённости электрического поля в виде

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_m}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (6.8)$$

где  $c = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$  есть скорость света в вакууме.

Сделаем теперь одно упрощение волнового уравнения, связанное с тем, что пространственная структура электромагнитного поля в лазерной среде должна приближённо описываться модами резонатора. Напомним, что в открытом резонаторе поле быстро меняется вдоль оси резонатора и медленно меняется поперёк оси резонатора. Для определённости положим, что электромагнитное поле распространяется вдоль оси  $Oz$ , а вектор электрического поля направлен по оси  $Ox$ , т. е.  $\mathbf{E} = E \mathbf{e}_x$ . В такой геометрии можно пренебречь медленным изменением поля в поперечном направлении и соответственно учесть в операторе Лапласа в уравнении (6.6) только вторую производную по координате  $z$ . Замечая ещё, что вектор индуцированной поляризации направлен по вектору электрического поля,  $\mathbf{P} = P \mathbf{e}_x$ , можно вместо векторного уравнения (6.8) записать более простое скалярное уравнение:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_m} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{c^2}{\varepsilon_m} \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = - \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_m} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}. \quad (6.9)$$

Воспользуемся теперь в явном виде тем обстоятельством, что пространственные конфигурации электрического поля лазера определяются модами резонатора. Собственные функции резонаторных мод обозначим далее для краткости одним индексом  $s = \{m, n, q\}$ :

$$U_s(\mathbf{r}) = u_{mn}(x, y) \sin k_s z, \quad (6.10)$$

где  $k_s = (\Omega_s/c)n$  - волновой вектор моды резонатора, а  $\Omega_s$  - частота моды. Волновой вектор моды включает в себя показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon_m}$ , поскольку резонатор предполагается заполненным средой-матрицей с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_m$ . В простейшем приближении волновой вектор и частота моды определяются только индексом  $q$  аксиальной моды:  $k_s \simeq k_q = (\Omega_q/c)n = (\pi/L)nq$ ,  $\Omega_q \simeq (\pi c/L)q$ . Собственные функции мод резонатора предполагаются удовлетворяющими условиям ортонормированности

$$\frac{1}{V} \int U_{mnq}(\mathbf{r}) U_{m'n'q'}(\mathbf{r}) d^3 r = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{qq'},$$

где  $V$  есть объём резонатора. Здесь и далее мы считаем для простоты, что резонатор полностью заполнен активной средой.

Электрическое поле и поляризация среды могут быть теперь представлены в виде разложений

$$E(\mathbf{r}, t) = \sum E_s(t)U_s(\mathbf{r}), \quad (6.11)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = \sum P_s(t)U_s(\mathbf{r}), \quad (6.12)$$

где  $E_s$  и  $P_s$  - амплитуды электрического поля и поляризации, отвечающие моде  $s$ . Подставив выражения (6.11) и (6.12) в уравнение (6.9) и используя условия ортонормированности можно получить систему уравнений для амплитуд электрических полей лазерных мод

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial t^2} + \frac{\Omega_s}{Q_s} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \Omega_s^2 E_s = -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_M} \frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2}. \quad (6.13)$$

В последнем уравнении величина  $\Omega_s/Q_s = \sigma/\varepsilon_0 \varepsilon_M$  есть скорость затухания поля в лазерной моде. Эта величина определяет добротность моды

$$Q_s = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_M \Omega_s}{\sigma}. \quad (6.14)$$

Для получения окончательных уравнений, описывающих работу многомодового лазера, следует ещё привести материальные уравнения к форме, содержащей амплитуды электрических полей и поляризаций  $E_s$  и  $P_s$ . Учтём для этого, что векторы электрического поля и поляризации направлены по оси  $Ox$  и имеют вид  $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{P} = P\mathbf{e}_x$ . Подставим данные выражения в материальные уравнения (6.1), (6.2) и учтём соотношения (6.11), (6.12). После этого умножим уравнения (6.1), (6.2) на  $U_s(\mathbf{r})$  и усредним оба уравнения по объёму резонатора  $V$  учитывая условия ортонормированности. В результате будут получены окончательные уравнения для амплитуд полей  $E_s = E_s(t)$ , поляризаций  $P_s = P_s(t)$  и усреднённых значений плотности инверсной населённости  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(t)$  и  $\mathcal{N}_{sp} = \mathcal{N}_{sp}(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_s}{\partial t^2} + \frac{\Omega_s}{Q_s} \frac{\partial E_s}{\partial t} + \Omega_s^2 E_s &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_M} \frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2} + \frac{2}{T_2} \frac{\partial P_s}{\partial t} + \omega_0^2 P_s &= -\frac{2d^2 \omega_0}{\hbar} \sum_p \mathcal{N}_{sp} E_p, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{1}{T_1} (\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= \frac{2}{\hbar \omega_0} \sum_p E_p \frac{\partial P_p}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.15)$$



где усреднённые по объёму плотности инверсной населённости определены соотношениями:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(t) &= \frac{1}{V} \int N(\mathbf{r}, t) d^3r, \\ \mathcal{N}^0 &= \frac{1}{V} \int N^0(\mathbf{r}) d^3r, \\ \mathcal{N}_{sp}(t) &= \frac{1}{V} \int N(\mathbf{r}, t) U_s(\mathbf{r}) U_p(\mathbf{r}) d^3r.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Уравнения (6.15) являются наиболее общими уравнениями многомодового лазера стоячей волны.

## 6.2 Уравнения одномодового лазера

Рассмотрим простейший случай лазерной генерации на одной моде с пространственным распределением поля (6.10). При описании одномодового лазера будем для краткости опускать индекс моды, полагая  $U(\mathbf{r}) = U_s(\mathbf{r})$  и  $\Omega = \Omega_s$ . Ниже мы ограничимся простейшим случаем слабой зависимости плотности инверсной населённости от пространственной координаты  $\mathbf{r}$ . В этом случае можно считать выполненным приближённое соотношение

$$\mathcal{N} = \frac{1}{V} \int N(\mathbf{r}, t) d^3r \simeq \frac{1}{V} \int N(\mathbf{r}, t) U^2(\mathbf{r}) d^3r.$$

При использовании такого приближения общие уравнения (6.15) сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned}\ddot{E} + \frac{\Omega}{Q} \dot{E} + \Omega^2 E &= -\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_m} \ddot{P}, \\ \ddot{P} + \frac{2}{T_2} \dot{P} + \omega_0^2 P &= -\frac{2d^2 \omega_0}{\hbar} \mathcal{N} E, \\ \dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1} (\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= \frac{2}{\hbar \omega_0} E \dot{P},\end{aligned}\tag{6.17}$$

которые описывают динамику одномодовой генерации.

Уравнения одномодового лазера можно значительно упростить, если учесть, что лазерное излучение обычно является квазимонохроматическим. В таком случае поляризация лазерной среды также является квазимонохроматической. Это позволяет перейти от уравнений (6.17) к уравнениям для медленно меняющихся амплитуд электрического поля и поляризации. Ниже мы приведём два представления для медленных

переменных, ранее использовавшихся в главе 3 при анализе материальных уравнений. Рассмотрим сначала представление электрического поля и поляризации в виде (3.41), (3.42)

$$E = \mathcal{E} \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.18)$$

$$P = \mathcal{P} \cos(\omega t + \psi). \quad (6.19)$$

Входящие в данные соотношения медленные переменные предполагаются удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{E}} &\ll \omega \dot{\mathcal{E}} \ll \omega^2 \mathcal{E}, \\ \ddot{\varphi} &\ll \omega \dot{\varphi} \ll \omega^2 \varphi, \\ \ddot{\mathcal{P}} &\ll \omega \dot{\mathcal{P}} \ll \omega^2 \mathcal{P}, \\ \ddot{\psi} &\ll \omega \dot{\psi} \ll \omega^2 \psi, \end{aligned}$$

которые основаны на малости скоростей затухания электрического поля и поляризации по сравнению с оптическими частотами,

$$\frac{\Omega}{Q}, \frac{1}{T_2} \ll \omega, \omega_0, \Omega. \quad (6.20)$$

Благодаря введению медленно меняющихся амплитуд и фаз в лазерных уравнениях можно пренебречь высшими производными амплитуд и фаз по времени и быстро осциллирующими членами, оставив лишь первые производные и медленно меняющиеся члены. Такие упрощения могут быть сделаны следующими процедурами. Умножив первое уравнение системы (6.17) сначала на  $\sin(\omega t + \varphi)$ , затем на  $\cos(\omega t + \varphi)$  и усреднив по интервалу времени

$$\frac{1}{\omega}, \frac{1}{\omega_0}, \frac{1}{\Omega} \ll \Delta t \ll \frac{Q}{\Omega}, T_2, T_1 \quad (6.21)$$

можно получить два уравнения для медленных переменных электрического поля. Добавив к ним ранее выведенные уравнения для медленных переменных поляризации и плотности инверсной населённости можно получить полную систему уравнений для действительных медленных пе-

ременных

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}} + \frac{\Omega}{2Q} \mathcal{E} &= \frac{\omega_0}{2\varepsilon_0\varepsilon_M} \mathcal{P} \sin(\psi - \varphi), \\
(\dot{\varphi} + \Delta) \mathcal{E} &= -\frac{\omega_0}{2\varepsilon_0\varepsilon_M} \mathcal{P} \cos(\psi - \varphi), \\
\dot{\mathcal{P}} + \frac{1}{T_2} \mathcal{P} &= \frac{d^2}{\hbar} \mathcal{N} \mathcal{E} \sin(\psi - \varphi), \\
\delta \mathcal{P} &= \frac{d^2}{\hbar} \mathcal{N} \mathcal{E} \cos(\psi - \varphi), \\
\dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1} (\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= -\frac{1}{\hbar} \mathcal{P} \mathcal{E} \sin(\psi - \varphi).
\end{aligned} \tag{6.22}$$

В данных уравнениях  $\Delta = \omega - \Omega$  есть расстройка частоты поля относительно частоты моды резонатора,  $\delta = \omega - \omega_0$  есть расстройка частоты поля относительно частоты центра линии усиления.

Другое представление уравнений для медленных переменных одномодового лазера можно получить, если перейти к комплексным медленным переменным:

$$E = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t} + \text{к. с.}, \tag{6.23}$$

$$P = \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{P}} e^{i\omega t} + \text{к. с.} \tag{6.24}$$

Подставив в уравнения (6.17) выражения для электрического поля (6.23) и поляризации (6.24), умножив первые два уравнения на  $\exp(-i\omega t)$  и усреднив все три уравнения по интервалу времени (6.21) получим следующие уравнения для комплексных амплитуд поля и поляризации и для плотности инверсной населённости

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{\mathcal{E}}} + \left( i\Delta + \frac{\Omega}{2Q} \right) \tilde{\mathcal{E}} &= -\frac{i\omega_0}{\varepsilon_0\varepsilon_M} \tilde{\mathcal{P}}, \\
\dot{\tilde{\mathcal{P}}} + \left( i\delta + \frac{1}{T_2} \right) \tilde{\mathcal{P}} &= \frac{id^2}{\hbar} \mathcal{N} \tilde{\mathcal{E}}, \\
\dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1} (\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= \frac{i}{2\hbar} (\tilde{\mathcal{P}} \tilde{\mathcal{E}}^* - \tilde{\mathcal{P}}^* \tilde{\mathcal{E}}).
\end{aligned} \tag{6.25}$$

Системы уравнений (6.22), (6.25) достаточно полно описывают одномодовую генерацию, включая эффекты когерентного взаимодействия поля со средой при произвольных соотношениях между скоростями вынужденных процессов и процессов релаксации. Вместе с тем во многих

практически важных случаях возможно дальнейшее упрощение уравнений одномодового лазера. Для ряда усиливающих сред, например, для конденсированных сред и газовых сред с давлением сотни атмосфер и выше время поперечной релаксации  $T_2$  очень мало по сравнению с характерным временем нелинейных процессов в лазере  $\tau_{\text{нел}}$ , т. е.

$$1/\omega \ll T_2 \ll \tau_{\text{нел}}. \quad (6.26)$$

В этом случае можно пренебречь производной поляризации по времени. После этого уравнение для поляризации среды становится алгебраическим. Если воспользоваться уравнениями (6.25), то решение алгебраического уравнения для комплексной амплитуды поляризации даёт значение

$$\tilde{\mathcal{P}} = \frac{id^2T_2}{\hbar(1+i\delta T_2)}\mathcal{N}\tilde{\mathcal{E}}. \quad (6.27)$$

В этом приближении, названном в главе 3 приближением некогерентного взаимодействия, система уравнений (6.25) сводится к двум уравнениям

$$\dot{\tilde{\mathcal{E}}} + \left(i\Delta + \frac{\Omega}{2Q}\right)\tilde{\mathcal{E}} = \frac{d^2\omega_0T_2}{2\hbar\varepsilon_0\varepsilon_{\text{м}}(1+i\delta T_2)}\mathcal{N}\tilde{\mathcal{E}}, \quad (6.28)$$

$$\dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1}(\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) = -\frac{d^2T_2}{\hbar^2(1+\delta^2T_2^2)}\mathcal{N}|\tilde{\mathcal{E}}|^2. \quad (6.29)$$

Уравнения (6.28), (6.29) можно привести к более удобному виду, введя вещественную амплитуду и фазу поля,

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \mathcal{A}(t)e^{i\varphi(t)}.$$

В таком представлении уравнения одномодового лазера, отвечающие приближению некогерентного взаимодействия, сводятся к трём вещественным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{A}} + \frac{\Omega}{2Q}\mathcal{A} &= \frac{d^2\omega_0T_2}{2\hbar\varepsilon_0\varepsilon_{\text{м}}}\frac{1}{(1+\delta^2T_2^2)}\mathcal{N}\mathcal{A}, \\ \dot{\varphi} + \Delta &= -\frac{d^2\omega_0T_2}{\hbar\varepsilon_0\varepsilon}\frac{\delta T_2}{(1+\delta^2T_2^2)}\mathcal{N}, \\ \dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1}(\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= -\frac{d^2T_2}{\hbar^2}\frac{1}{(1+\delta^2T_2^2)}\mathcal{N}\mathcal{A}^2. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Если воспользоваться выражением (3.58) для сечения радиационного перехода

$$\sigma = \sigma(\delta) = \frac{d^2\omega_0T_2}{\hbar c}\frac{1}{(1+\delta^2T_2^2)},$$

то последние уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{A}} + \frac{\Omega}{2Q}\mathcal{A} &= \frac{c\sigma}{2\varepsilon_{\text{м}}}\mathcal{N}\mathcal{A}, \\ \dot{\varphi} + \Delta &= -\frac{c\delta T_2\sigma}{2\varepsilon_{\text{м}}}\mathcal{N}, \\ \dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1}(\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= -\frac{c\sigma}{\hbar\omega_0}\mathcal{N}\mathcal{A}^2.\end{aligned}\quad (6.31)$$

Уравнения одномодового лазера, рассматриваемые в приближении некогерентного взаимодействия, удобно также записывать, используя вместо амплитуды электрического поля число фотонов в единице объёма:

$$n = \frac{1}{\hbar\omega}\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle_t = \frac{\varepsilon_0 \mathcal{A}^2}{2\hbar\omega}.\quad (6.32)$$

В этом представлении уравнения (6.31) сводятся к виду

$$\begin{aligned}\dot{n} + \frac{n}{\tau_{\text{ф}}} &= \frac{c\sigma}{\varepsilon_{\text{м}}}\mathcal{N}n, \\ \dot{\varphi} + (\omega - \Omega) &= -\frac{c\sigma\delta T_2}{2\varepsilon_{\text{м}}}\mathcal{N}, \\ \dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{T_1}(\mathcal{N} - \mathcal{N}^0) &= -2c\sigma\mathcal{N}n,\end{aligned}\quad (6.33)$$

где  $\tau_{\text{ф}} = Q/\Omega$  есть время жизни фотона в резонаторе в отсутствие усиливающей среды. Напомним, что в приведённых выше уравнениях  $\varepsilon_{\text{м}}$  есть диэлектрическая проницаемость среды-матрицы.

### 6.3 Непрерывная генерация

Рассмотрим стационарный режим работы одномодового лазера. В этом случае первое и третье уравнения (6.33) дают для стационарных значений плотности фотонов  $\bar{n}$  и плотности инверсной населённости  $\bar{\mathcal{N}}$  выражения

$$\bar{n} = \frac{1}{2c\sigma T_1} \left( \frac{\mathcal{N}^0 c\sigma\tau_{\text{ф}}}{\varepsilon_{\text{м}}} - 1 \right),\quad (6.34)$$

$$\bar{\mathcal{N}} = \frac{\varepsilon_{\text{м}}}{c\sigma\tau_{\text{ф}}}.\quad (6.35)$$

Уравнение (6.35), записанное в виде  $\sigma \bar{\mathcal{N}} = \varepsilon_{\text{м}}/c\tau_{\text{ф}}$ , показывает, что в стационарном режиме коэффициент усиления  $\alpha = \sigma \bar{\mathcal{N}}$  равняется коэффициенту потерь  $\gamma = \varepsilon_{\text{м}}/c\tau_{\text{ф}}$ . Из уравнения (6.34) можно видеть, что

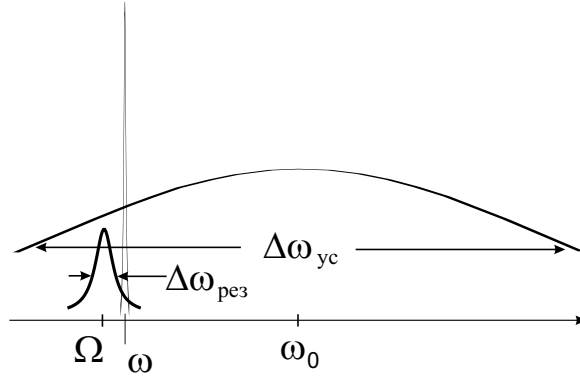


Рис. 6.1: Взаимное положение линии усиления, моды резонатора и линии генерации одномодового лазера.

положительное значение плотности фотонов в стационарном режиме существует, если начальная плотность инверсной населённости  $\mathcal{N}^0$  превышает пороговое значение  $\mathcal{N}_{\text{пор}} = \bar{\mathcal{N}}$ , т. е.  $\mathcal{N}^0 > \bar{\mathcal{N}}$ .

Второе уравнение системы (6.33), рассматриваемое в стационарном режиме, определяет частоту одномодового лазера в виде

$$\frac{\omega - \Omega}{\omega_0 - \omega} = \frac{T_2}{2\tau_{\text{ф}}}. \quad (6.36)$$

В данном уравнении в правой части стоит малая величина

$$s = \frac{T_2}{2\tau_{\text{ф}}} = \frac{\Delta\omega_{\text{рез}}}{\Delta\omega_{\text{ус}}} \ll 1,$$

поскольку ширина полосы резонатора  $\Delta\omega_{\text{рез}} = 1/\tau_{\text{ф}}$  обычно значительно меньше ширины линии усиления  $\Delta\omega_{\text{ус}} = 2/T_2$ . Величину  $s$  обычно называют фактором стабилизации частоты. Решив уравнение (6.36) относительно частоты  $\omega$  до первого порядка по малой величине  $s$  можно определить частоту лазера в виде

$$\omega = \Omega + s(\omega_0 - \Omega). \quad (6.37)$$

Последнее уравнение показывает, что частота лазера определяется главным образом частотой моды резонатора, а роль линии усиления сводится к небольшому затягиванию частоты лазера к центру линии усиления как показано на рис. 6.1. Отметим, что, например, для газовых сред типичная ширина линии усиления  $\Delta\omega_{\text{ус}}/2\pi \sim 10^3$  МГц. При добротности резонатора  $Q = 3 \cdot 10^8$  и длине волны излучения  $\lambda = 1$  мкм ширина полосы резонатора  $\Delta\omega_{\text{рез}}/2\pi \simeq 1$  МГц. Соответственно в данном примере фактор стабилизации  $s \simeq 10^{-3}$ .

## 6.4 Импульсная генерация при модуляции добротности

Рассмотрим импульсный режим генерации, достигаемый при быстром переключении добротности резонатора. Такой режим позволяет генерировать импульсы с мощностью на много порядков превышающей мощность в свободном режиме генерации. Идея такого импульсного режима заключается в следующем. При малом коэффициенте отражения зеркал резонатора можно, не опасаясь самовозбуждения, перевести в возбуждённое состояние значительное число частиц. Если затем достаточно быстро увеличить коэффициент отражения, то лазер окажется в сильно перевозбуждённом состоянии, в котором усиление на проход резонатора существенно превышает потери на проход резонатора. В результате начинается экспоненциальное нарастание мощности излучения в модах резонатора. Если, например, длина резонатора составляет  $L = 100$  см и соответственно время прохода резонатора  $L/c = 3$  нс, а коэффициент эффективного усиления после повышения добротности  $(\alpha - \gamma)L \simeq 1$ , то характерное время нарастания интенсивности на одном проходе, т. е. время усиления составляет всего  $\tau_{yc} = 3$  нс. После определённого числа проходов (как правило, после нескольких десятков проходов) экспоненциальное нарастание мощности ограничивается, как обычно, нелинейностью среды. В данном случае нелинейность проявляется в насыщении усиливающего перехода, приводящему к уменьшению числа частиц на верхнем уровне и, соответственно, падению эффективного коэффициента усиления. Насыщение усиления обычно происходит за время порядка нескольких  $\tau_{yc}$ . В течение этого времени излучается основная часть запасённой в активной среде энергии и мощность излучения достигает максимального значения. После насыщения усиливающего перехода коэффициент усиления становится меньше единицы и мощность излучения экспоненциально затухает. Малое время испускания накопленной в активной среде энергии соответственно приводит к высокой мощности лазерного излучения. Например, если накопить в активной среде энергию 3 Дж, то при испускании 10% этой энергии за время порядка 30 нс можно получить весьма высокое значение мощности 10 МВт.

Метод быстрого включения добротности применим только к лазерам, у которых время релаксации инверсной населённости гораздо больше времени развития гигантского импульса,  $T_1 \gg \tau_{ген}$ . Это условие всегда хорошо выполняется в лазерах на люминесцентных кристаллах и стёклах. Оно также хорошо выполняется в газовых лазерах, работающих на колебательно-вращательных переходах молекул.

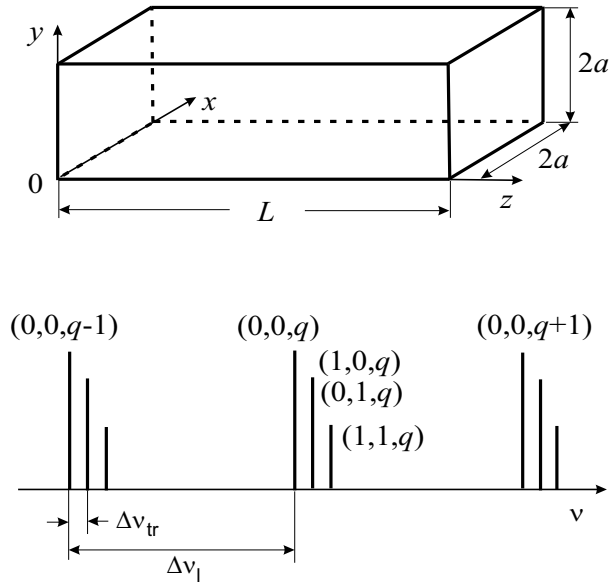


Рис. 6.2: Схема типичного твердотельного лазера (а) и упрощённая модель лазера с однородно распределёнными усилением и потерями (б).

Для описания кинетики импульсной генерации твердотельного лазера можно использовать уравнения (6.33). Это вполне оправдано по двум основным причинам. Во-первых, для лазеров на люминесцентных кристаллах и стёклах характерные времена роста интенсивности лазерного излучения и изменения состояния активной среды под действием лазерного поля гораздо больше времени  $T_2$ , т. е. условие (6.26) хорошо выполняется. Во-вторых, обычно импульсы излучения не слишком короткие и, соответственно, можно пренебречь эффектами распространения излучения в среде с неоднородным распределением усиления и потерь, считая, что как усиление, так и потери равномерно распределены по длине резонатора.

Итак, в простейшем приближении генерацию гигантского импульса можно описать уравнениями (6.33), в которых достаточно рассмотреть только балансные уравнения, причём во втором из них можно пренебречь релаксацией плотности инверсной населённости в течение импульса генерации:

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \frac{c\sigma}{\varepsilon_m} \mathcal{N} n - \frac{n}{\tau_\Phi}, \\ \dot{\mathcal{N}} &= -2c\sigma n \mathcal{N}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Как можно видеть из системы уравнений (6.38), при величине потерь превышающей величину усиления, т. е. при  $\gamma = 1/c\tau_\Phi > \alpha = \sigma\mathcal{N}/\varepsilon_m$  ста-



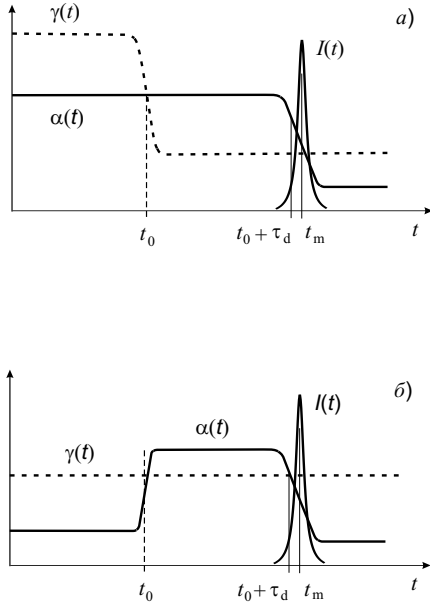


Рис. 6.3: Формирование лазерного импульса в лазере с модулированной добротностью при быстром уменьшении потерь (а) и быстром включении усиления (б).

циональная интенсивность излучения обращается в нуль. Быстрое нарастание интенсивности и формирование гигантского импульса достигается при внезапном изменении соотношения между усилением и потерями от состояния  $\alpha < \gamma$  при временах  $t < t_0$  до состояния  $\alpha > \gamma$  при временах  $t > t_0$ . Это может быть достигнуто либо быстрым уменьшением потерь, либо быстрым увеличением усиления (рис. 6.3). Практически наибольшее распространение получил первый способ.

Основные характеристики гигантского импульса можно оценить из системы (6.38). Прежде всего можно дать оценку времени задержки  $\tau_3$ , в течение которого происходит экспоненциальный рост интенсивности излучения. Это процесс описывается первым уравнением (6.38) при неизменной плотности инверсной населённости  $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(t_0)$ :

$$n = n_0 \exp \left[ \left( \frac{\mathcal{N}_0}{\mathcal{N}_n} - 1 \right) \frac{t}{\tau_{\Phi}} \right], \quad (6.39)$$

где

$$\mathcal{N}_n = \frac{\varepsilon_m}{\sigma c \tau_{\Phi}}$$

есть пороговое значение плотности инверсной населённости. В качестве критерия начала уменьшения (выгорания) инверсной населённости можно принять, например, изменение плотности инверсной населённости, составляющее 10% от превышения начальной инверсной населённости над

пороговым значением:

$$\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}(t_0 + \tau_3) = 0,1 \times (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_\Pi).$$

Интегрируя второе уравнение (6.38) при условии, что на интервале времени от  $t_0$  до  $t_0 + \tau_3$  плотность фотонов изменяется по закону (6.39) можно найти следующую оценку для времени задержки

$$\tau_3 \simeq \tau_\Phi \frac{\mathcal{N}_\Pi}{\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_\Pi} \ln \left[ \frac{(\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_\Pi)^2}{20\mathcal{N}_0 n_0} \right],$$

где  $n_0$  есть плотность фотонов спонтанного излучения. Начальная плотность инверсной населённости обычно на много порядков больше плотности фотонов спонтанного излучения. Например, для люминесцентных кристаллов и стёкол при обычных условиях плотность инверсной населённости на 15-18 порядков больше плотности фотонов спонтанного излучения в модах,  $\mathcal{N}_0/n_0 \simeq 10^{15} - 10^{18}$ . В таких случаях время задержки обычно не меньше нескольких десятков времён жизни фотона в резонаторе

$$\tau_3 \simeq (30 - 40)\tau_\Phi \frac{\mathcal{N}_\Pi}{\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_\Pi}.$$

Столь большая величина времени задержки обусловлена в основном гигантским различием плотностей инверсной населённости и фотонов спонтанного излучения.

Приведём оценку для пиковой плотности фотонов, достигаемой в момент времени  $t_m$ . Предварительно поделим первое уравнение (6.38) на второе, получив уравнение

$$\frac{dn}{d\mathcal{N}} = -\frac{1}{2\varepsilon_M} \left( 1 - \frac{\mathcal{N}_\Pi}{\mathcal{N}} \right).$$

Решение этого уравнения есть

$$n(t) = n_0 + \frac{1}{2\varepsilon} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}(t)) + \frac{\mathcal{N}_\Pi}{2\varepsilon_M} \ln \frac{\mathcal{N}(t)}{\mathcal{N}_0},$$

где весьма малая величина  $n_0$  есть плотность фотонов спонтанного излучения.

Согласно первому уравнению (6.38) максимум плотности фотонов достигается при условии  $\dot{n} = 0$  когда  $\mathcal{N}(t_m) = \mathcal{N}_\Pi$ . С учётом этого выражения пиковая плотность фотонов есть

$$n_m = \frac{1}{2\varepsilon} (\mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_\Pi) - \frac{\mathcal{N}_\Pi}{2\varepsilon_M} \ln \frac{\mathcal{N}_0}{\mathcal{N}_\Pi},$$

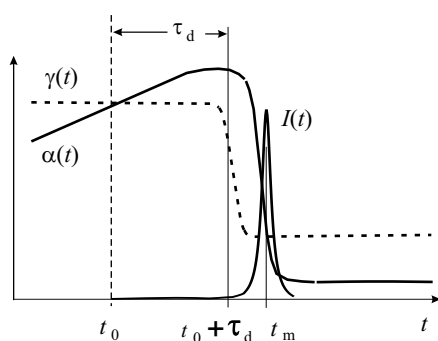


Рис. 6.4: Формирование лазерного импульса в лазере с нелинейным просветляющимся поглотителем.

где опущена пренебрежимо малая величина  $n_0$ . Как можно видеть отсюда пиковая мощность лазера с модулированной добротностью зависит только от соотношения между начальной и пороговой плотностями инверсной населённости.

Практически для модуляции добротности используются электрооптические затворы на основе эффекта Поккельса, механические затворы, акустооптические затворы.

Рассмотренный выше лазер с мгновенным включением добротности (или усиления) иногда называют лазером с активной модуляцией добротности. Это название отражает тот факт, что в таком лазере управление его параметрами осуществляется извне. Наряду с активной модуляцией добротности используется также метод модуляции добротности за счёт нелинейного просветляющегося поглотителя, прозрачность которого возрастает при увеличении интенсивности излучения. Кинетика генерации гигантского импульса в лазере с нелинейным поглотителем показана на рис. 6.4. Благодаря просветлению среды в некоторый момент времени  $t_0$  усиление активной среды сравнивается с величиной потерь в лазере. С этого момента времени начинается развитие генерации. Интенсивность излучения, необходимая для насыщения нелинейного поглотителя, на много порядков превышает интенсивность спонтанного излучения  $I_0$ . Поэтому в течение относительно длительного времени  $\tau_d$  происходит экспоненциальное нарастание интенсивности излучения. После просветления поглотителя потери резко уменьшаются. В результате лазер оказывается в перевозбуждённом состоянии. После этого начинается развитие гигантского импульса. Отметим, что в качестве просветляющихся поглотителей обычно используют растворы органических красителей и щёлочно-галлоидные кристаллы с центрами окраски. Например, в случае рубинового лазера в качестве нелинейных просветляющихся поглотите-

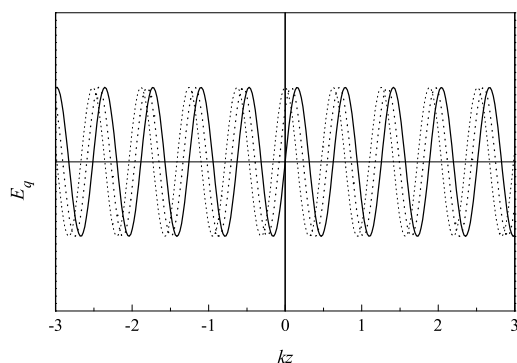


Рис. 6.5: Вариации электрических полей продольных мод в лазере с оячей волны.

лей могут использоваться металлофталочианины и криптоцианины, а в случае лазеров на неодимовом стекле - полиметиновые красители. Данные растворы органических красителей просветляются при интенсивности излучения  $I_S \simeq 10^6 - 10^7$  Вт/см<sup>2</sup>.

## 6.5 Многомодовая генерация

Если не предприняты специальные усилия, то лазеры обычно работают в многомодовом режиме. В случае лазера с однородно уширенной линией усиления основной причиной многомодовой генерации является различие пространственных распределений лазерных мод. Так, в лазере стоячей волны стоячие волны, отвечающие различным модам, сдвинуты в пространстве друг относительно друга в соответствии с распределением полей в различных модах

$$E_q = E_0 \cos \omega t \sin \frac{\pi q}{L} z. \quad (6.40)$$

Благодаря этому различные моды усиливаются за счёт различных групп активных частиц (рис. 6.5). Соответственно, каждая лазерная мода создаёт свою пространственную картину уменьшения плотности инверсной населённости, т. е. создаёт пространственное выжигание дырки в активной среде.

В случае лазера с неоднородно-уширенной линией усиления лазерные моды, имеющие разные частоты, взаимодействуют с различными группами частиц в пределах неоднородного контура линии усиления (рис. 6.6). Это обстоятельство также способствует многомодовому режиму ге-

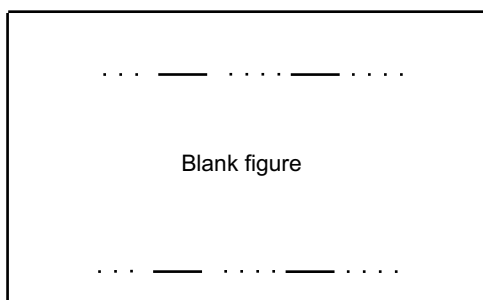


Рис. 6.6:

нерации. Иначе говоря, в лазере с неоднородно-уширенной линией усиления многомодовый режим генерации осуществляется благодаря пространственному и частотному выжиганию дырок.

### 6.5.1 Конкуренция мод

Лазер, работающий на нескольких модах, существенно отличается от одномодового лазера благодаря проявлению ряда эффектов, обусловленных взаимодействием мод через общую активную среду. Одним из основных является конкуренция мод. Существуют две основные причины конкуренции мод. Одна из них состоит в том, что различные моды усиливаются за счёт одних и тех же атомов. Это обстоятельство может приводить к конкуренции мод, которая определяется только амплитудными соотношениями. Второй важной причиной является рассеяние лазерного излучения на зеркалах. При рассеянии части излучения назад одна из мод инжектирует излучение в другую моду. Такая инжекция приводит к связи между модами, которая зависит от разности фаз мод. Положим, что лазер работает на двух аксиальных модах. В этом случае в доплеровском контуре линии усиления выжигаются две пары дырок. Если частоты мод расположены симметрично относительно центра линии усиления, то моды взаимодействуют с одними и теми же группами активных частиц. Такое взаимодействие приводит к конкуренции мод называемой также пересечением мод (mode crossing).

Конкуренция мод может сделать неустойчивым двухмодовый режим работы лазера. Это можно увидеть уже из простейших уравнений для амплитуд полей

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}}_1 &= \alpha_1 \mathcal{E}_1 (1 - \beta_1 \mathcal{E}_1^2 - \theta_{12} \mathcal{E}_2^2), \\ \dot{\mathcal{E}}_2 &= \alpha_2 \mathcal{E}_2 (1 - \beta_2 \mathcal{E}_2^2 - \theta_{21} \mathcal{E}_1^2).\end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $\alpha_n$  определяется через коэффициенты усиления и потерь, остальные члены происходят от разложения коэффициента усиления по степеням поля. Коэффициент  $\beta_n$  определяет насыщение усиления, а коэффициенты  $\theta_{12}, \theta_{21}$  определяют кросс-насыщение, т. е. насыщение усиления одной моды излучением другой моды.

В стационарном режиме

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1^2 &= \frac{\beta_2\alpha_1 - \theta_{12}\alpha_2}{\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}}, \\ \mathcal{E}_2^2 &= \frac{\beta_1\alpha_2 - \theta_{21}\alpha_1}{\beta_1\beta_2 - \theta_{12}\theta_{21}}.\end{aligned}$$

При  $\beta_1\beta_2 > \theta_{12}\theta_{21}$  связь между модами слаба и могут одновременно генерироваться две моды. При  $\beta_1\beta_2 < \theta_{12}\theta_{21}$  связь мод является сильной и может генерироваться только одна мода.

### 6.5.2 Захват мод в кольцевом лазере

В том случае, когда лазер работает в двухмодовом режиме, конкуренция мод может приводить к захвату мод. Основной причиной захвата мод является рассеяние лазерного излучения на зеркалах. При рассеянии части излучения назад одна из мод инжектирует излучение в другую моду. Такая инжекция приводит к связи между модами, которая зависит от разности фаз мод, и в конечном счёте может быть ответственна за захват мод, в результате которого моды приобретают одну и ту же частоту. Отметим, что в математическом отношении захват мод в лазере подобен захвату частот связанных маятников.

Для описания захвата мод в двухмодовом лазере можно воспользоваться первым из уравнений (6.15). Представим электрическое поле моды  $s = 1, 2$  в виде, включающем медленно меняющуюся амплитуду и фазу

$$E_s = \mathcal{A}_s(t) \cos(\omega_s t + \varphi_s(t)) = \frac{1}{2} \mathcal{A}_s(t) e^{i\omega_s t + i\varphi_s(t)} + \text{к. с.}, \quad (6.41)$$

где амплитуда поля  $\mathcal{A}_s$  считается действительной. Поляризацию также запишем в виде, включающем медленно меняющуюся амплитуду и фазу

$$P_s = \frac{1}{2} \mathcal{B}_s(t) e^{i\omega_s t + i\varphi_s(t)} + \text{к. с.}, \quad (6.42)$$

где амплитуда поляризации  $\mathcal{B}_s$  считается комплексной, поскольку поляризация вообще говоря сдвинута по фазе по отношению к электрическому полю. Подставив соотношения (6.41) и (6.42) в первое уравнение

(6.15) получим два действительных уравнения

$$\dot{\mathcal{A}}_s + \frac{\omega_0}{2Q_s} \mathcal{A}_s = \frac{\omega_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_M} \text{Im} \mathcal{B}_s, \quad (6.43)$$

$$\dot{\varphi}_s + \Delta_s = -\frac{\omega_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_M} \frac{\text{Re} \mathcal{B}_s}{\mathcal{A}_s}. \quad (6.44)$$

Здесь величина  $\varepsilon_M$  обозначает как и ранее относительную диэлектрическую проницаемость среды-матрицы.

Для того, чтобы учесть эффект инжекции излучения одной моды в другую моду заменим поляризации мод новыми выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &\rightarrow \mathcal{B}_1 + (g + ih) \mathcal{A}_2 e^{-i\Psi}, \\ \mathcal{B}_2 &\rightarrow \mathcal{B}_2 + (g + ih) \mathcal{A}_1 e^{i\Psi}, \end{aligned}$$

где комплексная величина  $g + ih$  учитывает изменение рассеянного излучения как по амплитуде так и по фазе, а фазовая связь между модами учитывается разностной фазой  $\Psi$

$$\Psi = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1.$$

Возьмём далее производную по времени от разностной фазы и воспользуемся уравнениями (6.43), (6.44). Это позволит получить уравнение для относительной фазы

$$\dot{\Psi} = a + b \sin(\Psi - \Psi_0), \quad (6.45)$$

в котором введены параметры

$$\begin{aligned} a &= \Omega_2 - \Omega_1 + \frac{\omega_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_M \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2} \text{Re} (\mathcal{A}_2 \mathcal{B}_1 - \mathcal{A}_1 \mathcal{B}_2), \\ b &= \frac{\omega_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_M \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2} (g^2 (\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{A}_2^2) + h^2 (\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2))^{1/2}, \end{aligned}$$

и новая фаза, определённая соотношением

$$\text{tg } \Psi_0 = g(\mathcal{A}_1^2 - \mathcal{A}_2^2)/h(\mathcal{A}_1^2 + \mathcal{A}_2^2).$$

Уравнение (6.45) имеет различные решения в зависимости от величины отношения  $|a/b|$ . При  $|a/b| > 1$  величина  $b \sin(\Psi - \Psi_0)$  не может превысить  $|a|$  и следовательно фаза  $\Psi$  монотонно изменяется во времени, возрастая при  $a > 0$  и уменьшаясь при  $a < 0$ . При другой величине отношения, когда  $|a/b| \leq 1$ , при одном или двух значениях  $\Psi$  производная  $\dot{\Psi}$  обращается в нуль, приводя соответственно к захвату частот лазера. Значения фаз, при которых производная фазы равна нулю, есть

$$\Psi_m = \begin{cases} \Psi_0 - \arcsin(a/b) \\ \Psi_0 + \arcsin(a/b) + \pi \end{cases} \quad (6.46)$$

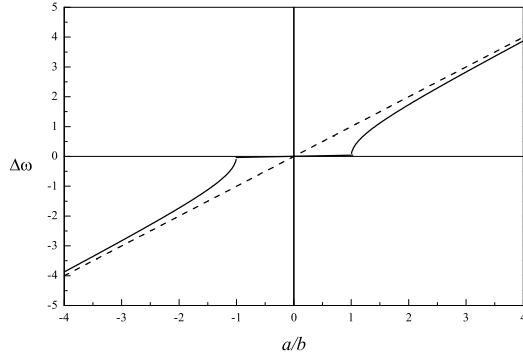


Рис. 6.7:

Если  $|a/b| \gg 1$ , то фаза  $\Psi$  изменяется приблизительно линейно во времени в соответствии с законом  $\dot{\Psi} \simeq a$ . Когда отношение  $|a/b|$  уменьшается, приближаясь к единице, то в уравнении (6.45) член с множителем  $b$  вычитается из члена  $a$  на одном полупериоде колебания и добавляется к члену  $a$  на другом полупериоде. Это приводит к скользящему поведению фазы, поскольку фаза проскальзывает после точки, где член с множителем  $b$  стремится уменьшить член  $a$ . Когда отношение  $|a/b|$  достигает единицы, фаза достигает точки скольжения и останавливается.

При  $|a/b| > 1$  можно вычислить среднее значение частоты  $\Delta\omega$ , определяемое разностной фазой  $\Psi$ , т. е. среднее значение разности частот двух мод. Используя соотношение

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{t(\Psi_0 + 2\pi) - t(\Psi_0)},$$

где  $t(\Psi_0)$  есть время, когда фаза имеет значение  $\Psi = \Psi_0$ , можно записать обратное значение фазы как

$$\frac{1}{\Delta\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{t(\Psi_0)}^{t(\Psi_0+2\pi)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t(\Psi_0)}^{t(\Psi_0+2\pi)} \frac{d\Psi}{a + b \sin(\Psi - \Psi_0)}.$$

После вычисления интеграла получим

$$\Delta\omega = \sqrt{a^2 - b^2}. \quad (6.47)$$

На рис. 6.7 показана зависимость, откуда видно, что при малых значениях разности частот происходит захват частот.



## 6.6 Шумы лазерного излучения

### 6.6.1 Спектральная плотность оптического сигнала

Положим, что действительная функция  $f(t)$  описывает физический сигнал, которым может быть координата некоторой частицы, ток в полупроводнике, амплитуда лазерного поля, и т. п. В любой реальной ситуации функция  $f(t)$  измеряется на конечном интервале времени  $T$ , скажем, при временах  $-T/2 < t < T/2$ . Положим, что  $f_T(\omega)$  есть Фурье преобразование исходного сигнала, так что

$$f_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (6.48)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.49)$$

Отметим, что поскольку функция  $f(t)$  предполагается действительной, то комплексная функция  $f_T(\omega)$  удовлетворяет условию

$$f_T^*(\omega) = f_T(-\omega).$$

Введём мгновенную мощность сигнала, определённую как чисто математическое понятие в форме  $p(t) = f^2(t)$ . Для сигнала  $f(t)$ , рассматриваемого на интервале времени  $T$ , можно также ввести приближённое значение средней мощности в виде

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ f(t) \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega \right\} dt. \quad (6.50)$$

Очевидно приведённое выражение будет тем ближе к истинной средней мощности, чем больше интервал времени  $T$ . Изменив порядок интегрирования данный интеграл можно также записать в виде

$$P = \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(\omega) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{i\omega t} dt \right\} d\omega.$$

Замечая далее, что согласно уравнению (6.48) внутренний интеграл представляет величину  $f_T^*(\omega)$  последнее уравнение может быть переписано в виде

$$P = \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} |f_T(\omega)|^2 d\omega = \frac{4\pi}{T} \int_0^{+\infty} |f_T(\omega)|^2 d\omega.$$

Замечая наконец, что истинная средняя мощность сигнала определяется в пределе  $T \rightarrow \infty$  можно записать окончательное выражение для средней мощности в виде интеграла

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) d\omega = 2 \int_0^{+\infty} S_f(\omega) d\omega, \quad (6.51)$$

где величина

$$S_f(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi |f_T(\omega)|^2}{T} \quad (6.52)$$

есть функция спектральной плотности.

### 6.6.2 Теорема Винера-Хинчина

Рассмотрим корреляционную функцию

$$C_f(\tau) = \langle f(t)f(t+\tau) \rangle_t, \quad (6.53)$$

где  $\langle \rangle_t$  обозначает среднее по времени. Уравнение для корреляционной функции может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned} C_f(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)f(t+\tau) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(\omega') f_T(\omega) e^{i(\omega'+\omega)t+i\omega\tau} d\omega' d\omega dt. \end{aligned} \quad (6.54)$$

В пределе  $T \rightarrow \infty$  справедлива формула

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(\omega'+\omega)t} dt = 2\pi \delta(\omega' + \omega).$$

Используя данную формулу можно представить интеграл (6.54) в виде

$$\begin{aligned} C_f(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(-\omega) f_T(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi |f_T(\omega)|^2}{T} e^{i\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \quad (6.55)$$

Воспользовавшись теперь определением спектральной плотности (6.52) можно представить корреляционную функцию в виде интеграла Фурье

$$C_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (6.56)$$

Обратное преобразование Фурье соответственно определяет спектральную плотность

$$S_f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (6.57)$$

Приведённые два уравнения (6.56) и (6.57) составляют суть теоремы Винера-Хинчина, которая устанавливает, что функция спектральной плотности  $S_f(\omega)$  и корреляционная функция  $C_f(\tau)$  образуют пару Фурье. Полезность теоремы Винера-Хинчина состоит в том, что часто легче измерить или найти корреляционную функцию  $C_f(\tau)$ , а уже затем посредством преобразования Фурье определить спектральную плотность  $S_f(\omega)$ .

### 6.6.3 Спектр лазерного излучения

В лазерах главный вклад в шум вызван флуктуациями фазы лазерного поля. Соответственно фазовые флуктуации ответственны за форму спектра и ширину линии лазерного излучения.

Рассмотрим электрическое поле лазерного излучения, имеющее постоянную амплитуду  $E_0$ , центральную частоту  $\omega_c$  и флуктуирующую фазу  $\varphi(t)$ ,

$$E(t) = E_0 \cos(\omega_c t + \varphi(t)). \quad (6.58)$$

Далее будем для определённости считать, что центральная частота лазерного поля  $\omega_c$  зафиксирована условиями генерации лазера. В частности, центральная частота  $\omega_c$  может быть задана частотой определённого резонанса лазерного резонатора, т. е. в виде  $\omega_c = \omega_q = (\pi c/L)q$ .

При выбранной форме лазерного поля корреляционная функция (6.53) имеет вид

$$C_E(\tau) = \frac{1}{4} E_0^2 \left\langle \left[ e^{i(\omega_c t + \varphi(t))} + e^{-i(\omega_c t + \varphi(t))} \right] \times \left[ e^{i\omega_c \tau} e^{i(\omega_c t + \varphi(t+\tau))} + e^{-i\omega_c \tau} e^{-i(\omega_c t + \varphi(t+\tau))} \right] \right\rangle_t. \quad (6.59)$$

Пренебрегая членами, осциллирующими с удвоенной оптической частотой, т. е. сохраняя только медленно меняющиеся члены, получим

$$C_E(\tau) = \frac{1}{4} E_0^2 \left\langle e^{i\omega_c \tau} e^{i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))} + e^{-i\omega_c \tau} e^{-i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))} \right\rangle_t \\ = \frac{1}{4} E_0^2 \left[ e^{i\omega_c \tau} \left\langle e^{i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))} \right\rangle_t + e^{-i\omega_c \tau} \left\langle e^{-i(\varphi(t+\tau) - \varphi(t))} \right\rangle_t \right]. \quad (6.60)$$

Вводя обозначение для разности фаз

$$\theta(t, \tau) = \varphi(t + \tau) - \varphi(t)$$

можно переписать корреляционную функцию в виде

$$C_E(\tau) = \frac{1}{4} E_0^2 [e^{i\omega_c \tau} \langle e^{i\theta(t,\tau)} \rangle_t + e^{-i\omega_c \tau} \langle e^{-i\theta(t,\tau)} \rangle_t]. \quad (6.61)$$

Далее, среднее по времени  $\langle e^{i\theta(t,\tau)} \rangle_t$  может быть рассмотрено как среднее по ансамблю,

$$\langle e^{i\theta(t,\tau)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta(t,\tau)} w(\theta) d\theta, \quad (6.62)$$

где  $w(\theta)$  есть вероятность того, что разность фаз имеет значение  $\theta$ . Согласно центральной предельной теореме распределение, описывающее много независимых флуктуаций, является гауссовым,

$$w(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta\theta} e^{-\theta^2/2(\Delta\theta)^2}, \quad (6.63)$$

где ширина распределения  $\Delta\theta$  определяется среднеквадратичной величиной

$$(\Delta\theta)^2 = \langle (\delta\theta^2) \rangle = \int \theta^2 w(\theta) d\theta. \quad (6.64)$$

С физической точки зрения флуктуации лазерного излучения обусловлены спонтанным испусканием. Каждый фотон, спонтанно испущенный в резонаторе лазера, изменяет фазу лазерного поля поскольку даёт вклад в электрическое поле лазерного излучения

$$e(t) = e_0 \cos(\omega_c t + \phi),$$

где  $e_0$  есть амплитуда, а  $\phi$  - фаза электрического поля отдельного фотона. Соответственно, исходное электрическое поле лазерного излучения

$$E(t) = E_0 \cos \omega_c t$$

после добавления спонтанно испущенного фотона принимает вид

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \cos \omega_c t + e_0 \cos(\omega_c t + \phi) \\ &= (E_0 - e_0 \cos \phi) \cos \omega_c t - e_0 \sin \phi \sin \omega_c t, \end{aligned} \quad (6.65)$$

где амплитуда поля одного фотона пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой исходного поля,  $|e_0| \ll |E_0|$ . Пренебрегая малой поправкой можно переписать электрическое поле в виде, включающем амплитуду и новую фазу:

$$E(t) \simeq E_0 \cos \omega_c t - e_0 \sin \phi \sin \omega_c t \quad (6.66)$$

$$= E_0 \cos(\omega_c t + \varphi), \quad (6.67)$$

где  $\varphi$  есть малая добавка к фазе поля, определённая уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi \simeq \varphi = \frac{e_0 \sin \phi}{E_0}.$$

Из последнего уравнения можно видеть, что среднеквадратичное значение флуктуирующей фазы, обусловленной спонтанно испущенным фотоном, есть

$$\langle (\delta\varphi)^2 \rangle = \frac{e_0^2}{E_0^2} \langle \sin^2 \phi \rangle = \frac{1}{2\bar{n}}. \quad (6.68)$$

В данном соотношении отношение  $e_0^2/E_0^2$  заменено отношением числа фотонов  $1/\bar{n}$ , т. е. отношением единицы к среднему числу фотонов  $\bar{n}$  в лазерной моде, фактор  $1/2$  происходит от среднего значения  $\langle \sin^2 \phi \rangle = 1/2$ .

Среднеквадратичное значение  $\langle (\delta\theta)^2 \rangle$  флуктуирующей фазы (6.64), взятой на интервале времени  $T = |\tau|$  очевидно превышает величину  $\langle (\delta\varphi)^2 \rangle$  в  $(|\tau|/\tau_\Phi)$  раз поскольку при времени жизни фотона  $\tau_\Phi$  на временном интервале  $|\tau|$  количество спонтанно испущенных фотонов есть  $N_{\text{сп}} = |\tau|/\tau_\Phi$ . Это означает, что в стационарном режиме генерации

$$(\Delta\theta)^2 = \langle (\delta\theta)^2 \rangle = \frac{1}{2\bar{n}} \frac{|\tau|}{\tau_\Phi}, \quad (6.69)$$

где время жизни фотона определяется шириной линии резонатора и связано с добротностью резонатора,  $\tau_\Phi = 1/\Delta\omega_\Phi = Q/\omega_c$ .

Вычислив теперь величину (6.62) в виде

$$\langle e^{i\theta(t,\tau)} \rangle = e^{-(\Delta\theta)^2/2} = e^{-|\tau|/(4\bar{n}\tau_\Phi)} \quad (6.70)$$

можно получить для корреляционной функции (6.61) выражение

$$C_E(\tau) = \frac{1}{4} E_0^2 e^{-|\tau|/(4\bar{n}\tau_\Phi)} (e^{i\omega_c\tau} + e^{-i\omega_c\tau}). \quad (6.71)$$

Спектральная плотность лазерного излучения на частоте  $\omega$  соответственно приобретает вид

$$\begin{aligned} S_E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} C_E(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{E_0^2}{8\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\omega-\omega_c)\tau - |\tau|/(4\bar{n}\tau_\Phi)} d\tau, \end{aligned}$$

где в последнем уравнении опущен член, осциллирующий с удвоенной оптической частотой.

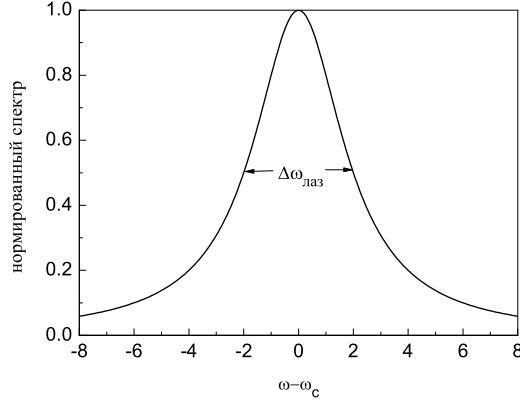


Рис. 6.8: Форма линии лазерного излучения с флуктуирующей фазой.

Вычислив последний интеграл можно найти, что спектральная плотность лазерного излучения описывается лорентцевской функцией

$$S_E(\omega) = \frac{E_0^2}{4\pi} \frac{1/4\bar{n}\tau_\Phi}{(\omega - \omega_c)^2 + (1/4\bar{n}\tau_\Phi)^2}. \quad (6.72)$$

Таким образом, спектральная линия лазерного излучения имеет полную ширину на полувысоте

$$\Delta\omega_{\text{лаз}} = \frac{1}{2\bar{n}\tau_\Phi} = \frac{\Delta\omega_{\text{рез}}}{2\bar{n}},$$

где в последнем соотношении введена ширина полосы резонатора  $\Delta\omega_{\text{рез}} = 1/\tau_\Phi$ . Помня, что мощность лазерного излучения есть  $P = \bar{n}\hbar\omega_c/\tau_\Phi$  можно переписать ширину линии лазерного излучения также в виде

$$\Delta\omega_{\text{лаз}} = \frac{\hbar\omega_c (\Delta\omega_{\text{рез}})^2}{2P}. \quad (6.73)$$

Соотношение (6.72) носит название формулы Шавлова-Таунса. Форма линии лазерного излучения с флуктуирующей фазой показана на рис. 6.8.

Отметим во избежание недоразумений, что мощность сигнала была ранее определена уравнениями (6.50) и (6.51) как чисто математическое понятие без включения физического множителя. Соответственно спектральная плотность (6.72) также определена без размерного множителя.

Приведём сравнение ширин линий излучения для He-Ne лазера и типичного полупроводникового лазера.

Положим, что в He-Ne лазере, излучающем на длине волны  $\lambda = 633$  нм длина резонатора есть  $L = 100$  см, а коэффициенты отражения зеркал  $R = 99\%$ . При таких параметрах ширина полосы резонатора

$$\Delta\nu_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{ф}}} \simeq \frac{(1-R)c}{2\pi L} \simeq 5 \cdot 10^5 \text{ Гц}$$

и соответственно время жизни фотона  $\tau_{\text{ф}} \simeq 3,2 \cdot 10^{-7}$  с. Полагая уровень мощности  $P = 1$  мВт из уравнения (6.73) получим  $\Delta\nu_{\text{лаз}} \simeq 2 \cdot 10^{-3}$  Гц.

Рассмотрим теперь полупроводниковый лазер на материале GaInAsP (показатель преломления  $n = 3,5$ ), работающий на длине волны  $\lambda = 1,55$  мкм и имеющий длину резонатора  $L = 300$  мкм и коэффициенты отражения зеркал  $R = 30\%$ . Для данных значений ширина полосы резонатора

$$\Delta\nu_{\text{ф}} = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{рез}}} \simeq \frac{(1-R)c}{2\pi nL} \simeq 3 \cdot 10^{10} \text{ Гц},$$

а время жизни фотона  $\tau_{\text{рез}} \simeq 5 \cdot 10^{-12}$  с. Полагая опять уровень мощности  $P = 1$  мВт из уравнения (6.73) можно найти  $\Delta\nu_{\text{лаз}} \simeq 0,8 \cdot 10^6$  Гц.

Подчеркнём, что большое различие в ширинах лазерных линий в приведённых примерах происходит главным образом из за различия во временах жизни фотонов. В очень коротком резонаторе полупроводникового лазера время жизни фотона примерно на 5 порядков меньше времени жизни фотона в He-Ne лазере. Это различие в соответствии с уравнением (6.73) создаёт большое различие в ширинах линий лазерного излучения.





## Глава 7

# Генерация оптических импульсов

### 7.1 Метод синхронизации мод

Вообще говоря, можно указать два принципиально разных режима работы многомодового лазера. В одном режиме фазы продольных мод могут быть никак не связаны между собой, т. е. разности фаз соседних продольных мод могут быть распределены случайным образом. В другом режиме фазы продольных мод могут быть связаны между собой определённым образом, например, разности фаз соседних мод могут иметь одно и то же значение.

В первом случае интерференция мод приводит к тому, что интенсивность лазерного излучения флуктуирует на интервале времени  $T = 2L/c$ , равном времени обхода лазерным светом резонатора с оптической длиной  $L$ . При последовательных обходах резонатора последовательность флуктуационных импульсов повторяется с периодом  $T$ , усиливаясь при каждом прохождении активной среды. Средняя длительность отдельного флуктуационного импульса  $\tau_{\text{фл}}$  естественно определяется обратной шириной полного спектра лазерного излучения, т. е. по-существу обратной шириной линии усиления  $\Delta\nu_{\text{ус}}$ , и соответственно определяется оценкой  $\tau_{\text{фл}} \simeq 1/\Delta\nu_{\text{ус}}$ . Учитывая, что полная ширина спектра может быть приближённо выражена через число продольных мод  $N$  и частотный интервал между модами  $\Delta\nu = c/2L$ , т. е. в виде  $\Delta\nu_{\text{ус}} \simeq N\Delta\nu = N/T$ , длительность флуктуационного импульса может быть записана как  $\tau_{\text{фл}} \simeq T/N$ . Отсюда сразу видно, что в излучении многомодового лазера уже содержатся ультракороткие импульсы, однако из-за случайного распределения фаз мод они случайным образом распределены на периоде  $T$ , а их

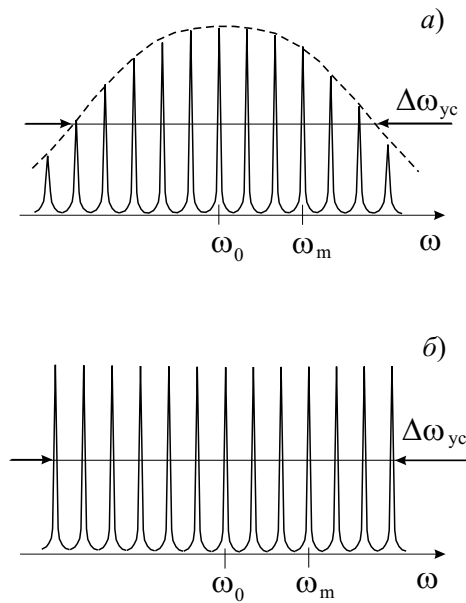


Рис. 7.1: Расположение продольных мод в пределах линии усиления реального многомодового лазера (а) и упрощённая модель расположения мод в пределах линии усиления прямоугольной формы (б).

интенсивности малы.

Совершенно иная картина отвечает другому случаю, когда моды синхронизованы по фазе. В этом случае интерференция мод приводит к возникновению на периоде  $T$  одиночного импульса ультракороткой длительности. Его длительность естественно определяется обратной шириной полного спектра лазерного излучения  $\tau_{\text{имп}} = 1/\Delta\nu_{\text{yc}}$ , а интенсивность превышает интенсивность среднего флуктуационного импульса примерно в  $N$  раз.

Приведённые соображения показывают, что ультракороткие оптические импульсы могут быть получены посредством синхронизации фаз продольных лазерных мод. Рассмотрим случай, когда многомодовый лазер работает на  $N = 2n + 1$  продольных модах. В реальном лазере продольные моды расположены в пределах колоколообразной линии усиления с шириной  $\Delta\omega_{\text{yc}}$  и соответственно имеют различные амплитуды (рис. 7.1 а). Для простоты ниже мы будем считать, что линия усиления имеет прямоугольную форму и соответственно амплитуды мод одинаковы, т. е.  $E_m = E_0$  (рис. 7.1 б).

В том случае, когда моды имеют случайные фазы  $\varphi_m$ , распределённые на интервале  $(0, 2\pi)$ , электрическое поле флуктуирующего лазерного

излучения может быть представлено в виде

$$E_{\text{фл}}(t) = \sum_{m=-n}^n E_0 \cos [(\omega_0 + m\Delta\omega)t + \varphi_m], \quad (7.1)$$

где  $\omega_0$  есть частота центральной моды с индексом  $m = 0$ , а  $\Delta\omega = \pi c/L$  есть частотный интервал между соседними модами. Отметим, что поле (7.1) является периодическим с периодом  $T = 2\pi/\Delta\omega$  поскольку частота центральной продольной моды пропорциональна целому числу  $q$  межмодовых интервалов  $\Delta\omega$ , т. е.  $\omega_0 = q\Delta\omega = (\pi c/L)q$ .

Поле (7.1) удобно переписать в виде, в котором явно выделены осцилляции на оптической частоте,

$$E_{\text{фл}}(t) = (a^2 + b^2)^{1/2} \cos(\omega_0 t + \arctan(b/a)), \quad (7.2)$$

где

$$a = \sum_{m=-n}^n \cos(m\Delta\omega t + \varphi_m),$$

$$b = \sum_{m=-n}^n \sin(m\Delta\omega t + \varphi_m).$$

Интенсивность такого флуктуирующего поля есть

$$I_{\text{фл}}(t) = \text{const} \cdot (a^2 + b^2). \quad (7.3)$$

Как можно видеть из этого выражения интерференция мод со случайными фазами приводит к флуктуациям интенсивности лазерного излучения на интервале времени  $T$ . В качестве примера на рис. 7.2 пунктирной линией показана интенсивность флуктуирующего лазерного излучения, образованного интерференцией 11 продольных мод со случайными фазами.

Положим теперь, что фазы продольных мод синхронизованы так, что разность фаз соседних мод постоянна:

$$\varphi_m - \varphi_{m-1} = \varphi. \quad (7.4)$$

В таком случае электрическое поле  $E(t)$  лазерного излучения может быть записано в виде

$$E(t) = \sum_{m=-n}^n E_0 \cos [(\omega_0 + m\Delta\omega)t + m\varphi]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=-n}^n E_0 \exp [i(\omega_0 + m\Delta\omega)t + im\varphi] + \text{к.с.}, \quad (7.5)$$

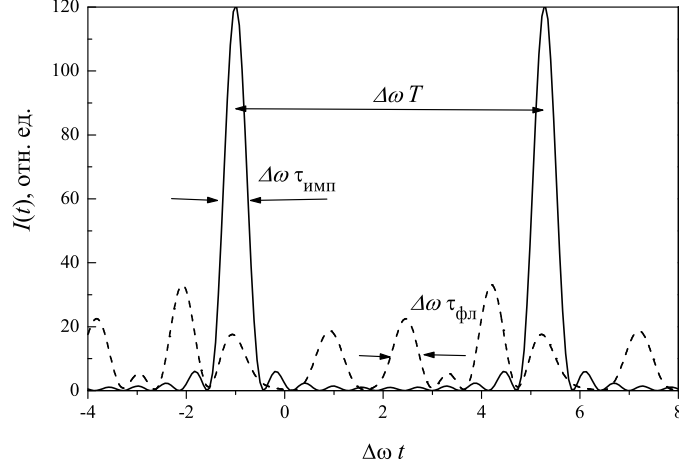


Рис. 7.2: Интенсивность лазерного излучения, образованного интерференцией 11 продольных мод со случайными фазами (штриховая линия) и синхронизированными фазами (сплошная линия).

где фаза центральной моды принята для определённости равной нулю,  $\varphi_0 = 0$ . Используя представление поля в виде суммы экспонент и воспользовавшись формулой для суммы геометрической прогрессии можно представить выражение (7.5) в форме, описывающей модулированное во времени излучение с несущей частотой  $\omega_0$ ,

$$E(t) = A(t) \cos \omega_0 t \quad (7.6)$$

и переменной амплитудой

$$A(t) = E_0 \frac{\sin \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) (\Delta \omega t + \varphi) \right]}{\sin \left[ \frac{1}{2} (\Delta \omega t + \varphi) \right]}. \quad (7.7)$$

Интенсивность полученного модулированного излучения есть

$$I(t) = \text{const} \cdot A^2(t). \quad (7.8)$$

Как можно видеть, модулированное излучение состоит из бесконечной последовательности импульсов, максимумы которых возникают в моменты времени, когда знаменатель выражения (7.7) обращается в нуль (рис. 6.2). Интервал времени между соседними импульсами есть

$$T = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2L}{c},$$

т. е. как и ожидалось определяется временем обхода лазерным светом резонатора длиной  $L$ . Длительность отдельного лазерного импульса есть

$$\tau_{\text{имп}} \simeq \frac{2\pi}{(2n+1)\Delta\omega} = \frac{T}{2n+1} = \frac{2\pi}{\Delta\omega_{\text{ус}}},$$

где полная ширина спектра излучения, определяемая шириной линии усиления,  $\Delta\omega_{\text{ус}} = (2n+1)\Delta\omega$ .

Типичные длительности импульсов излучения в лазерах с синхронизированными модами составляют значения от нескольких наносекунд до десятков фемтосекунд. Например, при длине лазерного резонатора  $L = 15$  см интервал времени между соседними импульсами  $T \simeq 1$  нс. Для лазера с числом продольных мод  $N = 2n+1 = 1000$  длительность отдельного импульса составляет величину  $\tau_{\text{имп}} \simeq 1$  пс. Такой короткий импульс имеет весьма малую пространственную длину  $l = c\tau_{\text{имп}} \simeq 0.3$  мм.

## 7.2 Активная и пассивная синхронизация мод

Известные методы синхронизации мод разделяются на методы активной и пассивной синхронизации.

Активная синхронизация мод осуществляется введением в резонатор многомодового лазера модулятора излучения, создающего периодические во времени потери. Когда частота модуляции потерь совпадает с межмодовым интервалом, происходит параметрическая раскачка соседних мод, что приводит к синхронизации (захвату) их фаз. При таком способе синхронизации, называемом амплитудно-модуляционной синхронизацией мод фазы мод связываются соотношением (7.4). Синхронизация мод может возникать и при модуляции длины резонатора. Такой метод называют частотно-модуляционной синхронизацией мод.

Пассивная синхронизация мод осуществляется с помощью нелинейного просветляющегося поглотителя. В этом случае импульсы лазерного излучения возникают как вследствие модуляции добротности так и вследствие возникновения между модами определённых фазовых соотношений.

Развитие генерации при активной и пассивной синхронизации мод происходит различным образом. В случае активной синхронизации вначале возникает генерация на одной моде, расположенной вблизи центра линии усиления. Затем возникает генерация на двух соседних модах, получивших в результате модуляции значения фаз в соответствии с соотношением (7.4). Рядом с ними возникают новые моды с фазами, соот-

ветствующими соотношению (7.4), и так до тех пор, пока не заполнится вся полоса усиления активной среды.

При пассивной синхронизации мод генерация начинается сразу на всех модах, имеющих вначале произвольные фазы. Соответственно, возникающее излучение имеет сначала ярко выраженный флуктуационный характер. Затем фазы мод изменяются так, что разность фаз соседних мод приобретает определённое значение. Постепенное сфазирование мод сопровождается увеличением интенсивности одного из флуктуационных пиков с одновременным уменьшением интенсивностей других пиков. В результате этого процесса на каждом периоде  $T = 2L/c$  возникает один ультракороткий импульс.

Лазеры с синхронизованными модами могут работать как при импульсной, так и непрерывной накачке. При импульсной накачке для синхронизации мод часто применяют электрооптический модулятор в виде ячейки Поккельса или кювету с насыщающимся поглотителем. При непрерывной накачке синхронизация мод часто осуществляется либо с помощью насыщающегося поглотителя, либо с помощью акустооптического модулятора.

### 7.3 Получение ультракоротких лазерных импульсов

Для получения ультракоротких лазерных импульсов создаются условия при которых комбинация фазовой самомодуляции и отрицательной дисперсии групповой скорости приводит к сокращению длительности импульса по мере его распространения через оптические элементы внутри резонатора лазера.

Такие методы позволили получить лазерные импульсы длительностью всего несколько фс, т.е. длительностью близкой к фундаментальному пределу - длине волны лазерного излучения. Столь короткая длительность лазерных импульсов позволяет даже при умеренной энергии импульса получать весьма высокую мощность оптического излучения. Так, при энергии импульса 1 Дж и длительности 10 фс мощность оптического импульса составляет  $10^{14}$  Вт.

# Глава 8

## Газовые лазеры

### 8.1 Гелий-неоновый лазер

Первый газовый лазер, а также одновременно первый лазер непрерывного действия был создан Джаваном и др. (Javan, Bennett and Herriott, 1960). Рабочей средой He-Ne лазера является смесь атомных газов He и Ne при типичных давлениях 0,1 Тор He и 1 Тор Ne, находящаяся в условиях газового разряда. Электроны газового разряда при столкновениях возбуждают атомы Ne в высокоэнергетичные состояния (рис. 8.1). При каскадных переходах вниз атомы Ne накапливаются в метастабильных состояниях  $2^3S_1$  и  $2^1S_0$ , имеющих соответственно времена жизни  $10^{-4}$  с и  $5 \cdot 10^{-6}$  с. Поскольку данные метастабильные состояния атома Ne близки по энергии к состояниям 2S и 3S атома Ne, то атомы Ne при неупругих столкновениях с атомами Ne эффективно возбуждают атомы Ne в эти два состояния. Например, разность энергий состояния  $2^3S$  атома Ne и состояния 2S атома Ne составляет всего  $400 \text{ см}^{-1}$ . Эта небольшая величина энергии легко преодолевается тепловой энергией атомов при температуре газового разряда.

Наиболее эффективными являются три лазерных перехода. Переход атомов Ne из состояния 3S в состояние 2P приводит к лазерной генерации на длине волны  $\lambda = 0,63 \text{ мкм}$ , переход атомов Ne из состояния 3S в состояние 3P - к генерации на длине волны  $\lambda = 3,39 \text{ мкм}$ , а переход атомов Ne из состояния 2S в состояние 2P - к генерации на длине волны  $\lambda = 1,15 \text{ мкм}$ .

Отметим, что основное состояние атома Ne отвечает электронной конфигурации  $1s^2$ , первые возбуждённые состояния  $2^3S_1$  и  $2^1S_0$  отвечают конфигурации  $1s2s$ . Состояния атома Ne хорошо описываются приближением LS-связи. В данном приближении переходы из состояний  $2^3S_1$  и

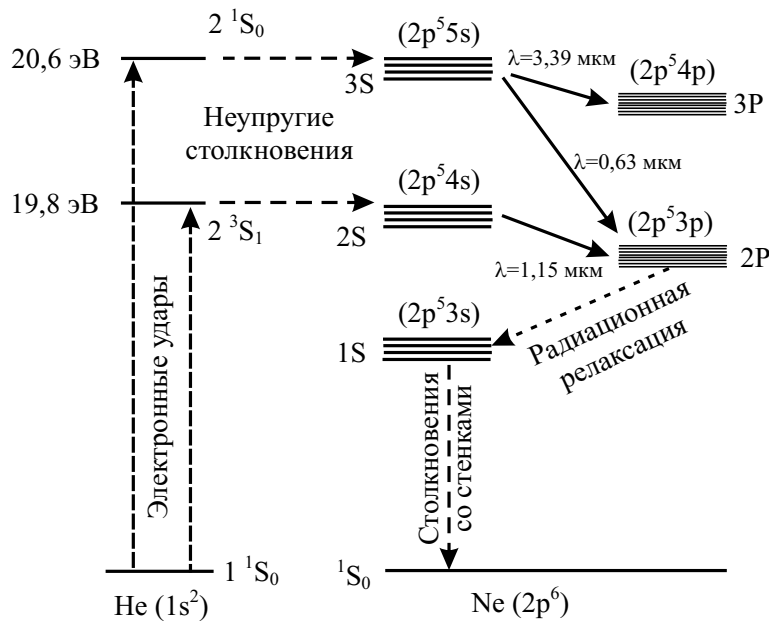


Рис. 8.1: Нижние уровни атомов неона и гелия, используемые в He-Ne лазере.

$2^1S_0$  в основное состояние  $1^1S_0$  запрещены, что объясняет большое время жизни этих метастабильных состояний.

Состояния атома Ne хорошо описываются приближением промежуточной  $jl$ -связи. Основное состояние атома Ne принадлежит конфигурации  $2p^6$  (полное обозначение конфигурации  $1s^2 2s^2 2p^6$ ). Группы состояний  $1S$ ,  $2S$  и  $3S$  (в обозначениях Пашена) содержат по четыре уровня и принадлежат конфигурациям  $2p^5 3s$ ,  $2p^5 4s$  и  $2p^5 5s$ . Группы состояний  $2P$  и  $3P$  содержат по десять уровней и принадлежат конфигурациям  $2p^5 3p$  и  $2p^5 4p$ .

Наиболее сильными являются лазерные линии с длинами волн  $\lambda = 0,63 \mu\text{m}$  и  $\lambda = 1,15 \mu\text{m}$ . Для этих линий конечными являются состояния группы  $2P$ , которые радиационно распадаются в группу метастабильных состояний  $1S$  с временем порядка 10 нс. Это время существенно короче времён радиационного распада групп состояний  $2S$  и  $3S$  в группы состояний  $2P$ , которые имеют порядок 100 нс. Последнее обстоятельство объясняет существование инверсной населённости между состояниями групп  $2S$ ,  $3S$  и состояниями группы  $2P$ . Подобные же соображения объясняют образование инверсной населённости между состояниями групп  $3S$  и  $3P$ .

В работе He-Ne лазера важную роль играют метастабильные состояния  $1S$ . При достаточно длительной накачке населённость состояний



$1S$  может стать достаточно большой, чтобы фотоны, излучаемые на переходах  $2P \rightarrow 1S$ , поглощались на обратных переходах  $1S \rightarrow 2P$ . Такой процесс, называемый пленением излучения, приводит к увеличению эффективного времени жизни состояний  $2P$  и соответствующему уменьшению инверсной населённости. Данный нежелательный процесс может однако подавляться благодаря опустошению метастабильных состояний  $1S$  при столкновениях атомов Ne со стенками газоразрядной трубки. Если смесь газов свободна от других примесей, то единственным механизмом перевода атомов Ne в основное состояние являются столкновения со стенками трубки. Именно по этой причине величина усиления He-Ne лазера обратно пропорциональна диаметру трубки.

Коэффициент усиления He-Ne лазера различен для разных лазерных переходов и естественно зависит от давления и состава лазерной смеси. Для инфракрасного перехода с длиной волны  $\lambda = 3,39$  мкм типичное значение коэффициента усиления есть  $g \simeq 1 \text{ см}^{-1}$ , а для перехода с длиной волны в красной области  $\lambda = 0,63$  мкм коэффициент усиления  $g \simeq 10^{-3} \text{ см}^{-1}$ .

## 8.2 Аргоновый лазер

Аргоновый лазер эффективно работает при разряде в чистом аргоне. Возбуждение ионов  $\text{Ar}^+$  обеспечивается их многократными столкновениями с электронами. Существование такого механизма возбуждения прямо следует из того факта, что при средней энергии электронов около 4 эВ ионы аргона возбуждаются в состояния с энергией около 20 эВ. Аргоновый лазер может работать на многих переходах в области длин волн 450-520 нм. Некоторые лазерные переходы показаны на рис. 8.2. Наиболее сильным является лазерный переход с длиной волны 490 нм. Лазер может работать в непрерывном режиме при весьма высокой мощности до нескольких сотен Вт.

В атоме аргона основное состояние принадлежит к конфигурации  $3p^6$  (полное обозначение конфигурации  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$ ). В ионе  $\text{Ar}^+$  основное состояние относится к конфигурации  $3p^5$  (полное обозначение  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$ ). Первые возбуждённые состояния иона  $\text{Ar}^+$  относятся к конфигурациям  $3p^4 4s$  и  $3p^4 4p$ .

Одним из факторов, обеспечивающих высокую мощность излучения аргонного лазера, является высокая скорость опустошения нижних уровней лазерных переходов. Уровни конфигурации  $3p^4 4s$  опустошаются вследствие вакуумного ультрафиолетового излучения на длине волны 72 нм. Радиационные времена жизни этих уровней составляет около 1 нс, бу-

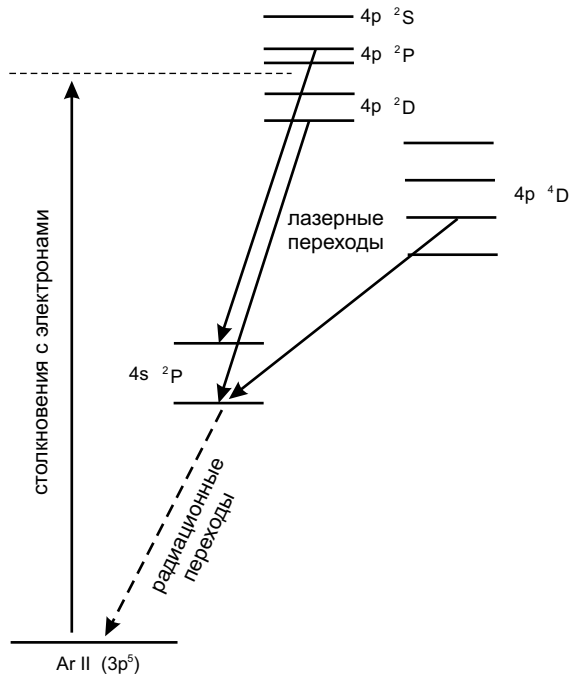


Рис. 8.2: Схема нижних уровней иона аргона и некоторые лазерные переходы, используемые в работе аргонового лазера.

лучи на порядок короче радиационных времён жизни верхних состояний лазерных переходов  $3p^44p$ .

Коэффициент усиления аргонового лазера на длине волны  $\lambda = 490$  нм имеет значение  $g = 0,02 \text{ см}^{-1}$ .

### 8.3 Лазер на смеси $\text{CO}_2 - \text{N}_2$

Газовый  $\text{CO}_2$  лазер, рабочей средой которого является смесь молекул  $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ , был создан Пателом (Patel, 1964). В данном лазере генерация осуществляется на инфракрасных переходах между колебательно-вращательными состояниями молекул  $\text{CO}_2$ .

Линейная молекула  $\text{CO}_2$  имеет три типа колебаний: симметричное с частотой  $\nu_1 = 1388 \text{ см}^{-1}$ , дважды вырожденное деформационное с частотой  $\nu_2 = 667 \text{ см}^{-1}$  и асимметричное с частотой  $\nu_3 = 2349 \text{ см}^{-1}$  (рис. 8.3). Соответственно отдельное колебательное состояние молекулы  $\text{CO}_2$  определяется тремя колебательными квантовыми числами  $(v_1, v_2^l, v_3)$ , где каждое квантовое число  $v_1, v_2, v_3$  определяет возбуждённое состояние соответствующего колебания с частотой  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Число  $l = 0, 1, \dots$ , стоящее над колебательным квантовым числом  $v_2$ , определяет значение  $l\hbar$

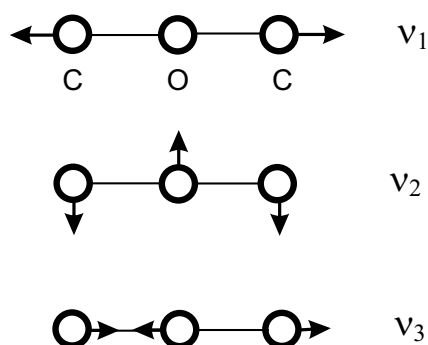


Рис. 8.3: Симметричное, деформационное и асимметричное колебания молекулы  $\text{CO}_2$ .

так называемого колебательного момента молекулы  $\text{CO}_2$ , возникающего вследствие суперпозиции вырожденных состояний с разными фазами колебаний.

Возбуждение молекул  $\text{CO}_2$  осуществляется посредством резонансной передачи энергии возбуждения от колебательных состояний молекул  $\text{N}_2$ , возбуждённых при столкновениях с электронами в газовом разряде. Схемы уровней молекул  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$  показаны на рис. 8.4.

Молекулы  $\text{N}_2$ , возбуждённые в колебательные состояния  $v = 1, 2, \dots$ , имеют весьма большое время жизни порядка 0,1 с при давлении газовой смеси в несколько Тор. Эти состояния теряют энергию возбуждения главным образом при столкновениях с другими молекулами и со стенками газовой кюветы. В состоянии  $v = 1$  может находиться около 20% молекул  $\text{N}_2$ . Это состояние молекулы  $\text{N}_2$  весьма близко к колебательному состоянию  $00^01$  молекулы  $\text{CO}_2$ . Отличие энергий этих состояний составляет всего  $18 \text{ см}^{-1}$ , в то время как при рабочей температуре разряда около 400 К тепловая энергия молекул составляет величину порядка  $300 \text{ см}^{-1}$ . Благодаря столь малой разности энергий возбуждённых состояний молекул  $\text{N}_2$  и  $\text{CO}_2$  состояние  $00^01$  молекулы  $\text{CO}_2$  эффективно заселяется при столкновениях молекул  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$ .

Генерация излучения в  $\text{CO}_2$  лазере осуществляется на колебательно-вращательных переходах полосы  $00^01 - 10^00$  и полосы  $00^01 - 02^00$ . В пределах каждой из полос генерация может происходить на любом переходе, удовлетворяющем правилам отбора. Так, радиационные переходы с вращательных уровней колебательного состояния  $00^01$  на вращательные уровни колебательного состояния  $10^00$  возможны либо при увеличении вращательного квантового числа  $J$  на единицу ( $P(J)$  переходы), либо при уменьшении числа  $J$  на единицу ( $R(J)$  переходы). Примеры таких разрешённых излучательных переходов показаны на рис. 8.5.

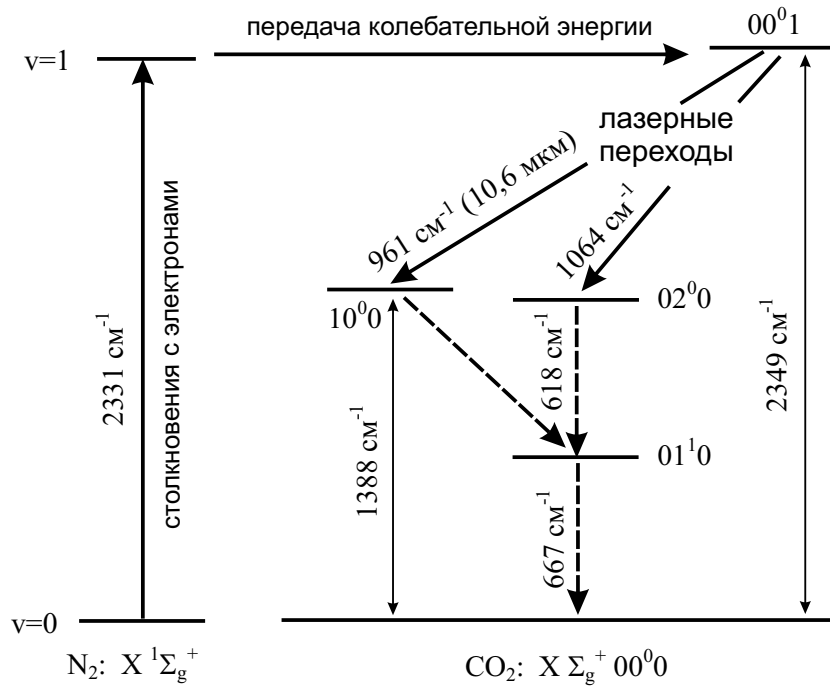


Рис. 8.4: Схема уровней молекул  $\text{CO}_2$  и  $\text{N}_2$ , используемых в газовом лазере на смеси  $\text{CO}_2 - \text{N}_2$ . Пунктирные линии показывают каналы столкновительной релаксации колебательно-возбуждённых молекул  $\text{CO}_2$ .

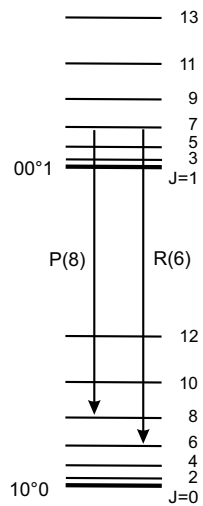


Рис. 8.5: Вращательные уровни молекулы  $\text{CO}_2$  в колебательных состояниях  $10^0$  и  $00^1$  и примеры радиационных переходов.

Для эффективного опустошения нижних лазерных уровней в газовую смесь добавляется атомарный гелий. Молекулы  $\text{CO}_2$ , оказавшиеся на нижних уровнях лазерных переходов, при столкновениях переходят в состояние  $01^10$ , откуда при столкновениях с атомами He переходят в основное состояние  $00^00$ .

Система  $\text{CO}_2\text{—N}_2$  является одной из наиболее эффективных лазерных систем. Наиболее сильной является лазерная линия на переходе  $P(18)$ , имеющая длину волны 10,6 мкм. Выходная мощность на этой линии составляет примерно 10% от потребляемой лазером электрической мощности.

## 8.4 Эксимерные лазеры

Рабочей средой эксимерных лазеров являются смеси инертных газов, таких как аргон, криптон, ксенон, с галоидными газами, такими как фтор, хлор, бром. В обычных условиях в таких смесях не происходит образования новых молекул из-за низкой химической активности инертных газов. Однако, когда одна из указанных газовых сред возбуждается электрическим разрядом, происходит образование электронно-возбуждённых эксимерных молекул, таких как  $\text{ArF}$ ,  $\text{KrF}$ ,  $\text{XeF}$ . Возбуждённые состояния таких молекул являются нестабильными и за времена порядка нескольких наносекунд распадаются обратно на два изолированных атома. Таким образом, в эксимерных лазерах инверсия населённости создаётся просто посредством образования возбуждённых молекул, которых бы не было в отсутствие электрического разряда (рис. 8.6). Само слово эксимер было образовано из английского словосочетания "excited dimer", означающего возбуждённую двухатомную молекулу.

Обычно эксимерные молекулы образуются с весьма высокой эффективностью порядка 30%. Соответственно усиление в среде эксимерного лазера весьма значительно. Быстрый распад эксимерных молекул приводит к весьма коротким импульсам лазерного излучения с типичной длительностью порядка 10-100 нс. Эксимерные лазеры излучают в ультрафиолетовой области спектра, типично в области длин волн от 350 нм до 200 нм. Энергия в импульсе обычно составляет около 1 Дж при длительности импульса 10 нс, так что мощность импульсного излучения составляет величину порядка 100 МВт.

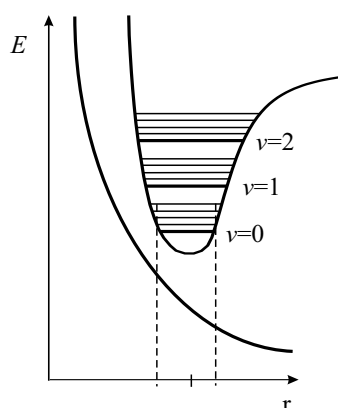
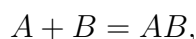


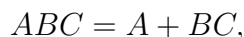
Рис. 8.6: Электронные состояния двухатомной молекулы-эксимера. Штриховые линии показывают область расстояний между атомами, в которой осуществляются переходы электронно-возбуждённых молекул в нестабильные нижние состояния (связанно-свободные переходы).

## 8.5 Химические газовые лазеры

В химических лазерах химические реакции приводят к образованию инверсной населённости, ответственной за генерацию лазерного излучения. Обычно в химических лазерах используются экзотермические реакции между газообразными веществами. Различают ассоциативные и диссоциативные реакции. В экзотермической ассоциативной реакции, описываемой общим уравнением вида



часть энергии химической реакции переходит в электронную или колебательно-вращательную энергию молекулы  $AB$ . В экзотермической диссоциативной реакции, описываемой общим уравнением вида



часть энергии химической реакции может перейти в электронную энергию атома  $A$  или колебательно-вращательную энергию молекулы  $BC$ .

Примером химического газового лазера является лазер на молекулах  $\text{HF}$ , работающий на длинах волн  $\lambda = 2,7 - 3,3$  мкм. В данном лазере электрический разряд в смеси молекулярного водорода  $\text{H}_2$  с молекуляр-

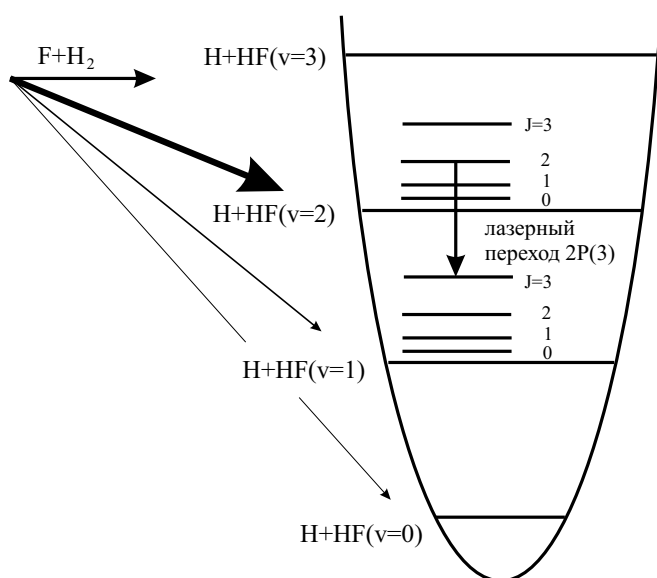
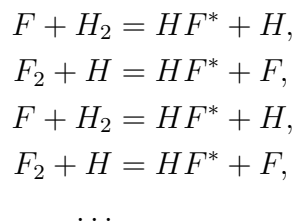


Рис. 8.7: Образование колебательно-возбуждённых молекул HF и один из сильных колебательно-вращательных переходов, ответственный за излучение HF-лазера. Толщины линий отражают скорости образования колебательно-возбуждённых молекул.

ным фтором  $F_2$  инициирует цепную химическую реакцию



в результате которой молекулы HF оказываются в возбуждённых колебательных состояниях  $HF^*$ .

Упрощённая схема химической реакции, приводящая к образованию колебательно-возбуждённых молекул  $HF^*$ , и несколько нижних колебательных уровней молекулы HF показаны на рис. 8.7. В результате указанной выше химической реакции образуются молекулы HF, распределённые по колебательным состояниям  $v = 0, 1, 2, 3$ . Наибольшей скоростью обладает процесс заселения колебательного состояния  $v = 2$ . В результате возникает инверсная населённость между колебательными состояниями  $v = 2$  и  $v = 1$ . HF-лазер может работать на многих колебательно-вращательных переходах. Наиболее интенсивной является линия  $2P(3)$ , отвечающая переходу из состояния  $v = 2, J = 2$  в состояние  $v = 1, J = 3$

Мощность химических газовых лазеров может достигать весьма высоких значений, поскольку по-существу ограничена только величиной объёма активной среды. Так, в качестве примера можно отметить лазер на молекулах  $DF$ , который способен создавать непрерывное излучение в инфракрасной области от 3,6 до 4,2 мкм мощностью в несколько МВт в течение минуты.



## Глава 9

# Лазеры на люминесцентных кристаллах и стёклах

### 9.1 Рубиновый лазер

Исторически рубиновый лазер оказался самым первым лазером, экспериментально продемонстрировавшим практическую осуществимость идеи усиления света посредством стимулированного испускания излучения (Maiman, 1960). Активной средой рубинового лазера является кристалл рубина. Рубином называют кристалл  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , содержащий в качестве примесей ионы хрома  $\text{Cr}^{3+}$  в типичной концентрации около 0,05% по весу. Для обозначения кристалла рубина обычно используется комбинация химических символов  $\text{Al}_2\text{O}_3 : \text{Cr}^{3+}$ .

Свободный ион  $\text{Cr}^{3+}$  имеет электронную конфигурацию с не заполненной  $3d$  оболочкой  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3$ . Происхождение данной оболочки понятно из того, что атом хрома, находящийся в основном состоянии, имеет оболочку  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^5 4s$ . Удаление трёх внешних электронов переводит внешнюю конфигурацию атома хрома  $3d^5 4s$  во внешнюю конфигурацию иона хрома  $3d^3$ .

Состояния свободного иона хрома характеризуются орбитальным моментом импульса внешних электронов  $\mathbf{L}$ , их спиновым моментом  $\mathbf{S}$  и полным моментом  $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ . Основное состояние свободного иона хрома может быть найдено исходя из правила Хунда, устанавливающего значения квантовых чисел, при которых энергия электронной оболочки минимальна. Согласно данному правилу в основном состоянии: 1) значение  $S$  равно максимальной величине, допускаемой принципом Паули; 2) значение  $L$  равно максимальной величине, допускаемой значением  $S$  и принципом Паули; 3) для оболочек, заполненных менее чем наполовину, когда

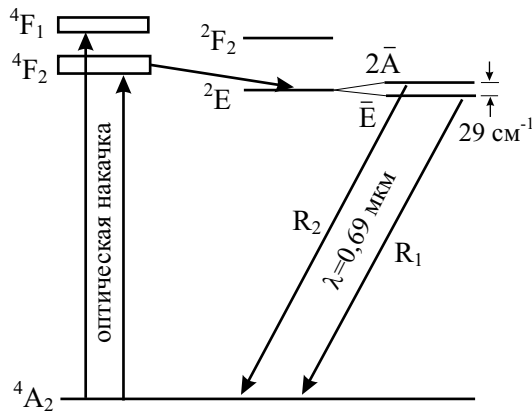


Рис. 9.1: Схема энергетических уровней ионов хрома, используемых в рубиновом лазере, и лазерные переходы.

число электронов меньше чем  $2l + 1$ , значение  $J = L - S$ , а для оболочек, заполненных более чем наполовину, когда число электронов больше чем  $2l + 1$ , значение  $J = L + S$ . Согласно 1) для трёх электронов максимальное значение проекции спинового момента есть  $S = 3 \cdot (1/2) = 3/2$ . Далее, для трёх электронов, находящихся в состояниях с  $l = 2$  и имеющих одинаковые значения проекций спинов  $m_s = 1/2$ , максимальное возможное значение  $L$  согласно 2) достигается при различных значениях проекций орбитального момента  $m_l = 0, 1, 2$  составляя значение  $L = \sum m_l = 3$ . Наконец, поскольку при 3 электронах оболочка заполнена меньше чем наполовину,  $3 < (2l + 1) = 5$ , то согласно 3)  $J = L - S = 3/2$ . Таким образом, основное состояние иона хрома  $\text{Cr}^{3+}$  есть  ${}^4F_{3/2}$ .

Когда ион  $\text{Cr}^{3+}$  находится в кристалле, то большие средние радиусы орбит внешних электронов оболочки  $3d^3$  приводят к их сильному взаимодействию с кристаллическим полем решётки. Сильное поле решётки разрывает  $LS$ -связь поскольку взаимодействие электронов с кристаллическим полем решётки оказывается сильнее спин-орбитальной связи. В результате состояния иона в кристалле существенно отличаются от состояний свободного иона. Для ионов группы железа, имеющих незаполненные оболочки  $3d$ , энергия спин-орбитального взаимодействия имеет порядок  $100 \text{ cm}^{-1}$ , в то время как энергия взаимодействия с полем кристалла имеет порядок  $10^4 \text{ cm}^{-1}$ . Схема низших энергетических уровней иона  $\text{Cr}^{3+}$  в кристалле  $\text{Al}_2\text{O}_3$  показана на рис. 9.1. Обозначения уровней отвечают классификации, принятой для ионов, связанных в кристаллической матрице.

Накачка кристалла рубина обычно осуществляется широким спектром излучения интенсивной лампы-вспышки. Цикл квантовых переходов

дов ионов  $\text{Cr}^{3+}$  в кристалле  $\text{Al}_2\text{O}_3$  выглядит следующим образом. Широкополосный свет накачки возбуждает ионы из основного состояния  ${}^4A_2$  в состояния  ${}^4F_2$  и  ${}^4F_1$ , которые фактически являются полосами, состоящими из многих квантовых состояний. Затем следует быстрый безизлучательный переход ионов с характерным временем 100 нс в дублетное состояние  ${}^2\bar{E}$ , включающее уровни  $\bar{E}$  и  $2\bar{A}$ . Вообще говоря, каждый из этих уровней мог бы быть верхним лазерным уровнем. Фактически, из-за быстрой термализации состояний  $\bar{E}$  и  $2\bar{A}$  населённость уровня  $\bar{E}$  обычно значительно выше населённости уровня  $2\bar{A}$ . Кроме того, матричный элемент перехода  $\bar{E} - {}^4A_2$  несколько больше матричного элемента перехода  $2\bar{A} - {}^4A_2$ . По этой причине лазерная генерация обычно имеет место на переходе  $R_1$  из состояния  $\bar{E}$  в основное состояние  ${}^4A_2$ . Время жизни верхнего лазерного уровня  $\bar{E}$  составляет 3 мс. Основное состояние  ${}^4A_2$  состоит из двух подуровней с интервалом между ними  $0,38 \text{ см}^{-1}$ . Таким образом, с принципиальной точки зрения рубиновый лазер работает по трёхуровневой схеме. Лазерное излучение на переходе  $R_1$  имеет длину волны  $0,69 \text{ мкм}$ .

Отметим, что коэффициент поглощения рубина на длинах волн накачки составляет  $2\text{-}3 \text{ см}^{-1}$ . Соответственно при двустороннем освещении светом накачки диаметр рубиновых стержней выбирается не превышающим  $2 - 2,5 \text{ см}$ . Полосы накачки, отвечающие поглощению из основного состояния в состояния  ${}^4F_2$  и  ${}^4F_1$ , имеют центры при длинах волн  $560 \text{ нм}$  (зелёная полоса) и  $410 \text{ нм}$  (фиолетовая полоса). Ширины полос накачки составляют около  $100 \text{ нм}$ . Пороговое значение объёмной плотности накачки в зелёной полосе составляет около  $3 \text{ Дж/см}^2$ . Коэффициент усиления в рубиновом лазере достигает значения  $g \simeq 0,2 \text{ см}^{-1}$ .

Приведём оценки типичных параметров рубинового лазера, накачиваемого импульсной лампой-вспышкой. Рассмотрим лазер со следующими параметрами: плотность активных частиц-ионов  $\text{Cr}^{3+}$   $N_0 = 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ , время жизни верхнего лазерного уровня  $\bar{E}$   $\tau_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ с}$ , длительность импульса лампы-вспышки  $\tau_p = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ . Пороговая плотность активных частиц на уровне 2 может быть оценена как примерно половина полной плотности частиц, т.е.  $N_2 = \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$ .

Пусть падающий на кристалл поток оптического излучения лампы-вспышки имеет плотность энергии на единицу поверхности и единичный интервал частот  $S(\nu)$ , т.е. оптический поток характеризуется в единицах  $\text{Вт/см}^2 \cdot \text{Гц}$ . Тогда при коэффициенте поглощения кристалла  $\alpha(\nu)$  объёмная плотность поглощённой энергии, характеризуемая в единицах  $\text{Дж/см}^3$ , есть  $W = S(\nu)\alpha(\nu)\Delta\nu\tau_p$ . При квантовой эффективности возбуждения  $\eta(\nu)$ , т.е. вероятности возбуждения иона на верхний лазерный уровень при поглощении кристаллом одного фотона света накачки, плот-

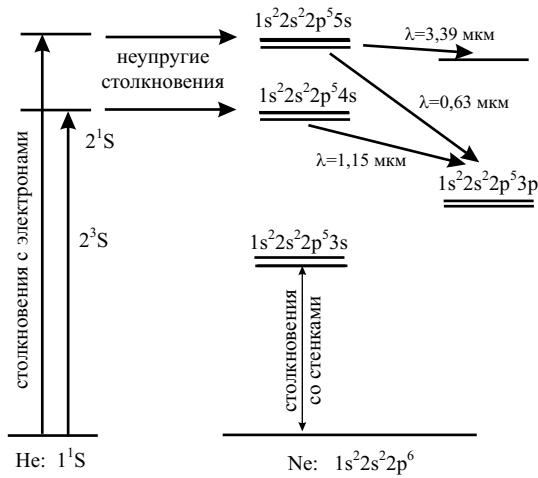


Рис. 9.2: Схема импульсного рубинового лазера.

ность ионов на верхнем лазерном уровне есть  $N_2 = \eta(\nu)S(\nu)\alpha(\nu)\Delta\nu\tau_p/h\nu$ . При коэффициенте поглощения  $\alpha(\nu) = 1 \text{ см}^{-1}$  и квантовой эффективности  $\eta(\nu) = 1$  поток энергии накачки  $3 \text{ Дж/см}^2$ . Отсюда следует оценка на поток энергии лампы. При падении на кристалл 20% излучения лампы и при 10% использовании спектра лампы получаем оценку на поток энергии лампы на единицу поверхности кристалла  $3/0,2/0,1 = 150 \text{ Дж/см}^2$ . При КПД лампы-накачки 50% поток энергии от розетки должен составлять соответственно  $300 \text{ Дж/см}^2$ .

## 9.2 Неодимовые лазеры

Неодимовые лазеры имеют в качестве активных элементов кристаллические матрицы или стекла, содержащие в качестве примесей ионы  $\text{Nd}^{3+}$ . Первый неодимовый лазер, созданный Джонсоном и Нассау (Johnson and Nassau, 1961), содержал в качестве матрицы кристалл  $\text{CaWO}_4$ . Важнейшие неодимовые лазеры имеют в качестве матриц иттриево-алюминиевый гранат (YAG), имеющий химическую формулу  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ , и стёкла.

Редкоземельный ион  $\text{Nd}^{3+}$  имеет в основном состоянии электронную конфигурацию  $1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^64f^3$ . Данная конфигурация получается из электронной конфигурации основного состояния атома Nd  $1s^22s^22p^63s^23p^64s^23d^{10}4p^65s^24d^{10}5p^64f^46s^2$  после удаления трёх электронов. На рис. 9.3 показаны нижние уровни энергии иона  $\text{Nd}^{3+}$  в матрице  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ .

В том случае, когда ион редкоземельного элемента находится в кристалле, типичная энергия взаимодействия иона с полем кристалла состав-

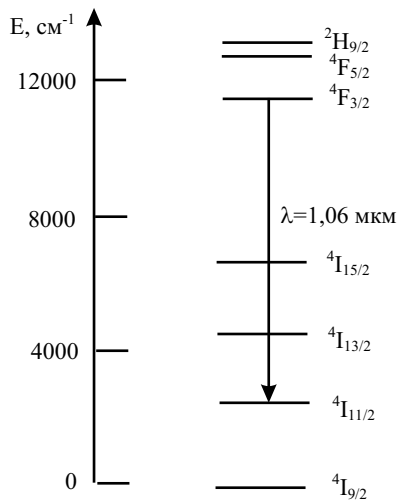


Рис. 9.3: Схема энергетических уровней  $\text{Nd}^{3+}$  в матрице  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ .

ляет величину порядка  $100 \text{ см}^{-1}$ , в то время как энергия спин-орбитального взаимодействия имеет порядок  $10^3 \text{ см}^{-1}$ . В связи с этим в низшем приближении квантовое число полного момента  $J$  достаточно хорошо характеризует состояния иона в кристалле. Отличие состояний иона в кристалле от состояний свободного иона состоит в сдвигах уровней и расщеплении уровней на  $(2J + 1)$  подуровней с интервалами между ними порядка  $100 \text{ см}^{-1}$ .

Обозначение уровней на рис. 9.3 соответствует схеме  $LS$ -связи. Лазерный переход связывает состояния  ${}^4F_{3/2}$  и  ${}^4I_{11/2}$  и имеет длину волны  $1,06 \text{ мкм}$ . Нижний уровень лазерного перехода  ${}^4I_{11/2}$  лежит выше основного состояния  ${}^4I_{9/2}$  на величину примерно  $2000 \text{ см}^{-1}$ . Поэтому даже при комнатной температуре населённость уровня  ${}^4I_{11/2}$  пренебрежимо мала и лазер работает по четырёхуровневой схеме. Соответственно, неодимовые лазеры имеют весьма низкие пороговые мощности накачки.

Накачка неодимовых лазеров осуществляется через полосы поглощения в области  $13\,000 - 20\,000 \text{ см}^{-1}$ . Ионы, возбуждённые в эту область энергий, релаксируют с квантовой эффективностью, близкой к единице, на долгоживущий уровень  ${}^4F_{3/2}$ . Распад последнего происходит радиационным образом с характерным временем порядка  $1 \text{ мс}$ . Лазер излучает на длине волны  $1,06 \text{ мкм}$ .

Коэффициент усиления составляет значения  $g = \dots$

### 9.3 Твердотельные лазеры с полупроводниковой накачкой

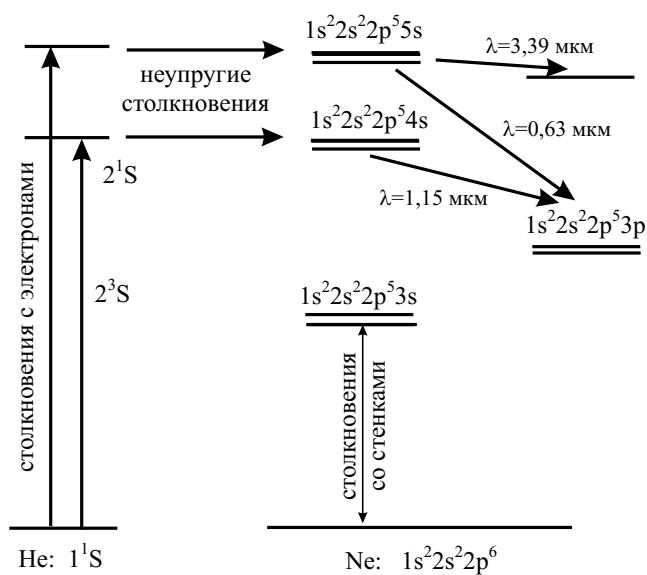
Наряду с традиционной ламповой накачкой твердотельных лазеров развитие лазерной техники приводит к постепенной замене ламповой накачки на накачку излучением полупроводниковыми лазерами. Использование узкополосных полупроводниковых излучателей для накачки твердотельных лазеров позволяет значительно повысить КПД, снизить тепловую нагрузку активных элементов, уменьшить габариты, позволяет использовать монолитные и полумонолитные конструкции, объединяющие в одном элементе активную среду, оптический резонатор и элементы управления.

Максимальная выходная мощность полупроводникового лазера с шириной  $p - n$  перехода около 100 мкм в непрерывном режиме составляет около 10 Вт. Значительно большие мощности, вплоть до нескольких киловатт, могут быть получены с помощью лазерных матриц, содержащих одновременно несколько тысяч лазерных диодов. Излучение лазерного диода может быть сфокусировано на площадку диаметром около 0,1 мм. Это позволяет уменьшить минимальный объём активной среды лазеров до  $10^{-5} - 10^{-6}$  см<sup>3</sup>, открывая возможности миниатюризации лазерных устройств. Определённую сложность здесь представляет различная расходимость излучения лазерных диодов в двух перпендикулярных плоскостях, что затрудняет использование сферической оптики для фокусировки излучения.

Используются две основных схемы оптической накачки: продольная (торцевая) накачка и поперечная накачка, показанные на рис. 9.4. Торцевая накачка обычно применяется для создания миниатюрных мало-мощных лазеров с мощностью до 1 Вт. При создании лазеров большой мощности применяется поперечная накачка, позволяющая использовать большие объёмы активных сред.

Монолитные чип-лазеры представляют собой короткие стержни длиной порядка 0,1-1 мм, возбуждаемые обычно продольной накачкой. На один из торцов кристалла наносится селективное зеркало, глухое на частоте генерации и имеющее высокое пропускание на длине волны накачки, а на другой торец - выходное зеркало. Выходная мощность таких лазеров достигает нескольких ватт в непрерывном режиме.

Разработаны многочисленные кольцевые чип-лазеры: традиционные кольцевые лазеры с дискретными элементами, монолитные и полумонолитные чип-лазеры. Следует отметить, что монолитные кольцевые одномодовые чип-лазеры обеспечивают предельно малые значения мгно-

Рис. 9.4: Схема энергетических уровней  $\text{Nd}^{3+}$  в матрице  $\text{Y}_3\text{Al}_5\text{O}_{12}$ .

венной ширины спектра излучения, близкие к теоретическому пределу, определяемому формулой Шавлова-Таунса (ссылка).

Получили распространение твердотельные лазеры на микросферах диаметром порядка 0,1-1 мм. В таких конструкциях обратная связь обеспечивается за счёт полного внутреннего отражения, а генерация имеет место на модах шепчущей галереи. В лазерах на микросферах резонатор имеет весьма высокую добротность порядка  $10^8 - 10^{10}$ , что обеспечивает весьма низкий порог генерации всего в несколько нановатт. В уникальных устройствах микролазеры работают при гелиевых температурах всего на нескольких активных ионах. Наряду с микросферами используются и микродиски.

Коэффициент усиления составляет значения  $g = \dots$

## 9.4 Твердотельные микролазеры

ppp

pppp





## Глава 10

# Жидкостные молекулярные лазеры

### 10.1 Лазеры на красителях

Лазеры на красителях занимают особое место благодаря их широкому использованию для получения когерентного излучения, перестраиваемого в широком диапазоне длин волн. По совокупности основных параметров - выходной мощности, КПД, диапазону перестройки длины волны излучения - они находятся вне конкуренции.

Активной средой лазеров на красителях являются растворы органических соединений, которые обычно называют растворами органических красителей. Следует отметить, что сложившееся название в значительной мере отражает историю создания лазеров этого типа. В ряде случаев в лазерах на красителях используют органические соединения, которые являются отбеливателями. По существу, в лазерной физике под красителями понимают органические соединения, имеющие сильные полосы поглощения и люминесценции в ближней УФ, видимой и ИК областях спектра.

В составе молекулы красителя как правило содержится бензольное кольцо  $C_6H_6$ , которое может сочетаться с другими шестичленными кольцами. Так, например, в молекуле красителя родамин 6Ж содержится четыре шестичленных кольца (рис. 10.1). Важная роль принадлежит концевым группам атомов типа  $NH_2$ ,  $N(CH_3)_2$ , которые как правило усиливают яркость цвета исходного соединения. Эти группы атомов, называемые ауксохромными группами, способствуют приобретению молекулой заряда и соответственно увеличению дипольного момента и коэффициента поглощения излучения.

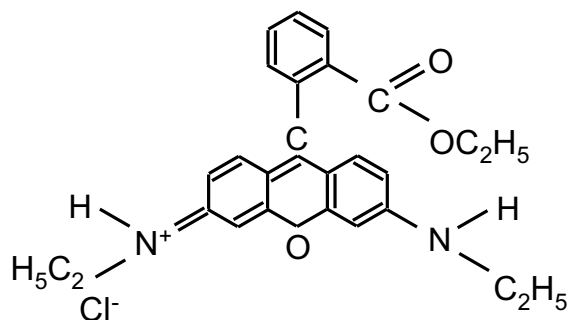


Рис. 10.1: Структурная формула красителя родамин 6Ж.

С коротковолновой стороны спектра длины волн излучения лазеров на красителях ограничены энергией связи атомов в молекулах красителей. Типичная энергия связи атома в молекуле красителя имеет порядок 100 ккал/моль, что соответствует значению длины волны примерно 200 нм. Излучение меньшей длины волны просто разрушает молекулу красителя.

Как известно, химическая связь в молекулах обеспечивается в результате перекрытия орбит валентных электронов. В теории химической связи различают  $\sigma$ - и  $\pi$ -связи и соответственно  $\sigma$ - и  $\pi$ -электроны. Орбиты  $\sigma$ -электронов локализованы у атомов, входящих в состав молекулы. Геометрически орбиты  $\sigma$ -электронов расположены в плоскости скелета молекулы красителя. Эти электроны как правило не участвуют в поглощении света молекулами красителей. Напротив, орбиты  $\pi$ -электронов не локализованы у отдельных атомов. Геометрически они расположены в плоскостях, перпендикулярных плоскости скелета молекулы.

Спектры поглощения растворов красителей связаны в основном с возбуждением одного из двух спаренных  $\pi$ -электронов, находящихся на внешней молекулярной орбитали и имеющих полный спин 0. В связи с этим спектр поглощения отвечает главным образом переходам молекулы между синглетными уровнями: из основного синглетного состояния  $S_0$  в возбуждённые синглетные состояния  $S_n$  (рис. 10.2). В случае нахождения на внешней молекулярной орбитали двух неспаренных  $\pi$ -электронов, имеющих суммарный спин 1, возникают триплетные состояния  $T_n$ . Переходы молекулы красителя между триплетными состояниями как правило дают малый вклад в наблюдаемые спектры поглощения. Интеркомбинационные переходы  $S - T$  с изменением спина как обычно запрещены правилами отбора. Запрет однако не является абсолютно строгим.

Вероятности переходов между электронно-колебательными состояниями подчиняются принципу Франка-Кондона, согласно которому пере-

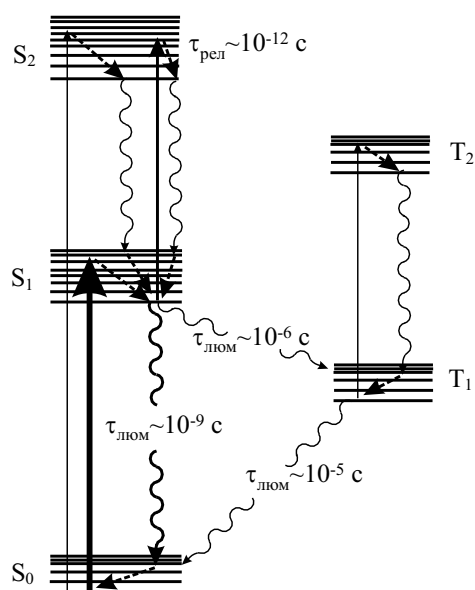


Рис. 10.2: Схема энергетических уровней молекулы родамин 6Ж и кинетика внутренних переходов. Прямые стрелки показывают процессы поглощения, волнистые стрелки - процессы люминесценции, наклонные пунктирные стрелки - процессы внутримолекулярной релаксации.

стройка внешней молекулярной орбитали осуществляется столь быстро, что электронный переход происходит при неизменном расположении ядер (рис. 10.3). Переходы между нижним и верхними электронными состояниями при комнатных температурах образуют широкие безструктурные полосы.

Важной особенностью кинетики внутренних переходов возбуждённой молекулы красителя является быстрый безизлучательный переход молекулы из возбуждённых электронных состояний  $S_n$  в первое возбуждённое состояние  $S_1$ . Квантовый выход люминесценции на переходах  $S_n \rightarrow S_1$  имеет весьма малое значение порядка  $10^{-6}$ . Напротив, квантовый выход люминесценции на переходе  $S_1 \rightarrow S_0$  составляет значительную величину порядка 0,1-0,9. Именно быстрая безизлучательная релаксация на первый возбуждённый уровень  $S_1$  объясняет закон Вавилова - независимость спектра люминесценции от спектра возбуждения.

Спектры поглощения и люминесценции родамина 6Ж растворённого в этаноле показаны на рис. 10.4.

Излучение накачки может перевести молекулу в возбуждённые состояния  $S_n$ . Переходу в первое возбуждённое состояние отвечает полоса поглощения с максимумом на длине волны 530 нм и сечением поглощения  $2,7 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup>. Времена переходов лежат в области  $10^{-12} - 10^{-13}$  с.

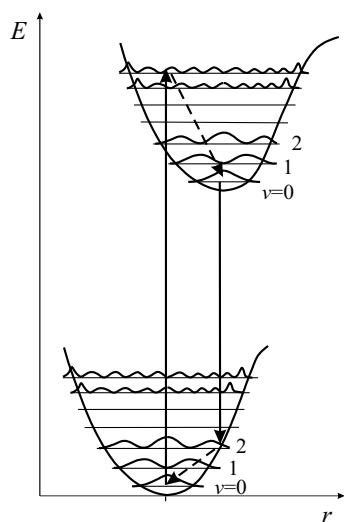


Рис. 10.3: Колебательные уровни сложной молекулы в основном и возбуждённом электронном состояниях и переходы, отвечающие согласно принципу Франка-Кондона поглощению и излучению фотонов.

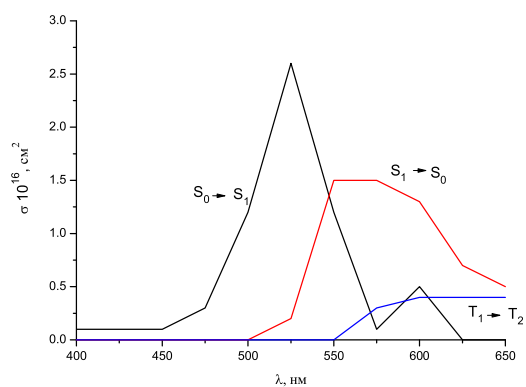


Рис. 10.4: Спектры поглощения и люминесценции красителя родамин 6Ж растворённого в этаноле при концентрации  $10^{-4}$  М/л.

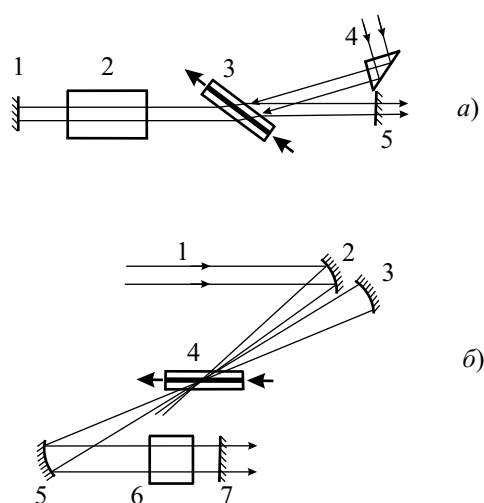


Рис. 10.5: а) Схема типичного импульсного лазера на красителе с продольным способом накачки, 1 - глухое зеркало, 2 - частотно-селективный элемент, 3 - кювета с красителем, 4 - излучение накачки, 5 - выходное зеркало. б) Схема типичного непрерывного лазера на красителе, 1 - излучение накачки, 2 - фокусирующее зеркало, 3, 5, 7 - зеркала резонатора, 4 - струя красителя, 6 - частотно-селективный элемент.

Примером накачки является возбуждение раствора родамина 6Ж УФ излучением азотного лазера на длине волны 337 нм или гармониками излучения рубинового лазера (347 нм) или лазера на иттриево-алюминиевом гранате (355 нм). Используются относительно высокоинтенсивные источники накачки с плотностью потока излучения порядка 1 МВт/см<sup>2</sup>. Время жизни на нижнем колебательном уровне электронного состояния  $S_0$  составляет 5,4 нс.

Лазер на красителе работает по четырёхуровневой схеме. Последняя включает следующие процессы: оптическую накачку - возбуждение молекул в электронное состояние  $S_1$ , безизлучательную релаксацию на нижний колебательный уровень состояния  $S_1$ , оптический переход  $S_1 \rightarrow S_0$ , отвечающий лазерному излучению, и безизлучательную релаксацию на нижний колебательный уровень состояния  $S_0$ . Отметим, что переходами молекул на триплетные уровни обычно можно пренебречь.

Типичные схемы лазеров на красителях показаны на рис. 10.5.

Фотохимическая стойкость красителей характеризуется квантовым выходом  $\gamma$ , определяемым как отношение числа молекул, давших продукты распада к числу молекул, поглотивших излучение. Квантовый выход обычно лежит в области  $10^{-2} - 10^{-3}$ .

Основные особенности лазеров на красителях. Широкая полоса усиления, определяемая переходом  $S_0 \rightarrow S_1$ , типично около 50 нм, и большое

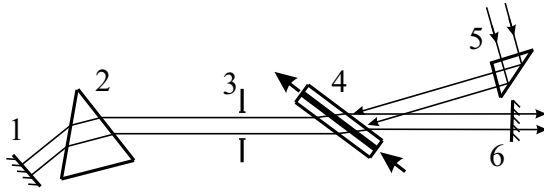


Рис. 10.6: Схема типичного дисперсионного резонатора перестраиваемого лазера на красителе, 1 - глухое зеркало, 2 - призма, 3 - диафрагма, 4 - кювета с красителем, 5 - излучение накачки, 6 - выходное зеркало.

сечение поглощения, типично на 2-3 порядка больше сечения поглощения ионов переходных металлов в твердотельных матрицах. Размер кюветы обычно мал для повышения плотности потока излучения накачки, фокусируемого в малый объём. Струя красителя обычно прокачивается для уменьшения влияния тепловых эффектов.

Коэффициент усиления составляет значения  $g = \dots$

## 10.2 Методы перестройки частоты

Для перестройки частоты лазера на красителе внутри резонатора располагают частотно-селективные элементы, такие как призмы, дифракционные решётки или оптические клины. Так, в ряде схем в качестве селективного элемента используется призма, обладающая угловой дисперсией  $\partial\varphi/\partial\lambda$  (рис. 10.6). При наличии дисперсионного элемента резонатор оказывается настроенным на высокое значение добротности только при определённом значении длины волны излучения  $\lambda_0$ , или иначе говоря, при определённом значении величины угловой дисперсии  $(\partial\varphi/\partial\lambda)_{\lambda_0}$ . Излучение с любой другой длиной волны распространяется уже под углом к оптической оси резонатора и соответственно испытывает дифракционные потери на диафрагме.

## Глава 11

# Однородные полупроводники

Одной из основных особенностей полупроводниковых материалов является наличие относительно широких разрешенных и запрещенных энергетических зон. Иногда полупроводники определяют как материалы у которых ширина запрещённой энергетической зоны лежит в области от нуля до 3 эВ. Другой важной особенностью полупроводников является зависимость энергии электрона от волнового вектора. Напомним, что квантовомеханическое движение электрона в периодической кристаллической решетке описывается блоховской волновой функцией, определенной волновым квазивектором. Пространственная периодичность структуры полупроводникового материала приводит к возникновению разрешенных и запрещенных энергетических зон электрона в кристаллической решетке. Напомним также, что возникновение зонной энергетической структуры хорошо иллюстрируется известной задачей Кронига-Пенни о движении частицы в периодическом потенциале.

Общепринято различать два типа полупроводников соответственно соотношению между физическими размерами полупроводника и де бройлевской длиной волны электронов. В однородном полупроводнике де бройлевская длина волны электронов много меньше физических размеров полупроводникового образца. В квантоворазмерных полупроводниках, включающих квантовые ямы, квантовые нити и квантовые точки, один, два или три размера полупроводникового образца сравнимы с де бройлевской длиной волны электронов. В настоящей главе рассматриваются свойства однородных полупроводников. Свойствам квантоворазмерных полупроводников посвящена глава 13.

## 11.1 Плотность электронных состояний

В объёмном полупроводниковом образце внешние электроны атомов де-локализованы во всём объёме полупроводника. Волновая функция  $\psi(\mathbf{r})$  электрона в полупроводниковом кристалле определяется уравнением Шрёдингера

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 + U(\mathbf{r})\right)\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (11.1)$$

где  $m_0$  есть масса свободного электрона, а  $U(\mathbf{r})$  есть периодический потенциал, созданный кристаллической решёткой. Решения уравнения Шрёдингера (11.1) описываются функциями Блоха

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (11.2)$$

где функции  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  имеют периодичность кристаллической решётки, а  $\mathbf{k}$  есть волновой вектор электрона. Собственные значения энергии электрона являются функциями вектора  $\mathbf{k}$  и принадлежат системе разрешённых энергетических зон. Самая высокая заполненная зона является валентной зоной, а следующая зона является зоной проводимости (рис. 11.1).

Любой локализованный электронный волновой пакет может быть описан линейной суперпозицией блоховских функций,

$$\psi(\mathbf{r}) = \int a(\mathbf{k})u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3k, \quad (11.3)$$

где  $a(\mathbf{k})$  есть коэффициенты разложения. Вблизи края энергетической зоны, т. е. при  $\mathbf{k} \simeq 0$ , функции  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$  имеют слабую зависимость от  $\mathbf{k}$  и могут быть аппроксимированы как  $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq u_0(\mathbf{r}) \simeq u(\mathbf{r})$ . В таком приближении огибающей функции (ПОФ) локализованный электронный волновой пакет описывается произведением огибающей функции  $F(\mathbf{r})$  и блоховской функции вблизи края зоны  $u(\mathbf{r})$ ,

$$\psi(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})u(\mathbf{r}), \quad F(\mathbf{r}) = \int a(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3k. \quad (11.4)$$

Периодические блоховские функции могут быть нормированы внутри объёма  $V_{\text{яч}}$  единичной кристаллической ячейки:

$$\frac{1}{V_{\text{яч}}} \int_{V_{\text{яч}}} u^*(\mathbf{r})u(\mathbf{r})d^3r = 1.$$

Огибающие функции могут быть нормированы внутри всего объёма полупроводникового кристалла  $V$ :

$$\int_V F^*(\mathbf{r})F(\mathbf{r})d^3r = 1. \quad (11.5)$$



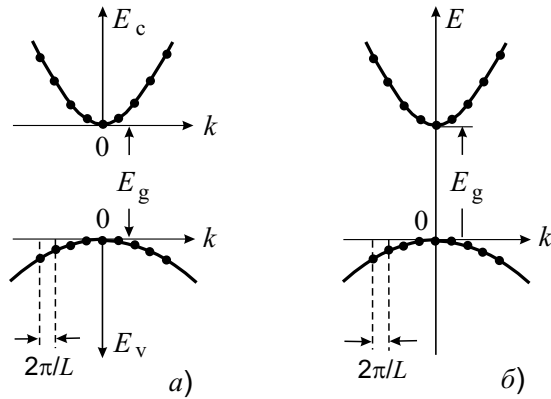


Рис. 11.1: Структура энергетических зон в объёмном полупроводнике с линейными размерами  $L_x = L_y = L_z = L$ . а) Энергия электрона  $E$  измеряется от дна зоны проводимости вверх и от потолка валентной зоны вниз. б) Энергия электрона  $E$  измеряется от потолка валентной зоны вверх. Чёрные кружки показывают электронные состояния, отвечающие различным значениям волнового вектора.

В приближении параболической зоны энергия электрона в зоне проводимости, измеренная от дна зоны проводимости есть

$$E_c = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c}, \quad (11.6)$$

где

$$m_c = \frac{\hbar^2}{(d^2 E_c / dk^2)} \quad (11.7)$$

есть эффективная масса электрона вблизи дна зоны проводимости. Подобным образом энергия электрона вблизи потолка валентной зоны, измеренная от верха зоны вниз есть

$$E_v = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}, \quad (11.8)$$

где

$$m_v = \frac{\hbar^2}{(d^2 E_v / dk^2)} \quad (11.9)$$

есть эффективная масса электрона вблизи потолка валентной зоны.

Рассмотрим теперь плотность электронных состояний исходя из квантовых свойств электронов в кристалле.

### 11.1.1 Представление бегущих волн

Когда блоховские волновые функции электронов представляются в виде пространственно-модулированных бегущих волн (11.2)

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)] \quad (11.10)$$

фаза электронной волны в полупроводниковом кристалле с линейными размерами  $L_x, L_y, L_z$  должна считаться периодической с периодом  $2\pi$ . Это означает, что должны быть выполнены условия

$$k_x L_x = 2\pi n_x, \quad k_y L_y = 2\pi n_y, \quad k_z L_z = 2\pi n_z, \quad (11.11)$$

где  $n_x, n_y, n_z = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$  - целые числа. Данные граничные условия определяют разрешённые значения электронного волнового вектора:

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y, \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z. \quad (11.12)$$

Соответственно любое значение волнового вектора определяется набором трёх квантовых чисел  $n_x, n_y, n_z$ ,

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z. \quad (11.13)$$

Волновой вектор (11.13) может находиться в любом октанте декартовой системы координат.

Правила квантования (11.12) позволяют определить число электронных состояний  $N(k)$  внутри данного "объёма"  $(4/3)\pi k^3$  в  $k$ -пространстве следующим образом. Учтём сначала, что одно электронное состояние занимает в  $k$ -пространстве "объём"

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{(2\pi)^3}{L_x L_y L_z} = \frac{(2\pi)^3}{V}, \quad (11.14)$$

где  $V = L_x L_y L_z$  есть физический объём полупроводникового образца. После этого нетрудно видеть, что число электронных состояний с двумя разрешёнными проекциями спина есть

$$N(k) = 2 \cdot \frac{(4/3)\pi k^3}{\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z} = \frac{k^3 V}{3\pi^2}. \quad (11.15)$$

Соотношение (11.15) позволяет ввести плотность электронных состояний в единичном объёме - величину  $\rho(k)$ , определённую как число состояний, приходящихся на единичный интервал изменения величины волнового вектора  $k$ ,

$$\rho(k) = \frac{1}{V} \frac{dN(k)}{dk} = \frac{k^2}{\pi^2}. \quad (11.16)$$

Плотность электронных состояний может быть отнесена как к зоне проводимости, когда  $\rho(k) = \rho_c(k)$ , так и к валентной зоне, когда  $\rho(k) = \rho_v(k)$ .

Плотность электронных состояний может быть также рассмотрена как функция электронной энергии, т. е. как  $\rho(E)$ . Поскольку число состояний внутри малого интервала  $dk$  волнового вектора совпадает с числом состояний внутри соответствующего малого интервала  $dE$  энергии, т. е.  $\rho(k)dk = \rho(E)dE$ , то отсюда можно найти плотность состояний как функцию энергии в виде

$$\rho(E) = \rho(k) \frac{dk}{dE} = \rho(k) \frac{1}{dE/dk}. \quad (11.17)$$

Согласно уравнениям (11.6) и (11.8) как для зоны проводимости, так и для валентной зоны

$$\frac{dE}{dk} = \hbar \sqrt{\frac{2E}{m}}, \quad (11.18)$$

где  $E = E_c$ ,  $m = m_c$  для зоны проводимости и  $E = E_v$ ,  $m = m_v$  для валентной зоны. Отсюда можно видеть, что для зоны проводимости и для валентной зоны плотность электронных состояний как функция энергии имеет вид

$$\rho_c(E_c) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_c}, \quad (11.19)$$

$$\rho_v(E_v) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_v}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_v}. \quad (11.20)$$

Напомним, что в данных уравнениях энергия измеряется как показано на рис. 11.1а.

### 11.1.2 Представление стоячих волн

Рассмотрим ещё раз плотность электронных состояний исходя на этот раз из представления электронных волновых функции в виде пространственно-модулированных стоячих волн

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \sin k_x x \cdot \sin k_y y \cdot \sin k_z z. \quad (11.21)$$

Для кристалла с размерами  $L_x, L_y, L_z$  электронные волновые функции (11.21) должны обращаться в нуль на границах кристалла. Это означает, что в представлении стоячих волн граничные условия на фазы должны быть выбраны в виде

$$k_x L_x = \pi n_x, \quad k_y L_y = \pi n_y, \quad k_z L_z = \pi n_z, \quad (11.22)$$

где  $n_x, n_y, n_z$  есть положительные целые числа. Соответственно разрешённые значения электронного волнового вектора в кристалле определены соотношениями

$$k_x = \frac{\pi}{L_x} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{L_y} n_y, \quad k_z = \frac{\pi}{L_z} n_z, \quad (11.23)$$

а сам волновой вектор определяется набором трёх положительных квантовых чисел  $n_x, n_y, n_z$ ,

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z. \quad (11.24)$$

Любой волновой вектор (11.24) расположен в первом октанте декартовой системы координат.

Правило квантования электронного волнового вектора (11.24) определяют число электронных состояний в объёмном полупроводнике следующим образом. Число электронных состояний  $N(k)$  внутри объёма  $(1/8)(4/3)\pi k^3$  в  $k$ -пространстве следует из того, что одно электронное состояние занимает в  $k$ -пространстве "объём"

$$\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z = \frac{\pi^3}{L_x L_y L_z} = \frac{\pi^3}{V}, \quad (11.25)$$

где  $V = L_x L_y L_z$ . Соответственно число электронных состояний с двумя разрешёнными проекциями спина есть

$$N(k) = 2 \cdot \frac{(1/8)(4/3)\pi k^3}{\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z} = \frac{k^3 V}{3\pi^2}. \quad (11.26)$$

Это число точно совпадает с числом состояний (11.15). Соответственно представление электронных волновых функций в виде модулированных стоячих волн даёт для плотности состояний в единице объёма уже выведенные соотношения (11.16), (11.19) и (11.20).

Напомним в заключение данного раздела, что незаполненные электронные состояния в валентной зоне называются дырками. Такие состояния ведут себя как положительно заряженные частицы с массой, определяемой значением эффективной массы для валентной зоны. Важными примерами полупроводников, не содержащих и содержащих дырки в валентной зоне являются соответственно вырожденные полупроводники  $n$ -типа и  $p$ -типа (рис. 11.2). В вырожденном полупроводнике  $n$ -типа заполнены все электронные состояния валентной зоны и часть электронных состояний зоны проводимости. Напротив, в вырожденном полупроводнике  $p$ -типа заполнена только часть электронных состояний валентной зоны и совсем не заполнены электронные состояния зоны проводимости. Число дырок в полупроводниковом материале очевидно совпадает с числом незаполненных электронных состояний валентной зоны.

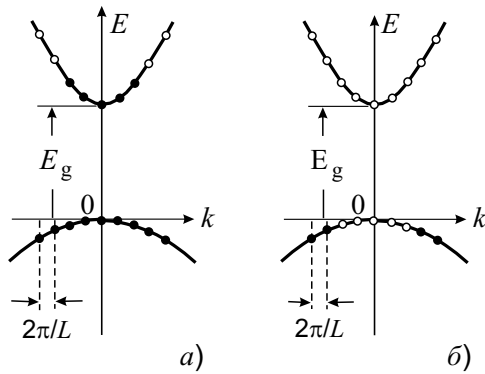


Рис. 11.2: Заполнение электронных состояний в полупроводнике  $n$ -типа (а) и полупроводнике  $p$ -типа (б).

## 11.2 Полупроводники $A^{III}B^V$

В полупроводниковых лазерах наиболее широкое применение находят составные полупроводники, образованные элементами III и V группы таблицы Менделеева. К полупроводникам  $A^{III}B^V$  относятся такие соединения как GaAs, InGaAs, AlGaAs, InGaAsP. В этих полупроводниках существуют три типа валентных зон: валентная зона тяжёлых дырок (тд), валентная зона лёгких дырок (лд) и спин-отщеплённая валентная зона (со) (рис. 11.3). Эти зоны характеризуются различными эффективными массами и, соответственно, различной плотностью состояний.

Например, в полупроводнике GaAs эффективные массы носителей тока имеют значения:  $m_c = 0,067 m_0$ ,  $m_{тд} = 0,46 m_0$ ,  $m_{лд} = 0,08 m_0$ , где  $m_0$  есть масса свободного электрона. Поскольку  $m_c \ll m_{тд}$ , то из уравнений (11.19) и (11.20) следует, что плотность электронных состояний в зоне проводимости значительно меньше плотности состояний в валентной зоне тяжёлых дырок, т. е.  $\rho_c \ll (\rho_v)_{тд}$ . Подобным же образом, поскольку  $m_{лд} \ll m_{тд}$ , то из уравнения (11.20) следует, что плотность состояний в валентной зоне лёгких дырок значительно меньше плотности состояний в валентной зоне тяжёлых дырок, т. е.  $(\rho_v)_{лд} \ll (\rho_v)_{тд}$ .

Различие в плотности состояний для зоны проводимости и валентной зоны может быть иллюстрировано простым примером. Согласно уравнениям (11.19) и (11.20) объёмная плотность состояний в зоне проводимости в интервале энергии от 0 до  $E = E_c$  и объёмная плотность состояний в валентной зоне тяжёлых дырок в интервале энергии от 0 до  $E = E_v$  есть

$$N(E) = \int_0^E \rho(E') dE' = \frac{1}{3\pi^2} \left( \frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{3/2},$$

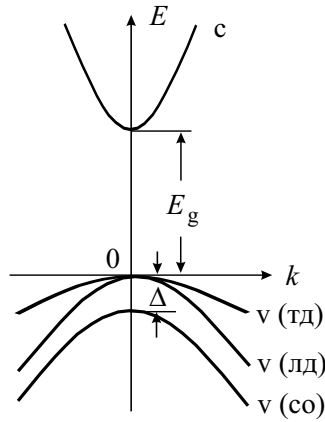


Рис. 11.3: Структура энергетических зон для полупроводниковых соединений III-V. Показаны зона проводимости, валентная зона тяжёлых дырок (тд), валентная зона лёгких дырок (лд) и спин-отщеплённая валентная зона (со).

где для зоны проводимости  $m = m_c$ , а для валентной зоны тяжёлых дырок  $m = m_{\text{тд}}$ .

Положим, что для полупроводника GaAs число электронов в единице объёма в зоне проводимости  $N_c(E_c)$  совпадает с числом тяжёлых дырок в единице объёма в валентной зоне  $N_{\text{тд}}(E_v)$  и равно  $2,5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ . В таком случае можно оценить, что электроны зоны проводимости распределены в энергетическом интервале от нуля до  $E_c \simeq 0,1 \text{ эВ}$ , в то время как тяжёлые дырки валентной зоны распределены во много меньшем энергетическом интервале от нуля до  $E_v \simeq 0,01 \text{ эВ}$ . Несмотря на то, что приведённые оценки основаны на грубом предположении о том, что все состояния заполнены с одинаковой вероятностью, полученные числа дают некоторое представление о различии плотностей состояний для электронов и дырок.

### 11.3 Равновесные электронные состояния

Населённости электронных состояний объёмного полупроводника сильно зависят от способа заполнения одноэлектронных состояний. Различают собственные (не легированные) и примесные (легированные) полупроводники. В собственном полупроводнике при низкой температуре все состояния в валентной зоне заполнены, а все состояния в зоне проводимости пустые.

В тепловом равновесии распределение электронов по энергетическим уровням подчиняется статистике Ферми-Дирака. В собственном полупроводнике, находящемся при температуре  $T$ , вероятность найти элек-

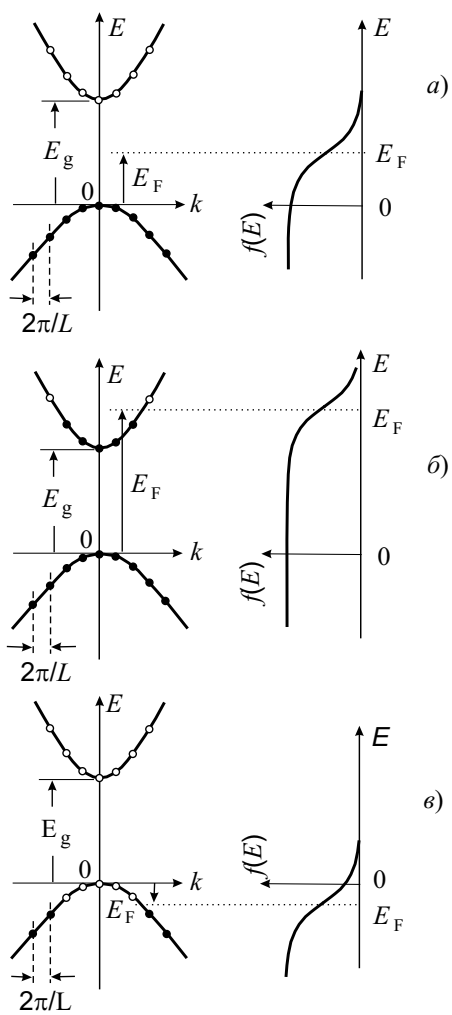


Рис. 11.4: Населённости электронных состояний в полупроводниках в тепловом равновесии при низкой температуре: а) собственный полупроводник, б) полупроводник  $n$ -типа, в) полупроводник  $p$ -типа.

трон на данном энергетическом уровне  $E$  в зоне проводимости или в валентной зоне есть

$$f(E) = \frac{1}{1 + \exp[(E - E_F)/k_B T]}, \quad (11.27)$$

где  $E_F$  есть уровень Ферми. В уравнении (11.27) уровни энергии в зоне проводимости и в валентной зоне рассматриваются в одной и той же системе отсчёта как показано на рис. 11.1 б. При  $E = E_F$  функция распределения Ферми-Дирака принимает значение  $f(E_F) = 1/2$ , при  $T \rightarrow 0$  функция распределения стремится к 1 ( $f(E) \rightarrow 1$ ) при  $E < E_F$  и стремится к нулю ( $f(E) \rightarrow 0$ ) при  $E > E_F$ . Поскольку ширина запрещённой зоны обычно превышает тепловую энергию,  $E_g \gg k_B T$ , то населённости уровней в зоне проводимости малы.

Условие нормировки функции распределения состоит в том, что выражение

$$N = \int_0^\infty f(E)\rho(E)dE,$$

где  $\rho(E)$  есть число электронных состояний в единице объёма и единичном интервале энергии, должно быть равно концентрации электронов в единице объёма.

В примесном полупроводнике положение уровня Ферми зависит от степени легирования полупроводника. На рис. 11.4 показаны распределения электронов в тепловом равновесии при низкой температуре  $T \simeq 0$  К для собственного полупроводника, полупроводника  $n$ -типа и полупроводника  $p$ -типа. Для не легированного полупроводника уровень Ферми расположен вблизи середины запрещённой зоны. Если полупроводник легирован донорной примесью, добавляющей электроны в полупроводник, то к заполненным состояниям валентной зоны добавляются заполненные до уровня Ферми состояния в зоне проводимости. В таком вырожденном полупроводнике  $n$ -типа уровень Ферми лежит выше дна зоны проводимости. При легировании полупроводника акцепторной примесью, связывающей часть электронов, уровень Ферми располагается ниже потолка валентной зоны. В таком вырожденном полупроводнике  $p$ -типа свободны все состояния в зоне проводимости и часть состояний ниже потолка валентной зоны.



## 11.4 Квазиравновесные электронные состояния

Когда посредством какого-либо импульсного процесса электроны возбуждаются из валентной зоны в зону проводимости релаксационные процессы приводят к быстрому установлению теплового равновесия. Различают два основных типа релаксационных процессов. Внутризонная релаксация, вызванная электрон-фононными столкновениями, производит установление квазиравновесного состояния электронов с весьма малым временем  $\tau_{вз} \simeq 10^{-12}$  с. Межзонная релаксация, обусловленная электронно-дырочной рекомбинацией, производит переход к равновесию с гораздо большим временем  $\tau_{мз} \simeq 10^{-9}$  с.

Таким образом, при временах  $\tau_{вз} \ll t \ll \tau_{мз}$  электроны достигают квазиравновесного состояния, при котором тепловое равновесие устанавливается внутри каждой энергетической зоны, но ещё отсутствует полное тепловое равновесие внутри полупроводника. В таком квазиравновесном состоянии вероятность заселения электронного состояния в зоне проводимости может быть описана функцией распределения

$$f_c(E_c) = \frac{1}{1 + \exp[(E_c - E_{F_c})/k_B T]}, \quad (11.28)$$

которая включает величину  $E_{F_c}$  называемую квазиуровнем Ферми в зоне проводимости. Вероятность заселения электронного состояния в валентной зоне может быть описана аналогичным образом посредством функции распределения

$$f_v(E_v) = \frac{1}{1 + \exp[-(E_v - E_{F_v})/k_B T]}, \quad (11.29)$$

где величина  $E_{F_v}$  называется квазиуровнем Ферми в валентной зоне.

Распределения  $f_c(E_c)$  и  $f_v(E_v)$  показаны на рис. 11.5. Отметим, что в уравнениях (11.28) и (11.29) энергии в зоне проводимости и валентной зоне отсчитываются в различных системах в соответствии с рис. 10.1 а.

Используя распределения вероятностей (11.28) и (11.29) можно определить вероятности заселения дырок в зоне проводимости,

$$\bar{f}_c(E_c) = 1 - f_c(E_c) = \frac{1}{1 + \exp[-(E_c - E_{F_c})/k_B T]}, \quad (11.30)$$

и вероятность заселения дырок в валентной зоне (рис. 10.5),

$$\bar{f}_v(E_v) = 1 - f_v(E_v) = \frac{1}{1 + \exp[(E_v - E_{F_v})/k_B T]}. \quad (11.31)$$

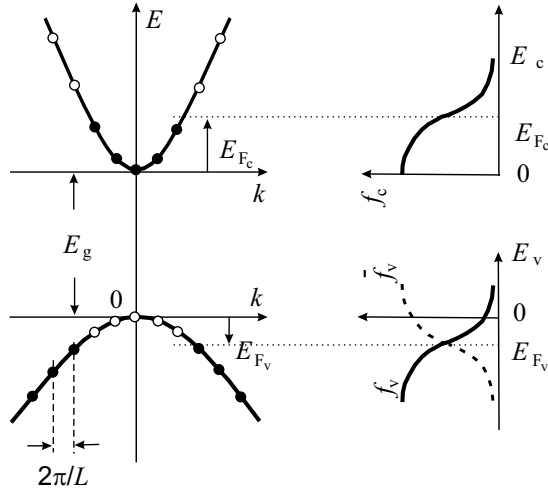


Рис. 11.5: Населённости квазиравновесных состояний в полупроводнике.

Плотность электронов в зоне проводимости может быть вычислена как

$$\begin{aligned}
 N_s &= \int_0^\infty f_c(E_c) \rho_c(E_c) dE_c \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E_c} dE_c}{1 + \exp[(E_c - E_{F_c})/k_B T]}.
 \end{aligned} \tag{11.32}$$

Плотность дырок в валентной зоне есть

$$\begin{aligned}
 N_d &= \int_0^\infty \bar{f}_v(E_v) \rho_v(E_v) dE_v \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_v}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{E_v} dE_v}{1 + \exp[(E_v - E_{F_v})/k_B T]}.
 \end{aligned} \tag{11.33}$$

Указанная выше неравновесная ситуация может возникать, например, при освещении полупроводника импульсом оптического излучения, частота которого превышает ширину запрещенной зоны. В этом случае оптическое излучение переводит электроны из валентной зоны в зону проводимости, оставляя соответственно в валентной зоне незаполненные электронные состояния. Поскольку релаксационные процессы внутри каждой зоны являются гораздо более быстрыми, чем релаксация между зонами, то внутри каждой зоны электроны занимают нижние состояния. В результате возникают распределения, характеризующиеся двумя квазиуровнями Ферми, одним для зоны проводимости и другим для валентной зоны (рис. 11.5). В такого рода дважды вырожденном

полупроводнике распределение электронов в зоне проводимости подобно распределению в вырожденном полупроводнике  $n$ -типа, а распределение электронов в валентной зоне подобно распределению в вырожденном полупроводнике  $p$ -типа.

Рассмотренный неравновесный дважды вырожденный полупроводник принципиально отличается от равновесных вырожденных полупроводников. В полупроводниках  $n$ - или  $p$ -типа заполненные состояния всегда расположены ниже свободных состояний. В связи с этим оптическое излучение может только поглощаться этими полупроводниками. Напротив, в неравновесном дважды вырожденном полупроводнике существуют заполненные электронные состояния, лежащие выше незаполненных состояний. Как результат, в дважды вырожденном полупроводнике излучение частоты

$$E_g < \hbar\omega < E_{F_c} - E_{F_v} \quad (11.34)$$

может усиливаться благодаря переходам электронов из зоны проводимости в валентную зону.

Таким образом, в дважды вырожденном полупроводнике существуют условия для усиления внешнего оптического излучения, а значит и условия для лазерной генерации.

## 11.5 Накачка электронных состояний

Положим, что благодаря какому-либо процессу накачки, например, благодаря оптическому возбуждению электроны переходят из валентной зоны в зону проводимости и в результате в полупроводнике создаётся плотность электронов  $N_\varepsilon$  и равная ей плотность дырок  $N_d$ , т. е.  $N_\varepsilon = N_d = N$ . При токе накачки  $J$ , объёме полупроводника  $V$  и времени электронно-дырочной рекомбинации  $\tau$  уравнение баланса

$$\frac{dN_\varepsilon}{dt} = \frac{J}{eV} - \frac{N_\varepsilon}{\tau}$$

определяет стационарную электронную плотность  $N_\varepsilon = N$  как

$$N = \frac{J\tau}{eV}.$$

Данное уравнение совместно с уравнением (11.32) неявно определяет значение квазиуровня Ферми  $E_{F_c}$

$$N = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{1 + \exp(\varepsilon - \varepsilon_{F_c})},$$

где

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_c k_B T}{\hbar^2} \right)^{3/2}, \quad \varepsilon = \frac{E_c}{k_B T}, \quad \varepsilon_{F_c} = \frac{E_{F_c}}{k_B T}.$$

Аналогичные уравнения могут быть выписаны для валентной зоны.

Таким образом, ...

## 11.6 Поглощение и усиление света

### 11.6.1 Вынужденные переходы

Взаимодействие электромагнитного поля с электронами полупроводника может быть описано уравнением Шредингера, которое является обобщением уравнения (11.1). При наличии электромагнитного поля оператор кинетической энергии, определённый оператором импульса  $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$ , как известно включает векторный потенциал электромагнитного поля  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ,

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} \rightarrow \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m_0} \simeq \frac{\mathbf{p}^2}{2m_0} + \frac{e}{m_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}, \quad (11.35)$$

где  $e$  есть величина заряда электрона. В приведённом уравнении использована калибровка  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , член с квадратом векторного потенциала опущен поскольку его влияние весьма мало.

После проведения указанной замены уравнение Шредингера, описывающее движение электрона в кристалле и его взаимодействие с электромагнитным полем, принимает вид

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) + V \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (11.36)$$

где связь электрона с электромагнитным излучением описывается оператором

$$V = \frac{e}{m_0} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -i \frac{e\hbar}{m_0} \mathbf{A} \cdot \nabla. \quad (11.37)$$

Векторному потенциалу  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  как обычно отвечает электрическое поле  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \partial t$ .

В практически наиболее важном случае монохроматического электромагнитного поля вектор электрического поля может быть представлен в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e} E(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (11.38)$$

а соответствующий векторный потенциал в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{e} A(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \quad (11.39)$$

где  $\mathbf{e}$  есть единичный вектор поляризации и  $A(\mathbf{r}) = iE(\mathbf{r})/\omega$ . При данном выборе электромагнитного поля оператор взаимодействия (11.37) принимает вид

$$V = \tilde{V} e^{-i\omega t} + \text{к.с.}, \quad \tilde{V} = \tilde{V}(\mathbf{r}) = \frac{eA(\mathbf{r})}{2m_0} (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}). \quad (11.40)$$

Взаимодействие электронов с осциллирующим электромагнитным полем, описываемое оператором (11.40), вызывает переходы электронов из состояний в валентной зоне с энергией  $E_v$  в состояния в зоне проводимости с энергией  $E_c$ . Вероятность перехода электрона в единицу времени согласно золотому правилу Ферми есть

$$W_{v \rightarrow c} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \tilde{V}_{cv} \right|^2 \delta(\hbar\omega - (E_c - E_v)), \quad (11.41)$$

где матричный элемент оператора взаимодействия

$$\tilde{V}_{cv} = \left\langle c \left| \tilde{V} \right| v \right\rangle = \int_V \psi_c^* \tilde{V} \psi_v d^3r. \quad (11.42)$$

Обратим внимание, что в уравнении (11.41) энергии отсчитываются в одной и той же системе как показано на рис. 11.1б.

Воспользовавшись далее приближением огибающих функций, т. е. представив электронные волновые функции  $\psi_c, \psi_v$  в виде (11.4), а также используя тождество

$$\mathbf{p}(FG) = F\mathbf{p}G + G\mathbf{p}F$$

можно преобразовать соотношение (11.42) к виду

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{cv} &= \frac{e}{2m_0} \int_V F_c^* u_c^* A(\mathbf{r}) (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) F_v u_v d^3r \\ &= \frac{e}{2m_0} \int_V (F_c^* A(\mathbf{r}) F_v) (u_c^* \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} u_v) d^3r + \frac{e}{2m_0} \int_V (u_c^* u_v) (F_c^* A(\mathbf{r}) \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} F_v) d^3r, \end{aligned} \quad (11.43)$$

После данных преобразований можно видеть, что в последнем уравнении второй интеграл исчезает вследствие условия ортогональности

$$\int_{V_{\text{яч}}} u_c^* u_v d^3r = 0$$

и того факта, что подинтегральный член является медленно меняющейся функцией внутри одной элементарной ячейки. Первый интеграл может быть преобразован к виду, который учитывает наличие медленно меняющихся функций и возможность интегрирования по каждой элементарной ячейке,

$$\tilde{V}_{cv} = \frac{e}{2m_0} \sum_j (F_c^* A(\mathbf{r}_j) F_v) \int_{V_{\text{яч}}} (u_c^* \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} u_v) d^3 r,$$

где вектор  $\mathbf{r}_j$  определяет положение  $j$ -й элементарной ячейки. Поскольку блоховские функции одинаковы для всех элементарных ячеек, то в последнем выражении интеграл может быть вынесен из-под знака суммы,

$$\tilde{V}_{cv} = \frac{e}{2m_0} \left[ \frac{1}{V_{\text{яч}}} \int_{V_{\text{яч}}} (u_c^* \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} u_v) d^3 r \right] \sum_j (F_c^* A(\mathbf{r}_j) F_v) V_{\text{яч}}.$$

Окончательно, проведённая процедура позволяет записать матричный элемент оператора взаимодействия в виде

$$\tilde{V}_{cv} = \frac{e}{2m_0} \langle u_c | (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) | u_v \rangle \int_V (F_c^* A(\mathbf{r}) F_v) d^3 r, \quad (11.44)$$

где

$$\langle u_c | (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) | u_v \rangle = \frac{1}{V_{\text{яч}}} \int_{V_{\text{яч}}} (u_c^* \mathbf{e} \cdot \mathbf{p} u_v) d^3 r.$$

Уравнение (11.41) с матричным элементом (11.44) прямо показывает, что процесс возбуждения электрона следует законам сохранения энергии и импульса. Присутствие дельта функции в уравнении (11.41) означает, что переход электрона происходит когда энергия фотона совпадает с энергией электронного перехода,

$$\hbar\omega = E_c - E_v.$$

Интегрирование по огибающим функциям в уравнении (11.44) означает, что для электромагнитной волны с определённым значением импульса  $\hbar\mathbf{k}$ , т. е. при

$$A(\mathbf{r}) = A_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}},$$

переход электрона между состояниями с определёнными значениями импульса,

$$F_v = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_v \mathbf{r}}, \quad F_c = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_c \mathbf{r}},$$

возможен когда импульс электрона изменяется на величину импульса фотона,

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_v + \mathbf{k}.$$

Обычно величина волнового вектора фотона  $k = |\mathbf{k}|$  мала по сравнению со значениями электронного волнового вектора в зоне проводимости и валентной зоне. Например, при индуцировании оптических переходов электронов в полупроводниковом материале GaAs с показателем преломления  $n = 3,5$  излучением с длиной волны  $\lambda \simeq 1$  мкм волновой вектор фотона имеет значение  $k = (\omega/c)n \simeq 10^5$  см<sup>-1</sup>. Для теплового электрона в зоне проводимости с импульсом  $p_c = \hbar k_c$  и энергией  $p_c^2/2m_c = (3/2)k_B T$  величина волнового вектора есть

$$k_c = \frac{1}{\hbar} \sqrt{3m_c k_B T},$$

где эффективная масса электрона в зоне проводимости  $m_c = 0,067 m_0$ . Соответственно при комнатной температуре  $T = 300$  К величина волнового вектора в зоне проводимости есть  $k_c \simeq 2,7 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>. Подобным образом, величина волнового вектора в валентной зоне есть

$$k_v = \frac{1}{\hbar} \sqrt{3m_v k_B T},$$

где эффективная масса электрона в валентной зоне  $m_v = 0,46 m_0$ . При комнатной температуре величина волнового вектора в валентной зоне имеет соответственно значение  $k_v \simeq 7 \cdot 10^6$  см<sup>-1</sup>. Отсюда видно, что при типичных параметрах полупроводникового материала  $k \ll k_c, k_v$  и соответственно закон сохранения импульса может приближённо рассматриваться в виде

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{k}_v.$$

Для электрона, локализованного в области с размерами меньше длины волны излучения, матричный элемент по огибающим волновым функциям может быть приближённо записан как

$$\int_V (F_c^* A(\mathbf{r}) F_v) d^3 r \simeq A_0 \int_V F_c^* F_v d^3 r = A_0 \langle F_c | F_v \rangle,$$

где  $A_0 = A(\mathbf{r}_0)$  есть величина векторного потенциала в месте нахождения электрона, т. е. при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ . Это позволяет записать матричный элемент в окончательной форме

$$\tilde{V}_{cv} = \frac{eA_0}{2m_0} M_T, \quad (11.45)$$

где

$$M_T = \langle u_c | (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) | u_v \rangle \langle F_c | F_v \rangle \quad (11.46)$$

есть матричный элемент перехода, имеющий размерность импульса.

В практических вычислениях обычно требуется знать только член  $|M_T|^2$ . В объёмном полупроводнике этот член имеет одно и то же значение при поляризации поля вдоль любой оси  $x$ ,  $y$  или  $z$ ,  $|M_T|^2 = |M|^2$ . Для соединений А<sup>III</sup>В<sup>V</sup> этот член оценивается согласно формуле

$$|M|^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{m_0}{m_c} - 1 \right) \frac{E_g + \Delta}{E_g + (2/3)\Delta} m_0 E_g, \quad (11.47)$$

где  $\Delta$  есть энергетический зазор между зонами лёгких и тяжёлых дырок и спин-отщеплённой валентной зоной, показанный на рис. 11.3. Отметим, что величина матричного элемента перехода зависит от выбора полупроводникового материала. Например, для материала GaAs  $E_g \simeq 1.42$  эВ,  $\Delta \simeq 0.34$  эВ и имеющая размерность энергии величина  $2|M|^2/m_0$  оценивается как  $2|M|^2/m_0 \simeq 28,8$  эВ.

Вероятность  $w_{v \rightarrow c}$  определяет скорость возбуждения для единичного электрона. Поскольку как в валентной зоне, так и зоне проводимости существует большое число электронных состояний, то для полной скорости переходов в единичном объёме следует записать соотношение, включающее суммирование по всем разрешённым электронным переходам,

$$R_{v \rightarrow c} = \frac{2\pi}{\hbar} \int |\tilde{V}_{cv}|^2 \delta(E - \hbar\omega) \rho(k) dk, \quad (11.48)$$

где  $E = E_c - E_v$ , а функция  $\rho(k)$  определяет плотность электронных состояний в единице объёма полупроводника.

Подчеркнём, что в соотношении (11.48) неявно предполагается, что электронные переходы совершаются из заполненных состояний в валентной зоне, т.е. по существу рассматривается собственный полупроводник при низкой температуре.

### 11.6.2 Приведённая плотность состояний

Как можно видеть, уравнение (11.48) записано в форме, включающей функции различных переменных. Аргументом дельта-функции является энергия перехода  $E$ , а аргументом плотности состояний является волновой вектор. Соответственно такая форма записи не позволяет прямо вычислить интеграл (11.48). Этот недостаток однако может быть исправлен если ввести плотность состояний  $\rho_T(E)$ , отнесённую к переменной энергии перехода  $E$ . Определённая таким образом плотность состояний называется совместной или приведённой плотностью состояний. Соответственно, величина  $\rho_T(E)dE$  определяет число переходов с энергией между  $E$  и  $E + dE$ .



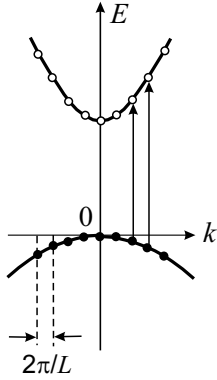


Рис. 11.6: Переходы электронов при поглощении оптического излучения в собственном полупроводнике.

Отметим, что в простейшем случае собственного полупроводника каждому электронному состоянию в валентной зоне соответствует одно определённое состояние в зоне проводимости. Соответственно, для собственного полупроводника число электронных переходов равно числу электронных состояний в валентной зоне и, одновременно, равно числу состояний в зоне проводимости (рис. 11.6).

В общем случае приведённая плотностью состояний может быть введена посредством соотношения

$$\rho_r(E)dE = \rho(k)dk \quad (11.49)$$

и соответственно интеграл (11.48) может быть вычислен как

$$R_{v \rightarrow c} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \tilde{V}_{cv} \right|^2 \rho_r(\hbar\omega). \quad (11.50)$$

В приближении параболических зон переходы из валентной зоны с начальной энергией  $E_v$  в зону проводимости с конечной энергией  $E_c$  описываются законами сохранения энергии и импульса (энергии  $E_v$  и  $E_c$  рассматриваются в одной и той же системе отсчёта как показано на рис. 11.1 б):

$$\begin{aligned} E_c &= E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_c}, \\ E_v &= -\frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}, \\ E_c &= E_v + E, \end{aligned} \quad (11.51)$$

где согласно приближённому закону сохранения импульса  $k = k_c = k_v$ . Из данных уравнений можно найти величину энергии перехода

$$E = E_g + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}, \quad (11.52)$$

где уравнение

$$\frac{1}{m_r} = \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_v} \quad (11.53)$$

определяет приведённую массу  $m_r$ .

Используя далее соотношение  $\rho_r(E)dE = \rho(k)dk = (k^2/\pi^2)dk$  и уравнение (11.52) можно окончательно вычислить приведённую плотность состояний в виде

$$\rho_r(E) = \frac{k^2}{\pi^2} \frac{dk}{dE} = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_r}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E - E_g}. \quad (11.54)$$

Приведённая плотность состояний при значении энергии перехода  $E = \hbar\omega$  определяет число электронных переходов (11.50). Подчеркнём ещё раз, что приведённая плотность состояний определена по отношению к энергии перехода  $E$ , в то время как плотности состояний в энергетических зонах  $\rho_c(E_c)$  и  $\rho_v(E_v)$  определены по отношению к энергиям  $E_c$  и  $E_v$  в соответствующих энергетических зонах.

### 11.6.3 Коэффициент поглощения

Полная скорость электронных переходов в единице объёма, выписанная в упрощённой форме в виде (11.50), является основной величиной, которая определяет поглощение оптического излучения в полупроводнике. Переходы из валентной зоны в зону проводимости, очевидно, возможны когда нижнее электронное состояние с энергией  $E_v$  занято, а верхнее электронное состояние с энергией  $E_c$  пусто. Соответственно в общем случае скорость электронных переходов, ответственных за поглощение оптического излучения, должна записываться в виде

$$R_{v \rightarrow c} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \tilde{V}_{cv} \right|^2 \rho_r(\hbar\omega) f_v(E_v) [1 - f_c(E_c)], \quad (11.55)$$

где  $f_v(E_v)$  есть вероятность того, что нижнее электронное состояние заполнено, а  $1 - f_c(E_c)$  есть вероятность того, что верхнее состояние является пустым. Аналогичным образом, скорость электронных переходов, ответственных за стимулированное испускание, есть

$$R_{c \rightarrow v} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \tilde{V}_{cv} \right|^2 \rho_r(\hbar\omega) f_c(E_c) [1 - f_v(E_v)], \quad (11.56)$$

где  $f_c(E_c)$  есть вероятность того, что верхнее электронное состояние является заполненным, а  $1 - f_v(E_v)$  есть вероятность того, что нижнее состояние является пустым.

Полная скорость стимулированных переходов таким образом есть

$$\begin{aligned} R &= R_{v \rightarrow c} - R_{c \rightarrow v} \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left| \tilde{V}_{cv} \right|^2 \rho_r(\hbar\omega) [f_v(E_v) - f_c(E_c)] \\ &= \frac{2\pi}{\hbar} \left( \frac{eE_0}{2m_0\omega} \right)^2 |M_T|^2 \rho_r(E) [f_v(E_v) - f_c(E_c)], \end{aligned} \quad (11.57)$$

где  $|M_T|$  есть матричный элемент перехода.

Рассмотрим теперь ослабление электромагнитного излучения, определённого уравнениями (11.38) и (11.39), в полупроводниковом материале. Положим, что излучение распространяется в направлении  $z$ . Вследствии поглощения электронами поток фотонов  $\mathcal{I} = \frac{1}{2}cn\varepsilon_0 E_0^2/\hbar\omega$  ослабляется в соответствии с законом Бугера-Ламберта (1.7)

$$\frac{d\mathcal{I}}{dz} = -\alpha\mathcal{I}, \quad (11.58)$$

где  $\alpha$  есть коэффициент поглощения. Как можно сейчас видеть, уравнения (11.57) и (11.58) определяют одну и ту же величину - число электронных переходов в единицу времени в единице объёма:

$$-\frac{d\mathcal{I}}{dz} = R = R_{v \rightarrow c} - R_{c \rightarrow v}. \quad (11.59)$$

Следовательно коэффициент поглощения  $\alpha = \alpha(\omega)$  может быть найден как

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= -\frac{1}{\mathcal{I}} \frac{d\mathcal{I}}{dz} = \frac{R_{v \rightarrow c} - R_{c \rightarrow v}}{\mathcal{I}} \\ &= \frac{\pi e^2}{cn\varepsilon_0 m_0^2 \omega} |M_T|^2 \rho_r(E) [f_v(E_v) - f_c(E_c)]. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Обычно удобным является представление коэффициента поглощения в виде

$$\alpha(\omega) = \alpha_0 [f_v(E_v) - f_c(E_c)], \quad (11.61)$$

где величина

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{\pi e^2}{cn\varepsilon_0 m_0^2 \omega} |M_T|^2 \rho_r(\hbar\omega) \\ &= \frac{\sqrt{2}e^2}{\pi cn\varepsilon_0 m_0^{1/2} \omega \hbar^3} |M_T|^2 \left( \frac{m_r}{m_0} \right)^{3/2} \sqrt{\hbar\omega - E_g} \end{aligned} \quad (11.62)$$

определяется свойствами полупроводникового материала, а фермиевский фактор  $[f_v(E_v) - f_c(E_c)]$  зависит от уровня инжекции носителей тока.

Величина  $\alpha_0$ , как можно убедиться, определяет максимальное значение коэффициента поглощения, достигаемое при низких температурах. Действительно, при тепловом равновесии при температуре  $T = 0$  квазиуровни Ферми совпадают с уровнем Ферми, расположенном внутри запрещённой зоны. Соответственно функции распределения имеют следующие значения:  $f_v(E_v) = 1$ ,  $f_c(E_c) = 0$ . В таком случае  $\alpha = \alpha_0$ , т. е. величина  $\alpha_0$  определяет максимальный возможный коэффициент поглощения.

Отметим, что для полупроводников А<sup>III</sup>В<sup>V</sup> обычно выполняется условие  $E_g \gg k_B T$  и соответственно фермиевские распределения имеют значения  $f_v(E_v) \simeq 1$  и  $f_c(E_c) \simeq 0$ , а значит  $\alpha \simeq \alpha_0$ , т. е. коэффициент поглощения близок к максимальному значению  $\alpha_0$ . Например, в случае полупроводника GaAs энергетический зазор  $E_g = 1,43$  эВ отвечает частоте перехода  $\nu = \omega/2\pi = 3,4 \cdot 10^{14}$  Гц, эффективные массы имеют значения  $m_c = 0,067 m_0$ ,  $m_v = 0,46 m_0$ ,  $m_r = 0,059 m_0$ , квадрат матричного элемента перехода  $2|M_T|^2/m_0 \simeq 28,8$  эВ, показатель преломления  $n = 3,6$  и максимальное значение коэффициента поглощения есть

$$\alpha_0 = 19,76 \sqrt{\hbar\omega - E_g},$$

где  $\alpha_0$  измеряется в  $\text{см}^{-1}$ , а энергия фотона  $\hbar\omega$  и ширина запрещённой зоны  $E_g$  измеряются в эВ. В частности, для  $\hbar\omega - E_g = 10$  мэВ максимальное значение коэффициента поглощения  $\alpha_0 \simeq 2000 \text{ см}^{-1}$ .

### 11.6.4 Коэффициент усиления

Для инвертированного полупроводника, показанного на рис. 11.7, коэффициент усиления  $g = g(\omega)$  прямо следует из уравнения (11.60), в котором следует сделать замены  $c \rightarrow v$ ,  $v \rightarrow c$ :

$$g(\omega) = \frac{\pi e^2}{cn\varepsilon_0 m_0^2 \omega} |M_T|^2 \rho_r(\hbar\omega) [f_c(E_c) - f_v(E_v)]. \quad (11.63)$$

Удобно записать коэффициент усиления в форме, подобной (11.61),

$$g(\omega) = \alpha_0 [f_c(E_c) - f_v(E_v)], \quad (11.64)$$

где коэффициент  $\alpha_0$  определяется уравнением (11.62). Типичная зависимость коэффициента усиления от энергии фотона показана на рис. 11.8.

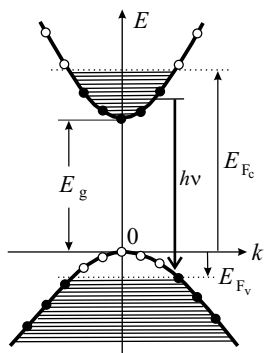


Рис. 11.7: Квазиравновесное состояние полупроводника, произведённого электронной накачкой, и вынужденные переходы электронов, ответственные за усиление света.

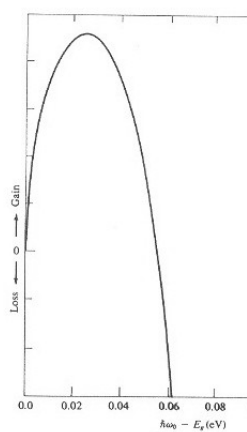


Fig. 13.2

Рис. 11.8: Зависимость коэффициента усиления от энергии для полупроводника GaAs.

Следует обратить внимание, что коэффициент усиления положителен при двух условиях:

$$\hbar\omega > E_g, \quad (11.65)$$

$$f_c(E_c) > f_v(E_v). \quad (11.66)$$

Второе из этих условий имеет следующий явный вид

$$\frac{1}{1 + \exp[(E_c - E_{F_c})/k_B T]} > \frac{1}{1 + \exp[-(E_v - E_{F_v})/k_B T]},$$

и очевидно удовлетворяется при энергии фотона

$$\hbar\omega = E_c - E_v < E_{F_c} - E_{F_v}.$$

Таким образом, оба соотношения (11.66), будучи рассмотрены совместно, дают окончательное условие положительности усиления в виде

$$E_g < \hbar\omega < E_{F_c} - E_{F_v}. \quad (11.67)$$

Соответственно пороговое условие усиления определяется как

$$E_{F_c} - E_{F_v} = E_g. \quad (11.68)$$

Естественно для достижения порогового условия следует инжектировать в полупроводник электроны при плотности в зоне проводимости (и дырки с плотностью в валентной зоне), которая называется пороговой плотностью  $N_{\text{п}}$ . Для полупроводника GaAs при комнатной температуре  $N_{\text{п}} \simeq 1,2 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ .

## Глава 12

# Полупроводниковые диодные лазеры

Первые полупроводниковые лазеры были созданы в 1962 г. несколькими группами исследователей, реализовавшими вынужденное когерентное излучение в полупроводниковом кристалле GaAs. В полупроводниковых лазерах вынужденное излучение возникает в  $p-n$  переходе при квантовых переходах электронов из состояний в зоне проводимости в свободные состояния в валентной зоне.

Принцип работы полупроводникового лазера может быть понят следующим образом. Положим для простоты, что невырожденный полупроводник находится при температуре, близкой к нулевой (рис. 12.1). При  $T \simeq 0$  валентная зона полупроводника заполнена электронами, а зона проводимости пустая. Положим, что механизм накачки возбуждает электроны из валентной зоны в зону проводимости. Благодаря внутризонной релаксации электроны в зоне проводимости быстро (за типичное

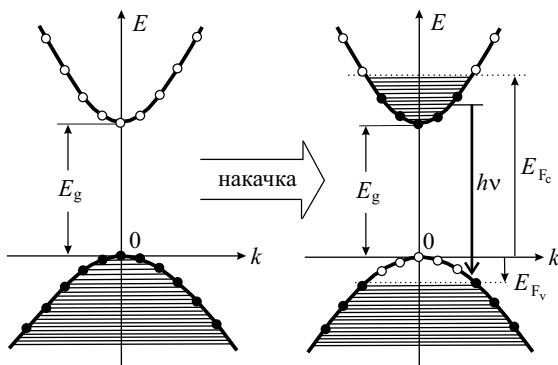


Рис. 12.1: Принцип работы полупроводникового лазера.

время порядка  $\tau_{\text{вз}} \simeq 10^{-12}$  с) достигают квазиравновесного состояния вблизи дна зоны проводимости. Подобным же образом дырки достигают квазиравновесного распределения вблизи потолка валентной зоны. Новые квазиравновесные распределения описываются квазиуровнем Ферми  $E_{F_c}$  в зоне проводимости и квазиуровнем Ферми  $E_{F_v}$  в валентной зоне. Рекомбинация электронов и дырок создаёт оптическое излучение. Соответственно, когда полупроводник помещён в подходящий резонатор, стимулированное излучение приводит к возникновению лазерного излучения.

Как было показано в предыдущей главе, усиление в полупроводниковом лазере может быть реализовано, когда энергия фотона  $\hbar\omega = E_c - E_v$  удовлетворяет условиям

$$E_g < \hbar\omega < E_{F_c} - E_{F_v}, \quad (12.1)$$

из которых следует, что для реального достижения усиления плотность электронов должна удовлетворять пороговому условию

$$E_{F_c} - E_{F_v} = E_g. \quad (12.2)$$

Накачка полупроводниковых лазеров может осуществляться различными методами, такими как возбуждение электронов током, возбуждение оптическим излучением или возбуждение пучком электронов. Практически наиболее широкое распространение получили полупроводниковые лазеры, накачиваемые электрическим током. Длины волн существующих полупроводниковых лазеров перекрывают весьма широкий диапазон от 0,5 до 10 мкм. В целом, уникальные характеристики полупроводниковых лазеров - возбуждение электрическим током, малые размеры и совместимость с полупроводниковой микроэлектроникой делают эти лазеры весьма важными компонентами оптических микротехнологий.

## 12.1 Инжекционные лазеры на $p - n$ переходах

Инжекционные лазеры на  $p - n$  переходах основаны на процессах накачки, которые достигаются в  $p - n$  переходах. Рассмотрим ситуацию, которая имеет место в полупроводниковом  $p - n$  переходе, образованном одним и тем же материалом, например, GaAs (рис. 12.2). Данный переход образуется при контакте двух пространственных областей - области  $p$ -типа и области  $n$ -типа, образованных акцепторными и донорными примесями при типичных концентрациях  $10^{18}$  ат/см<sup>3</sup>.



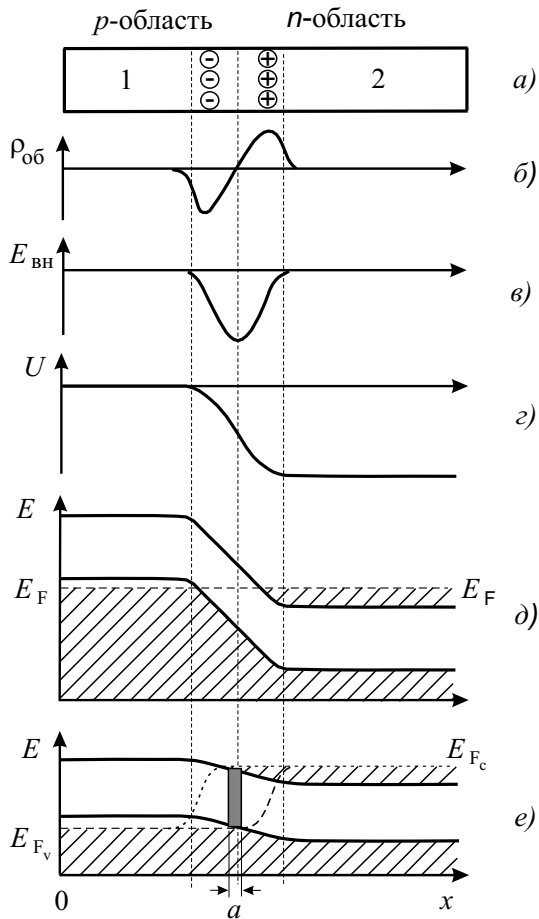


Рис. 12.2: Материальная структура  $p - n$  перехода, включающая электрически нейтральные области 1 и 2 и расположенную между ними область объёмного заряда (а); пространственное распределение объёмного заряда  $\rho_{об}$  (б), напряжённости внутреннего электрического поля  $E_{вн}$  (в) и потенциальной энергии электронов  $U$  (г); структура энергетических зон, искривлённых внутренним электрическим полем (д); структура энергетических зон при прямом напряжении и область инверсии (заштрихованный прямоугольник) (е).

В рассматриваемом случае, когда одна часть полупроводника является вырожденной  $p$ -типа, а вторая - вырожденной  $n$ -типа, в областях 1 и 2, расположенных вдали от  $p-n$  перехода, полупроводниковый материал является электрически нейтральным. Вблизи  $p-n$  перехода электронейтральность нарушается. Благодаря диффузии дырок из  $p$ -области в  $n$ -область и диффузии электронов во встречном направлении вблизи  $p-n$  перехода возникают области объёмного заряда (рис. 12.2 а,б). Плотность объёмного заряда  $\rho_{об}$  положительна в  $n$ -области и отрицательна в  $p$ -области. Соответственно, объёмный заряд создаёт внутреннее электрическое поле  $E_{вн}$ , которое направлено из  $n$ -области в  $p$ -область (рис. 12.2 в). В таком поле потенциальная энергия электрона  $U$  возрастает при переходе из  $n$ -области в  $p$ -область (рис. 12.2 г). Результатом этого является искривление энергетических зон полупроводника, показанное на рис. 12.2 д.

В том случае, когда полупроводник не подвергается внешнему воздействию, т. е. в термодинамическом равновесии уровень Ферми имеет всюду одно и то же значение и лежит в полупроводнике  $p$ -типа ниже потолка валентной зоны, а в полупроводнике  $n$ -типа - выше дна зоны проводимости (рис. 12.2 д). При одинаковой концентрации электронов и дырок расстояние от потолка валентной зоны до уровня Ферми в  $p$ -области меньше расстояния от уровня Ферми до дна зоны проводимости, поскольку плотность состояний в валентной зоне превышает плотность состояний в зоне проводимости.

Совсем иная неравновесная ситуация возникает, когда к  $p-n$  переходу приложено напряжение в прямом направлении, т. е. напряжение, сближающее энергетические состояния в валентной зоне и зоне проводимости (рис. 12.2 е). В этом случае внешнее электрическое поле частично компенсирует внутреннее электрическое поле. Соответственно, электроны и дырки, т. е. заполненные и свободные электронные состояния, продвигаются в область  $p-n$  перехода. Как результат, в области  $p-n$  перехода возникает узкий активный слой, в котором одновременно существует избыток электронов и дырок, т. е. слой двойного вырождения полупроводника. Отметим, что поскольку электроны проникают в область  $p-n$  перехода более глубоко, чем дырки, то активный слой несколько смещён из  $n$ -области в  $p$ -область. Активный слой характеризуется двумя квазиуровнями Ферми  $E_{F_c}$  и  $E_{F_v}$ , он является областью, в которой существует двойное вырождение и соответственно является областью существования инверсной населенности. Благодаря этому, оптическое излучение частоты (12.1), распространяющееся через активный слой, усиливается за счет квантовых рекомбинационных переходов.

Размер активного слоя  $a$  может быть оценен как среднее расстояние,

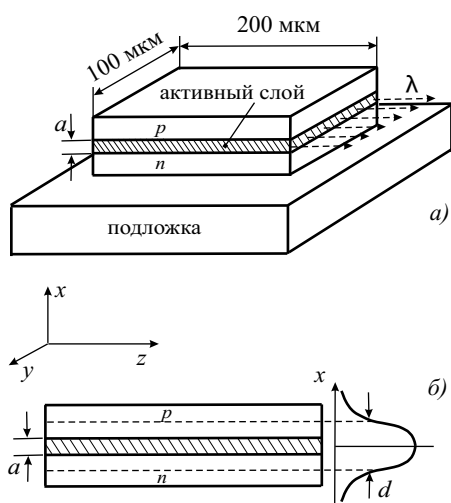


Рис. 12.3: а) Схема инжекционного лазера на основе полупроводника GaAs. б) Распределение интенсивности лазерного излучения поперёк  $p - n$  перехода.

на которое распространяются электроны из  $n$ -области в  $p$ -область за счет диффузии до того как они совершат переход в валентную зону, т. е. до рекомбинации электрона с дыркой. Например, в полупроводнике GaAs коэффициент диффузии  $D \simeq 10 \text{ см}^2/\text{с}$ , время рекомбинации  $\tau_{\text{мз}} \simeq 10^{-9}$  с и соответственно диффузионная длина  $l_{\text{д}} \simeq \sqrt{D\tau_{\text{мз}}} \simeq 1 \text{ мкм}$ .

Таким образом, приложение прямого напряжения к  $p - n$  переходу создает неравновесную концентрацию электронов и дырок в активном слое размером  $a \simeq l_{\text{д}}$ , что обеспечивает усиление внешнего оптического излучения, а при наличии обратной связи - генерацию лазерного излучения. Роль резонатора в полупроводниковых лазерах обычно выполняют сами полупроводники, торцы которых делают отражающими благодаря использованию полированных или сколотых поверхностей самого полупроводника.

Схематическое изображение типичного диодного лазера на основе полупроводника GaAs показано на рис. 12.3 а. Этот лазер излучает на длине волны  $\lambda = 0,84 \text{ мкм}$ . В одном из методов изготовления такой лазер создается из вырожденного полупроводника  $n$ -типа, содержащего в качестве доноров атомы теллура при плотности  $10^{18} \text{ см}^{-3}$ . Область  $p$ -типа создается диффузией акцептора, например, Zn с концентрацией  $10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Роль отражателей играют две боковые плоскопараллельные грани, перпендикулярные плоскости  $p - n$  перехода. Эти грани создаются полировкой или скалыванием.

Как уже было отмечено, в полупроводниковом диодном лазере область инверсной населенности обычно имеет толщину около 1 мкм. В

связи с этим типичной является ситуация, когда поперечный размер лазерной моды в несколько раз превышает размер активной области, составляя несколько микрон (рис. 12.3 б). Например, в GaAs лазере диаметр лазерной моды  $d_{\text{мод}} \simeq 2 - 5$  мкм, а толщина активного слоя  $l_d \simeq 1$  мкм. Отметим, что само существование лазерных мод в области  $p-n$  перехода обусловлено уменьшением показателя преломления полупроводника при удалении от центра перехода. Изменение показателя преломления обеспечивает существование так называемых волноводных мод, локализованных на весьма малых размерах.

Основным источником потерь в полупроводниковом диодном лазере являются потери, обусловленные свободными носителями тока: электронами в  $n$ -области и дырками в  $p$ -области. Поскольку лазерное поле достаточно глубоко проникает в  $p$ - и  $n$ -области, то оно эффективно взаимодействует с электронами и дырками. Свободные носители тока ускоряются электромагнитным полем и отдают свою энергию при столкновениях с решеткой полупроводника, что приводит к диссипации электромагнитной энергии и соответственно нагреву полупроводника. Данный механизм диссипации приводит к весьма сильному поглощению оптического излучения в полупроводнике и определяет весьма высокую пороговую плотность тока в диодном лазере на  $p-n$  переходе, которая оказывается порядка  $10^5$  А/см<sup>2</sup>. Из-за столь высокого значения пороговой плотности тока полупроводниковые диодные лазеры могут работать в непрерывном режиме только при низких температурах, когда пороговая плотность тока существенно понижается благодаря значительному увеличению коэффициента усиления.

## 12.2 Инжекционные лазеры на гетеропереходах

Типичная геометрия инжекционного лазера на двойной гетероструктуре (инжекционного ДГС-лазера) показана на рис. 12.4. В данном случае одна гетероструктура образована слоями GaAs и  $p\text{-Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ , а вторая гетероструктура - слоями  $n\text{-Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$  и GaAs. Активной средой является тонкий, шириной порядка 0,1 мкм слой GaAs. Рядом с активной областью расположены слои  $p$ - и  $n$ -типа материала  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ . При приложении к данной структуре прямого напряжения электроны инжектируются из материала  $n$ -типа  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$  в активную область GaAs. Аналогичным образом, дырки инжектируются из  $p$ -типа материала  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$  в активную область.

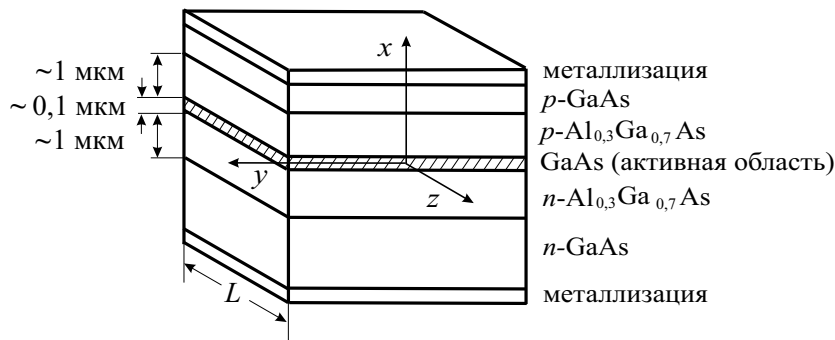


Рис. 12.4: Схематическое изображение инжекционного ДГС-лазера.

Для типичной двойной гетероструктуры пороговая плотность тока составляет величину порядка  $10^3$  А/см<sup>2</sup>, т. е. примерно на два порядка меньше, чем в лазерах на гомопереходах. Три основных причины лежат в основе такого резкого снижения плотности порогового тока (рис. 12.5). Во-первых, показатель преломления материала активной среды GaAs, составляющий значение  $n_1 \simeq 3,6$  больше показателя преломления окружающих слоёв, составляющего значение  $n_2 \simeq 3,4$  для  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ . Эта разность создаёт волноводный эффект для лазерного излучения, приводя к локализации лазерного света в активной области - эффекту, обычно называемому локализацией фотонов. Во-вторых, ширина запрещённой зоны в активной среде, составляющая значение  $E_{g1} \simeq 1,5$  эВ для GaAs меньше ширины запрещённой зоны  $E_{g2} \simeq 1,8$  эВ в окружающих слоях  $\text{Al}_{0,3}\text{Ga}_{0,7}\text{As}$ . Соответственно, энергетические барьеры на краях активного слоя удерживают электроны и дырки в активной области, т. е. обеспечивают локализацию носителей тока. Наконец, поскольку частота лазера  $\omega \simeq E_{g1}/\hbar$  меньше частоты запрещённого перехода  $E_{g2}/\hbar$ , то крылья лазерного поля слабо поглощаются окружающими слоями, хотя поглощение свободными носителями тока по-прежнему остаётся основным механизмом потерь в ДГС-лазере.

Приведённые три фактора являются основными факторами, обеспечивающими работу гетероструктурного лазера при комнатной температуре.

Величина порогового тока в инжекционном ДГС-лазере может быть оценена исходя из связи между коэффициентами усиления и поглощения. В стационарном режиме работы лазера усреднённое по объёму лазерной среды значение коэффициента усиления  $\langle g \rangle$  может быть связано со средними значениями коэффициентов потерь уравнением

$$\langle g \rangle L = \langle \alpha_{\text{акт}} \rangle L + \langle \alpha_n \rangle L + \langle \alpha_p \rangle L + \gamma_{\text{зер}}, \quad (12.3)$$

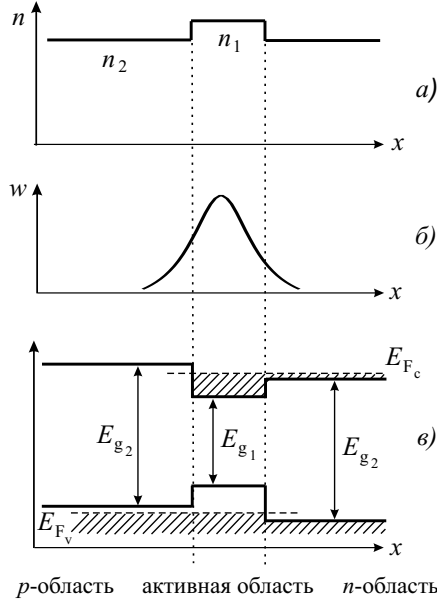


Рис. 12.5: Показатель преломления (а), плотность энергии лазерного поля (б), и зонная структура полупроводникового материала (в), используемого в лазере на двойной гетероструктуре.

где коэффициент  $\langle \alpha_{\text{акт}} \rangle$  характеризует распределённые потери в активной среде, коэффициенты  $\langle \alpha_n \rangle$  and  $\langle \alpha_p \rangle$  - потери в окружающих слоях  $n$ - и  $p$ -типа, величина  $\gamma_{\text{зер}}$  определяет потери на зеркалах,  $L$  есть длина активной среды.

В уравнении (12.3) усреднённые коэффициенты усиления и потерь определяются пространственным распределением интенсивности лазерного поля. Если представить электрическое поле лазерного излучения в виде  $E(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ , то усреднённый коэффициент усиления определяется соотношением

$$\langle g \rangle = \frac{\int_{\text{акт}} g(\mathbf{r}) |u(\mathbf{r})|^2 dV}{\int_{\text{рез}} |u(\mathbf{r})|^2 dV}, \quad (12.4)$$

где в числителе дроби интеграл взят по объёму активной среды, а в знаменателе - по объёму резонатора лазера. Усреднённые значения коэффициентов потерь  $\langle \alpha_n \rangle$  и  $\langle \alpha_p \rangle$  определяются подобными уравнениями. Для этих величин интеграл в знаменателе также берётся по объёму резонатора лазера, а интегралы в числителях - по объёмам соответствующих слоёв:

$$\langle \alpha_n \rangle = \frac{\int_{n\text{-слой}} \alpha_n(\mathbf{r}) |u(\mathbf{r})|^2 dV}{\int_{\text{рез}} |u(\mathbf{r})|^2 dV}, \quad \langle \alpha_p \rangle = \frac{\int_{p\text{-слой}} \alpha_p(\mathbf{r}) |u(\mathbf{r})|^2 dV}{\int_{\text{рез}} |u(\mathbf{r})|^2 dV}. \quad (12.5)$$

Следует подчеркнуть, что поскольку пространственное распределение лазерного поля различно для разных оптических мод, то приведенные усреднённые коэффициенты имеют смысл модальных коэффициентов усиления и потерь.

В простейшем приближении можно считать, что потери в областях  $n$  и  $p$  одинаковы, т. е.  $\langle \alpha_n \rangle = \langle \alpha_p \rangle = \alpha$ . Потери на зеркалах, образованных границами раздела GaAs-воздух, могут быть оценены как обусловленные пропусканием зеркал. В таком случае интенсивность падающего на зеркало излучения  $I_{\text{пад}}$  и интенсивность отражённого от зеркала излучения  $I_{\text{отр}}$  могут быть связаны двумя соотношениями

$$I_{\text{отр}}/I_{\text{пад}} = R = e^{-\gamma_{\text{зер}}},$$

из которых следует, что величина потерь на зеркалах может быть записана в виде  $\gamma_{\text{зер}} = -\ln R$ , где  $R$  есть коэффициент отражения зеркал.

В сформулированной простой модели уравнение (12.3) может быть трансформировано к виду

$$g\Gamma = \alpha_{\text{акт}}\Gamma + \alpha(1 - \Gamma) - \frac{1}{L} \ln R, \quad (12.6)$$

где  $g$  есть коэффициент усиления для плоской световой волны, а величина  $\Gamma$ , определённая уравнением

$$\Gamma = \frac{\int_{\text{акт}} |u(\mathbf{r})|^2 dV}{\int_{\text{рез}} |u(\mathbf{r})|^2 dV} \quad (12.7)$$

и называемая фактором локализации фотонов, определяет долю интенсивности лазерного излучения, локализованную в активном слое.

Приведём теперь некоторые оценки, типичные для ДГС-лазеров. В типичных условиях накачки при увеличении плотности носителей тока  $N$  поглощение полупроводниковой среды сменяется усилением при определённом значении плотности носителей тока  $N_{\text{пр}}$ , называемой плотностью достижения прозрачности. При ещё большем уровне накачки происходит увеличение коэффициента усиления до порогового значения  $N_{\text{пор}}$ , при котором и осуществляется генерация лазерного излучения. Таким образом, при достаточно высоких концентрациях носителей тока, когда происходит смена режима поглощения на режим усиления, коэффициент усиления может быть представлен в виде

$$g = \sigma_{\text{ус}} (N - N_{\text{пр}}),$$

где  $\sigma_{\text{ус}}$  есть так называемое дифференциальное усиление, имеющее размерность сечения. Если теперь предположить для оценок  $\alpha_{\text{акт}} = \alpha$ , то

уравнение (12.6) может быть переписано в виде

$$\sigma\Gamma(N - N_{\text{пр}}) = \alpha - \frac{1}{L} \ln R = \gamma/L, \quad (12.8)$$

где  $\gamma = \alpha L - \ln R$  есть полная величина потерь на проход резонатора.

Рассматривая теперь уравнение (12.8) вблизи порога генерации можно записать для пороговой плотности носителей тока соотношение

$$N_{\text{пор}} = N_{\text{пр}} + \frac{\gamma}{\sigma\Gamma L}. \quad (12.9)$$

Входящий в приведённые соотношения фактор локализации фотонов может быть оценен как

$$\Gamma \simeq \frac{D^2}{2 + D^2},$$

где

$$D = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sqrt{n_1^2 - n_2^2},$$

а  $a$  есть толщина активной области (в направлении  $x$ ).

Учтём теперь, что пороговая плотность носителей тока может быть связана с пороговой плотностью тока накачки. Положим, что скорость инжекции электронов и дырок в единицу объёма активной среды есть  $R_{\text{нак}}$ . В стационарных условиях эта величина может быть записана в виде

$$R_{\text{нак}} = \frac{N}{\eta_i \tau_{\text{рад}}},$$

где  $N$  есть плотность носителей тока,  $\tau_{\text{рад}}$  есть излучательное время жизни, а  $\eta_i$  есть внутренняя квантовая эффективность, т. е. доля носителей тока, которая рекомбинирует радиационно. Скорость инжекции носителей тока может быть также выражена через плотность тока  $J$ ,

$$R_{\text{нак}} = \frac{J}{ea},$$

где  $e$  есть заряд электрона. Из последних двух уравнений можно получить связь  $J = eaN/\eta_i \tau_{\text{рад}}$  и соответственно связать пороговую плотность тока с пороговой плотностью носителей тока соотношением

$$J_{\text{пор}} = \frac{eaN_{\text{пор}}}{\eta_i \tau_{\text{рад}}} = \frac{ea}{\eta_i \tau_{\text{рад}}} \left( N_{\text{пр}} + \frac{\gamma}{\sigma\Gamma L} \right), \quad (12.10)$$

где при получении второго равенства использовано уравнение (12.9). Подчеркнём, что пороговая плотность тока пропорциональна толщине  $a$  активного слоя.



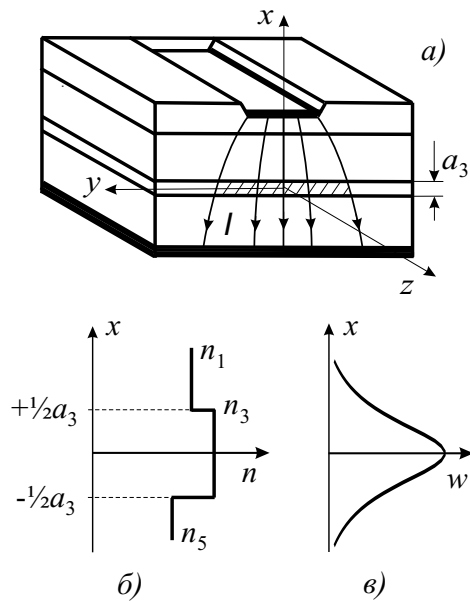


Рис. 12.6: а) Геометрическая структура полоскового лазера, б) показатель преломления лазерной среды, в) профиль интенсивности лазерного излучения.

Используя приведённые формулы можно дать следующие оценки для рассмотренного выше ДГС-лазера на структуре GaAs/Al<sub>0,3</sub>Ga<sub>0,7</sub>As. Полагая для показателей преломления лазерной среды значения  $n_1 = 3,6$  и  $n_2 = 3,4$  при длине волны  $\lambda = 850$  нм и принимая  $a = 0,1$  мкм получим  $D = 0,88$  и  $\Gamma = 0,28$ . Приняв для коэффициента распределённых потерь значение  $\alpha = 10$  см<sup>-1</sup>, для коэффициентов отражения зеркал значение  $R = 0,32$  и полагая длину резонатора  $L = 300$  мкм получим оценку  $\gamma = 1,44$ . Полагая дифференциальное усиление  $\sigma = 3,6 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup> и плотность носителей тока при достижении прозрачности  $N_{\text{пр}} = 2 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup> получим для пороговой плотности носителей тока  $N_{\text{пор}} = 2,5 \cdot 10^{18}$  см<sup>-3</sup>. Окончательно, полагая оценок  $\eta_i = 1$  и  $\tau_{\text{рад}} = 4$  нс получим для пороговой плотности тока  $J_{\text{пор}} = 10^3$  А/см<sup>2</sup>.

Резонаторы полупроводниковых диодных лазеров имеют поперечные размеры сопоставимые с длиной волны оптического диапазона. В типичном диодном лазере инжектируемый ток обычно сосредоточен в полоске, размеры которой значительно превышают глубину области рекомбинации носителей тока. Существенной особенностью диодного лазера является неоднородность его структуры в направлении, ортогональном направлению распространения лазерного света. Резонатор типичного полупроводникового лазера состоит из трёх областей 1, 3, and 5, показанных на рис. 12.6.

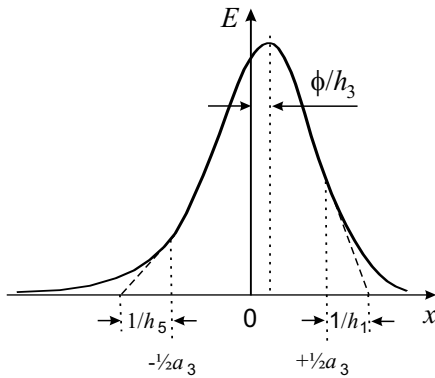


Рис. 12.7: Профиль распределения электрического поля низшей лазерной моды ТЕ.

Уравнения (5.54) и (5.55) определяют константы распространения для возможных ТЕ мод. Пространственная структура низшей ТЕ моды показана на рис. 12.7.

При типичном для полупроводников значении коэффициента преломления  $n_3 = 3,6$  коэффициент отражения составляет значение  $R \simeq 0,32$ . Поляризации лазерных мод ТЕ и ТМ показаны на рис. 12.8.

### 12.3 Распределённая обратная связь

В лазерах с распределённой обратной связью (РОС-лазерах) обратная связь обеспечивается не вследствие отражения света от торцевых отражателей, а благодаря отражению света непрерывно по всей длине резонатора. Такая обратная связь обычно реализуется вытравливанием периодической структуры вдоль лазерной среды и выращиванием на ней различных материалов. Идеализированный пример периодической полупроводниковой структуры, используемой в РОС-лазерах, показан на рис. 12.9.

С качественной точки зрения распространение света в резонаторе РОС-лазера может быть понято следующим образом. Положим, что световая волна с амплитудой  $f = f(z)$  распространяется в резонаторе слева направо как показано на рис. 12.9 г. Рассеяние света из прямой волны  $f(z)$  назад создаёт обратную волну с амплитудой  $b = b(z)$ , которая распространяется в направлении, противоположном направлению распространения исходной волны. Положим, что пространственная зависимость амплитуды прямой волны  $f(z)$  определяется экспоненциальным фактором  $\exp[i(kz - \omega t)]$ . Тогда распространение обратной волны с амплитудой  $b(z)$  будет определяться экспоненциальным фактором

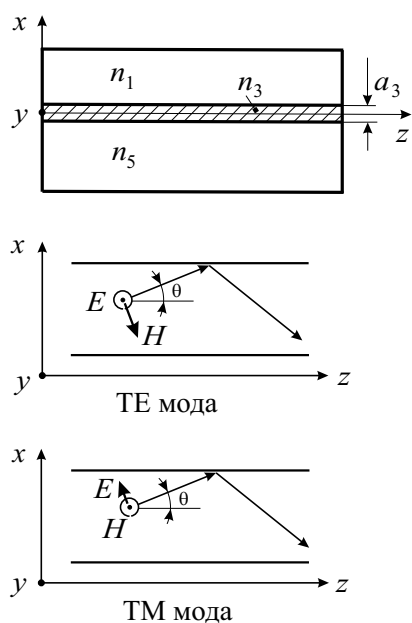


Рис. 12.8: Поляризации лазерных мод типов ТЕ и ТМ.

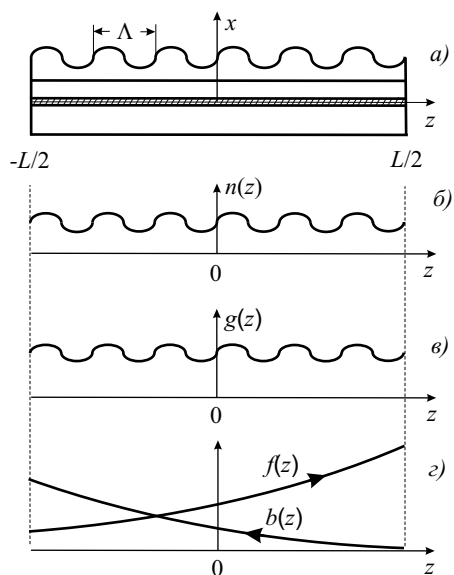


Рис. 12.9: Геометрия РОС лазера (а), пространственная зависимость показателя преломления (б), коэффициента усиления (в) и интенсивностей прямой и обратной волн (г).

$\exp[i(kz + \omega t)]$ . На пространственном периоде  $\Lambda$  фазовый сдвиг между данными волнами равен  $2k\Lambda = 2(\omega/c)n\Lambda$ , где  $n$  есть показатель преломления среды. Поскольку прямая и обратная волны интерферируют, то понятно, что волна  $f(z)$  будет распространяться без ослабления если разность фаз между волнами кратна  $2\pi$ , т. е. если выполнено условие

$$2k\Lambda = 2m\pi, \quad (12.11)$$

где  $m = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Отсюда следует, что условием распространения света без затухания является условие брэгговского рассеяния

$$\Lambda = m \frac{\lambda}{2}, \quad (12.12)$$

где  $\lambda = \lambda_0/n$  есть длина волны в среде, а  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  есть длина волны в свободном пространстве.

Количественный анализ распространения световых волн в периодической среде, показанной на рис. 12.9, может быть дан на основе волнового уравнения с комплексной относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ ,

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0^2 \varepsilon E = 0, \quad (12.13)$$

где  $k_0 = \omega/c$  есть волновой вектор в свободном пространстве. Действительная часть относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon' = n^2$  определяется периодическим показателем преломления, который в упрощённом анализе может быть представлен гармонической функцией

$$n = n_0 + n_1 \cos 2\beta_1 z,$$

где  $n_0$  есть пространственно-однородная часть показателя преломления,  $n_1$  есть амплитуда периодической части показателя преломления,  $2\beta_1 = 2\pi/\Lambda$  есть константа распространения. Мнимая часть относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon'' = gn_0/k_0$  определяется периодическим коэффициентом усиления  $g$ , который может быть для простоты также представлен в виде гармонической функции

$$g = g_0 + g_1 \cos 2\beta_1 z,$$

где  $g_0$  есть пространственно-однородная часть коэффициента усиления, а  $g_1$  - амплитуда периодической части.

Таким образом, в рассматриваемом случае периодической среды волновое уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + k_0 [k_0 (n_0 + n_1 \cos 2\beta_1 z)^2 + in_0 (g_0 + g_1 \cos 2\beta_1 z)] E = 0. \quad (12.14)$$

В дальнейшем анализе мы ограничимся случаем слабо модулированного показателя преломления, положив  $n_1 \ll n_0$ . В таком случае уравнение (12.14) может быть записано в виде

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + [\beta_0(\beta_0 + ig_0) + 4\beta_0\kappa \cos 2\beta_1]E = 0, \quad (12.15)$$

где  $\beta_0 = k_0 n_0$  есть константа распространения в среде с показателем преломления  $n_0$ , а величина

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( k_0 n_1 + \frac{i}{2} g_1 \right)$$

имеет смысл константы связи.

Решение уравнения (12.15) естественно искать в виде двух встречных волн с медленно-меняющимися амплитудами

$$E(z) = f(z)e^{-i\beta_1 z} + b(z)e^{i\beta_1 z}. \quad (12.16)$$

Подставляя данное решение в уравнение (12.15) и пренебрегая вторыми производными медленных амплитуд, а также быстро осциллирующими членами вида  $\exp(3i\beta_1 z)$  можно получить два дифференциальных уравнения первого порядка для медленных амплитуд

$$2i\beta_1 f' - [(\beta_0^2 - \beta_1^2) + i\beta_0 g_0]f - 2\beta_0 \kappa b = 0, \quad (12.17)$$

$$2i\beta_1 b' + [(\beta_0^2 - \beta_1^2) + i\beta_0 g_0]b + 2\beta_0 \kappa f = 0. \quad (12.18)$$

Заметим теперь, что равенство нулю расстройки между константами распространения, т. е. условие  $\delta = \beta_0 - \beta_1 = 0$  отвечает существованию первого брэгговского максимума, определённого уравнением (12.12) как  $\Lambda = \lambda_0/2n_0$ . Отсюда видно, что с физической точки зрения наиболее важным является случай когда расстройка  $\delta$  мала, поскольку в этом случае волны распространяются в периодической среде с минимальным затуханием. Считая расстройку малой можно положить

$$\beta_0^2 - \beta_1^2 = (\beta_0 + \beta_1)(\beta_0 - \beta_1) \simeq 2\beta_0 \delta.$$

После данного упрощения уравнения (12.17) и (12.18) принимают вид

$$f' - \left(\frac{1}{2}g_0 - i\delta\right) f + i\kappa b = 0, \quad (12.19)$$

$$b' + \left(\frac{1}{2}g_0 - i\delta\right) b - i\kappa f = 0. \quad (12.20)$$

Напомним, что уравнения (12.19) и (12.20) описывают распространение двух бегущих волн, показанных на рис. 12.9 г. Прямая волна с амплитудой  $f(z)$  распространяется слева направо. Эта прямая волна имеет

смысл исходной падающей волны при  $z = -L/2$  и конечной прошедшей волны при  $z = L/2$ . Встречная волна с амплитудой  $b(z)$  возникает благодаря обратному рассеянию прямой волны. Эта рассеянная назад волна распространяется справа налево, а её амплитуда определяется интенсивностью преобразования прямой волны в обратную. Соответственно амплитуда обратной волны равна нулю при  $z = L/2$ , т. е.  $b(L/2) = 0$ , поскольку прямая волна отсутствует при  $z > L/2$ . Таким образом, условие  $b(L/2) = 0$  является по существу граничным условием для рассматриваемой проблемы.

Решив уравнения (12.19) и (12.20) можно найти для амплитуды  $b(z)$  рассеянной назад волны общее решение

$$b(z) = A \operatorname{ch} \alpha(z - L/2) + B \operatorname{sh} \alpha(z - L/2),$$

где

$$\alpha^2 = \kappa^2 + \left(\frac{1}{2}g_0 - i\delta\right)^2.$$

Применив далее к данному решению граничное условие  $b(L/2) = 0$  можно видеть, что  $A = 0$ . Окончательно, решение для  $b(z)$  имеет вид

$$b(z) = B \operatorname{sh} \alpha(z - L/2).$$

Воспользовавшись этим решением можно найти из уравнения (12.20) амплитуду  $f(z)$  прямой волны,

$$f(z) = -i(B/\kappa) \left[ \alpha \operatorname{ch} \alpha(z - L/2) + \left(\frac{1}{2}g_0 - i\delta\right) \operatorname{sh} \alpha(z - L/2) \right].$$

Замечая теперь, что согласно уравнению (12.16) амплитуда исходной волны, падающей на периодическую среду при значении координаты  $z = -L/2$  есть

$$E_{\text{вх}} = f(-L/2) \exp(i\beta_1 L/2)$$

и используя предыдущее уравнение можно определить коэффициент  $B$  в виде

$$B = \frac{i\kappa E_{\text{вх}} \exp(-i\beta_1 L/2)}{\alpha \operatorname{ch} \alpha L - \left(\frac{1}{2}g_0 - i\delta\right) \operatorname{sh} \alpha L}.$$

После этого выписанные выше уравнения могут быть использованы для оценки коэффициентов пропускания и отражения периодической среды.

Величина поля отражённой волны  $E_{\text{отр}}$  согласно уравнению (12.16) определяется амплитудой отражённой волны в точке  $z = -L/2$ , т. е. имеет значение

$$E_{\text{отр}} = b(-L/2) \exp(-i\beta_1 L/2).$$

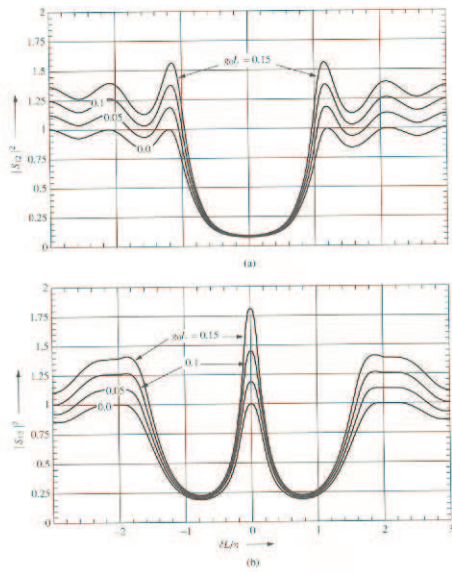


Рис. 12.10: Пропускание структуры с распределённой обратной связью.

Это уравнение может быть теперь переписано в виде

$$E_{\text{отр}} = -iE_{\text{вх}} \frac{\kappa \exp(-i\beta_1 L) \operatorname{sh} \alpha L}{\alpha \operatorname{ch} \alpha L - (\frac{1}{2}g_0 - i\delta) \operatorname{sh} \alpha L}.$$

Поле прошедшей волны  $E_{\text{пр}}$  определяется амплитудой прямой волны в точке  $z = L/2$ , т. е. как

$$E_{\text{пр}} = f(L/2) \exp(-i\beta_1 L/2).$$

Соответственно, оно может быть теперь записано в виде

$$E_{\text{пр}} = E_{\text{вх}} \frac{\alpha \exp(-i\beta_1 L)}{\alpha \operatorname{ch} \alpha L - (\frac{1}{2}g_0 - i\delta) \operatorname{sh} \alpha L}.$$

Окончательно, найденные значения полей определяют амплитудные коэффициенты отражения и пропускания  $r = E_{\text{отр}}/E_{\text{вх}}$  и  $t = E_{\text{пр}}/E_{\text{вх}}$  в виде

$$r = \frac{-i\kappa \exp(-i\beta_1 L) \operatorname{sh} \alpha L}{\alpha \operatorname{ch} \alpha L - (\frac{1}{2}g_0 - i\delta) \operatorname{sh} \alpha L}, \quad (12.21)$$

$$t = \frac{\alpha \exp(-i\beta_1 L)}{\alpha \operatorname{ch} \alpha L - (\frac{1}{2}g_0 - i\delta) \operatorname{sh} \alpha L}. \quad (12.22)$$

Как можно видеть из последних уравнений, большие значения выходных полей  $E_{\text{отр}}$  и  $E_{\text{пр}}$  при малом входном поле  $E_{\text{вх}}$  возникают в рассматриваемой системе при условии малости знаменателя,

$$\alpha \operatorname{ch} \alpha L - \left(\frac{1}{2}g_0 - i\delta\right) \operatorname{sh} \alpha L \simeq 0. \quad (12.23)$$

Это условие, очевидно, имеет смысл условия лазерной генерации. Выделив в этом уравнении действительную и мнимую части можно найти положения возможных лазерных частот и отвечающие им пороговые условия.

Как показывает анализ уравнения (12.23) в рассматриваемой системе лазерная генерация имеет место не при брэгговской длине волны, когда  $\delta = 0$ , а при двух смещённых длинах волн, отвечающих значениям  $\delta L/\pi \simeq \pm 1, 2$  (рис. 12.10). Для того, чтобы преодолеть этот недостаток используют "четвертьволновую" структуру, состоящую из двух периодических структур, разделённых "четвертьволновым" промежутком. Такая структура имеет один резонанс пропускания. Этот резонанс в "четвертьволновой" структуре обычно значительно сильнее резонансов в "простой" периодической структуре.

## 12.4 Распределённые брэгговские отражатели

Во многих диодных лазерах используются не резонаторы Фабри-Перо, а распределённые брэгговские отражатели (РБО), образованные периодически повторяющимися слоями полупроводниковых материалов. Такие решётки способны обеспечить не только высокие коэффициенты отражения, но и обладают высокой частотной селективностью, что позволяет применять их для достижения одномодового режима работы диодных лазеров. Схема распределённого брэгговского отражателя (РБО), состоящего из ряда слоёв с различными показателями преломления, показана на рис. 12.11 а.

Анализ распределённого брэгговского отражателя может быть выполнен прямо на основе уравнений предыдущего раздела. В случае РБО в приведённых выше уравнениях следует положить  $g_0 = 0$ ,  $g_1 = 0$  и, соответственно,  $\kappa = k_0 n_1/2$  и  $\alpha^2 = \kappa^2 - \delta^2$ .

Рассмотрим отражающие и пропускающие свойства РБО в ряде специальных случаев. Вблизи расстройки  $\delta = 0$ , т. е. вблизи первого брэгговского максимума, когда  $\lambda \simeq 2n_0\Lambda$ , коэффициент отражения по интенсивности  $R = |r|^2$  и коэффициент пропускания по интенсивности  $T = |t|^2$



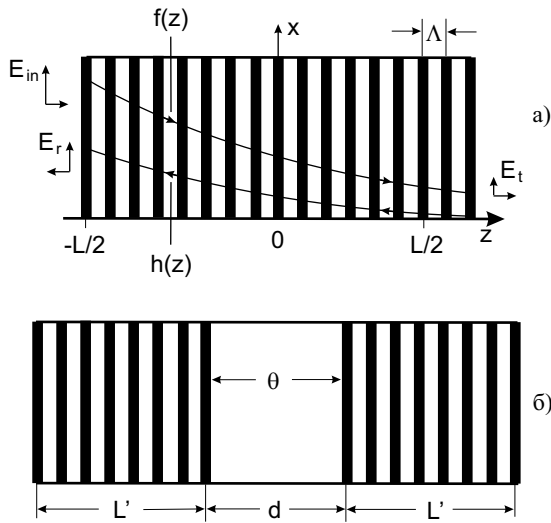


Рис. 12.11: а) Структура распределённого брэгговского отражателя. б) Двухсекционный распределённый брэгговский отражатель с фазовым сдвигом  $\theta$  между двумя частями.

имеют вид

$$R = th^2 \kappa L \simeq (1 - 2e^{-2\kappa L})^2,$$

$$T = 1/ch^2 \kappa L \simeq 4e^{-2\kappa L}.$$

При больших расстройках, когда  $\delta \rightarrow \kappa$ , коэффициенты отражения и пропускания по интенсивности имеют вид

$$R \simeq \frac{(\kappa L)^2}{1 + (\kappa L)^2},$$

$$T \simeq \frac{1}{1 + (\kappa L)^2}.$$

Область расстройк

$$-\kappa < \delta < \kappa$$

называется полосой затухания. Рис. 12.12 показывает коэффициенты пропускания и отражения как функции расстройки.

Два РБО, разнесённых на расстояние  $d$ , при определённых условиях представляет интерес в качестве узкополостного фильтра оптического излучения (рис. 12.11 б). Когда длина волны близка к брэгговской длине волны  $\lambda \simeq 2n_0\Lambda$  в коэффициенте пропускания возникает резонанс при значении расстояния

$$d = (2q + 1) \frac{\lambda_0}{4n_0},$$

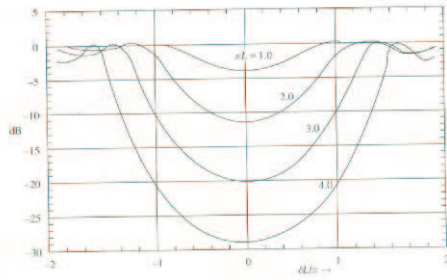


Рис. 12.12: Коэффициент пропускания РБО.

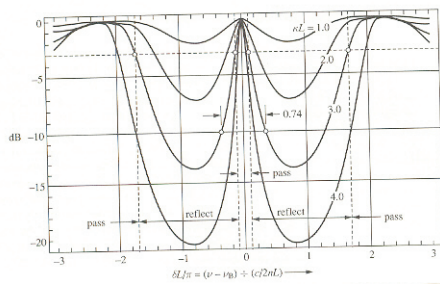


Рис. 12.13: Пропускание структуры из двух распределённых брэгговских отражателей.

где  $q$  есть целое число. При этих условиях между двумя РБО возникает сдвиг фазы

$$\theta = (2q + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, выбор "четвертьволнового" расстояния ( $\theta = \pi/2$ ) позволяет создать из двух РБО оптический фильтр с весьма узкой полосой (рис. 12.13).

## Глава 13

# Квантоворазмерные полупроводники

В полупроводниках, содержащих квантовые ямы, тонкий слой полупроводника с узкой запрещённой зоной помещается между двумя слоями полупроводника с более широкой запрещённой зоной (рис. 13.1а). В такой структуре движение электронов и дырок ограничивается потенциальными ямами. Потенциальная яма для электронов возникает вблизи дна зоны проводимости, а потенциальная яма для дырок возникает вблизи потолка валентной зоны (рис. 12.1б). В типичных структурах толщина узкого слоя полупроводника близка к де бройлевской длине волны электрона или дырки, составляя значение  $L_z \simeq 5 - 10$  нм.

Локализация электронов и дырок в квантовых ямах оказывает значительное влияние на свойства полупроводника. С точки зрения лазерной физики весьма важно, что малый размер области локализации носителей тока значительно снижает пороговую плотность тока. Это обстоятельство прямо следует из общей формулы (12.10), в которой в данном случае следует принять в качестве толщины  $a$  активной области величину  $L_z$ , т. е. положить  $a = L_z$ .

### 13.1 Структуры с квантовыми ямами

#### 13.1.1 Электронные состояния

Параметры полупроводника, содержащего квантовые ямы могут весьма сильно меняться в зависимости от состава выбранных материалов. Например, для полупроводниковой структуры AlGaAs/GaAs/AlGaAs глубины потенциальных ям в единицах разности ширин запрещённых зон

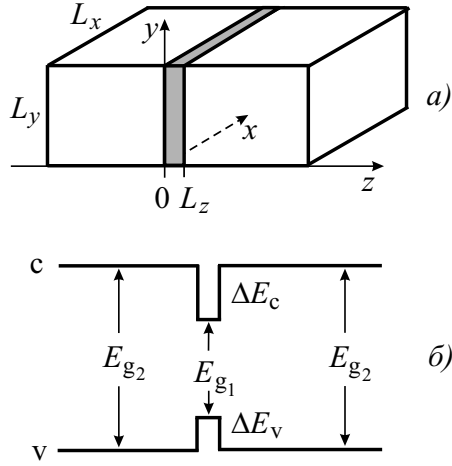


Рис. 13.1: а) Структура полупроводника с квантовой ямой. б) Энергетические зоны в полупроводнике с квантовыми ямами.

$\Delta E_g = E_{g_2} - E_{g_1}$  составляют значения  $\Delta E_c = 0,67 \Delta E_g$ , и  $\Delta E_v = 0,33 \Delta E_g$ .

Простейшие оценки уровней энергии электронов и дырок в квантовых ямах могут быть сделаны в приближении бесконечно глубоких потенциальных ям, когда предполагается, что  $\Delta E_c \rightarrow \infty$  и  $\Delta E_v \rightarrow \infty$ . При таких предположениях волновые функции носителей тока в зоне проводимости и валентной зоне могут быть представлены в виде произведений функций Блоха, описывающих движения по направлениям  $x$  и  $y$ , и функций  $\sin k_z z$ , описывающих локализованные движения в направлении  $z$ :

$$\psi_c(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}) e^{i(k_x x + k_y y)} \cdot \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin \frac{n\pi z}{L_z}, \quad (13.1)$$

$$\psi_v(\mathbf{r}) = u_v(\mathbf{r}) e^{i(k_x x + k_y y)} \cdot \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin \frac{n\pi z}{L_z}. \quad (13.2)$$

В выписанных уравнениях квантовое число  $n = n_z = 1, 2, 3, \dots$  определяет разрешённые значения волнового вектора в направлении  $z$  в виде  $k_z = n\pi/L_z$ . Разрешённые значения волнового вектора в плоскости  $xy$  в выбранном представлении бегущих электронных волн определяются граничными условиями вида (11.11)

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y,$$

где квантовые числа  $n_x$  и  $n_y$  пробегает значения  $n_x, n_y = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

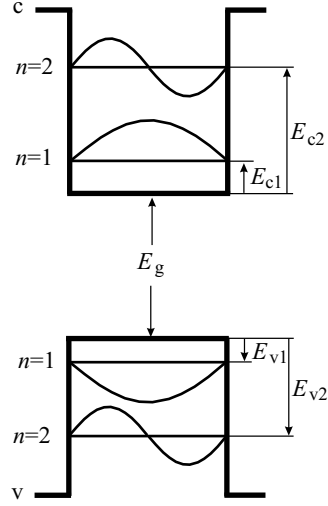


Рис. 13.2: Энергетические уровни и волновые функции носителей тока в полупроводнике с квантовой ямой.

Рассматривая совместно приближение параболических зон и приближение бесконечно глубоких потенциальных ям можно найти уровни энергии в зоне проводимости:

$$E_c = E_{cn} + \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m_c}, \quad E_{cn} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_c L_z^2}, \quad (13.3)$$

и уровни энергии в валентной зоне:

$$E_v = E_{vn} + \frac{\hbar^2 (k_x^2 + k_y^2)}{2m_v}, \quad E_{vn} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_v L_z^2}. \quad (13.4)$$

Первые два квантовых уровня в зоне проводимости с энергиями

$$E_{c1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_c L_z^2}, \quad E_{c2} = 4E_{c1} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_c L_z^2}$$

и первые два квантовых уровня в валентной зоне с энергиями

$$E_{v1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_v L_z^2}, \quad E_{v2} = 4E_{v1} = \frac{2\pi^2 \hbar^2}{m_v L_z^2}$$

показаны на рис. 13.2 совместно с координатной зависимостью волновых функций

$$F_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\left(\frac{n\pi z}{L_z}\right),$$

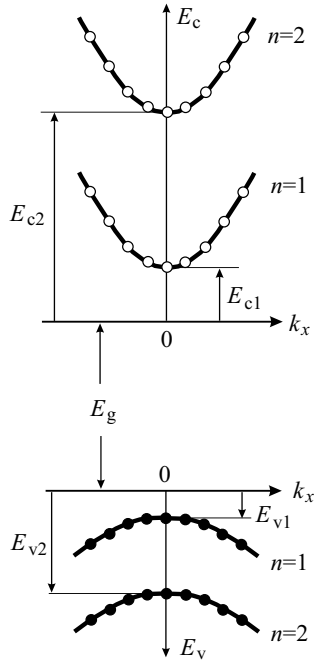


Рис. 13.3: Энергетические подзоны в полупроводнике с квантовыми ямами.

описывающих локализованные движения носителей тока по оси  $z$ . Рис. 13.3 показывает энергетические подзоны, обусловленные размерным квантованием движения носителей тока по оси  $z$ .

Рассмотрим в качестве примера систему AlGaAs/GaAs/AlGaAs, в которой квантовая яма образована полупроводником GaAs. Для данной системы в простейшем приближении в качестве эффективных масс могут быть взяты эффективные массы однородного полупроводника GaAs:  $m_c = 0,067 m_0$ ,  $m_v = m_{\text{тд}} = 0,46 m_0$ . Выберем, например,  $L_z = 10$  нм. В этом случае первый уровень в зоне проводимости имеет энергию

$$E_{c1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_c L_z^2} \simeq 56 \text{ мЭВ},$$

а первый уровень в валентной зоне - энергию

$$E_{v1} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_v L_z^2} \simeq 8 \text{ мЭВ}.$$

Если выбрать, например, соединение  $\text{Al}_{0,2}\text{Ga}_{0,8}\text{As}/\text{GaAs}$ , содержащее 20% Al и 80% Ga в широкозонном полупроводнике, то ширины запрещённых зон будут иметь значения  $E_{g1} = 1,42$  эВ,  $E_{g2} = 1,67$  эВ. Соответственно разность запрещённых зон будет составлять величину  $\Delta E_g = 250$  мЭВ, а

глубины потенциальных ям в зоне проводимости и валентной зоне будут иметь значения  $\Delta E_c = 0,65 \Delta E_g = 163$  мэВ,  $\Delta E_v = 0,35 \Delta E_g = 88$  мэВ.

Отметим, что если учесть, что потенциальные ямы имеют конечные глубины, и соответственно учесть туннелирование носителей тока через барьеры, то энергии первых уровней примут меньшие значения  $E_{c1} \simeq 28$  мэВ и  $E_{v1} \simeq 5$  мэВ.

### 13.1.2 Плотность состояний

В квантоворазмерных полупроводниках типичная ширина квантовой ямы  $L_z \simeq 5 - 10$  нм, в то время как два других размера  $L_x \simeq L_y \simeq 10 \div 100$  мкм. Соответственно интервал между состояниями по оси  $k_z$ ,  $\pi/L_z \sim (3 \cdot 10^6 - 10^7)$  см<sup>-1</sup>, в отношении  $10^3 - 10^4$  раз больше интервала между состояниями по осям  $k_x$  и  $k_y$ ,  $2\pi/L_{x,y} \sim (5 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^3)$  см<sup>-1</sup>.

Для двумерной кристаллической плоскости с размерами  $L_x, L_y$  разрешённые значения двумерного вектора  $\mathbf{k}_\perp = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y$  с компонентами  $k_x = 2\pi n_x/L_x$  и  $k_y = 2\pi n_y/L_y$  определяют число электронных состояний. Положим, что  $N(k_\perp)$  есть число состояний внутри "площади"  $\pi k_\perp^2$  в  $k$ -пространстве (величина  $k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$  меняется от 0 до  $k_\perp$ ). Поскольку в двумерной  $k_\perp$ -плоскости "площадь" единичной ячейки есть  $\Delta k_x \Delta k_y = (2\pi)^2/L_x L_y$ , то число состояний с двумя разрешёнными проекциями спина определено соотношением

$$N(k_\perp) = 2 \cdot \frac{\pi k_\perp^2}{\Delta k_x \Delta k_y} = \frac{k_\perp^2 S}{2\pi}, \quad (13.5)$$

где  $S = L_x L_y$  есть площадь в физическом пространстве.

Используя соотношение (13.5) можно определить плотность состояний, которая будучи отнесена к единичной площади, даёт соотношение

$$\tilde{\rho}(k_\perp) = \frac{1}{S} \frac{dN(k_\perp)}{dk_\perp} = \frac{k_\perp}{\pi}. \quad (13.6)$$

Данное соотношение естественно может быть применено как к зоне проводимости, так и к валентной зоне. Для зоны проводимости  $\tilde{\rho}(k_\perp) = \tilde{\rho}_c(k_\perp)$ , для валентной зоны  $\tilde{\rho}(k_\perp) = \tilde{\rho}_v(k_\perp)$ .

Наряду с определением плотности состояний по отношению к величине волнового вектора, т. е. в виде функции  $\tilde{\rho}(k_\perp)$ , плотность состояний может быть определена по отношению к величине энергии, т. е. как функция  $\tilde{\rho}(E)$ . Поскольку при любом определении плотности состояний само число состояний остаётся неизменным, то плотность состояний как функция энергии  $\tilde{\rho}(E)$  может быть найдена из уравнения

$$\tilde{\rho}(E) dE = \tilde{\rho}(k_\perp) dk_\perp.$$

Например, для зоны проводимости данное уравнение записывается в виде  $\tilde{\rho}_c(E_c)dE_c = \tilde{\rho}_c(k_\perp)dk_\perp$  и позволяет найти плотность состояний как функцию энергии из соотношения

$$\tilde{\rho}_c(E_c) = \tilde{\rho}_c(k_\perp) \frac{dk_\perp}{dE_c} = \frac{\tilde{\rho}_c(k_\perp)}{dE_c/dk_\perp}.$$

В приближении параболических зон согласно уравнению (13.3) для любой подзоны  $n = 1, 2, 3, \dots$  с энергией дна  $E_{cn}$

$$k_\perp^2 = \frac{2m_c}{\hbar^2} (E_c - E_{cn}).$$

Продифференцировав последнее соотношение и подставив результат в предыдущее уравнение можно получить явное выражение для плотности энергетических состояний для любой подзоны зоны проводимости

$$\tilde{\rho}_c(E_c) = \frac{m_c}{\pi\hbar^2}. \quad (13.7)$$

Подобное соотношение справедливо и для плотности энергетических состояний для любой подзоны  $n = 1, 2, 3, \dots$  валентной зоны,

$$\tilde{\rho}_v(E_v) = \frac{m_v}{\pi\hbar^2}. \quad (13.8)$$

Другое полезное определение плотности состояний может быть дано посредством отнесения плотности состояний к единице объёма  $V = L_x L_y L_z$ ,

$$\rho(k_\perp) = \frac{1}{V} \frac{dN(k_\perp)}{dk_\perp} = \frac{k_\perp}{\pi} \frac{1}{L_z}. \quad (13.9)$$

Для подзон, относящихся к зоне проводимости и валентной зоне, определённая таким образом плотность энергетических состояний есть

$$\rho_c(E_c) = \frac{1}{L_z} \tilde{\rho}_c(E_c) = \frac{m_c}{\pi\hbar^2} \frac{1}{L_z}, \quad (13.10)$$

$$\rho_v(E_v) = \frac{1}{L_z} \tilde{\rho}_v(E_v) = \frac{m_v}{\pi\hbar^2} \frac{1}{L_z}. \quad (13.11)$$

Подчёркнём, что уравнения (13.9), (13.10) и (13.11) определяют плотность состояний для заданной подзоны с определённым значением индекса  $n = 1, 2, 3, \dots$

Весьма полезно сравнить плотности состояний в квантоворазмерном полупроводнике с квантовой ямой и однородном полупроводнике. Такое сравнение естественно проводить для полной плотности состояний



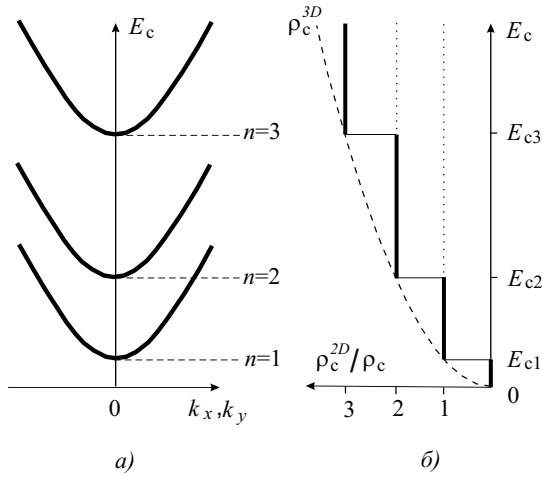


Рис. 13.4: Энергетические подзоны (а) и плотность состояний (б) в полупроводнике с квантовой ямой.

Таблица 13.1:

Энергия	$0 < E_c < E_{c1}$	$E_{c1} < E_c < E_{c2}$	$E_{c2} < E_c < E_{c3}$
Полная плотность состояний, $\rho_c^{2D}$	0	$\rho_c$	$2\rho_c$

$\rho^{2D}(E)$  в квантоворазмерном полупроводнике и плотности состояний  $\rho^{3D}(E)$  в объёмном полупроводнике. Для определённости будем рассматривать зону проводимости. В соответствии с определением полная плотность состояний  $\rho_c^{2D}(E_c)$  при любой заданной энергии  $E_c > E_{cm}$  должна учитывать аккумулированный эффект вкладов всех подзон с индексами  $n = 1, 2, \dots, m$ . Поскольку плотность состояний для всех подзон является одинаковой, то нетрудно видеть, что плотность состояний  $\rho_c^{2D}(E_c)$  равна нулю при  $E_c < E_{c1}$ , равна величине (13.10) при  $E_{c1} < E_c < E_{c2}$ , равна удвоенной величине (13.10) при  $E_{c2} < E_c < E_{c3}$  и т. д. как указано в Таблице 13.1 и на рис. 13.4.

Плотность состояний в единице объёма однородного полупроводника, рассматриваемая в зоне проводимости, согласно (11.19) есть

$$\rho_c^{3D}(E_c) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{2m_c}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E_c}.$$

Как можно видеть, при значении энергии

$$E_c = E_{cn} = \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_c L_z^2},$$

т.е. вблизи дна каждой подзоны обе плотности совпадают,

$$\rho_c^{3D}(E_c) = \rho_c^{2D}(E_c).$$

В пределе  $L_z \rightarrow \infty$ , когда квантоворазмерный полупроводник переходит в однородный полупроводник, расстояния между энергетическими подзонами уменьшаются,  $E_{cn} - E_{c,n-1} \rightarrow 0$ , и полная плотность состояний квантоворазмерного полупроводника переходит в плотность состояний объёмного полупроводника,  $\rho_c^{2D}(E_c) \rightarrow \rho_c^{3D}(E_c)$ .

### 13.1.3 Заселённости равновесных состояний

Подобно однородному полупроводнику, в квантоворазмерном полупроводнике в квазиравновесных условиях квазиуровни Ферми определяются плотностями электронов  $N_\ominus$  и дырок  $N_\oplus$ , инжектированных в энергетические зоны,

$$N_\ominus = \int \rho_c(E_c) f_c(E_c) dE_c,$$

$$N_\oplus = \int \rho_v(E_v) \bar{f}_v(E_v) dE_v.$$

В данных соотношениях плотности энергетических состояний  $\rho_c(E_c)$  и  $\rho_v(E_v)$  определены уравнениями (13.10), (13.11), а функции распределения  $f_c$  и  $\bar{f}_v$  определены уравнениями (11.28), (11.31).

В приближении параболических зон в данных интегралах плотность состояний является постоянной в пределах каждой подзоны (см. рис. 12.4). В связи с этим выписанные интегралы могут быть вычислены, что даёт уравнения вида

$$N_\ominus = k_B T \sum_{n=1,2,3,\dots} \left( \frac{m_c}{\pi \hbar^2 L_z} \right) \ln \left[ 1 + \frac{E_{F_c} - E_{cn}}{k_B T} \right], \quad (13.12)$$

$$N_\oplus = k_B T \sum_{n=1,2,3,\dots} \left( \frac{m_v}{\pi \hbar^2 L_z} \right) \ln \left[ 1 + \frac{E_{F_v} - E_{vn}}{k_B T} \right]. \quad (13.13)$$

Полученные трансцендентные уравнения определяют положения квазиуровней Ферми при заданных плотностях электронов  $N_\ominus$  и дырок  $N_\oplus$ .

### 13.1.4 Поглощение и усиление света

Рассмотрим поглощение монохроматического излучения квантоворазмерным полупроводником, содержащим квантовую яму. Анализ этого вопроса, по существу, повторяет соответствующее рассмотрение для однородного полупроводника.

Положим для определённости, что электрическое поле и векторный потенциал монохроматического излучения определены, как и в случае однородного полупроводника, соотношениями (11.38) и (11.39). Согласно соотношению (11.45) скорость стимулированных переходов электрона между состояниями в валентной зоне и зоне проводимости определяется матричным элементом перехода

$$M_T = \langle u_c | (\mathbf{e} \cdot \mathbf{p}) | u_v \rangle \langle F_c | F_v \rangle,$$

который включает матричный элемент  $\langle F_c | F_v \rangle$  взятый по огибающим функциям. Для функций, определённых уравнениями (13.1) и (13.2),

$$\begin{aligned} F_c &= F_{cn}(z) = \sqrt{2/L_z} \sin(n_c \pi z / L_z), \\ F_v &= F_{vn}(z) = \sqrt{2/L_z} \sin(n_v \pi z / L_z), \end{aligned}$$

матричный элемент  $\langle F_c | F_v \rangle$  отличен от нуля только если  $n_c = n_v$ . Это означает, что в приближении бесконечно глубоких потенциальных ям оптические переходы в квантоворазмерном полупроводнике с квантовой ямой следуют правилу отбора

$$\Delta n = n_c - n_v = 0, \quad (13.14)$$

т. е. правилу сохранения квантового числа  $n$ . Для реальных потенциальных ям конечной глубины правило отбора (13.14) естественно удовлетворяется только приближённо.

Для перехода между уровнем  $E_{vn}$ , принадлежащим  $n$ -ой подзоне валентной зоны, и уровнем  $E_{cn}$ , принадлежащим  $n$ -ой подзоне зоны проводимости, энергия перехода  $E$  есть

$$E = E_g + E_{cn} + E_{vn} + \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_r} = E_{gn} + \frac{\hbar^2 k_{\perp}^2}{2m_r}, \quad (13.15)$$

где приведённая масса определяется уравнением (11.53), а  $E_{gn} = E_g + E_{cn} + E_{vn}$  есть энергетический зазор между подзонами размерного квантования.

В случае полупроводника с квантовой ямой приведённая плотность состояний  $\rho_r(E)$ , определённая по отношению к энергии перехода  $E = \hbar\omega$ , может быть введена аналогично тому, как это было сделано для однородного полупроводника:

$$\rho_r(E) dE = \rho(k_{\perp}) dk_{\perp} = \frac{1}{L_z} \frac{k_{\perp}}{\pi} dk_{\perp}, \quad (13.16)$$

где  $\rho(k_{\perp})$  определяется уравнением (13.9). Комбинируя последние два уравнения можно вывести для приведённой плотности состояний в единице объёма соотношение

$$\rho_r(E) = \frac{m_r}{\pi \hbar^2} \frac{1}{L_z}. \quad (13.17)$$

Подчеркнём, что полученное соотношение определяет приведённую плотность состояний для переходов между подзонами с одним и тем же значением квантового числа  $n$ . Полная приведённая плотность состояний  $\rho_r^{2D}(E)$  может быть найдена суммированием приведённых плотностей состояний для всех пар подзон. В простейшем случае, когда осуществляются переходы между низшими подзонами со значением квантового числа  $n = 1$  полная плотность состояний  $\rho_r^{2D}(E) = \rho_r(E)$ .

Приведённые соотношения позволяют теперь оценить коэффициент поглощения для полупроводника с квантовой ямой. Повторяя вывод, представленный в разделе 10.6, можно видеть, что коэффициент поглощения определяется уравнением (11.60), в котором величина  $\rho_r(E)$  должна быть заменена на полную плотность состояний  $\rho_r^{2D}(E)$ .

Отсюда следует, что коэффициент поглощения полупроводника с квантовой ямой для оптических переходов между подзонами  $1v$  и  $1c$  может быть записан в виде

$$\alpha(E) = \alpha_0 [f_v(E_v) - f_c(E_c)], \quad (13.18)$$

где  $E = \hbar\omega$  и

$$\alpha_0 = \frac{e^2 m_r}{c \varepsilon_0 m_0^2 \omega n \hbar^2 L_z} |M_T|^2. \quad (13.19)$$

Коэффициент поглощения для переходов между подзонами  $2v$  и  $2c$  соответственно составляет в два раза большую величину, для переходов между подзонами  $3v$  и  $3c$  в три раза большую величину, и т. д.

Таким образом, в простейшем подходе коэффициент поглощения квантоворазмерного полупроводника с квантовой ямой является ступенчатой функцией энергии, причём величина ступени определяется уравнением (13.18). Зависимость коэффициента поглощения от энергии показана на рис. 13.5.

Рассмотрим опять в качестве примера квантовую яму, образованную полупроводником GaAs. В этом примере ширина запрещённой зоны  $E_g = 1,43$  эВ, частота оптического перехода  $\nu = 3,4 \cdot 10^{14}$  Гц, длина волны оптического перехода  $\lambda = 833$  нм, эффективные массы  $m_c = 0,067 m_0$ ,  $m_v = 0,46 m_0$ ,  $m_r = 0,059 m_0$ , показатель преломления  $n = 3,64$ , сумма энергий квантовых состояний  $E_{v1} + E_{c1} \simeq 65$  мэВ,  $|M_T|^2/m_0 \simeq 14,4$

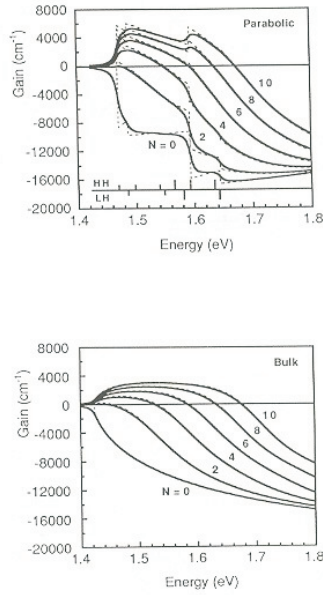


Рис. 13.5: Коэффициент поглощения полупроводника с квантовой ямой.

эВ. Для GaAs ширина запрещённой зоны превышает тепловую энергию, соответственно функции распределения имеют приближённые значения  $f_v(E_v) \simeq 1$  и  $f_c(E_c) \simeq 0$ , а коэффициент поглощения имеет значение близкое к максимальному,  $\alpha \simeq \alpha_0 \simeq 5 \text{ см}^{-1}$ .???

В случае инвертированного полупроводника с квантовой ямой коэффициент усиления может быть получен простыми заменами  $c \rightarrow v$  и  $v \rightarrow c$  в уравнении (13.18). Для оптических переходов между подзонами  $1c$  и  $1v$  коэффициент усиления имеет вид

$$g(E) = \frac{e^2 m_r}{c \varepsilon_0 m_0^2 \omega n \hbar^2 L_z} |M_T|^2 [f_c(E_c) - f_v(E_v)]. \quad (13.20)$$

Зависимость коэффициента усиления от энергии показана на рис. 13.6.

Необходимым условием положительности коэффициента усиления является условие инверсии населённостей

$$f_c(E_c) > f_v(E_v).$$

В дополнение к этому усиление положительно для оптических частот

$$\hbar\omega = E_c - E_v < E_{F_c} - E_{F_v}.$$

Вместе с тем, величина оптического кванта  $\hbar\omega$  должна быть больше энергетического зазора между квантованными подзонами  $E_{g1} = E_g + E_{v1} + E_{c1}$ .

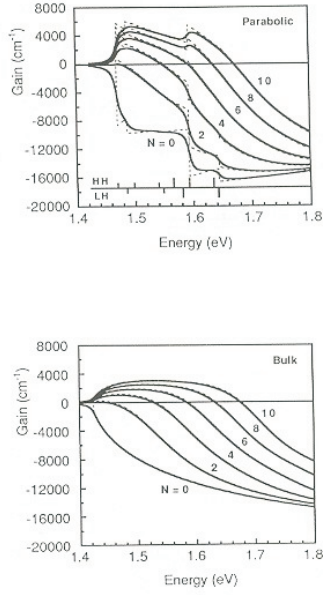


Рис. 13.6: Коэффициент усиления полупроводника с квантовой ямой.

Отсюда следует, что усиление положительно при условиях

$$E_g + E_{v1} + E_{c1} < \hbar\omega < E_{F_c} - E_{F_v}. \quad (13.21)$$

Соответственно пороговое условие для полупроводника с квантовой ямой имеет вид

$$E_{F_c} - E_{F_v} = E_g + E_{v1} + E_{c1}. \quad (13.22)$$

Это условие определяет пороговую плотность носителей тока  $N_{\text{пор}}$ . Для полупроводникового материала GaAs, содержащего квантовую яму, пороговая плотность оценивается как  $N_{\text{пор}} \simeq 1,25 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$ .

## 13.2 Квантовые нити и квантовые точки

В квантоворазмерном полупроводнике с квантовыми нитями материал малого поперечного сечения с малой шириной запрещённой зоны находится внутри материала с большей шириной запрещённой зоны (рис. 13.7 а). В такой структуре электроны вблизи дна зоны проводимости и дырки вблизи потолка валентной зоны находятся в двумерной потенциальной яме. В квантоворазмерном полупроводнике с квантовыми точками материал малого объёма с узкой запрещённой зоной находится внутри

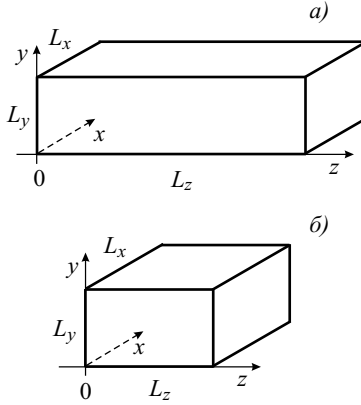


Рис. 13.7: а) Полупроводниковая квантовая нить. б) Полупроводниковая квантовая точка.

материала с широкой запрещённой зоной (рис. 13.7 б). В такой структуре электроны вблизи дна зоны проводимости и дырки вблизи потолка валентной зоны находятся в трёхмерной потенциальной яме.

В типичном полупроводнике, содержащем квантовые нити, поперечные размеры нитей  $L_x, L_y$  сравнимы с де Бройлевской длиной волны электрона и дырки, т. е. имеют размеры около 5 – 10 нм. Соответственно, в полупроводнике с квантовыми точками все три размера квантовых точек  $L_x, L_y$  и  $L_z$  сравнимы с де Бройлевской длиной волны электрона или дырки. Локализация электронов и дырок в квантовых нитях и квантовых точках значительно меняет свойства полупроводников, увеличивая усиление и соответственно снижая пороговую плотность тока.

### 13.2.1 Электронные состояния

Простая оценка уровней энергии электронов и дырок в квантоворазмерных полупроводниках с квантовыми нитями и точками может быть дана в предположении бесконечно глубоких потенциальных ям, т. е. в предположении справедливости условий  $\Delta E_c \rightarrow \infty$  и  $\Delta E_v \rightarrow \infty$ .

При данных предположениях волновые функции носителей тока в зоне проводимости и валентной зоне для полупроводника с квантовыми нитями определяются функциями Блоха для направления вдоль оси  $z$  и локализованными функциями для направлений по осям  $x$  и  $y$ ,

$$\psi_c(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}) e^{ik_z z} \cdot \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin \frac{l\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y}, \quad (13.23)$$

$$\psi_v(\mathbf{r}) = u_v(\mathbf{r}) e^{ik_z z} \cdot \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin \frac{l\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y}. \quad (13.24)$$

В выписанных уравнениях квантовые числа  $l, m = 1, 2, 3, \dots$  определяют разрешённые значения проекций волновых векторов  $k_x = l\pi/L_x$ ,  $k_y = m\pi/L_y$ . Разрешённые значения волнового вектора в направлении оси  $z$  в использованном представлении бегущих электронных волн определяются соотношением вида (11.11)

$$k_z = \frac{2\pi}{L_z}n,$$

где квантовое число  $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

В приближениях параболических зон и бесконечно глубоких потенциальных ям уровни энергии в зоне проводимости и валентной зоне для полупроводника с квантовыми нитями имеют вид

$$E_c = E_{clm} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_c}, \quad E_{clm} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_c} \left( \frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right), \quad (13.25)$$

$$E_v = E_{vlm} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_v}, \quad E_{vlm} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_v} \left( \frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right). \quad (13.26)$$

Данные уровни энергии включают квантованные энергетические уровни  $E_{clm}, E_{vlm}$ , отвечающие локализованным движениям в плоскости  $xy$ , и энергию движения в периодическом потенциале в направлении  $z$ .

Для полупроводника с квантовыми точками волновые функции носителей тока в зоне проводимости и валентной зоне определяются функциями Блоха и функциями, описывающими локализацию носителей тока во всех трёх направлениях,

$$\psi_c(\mathbf{r}) = u_c(\mathbf{r}) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \sin \frac{l\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \sin \frac{n\pi z}{L_z}, \quad (13.27)$$

$$\psi_v(\mathbf{r}) = u_v(\mathbf{r}) \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \sin \frac{l\pi x}{L_x} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \sin \frac{n\pi z}{L_z}, \quad (13.28)$$

где квантовые числа  $l, m, n = 1, 2, 3, \dots$ . В стандартном приближении бесконечно глубоких ям уровни энергии в зоне проводимости и валентной зоне для полупроводника с квантовыми точками определены соотношениями

$$E_c = E_{clmn} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_c} \left( \frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right), \quad (13.29)$$

$$E_v = E_{vlmn} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_v} \left( \frac{l^2}{L_x^2} + \frac{m^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right). \quad (13.30)$$

Данные уровни энергии полностью обусловлены локализацией носителей тока в трёхмерном пространстве  $x, y, z$ .



### 13.2.2 Плотность состояний

В полупроводнике с квантовыми нитями разрешённые значения одномерного волнового вектора  $k_z = 2\pi n/L_z$  определяют возможные электронные состояния. Учтём, что волновой вектор меняется от  $-k$  до  $k$  и положим, что  $N(k_z)$  есть число состояний, расположенных на линии длиной  $2k_z$  в  $k$ -пространстве. Поскольку в одномерном  $k$ -пространстве "длина" единичной ячейки есть  $\Delta k_z = 2\pi/L_z$ , то число состояний с двумя разрешёнными проекциями спина есть

$$N(k_z) = 2 \cdot \frac{2k_z}{\Delta k_z} = \frac{2k_z L_z}{\pi}. \quad (13.31)$$

Соответственно для полупроводника объёмом  $V = L_x L_y L_z$  плотность состояний в единице объёма есть

$$\rho(k_z) = \frac{1}{V} \frac{dN(k_z)}{dk_z} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{L_x L_y}. \quad (13.32)$$

Величина (13.32) определяет объёмную плотность состояний при заданных числах  $l, m$ , или, что эквивалентно, при заданной энергии  $E_{clm}$  или  $E_{vlm}$ . Когда определение (13.32) применяется к зоне проводимости  $\rho(k_z) = \rho_c(k_z)$ , а при применении к валентной зоне  $\rho(k_z) = \rho_v(k_z)$ .

Наряду с определением по отношению к волновому вектору, т. е. в виде  $\rho(k_z)$ , плотность состояний может быть определена по отношению к величине энергии, т. е. как  $\rho(E)$ . Эта величина может быть найдена из соотношения  $\rho(E)dE = \rho(k_z)dk_z$ , которое может быть применено как к зоне проводимости, так и к валентной зоне. Так, для зоны проводимости

$$\rho_c(E_c) = \rho_c(k_z) \frac{dk_z}{dE}.$$

Для полупроводника с квантовой нитью, рассматриваемого в приближении параболических зон, связь волнового вектора с энергией определяется соотношениями (13.25), (13.26) согласно которым для зоны проводимости

$$k_z^2 = \frac{2m_c}{\hbar^2} (E_c - E_{lm}).$$

Взяв производную от последнего уравнения и подставив в предыдущее уравнение можно получить для плотности состояний любой подзоны, относящейся к зоне проводимости, соотношение

$$\rho_c(E_c) = \frac{\sqrt{2m_c}}{\pi \hbar L_x L_z} \frac{1}{\sqrt{E_c - E_{clm}}} \quad (13.33)$$

и аналогичное соотношение для любой подзоны, относящейся к валентной зоне,

$$\rho_v(E_v) = \frac{\sqrt{2m_v}}{\pi\hbar L_x L_z} \frac{1}{\sqrt{E_v - E_{vlm}}}. \quad (13.34)$$

Уравнения (13.33), (13.34) определяют плотность состояний на единицу объёма для любой подзоны с индексами  $l, m = 1, 2, 3, \dots$

Для полупроводника с квантовой точкой каждый уровень энергии отвечает двум электронным состояниям с разными проекциями спина. В связи с этим плотность состояний для любого уровня энергии  $E_{clmn}$  или  $E_{vlmn}$  в полупроводнике с квантовой точкой будучи отнесена к единице объёма определяется соотношениями, которые для зоны проводимости и валентной зоны имеют вид

$$\rho_c(E_c) = \frac{2}{L_x L_y L_z} \delta(E - E_{clmn}), \quad (13.35)$$

$$\rho_v(E_v) = \frac{2}{L_x L_y L_z} \delta(E - E_{vlmn}). \quad (13.36)$$

Полезно сравнить плотности состояний в квантоворазмерных полупроводниках и однородных полупроводниках. Таблица 13.2 показывает полную плотность состояний  $\rho^{ND}(E)$ ,  $N = 3, 2, 1, 0$  для разных типов квантоворазмерных полупроводников с учётом двух спиновых состояний.

Рис. 13.8 показывает полную плотность состояний для однородного полупроводника и квантоворазмерных полупроводников с квантовой ямой, квантовой нитью и квантовой точкой.

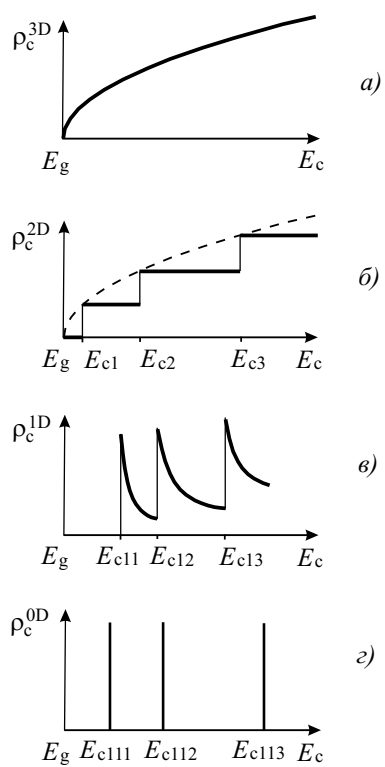


Рис. 13.8: Плотность состояний в зоне проводимости для объёмного полупроводника (а), полупроводника с квантовой ямой (б), квантовой нитью (в), и квантовой точкой (г).

Таблица 13.2: Полная плотность состояний в единице объёма для объёмного (3D) полупроводника и полупроводников с квантовой ямой (2D), квантовой нитью (1D) и квантовой точкой (0D) (с учётом двух спиновых состояний).

Размерность	Полная плотность состояний
3D	$\rho^{3D}(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{3/2} \sqrt{E}$
2D	$\rho^{2D}(E) = \frac{m^*}{\pi\hbar^2} \frac{1}{L_z} \sum_l \theta(E - E_l)$
1D	$\rho^{1D}(E) = \frac{\sqrt{2m^*}}{\pi\hbar} \frac{1}{L_x L_y} \sum_{lm} \frac{1}{\sqrt{E - E_{lm}}}$
0D	$\rho^{0D}(E) = \frac{2}{L_x L_y L_z} \sum_{lmn} \delta(E - E_{lmn})$

## Глава 14

# Лазеры на квантоворазмерных структурах

### 14.1 Поверхностно-излучающие инжекционные микролазеры

В ряде применений полупроводниковых лазеров желательно иметь двумерные решётки лазеров высокой плотности. Решение такой проблемы было найдено благодаря разработке поверхностно-излучающих инжекционных микролазеров. Резонаторы таких лазеров расположены по нормали к активной области, т. е. к плоскости полупроводниковой пластины. В качестве активной области обычно используется двойная гетероструктура, содержащая набор квантовых ям, квантовых нитей или квантовых точек. Поскольку длина активной области обычно весьма мала, например, всего порядка 10 нм в случае одной квантовой ямы, то усиление активной среды должно быть весьма велико, порядка  $10^3$ - $10^4$  см<sup>-1</sup>, а зеркала должны обеспечивать весьма высокие значения коэффициентов отражения, типично больше 99%.

#### 14.1.1 Материальная структура

Материальные структуры поверхностно-излучающих микролазеров могут быть весьма разнообразны. В качестве примера можно указать систему InGaAs/GaAs/AlGaAs. Эта система содержит InGaAs/GaAs квантовые ямы и излучает на длинах волн вблизи 980 нм.

Типичная структура инжекционного поверхностно-излучающего микролазера показана на рис. 14.1. Верхний и нижний распределённые брэгговские отражатели (РБО) состоят из слоёв полупроводниковых матери-



Рис. 14.1: Геометрия поверхностно-излучающего инжекционного микролазера с активной областью, содержащей три квантовых ямы.

алов с различным составом. Часто используется 10-20 слоёв материала с оптической толщиной  $nd = \lambda/4$ , при которой весь набор слоёв работает как интерференционное зеркало. Полная толщина РБО составляет соответственно несколько мкм. Усиление обеспечивается квантовыми ямами, которые помещены между РБО. Толщина одной квантовой ямы обычно составляет значение около 5-10 нм. Типичная длина резонатора, т. е. расстояние между двумя РБО, составляет величину  $L \simeq \lambda/n \simeq 0,3$  мкм для длины волны  $\lambda = 1$  мкм.

Рис. 14.2 показывает структуру поверхностно-излучающего инжекционного микролазера с несколькими квантовыми ямами и зависимости коэффициента усиления, напряжённости и интенсивности электрического поля от расстояния в направлении испускания лазерного излучения. Следует обратить внимание, что квантовые ямы специально помещаются вблизи максимумов стоячей лазерной волны для увеличения эффективности излучения активной среды в лазерное поле.

### 14.1.2 Распределённые брэгговские отражатели

Простые оценки коэффициентов отражения многослойных РБО, используемых в поверхностно-излучающих инжекционных микролазерах, могут быть получены из уравнений, описывающих стационарный режим генерации лазера. В том случае, когда квантовые ямы находятся в пучностях стоячей волны лазерного излучения, эффективное значение коэффициента усиления составляет величину  $2g$ , где  $g$  есть коэффициент

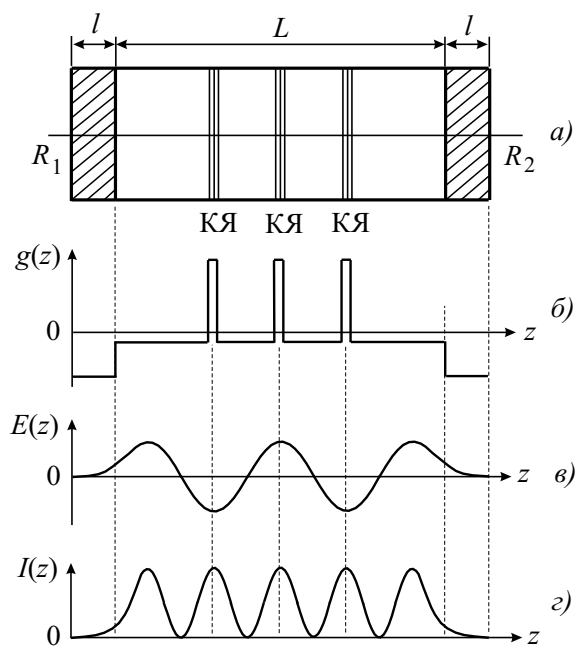


Рис. 14.2: Структура поверхностно-излучающего инжекционного микролазера с тремя квантовыми ямами (а) и пространственная зависимость коэффициента усиления (б), амплитуды электрического поля (в) и интенсивности лазерного излучения (г).

Таблица 14.1: Коэффициент отражения РБО.

Количество КЯ, $N$	Коэффициент отражения одного РБО, $R$
1	0,993
2	0,986
3	0,979
4	0,972

усиления материала квантовой ямы. Появление множителя 2 связано с тем, что для лазерного поля в форме стоячей волны, имеющего пространственную зависимость вида  $E(z) = E_0 \sin kz$ , интенсивность лазерного излучения  $I(z) = I_0 \sin^2 kz$  в максимуме в два раза превышает среднее значение интенсивности.

Пренебрегая в рамках простых оценок поглощением излучения в материале лазерной среды можно записать условие стационарной генерации лазера в виде

$$I_0 e^{2gNa_{\text{кя}}} \cdot R_2 \cdot e^{2gNa_{\text{кя}}} \cdot R_1 = I_0,$$

где  $I_0$  есть интенсивность излучения в некоторой начальной точке,  $N$  есть число квантовых ям, а  $a_{\text{кя}}$  есть ширина одной квантовой ямы. Полагая коэффициенты отражения РБО одинаковыми,  $R_1 = R_2 = R$ , можно получить из приведённого уравнения оценку коэффициента отражения в виде

$$R = e^{-2gNa_{\text{кя}}}.$$

Взяв для оценок  $g = 5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$  и  $a_{\text{кя}} = 7 \text{ нм}$  получим значения коэффициента отражения  $R$ , приведённые в таблице 14.1.

Приведённые в таблице 14.1 числа показывают, что в поверхностно-излучающих инжекционных микролазерах на квантовых ямах коэффициенты отражения РБО должны иметь относительно высокие значения. Требуемая величина коэффициента отражения естественно снижается по мере увеличения числа квантовых ям.

Коэффициенты отражения реального брэгговского отражателя, показанного на рис. 14.3, могут быть получены следуя процедуре, ранее рассмотренной в разделе 12.5. В качестве основы анализа РБО может быть взято волновое уравнение, описывающее распространение по оси  $z$  монохроматического светового поля частоты  $\omega$ :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(z) E = 0, \quad (14.1)$$

где  $k_0 = \omega/c$  есть константа распространения в свободном пространстве,  $n(z)$  есть периодический по координате  $z$  показатель преломления.



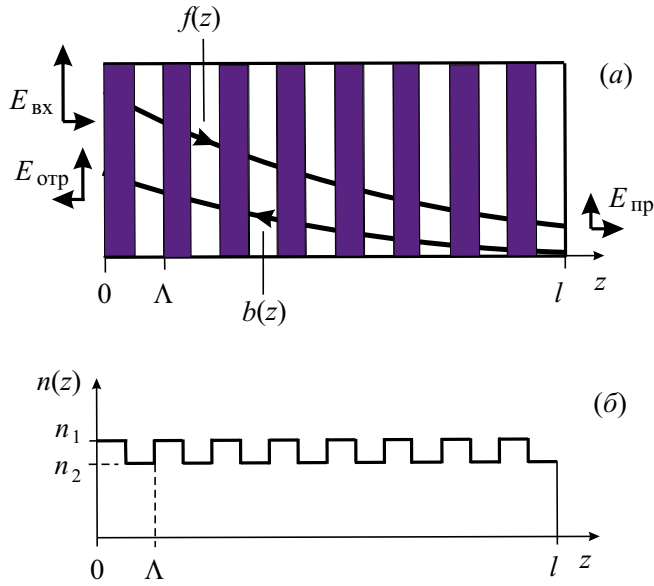


Рис. 14.3: Геометрическая структура (а) и показатель преломления (б) распределённого брэгговского отражателя.

Для получения аналитического решения уравнения (14.1) удобно представить квадрат периодического показателя преломления в виде

$$n^2(z) = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \frac{n_1^2 - n_2^2}{2} \xi(z),$$

где функция  $\xi(z)$  описывает прямоугольную волну единичной амплитуды с периодом  $\Lambda/2$ , т. е.

$$\xi(z) = \begin{cases} 1 & \text{if } n\Lambda < z < (n + 1/2)\Lambda, \\ -1 & \text{if } (n + 1/2)\Lambda < z < (n + 1)\Lambda, \end{cases}$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Разложив функцию  $\xi(z)$  в ряд Фурье

$$\xi(z) = \sum_{m=0, \pm 1, \dots} \frac{i(e^{-im\pi} - 1)}{m\pi} e^{2\pi imz/\Lambda}$$

и учитывая три первых члена ряда, т. е. представив функцию в виде

$$\xi(z) = 1 + \frac{4}{\pi} \sin \frac{2\pi z}{\Lambda},$$

можно получить для показателя преломления приближённое соотношение

$$n^2(z) = n_1^2 + \frac{4\bar{n}\Delta n}{\pi} \sin 2\beta_1 z, \quad (14.2)$$

в котором  $\bar{n} = \frac{1}{2}(n_1 + n_2)$  есть среднее значение показателя преломления,  $\Delta n = n_1 - n_2$  есть амплитуда модуляции показателя преломления,  $2\beta_1 = 2\pi/\Lambda$  есть константа распространения. Отметим, что данное приближение тем лучше описывает показатель преломления, чем меньше амплитуда модуляции  $\Delta n$  по сравнению со средним значением  $\bar{n}$ .

Подстановка (14.2) в уравнение (14.1) приводит к уравнению вида (12.15)

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + (\beta_0^2 + 4\beta_0\kappa \sin 2\beta_1 z) E = 0, \quad (14.3)$$

где  $\beta_0 = k_0 n_1 \simeq k_0 \bar{n}$  имеет смысл константы распространения в среде с постоянным показателем преломления, а  $\kappa = k_0 \Delta n / \pi$  есть константа связи, предполагающаяся малой по сравнению с константой распространения  $\beta_0$ .

Решение уравнения (14.3) может быть найдено в виде двух встречных волн с медленно меняющимися амплитудами

$$E(z) = f(z)e^{-i\beta_1 z} + b(z)e^{i\beta_1 z}. \quad (14.4)$$

Подставляя данное решение в уравнение (14.3), пренебрегая вторыми производными медленно меняющихся амплитуд и учитывая малость константы связи можно получить два связанных дифференциальных уравнения первого порядка

$$2i\beta_1 \frac{\partial f}{\partial z} - (\beta_0^2 - \beta_1^2)f - 2i\beta_0\kappa b = 0, \quad (14.5)$$

$$2i\beta_1 \frac{\partial b}{\partial z} + (\beta_0^2 - \beta_1^2)b - 2i\beta_0\kappa f = 0. \quad (14.6)$$

В наиболее интересном случае малых расстройок  $\delta = \beta_0 - \beta_1$ , когда  $\beta_0 \simeq \beta_1$  и соответственно длина волны  $\lambda$  близка к первому брэгговскому максимуму, т. е.  $\lambda \simeq 2\bar{n}\Lambda$ , можно записать приближённое соотношение

$$\beta_0^2 - \beta_1^2 \simeq 2\beta_0\delta.$$

После этого уравнения (14.5), (14.6) сводятся к виду

$$\frac{\partial f}{\partial z} + i\delta f - \kappa b = 0, \quad (14.7)$$

$$\frac{\partial b}{\partial z} - i\delta b - \kappa f = 0. \quad (14.8)$$

Решив последние уравнения можно выписать для амплитуды  $b(z)$  рассеянной назад волны общее решение

$$b(z) = A \operatorname{ch} \alpha(z - l) + B \operatorname{sh} \alpha(z - l),$$

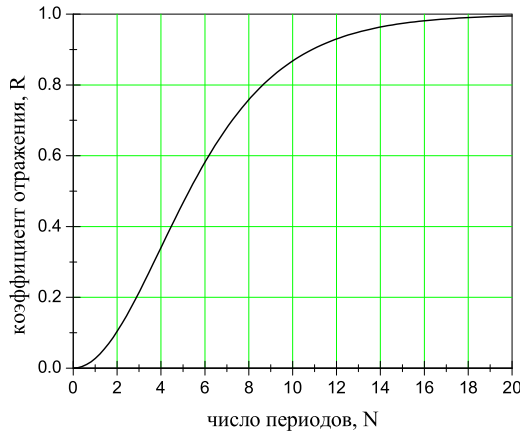


Рис. 14.4: Зависимость коэффициента отражения распределённого брэгговского отражателя от числа периодов при нулевой расстройке.

где величина  $\alpha = \sqrt{\kappa^2 - \delta^2}$  предполагается действительной, поскольку расстройка  $\delta$  считается малой. Применяв далее к последнему уравнению граничное условие  $b(l) = 0$  можно видеть, что  $A = 0$ . Таким образом, решение для  $b(z)$  есть

$$b(z) = B \operatorname{sh} \alpha(z - l).$$

Воспользовавшись данным решением можно найти из уравнения (14.8) амплитуду прямой волны

$$f(z) = (B/\kappa) [\alpha \operatorname{ch} \alpha(z - l) - i\delta \operatorname{sh} \alpha(z - l)]. \quad (14.9)$$

Обратим теперь внимание, что при  $z = 0$  амплитуда прямой волны  $f(0)$  имеет смысл амплитуды падающей волны  $E_{\text{вх}}$ . Это означает, что в приведённых уравнениях следует считать  $f(0) = E_{\text{вх}}$ . Воспользовавшись данным соотношением можно определить из последнего уравнения коэффициент  $B$  в виде

$$B = \frac{\kappa E_{\text{вх}}}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l + i\delta \operatorname{sh} \alpha l}.$$

Заметим далее, что отражённое поле  $E_{\text{отр}}$  определяется амплитудой обратной волны в точке  $z = 0$ , т. е.  $E_{\text{отр}} = b(0)$  и соответственно

$$E_{\text{отр}} = -E_{\text{вх}} \frac{\kappa \operatorname{sh} \alpha l}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l + i\delta \operatorname{sh} \alpha l}.$$

Последнее соотношение позволяет определить амплитудный коэффици-

ент отражения  $r = E_{\text{отр}}/E_{\text{вх}}$  в виде

$$r = \frac{-\kappa \operatorname{sh} \alpha l}{\alpha \operatorname{ch} \alpha l + i\delta \operatorname{sh} \alpha l} \quad (14.10)$$

и соответственно найти коэффициент отражения по интенсивности  $R = |r|^2$ . В практически важном случае нулевой расстройки,  $\delta = 0$ , когда длина волны  $\lambda = 2\bar{n}\Lambda$  коэффициент отражения по интенсивности есть

$$R = \operatorname{th}^2 \kappa l = \operatorname{th}^2 \left( N \frac{\Delta n}{\bar{n}} \right),$$

где  $N = l/\Lambda$  есть число периодов РБО. Зависимость коэффициента отражения от числа периодов показана на рис. 14.4.

Например, при среднем значении показателя преломления  $\bar{n} = 3,3$ , величине модуляции показателя преломления  $\Delta n = 0,55$  и числе периодов  $N = 15$  коэффициент отражения  $R \simeq 0,973$ . Согласно таблице 14.1 эта величина достаточна для поддержания стационарной генерации поверхностно-излучающего инжекционного микролазера с 4 квантовыми ямами.

### 14.1.3 Частота генерации

Частота генерации поверхностно-излучающего инжекционного микролазера с РБО может быть найдена из обычного условия, требующего чтобы сдвиг фазы лазерного излучения при полном обходе резонатора был кратен числу  $2\pi$ . В данном случае сдвиг фазы возникает при отражении от двух РБО и двойного прохода активной среды со средним показателем преломления  $n$ .

Для одинаковых РБО с амплитудными коэффициентами отражения  $r_1 = r_2 = |r| \exp(-i\phi)$ , находящихся на расстоянии  $L$ , условие на фазу может быть записано в виде

$$-2\phi_m + 2\frac{\omega_m}{c}nL = 2m\pi, \quad (14.11)$$

где  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Здесь первый член в левой части равенства обусловлен изменением фазы за счёт отражения от двух РБО, а второй член - за счёт двойного прохождения среды с показателем преломления  $n$ . Согласно уравнению (14.10) вблизи центральной частоты  $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$  изменение фазы за счёт РБО есть

$$\phi_m = -\frac{\pi n}{2\kappa c} (\omega_m - \omega_0),$$

где  $\kappa c/\pi n = \Delta\nu_B$  есть область частот, в пределах которой РБО имеет высокое отражение. Отметим, что здесь предполагается для простоты, что средний показатель преломления РБО  $\bar{n}$  совпадает со средним показателем преломления среды  $n$ .

Выпишем теперь уравнения для фаз для двух соседних мод с индексами  $m$  и  $m + 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\pi n}{2\kappa c}(\omega_m - \omega_0) + \frac{\omega_m}{c}nL &= m\pi, \\ \frac{\pi n}{2\kappa c}(\omega_{m+1} - \omega_0) + \frac{\omega_{m+1}}{c}nL &= (m + 1)\pi.\end{aligned}$$

Взяв разность этих уравнений можно определить разность частот между модами в виде

$$\omega_{m+1} - \omega_m = \frac{\pi c}{n(L + \pi/2\kappa)}.$$

Отсюда можно видеть, что эффективная длина резонатора с распределёнными брэгговскими отражателями определяется геометрической длиной и глубиной проникновения поля в РБО

$$L_{\text{eff}} = L + \pi/2\kappa.$$

Напомним, что прямая волна  $f(z)e^{-i\beta_1 z}$  распространяется в РБО с затуханием, которое определяется при брэгговской длине волны константой связи  $\kappa$ :

$$f(z)e^{-i\beta_1 z} \propto e^{-i\pi z/\Lambda - \kappa z}.$$

Типичными параметрами поверхностно-излучающих инжекционных микролазеров с РБО являются следующие. При длине волны  $\lambda = 1$  мкм, длине активной среды  $L = \lambda = 1$  мкм и  $\Delta n = 0,55$  константа связи  $\kappa \simeq 1,1$  мкм<sup>-1</sup> и эффективная длина  $L_{\text{eff}} \simeq 2,4$  мкм. При  $n = 3,3$  частотный интервал между модами  $\Delta\nu = c/2nL_{\text{eff}} \simeq 1,8 \cdot 10^{13}$  Гц, а частотная ширина области высокого отражения РБО  $\Delta\nu_B = \kappa c/\pi n \simeq 1,5 \cdot 10^{13}$  Гц. Естественно, что в данном примере только одна мода удовлетворяет условию генерации.

## 14.2 Лазеры на квантовых нитях и квантовых точках

### 14.2.1 Оптическое усиление

В лазерах на квантовых нитях и квантовых точках высокое оптическое усиление и малый объём активной среды потенциально могут приводить

к очень низким пороговым токам. Для лазеров на квантовых нитях и квантовых точках пороговый ток, обусловленный средой, даётся обычным соотношением

$$\Gamma g_{\text{th}} = \alpha_i + \frac{1}{2L} \ln \left( \frac{1}{R_1 R_2} \right),$$

где  $\Gamma$  есть фактор локализации фотонов,  $\alpha_i = \Gamma \alpha_{\text{fc}} + \alpha_{\text{sc}}$  есть оптический коэффициент поглощения с  $\alpha_{\text{fc}}$  и  $\alpha_{\text{sc}}$  коэффициенты рассеяния на свободных носителях,  $L$  есть длина резонатора, и  $R_1, R_2$  - коэффициенты отражения зеркал.

Приведём оценки основных параметров для коллинеарной конфигурации лазера с квантовой нитью длиной  $L$  и поперечным сечением  $S = L_x L_y$ . Для моды с поперечным сечением  $S_{\text{mode}}$  фактор локализации пучка  $\Gamma = S/S_{\text{mode}}$ . Мы предположим обычные соотношения между усилением и плотностью носителей тока и между током и плотностью носителей тока,

$$g = \sigma (N - N_{\text{th}}),$$

$$I = e N V_{\text{act}} / \eta_i \tau_r,$$

где  $\sigma$  есть поперечное сечение,  $V_{\text{act}}$  есть объём активной области,  $\eta_i$  есть квантовая эффективность,  $\tau_r$  есть время рекомбинации. Приведённые выше уравнения дают

$$I_{\text{th}} = I_{\text{tr}} + I_{\text{cav}},$$

$$I_{\text{tr}} = \frac{e N_{\text{tr}} V_{\text{act}}}{\eta_i \tau_c},$$

$$I_{\text{cav}} = \frac{e \alpha_{\text{fc}} V_{\text{act}}}{\eta_i \tau_r \sigma} + \frac{e S_{\text{mode}}}{\eta_i \tau_r \sigma} \left( \alpha_{\text{sc}} L + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{R_1 R_2} \right) \right).$$

Рассмотрим в качестве примера структуру GaAs/AlGaAs с одной квантовой нитью с поперечным сечением  $S = 10 \times 10 \text{ нм}^2$  и  $L = 100 \text{ мкм}$ . При типичной плотности носителей тока  $N_{\text{tr}} = 10^{18} \text{ см}^{-3}$ , квантовой эффективности  $\eta_i = 1$ , и времени жизни  $\tau_r = 3 \text{ нс}$  пороговый ток  $I_{\text{tr}} \simeq 0,8 \text{ мкА}$ .

Полученная величина порогового тока является оценкой снизу, полученной в пределе исчезающих потерь резонатора. Более реалистическая оценка должна учитывать потери резонатора. Для лазера с  $S_{\text{mode}} = 1 \text{ мкм}^2$ ,  $\eta_i = 1$ ,  $\tau_r = 3 \text{ нс}$ ,  $\sigma = 10^{15} \text{ см}^2$  член  $e S_{\text{mode}} / \eta_i \tau_r \sigma \simeq 0,5 \text{ мА}$ . Для  $L = 100 \text{ мкм}$  и потерь резонатора  $\alpha_{\text{sc}} = 10 \text{ см}^{-1}$  и  $R = 0,9$  мы получим  $I_{\text{cav}} \simeq 100? \text{ мкА}$ . При выборе лучших параметров  $\alpha_{\text{sc}} = 1 \text{ см}^{-1}$  и  $R = 0,99$  получим  $I_{\text{cav}} \simeq 10? \text{ мА}$ .

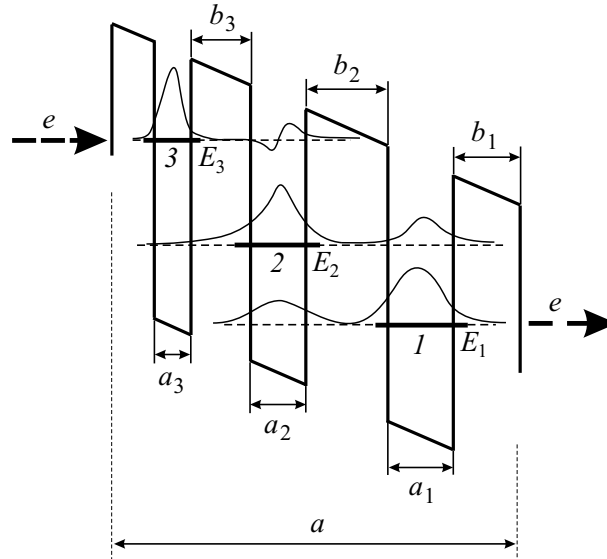


Рис. 14.5: Активная область каскадного лазера, включающая в зоне проводимости квантовые ямы с ширинами  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , разделённые барьерами с ширинами  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ . Также показаны три уровня энергии размерного квантования в связанных квантовых ямах и распределение электронной плотности. Стрелки показывают накачку квантовых уровней электронами, испущенными из эмиттера и опустошение уровней за счёт перехода электронов из квантовых ям в коллектор.

### 14.3 Каскадные лазеры

До сих пор мы рассматривали диодные лазеры, в которых используются переходы между уровнями размерного квантования, принадлежащими валентной зоне и зоне проводимости. Во всех рассмотренных случаях генерация лазерного излучения происходила благодаря радиационной рекомбинации электрона зоны проводимости с дыркой валентной зоны. В противоположность этим наиболее распространённым случаям в каскадных лазерах генерация происходит при переходах электрона между уровнями размерного квантования, принадлежащими только зоне проводимости. Этими уровнями могут быть уровни нескольких соседних квантовых ям или уровни соседних квантовых точек.

Физический принцип работы каскадного лазера на квантовых ямах иллюстрирован на рис. 14.5. В активной области данного лазера содержатся три связанных квантовых ямы. К активной области приложено напряжение, понижающее высоты барьеров и соответственно усиливаю-

щее эффективность тунелирования электронов. Электроны, испущенные эмиттером, эффективно заселяют уровень 3, из которого электроны могут радиационно переходить на уровень 2 с испусканием фотона с энергией  $\hbar\omega = E_3 - E_2$ . Параметры ям подбираются таким образом, чтобы уровень 2 быстро опустошался за счёт переходов электронов на уровень 1, из которого электроны передаются посредством электрического поля в коллектор.

Следует подчеркнуть, что в каскадных лазерах специально конструируется материальная система с заданными квантовыми и релаксационными свойствами. Длина волны каскадного лазера задаётся уровнями размерного квантования, которые в конечном счёте определяются ширинами ям и барьеров. Обычно параметры используемых материалов позволяют задавать длину волны в области от 3 до 100 мкм. Времена релаксации между квантовыми состояниями, принадлежащими зоне проводимости, также задаются геометрическими размерами и могут подбираться так, чтобы лазер работал по стандартной трёхуровневой или четырёхуровневой схеме.

## 14.4 Лазеры на полимерах

Лазеры на полимерах представляют новый перспективный класс лазеров. Типичным примером активной среды является полиэтилен, содержащий цепочки  $\text{CH}-\text{CH}_2$ . Различают проводящие и непроводящие полимеры. Энергетическая структура подобна полупроводникам. Типичный зазор между зоной проводимости и валентной зоной около 2 эВ. Используются как твёрдые полимеры в виде плёнок, так и растворы. Обычно плёнку наносят на механически прочную подложку. Толщина плёнки варьируется от 10 до 1000 нм. Оптическая схема накачки и генерации осуществляется обычно по четырёхуровневой схеме (рис. ). В плёнках квантовая эффективность порядка 1-10%, в растворах квантовая эффективность достигает 100%. Типичное время затухания люминесценции порядка 1 нс. Поэтому накачка обычно осуществляется ультракороткими импульсами лазерного излучения. Реализованы различные модификации лазеров, включая лазеры с распределённой обратной связью. В этом случае полимерная плёнка наносится на дифракционную решётку, сформированную на подложке. Физика генерации достаточно сложна и до конца ещё не исследована. Важной проблемой остаётся повышение квантовой эффективности. Для этого применяют смеси полимеров, один из которых является донором, другой акцептором. Донор поглощает излучение, акцептор излучает. Таким образом достигается квантовая эф-



фективность до 10%. Некоторые проблемы до сих пор остаются. Неясно, почему усиление затухает быстрее люминесценции. Проводящие плёнки применяются для создания весьма ярких дисплеев. Проблема создания полимерного лазера накачиваемого током остаётся.



## Глава 15

# Квантовые свойства световых полей

В данной главе мы обсудим некоторые типы квантовых состояний электромагнитного поля, которые могут быть реализованы посредством лазерного излучения. Основными из них являются состояния чисел заполнения, называемые также состояниями Фока, когерентные состояния и сжатые состояния.

### 15.1 Состояния чисел заполнения

Состояния чисел заполнения, или иначе говоря, фоковские состояния, уже рассматривались нами при обсуждении радиационной релаксации атомов в главе 2. Ниже мы суммируем основные свойства состояний чисел заполнения.

Напомним, что рассмотренная в главе 2 процедура квантования электромагнитного поля прямо приводит к описанию поля в терминах операторов уничтожения  $a_\lambda$  и рождения  $a_\lambda^\dagger$  фотонов. Ниже мы будем рассматривать для простоты одну моду электромагнитного поля и соответственно будем опускать индекс  $\lambda$ , описывающий различные моды поля. В таком случае вектор-потенциал  $\mathbf{A}$ , электрическое поле  $\mathbf{E}$  и магнитное поле  $\mathbf{H}$  одной моды электромагнитного поля, имеющей волновой вектор  $\mathbf{k}$  и частоту  $\omega$ , согласно формулам (2.71) и (2.72) представляются в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0\omega V}} \left[ \mathbf{e} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} a + \mathbf{e}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} a^\dagger \right], \\ \mathbf{E} &= i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \left[ \mathbf{e} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} a - \mathbf{e}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} a^\dagger \right],\end{aligned}\tag{15.1}$$

$$\mathbf{H} = ic^2 \sqrt{\frac{\hbar \varepsilon_0}{2\omega V}} \{ [\mathbf{k} \times \mathbf{e}] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} a - [\mathbf{k} \times \mathbf{e}^*] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t} a^+ \},$$

где  $\mathbf{e}$  есть единичный вектор поляризации, а операторы уничтожения  $a$  и рождения  $a^+$  фотонов удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[a, a^+] = 1. \quad (15.2)$$

Собственными состояниями  $|n\rangle$  квантованного поля в представлении чисел заполнения являются собственные состояния оператора числа фотонов  $N = a^+a$ :

$$a^+a |n\rangle = n |n\rangle. \quad (15.3)$$

Соответственно, целые числа  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  являются собственными значениями оператора числа фотонов  $N = a^+a$ . Уравнение (15.3) таким образом показывает, что в представлении чисел заполнения каждое состояние электромагнитного поля  $|n\rangle$  характеризуется определённым числом фотонов  $n$ . Состояния чисел заполнения  $|n\rangle$  одновременно являются энергетическими состояниями, т. е. собственными состояниями гамильтониана электромагнитной моды

$$H_{\text{мод}} = \hbar\omega \left( a^+a + \frac{1}{2} \right), \quad (15.4)$$

поскольку наряду с уравнением (15.3) всегда имеет место уравнение

$$H_{\text{мод}} |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (15.5)$$

где собственные значения

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad (15.6)$$

определяют энергии квантовых состояний поля.

Применение операторов уничтожения и рождения к состояниям чисел фотонов приводит к уменьшению или увеличению числа фотонов на единицу:

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, \\ a^+ |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (15.7)$$

Основное, или вакуумное состояние электромагнитного поля, определяется соотношением

$$a |0\rangle = 0. \quad (15.8)$$

Векторы состояний квантованного поля в представлении чисел заполнения могут быть получены последовательным применением операторов рождения согласно уравнениям (15.7):

$$\begin{aligned} a^+ |0\rangle &= |1\rangle, \\ a^+ |1\rangle &= \sqrt{2} |2\rangle, \\ a^+ |2\rangle &= \sqrt{3} |3\rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

После этого векторы состояний чисел фотонов  $|n\rangle$  могут быть выражены через вектор основного состояния  $|0\rangle$  в виде

$$\begin{aligned} |1\rangle &= a^+ |0\rangle, \\ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} a^+ |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^+)^2 |0\rangle, \\ |3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} a^+ |2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a^+)^2 |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} (a^+)^3 |0\rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в представлении чисел заполнения любое состояние поля может быть представлено в виде

$$|n\rangle = \frac{(a^+)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (15.9)$$

Другими словами, из вакуумного состояния могут быть получены состояния с любым числом фотонов.

Состояния чисел заполнения являются ортогональными, поскольку выполняются соотношения

$$\langle n|m\rangle = \delta_{nm}, \quad (15.10)$$

и обладают полнотой в соответствии с соотношением

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (15.11)$$

Таким образом, состояния чисел заполнения образуют полный набор базисных векторов в гильбертовом пространстве.

Отметим ещё, что поскольку состояния чисел заполнения имеют хорошо определённые числа фотонов, то фазы таких состояний являются полностью случайными.

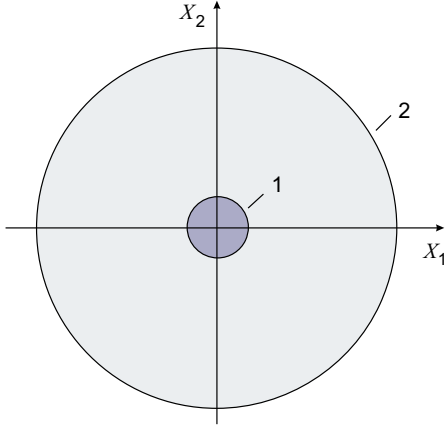


Рис. 15.1: Иллюстрация состояний чисел заполнения на фазовой плоскости  $(q, p)$  с координатами  $X_1 = q\sqrt{2\omega/\hbar}$ ,  $X_2 = p\sqrt{2/\hbar\omega}$ : 1 - вакуумное состояние, отвечающее  $n = 0$ , 2 - состояние с произвольным числом фотонов  $n$ .

Наглядное представление о состояниях чисел заполнения может быть получено при рассмотрении свойств операторов электромагнитного поля  $q$  и  $p$ , отвечающих операторам координаты и импульса гармонического осциллятора

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} (a + a^+), \\ p &= -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} (a - a^+). \end{aligned} \quad (15.12)$$

Как можно видеть из свойств операторов  $a$ ,  $a^+$ , средние значения координаты и импульса осциллятора поля в любом состоянии чисел заполнения равны нулю,  $\langle q \rangle = \langle n|q|n \rangle = 0$ ,  $\langle p \rangle = \langle n|p|n \rangle = 0$ , а среднеквадратичные значения определяются соотношениями

$$\begin{aligned} (\delta q)^2 &= \langle (\Delta q)^2 \rangle = \langle n | (q - \langle q \rangle)^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ (\delta p)^2 &= \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle n | (p - \langle p \rangle)^2 | n \rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (15.13)$$

Соответственно произведение неопределённостей для состояний чисел заполнения имеет вид

$$\delta q \delta p = \hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (15.14)$$

Состояния чисел заполнения могут быть иллюстрированы посредством кругов неопределённости на фазовой плоскости  $(q, p)$  как показано

на рис. 15.1. В соответствии с тем, что средние значения величин  $q$  и  $p$  равны нулю, круги неопределённости центрированы в начале системы координат. В выбранных на рис. 15.1 координатах радиус вакуумного состояния равен единице,  $\delta X_1 = \delta X_2 = 1$ , а радиус состояния с произвольным значением  $n \neq 0$  равен  $\delta X_1 = \delta X_2 = \sqrt{2n+1}$ .

## 15.2 Когерентные состояния

Когерентные состояния электромагнитного поля включают бесконечные числа фотонов. Соответственно, когерентные состояния имеет относительно хорошо определённые фазы. Для когерентного состояния произведение неопределённостей амплитуды и фазы является минимальным из тех, которые разрешены соотношением неопределённости. В этом смысле поля, описываемые квантовомеханическими когерентными состояниями, наиболее близки к классическим электромагнитным полям.

Когерентные состояния могут быть созданы посредством применения унитарного оператора смещения

$$D(\alpha) = e^{(\alpha a^+ - \alpha^* a)}, \quad (15.15)$$

где  $\alpha$  есть произвольное комплексное число. Именно, когерентное состояние  $|\alpha\rangle$  образуется при действии оператора смещения  $D(\alpha)$  на вакуумное состояние:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |0\rangle. \quad (15.16)$$

В соответствии с данным определением о когерентных состояниях иногда говорят как о смещённых состояниях вакуума. Заметим, что в этом параграфе мы продолжаем рассматривать одномодовое поле и соответственно опускаем для простоты индекс  $\lambda$  записывая операторы электромагнитного поля в виде  $a$  и  $a^+$ .

Оператор смещения может быть представлен также в иной форме. Как известно, для двух операторов  $A$  и  $B$ , коммутирующих со своим коммутатором, т. е. удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \quad (15.17)$$

справедливо уравнение

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}. \quad (15.18)$$

Выбрав  $A = \alpha a^+$  и  $B = -\alpha^* a$  и воспользовавшись коммутационными соотношениями (15.2) можно убедиться, что для данные два оператора удовлетворяют соотношениям (15.17). Отсюда следует, что оператор

смещения (15.15) может быть записан также в виде

$$D(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}. \quad (15.19)$$

В соответствии с определением (15.15) и представлением (15.19) оператор смещения имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} D^+(\alpha) &= D^{-1}(\alpha) = D(-\alpha), \\ D^+(\alpha)aD(\alpha) &= a + \alpha, \\ D^+(\alpha)a^\dagger D(\alpha) &= a^\dagger + \alpha^*, \\ D(\alpha + \beta) &= D(\alpha)D(\beta) \exp[-i\text{Im}(\alpha\beta^*)]. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Можно показать, что когерентные состояния являются собственными состояниями оператора уничтожения. Это заключение может быть выведено следующим образом. Подействуем на когерентное состояние  $|\alpha\rangle$  оператором уничтожения  $a$ , а затем эрмитово-сопряжённым оператором смещения  $D^+(\alpha)$  и преобразуем уравнение в соответствии со свойствами оператора смещения и согласно соотношению (15.8):

$$D^+(\alpha)a|\alpha\rangle = D^+(\alpha)aD(\alpha)|0\rangle = (a + \alpha)|0\rangle = \alpha|0\rangle.$$

Подействовав далее на обе части данного уравнения оператором  $D(\alpha)$  получим уравнение на собственные значения:

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (15.21)$$

Это уравнение показывает, что величина  $\alpha$  и состояние  $|\alpha\rangle$  являются соответственно собственным значением и собственным состоянием оператора уничтожения  $a$ . Эрмитово сопряжённое соотношение имеет вид

$$\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|. \quad (15.22)$$

Следует отметить, что поскольку оператор  $a$  не является эрмитовым оператором, то его собственные значения  $\alpha$  являются комплексными числами.

Из двух последних соотношений можно также сразу определить среднее число фотонов в когерентном состоянии. Взяв среднее значение оператора числа фотонов  $N = a^\dagger a$  по состоянию  $|\alpha\rangle$  получим, что среднее число фотонов в когерентном состоянии определяется квадратом модуля комплексного числа  $\alpha$

$$\langle n \rangle = \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \quad (15.23)$$



Скалярное произведение двух когерентных состояний согласно определению (15.16) и представлению (15.19) есть

$$\langle \beta | \alpha \rangle = \langle 0 | D^\dagger(\beta) D(\alpha) | 0 \rangle = e^{-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2 + \alpha\beta^*}. \quad (15.24)$$

Таким образом, когерентные состояния не являются ортогональными, хотя они и нормированы поскольку

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = 1. \quad (15.25)$$

Если записать квадрат модуля скалярного произведения в виде

$$|\langle \beta | \alpha \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2},$$

то можно также заметить, что два когерентных состояния тем более близки к ортогональности чем больше различаются их числа  $\alpha$  и  $\beta$ .

Когерентное состояние может быть разложено по состояниям чисел заполнения. Для получения такого разложения можно предварительно вычислить коэффициенты разложения исходя из следующих рассуждений. Возьмём скалярное произведение состояния  $\langle n |$  с обеими частями уравнения (15.21):

$$\langle n | a | \alpha \rangle = \alpha \langle n | \alpha \rangle.$$

Заметив далее, что записав второе уравнение (15.7) в виде эрмитово-сопряжённого уравнения

$$\langle n | a = \sqrt{n+1} \langle n+1 |$$

можно выписать рекуррентное соотношение

$$\langle n+1 | \alpha \rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \langle n | \alpha \rangle. \quad (15.26)$$

Из последнего соотношения можно последовательно найти коэффициенты разложения

$$\begin{aligned} \langle 1 | \alpha \rangle &= \alpha \langle 0 | \alpha \rangle, \\ \langle 2 | \alpha \rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \langle 1 | \alpha \rangle = \frac{\alpha^2}{\sqrt{2}} \langle 0 | \alpha \rangle, \\ \langle 3 | \alpha \rangle &= \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \langle 2 | \alpha \rangle = \frac{\alpha^2}{\sqrt{3} \cdot 2} \langle 1 | \alpha \rangle = \frac{\alpha^3}{\sqrt{3} \cdot 2} \langle 0 | \alpha \rangle, \\ &\dots \end{aligned}$$

Соответственно, для произвольного числа  $n$  коэффициент разложения можно записать в виде

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle, \quad (15.27)$$

где

$$\langle 0|\alpha\rangle = \langle 0|D(\alpha)|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}.$$

Используя уравнение (15.27) можно теперь представить когерентное состояние  $|\alpha\rangle$  в виде разложения по состояниям чисел заполнения

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n \langle 0|\alpha\rangle \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Таким образом, разложение когерентного состояния по состояниям чисел заполнения, или другими словами, состояниям чисел фотонов имеет вид

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (15.28)$$

Последнее соотношение показывает, что когерентное состояние имеет неопределённое число фотонов поскольку представляется в виде суперпозиции бесконечного числа состояний с разными числами фотонов.

Отметим также, что коэффициенты разложения (15.27)

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-|\alpha|^2/2}$$

определяют вероятности нахождения в когерентном состоянии  $n$  фотонов:

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (15.29)$$

Иначе говоря, функция  $p(n)$  описывает распределение чисел фотонов в когерентном состоянии. Распределение вероятностей  $p(n)$  является пуассоновским с уже найденным выше средним числом фотонов  $\langle n\rangle = |\alpha|^2$  и шириной  $\delta n = |\alpha|$ , где  $\delta n = \sqrt{\langle (n - \langle n\rangle)^2\rangle}$ . Такое распределение, как мы увидим в параграфе 16.2, является типичным для лазера, работающего выше порога генерации.

Наглядное представление о когерентных состояниях также может быть получено посредством рассмотрения операторов электромагнитного поля (15.12), отвечающих координате и импульсу квантового осциллятора поля. Как можно увидеть из свойств данных операторов, средние

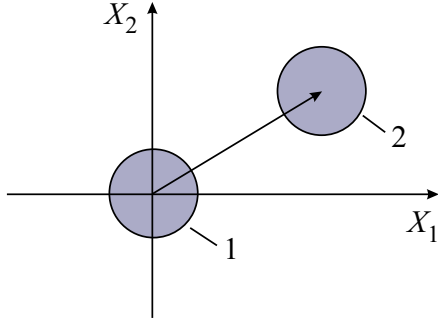


Рис. 15.2: Иллюстрация положений на фазовой плоскости  $(q, p)$  с координатами  $X_1 = q\sqrt{2\omega/\hbar}$ ,  $X_2 = p\sqrt{2/\hbar\omega}$  вакуумного состояния 1 и когерентного состояния 2, полученного смещением вакуумного состояния в фазовой плоскости.

значения координаты и импульса в когерентном состоянии осциллятора поля отличны от нуля,

$$\begin{aligned}\langle q \rangle &= \sqrt{\frac{2\hbar}{\omega}} \operatorname{Re} \alpha, \\ \langle p \rangle &= \sqrt{2\hbar\omega} \operatorname{Im} \alpha,\end{aligned}\quad (15.30)$$

а среднеквадратичные значения определяются соотношениями

$$\begin{aligned}(\delta q)^2 &= \overline{(\Delta q)^2} = \langle n | (q - \bar{q})^2 | n \rangle = \frac{\hbar}{2\omega}, \\ (\delta p)^2 &= \overline{(\Delta p)^2} = \langle n | (p - \bar{p})^2 | n \rangle = \frac{\hbar\omega}{2}.\end{aligned}\quad (15.31)$$

Соответственно для когерентных состояний произведения неопределённостей минимальны

$$\delta q \delta p = \frac{\hbar}{2}.\quad (15.32)$$

Когерентное состояние квантового осциллятора поля на фазовой плоскости  $(p, q)$  иллюстрировано на рис. 15.2 посредством кружка, смещённого относительно начала системы координат. В выбранных на рис. 15.2 координатах как вакуумное состояние, так и когерентное состояние имеют радиус  $\delta X_1 = \delta X_2 = 1$ .

### 15.3 Сжатые состояния

Свойства сжатых состояний электромагнитного поля удобно обсудить представив операторы уничтожения  $a$  и рождения  $a^+$  как линейные ком-

бинации двух эрмитовых операторов  $X_1$  и  $X_2$ :

$$\begin{aligned} X_1 &= a + a^\dagger, \\ X_2 &= -i(a - a^\dagger). \end{aligned} \quad (15.33)$$

Данные операторы пропорциональны операторам координаты и импульса осциллятора поля

$$X_1 = \sqrt{\frac{2\omega}{\hbar}} q, \quad X_2 = \sqrt{\frac{2}{\hbar\omega}} p \quad (15.34)$$

и удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[X_1, X_2] = 2i. \quad (15.35)$$

Отметим, что величины  $X_1, X_2$  уже использовались нами на рис. 15.1 и 15.2 в качестве координат при представлении на фазовой плоскости состояний чисел заполнения и когерентного состояния.

Сжатые состояния могут быть образованы посредством воздействия на вакуумное состояние двух операторов, унитарного оператора сжатия  $S(\xi)$  и уже рассмотренного выше унитарного оператора смещения  $D(\alpha)$ . Унитарный оператор сжатия определяется соотношением

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{+2})}, \quad (15.36)$$

где комплексная переменная часто представляется в виде  $\xi = r e^{2i\varphi}$ . Сжатое состояние  $|\alpha, \xi\rangle$  получается сначала сжатием вакуумного состояния, а затем смещения его, т. е. последовательным применением операторов согласно следующей схеме

$$|\alpha, \xi\rangle = D(\alpha)S(\xi)|0\rangle. \quad (15.37)$$

В соответствии с определением (15.36) оператор сжатия имеет следующие основные свойства:

$$\begin{aligned} S^+(\xi) &= S^{-1}(\xi) = S(-\xi), \\ S^+(\xi)aS(\xi) &= a \cosh r - a^+ e^{2i\varphi} \sinh r, \\ S^+(\xi)a^+S(\xi) &= a^+ \cosh r - a e^{-2i\varphi} \sinh r. \end{aligned} \quad (15.38)$$

Используя данные свойства можно вычислить, например, средние значения переменных  $X_1, X_2$  по состояниям  $|\alpha, \xi\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle X_1 \rangle &= \langle \alpha\xi | X_1 | \alpha\xi \rangle = 2\operatorname{Re}\alpha, \\ \langle X_2 \rangle &= \langle \alpha\xi | X_2 | \alpha\xi \rangle = 2\operatorname{Im}\alpha. \end{aligned} \quad (15.39)$$

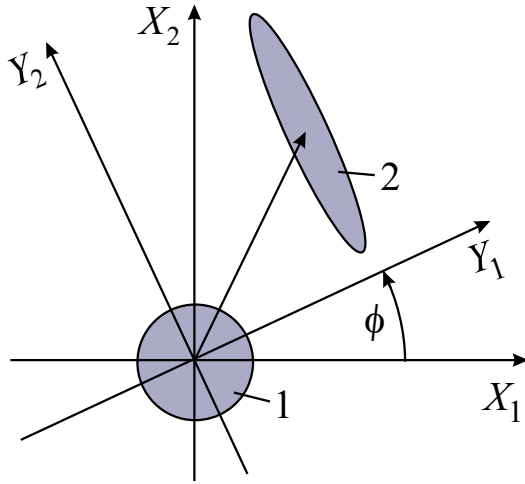


Рис. 15.3: Взаимное расположение вакуумного (1) и сжатого (2) состояний на плоскостях  $(X_1, X_2)$  и  $(Y_1, Y_2)$ .

Для выяснения флуктуационных свойств сжатых состояний удобно ввести операторы  $Y_1, Y_2$ , определяющие сжатые состояния в системе координат, которая повернута на угол  $\varphi$  относительно исходной системы координат  $X_1, X_2$ :

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi, \\ Y_2 &= -X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Данные операторы имеют средние значения и значения среднеквадратичных флуктуаций

$$\begin{aligned} \langle Y_1 \rangle &= \langle \alpha \xi | Y_1 | \alpha \xi \rangle = 2 \operatorname{Re} \alpha \cos \varphi + 2 \operatorname{Im} \alpha \sin \varphi, \\ \langle Y_2 \rangle &= \langle \alpha \xi | Y_2 | \alpha \xi \rangle = -2 \operatorname{Re} \alpha \sin \varphi + 2 \operatorname{Im} \alpha \cos \varphi, \\ \delta Y_1 &= \sqrt{\langle \alpha \xi | (Y_1 - \langle Y_1 \rangle)^2 | \alpha \xi \rangle} = e^{-r}, \\ \delta Y_2 &= \sqrt{\langle \alpha \xi | (Y_2 - \langle Y_2 \rangle)^2 | \alpha \xi \rangle} = e^r. \end{aligned} \quad (15.41)$$

Как видно из последних соотношений, в повернутой системе координат сжатые состояния представляются эллипсами неопределённости с уменьшенным значением флуктуаций по координате  $Y_1$  и увеличенным значением флуктуаций по координате  $Y_2$  (рис. 15.3). Таким образом, в сжатом состоянии выполняются неравенства

$$\delta Y_1 < 1 < \delta Y_2, \quad (15.42)$$

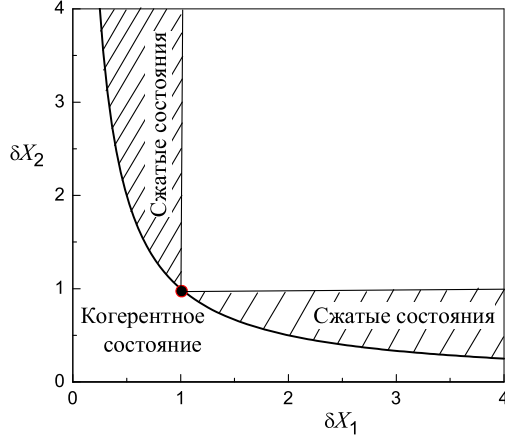


Рис. 15.4: Расположение сжатых состояний на плоскости  $\delta Y_1, \delta Y_2$ . Точка показывает положение когерентного состояния.

а соотношение неопределённости выполняется со знаком равенства,

$$\delta Y_1 \delta Y_2 = 1, \quad (15.43)$$

т. е. сжатые состояния относятся к семейству состояний с минимальной неопределённостью.

На плоскости с координатами  $(\delta X_1, \delta X_2)$  сжатые состояния занимают две области, показанные на рис. 15.4.

Особенности сжатых состояний могут быть видны на примере вариации во времени вектора электрического поля. Электрическое поле одной моды электромагнитного поля, предполагаемой для определённости линейно поляризованной, согласно (15.1) и (15.33) записывается через операторы  $X_1$  и  $X_2$  как

$$E(\mathbf{r}, t) = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [X_1 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + X_2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]. \quad (15.44)$$

Среднее значение электрического поля в сжатом состоянии есть

$$\langle E(\mathbf{r}, t) \rangle = -\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} [\langle X_1 \rangle \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + \langle X_2 \rangle \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (15.45)$$

где средние значения  $\langle X_1 \rangle$  и  $\langle X_2 \rangle$  приведены в (15.39). Среднеквадратичные флуктуации электрического поля в сжатом состоянии определяются

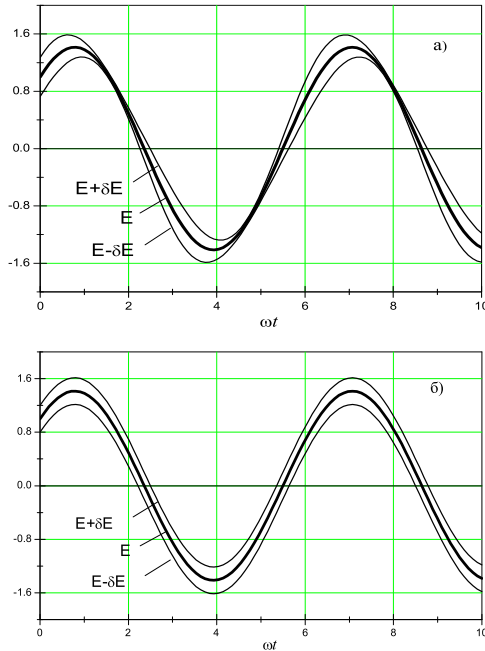


Рис. 15.5: Зависимость величины электрического поля от времени в фиксированной точке пространства, показывающая величину неопределённости для сжатого (а) и когерентного (б) состояний. Жирная линия показывает среднее значение электрического поля  $\langle E \rangle$ , тонкие линии показывают значения электрического поля, отличающиеся от среднего значения на  $\pm \delta \langle E \rangle$ .

соотношением

$$(\delta E(\mathbf{r}, t))^2 = \frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 V} [(\delta X_1)^2 \sin^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + (\delta X_2)^2 \cos^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)], \quad (15.46)$$

где среднеквадратичные значения  $\delta X_1$  и  $\delta X_2$  могут быть определены из приведённых выше соотношений.

Отметим для сравнения, что в случае когерентного состояния среднеквадратичные флуктуации величин  $X_1$  и  $X_2$  совпадают,

$$\delta X_1 = \delta X_2 = 1,$$

а неопределённость электрического поля сводится к постоянной величине

$$(\delta E(\mathbf{r}, t))^2 = \frac{2\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}.$$

Рис. 15.5 показывает среднеквадратичные флуктуации величины электрического поля в сжатом состоянии, наложенные на среднее значение электрического поля. В случае сжатого состояния неопределённость осциллирует с частотой  $2\omega$ . Эти осцилляции создают уменьшенный шум либо в амплитуде, либо фазе поля. Для сравнения также показана величина среднеквадратичных флуктуаций для электрического поля, находящегося в когерентном состоянии. В случае когерентного состояния неопределённость является константой.



# Глава 16

## Квантовая теория лазера

В квантовой теории лазера как активные частицы лазерной среды, так и поле излучения лазера рассматриваются квантовомеханически. Такое рассмотрение позволяет установить статистические свойства фотонного поля, генерируемого лазером. Ниже мы изложим формальную схему квантовомеханического описания лазерного поля и рассмотрим статистику числа фотонов.

### 16.1 Квантовомеханическая динамика активных частиц

Рассмотрим предварительно двухуровневую схему дипольного взаимодействия активных частиц лазерной среды с квантованным полем лазерного излучения. Для простоты будем считать, что активными частицами являются двухуровневые атомы, а лазерное поле является одномодовым.

Взаимодействие двухуровневого атома с квантованным полем уже рассматривалось в разделе 2.3.2 при анализе спонтанной релаксации состояний атома. В связи с этим здесь мы воспроизведём кратко только те соотношения, которые необходимы в квантовой теории лазера. Положим, что лазерный переход частоты  $\omega_0$  образован нижним уровнем  $|l\rangle$  и верхним уровнем  $|u\rangle$  (рис. 16.1). Действие операторов девозбуждения  $b$  и возбуждения  $b^+$  атома на состояния атома определим соотношениями:

$$b|l\rangle = 0, \quad b|u\rangle = |l\rangle, \quad b^+|l\rangle = |u\rangle, \quad b^+|u\rangle = 0. \quad (16.1)$$

Гамильтониан двухуровневого атома запишем соответственно в виде

$$H_0 = \hbar\omega_0 b^+ b. \quad (16.2)$$

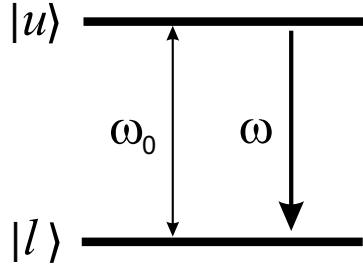


Рис. 16.1: Атомный переход, ответственный за генерацию лазерного излучения.

Данный гамильтониан определяет энергии состояний атома

$$E_l = \langle l | H_0 | l \rangle = 0, \quad E_u = \langle u | H_0 | u \rangle = \hbar\omega_0. \quad (16.3)$$

Оператор дипольного момента атома выражается через атомные операторы  $b$  и  $b^+$  согласно соотношению:

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} (b + b^+) \quad (16.4)$$

и имеет действительные матричные элементы

$$\langle u | \hat{\mathbf{d}} | l \rangle = \langle l | \hat{\mathbf{d}} | u \rangle = \mathbf{d}. \quad (16.5)$$

С учётом данных определений оператор  $\tilde{V}$ , ответственный за дипольное взаимодействие атома с модой лазерного поля в приближении вращающейся волны имеет вид

$$\tilde{V} = -\mathbf{d} \cdot (\mathcal{E} b^+ a + \mathcal{E}^* b a^+), \quad (16.6)$$

где

$$\mathcal{E} = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{e} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (16.7)$$

$$(16.8)$$

Обозначим совместные состояния двухуровневого атома и моды лазерного поля в виде  $|l, n\rangle = |l\rangle|n\rangle$ ,  $|u, n\rangle = |u\rangle|n\rangle$ . Матричные элементы оператора дипольного взаимодействия  $\tilde{V}$ , определяющие переходы между такими состояниями, отличны от нуля только для однофотонных процессов поглощения и испускания:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{eg;n,n+1} &= \langle u, n | \tilde{V} | l, n+1 \rangle = -\mathbf{d} \cdot \mathcal{E} \sqrt{n+1}, \\ \tilde{V}_{gu;n+1,n\lambda} &= \langle l, n+1 | \tilde{V} | u, n \rangle = -\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}^* \sqrt{n+1}. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Напомним, что данные матричные элементы описывают переходы при которых возбуждение атома из состояния  $|l\rangle$  в состояние  $|u\rangle$  происходит совместно с поглощением одного фотона из лазерной моды и, наоборот, переход атома из состояния  $|u\rangle$  в состояние  $|l\rangle$  осуществляется совместно с испусканием одного фотона в лазерную моду.

Полный гамильтониан системы "атом + лазерная мода" включает гамильтониан атома, гамильтониан вакуумного поля и оператор дипольного взаимодействия:

$$H = H_0 + H_{\text{вак}} + \tilde{V} \quad (16.10)$$

и представляется соотношением

$$H = \hbar\omega_0 b^+ b + \hbar\omega \left( a^+ a + \frac{1}{2} \right) - \mathbf{d} \cdot (\mathcal{E} b^+ a + \mathcal{E}^* b a^+) \quad (16.11)$$

и определяет эволюцию системы "атом + лазерная мода" в соответствии с уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H \Psi. \quad (16.12)$$

Уравнение Шредингера может быть использовано далее для получения уравнений для амплитуд вероятности, которые описывают совместные состояния атома и вакуумного поля. Для этого волновая функция системы "атом + вакуумное поле" должна быть разложена по собственным функциям атома и поля,

$$\Psi = \sum_a c_{a,n} \psi_a e^{-iE_a t/\hbar} \varphi_n e^{-iEt/\hbar}, \quad (16.13)$$

где индекс  $a$  определяет состояния атома  $a = l, u$ . Напомним здесь, что собственные функции атома  $\psi_a$  удовлетворяют уравнениям

$$H_0 \psi_a = E_a \psi_a,$$

а собственные функции лазерной моды удовлетворяют уравнениям

$$H_{\text{вак}} \varphi_n = E \varphi_n, \quad E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Подставляя разложение (16.13) в уравнение Шредингера (16.12) с гамильтонианом (16.11) можно стандартным образом получить систему уравнений для амплитуд вероятности  $c_{l,n}$  и  $c_{u,n}$ :

$$\begin{aligned} \dot{c}_{u,n} &= \frac{i}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \mathcal{E} \sqrt{n+1} e^{-i\delta t} c_{l,n+1}, \\ \dot{c}_{l,n+1} &= \frac{i}{\hbar} \mathbf{d} \cdot \mathcal{E}^* \sqrt{n+1} e^{i\delta t} c_{u,n}, \end{aligned} \quad (16.14)$$

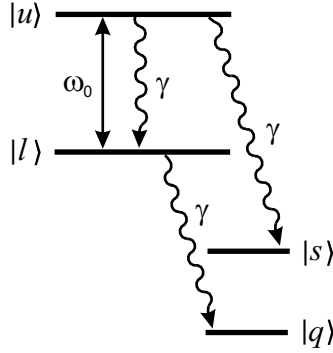


Рис. 16.2: Квантовые состояния атомов и оптические переходы, ответственные за генерацию лазерного излучения.

где  $\delta = \omega - \omega_0$  есть расстройка частоты лазерной моды  $\omega$  по отношению к частоте атомного перехода  $\omega_0$ .

Будем считать, что в начальный момент времени  $t = t_0$  атом находится в верхнем состоянии. Примем также для простоты, что частота лазерной моды совпадает с частотой атомного перехода. Тогда решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} c_{un}(t) &= c_{un}(t_0) \cos\left(g\sqrt{n+1}(t-t_0)\right), \\ c_{l,n+1}(t) &= c_{un}(t_0) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \sin\left(g\sqrt{n+1}(t-t_0)\right), \end{aligned} \quad (16.15)$$

где  $g = d$

## 16.2 Квантостатистическая динамика активных частиц

Рассмотрим описание одномодового монохроматического лазерного поля фотонной матрицей плотности  $\rho_{mn} = \rho_{mn}(t)$ , которая в представлении чисел заполнения определяется квантовыми числами фотонов  $m, n$ .

Положим, что в резонатор лазера в случайные моменты времени инжектируются возбуждённые атомы, находящийся в состоянии  $|u\rangle$ , и будем считать, что атомы взаимодействуют с полем лазера в течение времени  $\tau$  (рис. 16.2). При спонтанном переходе в нижнее состояние  $|l\rangle$  атом испускает фотон в лазерное поле, что приводит к изменению матрицы плотности лазерного поля. Будем рассматривать интервал времени  $\tau$ , который больше времени спонтанного распада атома в лазерную моду  $\tau_{сп}$ , но меньше характерного времени нарастания или спада лазерного поля

$\tau_{\text{лаз}}$ :

$$\tau_{\text{сп}} \ll \tau \ll \tau_{\text{лаз}}. \quad (16.16)$$

Изменение элементов фотонной матрицы плотности за счёт спонтанного распада одного атома запишем в виде

$$\delta\rho_{mn} = \rho_{mn}(t + \tau) - \rho_{mn}(t). \quad (16.17)$$

При спонтанном испускании  $N$  атомов макроскопическое изменение матрицы плотности на интервале времени  $\Delta t$  можно представить в виде

$$\Delta\rho_{mn} = N \delta\rho_{mn} = r_a \Delta t \delta\rho_{mn}, \quad (16.18)$$

где  $r_u$  есть скорость инжекции атомов в резонатор лазера.

Для нахождения матрицы плотности лазерного поля следует обычным образом найти матрицу плотности  $\rho_{\alpha m; \beta n}$  системы "лазерное поле + атомы", а затем взять шпур по состояниям атомов  $|u\rangle$  и  $|l\rangle$ :

$$\rho_{mn}(t + \tau) = \sum_{\alpha=a,b} \rho_{\alpha m; \alpha n}(t + \tau). \quad (16.19)$$

Определим теперь в соответствии с уравнением (16.18) крупномасштабную производную матрицы плотности лазерного поля:

$$\frac{d\rho_{mn}}{dt} = \frac{\Delta\rho_{mn}}{\Delta t} = r_u \delta\rho_{mn}.$$

Для этой производной можно в соответствии с (16.19) записать уравнение

$$\frac{d\rho_{mn}}{dt} = r_{ua} [\rho_{um;un}(t + \tau) - \rho_{um;un}(t) + \rho_{lm;ln}(t + \tau)].$$

Отметим, что поскольку в начальный момент времени  $t$  атомы считаются возбуждёнными, то  $\rho_{lm;ln}(t) = 0$ .

Элементы матрицы плотности  $\rho_{\alpha m; \beta n}$  могут быть легко определены исходя из уравнений для амплитуд вероятности  $c_{un}$  и  $c_{l,n+1}$ . Будем для простоты рассматривать простейший случай точного резонанса, когда частота  $\omega$  лазерного поля совпадает с частотой  $\omega_0$  атомного перехода, т. е. когда  $\delta = \omega - \omega_0 = 0$ . В этом случае согласно соотношениям (16.15) амплитуды вероятности имеют вид

$$\begin{aligned} c_{un}(t + \tau) &= c_{un}(t) \cos(g\tau\sqrt{n+1}), \\ c_{l,n+1}(t + \tau) &= -ic_{un}(t) \sin(g\tau\sqrt{n+1}), \end{aligned}$$

где  $g = ?$  есть частота Раби. В соответствии с определением матрицы плотности следует положить, что в начальный момент времени  $t$ , т. е. при  $\tau = 0$

$$\rho_{mn}(t) = |c_{um}|^2.$$

В момент времени  $t + \tau$  элементы матрицы плотности имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_{um,an}(t + \tau) &= \rho_{mn}(t) \cos(g\tau\sqrt{m+1}) \cos(g\tau\sqrt{n+1}), \\ \rho_{lm,ln}(t + \tau) &= \rho_{m-1,n-1}(t) \sin(g\tau\sqrt{m}) \sin(g\tau\sqrt{n}), \\ \rho_{um,un}(t) &= \rho_{mn}(t),\end{aligned}$$

С учётом данных соотношений уравнение для матрицы плотности лазерного поля есть

$$\begin{aligned}\frac{d\rho_{mn}}{dt} &= -r_u \left[ 1 - \cos(g\tau\sqrt{m+1}) \cos(g\tau\sqrt{n+1}) \right] \rho_{mn} \\ &+ r_u \sin(g\tau\sqrt{m}) \sin(g\tau\sqrt{n}) \rho_{m-1,n-1}.\end{aligned}\quad (16.20)$$

Обратим теперь внимание, что уравнение (16.20) получено в предположении, что атомы, находящиеся в возбуждённом состоянии  $|u\rangle$ , инжектируются в резонатор лазера в случайные моменты времени и взаимодействуют с лазерным излучением в течение времени  $\tau$ . В любой реалистической ситуации конечное время взаимодействия атома с лазерным полем определяется каким либо специфическим механизмом релаксации. В связи с этим для придания рассматриваемой модели лазера реалистических черт следует на данном этапе учесть какой либо релаксационный процесс, прерывающий взаимодействие атомов с полем.

Рассмотрим в качестве достаточно простого механизм радиационной релаксации и положим для определённости, что атом распадается из состояний  $|u\rangle$  и  $|l\rangle$  в два других состояния  $|q\rangle$  и  $|s\rangle$  со скоростями  $\gamma$  (рис. 16.1). В такой модели следует естественно учесть, что интервал времени взаимодействия  $\tau$  является случайной величиной и соответственно следует усреднить уравнение (16.20) по различным временным интервалам. Поскольку при нахождении атома в одном из состояний  $|u\rangle$  или  $|l\rangle$  безразмерная вероятность нахождения в состоянии есть  $\exp(-\gamma\tau)$ , то вероятность того, что атом распадет к моменту времени  $\tau$  есть

$$-dP = P(\tau)d\tau = e^{-\gamma\tau}\gamma d\tau.\quad (16.21)$$

Эта вероятность очевидно одновременно является вероятностью того, что атом взаимодействует с полем в течение времени  $\tau$ .

Усредняя уравнение (16.20) по распределению вероятности (16.21) получим таким образом уравнение, которое учитывает усиление лазерного поля за счёт распадающихся атомов,

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\rho_{mn}}{dt} \right)_{\text{усил}} = & -r_u \int_0^\infty \left[ 1 - \cos(g\tau\sqrt{m+1}) \cos(g\tau\sqrt{n+1}) \right] \rho_{mn} e^{-\gamma\tau} \gamma d\tau \\ & + r_u \int_0^\infty \sin(g\tau\sqrt{m}) \sin(g\tau\sqrt{n}) \rho_{m-1,n-1} e^{-\gamma\tau} \gamma d\tau. \end{aligned} \quad (16.22)$$

Проинтегрировав последнее уравнение можно переписать его в виде

$$\left( \frac{d\rho_{mn}}{dt} \right)_{\text{усил}} = -\frac{N'_{mn}A}{1 + N_{mn}B/A} \rho_{mn} + \frac{\sqrt{mn}A}{1 + N_{m-1,n-1}B/A} \rho_{m-1,n-1}, \quad (16.23)$$

где введён коэффициент линейного усиления

$$A = \frac{2r_u g^2}{\gamma^2},$$

параметр самонасыщения

$$B = \frac{2g^2}{\gamma^2} A$$

и безразмерные параметры

$$\begin{aligned} N_{mn} &= \frac{1}{2} (m+n+2) + \frac{(m-n)^2 B}{16A}, \\ N'_{mn} &= \frac{1}{2} (m+n+2) + \frac{(m-n)^2 B}{8A}. \end{aligned}$$

Отметим, не останавливаясь на деталях расчёта, что если учесть потери лазерного излучения, то в уравнении эволюции матрицы плотности лазерного появится дополнительный член

$$\left( \frac{d\rho_{mn}}{dt} \right)_{\text{потери}} = -\frac{1}{2} \mu (m+n) \rho_{mn} + \mu \sqrt{(m+1)(n+1)} \rho_{m+1,n+1}, \quad (16.24)$$

величина которого определяется скоростью распада лазерного поля  $\mu$ . Если распад поля вызван только потерями в резонаторе, то

$$\mu = \frac{\omega}{Q}. \quad (16.25)$$

После учёта затухания поля уравнения для матрицы плотности лазерного поля принимают окончательный вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{mn}}{dt} = & -\frac{N'_{mn}A}{1+N_{mn}B/A}\rho_{mn} + \frac{\sqrt{mn}A}{1+N_{m-1,n-1}B/A}\rho_{m-1,n-1} \\ & -\frac{1}{2}\mu(m+n)\rho_{mn} + \mu\sqrt{(m+1)(n+1)}\rho_{m+1,n+1}. \end{aligned} \quad (16.26)$$

Это уравнение является основным при исследовании статистических свойств фотонного поля в одномодовом лазере.

Диагональные элементы матрицы плотности поля  $\rho_{nn} = p_n$ , описывающие вероятности нахождения  $n$  фотонов в лазерной моде, удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}p_n = & -\frac{(n+1)A}{1+(n+1)B/A}p_n + \frac{nA}{1+nB/A}p_{n-1} \\ & -\mu np_n + \mu(n+1)p_{n+1}. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Отметим во избежание недоразумений, что в рассматриваемых уравнениях числа фотонов являются неотрицательными, т. е.  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Отметим также, что решение уравнения (16.27) предполагается нормированным согласно условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \quad (16.28)$$

Уравнение для диагональных элементов матрицы плотности лазерного поля может быть наглядно интерпретировано в терминах потоков вероятности фотонов, представленных в таблице 16.1. Ограничиваясь случаем слабого насыщения, когда  $\langle n \rangle B/A \ll 1$ , где  $\langle n \rangle$  есть среднее число фотонов, можно видеть, что в уравнении (16.27) величина  $A(n+1)p_n$  есть поток вероятности из состояния фотонного поля  $|n\rangle$  в состояние  $|n+1\rangle$  вследствие испускания фотонов возбуждёнными атомами, инжектированными в резонатор лазера. Такая интерпретация величины  $A(n+1)p_n$  прямо следует из того, что поскольку коэффициент  $A$  имеет смысл скорости вынужденных переходов, то произведение  $A$  на  $p_n$  и на число конечных состояний  $n+1$  определяет полную скорость ухода фотонов из состояния поля с числом фотонов  $n$  в состояние поля с числом фотонов  $n+1$ . Аналогичным образом, член  $Anp_{n-1}$  есть поток вероятности из состояния фотонного поля  $|n-1\rangle$  в состояние  $|n\rangle$ . Член  $\mu(n+1)p_{n+1}$  описывает поток вероятности из состояния фотонного поля  $|n+1\rangle$  в состояние  $|n\rangle$ , обусловленный затуханием состояния с числом фотонов  $n+1$ .



Таблица 16.1: Поток вероятности фотонов лазерного поля.

	Усиление	Потери	Поглощение/испускание
$n + 1$			
	$(\uparrow)A(n + 1)p_n$	$(\downarrow)\mu(n + 1)p_{n+1}$	$(\uparrow\downarrow)B(n + 1)^2p_n$
$n$			
	$(\uparrow)Anp_{n-1}$	$(\downarrow)\mu np_n$	$(\uparrow\downarrow)Bn^2p_{n-1}$
$n - 1$			

Если разложить дроби в уравнении (16.27) по малому параметру  $\langle n \rangle B/A \ll 1$ , то можно также дать интерпретацию членов, ответственных за насыщение лазерной среды. Так, линейный член разложения первой дроби

$$(n + 1)A(n + 1)(B/A)p_n = B(n + 1)^2p_n$$

отвечает процессу, в котором фотон сначала поглощается, а затем испускается атомом. Аналогичное объяснение может быть дано для членов более высоких порядков.

## 16.3 Статистика числа фотонов

Вероятность  $p_n$  нахождения  $n$  фотонов в лазерной моде зависит от величины усиления за счёт вынужденного испускания и от величины потерь в резонаторе. Ниже мы обсудим статистику лазерных фотонов в стационарном режиме генерации в двух физически интересных предельных случаях, соответствующих слабому и сильному насыщению лазерной среды.

### 16.3.1 Подпороговый режим

Будем сначала считать насыщение малым и соответственно считать выполненным условие  $\langle n \rangle B/A \ll 1$ . В этом случае стационарное уравнение для фотонной функции распределения  $p_n$  можно выписать из уравнения (16.27) в приближённом виде:

$$-A(n + 1)p_n + Anp_{n-1} - \mu np_n + \mu(n + 1)p_{n+1} = 0. \quad (16.29)$$

Если записать данное разностное уравнение второго порядка при последовательных значениях числа фотонов  $n = 0, 1, 2, \dots$ , то можно видеть, что получившаяся бесконечная система уравнений сводится к двум си-

стемам уравнений, каждая из которых описывается разностным уравнением первого порядка вида

$$Anp_{n-1} - \mu np_n = 0. \quad (16.30)$$

Разностное уравнение (16.30) имеет очевидное решение

$$p_n = p_0 \left( \frac{A}{\mu} \right)^n, \quad (16.31)$$

где константа  $p_0$  должна быть определена из условия нормировки (16.28), имеющего в данном случае вид геометрической прогрессии. Как можно далее видеть, полученный ряд геометрической прогрессии сходится, а решение (16.31) является нормируемым только при  $A < \mu$ . В этом случае нормировочная константа определяется соотношением

$$p_0 = 1 - A/\mu,$$

а нормированное решение имеет вид

$$p_n = (1 - A/\mu) (A/\mu)^n. \quad (16.32)$$

Полученное решение, существующее при  $A < \mu$ , т. е. когда усиление меньше потерь, естественно интерпретировать как описывающее распределение числа фотонов ниже порога генерации.

Таким образом, при работе лазера ниже порога генерации вероятность того, что в резонаторе лазера отсутствуют фотоны есть

$$p_0 = 1 - A/\mu,$$

вероятность нахождения в резонаторе лазера одного фотона есть

$$p_1 = (1 - A/\mu) (A/\mu),$$

вероятность нахождения двух фотонов есть

$$p_2 = (1 - A/\mu) (A/\mu)^2$$

и т. д. Распределения чисел фотонов при различных значениях параметра  $A/\mu$ , отвечающие работе лазера ниже порога генерации, показаны на рис. 16.3.

Полезно сравнить полученное распределение (16.32) с распределением числа фотонов в излучении чёрного тела на частоте  $\omega$ , совпадающей с частотой лазерной моды:

$$p_n = \exp(-n\hbar\omega/k_B T) [1 - \exp(-\hbar\omega/k_B T)]. \quad (16.33)$$

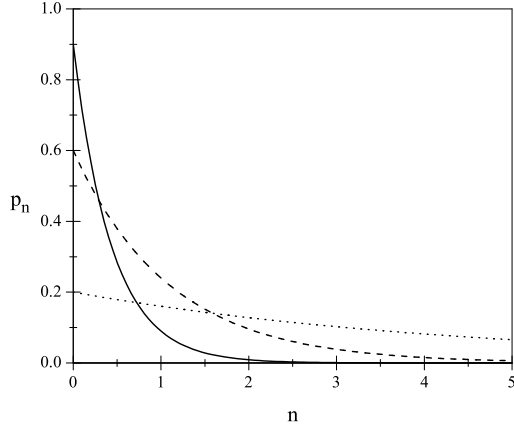


Рис. 16.3: Стационарное распределение числа фотонов ниже порога генерации при  $A/\mu = 0,1$  (сплошная линия),  $A/\mu = 0,4$  (штриховая линия) и  $A/\mu = 0,8$  (точечная линия).

Из сравнения уравнений (16.32) и (16.33) можно видеть, что по своим статистическим свойствам лазерное излучение ниже порога генерации эквивалентно излучению чёрного тела на той-же частоте  $\omega$  при температуре чёрного тела, определяемой соотношением

$$\exp(-\hbar\omega/k_{\text{B}}T) = A/\mu. \quad (16.34)$$

Эта температура может рассматриваться в качестве эффективной температуры лазерного излучения ниже порога генерации.

### 16.3.2 Надпороговый режим

Рассмотрим теперь случай работы лазера значительно выше порога генерации, когда насыщение настолько велико, что  $B/A \gg 1$ . В этом случае из уравнения (16.27) можно выписать стационарное уравнение для фотонной функции распределения в виде

$$-(A^2/B)p_n + (A^2/B)p_{n-1} - \mu np_n + \mu(n+1)p_{n+1} = 0. \quad (16.35)$$

Это разностное уравнение второго порядка также сводится к двум разностным уравнениям первого порядка, каждое из которых имеет вид

$$(A^2/B)p_{n-1} - \mu np_n = 0. \quad (16.36)$$

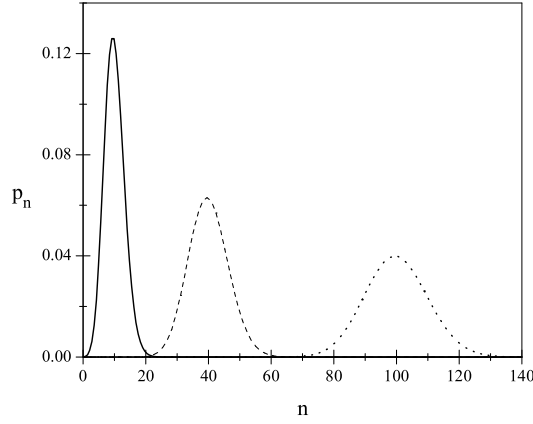


Рис. 16.4: Стационарное распределение числа фотонов значительно выше порога генерации при среднем значении числа фотонов  $\langle n \rangle = 10$  (сплошная линия),  $\langle n \rangle = 40$  (штриховая линия) и  $\langle n \rangle = 100$  (пунктирная линия).

Нормированным решением уравнения (16.36) является пуассоновское распределение

$$p_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}, \quad (16.37)$$

определяемое средним числом фотонов

$$\langle n \rangle = A^2/\mu B. \quad (16.38)$$

Несколько примеров пуассоновского распределения числа фотонов при различных значениях среднего числа фотонов приведено на рис. 16.4. Следует обратить внимание, что при работе лазера существенно выше порога генерации ширина распределения числа фотонов является весьма большой поскольку ширина пуассоновского распределения определяется квадратным корнем из среднего числа фотонов, т. е.  $\sqrt{(n - \langle n \rangle)^2} = \sqrt{\langle n \rangle}$ . Отметим также, что как было показано в главе 15, пуассоновское распределение отвечает когерентному состоянию электромагнитного поля.

В общем случае работы лазера выше порога генерации, когда  $A > \mu$ , а степень насыщения лазерной среды может быть произвольной, из уравнения (16.27) можно выписать стационарное уравнение для фотонной функции распределения, которое сводится к двум разностным уравнениям первого порядка, каждое из которых имеет вид

$$\frac{An}{1 + nB/A} p_{n-1} - \mu n p_n = 0. \quad (16.39)$$

Решение уравнения (16.39) имеет очевидную структуру

$$p_n = p_0 \prod_{k=1}^n \frac{A/\mu}{1 + kB/A}, \quad (16.40)$$

где вероятность  $p_0$  определяется условием нормировки (16.28).

Общий характер изменения функции распределения (16.40) может быть виден из следующего замечания. Величина  $p_n$  является произведением  $n$  множителей вида  $(A/\mu)(1 + kB/A)^{-1}$ , которые при  $k < n_{\max}$  больше единицы, а при  $k > n_{\max}$  меньше единицы, где целое число  $n_{\max}$  определяется приближённым уравнением

$$n_{\max} \simeq \frac{A - \mu}{\mu} \frac{A}{B}.$$

Следовательно функция  $p_n$  увеличивается для значений  $n$  вплоть до  $n_{\max}$  и уменьшается при значениях  $n$ , превышающих величину  $n_{\max}$ . Это означает, что распределение  $p_n$  имеет максимум при  $n = n_{\max}$ .

Наглядное представление о флуктуациях числа фотонов в лазерном излучении может быть получено при рассмотрении относительной величины флуктуаций числа фотонов. С этой целью удобно определить нормированное среднеквадратичное отклонение числа фотонов, называемое параметром Манделя:

$$Q = \frac{\langle (\delta n)^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle} = \frac{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2}{\langle n \rangle} - 1,$$

где  $\delta n = n - \langle n \rangle$ . При пуассоновской статистике числа фотонов данный параметр равен нулю. При значении  $Q > 0$  статистика числа фотонов является суперпуассоновской, а при  $Q < 0$  - субпуассоновской. В общем случае лазерного излучения параметр Манделя определяется соотношением

$$Q = \frac{\mu}{A - \mu}.$$

Соответственно, ниже порога, когда  $A < \mu$ , распределение числа фотонов является субпуассоновским. Выше порога, когда  $A > \mu$ , распределение всегда является суперпуассоновским. Значительно выше порога, т. е. при  $A \gg \mu$ , распределение близко к пуассоновскому.



# Глава 17

## Специфические лазерные системы

### 17.1 Лазеры на свободных электронах

Когда электрон движется в периодическом магнитном поле он может излучать электромагнитное излучение. Такая физическая ситуация легла в основу реализации одного из специфических типов лазеров, названных лазерами на свободных электронах (ЛСЭ). Первый из этих лазеров был создан в 1977 году.

Идея ЛСЭ может быть понята из следующего рассмотрения. Положим, что пучок релятивистских электронов распространяется через магнитное поле, образованное периодической структурой, называемой вигглером или ондулятором (рис. 17.1). Благодаря взаимодействию с периодическим магнитным полем каждый электрон движется по достаточно сложной траектории, имеющей вид спиральной линии с дополнительными витками. В простейшем приближении движение электрона может быть представлено как прямолинейное движение вдоль оси вигглера с осцилляциями в поперечном направлении. Совершая поперечные осцилляции электрон соответственно излучает электромагнитную энергию. При периоде магнита  $\lambda_q$  и средней скорости движения, близкой к скорости света,  $V \simeq c$ , электрон осциллирует в лабораторной системе с угловой частотой  $\omega_q = 2\pi(V/\lambda_q) \simeq 2\pi(c/\lambda_q)$ . В системе отсчёта, движущейся со скоростью  $V$ , т. е. в собственной системе, электрон осциллирует с частотой

$$\omega' = \frac{\omega_q}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (17.1)$$

Электромагнитное излучение, испущенное в собственной системе элек-

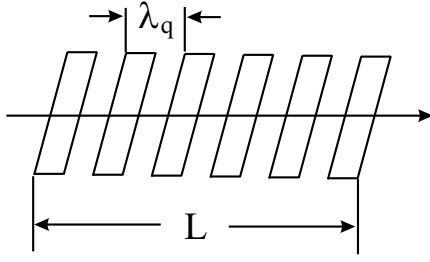


Рис. 17.1: Структура вигглера в лазере на свободных электронах.

трона на частоте  $\omega'$ , в лабораторной системе отсчёта имеет частоту

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + V/c}{1 - V/c}} \simeq \frac{2\omega_q}{1 - V^2/c^2} \quad (17.2)$$

и соответственно длину волны

$$\lambda \simeq \frac{\lambda_q}{2} (1 - V^2/c^2), \quad (17.3)$$

которая при релятивистской скорости электрона существенно короче пространственного периода вигглера.

Выражение для длины волны излучения можно представить в более удобной форме, если воспользоваться соотношением для энергии свободного релятивистского электрона

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}},$$

где  $m$  есть масса (покоя) электрона. После этого можно получить следующее соотношение

$$\lambda \simeq \frac{\lambda_q}{2} \left( \frac{mc^2}{E} \right)^2. \quad (17.4)$$

Отсюда видно, что длина волны ЛСЭ может изменяться просто изменением энергии электронного пучка. Так, при периоде вигглера  $\lambda_q = 10$  см изменение энергии пучка от 100 МэВ до 1 ГэВ отвечает перестройке частоты излучения от инфракрасного до ультрафиолетового диапазона.

### 17.1.1 Уравнения движения

Достаточно простой анализ ЛСЭ может быть проведён исходя из классической динамики электрона в электромагнитном поле, состоящим из



периодического поля вигглера и поля собственно лазерного излучения. Для определённости мы будем считать, что как периодическое магнитное поле, так и лазерное поле распространяются по оси  $z$  и являются циркулярно поляризованными. Магнитное поле вигглера выберем в виде

$$\mathbf{B}_w = B_0(\mathbf{e}_x \cos k_q z + \mathbf{e}_y \sin k_q z), \quad (17.5)$$

отвечающем векторному потенциалу

$$\mathbf{A}_w = A_0 (\mathbf{e}^* e^{ik_q z} + \mathbf{e} e^{-ik_q z}), \quad (17.6)$$

где  $k_q = 2\pi/\lambda_q$  есть волновой вектор, отвечающий периоду вигглера  $\lambda_q$ ,  $A_0 = B_0/\sqrt{2}k_q$ , а комплексный единичный циркулярный вектор определён стандартным соотношением  $\mathbf{e} = -(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ . Электрический вектор лазерного излучения выберем в виде

$$\mathbf{E}_l = E_{l0} \mathbf{e} e^{i(k_l z - \omega_l t)} + E_{l0}^* \mathbf{e}^* e^{-i(k_l z - \omega_l t)}, \quad (17.7)$$

отвечающем векторному потенциалу

$$\mathbf{A}_l = A_{l0} \mathbf{e} e^{i(k_l z - \omega_l t)} + A_{l0}^* \mathbf{e}^* e^{-i(k_l z - \omega_l t)}, \quad (17.8)$$

где  $\omega_l = ck_l$ ,  $A_{l0} = -iE_{l0}/\omega_l$ .

Будем исходить из классической функции Гамильтона, описывающей динамику релятивистского электрона, взаимодействующего с электромагнитным полем

$$H = [(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4]^{1/2}, \quad (17.9)$$

где  $\mathbf{p}$  есть импульс электрона, а  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_w + \mathbf{A}_l$  есть полный вектор-потенциал электромагнитного поля. Выражение для функции Гамильтона удобно сразу записать в более простом виде, выбрав потенциал электромагнитного поля в поперечной калибровке, когда  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = 0$ . После этого можно ещё несколько упростить выражение для функции Гамильтона учтя тот факт, что величина поля вигглера значительно превышает величину поля лазерного излучения. Оставляя только линейный член по величине лазерного поля мы можем соответственно записать следующее приближённое соотношение

$$H = (m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 + e^2 c^2 \mathbf{A}_w^2 + 2e^2 c^2 \mathbf{A}_w \cdot \mathbf{A}_l)^{1/2}. \quad (17.10)$$

Далее можно ещё упростить выражение для функции Гамильтона если отбросить осцилляции поля вигглера с удвоенным периодом. Такое приближение позволяет рассматривать энергию поля вигглера как

постоянную добавку к массе электрона и соответственно позволяет записать функцию Гамильтона в виде

$$H = (\tilde{m}^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2 + 2e^2 c^2 \mathbf{A}_w \cdot \mathbf{A}_l)^{1/2}, \quad (17.11)$$

где введена перенормированная масса

$$\tilde{m} = m \left( 1 + \frac{2e^2 A_0^2}{m^2 c^2} \right)^{1/2}. \quad (17.12)$$

Можно также учесть, что импульс электрона практически направлен вдоль оси  $z$ , т. е. определён его продольной компонентой  $p$ , и соответственно переписать функцию Гамильтона в виде

$$H = (\tilde{m}^2 c^4 \gamma^2 + 2e^2 c^2 \mathbf{A}_w \cdot \mathbf{A}_l)^{1/2}, \quad (17.13)$$

где введён релятивистский фактор

$$\gamma = \left( 1 + \frac{p^2}{\tilde{m}^2 c^2} \right)^{1/2} \simeq 1 + \frac{p^2}{2\tilde{m}^2 c^2} + \dots \quad (17.14)$$

Разложив наконец подкорневое выражение до линейного члена по величине лазерного поля можно окончательно записать вместо (17.13) соотношение

$$H = \gamma \tilde{m} c^2 + \frac{e^2}{\tilde{m}^2 c^2 \gamma^2} \mathbf{A}_w \cdot \mathbf{A}_l. \quad (17.15)$$

Заметим теперь, что поскольку электрон является релятивистским, то основная доля его энергии заключена в его поступательном движении с некоторой средней релятивистской скоростью  $V$ , а доля энергии, связанной с вариацией скорости электрона вследствие его взаимодействия с электромагнитным полем, является малой. Поскольку именно эта малая доля энергии определяет излучение электромагнитного поля электроном, то для её выделения целесообразно перейти в систему отсчёта, движущуюся вместе с электроном со скоростью  $V$ , причём саму величину скорости  $V$  можно определить позже исходя из вида уравнений движения.

Воспользовавшись таким подходом мы перейдём от координат  $z, t$  лабораторной системы к координатам  $z', t'$  системы покоя электрона. При данном релятивистском преобразовании вид фазы магнитного поля виглера (17.5) изменится согласно соотношению

$$k_q z \rightarrow k'_q z' + \omega'_q t', \quad (17.16)$$

где частота осцилляций поля вигглера, рассматриваемая в системе покоя электрона, есть

$$\omega'_q = k'_q V = \frac{k_q V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (17.17)$$

Вид фазы лазерного поля меняется согласно преобразованию

$$k_l z - \omega_l t \rightarrow k'_l z' - \omega'_l t', \quad (17.18)$$

где частота поля лазерного излучения в системе покоя электрона есть

$$\omega'_l = k'_l c = \omega_l \frac{1 - V/c}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (17.19)$$

Таким образом, в движущейся системе отсчёта векторные потенциалы имеет вид

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{e}^* A_0 e^{i(k'_q z' + \omega'_q t')} + \mathbf{e} A_0 e^{-i(k'_q z' + \omega'_q t')}, \quad (17.20)$$

$$\mathbf{A}_l = \mathbf{e} A_{l0} e^{i(k'_l z' - \omega'_l t')} + \mathbf{e}^* A_{l0}^* e^{-i(k'_l z' - \omega'_l t')}. \quad (17.21)$$

Если теперь рассмотреть функцию Гамильтона в движущейся системе, то с учётом выражений для векторных потенциалов она принимает вид

$$\begin{aligned} H &= \gamma \tilde{m} c^2 + \frac{2e^2}{\tilde{m}^2 c^2 \gamma^2} A_0 |A_{l0}| \cos(K z' - \Delta \omega t' + \Delta \varphi) \\ &\simeq \tilde{m} c^2 + \frac{(p')^2}{2\tilde{m}} + \frac{2e^2}{\tilde{m}} A_0 |A_{l0}| \cos(K z' - \Delta \omega t' + \Delta \varphi), \end{aligned} \quad (17.22)$$

где вторая строчка описывает нерелятивистское движение в выбранной системе отсчёта. В данных уравнениях

$$\begin{aligned} K &= k'_l + k'_q, \\ \Delta \omega &= \omega'_l - \omega'_q, \end{aligned} \quad (17.23)$$

а  $\Delta \varphi$  есть разность фаз между двумя полями в момент времени когда электрон начинает взаимодействовать с полями.

Как можно сейчас видеть, в системе координат, движущейся вместе с электроном со скоростью  $V$ , электрон взаимодействует с потенциалом, который движется со скоростью

$$v_0 = \frac{\Delta \omega}{K} = \frac{\omega'_l - \omega'_q}{k'_l + k'_q}. \quad (17.24)$$

С физической точки зрения данный потенциал очевидно представляет собой потенциал, который вызывает осцилляции электрона. Отсюда понятно, что для рассмотрения осцилляций электрона естественно выбрать такую величину скорости  $V$ , при которой скорость  $v_0$  обращается в нуль, т. е. выбрать условие  $\omega'_l = \omega'_q$ . При этом условии электрон в своей собственной системе взаимодействует с неподвижным потенциалом, имеющим вид стоячей волны.

Когда потенциал взаимодействия выбран как указано выше классическая функция Гамильтона не зависит от времени и определяет уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t'} &= -\frac{\partial H}{\partial z'} = -\frac{4e^2 k |A_w A_{l0}|}{\gamma \tilde{m}} \sin(2kz' + \Delta\varphi), \\ \frac{\partial z'}{\partial t'} &= \frac{\partial H}{\partial p'} = \frac{\partial \gamma}{\partial p'} \frac{\partial H}{\partial \gamma} \\ &= \frac{p'}{\tilde{m}^2 c^2 \gamma} \left[ \tilde{m} c^2 + \frac{2e^2}{\gamma^2 \tilde{m}} |A_w A_{l0}| \cos(2kz' + \Delta\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (17.25)$$

Полученные уравнения справедливы в самом общем релятивистском случае. При нерелятивистской скорости электрона уравнения (17.25) могут быть заменены уравнением маятника

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial t'^2} + \frac{4e^2 k |A_w A_{l0}|}{\gamma \tilde{m}^2} \sin(2kz' + \Delta\varphi) = 0. \quad (17.26)$$

Из последнего уравнения понятно, что релятивистские электроны осциллируют в потенциальных ямах периодического потенциала, созданного полем вигглера совместно с лазерным полем.

### 17.1.2 Усиление в ЛСЭ

Далее мы рассмотрим нерелятивистское движение электронов в периодическом потенциале ЛСЭ. Введём удобные безразмерные переменные импульса и времени

$$u = \frac{p'}{p'_0}, \quad \tau = 2k \frac{p_0}{m} t', \quad (17.27)$$

а также обозначения для безразмерных фаз

$$\psi - \psi_0 = -2kz' - \Delta\varphi \quad (17.28)$$

и обозначение для безразмерного параметра взаимодействия

$$\alpha = \frac{2e^2 |A_w A_{l0}|}{p_0^2}. \quad (17.29)$$

В таких переменных нерелятивистские уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= \alpha \sin(\psi - \psi_0), \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= -u.\end{aligned}\quad (17.30)$$

Уравнения могут быть решены по теории возмущений по малому параметру  $\alpha$  в виде

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \psi^{(n+1)}, \\ u &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n u^{(n)},\end{aligned}\quad (17.31)$$

где начальные условия есть  $\psi(0) = \psi_0$ ,  $u(0) = u^{(0)} = 1$ . Уравнения теории возмущений принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{du^{(n)}}{d\tau} &= \frac{1}{n!} \left( \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} [\alpha \sin(\psi - \psi_0)] \right)_{\alpha=0} \\ \frac{d\psi^{(n+1)}}{d\tau} &= -u^{(n)}.\end{aligned}\quad (17.32)$$

В первом порядке теории возмущений уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{du^{(1)}}{d\tau} &= \sin(\psi^{(1)} - \psi_0), \\ \frac{d\psi^{(1)}}{d\tau} &= -1.\end{aligned}\quad (17.33)$$

Проинтегрировав данные уравнения получим результат

$$u^{(1)} = \cos(\tau + \psi_0) - \cos \psi_0 = -2 \sin(\tau/2 + \psi_0) \sin(\tau/2). \quad (17.34)$$

Если усреднить данное решение по случайным начальным фазам, то можно видеть, что среднее значение импульса для ансамбля электронов остаётся неизменным, т.е.  $\langle u^{(1)} \rangle = 0$ . Напротив, среднеквадратичное значение импульса отлично от нуля:

$$\langle (\Delta u)^2 \rangle = \langle (u^{(1)})^2 \rangle = 2 \sin^2(\tau/2). \quad (17.35)$$

Это означает, что размер ансамбля электронов осциллирует во времени как

$$M = 2 \sin(\tau/2). \quad (17.36)$$

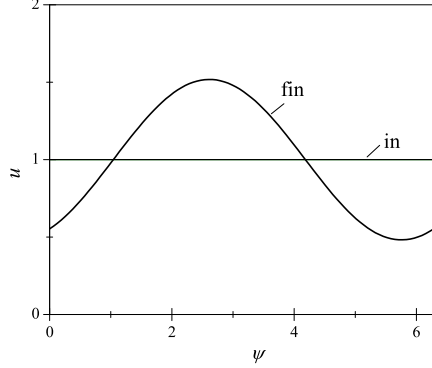


Рис. 17.2: Распределение электронов по импульсам и фазам на выходе из ЛСЭ при начальном однородном распределении по фазам при фиксированном импульсе.

Оценим ещё плотность электронных состояний следуя определению

$$\rho(u) = \frac{1}{2\pi} \int \delta(u - u(\psi_0)) d\psi_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{du/d\psi_0}, \quad (17.37)$$

где  $u(\psi_0)$  есть конечный безразмерный импульс, отвечающий начальному значению фазы  $\psi_0$ . Воспользовавшись функцией (17.34) получим

$$\frac{du^{(1)}}{d\psi_0} = -2 \cos(\tau/2 + \psi_0) \sin(\tau/2). \quad (17.38)$$

Исключив далее из этого уравнения начальную фазу с помощью уравнения (17.34) получим

$$\left( \frac{du^{(1)}}{d\psi_0} \right)^2 + (u^{(1)})^2 = M^2 = 4 \sin^2(\tau/2). \quad (17.39)$$

Отсюда окончательно имеем плотность электронных состояний

$$\rho(u) = \frac{1}{\pi \sqrt{M^2 - (u - 1)^2}}, \quad (17.40)$$

показывающую симметрию и сингулярность. Во втором порядке теории возмущений справедливо уравнение

$$\frac{d\psi^{(2)}}{d\tau} = \cos \psi_0 - \cos(\tau + \psi_0). \quad (17.41)$$

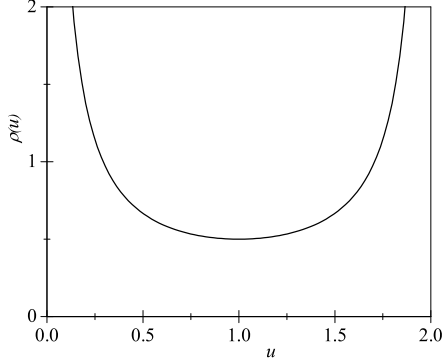


Рис. 17.3: Плотность электронных состояний на выходе из ЛСЭ при начальном однородном распределении по фазам при фиксированном импульсе.

Проинтегрировав это уравнение и подставив его в общее уравнение (17.32), взятое при  $n = 2$  получим уравнение

$$\frac{du^{(2)}}{d\tau} = [\tau \cos \psi_0 - \sin(\tau + \psi_0) + \sin \psi_0] \cos(\tau + \psi_0). \quad (17.42)$$

Последнее уравнение имеет решение вида

$$u^{(2)} = \tau \cos \psi_0 \sin(\tau + \psi_0) + \cos \psi_0 \cos(\tau + \psi_0) + \sin \psi_0 \sin(\tau + \psi_0) + \frac{1}{4} \cos 2(\tau + \psi_0) - \frac{1}{4} \cos 2\psi_0 - 1. \quad (17.43)$$

Усреднив по начальным значениям фаз получим уравнение

$$\langle u^{(2)} \rangle = (\tau/2) \sin \tau - 2 \sin^2(\tau/2). \quad (17.44)$$

Последнее уравнение определяет величину линейного усиления в ЛСЭ  $G = \langle (u - 1) \rangle = \langle u^{(2)} \rangle$ , которая будучи выражена через размерные переменные имеет вид

$$G = \frac{kp'_0 t'}{m} \sin \frac{2kp'_0 t'}{m} - 2 \sin^2 \left( \frac{kp'_0 t'}{m} \right). \quad (17.45)$$

## 17.2 Рентгеновские лазеры

Под коротковолновым диапазоном, включающим далёкий ультрафиолетовый и рентгеновский диапазоны, обычно понимают диапазон длин волн от 1 до 100 нм. В настоящее время в этом диапазоне реализовано только усиление спонтанного излучения в протяжённых плазменных

структурах типа шнура или слоя. Применение в данной области какого-либо типа зеркал или резонаторов пока является не решённым вопросом.

Двумя основными способами накачки активной среды в рентгеновском диапазоне являются облучение мишеней мощными лазерными импульсами или создание плазменных микропинчей. Необходимость значительного энергозатрата для создания инверсии связана главным образом с необходимостью обеспечить большую скорость заселения верхнего лазерного уровня, быстро опустошаемого радиационными распадами.

Согласно стандартной формуле коэффициент усиления в центре лазерной линии определяется выражением, которое в случае быстропротекающих процессов является функцией времени:

$$g(t) = \frac{A_{ul}\lambda^2}{8\pi\Delta\nu} \left[ N_u(t) - \frac{g_u}{g_l} N_l(t) \right]. \quad (17.46)$$

В данной формуле  $A_{ul}$  есть вероятность спонтанного распада (коэффициент Эйнштейна  $A$ ) на переходе между верхним состоянием  $u$  со статистическим весом  $g_u$  и нижним состоянием  $l$  со статистическим весом  $g_l$ ,  $\lambda$  - длина волны лазерного перехода,  $\Delta\nu$  - эффективная ширина линии перехода,  $N_u$  и  $N_l$  - плотности населённостей верхнего и нижнего состояний.

Вообще говоря для создания инверсии в рентгеновском диапазоне могли бы использоваться как внутренние, так и внешние оболочки атомов и ионов. По существу наиболее подходящими оказались внешние оболочки многозарядных ионов. Использованию внутренних оболочек в значительной мере мешает фотоионизационное поглощение внешних оболочек. Используются водородоподобные, гелиеподобные, литиеподобные и другие многозарядные ионы. Под кратностью ионизации понимают число  $N$ , меняющееся от 1 до  $Z$ , где  $Ze$  есть заряд ядра; значение  $N = 1$  отвечает нейтральному атому, значение  $N = Z + 1$  - голому ядру. Наиболее распространёнными являются схемы рекомбинационной, столкновительной и фотонакачки, иллюстрированные на рис. 17.4.

В высокотемпературной плазме свободные ионы попадают в связанные состояния двумя основными способами. В одном из них - в результате тройного столкновения двух свободных электронов с положительно заряженным ионом, когда после столкновения один электрон попадает в связанное состояние, а второй уносит избыток энергии. Этот процесс называют тройной рекомбинацией. В другом способе в результате двойного столкновения электрона с ядром, т.е. процесса фоторекомбинации, в результате которого электрон попадает в связанное состояние, а избыток энергии уносится излучаемым фотоном. Конкуренция процессов



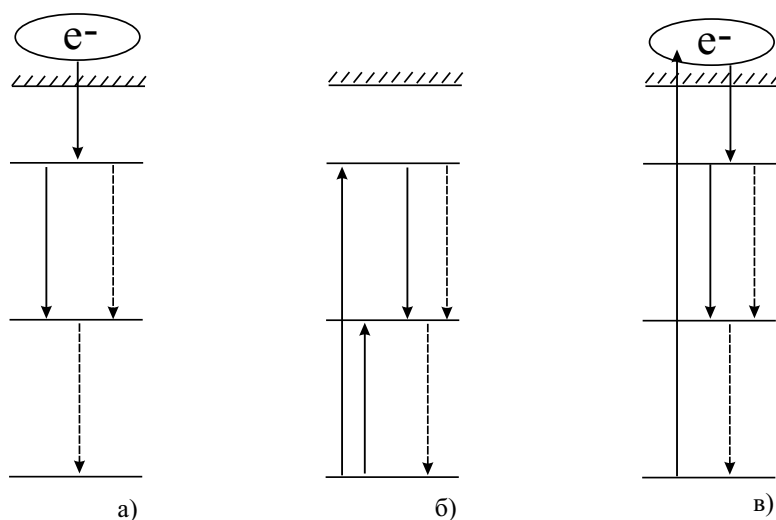


Рис. 17.4: Схемы рекомбинационной накачки (а), столкновительной накачки (б) и фотонакачки (в). Прямые линии показывают столкновительные переходы, волнистые линии - радиационные переходы. Свободные электроны, образованные ионизацией атомов и ионов, отмечены символом  $e^-$ .

рекомбинации и радиационного распада при определённых температурах и плотностях свободных электронов создаёт условия для заселения состояний с небольшими главными квантовыми числами  $n$ . Обычно инверсия возникает на переходах между уровнями с главными квантовыми числами 3-2, 4-3, 4-2, 5-4 и т.п. Верхний лазерный уровень накачивается рекомбинационным потоком, обусловленным столкновениями со свободными электронами, нижний уровень опустошается за счёт спонтанных радиационных распадов.

Наиболее важной геометрией активной среды рекомбинационного лазера является плазменный шнур. При значительном энерговкладе в активную среду плазма быстро разлетается. При разлёте за короткие времена меняются параметры среды: электронная температура и плотность, степень ионизации и т.д.

О достижении усиления стимулированного рентгеновского излучения, т. е. по-существу о создании прототипов рентгеновских лазеров сообщалось в 1984-85 гг. Один из них основан на переходе 3-2 водородоподобного иона углерода CVI с длиной волны 18,2 нм и работает в рекомбинирующей плазме. Второй основан на переходах неоподобных ионов селена в лазерной плазме.

В одном из первых экспериментов плазма была создана облучением импульсами  $\text{CO}_2$  лазера с энергией 1 кДж, длительностью 75 нс и интенсивностью  $5 \cdot 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup> твердотельной углеродной мишени. Быстрый

нагрев мишени создавал плазму в виде шнура в которой ионы  $C^{6+}$ , т. е. ионы атомов углерода, рекомбинировали в водородоподобные ионы углерода  $C^{5+}$ . Спектральные измерения показали, что электронная температура рекомбинирующей плазмы составляла около 10-20 эВ, а плотность электронов достигала значения  $10^{19} \text{ см}^{-3}$ . Измерения усиления линий рентгеновского излучения вдоль и поперёк плазменного шнура показали достижение усиления  $G \simeq 6$ , что при длине плазменного шнура в 1 см отвечало коэффициенту усиления в  $6 \text{ см}^{-1}$ .

В ещё одном из первых экспериментов мишень из селена облучалась импульсами длительностью 0,5 нс и интенсивностью  $5 \cdot 10^{13} \text{ Вт/см}^2$ . В данных экспериментах было достигнуто значение коэффициента усиления рентгеновского излучения с длиной волны 20 нм около  $5,5 \text{ см}^{-1}$ .

Рабочей средой рентгеновских лазеров является плазма, созданная мощными импульсами оптических лазеров. Усиленное рентгеновское излучение получают в основном в области 10-40 нм. Обычно используют один или два оптических импульса с длительностями в несколько пикосекунд. Первый оптический импульс лазерного излучения фокусируется на твердотельную мишень и создаёт первичную плазменную среду. Второй лазерный импульс осуществляет импульсный нагрев свободных? электронов, которые сталкиваясь с ионами высокой кратности ионизации создают инверсную населённость.

Одним из типичным примером лазерной среды является неоподобная или никелеподобная среда, т. е. среда, содержащая ионы, подобные по структуре ионам Ne или Ni высокой кратности ионизации. Такая среда, в частности может быть получена при импульсном лазерном нагреве твердотельной мишени из серебра. В случае серебра, атомы серебра  $AgI$ , имеющие основную конфигурацию  $...5s^1$ , ионизируются оптическими импульсами лазерного излучения до ионов  $NeIII?$ , теряя .. электронов. В данных ионах усиление лазерного излучения происходит на переходах  $3p - 3s$  или  $4d - 4p$ , верхние уровни которых являются метастабильными по отношению к распадам на основные состояния соответственно  $2p$  и  $3d$ . Установлено, что указанный механизм накачки рентгеновских лазеров достаточно эффективен при длительности оптических импульсов накачивающих лазеров от 100 пс до 1 пс и интенсивности лазерного излучения в области от  $10^{12}$  до  $10^{15} \text{ Вт/см}^2$ . При использовании таких коротких и мощных импульсов плазма обычно является усиливающей в течение времени порядка 10 пс. Типичные значения коэффициентов усиления плазменных сред  $g$  составляют величину порядка 10-100  $\text{см}^{-1}$ , что при длинах усиления  $l$  в несколько мм позволяет достичь величины усиления  $G = gl = 10$ . Лазерный эффект в ионизованной плазме возникает за счёт усиления спонтанного излучения и для своего наблюдения не

требует зеркал. Как правило, основным доказательством возникновения лазерного излучения является наблюдение резкого, до  $10^4$  раз, сужения спектра рентгеновского излучения, которое первоначально имело ширину, обусловленную доплеровским или столкновительным уширением.

Следует отметить, что уже разработаны методы создания многослойных зеркал с коэффициентами отражения до 60%.

## 17.3 Проблема гамма-лазера

При обсуждении проблемы гамма-лазера имеется в виду, что в таком лазере могло бы быть реализовано стимулированное испускание гамма-фотонов ядрами атомов или ионов. С принципиальной точки зрения понятно, что коэффициент усиления гамма-лазера должен определяться стандартным выражением

$$g = \sigma \left( N_2 - N_1 \frac{g_2}{g_1} \right) - \kappa N, \quad (17.47)$$

где  $\sigma$  есть сечение гамма-перехода,  $N_2$  и  $N_1$  - плотности ядер в верхнем и нижнем состояниях, образующих ядерный переход,  $g_2 = 2J_2 + 1$  и  $g_1 = 2J_1 + 1$  - кратности вырождения верхнего и нижнего ядерных состояний, определяемые их угловыми моментами  $J_2$  и  $J_1$ ,  $N$  - полная плотность ядер,  $\kappa$  - сечение потерь гамма-квантов, определяемое всеми возможными процессами поглощения и рассеяния. Сечение гамма-перехода определяется обычным выражением

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{1}{\Delta\omega\tau_\gamma}, \quad (17.48)$$

где  $\lambda$  есть длина волны гамма-излучения,  $\tau_\gamma$  - время жизни возбуждённого ядерного состояния по отношению к радиационному распаду на гамма-переходе,  $\Delta\omega$  - полная спектральная ширина гамма-перехода, учитывающая все возможные виды уширений.

Во всех практически существующих условиях сечение гамма-перехода весьма мало из-за большого значения полной ширины гамма-перехода. Вместе с тем даже если предположить возможность существования идеализированной ситуации, когда ширина гамма-линии определяется только временем радиационной релаксации, т. е. когда  $\Delta\omega = 1/\tau_\gamma$ , то даже в этом случае максимально возможной величины сечения плотность возбуждённых ядер оказывается весьма высокой. Так, при типичных значениях  $\sigma \simeq 10^{-17} \text{ см}^2$  и  $\kappa \simeq 10^{-20} \text{ см}^2$  для получения усиления  $g = 0,1$

$\text{см}^{-1}$  необходимо иметь  $N_2 \simeq 10^{16} \text{ см}^{-3}$ . Столь высокое значение плотности возбуждённых ядер требует весьма интенсивной накачки ядерных состояний. В свою очередь при высоких частотах ядерных переходов скорость радиационных распадов также весьма высока поскольку растёт пропорционально третьей степени частоты. Эти обстоятельства указывают на значительные трудности создания инверсной населённости в гамма-диапазоне.

Вместе с тем, известно существование метастабильных состояний ядерных изомеров с временами жизни в сотни и тысячи лет. Использование таких долгоживущих состояний в принципе могло бы позволить создать инверсную населённость на ядерном переходе при использовании накачки, не разрушающей ядерные состояния. Здесь, однако, также существуют трудности, связанные с тем, что обычно существование метастабильного состояния обусловлено большой разностью угловых моментов метастабильного и нижележащего состояний и соответственно большой мультипольностью гамма-перехода.

Для уменьшения ширины гамма-перехода предложено несколько основных схем. В одной из них предложено использовать эффект Мёссбауэра для получения безфонной линии гамма-перехода. В этом случае ядра должны быть включены в твердотельную матрицу, находящуюся при низкой температуре. В другой схеме предложено использовать ансамбль атомов с метастабильными ядрами, температура которого уменьшена методами лазерного охлаждения атомов. В этом случае охлаждение атомов может уменьшить доплеровскую ширину гамма-перехода. Дополнительным преимуществом этой схемы является уменьшение требования на величину инверсии, поскольку линии испускания и поглощения сильно сдвинуты в гамма-диапазоне за счёт отдачи.

Таблица 1: Некоторые формулы в системе СИ и гауссовой системе единиц

	Система СИ	Гауссова система
Интенсивность световой волны в среде	$I[\text{Вт}/\text{м}^2] = \frac{c\varepsilon_0\varepsilon}{2} E_0^2$	$I[\text{эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{с}] = \frac{c\varepsilon}{8\pi} E_0^2$
Плотность энергии световой волны в среде	$I[\text{Дж}/\text{м}^3] = \frac{\varepsilon_0\varepsilon}{2} E_0^2$	$I[\text{эрг}/\text{см}^3] = \frac{\varepsilon}{8\pi} E_0^2$
Вероятность спонтанного испускания	$W_{\text{сп}}[1/\text{с}] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4 \mathbf{d} ^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}$	$W_{\text{сп}}[1/\text{с}] = \frac{4 \mathbf{d} ^2\omega_0^3}{3\hbar c^3}$
Сечение радиационного перехода	$\sigma[\text{м}^2] = \frac{d^2\omega_0 T_2}{c\varepsilon_0\hbar} \frac{1/T_2^2}{(\omega-\omega_0)^2+1/T_2^2}$	$\sigma[\text{см}^2] = \frac{4\pi d^2\omega_0 T_2}{\hbar c} \frac{1/T_2^2}{(\omega-\omega_0)^2+1/T_2^2}$
Коэффициент поглощения материальной среды	$\alpha[\text{м}^{-1}] = \frac{d^2\omega_0 T_2}{c\varepsilon_0\hbar} \frac{1/T_2^2}{(\omega-\omega_0)^2+1/T_2^2} \mathcal{N}$	$\alpha[\text{см}^{-1}] = \frac{4\pi d^2\omega_0 T_2}{c\hbar} \frac{1/T_2^2}{(\omega-\omega_0)^2+1/T_2^2} \mathcal{N}$

## Appendix A



# Литература

- [1] Б. Лендъел. *Лазеры*. Москва, "Мир", 1964.
- [2] Ф. Бертен. *Основы квантовой электроники*. Москва, "Мир", 1971.
- [3] А. Ярив. *Квантовая электроника*. Москва, Советское радио, 1980.
- [4] Н. В. Карлов. *Лекции по квантовой электронике*. Москва, Наука, 1983.
- [5] О. Звелто. *Принципы лазеров*. Москва, "Мир", 1990.
- [6] Д. Н. Клышко. *Физические основы квантовой электроники*. Москва, Наука, 1986.
- [7] A. Yariv. *Optical Electronics in Modern Communications*. Fifth edition. New York-Oxford, Oxford University Press, 1997.
- [8] Л. Аллен, Дж. Эберли. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы*. Москва, "Мир", 1978.
- [9] С. Г. Раутиан, Г. И. Смирнов, А. М. Шалагин. *Нелинейные резонансы в спектрах атомов и молекул*. Новосибирск, Наука, 1979.
- [10] Н. Б. Делоне. *Взаимодействие лазерного излучения с веществом*. Москва, Наука, 1988.
- [11] В. С. Летохов, В. П. Чеботаев. *Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения*. Москва, Наука, 1990.
- [12] М. О. Скалли, М. С. Зубайри. *Квантовая оптика*. Москва, Физматлит, 2003.
- [13] С. А. Ахманов, В. А. Выслоух, А. С. Чиркин. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов*. Москва, Наука, 1988.

- [14] И. И. Собельман. *Введение в теорию атомных спектров*. Москва, Физматгиз, 1963.
- [15] В. П. Быков, О. О. Силичев. *Лазерные резонаторы*. Москва, Физматлит, 2003.