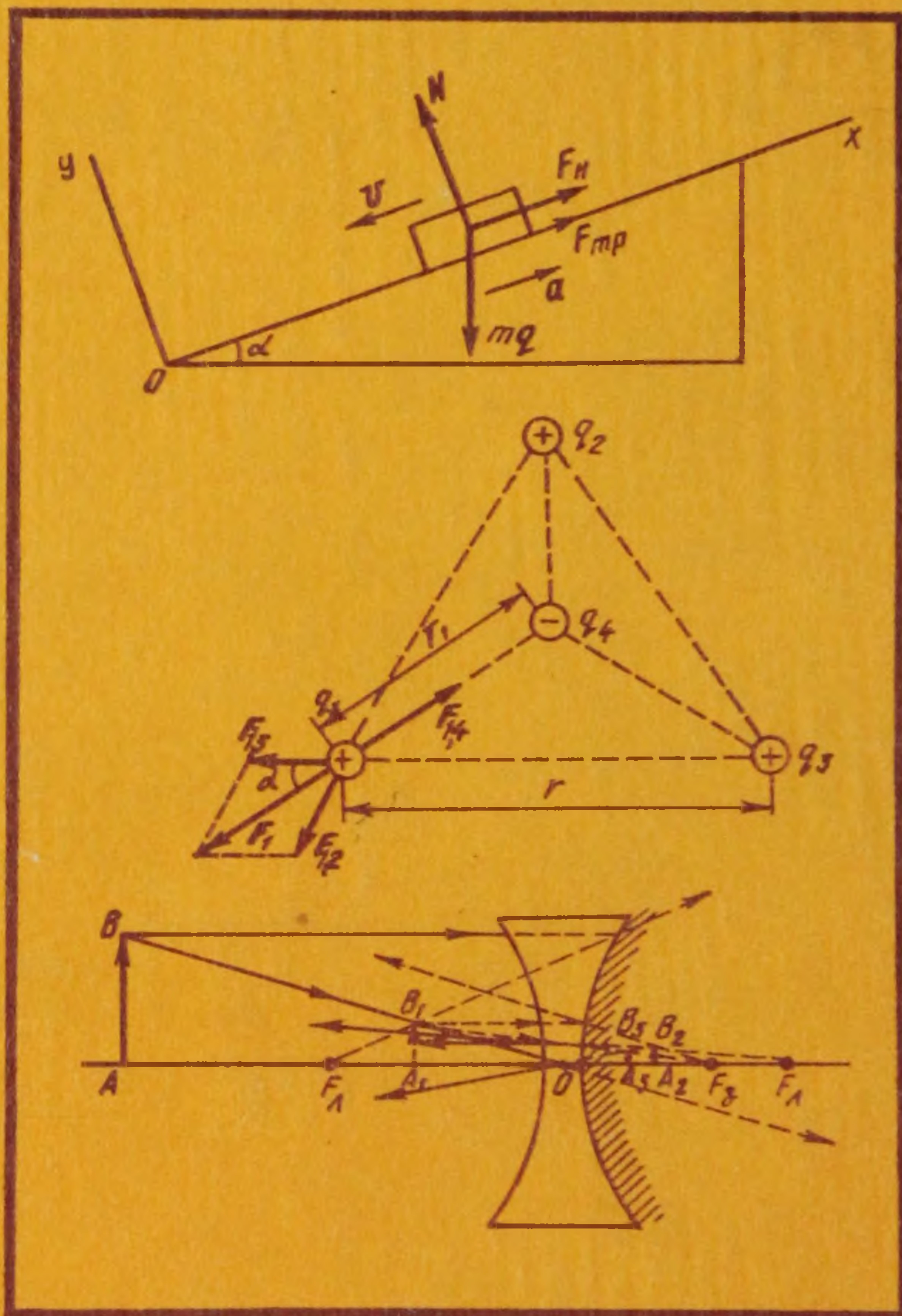
53
П69

ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ



53
П69

ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Допущено Министерством просвещения СССР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов

МИНСК
«Вышэйшая школа»
1983

ББК 22.3я73
П69
УДК 53 (076.5)

Авторы: В. И. БОГДАН, В. А. БОНДАРЬ, Д. И. КУЛЬБИЦКИЙ, В. А. ЯКОВЕНКО.

Рецензенты: кафедра методики преподавания физики Брестского пединститута; *А. В. Усова*, д-р пед. наук, зав. кафедрой методики преподавания физики Челябинского пединститута.

445220
БИБЛИОТЕКА
Павлодарского
педагогического
института
215778

Практикум по методике решения физических задач:
П 69 [Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов/В. И. Богдан, В. А. Бондарь, Д. И. Кульбицкий, В. А. Яковенко].— Мн.: Выш. шк., 1983.— 272 с., ил.

В пер.: 90 к.

В пособии даются психолого-педагогические основы решения задач по физике и излагаются методы решения основных типов задач по всем темам курса физики.

Для студентов физических факультетов педагогических институтов; может быть полезным слушателям подготовительных курсов и отделений, учащимся старших классов средних общеобразовательных школ и техникумов, преподавателям физики.

$П\frac{1704010000 - 165}{М\ 305(05) - 83}29-83$ ББК 22.3я73

© Издательство «Вышэйшая школа», 1983.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одним из компонентов подготовки учителя физики является овладение методикой решения физических задач. Это необходимо для обучения учащихся сознательному усвоению теоретического материала, развития логического мышления, формирования умений и навыков применения знаний.

Данное пособие написано в соответствии с программой курса «Практикум по решению физических задач» и предназначено для студентов физических факультетов пединститутов. Структура пособия определена программой курса. В первом разделе рассматриваются психолого-педагогические аспекты решения учебных задач, алгоритмизация процесса решения, а также методика обучения решению задач. Во втором разделе излагаются методы и приемы решения задач основных типов по всем темам курса физики, приводится краткий перечень основных понятий, законов и формул и предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Задачи подбирались таким образом, чтобы они соответствовали содержанию и структуре учебного материала темы. Содержание задач, их структура и методы решения, а также степень трудности различны. Это позволяет использовать их для групповой и индивидуальной работы со студентами, организации самостоятельной работы студентов и составления контрольных работ. Большинство задач составлено авторами, часть задач заимствована из известных пособий, но переработана. Названия и обозначения единиц, используемых в пособии, соответствуют стандарту СЭВ «Метрология. Единицы физических величин».

Пособие написано на основании опыта проведения семинарских и практических занятий по курсу «Практикум по решению физических задач» на физическом факультете Минского государственного педагогического института им. А. М. Горького.

Раздел I написан Д. И. Кульбицким, в разделе II — § 1.1—1.6 и гл. 4 написаны В. А. Бондарем, § 1.7, 1.8 и гл. 3 — В. И. Богданом, гл. 2 — В. А. Яковенко.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры методики преподавания физики Брестского techинститута и доктору педагогических наук, заведующей кафедрой методики преподавания физики Челябинского пединститута А. В. Усовой за существенные замечания, способствовавшие улучшению содержания пособия.

Все отзывы и пожелания просьба присылать по адресу: 220048, Минск, проспект Машерова, 11, изд-во «Вышэйшая школа».

Авторы

I. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ

Тема 1. Задачи по физике и их классификация

Обобщенное представление о задаче. Учебная задача, ее специфика и структурная характеристика. Основные этапы решения задачи. Абстрагирование и моделирование в процессе решения задач. Классификация задач по физике. Межпредметные связи и пути их реализации при решении физических задач.

В настоящее время однозначного и общепринятого определения понятия «задача» не существует. Например, психолог А. А. Смирнов считает, что активное целенаправленное мышление всегда есть решение задач. Английский ученый У. Р. Рейтман определяет задачу как систему информационных процессов.

Определение задачи, которое отличается весьма высокой степенью обобщенности, предложено советским ученым А. Ф. Эсауловым: «Задача — это более или менее определенные системы информационных процессов, несогласованное или даже противоречивое соотношение между которыми вызывает потребность в их преобразовании» («Психология решения задач». М., 1972, с. 17). Решение задачи заключается в определении путей преодоления такой несогласованности или противоречия.

Определение задачи, имеющее более конкретный характер, дано психологом Л. Л. Гуровой: «Задача — объект мыслительной деятельности, содержащий требование некоторого практического преобразования или ответа на теоретический вопрос посредством поиска условий, позволяющих раскрыть связи (отношения) между известными и неизвестными ее элементами» («Психологический анализ решения задач». Воронеж, 1976, с. 12).

Учебная задача отличается от других задач тем, что ее цель и результат состоят в изменении самого действующего субъекта, заключающемся в овладении определенными способами действия, а не в изменении предметов, с которыми субъект действует.

В педагогической и методической литературе физическую задачу представляют в виде системы, состояние которой характеризуется определенными параметрами. Физической задачей в практике обучения обычно называют небольшую проблему, которая решается с помощью логических умозаключений, математических действий и эксперимента на основе методов и законов физики.

На решение любой задачи влияют два фактора: структурные особенности задачи (ее компонентный состав) и индивидуальные черты решающего. Обычно физическая задача состоит из условия и требования. Между данными и искомыми величинами существуют внутренние отношения (связи, зависимости), характер которых определяет структуру задачи. С психологической точки зрения, решение задачи заключается в отыскании этих отношений, причин, следствий и оснований, о которых ничего не говорится в задаче. В связи с этим психологи вводят понятие искомого, нахождение которого составляет решение задачи и на основании которого определяются ее требования. При решении физических задач в качестве искомого выступают физические законы, правила, принципы и т. п.

Процесс решения физической задачи включает выбор стратегии решения, определение общих и частных правил, которые можно применить для решения задачи. Под стратегией понимают исчерпывающий план действий, который складывается в процессе формирования замысла решения конкретной задачи. Обычно стратегия решения физической задачи состоит из трех этапов: предварительного (изучение условия задачи и его анализ), планирующего (формирование замысла) и реализующего (решение и его проверка).

При обучении решению задач по физике используются как общие правила, так и частные приемы решения задач определенных типов. Общие правила направлены на определение основных подходов к решению физических задач достаточно большого класса. Приведем, например, правила, которым надо следовать при решении задач по динамике.

1. Выяснить, каким законам подчиняется описываемый в задаче физический процесс.

2. Сделать чертеж и указать все силы, действующие на тело.

3. Выбрать систему координат. В случае равнопеременного движения за положительное направление оси Ox обычно принимается направление вектора ускорения. При движении по окружности положительное направление оси Ox совпадает с направлением центростремительного ускорения. При равномерном прямолинейном движении ось Ox направляют в сторону движения.

4. Составить основное уравнение динамики для проекций сил на координатные оси, определив их равнодействующие:

а) $F = ma$, если тело массой m движется равнопеременно с ускорением a;

б) $F = \frac{mv^2}{r}$, если тело массой m движется по окружности радиусом r со скоростью v;

в) $F = 0$, если тело движется равномерно прямолинейно (или в данном направлении не движется).

5. Если число неизвестных больше числа полученных уравнений, то нужно составить еще уравнения на основе законов кинематики.

6. Решить полученную систему уравнений.

Частные правила в виде специальных приемов применяются при решении задач достаточно узкого класса. Покажем это на следующем примере: «На рис. 1 изображены два графика изменения объема газа в зависимости от температуры. Необходимо определить, как изменялось давление газа в каждом случае». Для решения задачи используем такой прием: проведем две изобары через точки A и B. На рис. 1, *а* изобара OA образует больший угол с осью OT, чем изобара OB. Это свидетельствует о том, что изобара OA соответствует меньшему давлению и при переходе от A к B давление газа возрастает, т. е. повышение температуры сопровождается повышением давления газа. Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что на рис. 1, *б* изображен график повышения температуры при уменьшающемся давлении газа.

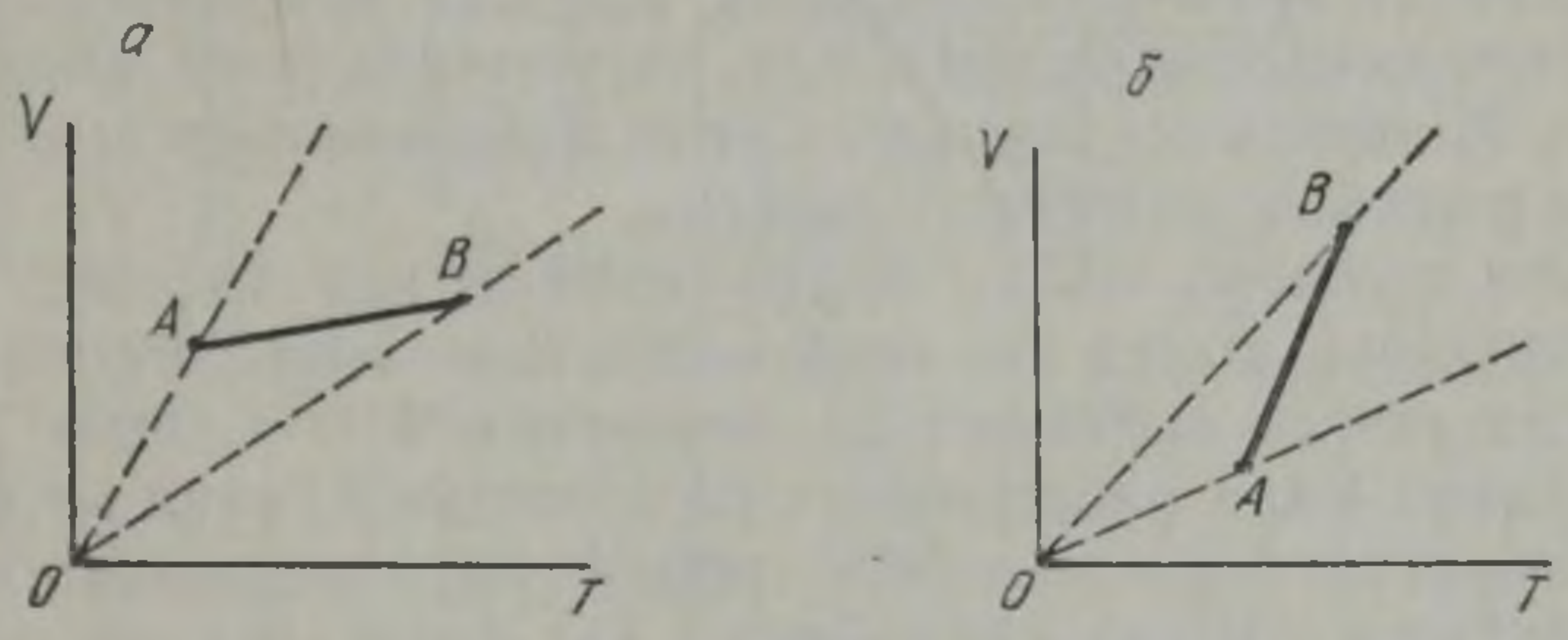


Рис. 1

Многие физические задачи представляют некоторую абстракцию реальной проблемной ситуации. В таких задачах осуществлено отвлечение от конкретной, предметной действительности, т. е. абстрагирование. Часто учащимся предлагаются задачи сразу в абстрактном виде, например: «Определить, чему равен коэффициент трения, если предмет начал двигаться равномерно по наклонной плоскости при угле наклона α». Достоинство абстрактных задач состоит в том, что в них выделяется и подчеркивается физическая сущность явлений, выяснению которой не мешают второстепенные детали. Это облегчает решение задач, но не способствует формированию навыков применения знаний на практике. Чтобы сформировать такие навыки, в процессе обучения физике необходимо использовать задачи с конкретным содержанием, описывающие реальные практические и жизненные ситуации, например: «Ручной тормоз автомобиля считается исправным, если автомобиль удерживается тормозом на уклоне 12°. Для дорог с каким коэффициентом трения рассчитано это правило?» При анализе таких задач необходимо осуществлять процессы абстрагирования для выделения существенных связей. Во многих случаях это вызывает большие трудности.

В практике обучения физике широко применяется моделирование как один из методов преподавания. Сущность этого метода состоит в том, что для исследования физического объекта (явления, процесса) создается его модель, которая заменяет оригинал и служит предметом изучения. В зависимости от способов и средств построения модели разделяют на материальные (вещественные) и идеальные (мысленные). В школьном курсе физики (в частности, при решении задач) широкое применение нашли идеализированные модели-представления (материальная точка, абсолютно твердое тело, идеальный газ и т. д.). Сами задачи по физике с абстрактным содержанием можно рассматривать как идеализированные модели реальных физических задач.

В процессе решения физических задач используются модели двух видов: вспомогательные и решающие. Вспомогательные модели (рисунки, схемы, графики) служат для анализа условия задачи, выявления ее основных частей и структуры, поиска метода решения задачи. Решающие модели представляют собой новые задачи, замещающие исходные задачи и в каком-то отношении более удобные, чем они. С точки зрения психологии, процесс решения задачи — это процесс ее перемоделирования, т. е. построение цепи моделей исходной задачи. Конечными звеньями этой цепи являются задачи-модели, методы решения которых известны.

Приведем пример: «Как будет изменяться период колебаний сосуда, подвешенного на длинной нити, если сосуд наполнен водой, которая постепенно вытекает из отверстия в его дне?» Для решения этой задачи надо рассмотреть следующие задачи-модели.

1. На длинной нерастяжимой легкой нити подвешено тело, размерами которого можно пренебречь. От чего зависит собственная частота колебаний этой системы? (Общая модель.)

2. На длинной нити подвешен сосуд с водой. Какие допущения следует сделать, чтобы принять его за математический маятник? (Частная модель.)

3. Маятник состоит из сосуда, подвешенного на длинной нити. Чему равна длина такого маятника, если считать его математическим маятником? (Частная модель.)

Вспомогательные и решающие модели выполняют в процессе решения задач различные функции, главные из которых представляют собой конкретизацию, схематизацию, построение наглядного образа, обобщение, абстрагирование.

Для выявления функций, роли и места задач по физике в системе методов обучения, уровня усвоения учебного материала, развития познавательных способностей и творческих возможностей учащихся их классифицируют по различным признакам. Выбор этих признаков зависит от целей классификации. Так, если необходимо выявить общий подход к решению задач определенного типа или составить алгоритм их решения, то задачи целесообразно классифицировать по способам решения. Если задачи обладают политехнической направленностью и соответствуют целям профориентации учащихся, их следует классифицировать по содержанию.

В методической литературе встречаются различные точки зрения по вопросу классификации физических задач. Достаточно удобной для учебных целей является классификация физических задач по следующим признакам: 1) по характеру требований; 2) по содержанию; 3) по способу предъявления и решения; 4) по целевому назначению (рис. 2).

В зависимости от способа классификации одни и те же задачи могут быть отнесены к различным группам. В связи с этим любая классификация задач является неполной и не до конца последова-

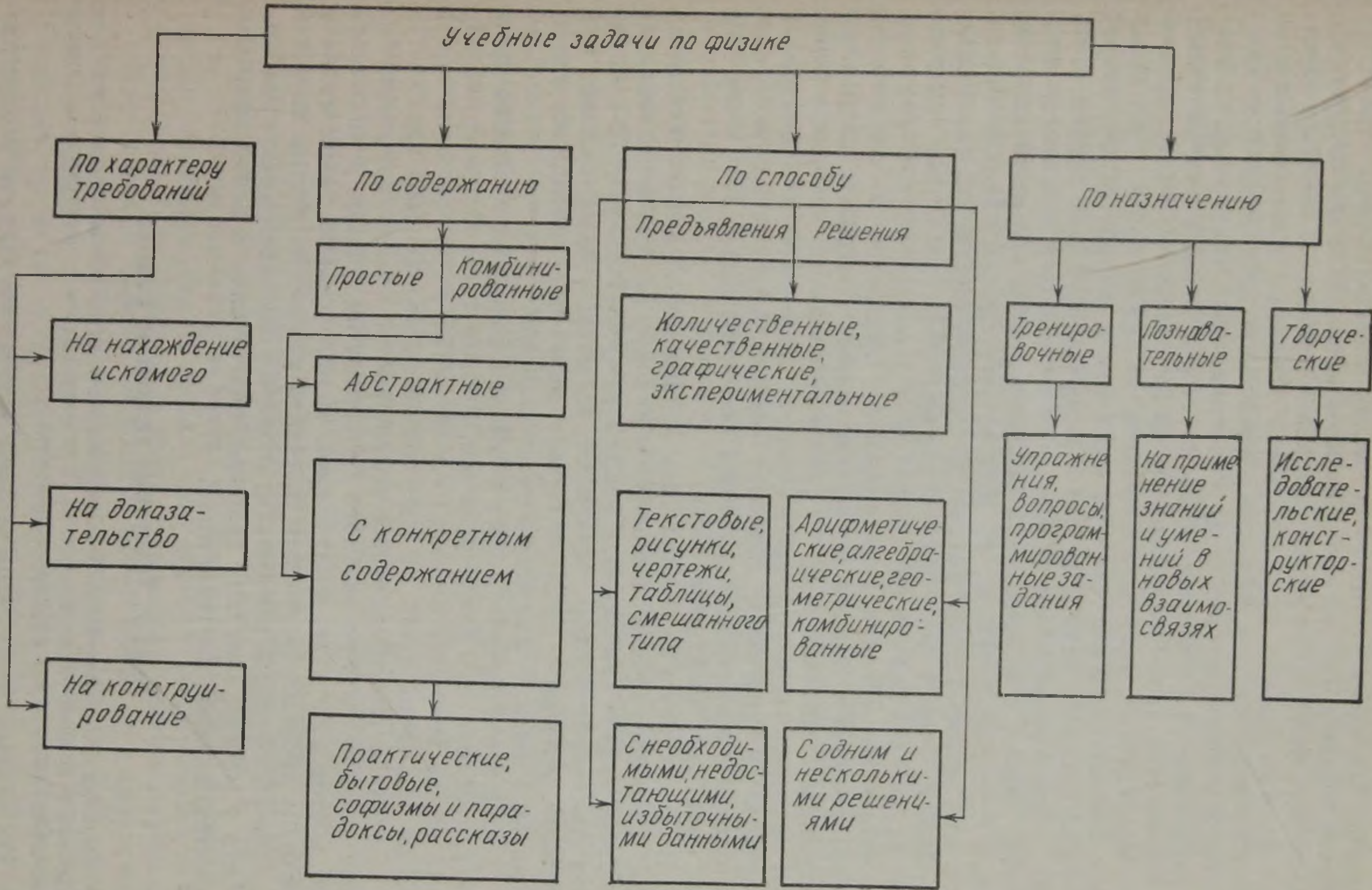

Учебные задачи по физике
По характеру требований
На нахождение искомого
На доказательство
На конструирование
По содержанию
Простые
Комбинированные
Абстрактные
С конкретным содержанием
Практические, бытовые, софизмы и парадоксы, рассказы
По способу
Предъявления
Решения
Количественные, качественные, графические, экспериментальные
Текстовые, рисунки, чертежи, таблицы, смешанного типа
Арифметические, алгебраические, геометрические, комбинированные
С необходимыми, недостающими, избыточными данными
С одним и несколькими решениями
По назначению
Тренировочные
Познавательные
Творческие
Упражнения, вопросы, программированные задания
На применение знаний и умений в новых взаимосвязях
Исследовательские, конструкторские

Рис. 2

тельной. Однако в методических целях классификацию задач применять полезно. Так, из предложенной классификации следует, что различные типы задач имеют различное значение в процессе обучения физике. Задачи на нахождение искомого достаточно полно представлены во всех сборниках и занимают доминирующее положение в учебном процессе. Другие типы задач (например, на конструирование, на доказательство; с историческим, межпредметным и «занимательным» содержанием) представлены в учебном процессе недостаточно, хотя необходимость их использования не вызывает сомнений. Менее всего разработаны и внедрены в учебный процесс задачи с межпредметным содержанием, т. е. задачи, которые состоят из компонентов основного и смежного (смежных) предметов. Задачи с межпредметным содержанием являются одной из форм межпредметных связей. Для их составления, анализа и решения необходимо знание различных учебных предметов (математики, химии, астрономии, биологии и др.). Межпредметное содержание задачи задается в ее условии или выявляется при решении. Соотношение основного и смежного предметов в содержании задач различно. Задача по физике может содержать параметры (термины, символы и т. д.) из смежного предмета, которые в решении непосредственно не используются, например: «Рассматривая жировую (миелиновую) оболочку нерва в качестве плоского конденсатора с площадью обкладок 1 см^2, толщиной $2 \cdot 10^{-6}$ м и $\varepsilon = 49$, рассчитать его электроемкость».

В структурную характеристику задачи может включаться материал смежного предмета в неявном виде, но без его использования решение задачи невозможно, например: «Указать, какие из следующих примесей: фосфор, алюминий, мышьяк, сурьма, галлий, бор, кремний, углерод — придают германиевому полупроводнику электронную, а какие — дырочную проводимость».

Содержание задачи может включать материал смежного предмета, необходимого для ее решения, в явном виде, например: «Сравнить время покрытия металла слоем цинка и серебра одинаковой массы при одной и той же силе тока в гальванической ванне».

Задачи с межпредметным содержанием можно применять на всех этапах усвоения учебного материала по физике, а также при его повторении и систематизации. Использование таких задач в учебном процессе позволяет сообщить учащимся более глубокие знания по смежным предметам, создать у них системные представления о многих явлениях природы, подготовить к целостному восприятию научной картины мира.

Тема 2. Текстовые задачи по физике

Особенности текстовых задач. Количественные и качественные текстовые задачи. Простые и комбинированные задачи. Текстовые задачи с историческим, техническим, биофизическим и другим содержанием.

По способу выражения условия физические задачи можно разделить на текстовые, экспериментальные и графические (частный случай — задачи-рисунки). Наибольшее применение в учебном процессе получили текстовые задачи. Это такие задачи, условие которых выражено словесно, в виде текста, и содержит все необходимые данные, кроме физических констант.

Текст задачи может содержать сведения, важность которых для решения задачи неочевидна. Пусть, например, дана следующая задача: «Советский парашютист в 1945 г. совершил рекордный прыжок с высоты 10,4 км и пролетел до высоты 600 м в течение 150 с, не раскрывая парашюта. Определить наибольшую скорость полета парашютиста, считая его падение равноускоренным». В этой задаче совершенно неважно, в каком году был совершен прыжок и то, что он был рекордным. Значимость других сведений, приведенных в задаче, менее очевидна, и она может оказаться неодинаковой для решающих. Например: что значит «не раскрывая парашюта» (существенно это или несущественно для решения задачи); на каком участке траектории скорость падения наибольшая; учитывать сопротивление воздуха или нет? Поэтому для решения задачи из всех ее данных надо выбрать только существенные. Это осуществляется в процессе построения плана решения задачи и заставляет решающего целенаправленно перерабатывать информацию, содержащуюся в условии задачи.

Условие задачи в виде текста (текстовый код) оказывается неудобным для образного представления задачи. Поэтому процесс восприятия задачи сопровождается перекодированием ее условия с помощью кода более высокого порядка. Первой формой перекодирования является переход от задачи в виде текста к краткой записи ее условия в виде буквенных и знаковых обозначений, выполнение рисунков, схем электрических цепей и др. Возможно и дальнейшее перекодирование задачи кодами высшего порядка, например использование для кодирования диаграмм и сил (выделение взаимодействующих тел и изображение мер этих взаимодействий с помощью векторов сил), аналитической формы записи условия задачи.

В зависимости от характера и метода исследования явлений текстовые задачи по физике можно разделить на качественные и количественные (вычислительные или расчетные). Качественными называют такие задачи, при решении которых определяются только качественные зависимости между физическими величинами. Для их решения, как правило, не требуется никаких вычислений. Решение качественных задач заключается в применении физических закономерностей к анализу явлений, о которых говорится в задаче, т. е. объектом изучения является физическая сущность явлений на уровне их объяснения. В связи с этим решение качественных задач целесообразно на начальных этапах усвоения учебного материала.

Качественные задачи по физике могут быть сформулированы словесно, с опорой на иллюстрацию (рисунок, фотографию, схему, график и др.), могут предполагать использование эксперимента. Приведем примеры: «Определить направление индукционного тока в проводнике, который движется в магнитном поле, как показано на рис. 3»; «Равноплечий рычаг уравновешен грузами одинаковой массы, но различного объема. Что произойдет, если грузы поместить в воду?»

При решении качественных задач по физике применяется аналитико-синтетический метод, сущность которого заключается в том, что с помощью индукции и дедукции строятся логические умозаключения, основанные на физических законах.

Последовательность этапов решения качественных задач может быть следующей:

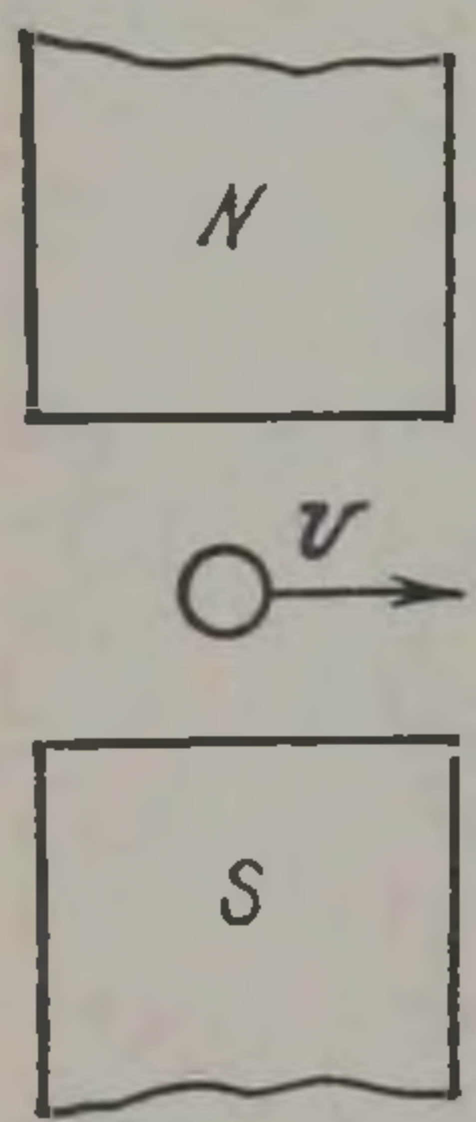


Рис. 3

1) ознакомление с условием задачи, его осмысливание и усвоение;

2) анализ содержания задачи, выяснение ее физического смысла, построение графика, чертежа, рисунка и др.;

3) аналитические и синтетические рассуждения для расчленения сложных явлений на ряд простых и объединения следствий (результатов), полученных путем применения физических законов к конкретному случаю, в общий вывод;

4) анализ полученного ответа.

Качественные задачи по физике повышают интерес к предмету, развивают логическое мышление учащихся, формируют умение применять знания для объяснения явлений природы и др. Их можно использовать в процессе объяснения нового материала, при его закреплении и проверке знаний учащихся. Качественные задачи включают в самостоятельные и контрольные работы по физике, а также в домашние задания учащимся.

Задачи, при решении которых устанавливаются количественные зависимости между физическими величинами, называют количественными (вычислительными или расчетными). Для получения ответа на вопрос задачи (в виде формулы или числа) необходимо произвести определенные математические операции. Начальным этапом решения таких задач является качественный анализ, который затем дополняется количественным анализом с вычислением определенных числовых характеристик процессов. Однако в процессе обучения отмечаются случаи, когда количественные задачи решаются без достаточного качественного анализа путем подстановки данных в формулу, подбираемую по чисто формальным признакам. При этом математические операции могут выступать на передний план, заслоняя физическую сущность задачи.

Как установили психологи, решение физических задач часто осложняется применением громоздкого вычислительного аппарата, который нередко создает видимость мыслительных усилий, а на деле искусственно сдерживает применение более активных форм умственного труда. Увлечение математическими расчетами при решении задач по физике приводит к тому, что физический смысл понятий отступает на второй план, превращаясь в разновидность математических законов. Это приводит к тому, что вторая сигнальная система, функционирующая при оперировании словесными и математическими формулами, не находит достаточной опоры в первой сигнальной системе, т. е. в конкретных фактах действительности.

Таким образом, решение количественных задач необходимо сопровождать достаточно глубоким и всесторонним качественным анализом, выявлением физической сущности задачи. Количественные задачи не следует противопоставлять качественным, так как в основе решения задач обоих типов лежит понимание физической сущности законов и умение применять их на практике.

Решение количественных задач способствует глубокому усвоению физических теорий, понятий и законов, формирует действенные знания, воспитывает материалистические представления о природе и т. д.

Исходя из числа зависимостей, включенных в задачу, количественные задачи по физике делят на простые и комбинированные.

Простые задачи требуют несложного анализа и небольших вычислений. Для их решения, как правило, требуется одна-две формулы. Цель решения таких задач — помочь учащимся запомнить формулы, научить подстановке данных, конкретизировать полученные закономерности, закрепить знание наименований физических величин, некоторых констант и др. Такие задачи целесообразно решать (в небольшом количестве) после изучения новой закономерности, а также включать в домашние задания. По дидактическим целям эти задачи являются тренировочными.

Если задачи предполагают применение многих закономерностей из разных тем и разделов физики, то их называют комбинированными. Такие задачи могут содержать проблемную ситуацию, а также элементы новизны. Например: «Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Какова должна быть плотность материала, из которого изготовлены шарики, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина ε, плотность керосина ρ».

Комбинированные задачи по физике можно использовать для углубления знаний учащихся, расширения их представлений о взаимосвязях физических явлений, а также для тематической проверки знаний. По дидактическим целям такие задачи относятся к задачам с познавательным содержанием.

При классификации по содержанию можно выделить задачи с историческим, техническим и межпредметным содержанием.

К задачам с историческим содержанием относятся задачи, содержащие сведения исторического характера о физических опытах, открытиях, изобретениях, методах определения физических величин и т. п. Они позволяют ввести элементы истории физики и техники в курс физики средней школы. Например: «В электрических лампах, созданных А. Н. Лодыгиным (1872 г.), нагревался угольный стержень. Рассчитать мощность шестивольтной лампочки Лодыгина, если угольный стержень имел длину 6 см и диаметр 2 мм».

С помощью задач по физике исторического содержания можно показать те огромные изменения, которые произошли в науке и технике. Например: «Первый в мире электроход Б. С. Якоби имел мощность двигателя 180 Вт. Судно прошло по Неве (13 сентября 1838 г.) 7 км за 3 ч. Какую работу совершил двигатель и чему равна его сила тяги?» Для сравнения надо сообщить учащимся сведения об аналогичных современных машинах и установках.

Решение задач по физике исторического характера способствует развитию любознательности, углубленному и осмысленному усвоению курса физики, патриотическому воспитанию учащихся.

К задачам с техническим содержанием относятся задачи, в которых сообщаются сведения о промышленном и сельскохозяйственном производстве, транспорте, связи и др. Они должны быть логически связаны с учебным материалом по физике и содержать сведения о технических объектах и явлениях, имеющих широкое применение в народном хозяйстве. Особенно ценны задачи, в которых производятся распространенные в технике расчеты (расчет электрической цепи, определение расходов электроэнергии и т. д.). Например: «Рассчитать сечение алюминиевого провода линии электропередачи от станции к предприятию, если длина линии l, передаваемая мощность P, напряжение, под которым передается энергия, U. Потери мощности P_1».

Важное познавательное и воспитательное значение имеют задачи, знакомящие с достижениями и перспективами развития современной техники. Например: «Новый советский вертолет МИ-26 способен поднять груз массой 20 т на высоту 2,25 км. Какая работа совершается при этом?»

Задачи с техническим содержанием должны не только по содержанию, но и по форме возможно ближе подходить к производственным условиям (содержать реальные данные, предполагать использование паспортных данных машин и установок, сведений из справочной литературы, чертежей, схем и т. д.). Например: «Рассчитать стоимость электроэнергии, потребляемой вашей стиральной машиной за 1,5 ч». Применение таких задач в учебном процессе способствует политехнической подготовке учащихся, повышает их интерес к физике, знакомит с достижениями и перспективами развития народного хозяйства страны.

В процессе изучения физики используются также задачи межпредметного характера, в частности задачи с биофизическим содержанием. Их решение является одним из путей введения биофизического материала в курс физики в определенной системе. Примером задачи такого содержания является следующая: «Длина наружного слухового канала уха человека (следовательно, и длина резонирующего в нем столба воздуха) составляет 2,7 см. При какой частоте звука слышимость будет наилучшей?» Решение задач с биофизическим содержанием позволяет показать единство законов природы, применимость некоторых законов физики к живому организму, познакомить с физическими методами исследования, которые широко применяются в биологии и медицине.

Тема 3. Задачи по физике как составной элемент структуры физических знаний

Системно-структурный подход к курсу физики, структурно-компонентный анализ элементов физических знаний. Сложность и трудность физической задачи. Вспомогательные и родственные задачи по физике.

В последние годы в педагогических исследованиях используется новое методологическое направление — системно-структурный подход.

Системно-структурный подход основан на том, что специфика сложного объекта (системы) не исчерпывается особенностями составляющих его элементов, а определяется прежде всего характером связей и отношений между отдельными элементами системы.

Под системой понимают определенным образом упорядоченное объединение составляющих ее элементов. Если элементы целого существенно влияют друг на друга, то говорят о том, что элементы образуют структуру. Очевидно, что учебный материал по физике представляет собой систему, обладающую определенной логической структурой. Основными элементами этой системы можно считать физические понятия и суждения (научные факты, явления, процессы, законы, теории, свойства тел и т. п.). Между структурными элементами знаний существуют внутренние связи, которые отражают связи предметов и явлений реальной действительности.

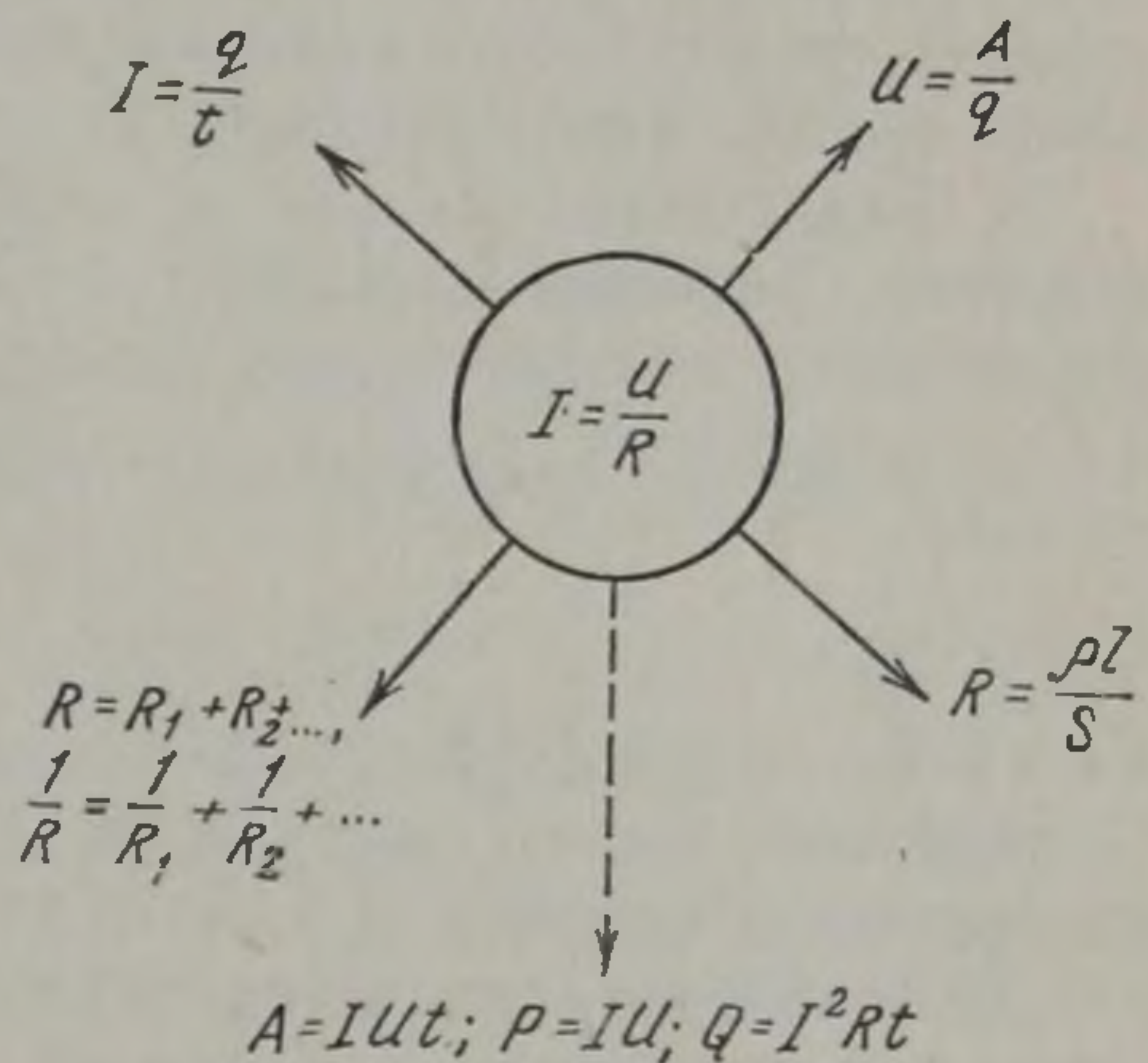


Рис. 4

Содержанию и структуре учебного материала по физике соответствует определенная система задач, которая строится на основании связей между элементами системы знаний. В настоящее время система задач подбирается опытным путем и интуитивно.

Одним из путей создания оптимальной системы задач по каждой теме курса физики является применение системного подхода. Исходным при этом является определение отношений и связей между элементами знаний и их компонентами. Совокупность отношений системы знаний позволяет выделить систему задач, в которой реализуются эти отношения и связи. Свойства каждой задачи (содержание, структура, сложность и др.) зависят от вида отношений в системе знаний.

Системность в решении задач предполагает, что каждая очередная задача должна содержать определенную новизну, быть посильно трудной, требовать соответствующих приемов работы над ней. В качестве примера приведем систему задач по теме VII класса «Закон Ома для участка цепи», в которой реализуется совокупность связей между элементами знаний этой темы (рис. 4).

1. Задачи на понимание зависимостей между величинами, определяемыми законом Ома $\left(I = \frac{U}{R},\ U = IR,\ R = \frac{U}{I}\right)$. Например: «В сеть напряжением 120 В включены электрический чайник и настольная лампа. Сопротивление спирали чайника 22 Ом, сопротивление нити накала лампы 240 Ом. Чему равна сила тока в том и другом приборе?»

2. Задачи, требующие применения закона Ома и формулы для расчета сопротивления проводника $\left(I = \frac{U}{R},\ R = \rho \frac{l}{S}\right)$. Например: «Реостат изготовлен из никелиновой проволоки длиной 40 м и площадью поперечного сечения 0,5 мм². Напряжение на зажимах реостата 80 В. Чему равна сила тока, проходящего через реостат?»

3. Экспериментальные задачи по определению сопротивления проводника методом амперметра и вольтметра, которые решаются при проведении лабораторной работы.

4. Задачи, связывающие три физические зависимости $\left(I = \frac{U}{R},\ R = \rho \frac{l}{S},\ I = \frac{q}{t} \text{ или } U = \frac{A}{q}\right)$. Например: «При прохождении заряда 15 Кл в электрическом паяльнике выделилось 3300 Дж теплоты. Определить длину спирали паяльника из никелина, если площадь ее поперечного сечения 0,5 мм², а сила тока в цепи 0,5 А».

Дальнейшее совершенствование умения пользоваться законом Ома происходит при изучении видов соединений проводников и работы электрического тока.

При системном подходе к курсу физики теоретические знания и умение решать задачи составляют единую систему физических знаний. Это приводит к более глубокому и сознательному усвоению знаний одновременно с овладением структурой задач.

Важным свойством физических задач является их сложность и трудность. В психолого-педагогической и методической литературе нет единого мнения о сложности и трудности познавательных задач, в том числе задач по физике. Приведем наиболее характерные точки зрения по этой проблеме.

Психологи отмечают, что сложность задач зависит от того, в какой форме (прямой или косвенной) выражено в условии задачи требование использовать известные знания и насколько явно содержится в задаче то общее (понятие, принцип, закон), что должно служить основой переноса на конкретные случаи.

В педагогической и методической литературе отмечается, что сложной является та задача, которую для решения необходимо разбивать на ряд простых, решаемых непосредственно. Трудная задача — это сложная задача, процесс разбиения которой на простые неочевиден. Сложность задач трактуется как их объективное свойство (которое мы не умеем точно оценивать), а трудность задач определяется как отношение между задачей и решающим.

Для оценки трудности задач предлагается анализировать их структуру, т. е. последовательность подзадач, на которые может быть разложена данная задача. Трудность задачи для данных учащихся равна сложности этой задачи без сложности ранее решенных задач-компонентов.

Высказывается мнение о том, что трудность задач может быть двоякой в связи с тем, что для решения необходима актуализация определенной части прежнего опыта или, кроме того, требуется найти что-то новое, что позволяет решить проблему. Характеристикой трудности задач по физике А. Ф. Эсаулов считает наличие изменяемых данных в условии задачи.

Имеются работы, в которых на основе теории информации и теории графов показана возможность определения степени трудности поиска решения физической задачи в точных количественных показателях.

В ряде работ сложность и трудность познавательных задач связываются с объемом умственного труда, затрачиваемого на решение задачи, проблемностью задачи, ее определенностью, с тем, в какой мере известен решающему алгоритм решения задачи, и др.

Наиболее полно и обоснованно, на наш взгляд, трактуется проблема трудности физических задач в работе А. М. Сохора «Логическая структура учебного материала» (М., 1974). В ней отмечается, что трудность задач может быть обусловлена тем, что решающий не имеет достаточных знаний, позволяющих перевести ситуацию задачи на язык соотношений величин, не владеет операциями, приводящими к решению составленных уравнений, т. е. чего-то не знает. Трудность задач может определяться еще и тем, что решающий, владея достаточными знаниями, не умеет проникнуть в сущность задачи, установить зависимость между данными в условии задачи величинами. Эта недостаточность аналитико-синтетической деятельности является индивидуальным свойством решающего, а также зависит от объективных особенностей структуры задачи. Под структурой задачи понимается характер внутренних отношений (связей, зависимостей) между данными и искомыми величинами, т. е. структура задачи — это прежде всего структура ее решения. Зависимость между величинами, заданными в условии задачи, т. е. ее структуру, можно изобразить в виде графа или структурной формулы и, исследуя ее свойства, оценить трудность задачи. Экспериментально доказано, что трудность физической задачи зависит от числа замкнутых контуров в ее структурной формуле. Для примера сравним трудность приведенных ниже задач.

1. Сколько последовательно соединенных электрических лампочек нужно взять для елочной гирлянды, чтобы ее можно было включить в сеть напряжением U, если каждая лампочка имеет сопротивление r и рассчитана на силу тока I?

2. Определить внутреннее сопротивление источника тока r_0, имеющего электродвижущую силу E, если подключенный к его зажимам вольтметр показывает напряжение U при сопротивлении внешней цепи R.

Библиотека
Павлодарского
педагогического
института

445220

В структурной формуле первой задачи 9 элементов, 9 отношений и 1 замкнутый контур (рис. 5, *а*). В структурной формуле второй задачи 7 элементов, 9 отношений и 3 замкнутых контура (рис. 5, *б*). Большинство испытуемых считали более трудной вторую задачу. Это говорит о том, что число замкнутых контуров в структурной формуле задачи является существенной (но не единственной) характеристикой трудности физических задач.

В процессе обучения физике учащимся предлагают задачи по возрастающей степени трудности. Если учащийся не может решить задачу, ему необходимо предложить систему вспомогательных задач меньшей трудности. Для их составления надо решение основной задачи представить в виде графа. Объединяя отдельные ветви графа, можно упростить задачу и составить систему задач различной трудности. Пусть, например, дана задача: «Конькобежец массой $m_1=70$ кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m_2=3$ кг со скоростью $v_1=8$ м/с. На какое расстояние перемещается при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}02$?»

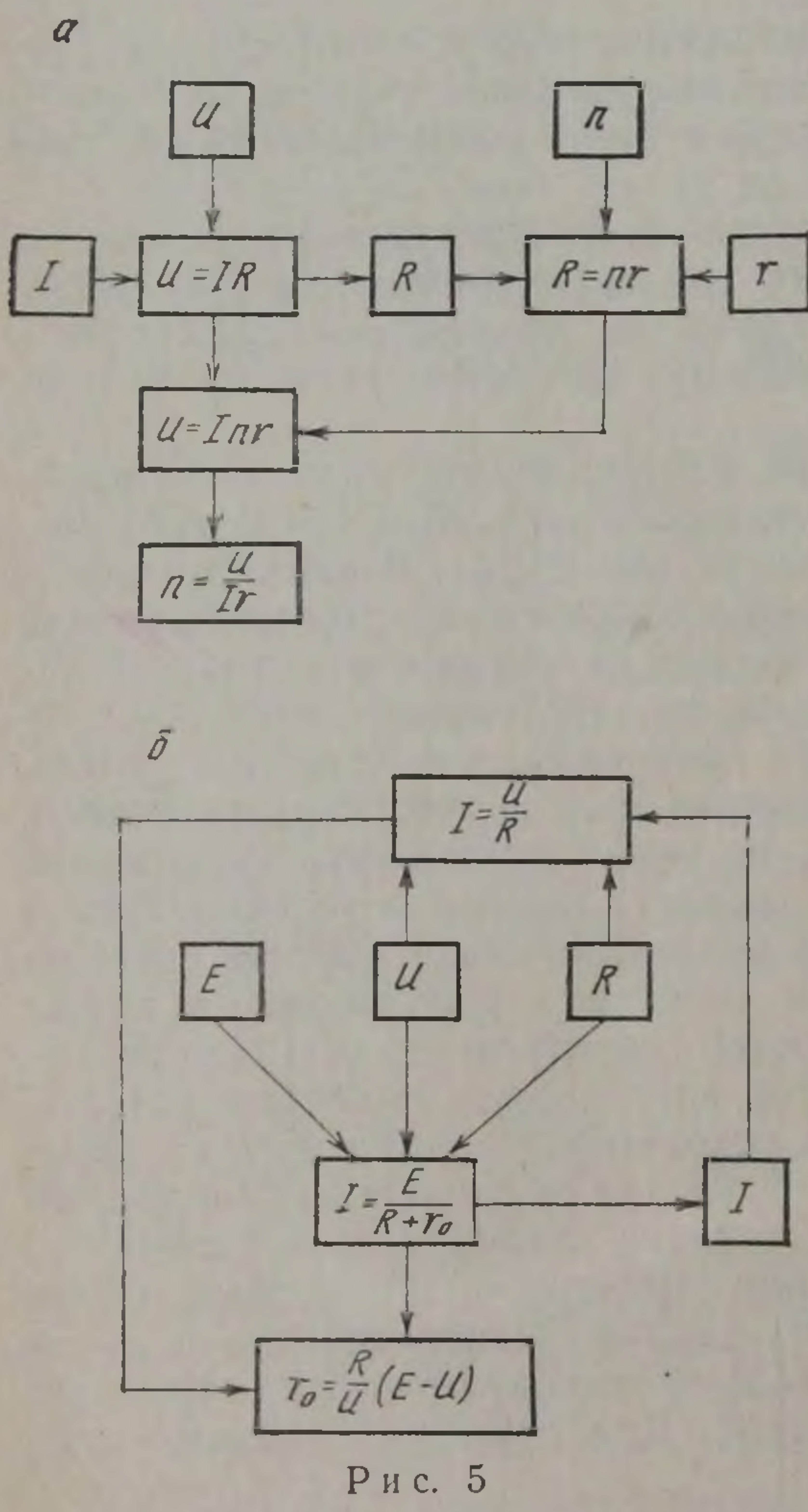


Рис. 5

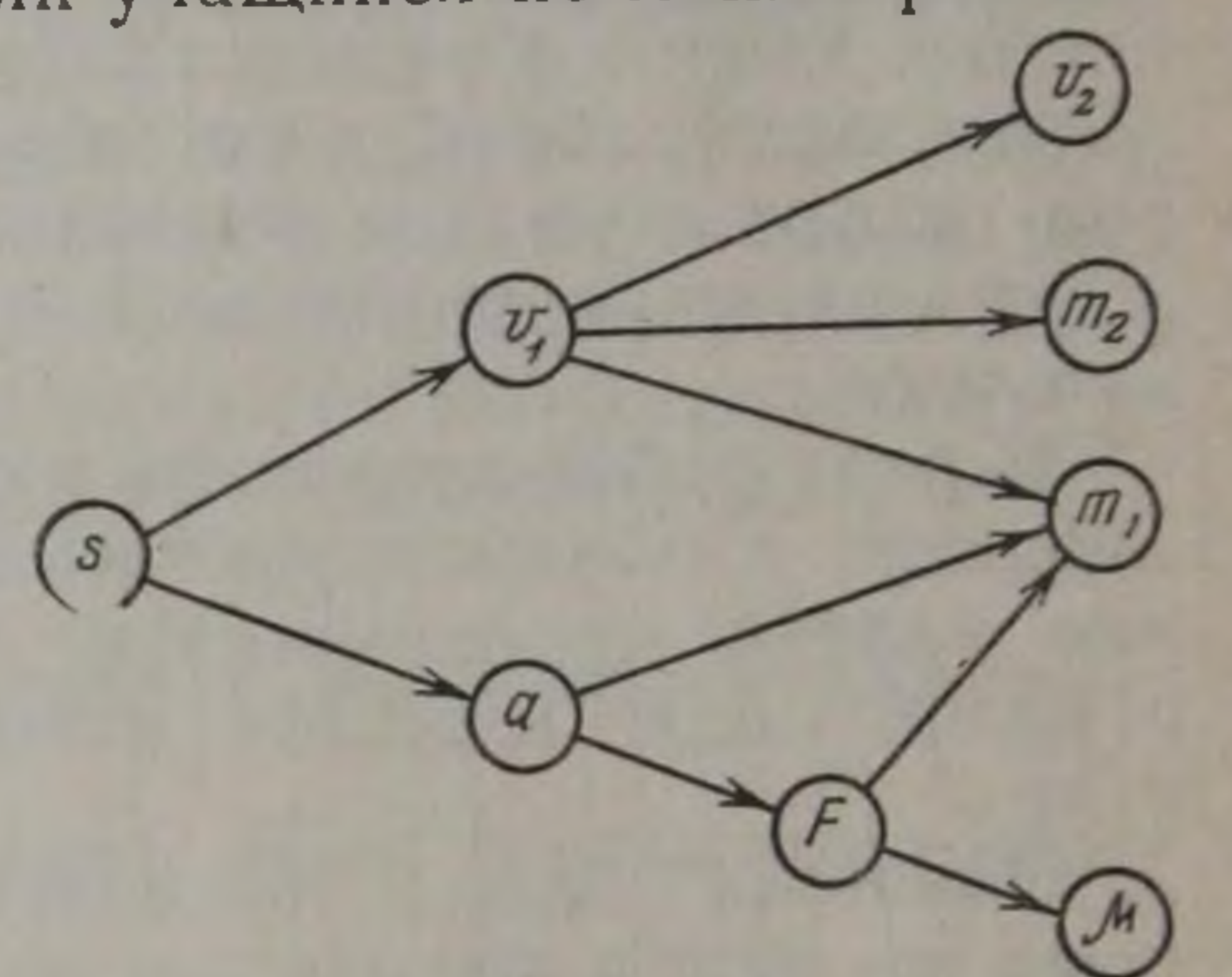


Рис. 6

Граф решения этой задачи представлен на рис. 6. Объединив верхние ветви графа, получим такую задачу: «Конькобежец массой 70 кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. С какой скоростью начнет двигаться конькобежец после бросания камня?». На основе нижней части графа можно сформулировать следующие вспомогательные задачи: «Конькобежец массой 70 кг, стоя на льду, бросает камень в горизонтальном направлении. Определить силу трения коньков о лед при откатывании конькобежца, если коэффициент трения 0,02» и «С каким ускорением будет двигаться конькобежец после бросания камня, если коэффициент трения коньков о лед 0,02?»

На основе графа задачи можно составлять родственные задачи одинаковой сложности, но с различными искомыми величинами. В качестве искомой величины может быть взята любая конечная или промежуточная величина, входящая в граф задачи. Приведем примеры таких задач.

1. Конькобежец массой 70 кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с, а сам откатывается на 0,3 м. Чему равен коэффициент трения коньков о лед?

2. Конькобежец, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг со скоростью 8 м/с. Определить массу конькобежца, если он откатился на 0,3 м. Коэффициент трения коньков о лед равен 0,02.

3. Конькобежец массой 70 кг, стоя на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой 3 кг и откатывается на 0,3 м. Чему равна начальная скорость камня? Коэффициент трения коньков о лед равен 0,02.

Задачи одинаковой сложности применяются при составлении многовариантных самостоятельных и контрольных работ по физике.

Тема 4. Задания по физике тестового характера

Задания тестового характера, общие требования к ним. Уровни обучения и усвоения физических знаний, возможность определения их достижения обучаемым. Методика применения заданий тестового характера. Задания тестового характера как вспомогательные задачи по физике.

Под тестом в широком смысле слова понимают любое испытание, всякое исследование. В психолого-педагогических исследованиях тестом обычно называют систему заданий различной трудности, нормированных по времени выполнения и служащих для сравнительного изучения групповых и индивидуальных особенностей учащихся.

Во многих странах мира широко применяются интеллектуальные тесты — специальные задания для изучения индивидуально-психологических особенностей человека (уровня одаренности, скорости протекания умственных процессов, настойчивости, способности к самоконтролю и т. п.) и тесты для выявления способностей (пространственных представлений, способностей оперировать числами и др.).

В нашей стране тесты применяются для исследования малых групп (экипажей, команд, бригад), в клинической психологии, в психолого-педагогических исследованиях.

В практике преподавания физики применяются тесты успешности (или тесты достижений) — целенаправленные системы заданий для проверки знаний учащихся по определенной части учебного материала. Применение тестов успешности целесообразно для выявления эффективности различных методов и приемов обучения, при решении вопроса об использовании определенного учебника физики, наглядных пособий, кинофильмов и других методических средств. Они могут применяться для сравнительной оценки усвоения учащимися знаний в различных классах, школах, районах и т. п., а также для анализа индивидуальной характеристики усвоения с целью определения содержания работы в каждом конкретном случае.

Тестовые задания могут быть «закрытыми» и «открытыми». «Закрытые» задания содержат набор готовых ответов, причем один ответ правильный, а остальные неточные или неполные. Испытуемый должен указать правильный ответ. Правильным считается тот ответ, для получения которого используется вся информация, содержащаяся в задании. Наиболее простая форма «закрытого» теста требует от испытуемого выявления одного из двух альтернативных решений: «да — нет» или «верно — неверно».

В «открытых» заданиях испытуемому необходимо самостоятельно дать правильный ответ. Такие задания могут иметь форму вопросов, требовать исключить лишнее, дописать недостающее, дополнить, систематизировать и т. д.

К тестам предъявляются следующие основные требования: каждый тест должен характеризоваться определенным уровнем трудности, надежностью (относительная неизменность теста и того, что им определяется) и валидностью (степень соответствия теста его назначению). Эти характеристики теста определяются экспериментально.

Задания теста должны формулироваться кратко, четко и недвусмысленно. Не следует задания, рассчитанные на проверку знаний, составлять так, чтобы на них можно было правильно ответить на основании интуиции. Задания, с помощью которых исследуется «умение соображать», не должны требовать припоминания многих фактических данных.

Роль и место тестовых заданий по физике в учебном процессе определяется структурой процесса усвоения учащимися знаний. В настоящее время деятельность учащихся по степени усвоения ими содержания учебного материала условно расчленяют на четыре стадии: понимание; запоминание; применение знаний по известным правилам или формулам; применение знаний в новых условиях.

Вначале ученик знакомится с новым материалом, устанавливает связь нового с уже известным. Затем он усваивает учебный материал настолько, что способен воспроизвести полученную информацию (пересказать текст учебника, изложить то, что было сказано учителем, воспроизвести опыт, схему и т. п.). На третьей стадии учащийся может применить приобретенные знания для решения тренировочных задач, условия которых прямо указывают на то, какие правила и законы необходимо использовать для их решения. Четвертая стадия усвоения учебного материала характеризуется тем, что учащийся способен применить имеющиеся знания для решения творческих, нестандартных задач.

Для проверки усвоения всей структуры знаний в комплексе с другими дидактическими средствами могут быть использованы тестовые задания. Чтобы выявить понимание учебного материала учащимися, можно применять тесты, в которые включены задания с выбором ответов. Задания и ответы к ним целесообразно формулировать на основе графиков, схем, рисунков, таблиц и т. п., отражающих содержание изученного материала по физике. Примером теста такого назначения является следующий.

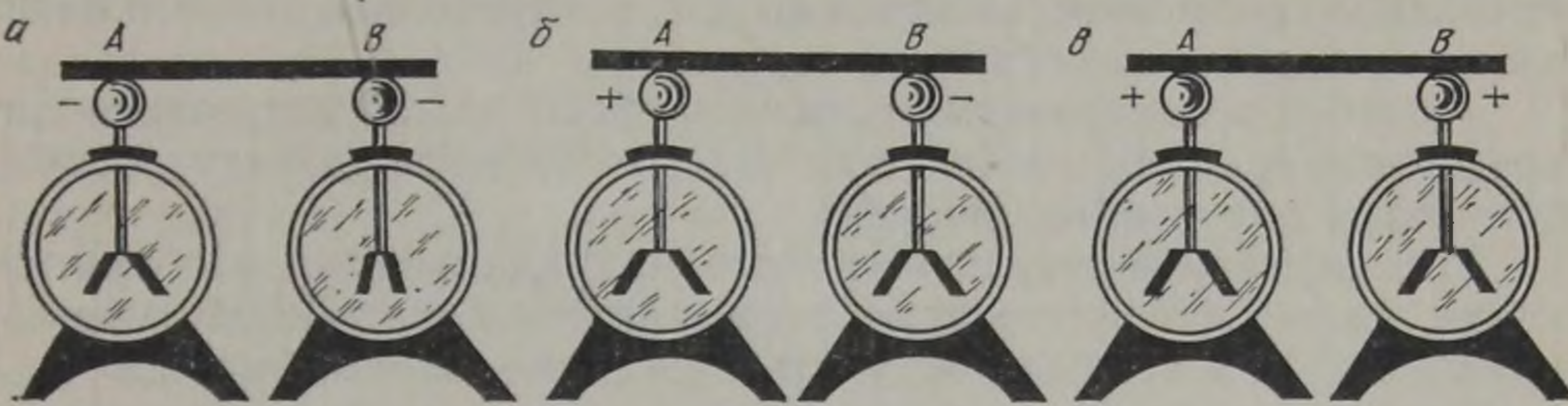


Рис. 7

Тест 1. Два заряженных электроскопа соединили проводником (рис. 7). Определить направление кратковременного тока, возникшего в проводнике. (1. От A к B. 2. От $Б$ к A. 3. Ток не возникает.)

Умение применять знания в знакомых условиях на основании известных физических закономерностей можно выявить при помощи следующих тестовых заданий.

Тест 2. Зависимость скорости движущегося прямолинейно тела от времени задана ниже:

t, с	0	2	4	6	8	10
v, м/с	2	3	4	5	6	7

1) Каково уравнение скорости движения этого тела? (1. $v = 2 + t$ 2. $v = 2 + 2t$. 3. $v = 2 + \frac{t}{2}$. 4. $v = 2 + t^2$.)

2) По какому закону изменяется перемещение тела? (1. $s = 2t + \frac{t^2}{2}$. 2. $s = 2t$. 3. $s = 2t + \frac{t^2}{4}$. 4. $s = 2t + 2t^2$.)

С помощью тестовых заданий можно выявить также, как учащиеся способны оперировать знаниями в новых, видоизмененных условиях. С этой целью, например, может быть использован следующий тест.

Тест 3. 1) Трехлопастный вентилятор освещается стробоскопом с частотой вспышек света 15 Гц. При какой наименьшей скорости вращения лопасти вентилятора будут казаться неподвижными? (1. 5 $с^{-1}$. 2. 10 $с^{-1}$. 3. 15 $с^{-1}$. 4. 45 $с^{-1}$.)

2. Шар, катящийся по горизонтальной поверхности с постоянной скоростью 3 м/с, освещается стробоскопом с той же частотой вспы-

шек света 15 Гц. Каково расстояние между видимыми последовательными положениями шара? (1. 5 см. 2. 20 см. 3. 40 см. 4. 45 см.)

Применяя тесты при обучении физике, необходимо последовательно выполнять следующие требования:

1) определить, что нужно выявить с помощью теста (знание фактического материала, понимание, умение применять знания и т. д.), и выделить критерии того, что выявляется (свойства памяти, умение проводить логические операции, наличие существенных признаков сообразительности и др.), т. е. определить целевое назначение теста, а также его трудность;

2) четко организовать условия работы учащихся, определить временные границы работы над заданиями теста, порядок сбора и обработки полученных данных;

3) сопоставить результаты тестов и традиционных методов проверки знаний. По материалам тестов нельзя делать обобщающих и категорических выводов об умственных способностях учащихся.

Тестовые задания по физике можно применять для текущей и итоговой проверки знаний. Как и все другие методы проверки знаний, тесты обладают определенными достоинствами и недостатками. При правильном использовании они способствуют стандартизации требований к уровню знаний учащихся, более полному охвату учебного материала и минимальной затрате времени на проверку ответов. Кроме того, тестовые задания позволяют проводить поэлементный анализ усвоения учебного материала, выявлять, насколько усвоены основные вопросы темы. Вместе с тем тестовые задания не позволяют фиксировать ход мысли учащихся при ответе, не дают возможности проверить умение применять знания к решению комбинированных вычислительных задач по физике. Некоторое отрицательное влияние могут оказать предлагаемые ответы (облегчается поиск ответа, создается возможность угадывания, запоминаются неверные ответы и др.). В связи с этим тестовые задания по физике следует рассматривать как вспомогательные в комплексе с другими методами и средствами проверки знаний.

Тема 5. Учебно-познавательная деятельность студентов и учащихся

Мышление в процессе решения задач по физике. Структурно-компонентные характеристики различных типов задач. Преобразование (переформулирование) исходного состава требований (вопросов) в процессе решения задачи. Активизация мыслительной деятельности учащихся при решении задач.

Процесс решения физических задач требует применения многих форм и методов научного познания: наблюдений, сравнения, экспериментов, использования аналогий, анализа и синтеза, индукции и дедукции и т. д. Основными видами умозаключений при решении задач являются индукция и дедукция.

Использование индукции при решении задач отражает закономерности человеческого познания природы от простого к сложному. Важнейшим актом индуктивных умозаключений является выделение существенных черт сходства и различия, их анализ и оценка.

Поясним сказанное на примере. Дана задача: «Какие из показанных на рис. 8 трубок можно использовать для опыта Торричелли?» Решая ее, учащиеся должны прийти к выводу, что форма трубки, ее диаметр, наклон к горизонту несущественны, а равенство атмосферного давления и давления ртутного столба определенной высоты — существенное условие при проведении опыта Торричелли.

Применение дедукции при решении физических задач предполагает глубокое знание фундаментальных теорий, законов, принципов и т. п. Большое число задач решается с помощью ряда дедуктивных умозаключений, в которых каждое предыдущее умозаключение является основой для последующего. Например: «На стекле находятся мелкие капли ртути. При случайном соприкосновении они сливаются в большую каплю. Объяснить это явление». Для решения задачи применим общий принцип. Система находится в устойчивом равновесии, если обладает минимумом потенциальной энергии. В данном случае должна быть минимальной поверхностная энергия капель. Поверхностная энергия капель минимальна при их минимальной поверхности. Поверхность одной капли всегда меньше поверхности двух слившихся капель. Следовательно, одна капля, получившаяся от слияния двух, обладает меньшей поверхностной энергией и более устойчива.

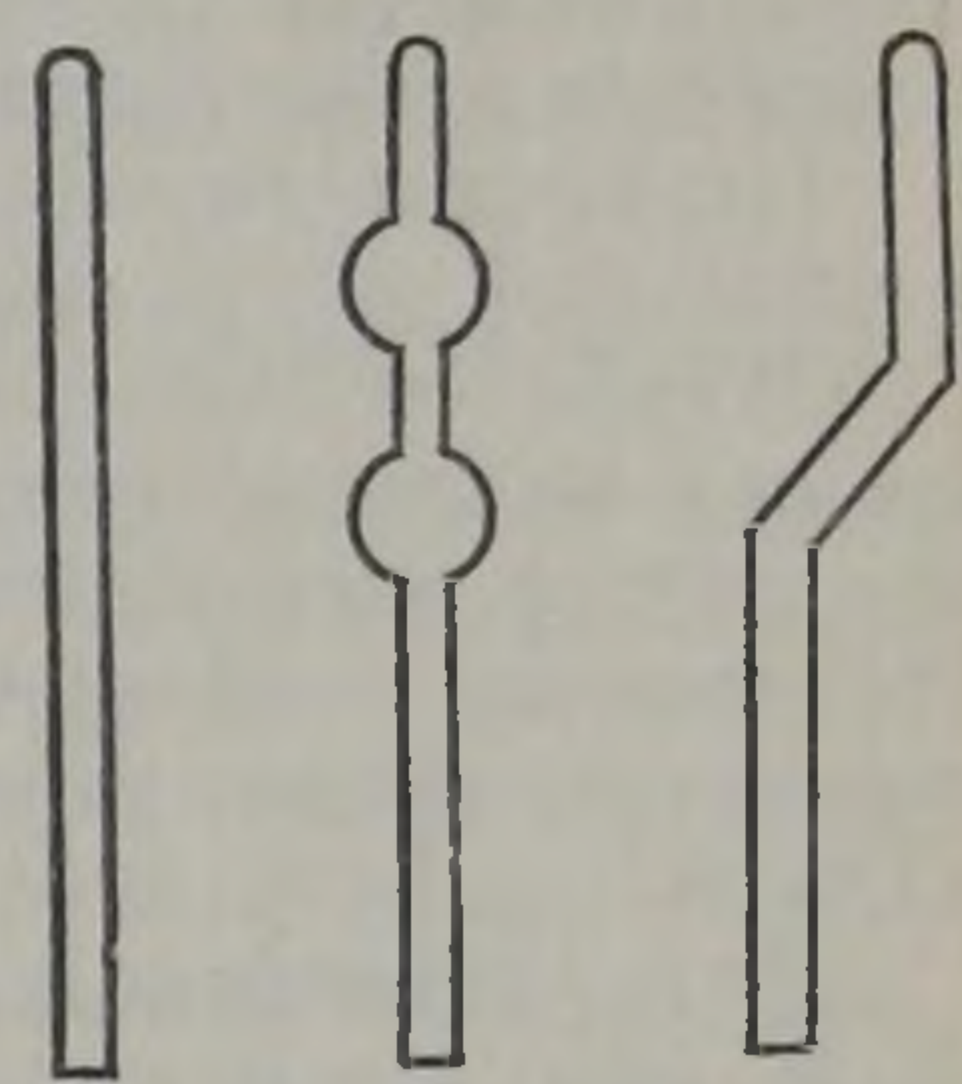


Рис. 8

Одним из существенных факторов, определяющих характер мыслительной деятельности учащихся, является компонентный состав задачи, ее структурные особенности. Задачи по физике характеризуются следующими параметрами: заданными и открытыми; постоянными и переменными; поясняющими и ограничивающими.

Заданные параметры обычно характеризуют начальное и конечное состояния системы, о которой говорится в задаче. Выделим эти параметры в следующей задаче: «В сосуд объемом V нагнетают воздух при помощи поршневого насоса, объем цилиндра которого V_0. Каким будет давление воздуха в сосуде после n качаний? Первоначальное давление воздуха в сосуде равно наружному давлению p_0». Начальное состояние системы характеризуется следующими параметрами: p_0, $V+V_0n$, T, а конечное состояние — p_1, V, T. В этой задаче объем и давление газа являются переменными параметрами, а температура — постоянной величиной.

Если состояние системы представлено на рассмотрение решающего, то задача имеет открытые параметры. Например: «Как, применив схему мостика Уитстона, можно сконструировать прибор для измерения температуры?»

Ограничивающие параметры позволяют определить условия применимости физических законов, принципов, правил и создают предпосылки для распознавания физических явлений. Так, некоторые законы и положения, справедливые в земных условиях, неприменимы в состоянии невесомости (расчет давления на дно и стенки сосуда, возникновение выталкивающей силы, конвекция).

Поясняющие факторы обычно указывают на те упрощения, которые необходимо сделать для решения задачи (сопротивление не учитывать; массой блока пренебречь; тела считать точечными и т. п.).

Неотъемлемой частью решения задач является их переформулирование, в результате которого происходит понятийное переосмысливание ситуации, что приводит к выявлению новых отношений между ее элементами.

Переформулировать задачу — значит найти иную ситуацию в рамках той же физической картины, осуществить смысловое преобразование ее компонентов и дать новую формулировку в соответствии с выбранной ситуацией. Процесс переформулирования задачи зависит от поставленной цели. Цель может определяться на основе требования задачи или выбираться решающим. Так, переформулирование может заключаться в перестановке условия и требования задачи.

Для повышения эффективности процесса решения задач А. Ф. Эсаулов предлагает преобразовывать задачи, возникающие в условиях производства, в учебные задачи по физике.

Переформулирование задачи состоит из следующих этапов: 1) осмысливания исходной ситуации задачи; 2) определения цели переформулирования; 3) нахождения новых ситуаций, отличающихся друг от друга исходными и привнесенными данными; 4) изменения требования задачи (постановка вопроса задачи); 5) составления новой формулировки задачи.

На процесс преобразования условия и требования задачи влияют особенности ее формулировки. Эти особенности состоят в том, что задачи по физике могут быть сформулированы на разговорном или научном языке, быть конкретными или абстрактными, содержать таблицы, графики, диаграммы и др.

Для активизации мыслительной деятельности учащихся в процессе решения задач по физике применяются различные приемы и средства. Основными критериями активности мыслительной деятельности является степень умственных усилий, прилагаемых в процессе решения задач, и овладение приемами самостоятельной мыслительной деятельности. В связи с этим активность мыслительной деятельности в значительной мере зависит от содержания предлагаемых задач. Задачи, требующие применения готовых формул, воспроизведения привычных действий по известному образцу, не вызывают активной мыслительной деятельности учащихся. Нестандартные, творческие задачи, требующие анализа, самостоятельного поиска решения, являются объективной предпосылкой для активной мыслительной деятельности.

Весьма существенным для развития мыслительной деятельности учащихся является раскрытие причинно-следственных связей явлений, описываемых в задаче. Поэтому решению каждой задачи должны предшествовать глубокий, всесторонний анализ, выяснение причин и следствий, выявление физической сущности задачи.

Одним из путей активизации мыслительной деятельности учащихся является применение в учебном процессе методов проблемного обучения. Задачи по физике можно использовать для создания проблемных ситуаций и формирования интереса к изучению физики. Так, изучение зависимости сопротивления проводников от температуры (IX кл.) целесообразно начать с решения экспериментальной задачи: «Вычислить сопротивление нити лампы накаливания по ее паспортным параметрам (100 Вт, 220 В) и сравнить результат с полученным экспериментально (по закону Ома и с помощью омметра)».

Сопротивление нити лампы, вычисленное по формуле $R=\frac{U^2}{P}$, 484 Ом; величина сопротивления, полученная с помощью закона Ома, может быть около 300 Ом (подаваемое напряжение меньше 220 В), а сопротивление, измеренное омметром, 35 Ом.

На основании полученных результатов формулируется проблемная ситуация: «Чем объяснить такие противоречивые ответы?» Сопоставляя и анализируя опыты, приходим к выводу, что сопротивление нити лампы измерялось при различных условиях (основное отличие — разная температура нити лампы). Теперь естественна постановка учебной проблемы: «Выяснить характер зависимости сопротивления проводников от температуры и природу этого явления».

Для создания проблемной ситуации перед изучением темы «Передача электрической энергии» может быть решена количественная задача: «Рассчитать сечение медных проводов, необходимых для передачи электрической энергии мощностью 200 000 кВт при напряжении 220 В, если длина линии 200 км, а потери мощности составляют 10 %». Полученный результат ($S=12$ м^2) резко противоречит жизненному опыту учащихся и приводит к необходимости выявить эффективные способы передачи электрической энергии заданной мощности.

Проблемные ситуации можно создавать также с помощью качественных задач. Например, изучение равновесия тел при отсутствии вращения можно начать с решения следующей задачи: «В каком случае вероятность обрыва веревки, перекинутой через пропасть, при передвижении по ней человека будет больше: когда веревка натянута горизонтально или когда она несколько провисает?» Основное назначение этих задач заключается в том, чтобы показать учащимся недостаточность имеющихся знаний и стимулировать их к изучению нового материала. Поэтому вопросы должны быть связаны со знакомыми жизненными ситуациями и в то же время быть достаточно трудными для объяснения.

Мыслительная деятельность учащихся существенным образом зависит от методов и приемов организации процесса решения задач. Самостоятельный поиск решения задач, целенаправленное руководство этим процессом со стороны учителя, использование алгоритмических и эвристических предписаний для поиска решения задачи, применение физического эксперимента служит целям активизации мыслительной деятельности учащихся. Этому же содействует использование экономных способов действий, решение задач рациональными методами, отражающими рациональность применяемых мыслительных операций.

Тема 6. Алгоритмический подход при обучении решению задач по физике

Свойства и назначение алгоритмов и алгоритмических предписаний. Общие и частные алгоритмические предписания. Применение алгоритмических предписаний при обучении учащихся решению задач по физике. Возможности и недостатки алгоритмического подхода к решению физических задач.

Обучение решению задач по физике может осуществляться путем обучения на примерах и путем объяснения программы действий.

При обучении на примерах учащимся сообщается информация о действиях, которые нужно осуществить для решения задачи, путем показа, а также наблюдения, как действуют другие. Сторонником этого способа является математик Д. Пойа, который в книге «Как решать задачу» писал: «Умение решать задачи есть искусство, приобретающееся практикой, подобно, скажем, плаванию. Мы овладеваем любым мастерством при помощи подражания и опыта... Учась решать задачи, вы должны наблюдать и подражать другим в том, как они это делают, и, наконец, вы овладеете этим искусством при помощи упражнения» (М., 1961, с. 15).

Информацию о действиях при решении задач можно сообщить также, рассказав о том, как нужно действовать, с помощью различных указаний, инструкций и предписаний о выполнении соответствующих операций. Эти предписания могут быть двух типов: эвристические и алгоритмические. Эвристические указания, направленные на развитие находчивости, сообразительности и творческих способностей, используются при обучении решению творческих, нестандартных, нетиповых задач. При обучении решению типовых, стандартных задач целесообразно использовать алгоритмические предписания, представляющие упрощенные и видоизмененные алгоритмы.

Под алгоритмом (в математическом смысле) понимают точное общепонятное предписание о выполнении в определенной последовательности элементарных операций для решения любой задачи, принадлежащей к некоторому классу. Алгоритм предполагает оперирование объектами знаковой природы (например, математическими символами) и отвлечение (абстрагирование) от того, что стоит за этими объектами, т. е. от их содержания и смысла. Содержательному истолкованию подвергаются лишь исходные данные решаемой задачи и результаты ее решения по данному алгоритму. Алгоритмы характеризуются следующими основными свойствами: определенностью, массовостью и результативностью.

Определенность (детерминированность) означает, что указания алгоритма общепонятны, однозначны и полностью определяют характер операций по решению задач определенного типа.

Массовость означает, что алгоритм применим для решения определенного типа задач, причем этот тип может содержать большое количество конкретных задач, различающихся исходными данными.

Результативность — это свойство алгоритма приводить к определенному результату при правильном выполнении указаний и наличии надлежащих исходных данных задачи.

Алгоритмические предписания в отличие от алгоритмов обращены не только к формальным, но и к содержательным операциям, т. е. допускают оперирование не только объектами знаковой природы, но и их содержанием и смыслом. В связи с этим алгоритмические предписания являются менее строгими, чем алгоритмы, хотя обладают (в некотором приближении) свойствами определенности, массовости и результативности.

Алгоритмические предписания, представляющие совокупность указаний, можно использовать для обучения методам мышления (методам решения задач по физике). Каждое указание должно требовать выполнения определенного элементарного действия. Действие считается элементарным, если каждый учащийся в состоянии правильно выполнить его в течение определенного промежутка времени. Очевидно, что не всякие указания о способе действий для решения задач являются элементарными. Например, указания типа «подумай», «проанализируй», «выдели главную мысль» неоднозначны и требуют не простых, а весьма сложных операций.

Понятие элементарности является относительным как для учащихся одного класса, так и для отдельного учащегося, если рассмотрение вести в разные моменты времени. Элементарность операции для учащихся может быть определена только опытным путем. Это приводит к необходимости индивидуализации процесса обучения учащихся алгоритмическим приемам решения задач, которая выражается в том, что для различных учащихся должны составляться разные алгоритмические предписания и что различных учащихся необходимо по-разному обучать методике работы с ними.

С точки зрения степени общности, алгоритмические предписания для решения физических задач можно разделить на общие и частные (узкотематические). Общие алгоритмические предписания состоят из указаний, направленных на выполнение более общих операций, чем частные предписания. Приведем, например, указания по решению количественных задач по физике.

1. Понять постановку вопроса задачи и создать замысел решения:

а) проанализировать исходные данные и требования задачи;

б) образно представить физическую ситуацию, описанную в задаче.

2. Найти определенный способ решения:

а) исследовать методику применения физических законов;

б) составить недостающие уравнения.

3. Определить конкретное значение переменной:

а) решить уравнения в общем виде;

б) получить числовой результат с учетом правил приближенных вычислений;

в) проанализировать полученный ответ.

Более частный характер будут иметь алгоритмические предписания по решению количественных задач по конкретной теме (например, по теме VIII класса «Равновесие сил»).

1. Кратко записать условие задачи и выразить все величины в одной системе единиц.

2. Сделать чертеж, указать силы, действующие на тело (реакции связи, внешние силы, силы трения и т. д.); само тело, находящееся в равновесии, изобразить на рисунке отдельно от связей.

3. Составить уравнение моментов, если тело имеет неподвижную относительно некоторой точки ось вращения. Удобно выбрать ту точку, через которую проходит больше сил, тогда их моменты будут равны нулю и уравнение получится более простым.

4. Выбрать систему координат и спроецировать векторы сил, действующих на тело, если ось вращения не задана условием задачи. Составить два уравнения равновесия плоской системы в проекциях.

5. Решить полученную систему уравнений.

6. Найти численное значение искомой величины.

7. Проверить правильность наименований и реальность численного ответа.

Указания 1, 5, 6 и 7 — это предписания общего характера.

Чтобы эффективно программировать обучение методам мыслительной деятельности при решении физических задач, необходимо знать те мыслительные операции, которые приводят к решению задачи. Но что значит решить физическую задачу?

Психологическими исследованиями доказано, что процесс решения физической задачи сводится к нахождению соответствующих физических закономерностей (законов), лежащих в основе явлений, о которых говорится в задаче, и применению этих законов к конкретной физической ситуации. Условие задачи всегда содержит указания на то, какие законы необходимо применить для ее решения. Этими указаниями являются термины и стоящие за ними понятия, содержащиеся в условии задачи и указывающие на определенные физические явления. Эти термины и понятия называют компонентами условия задачи или просто компонентами задачи. Компонентами физической задачи являются: вид объекта, вид процесса, физические величины, математическое выражение определенного типа объективной связи между физическими явлениями и т. п. Например: «Какой объем займет газ при 77 °С, если при 27° С его объем был 6 л?» В этой задаче имеются следующие компоненты: газ — физический объект; изобарическое расширение — вид процесса; $t_1=27$ °С и $V_1=6$ л — начальное состояние объекта (физические величины); $t_2=77$ °С и V_2 — конечное состояние объекта (физические величины). Выделив в условии задачи компоненты, указывающие на определенные физические явления, необходимо искать среди известных законов такие, в которых говорится об этих явлениях.

Термины и соответствующие им понятия, которые употребляются в физических законах для характеристики физических явлений, называют компонентами физических законов. Например: «Объем данной массы газа при постоянном давлении прямо пропорционален абсолютной температуре». В этом законе имеются следующие компоненты: постоянная масса газа — вид объекта; изменение объема газа при постоянном давлении — вид процесса; температура, объем — физические величины; прямая пропорциональность — математическое выражение зависимости между физическими величинами.

Чтобы по условию задачи найти законы, необходимые для ее решения, надо из множества известных законов выбрать такие, в которых содержатся те же компоненты, что и в условии задачи (за исключением компонента, указывающего на математическое выражение типа объективной зависимости между физическими величинами).

С другой стороны, при анализе условия задачи необходимо выделять такие компоненты, которые содержатся в известных физических законах. Успешность выделения всех компонентов задачи зависит от многих факторов: особенностей формулировки условия задачи, вида задачи (например, с абстрактным или конкретным содержанием), характера выражения данных (словесно или цифрами) и др. Если компоненты задачи сформулированы в тех же терминах, что и компоненты соответствующих законов, то найти требуемый закон сравнительно легко. В тех случаях, когда компоненты условия задачи сформулированы в других терминах и соответствующих им понятиях (например, на разговорном языке), то найти соответствующий закон значительно труднее. Так, в работе психолога Г. А. Вайзер приводятся результаты эксперимента, который состоял в том, что учащимся предлагались задачи в разных формулировках, но имеющие одинаковое решение.

1. Определить температуру, до которой нагрелись 5 кг воды, если в нее было влито 5 кг расплавленного свинца. Начальная температура воды 12 °С, а свинец взят при температуре плавления.

2. Определить температуру, до которой нагрелось 5 кг воды и охладились 5 кг расплавленного свинца, влитого в воду, если начальная температура воды 12 °С, а свинец взят при температуре плавления. Свинец с начала теплообмена отвердевает.

Первую задачу неверно решили 90 % учащихся, а вторую — 64 %. Этими же экспериментами доказано, что учащиеся нередко проводят неполный анализ условия задачи, т. е. выделяют из условия задачи не все компоненты (или выделяют их с большим трудом). Чаще других не выделяются вид физических процессов, вид объектов и их состояния.

При сличении компонентов задачи с компонентами физических законов учащиеся зачастую воспроизводят только один закон, включающий этот компонент, и не воспроизводят другого или других законов, включающих этот же компонент. В связи с этим необходимо формировать у учащихся понятия о компонентах физических законов и задач, обучать их поиску компонентов законов в условиях задач и формировать навыки распознавания компонентов законов в компонентах задачи. С этой целью нужно обучать учащихся выявлять признаки компонентов физических законов и сопоставлять с ними признаки компонентов условия задачи. Например: компоненту закона «равнозамедленное движение» соответствуют компоненты в задачах «скорость за равные промежутки времени уменьшается на одну и ту же величину», «сила торможения является постоянной величиной», «тело двигалось с постоянным ускорением». Компонентам задач «тело двигалось из состояния покоя», «тело остановилось» соответствует компонент закона «мгновенная скорость».

Методика применения алгоритмических предписаний при обучении решению физических задач может заключаться в работе по готовым предписаниям (предварительное заучивание наиболее общих и существенных указаний, постепенное, пошаговое восприятие и выполнение каждого указания, многократная отработка отдельных операций), в обучении учащихся самостоятельному составлению алгоритмических предписаний.

В настоящее время нет единого мнения о ценности алгоритмического подхода к решению задач по физике. Сторонники этого подхода видят его положительную роль в том, что, используя алгоритмические предписания, учащийся осознает правильность и последовательность тех операций, с помощью которых он приходит к конечным результатам. Противники применения алгоритмизации считают, что такое обучение ведет к шаблонам, приучает ученика выполнять готовые указания, лишая его самостоятельности и творчества. Но исследования показывают, что обучение учащихся решению задач по готовым алгоритмическим предписаниям является необходимым и эффективным средством на первых этапах обучения. В дальнейшем учащиеся должны перейти к самостоятельному построению алгоритмических предписаний. В этом случае будет создаваться основа для развития творческого мышления.

Тема 7. Творческие задачи по физике

Особенности и виды творческих задач по физике. Роль и место творческих задач в структуре знания по физике. Методика решения творческих задач. Техническое творчество учащихся как вид творческой деятельности. Экспериментальные задачи по физике и методика их решения.

В. Г. Разумовский в книге «Развитие творческих способностей учащихся» (М., 1975) определяет творческие задачи как задачи, алгоритм решения которых неизвестен. Такое определение допускает значительную условность и относительность, состоящую в его субъективности. Это выражается в том, что типовая задача, содержащая все необходимые для ее решения величины, может быть для учащихся творческой, если им не известен алгоритм ее решения. Оригинальная и трудная задача с известными подходами к ее решению перестает быть творческой.

Для решения творческой задачи необходимо прежде всего найти принцип решения (и это самое существенное). Ее условие не подсказывает (ни прямо, ни косвенно), какие знания надо применить для решения. Смысл деятельности ученика и заключается в том, чтобы выявить необходимые законы и применить их для решения задачи. При решении задачи по известному алгоритму этого не требуется, и поэтому ее следует считать тренировочной.

Творческие задачи обычно предполагают объяснение какого-нибудь явления природы, техники, действия известного прибора, конструирование нового устройства, построение модели явления или нахождение нового явления, удовлетворяющего определенным требованиям.

Обычно творческие задачи предполагают несколько самых разнообразных вариантов решения и содержат лишь требования без указаний на то, как их выполнить. В связи с этим академик П. Л. Капица отмечал, что при решении таких задач можно по мере своих склонностей и способностей неограниченно углубляться в изучение поставленного вопроса.

Учебные творческие задачи могут рассматриваться как вид творческой деятельности учащихся в учебном процессе, как его главное звено. Основным признаком творческого процесса является его новизна. Творческие задачи по физике обладают этим признаком, хотя их новизна имеет субъективный характер — это новизна только для учащихся.

Творческие задачи по физике можно условно разделить на исследовательские (требующие ответа на вопрос «почему») и конструкторские (требующие ответа на вопрос «как сделать»). Такое разделение отражает два вида творчества в науке — открытия и изобретения — и может использоваться в качестве критерия подбора и составления творческих задач. Приведем примеры исследовательских задач.

1. Почему теннисный шарик устойчиво парит в струе воздуха из шланга пылесоса, не падая в сторону?

2. Объяснить механизм дыхания человека и животных.

Творческие задачи по физике исследовательского вида не имеют своей формы и могут выступать в виде расчетных, качественных или экспериментальных задач, в форме вопросов и заданий для учащихся при выполнении лабораторных работ и работ физического практикума.

Конструкторские задачи (в условном смысле слова) имеют определенную форму и предполагают мысленное (или реальное) построение, нахождение принципа действия и схемы устройства в общем виде. Примером таких задач являются следующие.

1. Используя источник тока, резистор, конденсатор и неоновую лампу, составить схему генератора пилообразного напряжения.

2. Сконструировать прибор (акселерометр) для измерения ускорения тележки, движущейся по горизонтальной плоскости.

Творческие задачи применяются в учебном процессе для обучения применению знаний в новых условиях, для развития мышления и творческих способностей учащихся. Они также используются как средство проверки знаний по физике, и в частности их действенности, гибкости и глубины. Кроме того, использование таких задач в учебном процессе создает благоприятные условия для политехнического обучения и формирования диалектико-материалистического мировоззрения.

Методика решения творческих задач по физике имеет свои особенности, которые являются следствием психологических и педагогических особенностей протекания творческой деятельности учащихся. Алгоритм решения творческих задач не известен школьникам, и главное в их решении — открыть принцип решения. В связи с этим при обучении решению творческих задач используются эвристические методы и приемы в форме указаний, прямых и косвенных подсказок.

Эвристическими называют методы и приемы, с помощью которых учащиеся самостоятельно могут открыть новые способы решения и строить нестереотипные рассуждения. Эвристические указания являются предварительным моментом в процессе решения творческой задачи и служат для «наведения» учащихся на идею решения, а также для сокращения перебора возможных вариантов решения.

В психолого-педагогической литературе с достаточной полнотой выявлена сущность эвристических методов как педагогической проблемы. В частности, сформулированы общие правила, лежащие в основе поиска решения творческой задачи. Сначала необходимо понять задачу. Для этого целесообразно сделать рисунок, ввести подходящие обозначения, внимательно изучить условия и требования задачи, возможность разделения условия на части. Затем следует составить план решения, найти связь между данными и искомыми величинами. На этом этапе решающее значение имеют вопросы и указания учителя. Например: «Известна ли вам подобная задача? Нельзя ли воспользоваться ею? Нельзя ли придумать более простую сходную задачу (более общую или более частную)? Можно ли решить только часть задачи, отбросив некоторые условия? Возможно ли задачу сформулировать иначе?»

Для «наведения» учащихся на идею решения возможна также демонстрация простого опыта, указание на аналогию, приведение примеров. При этом важно, чтобы указания были не слишком общими и неопределенными, но и не слишком подсказывающими.

При решении творческих задач по физике могут быть использованы следующие подходы: отыскание упрощенной ситуации, которая применяется как план решения более сложной проблемы, и преобразование данной проблемы в знакомую, приемы решения которой известны. При этом возможно расчленение основной задачи на «подзадачи» и последовательное решение каждой. Известен ряд способов такого видоизменения задачи. Рассмотрим некоторые из них.

1. Введение в условие задачи вспомогательных элементов. Например, дана задача: «Металлический шарик при комнатной

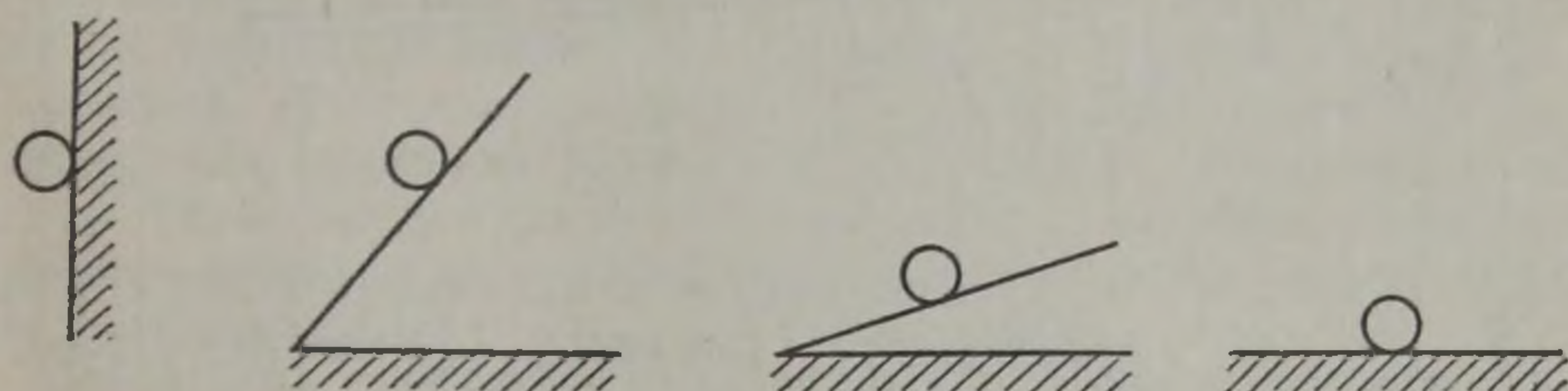


Рис. 9

температуре проходит через кольцо из того же материала, но застревает, если его нагреть. Пройдет ли ненагретый шарик через нагретое кольцо?» Если решение этой задачи затруднительно для учащихся, то ее можно видоизменить следующим образом. Допустим, что шарик и кольцо нагреты до одинаковой температуры (вспомогательный элемент задачи). В этом случае шарик пройдет через кольцо, поскольку у них одинаковые коэффициенты расширения. Если кольцо оставить нагретым, а шарик охладить до комнатной температуры, то он тем более пройдет через кольцо. Так как нагревание кольца эквивалентно охлаждению шарика, то очевидно, что ненагретый шарик пройдет сквозь нагретое кольцо.

2. Специализация проблемы, т. е. выявление какой-нибудь зависимости при рассмотрении частных случаев, если учащимся не известно соотношение между элементами задачи. Например: «Шарик скатывается без трения по наклонному желобу. От чего зависит его ускорение?» Рассматриваем несколько случаев движения шарика по наклонной плоскости с различными углами наклона (рис. 9) и приходим к выводу, что ускорение шарика изменялось от максимального значения (g) до нуля, т. е. оно зависит от угла наклона плоскости.

3. Выделение вспомогательной, упрощенной задачи с целью решения исходной задачи. Этот прием называется генерализацией проблемы. Чтобы обратить внимание учащихся на основное явление, часть условия задачи снимают и рассматривают упрощенные варианты. Затем постепенно вводят все дополнительные условия, и в итоге возвращаются к первоначальной формулировке задачи. Например: «В сосуде плавает кусок льда, внутри которого заключен кусок свинца. Изменится ли уровень воды в сосуде,

когда лед растает?» Задача разбивается на несколько «подзадач», которые решаются последовательно одна за другой.

1) В сосуде с водой плавает кусок льда. Изменится ли уровень воды в сосуде, когда лед растает? Вес плавающего льда равен весу вытесненной им воды. Поэтому объем воды, образовавшейся при таянии льда, будет равен объему вытесненной им воды и уровень воды в сосуде не изменится.

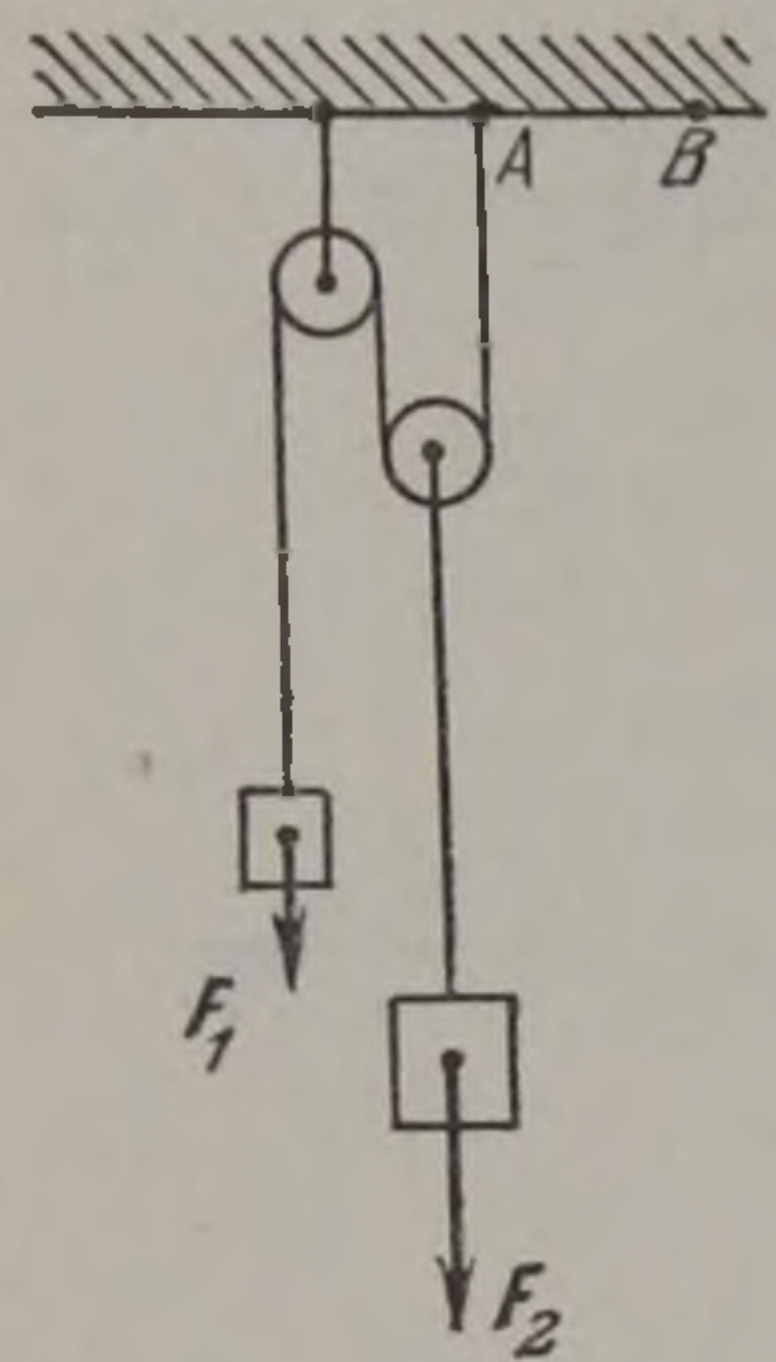


Рис. 10

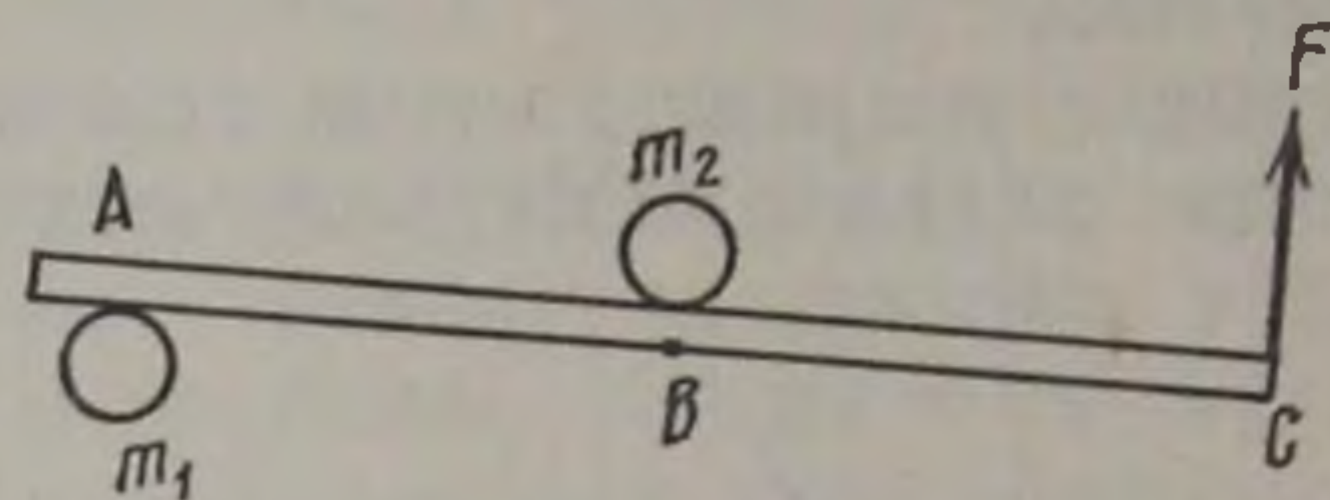


Рис. 11

2) Сравните объемы свинца и воды одинаковой массы (или веса). Так как $\rho_с = 11{,}3\rho_в$, то $V_в = 11{,}3\ V_с$.

3) Сравните глубины погружения в воду одинаковых кусков льда со свинцом и без свинца: $h_с > h_л$.

4) После таяния льда свинец окажется в воде. Сможет ли он заполнить тот добавочный объем, который занимал в воде лед со свинцом? Нет, поэтому уровень воды в сосуде понизится.

4. Один из приемов решения творческих задач по физике может быть основан на доказательстве «от противного». Например: «Нарушится ли равновесие системы, изображенной на рис. 10, если точку A крепления нити перенести в точку B? Массой нити и блоков пренебречь». При равновесии системы $F_1 = \frac{F_2}{2}$. Предположим, что равновесие не нарушится после того, как нить закрепили в точке B. Следовательно, условие равновесия должно выполняться независимо от положения нитей. Но при увеличении угла между нитями, подходящими к подвижному блоку, сила их натяжения будет увеличиваться и сила F_1 не сможет удержать систему в равновесии. Таким образом, предположение неверно и равновесие системы нарушится.

5. Упрощение ситуации и сведение ее к известному случаю. Этот прием основан на допущении, что задача уже решена. Например: «Две одинаковые шайбы m_1 и m_2, лежащие на горизонтальной поверхности, сдвигают рычагом, как показано на рис. 11. Какая шайба сдвинется с места первой?» Упростим задачу, считая одну из шайб неподвижной. В этом случае решение задачи сведется к применению условия равновесия рычага. Допустим, что первой сдвинется с места шайба m_1. Это возможно в том случае, если $F = F_{тр}$, так как плечи этих сил $AB = BC$. Предположим, что первой сдвинется шайба m_2. Это наступит при $F = \frac{F_{тр}}{2}$, поскольку плечи этих

сил $AC = 2AB$. Так как сила F возрастает постепенно, то первой сдвинется шайба m_2.

С решением творческих задач (в частности, конструкторских) тесно связана проблема развития технического творчества учащихся как завершающего этапа в овладении определенными знаниями по физике и их практическом использовании. Этим осуществляется полный акт творчества — от постановки проблемы до материального воплощения проекта.

Под техническим творчеством обычно понимают всякую созидательную деятельность учащихся в области техники и технического моделирования. Однако деятельность учащихся по готовым схемам, чертежам или образцам является воспроизводящей, а не творческой. Деятельность может быть названа творческой в том случае, если ее результатом является продукт, обладающий новизной. С точки зрения развития творческих способностей учащихся, характер новизны не имеет значения — она может быть объективной и субъективной.

Основными требованиями, предъявляемыми к содержанию технического творчества, являются его актуальность, неразрывная связь с курсом физики, соответствие возрастным особенностям и интересам учащихся. Наиболее распространенными объектами технического творчества является изготовление физических приборов, действующих моделей и установок, различных устройств с элементами автоматики и т. п.

Решение творческих задач по физике создает благоприятные условия для развития творческого мышления. Оно основано на развитии самостоятельности и активности учащихся в приобретении знаний и умений. Для развития творческого мышления в процессе решения физических задач могут быть использованы следующие приемы:

1) объяснение учащимися явлений на основе известных им законов и умение предвидеть протекание физических процессов при заданных условиях;

2) экспериментальное определение физических величин и технических характеристик приборов, установок и материалов;

3) выдвижение учащимися предложений по усовершенствованию технических устройств и решение конструкторских задач;

4) обсуждение вариантов решения физических задач;

5) конструирование моделей физических явлений;

6) проведение аналогий между явлениями различной физической природы.

Одним из видов творческих задач по физике являются экспериментальные задачи. Как известно, экспериментальными называют такие задачи, в которых эксперимент используется для получения исходных данных или теоретическое решение проверяется с помощью эксперимента.

С психологической точки зрения, данные величины не только являются базой для определения искомого, но и служат основой для воспроизведения соответствующих знаний, т. е. являются указателями того, какие знания нужно использовать для решения задачи. В экспериментальных задачах такие указатели отсутствуют, и это позволяет считать их творческими.

Экспериментальные задачи делятся на качественные и количественные. Для решения качественных экспериментальных задач не требуется получения численных данных и проведения математических расчетов. Большинство таких задач строится так, чтобы учащиеся вначале высказали свои предположения, обосновали умозрительные выводы, а затем проверили их на опыте. Например: «К демонстрационному динамометру подвешено ведерко Архимеда, заполненное водой. Изменится ли показание динамометра, если в ведерко положить кусок дерева? Ответ проверить на опыте». Однако во многих случаях целесообразно вначале продемонстрировать явление, а затем предложить учащимся объяснить его. Например: «Почему картошка тонет в воде, но плавает в растворе поваренной соли?» (В этом случае демонстрация предшествует объяснению явления.)

Решение количественных экспериментальных задач предполагает получение численных величин и проведение математических расчетов по их обработке. Эти величины могут быть получены путем измерений, а также путем использования таблиц физических величин, паспортных данных приборов и электротехнических установок. Пример: «Рассчитать сопротивление медного проводника (приборы — проводник, масштабная линейка, микрометр)».

Экспериментальные задачи (качественные и количественные) можно предлагать учащимся в демонстрационном и лабораторном вариантах. Примером экспериментальной задачи, которая выполняется с помощью демонстрационного оборудования, является следующая: «Через легкий блок переброшена нить, к концам которой подвешены грузы массой по 100 г. Верхний груз поднят над поверхностью стола на 1 м. Через сколько времени этот груз коснется стола, если на него положить перегрузок 10 г?» После вычислений полученный результат проверяется с помощью демонстрационного эксперимента.

Качественной экспериментальной задачей, которую целесообразно выполнить фронтально на лабораторном оборудовании, является следующая: «Проградуировать шкалу динамометра Бакушинского (шкала закрыта чистой бумагой), имея рычаг и гирьку массой 0,1 кг. После выполнения задания необходимо сравнить полученную шкалу с фабричной».

Экспериментальные задачи могут иметь исследовательский характер. В этом случае на каждый стол выделяется различное оборудование в зависимости от заданий, получаемых учащимися. При этом работа учащихся характеризуется большой самостоятельностью в сборке установок, проведении эксперимента, анализе физических явлений.

Экспериментальные задачи по физике могут быть использованы для создания проблемной ситуации при подходе к теме, при изучении нового материала и его закреплении, при проверке знаний и во время домашней работы учащихся.

Методика решения экспериментальных задач зависит от роли эксперимента в их решении. Если в задаче содержатся все данные, необходимые для ее решения, и надо только проверить ответ с помощью опыта, то ее решение и оформление производится так же, как решение и оформление текстовой задачи.

Решение экспериментальных задач, в которых данные получают в результате опыта, состоит из следующих элементов: постановки задачи, анализа условия, измерений, расчетов, опытной проверки результата. При этом обычно задача решается аналитическим методом, начиная с искомой величины. Постановка эксперимента и проведение измерений в этом случае приобретают принципиальное значение, так как на их основе определяются все величины, необходимые для решения задачи.

Тема 8. Методика решения количественных задач

Способы решения вычислительных задач. Анализ условия задачи. Виды записи условия, особенности выполнения рисунков, чертежей, схем, поясняющих условие задачи. Различные способы записи плана и процесса решения задачи.

В настоящее время методика решения вычислительных задач по физике разработана достаточно полно. Систематизируем ее основные положения.

При решении физических задач используются следующие способы: арифметический, алгебраический, геометрический и графический. В процессе обучения физике основное значение имеет алгебраический способ, в сочетании с которым используются арифметический и геометрический способы, поэтому алгебраический способ можно считать основным, а арифметический и геометрический — вспомогательными. Самостоятельное значение имеет и графический метод, хотя в учебном процессе он применяется реже, чем алгебраический.

Сущность алгебраического способа решения физических задач состоит в использовании формул (одной или нескольких), составлении системы уравнений и применении законов математики (алгебры) для их целенаправленного преобразования.

Пример 1. По наклонной плоскости скользит брусок. Угол наклона $\alpha = 30°$. Какой путь пройдет брусок за $t = 1$ с? Трением пренебречь.

Решение. Запишем уравнение движения бруска в общем виде: $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ или $\mathbf{F} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$. Затем спроецируем силы на направление движения, считая его положительным направлением оси координат:

$$F \sin\alpha = ma \Rightarrow a = \frac{F\sin\alpha}{m} = g\sin\alpha.$$

Найдем путь, пройденный бруском за 1 с:

$$s = \frac{at^2}{2} \text{ или } s = \frac{gt^2\sin\alpha}{2} = 2{,}45 \text{ м}.$$

При решении многих физических задач используются знания из курса геометрии.

Пример 2. На двух тросах одинаковой длины подвешен груз весом 340 Н (рис. 12). Угол между тросами $\alpha = 60°$. Определить силы натяжения тросов. Вес тросов и их растяжение не учитывать.

Решение. Из соображений симметрии имеем $F_1 = F_2$. Так как точка O находится в равновесии, то $F = F'$. Но $AO = \frac{1}{2} OC$; $AB = \frac{1}{2} OB$, так как $\angle AOB = 30°$. Поэтому $F_1^2 = \frac{F_1^2}{4} + \frac{F^2}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} F_1^2 = \frac{F^2}{4}$ или $F_1 = \frac{F}{\sqrt{3}} = 200$ Н. Можно считать, что решение этой задачи осуществлено геометрическим способом.

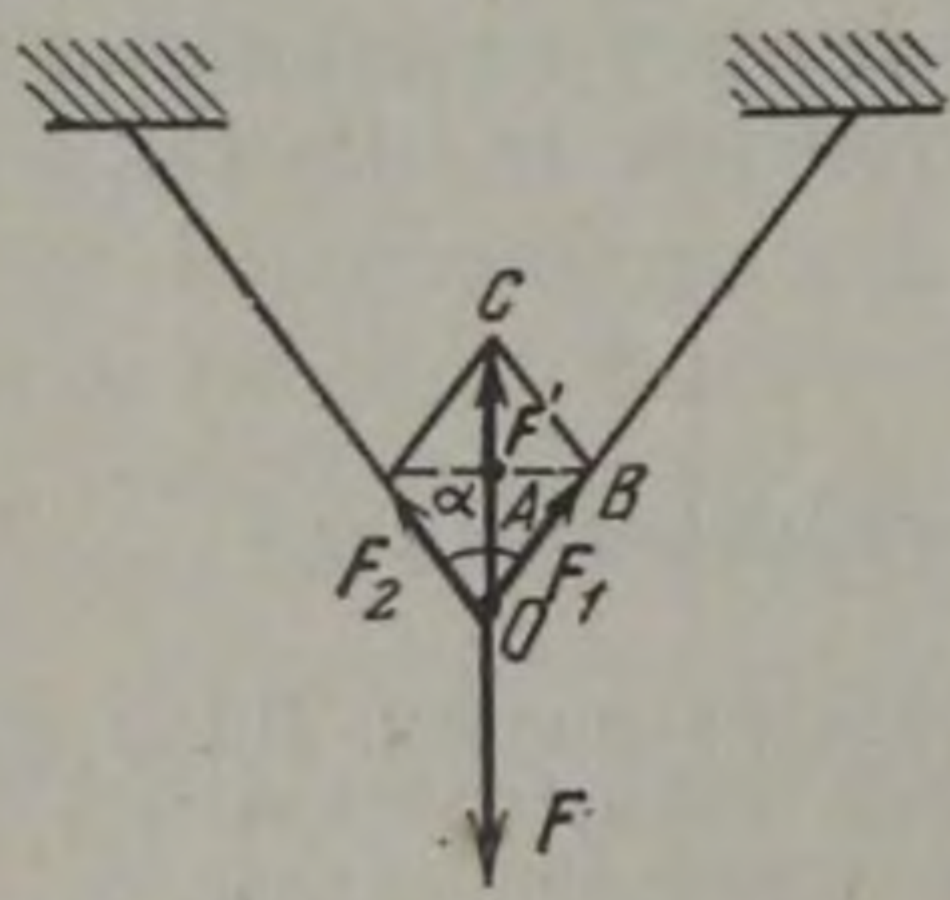


Рис. 12

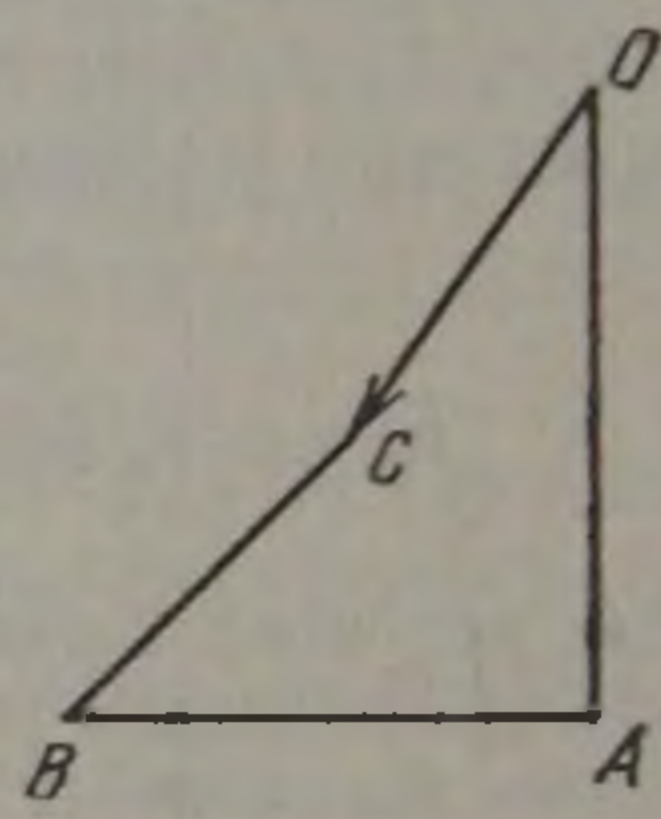


Рис. 13

Эту же задачу можно решить иначе. Спроецируем все реальные силы на вертикальное направление (вверх), которое будем считать положительным направлением оси координат:

$$F_1 \cos\frac{\alpha}{2} + F_2 \cos\frac{\alpha}{2} - F = 0.$$

Так как $F_1 = F_2$, то

$$2F_1 \cos\frac{\alpha}{2} = F \Rightarrow F_1 \frac{F}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = 200 \text{ Н}.$$

Такое решение задачи ближе к алгебраическому способу с применением законов геометрии.

Встречаются задачи, где искомую величину проще найти из чертежа, выполненного в определенном масштабе, путем соответствующих измерений.

Пример 3. Лесник вышел из сторожки и 2 ч шел со скоростью 3,5 км/ч в южном направлении, затем 1,5 ч со скоростью 4 км/ч на запад и в оставшееся время 1 ч 20 мин двигался на северо-восток со скоростью 3 км/ч. На каком расстоянии от сторожки оказался лесник?

Решение. Выберем масштаб 1 : 1000. Построим траекторию движения лесника (рис. 13), вычислив длины отдельных ее участков: $OA = 7$ км, $AB = 6$ км, $BC = 4$ км. Измерив $OC = 5$ см, найдем, что лесник оказался в 5 км от сторожки.

При арифметическом способе решения физических задач уравнения не составляются и решение ведется по вопросам путем логических рассуждений. (В практике обучения физике этот способ имеет ограниченное применение.)

Пример 4. Через 20 мин после отправления теплохода вслед за ним был послан катер. Скорость теплохода 18 км/ч, скорость катера 30 км/ч. За какое время катер догонит теплоход?

Решение. Определим скорость катера относительно теплохода:

$$30 \text{ км/ч} - 18 \text{ км/ч} = 12 \text{ км/ч}.$$

Вычислим расстояние, на которое удалился теплоход от пристани (от катера):

$$18 \text{ км/ч} \cdot \frac{1}{3} \text{ ч} = 6 \text{ км}.$$

Чтобы догнать теплоход, катеру потребуется

$$6 \text{ км} : 12 \text{ км/ч} = 0{,}5 \text{ ч}.$$

В зависимости от характера логических операций, которые осуществляются при решении вычислительных задач, различают аналитический и синтетический методы. При аналитическом методе решение начинается с выражения искомой величины через другие величины, затем определяют недостающие данные и, постепенно расчленяя задачу, доходят до известных величин, имеющихся в условии задачи. При синтетическом методе решения вначале устанавливают промежуточные зависимости между данными физическими величинами и, подбирая необходимые соотношения, получают выражение, из которого находят искомую величину.

Пример 5. Какую работу надо совершить, чтобы поднять гранитную глыбу объемом V со дна водоема глубиной h?

Решение: *1-й способ.* Величину работы вычислим по формуле $A = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\alpha$, но так как $\cos\alpha = 1$, то $A = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|$. Спроецируем силы, действующие на гранитную глыбу, на вертикальное направление (вверх), приняв его за положительное направление оси координат: $F + F_A = mg$, где F — сила, необходимая для равномерного подъема тела в воде; F_A — архимедова сила; mg — сила тяжести. Найдем величину силы: $F = mg - F_A$.

Так как $mg = \rho_г gV$, а $F_A = \rho_в gV$, то $F = gV(\rho_г - \rho_в)$. Поэтому $A = gV(\rho_г - \rho_в)h$.

2-й способ. Определим силу тяжести, действующую на гранитную глыбу: $F_г = mg$ или $F_г = \rho_г gV$. Найдем величину архимедовой силы: $F_A = \rho_в gV$. Вычислим силу, необходимую для равномерного подъема глыбы в воде: $F = F_г - F_A = gV(\rho_г - \rho_в)$. Тогда $A = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos\alpha$ или в нашем случае $A = Fh = \rho V(\rho_г - \rho_в)h$.

Синтетический метод решения задач проще для учащихся, однако он менее целенаправлен. Аналитический метод требует строгой логической последовательности в действиях, дает единый подход к решению задачи, быстрее приводит к конечной цели. Этот метод труднее, поэтому его следует применять в старших классах.

Аналитический и синтетический методы не применяются в чистом виде, они неразделимы в процессе мышления, поэтому их нецелесообразно рассматривать как два самостоятельных метода. Имеет смысл говорить о едином аналитико-синтетическом методе решения физических задач.

Графическими называют задачи, в которых объектом исследования являются графики зависимости между физическими величинами. Содержание работы учащихся может состоять в «чтении» и построении графиков, нахождении количественных зависимостей между величинами, выражении этой зависимости посредством формул. Например: «На рис. 14 показан график зависимости силы тока от сопротивления при постоянном напряжении 10 В. Указать на вертикальной оси графика соответствующие значения силы тока».

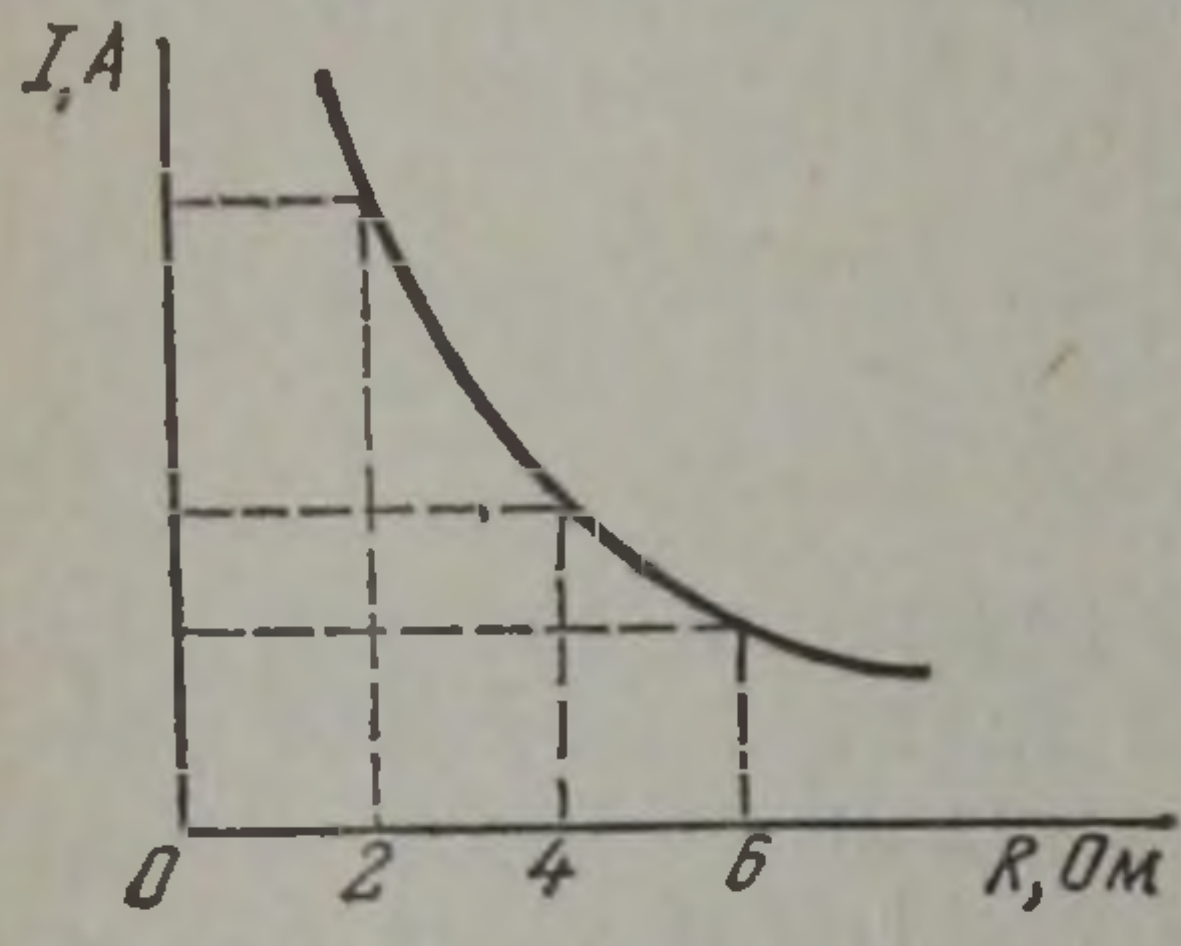


Рис. 14

Условия вычислительных задач обычно содержат явные и скрытые данные. Скрытые данные представляют собой табличные величины, некоторые константы. Об этих величинах ничего не говорится в задаче, но их необходимо выявить и внести в краткую запись условия задачи. В практике обучения физике применяется несколько способов записи условия задачи. Покажем особенности различных способов записи условия.

Пример 6. Сколько энергии надо затратить, чтобы расплавить 5 кг льда, взятого при температуре −10 °С?

1-й способ

Дано: $m = 5$ кг

$t_1 = -10\ ^\circ C$
$c = 1800$ Дж/(кг · К)
$t_2 = 0$
$\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг

Q — ?

Это наиболее распространенный способ записи условия задачи. Однако при самостоятельном решении учащиеся не всегда вовремя определяют, какие постоянные величины нужно внести в запись условия, а определив их в процессе решения, не знают, куда записать. Кроме того, при повторном обращении к задаче возникают затруднения с воспроизведением ее содержания.

2-й способ

Лед
$m = 5$ кг
$t_1 = -10\ ^\circ C$

Q — ?
$c = 1800$ Дж/(кг · К)
$t_2 = 0$
$\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг

При этом способе записи условия указывают физическое тело или явление, о котором говорится в задаче, а табличные величины записывают ниже вопроса (или оставляют 1—2 строки после записи данных величин). Такая запись благоприятна для воспроизведения в памяти содержания задачи.

3-й способ

Лед
Q — ?
$m = 5$ кг
$t_1 = -10\ ^\circ C$
$c = 1800$ Дж/(кг · К)
$t_2 = 0$
$\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг

Краткая запись величин осуществлена в той последовательности, в которой они приведены в условии задачи. Недостатком такой записи является то, что в ней «замаскирован» вопрос задачи.

4-й способ

Q — ?	Запись условия задачи можно начинать с искомой величины. Это акцентирует внимание на отыскание неизвестной величины, позволяет дописывать все необходимые табличные величины. Некоторые методисты считают этот способ наиболее приемлемым при обучении решению задач.
Лед	
$m=5$ кг	
$t_1=-10$ °С	
$c=1800$ Дж/(кг · К)	
$t_2=0$	
$\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг	

При решении физических задач широко используют рисунки, чертежи, схемы и др. Обычно эти средства наглядности применяют для раскрытия физической сущности задачи.

С помощью рисунка можно сформулировать условие задачи. Например: «В воде плавает бревно. Пользуясь рис. 15, определить плотность древесины». Рисунок облегчает выявление скрытых данных задачи.

Рисунок облегчает понимание условия задачи. Например: «С какой минимальной высоты должен скатиться шар, чтобы описать

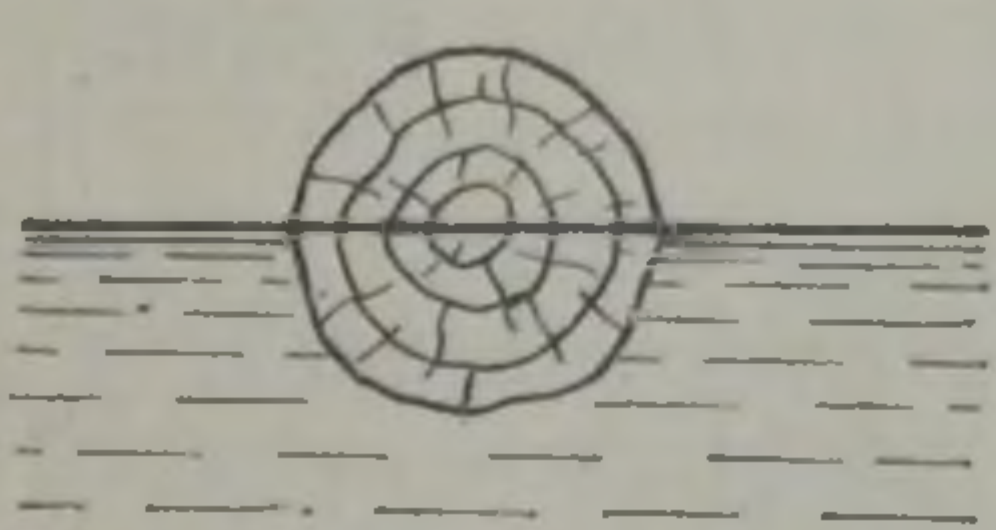


Рис. 15

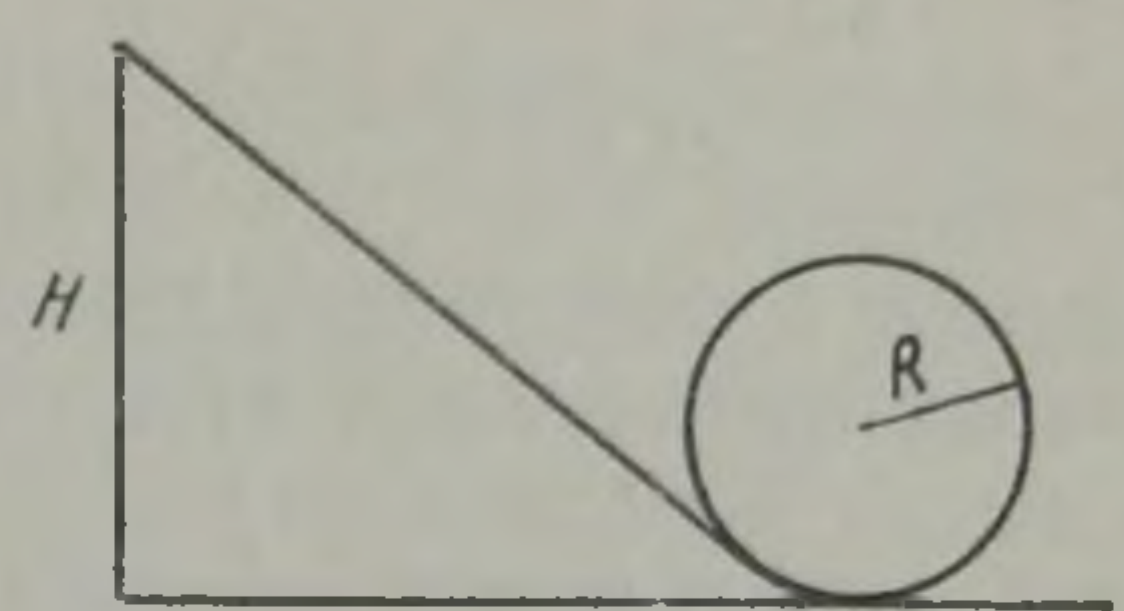


Рис. 16

«мертвую петлю» (рис. 16)?» Рисунок к этой задаче позволяет уточнить ее условие, создать соответствующие образы и представления.

Рисунок облегчает анализ и решение задачи. Например: «По наклонной плоскости с помощью каната равнозамедленно опускается груз массой m. Определить натяжение каната, если ускорение равно a, коэффициент трения μ». Для решения этой задачи необходимо изобразить силы, действующие на тело, найти их проекции на координатные оси, составить систему уравнений. Это можно сделать на основе рис. 17, который позволяет установить зависимость между величинами.

Рисунок можно использовать в качестве иллюстрации к ответу задачи. Например: «В U-образной трубке находится ртуть. В левую часть трубки налили воду, а в правую — керосин. Как расположатся уровни жидкостей, если объемы воды и керосина одинаковые?» (Ответ. Рис. 18). Этот прием особенно широко используется при решении качественных задач.

При решении многих задач применяются принципиальные и монтажные схемы, рисунки электрических цепей, различных приборов и установок. На их основе можно производить отсчеты измеряемых величин и делать вычисления. Это способствует формированию практических навыков работы с приборами и электрическими цепями.

Рисунки, чертежи и схемы, которые используются при решении физических задач, должны быть просты, без лишних деталей. Можно применять условные обозначения различных предметов, приборов и устройств (например, весов, маятников, рычагов и др.). Степень схематизации рисунка в процессе решения задач должна постепенно возрастать.

В практике обучения встречаются различные способы записи плана и процесса решения физических задач.

1. Запись решения с планом и вопросами (см. пример 4), требующими соответствующих действий. Такая запись применяется при арифметическом способе решения и подготавливает к решению задач в общем виде. Она приучает учащихся последовательно объяснять решение, логически рассуждать, но требует много времени.

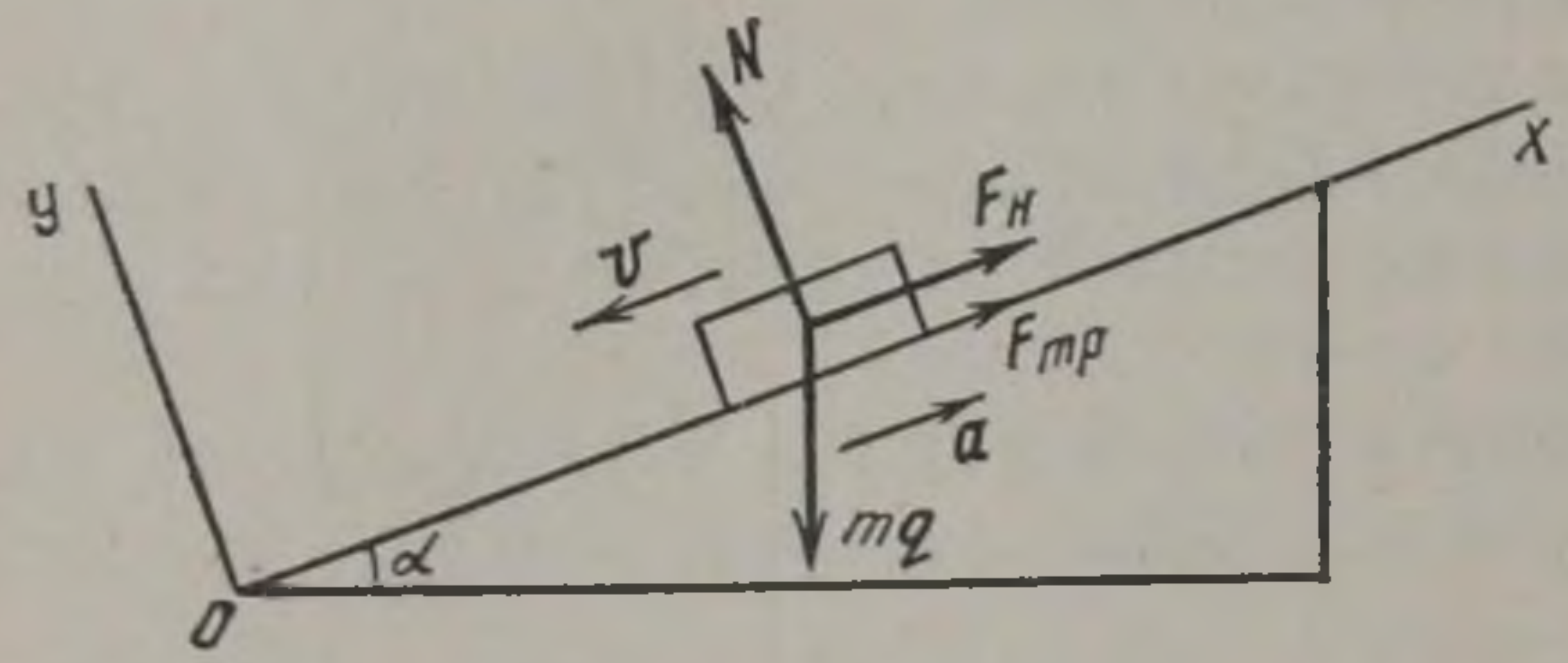


Рис. 17

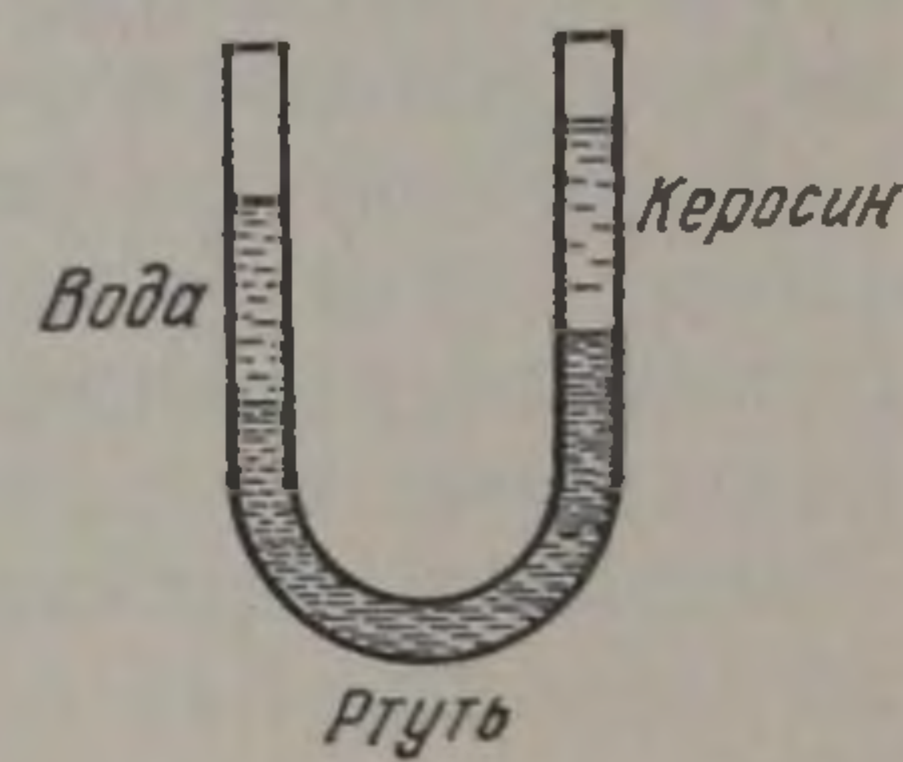


Рис. 18

2. Запись решения задач с краткими пояснениями (см. пример 5, 2-е решение). Такая запись представляет более высокую степень схематизации процесса решения физических задач.

3. Запись решения задач с использованием только буквенных обозначений, формул и вычислений (см. пример 5, 1-е решение). Этот способ используется при алгебраическом решении задач в старших классах. Он сокращает время на оформление записи условия и решения задачи, но предполагает подробное устное объяснение хода ее решения.

Тема 9. Методика обучения учащихся решению задач

Значение решения задач в системе обучения физике. Структура процесса решения физических задач, его основные операции. Применение графов при решении физических задач. Выработка у учащихся общего подхода к решению задач.

Основная цель, которая ставится при решении задач по физике, заключается в том, чтобы учащиеся глубже усвоили физические закономерности, научились их анализировать и применять на практике. Решение задач способствует глубокому и прочному усвоению учебного материала, конкретизации знаний, устранению формализма в преподавании физики, применению теории на практике. Оно служит целям политехнического обучения, развивает навыки самостоятельной работы, логическое мышление, сообразительность, инициативу, является источником новых знаний по физике. Решение задач является средством воспитания, позволяет осуществлять повторение, систематизацию и контроль знаний учащихся. Кроме того, многие ученые подчеркивали, что задачи по физике должны формировать исследовательский стиль умственной деятельности, знакомить с методами исследования физики, с методами подхода к изучаемым явлениям.

Методика решения каждой задачи зависит от многих факторов: ее содержания, цели, поставленной учителем, подготовки учащихся и т. д. Однако существует ряд общих положений, которые следует выполнять при обучении решению физических задач.

Как показывает практика, решение достаточно сложных количественных задач целесообразно проводить в такой последовательности (например, при решении задачи учащимся на доске).

1. Учитель читает условие задачи всему классу, затем учащийся повторяет его и одновременно записывает на доске (краткая запись условия).

2. Ученики повторяют условие задачи по записи на доске. Учитель выясняет, все ли понятия и термины знакомы учащимся, и убеждается в том, что содержание задачи усвоили все.

3. Обосновывается выбор системы единиц и их перевод в эту систему.

4. В случае необходимости выполняется рисунок, чертеж или схема. При решении некоторых задач (например, графических, задач по статике, геометрической оптике и др.) можно выполнять рисунок в процессе чтения задачи.

5. Выясняется физическая сущность процессов или явлений, о которых говорится в задаче, проводится анализ условия задачи. (Согласно условию задачи, можно собрать и продемонстрировать соответствующую установку, использовать ее для создания необходимых представлений, а также для оценки полученного ответа после решения задачи.) Составляется план решения.

6. Задача решается в общем виде, находится численное значение искомой величины. Численные значения величин целесообразно подставлять в формулу с их наименованиями.

7. Проводится анализ полученного ответа с точки зрения его реальности и соответствия условию задачи. С этой целью следует обучать учащихся оценивать порядок ответа с математической и физической стороны. Лучшим способом проверки полученного результата является решение задачи другим методом и сопоставление результатов обоих решений, а также проверка с помощью действий над наименованиями.

Решение задачи — это активный познавательный и мыслительный процесс. Наиболее сложным и существенным его элементом является анализ условия задачи.

Анализ условия задачи позволяет представить сущность описанного в ней явления или процесса, установить, что является существенным или второстепенным в рассматриваемой ситуации. Нередко условие задачи необходимо упростить, абстрагироваться от реальных условий. Некоторые упрощения оговариваются в условии задачи, другие приходится делать самим решающим. Покажем это на следующем примере: «Пуля вылетает из горизонтально расположенного ружья со скоростью 300 м/с. На каком расстоянии от места выстрела она упадет, если высота ружья над поверхностью земли равна 1,2 м?» При анализе этой задачи необходимо оговорить, что движение пули рассматривается с того момента, когда прекратилось действие пороховых газов. Сопротивление воздуха не учитывается, а поверхность земли следует считать строго горизонтальной. Затем нужно определить связи между физическими величинами, установить, какие правила, формулы или закономерности надо применить в данной конкретной ситуации. Это и составляет главную трудность для учащихся. Так, в приведенной задаче выявляется, что в горизонтальном направлении на пулю сила не действует, и ее движение в этом направлении можно считать равномерным. Поэтому дальность полета пули можно вычислить по формуле $s = v_0t$. Но на пулю действует сила тяжести, и в вертикальном направлении ее движение будет равноускоренным. Значит, $h = \frac{gt^2}{2}$ и время падения пули $t = \frac{2h}{g}$. Такое же время пуля будет перемещаться и в горизонтальном направлении, поэтому $s = v_0 \frac{2h}{g}$.

Психологические исследования показывают, что анализ задачи и актуализация принципа ее решения не отделимы друг от друга, они переплетаются, так что общие положения (принципы, закономерности) и частные условия задачи непрерывно соотносятся друг с другом в каждом звене мыслительного процесса. В ходе этого процесса непрерывно выявляются новые свойства объекта, отношения между элементами задачи, которые анализируются в ходе мышления. Так постепенно выделяется искомое.

Анализ задачи часто проводят в виде беседы с учащимися. Учитель путем постановки логически связанных вопросов постепенно подводит учащихся к наиболее рациональному способу решения. Вместе с тем следует систематически обучать учащихся самостоятельно анализировать задачи, требовать сознательных и обоснованных рассуждений при решении.

Связи между физическими величинами, которые устанавливаются в процессе анализа задачи, целесообразно фиксировать в определенной схематической форме. Для этого можно использовать основную идею теории графов: величины изображать точками или кругами (вершинами), а связи между ними — направленными стрелками (ребрами графа). Изображение хода рассуждений при анализе задачи в виде графа способствует составлению плана решения или системы уравнений при алгебраическом решении. Помощь заключается в том, что, проводя рассуждения и фиксируя их, можно прийти к решению задачи более целенаправленно, не сбиваясь на беспорядочный перебор формул. Например: «Какую работу совершает двигатель самолета при взлете, если разгон происходит равноускоренно в течение $t=10$ с? В конце разгона скорость самолета $v=50$ м/с, его масса $m=3$ т. Коэффициент трения $\mu=0{,}2$ и среднее сопротивление воздуха $F_{с.в}=2$ кН». В результате анализа задачи получен граф, приведенный на рис. 19.

Применение графов помогает не только найти способ решения задачи, но и выявить скрытые и недостающие величины, а также глубже понять физическую сущность задачи. Граф задачи позволяет учителю оказывать целенаправленную помощь учащимся при

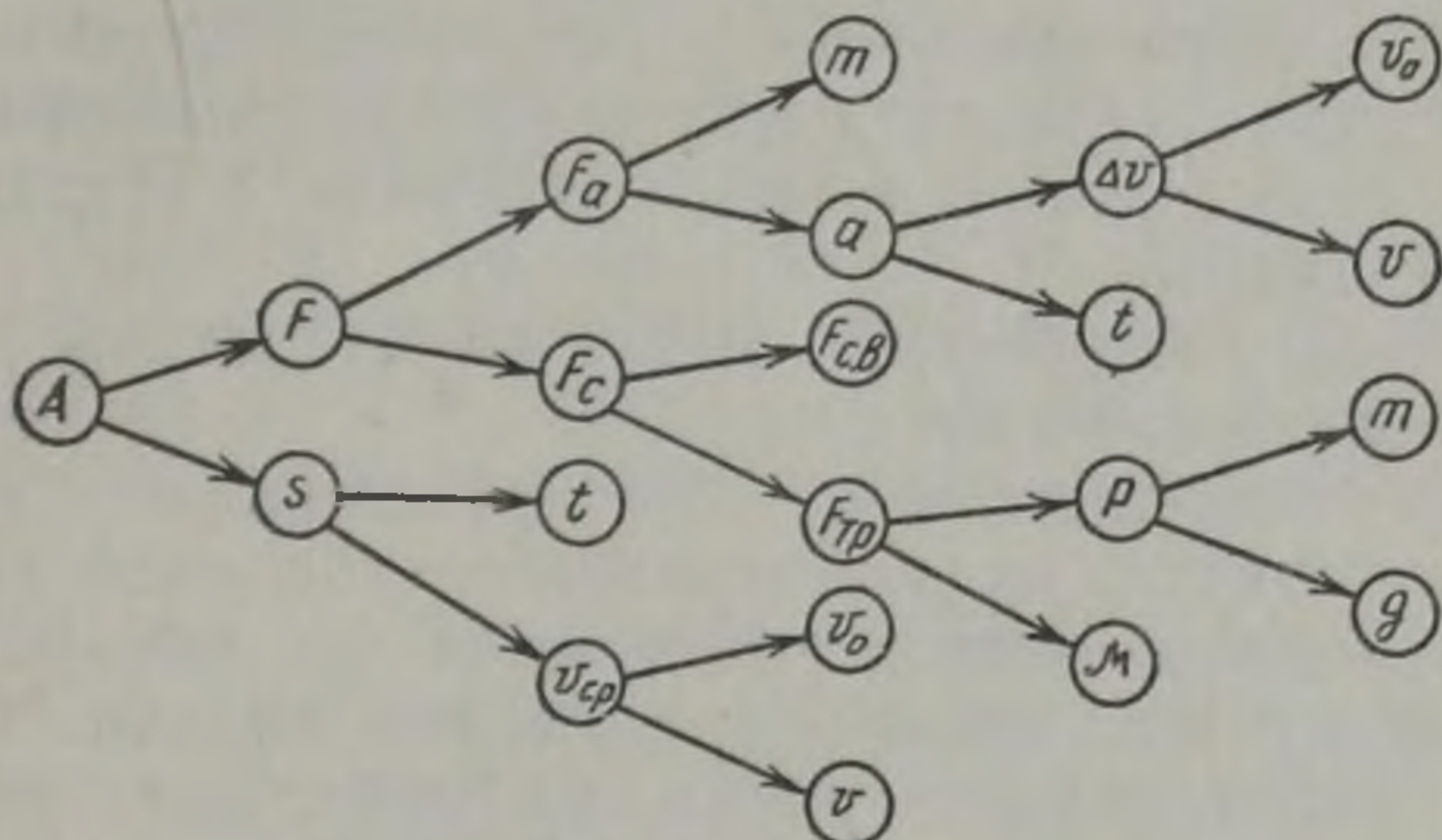


Рис 19

самостоятельном решении ими задачи. Составление и использование графов способствует развитию логического мышления.

Для обучения учащихся решению задач важна выработка единого подхода к формированию обобщенных умений. Сформированные при решении задач одного типа, они способствуют усвоению методов решения задач других типов. В практике используются три способа обучения решению задач. Традиционный способ осуществляется по следующей схеме: объяснение методов решения — коллективное решение — самостоятельное решение контрольных работ. Второй способ дополняется двумя новыми элементами и выполняется по схеме: объяснение методов решения — коллективное решение — полусамостоятельная работа — самостоятельное решение — контрольная работа. Третий способ включает все элементы второго, но предполагает применение алгоритмизированных приемов решения задач.

Тема 10. Методика проведения занятий по решению задач

Виды занятий, методические приемы, используемые при решении задач. Требования к подбору задач, решаемых на уроке. Активизация самостоятельной работы учащихся при решении задач. Сочетание индивидуальной и коллективной форм работы. Разработка конспекта урока решения задач по конкретной теме (фрагмент урока).

Решение задач является составной частью большинства уроков физики. Задачи решают в начале урока для проверки знаний учащихся, а также в конце урока для повторения и углубления изученной темы. Значительную часть времени занимает решение задач на уроках повторения, обобщения и систематизации знаний. Часть уроков физики специально посвящается решению задач. Решение задач является важной составной частью домашних заданий по физике. Кроме того, учащиеся решают задачи, занимаясь в школьных кружках, а также участвуя в физических олимпиадах и конкурсах. В целом решение задач по физике занимает более 30 % учебного времени.

На уроке объяснения нового материала при решении физических задач чаще всего применяют следующие приемы:

1) решение задач на доске поочередно вызванными учащимися;

2) решение задач несколькими учащимися в тетрадях по предложенным карточкам;

3) самостоятельное решение задач всем классом в виде 10—12-минутной письменной работы.

Эти приемы позволяют повысить эффективность текущей проверки знаний учащихся, их ответственность за свою работу. Однако перед объяснением нового материала не следует проводить письменную работу или решать громоздкие задачи: это отнимает наиболее продуктивную часть урока и «будоражит» учащихся. Задачи должны быть в основном качественного характера и служить целям обобщения изученного материала, создания проблемной ситуации, которую предстоит проанализировать на уроке.

При закреплении нового материала задачи решаются обычно со всем классом (один ученик решает на доске), хотя возможна и самостоятельная письменная работа.

На уроке по решению задач обычно применяют такие приемы:

1) решение задач на доске учителем (с привлечением учащихся) для сообщения сведений о новых типах задач, методах их решения, проведении анализа физической ситуации, оформлении записей и т. п.;

2) решение задач на доске учащимися;

3) самостоятельное решение задач учащимися в тетрадях.

Методический прием, при котором один учащийся решает задачу на доске, а все остальные решают эту же задачу в тетрадях самостоятельно, обладает существенными недостатками. Практика показывает, что при такой организации процесса решения задач активно думают и действуют лишь 10—15 % учащихся. Для активизации познавательной деятельности всех учащихся дополнительно используют следующие приемы: ставят цель и показывают практическую значимость содержания задачи; выдвигают гипотезы или несколько вариантов решения; используют «занимательные» задачи; применяют наглядные пособия и проводят опыты; сочетают коллективную и самостоятельную работу в классе. Так, полезно вначале предложить учащимся обдумать задачу и попытаться решить ее самостоятельно, а после этого решать задачу на доске. Достоинствами этого методического приема является гарантия того, что задача будет решена полностью и правильно, а также возможность обмена мнениями и обсуждение различных идей учащихся. В такой форме обычно решаются сложные и объемные количественные задачи, а также задачи экспериментального характера.

Известный советский педагог В. Ф. Шаталов при обучении решению задач применяет следующий прием. Задачи на доске решает учитель, а учащиеся ничего не записывают, только наблюдают за ходом решения. После окончания решения задачи на доске все учащиеся самостоятельно решают эту же задачу в своих тетрадях. По мере развития умений и навыков решение задач на доске становится все более целеуказывающим, без мелкой детализации и выполнения тривиальных операций. На решение задач у доски отводится около 30 мин, оставшиеся 15 мин выделяются для самостоятельного решения тех же задач в тетради. Для проверки решения задач и оказания помощи в решении привлекаются учащиеся (метод цепочки: тетрадь одного ученика проверяет учитель, тетрадь другого — первый ученик, третьего — второй и т. д.). Учащиеся усваивают методы решения задач в процессе решения на доске и в тетрадях.

В. Ф. Шаталов предоставляет учащимся право решать дома столько задач из определенного раздела, сколько они пожелают, и те задачи, какие они могут решить. При этом возрастает число решенных задач, а главное, значительно улучшается усвоение методов решения физических задач.

На начальных этапах обучения условия задач должны иметь четкую и конкретную формулировку. По мере приобретения знаний и формирования умений целесообразно предлагать задачи, не требующие однозначного законченного ответа, а дающие возможность углубляться в изучение поставленного вопроса. Например: «На горизонтальной поверхности стола находится катушка с нитками. В какую сторону будет двигаться катушка, если тянуть за конец нити? Угол между нитью и поверхностью стола может быть различным». Такие задачи имеют творческий характер и способствуют ознакомлению учащихся с методами исследования физических явлений.

Эффективность обучения учащихся решению задач во многом зависит от характера заданий, их сложности. Задания должны быть посильными, но достаточно сложными и трудными для каждого ученика. Это требование неизбежно приводит к необходимости дифференцированного подхода к учащимся при самостоятельном решении задач.

В практике обучения физике используются различные способы индивидуализации процесса решения задач. Наиболее распространенным является подбор индивидуальных заданий для каждого ученика в зависимости от его подготовки. Применяется также такой прием: классу предлагается несколько задач различной трудности, и каждый ученик может решать те, которые ему посильны.

Например, на уроке, посвященном решению задач на расчет сопротивления проводников, можно предложить следующие задачи.

1. Найти сечение медного провода, если его длина 1,5 км и при напряжении 220 В через него протекает ток силой 500 мА.

2. На круглую катушку диаметром 10 см намотан один слой медного провода диаметром 1 мм. Какое напряжение можно приложить к концам обмотки, чтобы сила тока не превышала 400 мА? Длина катушки 15 см.

3. Определить площадь поперечного сечения и длину алюминиевой проволоки, если ее сопротивление 0,1 Ом, а масса 54 г.

Наиболее подготовленные учащиеся могут решать вторую и третью задачи, слабо подготовленные — первую, все остальные — первую и вторую.

Второй прием предпочтительнее, так как облегчает анализ решений учащихся, вносит элемент соревнования, менее трудоемок для учителя.

Дифференцированный подход к учащимся можно осуществить также путем решения задач, в условиях которых дается несколько числовых значений одной и той же физической величины. Покажем это на примере. Дана задача: «Тело массой 100 кг приходит в движение под действием двух сил по 50 Н каждая. Определить путь, пройденный телом за 10 с, если угол между силами: а) 0; б) 60°; в) 120°». Учащиеся в зависимости от подготовки решают один из вариантов задачи, при этом анализ условия и план решения остаются общими для всего класса.

Различия в условиях задачи могут быть не только математического, но и физического характера (например, в одном варианте задачи дается значение силы сопротивления, в другом — коэффициент сопротивления и т. п.). Решение таких задач способствует развитию интереса, самостоятельности, творческой активности учащихся, приводит к экономии учебного времени.

При подготовке учителя к уроку по решению задач наиболее важно определить систему упражнений, выбрать структуру и методику проведения урока. Покажем, например, структуру и содержание отдельных этапов урока решения задач по теме VII кл. «Работа и мощность электрического тока».

В начале урока следует повторить изученный материал, обобщить и систематизировать знания, необходимые для решения задач по этой теме (закон Ома, расчет сопротивления проводников, законы последовательного и параллельного соединения потребителей, работа и мощность электрического тока). При этом целесообразно предложить учащимся решить устные вычислительные упражнения, а также составить устные задачи на вычисление работы и мощности электрического тока.

Затем все учащиеся решают задачу практического характера типа следующей: «Сколько метров проволоки необходимо для изготовления электрической плитки, которую можно включать в бытовую электрическую сеть?» Это задача с недостающими и скрытыми данными, поэтому без дополнительных пояснений она не может быть решена. В связи с этим ставится вопрос о том, как сделать задачу определенной, т. е. при каких условиях ее решение становится возможным. Выясняется, что для решения задачи необходимо знать такие технические параметры, как мощность, напряжение сети, материал и диаметр проволоки. Известно, что в быту часто применяются плитки мощностью 600 Вт, рассчитанные на напряжение 220 В. Далее учитель сообщает требования, которые предъявляются к материалу и поперечному сечению проволоки, и указывает, что самым распространенным материалом для изготовления бытовых приборов является фехраль — сплав железа, хрома и алюминия с удельным сопротивлением 1,2 Ом · мм²/м и диаметром проволоки 0,4 мм.

Анализ задачи проводится учителем с привлечением учащихся. Связи между величинами изображаются в виде графа (рис. 20). Затем учащиеся самостоятельно решают задачу, но процесс ее решения сопровождается пояснениями учителя и комментариями учащихся. После получения и анализа ответа ($l \approx 7{,}3$ м) выясняется, как изменится мощность плитки, если спираль будет короче (7 м) или длиннее (8 м), а также рассчитывается стоимость электроэнергии, потребленной плиткой за месяц, если она включается ежедневно на 5 ч. Затем учащимся предлагается система задач для самостоятельного решения, из которой каждый ученик выбирает посильные для себя задачи.

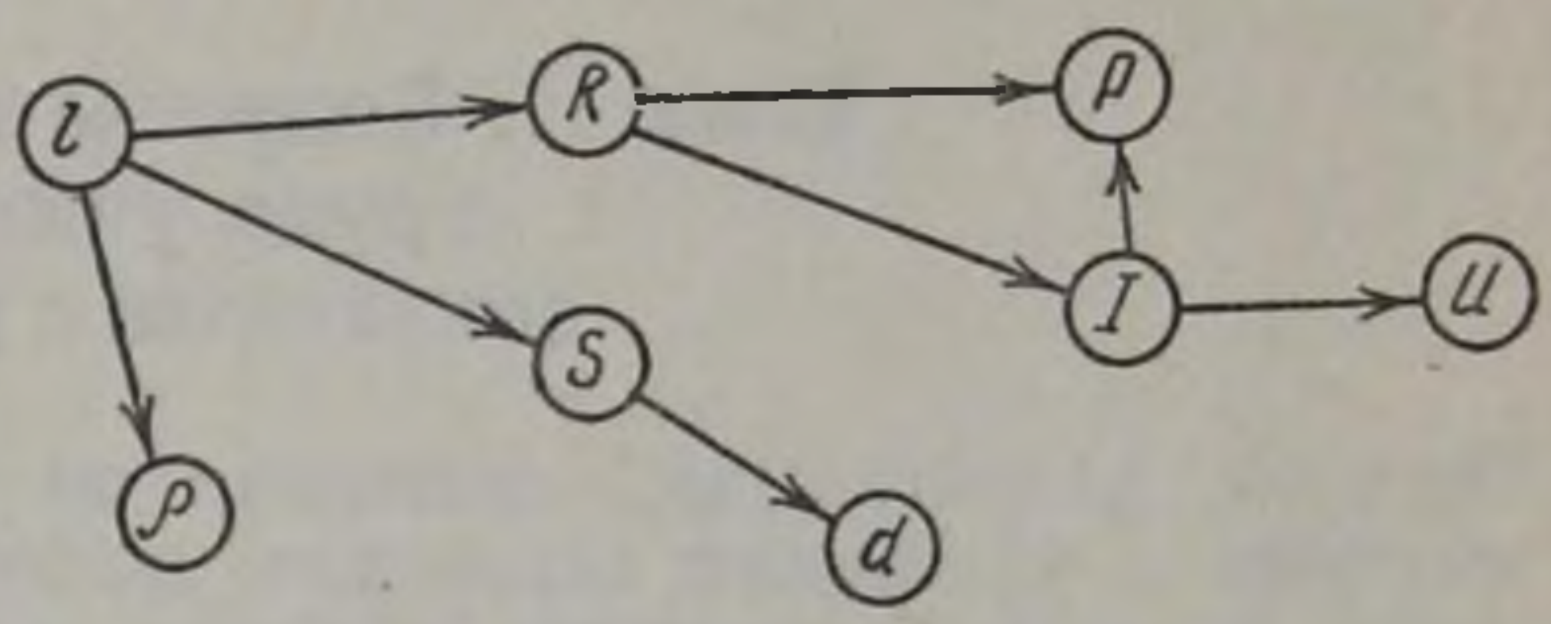


Рис. 20

1. Нарисовать схему электрической цепи, показанной на рис. 21. Определить работу тока за 5 мин в каждой лампочке; в трех лампочках за это время. Чему равно напряжение на реостате, если его ползунок размещен посередине обмотки? Какую работу совершает ток в реостате за 5 мин?

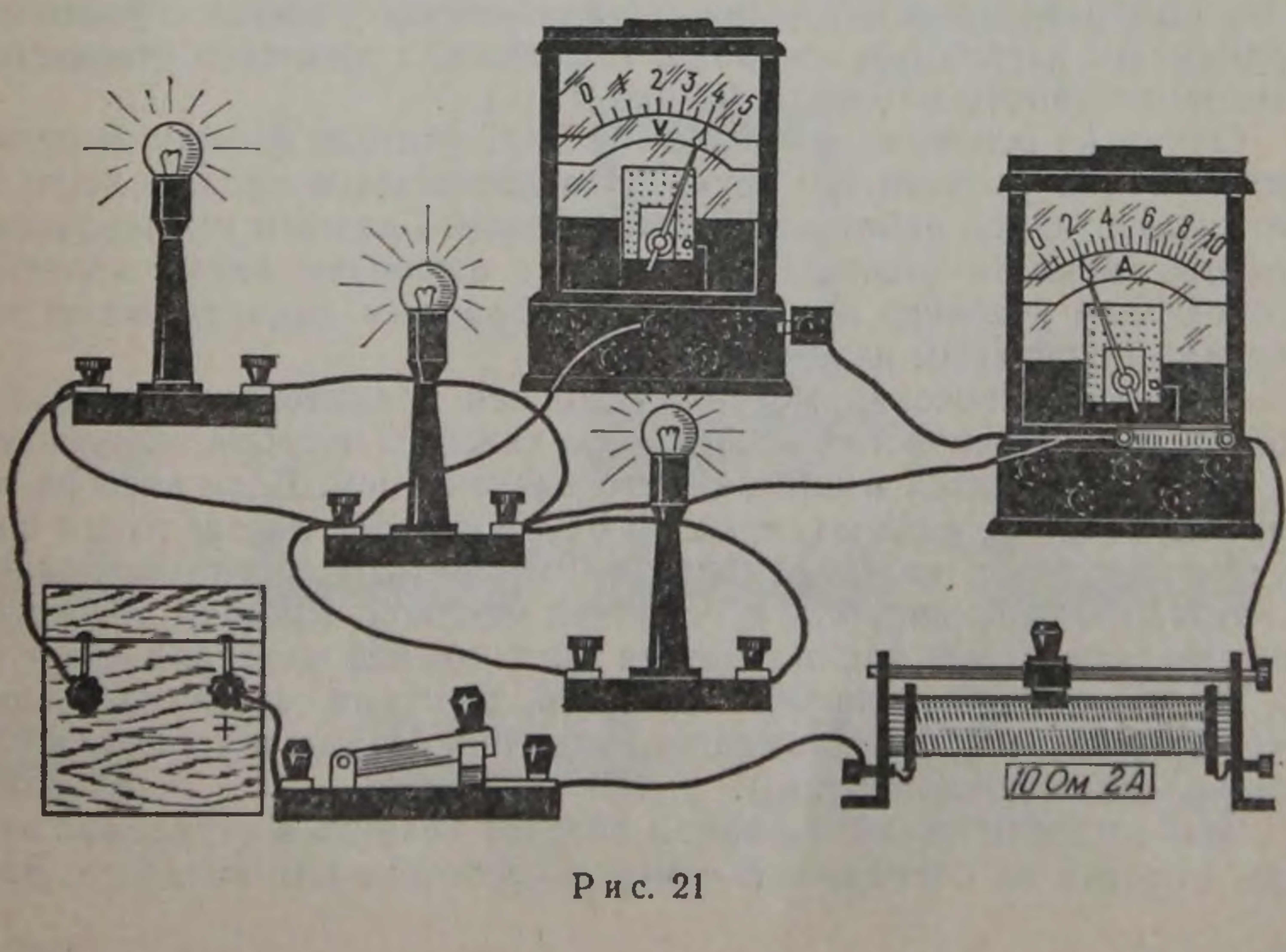


Рис. 21

2. Две лампы мощностью 40 и 100 Вт, рассчитанные на одинаковое напряжение, включены в электрическую цепь последовательно. Какая лампочка светится ярче? Сравнить яркость свечения ламп в той же цепи, если их соединить параллельно. (Решение задачи проверяется экспериментально.)

3. Лифт массой 2,2 т поднимается на высоту 36 м за 1 мин 40 с. Напряжение на электродвигателе 220 В, его КПД 90 %. Чему равна сила тока в двигателе? Определить расход электроэнергии на один подъем лифта.

Тема 11. Вопросы научной организации труда учителя физики, связанные с решением задач

Типовой дидактический материал по физике. Изготовление и систематизация карточек с условиями задач для уроков различных типов. Разработка и применение программированного учебного материала в виде задач различных типов.

Научная организация труда (НОТ) учителя — это непрерывно совершенствующаяся система научно обоснованных мероприятий, обеспечивающих достижение наилучших результатов в учебно-воспитательном процессе при минимальных затратах сил, средств и времени. НОТ основывается на достижениях науки и передовом опыте и позволяет наилучшим образом организовать труд учителя.

Содержание НОТ учителя физики принципиально не отличается от организации труда преподавателей других дисциплин. Однако процесс обучения физике имеет свои особенности, которые определяют специфику НОТ учителя физики (организация самообразования, выбор методов обучения и управления учебным процессом, применение наглядных пособий и технических средств обучения, организация работы кабинета физики и др.).

Одним из основных компонентов НОТ учителя физики является оптимизация условий его труда. Это достигается прежде всего за счет эффективной работы кабинета физики. Главным направлением работы кабинета физики, связанным с решением задач, является обеспечение учебного процесса разнообразным дидактическим материалом с целевым назначением.

Весь дидактический материал должен храниться в определенной системе. Количество экземпляров каждого пособия определяется числом учащихся в классе и его назначением. Если пособие содержит задания, напечатанные на одной стороне листа, то его следует разрезать и каждую карточку наклеить на плотную бумагу. Карточки можно покрыть прозрачной пленкой. Кроме того, у учителя физики может накапливаться раздаточный материал (карточки с заданиями различной сложности, текстами самостоятельных работ, индивидуальных домашних заданий, слайды с условиями задач различных типов и т. д.).

Весь дидактический материал следует хранить в отдельных папках, отметив их порядковый номер в картотеке или каталоге. Этот материал целесообразно систематизировать по классам и темам, а если возможно — по урокам физики.

Для эффективного использования дидактического материала и других средств обучения учителю следует пользоваться тематическими карточками, которые могут иметь следующий вид:

Раздел	Количество	Где хранится	Инвентарный или порядковый номер
Учебное оборудование, приборы, модели, печатные пособия			
Дидактический и раздаточный материал			
Технические средства, экранные и звуковые пособия			
Литература для учащихся			
Методическая литература и материалы для учителя			

Целесообразно изготовить и заполнить аналогичные карточки для каждого урока физики во всех классах.

В процессе обучения физике применяется также программированный учебный материал. Наибольшее распространение получили программированные задания с выбором ответов. Такие задания могут строиться на различной формально-логической основе, в связи с чем различают следующие основные виды программ: программы отбора, программы-группировки, программы на соотнесение, программы переноса и программы соответствия.

Программа отбора — это система вопросов с набором верных и возможных (но неверных) ответов. Такие программы ближе всего стоят к обычной форме тестов. Например: «Определить силу тока в каждом резисторе, пользуясь рис. 22». (1.0,4 А. 2.1 А. 3.4 А.)

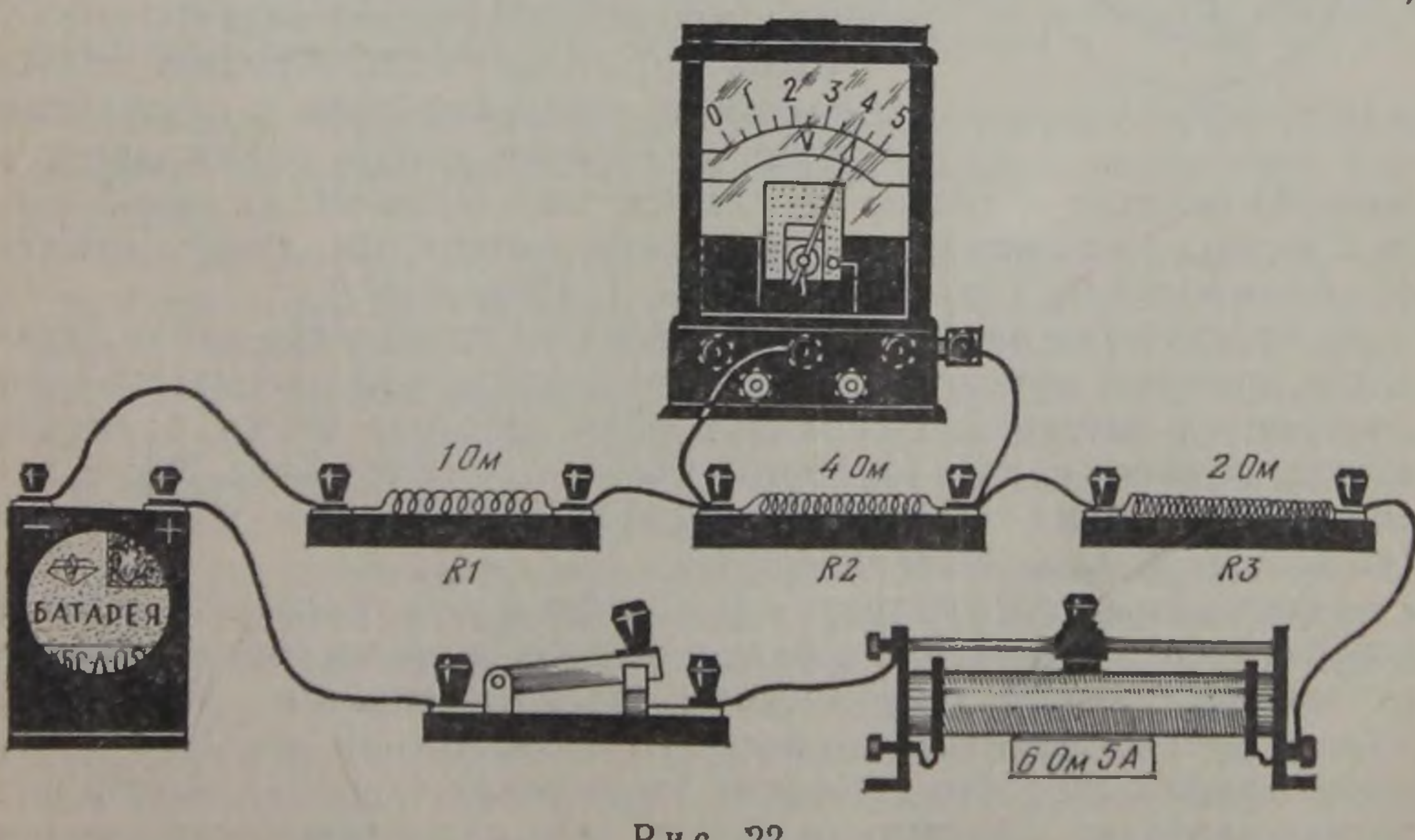


Рис. 22

«Сравнить напряжение на резисторах R1 и R2 (рис. 22)». (1. $U_1 = U_2$. 2. $U_1 = 4U_2$. 3. $4U_1 = U_2$.) «Чему равно напряжение источника тока, если ползунок реостата установлен посередине обмотки?» (1.4 В. 2. 1 В. 3. 5 В. 4. 10 В.) Такие задания целесообразно использовать для проверки и закрепления знаний учащихся по физике.

Программы-группировки состоят из совокупности логически связанных, но не законченных фраз и набора их возможных окончаний. Окончания фраз выбираются по принципу сходства или противоположности признаков, понятий или действий. Эти программы можно использовать для обучения учащихся решению задач по известному алгоритму, а также для обобщения знаний по физике. Примером такой программы является следующая:

«В цепь, содержащую электрическую лампу, включили последовательно еще одну такую же лампу. Изменится ли мощность, потребляемая первой лампой?» (VII кл.)

I. После включения второй лампы напряжение источника тока...
II. В связи с этим напряжение на первой лампе...
III. Поэтому сила тока в цепи...
IV. Следовательно, мощность, потребляемая первой лампой, ...

1. Увеличится в 2 раза.
2. Уменьшится в 2 раза.
3. Не изменится.
4. Увеличится в 4 раза.
5. Уменьшится в 4 раза.

Рис. 23

Программы на соотнесение предполагают обучение учащихся подбору примеров, иллюстрирующих физические законы (принципы, правила), или объяснение явлений с помощью известных физических законов, что является обязательным условием осмысленного решения физических задач.

Например: «Какие виды передачи теплоты являются определяющими в следующих случаях: а) горячая деталь охлаждается в воде; б) теплота от костра передается телу человека; в) зимой воздух в доме охлаждается через стены, открытые двери, окна?» (1. Конвекция. 2. Теплопроводность. 3. Излучение.)

В программах переноса формулируется какой-либо закон (правило), который затем требуется использовать при рассматривании конкретных ситуаций. Например: «При переходе атома с одного энергетического уровня на другой излучается фотон (рис. 23). В каком случае длина электромагнитной волны больше и почему?» (1. *A*. 2. *B*. 3. *C*. 4. Одинаковая.)

Программы соответствия используются для проверки умения устанавливать соответствие между физическими законами и их математическими или графическими представлениями. Например: «Тело брошено вертикально вверх со скоростью 10 м/с. Какой вид имеет график скорости движения этого тела? (рис. 24). Какой вид имеет уравнение зависимости высоты тела над поверхностью земли от времени ($g=10$ м/с^2)? (1. $h=10t$. 2. $h=5t^2$. 3. $h=10t-5t^2$. 4. $h=10t-5$.) Как графически выражается зависимость силы, действующей на это тело, от времени движения? (Рис. 25.)»

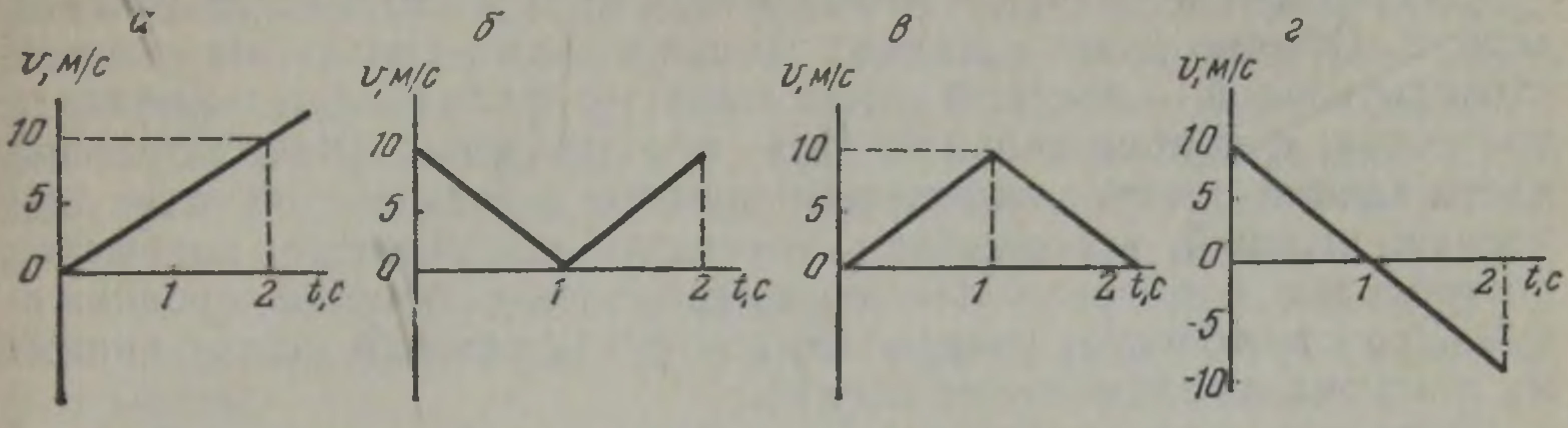


Рис. 24

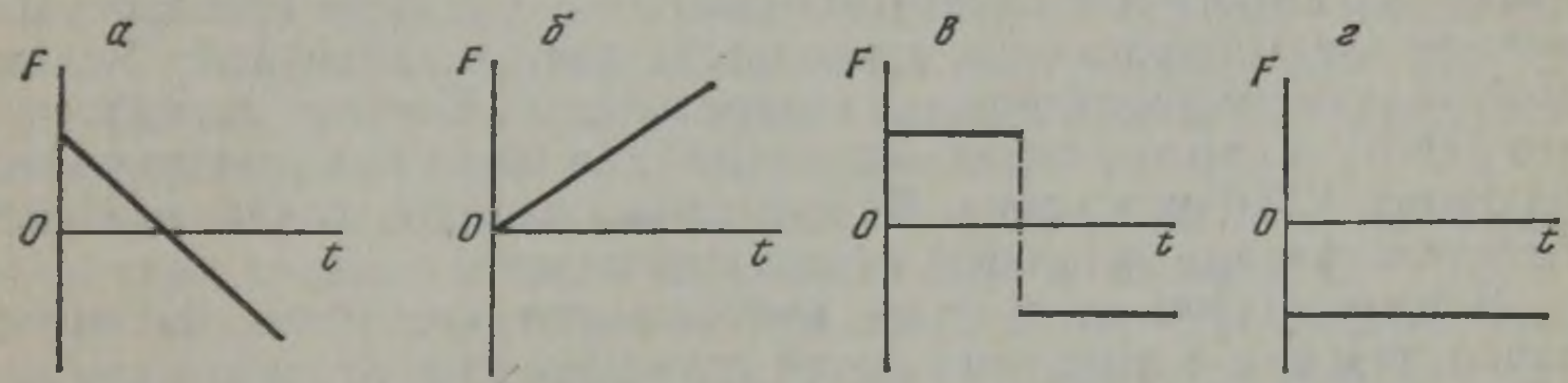


Рис. 25

Программированный материал можно применять для текущей и тематической проверки знаний учащихся. Методика их применения общеизвестна и разработана с достаточной полнотой.

Тема 12. Составление учебных задач по физике

Необходимость составления задач учителем. Принципы, способы и техника составления задач по физике. Составление задач учащимися.

Важным методическим приемом, повышающим эффективность процесса обучения физике, является составление задач учителем и учащимися.

Необходимость составления задач по физике объясняется тем, что учитель должен располагать задачами, различающимися по степени сложности, содержанию, способу выражения условия, способу решения, а также учитывающими специфику местного производства. Задачи, составленные учителем, в наибольшей мере учитывают индивидуальные особенности учащихся и позволяют повысить эффективность дифференцированного обучения.

При составлении физических задач необходимо выполнять следующие требования: составленная задача должна описывать реальные физические процессы, служить уяснению физической сущности изучаемых явлений и иметь хотя бы одно решение. Следует избегать составления задач с надуманными ситуациями, перегруженных техническими терминами, справочными и паспортными данными машин и промышленных установок. Важно, чтобы используемые в задаче понятия и термины давались в точных современных формулировках, числовые данные отображали реальную действительность.

Существенное значение имеет выбор формы выражения условия задачи. Обычно задача состоит из двух взаимосвязанных частей: утвердительной — несущей информацию о физических явлениях и процессах, и вопросительной. При формулировке утвердительной части задачи следует добиваться полного и четкого описания изучаемых явлений, использовать логически законченные, правильно построенные и вместе с тем преимущественно простые предложения. Это способствует раскрытию внутренних связей между данными и искомыми элементами задачи.

Вопросительная часть задачи в большинстве случаев должна быть точной и определенной. Например: «Лифт массой 0,5 т поднимается на высоту 9 м равноускоренно за 3 с. Какую мощность развивают электродвигатели, приводящие лифт в движение?» Условие этой задачи сформулировано неопределенно. Следует еще указать, что работу по преодолению сопротивления можно не учитывать, или сообщить КПД установки. Важно также указать, какую мощность (мгновенную или среднюю) нужно определить.

Вопрос задачи следует по возможности помещать на первом плане, так как с него начинается активная мыслительная деятельность решающего. Целесообразно, чтобы вопросительная часть задачи ставила перед учащимися одну проблему. Сдвоенные и строенные вопросы вызывают, как правило, затруднения. Не следует ставить вопросы, подсказывающие ход решения задачи или направляющие на неправильные рассуждения.

В старших классах можно предлагать задачи, содержащие неопределенность, допускающие ряд толкований. Работа с такими задачами может состоять в том, что учащимся предлагается разобраться в сущности задачи и правильно (или определенно) сформулировать ее условие, а затем решить.

При составлении экспериментальных задач необходимо учитывать наличие оборудования в физическом кабинете. Надо определить, каким оборудованием (демонстрационным или лабораторным) следует пользоваться при решении задачи. Все приборы должны быть знакомы учащимся. Вопрос должен вызывать интерес учащихся, желание решать задачу.

Экспериментальные задачи необходимо предварительно опробовать учителю для выявления сопутствующих факторов. Дело в том, что в текстовой задаче можно сделать оговорку об идеализации физических явлений или процессов (например, «трение не учитывать», «напряжение источника тока считать постоянным» и т. п.). В экспериментальных задачах такая идеализация не всегда возможна, поэтому необходимо выявить и по возможности устранить сопутствующие факторы. Если экспериментальная задача предлагается в качестве домашнего задания, то учитель должен быть уверен, что ученики найдут нужные приборы и принадлежности.

Целью составления задач учителем может быть получение вспомогательных задач, приводящих к решению основной задачи. Это можно осуществить путем расчленения сложной задачи на ряд простых, которые по содержанию являются определенными этапами решения основной задачи. Этот прием можно использовать для обучения решению задач слабо подготовленных учащихся. Так, перед решением задачи: «Тело массой 4 кг скатывается с наклонной плоскости длиной 10 м и углом наклона 30°. За какое время тело пройдет путь 16 м по горизонтальной поверхности? Трение не учитывать» можно решить следующую совокупность простых задач.

1. Определить силу, под действием которой тело массой 2 кг скатывается с наклонной плоскости (угол наклона 30°). Трение не учитывать.

2. Тело массой 5 кг движется под действием силы 10 Н. Чему равно его ускорение?

3. Сколько времени движется тело по наклонной плоскости, если его ускорение 5 м/с^2, а длина наклонной плоскости 10 м?

4. Какова скорость тела в конце спуска с наклонной плоскости, если его ускорение 4 м/с^2, а спуск длится 3 с?

5. К концу спуска скорость тела составляет 10 м/с. За какое время тело пройдет 20 м по горизонтальной поверхности?

Проверенным средством возбуждения интереса, поддержания внимания и активного мышления учащихся является решение «занимательных» задач по физике, а также задач с научно-фантастическим содержанием. Такие задачи учитель может составлять на основе фантастической, научно-популярной и художественной литературы. При их составлении определяют целевую установку, выбирают физические явления, понятия, законы, на основе которых строится задача, и формулируют задачу. Так, при изучении плавания тел учащимся VI класса можно предложить задачу следующего содержания: «Правы ли фантасты, утверждающие, что на большой глубине затонувшие суда не достигают дна океана?» (Жюль Верн. «80 000 километров под водой».)

Известен опыт составления физических задач на основе изобразительного материала, в частности диафильмов. Задачи, составленные на основе диафильмов, могут предполагать объяснение механизма различных явлений, установление причинно-следственных связей, описание рисунков или схем, сопоставление явлений и т. п. Диафильмы позволяют составлять качественные и количественные задачи, задачи с политехническим содержанием, формулировать задания различной степени трудности. Приведем в качестве примера несколько задач, составленных на материале диафильмов.

1. Как устроена установка для электростатической покраски металлов (диафильм «Статическое электричество»)?

2. Айсберг объемом 5000 м^3 плавает в морской воде. Определите объем его подводной и надводной частей (диафильм «Плавание тел», кадр 12).

3. Указать на кадре 6 (диафильм «Электромагнитные явления») железный, стальной и медный цилиндрики. Проделать дома опыт, изображенный в кадре.

При решении таких задач можно использовать следующие методические приемы:

1) задача формулируется на основе изображения в кадре без надписи; надпись проецируется с целью проверки решения задачи;

2) задача формулируется без показа кадра; кадр проецируется для оказания помощи в выполнении задания;

3) кадр проецируется на доску; вызванный к доске ученик мелом дополняет или изменяет части рисунка в соответствии с поставленной задачей;

4) учащимся предлагается начертить упрощенные схемы установок, электрических цепей, приборов, показанных в кадре.

Задачи по физике могут быть использованы для ознакомления учащихся с достижениями советской науки и техники. Например: «Саяно-Шушенская ГЭС мощностью 6,4 млн. кВт должна вырабатывать в год 23,5 млрд. кВт · ч электроэнергии. Какую массу природного газа нужно сжечь, чтобы получить такое же количество энергии? Сравнить мощность этой гидроэлектростанции с мощностью Днепрогэс им. В. И. Ленина». Такие задачи можно составлять на основе сведений из периодической печати, радио- и телепередач, справочной литературы. Их анализ целесообразно сопровождать кратким рассказом, демонстрацией плакатов, вырезок из газет и журналов.

Задачи по физике можно использовать как один из путей ознакомления учащихся с конкретным производством. Для этого условия задач, имеющихся в различных сборниках, можно несколько видоизменить, используя сведения о местных промышленных предприятиях. Можно также составлять новые задачи, построенные на местном материале. Такие задачи знакомят учащихся с новыми производственными фактами, раскрывают сущность производственных процессов, а также опираются на сведения, известные учащимся из личного опыта, экскурсий, бесед с родителями. Например: «С какой скоростью подгребается сено механическими граблями, рабочий захват которых 3,8 м, если за 2 ч работы убрано 7,6 га?»

Последовательность составления задач может быть такой: к изучаемому физическому материалу подбираются местные производственные факты; выдвигается вопрос задачи, в соответствии с которым подбираются необходимые данные; формулируется текст задачи.

Эффективным дидактическим средством является составление физических задач учащимися. Возможны различные методические приемы организации работы с учащимися по составлению физических задач.

1. Составление учащимися задач, аналогичных решенным в классе.

2. Составление задач, обратных решенным в классе.

Так, после решения в классе задачи: «Камень брошен с высоты 6 м горизонтально со скоростью 20 м/с. Определить дальность полета камня» учащиеся могут составить следующие задачи:

1) мальчик ныряет в воду с крутого берега высотой 4 м, имея после разбега скорость 5 м/с. На каком расстоянии от берега он погрузится в воду?

2) мяч, брошенный горизонтально с высоты 1,5 м над землей, упал на расстоянии 6 м от места бросания. Определить скорость бросания мяча.

3. В классе решается задача в буквенном виде, а учащимся предлагается составить и решить конкретизированную задачу с определенным сюжетом и соответствующими числовыми значениями физических величин. Например: «Тело массой m начинает двигаться с ускорением a. Определить силу тяги, если коэффициент трения μ». Учащиеся могут составить следующую задачу: «Автобус массой 5 т начинает двигаться с ускорением 0,5 м/с^2. Определить силу тяги, развиваемую двигателями, если коэффициент сопротивления движению 0,2».

4. Учащимся предлагается видоизменить ситуацию, описанную в задаче, рассмотреть протекание физических процессов при других условиях. Например: «Резисторы R1=4 Ом и R2=6 Ом соединены последовательно. В резисторе R1 выделилось 240 Дж теплоты. Сколько теплоты выделится за это время в резисторе R2?» Учащиеся могут составить и решить подобную задачу для параллельного соединения резисторов.

5. Составление учащимися задач на основе уравнений, полученных при изучении новой темы (например: $Q=cm(t_2-t_1)$, $F=P+ma$, $F_т=\mu P+ma$, $E=U+Ir$).

Составление задач способствует развитию мышления учащихся, формированию навыков в применении знаний при решении практических задач, выявляет глубину усвоения учебного материала.

Тема 13. Контрольные работы по физике

Цели, задачи и тематика контрольных работ по физике. Стандартизация условий проверки знаний при выполнении контрольной работы. Качественные и количественные критерии оценки контрольных работ.

В практике преподавания физики наряду с устной проверкой знаний учащихся широко применяется письменная проверка. Письменная проверка знаний обладает следующими особенностями: она объективнее устной проверки, требует от учащихся большей точности в выражении своих знаний и полной самостоятельности, позволяет легче осуществить равенство меры выявления знаний учащихся, способствует развитию навыков письменной речи и дает экономию времени (проверяются знания всех учащихся класса, увеличивается число проверок).

Одним из видов письменной проверки знаний по физике являются контрольные работы. Они позволяют не только выявить фактические знания, но и определить уровень усвоения различными по успеваемости группами учащихся.

Контрольные работы являются средством текущей, тематической и итоговой проверки знаний. Для текущей проверки знаний проводятся кратковременные контрольные работы (рассчитанные на 15—20 мин). Их целью является проверка знаний учащихся по текущему материалу, понимание ими физической сущности изучаемого материала. В такие контрольные работы включаются нетрудоемкие расчетные задачи, качественные вопросы и задачи, а также несложные экспериментальные задания (измерение длин, взвешивание тел, определение коэффициента трения, фокусного расстояния линзы и т. п.).

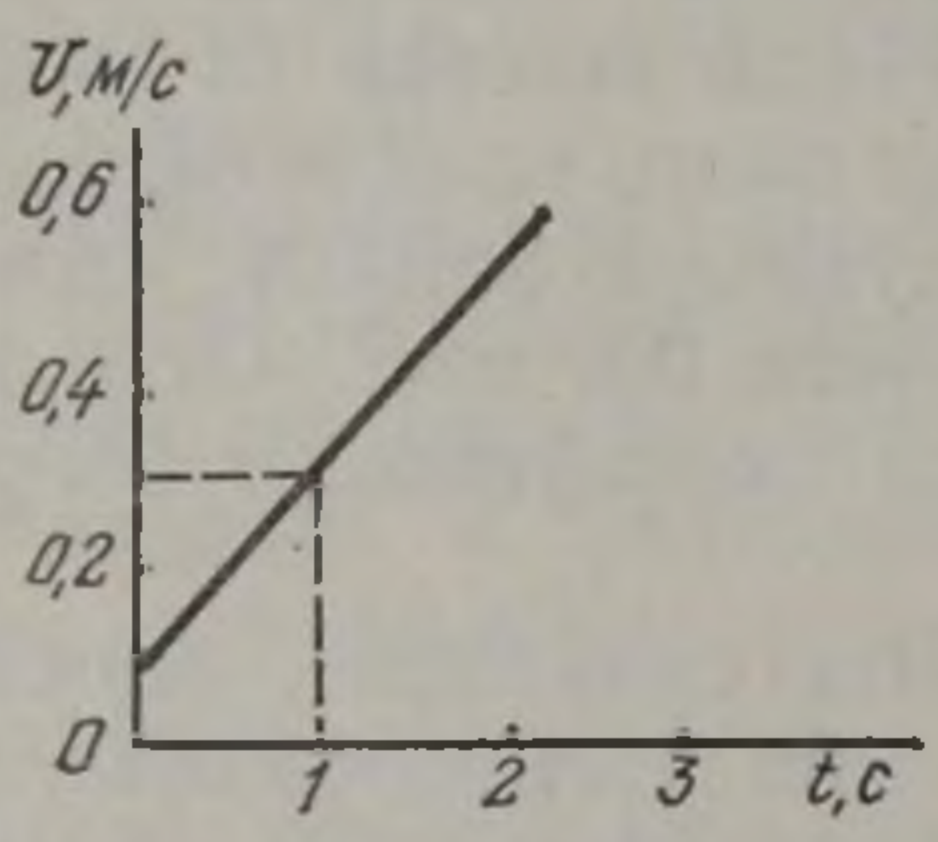


Рис. 26

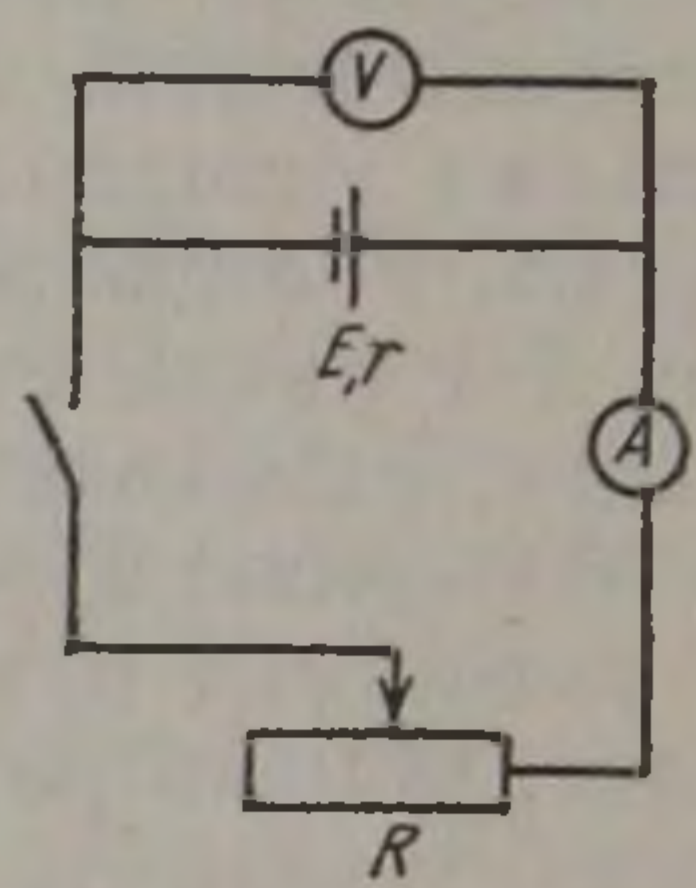


Рис. 27

Приведем в качестве примера вопросы текущей контрольной работы по теме VII класса «Удельная теплоемкость. Расчет количества теплоты».

1. Теплоемкость чайника 185 Дж/°С. Что это значит?

2. Какое количество теплоты необходимо для нагревания от 15 до 25 °С воды, наполняющей бассейн емкостью 1000 м^3?

3. Алюминиевую и серебряную ложки одинаковой массы опустили в кипяток. Одинаковой ли стала их температура? Равное ли количество теплоты они получили от воды? Ответ объяснить.

Текущие контрольные работы по физике можно провести в форме физического диктанта. Для этого необходимо составить контрольный текст в виде системы вопросов или логически не законченных фраз, которые учащиеся должны дописать. Например, диктант, предложенный с целью проверки усвоения учащимися VIII класса графического изображения равнопеременного движения, может иметь следующее содержание.

1. Тело, график скорости движения которого показан на рис. 26, имеет начальную скорость...
2. Ускорение этого тела равно...
3. Уравнение скорости движения тела имеет вид...
4. Перемещение тела за 4 с равно...
5. Уравнение движения тела имеет вид...

В ряде случаев текущие контрольные работы можно проводить с использованием средств программированного контроля. Для этого нужно подобрать систему вопросов по данной теме и после каждого вопроса записать 3—5 правдоподобных ответов, среди которых один правильный, остальные неточные, неполные или неправильные. Учащийся должен ответить на вопрос и назвать правильный, по его мнению, ответ.

Приведем несколько заданий такого типа из контрольной работы по теме IX класса «Закон Ома для полной цепи».

1. Сравнить показания вольтметра в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 27, при замкнутом (U_1) и разомкнутом (U_2) ключе. (1. $U_1=U_2$. 2. $U_1>U_2$. 3. $U_1<U_2$.)

2. Как изменится показание вольтметра (рис. 27, ключ замкнут) при перемещении ползунка реостата влево? (1. Не изменится. 2. Увеличится. 3. Уменьшится.)

3. Во сколько раз уменьшится сила тока в цепи (рис. 27), если сопротивление R реостата увеличить в 3 раза? Известно, что $R=r$. (1. В 3 раза. 2. В 2 раза. 3. В 4 раза.)

Проверку контрольных работ можно осуществить с помощью карточек с шифром, перфокарт, трафаретов, а также контролирующих машин.

После изучения крупных тем и разделов курса физики (например, «Законы сохранения», «Основы молекулярно-кинетической теории», «Геометрическая оптика» и т. п.) проводятся итоговые контрольные работы. Они являются средством тематической и итоговой проверки знаний учащихся и направлены на осмысливание структуры и внутренней логики всей темы, на выявление усвоения обобщенных знаний. В итоговые контрольные работы включаются достаточно сложные (но посильные) вычислительные, графические и качественные задачи, а также вопросы теоретического характера. Задания контрольной работы должны быть различными по характеру и степени трудности. Это позволит выявить уровни усвоения учебного материала всеми учащимися класса. Содержание заданий может соответствовать трем уровням усвоения знаний, которых учащиеся достигают в процессе обучения физике.

1-й уровень — знание основных положений теории, фактов, законов, определений понятий, формул, единиц физических величин и др. (например: «Что вы знаете о диффузии?», «Изменятся ли молекулы воды при превращении ее в пар?»).

2-й уровень — умение применять формальные знания в простейших, знакомых учащимся условиях (например: «Как объяснить возникновение силы упругости при растяжении шнура?»).

3-й уровень — умение применять знания в видоизмененной ситуации, в новых, незнакомых условиях, требующих некоторой самостоятельной переработки знаний (например: «В шахту опускается равноускоренно бадья, масса которой 280 кг. В первые 10 с она проходит 35 м. Чему равен вес бадьи при равноускоренном спуске?»).

В содержание контрольной работы могут включаться комбинированные задачи, требующие знания нескольких тем и разделов курса физики, а также различные дополнительные задачи для тех учащихся, которые быстро справились с основным заданием.

Приведем пример одного из шести вариантов итоговой контрольной работы по теме VIII класса «Применения законов динамики».

1. Железнодорожная дрезина, движущаяся равномерно, начи-

нает тормозить и останавливается. Изобразить графически зависимость скорости и ускорения от времени. Силу торможения считать постоянной.

2. Кран поднимает гранитную плиту объемом 0,4 м³ со дна реки. Определить натяжение троса в начале подъема, если ускорение при этом 0,2 м/с². Плотность гранита $2{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³.

3. Определить ускорение бруска при движении по наклонной плоскости, если угол наклона 30°, а коэффициент трения 0,2. Какую скорость приобрел брусок, если спуск происходил в течение 2 с?

В практике преподавания физики контрольные работы чаще всего проводятся по тем темам, в которых изучаются количественные связи между величинами, и значительно реже — по темам, в которых рассматривается лишь качественная картина явлений. Задания контрольных работ по таким темам могут включать схемы установок, описание явлений и их объяснение и т. п. Так, в контрольную работу по теме VII класса «Электромагнитные явления» можно включать задания на определение направления силы, действующей на проводник с током в магнитном поле; на выявление условий возникновения и определение направления индукционного тока; описание устройств электромагнитных приборов и т. п.

Итоговые контрольные работы можно проводить с использованием программированных заданий. Содержание и методика их проведения хорошо и полно изложены в работах В. Г. Разумовского и А. Е. Гуревича.

Контрольную работу следует проверить к следующему уроку, на котором проводится анализ допущенных ошибок. При проверке делают замечания на полях тетради, неверные решения подчеркивают и в конце выставляют оценку.

При оценке контрольных работ рекомендуется руководствоваться следующими критериями оценки знаний по физике, учитывая допущенные учениками ошибки и недочеты.

Грубыми являются ошибки, свидетельствующие, что учащийся: не усвоил основные физические теории и законы или не умеет применять их при решении задач различных типов; не знает формул, графиков, схем или не умеет применять их к решениям задач; не знает единиц физических величин или не умеет пользоваться ими; к грубым ошибкам относятся также неправильно сформулированные вопросы задачи или неверные объяснения хода ее решения, незнание приемов решения задач, аналогичных ранее решенным в классе, а также ошибки, свидетельствующие о неправильном понимании условия задачи или истолковании решения.

Негрубыми ошибками являются: неточность чертежа, графика, схемы; пропуск или неточное написание наименования единиц физических величин; выбор нерационального хода решения.

К недочетам относятся: нерациональные записи при вычислениях, нерациональные приемы вычислений, преобразований и решений задач; отдельные погрешности в формулировке вопроса или ответа; отдельные ошибки вычислительного характера; небрежное выполнение записей, чертежей, схем, графиков.

Оценка «5» ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов.

Оценка «4» ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета или не более двух-трех недочетов.

Оценка «3» ставится в том случае, если ученик правильно выполнил не менее 2/3 всей работы или допустил: не более одной грубой ошибки и двух недочетов, или не более одной грубой и одной негрубой ошибки, или не более двух-трех негрубых ошибок, или одну негрубую ошибку и три недочета, или при отсутствии ошибок, или не более двух-трех недочетов.

Оценка «2» ставится, когда число ошибок и недочетов превосходит норму, при которой может быть выставлена оценка «3», или если правильно выполнено менее 2/3 всей работы.

Оценка «1» ставится, если ученик совсем не выполнил работу.

В контрольной работе не только выставляется оценка, но и даются рекомендации, как ученику улучшить знания по данному вопросу. При анализе работы выделяются типичные ошибки, допущенные многими учащимися, и даются соответствующие разъяснения.

II. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО РАЗДЕЛАМ КУРСА ФИЗИКИ

1. МЕХАНИКА

1.1. Кинематика прямолинейного движения

Основные законы и формулы

При движении точки радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, и координаты точки, представляющие собой проекции радиус-вектора на соответствующие оси, изменяются и являются функциями времени:

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t);\ x=x(t);\ y=y(t). \qquad (1.1)$$

Длина пути s также является функцией времени:

$$s=s(t). \qquad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) называют *кинематическими уравнениями движения точки.*

Если за время Δt точка переместилась на расстояние Δs, то ее средняя скорость перемещения за это время

$$\mathbf{v}_{\text{ср}}=\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}.$$

Скорость в данный момент времени — мгновенную скорость — можно определить как предел этого отношения при условии, что $\Delta t \longrightarrow 0$:

$$\mathbf{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{s}}{\Delta t}.$$

Если за время Δt мгновенная скорость точки изменилась от $\mathbf{v}_0$ до $\mathbf{v}$, то среднее ускорение точки за это время

$$\mathbf{a}_{\text{ср}}=\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \qquad (1.3)$$

Ускорение определится как предел отношения (1.3):

$$\mathbf{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Простейшим видом механического движения является прямолинейное движение точки с постоянным ускорением. Для такого движения

$$|\mathbf{r}|=x=s;\ \mathbf{a}=\text{const}.$$

Законы изменения скорости и перемещения с течением времени имеют вид:

$$v = v_0 + at; \tag{1.4}$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{1.5}$$

При равномерном движении скорость точки с течением времени не меняется ($v = v_0 = \text{const}$), и в уравнениях (1.4) и (1.5) нужно положить $a = 0$. При равноускоренном движении ($v > v_0$) во всех формулах кинематики следует считать $a > 0$, а при равнозамедленном $a < 0$. К равнопеременному движению относят движение тел под действием силы тяжести, если их перемещение h по вертикали, отсчитанное от поверхности Земли, мало по сравнению со средним расстоянием тела до центра Земли. При $h \ll R_З$ с достаточной степенью точности можно принять, что ускорение $g = 9{,}8$ м/с². Законы такого движения можно получить, если заменить в формулах (1.4) и (1.5) a на g и s на h.

Решение задач

Задачи по кинематике прямолинейного движения можно условно разбить на три группы: задачи по кинематике равномерного прямолинейного движения; задачи по кинематике равнопеременного прямолинейного движения; графические задачи.

1. Решение задач первых двух групп осуществляется аналитическим методом и имеет много общего. При решении этих задач можно выделить следующие этапы. Прежде всего делают схематический чертеж, на котором изображают систему отсчета и указывают траекторию движения точки. Начало координат системы удобно совмещать с положением движущейся точки в начальный рассматриваемый момент времени, а оси направлять так, чтобы приходилось делать как можно меньше разложений векторов. На чертеже следует отметить все кинематические характеристики движения: перемещение, скорость, ускорение. Если условие задачи предполагает различный характер движения на разных участках, то следует весь путь разбить на отдельные участки и рассматривать движение на них по отдельности. После того как выполнен чертеж, с помощью кинематических уравнений устанавливают связь между величинами. Для расчетов чаще всего удобно пользоваться скалярной формой уравнений, поэтому необходимо перейти от векторной записи уравнений к скалярной. Скалярную форму уравнений можно получить, проецируя все векторы, входящие в кинематические уравнения, на оси координат выбранной системы. На основании дополнительных условий задачи составляют вспомогательные уравнения. Составив полную систему кинематических уравнений, решают ее относительно искомых величин.

При решении задач на движение тел, брошенных вертикально вверх, следует обратить внимание на то, что уравнения скорости и перемещения дают общую зависимость v и h от t для всего времени движения и справедливы не только для замедленного подъема вверх, но и для дальнейшего равноускоренного падения тела. При этом время падения тела в исходную точку равно времени подъема на максимальную высоту, а скорость падения равна начальной скорости бросания.

Пример 1. Автомобиль проходит первую треть пути со скоростью v_1 а оставшуюся часть пути со скоростью $v_2=50$ км/ч. Определить скорость на первом участке пути, если средняя скорость на всем пути $v_{ср}=37{,}5$ км/ч.

Решение. Весь путь разбиваем на два отрезка s_1 и s_2. Скорость и время движения соответственно v_1, v_2, t_1 и t_2. Средняя скорость определяется как частное от деления всего пройденного пути на время, за которое этот путь пройден:

$$v_{ср} = \frac{s}{t}.$$

Для каждого отрезка пути имеем:

$$s_1=v_1t_1; \quad s_2=v_2t_2.$$

На основании условия задачи запишем следующие вспомогательные уравнения:

$$s=s_1+s_2; \; t=t_1+t_2;$$

$$s_1 = \frac{s}{3}; \quad s_2 = \frac{2\,s}{3}.$$

Решив полученную систему уравнений относительно v_1, получим

$$v_1 = \frac{v_{ср}v_2}{3\,v_2 - 2\,v_{ср}} = 25 \text{ км/ч}.$$

Пример 2. Поезд метро проходит перегон $s=2$ км за $t=2$ мин 20 с. Максимальная скорость поезда $v=60$ км/ч. В начале и конце перегона поезд движется с постоянными ускорениями, равными по абсолютной величине. Определить эти ускорения.

Решение. Весь путь удобнее разбить на три участка: s_1, s_2 и s_3. Запишем для каждого участка основные уравнения:

$$s_1 = \frac{at_1^2}{2}; \; v_1 = at_1 \;\; (v_1 = v);$$

$$s_2 = v_2t_2; \; v_2 = v;$$

$$s_3 = vt_3 - \frac{at_3^2}{2}; \; v_3 = v - at_3.$$

Кроме этих уравнений, можно записать вспомогательные уравнения:

$$s=s_1+s_2+s_3; \quad t=t_1+t_2+t_3.$$

Решив полученную систему уравнений относительно a, получим:

$$a = \frac{v^2}{vt - s}; \; a_1 = 0{,}83 \text{ м/с}^2; \; a_2 = -0{,}83 \text{ м/с}^2.$$

Пример 3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Определить максимальную высоту подъема тела и время полета.

Решение. Начало координат удобно совместить с точкой бросания, а координатную ось направить вертикально вверх. Время можно отсчитывать с момента бросания, тогда

$$y = v_0t - \frac{gt^2}{2}; \; v = v_0 - gt.$$

Максимальную высоту H найдем следующим образом:

$$H = v_0\,t_п - \frac{gt_п^2}{2},$$

где $t_п$ — время подъема тела. Это время определяем из условия, что в верхней точке траектории скорость равна нулю: $0 = v_0 - gt_п$, откуда $t_п = \frac{v_0}{g}$. Высота $H = \frac{v_0^2}{2g}$.

Из условия, что в момент падения тела координата его равна нулю ($y=0$), находим время полета:

$$v_0 t - \frac{gt^2}{2} = 0; \quad t = \frac{2v_0}{g}.$$

Таким образом, $t=2t_п$. Время падения тела равно времени его подъема.

2. Для решения графических задач необходимо знать графики простейших элементарных функций (уравнения прямой линии и параболы) и уметь их исследовать. Графические задачи по кинематике прямолинейного движения можно разбить на две подгруппы. В задачах первой подгруппы требуется по данному графику зависимости одних кинематических величин построить график зависимости других величин. При решении таких задач прежде всего, проанализировав данный график, устанавливают характер заданного движения и представляют данную зависимость в виде уравнения. Определяют искомую зависимость и, исследовав ее, строят нужный график. Задачи второй подгруппы предполагают графическое отображение условий для последующего определения на графике той или иной величины. При этом следует обратить внимание на рациональный выбор графика, на котором будет удобно представить условия задачи.

Пример 4. Точка движется вдоль оси Ox со скоростью v_x. Зависимость v_x от времени t представлена графиком (рис. 1.1). Начертить примерный график зависимости ускорения движения a от времени.

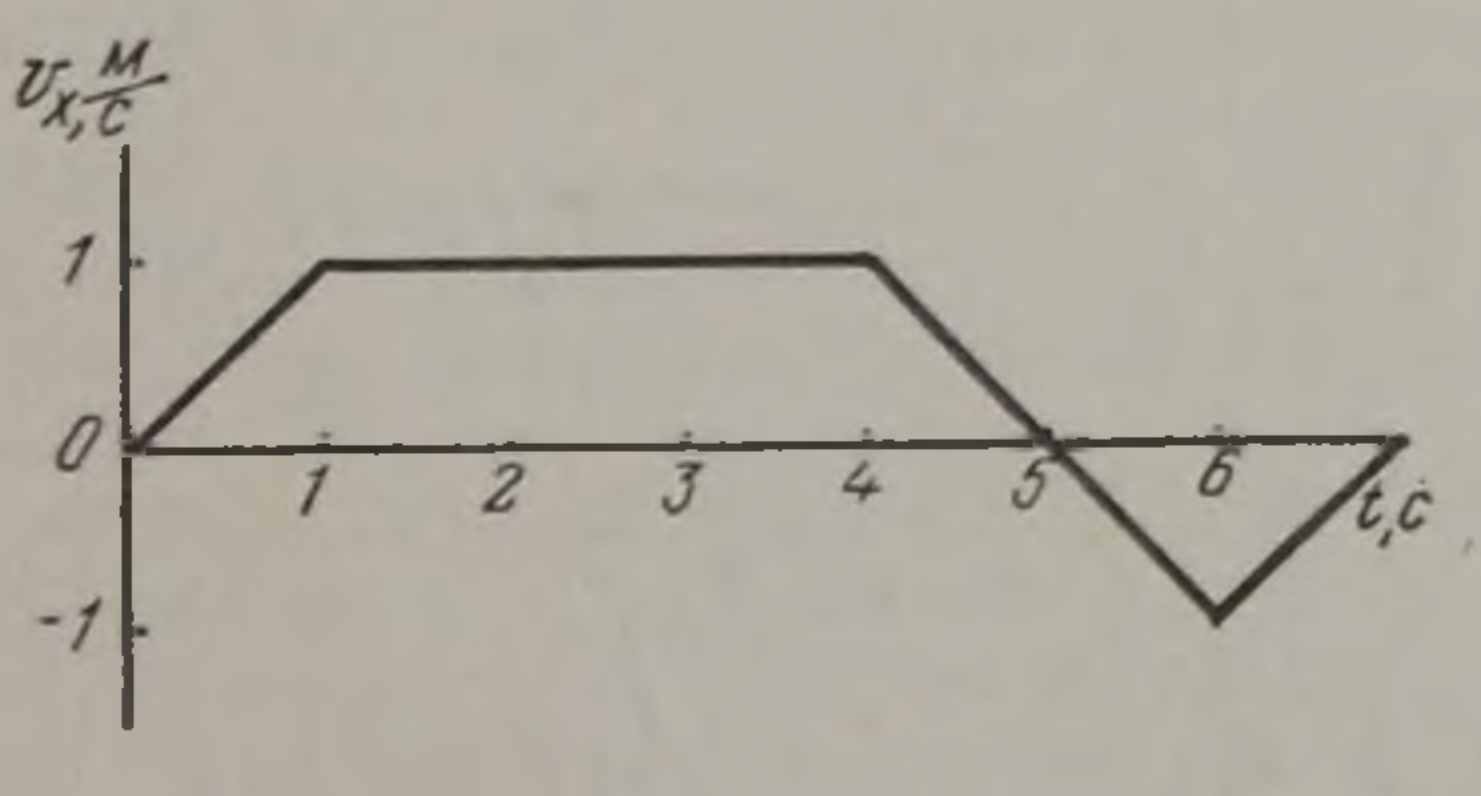


Рис. 1.1

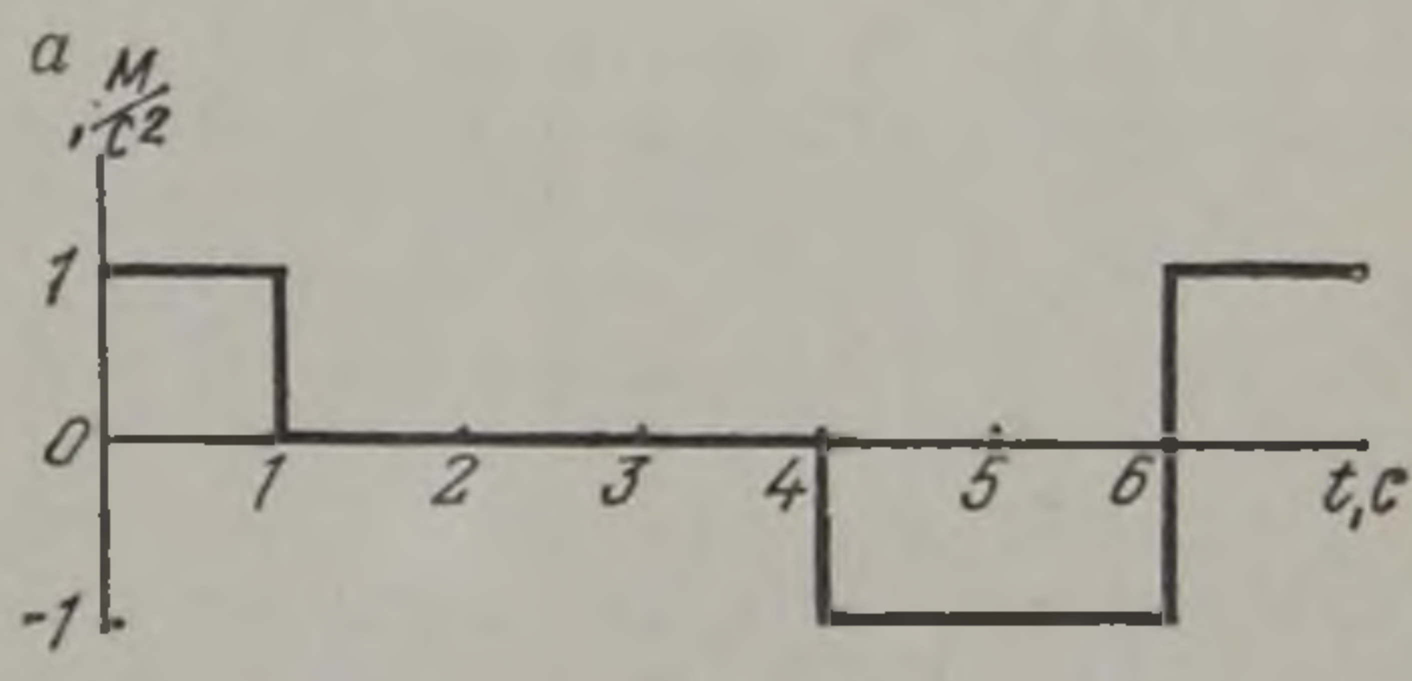


Рис. 1.2

Решение. График скорости следует разбить в данном случае на пять участков. Разбиение производится в зависимости от характера движения. На первом участке движение равноускоренное: $v_x=a_1t$, $a_1=1$ м/с^2; на втором равномерное: $v_x=\text{const}$, $a_2=0$; на третьем равнозамедленное: $v_x=v_2+a_3t$, $a_3=-1$ м/с^2. На четвертом участке скорость движения v_x снова возрастает по абсолютной величине, но направление движения обратное: $v_x=a_4t$, $a_4=-1$ м/с^2. На пятом участке точка движется также в обратном направлении, но уже равнозамедленно: $v_x=-v_4+a_5t$, $a_5=1$ м/с^2. Проанализировав характер движения точки на каждом участке, можно приступить к построению графика зависимости a от t. График $a(t)$ представлен на рис. 1.2.

Пример 5. График ускорения точки имеет вид, показанный на рис. 1.2. Чему равна средняя скорость движения точки за время $t=7$ с, если ее начальная скорость была равна нулю?

Решение. Средняя скорость движения точки

$$v_{ср} = \frac{s}{t},$$

где s — полный путь, пройденный точкой за время t.

Величину пути s можно найти, разбив весь путь на отдельные участки:

$$s = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5;$$

$$s_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} \quad (v_0 = 0); \; s_1 = 0{,}5 \text{ м};$$

$$s_2 = v_2 t_2 = 3 \text{ м}.$$

Следует обратить внимание на то, что в промежутке времени от $t=4$ с до $t=6$ с необходимо выделить два участка пути s_3 и s_4, на которых характер движения различен. От $t=4$ с до $t=5$ с точка движется равнозамедленно с ускорением $a_3 = -1$ м/с^2, поэтому

$$s_3 = v_2 t_3 - \frac{a t_3^2}{2} = 0{,}5 \text{ м}.$$

От $t=5$ с до $t=6$ с движение точки равноускоренное, но происходит в обратном направлении по сравнению с предыдущими участками,

$$s_4 = \frac{a t_4^2}{2} = 0{,}5 \text{ м}.$$

На участке s_5 движение снова равнозамедленное, $s_5 = 0{,}5$ м. Весь путь $s = 5$ м, тогда

$$v_{ср} = \frac{s}{t} \approx 0{,}71 \text{ м/с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Расстояние между двумя городами автомашина проехала со скоростью $v_1 = 60$ км/ч, на обратном пути ее скорость составила $0{,}5\ v_1$. Чему равна средняя скорость автомашины в течение всего рейса?

1.2. Материальная точка движется прямолинейно. На расстоянии 1000 м от исходной точки она поворачивает и, пройдя в противоположном направлении 1200 м, останавливается. Чему равны окончательное перемещение точки и пройденный путь?

1.3. Человек, идущий с постоянной по величине и направлению скоростью v, проходит под фонарем, висящим на высоте H над землей. Найти скорость перемещения по земле края тени от головы человека, если его рост h.

1.4. По пересекающимся под углом α шоссейным дорогам движутся две автомашины с постоянными скоростями $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Определить величину и направление скорости одного автомобиля относительно другого. Через какое время после встречи на перекрестке расстояние между машинами будет равно s?

1.5. Расстояние между двумя станциями метрополитена 1,5 км. Первую половину этого расстояния поезд проходит равноускоренно ($a_1 = 0{,}13$ м/с^2), вторую — равнозамедленно ($a_2 = -0{,}13$ м/с^2). Какова максимальная скорость поезда?

1.6. Тело, двигаясь равноускоренно из состояния покоя, проходит за четвертую секунду от начала движения 7 м. Какой путь оно пройдет за первые 10 с?

1.7. Траектория движения точки задана уравнениями $x = 2 + 8t$ и $y = 3 + 6t$ (x и y измеряются в метрах, t — в секундах). Какова скорость движения точки?

1.8. Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки через интервал времени 2 с. Начальная скорость обоих тел одинакова и равна 20 м/с. На какой высоте тела встретятся?

1.9. Два тела свободно падают с разных высот и достигают земли одновременно. Время падения первого тела 2 с, второго 1 с. На какой высоте было первое тело, когда второе начало падать?

1.10. В последнюю секунду свободного падения тело прошло половину своего пути. С какой высоты и сколько времени оно падало?

1.11. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через 4 с. Какова была начальная скорость тела?

1.12. Лифт движется с ускорением a. Пассажир, находящийся в лифте, роняет книгу. Чему равно ускорение падения книги относительно пола лифта, если лифт движется: а) вверх; б) вниз?

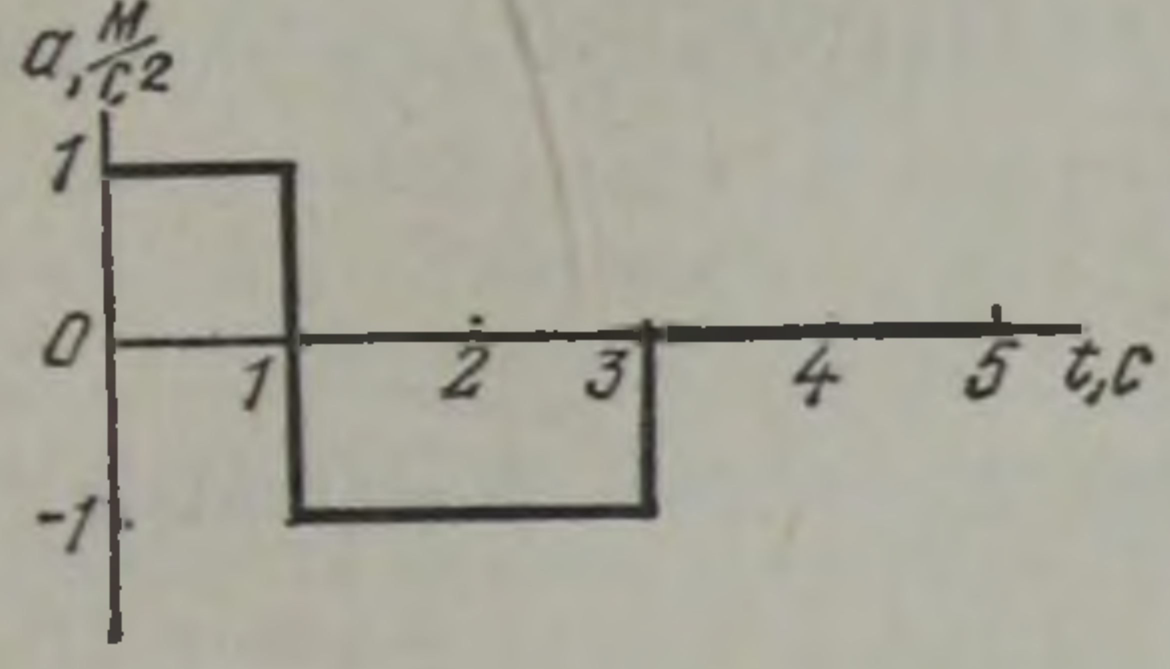


Рис. 1.3

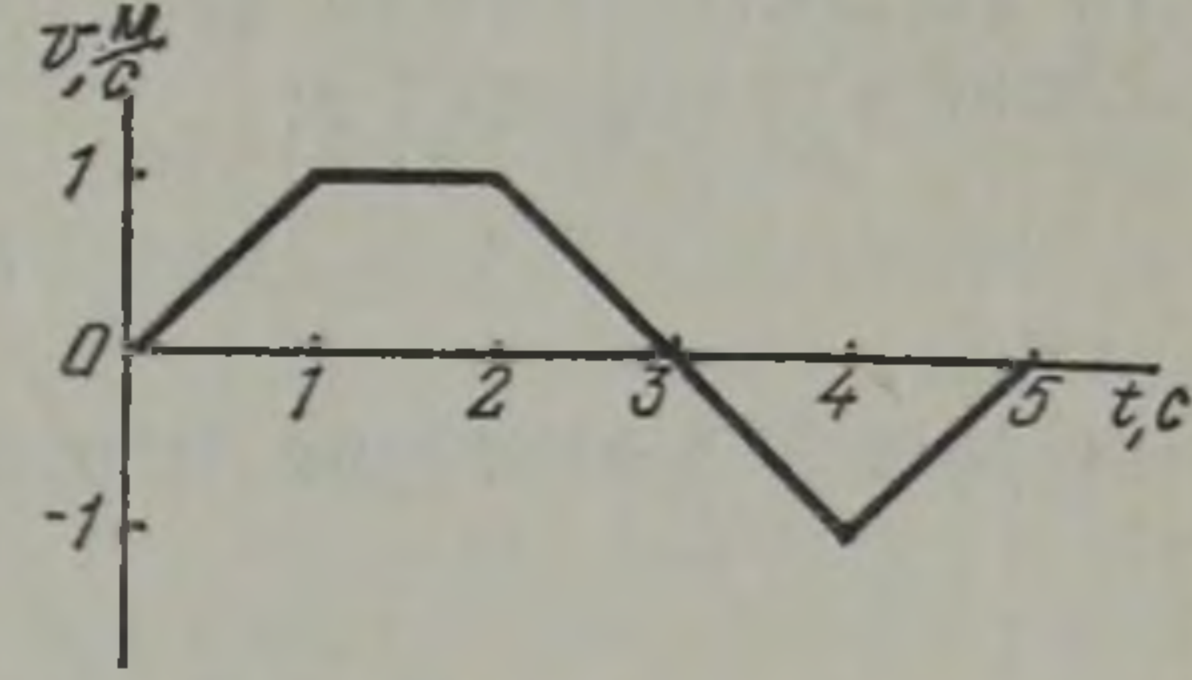


Рис. 1.4

1.13. На рис. 1.3 представлен график зависимости ускорения движения тела от времени. Начертить график зависимости $v=f(t)$.

1.14. На рис. 1.4. представлен график зависимости $v(t)$. Построить графики зависимостей $a(t)$, $s(t)$, $s(v)$.

1.15. На рис. 1.5 представлены графики зависимости $v(t)$ двух тел. Насколько отличаются пути, пройденные телами за $t=2$ с?

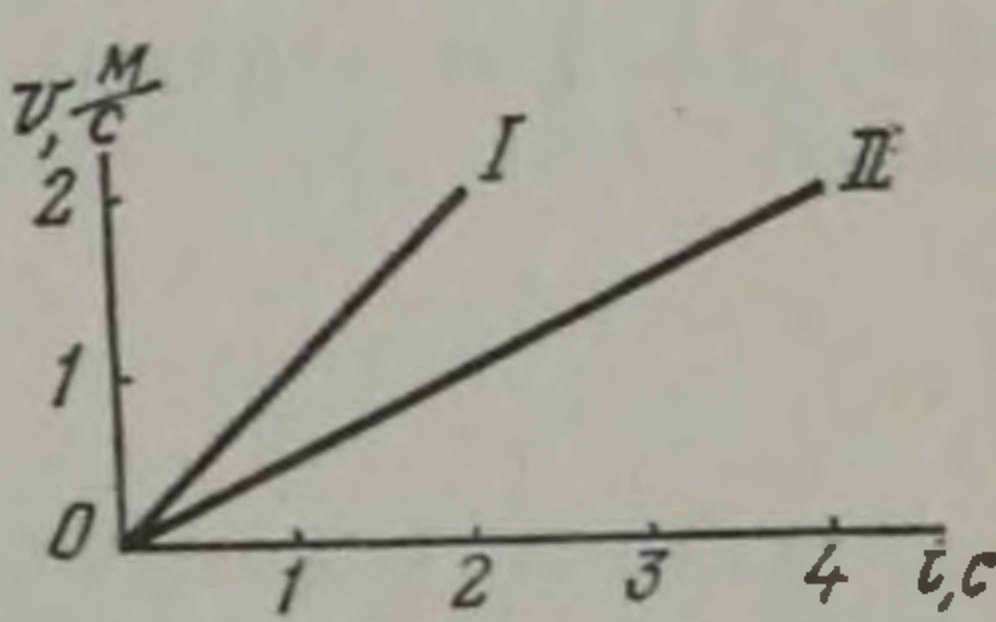


Рис. 1.5

1.16. Определить среднюю скорость движения тела за время $t=5$ с, если зависимость $a(t)$ имеет вид, представленный на рис. 1.3. Начальная скорость тела была равна нулю.

1.2. Кинематика криволинейного движения

Основные законы и формулы

Простейшим видом криволинейного движения является равномерное движение точки по окружности. При таком движении угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \text{const},$$

где φ — угол поворота.

Полное ускорение точки

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2},$$

при этом тангенциальное ускорение $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, нормальное (центростремительное) ускорение $a_n = \frac{v^2}{R}$.

В случае равномерного вращательного движения угловая скорость может быть выражена формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

где T — период обращения; ν — частота обращения.

Угловая скорость ω связана с линейной скоростью v соотношением

$$v = \omega R.$$

Для характеристики переменного вращательного движения вводят угловое ускорение ε:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

При равнопеременном вращательном движении ($\varepsilon = \text{const}$) будем иметь:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \ \varphi = \omega_0 + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Тангенциальное и нормальное ускорения могут быть выражены через угловую скорость ω и ускорение ε следующим образом:

$$a_\tau = \varepsilon R; \ a_n = \omega^2 R.$$

Решение задач

Задачи по кинематике криволинейного движения можно условно разбить на три группы: задачи о движении точки по окружности; задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси; задачи о движении тел, брошенных под углом к горизонту.

1. Решение задач по кинематике движения точки по окружности принципиально не отличается от решения задач по кинематике прямолинейного движения. Однако при этом следует учитывать связь между угловыми и линейными характеристиками движения.

Пример 1. Сравнить линейные скорости и центростремительные ускорения точек земной поверхности на экваторе и на широте $\varphi = 60°$. Радиус Земли R принять равным 6400 км.

Решение. Линейная скорость любой точки на экваторе

$$v_0 = \omega R = \frac{2\pi R}{T},$$

где $T = 24$ ч $= 86\,400$ с — период суточного вращения Земли.

Центростремительное ускорение определяется следующим образом:

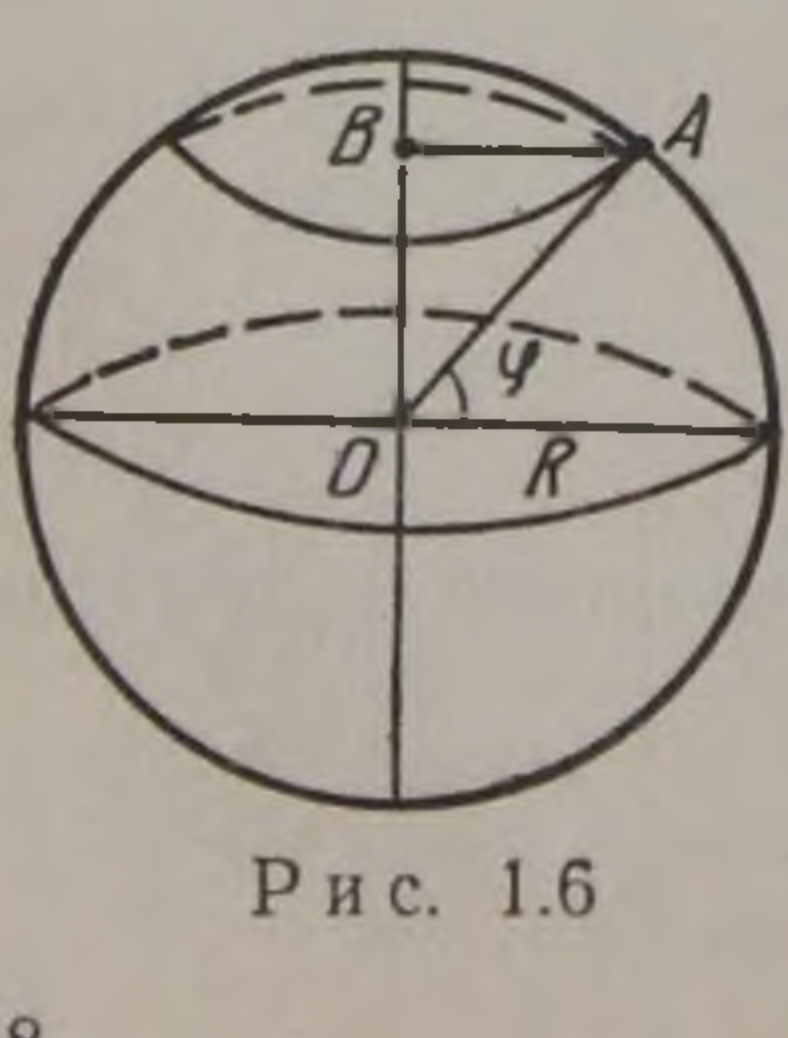


Рис. 1.6

$$a_0 = \frac{v_0^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

На широте φ (рис. 1.6) будем иметь:

$$v_\varphi = \omega R_\varphi = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T};$$

$$a_\varphi = \frac{v_\varphi^2}{R_\varphi} = \frac{4\pi^2 R\cos\varphi}{T^2}.$$

Чтобы сравнить величины линейных скоростей и центростремительных ускорений, необходимо найти следующие отношения:

$$\frac{v_0}{v_\varphi}=\frac{1}{\cos\varphi}=2;\quad \frac{a_0}{a_\varphi}=\frac{1}{\cos\varphi}=2.$$

2. Задачи на вращательное движение твердого тела решают путем составления кинематических уравнений на основании использования формул угловой скорости и углового перемещения. При этом необходимо иметь в виду, что угловое ускорение и угловая скорость являются векторными величинами. При равноускоренном вращении твердого тела направление вектора углового ускорения совпадает с направлением вектора угловой скорости и в формулах ускорение ε берется со знаком плюс. При равнозамедленном вращении угловое ускорение имеет обратное направление угловой скорости и в расчетных формулах берется со знаком минус.

Пример 2. Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon=2$ с$^{-2}$. Через 0,5 с после начала движения полное ускорение колеса $a=13{,}6$ см/с^2. Чему равен радиус колеса?

Решение. Полное ускорение

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}.$$

Используя формулы связи линейных и угловых характеристик, можно записать:

$$a_\tau=\varepsilon R;\ a_n=\frac{v^2}{R}=\omega^2 R.$$

Тогда

$$a^2=a_\tau^2+a_n^2=\varepsilon^2R^2+\omega^4R^2.$$

Угловую скорость определим так:

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t$$

но $\omega_0=0$, поэтому $\omega=\varepsilon t$. Следовательно,

$$a^2=\varepsilon^2R^2+\varepsilon^4t^4R^2=R^2(\varepsilon^2+\varepsilon^4t^4),$$

откуда

$$R=\frac{a}{\varepsilon\sqrt{1+\varepsilon^2t^4}}=6{,}1\text{ см}.$$

3. При решении задач на движение тел, брошенных под углом к горизонту, следует иметь в виду, что это движение можно рассматривать как результат наложения двух одновременных прямолинейных движений по горизонтали и по вертикали (по осям Ox и Oy). Поэтому решение задач этой группы удобно начинать с разложения вектора скорости и ускорения по осям Ox и Oy и затем составлять кинематические уравнения для каждого из указанных направлений. В большинстве задач предполагается, что движение тел происходит при отсутствии сопротивления воздуха и траекторией движения является парабола. При этом время движения тела по горизонтали (Ox) равно времени движения по вертикали (Oy).

Движение тел, брошенных горизонтально, можно рассматривать как частный случай движения тел, брошенных под углом $\alpha=0$.

Пример 3. С башни высотой $h=25$ м бросили камень со скоростью $v_0=15$ м/с под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определить: время полета камня; дальность полета камня в горизонтальном направлении; скорость полета камня в момент падения на землю; угол φ, который составит траектория движения камня с горизонтом в точке его падения на землю. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение. Сделав чертеж (рис. 1.7), выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены следующим образом: Ox — вдоль поверхности земли; Oy — по нормали к ней в сторону начального смещения камня. Сложное движение камня по параболе в данном случае можно представить как результат сложения двух прямолинейных дви-

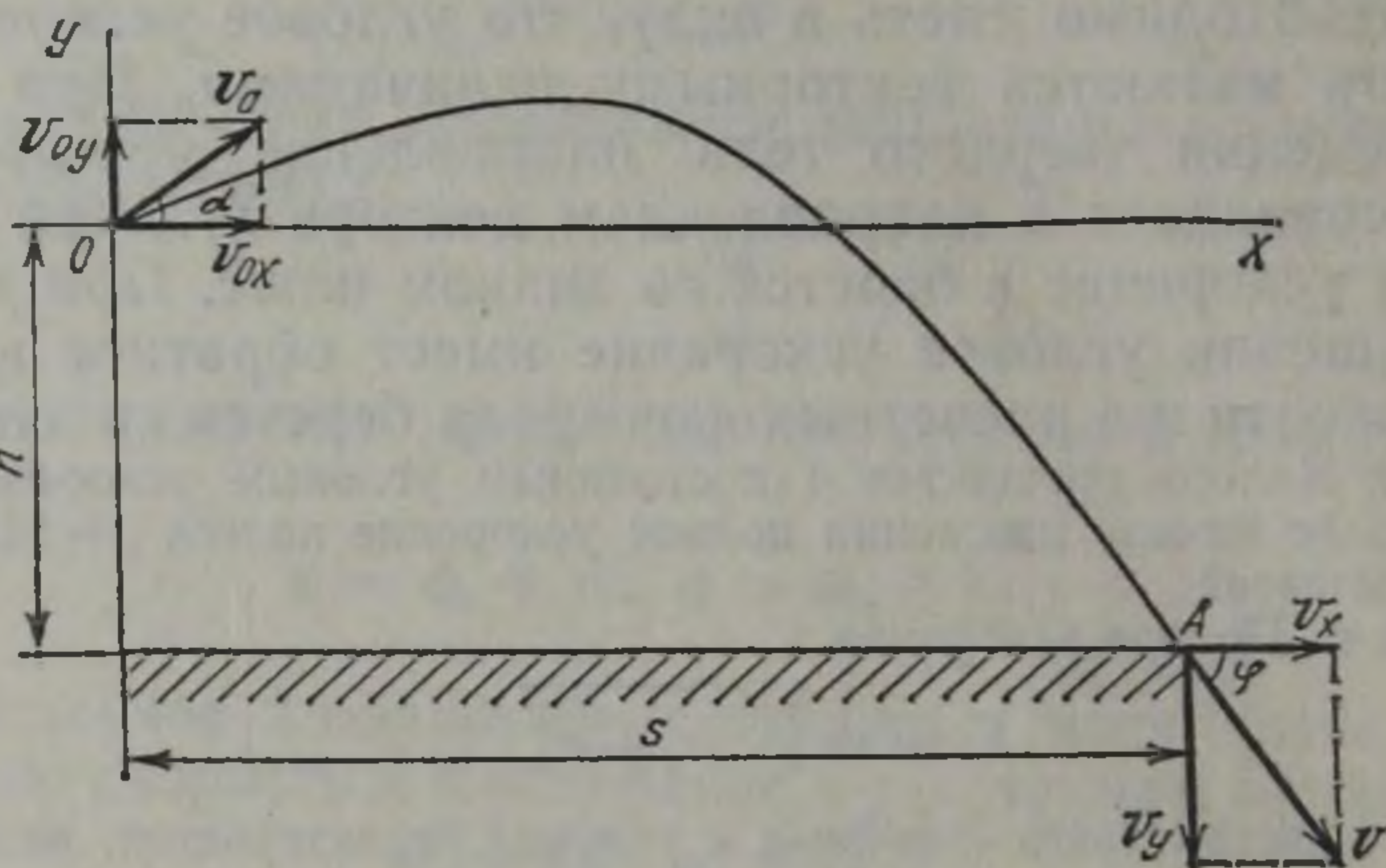


Рис. 1.7

жений: равномерного прямолинейного движения вдоль оси Ox и движения тела, брошенного вертикально вверх, вдоль оси Oy.

Составим уравнения скорости и перемещения для их проекций по каждому направлению:

$$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad x = v_0 \cos\alpha \cdot t;$$

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt, \quad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

В момент времени t, когда камень упадет на землю, его координаты $x=s$, $y=-h$. Тогда для определения t получаем уравнение

$$-h = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 3{,}16 \text{ с}.$$

Дальность полета камня s определим из уравнения

$$s = v_0 \cos\alpha t = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha + v_0 \cos\alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g} = 41{,}1 \text{ м}.$$

Скорость камня v в момент падения на землю можно выразить формулой

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

где

$$v_x = v_0 \cos\alpha; \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt = -\sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}.$$

Подставив вместо v_x и v_y их выражения, получим

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 26{,}7 \text{ м/с}.$$

Угол, составленный траекторией движения камня с горизонтом в точке падения найдем, используя чертеж (рис. 1.7):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_y}{v_x} = 1{,}8; \ \varphi = 61°.$$

Пример 4. Мяч, брошенный горизонтально, ударяется о стенку, находящуюся на расстоянии $s=5$ м от места бросания. Высота места удара мяча о стенку на $h_1=1$ м меньше высоты, с которой брошен мяч. С какой скоростью v_0 был брошен мяч и под каким углом φ он подлетает к стенке? Сопротивлением воздуха пренебречь.

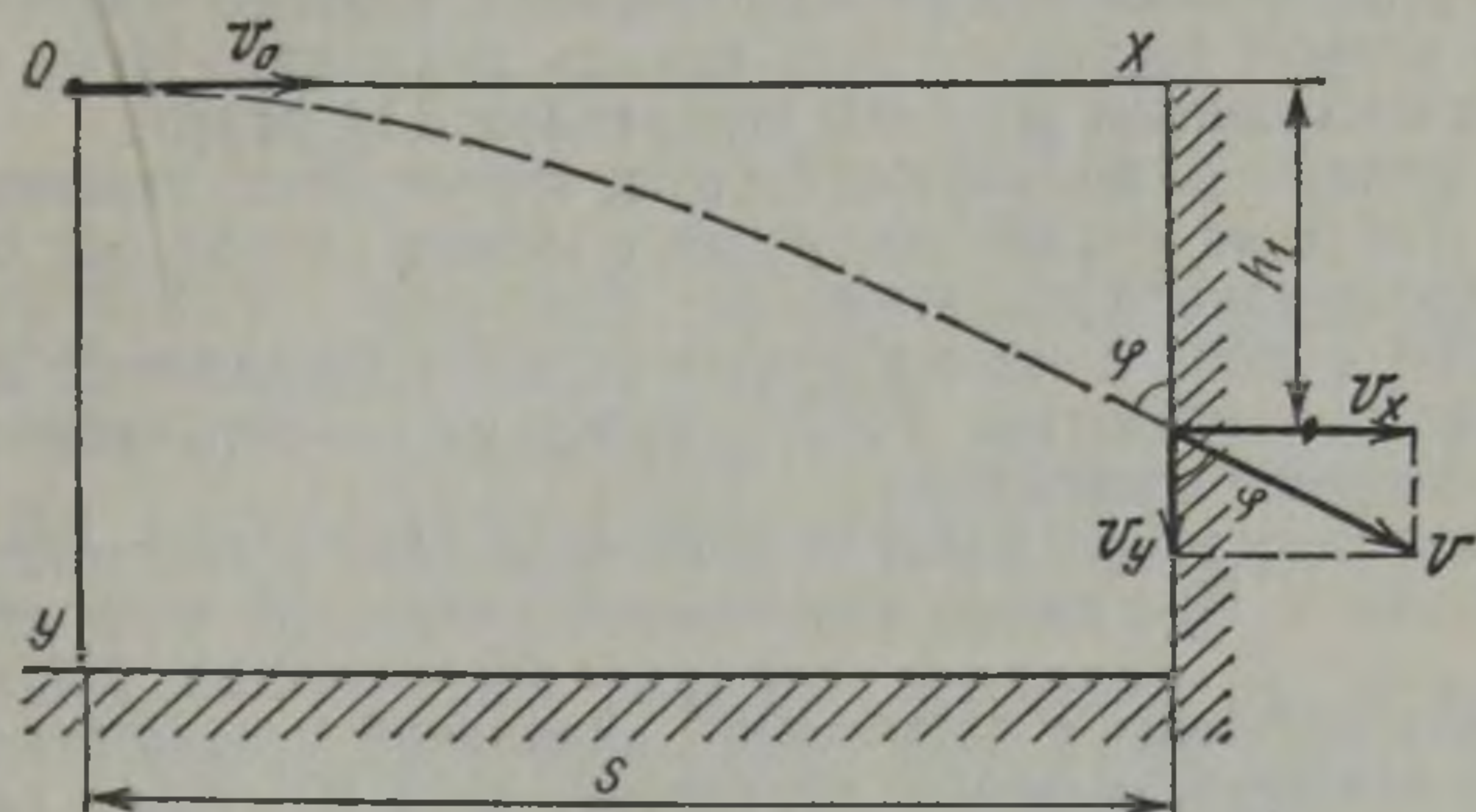


Рис. 1.8

Решение. Выбираем систему координат (рис. 1.8) так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания. Ось Ox направляем горизонтально в сторону бросания, Oy — вертикально вниз. Составляем уравнения скорости и перемещения для их проекций по выбранным направлениям:

$$v_x = v_0, \quad x = v_x t = v_0 t;$$

$$v_y = v_{0y} + gt, \quad y = v_{0y}t + \frac{gt^2}{2}.$$

Поскольку $v_{0y} = 0$, то $v_y = gt$ и $y = \frac{gt^2}{2}$. В момент удара о стенку $x = s$ и $y = h_1$, значит, $s = v_0 t$, $h_1 = \frac{gt^2}{2}$, откуда

$$v_0 = s\sqrt{\frac{g}{2h_1}} = 11{,}1 \text{ м/с}.$$

Угол φ определим из равенства

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y} = \frac{v_0}{\sqrt{2h_1 g}} = 2{,}5; \ \varphi = 68°\,12'.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.17. Определить радиус маховика, если при его вращении точки на ободе имеют скорость 6 м/с, а точки, находящиеся на 15 см ближе к оси,— скорость 5,5 м/с.

1.18. Во сколько раз угловая скорость часовой стрелки больше угловой скорости суточного вращения Земли?

1.19. С какой скоростью должен лететь самолет на экваторе с востока на запад, чтобы пассажирам этого самолета Солнце казалось неподвижно стоящим на небе?

1.20. Период обращения искусственного спутника Земли 88 мин, а его линейная скорость движения по орбите 7,8 км/с. На каком расстоянии от поверхности Земли расположена орбита спутника?

1.21. Чему равна линейная скорость движения точек земной поверхности на широте 54°?

1.22. Колесо, вращаясь равноускоренно, достигло угловой скорости 20 рад/с через 10 оборотов после начала вращения. Чему равно угловое ускорение колеса?

1.23. Точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением 0,1 м/с^2. При этом линейная скорость вращения точки к концу пятого оборота стала равной 79,2 см/с. Чему равен радиус окружности?

1.24. Найти угол, составляемый направлением полного ускорения с радиусом колеса, к концу первой секунды после начала движения. Радиус колеса 10 см. Оно вращается с постоянным угловым ускорением 3,14 рад/с^2.

1.25. Точка движется по окружности с постоянным тангенциальным ускорением 0,5 м/с^2. Найти ее полное ускорение в момент, когда она пройдет 0,1 длины окружности после начала движения.

1.26. На какой высоте h вектор скорости тела, брошенного под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 20 м/с, будет составлять с горизонтом угол 30°? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.27. Необходимо с земли попасть камнем в цель с расстояния s. Цель расположена на высоте h. При какой наименьшей начальной скорости камня можно это сделать?

1.28. Два тела брошены с одинаковой начальной скоростью 10 м/с из некоторой точки под разными углами к горизонту: 45 и 30°. Чему равно расстояние между телами через 2 с?

1.29. Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, равна 10 м, время полета 5 с. Какова высота наибольшего подъема тела?

1.30. Тело брошено со скоростью 14,7 м/с под углом 30° к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорение тела через 1,25 с после начала движения. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.31. Тело брошено со скоростью 10 м/с под углом 45° к горизонту. Чему равен радиус траектории движения тела через 1 с после начала движения? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.32. С самолета, летящего на высоте 3500 м со скоростью 360 км/ч, сброшен груз. Как будет направлена скорость груза на высоте 3000 м?

1.33. Радиус кривизны траектории движения тела, брошенного горизонтально, через 3 с после начала движения был равен 305 м. Какова начальная скорость тела? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.34. Тело, брошенное со скоростью 12 м/с под углом 45° к горизонту, упало на землю на расстоянии s от места бросания. С какой высоты надо бросить тело в горизонтальном направлении, чтобы при той же начальной скорости оно упало на то же место?

1.3. Динамика поступательного движения

Основные законы и формулы

Динамика изучает движение тел с учетом причин, обусловливающих характер данного движения. Механическое движение тел изменяется в результате их взаимодействия. Мерой такого взаимодействия является сила. Если на тело действуют одновременно несколько сил, то их действие можно заменить действием одной силы **F**, называемой *равнодействующей* данных сил:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i .$$

Основу динамики составляют три закона Ньютона.

Первый закон Ньютона: существуют системы отсчета, относительно которых тело движется прямолинейно и равномерно или находится в покое, если равнодействующая всех сил, действующих на тело, равна нулю. Такие системы отсчета называют *инерциальными*. При

$$\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i = 0 \quad \mathbf{v} = \text{const}.$$

Второй закон Ньютона: сила, действующая на тело, равна произведению массы этого тела на сообщаемое этой силой ускорение:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \text{ или } \mathbf{F} = \frac{\Delta (m\mathbf{v})}{\Delta t},$$

где Δt — промежуток времени, за который произошло изменение импульса $\Delta(m\mathbf{v})$ под действием силы $\mathbf{F}$.

Третий закон Ньютона: силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению.

Между двумя точечными телами массами m_1 и m_2, находящимися на расстоянии r друг от друга, действует сила тяготения, которая определяется законом всемирного тяготения:

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где γ — гравитационная постоянная: $\gamma \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$м²/кг².

Решение задач

При решении задач на динамику поступательного движения прежде всего выясняют, какие силы действуют на движущееся тело, и изображают эти силы на чертеже. После чего выбирают систему координат. Координатные оси направляют так, чтобы проекции сил на них выражались возможно более простым образом. Чаще всего ось Ox направляют по направлению вектора скорости, Oy — по направлению, перпендикулярному к вектору скорости. Положительное направление осей удобно указывать так, чтобы оно совпадало с направлением ускорения тела.

После выбора системы координат для каждого движущегося тела в отдельности на основании второго закона Ньютона составляют уравнения движения, связывающие проекции сил и ускорений. Полученная система уравнений решается относительно искомых величин.

Второй закон Ньютона дает возможность найти только ускорения тел. Скорости и координаты тел определяются на основании использования других данных условия задачи.

Условно задачи по динамике поступательного движения можно разбить на три группы: задачи на движение тел под действием сил при отсутствии трения; задачи на движение тел при наличии сил трения; задачи на движение тел в неинерциальных системах отсчета.

1. Во многих задачах по динамике поступательного движения можно пренебречь силами трения, возникающими при движении тел, и считать, что тела движутся лишь под действием силы тяже-

сти и упругих сил реакции связей (давлений опор, натяжений нитей и др.). В большинстве случаев размеры тел оказываются несущественными для решения задачи, т. е. тела можно считать материальными точками. Чаще всего рассматривают движение тел относительно поверхности Земли, следовательно, систему отсчета, связанную с Землей, можно считать практически инерциальной. Всякую другую систему отсчета, которая движется поступательно без ускорения относительно Земли, также следует считать инерциальной. Решение таких задач проводится по рассмотренной выше общей схеме решения задач по динамике поступательного движения.

Чтобы правильно определить направление сил, действующих на движущееся тело, необходимо помнить, что сила тяжести направлена вниз, сила реакции опоры при отсутствии трения — по нормали к соприкасающимся поверхностям в точке их касания в сторону тела, сила натяжения нити — вдоль нити в сторону точки подвеса.

Для тел, расположенных вблизи поверхности Земли, следует учитывать только силу тяжести и силы, возникающие в местах непосредственного соприкосновения тел. Силы притяжения, действующие между отдельными телами, настолько малы по сравнению с силой земного притяжения, что во всех задачах, где нет специальных оговорок, ими пренебрегают.

Если в задаче рассматривается движение системы связанных между собой тел, то уравнение движения записывают для каждого тела в отдельности. Если тела связаны нитью, массой которой можно пренебречь, силу натяжения нити считают одинаковой по всей длине нити. При наличии блока равенство $T_1 = T_2$ выполняется только в том случае, когда можно пренебречь массами нити и блока, а также силами трения, возникающими при вращении блока.

Пример 1. Масса лифта с пассажирами равна 800 кг. Определить, с каким ускорением и в каком направлении движется лифт, если известно, что натяжение троса, поддерживающего лифт, равно: а) 12 000 Н; б) 6000 Н.

Решение. На лифт с пассажирами действует сила тяжести $\mathbf{F}_т$ и сила натяжения троса $\mathbf{T}$. Ось Oy направим вертикально вверх. Тогда уравнение движения в проекциях на эту ось запишется так:

$$T_y + F_{тy} = ma_y.$$

Но $T_y = T$; $F_{тy} = -mg$; $a_y = a$. Тогда $T - mg = ma$, откуда

$$a = \frac{T - mg}{m}.$$

Подставив численные значения, получим: а) $a = 5{,}2$ м/с^2, лифт поднимается; б) $a = -2{,}3$ м/с^2, лифт опускается вниз.

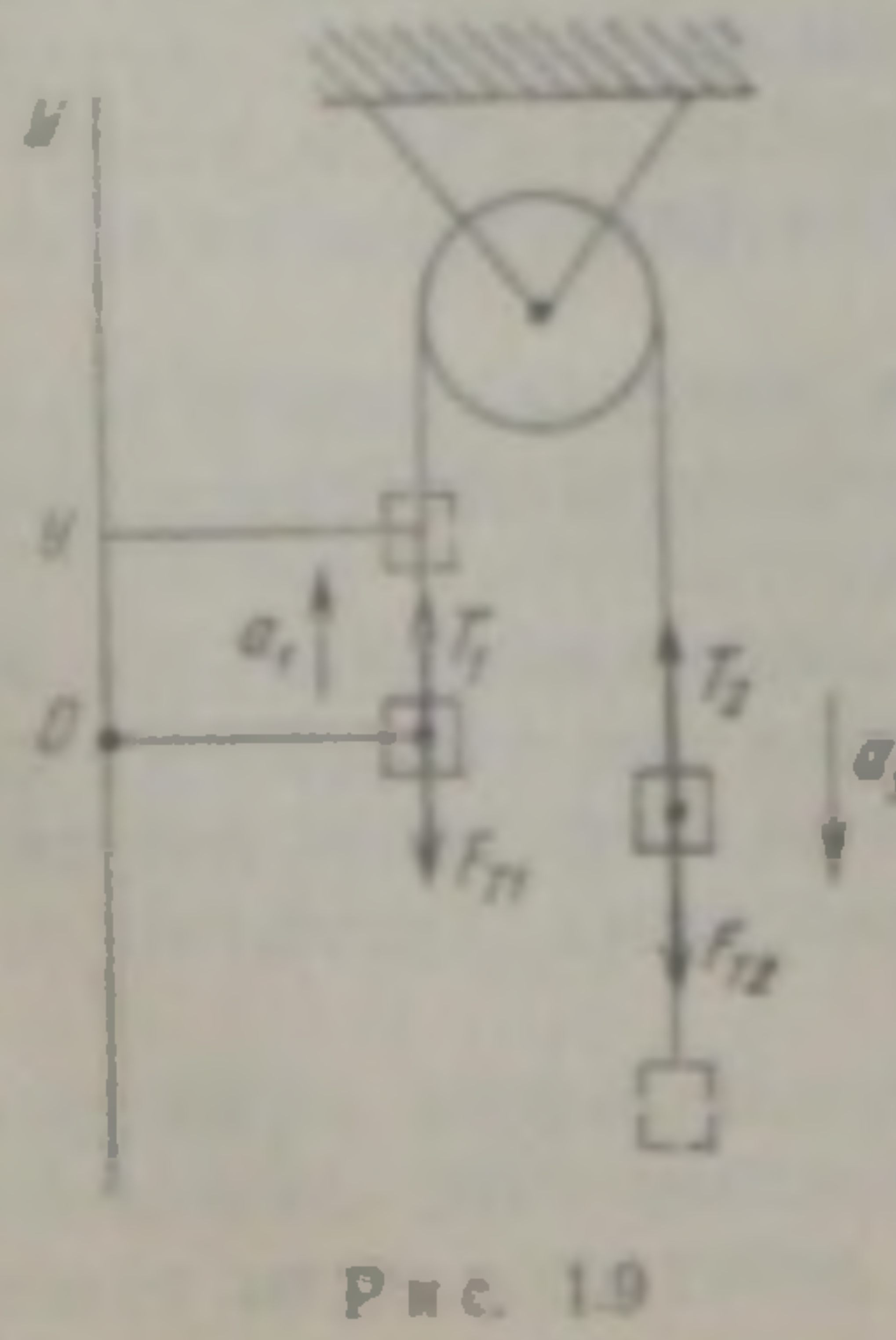


Рис. 1.9

Пример 2. Через блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 2{,}1$ кг. Начальные скорости грузов равны нулю. Каково перемещение грузов за время $t = 2$ с? Какова сила натяжения нити? Массой нити и трением в блоке пренебречь.

Решение. Направим координатную ось Oy вертикально вверх, как указано на рис. 1.9. Уравнение для координаты первого груза запишется так:

$$y = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Но $v_0 = 0$, тогда

$$y = \frac{at^2}{2}.$$

В момент времени t $y = s$. Таким образом, величина перемещения

$$s = \frac{at^2}{2}.$$

Ускорение движения a найдем, составив уравнения движения грузов в проекциях на ось Oy (при этом учтем, что $T_1 = T_2 = T$, $a_1 = a_2 = a$):

$$T - m_1 g = m_1 a; \qquad T - m_2 g = -m_2 a.$$

Преобразовав эти два уравнения, найдем

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}.$$

Величина перемещения

$$s = \frac{g(m_2 - m_1)t^2}{2(m_1 + m_2)} \approx 0{,}48 \text{ м}.$$

Силу натяжения нити найдем из уравнения движения первого груза:

$$T = m_1(g + a) = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} \approx 20{,}1 \text{ Н}.$$

2. Во всех реальных случаях при непосредственном взаимодействии тел возникают силы трения. При решении задач на движение тел при наличии трения, составляя уравнения движения, необходимо учитывать возникающие силы трения, выражая их через коэффициент трения и силу нормального давления. При этом следует иметь в виду, что сила трения скольжения всегда направлена в сторону, противоположную направлению относительной скорости тела. Появление силы трения не может изменить направление относительной скорости тела. Под действием силы трения тело может остановиться, и тогда сила трения скольжения исчезнет.

Сила трения покоя равна по величине и противоположна по направлению той силе, которая должна была бы вызвать скольжение. В большинстве случаев полагают, что максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения, т. е. $\mu_0 = \mu$.

Пример 3. На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, находится тело массой $m_1 = 2$ кг (рис. 1.10). Тело движется вверх по наклонной плоскости под действием связанного с ним невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, груза массой $m_2 = 20$ кг. Начальные скорости тела и груза равны нулю, коэффициент трения тела о плоскость $\mu = 0{,}1$. Определить ускорение, с которым движется тело, силу натяжения нити, а также силу давления на ось блока. Блок считать невесомым и вращающимся без трения.

Решение. На тело, движущееся по наклонной плоскости, действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{\text{т}1} = m_1 \mathbf{g}$, сила натяжения нити $\mathbf{T}_1$, сила трения $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ и сила реакции плоскости $\mathbf{N}$. На груз m_2 действуют сила тяжести $\mathbf{F}_{т2}=m_2\mathbf{g}$ и сила натяжения нити $\mathbf{T}_2$. Из условия невесомости и нерастяжимости нити следует, что $a_1=a_2=a$ и $T_1=T_2=T$. Выберем для тела m_1 систему отсчета xOy так, как указано на рис. 1.10. Тогда уравнение движения тела в проекциях на оси Ox и Oy запишется так:

$$T_{1x}+N_x+F_{т\,1\,x}+F_{тр\,x}=m_1a_x;$$
$$N_y+F_{т1\,y}=m_1a_y.$$

Учитывая, что $T_{1\,x}=T$, $N_x=0$, $F_{т\,1\,x}=-m_1g\sin\alpha$, $a_y=0$, $F_{тр\,x}=-F_{тр}=-\mu N$, $a_x=a$, $N_y=N$, $F_{т\,1\,y}=-m_1g\cos\alpha$, получим:

$$T-m_1g\sin\alpha-\mu N=m_1a;$$
$$N-m_1g\cos\alpha=0.$$

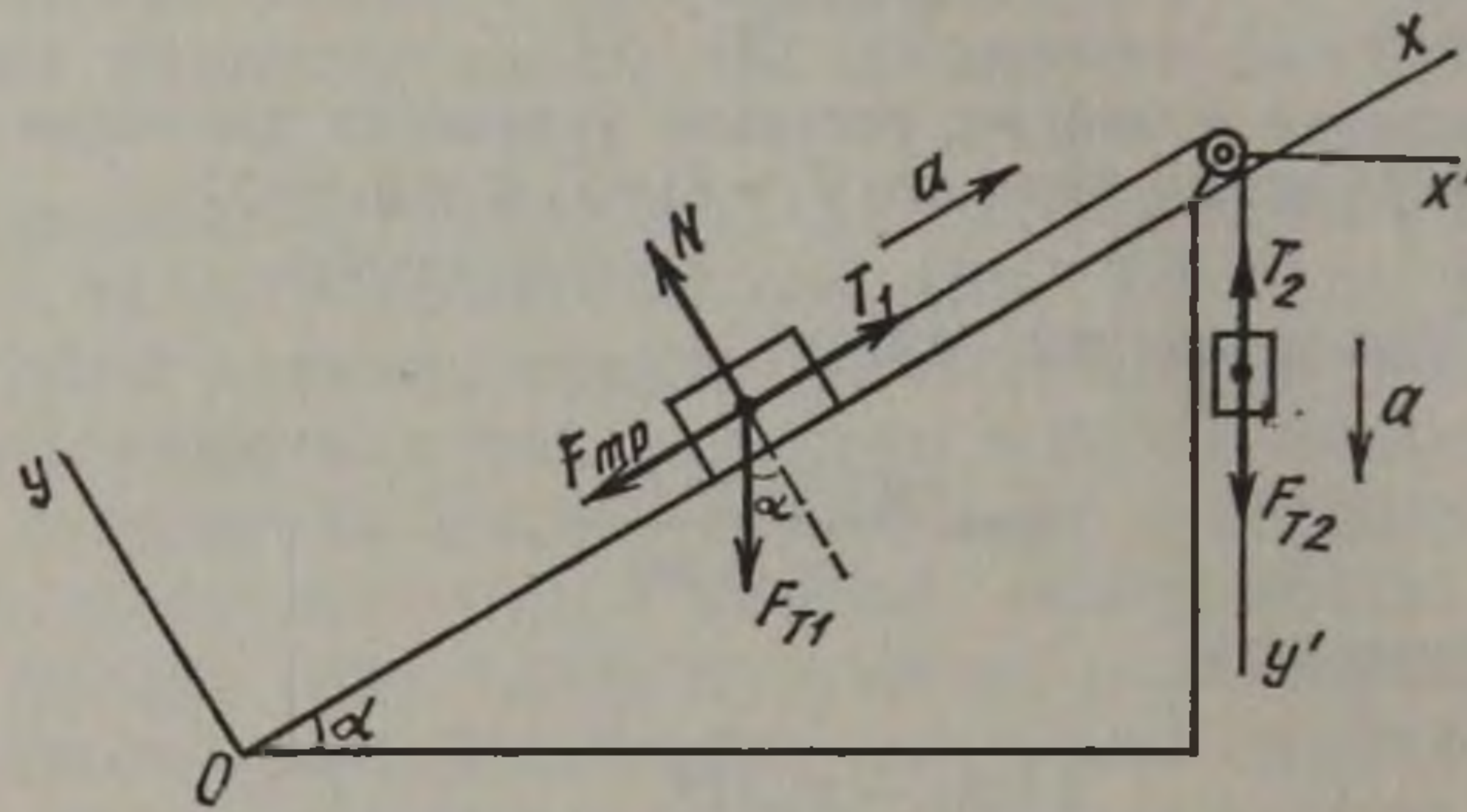


Рис. 1.10

Для груза выберем систему координат $x'Oy'$ (см. рис. 1.10). Уравнение движения груза m_2 будет иметь вид

$$m_2g-T=m_2a.$$

Решив полученную систему уравнений относительно a, получим

$$a=\frac{g\,[m_2-m_1(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]}{m_1+m_2}\approx 8{,}4\ \text{м/с}^2.$$

Зная a, можно найти силу натяжения:

$$T=\frac{m_1m_2g\,(1+\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}\approx 28{,}2\ \text{Н}.$$

Так как по условию задачи масса блока не учитывается, то можно считать, что на него действуют только две силы натяжения $\mathbf{T}$ со стороны нити и нормальная реакция опоры $\mathbf{N}_1$ со стороны оси. Согласно третьему закону Ньютона, блок действует на ось с такой же силой $\mathbf{N}_1$, но направленной в противоположную сторону.

Под действием приложенных сил блок находится в равновесии:

$$\mathbf{T}+\mathbf{T}+\mathbf{N}_1=0;$$

$$N_1=2\,T\cos\left(\frac{90^\circ-\alpha}{2}\right)\approx 48\ \text{Н}.$$

3. В методической литературе известны два способа решения задач на движение тел в неинерциальных системах. Первый способ основан на применении второго закона Ньютона, записанного для неинерциальной системы отсчета, связанной с ускоренно движущимся телом. В поступательно движущихся неинерциальных системах отсчета этот закон выражается уравнением

$$\sum\mathbf{F}+\mathbf{F}_{ин}=m\mathbf{a},$$

где $\sum\mathbf{F}$ — сумма всех сил, действующих на данное тело со стороны других тел; $\mathbf{F}_{ин} = -m\mathbf{a}_0$ — сила инерции; $\mathbf{a}$ — ускорение тела в неинерциальной системе отсчета. Сила инерции $\mathbf{F}_{ин}$ отличается от других сил тем, что она существует только в неинерциальной системе отсчета и для нее нельзя указать, со стороны каких тел она действует.

Второй способ решения таких задач не предполагает введения сил инерции, но при этом считают, что происходит изменение поля тяготения. Ускорение силы тяжести изменяется по величине и направлению и вместо $\mathbf{g}$ становится равным $\mathbf{g}'$, причем $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_0)$, где $\mathbf{a}_0$ — ускорение неинерциальной системы отсчета. Этим способом чаще всего пользуются тогда, когда искомая величина определяется в инерциальной системе отсчета какой-либо известной формулой, содержащей ускорение силы тяжести. Тогда достаточно принять это ускорение равным величине g' и произвести необходимые вычисления.

Пример 4. Брусок массой m находится на наклонной плоскости, движущейся ускоренно справа налево (рис 1.11). При каком максимальном значении ускорения a_0 брусок будет оставаться еще неподвижным относительно призмы? Угол наклона α, коэффициент трения между бруском и плоскостью μ.

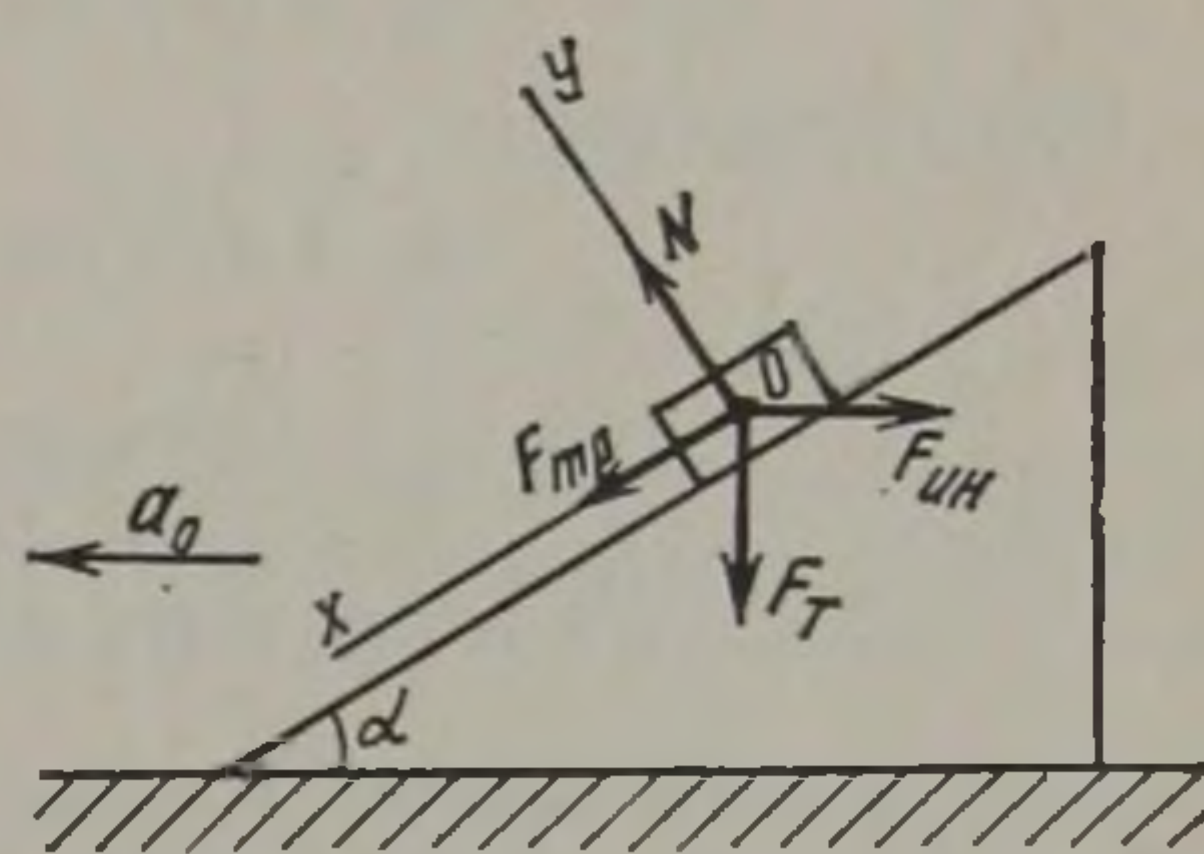


Рис. 1.11

Р е ш е н и е. Выберем систему отсчета, связанную с наклонной плоскостью. Оси координат направим, как указано на рис. 1.11. Пока плоскость покоится, на брусок действуют три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т$, сила нормального давления $\mathbf{N}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Как только начнется ускоренное движение плоскости, появится четвертая сила, действующая на тело,— сила инерции $\mathbf{F}_{ин} = -m\mathbf{a}_0$. Запишем уравнение движения бруска в неинерциальной системе, связанной с наклонной плоскостью:

$$\mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}_т + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{ин} = m\mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение бруска в этой системе. В нашем случае $a = 0$. Тогда

$$\mathbf{F}_{тр} + \mathbf{F}_т + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{ин} = 0.$$

Запишем это равенство в проекциях на координатные оси Ox и Oy:

$$\left.\begin{aligned} mg\sin\alpha + \mu N - ma_0\cos\alpha = 0; \\ -mg\cos\alpha + N - ma_0\sin\alpha = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений относительно a_0, получим

$$a_0 = \frac{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

При этом $\mu < \operatorname{ctg}\alpha$.

Пример 5. К динамометру, подвешенному к кабине лифта, прикреплен груз массой $m = 5$ кг. Лифт движется вверх. Насколько будет отличаться показание динамометра во время разгона от показания при торможении, если известно, что лифт обладал одинаковым по величине ускорением $a_0 = 2$ м/с^2 при разгоне и торможении?

Р е ш е н и е. *1-й способ.* Выберем систему отсчета, связанную с лифтом. Координатную ось Oy направим вертикально вниз. На тело будут действовать три силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила натяжения пружины $\mathbf{T}$ и сила инерции $\mathbf{F}_{ин} = -m\mathbf{a}_0$. Запишем уравнение движения тела в неинерциальной системе:

$$\mathbf{F}_т + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{ин} = m\mathbf{a},$$

где $\mathbf{a}$ — ускорение груза в этой системе. В нашем случае $a=0$. Тогда

$$\mathbf{F}_т + \mathbf{T} + \mathbf{F}_{ин} = 0.$$

В проекциях на ось Oy это уравнение при разгоне будет иметь вид

$$mg - T_1 + ma_0 = 0,$$

а при торможении

$$mg - T_2 - ma_0 = 0,$$

откуда

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 2ma_0 = 20 \text{ Н}.$$

2-й способ. Считают, что в неинерциальной системе отсчета, связанной с лифтом, происходит изменение поля тяготения. Ускорение силы тяжести изменяется:

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} + (-\mathbf{a}_0).$$

При разгоне

$$g_1' = g + a_0; \ F_{т1} = mg_1' = m(g + a_0).$$

При торможении

$$g_2' = g - a_0; \ F_{т2} = mg_2' = m(g - a_0).$$

Тогда

$$\Delta T = F_{т1} - F_{т2} = 2ma_0 = 20 \text{ Н}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.35. К нити подвешен груз массой 1 кг. Определить натяжение нити, если нить с грузом: а) поднимать с ускорением 5 м/с^2; б) опускать с ускорением 5 м/с^2.

1.36. Аэростат, имеющий вместе с балластом массу m, опускается вниз с постоянным ускорением a. Сколько балласта нужно сбросить с аэростата, чтобы он опускался с прежним ускорением, но направленным вертикально вверх? Трением пренебречь.

1.37. Считая ускорение движения лифтов Останкинской телевизионной башни постоянным по величине и одинаковым во время разгона и торможения, определить силу давления груза массой 100 кг на дно лифта в начале, середине и конце подъема. Известно, что лифт поднимается за 60 с на высоту 337 м, максимальная скорость подъема 7 м/с.

1.38. Две гири соединены нитью и перекинуты через невесомый блок. Ускорение, с которым движутся гири, 3,27 м/с^2. Определить массы гирь, если известно, что сила натяжения нити составляет 13 Н. Трением в блоке пренебречь.

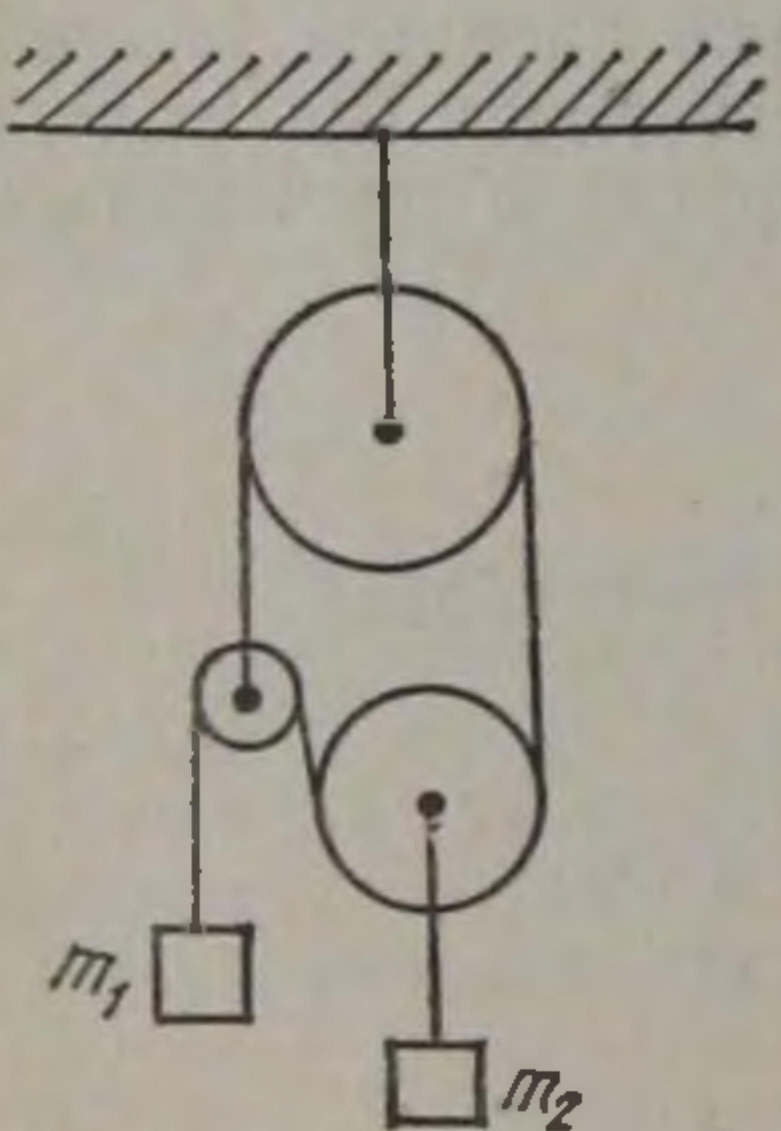


Рис. 1.12

1.39. Определить ускорение грузов в системе, изображенной на рис. 1.12. Массами блоков, нити и трением пренебречь.

1.40. На автомобиль массой 1000 кг во время движения действует сила трения, равная 0,1 его силы тяжести. Чему должна быть равна сила тяги, развиваемая мотором автомобиля, чтобы автомобиль двигался: равномерно; с ускорением 2 м/с^2?

1.41. Найти силу тяги, развиваемую мотором автомобиля, движущегося в гору с ускорением 1 м/с^2. Уклон горы 0,04. Масса автомобиля 10^3 кг. Коэффициент трения равен 0,1.

1.42. Канат лежит на столе так, что часть его свешивается со стола. Коэффициент трения каната о стол 0,33. Какую долю составляет свешивающаяся часть каната в тот момент, когда канат начинает скользить?

1.43. Невесомый блок укреплен на вершине наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол 30°. Два груза массами m_1 и m_2 ($m_1=m_2=1$ кг) соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения между грузом m_2 и плоскостью 0,1. Чему равно ускорение, с которым движутся грузы? Трением в блоке пренебречь.

1.44. Невесомый блок укреплен на вершине двух наклонных плоскостей, составляющих с горизонтом углы 30° и 45°. Два груза m_1 и m_2 ($m_1=m_2=1$ кг) соединены нитью и перекинуты через блок. Коэффициент трения грузов о плоскости равен 0,1. Определить натяжение нити. Трением в блоке пренебречь.

1.45. С каким ускорением будет двигаться система грузов, указанная на рис. 1.13, если коэффициент трения груза массой $2m$ о поверхность 0,1? Масса $m=1$ кг. Трением в блоках пренебречь.

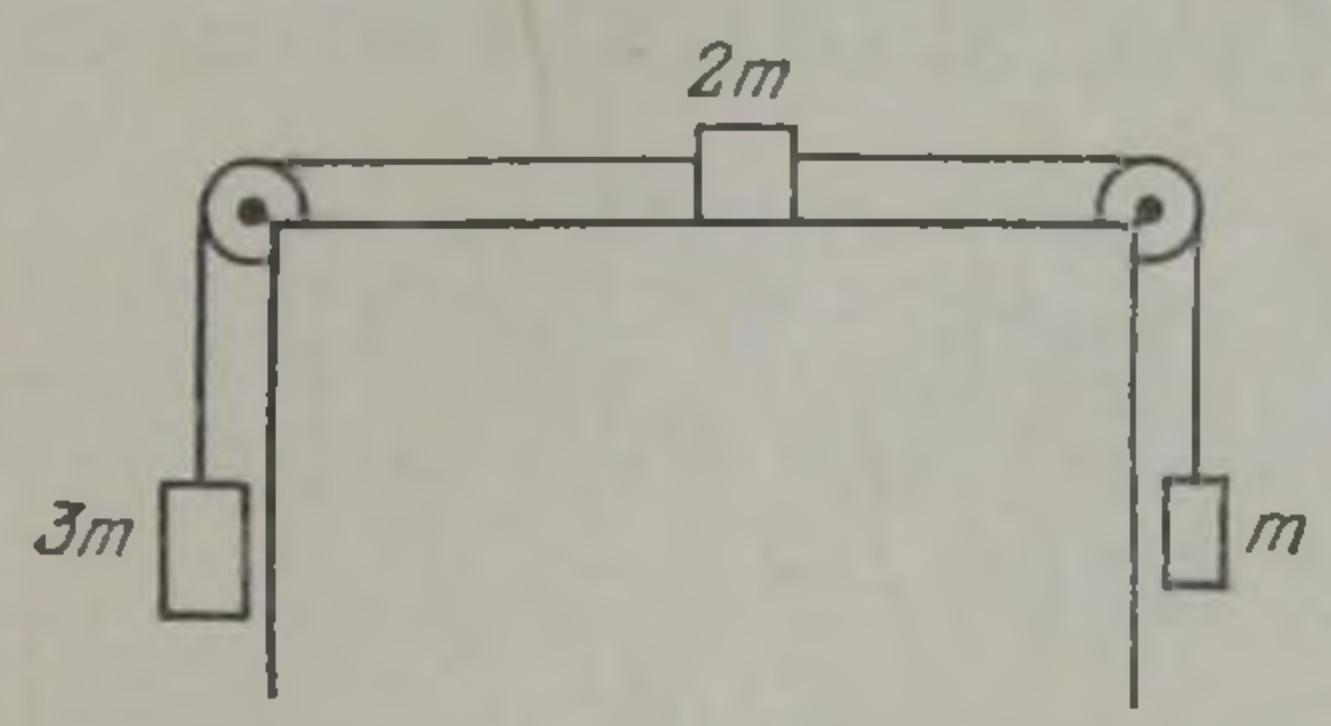


Рис. 1.13

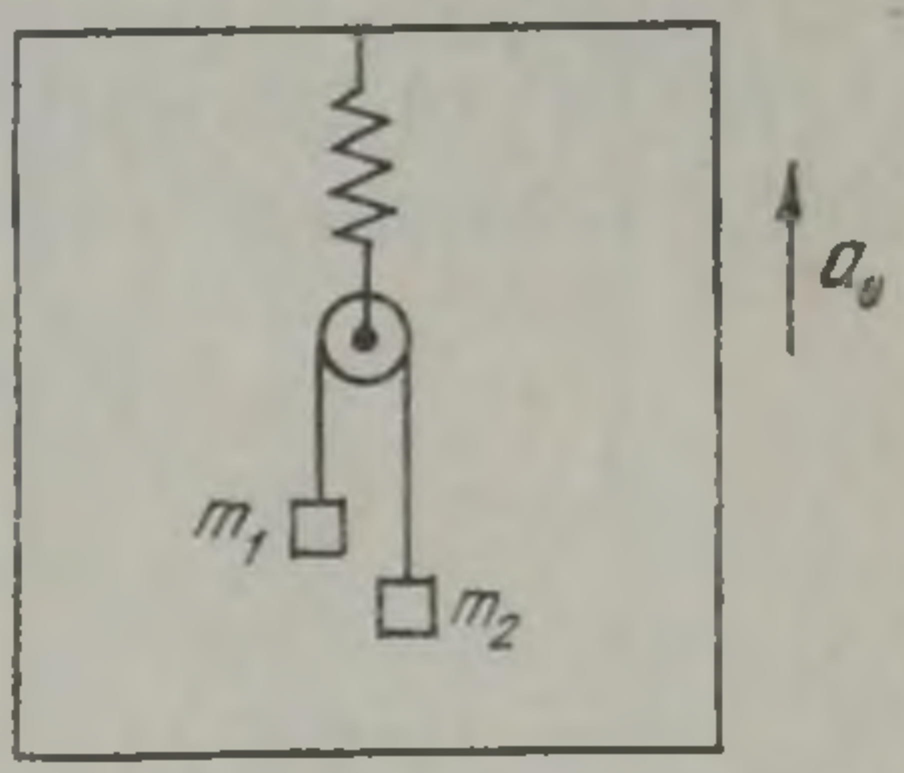


Рис. 1.14

1.46. Брусок массой m находится на наклонной плоскости с углом наклона 30°, движущейся ускоренно справа налево. При каком максимальном ускорении брусок будет оставаться еще неподвижным относительно призмы? Трением между бруском и плоскостью пренебречь.

1.47. Тело массой m, находящееся на вершине наклонной плоскости ($l=1$ м, $\alpha=30°$), удерживается силой трения. Коэффициент трения между телом и плоскостью 0,6. За какое время тело спустится с наклонной плоскости, если она станет двигаться в горизонтальном направлении с ускорением 1 м/с²?

1.48. К динамометру, подвешенному в кабине лифта, прикреплен груз массой 10 кг. Лифт движется вверх с одинаковым по величине ускорением 2 м/с² при разгоне и торможении. Определить показания динамометра при разгоне и торможении.

1.49. Решить задачу 1.48, считая, что лифт движется вниз.

1.50. К динамометру, подвешенному к кабине лифта, прикреплена система, показанная на рис. 1.14. Массы грузов m_1 и m_2. Во сколько раз показание динамометра при движении грузов, когда лифт поднимается с ускорением $a_0=$ $=2$ м/с², больше показания, когда лифт неподвижен?

1.4. Динамика вращательного движения

Основные законы и формулы

При криволинейном движении сила, действующая на материальную точку, может быть определена по формуле

$$F = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R, \qquad (1.6)$$

где v и ω — линейная и угловая скорости тела массой m; R — радиус кривизны траектории в данной точке.

Если касательная составляющая равнодействующей силы, действующей на точку, $F_\tau = 0$, а нормальная составляющая с течением времени не меняется по величине: $F_n = \text{const}$, то точка будет равномерно двигаться по окружности ($a_\tau = 0$, $a_n = \text{const}$).

Для характеристики вращательного движения твердых тел часто пользуются моментом M силы F относительно оси вращения.

Момент M является векторной величиной. Величина момента M некоторой силы F относительно оси вращения определяется формулой

$$M=Fl,$$

где l — расстояние от оси вращения до прямой, вдоль которой действует сила.

Общее условие равновесия тела гласит, что для того, чтобы тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы были равны нулю равнодействующая приложенных к телу сил и сумма моментов этих сил относительно оси вращения:

$$\mathbf{F}=\sum_i \mathbf{F}_i=0; \quad \sum_i \mathbf{M}_i=0.$$

Решение задач

Задачи на динамику вращательного движения можно разделить на три основные группы: задачи на динамику равномерного движения точки по окружности; задачи на динамику вращательного движения твердого тела; задачи на движение спутников и планет.

1. Задачи на динамику равномерного движения точки по окружности решают на основании законов Ньютона и кинематических уравнений. Второй закон Ньютона в таких случаях используют в виде (1.6). Чтобы записать этот закон, прежде всего необходимо найти результирующую всех сил, действующих на точку. При этом следует помнить, что вектор результирующей силы направлен по радиусу к центру окружности.

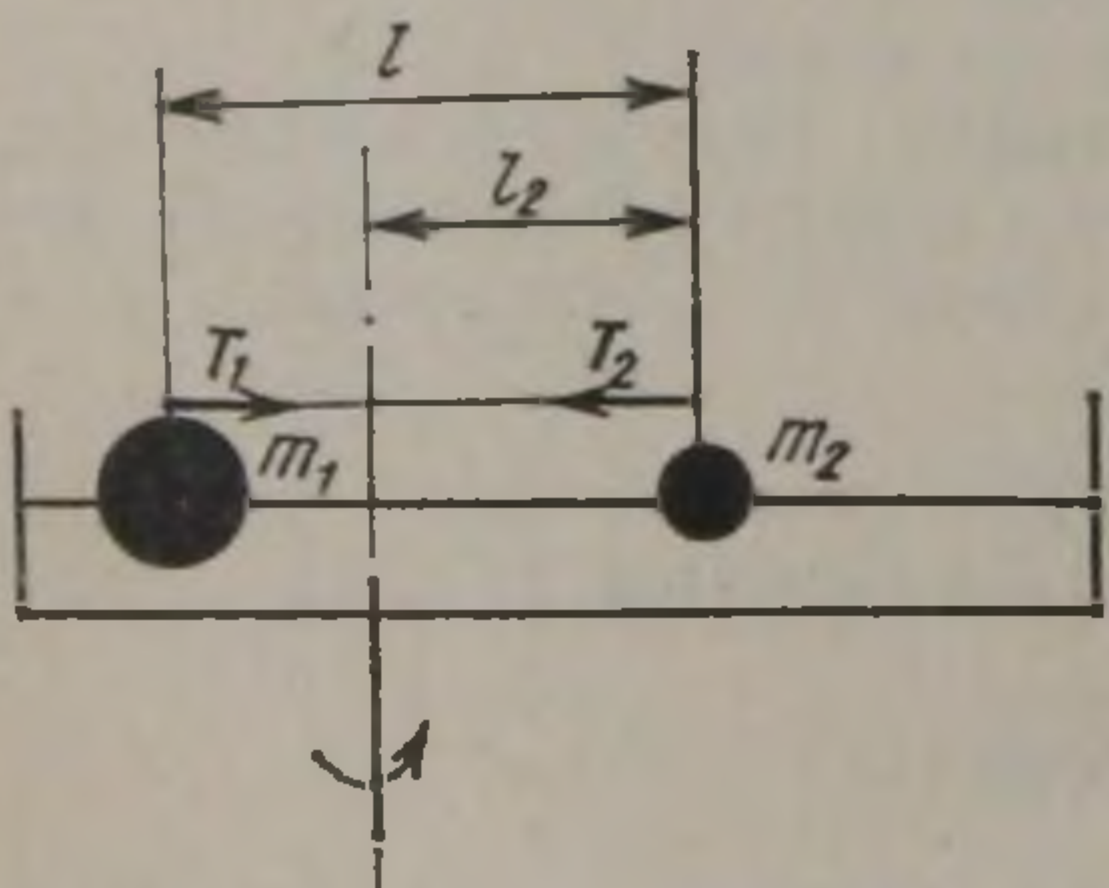


Рис. 1.15

Пример 1. Два шарика с массами $m_1=40$ г и $m_2=10$ г, надетые на горизонтальный стержень (рис. 1.15), связаны нитью длиной $l=20$ см. Определить силу натяжения нити при вращении стержня с угловой скоростью $\omega=10$ рад/с, если шарики не смещаются относительно оси вращения. Трением шариков о стержень пренебречь.

Решение. В данном случае нормальные ускорения шариков вызваны действием сил натяжения $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$. Поскольку шарики не смещаются относительно оси вращения, то $T_1=T_2$. Согласно второму закону Ньютона, можно записать:

$$T_1=\frac{m_1v_1^2}{r_1}=m_1\omega^2r_1=m_1\omega^2(l-l_2);$$

$$T_2=\frac{m_2v_2^2}{r_2}=m_2\omega^2r_2=m_2\omega^2l_2.$$

Тогда

$$m_1\omega^2(l-l_2)=m_2\omega^2l_2,$$

откуда

$$l_2 = \frac{m_1 l}{m_1 + m_2}.$$

Силу натяжения определим так:

$$T = T_1 = T_2 = \frac{m_2 m_1 \omega^2 l}{m_1 + m_2} = 0{,}16 \text{ Н}.$$

Пример 2. Шарик массой m, прикрепленный к нити, движется в горизонтальной плоскости по окружности с постоянной скоростью (конический маятник). Расстояние от точки подвеса до горизонтальной плоскости $h = 25$ см. Сколько оборотов делает шарик за $t = 10$ с?

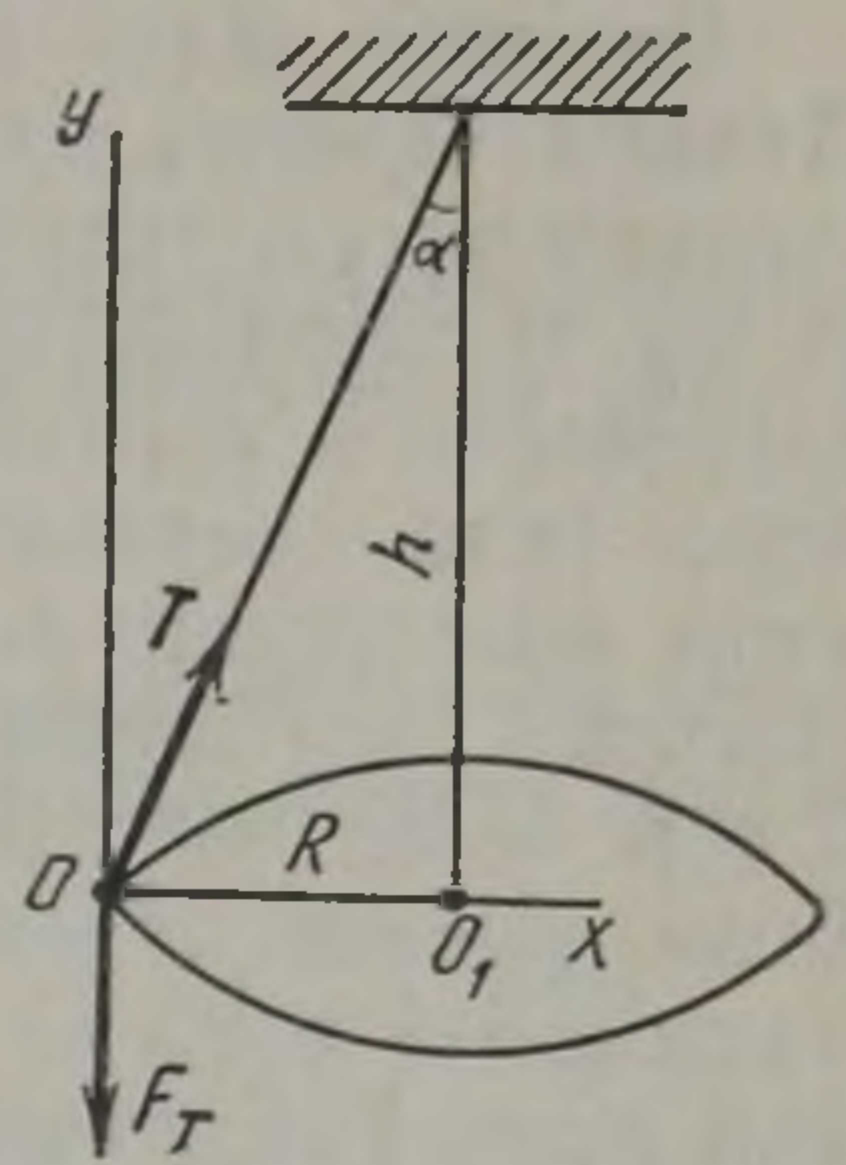


Рис. 1.16

Решение. На шарик действуют две силы: сила натяжения нити $\mathbf{T}$ и сила тяжести $\mathbf{F}_\text{т} = m\mathbf{g}$ (рис. 1.16). Координатные оси Ox и Oy направим, как указано на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси:

$$T \sin \alpha = m\frac{v^2}{R}; \; T \cos \alpha - mg = 0.$$

Преобразовав эти уравнения, получим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{gR}$. С другой стороны, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{h}$. Следовательно,

$$\frac{R}{h} = \frac{v^2}{gR},$$

но

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{\tau},$$

где τ — период обращения. Тогда $\frac{R}{h} = \frac{4\pi^2 R}{g\tau^2}$, откуда находим период обращения:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Число оборотов N за время t

$$N = \frac{t}{\tau} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{h}} = 10 \text{ об}.$$

В курсе элементарной физики обычно рассматривают вращение твердого тела вокруг неподвижной оси или оси, перемещающейся в пространстве параллельно самой себе. В этом случае векторы величин, характеризующих вращательное движение тела, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$, $\mathbf{M}$ будут направлены вдоль оси вращения. При решении задач это позволяет упростить запись уравнений вращательного движения тела. При этом ось проекций удобно направлять по оси вращения. Чаще всего за положительное направление выбирают направление вращения, совпадающее с направлением движения часовой стрелки.

Особую подгруппу в группе задач на динамику вращательного движения составляют задачи на равновесие тел. Статика представляет собой частный случай динамических процессов, при которых отсутствуют угловые и линейные ускорения ($\varepsilon=0$, $a=0$), поэтому решение таких задач имеет много общего с решением задач на динамику вращательного движения. Вместо динамических уравнений здесь составляют условия равновесия.

Решение задач на статику проводят обычно по следующей схеме. Делают чертеж, на котором указывают все силы, действующие на материальную точку или твердое тело. Выбирают оси координат Ox и Oy и проецируют на эти оси все силы. Составляют уравнение равновесия в проекциях по осям $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$. В случае твердого тела составляют также уравнение моментов: $\sum M = 0$. При этом необходимо выбрать точку O, относительно которой будут рассматриваться моменты приложенных сил. Удобно выбирать ее так, чтобы через нее проходило наибольшее число линий действия сил. Если условие задачи предполагает вращение тела вокруг одной неподвижной оси, то можно ограничиться лишь составлением уравнения моментов. Раскладывать силы по осям в этом случае не нужно.

Пример 3. Шар массой $m=1$ кг висит на веревке длиной $l=0{,}8$ м, прикрепленной к гладкой стене (рис. 1.17). Найти силу давления шара на стену, если его радиус $R=22{,}5$ см.

Решение. На шар действуют следующие силы: сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$, сила натяжения веревки $\mathbf{T}$, сила реакции стены $\mathbf{N}$. Силой трения, согласно условию задачи, пренебрегаем. Направим координатные оси Ox и Oy, как указано на рис. 1.17. Условие равновесия шара $\sum \mathbf{F} = 0$. В проекциях на оси это равенство запишется так:

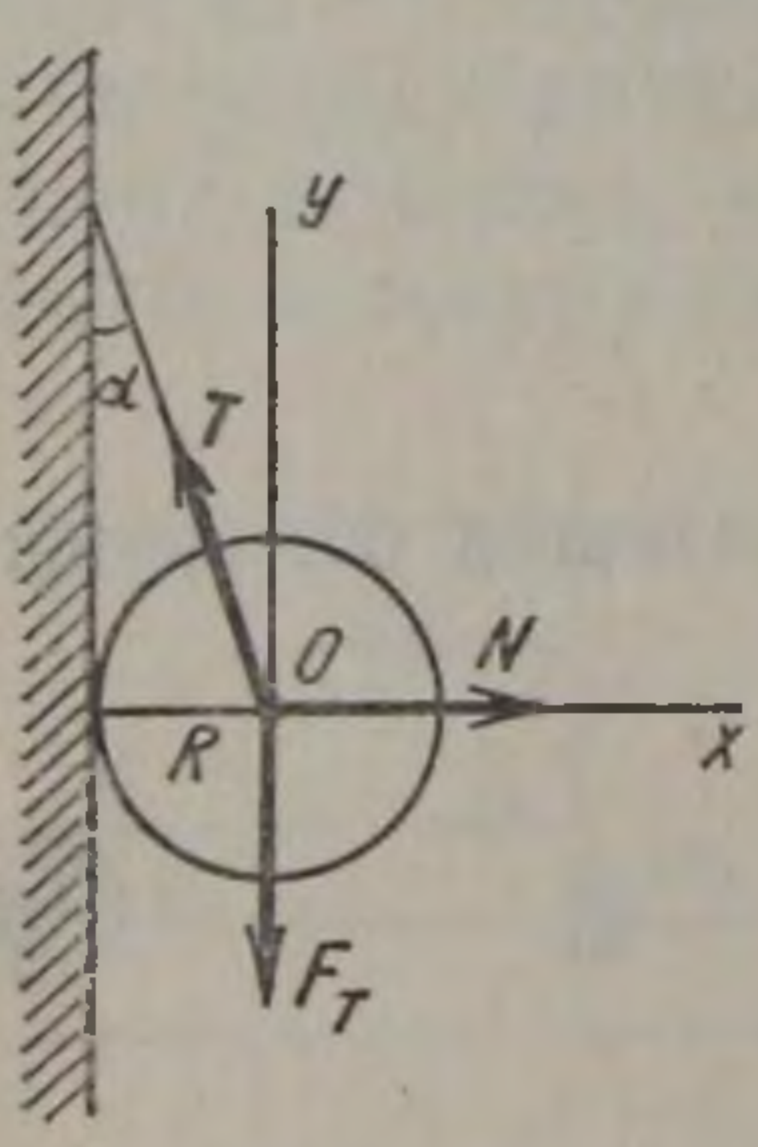


Рис. 1.17

$$N - T\sin\alpha = 0; \quad T\cos\alpha - mg = 0,$$

откуда $N = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Но

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{R}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}} = \frac{R}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

Тогда

$$N = \frac{mgR}{\sqrt{l^2 + 2Rl}}.$$

Сила давления шара на стену равна по величине N и направлена в противоположную сторону:

$$F_д = N = \frac{mgR}{\sqrt{l^2 + 2Rl}} = 2{,}2 \text{ Н}.$$

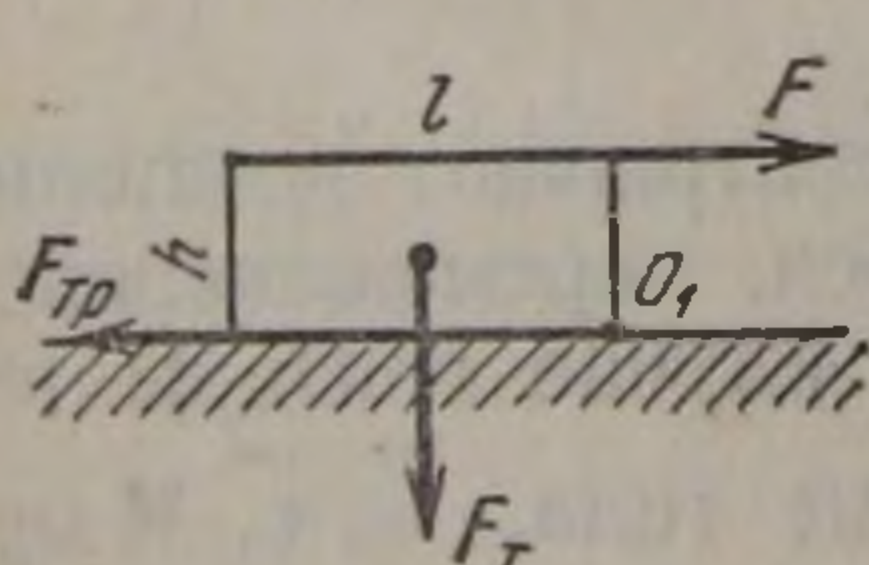


Рис. 1.18

Пример 4. На горизонтальном столе лежит брусок массой m. Высота бруска $h=0{,}2$ м, длина $l=0{,}25$ м. При каком максимальном коэффициенте трения брусок можно двигать по столу силой, направленной горизонтально и приложенной к верхнему ребру (рис. 1.18)?

Решение. На брусок будут действовать три силы: приложенная сила $\mathbf{F}$, сила тяжести $\mathbf{F}_т = m\mathbf{g}$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$. Максимальный коэффициент трения μ будет соответствовать равномерному движению бруска по поверхности стола. Поэтому сумма проекций сил на горизонтальное направление будет равна нулю:

$$F - F_{тр} = 0.$$

При движении по столу брусок не должен опрокидываться, т. е. не должен совершать поворот относительно точки O_1. Следовательно, уравнение моментов будет иметь вид

$$Fh - mg\frac{l}{2} = 0.$$

Первое уравнение можно записать так:

$$F - \mu mg = 0.$$

Решая эти два уравнения относительно μ, получаем

$$\mu = \frac{l}{2h} = 0{,}625.$$

Пример 5. Определить положение центра тяжести однородной круглой пластинки радиусом $R = 0{,}5$ м, в которой вырезано квадратное отверстие со стороной $a = \frac{R}{2}$ так, как указано на рис. 1.19.

Решение. Для центра тяжести фигуры должно выполняться правило моментов $\sum M = 0$. В нашем случае, если вставить вырезанную часть пластинки на прежнее место, то силу тяжести всей пластинки $\mathbf{F}_т$ можно представить как сумму двух параллельных сил — силы тяжести вырезанной части $\mathbf{F}_{т1}$ и силы тяжести оставшейся фигуры $\mathbf{F}_{т2}$:

$$F_т = F_{т2} + F_{т1}.$$

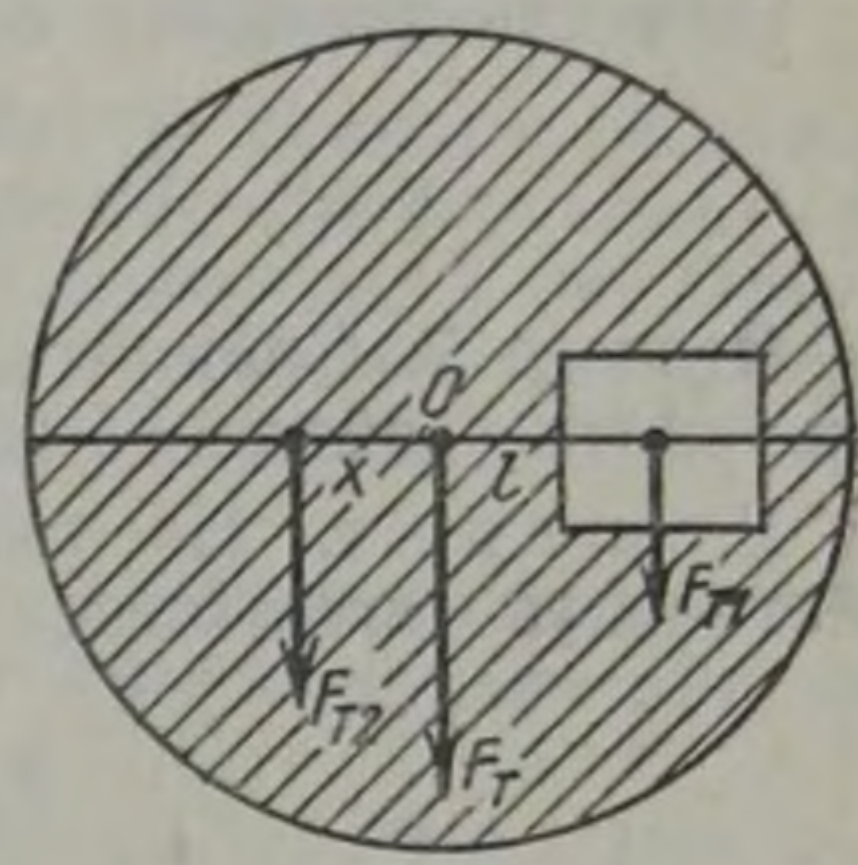


Рис. 1.19

Уравнение моментов относительно точки O будет иметь вид

$$F_{т2}x - F_{т1}l = 0 \quad \text{или} \quad F_{т2}x = F_{т1}l.$$

Но $F_{т2} = F_т - F_{т1}$. Тогда $(F_т - F_{т1})x = F_{т1}l$, откуда

$$x = \frac{F_{т1}l}{F_т - F_{т1}}.$$

Поскольку $F_т = mg = \rho Shg$; $F_{т1} = \rho S_1 hg$, где ρ — плотность материала, из которого изготовлена пластинка; S — площадь пластинки; h — ее высота; S_1 — площадь вырезанной части, то для расстояния x получим выражение

$$x = \frac{S_1 l}{S - S_1},$$

где $S_1 = a^2 = \frac{R^2}{4}$; $S = \pi R^2$; $l = \frac{R}{2}$. Таким образом, $x \approx 0{,}02$ м.

3. В задачах на движение спутников и планет предполагают, что движение тел совершается под действием силы тяготения. Силой сопротивления окружающей среды пренебрегают. Взаимодействующие тела считаются материальными точками. Задачи такого типа, как правило, решают методами, основанными на применении второго закона Ньютона, где роль силы играет сила тяготения.

Пример 6. Определить расстояние от центра Земли до искусственного спутника и скорость его относительно поверхности Земли, если спутник запущен так, что он движется в плоскости земного экватора и с Земли все время кажется неподвижным.

Решение. С достаточной степенью точности можно считать, что на спутник при его движении действует только сила земного притяжения:

$$F = \gamma\frac{mM}{R^2},$$

где m — масса спутника; M — масса Земли; R — расстояние от центра Земли до спутника.

Под действием этой силы спутник равномерно движется по окружности с ускорением $a = \frac{v^2}{R}$, поэтому $F = \frac{mv^2}{R}$, где v — скорость спутника. Учитывая, что $v = \omega R$, можно записать:

$$m\omega^2 R = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

Поскольку спутник с Земли все время кажется неподвижным, то $\omega = \omega_З = \frac{2\pi}{T}$, где T — период суточного вращения Земли: $T = 24$ ч. Поэтому

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

откуда

$$R = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} = 4{,}25 \cdot 10^7 \text{ м} = 42{,}5 \text{ Мм}.$$

Скорость движения спутника можно определить так:

$$v = \omega R = \frac{2\pi R}{T} \approx 3 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Пример 7. Сравнить ускорение свободного падения у поверхности Луны с ускорением свободного падения у поверхности Земли.

Решение. На тело массой m вблизи поверхности Земли и Луны будут действовать соответственно силы:

$$F_З = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}; \qquad F_Л = \gamma \frac{mM_Л}{R_Л^2},$$

где γ — гравитационная постоянная; $M_З$ и $M_Л$ — массы соответственно Земли и Луны; $R_З$ и $R_Л$ — радиусы Земли и Луны. Эти силы будут сообщать телу соответствующие ускорения свободного падения:

$$F_З = mg_З; \; F_Л = mg_Л,$$

поэтому

$$mg_З = \gamma \frac{mM_З}{R_З^2}; \; mg_Л = \gamma \frac{mM_Л}{R_Л^2},$$

откуда

$$\frac{g_Л}{g_З} = \frac{M_Л R_З^2}{R_Л^2 M_З} \approx 0{,}165.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.51. Определить экспериментально, на каком максимальном расстоянии от центра диска проигрывателя может удержаться монета при вращении с заданной скоростью.

1.52. При равномерном движении шарика массой 0,1 кг на стержне в вертикальной плоскости сила натяжения в нижней точке окружности 2 Н. Определить силу натяжения в верхней точке.

1.53. Автомобиль массой 10^4 кг движется по вогнутому мосту с радиусом кривизны 100 м. С какой силой давит автомобиль на мост в нижней точке при скорости движения 15 м/с?

1.54. С какой максимальной скоростью может повернуть мотоциклист на горизонтальной плоскости при коэффициенте трения 0,4, если радиус поворота 25 м?

1.55. Летчик массой 80 кг совершает петлю Нестерова радиусом 250 м. При этом скорость самолета 140 м/с. С какой силой давит летчик на сиденье кресла самолета в нижней точке петли?

1.56. На тело, имеющее точку опоры O, действуют параллельные силы $F_1=40$ Н и $F_2=10$ Н, плечи которых соответственно равны $l_1=0{,}2$ м и $l_2=0{,}8$ м (рис. 1.20). Чему равны момент равнодействующей силы относительно оси вращения и равнодействующая этих сил?

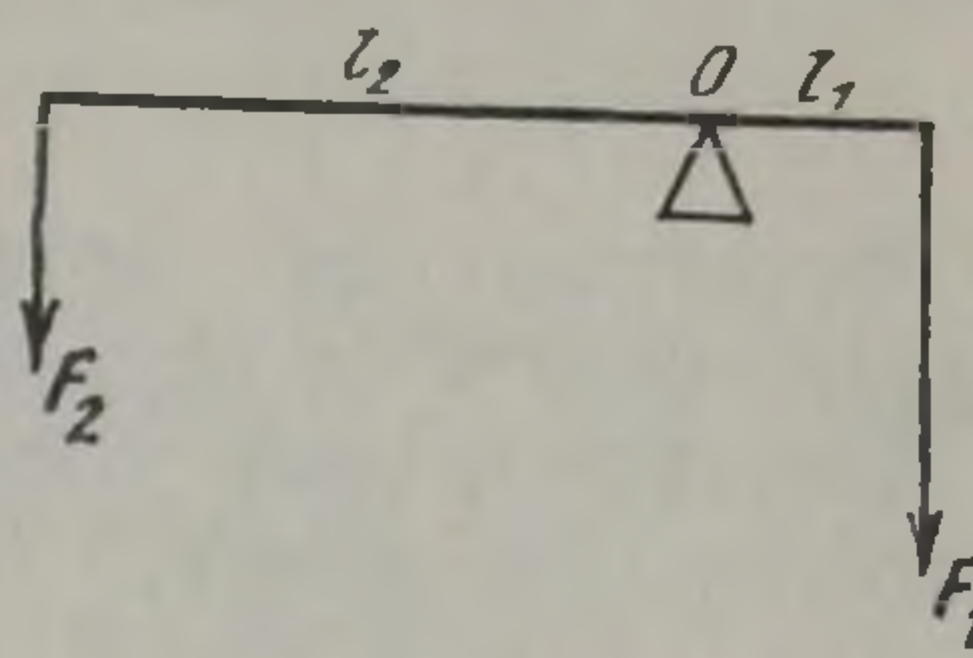


Рис. 1.20

1.57. Однородный стержень упирается одним концом в угол и удерживается за другой конец нитью. Масса стержня m, а угол его наклона к горизонту равен α. Чему равна сила натяжения нити (T), а также сила давления стержня на пол (N_1) и на стену (N_2)?

1.58. Гладкий однородный стержень длиной $2L$ опирается на край гладкой неподвижной полусферической чашки радиусом R. Какой угол образует стержень с горизонтом в положении равновесия?

1.59. Два шара одинакового объема (алюминиевый и цинковый) скреплены в точке касания. Найти центр тяжести системы.

1.60. Однородная пластинка имеет форму равностороннего треугольника со стороной 16 см. В пластинке вырезано круглое отверстие радиусом 2 см. Определить положение центра тяжести полученной фигуры при условии, что центр отверстия лежит на высоте, проведенной из вершины треугольника, а края отверстия касаются сторон треугольника.

1.61. Однородный прямоугольный кирпич лежит на наклонной плоскости. Какая половина кирпича (правая или левая) оказывает большее давление на наклонную плоскость?

1.62. Период обращения искусственного спутника Луны ($M_Л=7{,}3\cdot10^{22}$ кг; $R_Л=1{,}7\cdot10^6$ м) равен $7{,}44\cdot10^3$ с. Какова высота орбиты спутника над поверхностью Луны?

1.63. Во сколько раз превышает первая космическая скорость для Земли соответствующую скорость для Луны?

1.64. Центростремительное ускорение, с которым движется искусственный спутник Земли, 9,2 м/с². На какой высоте от поверхности Земли движется спутник?

1.65. Изменится ли плотность воздуха в кабине космического корабля в состоянии невесомости?

1.5. Работа, энергия, мощность

Основные законы и формулы

Работа постоянной силы **F**

$$A=FS\cos\alpha,$$

где S — модуль перемещения; α — угол между векторами силы **F** и перемещения **s**.

Если на тело действуют несколько сил, каждая из которых совершает над ним работу, то вся произведенная работа равна алгебраической сумме работ отдельных сил:

$$A=\sum_i A_i\ .$$

Мощность, развиваемая постоянной силой **F**, определяется формулой

$$N = \frac{A}{t} \text{ или } N = Fv\cos\alpha,$$

где A — работа, совершенная за время t; v — скорость движения.

Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v,

$$E_{к} = \frac{mv^2}{2}.$$

Формулы для потенциальной энергии имеют различный вид в зависимости от характера действующих сил.

Потенциальная энергия тела массой m, поднятого на высоту относительно земли,

$$E_{п} = mgh.$$

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$E_{п} = \frac{kx^2}{2},$$

где k — коэффициент упругости; x — величина деформации.

Полная механическая энергия системы тел равна арифметической сумме кинетических и потенциальных энергий всех тел, входящих в данную систему:

$$E = \sum E_{к} + \sum E_{п}.$$

Решение задач

Задачи данного раздела обычно делят на четыре группы: задачи на работу постоянной силы; задачи на работу переменной силы; задачи на расчет мощности; задачи на расчет энергии тела или системы тел.

1. При решении задач на работу постоянной силы необходимо прежде всего выяснить, какие силы приложены к телу, затем установить, проанализировав условие задачи, работу какой силы требуется определить. Чтобы воспользоваться формулой для расчета работы, надо знать направление действия силы, а также направление вектора перемещения. Если в условии задачи не заданы сила и перемещение, то силу следует найти из уравнений второго закона Ньютона, а величину перемещения — по формулам кинематики.

Пример 1. Какую работу совершает электровоз за $t=10$ мин, перемещая по горизонтальному пути состав массой $m=3\cdot10^6$ кг с постоянной скоростью $v=72$ км/ч, если коэффициент трения $\mu=0{,}005$?

Решение. В данном случае работа совершается силой тяги **F** электровоза. Кроме этой силы, на состав действует также сила трения $\mathbf{F}_{тр}$, направленная противоположно силе тяги. Направление действия силы **F** и перемещения **s** совпадают, т. е. $\alpha=0$, поэтому работа $A=Fs$.

Силу F можно определить из второго закона Ньютона:

$$\mathbf{F}+\mathbf{F}_{тр}=m\mathbf{a};\ F-F_{тр}=0,$$

так как $v=\text{const}$ и $a=0$. Тогда

$$F=F_{тр}=\mu N=\mu mg.$$

Величину перемещения s находим по формуле для определения пути равномерного движения: $s=vt$.

Работа $A=\mu mgvt=1{,}8\cdot 10^9$ Дж.

2. В задачах на работу переменной силы прежде всего необходимо выяснить характер изменения действующей силы на перемещении s. Работу переменной силы можно рассчитать по формуле $A=F_{\text{ср}}s$ при условии, что известно среднее значение силы на данном перемещении. Среднее значение силы методами элементарной математики можно вычислить лишь для простейшего случая, когда величина силы F изменяется пропорционально перемещению s:

$$F=ks,$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности. Обычно такими силами являются сила упругости пружины, переменная сила трения, переменная выталкивающая сила. Среднее значение переменной силы на каком-либо перемещении в данном случае определяют как полусумму значений сил F_1 и F_2 в начале и в конце этого перемещения:

$$F_{\text{ср}}=\frac{F_1+F_2}{2}.$$

Если $F_1=0$ и $F_2=F$, то $F_{\text{ср}}=\frac{F}{2}$.

Пример 2. Найти работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на $x=20$ см, если известно, что сила упругости пропорциональна деформации и под действием силы $F=29{,}4$ Н пружина сжимается на 1 см.

Решение. В данном случае сила, действующая со стороны упругой пружины на растягивающие тела, $F=kx$, где k — коэффициент упругости, x — величина деформации. Величина силы изменяется в зависимости от величины x. Поэтому работа такой силы может быть определена по формуле $A=F_{\text{ср}}x$, где $F_{\text{ср}}=\frac{F_1+F_2}{2}$. В нашем случае начальная величина деформации $x_0=0$, поэтому $F_1=kx_0=0$, $F_2=kx$, следовательно, $A=\frac{kx^2}{2}$.

Как следует из условия задачи, коэффициент упругости $k=29{,}4$ Н/см. Зная k и x, находим работу: $A=5{,}88\cdot 10^3$ Дж.

Пример 3. Деревянный кубик со стороной $a=10$ см плавает в воде так, что его центр находится на $h=4$ см выше поверхности воды. Какую работу надо совершить, чтобы погрузить кубик в воду наполовину?

Решение. Кубик плавает в равновесии, если его сила тяжести уравновешивается силой Архимеда, т. е.

$$mg=F_A \text{ или } mg=\rho V_0 g,$$

где ρ — плотность воды; V_0 — объем части кубика, погруженной в воду.

Если погрузить кубик в воду на глубину x, то сила Архимеда превысит силу тяжести кубика и результирующая сила, выталкивающая кубик из воды,

$$F_x=F'_{\text{А}}-mg,$$

где $F'_{\text{А}}=\rho V_1 g$; V_1 — объем погруженной части кубика.

Против силы F_x и должна быть совершена работа. Выразим величину этой силы через расстояние x:

$$F_x=\rho V_1 g-mg=\rho V_1 g-\rho V_0 g,$$

где $V_0=Sh_0$; $V_1=Sh_1$; $S=a^2$; $h_0=\frac{a}{2}-h=1$ см.

Таким образом,

$$F_x=\rho a^2h_1g-\rho a^2h_0g;\ h_1=x+h_0.$$

Тогда $F_x=\rho a^2gx$. Сила F_x пропорциональна перемещению x. Значит, работу A можно определить так: $A=F_{cp}x$, $x=h$. Среднее значение силы

$$F_{cp}=\frac{F_1+F_2}{2},\ F_1=0;\ F_2=\rho a^2gh,$$

следовательно,

$$A=\frac{\rho a^2gh^2}{2}=0{,}08\ \text{Дж}.$$

3. Решение задач, связанных с расчетом мощности, развиваемой постоянной силой, основано на применении формул, определяющих величину мощности N. При этом прежде всего следует определить, какую мощность требуется рассчитать — среднюю или мгновенную. В зависимости от этого необходимо знать среднюю или мгновенную скорость движения, которую можно определить из формул кинематики. Если сила тяги не задана, то ее можно найти, составив основное уравнение динамики.

Пример 4. Поезд, отходя от станции, за $t=5$ мин развивает скорость $v=64{,}8$ км/ч. Масса поезда $m=6\cdot10^5$ кг, коэффициент трения $\mu=0{,}004$. Определить среднюю мощность локомотива за время равноускоренного движения.

Решение. Среднюю мощность, развиваемую силой тяги локомотива, можно определить по формуле

$$N_{cp}=F_т v_{cp}.$$

Силу тяги определяем из второго закона Ньютона. На поезд действует сила тяги $\mathbf{F}_т$ и сила трения $\mathbf{F}_{тр}$:

$$\mathbf{F}_т+\mathbf{F}_{тр}=m\mathbf{a}\ \text{или}\ F_т-F_{тр}=ma.$$

Так как $F_{тр}=\mu mg$, то $F_т=m(a+\mu g)$. Средняя скорость поезда определяется как

$$v_{cp}=\frac{s}{t}=\frac{at^2}{2t}=\frac{at}{2}=\frac{v}{2}.$$

Ускорение $a=\dfrac{v}{t}$. Тогда

$$N=\frac{mv}{2}\left(\frac{v}{t}+\mu g\right)=5{,}36\cdot10^5\ \text{Вт}.$$

Пример 5. Самолет массой $m=3\cdot10^3$ кг для взлета должен иметь скорость $v=360$ км/ч и длину разбега $s=600$ м. Какова должна быть минимальная мощность мотора, необходимая для взлета самолета? Силу сопротивления движению F_c считать пропорциональной силе нормального давления, средний коэффициент сопротивления μ принять равным 0,2. При разгоне самолет движется равноускоренно.

Решение. Минимальной мощностью, при которой самолет может набрать скорость, необходимую для отрыва от земли, будет мгновенная мощность мотора в момент взлета самолета:

$$N_{min}=F_т v,$$

где $F_т$ — сила тяги мотора; v — скорость, которую должен иметь самолет для взлета.

Согласно второму закону Ньютона, $F_т-F_c=ma$ или $F_т-\mu mg=ma$, откуда сила тяги мотора $F_т=ma+\mu mg$.

Поскольку известны длина s разбега самолета и скорость его при отрыве, ускорение a можно найти по формуле

$$a = \frac{v^2}{2s}.$$

Тогда

$$N_{\min} = mv\left(\frac{v^2}{2s} + \mu g\right) = 3 \text{ МВт}.$$

4. Решая задачи на расчет энергии тела или системы тел, пользуются соответствующими формулами для определения кинетической, потенциальной или полной энергии. При расчете потенциальной энергии необходимо вначале выяснить характер действующих сил, чтобы использовать соответствующие формулы. Определяя потенциальную энергию тела, поднятого над землей, следует выбрать нулевой уровень отсчета высоты h. Чаще всего таким уровнем является земная поверхность. Если в условии задачи необходимые для расчетов энергии величины скорости и высоты не заданы, то их можно определить на основании кинематических формул.

Пример 6. Спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом r. В какой пропорции сообщенная ему при запуске энергия поделилась между потенциальной и кинетической энергиями?

Решение. Считая, что спутник движется по круговой орбите, кинетическую энергию его можно определить по формуле

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR^2}{2r},$$

где m — масса спутника; v — его скорость; R — радиус Земли.

Если выбрать начало отсчета потенциальной энергии на бесконечности, то на поверхности Земли $E_п(R) = -mgR$, а на орбите

$$E_п(r) = -mg\frac{R^2}{r}.$$

Следовательно, при выводе спутника на орбиту ему была сообщена потенциальная энергия

$$E_п = E_п(r) - E_п(R) = mgR\left(1 - \frac{R}{r}\right).$$

Искомое отношение энергий выразится следующим образом:

$$\frac{E_п}{E_к} = 2\frac{r-R}{R}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.66. Какую работу нужно совершить, чтобы равномерно переместить тело массой 500 кг со скоростью 10 м/с за 5 с? Считать, что направление силы совпадает с направлением движения, а коэффициент трения 0,02.

1.67. Автомобиль массой $2 \cdot 10^3$ кг трогается с места с ускорением 20 м/с^2 и разгоняется в течение 5 с на горизонтальном пути. Какая работа совершается за это время, если коэффициент сопротивления 0,01?

1.68. Тело массой 20 кг поднимают равноускоренно из состояния покоя на высоту 20 м за 10 с. Определить величину совершенной работы. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.69. Вагонетку массой $3 \cdot 10^3$ кг поднимают по рельсам в гору, наклон которой к горизонту составляет 30°. Какую работу совершила сила тяги на пути 50 м, если известно, что вагонетка двигалась с ускорением 0,2 м/с^2? Коэффициент трения 0,1.

1.70. Груз массой 31 кг перемещают с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности с помощью силы, действующей под углом 60° к горизонту. Коэффициент трения 0,7. При перемещении тела на 5 м была совершена работа 500 Дж. Чему равна величина приложенной к грузу силы?

1.71. Концы двух пружин одинаковой длины, имеющих коэффициенты жесткости 9,8 и 19,6 Н/см, соединены параллельно. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины на 1 см?

1.72. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть пружины (см. задачу 1.71), если их концы соединены последовательно?

1.73. Кубик со стороной 6 см удерживается внешней силой под водой так, что его верхние точки касаются поверхности воды. Какую работу произведет выталкивающая сила, если отпустить кубик и предоставить ему возможность свободно плавать? Плотность вещества, из которого изготовлен кубик, 500 кг/м^3.

1.74. Поезд массой 10^6 кг, идущий по горизонтальному пути со скоростью 36 км/ч, останавливается через 40 с от начала торможения. Определить среднюю мощность, развиваемую при торможении.

1.75. Танк массой $3 \cdot 10^4$ кг поднимается в гору с углом наклона 30° к горизонту. Какую максимальную скорость может развить танк при полезной мощности $3{,}6 \cdot 10^5$ Вт? Сопротивлением движению пренебречь.

1.76. Какую мощность развивает двигатель автомобиля массой 10^3 кг, если известно, что автомобиль движется с постоянной скоростью 36 км/ч: а) по горизонтальной дороге; б) в гору с уклоном 5 м на каждые 100 м пути; в) под гору с тем же уклоном. Коэффициент трения 0,07.

1.77. Тело массой 10 кг свободно падает с высоты 20 м из состояния покоя. Чему равна кинетическая энергия в момент удара о землю и в какой точке траектории кинетическая энергия в 3 раза больше потенциальной? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.78. Тело массой 10 кг брошено со скоростью 10 м/с под углом 30° к горизонту. Чему равна полная энергия тела через 0,5 с после бросания?

1.79. В результате трения в верхних слоях атмосферы механическая энергия спутника Земли за много витков уменьшилась на 2 %. Орбита спутника при этом как была, так и осталась круговой. Как изменился радиус орбиты?

1.6. Законы сохранения в механике

Основные законы и формулы

Систему взаимодействующих тел называют *замкнутой*, если на нее извне не действуют другие тела. Для такой системы выполняется закон сохранения импульса: импульс замкнутой системы есть величина постоянная, т. е. $\mathbf{k}=\mathrm{const}$. Для системы, состоящей из n тел, этот закон можно записать в виде

$$m_1\mathbf{v}_1+m_2\mathbf{v}_2+\ldots+m_n\mathbf{v}_n=\mathrm{const}.$$

В замкнутой механической системе тел при любых переходах системы из одного состояния в другое полная энергия системы остается неизменной (закон сохранения энергии):

$$E=E_к+E_п=\mathrm{const}.$$

Из закона сохранения механической энергии следует, что для замкнутой системы изменение полной энергии

$$\Delta E=0.$$

Если на тело или систему тел действуют внешние силы, то изменение полной механической энергии равно работе этих сил:

$$\Delta E = A.$$

Решение задач

При решении задач на законы сохранения в механике следует иметь в виду, что как импульс, так и энергия тела зависят от выбора системы отсчета. Поэтому при составлении уравнений, выражающих законы сохранения импульса и энергии, необходимо рассматривать движения всех тел в одной и той же инерциальной системе отсчета. В качестве такой системы отсчета часто используют систему, связанную с Землей. Иногда удобно выбирать систему так, чтобы одно из тел в некоторый момент взаимодействия было неподвижным относительно этой системы.

Задачи по этой теме можно разделить на три группы: задачи на закон сохранения импульса; задачи на закон сохранения энергии; комбинированные задачи.

1. Закон сохранения импульса связывает начальное и конечное значения импульса замкнутой системы и позволяет исключать из рассмотрения внутренние силы. Поэтому этот закон применяют при решении задач, в которых силы взаимодействия между отдельными телами системы являются величинами переменными, причем характер их изменения во времени сложен или вообще неизвестен. К таким задачам можно отнести задачи на разрыв одного тела на части или соединение нескольких тел в одно, задачи на удар и задачи на движение одних тел по поверхности других.

Проанализировав условие задачи, прежде всего необходимо выяснить, является ли рассматриваемая система тел замкнутой. Иногда может оказаться, что сумма внешних сил, действующих на систему, не равна нулю, но есть такое изолированное направление, для которого сумма проекций всех внешних сил равна нулю. Для этого направления проекция импульса системы будет величиной постоянной.

Выбрав систему координат и направив координатные оси Ox и Oy, записывают закон сохранения импульса в проекциях на эти оси:

$$K_x = \mathrm{const}; \ K_y = \mathrm{const}.$$

Эти равенства могут быть использованы в качестве основных уравнений для определения искомых величин. Если число неизвестных больше числа составленных уравнений, то нужно добавить к ним уравнения, связывающие кинематические величины.

Если система не замкнута, но есть изолированное направление, то записывают закон сохранения импульса для этого направления. Следует иметь в виду также и тот факт, что если в системе происходит быстрое изменение импульсов, вызванное взаимодействием тел, то продолжительность взаимодействия считается бесконечно малой. Это обстоятельство позволяет применять закон сохранения импульса даже в тех случаях, когда на систему действуют внешние силы. Поэтому, например, не учитывается действие силы тяжести и силы сопротивления на тела, находящиеся у поверхности Земли, при их столкновениях или разрывах.

Пример 1. Конькобежец, стоя на коньках на льду, бросает груз массой $m=10$ кг под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Груз падает на расстоянии $s=2,2$ м от точки бросания. Какова будет начальная скорость движения конькобежца, если масса его $M=64$ кг? Перемещением конькобежца во время броска пренебречь.

Решение. В этом случае систему Земля — конькобежец — груз можно считать замкнутой. До броска скорость груза $v_1=0$ и скорость конькобежца $v_2=0$. Следовательно, $K_1=mv_1+Mv_2=0$. После броска импульс груза mu_1, конькобежца Mu_2. Поскольку масса Земли значительно превышает m и M, то импульс, который приобретает Земля в результате взаимодействия, практически равен нулю. Поэтому после броска импульс системы $\mathbf{K}_2=m\mathbf{u}_1+M\mathbf{u}_2$. Учитывая тот факт, что направления скоростей $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ противоположны, получим $K_2=$ $=mu_1-Mu_2$.

Координатную ось Ox направим по горизонтали. Закон сохранения импульса в проекциях на ось Ox запишется в виде $Mu_2-mu_1\cos\alpha=0$, откуда начальная скорость конькобежца

$$u_2=\frac{mu_1\cos\alpha}{M}.$$

Скорость u_1 можно определить, зная дальность полета груза s:

$$s=\frac{u_1^2\sin 2\alpha}{g},$$

откуда

$$u_1=\sqrt{\frac{sg}{\sin 2\alpha}}.$$

Тогда

$$u_2=\frac{m}{M}\sqrt{\frac{sg\operatorname{ctg}\alpha}{2}}=0,675 \text{ м/с}.$$

Пример 2. Граната, летящая со скоростью $v_1=10$ м/с, разорвалась на два осколка. Больший осколок, масса которого составила 60 % массы всей гранаты, продолжал двигаться в прежнем направлении, но с увеличенной скоростью $u_1=$ 25 м/с. Чему равна скорость меньшего осколка?

Решение. Импульс гранаты до взрыва $K_1=Mv_1$, где M — масса всей гранаты. После взрыва импульс системы $K_2=m_1u_1+m_2u_2$, но $m_1=0,6\ M$, $m_2=0,4\ M$. Тогда $K_2=0,6Mu_1+0,4Mu_2$.

Согласно закону сохранения импульса,

$$Mv_1=0,6Mu_1+0,4Mu_2,$$

откуда

$$u_2=\frac{v_1-0,6\,u_1}{0,4}=-12,5 \text{ м/с}.$$

Минус указывает на то, что меньший осколок после взрыва движется в противоположном направлении.

Пример 3. Лодка стоит неподвижно в стоячей воде. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние переместится лодка, если масса человека $m_1=60$ кг, масса лодки $m_2=120$ кг, длина лодки $l=3$ м? Сопротивлением воды пренебречь.

Решение. Систему лодка — человек можно считать замкнутой. Поэтому применим закон сохранения импульса. До взаимодействия (перехода человека с носа на корму) все тела системы находились в состоянии покоя ($K_1=0$). Как только человек пойдет по лодке, последняя станет двигаться ему навстречу. Пусть v_1 — скорость человека относительно лодки, v_2 — скорость, которую приобретает лодка. Тогда импульс системы после взаимодействия

$$K_2=m_1(v_1-v_2)-m_2v_2.$$

На основании закона сохранения импульса

$$m_1(v_1-v_2)-m_2v_2=0.$$

Записывая закон сохранения, абсолютные скорости тел мы брали относительно неподвижной системы отсчета (вода). Поскольку человек и лодка движутся одновременно и время разгона и торможения мало, можно считать, что $v_1=\frac{l}{t}$, $v_2=\frac{s}{t}$. Тогда

$$m_1(l-s)-m_2s=0,$$

откуда

$$s=\frac{m_1 l}{m_1+m_2}=1 \text{ м}.$$

2. Применение закона сохранения энергии упрощает решение задач, в которых рассматриваются два состояния системы взаимодействующих тел, и позволяет не рассматривать действующие между телами силы.

Прежде чем применять закон сохранения, необходимо выделить два состояния системы, затем выбрать уровень отсчета потенциальной энергии. Определив полную энергию системы в обоих состояниях, записывают закон сохранения энергии: $E_1=E_2$. Если при переходе системы тел из начального состояния в конечное на тела действовали внешние силы, то составляют равенство $E_2-E_1=A$, где A — работа внешних сил.

Пример 4. Тело массой m бросили вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=10$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, на какой высоте h скорость тела уменьшается вдвое.

Решение. Первое состояние тела — в точке бросания, второе — на высоте h. Полная энергия тела в первом состоянии

$$E_1=E_{к0}=\frac{mv_0^2}{2}.$$

За нулевой уровень отсчета потенциальной энергии принимаем нижнее положение тела.

Во втором состоянии

$$E_2=E_{к2}+E_{п2}=\frac{mv^2}{2}+mgh.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$E_1=E_2 \text{ или } \frac{mv_0^2}{2}=\frac{mv^2}{2}+mgh.$$

Но по условию задачи $v=\frac{v_0}{2}$. Тогда

$$v_0^2=\frac{v_0^2}{4}+2gh,$$

откуда

$$h = \frac{3v_0^2}{8g} \approx 3,83 \text{ м}.$$

Пример 5. Небольшое тело массой m соскальзывает вниз по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом $R=0{,}2$ м. С какой высоты h должно начать свое движение тело, чтобы не оторваться от желоба в верхней точке петли? Трением пренебречь.

Решение. Первым состоянием тела будем считать его состояние на высоте h, вторым — состояние верхней точки петли. Полная энергия тела в этих состояниях соответственно равна:

$$E_1 = mgh; \quad E_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh_1,$$

где $h_1=2R$, тогда

$$E_2 = \frac{mv^2}{2} + mg \cdot 2R.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + 2mgR, \quad h = \frac{v^2}{2g} + 2R.$$

Чтобы найти v, рассмотрим силы, действующие на тело в верхней точке. В общем случае на тело действуют две силы: сила тяжести $\mathbf{F}=m\mathbf{g}$ и сила реакции желоба $\mathbf{N}$. По второму закону динамики,

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}.$$

Согласно условию задачи, требуется определить высоту h для предельного случая, когда $N=0$. Тогда

$$mg = \frac{mv^2}{R},$$

откуда $v^2=gR$. Высота $h=2{,}5\,R=0{,}5$ м.

Пример 6. Тело массой $m=100$ кг упало на землю с высоты $h=75$ м через $t=5$ с после начала движения. Определить работу силы сопротивления F_c, считая силу постоянной.

Решение. В данном случае систему нельзя считать замкнутой. Поэтому $\Delta E=A$. Первое состояние тела — на высоте h, второе — в момент падения на землю, следовательно,

$$E_1 - E_2 = A = F_c h;$$

$$E_1 = mgh; \quad E_2 = \frac{mv^2}{2}.$$

Чтобы найти скорость v, воспользуемся формулами кинематики:

$$h = \frac{at^2}{2}; \quad v = at,$$

откуда $v = \dfrac{2h}{t}$. Тогда

$$A = F_c h = mgh - \frac{2mh^2}{t^2} = 28{,}5 \text{ кДж}.$$

3. Решение большой группы задач требует одновременного использования законов сохранения импульса и энергии. Эти уравнения в сочетании с уравнением второго закона динамики во многих

задачах составляют полную систему уравнений, описывающих рассматриваемое явление. При составлении уравнений на основании законов сохранения в данном случае следует учитывать также все те особенности, которые указывались выше (пп. 1 и 2).

Пример 7. Тело массой $m_1=3$ кг движется со скоростью $v_1=4$ м/с и ударяется о неподвижное тело массой $m_2=m_1$. Считая удар центральным и неупругим, найти количество теплоты, выделившееся при ударе.

Решение. Количество теплоты, выделившееся при ударе, равно разности энергий тел до удара E_1 и после удара E_2:

$$Q=E_1-E_2.$$

До удара обладало кинетической энергией только первое тело. Поэтому

$$E_1=\frac{m_1v_1^2}{2}.$$

После неупругого удара оба тела начали двигаться с общей скоростью u. Поэтому энергия тел после удара

$$E_2=\frac{(m_1+m_2)\,u^2}{2}.$$

Чтобы найти скорость u, воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1v_1=(m_1+m_2)\,u,$$

откуда

$$u=\frac{m_1v_1}{m_1+m_2}.$$

Тогда количество теплоты

$$Q=\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_1v_1^2}{2\,(m_1+m_2)}=\frac{3\,m_1v_1^2}{4}=12 \text{ Дж}.$$

Пример 8. Пуля массой $m=10$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v=300$ м/с, ударяет в подвешенный на нитях деревянный брусок массой $M=6$ кг и застревает в нем. Определить, на какую высоту поднимается брусок.

Решение. В горизонтальном направлении на пулю и брусок внешние силы не действуют, поэтому можем записать:

$$mv=(M+m)\,u,$$

где u — скорость бруска сразу после попадания пули.

Рассмотрев два состояния бруска с пулей: в нижней точке и после подъема на высоту h, можно записать на основании закона сохранения энергии:

$$\frac{(M+m)\,u^2}{2}=(M+m)\,gh,$$

откуда

$$h=\frac{u^2}{2\,g}=\frac{m^2v^2}{2\,g\,(M+m)^2}=1{,}28 \text{ см}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.80. Конькобежец массой 70 кг, стоя на коньках на льду, бросает тело массой 3 кг в горизонтальном направлении со скоростью 8 м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец? Коэффициент трения коньков о лед равен 0,02.

1.81. Человек массой 60 кг догоняет тележку массой 80 кг, движущуюся со скоростью 2,9 км/ч, и вскакивает на нее. После этого тележка начала двигаться со скоростью 5,14 км/ч. Чему была равна скорость движения человека? С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек бежит ей навстречу с той же скоростью?

1.82. Тело массой 2 кг движется навстречу второму телу массой 1,5 кг и неупруго сталкивается с ним. Скорость тел перед столкновением была равна соответственно 1 и 2 м/с. Какое расстояние пройдут тела после столкновения, если коэффициент трения 0,05?

1.83. Снаряд массой m, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v_0=10$ м/с, разрывается на два осколка массами m_1 и m_2 ($m_2=3m_1$), которые разлетаются под равными углами 60° к первоначальному направлению снаряда. Чему равны скорости движения осколков?

1.84. Лодка длиной 3 м и массой 120 кг стоит в спокойной воде. На носу и корме лодки сидят два человека, массы которых 60 и 70 кг. На сколько сдвинется лодка, если они пройдут по лодке и поменяются местами? Сопротивлением воды пренебречь.

1.85. Находящийся в лодке человек хочет определить ее массу. Сможет ли он это сделать, если собственная масса ему известна, но ничем, кроме длинной веревки, он не располагает?

1.86. Тело массой m брошено под некоторым углом к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. На какой высоте скорость тела уменьшится в 3 раза? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.87. Небольшое тело массой 1 кг начинает соскальзывать без трения с высоты 2,5 м по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом 1 м. Чему равна сила реакции опоры в момент прохождения телом верхней точки петли?

1.88. Шарик массой 20 г, падая с высоты 1 м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту 81 см. Чему равно количество теплоты, выделившееся при ударе? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.89. Груз массой 1 кг падает с высоты 240 м и углубляется в песок на 0,2 м. Чему равна средняя сила сопротивления грунта? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.90. Насколько сожмет пружину гиря, брошенная вертикально вниз с высоты 2 м со скоростью 1 м/с? Масса гири 1 кг, коэффициент упругости пружины $2{,}94 \cdot 10^3$ Н/м. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.91. Тело массой 2 кг падает с высоты 20 м из состояния покоя и в момент удара о землю имеет скорость 15 м/с. Чему равна работа силы сопротивления?

1.92. Два шара подвешены на параллельных нитях одинаковой длины таким образом, что они соприкасаются. Массы шаров 0,2 и 0,1 кг. Первый шар отклоняют так, что его центр поднимается на высоту 4,5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если удар: а) упругий; б) неупругий?

1.93. После упругого удара о неподвижное ядро углерода нейтрон движется в направлении, перпендикулярном к первоначальному. Масса ядра углерода в 12 раз больше массы нейтрона. Во сколько раз уменьшится энергия нейтрона в результате удара?

1.94. Атом распадается на две равные части, которые летят со скоростями v_1 и v_2 под углом α друг к другу. Зная, что общая кинетическая энергия частей атома E, определить его массу и кинетическую энергию до разрыва. Дефект массы не учитывать.

1.95. Топливо в ракете сгорает равными порциями массой m каждая. Сгорание происходит мгновенно. Будет ли скорость истечения газов относительно ракеты постоянна, если при сгорании каждой порции механическая энергия системы меняется на одинаковую величину?

1.96. Сравнить вторые космические скорости для Земли и Луны.

1.97. На какой угол изменится направление скорости пролетающего мимо Земли метеорита под действием земного притяжения? Скорость метеорита на большом расстоянии от Земли равна v_0, прицельное расстояние l.

1.7. Гидроаэростатика

Основные законы и формулы

В гидроаэростатике рассматриваются условия и закономерности равновесия жидкостей и газов под воздействием приложенных к ним сил, а также условия равновесия твердых тел, находящихся в жидкостях или газах.

Распределение сил давления по поверхности соприкосновения твердого тела с жидкостью характеризуется давлением — силой F, действующей на единицу поверхности перпендикулярно к поверхности S. Давление определяют по формуле

$$p = \frac{F}{S}. \tag{1.7}$$

Давление, вызванное силой тяжести и зависящее от глубины под поверхностью жидкости, называется *гидростатическим*. Для несжимаемой жидкости, в которой отсутствуют силы трения между ее отдельными слоями, гидростатическое давление на глубине h

$$p = \rho g h. \tag{1.8}$$

Давление на боковую стенку на любой глубине определяется по формуле (1.8), а среднее давление равно 1/2 давления на дно сосуда. Сила давления на боковую стенку сосуда равна произведению среднего бокового давления на площадь стенки:

$$F_б = \frac{1}{2} \rho g h S. \tag{1.9}$$

Распределение давления внутри жидкости и газа при действии поверхностных сил определяется законом Паскаля: жидкость (или газ) передает производимое на нее поверхностными силами внешнее давление по всем направлениям без изменения. Из закона Паскаля следует:

1) полное давление в любой точке жидкости складывается из давления p_0 на ее поверхности и гидростатического давления столба жидкости, находящейся над этой точкой:

$$p = p_0 + \rho g h; \tag{1.10}$$

2) в сообщающихся сосудах однородные жидкости устанавливаются на одном уровне;

3) при равновесии разнородных жидкостей в сообщающихся сосудах высоты столбов этих жидкостей обратно пропорциональны их плотностям:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \tag{1.11}$$

На тело, погруженное в жидкость (газ), действует выталкивающая (архимедова) сила, направленная вертикально вверх и равная силе тяжести вытесненной жидкости (или газа) в объеме погруженной части тела:

$$F = \rho_ж g V.$$

Решение задач

Задачи по гидро- и аэростатике весьма разнообразны по содержанию и степени сложности, но по методам решения их можно разделить на две основные группы: задачи на расчет давления и сил давления; задачи, в которых вычисляют или учитывают архимедову силу.

1. Решение задач, связанных с вычислением давления и сил давления на каком-либо уровне внутри жидкости, основано на применении закона Паскаля и его следствий. Основными расчетными при этом являются соотношения (1.8) — (1.11). Формула (1.8) носит общий характер: давление не зависит от того, какую форму имеет сосуд, содержащий жидкость (гидростатический парадокс).

При расчете силы давления по формуле (1.7) следует помнить что если $p = \text{const}$, сила давления $F = pS$. Если $p \neq \text{const}$, то $F = \sum_{i=1}^{n} p_i \Delta S_i$, где ΔS_i — элемент площади плоской поверхности, давление на которой равно p_i.

В случае криволинейной поверхности сила давления $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i$, где $\mathbf{F}_i$ — сила давления на малом практически плоском участке поверхности.

Обычно задачи на применение закона сообщающихся сосудов решают в такой последовательности. Сначала делают чертеж, на котором отмечают начальный уровень жидкости и выбирают поверхность одного уровня на границе раздела сред (если налито несколько слоев жидкости, эту поверхность следует выбирать на самой нижней границе). Затем записывают уравнение равновесия жидкости. Если до момента равновесия жидкость переливалась из одной части сосуда в другую, то к составленному уравнению добавляется условие несжимаемости жидкости $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Решают полученную систему уравнений совместно относительно искомой величины.

Пример 1. В сосуд призматической формы, в основании которого лежит прямоугольник со сторонами $a = 10$ см, $b = 15$ см, налит слой воды высотой $h = 10$ см. Определить силу давления на дно и стенки сосуда. Какова должна быть высота слоя воды в сосуде, чтобы силы давления воды на дно и стенки сосуда были равны между собой?

Решение. Так как поверхность дна сосуда плоская и $p = \text{const}$, то, согласно формуле (1.7), сила давления на дно $F_1 = p_1 S_1$ или, с учетом формулы (1.8), $F_1 = \rho ghab$, где S_1 — площадь дна сосуда.

Давление на боковую стенку сосуда будет меняться от $p_1 = \rho gh$ до $p_2 = 0$ при изменении высоты от h до 0. Поэтому среднее давление на стенку $p_{\text{ср}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, а сила давления $F_2 = p_{\text{ср}} S_2$, где $S_2 = 2(a + b)h$ — площадь боковых стенок сосуда. Следовательно,

$$F_2 = \frac{1}{2} \rho gh \cdot 2(a + b) h = \rho gh^2 (a + b).$$

Уровень H воды в сосуде, при котором силы давления на боковые стенки и дно одинаковы, находим из равенства сил давления на дно и стенки сосуда: $\rho gHab =$

$= \rho g H^2 (a + b)$. Отсюда $H = \dfrac{ab}{a+b}$. Подставив численные значения, получим: $F_1 = 14{,}7$ Н, $F_2 = 24{,}5$ Н, $H = 0{,}06$ м.

Пример 2. В трех одинаковых сообщающихся сосудах находится ртуть. На сколько повысится уровень ртути в среднем сосуде, если в левый сосуд налить слой воды высотой 102 мм, а в правый — высотой 153 мм?

Решение. Пусть в левом сосуде уровень ртути понизится на h_1, а в правом — на h_2. Тогда в среднем сосуде он повысится на $h_1 + h_2$ и станет выше, чем в левом, на $2h_1 + h_2$ и выше, чем в правом, на $2h_2 + h_1$. Поэтому

$$\rho_{рт} g (2h_1 + h_2) = \rho_в g H_1; \quad \rho_{рт} g (2h_2 + h_1) = \rho_в g H_2,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} 2h_1 + h_2 &= \frac{\rho_в}{\rho_{рт}} H_1; \\ 2h_2 + h_1 &= \frac{\rho_в}{\rho_{рт}} H_2, \end{aligned}\right|$$

где $\rho_{рт}$ и $\rho_в$ — плотности ртути и воды; H_1 и H_2 — высоты столбов в левом и правом сосудах. Подставив $\dfrac{\rho_в}{\rho_{рт}} = \dfrac{1}{13{,}6}$, $H_1 = 102$ мм и $H_2 = 153$ мм и решив эту систему уравнений, найдем $h_1 + h_2 = 6{,}25$ мм.

Пример 3. При помощи гидравлического пресса с отношением площадей 1 : 100 нужно поднять груз массой 100 т. Определить число ходов малого поршня в 1 мин, если за один ход он опускается на 20 см. Мощность двигателя пресса 5 кВт, КПД пресса 80 %.

Решение. Число ходов малого поршня пресса $n = \dfrac{A}{A_1}$, где A — работа двигателя пресса за время t, A_1 — работа двигателя за время одного хода малого поршня.

Определим работу A_1. Для подъема груза массой m, лежащего на большом поршне гидравлического пресса, нужно приложить силу $F_2 = mg$. При этом к малому поршню должна быть приложена сила $F_1 = F_2 \dfrac{S_1}{S_2}$, где S_1, S_2 — площади малого и большого поршней. Работа этой силы за один ход малого поршня

$$A_1 = F_1 h = F_2 \frac{S_1}{S_2} h.$$

Работа двигателя пресса за время подъема груза $A = \eta A'$, где $A' = Pt$, P — мощность двигателя. Таким образом, число ходов малого поршня пресса

$$n = \frac{\eta P t S_2}{m g S_1 h} = 120.$$

2. Решение задач второй группы основано на законах динамики поступательного движения твердого тела с учетом архимедовой силы. Для решения этих задач необходимо сделать чертеж и, указав на нем действующие на тело силы, составить основное уравнение динамики поступательного движения, если тело движется, либо записать условие равновесия в случае, если оно покоится. Затем нужно выразить силы, входящие в основное уравнение, через другие величины и записать это уравнение в развернутом виде. При необходимости составляют дополнительные соотношения и решают полученную систему уравнений относительно искомой величины.

Пример 4. Сплошной однородный шар, объем которого V, плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей. Плотность верхней жидкости ρ_1, нижней ρ_2, плотность материала шара ρ ($\rho_1<\rho<\rho_2$). Определить, какая часть объема шара будет находиться в верхней, а какая часть — в нижней жидкости.

Решение. Обозначим часть объема шара, находящуюся в верхней жидкости, через V_1, в нижней — через V_2, тогда $V=V_1+V_2$. На каждую из этих частей шара действуют силы тяжести $m_1\mathbf{g}$ и $m_2\mathbf{g}$, а также силы Архимеда $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$. Так как шар находится в равновесии, то $\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i=0$ или в проекции на ось Oy

$$m_1g+m_2g-F_1-F_2=0. \qquad (1.14)$$

Так как $m_1g=\rho gV_1$, $m_2g=\rho gV_2$, $F_1=\rho_1 gV_1$, $F_2=\rho_2 gV_2$, то, согласно формуле (1.14), $\rho g(V_1+V_2)=\rho_1 gV_1+\rho_2 gV_2$. Отсюда получим $\rho gV=\rho_1 gV_1+ +\rho_2 g(V-V_1)$ или $V_1=V\dfrac{\rho_2-\rho}{\rho_2-\rho_1}$. Аналогично $V_2=V\dfrac{\rho-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}$. Проверку полученных формул можно произвести методом предельных переходов. Если $\rho=\rho_1$, то $V_1=V\dfrac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}=V$, т. е. шар находится в верхней жидкости. Тот же результат получим, подставив $\rho=\rho_1$ в выражение для V_2:

$$V_2=V\frac{\rho_1-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}=0.$$

Если $\rho=\rho_2$, то $V_1=0$ и $V_2=V$, т. е. шар плавает в нижней жидкости.

Пример 5. С вышки, расположенной на высоте $h=1{,}5$ м над водой, падает вертикально тонкий алюминиемый стержень длиной $l=50$ см. Какова скорость стержня в момент удара о дно водоема, если глубина водоема у вышки $H=3$ м? Сопротивлением воздуха и воды движению стержня пренебречь.

Решение. Согласно закону сохранения энергии, изменение кинетической энергии стержня равно работе равнодействующей всех сил, действующих на стержень:

$$\Delta E=A. \qquad (1.15)$$

Найдем работу A. До того момента, когда стержень начинает погружаться в воду, на него действует только сила тяжести $mg=\rho_c lSg$ (S — площадь поперечного сечения стержня). Работа этой силы на первом участке пути стержня (до поверхности воды) $A_1=mgh=\rho_c lhSg$. Когда стержень достигнет поверхности воды, на него будут действовать две силы: сила тяжести $\rho_c glS$ и выталкивающая сила $\rho_в glS$, величина которой меняется по мере погружения стержня в воду по линейному закону от нуля до $\rho_в glS$. Следовательно, и равнодействующая сила на этом участке меняется по линейному закону от $\rho_c glS$ до $(\rho_c-\rho_в)glS$, а работа этой силы

$$A_2=F_{cp}l=\left(\rho_c-\frac{\rho_в}{2}\right)gl^2S.$$

При дальнейшем движении стержня равнодействующая сила постоянна и равна $(\rho_c-\rho_в)glS$. Работа этой силы $A_3=F(H-l)=(\rho_c-\rho_в)gl(H-l)S$. Тогда, согласно формуле (1.15):

$$\rho_c glh\,S+\left(\rho_c-\frac{\rho_в}{2}\right)gl^2S+(\rho_c-\rho_в)gl\,(H-l)\,S=\frac{\rho_c lSv^2}{2},$$

откуда

$$v=\sqrt{2g\left[H-\frac{\rho_в}{\rho_c}(H-0{,}5\,l)\right]}=8{,}4\ \text{м/с}.$$

Пример 6. Тонкий однородный стержень длиной l и поперечным сечением S верхним концом крепится к шарниру, а нижним погружается в жидкость заданной плотности $\rho_ж$. Определить плотность материала стержня ρ_c, если в жидкости находится $(1/n)$-я часть его длины (рис. 1.21).

Решение. На стержень действуют сила тяжести mg и выталкивающая сила F_A. Выразим эти силы через заданные в условии величины:

$$mg = \rho_c g S l; \; F_A = \rho_ж g S \frac{l}{n},$$

где Sl и $S\frac{l}{n}$ — объемы всего стержня и его части, погруженной в жидкость.

Чтобы найти плечи сил OE и OK, зададимся углом наклона α оси стержня к горизонтали. Тогда, согласно рис. 1.21,

$BD = \frac{l}{n}$, $BC = \frac{l}{2n}$, $AB = \frac{l}{2} - \frac{l}{n}$, $OC = \frac{l}{2} + \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{n}\right) + \frac{l}{2n} = l \times \frac{2n-1}{2n}$. Поскольку $OA\cos\alpha = \left(\frac{l}{2}\right)\cos\alpha$ и $OK\cos\alpha = l\,\frac{2n-1}{2n}\cos\alpha$, уравнение равновесия можно записать в виде

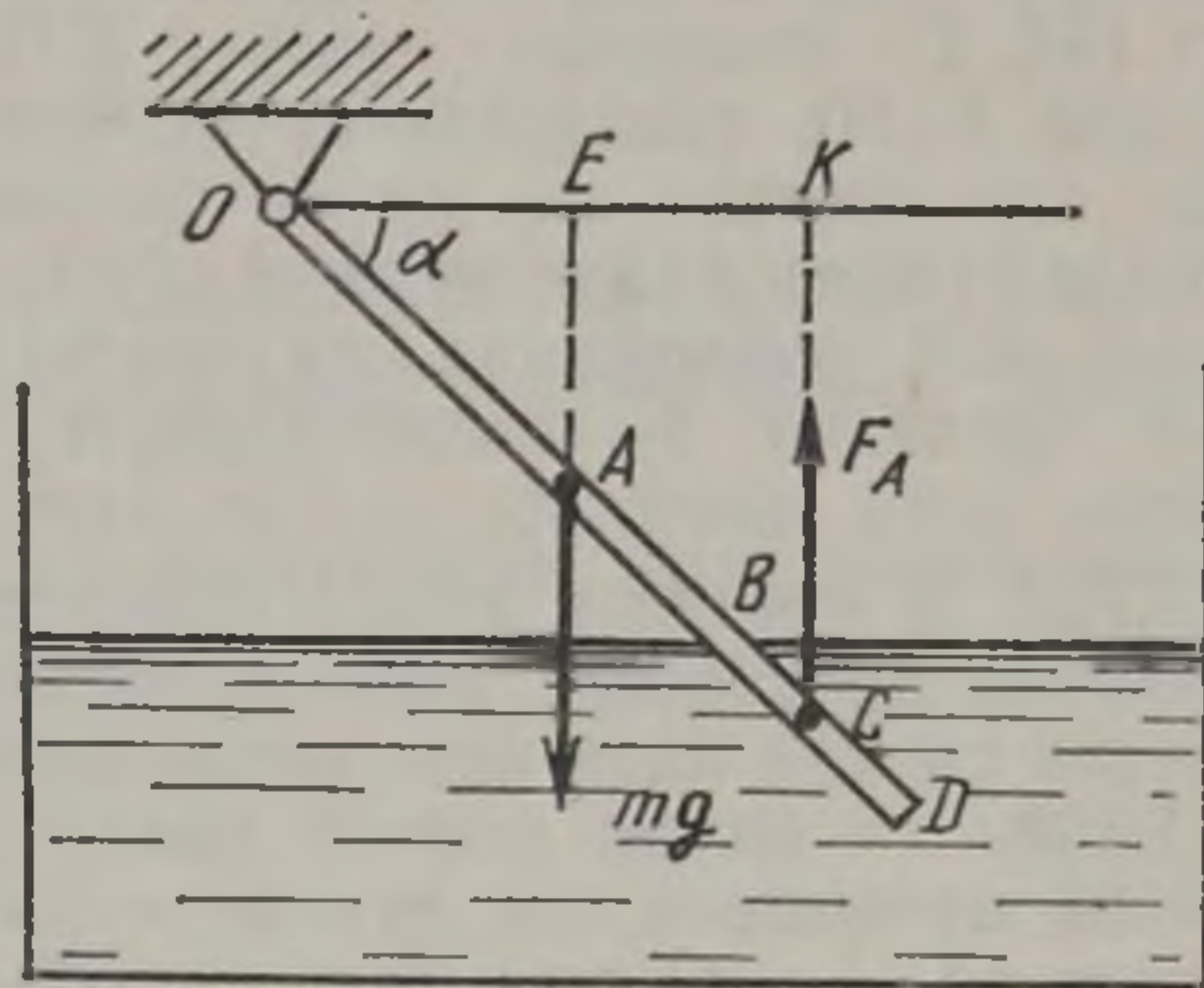


Рис. 1.21

$$\rho_c g l S \frac{l}{2}\cos\alpha = \rho_ж g \frac{l}{n} S l \frac{2n-1}{2n}\cos\alpha.$$

Отсюда после сокращения получим

$$\rho_c = \rho_ж \frac{2n-1}{n^2}. \qquad (1.16)$$

Проанализируем полученный результат. Если $\rho_c = \rho_ж$, стержень целиком погружен в жидкость и находится в безразличном равновесии, поскольку обе силы mg и F_A будут приложены в точке A и их модули одинаковы. При этом шарнир не будет воспринимать нагрузку и угол может принимать любые значения.

Если $n=2$, стержень может находиться в равновесии при $\rho_c < \rho_ж$; такой метод определения плотности применим только для стержней из веществ менее плотных, чем используемая в опыте жидкость.

Равновесие стержня плотностью ρ_c, погруженного в жидкость плотностью $\rho_ж$, выполняется при определенном значении ρ_c, которое можно найти из формулы (1.16). При этом угол наклона стержня может быть любым, но меньшим, чем $\pi/2$ рад. Это означает, что если при неподвижном шарнире сосуд с жидкостью поднимать, стержень будет поворачиваться вокруг точки O. Но при всех этих поворотах в жидкости будет находиться одна и та же часть длины стержня.

Задачи для самостоятельного решения

1.98. В сосуде содержатся три жидкости с неодинаковыми плотностями ρ_1, ρ_2, ρ_3. Жидкости расположены слоями, толщины которых равны h_1, h_2, h_3. Построить график зависимости давления на боковую стенку сосуда от глубины. Давление над свободной поверхностью верхнего слоя равно p_0.

1.99. В цилиндрический сосуд налиты равные массы ртути и воды. Общая высота слоев ртути и воды 150 см. Определить давление на дно сосуда в случае, когда сосуд: а) покоится; б) движется вертикально с ускорением свободного падения.

1.100. Определить силу давления жидкости на боковую поверхность конического сосуда высотой H и площадью дна S. Масса жидкости m, ее плотность ρ. Рассмотреть случаи, если сосуд сужается: а) книзу; б) кверху.

1.101. Сосуд с жидкостью движется равномерно по прямолинейному горизонтальному пути. Как будет расположена свободная поверхность жидкости при движении сосуда с ускорением $a=g$?

1.102. Два сообщающихся сосуда A и B наполнены однородной жидкостью. Изменится ли уровень жидкости в сосуде B, если нагреть жидкость в сосуде A? Рассмотреть случаи, если сосуд A: а) цилиндрический; б) конический, расширяющийся кверху; в) конический, расширяющийся книзу.

1.103. Диаметр одного из колен U-образной трубки в 2 раза больше диаметра второго. В трубку налили ртуть, а затем в ее узкое колено воду. На сколько изменятся уровни ртути в коленах сосуда, если высота водяного столба 50 см?

1.104. С помощью пресса, КПД которого 75 % и отношение площадей поршней 1 : 50, требуется в течение 0,5 мин спрессовать груз массой 80 т так, чтобы при сжатии его на 30 см наибольшая сила давления груза на верхнюю площадку пресса достигла 1 МН. Определить: совершенную прессом работу, считая, что деформация по вертикали пропорциональна величине сжимающей силы; среднюю и максимальную мощности двигателя; число ходов малого поршня, если известно, что за ход малый поршень опускается на 10 см.

1.105. В сосуде с водой плавает кусок льда с примерзшей к нему пробкой. Изменится ли уровень воды в сосуде, если лед растает? Рассмотреть также случай, если внутри льда находится железный шарик.

1.106. На одном рычаге уравновешены два тела разной массы из одного и того же материала, на другом — два тела равной массы из разных материалов, на третьем — два тела равных объемов из разных материалов. Нарушится ли равновесие каждого из рычагов, если тела погрузить в воду?

1.107. Как, имея только линейку, определить плотность дерева, из которого изготовлена палочка, плавающая в узком цилиндрическом сосуде?

1.108. При помощи весов с разновесом, стакана с водой и штатива определить плотность металла, находящегося в одном из двух кусков пластилина, если известно, что массы пластилина в обоих кусках одинаковы. Извлекать металл из пластилина не разрешается.

1.109. Куб с ребром 1 м плавает в воде так, что глубина погружения нижней грани равна 0,25 м. После того как на куб положили камень объемом 10 дм^3, глубина погружения нижней грани увеличилась на 2 см. Определить плотность вещества куба и плотность камня.

1.110. Определить объем полости шара радиусом 3 см, если при погружении его в ртуть он плавает так, что 2/3 объема находится в воздухе.

1.111. Для транспортировки стальных труб морем их заваривают с двух сторон так, чтобы они были водонепроницаемыми. Определить, при каком наименьшем внутреннем диаметре труба длиной 5 м и массой 3,9 т не утонет.

1.112. Деталь отлита из сплава железа и никеля. Определить, какой процент по объему составляют железо и никель, если деталь весит в воздухе 34,2 Н, а в воде 30,2 Н.

1.13. Кусок пробки весит в воздухе 0,15 Н, кусок свинца 1,13 Н. Если эти куски связать, подвесить к динамометру и опустить в керосин, то динамометр покажет 0,6 Н. Определить плотность пробки.

1.114. Деревянный прямой цилиндр плавает в сосуде с водой так, что в воду погружено 0,9 его высоты. Какая часть высоты цилиндра будет погружена в воду, если: а) сосуд перемещать вертикально с ускорением a; б) поверх воды налить слой масла, полностью покрывающий цилиндр?

1.115. В цилиндрическом сосуде уровень воды расположен на высоте 15 см от дна. Когда в воду опускают плавать пустую латунную чашку, уровень воды поднимается на 2,1 см. Определить высоту уровня воды в сосуде в случае, если чашку полностью погрузить в воду.

1.116. Аэростат массой 500 кг и объемом 600 м^3 поднимается вертикально вверх. На какую высоту поднимется аэростат за 10 с при равноускоренном движении и какую работу совершит за это время действующая на него сила?

1.117. Льдина, поперечное сечение которой 1 м^2 и толщина 0,4 м, плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

1.118. На какую глубину погрузится в ртуть упавший с высоты 2 м над ее поверхностью алюминиевый шарик, если средняя сила сопротивления ртути составляет 0,1 силы тяжести шарика? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.119. Система из двух шариков, массы которых m_1 и m_2 и радиусы R_1 и R_2, соединенных штангой массой m, объемом V и длиной l, погружена в жидкость плотностью $\rho_ж$, причем $\rho_ж<\rho_1$ и $\rho_ж<\rho_2$. Где надо поместить точку опоры, чтобы система находилась в равновесии при горизонтальном расположении стержня?

1.8. Гидроаэродинамика

Основные законы и формулы

Гидроаэродинамика изучает законы движения жидкостей и газов, а также взаимодействия жидкостей и газов с твердыми телами при их относительном движении.

При стационарном (установившемся) движении жидкости через любое поперечное сечение трубы за одинаковые промежутки времени проходит один и тот же объем жидкости:

$$VS=\text{const}. \tag{1.17}$$

При установившемся движении идеальной (несжимаемой и не обладающей трением) жидкости в трубке тока для двух произвольно выбранных сечений справедливо соотношение

$$\frac{mv_1^2}{2}+mgh_1+p_1V=\frac{mv_2^2}{2}+mgh_2+p_2V, \tag{1.18}$$

где m и V — масса и объем жидкости, переместившейся за некоторый промежуток времени из одного участка трубки тока (с давлением p_1) в другой (с давлением p_2); v_1 и v_2 — скорости движения жидкости соответственно через сечения S_1 и S_2; h_1 и h_2 — высоты жидкости над некоторым условным горизонтальным уровнем.

Следствием закона сохранения механической энергии для стационарного течения идеальной жидкости (1.18) является уравнение Бернулли

$$p+\rho gh+\frac{\rho v^2}{2}=\text{const}, \tag{1.19}$$

где ρ — плотность жидкости.

В этом уравнении p является статическим давлением, $\rho v^2/2$ — динамическим, а сумма $p+\frac{\rho v^2}{2}$ — полным давлением.

Решение задач

В средней школе по данной теме решают задачи, в которых определяют скорость течения и расход жидкости в потоке; рассчитывают мощность потока, динамическое, статическое или полное давление; объясняют действие ряда приборов и выясняют роль трения при движении жидкости в трубах и обтекании движущихся тел.

В большинстве своем эти задачи решаются с помощью формулы (1.17). При решении небольшого числа задач используются законы сохранения импульса и энергии. Для решения задач на применение закона Бернулли достаточно знать математическое выражение закона (1.19) и его следствия.

Пример 1. В стенке сосуда с водой просверлены на расстоянии 0,2 м одно над другим два отверстия площадью $S=2$ см^2 каждое (рис. 1.22). Определить

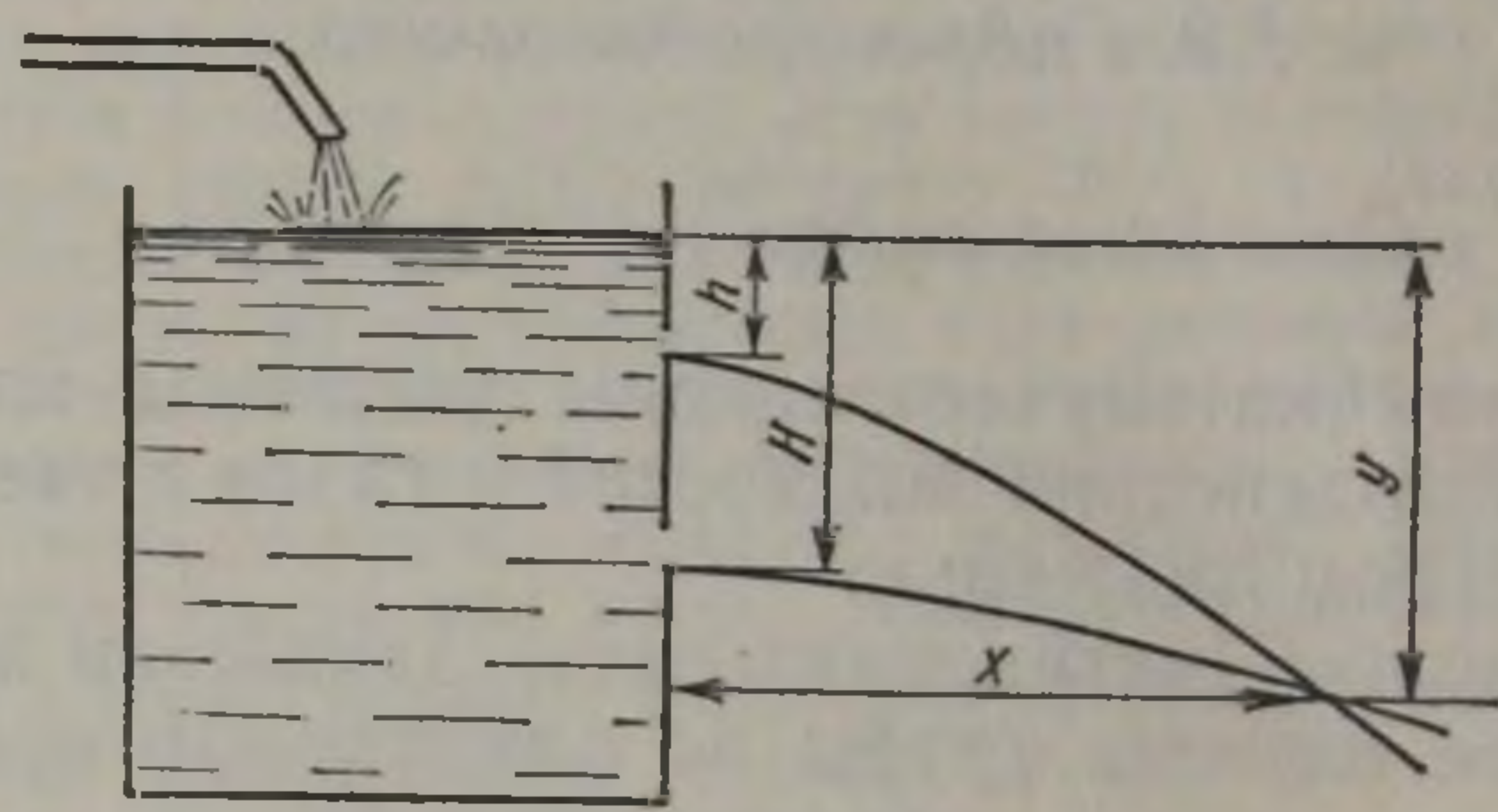


Рис. 1.22

координаты точки пересечения струй, вытекающих из отверстий, если в сосуд ежесекундно вливается $Q=1{,}4$ дм^3 воды.

Решение. Точка пересечения струй остается на месте, если уровень воды не меняется. Для этого необходимо, чтобы объемный расход воды был равен $Q = Sv_1 + Sv_2$, где $v_1 = \sqrt{2gh}$ и $v_2 = \sqrt{2g(H+h)}$ — скорости истечения струй из отверстий. На основании законов кинематики

$$x = v_1 t_1 = v_2 t_2; \quad y = h + \frac{gt_1^2}{2} = h + H + \frac{gt_2^2}{2},$$

где t_1 и t_2 — время, в течение которого вода «падает» от отверстий до точки пересечения струй. Отсюда

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{2gS^2} - H^2\frac{2gS^2}{Q^2}\right); \quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{Q^2}{2gS^2} + H^2\frac{2gS^2}{Q^2}\right).$$

Подставив численные значения величин, получим $x=1{,}2$ м, $y=1{,}3$ м.

Пример 2. Сколько времени потребуется для наполнения водой чайника объемом $V=3$ л из водопроводного крана в квартире, расположенной на четвертом этаже, если площадь выходного сечения крана $S=1$ см^2 и он расположен на высоте $h_2=1{,}5$ м от пола, а уровень воды в водонапорной башне поддерживается на постоянной высоте $h_1=60$ м?

Решение. Запишем уравнение Бернулли для сечения *I* (свободная поверхность воды в баке) и сечения *II* (выходное отверстие крана):

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Учитывая, что $p_1 = p_2 = p_{\text{вн}}$, и сокращая на ρ, получаем

$$gh_1 + \frac{v_1^2}{2} = gh_2 + \frac{v_2^2}{2}. \qquad (1.20)$$

Так как площадь поперечного сечения отверстия крана много меньше площади свободной поверхности жидкости, то на основании уравнения неразрывности $v_1 \ll v_2$, $\frac{v_1^2}{2} \ll \frac{v_2^2}{2}$. Значит, вторым слагаемым в левой части уравнения (1.20) можно пренебречь. Поэтому

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}. \qquad (1.21)$$

Зная величину v_2 в сечении известной площади S, можно найти объемный расход воды:

$$Q = v_2 S. \qquad (1.22)$$

Тогда промежуток времени Δt истечения объема V жидкости из крана, или промежуток времени наполнения чайника,

$$\Delta t = \frac{V}{Q}. \qquad (1.23)$$

На основании соотношений (1.20)—(1.23)

$$\Delta t = \frac{V}{S\sqrt{2g(h_1 - h_2)}} \approx 1 \text{ с}.$$

Пример 3. Площадь поршня в шприце $S_1 = 1{,}2$ см^2, а площадь отверстия $S_2 = 1$ мм^2. Сколько времени будет вытекать вода из шприца, если ход поршня $l = 4$ см и на него действуют силой $F = 5$ Н?

Решение. Объем жидкости, вытекающей из шприца, равен объему шприца: $S_1 l = S_2 v_2 t$, где v_2 — скорость вытекания струи. Отсюда

$$t = \frac{S_1 l}{S_2 v_2}. \qquad (1.24)$$

Для определения v_2 запишем уравнение Бернулли:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \qquad (1.25)$$

Если шприц расположен горизонтально, то $h_1 = h_2$, $p_1 = \dfrac{F}{S_1} + p_{\text{ат}}$, $p_2 = p_{\text{ат}}$, где $p_{\text{ат}}$ — атмосферное давление. Поэтому уравнение Бернулли можно переписать так:

$$\frac{F}{S_1} + \frac{\rho v_1^2}{2} = \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

В соответствии с условием неразрывности потока жидкости

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \qquad (1.26)$$

Из уравнений (1.25) и (1.26) имеем

$$\frac{F}{S_1} + \frac{1}{2}\rho\frac{S_2^2}{S_1^2}v_2^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Отсюда $v_2 = \sqrt{\dfrac{2FS_1}{\rho\left(S_1^2 - S_2^2\right)}}$. Подставив значение v_2 в формулу (1.24), получим

$$t = \frac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho\left(S_1^2 - S_2^2\right)}{2FS_1}} = \frac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}\left[1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2\right]}.$$

Поскольку $S_2 \ll S_1$, то дробью $\left(\dfrac{S_2}{S_1}\right)^2$ можно пренебречь, и тогда $t \approx \approx \dfrac{S_1 l}{S_2}\sqrt{\dfrac{\rho S_1}{2F}} \approx 0{,}52$ с.

Задачи для самостоятельного решения

1.120. Почему легкий целлулоидный шарик, помещенный в струю воздуха или воды, вытекающую с большой скоростью из вертикально расположенной трубки с узким отверстием, свободно парит в этой струе?

1.121. Как изменяются лобовое сопротивление и подъемная сила крыла самолета, если при неизменной скорости несколько увеличить угол наклона крыла к горизонту?

1.122. Построить график изменения с течением времени уровня воды в изображенном на рис. 1.23 открытом сосуде, если скорость истечения воды из подводящей трубки A меньше скорости истечения из сифонной трубки B.

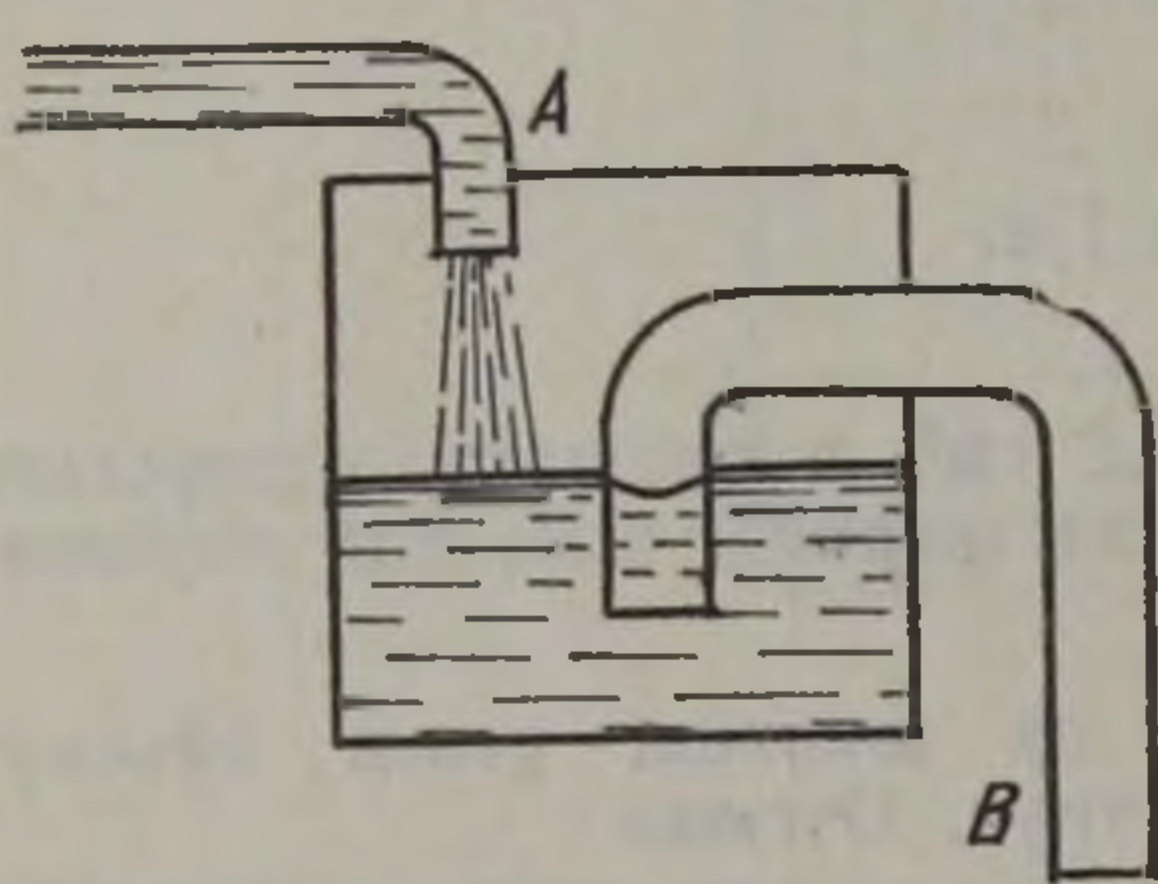


Рис. 1.23

1.123. На столе стоит сосуд с водой, в вертикальной стенке которого сделано несколько отверстий одно над другим. Показать, что: а) все струи бьют о стол с одинаковыми скоростями; б) две струи бьют в одну и ту же точку стола, если расстояния от одного из отверстий до уровня жидкости в сосуде и от другого отверстия до поверхности стола одинаковы.

1.124. В середине дна цилиндрического ведра имеется небольшое отверстие, сквозь которое вытекает вода. Уровень воды в ведре на 30 см выше дна. С какой скоростью вытекает вода сквозь отверстие, если ведро: а) неподвижно; б) движется с ускорением 1,2 м/с^2?

1.125. Подводная лодка находится на глубине 100 м. Определить, сколько воды проникает за 1 ч в лодку через отверстие диаметром 2 см. Давление воздуха в лодке равно атмосферному.

1.126. В горизонтальной трубе диаметром 5 см вода течет со скоростью 0,2 м/с при давлении 0,2 МПа. Какое давление будет в узкой части трубы диаметром 2 см?

1.127. Из брандспойта бьет вертикально вверх струя воды. Определить площадь поперечного сечения струи на высоте 2 м под концом брандспойта, если вблизи него она равна 1,5 см^2, а расход воды равен 60 л/мин.

1.128. Цилиндрический сосуд высотой 70 см и площадью дна 600 см^2 наполнен водой. В дне сосуда образовалось отверстие площадью 1 см^2. Сколько времени понадобится для того, чтобы вода из сосуда вытекла: а) полностью; б) наполовину?

1.129. В боковой стенке у дна широкого сосуда с водой имеется закрытое отверстие площадью S. Уровень воды в сосуде h, масса сосуда и воды m. Определить, при каком значении коэффициента трения между дном и поверхностью сосуд придет в движение, если вынуть пробку.

1.130. По изогнутой под прямым углом трубе поперечного сечения S со скоростью v течет газ. С какой силой газ действует на трубу, если его плотность ρ? Сжатием газа и трением пренебречь.

1.131. Определить минимальную мощность насоса, поднимающего воду по трубе сечением S на высоту H, если КПД насоса η и за 1 с он перекачивает Q литров воды.

2. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

2.1. Основные положения молекулярно-кинетической теории

Основные законы и формулы

Для характеристики масс атомов и молекул применяются величины, получившие название относительной атомной массы элемента и относительной молекулярной массы вещества.

Относительной атомной массой A_r химического элемента называют отношение массы атома m_0 этого элемента к 1/12 массы атома углерода m_{0C}:

$$A_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12}.$$

Относительной молекулярной массой M_r вещества называют отношение массы молекулы этого вещества к 1/12 массы атома углерода:

$$M_r = \frac{m_0}{m_{0C}/12}.$$

Как следует из определения, величины A_r и M_r не имеют наименования.

Единица массы, равная 1/12 массы атома углерода, называется *атомной единицей массы* (а. е. м.). Атомная единица массы

$$m_{ед} = 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Масса атома, выраженная в килограммах, будет равна $A_r m_{ед}$, а масса молекулы $M_r m_{ед}$.

Количеством вещества ν называется отношение числа молекул N в данном теле к числу N_A атомов в 0,012 кг углерода:

$$\nu = \frac{N}{N_A}.$$

(Если вещество состоит из отдельных атомов, не объединенных в молекулы, то под числом молекул надо подразумевать число атомов.)

Количество вещества, в котором содержится число частиц (атомов или молекул), равное числу атомов в 0,012 кг углерода, называется *молем.*

Число атомов или молекул N_A, содержащееся в моле вещества называется *числом Авогадро*:

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Массу моля вещества называют *молярной массой* M. Молярная масса равна произведению массы молекулы m_0 на число Авогадро:

$$M = m_0 N_A.$$

По известным из таблицы Менделеева относительным атомным массам определяют относительную молекулярную массу M_r, а затем по формуле $M = 10^{-3} M_r$ кг/моль — молярную массу вещества.

Решение задач

Задачи рассматриваемой темы можно условно разделить на следующие основные группы: задачи, в которых определяются и сравниваются размеры молекул и расстояния между ними; задачи, в которых определяются массы молекул, молярные массы вещества, количество вещества; задачи, в которых рассматриваются силы взаимодействия между молекулами.

1. Вычисление (точнее, оценку) линейных размеров обычно производят для молекул жидкостей. При этом, исходя из малой сжимаемости жидкостей, делают допущение, что молекулы, имеющие шарообразную форму, плотно упакованы и каждая молекула в жидкости занимает объем в виде куба, ребро которого равно линейному размеру молекулы. Пользуясь такой моделью, можно также определить соотношение объемов, занятых самими молекулами, и объемов, приходящихся на промежутки между ними. В эту группу включаются задачи по определению расстояния между частицами (постоянной решетки) в простейшей кубической структуре твердых тел. Здесь также решаются задачи, позволяющие по линейным размерам молекул определять некоторые физические постоянные (число Лошмидта, объем моля газа при нормальных условиях, число Авогадро).

Оценить линейные размеры молекул можно также в экспериментальных задачах, основанных на опытах с тонкими пленками, образующимися при растекании капли масла по поверхности воды.

Пример 1. Приняв молекулы воды за шарики диаметром $d=2{,}7\cdot10^{-10}$ м, найти, какая часть всего пространства, занятого водой, приходится на долю самих молекул и какая на долю промежутков между ними.

Решение. Объем V, занимаемый массой воды m, равен m/ρ. Собственный объем молекул $V_1=V_0N$, где V_0 — объем одной молекулы; N — их число в объеме V:

$$V_0=\frac{1}{6}\pi d^3;\ N=\frac{m}{M}N_A,$$

откуда $V_1=\frac{m}{6M}\pi d^3N_A$.

Объем, приходящийся на промежутки между молекулами, $V_2=V-V_1$. На долю самих молекул приходится часть объема

$$\frac{V_1}{V}=\frac{\pi d^3N_A\rho}{6M}=0{,}345.$$

На долю промежутков приходится

$$\frac{V_2}{V}=1-\frac{V_1}{V}=0{,}655.$$

Пример 2. Рентгеноструктурный анализ дает возможность измерить расстояние между частицами в кристаллической структуре с высокой степенью точности. Как определить число Авогадро N_A, если известны расстояние l между центрами атомов, расположенных в узлах куба, плотность ρ вещества и молярная масса M?

Решение. Простая кубическая ячейка кристалла состоит из восьми атомов, расположенных в ее вершинах. Каждый атом входит в состав восьми ячеек. Поэтому в кристалле число простых кубических ячеек равно числу атомов. Число атомов в единице объема $n=\frac{\rho}{M}N_A$, а объем, приходящийся на одну кристаллическую ячейку, $V_0=\frac{M}{\rho N_A}$. Длина l ребра кубической ячейки представляет собой расстояние между атомами. Следовательно, $l^3=\frac{M}{\rho N_A}$, откуда $N_A=\frac{M}{\rho l^3}$.

Проверим выполнение правила наименований:

$$\left[\frac{M}{\rho l^3}\right]=\frac{\text{кг/моль}}{\text{кг/м}^3\cdot\text{м}^3}=\text{моль}^{-1}.$$

Пример 3. Определить число Лошмидта, т. е. число молекул в 1 м³ газа, находящегося при нормальных условиях, если известно, что 1 моль его при этом занимает объем $V_0 = 2{,}24 \cdot 10^{-2}$ м³. Оценить, во сколько раз диаметр молекул воздуха меньше среднего расстояния между ними при нормальных условиях. Диаметр молекулы воздуха принять равным $d = 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Решение. В одном моле газа при нормальных условиях содержится N_A молекул, следовательно, в 1 м³ газа при этих условиях содержится $N_L = \frac{N_A}{V_0} = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$ молекул (число Лошмидта).

Объем $V_0 = l^3$, занимаемый одной молекулой воздуха, равен: $l^3 = \frac{1}{N_L}$, где l — расстояние между молекулами. Отсюда $l = \sqrt[3]{\frac{1}{N_L}} = 3{,}3$ нм. Находим отношение: $\frac{l}{d} = 11$.

2. При решении задач на нахождение масс молекул используют значение атомной единицы массы и относительную молярную массу вещества. Массу молекулы вычисляют по формуле $m_0 = 1{,}66 \cdot 10^{-27} M_r$. При этом для более прочного усвоения и понимания значение атомной единицы массы лучше вычислить, а не использовать табличный результат. Вычислить массу молекулы можно также по формуле $m_0 = \frac{M}{N_A}$. Такой расчет полезно сделать потому, что он способствует более сознательному применению понятия молярная масса.

Для определения количества вещества пользуются формулой $\nu = \frac{m}{M}$, а для определения числа молекул (атомов) — формулой $N = \frac{m}{M} N_A$. Заслуживают внимания задачи на вычисление числа частиц, когда газ частично диссоциирован. В этом случае необходимо учитывать, что в результате диссоциации образуется смесь из молекулярного и атомарного газов с разными молярными массами и общее число частиц равно сумме частиц обоих компонентов.

Пример 4. Используя значение атомной единицы массы, вычислить в килограммах массу атома ксенона.

Решение. Атомная единица массы равна 1/12 массы атома углерода:

$$m_{ед} = \frac{M_C}{12 N_A},$$

где M_C — молярная масса углерода; N_A — число Авогадро. Так как $M_C = 12 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, то

$$m_{ед} = \frac{10^{-3}\ \text{кг/моль}}{6{,}023 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{кг}.$$

Для нахождения массы атома элемента необходимо это значение умножить на его относительную атомную массу A_r:

$$m_{Xe} = 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{кг} \cdot 131{,}3 = 2{,}18 \cdot 10^{-25}\ \text{кг}.$$

Пример 5. Сколько частиц находится в 2 г азота, если степень его диссоциации $\alpha = 0{,}05$?

Решение. *Степенью диссоциации* α называется отношение числа продиссоциировавших молекул к их первоначальному числу. При степени диссоциации α в данной массе газа будет содержаться $2\alpha\frac{m}{M}$ молей атомарного азота N и $(1-\alpha)\frac{m}{M}$ молей молекулярного азота N_2.

Общее число молей в сосуде

$$2\alpha\frac{m}{M}+(1-\alpha)\frac{m}{M}=(1+\alpha)\frac{m}{M},$$

а искомое число частиц

$$N=N_A(1+\alpha)\frac{m}{M}=4,5\cdot 10^{22}.$$

3. Выяснение характера зависимости сил взаимодействия между частицами от расстояния позволяет объяснить плотную упаковку частиц в конденсированном состоянии, механизм упругой деформации твердых тел, природу теплового расширения и другие явления. В курсе элементарной физики расчетные задачи, посвященные этому вопросу, не решаются. Зависимость сил взаимодействия от расстояния можно рассмотреть на примере качественных задач с помощью графических построений. Эти задачи позволяют выяснить различный характер зависимости сил отталкивания и притяжения от расстояния между частицами, построить их равнодействующую, определить радиус молекулярного действия, выяснить физический смысл равновесного расстояния и другие вопросы.

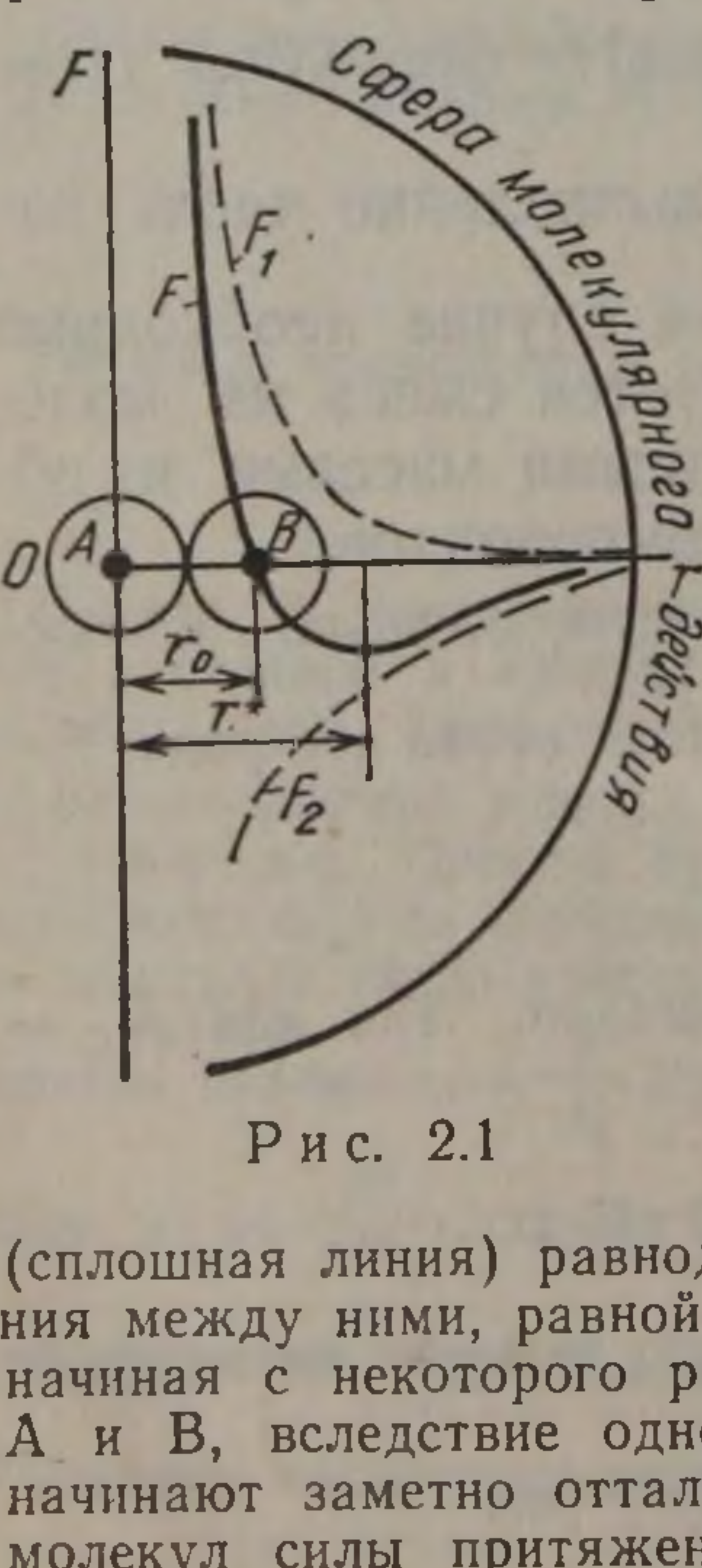


Рис. 2.1

Пример 6. На рис. 2.1 изображены графики зависимости силы отталкивания F_1 и силы притяжения F_2 от расстояния r между молекулами. Какая из сил преобладает на близких расстояниях между молекулами; на больших расстояниях? Показать на оси Or то расстояние, на котором сила притяжения уравновешивается силой отталкивания. Начертить график изменения равнодействующей F сил F_1 и F_2 в зависимости от расстояния r между молекулами.

Решение. Между молекулами возможны два вида взаимодействия — притяжение и отталкивание. Силы молекулярного взаимодействия имеют электромагнитную природу. Силы отталкивания принято считать положительными, силы притяжения (нижняя кривая) — отрицательными. Силы притяжения и отталкивания молекул имеют общую особенность: они быстро убывают с увеличением расстояния r между молекулами. Это короткодействующие силы. Однако, как следует из формы графиков, силы отталкивания убывают с расстоянием быстрее, чем силы притяжения. На этом же рисунке изображена зависимость (сплошная линия) равнодействующей силы F взаимодействия частиц от расстояния между ними, равной векторной сумме сил F_1 и F_2. График показывает, что, начиная с некоторого расстояния r_0 между центрами сближающихся молекул A и B, вследствие одноименности электрического заряда оболочек молекулы начинают заметно отталкивать друг друга. На расстоянии r_0 между центрами молекул силы притяжения и отталкивания уравновешивают друг друга. Это расстояние равно примерно $3\cdot 10^{-10}$ м. Таково приблизительно расстояние между молекулами в твердых и жидких телах.

В точке $r=r_0$ сила взаимодействия молекул меняет знак: при $r>r_0$ молекулы притягиваются, при $r<r_0$ — отталкиваются. На некотором расстоянии $r\approx r^*$ сила взаимного притяжения молекул максимальна. При дальнейшем увеличении расстояния эта сила уменьшается и приближается к нулю при r, равном трем-четырем расстояниям r_0. Расстояние r_1, начиная с которого между молекулами возникает притяжение, называют *радиусом молекулярного действия*.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. На каком физическом явлении основан способ цементации стали, т. е. насыщение ее поверхностного слоя углеродом?

2.2. Как объяснить повышение интенсивности броуновского движения с ростом температуры?

2.3. Как объяснить растворение твердого тела в жидкости?

2.4. Определить диаметр молекул воды и ртути.

2.5. Определить расстояние между ближайшими атомами кубической кристаллической решетки железа.

2.6. Капля масла массой 0,02 мг растеклась по поверхности воды, образовав пленку площадью $5{,}7\cdot10^{-2}$ м². Полагая, что образовался слой толщиной в одну молекулу, определить приблизительный диаметр молекулы масла. Плотность масла 900 кг/м³.

2.7. Доказать, что при нормальных условиях в единице объема содержится одинаковое число молекул кислорода и водорода. Плотность кислорода 1,43 кг/м³, водорода 0,09 кг/м³.

2.8. В некотором объеме газа при нормальных условиях содержится 10^8 молекул. Определить длину ребра куба, содержащего данный объем.

2.9. Принимая молекулу за шарик диаметром $3\cdot10^{-10}$ м, определить, какая часть объема, занимаемая газом при нормальных условиях, приходится на его молекулы.

2.10. Зная число Авогадро N_A, плотность вещества ρ и молярную массу M, записать формулы, определяющие: массу m_0 одной молекулы; число N молекул в произвольной массе m вещества; число ν молей в единице объема; число n молекул в единице объема.

2.11. Найти массу атомов аргона, железа, золота.

2.12. Определить объем моля кислорода, если плотность его 1,9 кг/м³.

2.13. Какое количество вещества и сколько молекул содержится в 5 кг углекислого газа? Найти массу молекулы углекислого газа.

2.14. Имеются два равных объема воды и ртути. Найти отношение числа атомов в этих объемах.

2.15. Газ, занимающий объем 1 дм³ при нормальных условиях, имеет массу 1,429 г. Определить молярную массу газа и количество вещества, содержащегося в газе.

2.16. Какое количество частиц находится в 3 г парообразного йода, если степень диссоциации его равна 30 %? Молярная масса йода равна 0,254 кг/моль.

2.17. Как изменилось бы давление внутри газа или жидкости, если бы силы притяжения между молекулами внезапно исчезли?

2.18. Чем лучше обработаны поверхности, тем меньше трение между ними. Однако уменьшение трения происходит лишь до определенного предела. При дальнейшем сглаживании поверхностей трение снова начинает увеличиваться. Как это объяснить?

2.19. На рис. 2.2. изображена зависимость потенциальной энергии взаимодействия двух молекул от расстояния между ними $E_п(r)$, а также значение полной энергии E движущейся молекулы, остающееся неизменным на любых расстояниях ее от молекулы, условно принятой за неподвижную. Учитывая, что полная энергия молекулы E равна сумме ее потенциальной $E_п$ и кинетической $E_к$ энер-

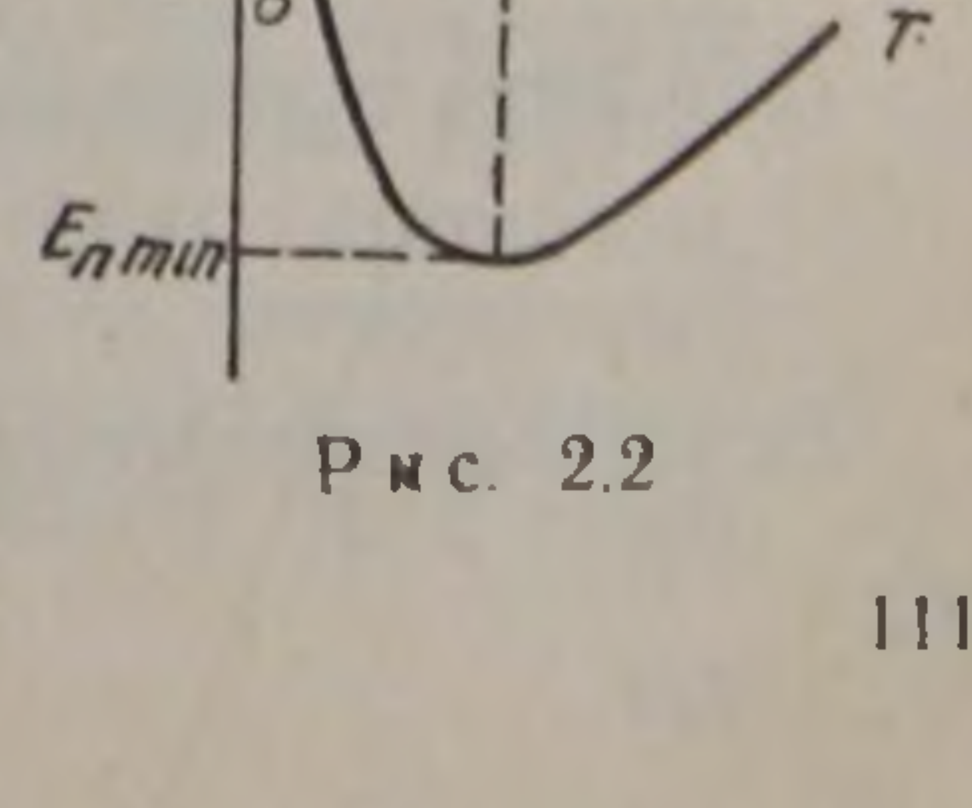


Рис. 2.2

гии, ответить на вопросы: а) чему равны потенциальная и кинетическая энергии, если $r=\infty$; б) как изменяются $E_п$ и $E_к$ при уменьшении r от бесконечности до r_0 и далее до значений $r<r_0$; в) чему равны $E_п$ и $E_к$ при $r=r'$ и при $r=\sigma$; г) каков физический смысл величины σ; д) от чего зависит величина σ?

2.2. *Газовые законы*

Основные законы и формулы

Состояние идеального газа определяется тремя параметрами: объемом V, занимаемым газом, давлением p газа на стенки сосуда, его температурой T. При изменении одного из этих параметров в общем случае меняются и другие.

Если температура данной массы газа при изменении его объема и давления остается постоянной (изотермический процесс), то выполняется закон Бойля — Мариотта

$$pV=\text{const}. \tag{2.1}$$

Поскольку плотность данной массы газа при постоянной температуре обратно пропорциональна обьему газа $\left(\rho=\frac{m}{V}\right)$, то $\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Зависимость между объемом данной массы газа и его температурой при постоянном давлении (изобарический процесс) определяется законом Гей-Люссака

$$V_t=V_0(1+\alpha t), \tag{2.2}$$

где V_t — объем газа при температуре t °C; V_0 — объем газа при температуре 0 °C; α — коэффициент объемного расширения (для всех газов одинаков и равен 1/273 К$^{-1}$).

Применяя шкалу Кельвина, закон Гей-Люссака можно записать в более простой форме:

$$V=V_0\alpha T,$$

откуда для двух произвольных состояний газа имеем

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}. \tag{2.3}$$

При изохорическом процессе ($V=\text{const}$) зависимость между давлением и температурой для данной массы газа выражается законом Шарля.

$$p_t=p_0(1+\gamma t), \tag{2.4}$$

где p_t, p_0 — давления газа при температуре t °C и 0 °C соответственно; γ — термический коэффициент давления (для всех газов одинаков и равен 1/273 К$^{-1}$). В абсолютной шкале температур закон Шарля имеет вид

$$p=p_0\gamma T.$$

Для двух произвольных состояний газа получим

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{T_1}{T_2}. \tag{2.5}$$

Если одновременно изменяются все три параметра газа, то связь между ними устанавливается уравнением Менделеева — Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M} RT, \tag{2.6}$$

где R — универсальная газовая постоянная: $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К); $\frac{m}{M} = \nu$ — число молей газа. Это уравнение можно представить в виде

$$p = \frac{\rho}{M} RT,$$

где ρ — плотность газа при данной температуре T и давлении p.

Если в различных состояних газа его масса остается неизменной, часто удобно применять уравнение состояния идеального газа в форме

$$\frac{pV}{T} = \text{const}. \tag{2.7}$$

При переходе газа из одного состояния в другое

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}.$$

Если в сосуде имеется смесь газов, не вступающих друг с другом в химические реакции, то давление смеси газов равно сумме парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i .$$

Необходимо обратить внимание на то, что состояние газа, описываемое уравнением Менделеева — Клапейрона, определяется не массой, а числом молей газа. Это особенно важно при рассмотрении смеси газов. В этом случае полное давление смеси (при заданных объеме и температуре) будет определяться общим количеством молей:

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2} + \ldots + \frac{m_n}{M_n}\right) RT. \tag{2.8}$$

Решение задач

Задачи на законы идеальных газов можно условно разделить на две основные группы: к первой группе относятся задачи, в которых заданы параметры газа в начальном состоянии и некоторые параметры в конечном состоянии. Масса газа в условии не задана, известно лишь, что она не изменяется. Ко второй группе относятся задачи, где в условиях фигурирует масса газа и приведены некоторые параметры состояния или рассматриваются такие процессы, в которых масса газа изменяется. Необходимо найти неизвестные величины. Для более прочного и осмысленного усвоения соответствующих формул и физических законов многие задачи этой темы целесообразно решать с помощью графических изображений рассматриваемых процессов в различных координатных осях.

1. Если при постоянной массе в результате перехода из начального состояния в конечное один из параметров газа не меняется, то при решении задач можно пользоваться одним из уравнений (2.1) — (2.5). Если меняются все три параметра, следует применять уравнение состояния идеального газа в форме (2.7). При этом необходимо также использовать дополнительные условия в виде вспомогательных формул и выразить, где это необходимо, давление и объем через другие заданные величины.

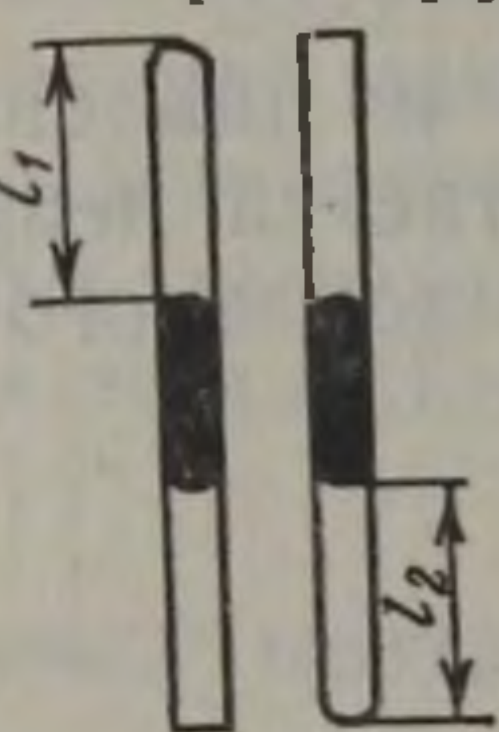


Рис. 2.3

Пример 1. В середине трубки, запаянной с одного конца, находится столбик ртути. Когда трубка стоит вертикально, запаянным концом вверх, высота воздушного столбика l_1, запаянным концом вниз — l_2. Чему равно атмосферное давление, если высота ртутного столбика h?

Решение. Так как температура постоянна, то для обоих состояний воздуха в трубке применим закон Бойля — Мариотта

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

где p_1, V_1 — давление и объем воздуха, когда трубка стоит запаянным концом вверх; p_2, V_2 — давление и объем воздуха, когда трубка стоит запаянным концом вниз.

Давление p_1 уравновешивается атмосферным давлением минус давление, создаваемое ртутным столбиком; давление p_2 уравновешивается атмосферным давлением плюс давление, создаваемое ртутным столбиком (рис. 2.3); $p_1 = p_0 - \rho gh$, $p_2 = p_0 + \rho gh$, где ρ — плотность ртути. Объемы воздуха в первом и во втором случаях соответственно $V_1 = l_1S$ и $V_2 = l_2S$, где S — площадь поперечного сечения трубки. Подставив параметры обоих состояний воздуха, заполняющего трубку, в первое уравнение, найдем величину атмосферного давления:

$$p_0 = \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}\rho gh.$$

Пример 2. Сколько ходов должен сделать поршень откачивающего насоса, чтобы откачать воздух из сосуда объемом V от давления p_0 до давления p, если объем насоса ΔV? Температуру считать неизменной.

Решение. При анализе этой и других задач с откачивающими насосами следует иметь в виду, что к начальному и конечному состояниям газа в сосуде закон Бойля—Мариотта не применим. Это обусловлено тем, что в результате откачки уменьшается масса газа. Решение следует искать, рассматривая последовательные ходы поршня. Для воздуха, заполняющего объем насоса, закон Бойля — Мариотта применим, так как температура и масса газа постоянны. При первом ходе поршня воздух, находящийся в сосуде V под давлением p_0, заполнит объем $V + \Delta V$ и в сосуде установится некоторое давление p_1. Из уравнения $p_0V = p_1(V + \Delta V)$ определим это давление:

$$p_1 = p_0\frac{V}{V + \Delta V}.$$

При втором ходе поршня начальное давление уже будет p_1, а конечное давление

$$p_2 = p_1\left(\frac{V}{V + \Delta V}\right).$$

При третьем ходе

$$p_3 = p_2\left(\frac{V}{V + \Delta V}\right)$$

и т. д. Выражая давления p_2 и p_3 через p_0, получим:

$$p_2 = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^2; \quad p_3 = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^3.$$

Отсюда делаем вывод, что после n-го хода поршня в сосуде установится давление

$$p_n = p_0\left(\frac{V}{V+\Delta V}\right)^n.$$

По условию $p_n = p$, следовательно, искомое число ходов поршня

$$n = \frac{\lg \dfrac{p}{p_0}}{\lg \dfrac{V}{V+\Delta V}} \quad \text{или} \quad n = \frac{\lg \dfrac{p_0}{p}}{\lg \dfrac{V+\Delta V}{V}}.$$

Пример 3. В чашечный ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При сверке его с точным барометром оказалось, что при давлении 1020 гПа и температуре $T=295$ К барометр показывает 995 гПа, причем расстояние от уровня ртути до верхнего основания трубки $l=8$ см. Каково истинное давление, если при температуре $T=290$ К барометр показывает 976 гПа? Тепловым расширением ртути и шкалы пренебречь.

Решение. Показания барометра оказываются меньше истинного значения давления вследствие того, что в пространстве над ртутью молекулами воздуха, попавшими в трубку, создается добавочное давление. Чтобы исключить ошибку, необходимо в показания барометра ввести поправку, учитывающую величину этого добавочного давления:

$$p_{\text{ист}} = p + p',$$

где p — давление, отсчитываемое по шкале барометра; p' — давление воздуха над ртутью. Очевидно, что величина поправки барометра непостоянна. Она зависит от температуры и объема незаполненной части трубки. Отметим, что в случае исправного барометра пространство над ртутью заполнено ее насыщенными парами, давление которых мало (при $T=290$ К $p \sim 10^{-1}$ Па).

Для решения задачи к обоим состояниям воздуха над ртутью применим уравнение состояния идеального газа

$$\frac{p_1' V_1}{T_1} = \frac{p_2' V_2}{T_2}. \tag{2.9}$$

Выразив параметры обоих состояний через данные условия задачи и подставив их в уравнение (2.9), получим

$$\frac{(p_{1\,\text{ист}} - p_1)\, l}{T_1} = \frac{(p_{2\,\text{ист}} - p_2)\left(l - \dfrac{p_1 - p_2}{\rho g}\right)}{T_2},$$

где $p_{1\text{ист}}$ и $p_{2\text{ист}}$ — истинные давления в первом и втором случаях; p_1 и p_2 — соответствующие показания барометра. Из этого уравнения находим:

$$p_{2\,\text{ист}} = p_2 + \frac{(p_{1\,\text{ист}} - p_1)\, T_2}{\left(1 - \dfrac{p_1 - p_2}{\rho g l}\right) T_1} = 984 \text{ гПа}.$$

2. При решении задач второй группы чаще всего бывает необходимо определить один из параметров состояния газа. В этом случае пользуются уравнением Менделеева — Клапейрона (2.6) с учетом дополнительных условий. Обычно в задачах заданы параметры

начального и конечного состояний газа. Тогда для решения задачи надо соответственно записать уравнение (2.6) или [в случае смеси газов уравнение (2.8)] дважды: для начального и конечного состояний. Если в задаче рассматривается процесс смешения газов, находящихся в разных сосудах, следует четко отличать парциальные давления от давлений, оказываемых газами на стенки сосудов, которые они занимали первоначально.

Пример 4. Компрессор захватывает при каждом качании $V_0=5$ дм^3 воздуха при нормальном атмосферном давлении p_0 и температуре $T_0=280$ К и нагнетает его в резервуар объемом $V=2$ м^3. Температура воздуха в резервуаре поддерживается равной $T_1=300$ К. Сколько качаний должен сделать компрессор, чтобы давление в резервуаре увеличилось на $\Delta p=0{,}3$ МПа?

Решение. Пусть первоначально в резервуаре было некоторое давление p_1, а масса воздуха m_1. Уравнение состояния газа в этом случае имеет вид

$$p_1V=\frac{m_1}{M}RT_1.$$

После работы компрессора масса воздуха в резервуаре стала равной m_2, а давление p_2. Уравнение состояния в этом случае

$$p_2V=\frac{m_2}{M}RT_1.$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$\Delta pV=\frac{\Delta m}{M}RT_1.$$

откуда

$$\Delta m=\frac{MV\Delta p}{RT_1},$$

где $\Delta p=p_2-p_1$; $\Delta m=m_2-m_1$ — масса воздуха, перенесенного в резервуар компрессором за n качаний.

Число качаний можно определить по формуле $n=\dfrac{\Delta m}{m_0}$, где m_0 — масса газа, переносимая за одно качание. Эту массу найдем из уравнения состояния для порции воздуха, захватываемой при одном качании:

$$p_0V_0=\frac{m_0}{M}RT_0,\quad m_0=\frac{p_0V_0M}{RT_0}.$$

Таким образом,

$$n=\frac{V\Delta pT_0}{V_0p_0T_1}=1109.$$

Пример 5. Определить кажущуюся молярную массу M смеси газов, образовавшуюся в результате смешения газа массой m_1 и молярной массой M_1 и газа массой m_2 и молярной массой M_2.

Решение. Давление смеси газов по закону Дальтона равно сумме парциальных давлений:

$$p=p_1+p_2. \tag{2.10}$$

Для нахождения парциальных давлений компонентов и давления смеси воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона. Учитывая, что после смешения газы находятся при одинаковой температуре и занимают одинаковый объем, имеем:

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V};\ p_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V};\ p = \frac{m}{M}\frac{RT}{V},$$

где $m = m_1 + m_2$ — масса смеси. Подставляя значения p_1, p_2 и p в уравнение (2.10), получаем

$$\frac{m_1 + m_2}{M} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2},$$

откуда

$$M = \frac{m_1 + m_2}{\dfrac{m_1}{M_1} + \dfrac{m_2}{M_2}}.$$

3. Применение графического метода при решении задач позволяет значительно упростить многие решения, показать зависимость между численными значениями параметров газового состояния и этим наглядно изобразить физический процесс изменения состояния газа. Изображая на графиках семейство кривых одних и тех же процессов, весьма удобно анализировать условия перехода газа из одного равновесного состояния в другое. При этом необходимо подчеркивать, что графически можно изображать только квазистатические процессы, т. е. процессы, которые протекают настолько медленно, что состояние газа в каждый данный момент времени лишь незначительно отличается от равновесного.

Пример 6. С помощью графического метода доказать, что коэффициент объемного расширения газов α равен их термическому коэффициенту давления γ.

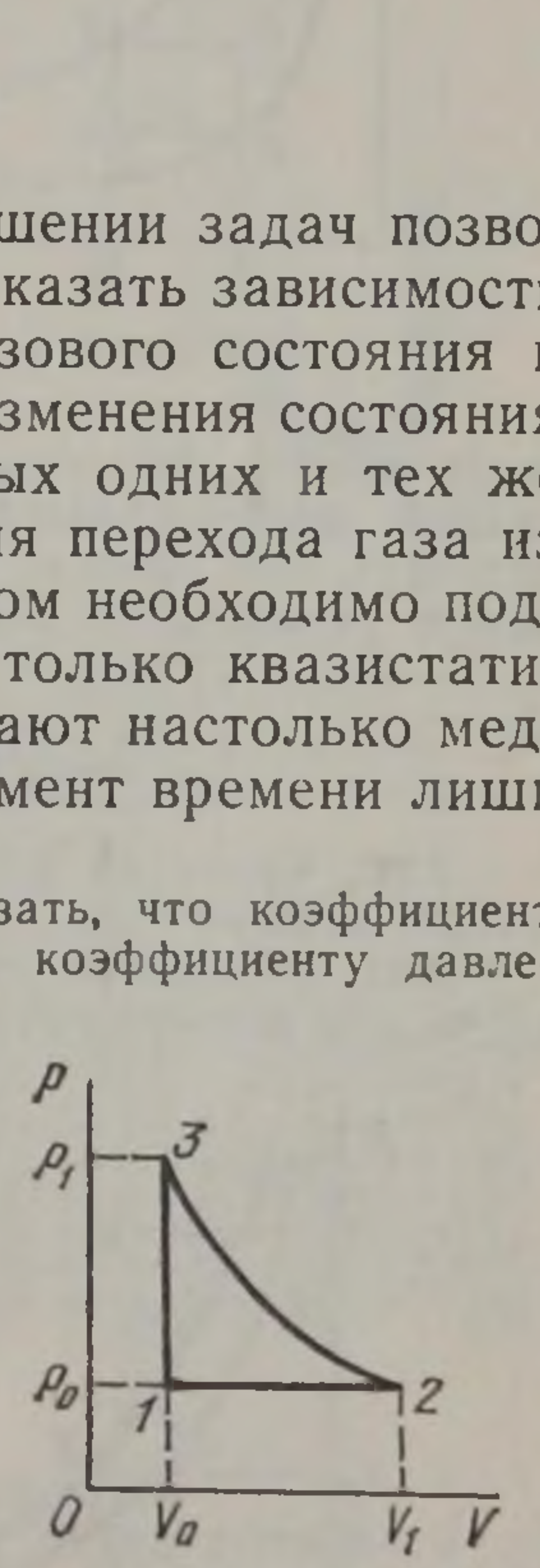


Рис. 2.4

Решение. Рассмотрим некоторую массу газа, находящуюся первоначально под давлением $p=p_0$ при температуре $T_0=273$ K и занимающую объем $V=V_0$. На графике (рис. 2.4) этому состоянию соответствует точка *1*. При изобарическом нагревании газа до некоторой температуры T_1 объем его по закону Гей-Люссака увеличится до значения $V_1 = V_0\alpha T_1$. Соответствующее состояние газа изображено на графике точкой *2*. Если нагревание до той же температуры происходит при постоянном объеме, то давление увеличится по закону Шарля до значения $p_1 = p_0\gamma T_1$. Соответствующее состояние изображено точкой *3*. Точки *2* и *3* лежат на одной изотерме, следовательно, по закону Бойля — Мариотта $p_0V_0\alpha T_1 = p_0V_0\gamma T_1$, откуда $\alpha=\gamma$.

Пример 7. На рис. 2.5 изображен замкнутый процесс *1—2—3—4*, точки *1—3* которого соответствуют изотермам с температурами T_1 и T_2. В состоянии *1* известен также объем газа V_1. Чему должен быть равен объем V_2, чтобы точки *2* и *4* расположились на одной и той же изотерме, температуру T которой также следует найти?

Решение. На основании закона Гей-Люссака для состояний газа *1* и *4* имеем $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T}$, для состояний *2* и *3* — $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T}{T_2}$, откуда $\frac{T_1}{T} = \frac{T}{T_2}$. Следовательно, изотерма, на которой расположены точки *2* и *4*, имеет температуру $T = \sqrt{T_1T_2}$. Объем газа

$$V_2 = V_1\frac{T}{T_1} = V_1\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

Пример 8. На рис. 2.6. изображен график некоторого процесса в координатах $p-T$. Как меняется объем газа при переходе из состояния *1* в состояние *2*? Масса газа постоянна.

Решение. Проведем две изохоры (штриховые линии), соответствующие состояниям *1* и *2*. С увеличением объема газа при постоянной температуре давление его, согласно закону Бойля—Мариотта, падает. Поэтому изохора, соответствующая большему объему, лежит ниже изохоры, соответствующей мень-

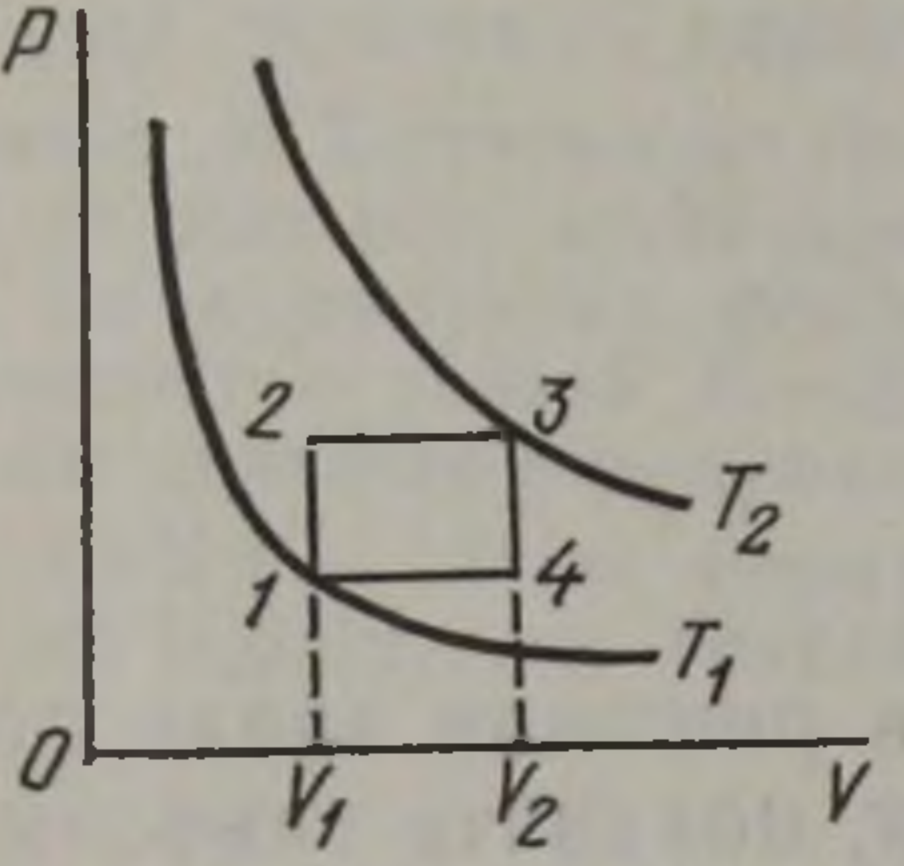


Рис. 2.5

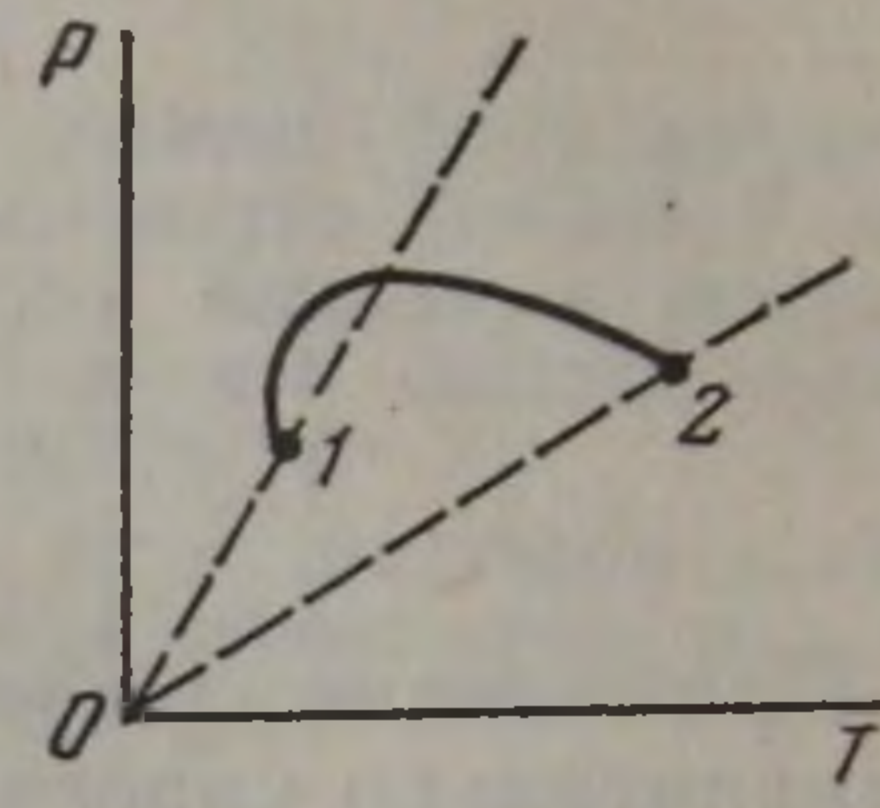


Рис. 2.6

шему объему. На основании этого приходим к выводу, что $V_2 < V_1$. Но часть кривой, изображающей график процесса, лежит выше штриховой линии. Это означает, что сначала газ сжимался (почти при постоянной температуре), затем с увеличением температуры началось его расширение.

Задачи для самостоятельного решения

2.20. Какая из двух изотерм (рис. 2.7), построенных для одной и той же массы данного газа, соответствует более высокой температуре?

2.21. Начертить график зависимости плотности идеального газа от темпераруты при изотермическом, изобарическом и изохорическом процессах.

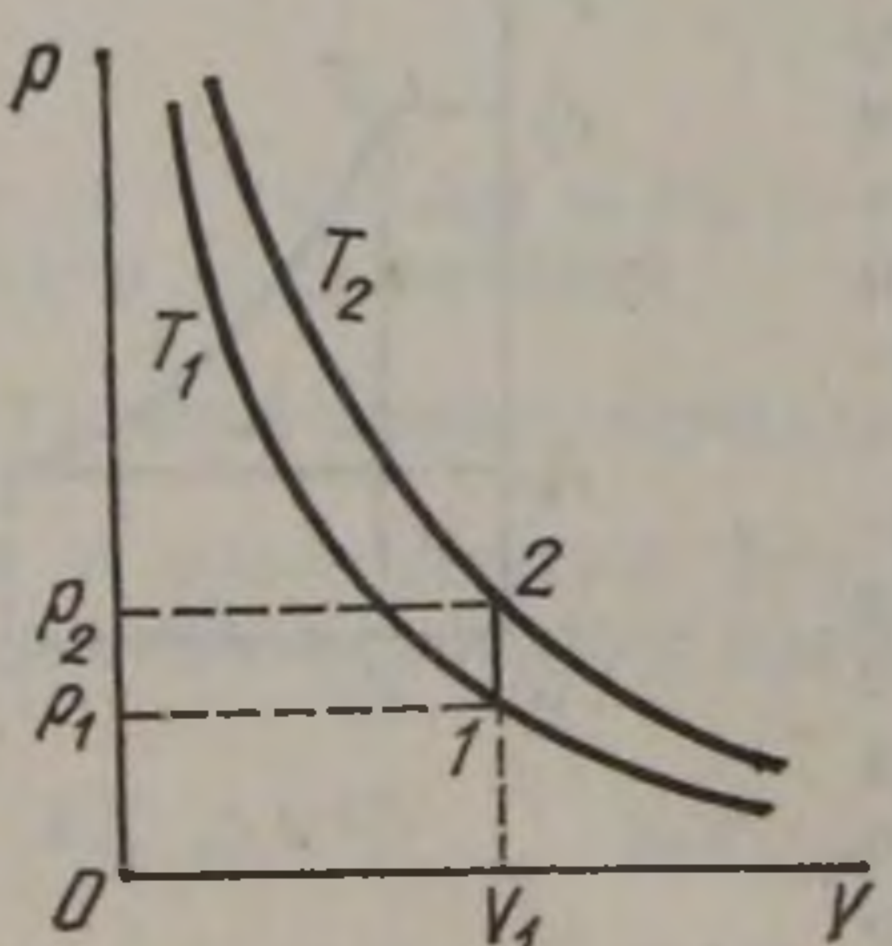


Рис. 2.7

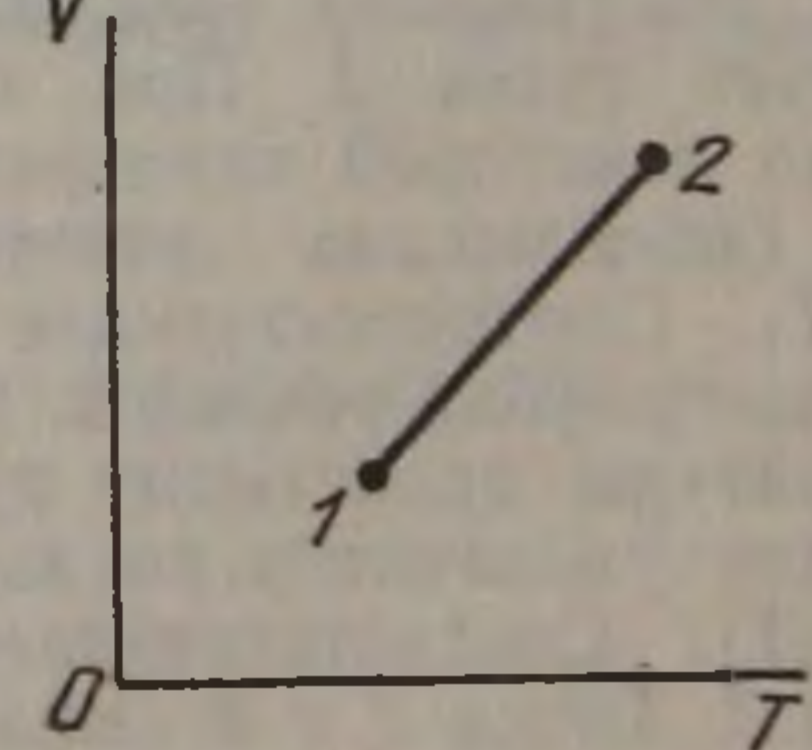


Рис. 2.8

2.22. Построить изотермы 2 кг кислорода для температур 273 К и 300 К.

2.23. По графику зависимости объема газа от абсолютной температуры (рис. 2.8) определить характер изменения давления, под которым находился газ во время его нагревания. Масса газа постоянна.

2.24. На рис. 2.9 изображены три изохоры, построенные для одной и той же массы газа. Чем отличаются изображенные процессы, если известно, что $p_3 = np_1$ и $p_2 = \frac{p_1}{n}$, где $n = 2$?

2.25. В сосуде постоянного объема производится нагревание один раз газа массой m, другой раз газа массой $2m$. Начертить график зависимости давления от температуры для этих случаев.

2.26. Посередине откачанной и запаянной с обоих концов горизонтальной трубки длиной 1 м находится столбик ртути длиной 20 см. Если трубку поставить вертикально, то столбик ртути перемещается на 10 см. До какого давления была откачана трубка?

2.27. Пузырек воздуха поднимается со дна водоема. На какой глубине его радиус в n раз меньше, чем у поверхности воды? Наружное давление p_0. Силы поверхностного натяжения не учитывать. Температуру считать постоянной. Задачу решить для $n=1{,}3$, $p_0=0{,}1$ МПа.

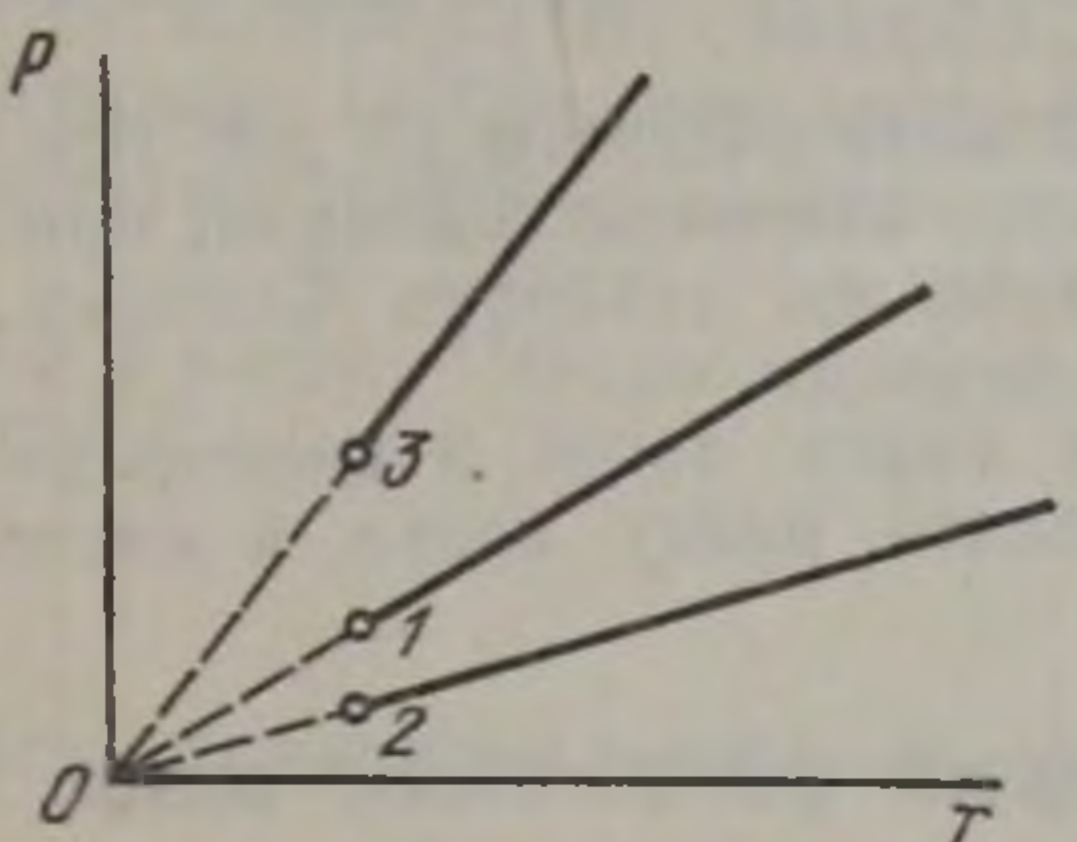


Рис. 2.9

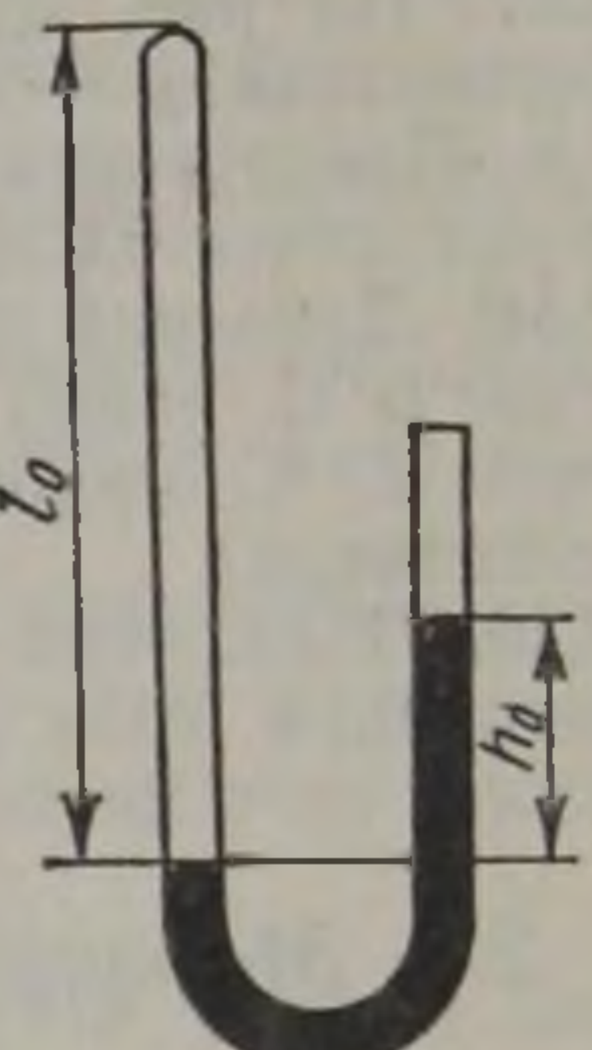


Рис. 2.10

2.28. Атмосферное давление, измеренное с помощью U-образного манометра (рис. 2.10), оказалось равным $p_0=995$ гПа. При этом высота столба воздуха в запаянной части трубки $l_0=360$ мм, а высота столба ртути $h_0=120$ мм. На сколько изменилось атмосферное давление, если уровень ртути в правом колене понизился на $\Delta h=3$ мм, а температура не изменилась?

2.29. Один баллон объемом 20 дм^3 содержит азот под давлением 2,4 МПа, другой баллон объемом 44 дм^3 содержит кислород под давлением 1,6 МПа. Оба баллона были соединены между собой, и газы образовали однородную смесь (без изменения температуры). Найти парциальные давления обоих газов в смеси и полное давление смеси.

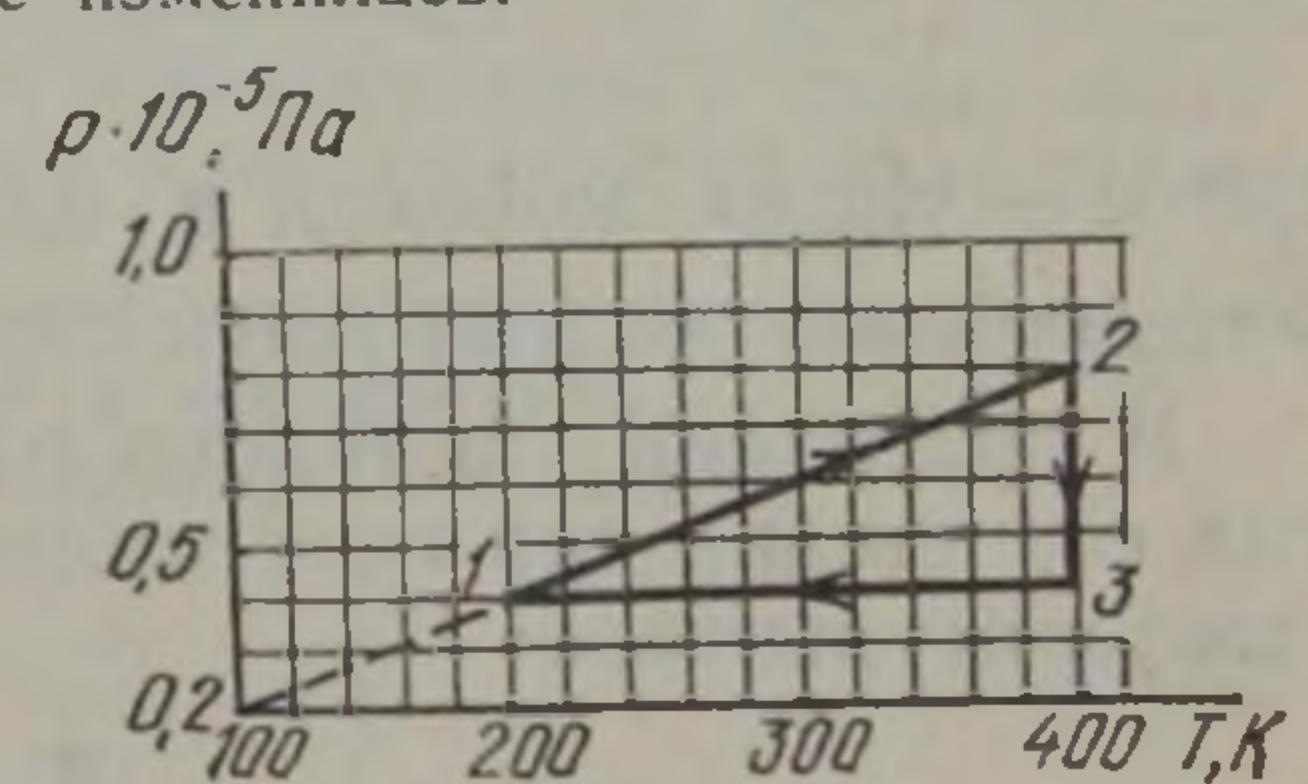


Рис. 2.11

2.30. Открытую стеклянную колбу объемом 0,5 дм^3 нагрели до 100 °С. После этого ее горлышко опустили в воду. Какое количество воды войдет в колбу, если она охладится до 17 °С?

2.31. При нагревании некоторой массы газа на 1 К при постоянном давлении объем этой массы газа увеличился на 1/350 часть первоначального объема. Найти начальную температуру газа.

2.32. В закрытом цилиндре по одну сторону легкоподвижного поршня имеется некоторая масса газа при температуре 275 К, по другую — такая же масса этого газа при температуре 330 К. Поршень находится в равновесии. Общий объем газа 2,2 дм^3. Определить объемы газа в каждой из частей цилиндра.

2.33. Герметическая камера максимального объема V наполнена воздухом наполовину. Сколько ходов должен сделать поршень накачивающего насоса, чтобы накачать в камеру воздух до давления p? Атмосферное давление p_0. Объем насоса V_0. Нагреванием пренебречь. Стенки камеры гибки, но не растяжимы.

2.34. Баллон объемом 50 дм^3 наполнен сжатым воздухом при температуре 20 °С до давления 10 МПа. Какой объем воды можно вытеснить этим воздухом из цистерны подводной лодки в море на глубине 30 м, если температура воды 5 °С, а атмосферное давление 990 гПа? Плотность морской воды принять равной 1030 кг/м^3.

2.35. Два одинаковых сосуда соединены трубкой, объемом которой можно пренебречь. Система наполнена газом и находится при температуре T. Во сколько раз изменится давление в такой системе, если один из сосудов нагреть до температуры T_1, а другой поддерживать при прежней температуре T?

2.36. Аэростат наполнен водородом при температуре 290 К. При неизменном давлении атмосферы под влиянием солнечной радиации его температура поднялась до 310 К, при этом излишек газа вышел через клапан, в результате чего масса аэростата уменьшилась на 6 кг. Определить объем аэростата. Плотность водорода 0,09 кг/м^3.

2.37. На рис. 2.11 изображен график изменения состояния идеального газа в координатах $p - T$. Пользуясь графиком, определить объем газа V в точках *1*, *2*, *3*. Представить этот процесс в координатах $p - V$. Масса газа 0,5 кг, его молярная масса 0,028 кг/моль.

2.38. Давление водорода, находящегося в баллоне объемом 10 дм^3 при температуре 0 °С, равно 5 МПа. После того как часть газа израсходовали, при температуре 17 °С манометр на баллоне показал такое же давление. Сколько газа израсходовано?

2.39. В баллоне объемом 20 дм^3 находится смесь азота и кислорода при давлении 0,18 МПа и температуре 15 °С. Определить массу азота и кислорода в баллоне, если масса смеси 44 г.

2.3. Молекулярно-кинетическая теория идеального газа

Основные законы и формулы

Основное уравнение кинетической теории газов устанавливает связь между давлением p, оказываемым молекулами на стенку сосуда, и средней кинетической энергией молекулы $\overline{E}$:

$$p = \frac{2}{3} n\overline{E} = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \overline{v}^2}{2}, \qquad (2.11)$$

где n — число молекул в единице объема; m_0 — масса молекулы; $\overline{v}$ — средняя квадратичная скорость молекул.

В состоянии теплового равновесия средняя кинетическая энергия одинакова для всех молекул газов, и ее можно принять за меру температуры газа:

$$\overline{E} = \frac{3}{2} kT, \qquad (2.12)$$

где $k = \frac{R}{N_A}$ — постоянная Больцмана: $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Подставив формулу (2.12) в (2.11), получим выражение, показывающее зависимость давления от концентрации молекул и температуры:

$$p = nkT.$$

Средняя квадратичная скорость молекул газа

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

Внутренняя энергия одноатомного идеального газа выражается формулой

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT,$$

где m — масса газа.

Решение задач

При решении задач данной темы необходимо обратить особое внимание на глубокое понимание природы явлений, обусловленных тепловым движением материи, их физическую сущность. Рассматриваемые задачи несложны, и их решение обычно не вызывает серьезных затруднений. В процессе решения задач для нахождения необходимых параметров часто используют уравнения газовых законов, а также закон сохранения импульса при упругих столкновениях молекул со стенкой.

Пример 1. Средняя квадратичная скорость молекул некоторого газа при температуре $T=296$ К $\overline{v}=480$ м/с. Сколько молекул содержится в 10 г этого газа?

Решение. Число молекул, содержащихся в массе m газа, определим по формуле

$$N=\frac{m}{M}N_A.$$

Для нахождения молярной массы газа воспользуемся формулой средней квадратичной скорости молекул $\overline{v}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}$, откуда $M=\frac{3RT}{\overline{v}^2}$. Подставив значения молярной массы в исходную формулу, получим

$$N=\frac{m\overline{v}^2}{3RT}N_A=\frac{m\overline{v}^2}{3kT}=1{,}88\cdot10^{23}.$$

Пример 2. Сферический сосуд радиусом r, содержащий газ при давлении p_1 и температуре T, находится в вакууме. Через образовавшееся в сосуде отверстие часть газа вытекает. Каким станет давление в сосуде, если из него выйдет N молекул газа?

Решение. Для решения задачи применим формулу, устанавливающую зависимость давления от концентрации молекул и температуры.

Давление в сосуде после того, как из него выйдет N молекул,

$$p_2=\frac{N_1-N}{V}kT, \tag{2.13}$$

где число N_1 — число молекул в сосуде при давлении p_1; V — объем сосуда.

Для начального состояния газа $p_1=\frac{N_1}{V}kT$, откуда

$$N_1=\frac{p_1V}{kT}. \tag{2.14}$$

Подставив значение (2.14) в уравнение (2.13) и произведя простые преобразования, получим

$$p_2=p_1-\frac{NkT}{V}.$$

Выражая объем сосуда через его радиус, для p_2 окончательно имеем

$$p_2=p_1-\frac{3}{4}\frac{NkT}{\pi r^3}.$$

Пример 3. Смесь кислорода и азота при температуре $T=290$ К и давлении $p=5{,}8$ кПа имеет плотность $\rho=0{,}4$ кг/м³. Определить концентрацию молекул кислорода в смеси.

Решение. Давление смеси газов, согласно закону Дальтона, равно сумме парциальных давлений:

$$p=p_1+p_2,$$

которые найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$p_1 = \frac{\rho_1}{M_1} RT; \ p_2 = \frac{\rho_2}{M_2} RT, \tag{2.15}$$

где ρ_1 и ρ_2 — парциальные плотности кислорода и азота, т. е. плотности, которые имели бы газы, если бы каждый из них в отдельности занимал весь этот объем. Очевидно, что

$$\rho = \rho_1 + \rho_2. \tag{2.16}$$

Так как из основного уравнения молекулярно-кинетической теории следует, что $p = nkT$, уравнения (2.15) можно записать в виде

$$n_1 = \frac{\rho_1}{M_1} N_A; \ n_2 = \frac{\rho_2}{M_2} N_A,$$

где n_1 и n_2 — концентрации молекул кислорода и азота.

Выразив из последних двух уравнений ρ_1 и ρ_2:

$$\rho_1 = \frac{n_1 M_1}{N_A}; \ \rho_2 = \frac{n_2 M_2}{N_A},$$

и подставив их в равенство (2.16), получим

$$\rho = \frac{n_1 M_1}{N_A} + \frac{n_2 M_2}{N_A}. \tag{2.17}$$

Концентрация молекул смеси газов равна сумме концентраций компонентов:

$$n = n_1 + n_2 \text{ или } \frac{p}{kT} = n_1 + n_2. \tag{2.18}$$

Решая совместно уравнения (2.17) и (2.18), находим концентрацию молекул кислорода:

$$n_1 = \frac{\rho N_A - pM_2/kT}{M_1 - M_2} = 5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

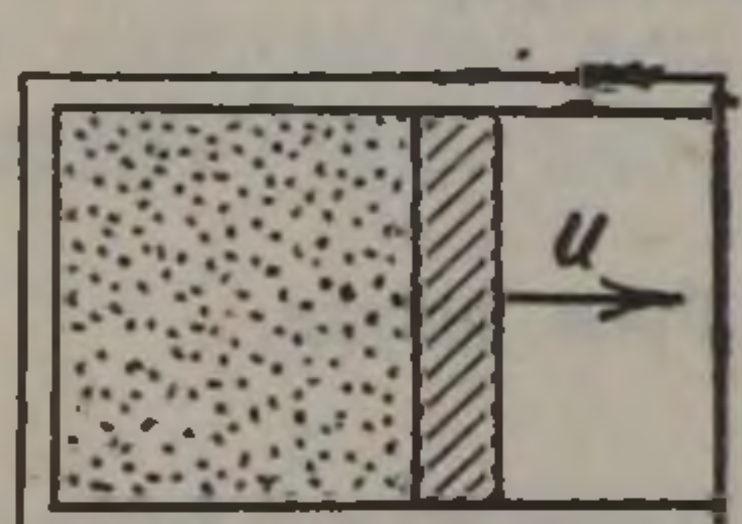


Рис. 2.12

Пример 4. В наполненном газом цилиндре поршень перемещается со скоростью u (рис. 2.12). Скорость движения поршня много меньше тепловой скорости молекул газа. Исходя из молекулярно-кинетических представлений, определить, что будет происходить с температурой газа. Изменится ли ответ, если поршень движется с той же скоростью, но в противоположную сторону? Стенки цилиндра и поршень считать теплонепроницаемыми.

Решение. Для простоты будем считать, что столкновения молекул с поршнем происходят по законам абсолютно упругого удара. Рассмотрим столкновение молекул, движущихся с поршнем в одном направлении. Применив законы сохранения импульса и энергии, имеем:

$$\left. \begin{aligned} mv + Mu &= mv_1 + Mu_1; \\ mv^2 + Mu^2 &= mv_1^2 + Mu_1^2, \end{aligned} \right\}$$

где m и M — массы молекул и поршня соответственно; v и u — скорости молекулы и поршня до удара; v_1 и u_1 — скорости молекулы и поршня после удара. Решая эту систему уравнений, находим скорость молекулы после удара:

$$\bar{v}_1 = -\frac{M - m}{M + m} \bar{v} + \frac{2M}{m + M} u.$$

Учитывая, что $m \ll M$, массой молекулы в этом выражении можно пренебречь, и тогда

$$v_1 = -v + 2u = -(v - 2u).$$

Знак минус показывает, что после удара молекула движется в противоположную сторону. По абсолютной величине скорость молекул газа после удара уменьшается. Следовательно, будет уменьшаться и средняя энергия молекул газа, в результате температура газа будет уменьшаться. При движении поршня в противоположную сторону (объем газа уменьшается) знак скорости поршня надо заменить на противоположный. Скорость молекулы после удара возрастает, а газ нагревается.

Задачи для самостоятельного решения

2.40. Одинаково ли давление внутри газа и у стенки сосуда, содержащего газ? Одинакова ли концентрация молекул газа внутри сосуда и у его стенки?

2.41. Атмосферное давление обусловлено весом воздуха. Как же поддерживается нормальное давление в кабине космического корабля, если воздух в кабине невесом?

2.42. Показать, что из основного уравнения молекулярно-кинетической теории газов как следствия вытекают все опытные законы для газов.

2.43. Какой воздух тяжелее: сухой или сырой (при заданных температуре и давлении)?

2.44. Как изменяется число молекул газа в единице объема в зависимости от абсолютной температуры при изохорическом процессе; при изобарическом процессе?

2.45. Какова средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа при температуре 27 °C?

2.46. Газ занимает объем 2 дм^3 под давлением 0,5 МПа. Какова средняя кинетическая энергия молекул газа?

2.47. В сосуде объемом 3 дм^3 содержится $5 \cdot 10^{24}$ молекул водорода под давлением 2 МПа. Определить среднюю кинетическую энергию поступательного движения молекул водорода.

2.48. Доказать, что средняя квадратичная скорость молекул газа пропорциональна $\sqrt{p/\rho}$, где p — давление газа, а ρ — его плотность.

2.49. Найти температуру, при которой средняя квадратичная скорость молекул водорода равна первой космической скорости для Земли ($v \approx 8 \cdot 10^3$ м/с).

2.50. По данным, полученным с помощью искусственных спутников, давление атмосферного воздуха на высоте 500 км приблизительно 10^{-6} Па при температуре 1680 °C. Сколько молекул воздуха содержится в 1 см^3 при этих условиях?

2.51. В сосуде объемом 5 дм^3 находится азот массой 1,4 г при температуре 1800 К. Найти давление газа, имея в виду, что при этой температуре 30 % молекул диссоциировано на атомы.

2.52. В сосуде объемом 0,2 дм^3 содержится некоторый газ при температуре 30 °C. На сколько понизится давление газа в сосуде, если вследствие утечки из него выйдет 10^{20} молекул?

2.53. Какова средняя квадратичная скорость молекул кислорода, находящегося при давлении p и имеющего концентрацию n?

2.54. Два сосуда равных объемов, имеющих одинаковую концентрацию молекул некоторого газа, соединены трубкой с краном. В одном сосуде средняя скорость молекул 500 м/с, в другом 550 м/с. Чему будет равна средняя скорость молекул газа, если открыть кран, соединяющий сосуды?

2.55. Молекулы кислорода ударяются о стенку сосуда и упруго отскакивают от нее без потери скорости. Найти давление, испытываемое стенкой, если скорость молекул в пучке одинакова и равна 300 м/с, а их концентрация $2 \cdot 10^{18}$ м$^{-3}$. Рассмотреть два случая: а) стенка расположена перпендикулярно к скорости молекул и неподвижна; б) стенка неподвижна и расположена под углом 30° к направлению движения молекул.

2.56. В баллоне объемом 10 дм^3 находится неон под давлением 866 гПа. Определить внутреннюю энергию газа.

2.57. В сосуде находится 10^{24} молекул аргона при температуре 320 К. Найти внутреннюю энергию газа.

2.58. Как изменяется внутренняя энергия в процессах, изображенных на рис. 2.11?

2.4. Теплота. Первое начало термодинамики

Основные законы и формулы

Количество теплоты Q, полученное телом массой m при нагревании или отданное им при охлаждении, определяется формулой

$$Q=cm\Delta t,$$

где c — удельная теплоемкость тела.

Количество теплоты Q, необходимое для перехода массы вещества m из твердого состояния в жидкое при температуре плавления, определяется формулой

$$Q=\lambda m,$$

где λ — удельная теплота плавления.

Количество теплоты, необходимое для превращения массы жидкости в пар при температуре кипения, определяется формулой

$$Q=rm,$$

где r — удельная теплота парообразования. При полном сгорании топлива массой m выделяется количество теплоты

$$Q=qm,$$

где q — удельная теплота сгорания топлива.

Количество теплоты, сообщенное системе, идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы над внешними телами:

$$Q=\Delta U+A.$$

Это соотношение представляет собой закон сохранения энергии в тепловых процессах и называется *первым законом термодинамики.*

Работа, совершаемая газом при расширении от объема V_1 до V_2, если давление остается постоянным, определяется выражением

$$A=p(V_2-V_1).$$

Коэффициентом полезного действия теплового двигателя называют отношение работы A, совершаемой двигателем, к количеству теплоты Q_1, полученному от нагревателя:

$$\eta=\frac{A}{Q_1} \text{ или } \eta=\frac{Q_1-Q_2}{Q_1},$$

где Q_2 — количество теплоты, переданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины

$$\eta_{max}=\frac{T_1-T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя; T_2 — температура холодильника.

Решение задач

Задачи данной темы, решение которых основано на применении закона сохранения и превращения энергии к тепловым явлениям, можно разделить на три основные группы. К первой группе относятся задачи, описывающие процессы, при которых в результате взаимодействия имеет место только теплообмен между телами, работа над внешней средой не совершается. Вторую группу составляют задачи, описывающие процессы, связанные с превращением одного вида энергии в другой при взаимодействии двух тел. К третьей группе относятся задачи, в которых описываются тепловые процессы, происходящие в идеальных газах.

1. Если в процессе взаимодействия тел работа не совершается, т. е. имеет место только явление теплообмена, необходимо выяснить, у каких тел внутренняя энергия уменьшается, у каких увеличивается, и составить уравнение теплового баланса, являющееся основным расчетным уравнением при решении задач первой группы:

$$Q_1 = Q_2,$$

где Q_1 — количество теплоты, отданное одними телами; Q_2 — количество теплоты, полученное другими телами. Если в условии задачи оговорен КПД теплообмена η, то уравнение имеет вид

$$\eta Q_1 = Q_2.$$

Решив это уравнение, определяют искомую величину.

При составлении уравнения теплового баланса следует учесть, происходят ли в процессе теплообмена агрегатные превращения или нет.

Пример 1. В латунном калориметре массой $m_1=200$ г находится кусок льда массой $m_2=100$ г при температуре $t_1=-10\,°C$. Сколько пара, имеющего температуру $t_2=100\,°C$, необходимо впустить в калориметр, чтобы образовавшаяся вода имела температуру $\theta=40\,°C$?

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения и превращения энергии. Пренебрегая потерями энергии в окружающую среду, получаем, что полная внутренняя энергия рассматриваемой системы тел остается неизменной, а перераспределение ее между телами происходит в равных количествах.

Для описания процесса теплообмена между телами составим уравнение теплового баланса с учетом агрегатных состояний.

При конденсации пара массой m в воду выделяется количество теплоты rm. При дальнейшем охлаждении образовавшейся воды от температуры конденсации до окончательно установившейся температуры θ телам системы отдается количество теплоты $c_1m(T_2-\theta)$. Следовательно,

$$Q_{\text{отд}}=rm+c_1m(T_2-\theta).$$

За счет этой энергии лед нагревается до температуры плавления, плавится, а затем вода, образовавшаяся в результате плавления льда, вместе с калориметром нагревается до температуры θ. При нагревании льда до температуры плавления затрачивается количество теплоты c_2m_2 (273 К$-T_1$). Для плавления льда требуется количество теплоты λm_2. Количество теплоты, полученное водой, образовавшейся из льда при нагревании от 237 К до θ, равно $c_1m_2(\theta-273\text{ К})$. Количество теплоты, полученное калориметром при его нагревании, равно $c_3m_1(\theta-T_1)$. Отсюда

$$Q_{\text{получ}}=c_2m_2(273\text{ К}-T_1)+\lambda m_2+c_1m_2(\theta-273\text{ К})+c_3m_1(\theta-T_1).$$

Таким образом, уравнение теплового баланса для рассматриваемого процесса будет иметь вид

$$rm+c_1m(T_2-\theta)=c_2m_2(273\text{ К}-T_1)+\lambda m_2+c_1m_2(\theta-273\text{ К})+c_3m_1(\theta-T_1).$$

Решая это уравнение относительно m, получаем

$$m=\frac{m_2[c_2(273\text{ К}-T_1)+\lambda+c_1(\theta-273)]+c_3m_1(\theta-T_1)}{r+c_1(T_2-\theta)}=22\text{ г}.$$

2. Если рассматриваемый процесс протекает с совершением механической работы, то нужно для составления уравнения воспользоваться законом сохранения и превращения энергии. Обычно в таких задачах теплообмен между телами не учитывается. В результате взаимодействия внутренняя энергия одного из тел изменяется. Следует установить, что является причиной этого изменения: работа, совершенная самим телом, или работа, совершенная над телом. Если работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии тела, получаем соотношение

$$A = \eta \Delta U, \tag{2.19}$$

где A — совершенная работа; η — коэффициент полезного действия; ΔU — изменение внутренней энергии. Если внутренняя энергия увеличивается за счет работы, совершенной над телом, то

$$\Delta U = \eta A. \tag{2.20}$$

Получив эти соотношения, ΔU и A выражают через данные условия задачи. Составляя выражение для ΔU, необходимо учесть, какие процессы имеют место по условию задачи. Такими процессами могут быть: сгорание топлива, нагревание тела, плавление, испарение и другие, а также их сочетание. Для работы могут быть использованы известные из механики формулы ($A = Fs\cos\alpha$, $A = Nt$, $A = E_1 - E_2$). Подставив выражения для ΔU и A в формулу (2.19) или (2.20), определяют искомую величину.

Пример 2. Свинцовая пуля, имеющая скорость $v_1 = 400$ м/с, пробивает доску, при этом ее скорость уменьшается до $v_2 = 50$ м/с. Определить, какая часть пули расплавилась, если ее начальная температура $t = -25$ °C. На нагревание пули в момент удара расходуется $\eta = 60$ % энергии.

Решение. После выхода пули из доски ее кинетическая энергия уменьшилась на величину

$$\Delta E = \frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right),$$

где m — масса пули.

На нагревание всей массы пули от температуры t_1 до температуры плавления $t_2 = 327$ °C и плавление некоторой части ее массы Δm израсходована энергия $\eta\Delta E$ (теплообменом с доской пренебрегаем). Применив к рассматриваемому процессу закон сохранения и превращения энергии, получим уравнение баланса энергии, выражающее физический смысл задачи:

$$\eta A = \Delta U \quad \text{или} \quad \eta\frac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = cm\left(t_2 - t_1\right) + \lambda\Delta m,$$

откуда

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\eta\left(v_1^2 - v_2^2\right) - c\left(t_2 - t_1\right)}{2\lambda} = 0{,}06.$$

3. Задачи на тепловые процессы, происходящие в газах, решаются при помощи первого закона термодинамики: $Q = \Delta U + A$. Выражая Q, ΔU и A из соответствующих формул и подставляя их в исходное уравнение, получаем соотношение для определения искомой величины.

Приступая к решению задачи, надо прежде всего выяснить характер процесса, протекающего в газе. В большей части задач используется не общая форма первого закона термодинамики, а его различные частные случаи, применимые к определенным процессам.

При изотермическом процессе температура газа остается постоянной, следовательно, внутренняя энергия газа не изменяется ($\Delta U=0$). Уравнение первого закона термодинамики принимает вид $Q=A$, т. е. все сообщенное газу количество теплоты расходуется на работу, совершаемую им против внешних сил.

При изохорическом процессе ($V=\text{const}$) работа газа равна нулю. Все сообщенное газу количество теплоты идет на увеличение его внутренней энергии: $Q=\Delta U$.

При адиабатическом процессе (процесс в теплоизолированной системе) $Q=0$. Изменение внутренней энергии происходит только за счет совершенной работы: $\Delta U=A$.

При изобарическом процессе сообщенное газу количество теплоты расходуется и на увеличение внутренней энергии, и на совершение работы против внешних сил. Этот процесс описывается уравнением первого закона термодинамики в общей форме.

Следует обратить внимание на то, что изменение внутренней энергии однозначно определяется начальным и конечным состояниями газа, в то время как количество теплоты и работа зависят от способа, при помощи которого газ переходит из одного состояния в другое. В зависимости от характера процесса работа может быть как положительной, так и отрицательной. Если газ расширяется, то он совершает положительную работу против внешних сил. Если газ сжимают, то его работа отрицательна, и над газом совершают работу внешние силы. Знак работы должен быть учтен при решении задач.

Из формул первого закона термодинамики для изохорического и изобарического процессов видно, что в первом случае сообщенное газу количество теплоты целиком идет на увеличение внутренней энергии, а во втором часть его расходуется на работу расширения. Это позволяет сделать заключение, что для одинакового увеличения температуры данной массы газа при изобарическом процессе надо сообщить большее количество теплоты, чем при изохорическом:

$$Q_p = Q_V + p\Delta V.$$

Поэтому надо различать удельные теплоемкости при постоянном давлении (c_p) и постоянном объеме (c_V). Для газов обычно принято пользоваться молярными теплоемкостями C_p и C_V, поэтому некоторые задачи следует решать с использованием этих теплоемкостей.

При решении задач на первый закон термодинамики надо обращать внимание на графическое представление различных процессов. Графический метод позволяет анализировать явления, изображаемые замкнутыми циклами, состоящими из отдельных изопроцессов, производить геометрическое истолкование работы, часто упрощает вычисление КПД цикла.

Пример 3. При изобарическом нагревании аргон совершил работу $A=8$ Дж. Какое количество теплоты было сообщено газу?

Решение. При изобарическом процессе сообщенное газу количество теплоты расходуется на увеличение его внутренней энергии и на совершение работы:

$$Q = \Delta U + A. \tag{2.21}$$

Для нахождения ΔU запишем формулу внутренней энергии одноатомного газа для его начального и конечного состояний:

$$U_1 = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT_1; \quad U_2 = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT_2,$$

где T_1 и T_2 — начальная и конечная температуры газа. Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$\Delta U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \tag{2.22}$$

Совершенная при изобарическом нагревании газа работа

$$A = p(V_2 - V_1).$$

Выразим приращение объема газа через приращение его температуры в конечном и начальном состояниях, для чего применим к этим состояниям уравнение Менделеева — Клапейрона:

$$pV_1 = \frac{m}{M}RT_1; \quad pV_2 = \frac{m}{M}RT_2,$$

откуда

$$p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1).$$

Работа, совершаемая газом,

$$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1). \tag{2.23}$$

Сравнивая выражения для ΔU (2.22) и для A (2.23), получаем равенство

$$\Delta U = \frac{3}{2}A. \tag{2.24}$$

Подставляя соотношение (2.24) в исходную формулу (2.21), находим

$$Q = \frac{5}{2}A = 20 \text{ Дж}.$$

Пример 4. Идеальный газ массой m, находящийся при температуре T, охлаждается изохорически так, что его давление уменьшается в k раз. Затем газ расширяется при постоянном давлении. Температура газа в конечном состоянии равна первоначальной. Определить совершенную газом работу. Молярная масса газа M.

Решение. При изохорическом охлаждении газа $A=0$, так как $\Delta V=0$. Работа, совершенная газом при изобарическом расширении,

$$A = \frac{p}{k}(V_2 - V_1),$$

где V_1 и V_2 — объемы, занимаемые газом соответственно в начале и в конце изобарического расширения.

Как и в предыдущем примере, выразим работу через разность температур:

$$A = \frac{m}{M}R(T - T_1), \tag{2.25}$$

где T_1 — температура газа в конце изохорического охлаждения.

Температуру T_1 найдем, применив к изохорическому охлаждению газа закон Шарля

$$\frac{p_1}{p} = \frac{T_1}{T},$$

где $p_1 = \frac{p}{k}$ — давление газа в конце охлаждения, откуда

$$\frac{1}{k} = \frac{T_1}{T}; \quad T_1 = \frac{1}{k} T.$$

Подставив это значение T_1 в уравнение (2.25), получим формулу для вычисления работы:

$$A = \frac{m}{M} RT \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Пример 5. Два теплоизолированных баллона наполнены воздухом и соединены короткой трубкой с краном. Известны объемы баллонов, а также давление и температура воздуха в них (V_1, p_1, T_1 и V_2, p_2, T_2). Найти температуру и давление воздуха, которые установятся после открытия крана.

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения и превращения энергии. Так как баллоны теплоизолированы, внутренняя энергия системы после открытия крана будет равна сумме первоначальных внутренних энергий воздуха в первом и втором баллонах:

$$U = U_1 + U_2. \tag{2.26}$$

Внутренняя энергия идеального газа прямо пропорциональна его абсолютной температуре и числу молей газа. Таким образом, для газа в первом и втором баллонах, а также после смешения имеем:

$$U_1 = b\frac{m_1}{M_1} T_1; \; U_2 = b\frac{m_2}{M_2} T_2; \; U = b\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) T,$$

где b — коэффициент пропорциональности, зависящий от природы газа. Подставив эти выражения в уравнение (2.26), получим

$$\frac{m_1}{M_1} T_1 + \frac{m_2}{M_2} T_2 = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) T. \tag{2.27}$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона для воздуха до смешения находим m_1/M_1 и m_2/M_2:

$$\frac{m_1}{M_1} = \frac{p_1 V_1}{RT_1}; \; \frac{m_2}{M_2} = \frac{p_2 V_2}{RT_2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2.27), получаем

$$\frac{p_1 V_1}{R} + \frac{p_2 V_2}{R} = \left(\frac{p_1 V_1}{RT_1} + \frac{p_2 V_2}{RT_2}\right) T,$$

откуда

$$T = \frac{T_1 T_2 (p_1 V_1 + p_2 V_2)}{p_1 V_1 T_2 + p_2 V_2 T_1}.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона для смеси $p(V_1 + V_2) = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT$, а также используя найденные значения для m_1/M_1, m_2/M_2 и T, получим

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

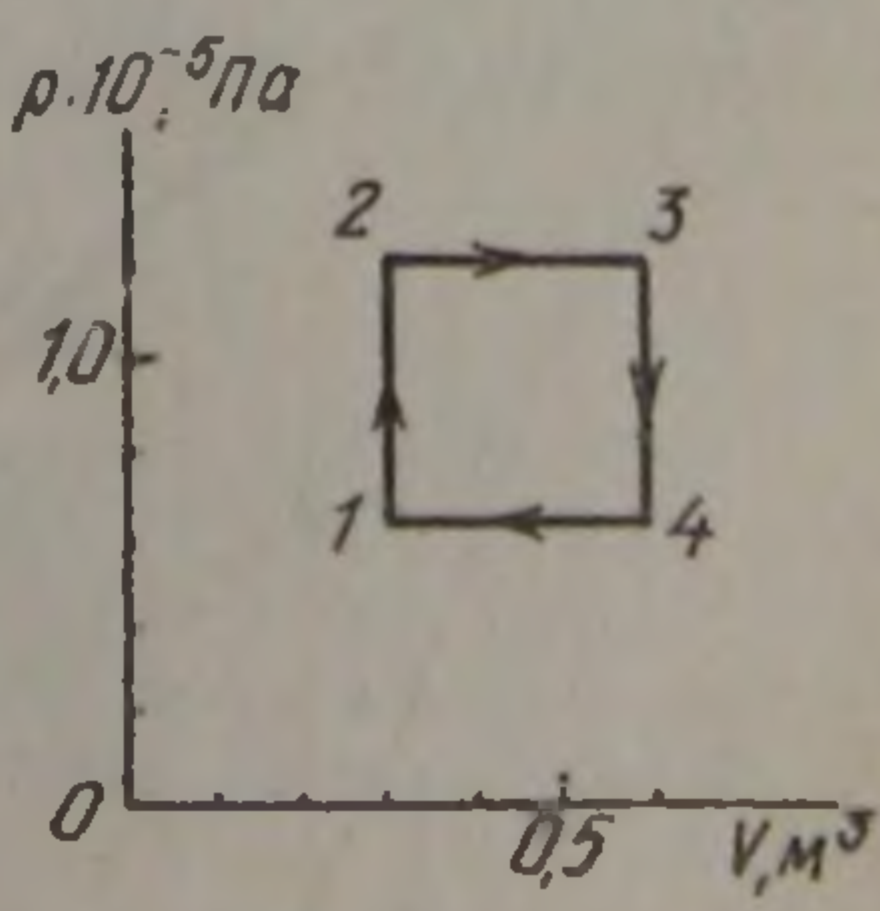


Рис. 2.13

Пример 6. Замкнутый цикл, совершаемый 0,3 кг азота, изображен на рис. 2.13. Определить: количество теплоты, полученное от нагревателя за один цикл; работу, совершенную газом за один цикл; КПД цикла; какой КПД имел бы идеальный тепловой цикл, изотермы которого соответствовали бы наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла.

Р е ш е н и е. Нагревание газа в рассматриваемом цикле происходит на участках *1—2* и *2—3*; на участках *3—4* и *4—1* газ охлаждается, поэтому $Q = Q_{1,2} + Q_{2,3}$. Количество теплоты, получаемое азотом от нагревателя при изохорическом нагревании, $Q_{1,2} = c_V m (T_2 - T_1)$, при изобарическом нагревании $Q_{2,3} = c_p m (T_3 - T_2)$, где c_V и c_p — удельные теплоемкости азота при постоянном объеме и постоянном давлении, T_1 — его температура в исходном состоянии, T_2 — в состоянии *2*, T_3 — в состоянии *3*.

Из графика определяем параметры газа:

$$p_1 = 60 \text{ кПа}; \; V_1 = 0{,}3 \text{ м}^3; \; p_2 = 120 \text{ кПа}; \; V_2 = 0{,}6 \text{ м}^3.$$

Запишем уравнение Менделеева — Клапейрона для состояний *1*, *2* и *3*:

$$p_1V_1 = \frac{m}{M} RT_1; \;\; p_2V_1 = \frac{m}{M} RT_2; \;\; p_2V_2 = \frac{m}{M} RT_3.$$

Вычитая из второго уравнения первое, а из третьего — второе, находим разности температур $T_2 - T_1$ и $T_3 - T_2$:

$$T_2 - T_1 = \frac{MV_1(p_2 - p_1)}{R}; \;\; T_3 - T_2 = \frac{Mp_2(V_2 - V_1)}{R}.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{M}{R} [\, c_V V_1 (p_2 - p_1) + c_p p_2 (V_2 - V_1)] = 171 \text{ кДж}.$$

При замкнутом цикле работа численно равна площади фигуры *1—2—3—4*, т. е.

$$A = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1) = 18 \text{ кДж}.$$

КПД цикла есть отношение работы, совершенной газом за цикл, к количеству теплоты, полученному от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q} = 0{,}1.$$

КПД идеального теплового цикла

$$\eta' = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — наибольшая температура цикла; T_2 — наименьшая его температура. Наименьшую температуру T_1 газа, совершающего рассматриваемый цикл, определим из уравнения Менделеева — Клапейрона для состояния *1*:

$$T_1 = \frac{p_1V_1M}{mR} = 202 \text{ К}.$$

Применив уравнение состояния газа к состояниям *1* и *3*, найдем его максимальную температуру:

$$T_3 = T_1 \frac{p_2V_2}{p_1V_1} = 808 \text{ К}.$$

Следовательно, $\eta' = 0{,}75$.

Задачи для самостоятельного решения

2.59. В калориметр, содержащий 1 л воды при температуре 20 °С, бросают нагретый до 500 °С кусок железа, масса которого 100 г. При этом некоторое количество воды обращается в пар. Окончательная температура воды 24 °С. Определить массу обратившейся в пар воды.

2.60. Сколько времени потребуется для того, чтобы на электроплитке мощностью 600 Вт, имеющей КПД 40 %, нагрелось 0,5 л воды от 20 °С до кипения и 10 % ее обратилось в пар?

2.61. Вода при соблюдении необходимых предосторожностей может быть переохлаждена до температуры $-10\,°C$. Какая масса льда образуется из 1 кг такой воды, если бросить в нее кусочек льда и тем вызвать замерзание? Теплоемкость переохлажденной воды считать не зависящей от температуры и равной теплоемкости обычной воды.

2.62. Молот весом 0,1 МН падает с высоты 2,5 м на стальную болванку массой $2 \cdot 10^4$ кг. Сколько раз он должен упасть, чтобы температура болванки поднялась на 40 К? На нагревание болванки идет 60 % теплоты, выделяемой при ударах.

2.63. При движении по горизонтальному пути автомобиль массой $2 \cdot 10^3$ кг развивает скорость 90 км/ч, расходуя при этом 0,1 кг бензина на 1 км пути. При движении в гору с уклоном 1 м на каждые 25 м пути автомобиль при тех же условиях развивает скорость 54 км/ч. Определить КПД двигателя, если теплотворная способность бензина $46 \cdot 10^6$ Дж/кг.

2.64. Сжимая идеальный газ адиабатически, мы совершаем работу. Увеличится ли при этом потенциальная энергия газа?

2.65. Осуществляется квазистатический процесс адиабатического расширения идеального газа. Как будет изменяться при этом температура газа?

2.66. На что расходуется электроэнергия, потребляемая домашним холодильником?

2.67. Идеальный газ совершает замкнутый процесс, изображенный на рис. 2.14 в координатах V—T. Изобразить этот процесс в координатах p—V и указать, на каких стадиях процесса газ получал, а на каких — отдавал тепло.

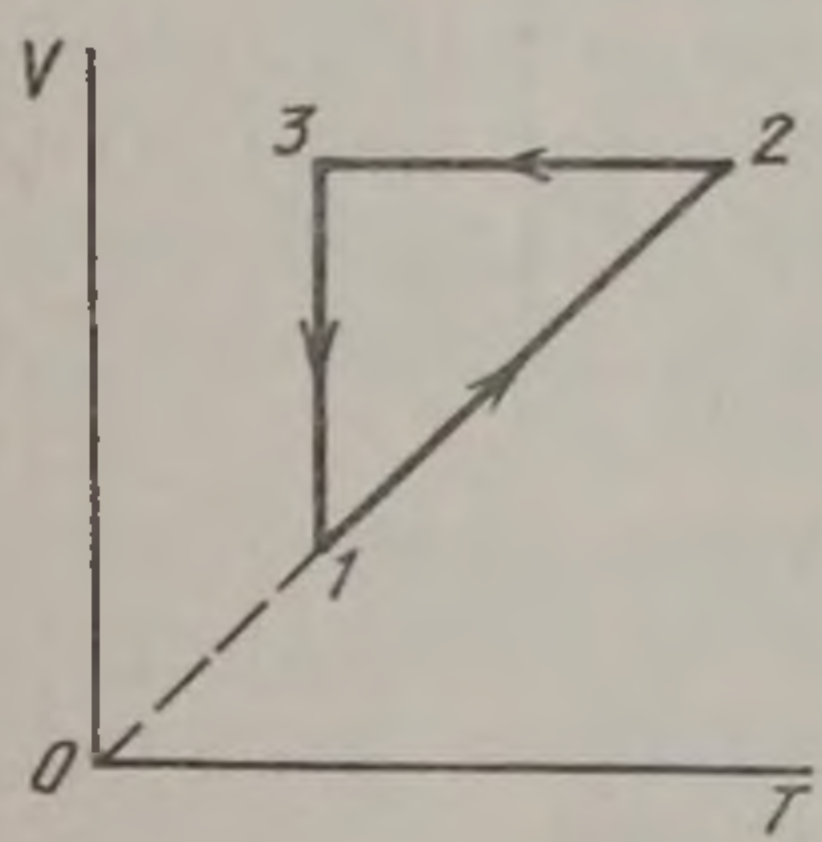


Рис. 2.14

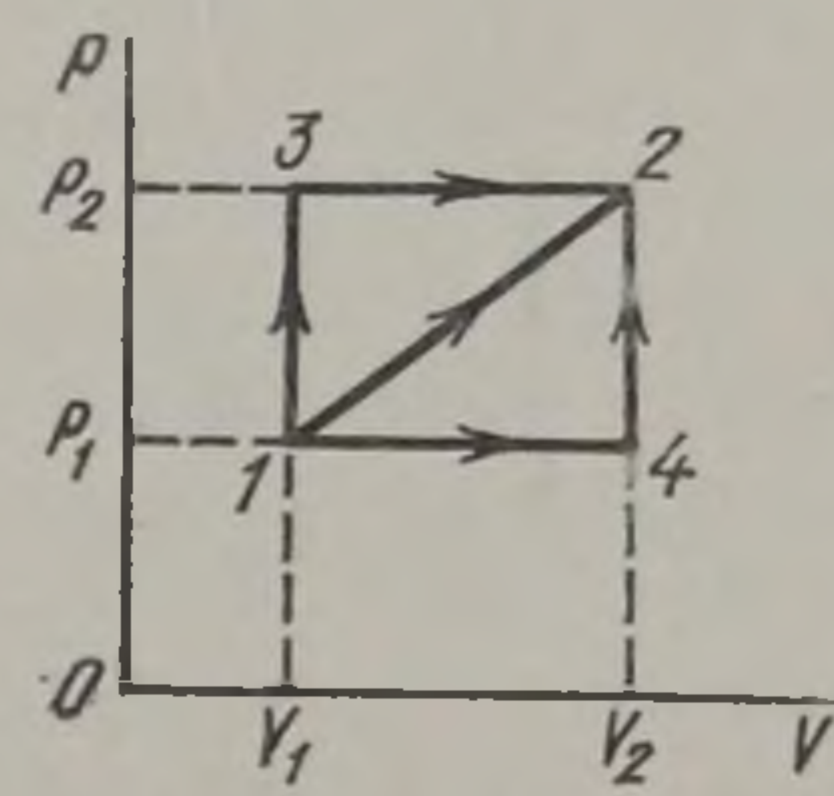


Рис. 2.15

2.68. Гелий занимает объем 2 м^3 при давлении 0,1 МПа. Газ нагрели при постоянном объеме до давления 0,3 МПа. Определить изменение внутренней энергии газа, совершенную им работу и количество полученной теплоты.

2.69. Используя формулу внутренней энергии одноатомного идеального газа, найти значение молярной теплоемкости этого газа при постоянном объеме.

2.70. Доказать, что универсальная газовая постоянная R равна работе изобарического расширения одного моля идеального газа при нагревании его на 1 К.

2.71. Кислород занимает объем 0,5 м^3 и находится под давлением 0,3 МПа. Газ нагревают сначала при постоянном давлении до объема 2 м^3, а затем при постоянном объеме до давления 0,5 МПа. Найти изменение внутренней энергии газа, количество теплоты, переданное газу, и совершенную им работу.

2.72. При переходе 5 дм^3 кислорода, находящегося под давлением 0,5 МПа, из начального состояния в конечное объем его увеличивается в 3 раза, а давление — в 2 раза. Определить количество теплоты, необходимое газу для этого перехода, изменение его внутренней энергии, а также работу, совершенную газом, при условии, что переход осуществляется по пути: а) *1—3—2*; б) *1—4—2*; в) *1—2* (рис. 2.15).

2.73. В топке паровой машины сожжено 200 кг мазута с теплотворной способностью $4{,}2 \cdot 10^7$ Дж/кг. Какую максимальную работу можно теоретически получить от такой машины, если в котле машины поддерживается температура 430 К, а температура холодильника 285 К? КПД топки 60 %.

2.5. Свойства паров

Основные законы и формулы

Парообразование, происходящее с открытой поверхности жидкости при любой температуре, называется *испарением*, а испарение твердых тел — *возгонкой* или *сублимацией*. *Паром* называют газообразную форму веществ, существующих при обычной температуре и давлении в жидком состоянии. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называют *насыщенным*. Он отличается тем, что плотность его для данной жидкости имеет наибольшее значение при данной температуре. Пар, плотность которого меньше плотности насыщенного пара, называют *ненасыщенным*. Ненасыщенный пар можно перевести в насыщенный путем понижения его температуры или уменьшения объема. Температура, при которой пар становится насыщенным в результате изохорического охлаждения, называется *точкой росы*.

Ненасыщенный пар подчиняется всем основным законам идеальных газов. Параметры состояния насыщенного пара связаны между собой уравнением Менделеева — Клапейрона.

Давление насыщенного пара резко возрастает с температурой. В отличие от газов давление насыщенного пара в неизменном объеме увеличивается с температурой не только в результате возрастания средней скорости молекул, но и вследствие увеличения концентрации молекул пара.

Парообразование, происходящее во всем объеме жидкости, называется *кипением*. Кипение начинается при температуре, при которой давление насыщенного пара жидкости равно наружному давлению на свободную поверхность жидкости.

По мере возрастания давления насыщенного пара при увеличении температуры растет также его плотность. Плотность жидкости, находящейся в равновесии со своим паром, наоборот, уменьшается вследствие теплового расширения жидкости. При температуре, называемой *критической*, плотность пара становится равной плотности жидкости.

Парциальное давление водяного пара в атмосфере определяет влажность воздуха. *Относительной влажностью* воздуха называют отношение парциального давления p водяного пара, содержащегося в воздухе при данной температуре, к давлению p_0 насыщенного пара при той же температуре, выраженное в процентах:

$$\varphi = \frac{p}{p_0} 100\ \%.$$

Решение задач

Свойства ненасыщенных паров и газов одинаковы. Поэтому методика решения задач, в которых идет речь о ненасыщенных парах, та же, что и для газов. При решении задач, в условиях которых рассматриваются насыщенные пары, необходимо учитывать некоторые особенности, связанные со свойствами этих паров. При изотермическом сжатии пара его плотность и давление будут возрастать лишь до тех пор, пока пар не станет насыщенным. При дальнейшем уменьшении объема пар начнет конденсироваться, превращаясь в жидкость. Поэтому, решая задачу о паре, находящемся в состоянии, близком к насыщению, необходимо выяснить, является ли пар насыщенным или нет (а следовательно, постоянна ли его масса при изменении состояния или нет). Применяя к описанию состояния насыщенного пара уравнение Менделеева — Клапейрона, надо помнить, что масса пара, входящая в это уравнение, зависит от температуры и для двух различных состояний не может быть одинакова. Во избежание ошибки полученные из уравнения состояния значения давления и плотности насыщенного пара при данной температуре следует сравнивать с табличными данными. Правильными будут лишь те результаты, которые не превосходят табличных данных.

Значения давления и плотности насыщенного пара при заданной температуре определяются из таблиц.

Пример 1. Пространство в цилиндре под поршнем объемом $V_1=1{,}5$ м³ занимает смесь азота и насыщенных водяных паров при температуре $T=301$ К. Масса смеси $m=0{,}3$ кг. Какая масса паров сконденсируется при изотермическом уменьшении объема в n раз ($n=2$)? Каково было давление p смеси до сжатия?

Решение. Будем считать, что смесь азота и водяных паров занимает после сжатия весь объем цилиндра. Действительно, если бы в цилиндре были только одни водяные пары и все они при уменьшении объема сконденсировались, то занятый ими объем $\left(V=\dfrac{m}{\rho}=3\cdot 10^{-4}\text{дм}^3\right)$ был бы ничтожно мал по сравнению с оставшимся после сжатия объемом $\left(V_2=\dfrac{V}{n}=0{,}75\ \text{м}^3\right)$. В соответствии с законом Дальтона давление в цилиндре равно сумме парциальных давлений азота и водяных паров. При изотермическом сжатии парциальное давление водяных паров p_1 не изменится. Находим его из таблиц ($p_0=3{,}786$ кПа). Применив уравнение Менделеева — Клапейрона к состояниям насыщенного пара, находим его массу m_1 до сжатия и массу m_2 после сжатия:

$$m_1=\frac{p_0V_1M_1}{RT};\ m_2=\frac{p_0V_2M_1}{RT}=\frac{p_0V_1M_1}{nRT},$$

где M_1 — молярная масса водяного пара.

Масса сконденсированного пара

$$\Delta m=m_1-m_2=\frac{p_0V_1M_1(n-1)}{nRT}=0{,}02\ \text{кг}.$$

Масса азота в цилиндре

$$m'=m-m_1=\frac{mRT-p_0V_1M_1}{RT}.$$

Парциальное давление азота до сжатия найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$p_1=\frac{m'RT}{M_2V_1}=\frac{mRT-p_0V_1M_1}{M_2V_1}=15{,}43\ \text{кПа},$$

где M_2 — молярная масса азота.

Давление смеси до сжатия $p=p_0+p_1\approx 19{,}22$ кПа.

Пример 2. В теплоизолированном цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=50$ см^2 находится 2 г насыщенного водяного пара. В сосуд вводят $m=2$ г воды при температуре $T=293$ К. На сколько опустится поршень? Атмосферное давление $p_0=1013$ гПа. Теплоемкостью цилиндра пренебречь.

Решение. Насыщенный водяной пар имеет температуру $T_0=373$К, так как он находится под нормальным атмосферным давлением. Введенная в цилиндр вода нагревается до температуры T_0 за счет теплоты, выделяемой при конденсации некоторого количества пара Δm. Составим уравнение теплового баланаса:

$$mc\ (T_0-T)=\Delta mr,$$

где c — удельная теплоемкость воды; r — удельная теплота парообразования. Отсюда масса сконденсированного пара

$$\Delta m=\frac{mc\,(T_0-T)}{r}.$$

Объем этой массы пара найдем из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\Delta V=\frac{mc\,(T_0-T)\,RT_0}{rMp_0},$$

где M — молярная масса водяного пара. Отсюда высота, на которую опустился поршень,

$$\Delta h=\frac{\Delta V}{S}=\frac{mc\,(T_0-T)\,RT_0}{rMp_0S}=10\ \text{см}.$$

Примечание. При решении задачи может показаться, что приведенная в условии масса насыщенного водяного пара не нужна. Такое заключение неверно. Эта масса имеет существенное значение при анализе решения. Для данных условия при введении в пространство под поршнем 2 г воды и нагревании ее от 293 до 373 К должно сконденсироваться

$$\Delta m=\frac{mc\,(T_0-T)}{r}=0{,}3\ \text{г}$$

водяного пара, что составляет примерно 15 % его первоначального количества. При этом вода и пар будут находиться при температуре 373 К. Как показывают расчеты, при введении в цилиндр около 13,5 г воды весь пар сконденсируется и вода будет иметь температуру $T_0=373$ К. При введении большего количества воды установившаяся температура будет ниже T_0, что необходимо учитывать при составлении уравнения теплового баланса.

Пример 3. В сосуде объемом $V=1{,}5$ дм^3 находится воздух при температуре $T=290$ К и влажности $\varphi=50$ %. Какое количество росы выпадет при изотермическом уменьшении объема в $n=3$ раз?

Решение. По определению, относительная влажность

$$\varphi=\frac{p}{p_0},$$

где p — парциальное давление водяного пара в воздухе при $T=290$ К; p_0 — давление насыщенного водяного пара при $T=290$ К. Так как $\dfrac{p}{p_0}=\dfrac{\rho}{\rho_0}$, где ρ — плотность пара при $T=290$ К, а ρ_0 — плотность насыщенного пара при той же температуре, то относительная влажность $\varphi=\dfrac{\rho}{\rho_0}$. Масса водяного пара, содержащегося в объеме V,

$$m=\rho V=\varphi\rho_0V.$$

При изотермическом уменьшении объема выпала роса, т. е. водяной пар стал насыщенным. Следовательно, в объеме V/n осталась масса водяного пара $m_1=\dfrac{\rho_0V}{n}$. Масса сконденсированного пара

$$\Delta m=\varphi\rho_0V-\frac{\rho_0V}{n}=\rho_0V\left(\varphi-\frac{1}{n}\right)=3{,}7\ \text{г}.$$

Пример 4. В одном сосуде объемом $V_1 = 0{,}25$ м³ находится воздух с относительной влажностью $\varphi_1 = 40$ %, в другом сосуде объемом $V_2 = 0{,}75$ м³ — воздух с влажностью $\varphi_2 = 60$ %. Температура в обоих сосудах одинакова. Сосуды соединены трубкой с краном. Какова будет относительная влажность воздуха в сосудах, если открыть кран?

Решение. Давление водяных паров после открытия крана равно сумме парциальных давлений паров, находящихся в первом и втором сосудах:

$$p = p_1' + p_2'. \qquad (2.28)$$

Применив к состояниям водяного пара до и после открытия крана закона Бойля — Мариотта, найдем парциальные давления:

$$p_1' = \frac{p_1 V_1}{V_1 + V_2}; \quad p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_1 + V_2}, \qquad (2.29)$$

где $p_1 = \varphi_1 p_0$, $p_2 = \varphi_2 p_0$ — давления водяного пара в сосудах до открытия крана. После подстановки значений (2.29) в равенство (2.28) получим

$$p = \frac{p_0 (\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2)}{V_1 + V_2}.$$

После открытия крана в сосудах установится относительная влажность

$$\varphi = \frac{p}{p_0} = \frac{\varphi_1 V_1 + \varphi_2 V_2}{V_1 + V_2} = 0{,}55.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.74. Ртуть кипит при температуре 640 К. Как же могут применяться ртутные термометры для измерения температур до 900 К?

2.75. Можно ли вскипятить воду в сосуде, который находится в другом сосуде с кипящей водой?

2.76. Почему сильные морозы в безветренную погоду переносятся заметно легче, чем более слабые морозы, но при ветре?

2.77. Почему кипящая вода не поднимается за поршнем всасывающего насоса при медленном подъеме поршня?

2.78. Стеклянная U-образная трубка заполнена жидкостью. Концы трубки запаяны (рис. 2.16.). Как можно установить, что в пространстве над поверхностью жидкости содержится только насыщенный пар этой жидкости?

Рис. 2.16

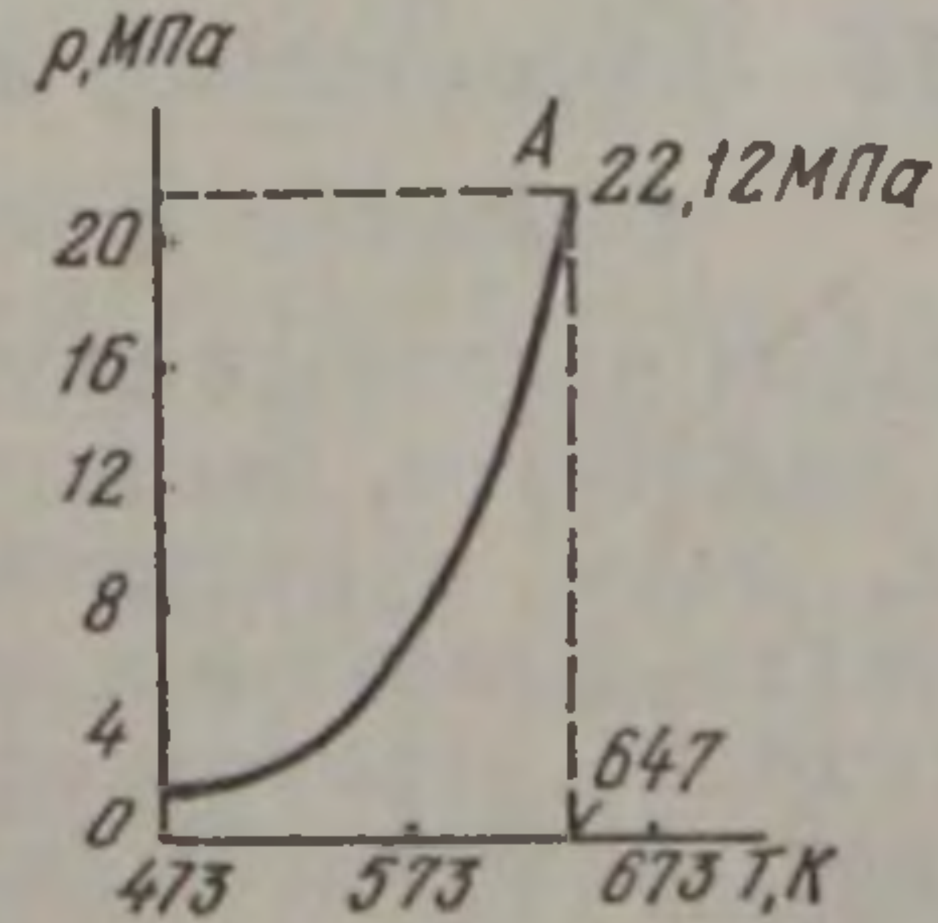


Рис. 2.17

2.79. Пользуясь графиком зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры (рис. 2.17.), определить, в каком агрегатном состоянии находится вода при температуре 573 К и давлениях 4 и 12 МПа; при давлении 12 МПа и температурах 550 и 630 К; в точке A.

2.80. Найти среднее расстояние между молекулами насыщенного водяного пара при 100 °С. Во сколько раз это расстояние больше расстояния между молекулами воды при 0 °С?

2.81. Над поверхностью ртути в ртутном чашечном барометре находится небольшое количество воды. При температуре 19 °C барометр показывает давление 980 гПа. Каково истинное давление воздуха?

2.82. Имеется пар при температуре 300 К и давлении 1 кПа. Какой это пар? Каким он станет, если объем уменьшится от 2 до 0,5 дм^3, а температура понизится до 280 К?

2.83. При сушке фруктов в разреженном воздухе на протяжении 1 ч в камере вакуум-аппарата давление было постоянно и равно 11 гПа, после чего резко упало. Какое количество воды содержалось во фруктах, если скорость откачки газа 20 дм^3/с, а установившаяся в камере температура 9 °C?

2.84. В герметически закрытом сосуде объемом 0,5 м^3 находится сухой воздух при температуре 17 °C и давлении 980 гПа. В сосуд впрыскивают 300 г воды и нагревают до 100 °C. Определить давление в сосуде после нагревания.

2.85. В цилиндре под поршнем в объеме 4 дм^3 находится насыщенный водяной пар при температуре 373 К. Какая масса пара сконденсируется, если объем уменьшить до 1,5 дм^3 при постоянной температуре?

2.86. Чем объяснить появление зимой инея на оконных стеклах? С какой стороны стекла он появляется?

2.87. Может ли при увеличении абсолютной влажности атмосферного воздуха происходить уменьшение относительной влажности? Если да, то в каком случае?

2.88. Как изменится разность температур сухого и влажного термометров психрометра при понижении температуры в комнате, если абсолютная влажность останется без изменения?

2.89. При охлаждении воздуха от 20 до 7 °C из каждого его кубометра выделилось 8 г воды. Определить абсолютную и относительную влажность.

2.90. При какой температуре воздуха его относительная влажность 50 %, если известно, что точка росы равна 7 °C?

2.91. Относительная влажность воздуха 84 %. Что показывают сухой и смоченный термометры психрометра, если разность их показаний 1 °C; 2 °C?

2.92. На сколько молекул приходится одна молекула водяных паров при температуре 290 К, относительной влажности 60 % и давлении 990 гПа? Как изменится это соотношение, если температура повысится на 11 К?

2.93. Какова плотность сухого воздуха при температуре 300 К, относительной влажности 70 % и нормальном давлении?

2.94. Кубический метр влажного воздуха при относительной влажности 40 %, температуре 300 К и давлении 1000 гПа имеет массу 1157 г. Определить давление насыщенного водяного пара при этой температуре.

2.6. Поверхностное натяжение жидкостей

Основные законы и формулы

Если молекула находится внутри жидкости и удалена от ее поверхности на расстояние, превышающее радиус сферы молекулярного действия, силы притяжения в среднем уравновешиваются. Если же молекула находится в поверхностном слое, толщина которого не превосходит радиуса сферы молекулярного действия, то возникает равнодействующая сила, направленная внутрь жидкости. В результате в поверхностном слое появляются силы притяжения между молекулами, действующие вдоль поверхности жидкости. Эти силы называются *силами поверхностного натяжения*. Коэффициент поверхностного натяжения численно равен отношению модуля F силы поверхностного натяжения, действующей на границу поверхностного слоя длиной l, к этой длине:

$$\sigma = \frac{F}{l}. \qquad (2.30)$$

С возрастанием температуры σ уменьшается и обращается в нуль при критической температуре.

Силами взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердых тел объясняется явление смачивания и несмачивания. С этим явлением связан подъем жидкости в капиллярах. Высота поднятия смачивающей жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma \cos\theta}{\rho g r}, \tag{2.31}$$

где θ — угол смачивания; ρ — плотность жидкости; r — радиус капилляра.

Жидкость, не смачивающая стенки капилляра, опускается ниже уровня жидкости в широком сосуде. Для полного смачивания $\theta = 0$, для полного несмачивания $\theta = 180°$.

Решение задач

В задачах данной темы рассматриваются явления в поверхностном слое жидкости. Эти явления специфичны, поэтому при решении задач следует обратить внимание на физическое истолкование особенностей нахождения молекул в поверхностном слое и внутри жидкости, различие их концентраций, сил взаимодействия, расстояний между ними. При расчетах сил поверхностного натяжения следует учитывать, что они действуют вдоль любого контура, ограничивающего участок поверхности раздела жидкости. При этом сила поверхностного натяжения, приложенная к каждому элементу контура, направлена касательно к поверхности по внутренней нормали к элементу контура.

Во многих задачах, связанных с поверхностным натяжением, рассматриваются мыльные пленки. В этих случаях необходимо учитывать, что пленка имеет две поверхности — наружную и внутреннюю, вдоль каждой из которых действуют силы поверхностного натяжения. При решении задач на нахождение коэффициента поверхностного натяжения (или других связанных с ним величин) методом отрыва капель диаметр шейки капли принимается равным диаметру капилляра, если в условии нет специальных оговорок.

В процессе решения задач следует обратить внимание на энергетический подход к рассмотрению явления поверхностного натяжения. При этом подходе σ определяется работой, которую необходимо затратить, чтобы изотермически увеличить поверхность жидкости на единицу при сохранении ее объема неизменным:

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S}.$$

При решении задач о поверхностном натяжении жидкостей с искривленными поверхностями нужно дать учащимся понятие о добавочном (положительном или отрицательном) давлении, определяемом формулой $p = \frac{2\sigma}{r}$, где r — радиус кривизны поверхности. Для выпуклой поверхности p положительно, для вогнутой — отрицательно. Необходимо обратить внимание учащихся на то, что это изменение давления происходит скачком.

В задачах по расчету высоты поднятия жидкости в капилляре, где невозможно воспользоваться формулой (2.31), следует исходить из условия равновесия столба жидкости.

Пример 1. Тонкое кольцо, средний диаметр которого $d=80$ мм, подвешено на пружине с коэффициентом жесткости $k=2$ Н/м и соприкасается с поверхностью жидкости. При медленном опускании поверхности жидкости кольцо оторвалось от нее при растяжении пружины на $x=16$ мм. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Решение. Перед отрывом кольца от жидкости ее свободная поверхность у границы с кольцом располагается приблизительно вертикально. Вдоль каждой единицы длины внутренней и наружной окружностей кольца действует сила поверхностного натяжения, равная, согласно формуле (2.30), коэффициенту σ. Векторы этих сил касательны к свободной поверхности жидкости и направлены вертикально вниз. Поэтому результирующая сила поверхностного натяжения, действующая на кольцо, также направлена вертикально вниз и равна сумме сил, действующих на отдельные элементы контура, т. е.

$$F_{\text{н}}=2\pi d\sigma.$$

Для отрыва кольца от жидкости необходимо приложить силу F, направленную вертикально вверх, которая уравновесила бы силу поверхностного натяжения. Следовательно, $2\pi d\sigma=kx$; отсюда коэффициент поверхностного натяжения

$$\sigma=\frac{kx}{2\pi d}=0,64 \text{ Н/м}.$$

Пример 2. При плавлении нижнего конца вертикально подвешенной свинцовой проволоки диаметром $d=2$ мм образовалось $n=50$ капель свинца. Определить диаметр капель. На сколько укоротилась проволока? Коэффициент поверхностного натяжения жидкого свинца $\sigma=0,47$ Н/м.

Решение. По мере плавления проволоки на ее конце образуется капля и растет до таких размеров, пока ее вес не станет равным результирующей сил поверхностного натяжения, действующих по контуру, ограничивающему поперечное сечение шейки (по окружности):

$$P=F. \tag{2.32}$$

Все капли в момент отрыва

$$P=V_1\rho g=\frac{1}{6}\pi d_1^3\rho g, \tag{2.33}$$

где d — диаметр шейки капли, равный диаметру проволоки.

Результирующая сил поверхностного натяжения

$$F=\pi d\sigma, \tag{2.34}$$

где d — диаметр капли, равный диаметру проволоки.

Подставив значения (2.33) и (2.34) в (2.32), определим диаметр капли:

$$d_1=\sqrt[3]{\frac{6d\sigma}{\rho g}}=3,7 \text{ мм}.$$

Объем расплавившейся части проволоки

$$V=\frac{\pi d^2 h}{4}, \tag{2.35}$$

где h — ее длина.

Объем одной капли

$$V_1=\frac{\pi d\sigma}{\rho g}.$$

Из расплавленной части проволоки образовалось n капель, следовательно,

$$V = nV_1 = \frac{n\pi d\sigma}{\rho g}. \quad (2.36)$$

Приравняв правые части равенств (2.35) и (2.36), получим

$$\frac{dh}{4} = \frac{n\sigma}{\rho g},$$

откуда

$$h = \frac{4n\sigma}{d\rho g} = 42{,}4 \text{ см}.$$

Пример 3. Длина выступающей части капиллярной трубки, погруженной в вертикальном положении в сосуд с ртутью, $l=10$ см, а разность уровней в трубке и сосуде $l_1=5$ см. В этом положении верхний конец трубки закрывают и поднимают ее до тех пор, пока не сравняются уровни ртути в трубке и в сосуде. Определить длину выступающей части трубки, если атмосферное давление $p_0=1010$ гПа.

Решение. Разность уровней ртути в трубке и сосуде обусловлена действием сил поверхностного натяжения и будет в первом случае определяться условием

$$2\pi r\sigma = \pi r^2 \rho g l_1, \quad (2.37)$$

где r — радиус трубки; ρ — плотность ртути.

При подъеме закрытой трубки давление внутри нее в результате увеличения объема, занимаемого воздухом, уменьшается. В этом случае сила поверхностного натяжения уравновешивает силу, возникающую за счет разности атмосферного давления p_0 и давления воздуха p внутри трубки:

$$2\pi r\sigma = \pi r^2 (p_0 - p). \quad (2.38)$$

Совместное решение уравнений (2.37) и (2.38) дает

$$p_0 - p = \rho g l_1. \quad (2.39)$$

Применив к состоянию воздуха в трубке закон Бойля — Мариотта $p_0V_0 = pV$ (где $V_0 = (l+l_1)S$, $V = hS$), найдем давление:

$$p = p_0 \frac{l + l_1}{h}, \quad (2.40)$$

где h — длина выступающей части трубки во втором случае.

Подставляя значение (2.40) в формулу (2.39), получаем

$$p_0\left(1 - \frac{l + l_1}{h}\right) = \rho g l_1.$$

Из этого уравнения определяем

$$h = \frac{p_0(l + l_1)}{p_0 - \rho g l_1} = \frac{l + l_1}{1 - \dfrac{\rho g l_1}{p_0}} = 16 \text{ см}.$$

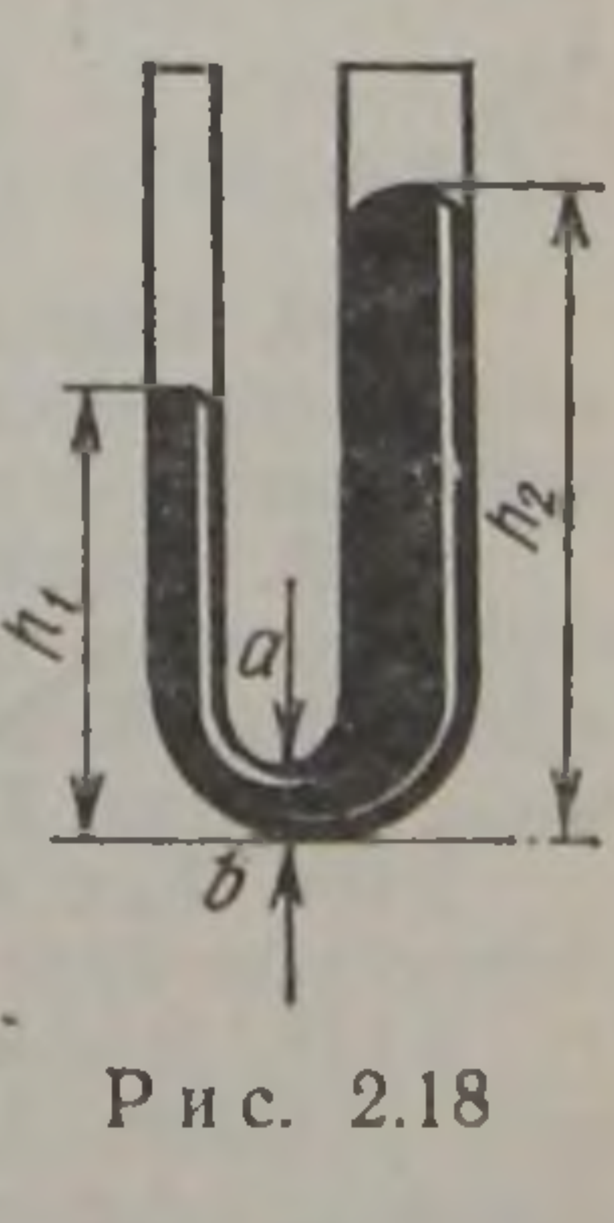


Рис. 2.18

Пример 4. Давление в откачиваемом объеме измеряется открытым U-образным манометром, заполненным ртутью (рис. 2.18). Диаметр трубки одного колена манометра $d_1 = 0{,}5$ мм, другого $d_2=2$ мм. Каково измеряемое давление, если уровни ртути в трубках одинаковы? Атмосферное давление $p_1=990$ гПа.

Решение. Ртуть в сообщающихся сосудах находится в равновесии, если давления в сечении ab слева и справа одинаковы. Эти давления представляют сумму гидростатического давления, создаваемого столбом ртути ρgh, давления, создаваемого силами поверхностного натяжения $\left(\frac{F}{S} = \frac{4\pi d\sigma}{\pi d^2} = \frac{4\sigma}{d}\right)$, и внешнего давления.

По данным задачи, $h_1 = h_2$, следовательно, условие равновесия

$$p_1 + \frac{4\sigma}{d_1} = p + \frac{4\sigma}{d_2},$$

откуда измеряемое давление

$$p_1 = p + 4\sigma\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right) = 960 \text{ гПа}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.95. Почему полотно палатки сильно натягивается после дождя?

2.96. Для удаления с ткани парафиновых и иных жирных пятен обычно проглаживают ткань горячим утюгом через бумагу. Почему при этом парафин или жир впитывается в бумагу, а не расплывается по ткани?

2.97. Почему алюминий не удается паять оловянным припоем?

2.98. Какова форма капель воды, из которых состоит туман? Почему?

2.99. Одна стеклянная колба наполовину заполнена водой, другая — ртутью. Какие формы примут эти жидкости в состоянии невесомости?

2.100. При удалении с поверхности ткани жирного пятна рекомендуется смачивать растворителем центр пятна, а не все пятно. Почему?

2.101. За счет какого источника энергии поднимается жидкость в капилляре?

2.102. После боронования почвы испарение влаги из нее значительно уменьшается. Чем это объясняется?

2.103. Сообщающиеся капиллярные трубки разного диаметра заполнены водой. Как изменится разность уровней воды в трубках при нагревании воды?

2.104. Из двух капельниц с одинаковыми диаметрами отверстий вытекают каплями равные массы воды и спирта при 20° С. Сравнить число образовавшихся капель, приняв, что диаметр шейки капли равен диаметру отверстия капельницы.

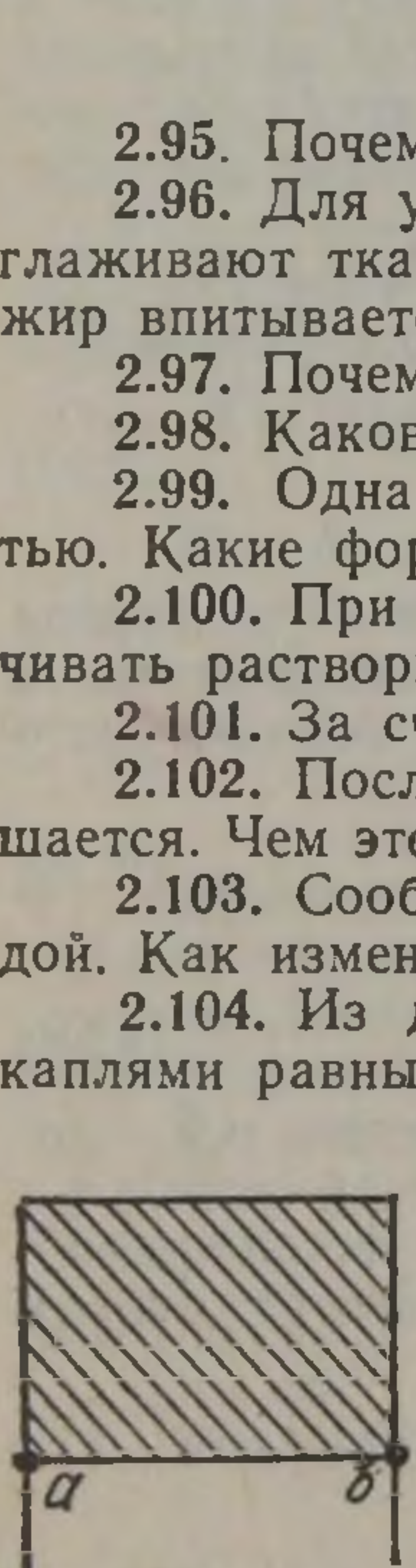


Рис. 2.19

2.105. При затягивании мыльной пленкой проволочной прямоугольной рамки (рис. 2.19) ее подвижная сторона ab осталась в равновесии. Определить, из какой проволоки изготовлена рамка, если ее диаметр 1,1 мм. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора принять равным $4 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

2.106. При перемещении одной стороны (длиной 0,03 м) проволочной прямоугольной рамки, затянутой мыльной пленкой, на 21 мм совершается работа $5 \cdot 10^{-6}$ Дж. Определить коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

2.107. Капиллярную трубку, внутренний диаметр которой 0,5 мм, опускают в воду перпендикулярно к поверхности и под углом 30° к поверхности. Какова будет высота столба воды в трубке в обоих случаях?

2.108. Запаянная стеклянная трубка, заполненная ртутью, погружена открытым концом в широкий сосуд. Внутренний диаметр трубки 3 мм. Разность уровней ртути 750 мм. Определить атмосферное давление, полагая, что ртуть не смачивает стекло. Какова будет ошибка измерения без учета капиллярных явлений?

2.109. Как изменится высота поднятия жидкости в капилляре, если сосуд с жидкостью будет установлен в лифте, поднимающемся с ускорением $a = g$?

2.110. Диаметры колен U-образной стеклянной трубки 0,5 и 1,5 мм. Определить разность уровней жидкости в коленах при заполнении сосуда: водой; керосином.

2.111. При нагревании воды от 20 до 70° С коэффициент поверхностного натяжения ее изменяется от 0,073 до 0,064 Н/м. На сколько при этом изменится разность уровней воды в двух сообщающихся капиллярах, диаметры которых 0,1 и 0,3 мм?

2.7. Свойства твердых тел

Основные законы и формулы

Ко всем видам упругих деформаций применим закон Гука: в пределах упругости величина деформации прямо пропорциональна величине деформирующей силы:

$$F = kx, \tag{2.41}$$

где F — сила, действующая на данное тело и вызывающая деформацию; k — коэффициент упругости или жесткости; x — величина деформации.

Деформацию растяжения характеризуют абсолютным удлинением ($\Delta l = l - l_0$) и относительным удлинением

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0},$$

где l_0 — начальная длина; l — конечная.

Состояние деформированного тела характеризуют физической величиной, называемой *напряжением.* Напряжение — величина, равная отношению силы упругости F к площади S поперечного сечения тела:

$$\sigma = \frac{F}{S}. \tag{2.42}$$

Для деформации растяжения закон Гука выражается в следующем виде:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \quad \text{или} \quad \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\sigma}{E}, \tag{2.43}$$

где E — модуль Юнга материала, из которого изготовлено тело, характеризующий сопротивляемость материала упругой деформации; F — сила, действующая на тело и вызывающая его удлинение.

Предел прочности — это максимальное напряжение $\sigma_{\text{пр}}$, возникающее в теле до разрушения. Число, показывающее, во сколько раз предел прочности больше допустимого напряжения $\sigma_{\text{д}}$, называют *коэффициентом запаса прочности:*

$$n = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{д}}}.$$

В пределах не очень большого интервала температур любой линейный размер тел изменяется по закону

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t), \tag{2.44}$$

где $\Delta t = t - t_0$; l_0 и t_0 — начальные значения длины и температуры тела; l и t — конечные значения этих величин; α — температурный коэффициент линейного расширения. При тех же оговорках объем тел изменяется по закону

$$V = V_0(1 + \beta\Delta t), \tag{2.45}$$

где V_0, V — соответственно начальный и конечный объемы; β — температурный коэффициент объемного расширения. При небольших температурах $\beta = 3\alpha$.

Плотность тел при их тепловом расширении изменяется по закону

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \beta t}, \tag{2.46}$$

где ρ, ρ_0 — плотности тела при температуре t и 0 °С соответственно.

Решение задач

При решении задач на упругие свойства твердых тел используется закон Гука в форме (2.41) или (2.43), а также понятия напряжения (2.42), предела прочности и коэффициента запаса прочности.

В процессе решения задач этой темы важное значение имеет качественное рассмотрение различных характеристик, описывающих деформацию тел. Необходимо обращать внимание на отличие упругой силы, которая определяет напряжение в образце, от внешней силы, вызывающей деформацию. Следует подчеркивать отличительные особенности упругой и пластической деформаций и то, что силы упругости появляются только при деформации; в то же время деформация не всегда приводит к появлению сил упругости. При помощи диаграммы напряжений необходимо выяснить физический смысл таких понятий, как пределы упругости, пропорциональности, текучести, прочности. Для глубокого понимания явлений, возникающих при деформациях, следует объяснять эти явления при помощи сил взаимодействия между молекулами.

Пример 1. Толстостенная стальная колонна длиной $l = 3$ м и наружным диаметром $D = 300$ мм сжимается силой $F = 10$ МН. Определить толщину стенки и абсолютное изменение длины колонны, если допустимое давление $p_д = 50$ МПа.

Решение. По условию задачи $\frac{F}{S} \leqslant p_д$, откуда

$$S \geqslant \frac{F}{p_д}, \tag{2.47}$$

где S — площадь поперечного сечения колонны:

$$S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2); \tag{2.48}$$

d — внутренний диаметр колонны: Подставив значение (2.48) в (2.47), найдем

$$d = \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi p_д}} = 254 \text{ мм}.$$

Толщина стенки

$$h = \frac{D - d}{2} = 23 \text{ мм}.$$

Абсолютное изменение длины колонны найдем из закона Гука:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\sigma,$$

где E — модуль Юнга; $\sigma = \frac{F}{S}$ — давление, испытываемое колонной. Отсюда

$$\Delta l = \frac{lF}{ES} = \frac{4lF}{\pi E(D^2 - d^2)} \approx 7 \text{ мм}.$$

Пример 2. Сферический баллон диаметром $d=0{,}5$ м с толщиной стенок $h=1$ см заполнен сжатым воздухом под давлением, обеспечивающим трехкратный запас прочности. Каково давление в баллоне, если допустимое напряжение материала баллона $\sigma_д = 60$ МПа, атмосферное давление $p_0 = 1000$ гПа?

Решение. Напряжение, возникающее в материале баллона после его заполнения,

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F — сила, действующая на поперечное сечение материала баллона.

В сферическом баллоне наибольшего значения сила достигнет в любом сечении, проходящем через центр сферы, так как площадь проекции, на которую действует внутреннее давление в этом сечении, максимальна:

$$F = \sigma\frac{\pi d^2}{4} = (p - p_0)\frac{\pi d^2}{4}, \tag{2.49}$$

где d — внутренний диаметр баллона; p — давление воздуха в баллоне. С другой стороны,

$$F = \frac{\sigma_д}{n}\pi d h, \tag{2.50}$$

где $n=3$ — коэффициент запаса прочности.

Приравняв правые части равенств (2.49) и (2.50), получим

$$(p - p_0)\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\sigma_д}{n}\pi d h.$$

Решая последнее уравнение относительно p, находим давление в баллоне:

$$p = p_0 + \frac{4\sigma_д h}{nd} = 1{,}7 \text{ МПа}.$$

Решение задач на тепловое расширение тел основано на применении к каждому состоянию нагреваемого тела одной из формул (2.44) — (2.46). Часто в задачах наряду с тепловым расширением рассматриваются различные сопутствующие процессы (деформация, изменение гидростатического давления или выталкивающей силы, теплообмен и др.). В этом случае при решении к уравнениям теплового расширения добавляются уравнения, описывающие эти процессы. При решении задач на тепловое расширение жидкости с учетом расширения сосуда, в котором она находится, следует иметь в виду, что формула (2.45) справедлива как для сплошных тел, так и для тел, имеющих полость. В задачах на расширение воды надо учитывать аномальную зависимость ее плотности от температуры в интервале от 0 до 4 °С.

В процессе решения задач необходимо обращать внимание на физическую сущность явления теплового расширения, основанного на изменении расстояний между частицами и сил взаимодействия между ними.

Пример 3. Латунная шкала ртутного барометра градуирована при температуре 0 °С. Каково истинное давление, если при температуре $t_1=20$ °С барометр показывает давление $p_1=1010$ гПа? Расширением стекла пренебречь.

Решение. Если барометр градуирован при 0 °С, то при всякой другой температуре его показания будут отличаться от истинного давления. Возникновение погрешности в показаниях барометра обусловлено следующими причинами: 1) с повышением температуры плотность ртути уменьшается и при неизменном атмосферном давлении длина столба ртути в трубке возрастает; 2) вследствие теплового расширения шкалы, по которой отсчитывается высота столба, цена ее деления увеличивается. Неодинаковое изменение линейных размеров шкалы и ртутного столба при изменении температуры и вызывает погрешность в показаниях барометра.

Чтобы определить истинное давление, необходимо учесть температурную поправку, т. е. привести показания барометра к той температуре, при которой градуирована его шкала (в нашем случае к 0 °С).

Используя показания барометра при температуре $t_1=20$ °С, найдем высоту ртутного столба:

$$h_1=p_1c_1,$$

где p_1 — показания барометра; c_1 — цена деления шкалы барометра при 20 °С, мм/гПа. Цена деления — расстояние между двумя соседними рисками на шкале, соответствующее давлению в 1 гПа.

Высота, на которую поднялся бы столб ртути при неизменном атмосферном давлении и температуре $t_0=0$ °С,

$$h_0=p_0c_0. \tag{2.51}$$

Цена деления c_1 будет больше c_0, выверенной при 0 °С. Если коэффициент линейного расширения латуни равен α, то $c_1=c_0\,(1+\alpha t_1)$, и высота

$$h_1=p_1c_0(1+\alpha t_1). \tag{2.52}$$

Так как по условию задачи атмосферное давление не изменяется, то

$$\rho_0h_0=\rho_1h_1, \tag{2.53}$$

где ρ_0 и ρ_1 — плотность ртути соответственно при 0° С и при температуре t_1. С учетом зависимости плотности от температуры

$$\rho_1=\frac{\rho_0}{1+\beta t_1},$$

где β — коэффициент объемного расширения ртути.

Из равенства (2.53) получим

$$h_1=h_0(1+\beta t_1),$$

или с учетом равенства (2.51)

$$h_1=p_0c_0(1+\beta t_1). \tag{2.54}$$

Подставляя значения (2.54) в уравнение (2.52), находим

$$p_0=p_1\frac{1+\alpha t_1}{1+\beta t_1}=1007\ \text{гПа}.$$

Пример 4. Шарик, коэффициент объемного расширения которого β, взвешивается в жидкости при температурах t_1 и t_2. Вес вытесненной жидкости равен соответственно P_1 и P_2. Определить коэффициент объемного расширения жидкости β_1.

Решение. Пусть при $t=0$ °С объем шарика равен V_0, а плотность жидкости ρ_0.

Вес вытесненной в обоих случаях жидкости равен произведению удельного веса жидкости на объем шарика, взятых при соответствующих температурах. Поэтому

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_1 g V_1}{\rho_2 g V_2}.$$

Отношение объемов шарика при температурах t_1 и t_2

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{V_0(1+\beta t_1)}{V_0(1+\beta t_2)},$$

а отношение плотностей жидкости

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\rho_0(1+\beta_1 t_2)}{\rho_0(1+\beta_1 t_1)}.$$

Отсюда

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(1+\beta t_1)(1+\beta_1 t_2)}{(1+\beta t_2)(1+\beta_1 t_1)}.$$

Пренебрегая членами, содержащими произведение $\beta\beta_1$, вследствие их малости по сравнению с членами, содержащими β и β_1, имеем

$$\frac{P_1}{P_2} \approx \frac{1+\beta_1 t_2+\beta t_1}{1+\beta_1 t_1+\beta t_2}.$$

Решив это уравнение относительно β_1, получим

$$\beta_1 = \frac{P_2(1+\beta t_2) - P_1(1+\beta t_1)}{P_1 t_1 - P_2 t_2}.$$

Задачи для самостоятельного решения

2.112. Почему при закалке возрастают прочность и твердость стали?

2.113. Какой потолок прочнее: плоский или сводчатый? Материал потолка в обоих случаях одинаковый.

2.114. Определить абсолютное удлинение медной проволоки длиной 1 м и диаметром 1 мм под действием груза в 25 Н. Выдержит ли проволока груз в 200 Н?

2.115. На какую глубину можно опустить в океан стальной трос, чтобы он не разорвался под действием силы тяжести? Плотность морской воды принять равной 1030 кг/м^3.

2.116. На стальном тросе поднимается лифт массой 700 кг с ускорением 0,5 м/с^2. Каково должно быть сечение троса для обеспечения запаса прочности, равного 10?

2.117. Алюминиевый стержень длиной 0,5 м вращается вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно к продольной оси. При какой угловой скорости стержень может разорваться?

2.118. Кубик, вырезанный из монокристалла, нагреваясь, может превратиться в параллелепипед. Объяснить причину этого явления.

2.119. Когда натянутая стальная струна охлаждается, ее натяжение, а следовательно, и энергия, зависящая от натяжения, увеличиваются. За счет чего происходит увеличение энергии?

2.120. На медный цилиндр плотно надето железное кольцо. Как следует поступить, чтобы снять кольцо?

2.121. Почему при клепке толстых стальных листов пользуются сильно раскаленными заклепками?

2.122. Медный обруч вращается вокруг оси, проходящей через центр тяжести. Изменится ли его угловая скорость, если повысится температура?

2.123. На металлическом диске проведена прямая линия, не проходящая через центр. Что произойдет с этой линией, если металл нагреть?

2.124. Предельный допуск латунной детали диаметром 60 мм при температуре 20 °С равен ± 100 мкм. Следует ли при измерениях во время обработки детали вносить поправку, если при обработке на токарном станке она нагревается до 80 °С?

2.125. При температуре 0 °С объем стеклянного баллона 100 см^3. При этой температуре в баллон налили 96 см^3 ртути. При нагревании до 270 °С ртуть заполнила весь объем. Определить коэффициент линейного расширения стекла, если коэффициент объемного расширения ртути $18 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.

2.126. При какой температуре плотность керосина равна 770 кг/м^3, если при 20 °С она равна 800 кг/м^3?

2.127. Два стержня, один медный длиной 24 см при 0 °С и другой железный, сложены так, что они совпадают одними концами. Определить длину железного стержня, если известно, что разность их длин при любой температуре остается постоянной.

2.128. Длина шкалы термометра от нуля до 100 °С равна 15 см. Объем этилового спирта в резервуаре при 0 °С составляет 80 мм^3. Определить диаметр капилляра термометра. Изменением размеров капилляра с температурой пренебречь.

2.129. Определить коэффициент линейного расширения материала, из которого изготовлен резервуар, если полностью заполненный резервуар при температуре t_1 вмещает массу жидкости m_1, при температуре t_2 — массу m_2. Коэффициент объемного расширения жидкости β.

2.130. Стальная балка наглухо закреплена между двумя стенами при 0 °С. При повышении температуры она производит на стены давление, равное 40 МПа. До какой температуры нагрелась балка?

2.131. При укладке трамвайных рельсов их сваривают в стыках. Какие напряжения возникают при колебаниях температуры от -20 до 40 °С, если рельсы укладывали при температуре 15 °С?

2.132. Два стержня одинакового сечения S соединены своими концами и расположены между двумя массивными стенками. Определить силу, с которой стержни действуют друг на друга при нагревании их на ΔT К, если их длины l_1 и l_2. Коэффициенты линейного расширения стержней α_1 и α_2, модули упругости E_1 и E_2. Деформацией стенок пренебречь.

3. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

3.1. Закон сохранения электрического заряда. Взаимодействие заряженных тел

Основные законы и формулы

В электрически нейтральной системе содержится одинаковое количество элементарных зарядов противоположного знака. Если электрическая нейтральность тела нарушена, то оно называется *наэлектризованным.*

При всех явлениях, связанных с перераспределением электрических зарядов в изолированной системе взаимодействующих тел, алгебраическая сумма электрических зарядов сохраняется постоянной:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}. \qquad (3.1)$$

Раздел электродинамики, посвященный изучению покоящихся электрических зарядов, называют *электростатикой.* Основной закон электростатики — закон Кулона

$$F = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2},$$

где $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ — коэффициент пропорциональности; ε_0 — электрическая постоянная вакуума в СИ; ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Решение задач

Задачи по этой теме условно можно разделить на две группы: задачи на расчет сил взаимодействия точечных зарядов и задачи, при решении которых определяются или учитываются условия равновесия системы точечных зарядов.

1. Основная цель решения задач первой группы — научиться пользоваться законом Кулона, и в частности раскрыть содержание принципа независимости действия электрических зарядов. При решении таких задач полезно придерживаться следующего порядка выполнения основных действий: расставить силы, действующие на точечный заряд, и записать основное уравнение динамики материальной точки. Если взаимодействуют более двух зарядов, следует учесть принцип независимости действия электрических зарядов. Затем выразить силы электрического взаимодействия через заряды и поля и, подставив их в основное уравнение динамики, записать его в развернутом виде. Если при взаимодействии заряженных тел между ними происходит перераспределение зарядов, к составленному уравнению добавляется уравнение закона сохранения электрических зарядов (3.1).

Пример 1. Согласно теории Бора, в модели атома водорода один электрон вращается по окружности вокруг ядра атома, состоящего из одного протона. С какой частотой n должен вращаться электрон вокруг ядра, чтобы не упасть на него, если радиус орбиты равен $5 \cdot 10^{-2}$ нм?

Решение. На электрон, движущийся по круговой орбите, действует электрическая сила его взаимодействия с ядром:

$$F = k\frac{eq}{\varepsilon R^2},$$

где e, q — модули заряда соответственно электрона и ядра атома водорода; R — радиус орбиты электрона.

Пренебрегая силой гравитационного взаимодействия электрона с ядром, запишем для электрона уравнение второго закона Ньютона в скалярной форме:

$$F = ma_{\text{ц}},$$

где m — масса электрона; $a_{\text{ц}} = \omega^2 R = 4\pi^2 n^2 R$. Тогда

$$F = k\frac{eq}{\varepsilon R^2} = 4\pi^2 n^2 mR,$$

откуда

$$n = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{k\frac{eq}{\varepsilon mR}} \approx 7 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}.$$

2. Задачи второй группы в отличие от первой являются комбинированными. Их решение основано на применении закона Кулона

и вытекающих из него следствий. При их решении следует обратить внимание на характер устойчивости равновесия зарядов: если равновесие заряда является устойчивым по отношению к перемещению вдоль прямой, соединяющей три заряда, то оно будет неустойчивым относительно перемещения по всем другим направлениям. Это обстоятельство является частным выражением общей теоремы о том, что в системе свободных электрических зарядов невозможно осуществить устойчивое равновесие.

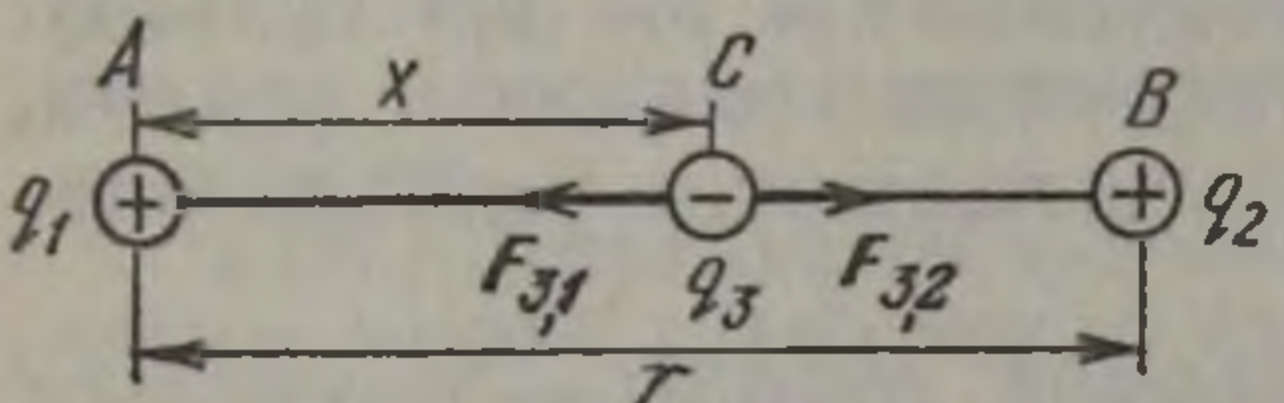


Рис. 3.1

Пример 2. Два точечных положительных заряда q_1 и q_2 помещены на расстоянии r друг от друга. Где надо поместить третий заряд q_3 и каким он должен быть по модулю и знаку, чтобы все три заряда оказались в равновесии?

Решение. Заряд q_3 должен быть отрицательным и находиться между зарядами q_1 и q_2 на прямой, их соединяющей: только тогда силы $\mathbf{F}_{3,1}$ и $\mathbf{F}_{3,2}$, с которыми действуют на заряд q_3 два одноименных заряда q_1 и q_2, будут располагаться на одной прямой и иметь противоположные направления, что необходимо для равновесия заряда q_3. И только в этом случае силы, действующие на каждый из зарядов, будут уравновешены.

Предположим, что заряд q_3 находится в точке C (рис. 3.1). Тогда условие равновесия заряда q_3 запишется так:

$$\mathbf{F}_{3,1}+\mathbf{F}_{3,2}=0. \tag{3.2}$$

Подставив в уравнение (3.2) вместо сил их значения по закону Кулона и произведя сокращения, получим

$$\frac{q_1}{x^2}=\frac{q_2}{(r-x)^2}.$$

Решив уравнение относительно x, найдем два значения искомого расстояния:

$$x_1=\frac{r\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}, \qquad x_2=\frac{r\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}-\sqrt{q_2}}.$$

Исследуя второй корень, видим, что должно выполняться одно из двух неравенств: $x_2>r$ (при $q_1>q_2$) или $x_2<0$ (при $q_1<q_2$). Этим неравенствам соответствует положение точки C вне отрезка AB, что невозможно для равновесия заряда q_3. Следовательно,

$$x=\frac{r\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}. \tag{3.3}$$

Чтобы найти величину q_3, запишем условие равновесия одного из двух зарядов, например заряда q_1: $\mathbf{F}_{1,2}+\mathbf{F}_{1,3}=0$. Подставив вместо сил их значения по закону Кулона и произведя сокращения, получим $\frac{q_2}{r^2}=\frac{q_3}{x^2}$. Заменив величину x ее значением по формуле (3.3), найдем:

$$q_3=\frac{q_1q_2}{(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2})^2}.$$

Пример 3. Три одинаковых положительных заряда по 1 нКл каждый расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой отрицательный заряд надо поместить в центре треугольника, чтобы вся система находилась в равновесии?

Решение. Все три заряда находятся в одинаковых условиях. Поэтому для решения задачи достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы один из трех зарядов, например q_1 (рис. 3.2), находился в равновесии.

Согласно принципу суперпозиции, заряд q_1 будет в равновесии, если сумма действующих на него сил равна нулю: $\mathbf{F}_{1,2}+\mathbf{F}_{1,3}+\mathbf{F}_{1,4}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_{1,4}=0$ или $F_1-F_{1,4}=0$. Выразив F_1 через $F_{1,2}$ и $F_{1,3}$ и учитывая, что $F_{1,2}=F_{1,3}$, получим

$$F_{1,4}=F_{1,2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\ .$$

Применив закон Кулона и имея в виду, что $q_1=q_2=q_3$, запишем:

$$k\frac{q_1q_4}{\varepsilon r_1^2}=k\frac{q_1^2}{\varepsilon r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\ ,$$

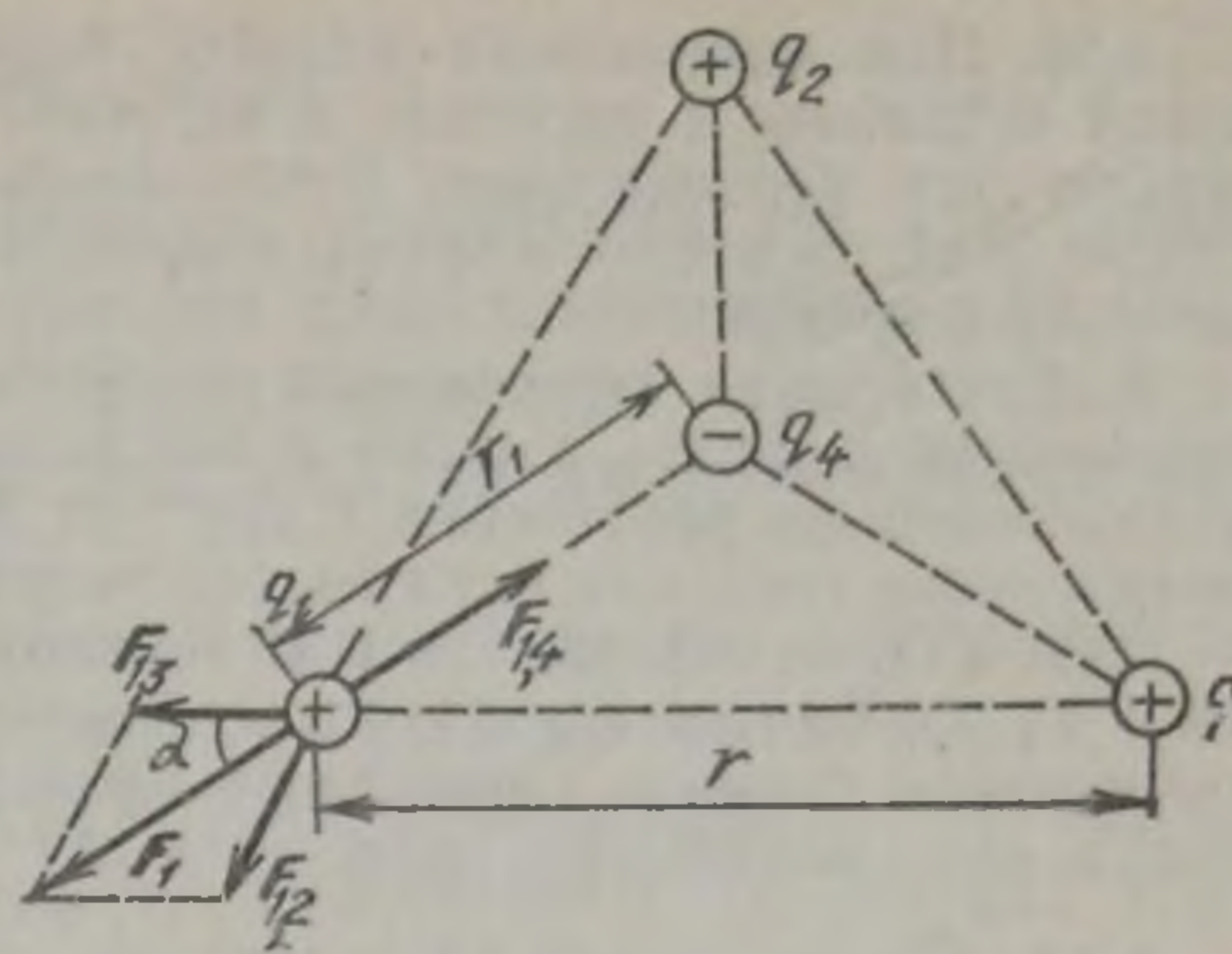


Рис. 3.2

откуда

$$q_4=\frac{q_1r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1+\cos\alpha)}\ .$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике $r_1=\dfrac{r/2}{\cos 30^\circ}=\dfrac{r}{\sqrt{3}}$. С учетом этого $q_4=\dfrac{q_1}{\sqrt{3}}=0{,}58$ нКл.

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Измерения показали, что сила взаимодействия между двумя металлическими шарами, один из которых заряжен положительно, равна нулю. Заряжен ли другой шар?

3.2. Два одинаковых проводящих шарика с зарядами q_1 и q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Шарики привели в соприкосновение и вновь удалили на прежнее расстояние. Доказать, что сила взаимодействия между зарядами во втором случае больше, чем в первом.

3.3. Определить, с какой силой будут притягиваться два одинаковых свинцовых шарика радиусом 10^{-2} м, расположенных на расстоянии 1 м друг от друга, если у каждого атома первого шарика отнять по одному электрону и перенести на второй шарик.

3.4. На двух одинаковых капельках воды находится по одному лишнему электрону. Определить радиус капелек, если сила электростатического отталкивания уравновешивает силу гравитационного притяжения.

3.5. Определить, с какой силой действуют два равных заряда на третий, помещенный на середине расстояния между ними. Рассмотреть случаи одноименных и разноименных зарядов.

3.6. Точечные заряды q и $4q$ находятся на расстоянии r друг от друга. Какой заряд и где нужно поместить, чтобы вся система находилась в равновесии, если заряды: а) закреплены; б) свободны?

3.7. В вершинах квадрата помещены точечные положительные заряды по 1 мкКл каждый. Какой заряд нужно поместить в центре квадрата, чтобы вся система находилась в равновесии?

3.8. Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в глицерин ($\varepsilon=3{,}9$). Какова должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей не изменился?

3.9. Два заряженных шарика массой по 10 г подвешены на нитях длиной 1 м каждая к одной точке, в которой находится третий шарик, заряженный так же, как и два первых. Определить заряд третьего шарика и силу натяжения нитей, если угол расхождения их в положении равновесия равен 60°.

3.10. Два одинаковых медных шарика радиусом 1 см надеты на непроводящий стержень и опущены в керосин. На каком расстоянии будут находиться шарики при вертикальном расположении стержня, если у каждого миллиарда атомов неподвижного шарика отнять по одному электрону и передать их подвижному шарику?

3.11. На двух одинаковых закрепленных в одной точке нитях висят два заряженных шарика. Заряды и массы шариков таковы, что при равновесии они расположены на расстоянии r друг от друга. Определить расстояние между шариками после того, как один из них разрядили.

3.12. Шарик массой 10 г и зарядом $2 \cdot 10^{-6}$ Кл, подвешенный на нити длиной 1 м, вращается в горизонтальной плоскости вокруг такого же неподвижного заряженного шарика. Определить угловую скорость равномерного вращения шарика и силу натяжения нити, если нить образует с вертикалью угол 60°.

3.13. Шарик массой 5 г и зарядом $\frac{2}{3} \cdot 10^{-10}$ Кл вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 0,5 м. В центре вращения находится второй шарик с зарядом, равным по величине и знаку заряду вращающегося шарика. Какую минимальную горизонтальную скорость надо сообщить шарику в нижнем положении, чтобы он мог сделать полный оборот?

3.2. Напряженность электрического поля. Проводники и диэлектрики в электрическом поле

Основные законы и формулы

Электрическое поле характеризуется напряженностью **E**, измеряемой силой **F**, действующей в данной точке поля на единичный пробный положительный заряд:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Модуль напряженности поля точечного заряда q в точке, расположенной на расстоянии r от заряда, определяется по формуле

$$E = k\frac{q}{\varepsilon r^2}. \qquad (3.4)$$

Напряженность электростатического поля системы n зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из них в отдельности:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i \,. \qquad (3.5)$$

Равномерно заряженная бесконечная плоскость создает однородное электростатическое поле, модуль напряженности которого определяется по формуле

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (3.6)$$

Модуль напряженности поля двух равномерно и разноименно заряженных бесконечных параллельных плоскостей вне плоскостей равен нулю, а между ними определяется по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (3.7)$$

Решение задач

Задачи по этой теме целесообразно разделить на следующие основные группы: задачи на вычисление напряженности поля точечных зарядов; задачи на расчет напряженности заряженных тел, размеры которых нельзя не учитывать; задачи на применение явления электростатической индукции.

1. Расчет напряженности поля точечных зарядов осуществляется по формуле (3.4) с учетом принципа суперпозиции полей (3.5). При анализе этих задач надо обязательно оговаривать, что заряды, вносимые в электростатическое поле, независимо от формы и размеров заряженного тела настолько малы по величине, что не искажают поля, т. е. не вызывают перераспределения зарядов на заряженных телах, создающих поле. Эта оговорка отпадает, если источник поля — точечный заряд.

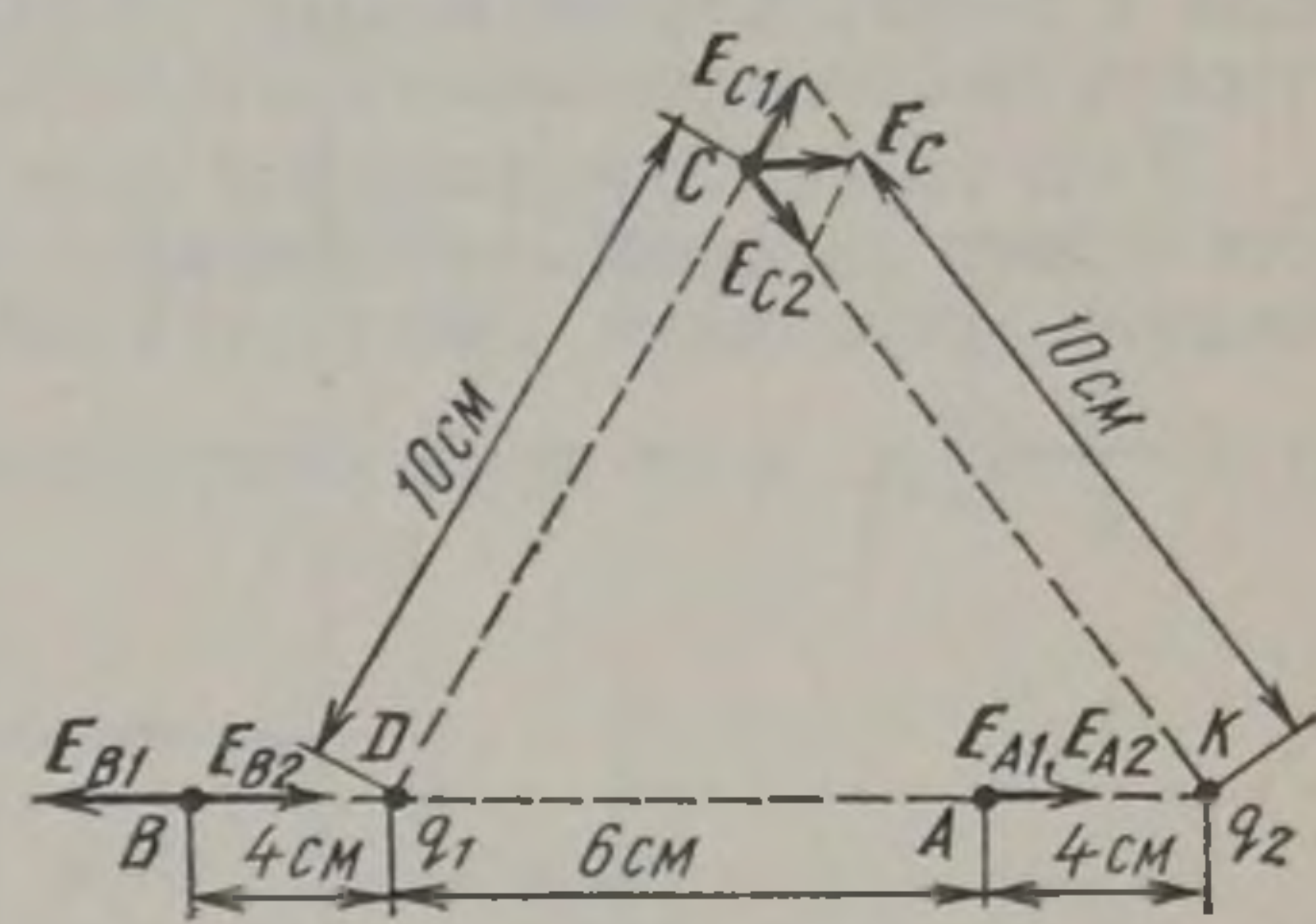


Рис. 3.3

Пример 1. Два точечных заряда $q_1 = 12$ нКл и $q_2 = -12$ нКл расположены на расстоянии 0,1 м один от другого. Определить напряженность электрического поля в точках *A*, *B*, *C* (рис. 3.3).

Решение. В точке *A* векторы $\mathbf{E}_{A1}$ и $\mathbf{E}_{A2}$ напряженности поля, создаваемые зарядами q_1 и q_2, направлены в одну сторону — слева направо (примем это направление за положительное). Поэтому вектор результирующей напряженности направлен в ту же сторону и численно равен их сумме:

$$E_A = E_{A1} + E_{A2} = k\left(\frac{q_1}{\varepsilon r^2_{A1}} + \frac{q_2}{\varepsilon r^2_{A2}}\right) = 97{,}2 \text{ кВ/м}.$$

В точке *B* направления векторов $\mathbf{E}_{B1}$ и $\mathbf{E}_{B2}$ противоположны, поэтому

$$E_B = -E_{B1} + E_{B2} = k\left(\frac{q_1}{\varepsilon r^2_{B1}} + \frac{q_2}{\varepsilon r^2_{B_2}}\right) = -62 \text{ кВ/м}.$$

В точке *C* модули векторов $\mathbf{E}_{C1}$ и $\mathbf{E}_{C2}$ равны. Построив их равнодействующую E_C, мы убеждаемся, что $\triangle\, CDK$ — равносторонний. Таким образом, вектор $\mathbf{E}_C$ численно равен каждому из составляющих векторов в отдельности и направлен слева направо:

$$E_C = k\frac{q_1}{\varepsilon r^2_{C1}} = 10{,}8 \text{ кВ/м}.$$

2. Решение задач на расчет полей, созданных зарядами, которые не являются точечными, но распределены равномерно по сферическим или плоским поверхностям, основано на применении формул (3.6), (3.7) и принципа суперпозиции (3.5). В случае объемного распределения заряда его объемная плотность определяется по формуле $\rho = \frac{q}{V}$.

При решении задач этой группы следует помнить, что напряженность поля внутри шара с равномерно распределенным по поверхности зарядом равна нулю. За пределами шара напряженность поля такая же, какую создавал бы заряд, если бы он был сосредоточен в центре шара. Напряженность поля на поверхности шара определяется по формуле (3.4). Все сказанное в полной мере относится и к сфере. Заполнение сферы диэлектриком не меняет ее напряженности.

Пример 2. Заряд равномерно распределен по объему шара радиусом R из непроводящего материала с объемной плотностью ρ. Определить напряженности поля в точках, расположенных на расстоянии $r_1<R$ от центра шара и $r_2>R$. Построить график зависимости $E=E(r)$.

Решение. Электрическое поле на расстоянии $r_1 < R$ от центра шара создается только зарядами, находящимися внутри шара радиусом r_1, так как заряженный внешний сферический слой внутри себя поля не создает. Заряд шара радиусом r_1 $q_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho$, и на своей поверхности он создает поле

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho}{\varepsilon r_1^2} = \frac{r_1 \rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon}.$$

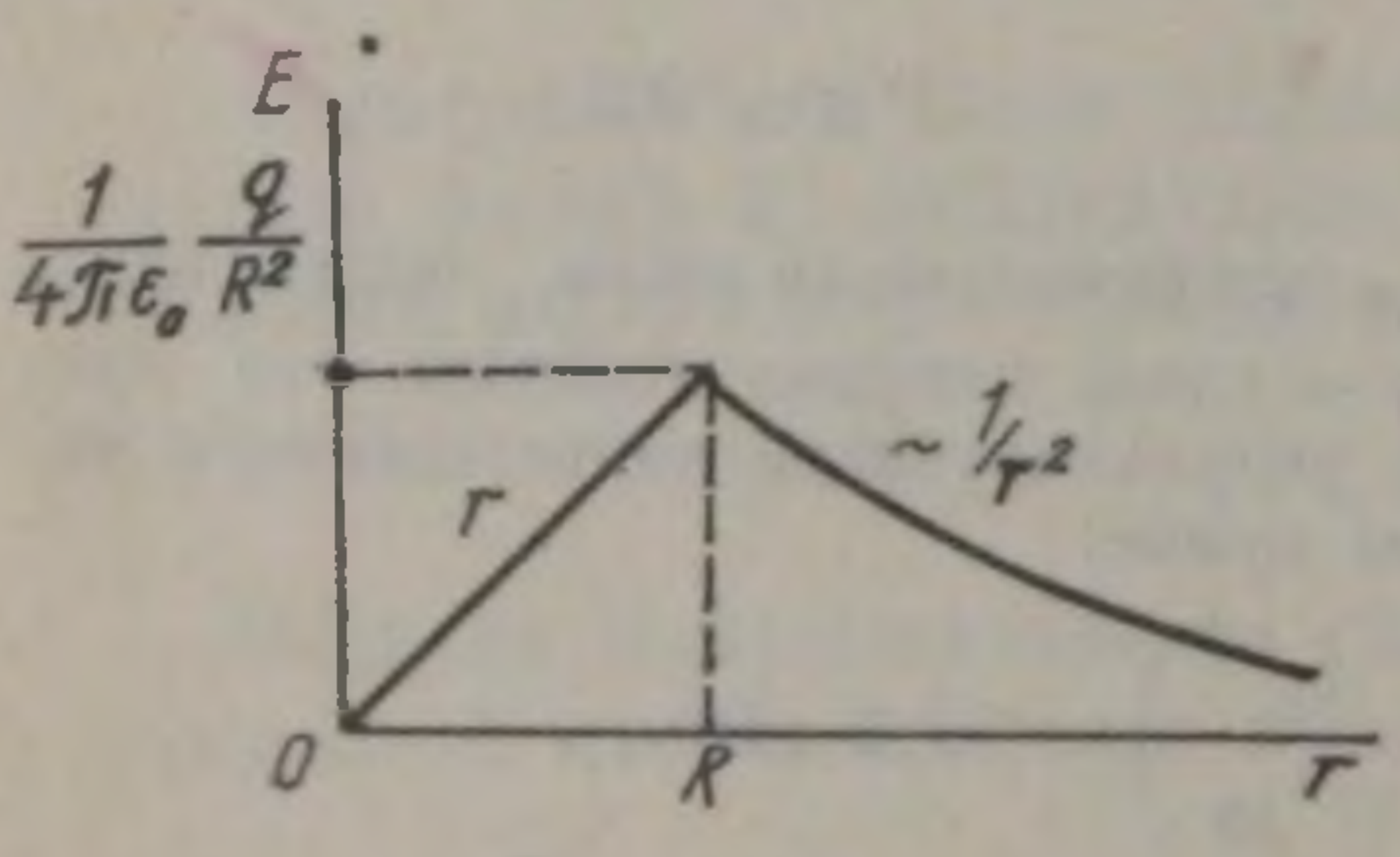


Рис. 3.4

Если $r_2 > R$, то электрическое поле создается полным зарядом шара $q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, поэтому

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{\varepsilon r_2^2} = \frac{R^3 \rho}{3\varepsilon_0 \varepsilon r_2^2}.$$

График зависимости $E = E(r)$ показан на рис. 3.4

Пример 3. Определить напряженность поля между двумя бесконечными пластинами и вне их, если площадь каждой пластины S, их заряды q_1 и $q_2<q_1$. Рассмотреть также случай, когда заряд второй пластины отрицательный.

Решение. В любой точке пространства (между пластинами и вне их), согласно принципу суперпозиции, $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$. Поэтому

$$\mathbf{E}_{A1} = \mathbf{E}_1' + \mathbf{E}_2'; \quad \mathbf{E}_{B1} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2'; \quad \mathbf{E}_{C1} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2,$$

где $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_1'$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_2'$ — напряженности полей первой и второй пластин справа и слева от них (рис. 3.5, *а*).

Направим координатную ось Ox перпендикулярно к пластинам. Проецируя векторы напряженностей на эту ось, получим: $E_{A1} = -\left(E_1' + E_2'\right)$; $E_{B1} = E_1 - E_2'$; $E_{C1} = E_1 + E_2$. Поскольку размеры пластин велики по сравнению с расстояниями до рассматриваемых точек, то

$$E_1 = E_1' = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q_1}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}; \quad E_2 = E_2' = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{q_2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}.$$

Следовательно, для первого случая

$$E_{A1} = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}; \quad E_{B1} = \frac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}; \quad E_{C1} = \frac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}.$$

Когда заряд второй пластины отрицательный (рис. 3.5, *б*), напряженность поля между пластинами $E_{B2} = \dfrac{q_1 + q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$, вне пластин $E = \pm\dfrac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0\varepsilon S}$. На рис. 3.5, *в* представлен график изменения напряженности поля вдоль прямой, соединяющей центры пластин.

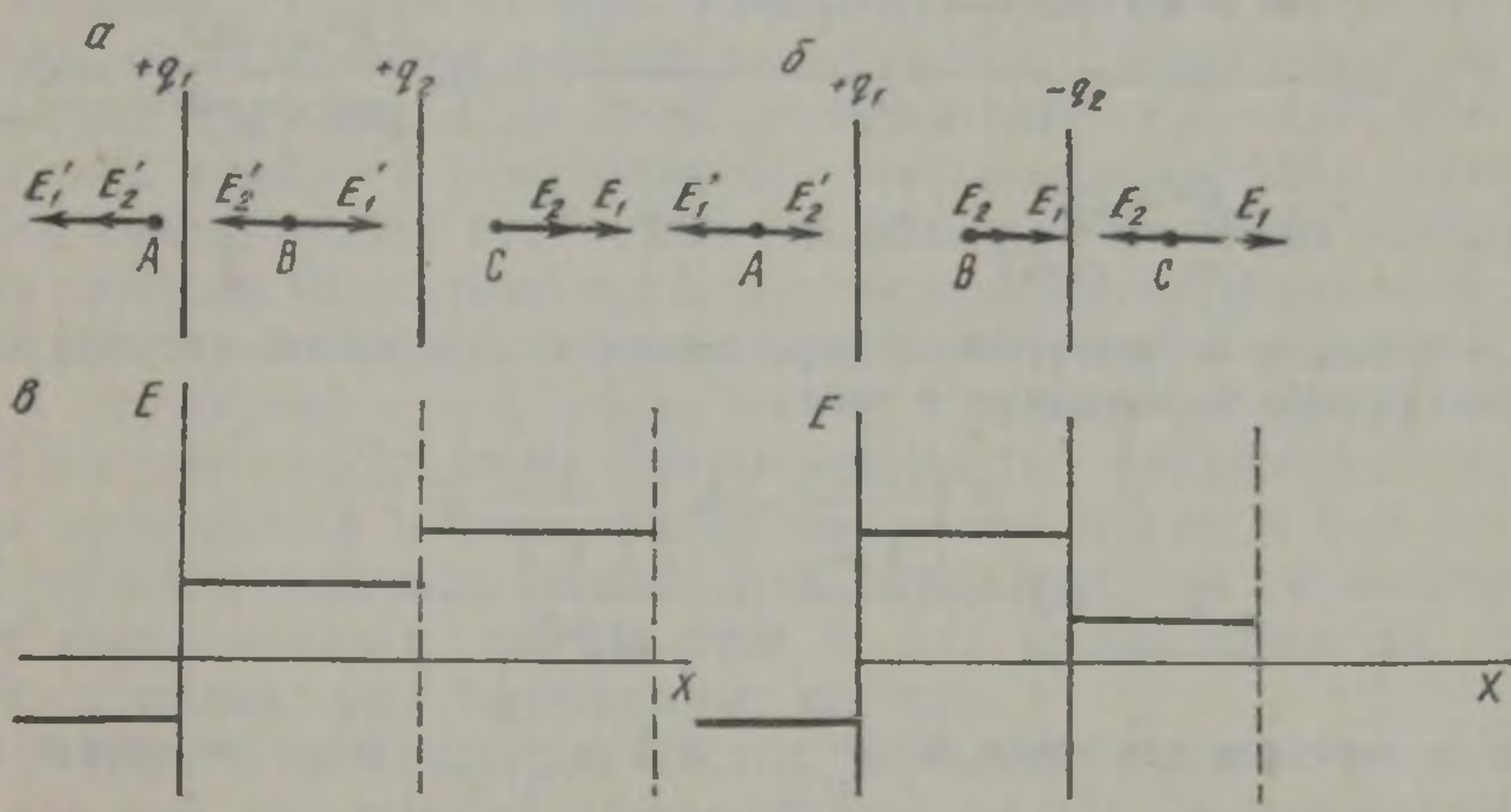


Рис. 3.5

Пример 4. Положительный заряд Q равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиусом R. Найти на оси кольца точки, в которых напряженность электрического поля имеет наибольшее значение. Определить напряженность поля в этих точках. Как будет двигаться точечный заряд q массой m, если в начальный момент времени он покоился в некоторой точке на оси кольца на расстоянии $x \ll R$ от его центра?

Решение. Напряженность поля **E** в произвольной точке на оси кольца (рис. 3.6) равна геометрической сумме напряженностей $\Delta\mathbf{E}$, создаваемых отдельными малыми элементами заряженного кольца ΔQ. Суммируя векторы напряженности в точке A, следует учитывать только их составляющие, направленные вдоль оси кольца, поскольку составляющие, перпендикулярные к оси, при сложении дадут нуль.

Модуль вектора напряженности поля

$$\Delta E = k\frac{\Delta Q}{R^2 + h^2}\cos\alpha.$$

Следовательно, напряженность поля в точке A

$$E = k\frac{Q}{R^2 + h^2}\cos\alpha.$$

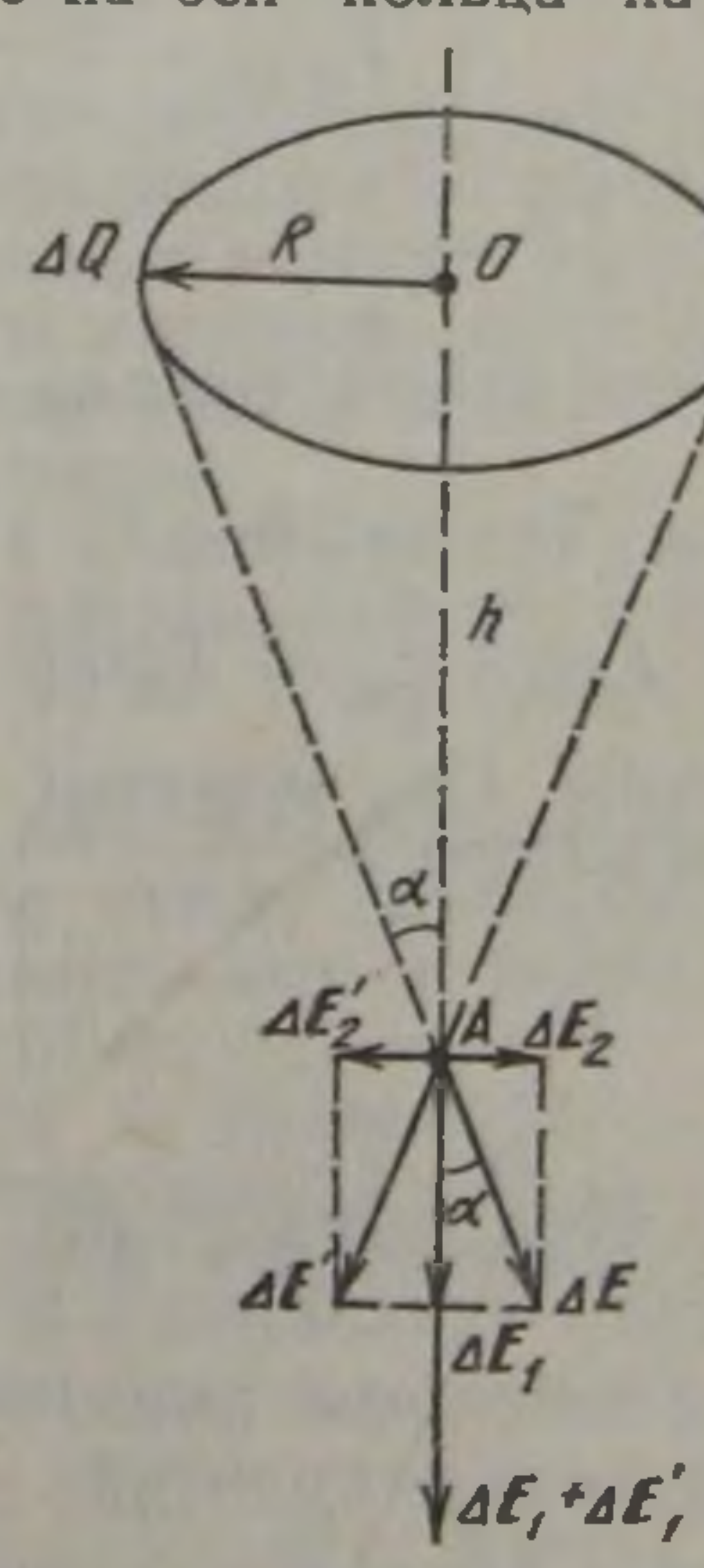


Рис. 3.6

Дальше решить задачу можно, считая независимой переменной высоту h или угол α. Рассмотрим первый случай. Поскольку $\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$, то, приняв h за независимую переменную (но $h > 0$), получим

$$E = k\frac{Qh}{(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Исследуем полученную функцию по общему правилу с помощью первой производной:

$$E' = kQ\frac{(R^2+h^2)^{3/2} - \frac{3}{2}(R^2+h^2)^{1/2}\cdot 2h^2}{(R^2+h^2)^3} = kQ\frac{R^2-2h^2}{(R^2+h^2)^{5/2}} = 0;$$

$$kQ\frac{R^2-2h^2}{(R^2+h^2)^{5/2}} = 0;\quad R^2-2h^2=0;\quad h = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Такое значение h соответствует двум точкам на оси (по обе стороны кольца). Представим первую производную в виде

$$E' = kQ\frac{2\left(\frac{R}{\sqrt{2}}-h\right)\left(\frac{R}{\sqrt{2}}+h\right)}{(R^2+h^2)^{5/2}}$$

и найдем ее значение для точек $h < \frac{R}{\sqrt{2}}$ и $h > \frac{R}{\sqrt{2}}$. В первом случае $E' > 0$, во втором $E' < 0$, т. е. в точке $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$ производная меняет знак плюс на минус. Следовательно, в этой точке функция имеет максимум. Это значит, что при $h = \frac{R}{\sqrt{2}} = 0{,}71\ R$ напряженность в точке A на оси кольца имеет наибольшее значение:

$$E_{\max} = k\frac{QR}{\sqrt{2}\left(R^2+\frac{R^2}{2}\right)^{3/2}} = k\frac{2\sqrt{3}\,Q}{9R^2}.$$

Сила, действующая на заряд, $F = qE = k\frac{qQh}{(R^2+h^2)^{3/2}}$ и направлена к центру кольца. Так как $h \ll R$, то, пренебрегая в знаменателе h по сравнению с R, получим $F = k\frac{qQ}{R^2}h$. Таким образом, сила пропорциональна h и направлена к центру кольца. Под влиянием этой силы заряд совершает колебательное движение, период которого

$$T = 4\pi\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mR^3}{qQ}}.$$

3. Цель задач на применение явления электростатической индукции — выяснить особенности поведения зарядов на проводниках под действием внешнего электрического поля, а также характер и природу искажений, возникающих в поле при внесении в него вещества. При решении этих задач следует помнить, что силовые

линии электростатического поля непрерывны, нигде не пересекаются, кроме точек, напряженность в которых равна нулю. Они начинаются и кончаются только на зарядах. На границе двух сред, обладающих различной диэлектрической проницаемостью, напряженность и, как следствие, густота линий напряженности меняются скачкообразно. Так как электрическое поле внутри проводника отсутствует, то линии напряженности внешнего поля заканчиваются и начинаются на поверхности проводника. Внутри же проводника силовых линий нет.

Изменение электрического поля, обусловленное введением проводников, определяется только величиной и распределением индуцированных зарядов. При этом поле как вне проводников, так и внутри них является результатом суперпозиции полей начальных зарядов, создававших поле до внесения проводников, и индуцированных зарядов. Величина же и распределение индуцированных зарядов таковы, что всегда выполняются следующие условия:

1) в статическом состоянии заряд проводника распределяется только на его поверхности. Напряженность электрического поля внутри проводника в этом состоянии равна нулю, и все его точки имеют одинаковые потенциалы. Это верно как для проводника, которому был сообщен заряд, так и для проводника, на котором находятся только индуцированные заряды;

2) разность потенциалов между любыми точками, расположенными как вне, так и внутри проводника, $\Delta\varphi=0$. Сказанное справедливо и для полых проводников, если в области, которую они охватывают, нет заряженных тел.

Задачи для самостоятельного решения

3.14. В точке A напряженность поля точечного заряда равна 36 В/м, а в точке B — 9 В/м. Определить напряженность поля в точке C, лежащей посередине между точками A и B.

3.15. Определить положение точки, в которой напряженность поля равна нулю вблизи двух неодинаковых зарядов 9 и 4 мКл, находящихся на расстоянии 1 м друг от друга. Рассмотреть также случай разноименных зарядов ($q_2<0$).

3.16. В вершинах равностороннего треугольника со стороной 10 см расположены заряды по 10 нКл каждый. Определить напряженность поля в центре треугольника и в точке, лежащей на середине одной из сторон.

3.17. Электрон движется со скоростью $3{,}2\cdot10^6$ м/с в направлении силовых линий однородного электрического поля, модуль напряженности которого 364 В/м. В некоторой точке скорость электрона равна нулю. Через какое время электрон вернется в эту точку?

3.18. Протон и электрон одновременно начинают двигаться навстречу друг другу от разноименно заряженных пластин, расстояние между которыми 4 см. Через какое время частицы окажутся на одинаковом расстоянии от положительно заряженной пластины, если напряженность поля 7,5 кВ/м?

3.19. В электростатическом поле находится сосуд с маслом ($\varepsilon=5$, $\rho_м=0{,}8\cdot10^3$ кг/м^3) и погруженным в него эбонитовым шариком ($\rho_э=1{,}2\cdot10^3$ кг/м^3) радиусом 10^{-2} м и зарядом 20 мКл. Определить, при какой напряженности поля шарик будет находиться во взвешенном состоянии.

3.20. Шарик массой 2 г и зарядом 40 мкКл подвешен на нити длиной 0,5 м и помещен в однородное электрическое поле, вектор напряженности которого образует угол 30° с вертикалью. Определить силу натяжения нити и угол, который образует нить с вертикалью, если напряженность поля равна 200 кВ/м.

3.21. В однородном электрическом поле равномерно вращается шарик массой 0,5 г с положительным зарядом 10 нКл, подвешенный на нити длиной 0,5м. Определить силу натяжения нити и кинетическую энергию шарика, если напряженность поля равна 100 кВ/м и направлена вертикально вниз. Нить образует с вертикалью угол 60°.

3.22. Изобразить график зависимости $E=E(r)$ поля, создаваемого непроводящим сферическим слоем с однородной объемной плотностью заряда ρ. Слой ограничен сферами, радиусы которых R_1 и R_2.

3.23. Две металлические пластинки расположены параллельно на близком расстоянии друг от друга. Первой пластинке сообщили заряд 2 мКл, а второй — заряд 4 мКл. Определить заряды на сторонах второй пластинки.

3.24. Точечный заряд q расположен внутри тонкостенного проводящего шара радиусом R на расстоянии r от центра. Какие заряды будут индуцированы на внутренней и наружной поверхностях шара и какова будет картина электрического поля в случаях, если шар: а) заземлен; б) изолирован и не заряжен?

3.25. Как известно, заряженный шарик притягивает бумажку. Как изменится сила притяжения, если окружить металлической фольгой: а) заряженный шарик; б) бумажку?

3.26. Один металлический шар заряжен, а другой нет. Когда их соединили проволокой, заряды стали перетекать с незаряженного шара на заряженный. В каком случае это возможно?

3.27. Положительный и отрицательный точечные заряды притягиваются друг к другу с силой F. Уменьшится ли эта сила, если между зарядами поместить: а) шар из диэлектрика; б) проводящий шар?

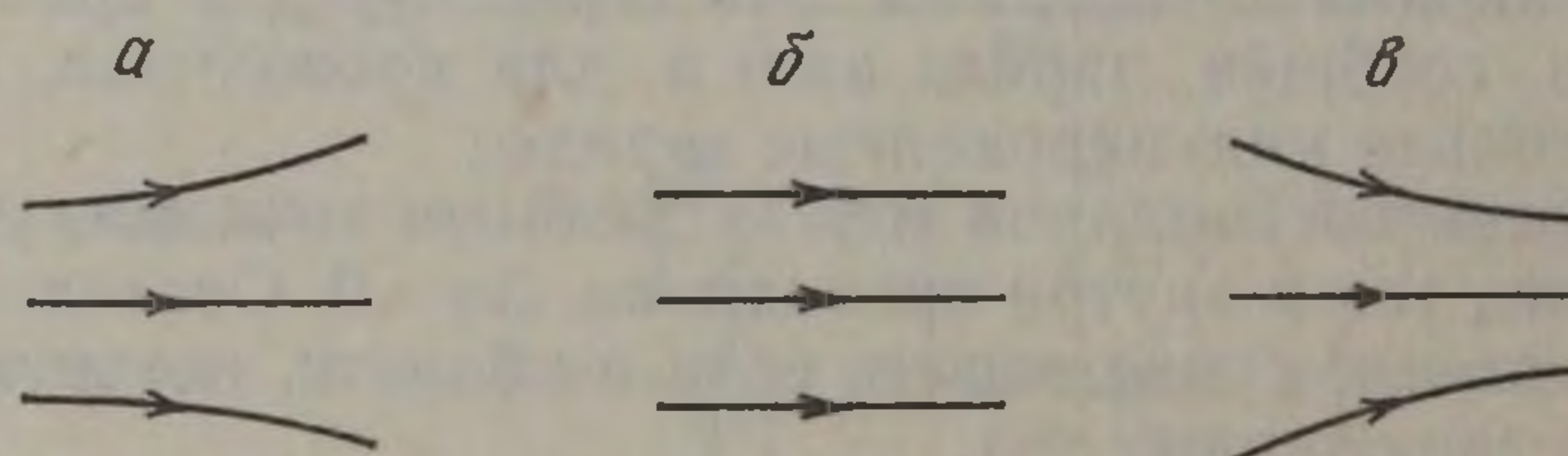


Рис. 3.7

3.28. На рис. 3.7 показаны силовые линии электростатических полей. Как будет вести себя в этих полях шарик: а) незаряженный; б) заряженный положительно; в) заряженный отрицательно?

3.29. Изобразить силовые линии напряженности электрического поля между двумя точечными зарядами: а) $2q$ и $-q$; б) $-2q$ и q.

3.3. Работа сил электростатического поля. Потенциал

Основные законы и формулы

Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся на расстоянии r друг от друга (при условии $E_{п\infty}=0$), определяется выражением

$$E_п = k\frac{qq_0}{\varepsilon r}. \tag{3.8}$$

Отношение $\frac{E_п}{q_0}=\varphi$ не зависит от значения пробного заряда q_0 и является энергетической характеристикой поля, называемой *потенциалом*. Потенциал поля точечного заряда выражается формулой

$$\varphi = k\frac{q}{\varepsilon r}. \tag{3.9}$$

Если поле образовано системой зарядов, то потенциал равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i . \tag{3.10}$$

Потенциал поля сферической поверхности радиусом R, по которой равномерно распределен заряд q, внутри сферы постоянен и равен

$$\varphi = k\frac{q}{\varepsilon R}.$$

За пределами сферы потенциал поля такой же, как и потенциал поля точечного заряда, равного заряду сферы, но сосредоточенного в ее центре.

При перемещении заряда q в электрическом поле совершается работа

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \tag{3.11}$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов начального и конечного положений заряда.

Разность потенциалов и напряженность однородного электрического поля связаны соотношением

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

где d — расстояние между двумя точками, измеренное вдоль силовой линии.

Решение задач

Задачи по этой теме условно можно разделить на две основные группы: задачи на вычисление потенциала поля точечных зарядов и зарядов, равномерно распределенных по поверхности; задачи на расчет потенциальной энергии точечных зарядов и работы по перемещению заряда в электростатическом поле.

1. Для вычисления потенциала поля, созданного одним или несколькими зарядами, применяют формулу (3.9) и принцип суперпозиции полей. Здесь важно подчеркнуть, что физический смысл имеет не сам потенциал, а его изменение (разность потенциалов), подобно тому, как существенным является не сама потенциальная энергия системы, а ее изменение, равное работе, совершенной системой. Так, формула (3.8), выражающая потенциальную энергию взаимодействия зарядов, справедлива при условии, что величина $E_п$ при бесконечном удалении зарядов условно принимается равной нулю. Формулы (3.9) — (3.11) также выведены в предположении, что потенциал бесконечно удаленных точек равен нулю.

При решении задач графическим методом следует помнить свойства эквипотенциальных поверхностей:

1) в каждой точке эквипотенциальной поверхности вектор напряженности поля перпендикулярен к ней и направлен в сторону убывания потенциала;

2) работа по перемещению электрического заряда по одной и той же эквипотенциальной поверхности равна нулю.

Графическое изображение полей лучше начинать с оценки напряженности в некоторых характерных точках. Необходимо выяснить ее величину и направление. Часто этому помогает та или иная симметрия в расположении зарядов. Затем строится картина расположения линий напряженности поля и по ним восстанавливается вид эквипотенциальных поверхностей. Обычно их проводят таким образом, что разности потенциалов между любыми соседними эквипотенциальными поверхностями одинаковы.

Пример 1. В двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $r = 0{,}5$ м расположены два одинаковых по модулю заряда $q = 1$ мкКл. Определить напряженность и потенциал электрического поля посередине между зарядами и в третьей вершине треугольника.

Р е ш е н и е. Напряженность и потенциал в соответствующих точках поля определим по формулам $\mathbf{E} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}_i$ и $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i$.

Поскольку точка D (рис. 3.8) расположена посередине отрезка, соединяющего заряды, то

$$E_1 = E_2 = k\frac{q}{\varepsilon\left(\frac{r}{2}\right)^2} \approx 144 \text{ кВ/м}; \quad \varphi_1 = \varphi_2 = k\frac{q}{\varepsilon\frac{r}{2}} = 36 \text{ кВ}.$$

Поэтому в случае одноименных зарядов $E_D = 0$, $\varphi_D = 2\varphi_1 = 72$ кВ. В случае разноименных зарядов $E_D = 2E_1 = 288$ кВ/м, $\varphi_D = 0$.

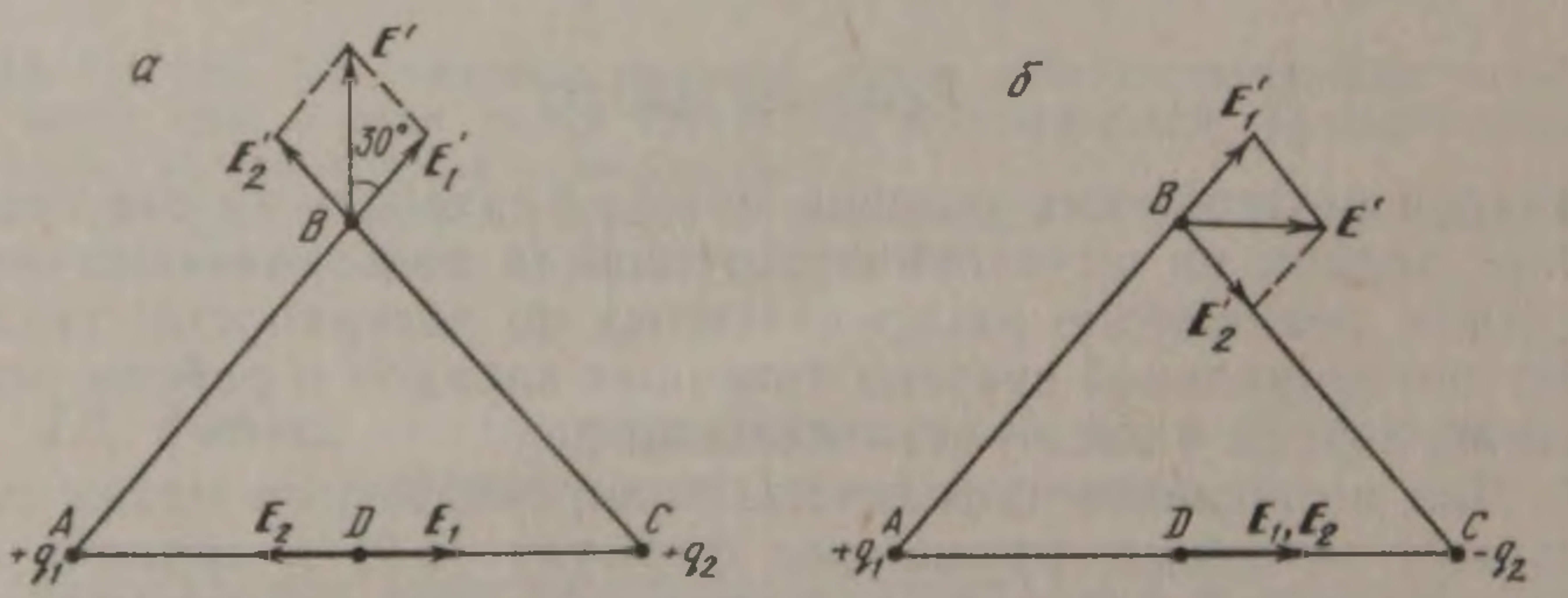


Рис. 3.8

В точке B вектор напряженности результирующего поля направлен вертикально вверх в случае одноименных зарядов (рис. 3.8, *а*) и горизонтально, если заряды разноименные (рис. 3.8, *б*). В этом случае

$$E_1' = E_2' = k\frac{q}{\varepsilon r^2} = 36 \text{ кВ/м}; \quad \varphi_1' = \varphi_2' = k\frac{q}{\varepsilon\frac{r}{2}} = 18 \text{ кВ}.$$

Следовательно, модуль вектора напряженности результирующего поля в точке B $E_B' = 2E_1' \cos 30° = 36\sqrt{3}$ кВ/м, потенциал поля в этой точке $\varphi_B' = \varphi_1' + \varphi_2' = 36$ кВ в случае одноименных зарядов и $\varphi_B' = 0$, если заряды разноименные.

2. Для определения потенциальной энергии взаимодействия двух точечных зарядов применяют формулу (3.8). Потенциальная энергия системы заряженных частиц (тел) равна сумме энергий взаимодействия зарядов попарно.

Задачи на расчет работы по перемещению заряда в электрическом поле решают с помощью формулы (3.11). В случае однородного поля можно воспользоваться равенством $A=FS\cos\alpha$. Если угол α в данной точке острый, то работу совершает поле; работа в этом случае положительна ($\cos\alpha>0$). Если же этот угол тупой, то работа отрицательна, т. е. совершается против сил поля.

Кинетическую энергию $E_к$, приобретаемую заряженной частицей в электрическом поле, можно определить по формуле

$$E_к=\frac{mv^2}{2}=q(\varphi_1-\varphi).$$

Пример 2. Определить потенциальную энергию системы из четырех одинаковых по модулю точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a. Рассмотреть два случая: а) все заряды одноименные; б) два заряда положительных, два отрицательных.

Решение. Потенциальная энергия системы зарядов равна сумме энергий взаимодействия зарядов попарно: $E_п=E_{1,2}+E_{1,3}+E_{1,4}+E_{2,3}+E_{2,4}+E_{3,4}$.

Если $q_1=q_2=q_3=q_4$, то $E_{1,2}=E_{2,3}=E_{3,4}=E_{1,4}=k\frac{q^2}{\varepsilon a}$, $E_{1,3}=E_{2,4}=k\frac{q^2}{\varepsilon a\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$E_п=k\frac{q^2}{\varepsilon a}\left(4+\frac{2}{\sqrt{2}}\right)=k\frac{q^2}{\varepsilon a}(4+\sqrt{2}).$$

В случае «б» возможны два варианта расположения зарядов:

1) $q_1=q_3=-q$. В данном случае $E_{1,2}=E_{1,4}=E_{2,3}=E_{3,4}=-k\frac{q^2}{\varepsilon a}$, $E_{1,3}=E_{2,4}=k\frac{q^2}{\varepsilon a\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$E_п=k\left(\frac{2q^2}{\varepsilon a\sqrt{2}}-\frac{q^2}{\varepsilon a}\right)=k\frac{q^2(\sqrt{2}-4)}{\varepsilon a};$$

2) $q_1=q_2=-q$. При этом $E_{3,4}=E_{1,2}=k\frac{q^2}{\varepsilon a}$, $E_{1,4}=E_{2,3}=-k\frac{q^2}{\varepsilon a}$, $E_{2,4}=E_{1,3}=-k\frac{q^2}{\varepsilon a\sqrt{2}}$. Потенциальная энергия зарядов в этом случае

$$E_п=-k\frac{q^2\sqrt{2}}{\varepsilon a}.$$

Пример 3. Находящиеся в вакууме два параллельных тонких кольца, радиусы которых $r=5$ см, имеют общую ось. Расстояние между их центрами $d=12$ см. На первом кольце равномерно распределен заряд $q_1=82$ мкКл, на втором — заряд $q_2=60$ мкКл. Определить работу, необходимую для перемещения заряда $q_3=3$ нКл из центра одного кольца в центр другого.

Решение. Заряды на кольцах не являются точечными, поэтому непосредственно нельзя использовать для вычисления потенциала формулу (3.8). Так как работа при перемещении заряда зависит от разности потенциалов точек начала и конца перемещения (в нашем случае это центры колец), для решения задачи вычислим потенциалы этих точек φ_{01} и φ_{02}.

Условно разделим каждое из колец на n равных частей, тогда заряд каждой части можно считать точечным: $q_1' = \frac{q_1}{n}$ и $q_2' = \frac{q_2}{n}$. Потенциал, образованный точечным зарядом q_1' в центре первого кольца O_1, $\varphi_1' = k\frac{q_1}{\varepsilon r}$. Весь заряд q_1 образует в центре первого кольца потенциал φ_1, равный алгебраической сумме потенциалов n точечных зарядов, или

$$\varphi_1 = \varphi_1' n = k\frac{q_1'}{\varepsilon r} n = k\frac{q_1}{\varepsilon r}.$$

Рассуждая подобным образом, найдем потенциал в центре первого кольца O_1, образованный зарядом q_2. Так как $l = \sqrt{d^2 + r^2}$, то $\varphi_2 = k\frac{q_2}{\varepsilon\sqrt{d^2+r^2}}$. Потенциал электрического поля в центре первого кольца, образованный зарядами q_1 и q_2,

$$\varphi_{01} = k\frac{q_1}{\varepsilon r} + k\frac{q_2}{\varepsilon\sqrt{d^2+r^2}}.$$

Повторяя все рассуждения, найдем выражение для потенциала в центре второго кольца O_2:

$$\varphi_{02} = k\frac{q_2}{\varepsilon r} + k\frac{q_1}{\varepsilon\sqrt{d^2+r^2}}.$$

Работа, совершаемая при перемещении заряда q из точки O_1 в точку O_2,

$$A = q(\varphi_{01} - \varphi_{02}) = k\frac{q}{\varepsilon}(q_1 - q_2)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{d^2+r^2}}\right) \approx 7{,}3 \text{ мкДж}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.30. В каком случае между двумя разноименно заряженными проводниками отсутствует разность потенциалов?

3.31. Полый металлический шар A заряжен положительно. Зарядится ли металлический шар B, если соединить его с внутренней поверхностью шара A?

3.32. Изменится ли разность потенциалов между двумя изолированными заряженными проводниками, если между ними поместить: а) металлическую пластинку; б) пластинку из диэлектрика?

3.33. Полый медный шар имеет радиус 10 см и массу 1 кг. Какую часть электронов надо удалить из шара, чтобы его потенциал стал равным 10^8 В?

3.34. Расстояние между зарядами 1 нКл и 10 нКл равно 0,55 м. Определить напряженность поля в точке на прямой, проходящей через заряды, в которой потенциал равен нулю.

3.35. В двух противоположных вершинах квадрата со стороной 0,3 м находятся заряды 0,2 мкКл. Определить напряженность и потенциал электрического поля в двух других вершинах квадрата.

3.36. Сплошная металлическая сфера радиусом 20 см несет равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью 1 нКл/м^2. Определить напряженность и потенциал электрического поля в точках: а) на расстоянии 16 см от центра сферы; б) на поверхности сферы; в) на расстоянии 36 см от центра сферы. Построить графики: $E = E(r)$ и $\varphi = \varphi(r)$.

3.37. Две металлические концентрические сферы имеют радиусы R_1 и R_2. Определить напряженность и потенциал вне и внутри сфер, если на внутренней сфере находится заряд q, а на внешней Q. Изменится ли потенциал сфер, если их соединить проволокой?

3.38. Две плоскопараллельные пластины площадью по 200 см^2 каждая расположены горизонтально, причем верхняя пластина закреплена. Какую разность потенциалов надо приложить к пластинам, чтобы нижняя удерживалась в равновесии на расстоянии 0,5 см от верхней, если ее масса 4 г? Будет ли равновесие устойчивым?

3.39. В тонком проводящем слое (фольга, слой электролита) течет ток. Как, имея гальванометр, выяснить форму эквипотенциальной поверхности, проходящей через заданную точку этого слоя? Как определить направление вектора напряженности электрического поля в этой точке?

3.40. Вблизи бесконечной заряженной плоскости находится точечный заряд 10^{-8} Кл. Под действием поля заряд перемещается вдоль силовой линии на расстояние 17,7 см. При этом совершается работа 1 мДж. Определить поверхностную плотность заряда.

3.41. Определить работу, необходимую для перемещения точечного заряда 20 нКл из бесконечности в точку, находящуюся на расстоянии 1 см от поверхности шара радиусом 1 см с поверхностной плотностью заряда 10 мкКл/м^2.

3.42. Точка B вдвое дальше от центра поля, чем точка A. При перемещении заряженной частицы из точки A в точку B поле совершило работу 6 Дж. Какую работу совершило оно на первой половине пути?

3.43. В вершинах правильного треугольника со стороной 0,3 м расположены заряды $q_1=50$ нКл, $q_2=20$ нКл, $q_3=10$ нКл. Определить потенциальную энергию системы, если: а) $q_3>0$; б) $q_3<0$.

3.44. Металлический шар радиусом 2 см подвесили на непроводящей нити и сообщили заряд 150 нКл. Затем на нить нанизали другой шар радиусом 1 см и массой 0,1 г. На какую высоту поднимется верхний шар после соприкосновения с нижним?

3.45. Протон, летящий по направлению к ядру гелия, в некоторой точке поля напряженностью 10^4 В/м имеет скорость 1 Мм/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру?

3.46. Шарик массой 0,5 г и зарядом 10 нКл, подвешенный на нити длиной 0,5 м, движется по окружности в горизонтальной плоскости, при этом нить образует с вертикалью угол 60°. Определить работу раскручивания, если движение происходит в электрическом поле, вектор напряженности которого, равный 10 кВ/м, направлен вертикально вверх.

3.47. Кубик массой 0,1 г и зарядом 10 мкКл скользит с вершины наклонной плоскости высотой 1 м, образующей с горизонтом угол 30°. В вершине прямого угла находится неподвижный точечный заряд 10 мкКл. Определить скорость кубика у основания наклонной плоскости, если его начальная скорость равна нулю. Трением пренебречь.

3.4. Электроемкость. Энергия электрического поля конденсатора

Основные законы и формулы

Электроемкостью (емкостью) уединенного проводника называется физическая величина, численно равная отношению заряда проводника к его потенциалу:

$$C=\frac{q}{\varphi}.$$

Емкость конденсатора измеряется отношением его заряда к разности потенциалов (напряжению) на пластинах:

$$C=\frac{q}{\varphi_1-\varphi_2}.$$

Емкость плоского конденсатора прямо пропорциональна площади его пластин и обратно пропорциональна расстоянию между ними:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \tag{3.12}$$

Емкость конденсатора, составленного из n пластин, определяется по формуле

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon (n-1)}{d}.$$

Емкость шара радиусом r

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \tag{3.13}$$

Для подбора необходимой емкости конденсаторы соединяют в батареи. При последовательном соединении конденсаторов напряжение на батарее равно алгебраической сумме напряжений на отдельных конденсаторах:

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i ;$$

заряд на каждом конденсаторе имеет одинаковую величину и равен полному заряду батареи:

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = q_0;$$

емкость батареи определяется по формуле

$$\frac{1}{C_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}. \tag{3.14}$$

Если конденсаторы соединены параллельно, то общий заряд батареи равен сумме зарядов всех конденсаторов:

$$q_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i ;$$

напряжение на каждом конденсаторе и на всей батарее в целом одинаково:

$$U_1 = U_2 = U_3 = \ldots = U_n = U_0;$$

емкость батареи равна сумме соединяемых емкостей:

$$C_0 = \sum_{i=1}^{n} C_i . \tag{3.15}$$

Электрическая энергия заряженного конденсатора

$$E = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \tag{3.16}$$

Решение задач

Задачи по этой теме целесообразно разделить на следующие группы: задачи, при решении которых применяют (или учитывают) формулу емкости уединенного проводника или их системы; задачи на вычисление емкости и энергии поля заряженного конденсатора; задачи на расчет конденсаторных цепей.

1. При решении задач первой группы особое внимание следует обратить на физический смысл понятия электроемкости, на выяснение причин изменения электрического поля при помещении заряженных тел в различные среды и зависимости этих изменений от условий, в которых производится смена сред.

Для решения задач, где рассматривается соединение заряженных тел и перетекание зарядов с одного тела на другое, необходимо применять закон сохранения электрического заряда $\left(\sum_{i=1}^{n} q_i = \text{const}\right)$ и условие равновесия статических зарядов: после того как движение зарядов прекратилось, потенциалы всех частей соединения одинаковы.

Чтобы установить, с какого тела и на какое будет перетекать заряд, достаточно определить потенциалы тел до соединения и сравнить их. (Заряды перемещаются от тел с большим потенциалом к телам с меньшим потенциалом.) В задачах такого типа могут быть даны не емкости, а радиусы шаров. Тогда емкости их определяют по формуле (3.13).

Пример 1. Напряжение на пластинах конденсатора $U=1$ кВ, расстояние между ними $d=1$ см. Определить, при каком положении пластин и каком заряде пылинки массой $m=10^{-12}$ кг она будет находиться в равновесии между пластинами. Как изменится положение пылинки, если сдвигать и раздвигать пластины? Как нужно изменить разность потенциалов, чтобы пылинка падала с ускорением $a=0{,}5\,g$; поднималась с ускорением $a=g$?

Решение. Равновесие возможно лишь при горизонтальном расположении пластин, когда верхняя пластина заряжена отрицательно, если $q>0$. Поле однородно, поэтому $\mathbf{E}=\text{const}$, и на пылинку вертикально вверх действует сила $\mathbf{F}=q\mathbf{E}$, равная по модулю силе тяжести mg пылинки: $mg = q\dfrac{U}{d}$.

Если конденсатор отсоединен от источника тока, то при увеличении d в n раз во столько же раз уменьшается емкость и увеличивается разность потенциалов ($q = \text{const}$), так что $\dfrac{d}{U} = \text{const}$, и положение пылинки не изменится.

Если конденсатор соединен с источником тока, то $U = \text{const}$. Тогда при увеличении d напряженность уменьшается, так как с возрастанием d уменьшаются емкость и заряд на пластинах. Поэтому $F = qE$ уменьшается, и пылинка будет двигаться вниз. Уравнение движения в проекции на ось Oy будет иметь вид $mg - qE = ma_1$. Для падения с ускорением $a_1 = 0{,}5\,g$ приложим силу $mg - q\dfrac{\Delta U_1}{d} = ma_1$, откуда $\Delta U_1 = \dfrac{mgd}{q}\left(1 - \dfrac{a_1}{g}\right)$. Для подъема пылинки вверх с ускорением $a_1 = g$ следует приложить силу $\Delta U_2 = q\dfrac{\Delta U_2}{d} - mg = ma_2$, откуда $\Delta U_2 = \dfrac{mgd}{q}\left(1 + \dfrac{a_2}{q}\right)$.

После подстановки численных значений получим $q = 9{,}8 \cdot 10^{-16}$ Кл, $\Delta U_1 = 0{,}5$ кВ, $\Delta U_2 = 2$ кВ.

Пример 2. Шару емкостью 1 мкФ сообщили заряд 30 мкКл, а шару емкостью 2 мкФ — заряд 90 мкКл. Как распределятся заряды между шарами, если их соединить проволокой? На сколько изменится заряд каждого шара и чему будет равен потенциал шаров?

Решение. Когда шары соединили проволокой, они образовали один проводник с общим потенциалом $\varphi=\varphi_1=\varphi_2$ и общим зарядом $q=q_1+q_2$. Потенциалы каждого шара можно представить так:

$$\varphi_1 = \frac{q_1'}{C_1}; \quad \varphi_2 = \frac{q_2'}{C_2} = \frac{(q - q_1')}{C_2}.$$

Поскольку $\varphi_1 = \varphi_2$, то $\dfrac{q_1'}{C_1} = \dfrac{q - q_1'}{C_2}$. Решив это уравнение относительно q_1', получим $q_1' = \dfrac{qC_1}{C_1 + C_2}$. Заряд $q_2' = q - q_1'$. После подстановки численных значений получим $q_1' = 40$ мкКл, $q_2' = 80$ мкКл. Следовательно, заряд первого шара увеличится на $q_1' - q = 10$ мкКл.

Изменение заряда второго шара равно $q_2' - q_2 = 10$ мкКл, т. е. второй шар отдал часть своего заряда первому.

Потенциал первого шара $\varphi_1 = \dfrac{q_1'}{C_1} = 40$ В. Так как потенциал шаров одинаков, то $\varphi_2 = 40$ В.

2. При расчете емкости и энергии плоского заряженного конденсатора пользуются формулами (3.12) и (3.16). Особое значение имеют задачи, в которых рассматривается изменение энергии вследствие, например, удаления диэлектрика или раздвижения обкладок конденсатора. При этом важно подчеркнуть разницу между случаями, когда конденсатор отключен от источника тока до проведения указанных действий и когда он остается соединенным с источником тока. В первом случае энергия конденсатора может меняться только за счет работы приложенных внешних сил, поэтому возрастание энергии конденсатора однозначно соответствует положительной работе внешних сил, т. е.

$$\Delta E = E_2 - E_1 = A_{\text{внеш}}.$$

Работа сил поля равна работе внешних сил, взятой с обратным знаком.

Во втором случае изменение энергии конденсатора будет определяться работой внешних сил и вследствие изменения заряда конденсатора работой сторонних сил источника:

$$\Delta E = A + A_{\text{ист}} = A + \Delta q U,$$

где Δq — изменение заряда конденсатора.

Пример 3. Конденсатор емкостью $C_1=3$ мкФ заряжен до напряжения $U_1=300$ В, а конденсатор емкостью $C_2=2$ мкФ — до $U_2=200$ В. Определить напряжение между пластинами конденсаторов после соединения их: а) одноименно заряженными пластинами; б) разноименно заряженными пластинами. Какое количество теплоты выделится в результате соединения конденсаторов в случае «а»?

Решение. Если конденсаторы соединены параллельно, то их общая емкость $C=C_1+C_2$. Так как соединялись одноименно заряженные пластины, то искомое напряжение

$$U=\frac{q}{C}=\frac{q_1+q_2}{C_1+C_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды конденсаторов до соединения. Учитывая, что $q_1=C_1U_1$ и $q_2=C_2U_2$, получим

$$U=\frac{C_1U_1+C_2U_2}{C_1+C_2}=260 \text{ В}.$$

Если конденсаторы соединены разноименно заряженными пластинами, то напряжение между ними

$$U=\frac{C_1U_1-C_2U_2}{C_1+C_2}=100 \text{ В}.$$

Количество выделившейся теплоты определим, пользуясь законом сохранения и превращения энергии. Энергия конденсаторов до соединения

$$E_1=\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2U_2^2}{2}=175 \text{ мДж},$$

после соединения

$$E_2=\frac{CU^2}{2}=\left(\frac{C_1+C_2}{2}\right)U^2=169 \text{ мДж}.$$

Следовательно, искомое количество теплоты $Q=E_1-E_2=6$ мДж.

Пример 4. Батарея из n последовательно соединенных конденсаторов емкостью C каждый подключена к источнику постоянного тока. Определить изменение энергии батареи и работу источника тока в случае пробоя одного конденсатора. Как согласуется полученный результат с законом сохранения и превращения энергии?

Решение. До пробоя емкость батареи $C_n=\frac{C}{n}$, запас энергии $E_1=\frac{CU^2}{2n}$. После пробоя емкость батареи $C_{n-1}=\frac{C}{n-1}$, а запас энергии $E_2=\frac{CU^2}{2(n-1)}$. Изменение энергии системы $\Delta E=\frac{CU^2}{2n(n-1)}$. Энергия системы увеличилась, несмотря на работу разряда. Это произошло за счет совершения работы источником тока. Так как $U=\text{const}$, то $A_{\text{ист}}=U\Delta q$, где $\Delta q=q_2-q_1=C_{n-1}U-C_nU=\frac{CU}{n(n-1)}$. Следовательно,

$$A_{\text{ист}}=\frac{CU^2}{n(n-1)}.$$

На основании закона сохранения энергии можно утверждать, что $A_{\text{ист}}=\Delta E+A_{\text{разр}}$. Отсюда

$$A_{\text{разр}}=A_{\text{ист}}-\Delta E=\frac{CU^2}{2n(n-1)}.$$

3. При решении задач на расчет конденсаторных цепей следует иметь в виду, что формулы (3.14) и (3.15) применяются не только

для расчета емкости батареи конденсаторов при параллельном или последовательном соединении, но и для определения емкости многослойных конденсаторов. Расположение слоев параллельно пластинам соответствует последовательному соединению однослойных конденсаторов. Если же границы слоев перпендикулярны к пластинам, то считают, что имеется параллельное соединение однослойных конденсаторов.

В задачах, где рассматривается система заряженных тел (конденсаторов), прежде всего необходимо установить тип соединения. Дальнейший расчет сводится к применению формул (3.14), (3.15) и нахождению связи между зарядами и напряжениями на конденсаторах.

В тех случаях, когда соединение конденсаторов нельзя отнести ни к параллельному, ни к последовательному, необходимо заменить имеющуюся схему другой, эквивалентной данной в отношении емкости, так, чтобы ее можно было разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. Такие эквивалентные замены основаны на возможности соединять и разъединять точки цепи, имеющие одинаковые потенциалы, что обычно встречается в схемах, обладающих симметрией.

При расчете электрической цепи, состоящей из конденсаторов и источников тока, которую невозможно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений, следует руководствоваться следующими двумя правилами.

Правило узлов: если пластины нескольких конденсаторов соединены в один узел, связанный непосредственно с источником тока, то алгебраическая сумма зарядов на этих пластинах равна нулю, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i = 0$.

Правило контуров: алгебраическая сумма разностей потенциалов на всех конденсаторах и источниках тока, встречающихся при обходе любого замкнутого контура, равна нулю, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} U_i = 0$.

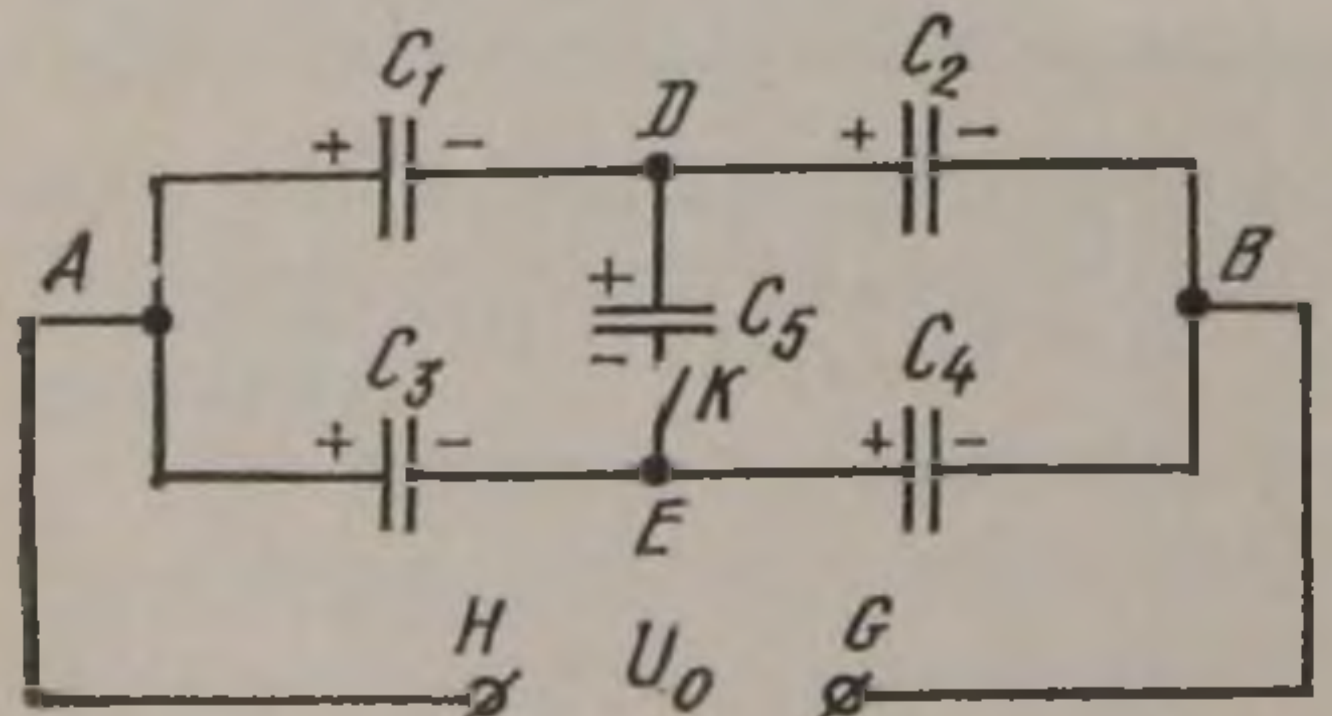


Рис. 3.9

Пример 5. Батарея конденсаторов (рис. 3.9) заряжена до напряжения $U_0 = 200$ В, после чего отключена от источника тока. Как изменится энергия батареи при замыкании ключа К, если $C_1 = C_2 = C_3 = C_5 = 1$ мкФ, $C_4 = 0{,}5$ мкФ?

Решение. После отключения батареи от источника ее заряд, равный сумме зарядов всех обкладок, соединенных с одним из зажимов батареи, остается постоянным независимо от положения ключа. Однако при замыкании ключа изменится схема соединения конденсаторов, что вызовет изменение емкости батареи. Емкость и энергия батареи до и после замыкания ключа обозначим соответственно C_0, E_0 и C, E. Тогда изменение энергии батареи

$$\Delta E = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2}\,\frac{C_0 - C}{C_0 C}.$$

Поскольку заряд батареи $q = C_0U$, то $\Delta E = \frac{C_0U_0^2}{2} \frac{C_0 - C}{C}$, и задача сводится к определению величин C_0, C. Так как батарея, изображенная на рис. 3.9, представляет собой параллельное соединение двух ветвей, каждая из которых есть последовательное соединение двух конденсаторов, то

$$C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + \frac{C_3C_4}{C_3 + C_4} = 0{,}83 \text{ мкФ}.$$

Для нахождения C применим общий метод расчета емкости батареи. Пусть U — напряжение на зажимах батареи при замкнутом ключе. Тогда $q = CU$, и задача сводится к вычислению заряда батареи как функции заданных величин C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 и величины U. А это можно сделать с помощью правил для конденсаторных цепей.

Заряд батареи конденсаторов

$$q = q_1 + q_3. \quad (3.17)$$

Для определения зарядов q_1 и q_3 поставим знаки зарядов на обкладках всех конденсаторов в соответствии с выбранными знаками полюсов батареи (для конденсатора C_5 это можно сделать лишь предположительно) и применим правила узлов и контуров. Для узлов D и E соответственно:

$$-q_1 + q_2 + q_5 = 0; \quad (3.18)$$

$$-q_3 + q_4 - q_5 = 0; \quad (3.19)$$

для контуров $ADEA$, $DBED$, $HADBGH$ соответственно:

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_3}{C_3} = 0; \quad (3.20)$$

$$\frac{q_2}{C_2} - \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = 0; \quad (3.21)$$

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_5} - U = 0. \quad (3.22)$$

Решив совместно уравнения (3.17) — (3.22), найдем

$$q = 0{,}85U. \quad (3.23)$$

Сравнив формулу (3.23) и $q = CU$, определим емкость батареи при замкнутом ключе: $C = 0{,}85$ мкФ.

Изменение энергии $\Delta E = -0{,}39$ мДж. Знак минус показывает, что при замыкании ключа энергия батареи уменьшилась, хотя ее заряд не изменился. Полученный результат имеет общий характер: если в любой батарее конденсаторов, отключенной от источника напряжения, соединить проводником точки, не связанные непосредственно с зажимами батареи, то это вызовет уменьшение энергии, а значит, увеличение емкости батарей.

Пример 6. Когда к батарее конденсаторов (рис. 3.9) подвели напряжение U, заряд среднего конденсатора оказался равным нулю. Определить емкость конденсатора C_4, если $C_2 = 2C_1$, $C_3 = 3C_1$.

Решение. Воспользуемся методом узловых потенциалов. С этой целью выразим все заряды через потенциалы узловых точек и запишем равенство $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$ (алгебраическая сумма зарядов на обкладках, примыкающих к узлу, равна нулю).

Пусть $\varphi_A = U$, $\varphi_B = 0$, $\varphi_D = \varphi_E = \varphi$ (так как средний конденсатор не заряжен, то потенциалы точек D и E одинаковы). Тогда

$$q_1 = C_1(U - \varphi); \quad q_2 = 2C_1\varphi; \quad q_3 = 3C_1(U - \varphi); \quad q_4 = C_4\varphi,$$

где C_4 — искомая емкость. Но средний конденсатор не заряжен, поэтому $q_1=q_2$ и $q_3=q_4$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} C_1(U-\varphi) &= 2C_1\varphi; \\ 3C_1(U-\varphi) &= C_4\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Решив эту систему уравнений, найдем $\varphi = \frac{U}{3}$, $C_4 = 6C_1$.

Задачи для самостоятельного решения

3.48. Между вертикальными обкладками плоского конденсатора подвешен на нити шарик массой 4 г и зарядом 3,3 нКл. Какой заряд следует сообщить обкладкам, чтобы нить с шариком отклонилась на угол 45°? Площадь одной обкладки равна 100 см^2.

3.49. В плоский конденсатор, расстояние между обкладками которого 5 мм и напряжение между ними 300 В, ввели параллельно обкладкам металлическую пластинку толщиной 0,2 см. Определить напряжение на обкладках после введения пластинки.

3.50. Тысяча водяных капель одинакового радиуса и одинаково заряженных сливаются в одну большую каплю. Во сколько раз потенциал, емкость и энергия большой капли превышают соответствующие величины одной малой капли? Поверхностное натяжение не учитывать.

3.51. Шар емкостью 10 пФ заряжен до потенциала 6 кВ, а шар емкостью 20 пФ — до потенциала 12 кВ. Определить, какое количество теплоты выделится при соединении этих шариков проволокой. Расстояние между шарами велико по сравнению с их размерами.

3.52. Пластины изолированного плоского конденсатора раздвигаются так, что его емкость изменяется от 100 до 80 пФ. Какая работа совершается при этом, если заряд конденсатора $1{,}6 \cdot 10^{-4}$ Кл? Поле между пластинами остается однородным.

3.53. Плоский конденсатор имеет обкладки квадратной формы со стороной 1 м. Расстояние между обкладками 0,5 см, напряжение на них 100 В. Определить, с какой скоростью надо вдвигать в конденсатор пластину титаната бария толщиной 0,5 см, чтобы по цепи шел ток 1 мкА.

3.54. К конденсатору, заряженному до 500 В, присоединили параллельно второй конденсатор таких же размеров и формы, но с диэлектриком. Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика, если после присоединения второго конденсатора напряжение на конденсаторах уменьшилось до 70 В.

3.55. Два конденсатора емкостью 9 и 18 нФ соединили последовательно и подключили к источнику тока напряжением 600 В, затем отсоединили от источника и, не разряжая, соединили параллельно. Определить изменение заряда на каждом конденсаторе и напряжение на батарее.

3.56. Два одинаковых конденсатора емкостью 6 мФ каждый зарядили до напряжения 0,8 кВ, затем один из них погрузили в керосин и соединили параллельно. Определить, на сколько изменилась энергия конденсаторов.

3.57. Как изменяется энергия заряженного конденсатора при уменьшении расстояния между его пластинами, если конденсатор: а) отключен от источника тока; б) подключен к источнику тока?

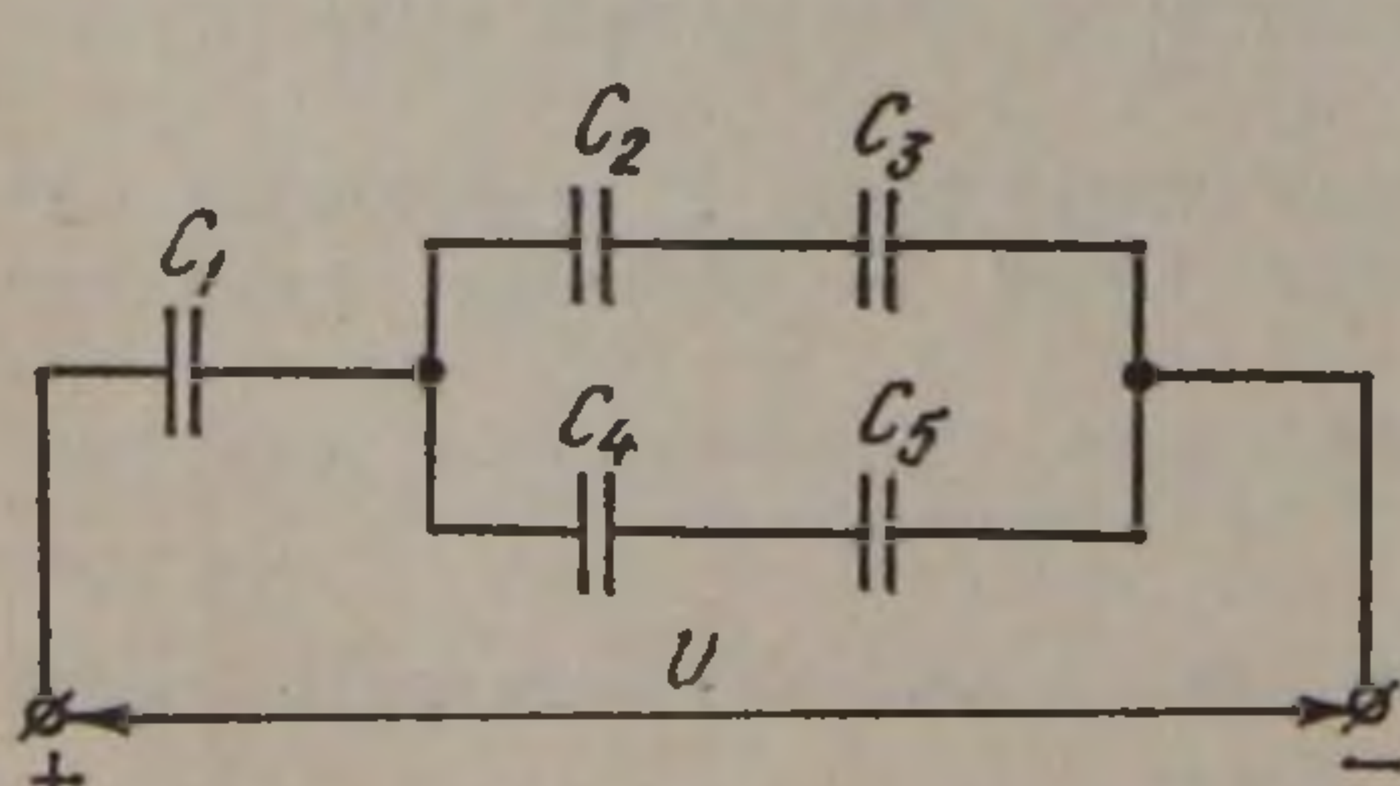


Рис. 3.10

3.58. К двум одинаковым плоским конденсаторам, соединенным последовательно, подключен источник постоянного тока. Как изменится напряженность электрического поля между обкладками, если в один из конденсаторов ввести диэлектрик ($\varepsilon=9$), заполняющий все пространство между обкладками?

3.59. Плоский конденсатор емкостью 0,2 мкФ зарядили до напряжения 600 В. Определить изменение энергии конденсатора и работу внешних сил и сил поля при погружении конденсатора в керосин, если конденсатор: а) подключен к источнику тока; б) отключен от источника.

3.60. Определить емкость батареи конденсаторов (рис. 3.9), если $C_1=C_3=15$ мкФ; $C_2=C_4=C_5=30$ мкФ.

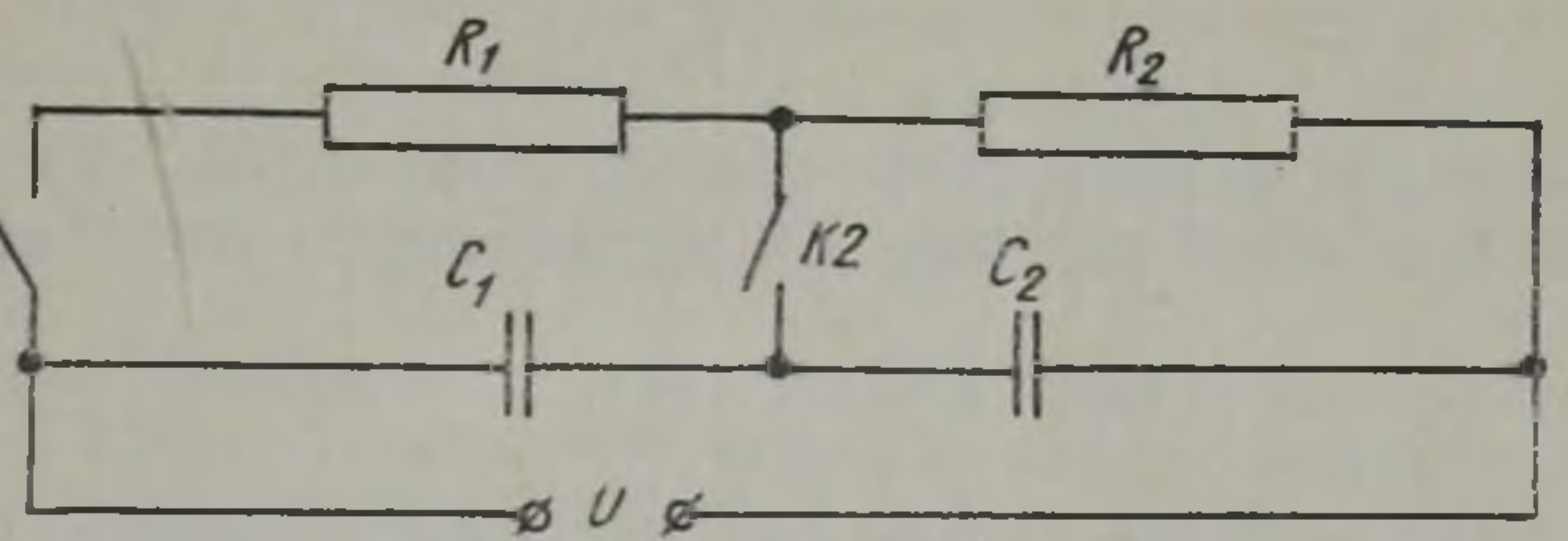


Рис. 3.11

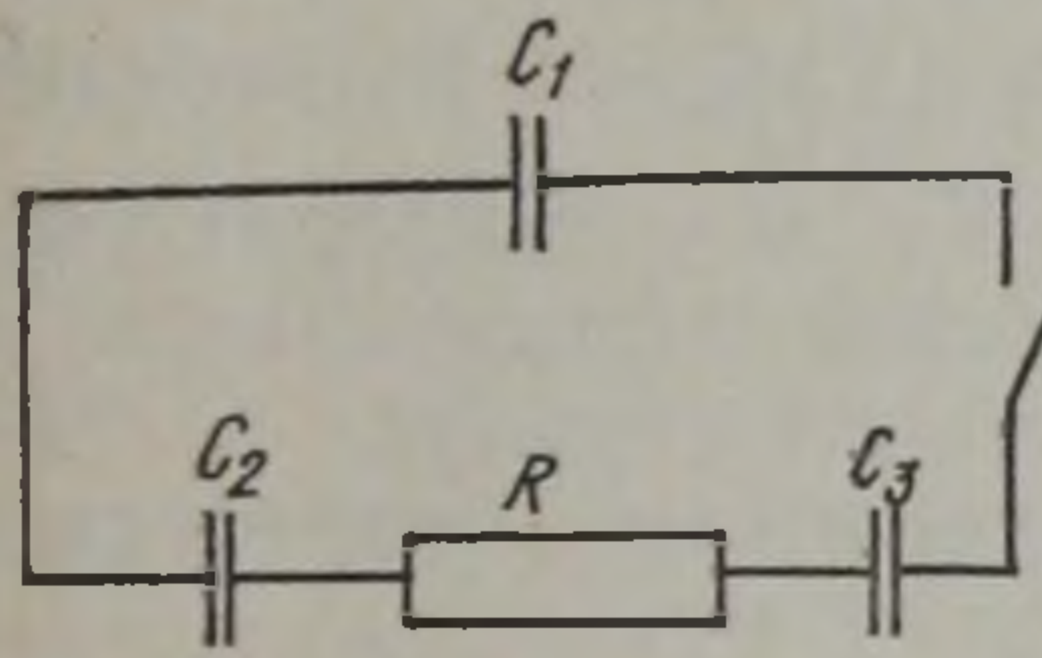


Рис. 3.12

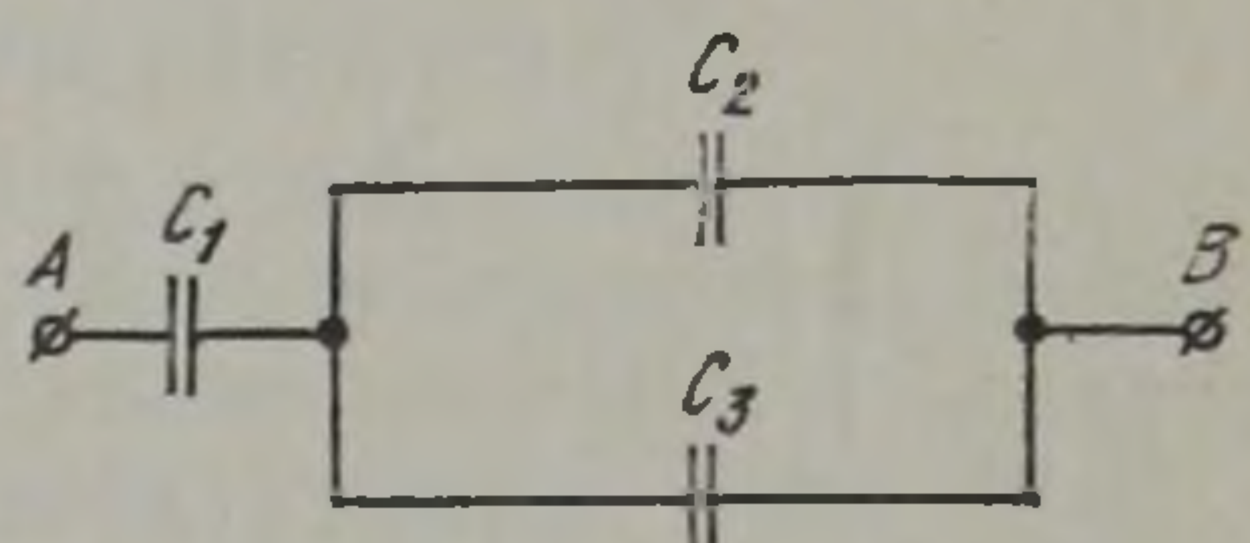


Рис. 3.13

3.61. В схеме, приведенной на рис. 3.10, известно, что $U=100$ В и емкости конденсаторов: $C_1=C_5=6$ мкФ, $C_3=C_4=3$ мкФ, $C_2=1{,}5$ мкФ. Определить емкость батареи, заряд и напряжение на каждом конденсаторе.

3.62. Определить напряжение на конденсаторах (рис. 3.11) в следующих случаях: а) ключи К1 и К2 замкнуты; б) К1 замкнут, К2 разомкнут; в) К1 разомкнут, К2 замкнут; г) оба ключа разомкнуты. Напряжение источника тока $U=100$ В, $R_1=10$ Ом, $R_2=30$ Ом, $C_1=30$ пФ, $C_2=60$ пФ.

3.63. Три конденсатора емкостью по 1 мкФ каждый соединены по схеме, показанной на рис. 3.12. Конденсатор C_1 заряжают до напряжения 3 В, после чего замыкают ключ К. Какой заряд протечет при этом по сопротивлению R?

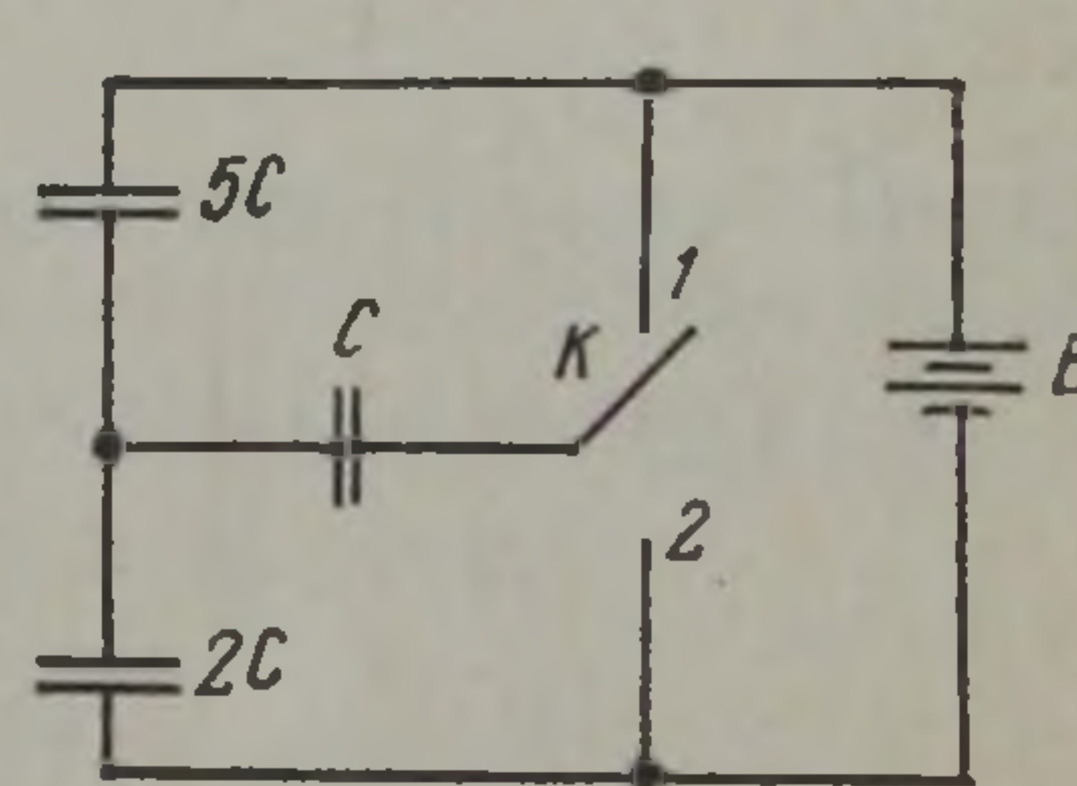


Рис. 3.14

3.64. При каком напряжении и в каких местах между точками A и B (рис. 3.13) произойдет пробой системы, если $C_1=100$ пФ, $C_2=200$ пФ, $C_3=300$ пФ, а пробивные напряжения для них $U_1=600$ В, $U_2=300$ В, $U_3=200$ В?

3.65. Определить, какое количество теплоты выделится в цепи (рис. 3.14), если ключ К переключить из положения *1* в положение *2* ($C=1$ мкФ, $U=12$ В).

3.5. Закон Ома для участка цепи. Простейшие электрические цепи

Основные законы и формулы

Характеристиками электрического тока являются его величина (сила) I и плотность j, определяемые формулами:

$$I=\frac{q}{t}; \tag{3.24}$$

$$j=\frac{I}{S},$$

где t — время; S — площадь поперечного сечения проводника.

Сила тока в участке цепи прямо пропорциональна напряжению на концах участка и обратно пропорциональна его сопротивлению:

$$I = \frac{U}{R}. \tag{3.25}$$

Сопротивление проводника зависит от его размеров (длины l, площади поперечного сечения S) и удельного сопротивления ρ:

$$R = \rho \frac{l}{S}.$$

Величины ρ и R зависят от температуры проводника. Для металлов и сплавов эта зависимость выражается формулами:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha\Delta T); \quad R = R_0(1+\alpha\Delta T), \tag{3.26}$$

где ρ_0 и R_0 — значения ρ и R при $T=273$ К; α — температурный коэффициент сопротивления, характеризующий относительное изменение ρ и R при изменении температуры на один градус.

Для цепи с последовательным соединением потребителей энергии:

$$I = \text{const}; \quad U = \sum_{i=1}^{n} U_i;$$

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i, \tag{3.27}$$

где U — общее напряжение на концах цепи; R — общее сопротивление этой цепи.

При параллельном соединении проводников:

$$I = \sum_{i=1}^{n} I_i; \tag{3.28}$$

$$U = \text{const}; \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}. \tag{3.30}$$

Решение задач

Задачи о движении электрических зарядов по проводникам и о явлениях, связанных с этим движением, удобно разделить на три группы: задачи, при решении которых вычисляют или учитывают сопротивление проводников как функцию его геометрических размеров и температуры; задачи на расчет сопротивления системы проводников при различных соединениях их в электрических цепях; задачи на применение закона Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС.

1. При решении задач первой группы используют формулу (3.26). Если в условии задачи указано, из какого материала изготовлен проводник, и приводятся сведения о его геометрических размерах, то

используют соотношение $D = \frac{m}{V}$. Если же в задаче рассматривается несколько проводников, то такие соотношения следует составить для каждого проводника и решить уравнения совместно относительно искомой величины. Чтобы определить изменение сопротивления последовательно или параллельно соединенных проводников при их нагревании, используют формулы (3.26), (3.27), (3.30).

Пример 1. Два проводника изготовлены из одного материала. Во сколько раз отличаются их сопротивления, если второй проводник имеет в два раза большую массу и в три раза меньшую длину?

Решение. Согласно формуле (3.25), $R_1 = \rho \frac{l_1}{S_1}$, $R_2 = \rho \frac{l_2}{S_2}$. Выразим S_1 и S_2 из формулы $m = DlS$ (D — плотность материала проводника):

$$S_1 = \frac{m_1}{Dl_1}; \qquad S_2 = \frac{m_2}{Dl_2}.$$

Тогда

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S_1} = \rho \frac{Dl_1^2}{m_1}; \quad R_2 = \rho \frac{l_2}{S_2} = \rho \frac{Dl_2^2}{m_2},$$

а отношение сопротивлений $\frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1^2 m_2}{l_2^2 m_1}$. Согласно условию, $m_2 = 2m_1$, $l_1 = 3l_2$, поэтому $\frac{R_1}{R_2} = 18$. Таким образом, $R_1 = 18 R_2$.

Пример 2. Угольный стержень соединен последовательно с железным стержнем такой же толщины. При каком соотношении их длин сопротивление такого участка не зависит от температуры?

Решение. Обозначим сопротивление угольного и железного стержней при 273 К через R_1 и R_2, а при температуре T — через R_1' и R_2'. Тогда

$$R_1 = \rho \frac{l_1}{S}; \qquad R_1' = R_1 (1 + \alpha_1 \Delta T) = \rho \frac{l_1}{S} (1 + \alpha_1 \Delta T);$$

$$R_2 = \rho \frac{l_2}{S}; \qquad R_2' = R_2 (1 + \alpha_2 \Delta T) = \rho \frac{l_2}{S} (1 + \alpha_2 \Delta T).$$

С увеличением температуры R_1' будет убывать ($\alpha_1 < 0$), а R_2' — возрастать. Для общего сопротивления имеем:

$$R = R_1 + R_2 = R_1' + R_2';$$

$$\frac{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}{S} = \frac{\rho_1 l_1 (1 + \alpha_1 \Delta T)}{S} + \frac{\rho_2 l_2 (1 + \alpha_2 \Delta T)}{S}.$$

Отсюда $\frac{l_1}{l_2} = -\frac{\rho_2 \alpha_2}{\rho_1 \alpha_1}$.

2. При решении задач на расчет сопротивления разветвленной цепи, когда заданы сопротивления всех ее участков, в основном используют формулы (3.27) — (3.30). Если соединение проводников смешанное, его надо разложить на участки последовательного и параллельного соединений и, поочередно применяя формулы (3.27) и (3.30), найти сопротивление всей цепи. Если заданное

сложное соединение проводников нельзя разложить на участки последовательного и параллельного соединений, необходимо заменить его другим соединением, эквивалентным данному в отношении сопротивления так, чтобы это соединение можно было разложить на участки последовательного и параллельного соединений. Здесь, как и в случае конденсаторов, такие эквивалентные замены основаны на возможности соединять и разъединять точки цепи, имеющие равные потенциалы. Если схема имеет ось симметрии, причем вход и выход (зажимы) схемы лежат на этой оси, то в цепи будет симметричное распределение токов и любые две точки, симметричные относительно этой оси, имеют равные потенциалы. В общем случае, когда нет точек с равным потенциалом, сопротивление любой сколь угодно сложной цепи можно рассчитать, используя правила Кирхгофа.

Пример 3. Определить сопротивление цепей, схемы которых изображены на рис. 3.15, если сопротивление каждого проводника, заключенного между двумя узлами, равно 1 Ом.

Решение. Анализ схем показывает, что ни одна из цепей не содержит ни одной пары проводников, соединенных между собой последовательно или параллельно. Однако все схемы являются симметричными, причем точки их входа и выхода лежат на осях симметрии.

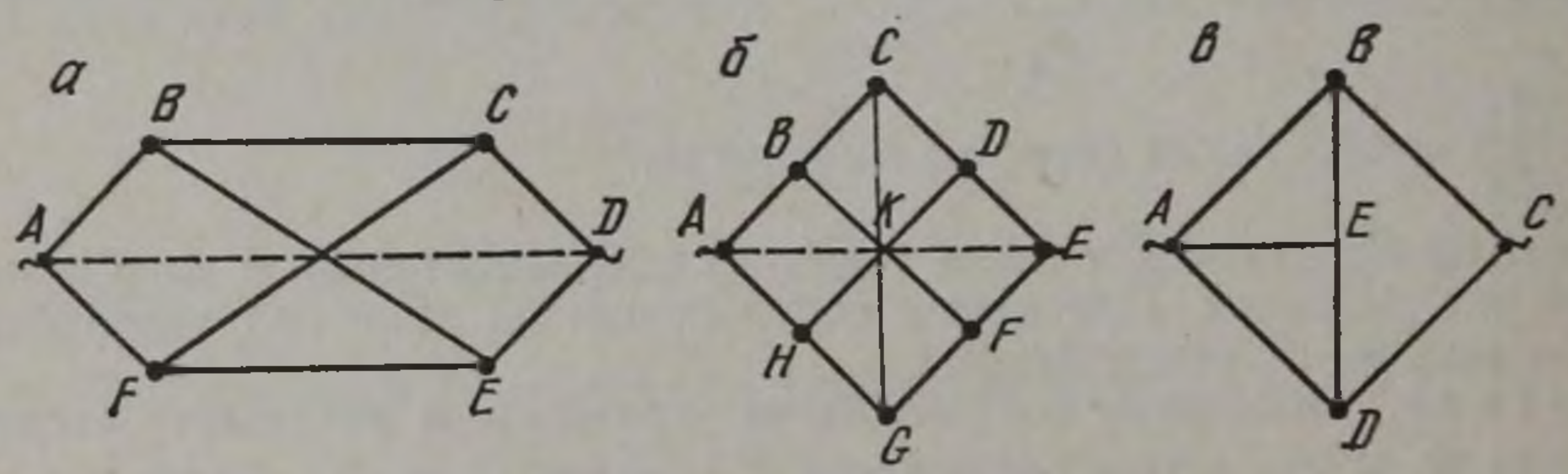


Рис. 3.15

В схеме, приведенной на рис. 3.15, *а*, точка B симметрична точке F относительно оси AD. Следовательно, при наличии тока в цепи потенциалы точек B и F будут одинаковы. Поэтому эти точки можно объединить в один узел B, не изменяя сопротивления цепи. По той же причине можно соединить в один узел C точки C и E. Тогда получим новую схему (рис. 3.16, *а*), эквивалентную данной. Применив формулы (3.27), (3.30), определим сопротивление цепи:

$$R_A = R_{AB} + R_{BC} + R_{CD} = 1{,}25 \text{ Ом}.$$

В схеме, приведенной на рис. 3.15, *б*, симметричные (относительно оси AE) точки также обладают одинаковыми потенциалами: $\varphi_B = \varphi_H$, $\varphi_D = \varphi_F$, $\varphi_C = \varphi_K = \varphi_G$. Последнее тройное равенство должно выполняться, поскольку каждая из точек C, K, G делит путь тока, проходящего через нее от одного зажима цепи (точка A) до другого (точка E), на две одинаковые части. Поэтому потенциал каждой из точек C, K, G равен $\frac{\varphi_A - \varphi_E}{2}$. Следовательно, в проводах CK и KG тока нет, и их можно удалить, не изменив сопротивления цепи.

Далее возможны два пути решения задачи. Соединив точки с одинаковыми потенциалами, получим схему цепи (рис. 3.16, *б*), эквивалентную данной. Можно не соединять точки равного потенциала, а наоборот разъединить их в центре схемы. Тогда получим схему цепи (рис. 3.16, *в*), в которой точки L, M имеют тот же потенциал, что и до разъединения, поскольку они, как и точка K на схеме, приведенной на рис. 3.15, *б*, делят путь тока, проходящего через них от одного зажима цепи к другому, на две равные части. Поэтому потенциал каждой из точек по-прежнему равен $\dfrac{\varphi_A - \varphi_C}{2}$.

Поочередно применив формулы (3.27) и (3.30), найдем сопротивление цепи:

$$R = R_{AB} + R_{BC} + R_{CD} + R_{DE} = 1{,}5\ \text{Ом}.$$

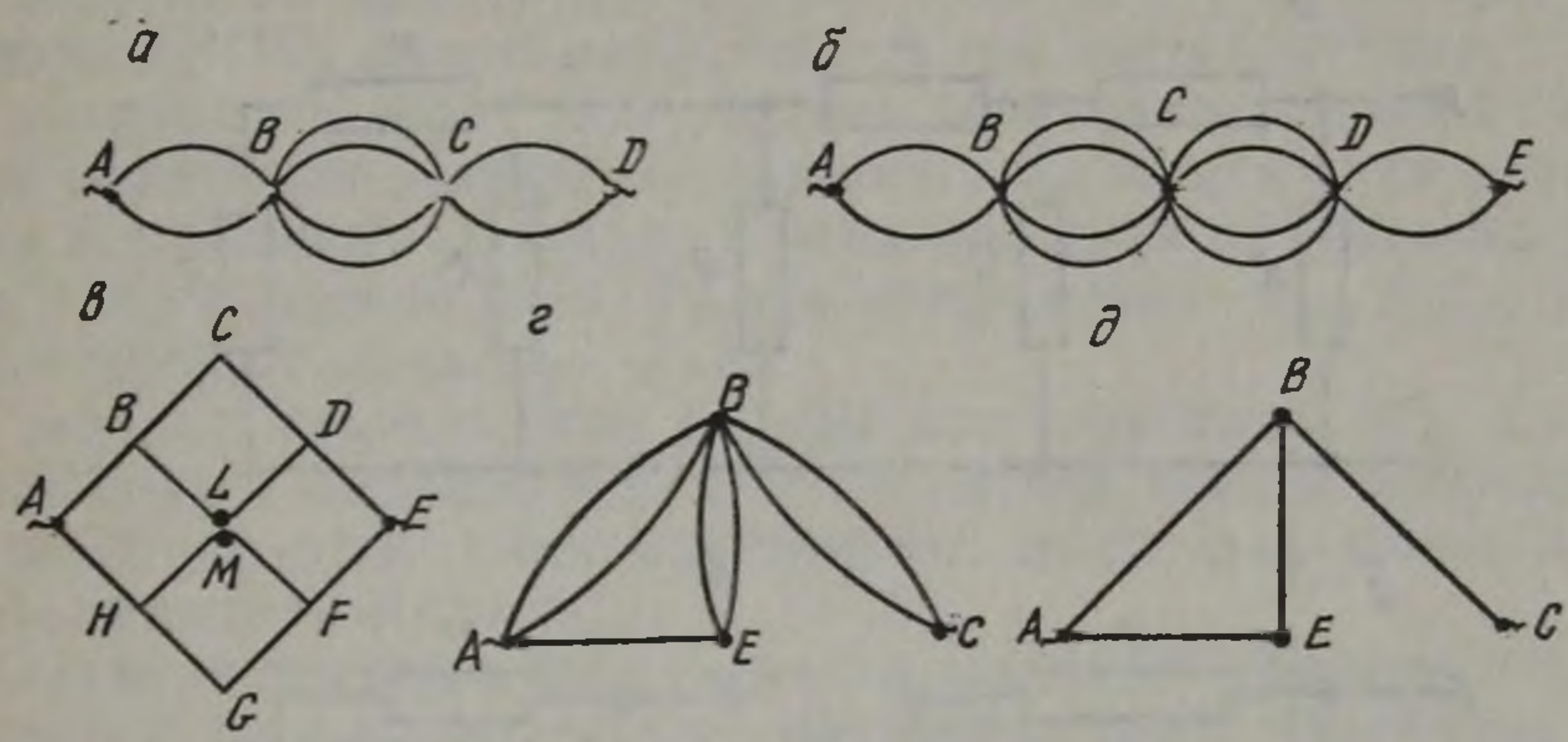


Рис. 3.16

Схема, приведенная на рис. 3.15, *в*, отличается от предыдущей тем, что линия BED не делит схему на две одинаковые части, поэтому в действительности ни одна из точек B, E, D не имеет потенциала, равного $\dfrac{\varphi_A - \varphi_B}{2}$. В этом случае можно лишь утверждать, что точки B и D, будучи симметричными относительно прямой AC, на которой расположены вход и выход цепи, имеют одинаковые потенциалы. Соединив их (перегнув чертеж по линии AC) в один узел B, получим эквивалентную схему (рис. 3.16, *г*), которую можно разложить на элементы последовательного и параллельного соединений. Ее можно упростить, заменив каждые два одинаковых, параллельно соединенных проводника на участках AB, EB и BC одним проводником вдвое меньшего сопротивления. Тогда получим схему, показанную на рис. 3.16, *д*. Сопротивление этой цепи $R = 1{,}375$ Ом.

Пример 4. Цепь составлена из бесконечного числа ячеек (рис. 3.17, *а*). Определить сопротивление этой цепи.

Решение. Для решения задачи воспользуемся свойством счетных множеств (*счетным* называется всякое множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел).

Выделим узел, состоящий из двух сопротивлений r и R (рис. 3.17, *б*). Если число таких узлов $n \to \infty$, то множество сопротивлений r и R будет счетным. Из свойства счетного множества следует, что если A — данное счетное множество, A_1 — его бесконечное подмножество, то $A \approx A_1$. На основании этой теоремы можно представить рассматриваемую цепь как эквивалентную той, которая показана на рис. 3.17, *в*. Применив к этой схеме формулы (3.27), (3.30), получим

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r + R_x},$$

где R_x — сопротивление бесконечной цепочки. Это уравнение можно записать в виде

$$R_x^2 + rR_x - 2R = 0,$$

откуда

$$R_x = -\frac{r}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR}.$$

Учитывая, что отрицательное значение корня противоречит физическому содержанию задачи, получаем однозначный ответ:

$$R_x = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR}.$$

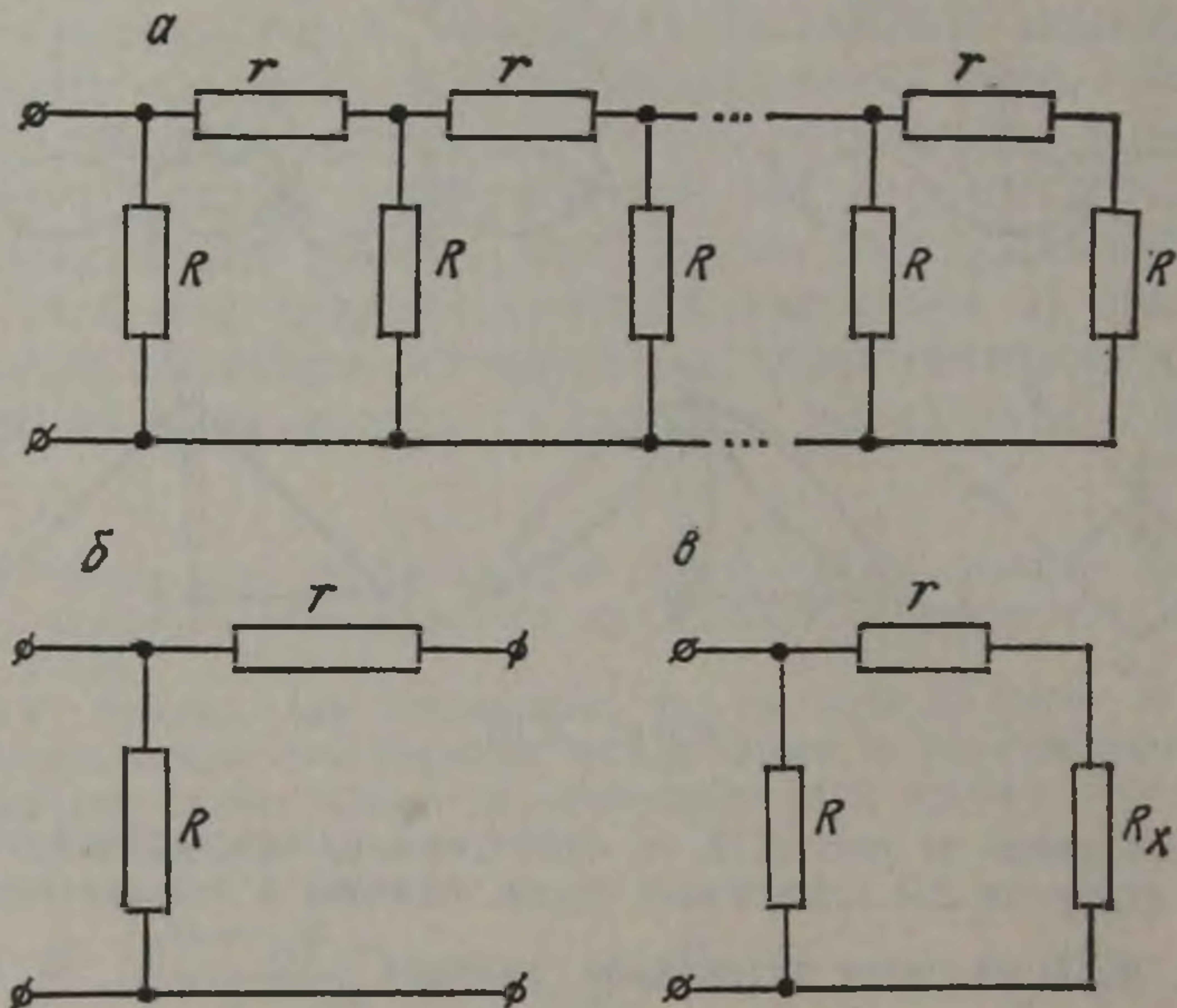


Рис. 3.17

В задаче в качестве элемента счетного множества использовался узел из двух сопротивлений. Число сопротивлений в элементарной ячейке можно различным способом менять, однако метод решения задач не изменится.

Пример 5. Определить сопротивление цепи, изображенной на рис. 3.18.

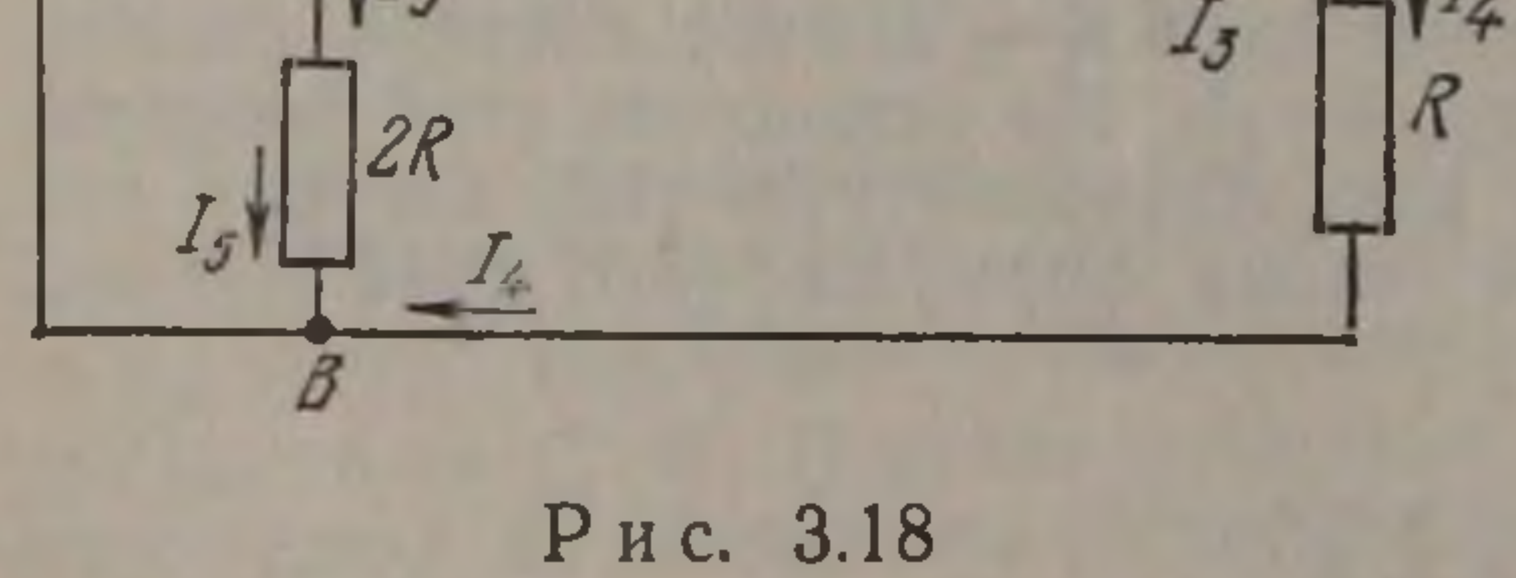


Рис. 3.18

Решение. В этой схеме нет ни последовательных, ни параллельных соединений проводников в чистом виде, нет и точек с равными потенциалами, поскольку она не симметрична. Поэтому здесь применим более общий способ расчета.

Допустим, что к узлу A подходит ток I_0 и разветвляется на I_1 и I_2. Следовательно,

$$I_0 = I_1 + I_2. \qquad (3.31)$$

Аналогично в точках D, B, C:

$$I_1 = I_3 + I_4; \qquad (3.32)$$

$$I_0 = I_4 + I_5; \qquad (3.33)$$

$$I_5 = I_2 + I_3. \qquad (3.34)$$

Для составления второй группы уравнений воспользуемся положением, согласно которому работа сил электрического поля по перемещению заряда не зависит от формы пути. Обозначим R_0 полное сопротивление цепи. Тогда для контуров ACB, ADB, $ADCB$ справедливы соответственно следующие равенства:

$$I_0R_0 = I_2R + I_5 \cdot 2R; \qquad (3.35)$$

$$I_0R_0 = I_1 \cdot 2R + I_4R; \qquad (3.36)$$

$$I_0R_0 = I_1 \cdot 2R + I_3 \cdot 1{,}5R = I_5 \cdot 2R. \qquad (3.37)$$

Для контроля составим еще одно уравнение для контура $ACDB$:

$$I_0R_0=I_2R-I_3\cdot 1{,}5R+I_4R.$$

Решив систему уравнений (3.31)—(3.37), получим

$$R_0=1{,}4r.$$

3. Задачи на применение закона Ома для участка цепи, не содержащего ЭДС, можно разделить на три основных типа.

В задачах первого типа заданы сопротивления всех участков цепи и общее напряжение. Требуется определить токи и напряжения на всех сопротивлениях. В этих расчетах сначала определяют общее сопротивление цепи. Токи и напряжения отдельных участков цепи вычисляют по закону Ома.

В задачах второго типа заданы все сопротивления и ток (или напряжение) в одной ветви. В этом случае токи и напряжения на остальных участках цепи определяют, пользуясь законом Ома и первым правилом Кирхгофа.

В задачах третьего типа одно из заданных сопротивлений цепи изменяется (уменьшается или увеличивается). Требуется определить изменения токов и напряжений на всех участках цепи.

При решении задач на закон Ома надо начертить схему и указать на ней все элементы цепи. Если схема дается в готовом виде, то устанавливают, какие элементы цепи включены последовательно, какие — параллельно. Затем следует обозначить токи на каждом участке цепи и записать для каждой точки разветвления (если они есть) уравнения токов и уравнения, связывающие напряжения на участках цепи. Используя закон Ома, устанавливают связь между токами и напряжениями и, решив эти уравнения совместно, находят искомую величину. Если в схеме делаются какие-либо переключения сопротивлений или источников, уравнения составляют для каждого случая в отдельности.

Основная цель решения задач на расчет шунтов и добавочных сопротивлений состоит в выяснении, как и при каких условиях можно использовать один и тот же измерительный прибор для разных целей, какие ошибки могут возникать во время измерений при различных условиях. Основными расчетными при этом являются формулы:

$$R_{\text{ш}}=\frac{R_{\text{пр}}}{n-1};\ R_{\text{д}}=R_{\text{пр}}(n-1),$$

где $R_{\text{ш}}$, $R_{\text{д}}$ — сопротивления шунта и добавочного сопротивления; $R_{\text{пр}}$ — сопротивление прибора.

Пример 6. К железному проводу длиной $l_1=1{,}6$ м и поперечным сечением $S_1=1$ мм^2 параллельно присоединен никелиновый провод длиной $l_2=1{,}2$ м и поперечным сечением $S_2=2$ мм^2. Определить силу тока в железном проводе, если в никелиновом сила тока $I_2=0{,}5$ А.

Решение. По закону Ома для участка цепи $I_1=\dfrac{U_1}{R_1}$ и $I_2=\dfrac{U_2}{R_2}$. При параллельном соединении проводников $U_1=U_2=U$ или $I_1R_1=I_2R_2$. Так как $R_1=\rho_1\dfrac{l_1}{S_1}$ и $R_2=\rho_2\dfrac{l_2}{S_2}$, то

$$I_1\rho_1\frac{l_1}{S_1}=I_2\rho_2\frac{l_2}{S_2},$$

откуда

$$I_1=I_2\frac{\rho_2 l_2 S_1}{\rho_1 l_1 S_2}=625 \text{ мА}.$$

Пример 7. Если к амперметру, рассчитанному на максимальную силу тока $I_A=2$А, присоединить шунт сопротивлением $R_ш=0{,}5$ Ом, то цена деления шкалы амперметра возрастет в 10 раз. Определить, какое добавочное сопротивление $R_д$ необходимо присоединить к этому же амперметру, чтобы его можно было использовать как вольтметр для измерения напряжений до 220 В.

Решение. Определим сначала внутреннее сопротивление амперметра R_A. При подключении шунта

$$\frac{I_А}{I_ш}=\frac{R_ш}{R_А} \text{ или } \frac{I_А}{I_А+I_ш}=\frac{R_ш}{R_А+R_ш}.$$

По условию задачи, если $I_А=2$ А, то общий ток в цепи $I_ш+I_А=20$ А. Тогда $R_А=4{,}5$ Ом.

Чтобы использовать амперметр в качестве вольтметра, измеряющего напряжение до 220 В, к нему надо подключить такое добавочное сопротивление $R_д$, чтобы падение напряжения на амперметре и на этом сопротивлении составило 220 В. При этом через амперметр будет проходить максимальный ток силой 2 А. Поэтому можно записать:

$$U=I_А\,(R_ш+R_д),$$

откуда

$$R_д=\frac{U}{I_А}-R_ш=105{,}50 \text{ Ом}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.66. Как, имея реостат с известным сопротивлением, линейку и штангенциркуль, определить удельное сопротивление проволоки, из которой изготовлен реостат?

3.67. Как можно измерить объем аудитории, имея моток медной проволоки, весы с набором гирь, аккумулятор, вольтметр, амперметр и справочник?

3.68. Сопротивление катушки из медной проволоки 16,8 Ом, масса проволоки 4,45 кг. Определить длину и площадь поперечного сечения проволоки.

3.69. Масса мотка медной проволоки 0,1 кг, ее сечение 0,1 мм^2. Определить сопротивление этой проволоки при температуре 393 К.

3.70. Два проводника с температурными коэффициентами α_1 и α_2 имеют при 0 °С сопротивления R_{01} и R_{02}. Определить температурный коэффициент участка, состоящего из этих проводников, если они соединены: а) последовательно; б) параллельно.

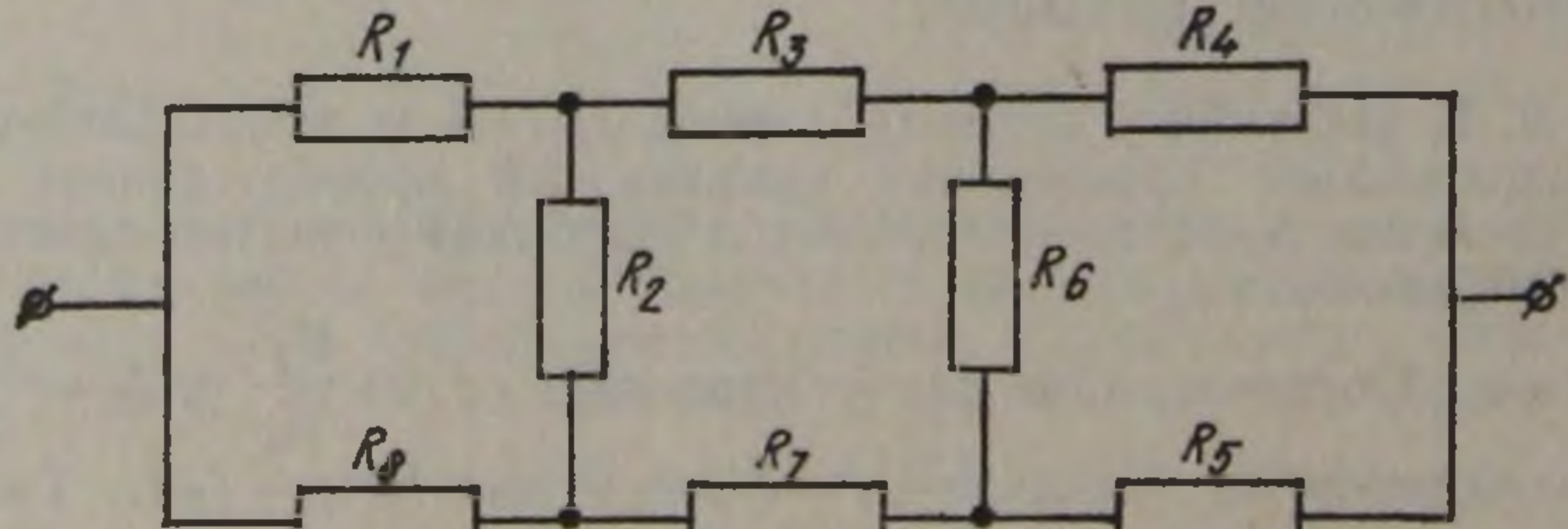


Рис. 3.19

3.71. Определить электрическое сопротивление следующих проволочных сеток: а) каркас в виде квадрата, середины противоположных сторон которого соединены между собой и в центре спаяны. Каркас включен в цепь диагональными вершинами; б) каркасного куба, если напряжение подано к вершинам, лежащим на его диагонали. Сопротивление одного ребра каркаса принять равным 6 Ом.

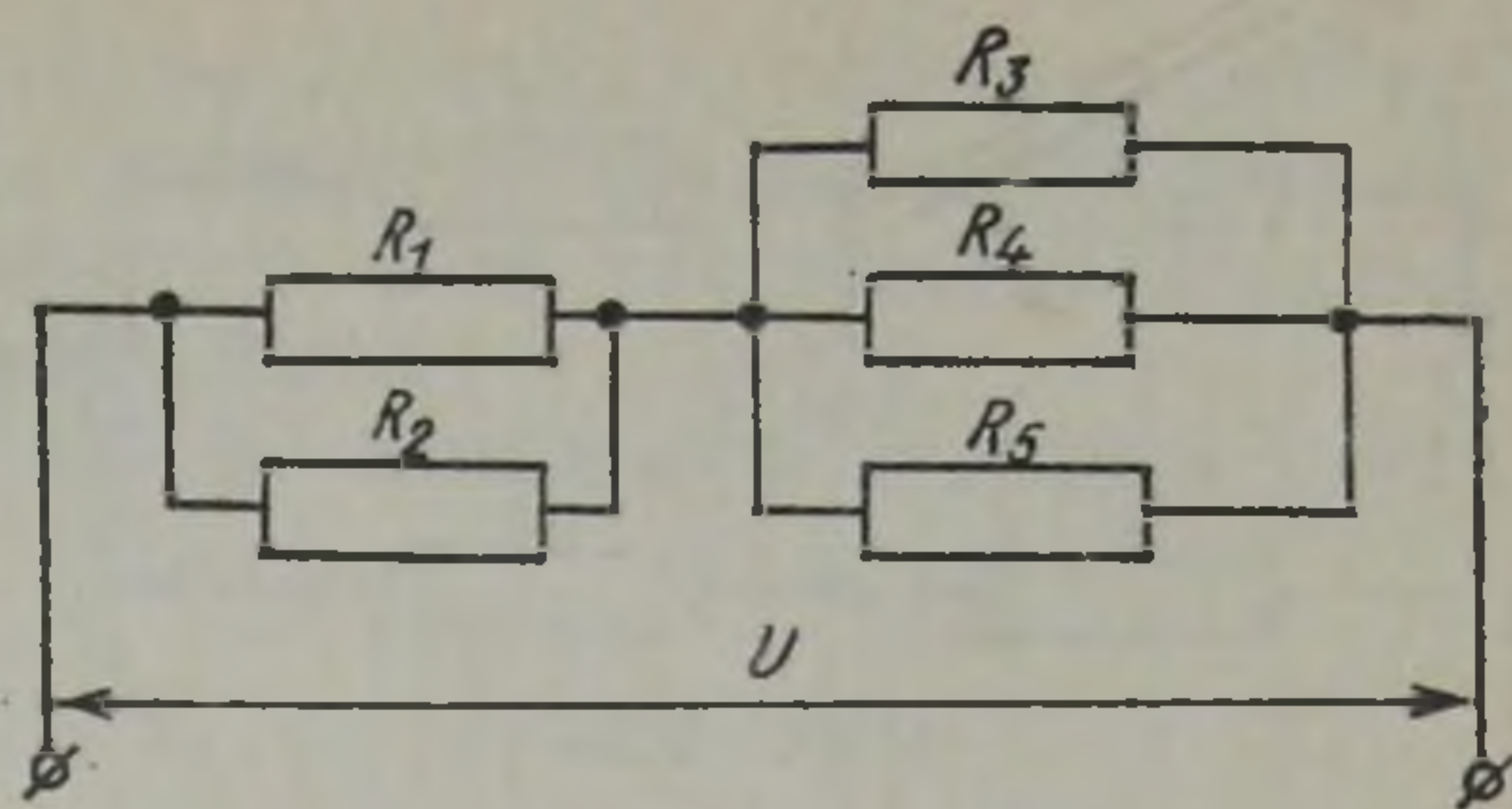


Рис. 3.20

3.72. Определить сопротивление цепи, схема которой изображена на рис. 3.19, если $R_1=R_5=1$ Ом, $R_2=R_6=2$ Ом, $R_3=R_7=3$ Ом, $R_4=R_8=4$ Ом.

3.73. К концам двух последовательно соединенных сопротивлений по 60 Ом каждое подводится напряжение 120 В. Каково показание вольтметра, подключенного к одному из сопротивлений, если внутреннее сопротивление вольтметра 120 Ом?

3.74. В цепи (рис. 3.20) $R_1=R_4=30$ Ом, $R_2=R_5=60$ Ом, $R_3=20$ Ом, $U=$ $=120$ В. Определить эквивалентное сопротивление всей цепи и силу тока во всех сопротивлениях.

3.75. В цепи (рис. 3.21) $R_1=10$ Ом, $R_2=15$ Ом, $R_3=25$ Ом, $R_4=50$ Ом, $R_5=$ $=5$ Ом и сила тока $I_1=2$ А. Определить силу тока в цепи и ветвях, а также общее напряжение.

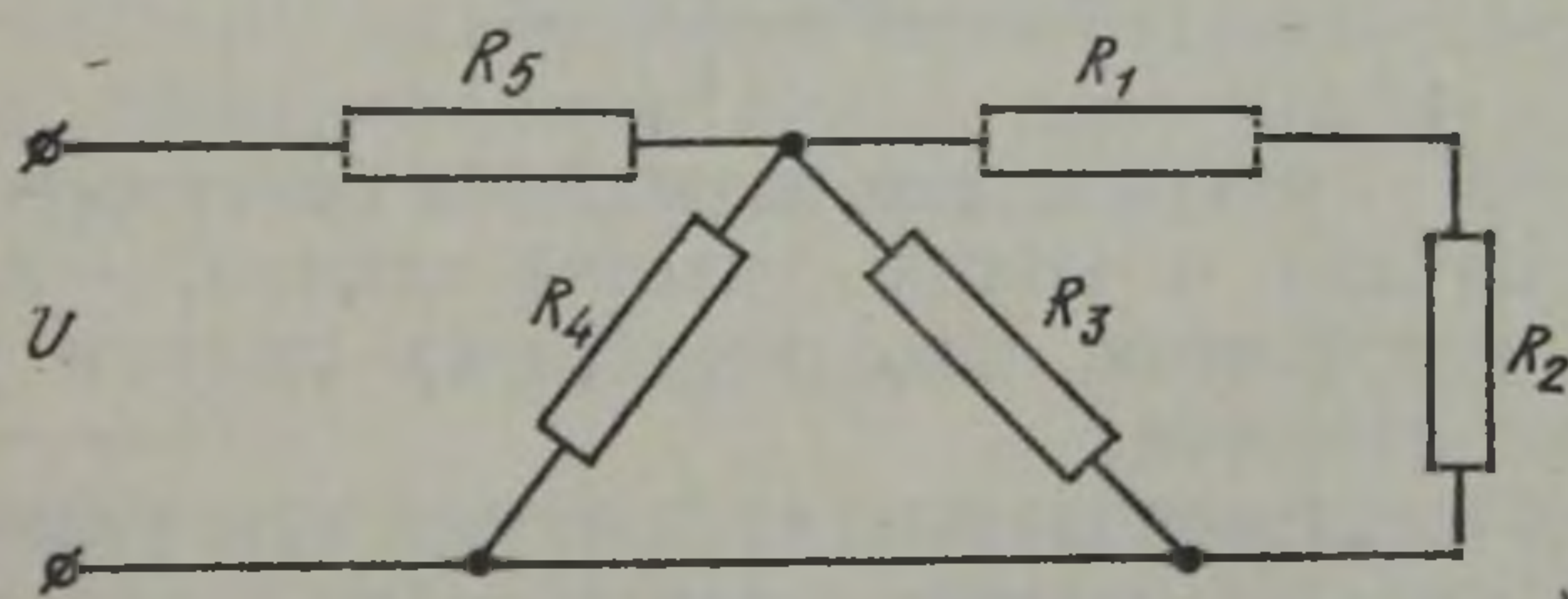


Рис. 3.21

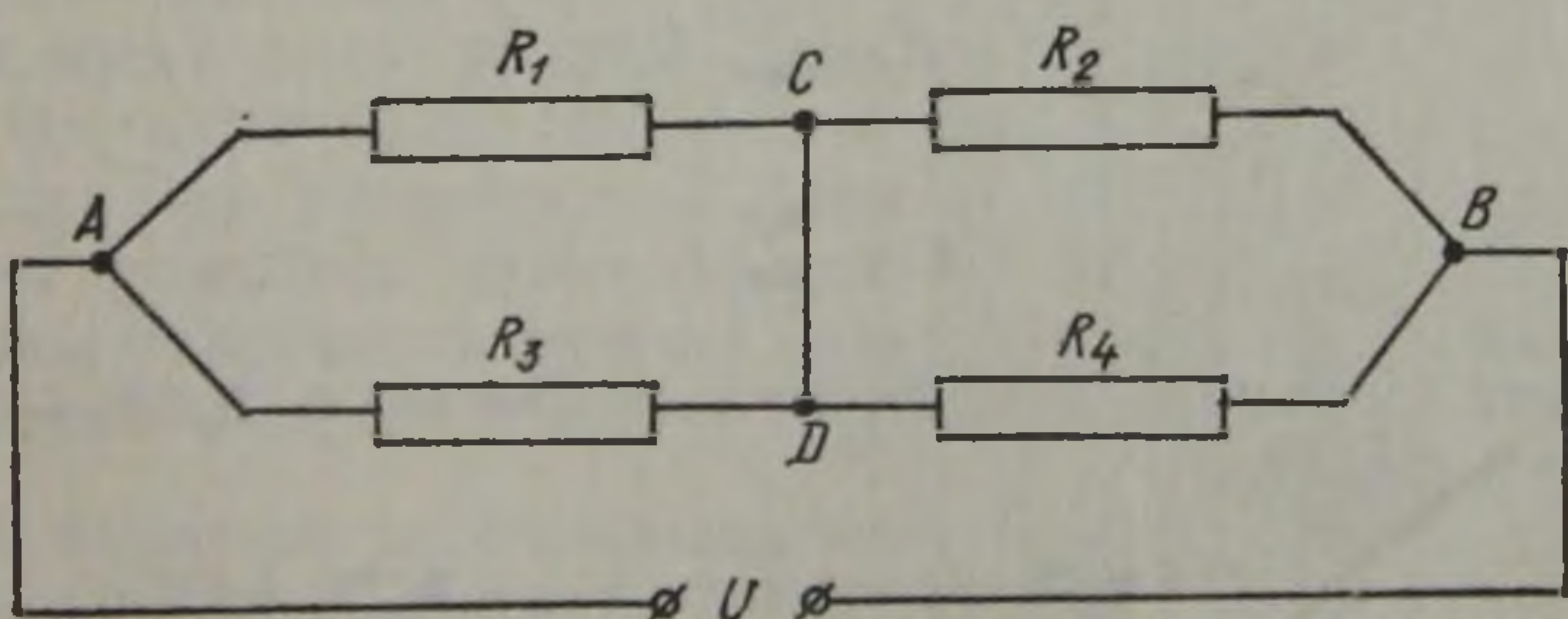


Рис. 3.22

3.76. В цепи (рис. 3.22) $R_1 = 2$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = 6$ Ом, $R_4 = 7$ Ом, $U =$ $= 36$ В. Определить силу тока на участке CD, если $R_{CD} = 0$.

3.77. В цепи (рис. 3.22) $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = R_4 = 5$ Ом, $R_3 = 20$ Ом, $U_{AB} = 30$ В. Определить сопротивление на участке CD, если известно, что по сопротивлению R_2 протекает ток силой 4 А.

3.78. Определить падение напряжения на зажимах ламп сопротивлением $R_5=R_6=10$ Ом (рис. 3.23), если $U=220$ В, $R_1=R_2=R_3=R_4=4$ Ом.

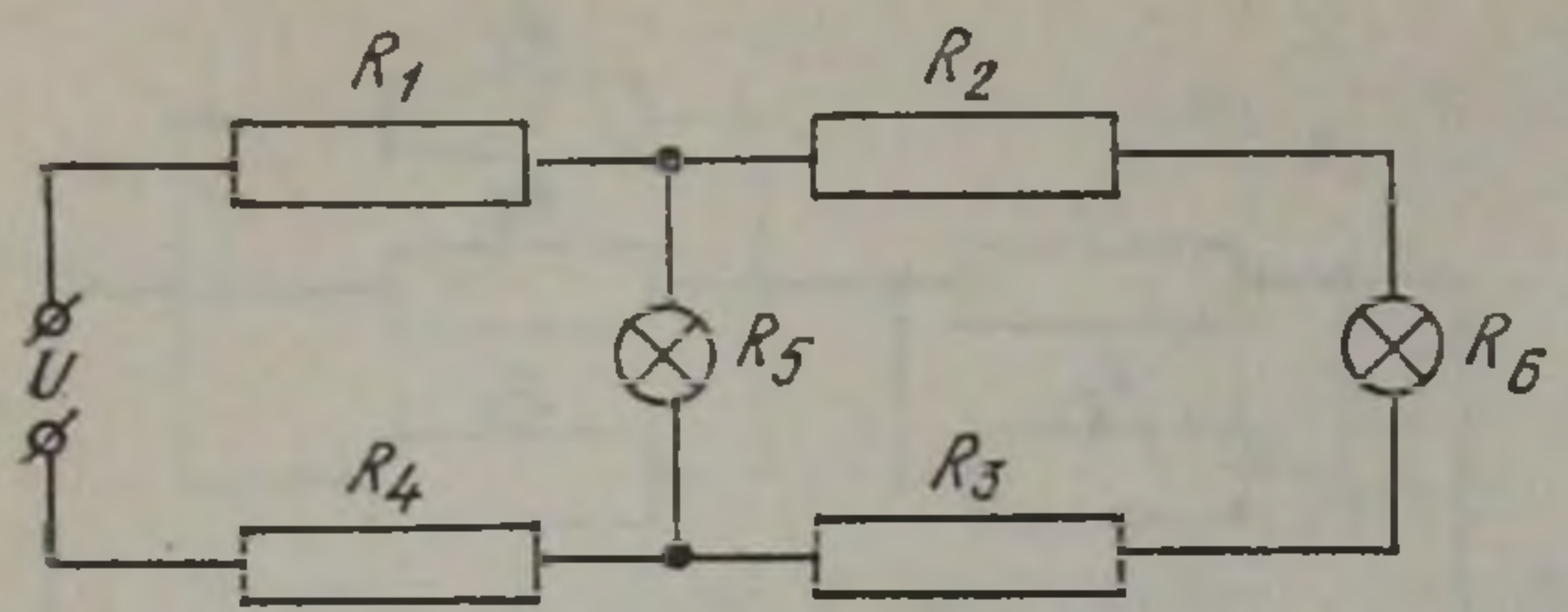


Рис. 3.23

3.79. Амперметр сопротивлением 3 Ом имеет предел измерения силы тока до 25 мА. Какой длины надо взять манганиновую проволоку диаметром 1 мм для изготовления шунта к амперметру, чтобы расширить пределы его измерения до 2,5 А?

3.80. Миллиамперметр со шкалой от 0 до 15 мА имеет сопротивление 5 Ом. Как должен быть включен прибор в сочетании с сопротивлением (и каким) для измерения: а) сил токов от 0 до 0,15 А; б) напряжения от 0 до 150 В? Определить цену деления прибора в обоих случаях, если шкала имеет 100 делений.

3.6. Закон Ома для замкнутой цепи. Разветвленные электрические цепи

Основные законы и формулы

Участок цепи называется *неоднородным*, если на нем, кроме кулоновских, действуют сторонние силы. Закон Ома для неоднородного участка цепи выражается формулой

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + E}{R}, \qquad (3.38)$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2) + E$ — напряжение на участке цепи; $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов начала и конца участка цепи; E — алгебраическая сумма ЭДС источников, находящихся на данном участке цепи; R — сопротивление цепи.

В случае последовательного соединения источников тока их общая ЭДС и общее внутреннее сопротивление определяются формулами:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i; \qquad (3.39)$$

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

Для параллельного соединения источников тока справедливы следующие равенства:

$$\frac{E}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{r_i}; \qquad \frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i}.$$

Сила тока в замкнутой цепи прямо пропорциональна ЭДС источника тока и обратно пропорциональна полному сопротивлению цепи:

$$I = \frac{E}{R + r},$$

где r — внутреннее сопротивление источника тока.

Электрические цепи с несколькими контурами, состоящими из разных ветвей с произвольным размещением потребителей и источников тока, называются *сложными*. Для расчета таких цепей удобно пользоваться правилами Кирхгофа:

1) алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в любом узле, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0;$$

2) для любого замкнутого контура алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков цепи равна алгебраической сумме всех ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i R_i = \sum_{i=1}^{n} E_i.$$

Если на участке цепи имеются конденсатор и источники ЭДС, соединенные последовательно, то заряд каждого конденсатора

$$q = C(E + \varphi_1 - \varphi_2),$$

где C — общая емкость конденсаторов.

Для любого замкнутого контура, включающего конденсаторы и источники тока, алгебраическая сумма напряжений на всех конденсаторах и источниках тока равна нулю.

Решение задач

Задачи по этой теме целесообразно разделить на две основные группы: задачи на применение закона Ома для замкнутой электрической цепи; задачи на расчет разветвленных электрических цепей.

1. В основе решения задач первой группы лежит соотношение (3.38). При этом если участок цепи не содержит сторонних сил ($E=0$), то формула (3.38) выражает закон Ома для однородного участка цепи. При разомкнутой цепи ($I=0$) ЭДС источника численно равна разности потенциалов на полюсах. Наконец, если $\varphi_1 = \varphi_2$ (концы участка соединены между собой), то формула (3.38) выражает закон Ома для замкнутой цепи.

Пример 1. Внутреннее сопротивление r источника тока в n раз меньше внешнего сопротивления R, которым замкнут источник с ЭДС E. Определить, во сколько раз напряжение U на зажимах источника отличается от ЭДС.

Решение. Поскольку напряжение на зажимах источника меньше ЭДС на величину падения напряжения во внутреннем участке цепи, то $U=E-Ir$, или с учетом закона Ома для замкнутой цепи

$$U = E - \frac{Er}{R+r} = E\frac{R}{R+r} = \frac{E}{1+\frac{r}{R}}. \qquad (3.40)$$

По условию задачи, $\frac{R}{r} = n$ или $\frac{r}{R} = \frac{1}{n}$. Тогда уравнение (3.40) можно привести к виду

$$U = \frac{E}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} E,$$

откуда $\frac{U}{E} = \frac{n}{n+1}$.

Из уравнения (3.40) видно, что если $R \to \infty$, то отношение $\frac{r}{R} \ll 1$ и $U \to E$.

Пример 2. Определить напряжение между точками A и B в схемах, приведенных на рис. 3.24, если $E_1 = 2$ В, $E_2 = 1{,}5$ В, $r_1 = 0{,}6$ Ом, $r_2 = 0{,}4$ Ом. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

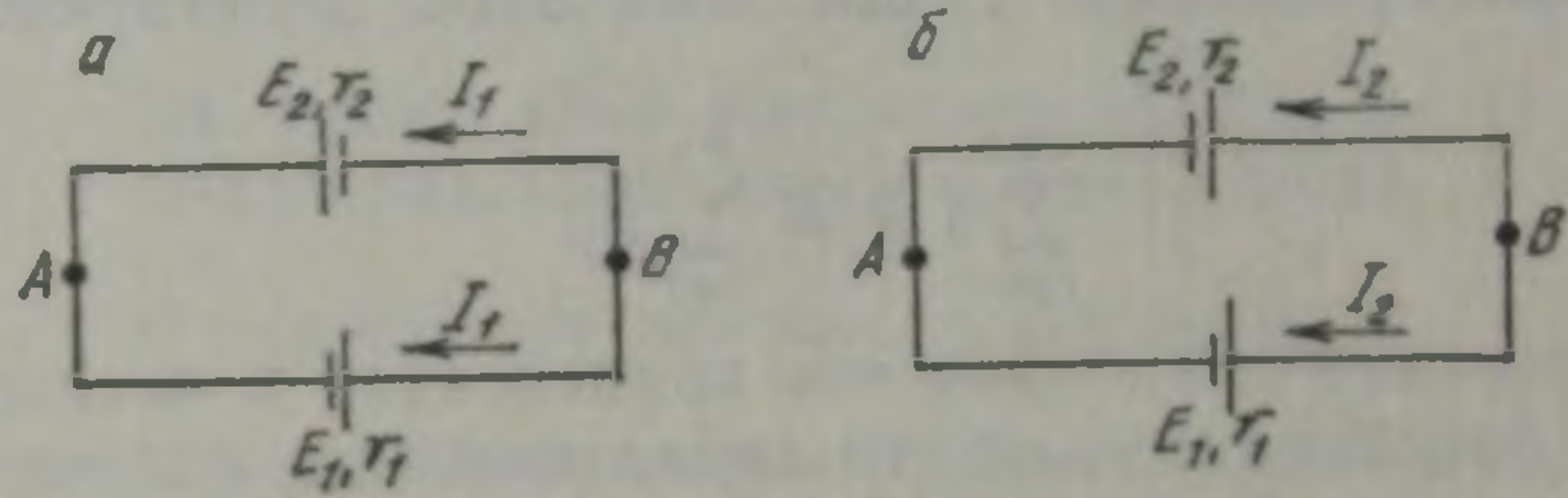


Рис. 3.24

Решение. В схеме, приведенной на рис. 3.24, *а*, сила тока

$$I_1 = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2} = 3{,}5 \text{ А}.$$

Ток, текущий по замкнутой цепи в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки, и ЭДС, создающую этот ток, условимся считать положительными, в противном случае — отрицательными. Тогда ЭДС и токи положительны. Напряжение между точками A и B можно считать равным напряжению на зажимах первого источника (E_1), тогда второй источник является внешней цепью. Следовательно, $U_1 = E_1 - I_1 r_1 = -0{,}1$ В.

Напряжение на зажимах второго источника $U_2' = E_2 - I_1 r_2 = 0{,}1$ В. Как видим, $U_1 = -U_1'$ или $U_1' = E_1 - I_1 r_1 = -E_2 + I_1 r_2$.

В случае, приведенном на рис. 3.24, *б*, сила тока

$$I_2 = \frac{E_1 - E_2}{r_1 + r_2} = 0{,}5 \text{ А}.$$

При выбранном направлении обхода E_1 и ток I_2 положительны, а E_2 отрицательна. Напряжение между точками A и B (как напряжение на зажимах первого источника) $U_2 = E_1 - I_2 r_1 = 1{,}7$ В. Напряжение на зажимах второго источника $U_2' = -E_2 - I_2 r_2 = -1{,}7$ В. Здесь также $U_2 = -U_2'$ или $U_2 = E_1 - I_2 r_1 = E_2 + I_2 r_2$. Из анализа решения этой задачи следует:

1) если во внешней цепи имеются источники тока (внешняя цепь неоднородна), то напряжение на зажимах источника (U_1, U_2) не равно падению напряжения во внешней части цепи ($I_1 r_2$, $I_2 r_1$);

2) напряжение на зажимах источника равно разности ЭДС этого источника и падения напряжения внутри него, если ЭДС и ток, согласно выбранному направлению обхода, имеют одинаковые знаки, и равно сумме, если ЭДС и ток противоположны по знакам.

2. При решении задач на применение правил Кирхгофа целесообразно придерживаться такой последовательности. Выбирают (произвольно) направления токов во всех участках разветвленной

цепи, отметив их на чертеже стрелками. При составлении уравнения (3.38) надо соблюдать правило знаков: токи, притекающие в узел, считать положительными, вытекающие из узла — отрицательными. Следует иметь в виду, что число независимых уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа, всегда на единицу меньше числа узлов, имеющихся в данной цепи. Выбирают направление обхода контуров цепи (в направлении движения часовой стрелки или противоположном). При составлении уравнения (3.39) надо соблюдать правило знаков: токи, совпадающие с направлением обхода, записывать со знаком плюс, противоположно направленные — со знаком минус. Положительными считают те ЭДС, которые повышают потенциал в направлении обхода, т. е. двигаясь по контуру, сначала встречают отрицательный полюс источника, затем положительный. Чтобы все уравнения, составленные на основании второго правила Кирхгофа, были независимыми, необходимо каждый раз рассматривать контуры, содержащие хотя бы одну новую ветвь, не входящую в уже использованные контуры. Если в ответе значение силы тока будет иметь знак минус, то это укажет на ошибочность первоначального выбора направления данного тока. Если же в задаче определяется сопротивление какой-либо ветви цепи и в результате решения системы уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, получится отрицательное значение сопротивления, это также свидетельствует о неправильном выборе направления тока на данном проводнике. Однако в этом случае неверным окажется и численное значение сопротивления. Тогда необходимо, изменив на чертеже направление тока в проводнике, составить новую систему уравнений и, решив ее, определить искомое сопротивление.

Пример 3. Батарея из двух элементов с ЭДС $E_1=8$ В, $r_1=1$ Ом и $E_2=4$ В, $r_2=0{,}5$ Ом и сопротивление $R=50$ Ом соединены, как показано на рис. 3.25. Определить силу тока в реостате.

Решение. Выберем направление обхода контуров по часовой стрелке и применим правила Кирхгофа для каждого из контуров.

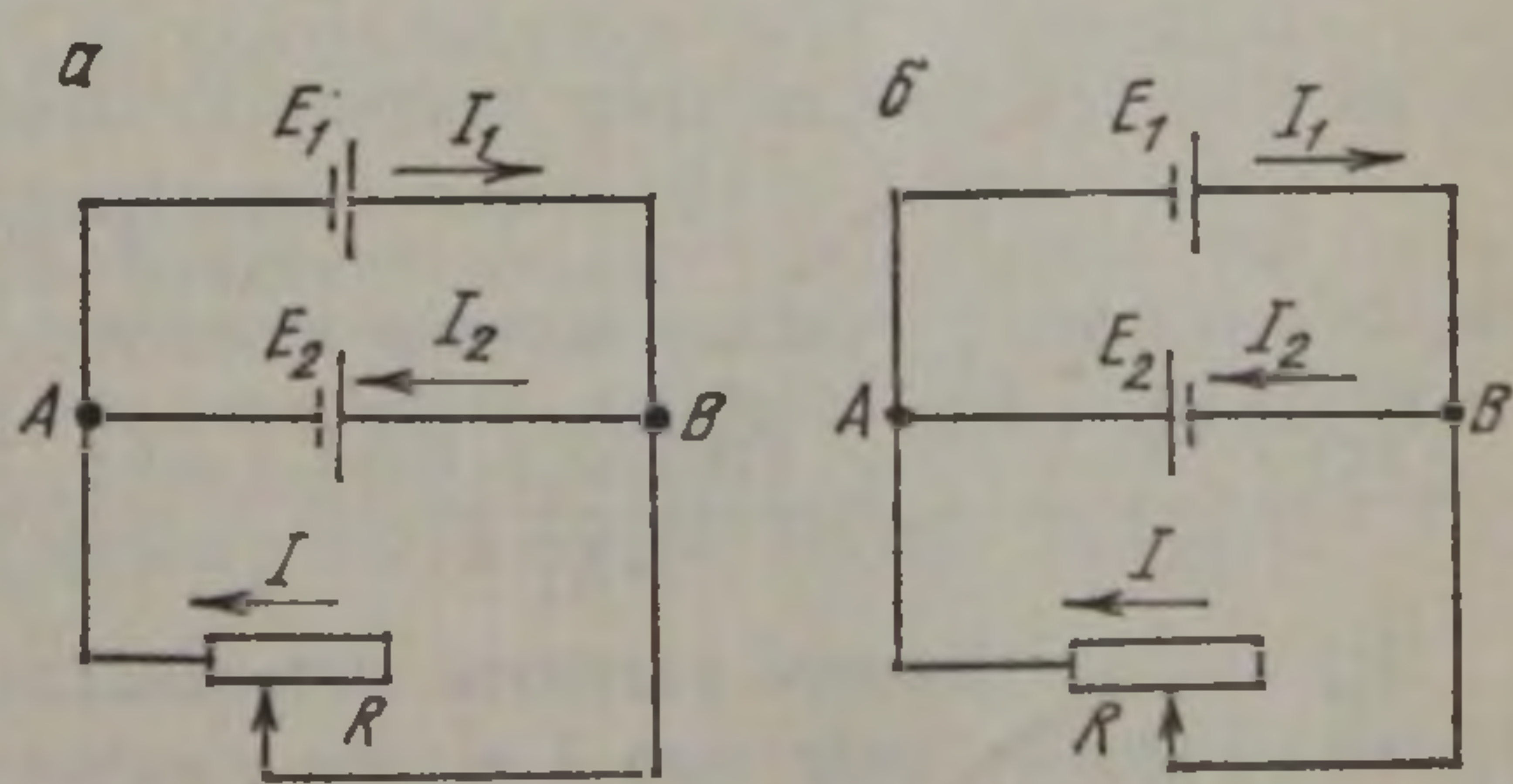


Рис. 3.25

Если источники соединены так, как показано на рис. 3.25, *а*, то для узла A $I_2+I=I_1$. Для контура E_1BRAE_1 $I_1r_1+IR=E_1$, для контура E_2BRAE_2 $-I_2r_2+IR=E_2$. Подставив значения I_1 и I_2, получим

$$\frac{-E_2+IR}{r_2}+I=\frac{E_1-IR}{r_1}$$

или

$$-E_2r_1+IRr_1+Ir_1r_2=E_1r_2-IRr_2,$$

откуда

$$I=\frac{E_1r_2+E_2r_1}{Rr_1+r_1r_2+Rr_2}=1\ \text{А}.$$

Если выбрать направление тока, противоположное тому, которое указано на рис. 3.25, *а*, то, согласно правилам узлов и контуров, будем иметь:

$$I_2 = I_1 + I;\ E_1 = I_1 r_1 - IR;\ E_2 = -I_2 r_2 - IR;$$
$$-E_2 r_1 - IRr_1 = E_1 r_2 + IRr_2 + Ir_1 r_2;$$
$$I = \frac{-E_2 r_1 - E_1 r_2}{Rr_1 + Rr_2 + r_1 r_2} = -1\ \text{А}.$$

Знак минус в ответе показывает, что действительное направление противоположно выбранному.

Если источники соединены так, как показано на рис. 3.25, *б*, то для узла A $I_2 + I = I_1$. Для контура E_1BRAE_1 $I_1 r_1 + IR = E_1$, для контура E_2BRAE_2 $-I_2 r_2 + IR = -E_2$. Совместное решение уравнений дает

$$I = \frac{-E_2 r_1 + E_1 r_2}{Rr_1 + r_1 r_2 + Rr_2} = 0.$$

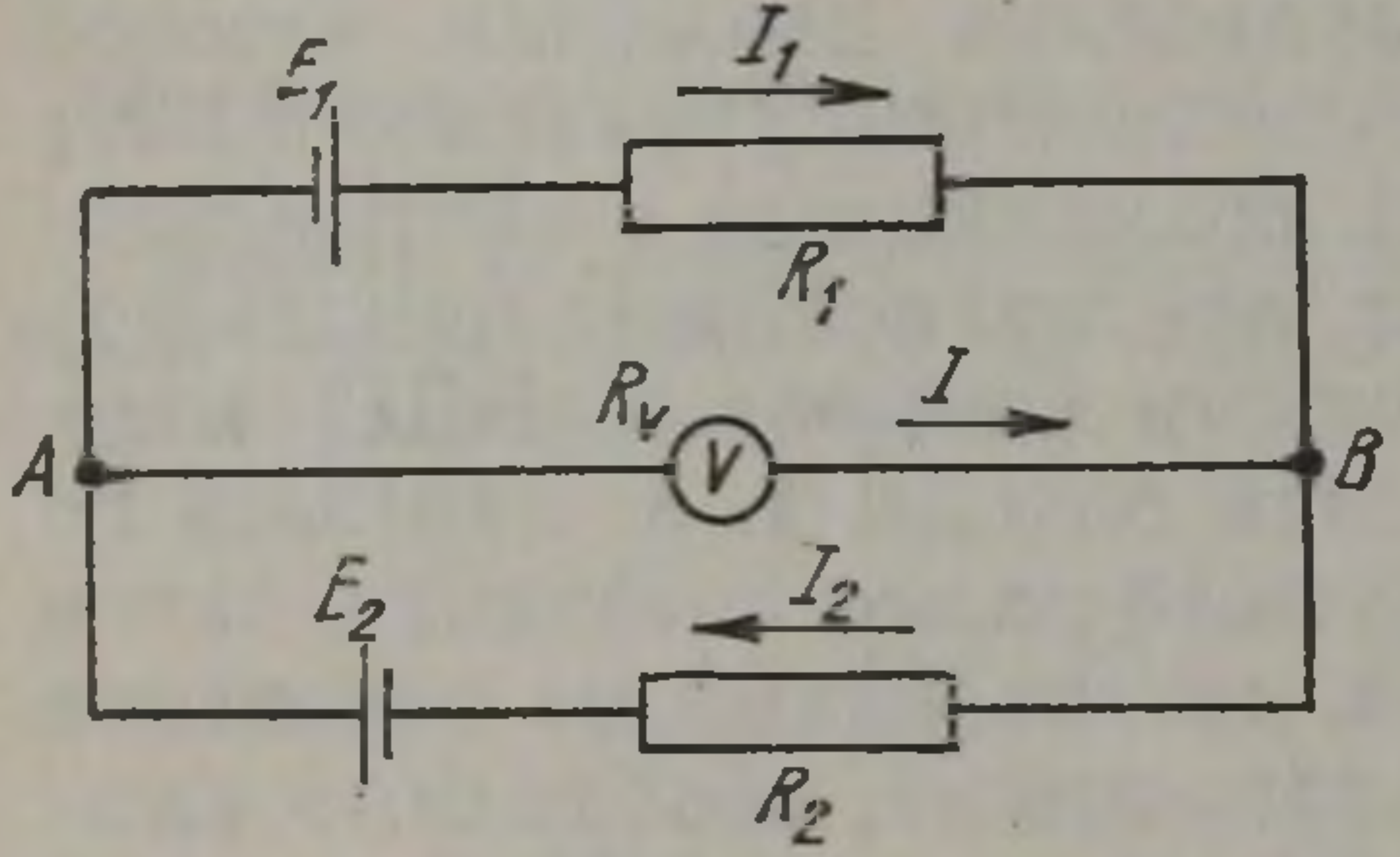


Рис. 3.26

Пример 4. В цепи, показанной на рис. 3.26, $E_1 = 1{,}5$ В, $E_2 = 1{,}6$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 2$ кОм. Определить показания вольтметра, если его сопротивление $R_V = 2$ кОм. Сопротивлением источников тока и соединительных проводов пренебречь.

Решение. В данном случае R_V одного порядка с R_1 и R_2, поэтому пренебречь током через R_V нельзя. Таким образом, имеется разветвленная цепь, по трем участкам которой текут токи. Задачу можно решить двумя способами: применив первое правило Кирхгофа и закон Ома для неоднородной цепи или используя правила Кирхгофа.

1-й способ. Применим закон Ома для участка неоднородной цепи поочередно к трем участкам: AR_1B, AR_2B, AR_VB.

Тогда, учитывая правило знаков, получим:

$$I_1 = \frac{\varphi_A - \varphi_B + E_1}{R_1}; \qquad -I_2 = \frac{\varphi_A - \varphi_B - E_2}{R_2}; \qquad I = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_V}$$

Кроме того, согласно первому правилу Кирхгофа,

$$I_2 - I_1 - I = 0.$$

Подставив в это уравнение значения силы тока, получим:

$$\frac{\varphi_A - \varphi_B - E_2}{R_2} + \frac{\varphi_A - \varphi_B + E_1}{R_1} + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R_V} = 0; \quad \varphi_A - \varphi_B = -0{,}35\ \text{В}.$$

2-й способ. Искомая разность потенциалов по закону Ома $\varphi_A - \varphi_B = IR_V$. Чтобы определить силу тока I в цепи вольтметра, воспользуемся правилами Кирхгофа. Обозначим направления всех токов (для тока I делаем это предположительно). Тогда

$$I_2 - I_1 - I = 0. \tag{3.41}$$

Для составления уравнений для контуров выберем, например, направления обхода, совпадающие с направлением движения часовой стрелки; получим $I_1 R_1 - IR_V = E_1$, $IR_V + I_2 R_2 = E_2$. Решив систему трех уравнений с тремя неизвестными, найдем $I = \dfrac{E_2 R_1 - E_1 R_2}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_V}$. Подставив это значение I в формулу (3.41) и произведя вычисления, получим

$$\varphi_A - \varphi_B = \frac{(E_2 R_1 - E_1 R_2) R_V}{R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_V} = -0{,}35\ \text{В}.$$

Минус означает, что $\varphi_B > \varphi_A$ и в действительности ток в цепи вольтметра течет от точки B к точке A.

Пример 5. Два элемента с ЭДС $E_1=1{,}6$ В, $E_2=1{,}3$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=1$ Ом, $r_2=0{,}5$ Ом соединены по схеме, показанной на рис. 3.27. Определить силу тока во всех ветвях. Сопротивление соединительных проводов не учитывать.

Решение. *1-й способ.* Пользуясь правилами Кирхгофа и учитывая условно выбранные направления токов, составим уравнения для различных участков цепи. Для узла A $I_1+I_2-I_3=0$, для контура $KCDM$ $E_1-E_2=I_1r_1-I_2r_2$, для контура $KABM$ $E_1=I_1r_1+I_3R$. Исключив из последнего уравнения значение I_3 и решив систему уравнений относительно I_1 и I_2, получим:

$$I_1=\frac{E_1r_2+(E_1-E_2)R}{r_1R+r_1r_2+Rr_2};\qquad I_2=\frac{I_1r_1+E_2-E_1}{r^2};\ I_3=I_1+I_2.$$

Подставив численные значения, получим $I_1=0{,}7$ А, $I_2=0{,}8$ А, $I_3=1{,}5$ А.

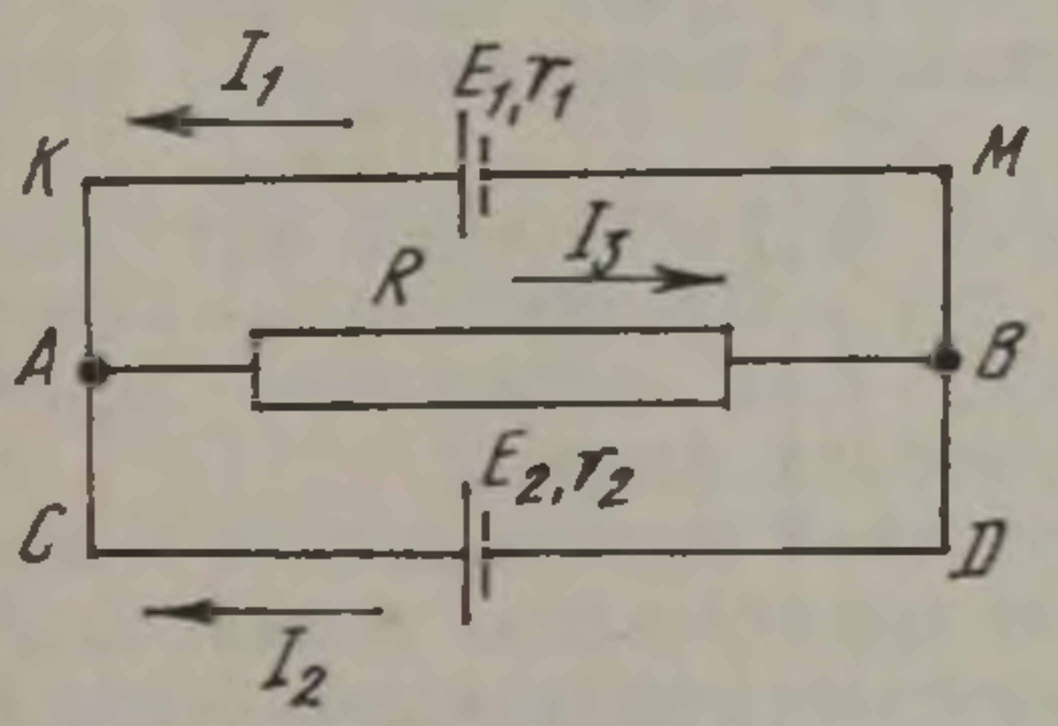


Рис. 3.27

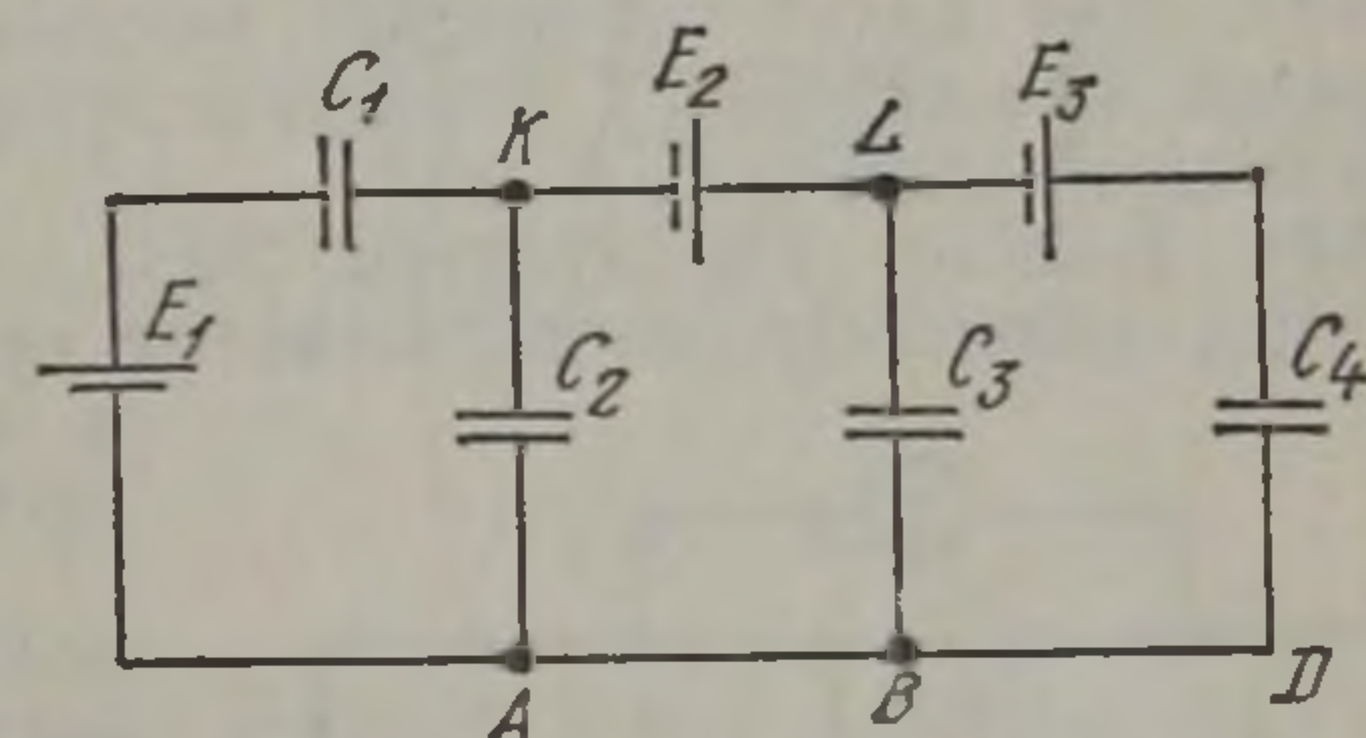


Рис. 3.28

2-й способ. Воспользуемся методом узловых потенциалов. Обозначим потенциал узла A через φ_A, а потенциал узла B примем равным нулю. Тогда $\varphi_A-\varphi_B = U_{AB}$. По закону Ома для участка цепи с ЭДС и без ЭДС:

$$I_1=\frac{E_1-U_{AB}}{r_1};\qquad I_2=\frac{E_2-U_{AB}}{r_2};\qquad I_3=\frac{U_{AB}}{R}.$$

Отсюда найдем $U_{AB}=0{,}9$ В. Зная U_{AB}, определим силу тока в участках: $I_1 = 0{,}7$ А, $I_2=0{,}8$ А, $I_3=1{,}5$ А.

При анализе решения этой задачи важно подчеркнуть следующее:

1) при параллельном соединении источники отдают одинаковые токи, если они имеют одинаковые ЭДС и внутренние сопротивления;

2) при равных ЭДС, но различных внутренних сопротивлениях наибольший ток отдает источник с меньшим внутренним сопротивлением;

3) если ЭДС источника равна узловому напряжению, то ток источника

$$I=\frac{E-U}{r}=0;$$

4) если ЭДС источника окажется ниже узлового напряжения, то его ток будет направлен навстречу ЭДС. В этом случае источник ЭДС работает в режиме потребителя энергии.

Пример 6. Определить заряды конденсаторов в цепи, изображенной на рис. 3.28, если емкость каждого конденсатора C.

Решение. Задачу решим, пользуясь методом узловых потенциалов. Пусть $\varphi_A=\varphi_B=\varphi_D=0$, $\varphi_K=\varphi$. Тогда $\varphi_L=\varphi_K+E_2=\varphi+E_2$. Далее получим:

$$q_1=C\,[E_1-(\varphi_K-\varphi_A)]=C\,(E_1-\varphi);\ q_2=C\,(\varphi_K-\varphi_A)=C\varphi;$$

$$q_3=C\,(\varphi_L-\varphi_B)=C\,(\varphi+E_2);\ q_4=C\,(\varphi_L-\varphi_B+E_3)=C\,(\varphi+E_2+E_3).$$

Так как точки A, B, D можно объединить в один узел, к которому примыкает левая обкладка конденсатора C_1 и нижние обкладки конденсаторов C_2, C_3, C_4, то $q_1 =$

$= q_2 + q_3 + q_4$. Следовательно, $C(E_1 - \varphi) = C\varphi + C(\varphi + E_2) + C(\varphi + E_2 + E_3)$ откуда

$$\varphi = \frac{E_1 - 2E_2 - E_3}{4}.$$

Подставив эти выражения в равенства, определяющие заряды, получим:

$$q_1 = C\frac{3E_1 + 2E_2 + E_3}{4}; \qquad q_2 = C\frac{E_1 - 2E_2 - E_3}{4};$$

$$q_3 = C\frac{E_1 + 2E_2 - E_3}{4}; \qquad q_4 = C\frac{E_1 + 2E_2 + 3E_3}{4}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.81. Как будут изменяться показания вольтметра (рис. 3.29) при перемещении движка реостата? Начертить график зависимости напряжения во внешней части цепи от силы тока в ней.

3.82. Имеется аккумулятор, ЭДС и внутреннее сопротивление которого неизвестны, амперметр, соединительные провода и два сопротивления — известное и неизвестное. Как определить величину неизвестного сопротивления?

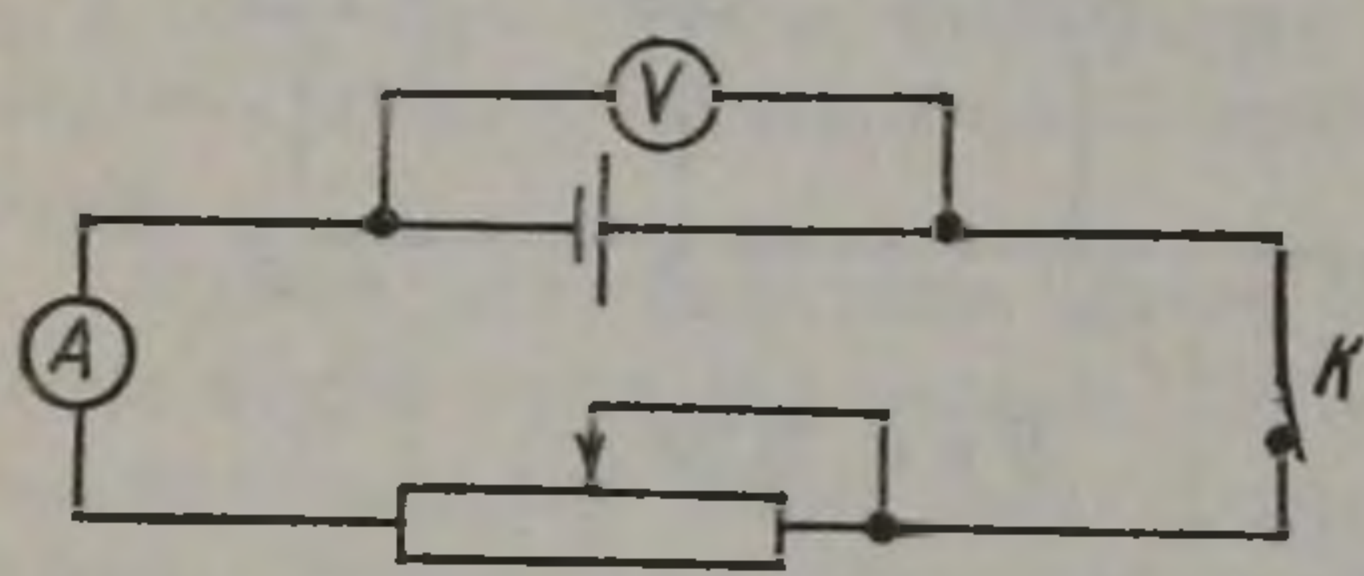


Рис. 3.29

3.83. Как, имея источник тока с известной ЭДС, два конденсатора одинаковой емкости и микроамперметр, определить ЭДС неизвестного источника тока?

3.84. Источник тока с ЭДС 2,1 В находится на расстоянии 20 м от потребителя электрической энергии. Определить внутреннее сопротивление и напряжение на зажимах источника, если при сопротивлении потребителя 2 Ом сила тока в цепи равна 0,7 А. Проводка сделана из медного провода диаметром 1,2 мм.

3.85. Определить ЭДС источника тока, если известно, что при увеличении сопротивления потребителя энергии, подключенного к источнику, в n раз напряжение на потребителе увеличивается от U_1 до U_2.

3.86. Если в цепь гальванического элемента включить сопротивление 4 Ом, сила тока в цепи равна 0,4 А; при включении сопротивления 7 Ом сила тока равна 0,14 А. Определить силу тока в случае, если элемент замкнуть накоротко.

3.87. Напряжение на концах двух параллельно соединенных сопротивлений по 4 Ом каждый равно 6 В. Если одно из сопротивлений выключить, вольтметр показывает 8 В. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника.

3.88. Для определения сопротивления гальванометра его вводят в цепь последовательно с сопротивлением 350 Ом и наблюдают за отклонением стрелки. Затем параллельно с гальванометром включают шунт с сопротивлением 10 Ом. Определить сопротивление гальванометра. Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

3.89. Два источника тока соединены, как показано на рис. 3.30. Каковы будут показания вольтметров при замыкании ключа?

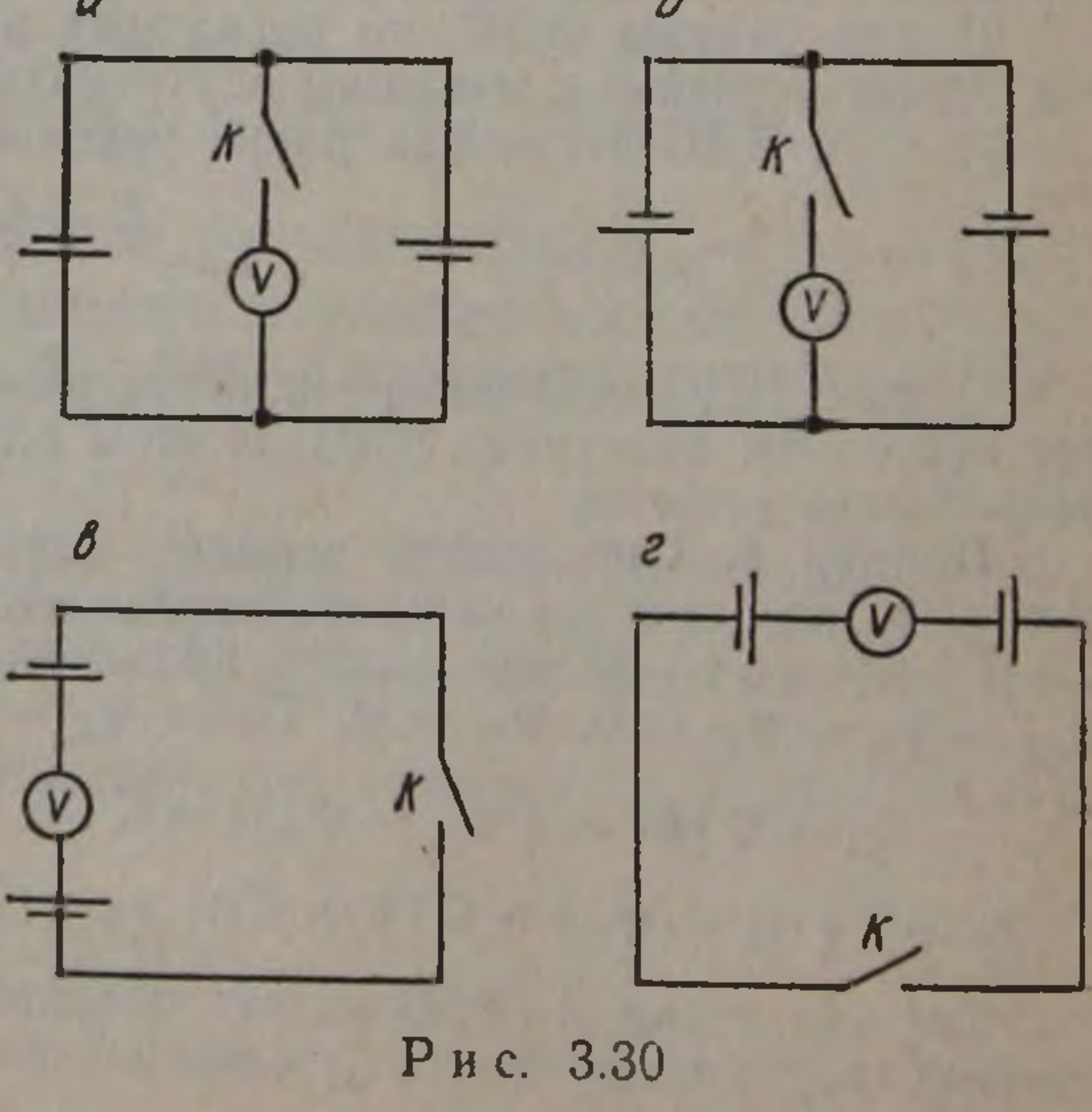


Рис. 3.30

3.90. Начертить график зависимости силы тока в цепи от количества гальванических элементов, соединенных: а) последовательно; б) параллельно.

3.91. Батарея из двенадцати элементов с ЭДС 44,4 В заряжается от источника постоянного тока. При этом сила тока в начале зарядки равна 6 А, а в конце 4 А; ЭДС в конце зарядки 48 В. Определить внутреннее сопротивление батареи и одного элемента.

3.92. Каковы будут показания приборов при соединении источников так, как показано на рис. 3.31, если все источники тока: а) одинаковы; б) различны? Рассмотреть также случай, если источники тока обращены друг к другу одноименными полюсами.

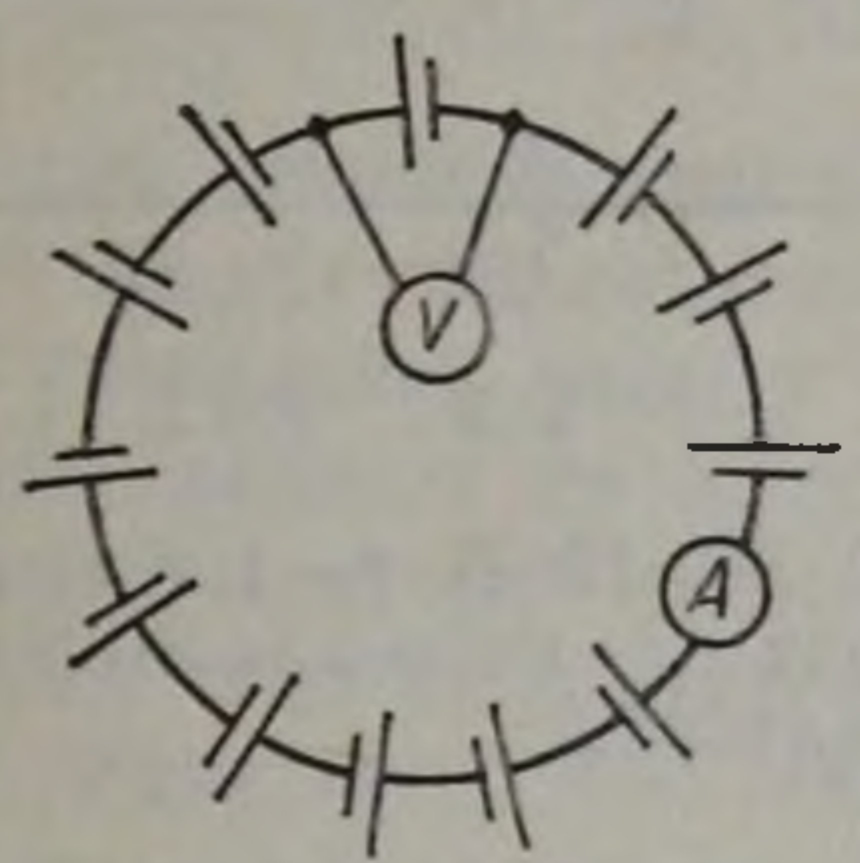


Рис. 3.31

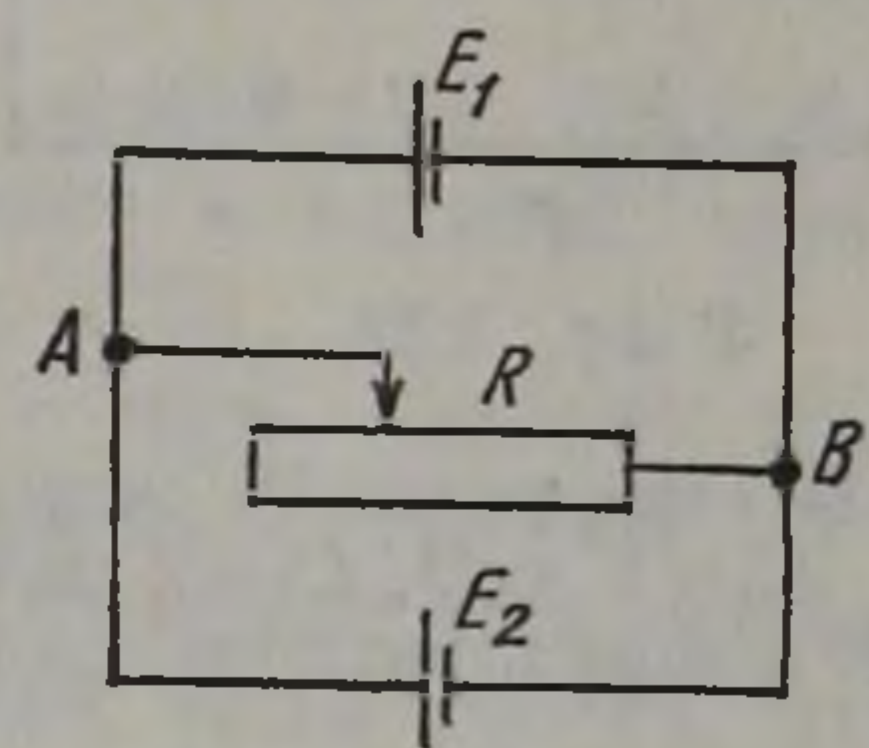


Рис. 3.32

3.93. Два источника тока с одинаковыми ЭДС по 2 В и внутренними сопротивлениями 0,4 и 0,2 Ом соединены последовательно. Определить, при каком внешнем сопротивлении напряжение на зажимах одного из источников станет равным нулю.

3.94. Два элемента с ЭДС $E_1=2$ В и $E_2=1$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=r_2=0{,}5$ Ом соединены, как показано на рис. 3.32. Определить силу тока в ветвях, если $R=0{,}5$ Ом. При каком значении сопротивления R ток через элемент с ЭДС E_2: а) не пойдет; б) будет направлен против ЭДС элемента?

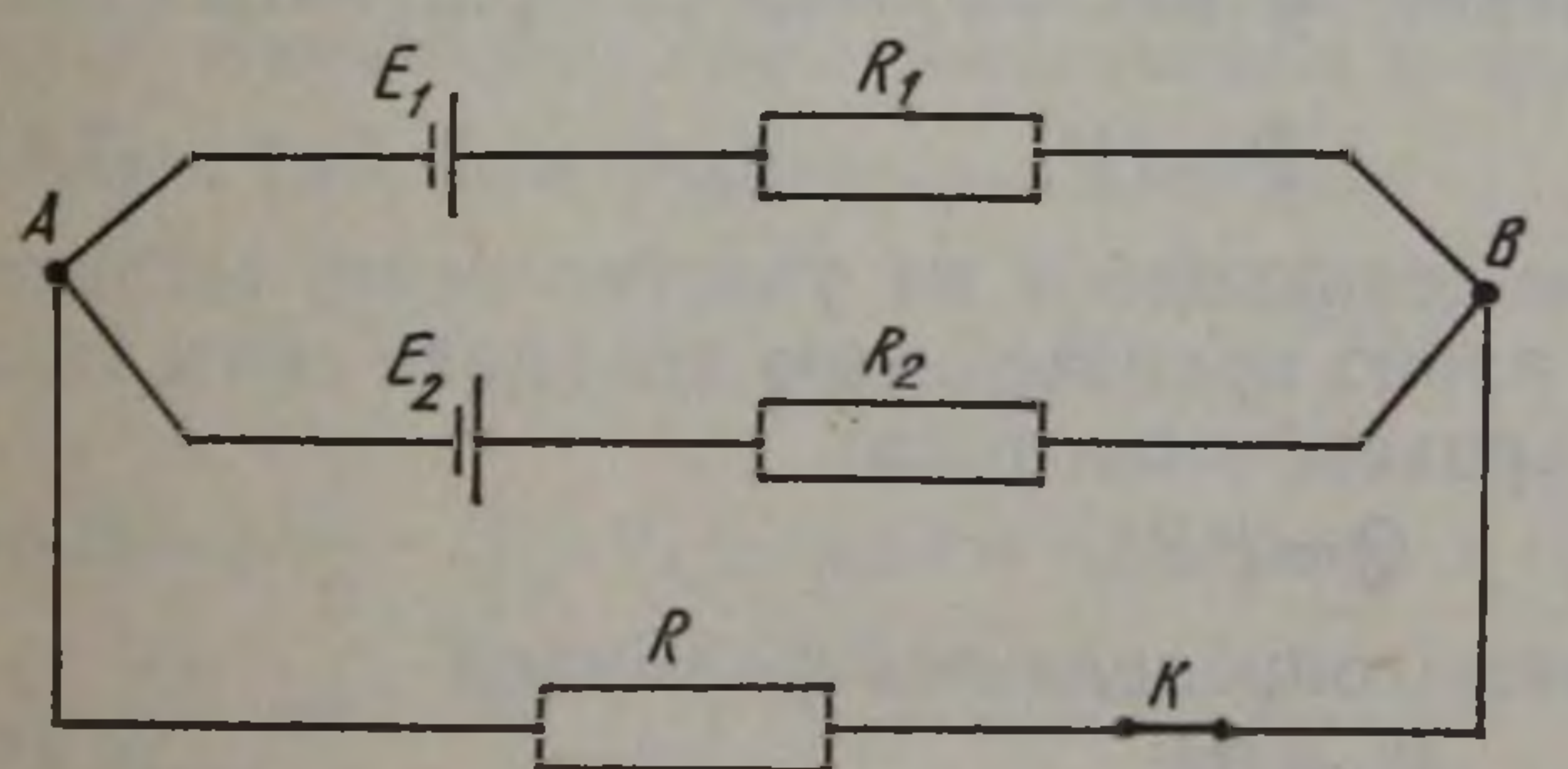


Рис. 3.33

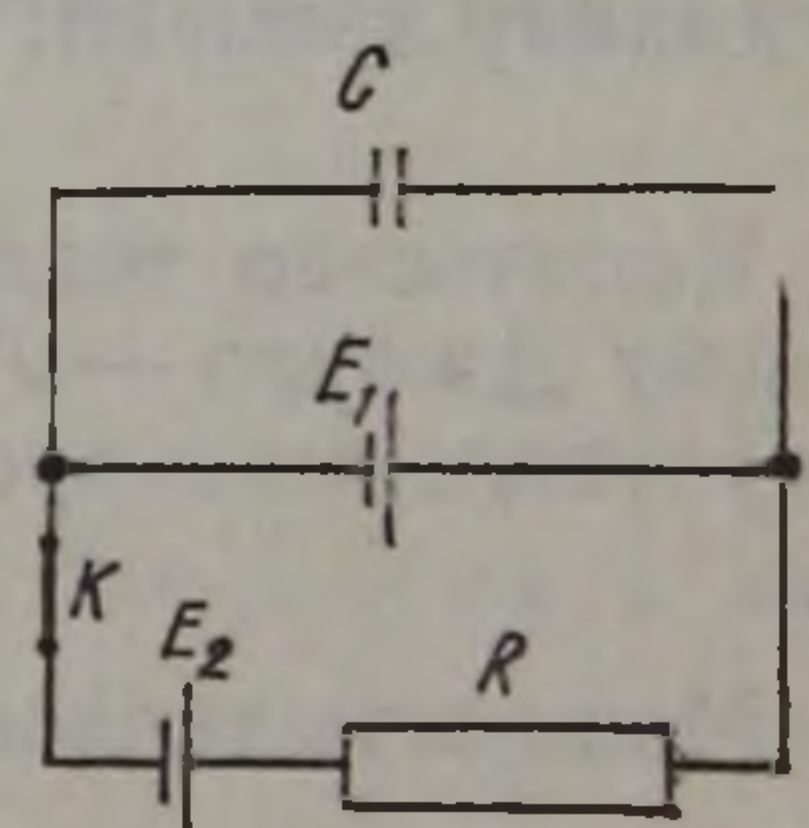


Рис. 3.34

3.95. Определить ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока, если при последовательном соединении двух таких источников на внешнее сопротивление 3 Ом сила тока в цепи 0,5 А, а при параллельном 0,4 А.

3.96. В каком случае при увеличении сопротивления R_1 в цепи (рис. 3.33) сила тока увеличивается? Может ли увеличиться сила тока в цепи, если увеличить оба сопротивления?

3.97. Имеются два источника тока с равными ЭДС по 1,5 В и внутренними сопротивлениями 0,2 Ом каждый. Сопротивление внешней цепи составляет в одном случае 0,2 Ом, в другом 20 Ом. Как нужно соединить источники в первом и во втором случаях, чтобы получить наибольшую силу тока в цепи?

3.98. Определить заряд конденсатора емкостью $C=1$ мкФ в цепи (рис. 3.34), если $E_1=1{,}5$ В, $E_2=2$ В, $r_1=0{,}6$ Ом, $r_2=0{,}4$ Ом, $R=1$ Ом.

3.99. Определить заряд на конденсаторе C_2 (рис. 3.35), если $C_1=C_2=C_3=C=3$ мкФ, ЭДС источника $E=32$ В, его внутреннее сопротивление $r=1$ Ом, $R=5$ Ом.

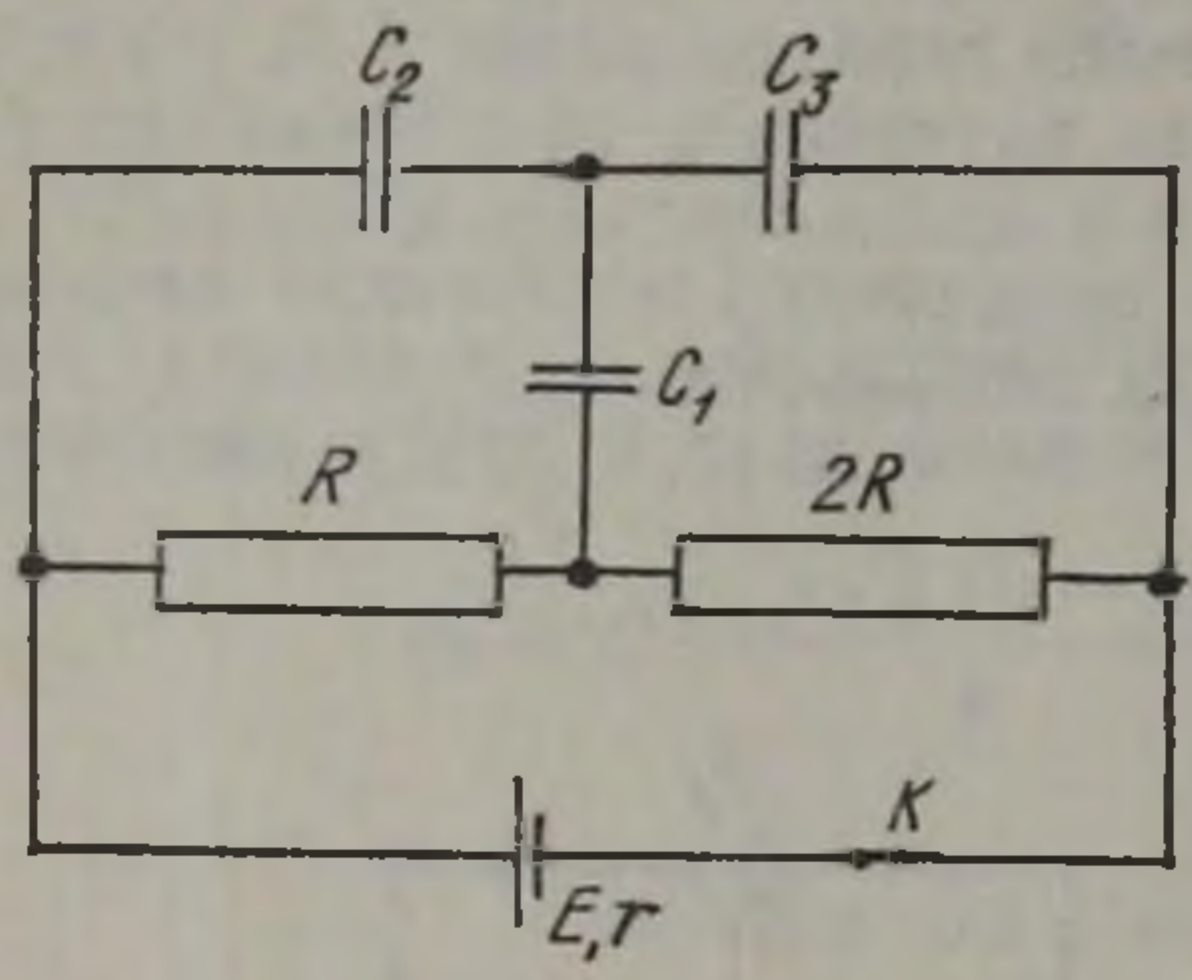


Рис. 3.35

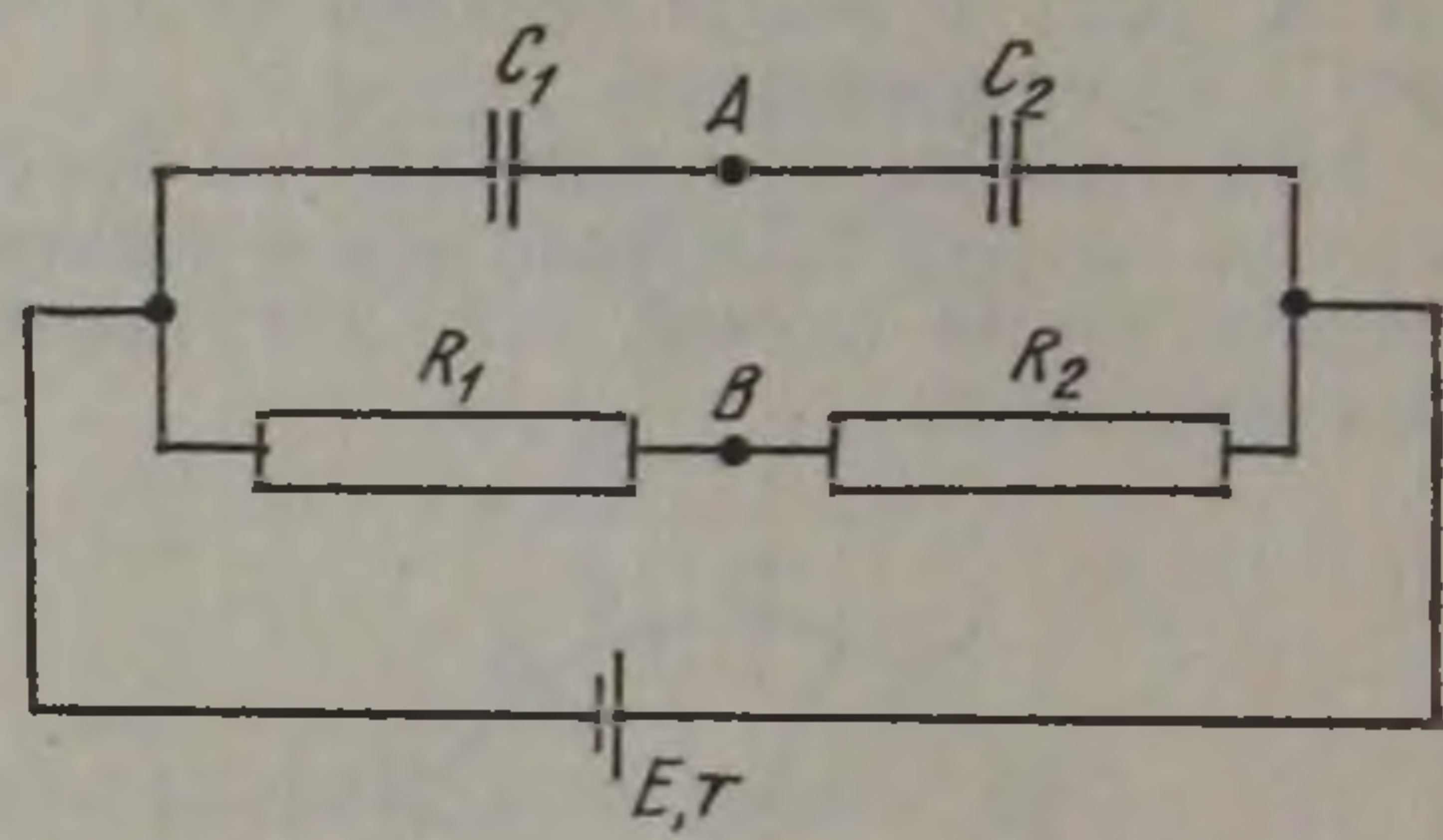


Рис. 3.36

3.100. В электрической цепи (рис. 3.36) ЭДС $E=12$ В, $r=1$ Ом, $R_1=3$ Ом, $R_2=6$ Ом, $C_1=1$ мкФ, $C_2=2$ мкФ. Определить разность потенциалов между точками A и B и заряд, накопленный каждым конденсатором.

3.7. Работа и мощность электрического тока. Тепловое действие тока

Основные законы и формулы

Работа, совершаемая электрическим током по перемещению заряда по участку цепи, определяется формулой

$$A=IUt, \tag{3.42}$$

где U — напряжение на концах этого участка.

Мощность тока численно равна работе, совершаемой током в единицу времени:

$$P=IU. \tag{3.43}$$

Количество теплоты, выделяющееся на участке цепи, согласно закону Джоуля — Ленца, равно произведению квадрата силы тока, сопротивления и времени прохождения тока:

$$Q=I^2Rt. \tag{3.44}$$

Мощность тепловых потерь определяется формулой

$$P_т=I^2R. \tag{3.45}$$

КПД источника тока равен отношению работы перемещения заряда по внешнему участку цепи к работе перемещения того же заряда по всей цепи:

$$\eta=\frac{U}{E}. \tag{3.46}$$

Решение задач

Задачи по этой теме удобно сгруппировать следующим образом: задачи, в которых вычисляют или учитывают работу и мощность электрического тока; задачи на применение закона Джоуля — Ленца; задачи, в которых исследуют режим работы источников тока.

1. При решении задач первой группы основными расчетными являются формулы (3.42), (3.43), (3.45). Эти соотношения будут вспомогательными, если по заданной мощности или работе тока требуется определить силу тока, напряжение или сопротивление.

Следует помнить, что для обычного проводника, для которого справедлив закон Ома $U = IR$, формулы (3.43) и (3.45) эквивалентны, и, следовательно, вся работа электрического тока переходит в теплоту. При этом для мощности можно пользоваться также формулой $P_т = \frac{U^2}{R}$. Если на участке цепи имеется источник ЭДС, выражения для полной мощности (3.43) и мощности тепловых потерь (3.45) не будут эквивалентными, и поэтому в балансе энергий необходимо учитывать работу сторонних сил EIt.

Решая задачи на расчет тепловых потерь, следует разграничивать передаваемое напряжение U (разность потенциалов между проводами линии электропередачи) и падение напряжения в линии IR. Различие этих понятий очевидно, если учесть, что передаваемая по проводам мощность $P_п = IU$, а тепловые потери $P_т = I^2R$. Одну и ту же мощность можно передавать при токе меньшей силы, если увеличить напряжение в линии. При этом падение напряжения в линии и тепловые потери уменьшаются.

Пример 1. Сколько ламп накаливания мощностью 200 Вт каждая, рассчитанных на напряжение 127 В, можно установить в помещении, если напряжение на зажимах генератора постоянно и равно 133 В, а проводка от генератора до потребителя — алюминиевый провод общей длиной 150 м и сечением 15 мм²? Определить общую мощность тока у потребителя.

Решение. Количество ламп, которое можно включить в данную цепь, определим, разделив силу тока в магистральном проводе на силу тока в одной из ламп: $n = \frac{I}{I_1}$. Сила тока в магистральном проводе

$$I = \frac{U - U_1}{R},$$

где $R = \rho \frac{l}{S}$; $U - U_1$ — падение напряжения в проводах. Так как ток в лампе $I_1 = \frac{P_1}{U_1}$, то

$$n = \frac{I}{I_1} = \frac{(U - U_1) RU_1}{P_1} = \frac{(U - U_1) SU_1}{\rho l P_1} = 13.$$

Мощность тока у потребителя $P = P_1 n = 2{,}6$ кВт.

Пример 2. Определить работу электрического тока и количество теплоты, выделяемое за 1 с, в аккумуляторе с ЭДС $E = 12$ В: а) при его зарядке током $I_1 = 5$ А; разность потенциалов между полюсами аккумулятора $U_1 = 20$ В; б) при разрядке того же аккумулятора на внешнее сопротивление, если сила тока разрядки $I_2 = 1$ А.

Решение. При зарядке аккумулятора направление электрического тока противоположно направлению тока, создаваемого ЭДС, поэтому полная работа электрического тока $A_1 = I_1 U_1 t$ складывается из работы $EI_1 t$ против сторонних сил (заряда аккумулятора) и выделяемого количества теплоты Q_1: $A_1 = EI_1 t + Q_1$, откуда $Q_1 = A_1 - EI_1 t$.

При разрядке аккумулятора направление тока на интересующем участке совпадает по направлению с током, создаваемым ЭДС, поэтому работа электрического тока $A_2 = I_2U_2t = \frac{E[(I_1+I_2)-U_2I_1]I_2}{I_1}t$, а количество теплоты $Q_2 = I_2^2Rt = \frac{I_2^2(U_1-E)}{I_1}t$. Подставив численные значения, получим: $A_1 = 100$ Дж, $Q_1 = 40$ Дж, $A_2 = 10{,}4$ Дж, $Q_2 = 1{,}6$ Дж.

Пример 3. Электродвигатель питается от источника тока с ЭДС $E=24$ В. Определить мощность $P_м$ на валу двигателя, если по его обмотке течет ток силой 8 А, а при полном торможении якоря сила тока в цепи равна 16 А. Найти КПД электродвигателя.

Решение. Полная мощность электрического тока в данном случае складывается из механической и тепловой мощностей: $IE = P_м + P_т$, поэтому $P_м = IE - I^2R = I(E-IR)$.

Для определения $P_м$ найдем сопротивление электродвигателя. Это можно сделать, исходя из условия, что при полном торможении напряжение, приложенное к двигателю, равно произведению силы тока на сопротивление: $E = I_0R$; отсюда $R = \frac{E}{I_0}$. Подставив полученные значения в формулу для $P_м$, получим

$$P_м = T\left(E - I\frac{E}{I_0}\right) = EI\left(1 - \frac{I}{I_0}\right) = 96 \text{ Вт.}$$

КПД двигателя

$$\eta = \frac{P_м}{P} = \frac{EI - I^2R}{EI}\,0{,}5 = 50\ \%.$$

2. Задачи на тепловое действие тока решаются на основе закона Джоуля—Ленца. Существенным здесь является вопрос о кажущемся противоречии в записи закона Джоуля—Ленца: $Q = I^2Rt$ и $Q = \frac{U^2}{R}t$. На самом деле эти выражения одинаковы. Если величина является функцией нескольких переменных, то можно говорить о ее зависимости от одного аргумента, только приняв во внимание зависимость от остальных. При $I = \text{const}$ работа прямо пропорциональна сопротивлению, при $U = \text{const}$ — обратно пропорциональна сопротивлению, и установить это можно по любой из формул работы, если принять во внимание изменение остальных величин.

При решении задач следует иметь в виду, что если $I = \text{const}$ (последовательное соединение проводников), то применяют формулу (3.44), при $U = \text{const}$ — формулу $Q = \frac{U^2}{R}t$.

Пример 4. Обмотка электрического кипятильника имеет две секции. Если включена одна секция, вода закипает через $t_1 = 10$ мин, если другая — через $t_2 = 20$ мин. Определить, через сколько минут закипит вода, если обе секции включить: а) последовательно; б) параллельно. Напряжение на зажимах кипятильника и КПД установки в этих случаях считать неизменными.

Решение. Искомое время есть функция сопротивления цепи, так как при различных включениях секций кипятильника сопротивление цепи различно. Чтобы найти эту функцию, воспользуемся законом Джоуля — Ленца для теплового действия тока. Поскольку речь идет об участке цепи, не содержащем ЭДС, к которому применим закон Ома для участка цепи, запишем следующую формулу:

$$Q = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t. \tag{3.47}$$

Отсюда легко определит вид функции: $t = f(R)$.

Во всех случаях для нагревания воды требуется одно и то же количество теплоты, определяемое формулой $Q' = cm\Delta t$. В силу постоянства КПД установки одним и тем же будет также полное количество теплоты, выделенное током, т. е. $Q = \frac{Q'}{\eta}$. Учитывая также постоянство напряжения на зажимах цепи, из формулы (3.47) получим

$$R = \frac{U^2}{Q} t = kt, \tag{3.48}$$

где $\frac{U^2}{Q} = \text{const}$. Таким образом, зависимость времени от сопротивления является пропорциональной.

При последовательном соединении секций общее сопротивление $R_{\text{пос}} = R_1 + R_2$. Подставив сюда значения R, по формуле (3.48) получим $kt_{\text{пос}} = k(t_1 + t_2)$, откуда

$$t_{\text{пос}} = t_1 + t_2 = 30 \text{ мин}.$$

При параллельном соединении секций $R_{\text{пар}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Отсюда, применив соотношение (3.48), найдем

$$t_{\text{пар}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 7 \text{ мин}.$$

3. Цель решения задач третьей группы — раскрыть характер зависимости коэффициента полезного действия и величины полезной мощности источника тока от соотношения между сопротивлением внешней цепи и внутренним сопротивлением источника и тем самым обосновать наиболее выгодные режимы работы источников. Основными расчетными при этом являются формулы (3.43), (3.46).

Пример 5. Определить зависимость мощности P_1, выделяемой во внешней цепи, мощности P_2, выделяемой внутри источника тока, а также полной мощности P, развиваемой источником, от сопротивления внешней цепи R. Построить график зависимости мощностей P_1, P_2 и P от сопротивления внешней цепи, если ЭДС источника $E = 15$ В, внутреннее сопротивление $r = 2{,}5$ Ом.

Решение. Согласно закону Ома, сила тока в цепи $I = \frac{E}{R + r}$. Следовательно, мощность, выделяемая во внешней цепи, $P_1 = I^2 R = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$; мощность, выделяемая внутри источника, $P_2 = \frac{E^2 r}{(R + r)^2}$; полная мощность $P = P_1 + P_2 = IE = \frac{E^2}{R + r}$.

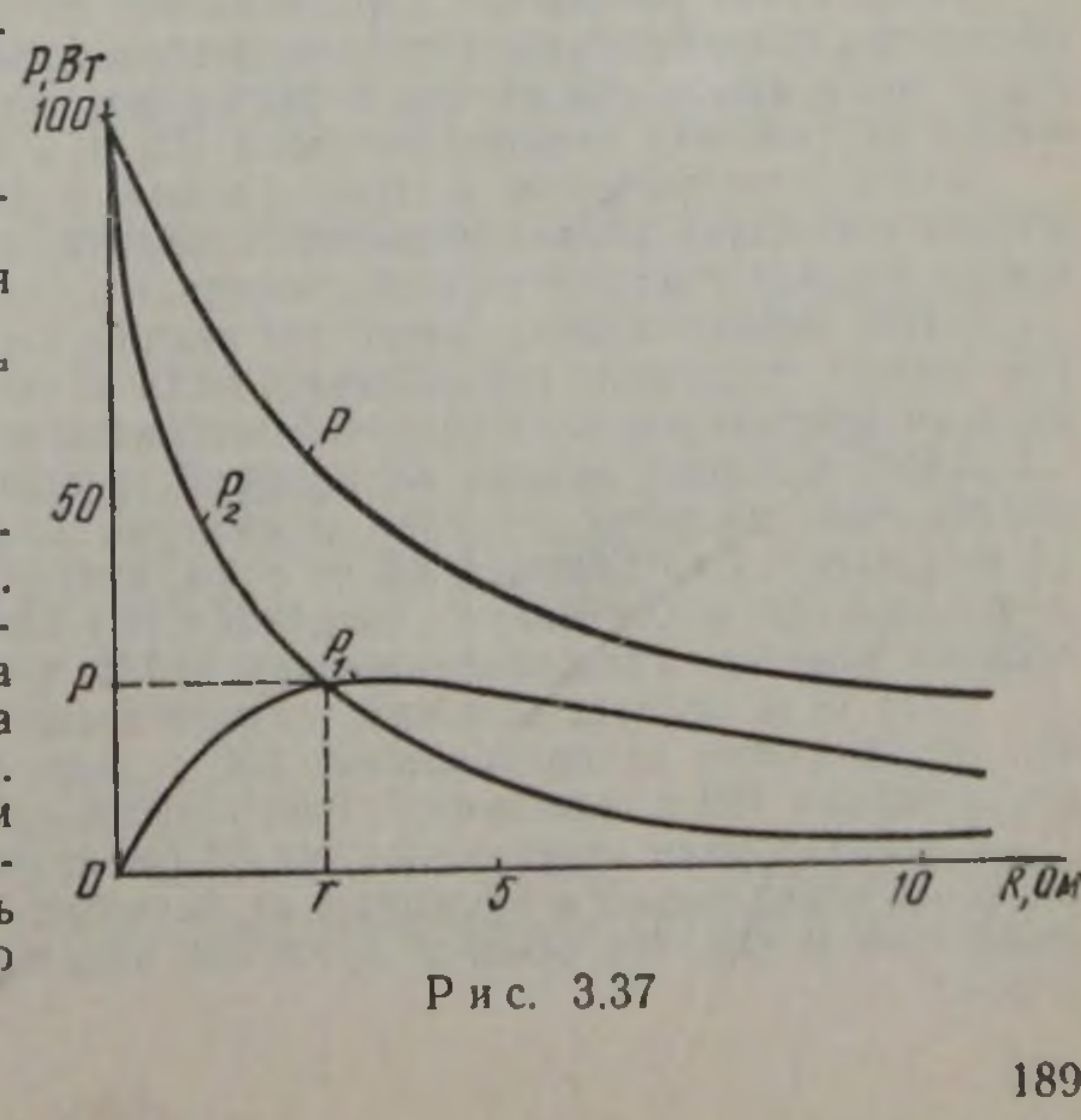


Рис. 3.37

На рис. 3.37 показаны графики зависимости P_1, P_2 и P от R. Из графика видно, что с увеличением R мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении, сначала возрастает, а затем уменьшается. Чтобы найти, при каком внешнем сопротивлении выделяется наибольшая полезная мощность P_{max}, исследуем функцию по общему правилу:

$$P_1' = \frac{E^2 (R+r)^2 - E^2 R \cdot 2(R+r)}{(R+r)^4} = \frac{E^2 (r-R)}{(R+r)^3} = 0.$$

Поскольку $E \neq 0$, то $r - R = 0$, или $R = r$.

Исследуем знак производной для точек, соответствующих $R < r$ и $R > r$. Очевидно, что в первом случае $P' > 0$, во втором $P' < 0$. Функция в выбранной точке имеет максимум. Это означает, что при $R = r$ искомая мощность наибольшая. Ее значение $P_{max} = \frac{E^2}{4r}$, а $\eta = 50$ %. Мощности P_2 и P с увеличением нагрузки R монотонно уменьшаются. При этом быстрее уменьшается мощность P_2, выделяемая внутри источника. Поэтому с ростом R КПД увеличивается.

Из графика для P_1 видно также, что одна и та же полезная мощность может быть получена при двух значениях R, одно из которых больше, а другое меньше r.

Задачи для самостоятельного решения

3.101. Как, имея лампочку на 3,5 В, источник тока, вольтметр, магазин сопротивлений, ключ и соединительные провода, построить график зависимости мощности электролампочки от напряжения?

3.102. Имеются две лампочки, рассчитанные на напряжение 220 В и номинальные мощности 25 и 100 Вт соответственно. Определить отношение яркостей каждой лампочки при: а) последовательном; б) параллельном включениях. Считать, что яркость пропорциональна тепловой мощности, выделяемой в лампочке.

3.103. Проволочная спираль нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать. Изменится ли количество теплоты, выделяемой: а) охлаждаемой половиной спирали; б) другой половиной; в) всей спиралью?

3.104. От генератора до потребителя (расстояние 1 км) нужно провести линию электропередачи, рассчитанную на 5 кВт полезной мощности. Напряжение потребителя 20 В. Рассчитать необходимое сечение проводов из алюминия, если требуется, чтобы КПД линии был не меньше 50 %.

3.105. Во сколько раз следует повысить напряжение источника, чтобы снизить потери мощности в линии в 100 раз при передаче на нагрузку одной и той же мощности? Известно, что в первом случае падение напряжения в линии составляет 0,03 напряжения на нагрузке. Надо ли при этом изменять сопротивление нарузки?

3.106. Электродвигатель включен в сеть постоянного тока с напряжением 220 В. Определить механическую мощность и КПД двигателя, если сила тока в цепи 10 А, а сопротивление его обмотки 5 Ом.

3.107. Лифт массой 0,8 т поднимается на высоту 40 м за 0,5 мин. Определить мощность, потребляемую электродвигателем лифта, силу тока в электродвигателе, а также стоимость одного подъема при тарифе 1,2 коп. за 1 ГВт, если напряжение на зажимах электродвигателя 120 В, а КПД равен 90 %.

3.108. Электрические плитки бывают с двумя одинаковыми спиралями: их можно соединять последовательно и параллельно. В каком случае плитка будет давать больше тепла? Ответ обосновать.

3.109. Электроплитка имеет три секции одинакового сопротивления. Если все три секции соединены параллельно, вода в чайнике закипает через 6 мин. Через сколько времени закипит вода той же массы при различных соединениях секций?

3.110. Сколько витков нихромовой проволоки надо навить в один слой на фарфоровый цилиндр внешним диаметром 2 см, чтобы этим кипятильником за 10 мин нагреть до кипения 0,5 кг воды, взятой при температуре 293 К? Диаметр проволоки 0,5 мм, удельное сопротивление нихрома равно $1 \cdot 10^{-8}$ Ом·м. Кипятильник включен в сеть напряжением 220 В; его КПД 60 %.

3.111. Как следует изменить сопротивление нагревателя, для того чтобы время, необходимое на превращение 200 г льда в пар, оказалось равным времени превращения 100 г льда в пар? Рассмотреть два случая: а) $U=$const; б) $I=$const.

3.112. Спираль сопротивлением 60 Ом и резистор сопротивлением 40 Ом соединены параллельно и замкнуты на источник с ЭДС 120 В и внутренним сопротивлением 6 Ом. На сколько градусов нагреется 0,5 кг воды в калориметре за 6 мин?

3.113. В цепь из медного провода с поперечным сечением 3 мм² включен свинцовый предохранитель с поперечным сечением 1 мм². На какое повышение температуры рассчитан этот предохранитель? Начальная температура свинца 290 К.

3.114. КПД источника тока $\eta = \frac{R}{R+r} = \frac{1}{1+\frac{r}{R}}$. Из формулы следует, что чем больше R по сравнению с r, тем выше КПД. Почему же на практике подбирают потребитель и источник такими, чтобы их сопротивления были примерно одинаковы, хотя КПД достигает при этом всего 50 %?

3.115. Источник тока замкнут на реостат с переменным сопротивлением R. Построить графики зависимости силы тока, напряжения, мощности, выделенной во внешней цепи, полной мощности тока, а также КПД от сопротивления реостата.

3.116. Построить графики зависимости полезной мощности и КПД от силы тока в цепи.

3.117. Сила тока в цепи 150 мА, сопротивление источника 1 Ом, внешнее сопротивление 49 Ом. Определить ЭДС источника тока, энергию, которая вырабатывается источником и рассеивается на сопротивлениях цепи за 4 ч.

3.118. ЭДС источника тока 16 В, внутреннее сопротивление 3 Ом. Определить сопротивление внешней цепи и КПД источника, если известно, что в цепи выделяется мощность 16 Вт.

3.119. Сила тока в цепи внешним сопротивлением 2 Ом равна 1,6 А. Если тот же источник замкнуть на сопротивление 1 Ом, сила тока равна 2 А. Определить потери мощности внутри источника и его КПД в обоих случаях.

3.120. Напряжение на клеммах зарядной станции во время зарядки аккумулятора равно 13 В, сила тока 10 А, сопротивление аккумулятора 0,1 Ом. Какая часть работы, выполненной зарядной станцией, будет полезно тратиться на зарядку аккумулятора?

3.8. Электрический ток в различных средах

Основные законы и формулы

Сила тока в металлическом проводнике с поперечным сечением S определяется по формуле

$$I = en_0 v_{\text{ср}} S, \qquad (3.49)$$

где e — модуль заряда электрона; n_0 — концентрация электронов проводимости; $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость их упорядоченного движения.

Плотность тока численно равна заряду, проходящему за 1 с через единицу площади поверхности, перпендикулярной к линии тока:

$$j = n_0 e v_{\text{ср}}. \qquad (3.50)$$

Прохождение электрического тока через электролиты сопровождается *электролизом* — выделением на электродах веществ, входящих в состав электролита. Законы электролиза:

1. Масса вещества, выделяющегося на электроде, прямо пропорциональна электрическому заряду, прошедшему через электролит:

$$m = kq,$$

где k — электрохимический эквивалент, численно равный массе выделившегося вещества при прохождении через электролит единицы заряда q.

2. Электрохимические эквиваленты веществ прямо пропорциональны их химическим эквивалентам:

$$k = cx = C\frac{A}{n},$$

где A — атомная масса; n — валентность.

Второй закон можно записать также в виде

$$\frac{x}{k} = F = \text{const},$$

где F — постоянная Фарадея, численно равная количеству электричества, которое должно пройти через электролит, чтобы выделить из него массу вещества, численно равную химическому эквиваленту.

Объединенный закон электролиза:

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}q \text{ или } m = \frac{M}{N_A ne}q, \tag{3.51}$$

где M — молярная масса; N_A — число Авогадро; e — модуль заряда электрона.

Газы в отличие от металлов и электролитов в обычных условиях не содержат свободных носителей тока. Они становятся проводниками тока, если ионизированы. Наименьшая необходимая для ионизации атома (или молекулы) разность потенциалов называется *потенциалом ионизации* U_i. Энергия заряженной частицы, прошедшей эту разность потенциалов, называется *энергией ионизации*:

$$E_i = qU_i.$$

Проводимость в вакуумных трубках осуществляется электронами, испускаемыми катодом при его нагревании. Эмиссия электронов из металла, вызванная его нагреванием, называется *термоэлектронной эмиссией*. Работа, которую необходимо затратить для вылета электрона из металла, называется *работой выхода*:

$$A_{\text{вых}} = e\Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов на границе металл — вакуум.

Решение задач

Задачи по этой теме разделены на четыре группы: задачи, связанные с электропроводностью металлов; задачи на применение законов электролиза; задачи на электрический ток в газах; задачи на электронные явления в вакууме.

1. При решении задач первой группы применяют формулы (3.49), (3.50). Типовыми здесь являются задачи на вычисление средней скорости упорядоченного движения электронов проводимости, концентрации их в единице объема. В основе решения этих задач лежат законы механики материальной точки и общие положения молекулярно-кинетической теории строения вещества.

Пример 1. Дуговая лампа горит под напряжением $U=50$ В и потребляет мощность $P=500$ Вт. Определить: на сколько градусов нагреются подводящие провода через $t=1$ мин после включения лампы, если проводка выполнена медным проводом сечением $S=1$ мм^2 и половина выделившейся теплоты отдана окружающим телам; число электронов, проходящих через поперечное сечение провода за 1 с; среднюю скорость упорядоченного движения электронов, считая число электронов в проводнике равным числу атомов; силу, действующую на отдельные электроны проводимости.

Решение. Количество теплоты, выделившейся в проводах, $Q = I^2Rt$ и количество теплоты, пошедшей на их нагревание, $Q = cm\Delta t$ связаны соотношением $cm\Delta t = \eta I^2Rt$, где $m = DSl$ — масса провода. Следовательно, $\Delta t = \frac{\eta I^2Rt}{cDSl}$. Так как $I = \frac{P}{U}$, $R = \rho\frac{l}{S}$, то

$$\Delta t = \frac{\eta P^2\rho t}{cDS^2U^2} \approx 3{,}8\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Число электронов, проходящих через поперечное сечение за 1 с,

$$n = \frac{I}{e} = \frac{P}{Ue} = 625 \cdot 10^{-17}.$$

Среднюю скорость упорядоченного движения электронов найдем из формулы (3.49):

$$v_{\text{ср}} = \frac{I}{en_0S} = \frac{P}{en_0SU},$$

где $n_0 = \frac{N_\text{A}}{V_0} = \frac{N_\text{A}}{A/D} = \frac{N_\text{A}D}{A}$. Следовательно,

$$v_{\text{ср}} = \frac{PA}{eN_\text{A}DSU} = 37{,}4 \cdot 10^{-5}\ \text{м/с}.$$

Сила, действующая на отдельные электроны проводимости,

$$F = eE = e\frac{U}{l} = \frac{eD\rho}{SU} = 1{,}36 \cdot 10^{-20}\ \text{Н}.$$

2. В основе решения задач на электролиз лежат законы электролиза Фарадея. При этом, если даются два (и более) вещества, уравнение (3.51) составляется для каждого из них.

Для решения более сложных задач нужно воспользоваться вспомогательными формулами для определения m, q, I и, используя закон Фарадея, составить формулу, в которую входили бы величины, связанные с электролизом, но не входящие в основное уравнение. Ими могут быть, например, толщина слоя металла, выделившегося на катоде, скорость роста этого слоя, расход электроэнергии на единицу массы получаемого металла, отношение заряда иона к его массе. Существенным является и тот факт, что вследствие химических реакций электролита с веществом, выделяющимся при электролизе, между электродами возникает ЭДС поляризации, которая уменьшает напряжение, подводимое к электродам.

Пример 2. При никелировании пластины ее поверхность покрывается слоем никеля толщиной $h=0{,}05$ мм. Определить среднюю плотность тока, если время никелирования $t=2{,}5$ ч.

Решение. Плотность тока $j = \frac{I}{S}$, где S — площадь сечения проводящей части электролита, равная площади пластины.

Для нахождения силы тока I применим объединенный закон Фарадея:

$$m = \frac{A}{Fn} It, \tag{3.52}$$

где

$$m = \rho V = \rho h S; \tag{3.53}$$

ρ — плотность никеля; S — площадь поверхности пластины. Подставляя выражение (3.53) в уравнение (3.52), найдем силу тока: $I = \frac{\rho h S F n}{At}$. Тогда плотность тока

$$j = \frac{\rho h S F n}{ASt} = \frac{\rho h F n}{At} = 150 \text{ А/м}^2.$$

Пример 3. Какой силы ток надо пропустить через подкисленную воду, чтобы в течение $t=30$ мин выделилось $V=1{,}73$ л гремучего газа при температуре $T=294$ К и давлении $p=1{,}05 \cdot 10^5$ Па?

Решение. Гремучий газ — это смесь кислорода и водорода. Поэтому общее давление (согласно закону Дальтона) равно сумме парциальных давлений водорода p_1 и кислорода p_2, т. е. $p=p_1+p_2$. Давления p_1 и p_2 выразим из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT; \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Тогда $p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_2} + \frac{m_2}{M_2}\right)$.

Массы выделившихся водорода и кислорода найдем по закону Фарадея:

$$m_1 = \frac{M_1}{N_A n_1 e} It; \; m_2 = \frac{M_2}{N_A n_2 e} It,$$

следовательно,

$$p = \frac{RT}{V N_A e}\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right) It,$$

откуда

$$I = \frac{p V N_A e}{RTt\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = 5{,}53 \text{ А}.$$

3. При решении задач на ток в газах рассчитывают либо напряженность поля, либо скорость частиц, при которой возникает ионизация. При этом используют уравнение $\frac{mv^2}{2} = eE\lambda$, где λ — расстояние, на котором электрон приобретает энергию $mv^2/2$, E — напряженность поля. Минимальное значение энергии, при котором возможна ионизация, определяется по формуле $E_{\min} = \frac{E_{\text{ион}}}{e\lambda}$, минимальная скорость частицы при этом $v_{\min} = \sqrt{\frac{2E_{\text{ион}}}{m}}$.

Пример 4. Доказать, что минимальная кинетическая энергия частицы, способной произвести ударную ионизацию молекулы одноатомного газа,

$$\frac{mv^2}{2} = A_i\left(1 + \frac{m}{M}\right),$$

где m — масса ионизирующей частицы; A_i — работа ионизации; M — масса молекулы или в данном случае атома.

Решение. Работа ионизации — это работа, необходимая для однократной ионизации атома, т. е. удаления из атома одного электрона. Столкновение электрона с атомом является неупругим. На основании закона сохранения импульса можно записать:

$$mv=(m+M)u. \tag{3.54}$$

На основании закона сохранения энергии и импульса:

$$\frac{mv^2}{2}=A_i+\frac{m+M}{2}u^2. \tag{3.55}$$

Решая совместно уравнения (3.54) и (3.55), получаем

$$\frac{mv^2}{2}=A_i\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Общее условие ударной ионизации одноатомного газа

$$\frac{mv^2}{2}\geqslant Ai\left(1+\frac{m}{M}\right).$$

Следовательно, кинетическая энергия частицы, способной произвести ионизацию атома, тем больше работы ионизации, чем меньше различие их масс. Так, если $m=M$, то $E_к=2A_i$, если $m\ll M$, то $E_к=A_i$. Поэтому при самостоятельном разряде в газе ударная ионизация электронами начинается при меньших разностях потенциалов, чем ионами.

4. В теме «Электронные явления в вакууме» решают в основном задачи на явление термоэлектронной эмиссии, в том числе задачи на расчет работы выхода электронов из металла, и задачи на движение заряженных частиц в однородном электрическом поле. В основе решения этих задач лежат законы механики движения материальной точки.

Пример 5. Электрон прошел разность потенциалов $U_0=1$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U=0{,}1$ кВ. Определить модуль и направление скорости электрона в момент вылета из конденсатора, а также его смещение на экране, отстоящем на расстоянии $L=1$ м, если длина пластин $l=20$ см, расстояние между ними $d=2$ см.

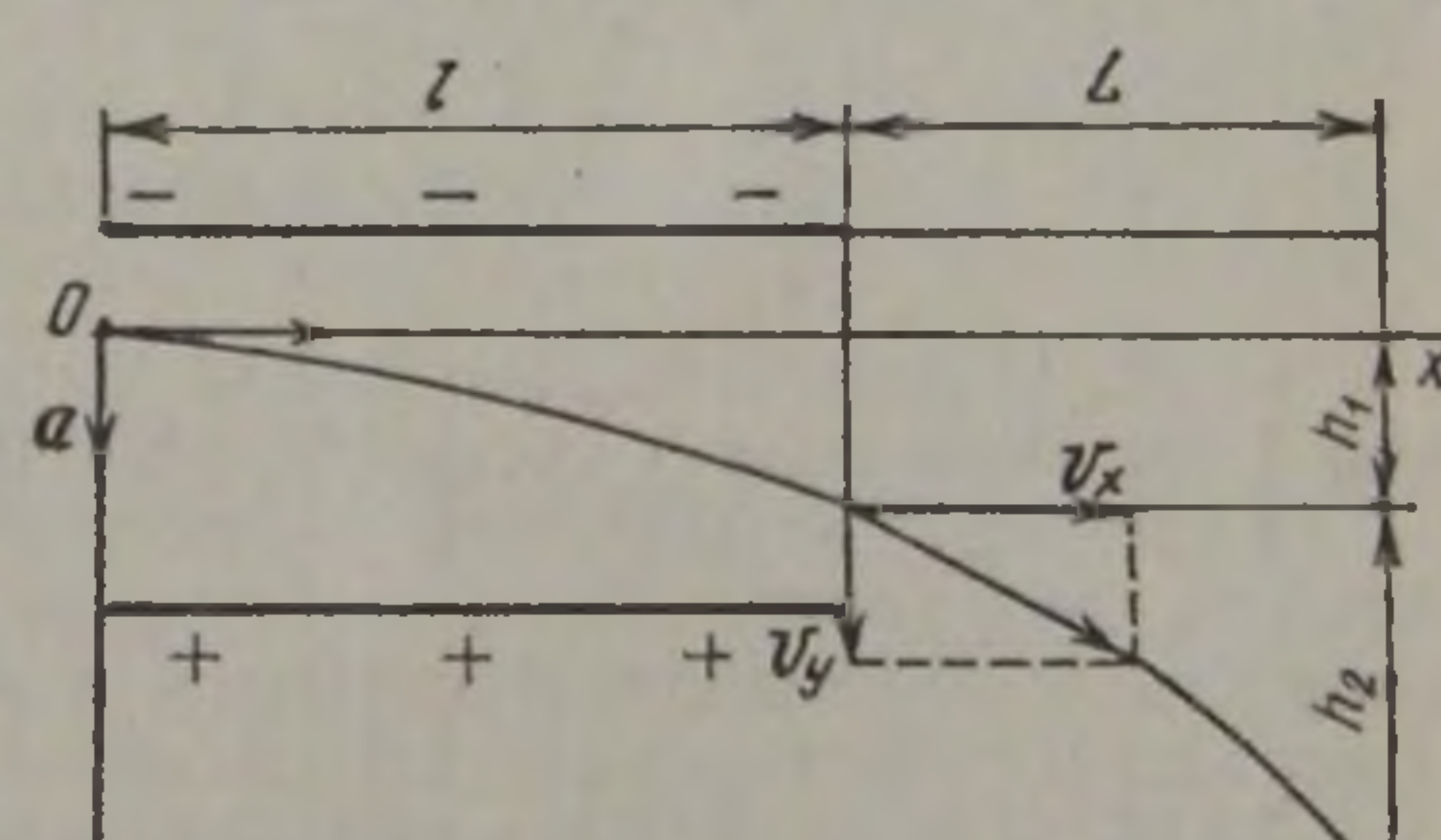


Рис. 3.38

Решение. Совместим начало координат с точкой, в которой находился электрон в момент влета его в конденсатор. Ось Ox направим горизонтально, ось Oy — вертикально вниз (рис. 3.38). В этой системе координат движение электрона можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: равномерного движения со скоростью $\mathbf{v}_x=\mathbf{v}_0$ в горизонтальном направлении и равноускоренного движения с ускорением а вдоль оси Oy в результате действия на него силы $\mathbf{F}=e\mathbf{E}$ (силой тяжести, действующей на электрон, пренебрегаем).

Выпишем начальные условия: $x_0=0$, $y_0=0$, $v_{0x}=v_0$, $v_{0y}=0$. Значения проекций ускорения на оси координат равны: $a_x=0$, $a_y=\dfrac{eE}{m}$. Тогда уравнения, определяющие зависимость координат x, y и проекций скорости v_x и v_y от времени, будут иметь вид:

$$x = v_0 t;\ y = \frac{eEt^2}{2m}; \qquad (3.56)$$

$$v_x = v_0;\ v_y = \frac{eEt}{m}. \qquad (3.57)$$

В момент вылета частицы из конденсатора $x = l$, $y = h_1$, $t = t_1$. На основании уравнений (3.56), (3.57), учитывая, что $E = \frac{U}{d}$, получим:

$$t_1 = \frac{l}{v_0}; \quad v_y = \frac{eUl}{mv_0 d}; \quad h_1 = \frac{eUl^2}{2\,mv_0^2\,d}.$$

Модуль скорости v электрона в момент вылета

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + \left(\frac{eUl}{mv_0 d}\right)^2}. \qquad (3.58)$$

Направление вектора **v** определяется углом α, для которого

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{eUl}{mv_0^2\,d}. \qquad (3.59)$$

Полное смещение частицы на экране $h = h_1 + h_2$, где $h_2 = L \operatorname{tg}\alpha = L\frac{eUl}{2\,mv_0^2\,d}$. Следовательно,

$$h = \frac{U}{d}\frac{e}{m}\frac{e}{v_0^2}\left(\frac{l}{2} + L\right). \qquad (3.60)$$

Начальную скорость v_0, с которой электрон влетел в конденсатор, найдем из условия $eU_0 = \frac{mv_0^2}{2}$: $v_0 = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$.

После подстановки численных значений в формулы (3.58)—(3.60), получим $v = 2{,}1 \cdot 10^7$ м/с, $\alpha = 27°$, $h \approx 6$ мм.

Задачи для самостоятельного решения

3.121. Определить суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной 1 км, сила тока в котором равна 400 А.

3.122. Предполагая, что число свободных электронов в металле равно числу атомов, определить силу, действующую на свободные электроны, и среднюю скорость перемещения электронов в медном проводе длиной 1 м и сечением 1 мм^2, если напряжение на концах провода 0,1 В.

3.123. Как определить величину элементарного заряда, имея набор по электролизу, источник ЭДС, весы с разновесом, амперметр, секундомер, соединительные провода?

3.124. Сколько атомов двухвалентного металла выделится на 1 дм^2 поверхности электрода за 10 мин, если плотность тока 10^2 А/м^2?

3.125. Никелирование пластинки производится при плотности тока 40 А/м^2. Определить, с какой скоростью растет толщина слоя никеля.

3.126. Реакция соединения водорода с кислородом совершается в соответствии с уравнением $2H_2 + O_2 = 2H_2O$. При каком наименьшем напряжении на электродах может начаться электролиз воды?

3.127. При электролизе раствора азотнокислого серебра в течение часа выделилось 9,4 г серебра. Определить ЭДС поляризации, если напряжение на зажимах ванны 4,2 В, а сопротивление раствора 1,5 Ом.

3.128. Сколько гремучего газа выделится за 27 ч 46 мин, при нормальном давлении и температуре 300 К, если через водный раствор соляной кислоты пропускать электрический ток силой 0,5 А?

3.129. Аэростат объемом 250 м³ заполняют водородом при температуре 300 К и давлении $2{,}02 \cdot 10^5$ Па. Какое количество электричества необходимо пропустить при электролизе через раствор соляной кислоты, чтобы получить нужное количество водорода?

3.130. Электролиз воды производится током, при котором серебрение пластинки площадью 25 см² происходит со скоростью $5 \cdot 10^{-5}$ м/с. Определить объем выделившегося в течение часа водорода, если процесс осуществляется при давлении $1{,}06 \cdot 10^5$ Па и температуре 314 К.

3.131. Определить стоимость получения 10 кг рафинированной меди, если электролиз идет при напряжении 10 В, КПД установки 75 %, стоимость 1 кВт·ч электроэнергии 4 коп. ЭДС поляризации не учитывать.

3.132. Что произойдет с горящей электрической дугой, если сильно охладить: а) отрицательный электрод; б) положительный электрод?

3.133. Описать поведение различных частей тлеющего разряда при передвижении: а) анода к катоду; б) катода к аноду. Начертить график распределения напряжения в тлеющем разряде.

3.134. Как изменится сила тока вдали от насыщения, если приблизить друг к другу электроды ионизационной камеры? Как изменится при этом ток насыщения?

3.135. Какой наименьшей скоростью должен обладать ион кислорода для того, чтобы осуществить ударную ионизацию атома гелия? Потенциал ионизации гелия равен 24,5 В. Тепловым движением ионов гелия пренебречь.

3.136. Включение диода показано на рис. 3.39. Каковы будут показания амперметров A1 и A2, если сила анодного тока 0,1 А, ЭДС батареи накала 5 В, сопротивление накаленной нити 5 Ом? Сопротивлением подводящих проводов батареи накала и амперметра пренебречь.

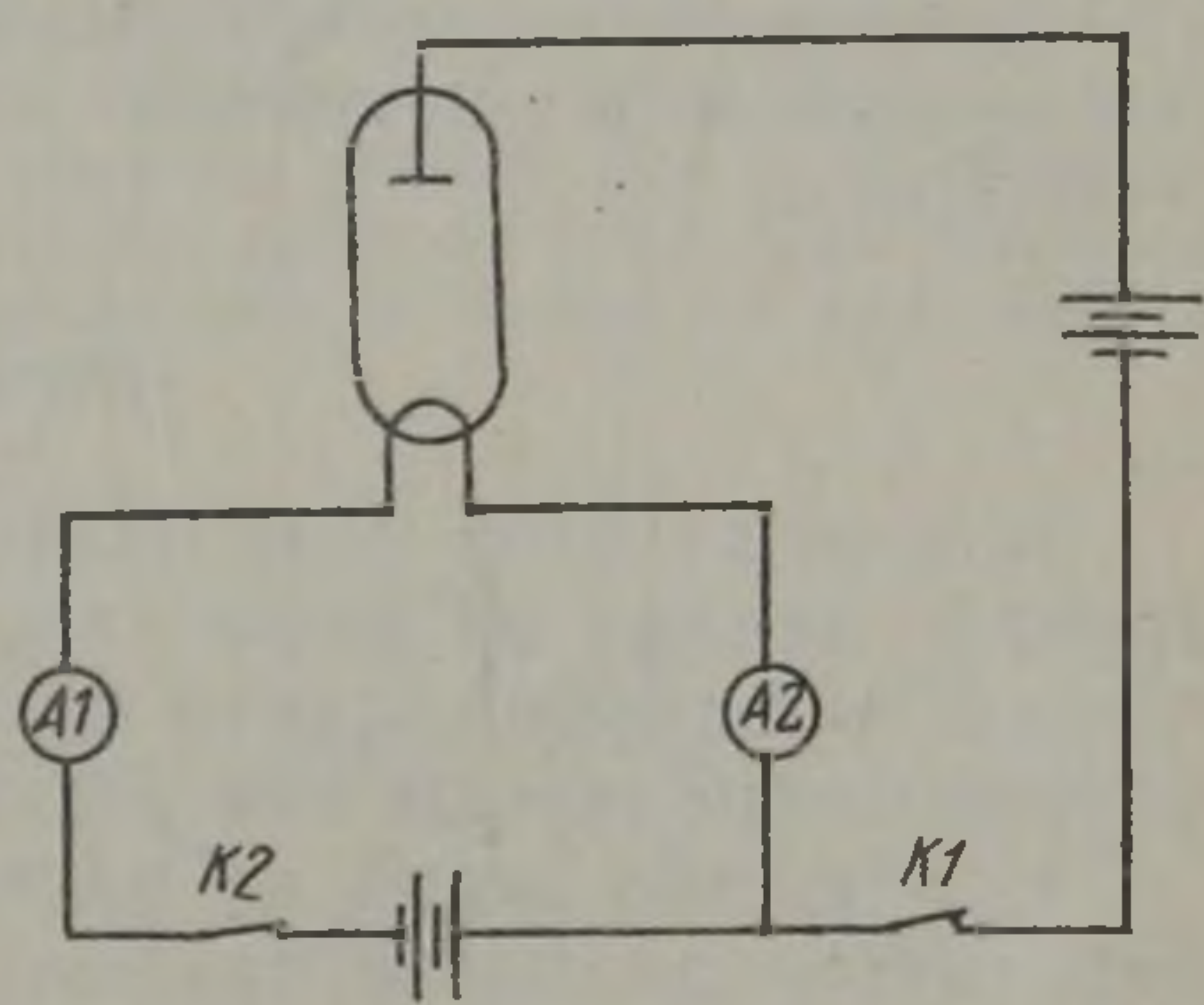


Рис. 3.39

3.137. Через диод с плоскими электродами течет ток силой 10 мА. Разность потенциалов между электродами 100 В. С какой силой действуют на анод лампы попадающие на нее электроны, если скорость вблизи катода равна нулю?

3.138. Доказать, что отклонение заряженных частиц, которые влетают в электрическое поле конденсатора с одинаковой начальной скоростью параллельно его пластинам, не зависит от массы и заряда частиц.

3.9. Магнитное поле тока. Сила Лоренца

Основные законы и формулы

Магнитное поле тока является особой формой существования материи, которая создается движущимися зарядами и осуществляет взаимодействие между ними. Силовой характеристикой магнитного поля является *вектор* магнитной индукции **B**.

Магнитная индукция в точке, отстоящей на расстоянии r от бесконечно длинного тонкого прямолинейного проводника, по которому течет ток I, определяется по формуле

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2\pi r}, \tag{3.61}$$

где μ_0 — магнитная постоянная; μ — магнитная проницаемость вещества.

Магнитная индукция в центре витка с током радиусом R

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}. \tag{3.62}$$

Магнитная индукция поля, создаваемого несколькими токами, равна векторной сумме индукций полей каждого из токов в отдельности:

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i .$$

На проводник длиной l с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией B, действует сила Ампера, модуль которой $F = IlB \sin \alpha$, где α — угол между вектором $\mathbf{B}$ и направлением тока.

Модуль силы, действующей на элементарный носитель заряда, движущийся в магнитном поле, определяется по формуле $F = qvB \sin \alpha$.

Решение задач

Задачи по этой теме целесообразно разделить на три основные группы: задачи на расчет магнитной индукции при заданном распределении токов; задачи на применение закона Ампера; задачи, в которых определяют или учитывают силу Лоренца.

1. Решение задач на расчет магнитной индукции, создаваемой бесконечно длинным прямолинейным проводником или круговым током, основано на применении формул (3.61), (3.62). При этом формулой (3.61) можно пользоваться для вычисления магнитной индукции прямолинейного проводника с током конечных размеров только в том случае, если расстояние от проводника до рассматриваемой точки значительно меньше длины самого проводника. Если же это условие не выполняется, применяют формулу

$$B = \mu_0 \mu \frac{1}{4 \pi r} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Для бесконечно длинного проводника $\alpha_1 = 0$, $\alpha = 180°$, следовательно, $\cos \alpha_1 = 1$, $\cos \alpha_2 = -1$, тогда получаем формулу (3.61).

Следует помнить также, что формула (3.62) верна для расчета магнитной индукции кругового тока (витка) в его центре. В случае длинной катушки с током магнитная индукция на ее оси вычисляется по формуле

$$B = \mu_0 \mu \frac{N}{l} I,$$

где N — число витков; l — длина катушки.

Вращающий момент пары сил поля, действующий на виток с током,

$$M = ISB \cos \alpha,$$

где S — площадь витка; α — угол между вектором **B** и нормалью к плоскости витка. Направление вектора **B** совпадает с направлением нормали к свободной рамке с током, установившейся в поле. Нормаль проводят в ту сторону, куда перемещался бы буравчик (правый винт), если вращать его по направлению тока в рамке.

Графически магнитное поле можно изобразить с помощью линий магнитной индукции — воображаемых линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора **B** в этих точках поля. В этом смысле линии индукции аналогичны силовым линиям электростатического поля. Однако между ними есть существенное различие. Линии магнитной индукции всегда замкнуты либо идут из бесконечности и уходят в бесконечность. Замкнутость линий магнитной индукции означает, что магнитных зарядов, подобных электрическим, в природе нет. Поле такого типа называют *вихревым*.

Пример 1. Три длинных параллельных проводника с током силой по 5 А в каждом пересекают перпендикулярную к ним плоскость в точках, являющихся вершинами правильного треугольника со стороной, равной 0,1 м. Определить индукцию магнитного поля в центре треугольника, если: а) токи в проводниках имеют одинаковое направление; б) направление тока в одном из проводников противоположно направлению токов в двух других.

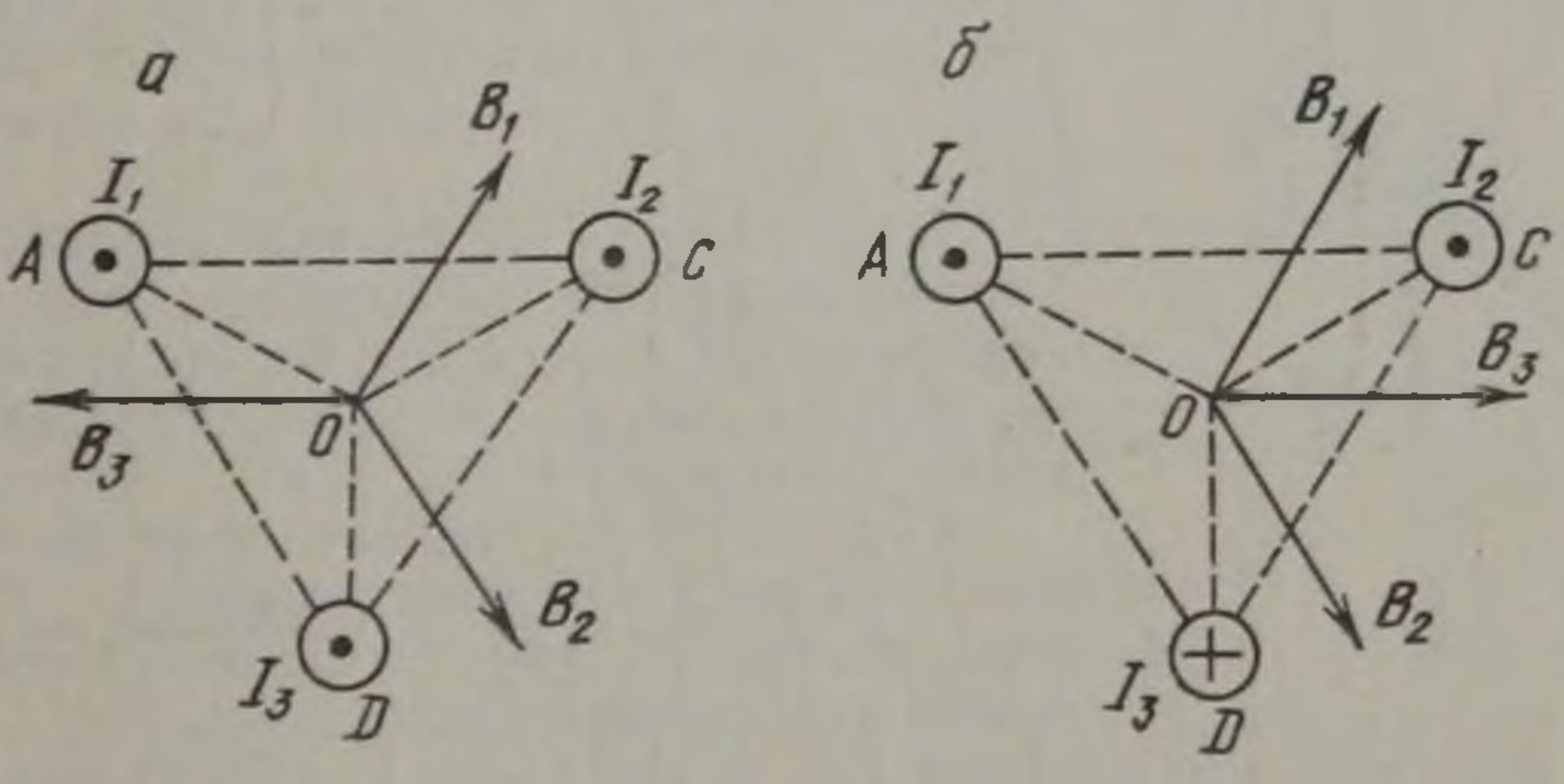


Рис. 3.40

Решение. Магнитная индукция в центре $\triangle ACD$ (рис. 3.40) равна векторной сумме индукций в этой точке магнитных полей всех токов: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3$. Векторы $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ перпендикулярны к отрезкам AO, CO, DO, и их направления определяются по правилу буравчика. Численно они равны:

$$B_1 = B_2 = B_3 = \mu_0\mu \frac{I}{2\pi r_0} = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}I}{d},$$

где $r_0 = \dfrac{AC/2}{\cos 30^\circ} = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$; d — расстояние от центра до проводников.

Если токи I_1, I_2, I_3 одинаково направлены, например как показано на рис 3.39, a, то углы между векторами $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{B}_3$ равны 120°, а магнитная индукция $B = 0$.

Если токи направлены, как показано на рис. 3.39, б, то углы между векторами $\mathbf{B}_1$ и $\mathbf{B}_2$, а также $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{B}_3$ равны 60°, следовательно, $B = B_3 + (B_1 + B_2) \times$ $\times \cos 60°$ или

$$B = \mu_0\mu \frac{\sqrt{3}\,I}{2\pi d}(1 + 2\cos 60^\circ) = \mu\mu_0 \frac{\sqrt{3}\,I}{\pi d} = 3{,}46 \cdot 10^{-5}\ \text{Тл}.$$

2. При решении задач на нахождение сил, действующих на проводник (или контур) с током, помещенный в однородное магнитное поле, вначале выполняют чертеж, на котором указывают угол между направлением вектора индукции магнитного поля и направлением тока. Затем по правилу левой руки определяют направление силы, действующей на проводник, и находят искомую величину. Следует помнить, что вектор силы, с которой магнитное поле действует на проводник с током, перпендикулярен к вектору магнитной индукции и элементу тока.

Если в задаче рассматривается равновесие проводника (контура) с током в магнитном поле, то, помимо силы Ампера, необходимо учесть и другие силы, действующие на проводник. Затем надо записать условие равновесия проводника $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = 0$ (или $\sum\limits_{i=1}^{n} M_i = 0$ в случае контура) и, выразив значения сил (моментов), входящих в уравнение равновесия, определить искомую величину.

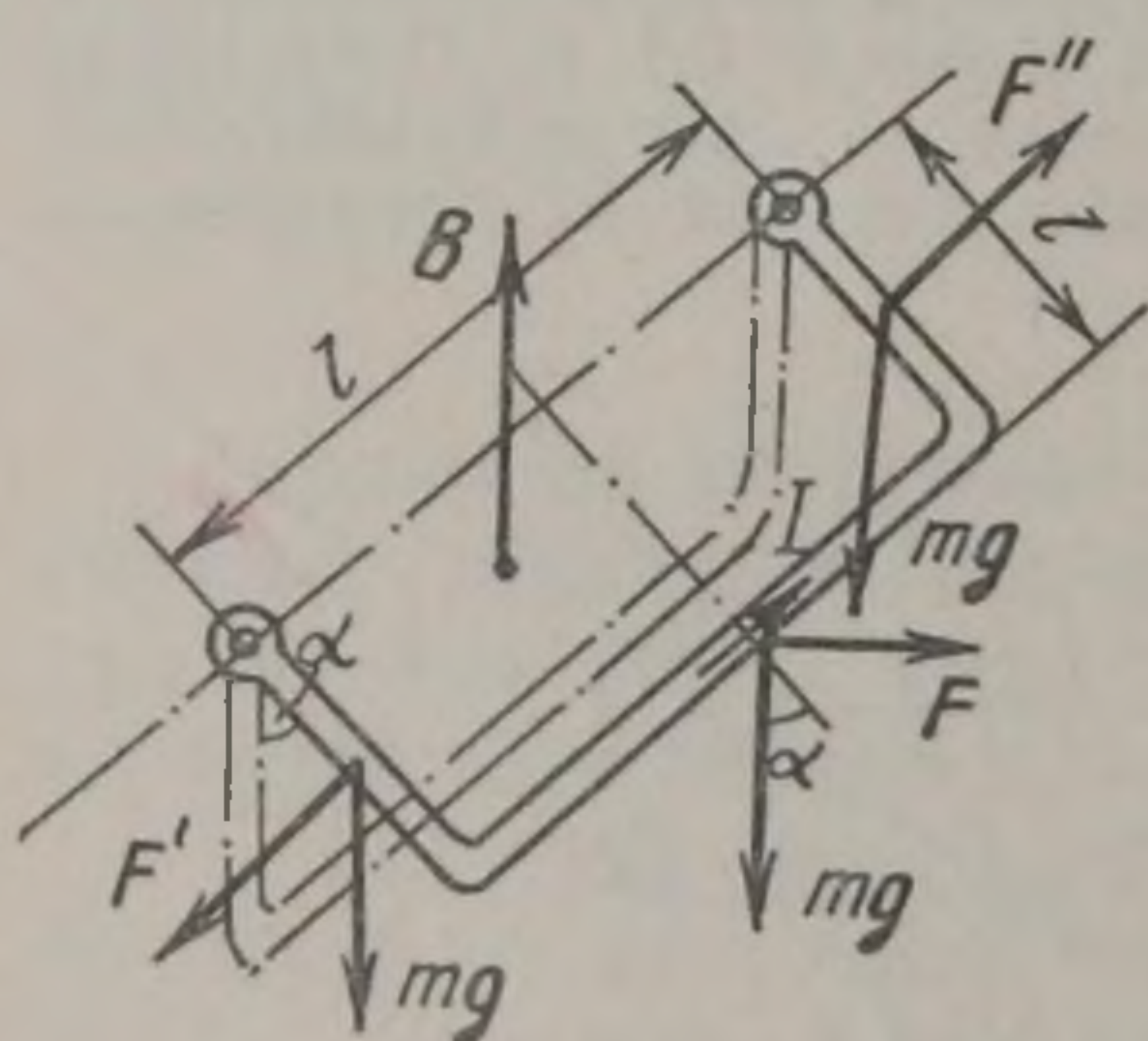


Рис. 3.41

Пример 2. Медный провод сечением S согнут в виде трех сторон квадрата и подвешен за концы горизонтальной оси так, что может свободно вращаться в однородном вертикальном магнитном поле. Когда по проводу пропускают ток I, провод отклоняется от вертикали на угол α (рис. 3.41). Определить магнитную индукцию поля.

Решение. Обозначим все силы, действующие на согнутый проводник: силы тяжести $m\mathbf{g}$, приложенные к каждой из трех сторон квадрата, и силы Ампера $\mathbf{F}'$ и $\mathbf{F}''$, действующие на боковые стороны провода.

Силы Ампера, действующие на боковые стороны рамки, уравновешиваются. Рамка висит неподвижно потому, что уравновешиваются моменты действующих на нее сил.

Уравнение моментов относительно оси вращения будет иметь вид

$$2\,mg\frac{l}{2}\sin\alpha + mgl\sin\alpha - F_{\text{A}}\,l\cos\alpha = 0.$$

Отсюда

$$F_{\text{A}} = \frac{2\,mg\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\,mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Из определения силы Ампера

$$B = \frac{F_{\text{A}}}{Il} = \frac{2\,mg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{Il} = \frac{2\,\rho Vg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{I\,l} = \frac{2\,\rho Sg\,\mathrm{tg}\,\alpha}{I}.$$

3. Задачи на движение классических заряженных частиц ($v \ll c$) в электрическом и магнитном полях по существу решаются методами, рассмотренными в гл. 1. Различие лишь в природе сил, действующих на частицу. Если в механике движение частиц происходит под действием гравитационных сил и сил трения, то здесь заряженные частицы движутся лишь под действием силы Лоренца

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q[\mathbf{vB}]. \qquad (3.63)$$

При анализе этой формулы нужно обратить внимание на следующее:

1) если $v=0$, то сила Ампера равна нулю, т. е. магнитное поле не действует на покоящиеся заряды;

2) сила Ампера равна нулю, если заряд движется вдоль линий магнитной индукции;

3) скорость v измеряется в той же системе координат, в которой измеряются сила F и магнитная индукция B.

Для решения задач этой группы, как правило, необходимо записать уравнение движения частицы — второй закон Ньютона. Чтобы перейти от векторной формы записи закона к скалярной, надо определить направления векторов $\mathbf{F}_{эл}$ и $\mathbf{F}_{м}$ электрического и магнитного полей. При этом следует учесть, что в формуле (3.63) q — алгебраическая величина. В частности, для электрона $q<0$, поэтому векторы $\mathbf{F}_{эл}$ и $\mathbf{F}_{м}$ направлены противоположно. Магнитная сила всегда перпендикулярна к векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$, поэтому она сообщает движущейся заряженной частице только нормальное ускорение, не изменяя ее скорости и, следовательно, не совершая работы. Наоборот, сила $\mathbf{F}_{эл}$ при перемещении частицы всегда (за исключением случаев, когда вектор скорости перпендикулярен к вектору напряженности электрического поля) совершает работу, равную изменению кинетической энергии частицы.

Пример 3. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $\Delta\varphi=900$ В, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ мТл, при этом вектор скорости направлен под углом $\alpha=60°$ к линиям индукции поля. Определить траекторию движения электрона.

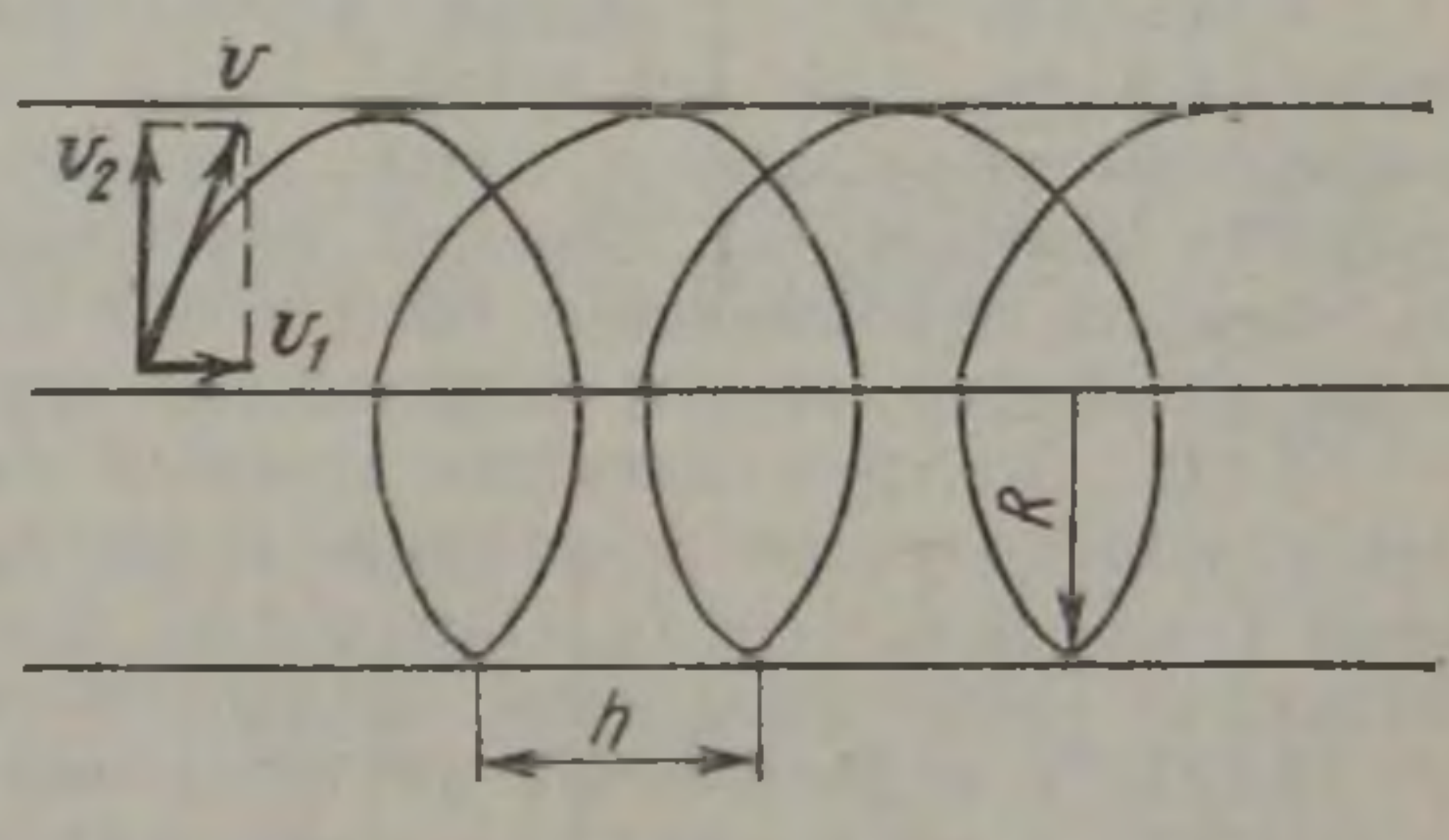


Рис. 3.42

Решение. Разложим вектор скорости $\mathbf{v}$ частицы на две составляющие (рис. 3.42): $\mathbf{v}_1$, направленную вдоль линий вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, и $\mathbf{v}_2$, перпендикулярную к этим линиям. Модули этих составляющих соответственно равны:

$$v_1=v\cos\alpha;\quad v_2=v\sin\alpha.$$

На составляющую скорости электрона, перпендикулярную к полю, действует сила Лоренца, которая создает центростремительное ускорение. Поэтому электрон будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной к линиям индукции.

Результирующая траектория движения электрона — винтовая линия с осью, параллельной линиям поля. Шаг винтовой линии

$$h=v_1T, \tag{3.64}$$

где T — период обращения частицы по окружности:

$$T=\frac{2\pi R}{v_2}. \tag{3.65}$$

Для определения радиуса составим уравнение на основании второго закона Ньютона:

$$F=\frac{mv_2^2}{R}\quad\text{или}\quad ev_2B=\frac{mv_2^2}{R}.$$

Отсюда

$$R = \frac{mv_2}{eB}. \qquad (3.66)$$

Скорость электрона определим из формулы $\frac{mv^2}{2} = e\Delta\varphi$:

$$v = \sqrt{\frac{2e\Delta\varphi}{m}}. \qquad (3.67)$$

Учитывая выражения (3.65) — (3.67), получим из формулы (3.64)

$$h = \frac{2\pi \cos\alpha \sqrt{2\Delta\varphi \frac{m}{e}}}{B} = 0{,}31 \text{ м}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.139. Вблизи проводника с током и длинной трубки, внутри которой проходит электронный пучок, магнитная стрелка отклоняется. Изменится ли положение стрелки в случае, если она будет двигаться с такой же скоростью, что и электроны: а) внутри проводника; б) в пучке?

3.140. В однородном магнитном поле с индукцией 0,25 Тл расположена плоская рамка радиусом 25 см из 75 витков так, что ее плоскость составляет угол 60° с направлением линий магнитной индукции. Определить вращающий момент, действующий на рамку в магнитном поле, если по ее виткам течет ток силой 8 А.

3.141. По двум длинным прямолинейным проводам, расположенным на расстоянии 4 см друг от друга, текут токи силой по 5 А в каждом. Определить магнитную индукцию в точке, лежащей посередине между проводами, для следующих случаев: а) провода параллельны, токи текут в одном направлении; б) провода параллельны, токи текут в противоположных направлениях; в) провода перпендикулярны, направления токов выбрать произвольно.

3.142. По трем длинным прямым параллельным проводам, расположенным в одной плоскости на расстоянии 3 см друг от друга, текут в одном направлении токи $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_1 + I_2$. Определить положение прямой, в каждой точке которой индукция магнитного поля, создаваемого токами, равна нулю.

3.143. Три бесконечно длинных параллельных провода с токами $I_1 = I_2 = 1$ кА и $I_3 = 1{,}5$ кА расположены в вершинах параллелограмма, стороны которого равны соответственно 0,6 и 0,8 м. Определить магнитную индукцию поля в четвертой вершине. Задачу решить аналитически и графически.

3.144. Из куска изолированной проволоки сделан виток радиусом R и подключен к источнику постоянного тока. Как изменится магнитная индукция B в центре круга, если из того же куска проволоки сделать два прилегающих друг к другу витка радиусом $R/2$?

3.145. Определить магнитную индукцию в центре двух витков с током (сила тока I, радиусы R и $2R$). Рассмотреть следующие случаи расположения витков: а) в одной плоскости в одном направлении; б) в одной плоскости в разных направлениях; в) во взаимно перпендикулярных плоскостях.

3.146. Прямолинейный проводник с током I_1 расположен на оси витка с током I_2. Определить силу взаимодействия этих проводников.

3.147. Три параллельных провода расположены в вершинах правильного треугольника так, что расстояние между осями проводов равно 40 см. Определить величину и направление результирующей силы, действующей на третий провод, если $I_1 = I_2 = 2$ кА, а $I_3 = 1$ кА. Задачу решить аналитически и графически.

3.148. Три проводника расположены горизонтально на расстоянии 20 см друг от друга, причем два верхних с противоположно направленными токами $I_1 = 100$ А и $I_2 = 200$ А закреплены. При каком значении силы тока I_3 проводник с током I_2 будет находиться в равновесии, если вес единицы длины провода равен 0,02 Н/м?

3.149. На наклонной плоскости с углом наклона 30° находится проводник массой 0,2 кг, по которому течет ток силой 10 А. Вся система расположена в магнитном поле, вектор магнитной индукции которого направлен перпендикулярно к наклонной плоскости ($B=2{,}5$ нТл). Определить силу, которую нужно приложить к проводнику, для того чтобы он не двигался по наклонной плоскости. Коэффициент трения 0,3, длина проводника 2 м.

3.150. По кольцу диаметром 10 см из свинцовой проволоки с площадью сечения 0,7 мм^2 идет ток силой 7 А, отчего температура проволоки повышается до температуры, близкой к плавлению. Прочность свинца на разрыв при этой температуре равна $2 \cdot 10^6$ Н/м^2. Разорвется ли такое кольцо в магнитном поле, индукция которого 1 Тл (плоскость кольца перпендикулярна к полю)?

3.151. Определить нормальное и тангенциальное ускорения электрона, движущегося в совпадающих по направлению электрическом и магнитном полях, если скорость электрона направлена: а) вдоль полей; б) перпендикулярно к ним.

3.152. α-частица движется в однородном электрическом поле вдоль его силовых линий, а затем попадает в однородное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл и описывает в нем дугу радиусом 12 см. Определить напряженность поля, если α-частица пролетает в нем 0,1 м.

3.153. Два иона, имеющих одинаковые заряды и равные кинетические энергии, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле перпендикулярно к линиям индукции. Определить отношение масс ионов, если первый описал дугу окружности радиусом 6 см, второй — 3 см.

3.154. Электрон движется в магнитном поле, индукция которого 5 мТл, по винтовой линии радиусом 2 см и шагом винта 5 см. Определить энергию электрона и направление вектора скорости в начальный момент.

3.10. Электромагнитная индукция

Основные законы и формулы

Потоком вектора индукции Φ однородного магнитного поля называется физическая величина, определяемая по формуле

$$\Phi=BS\cos\alpha, \tag{3.68}$$

где α — угол между вектором $\mathbf{B}$ и нормалью $\mathbf{n}$ к площади S.

В проводящем контуре при изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром, возникает ток, называемый *индукционным*, а все явление называется *электромагнитной индукцией.* ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$E_i=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{3.69}$$

При движении проводника длиной l со скоростью $\mathbf{v}$ в однородном магнитном поле ЭДС индукции в проводнике определяется по формуле

$$E_i=Blv\sin\alpha. \tag{3.70}$$

ЭДС индукции, возбуждаемая в рамке площадью S при ее вращении в магнитном поле,

$$E_i=nBS\omega\sin\alpha, \tag{3.71}$$

где n — число витков; ω — угловая скорость вращения рамки.

При неизменной конфигурации контура связанный с ним магнитный поток пропорционален току в контуре: $\Phi=LI$, поэтому

$$E_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \qquad (3.72)$$

Здесь L — индуктивность контура — физическая величина, зависящая от геометрии контура (его формы и размеров) и магнитных свойств среды. Так, индуктивность длинного соленоида малого диаметра

$$L = \mu_0 \mu n^2 V, \qquad (3.73)$$

где $n = \frac{N}{l}$ — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; $V = Sl$ — его объем.

Согласно закону сохранения энергии, при работе генератора

$$P_{мех} = P_{эл} = EI, \qquad (3.74)$$

где E — ЭДС генератора; I — сила тока в цепи.

При работе электромотора электрическая мощность, развиваемая источником тока, расходуется частично на нагревание цепи, частично на вращение якоря. Если ЭДС источника E, сила тока в цепи I, полное сопротивление цепи R, то

$$IE = I^2 R + P_{мех}. \qquad (3.75)$$

Механическую мощность можно выразить через ЭДС индукции E_i, возникающей в обмотке якоря, и ток в цепи. Формула (3.75) тогда примет вид

$$IE = I^2R + IE_i \text{ или } E = IR + E_i. \qquad (3.76)$$

Энергией магнитного поля тока называется величина

$$E_м = \frac{LI^2}{2}.$$

Решение задач

В соответствии с равенствами (3.68) — (3.75) задачи по этой теме целесообразно разделить на следующие группы: задачи на применение закона электромагнитной индукции и самоиндукции; задачи на расчет энергии магнитного поля тока; задачи на применение закона сохранения и превращения энергии к работе электрических машин.

1. Основная цель решения задач первой группы — раскрыть сущность явления электромагнитной индукции. При этом важно отметить, что ЭДС индукции независимо от причин, вызывающих ее появление, может быть рассчитана по формуле (3.69). В тех случаях, когда рассматривается контур, находящийся в магнитном поле, следует найти магнитный поток, пронизывающий контур, как функцию времени. В зависимости от условия задачи изменение магнитного потока $\Delta\Phi$ за время Δt будет равно:

1) $S\Delta B \cos\alpha$, если изменяется магнитная индукция поля, в котором находится контур;

2) $BS\Delta(\cos\alpha)$, если изменяется положение контура в магнитном поле,

3) $B\Delta S\cos\alpha$, если изменяется площадь контура.

Следует помнить также, что изменение магнитного потока $\Delta\Phi$, вызывающего индукционный ток, и магнитный поток индукционного тока Φ' всегда имеют противоположные знаки. Поэтому, согласно формуле (3.69), если $E_i>0$, то и $\Phi'>0$, т. е. вектор магнитной индукции индукционного тока $\mathbf{B}$ направлен в ту же сторону, что и нормаль $\mathbf{n}$ к рамке. И наоборот, если $E_i<0$, то $\Phi'<0$, т. е. векторы $\mathbf{B}'$ и $\mathbf{n}$ имеют противоположные направления.

Решение задач на расчет электрических цепей, в которых на одном из участков возникает ЭДС индукции, вызванная движением проводника с током в магнитном поле, следует начинать с определения величины и направления индукционного тока. После этого надо решать задачу методом расчета цепи постоянного тока с несколькими ЭДС, соединенными последовательно или параллельно.

Пример 1. Плоская проволочная квадратная рамка со стороной a находится в магнитном поле с индукцией B, перпендикулярной к ее плоскости. Затем ее: а) изгибают в прямоугольник с отношением сторон 1 : 2; б) вытягивают в одну линию; в) изгибают в два квадрата с отношением площадей 1 : 4. Определить заряды, протекающие по рамке при каждом изменении ее формы. Сопротивление рамки R.

Решение. Заряд, протекающий по контуру, определяется по формуле

$$q = I\Delta t = \frac{E_i}{R}\,\Delta t = \frac{\Delta\Phi}{R}.$$

Для решения задачи необходимо вычислить соответствующие изменения магнитного потока. В случаях «а» и «б» эти изменения происходят только вследствие изменения площади поверхности, охватываемой контурами: $\Delta\Phi = B\Delta S$. Так как периметр рамки постоянен, изменение площади в первом случае $\Delta S_1 = \left(\frac{2}{3}a\right)\times\left(\frac{4}{3}a\right) - a^2 = -\frac{1}{9}a^2$, и по рамке протекает заряд $q_1 = \frac{B\Delta S_1}{R} = \frac{Ba^2}{9R}$.

Во втором случае конечная площадь рамки равна нулю, поэтому $\Delta S_2 = -a^2$ и $q_2 = \frac{B\Delta S_2}{R} = \frac{Ba^2}{R}$.

В третьем случае рамку перегибают так, что направление нормали у одного из квадратов оказывается противоположным начальному направлению. Следовательно, полный поток магнитной индукции равен разности магнитных потоков через отдельные квадраты: $\Phi = B(S_1 - S_2)$, где $S_1 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2$, $S_2 = \frac{S_1}{4} = \frac{a^2}{9}$ — площади большого и меньшего квадратов. Тогда $\Delta S_3 = \left(\frac{4}{9}a^2 - \frac{a^2}{9}\right) - a^2 = -\frac{2}{3}a^2$ и по рамке протекает заряд $q_3 = \frac{B\Delta S_3}{R} = \frac{2}{3}\,\frac{Ba^2}{R}$.

Пример 2. Две горизонтально расположенные на расстоянии $l=20$ см друг от друга медные шины присоединены к источнику тока с ЭДС $E=0{,}8$ В и помещены в однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ Тл, направленной вертикально. По шинам скользит под действием сил поля прямолинейный проводник со скоростью $v=2$ м/с; сопротивление проводника $R=0{,}2$ Ом. Определить ЭДС индукции, силу тока в цепи, силу, действующую на проводник со стороны поля, мощность, расходуемую на движение проводника, и тепловую мощность. Сопротивлением шин и внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Решение. На концах проводника при его движении в магнитном поле возникает ЭДС индукции $E_i = Blv \sin \alpha$. Для нашего случая $\alpha = 90°$, поэтому

$$E_i = Blv = 0{,}4 \text{ В}.$$

Силу тока определим из закона сохранения энергии. Общая работа, совершенная источником тока, идет на выделение джоулевой теплоты и перемещение проводника в поле: $EI\Delta t = I^2R\Delta t + I\Delta\Phi$, отсюда

$$I = \frac{E - Blv}{R} = 2 \text{ А}.$$

Следовательно, сила тока при движении проводника под влиянием силы, действующей со стороны магнитного поля, будет меньше, чем при покое, когда она равна $I = \frac{E}{R} = 4$ А.

Сила, действующая на проводник с током,

$$F = BIl \sin \alpha = 0{,}4 \text{ Н}.$$

Мощность, расходуемая на движение проводника,

$$P_1 = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{I\Delta\Phi}{\Delta t} = IBlv = 0{,}8 \text{ Вт};$$

тепловая мощность $P_2 = I^2R = 0{,}8$ Вт.

2. Решение задач на расчет энергии магнитного поля тока основано на применении формулы (3.76). Для определения длины и площади поперечного сечения витка или соленоида могут быть использованы дополнительные соотношения.

Пример 3. На круглом деревянном цилиндре имеется однослойная катушка из медной проволоки, масса которой $m = 50$ г. Расстояние между крайними витками $l_1 = 60$ см много больше диаметра цилиндра, а сопротивление обмотки $R = 30$ Ом. Определить энергию магнитного поля катушки, если она подключена к источнику тока с ЭДС $E = 62$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом.

Решение. Энергия магнитного поля катушки $E_м = \frac{LI^2}{2}$, ее индуктивность $L = \mu_0\mu \frac{N^2}{l_1} \pi a^2$, где $N = \frac{l_2}{2\pi a}$ — число витков, $S = \pi a^2$ — площадь поперечного сечения соленоида, a — радиус витков.

Длину провода l_2 найдем из следующих соотношений: $m = Dl_2S_1$, где D — плотность вещества, S_1 — площадь поперечного сечения провода и $R = \rho \frac{l_2}{S_1}$.
Из этих формул $l_2 = \sqrt{\frac{mR}{D\rho}}$. Тогда число витков $N = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{mR}{D\rho}}$. Следовательно,

$$L = \frac{\pi\mu_0\mu}{l_1} \frac{mR}{4\pi^2 D\rho} = \mu_0\mu \frac{mR}{4\pi D\rho l_1}.$$

Сила тока в цепи, согласно закону Ома, $I = \frac{E}{R + r}$. Подставив это значение в формулу энергии магнитного поля, получим

$$E = \frac{LI^2}{2} = \frac{LE^2}{2(R + r)^2} = 31 \text{ мкДж}.$$

3. В основе решения задач о работе электрических машин постоянного тока лежит закон сохранения и превращения энергии. В более сложных задачах используются вспомогательные уравнения, позволяющие представить в развернутом виде ту или иную величину, входящую в основное уравнение. Как правило, для этого нужно воспользоваться формулами (3.74)—(3.76). Полезно иметь в виду также, что $P_{мех}=Fv=M2\pi n$, где M — момент сил трения на валу электродвигателя, n — частота вращения якоря.

Пример 4. Груз массой m, подвешенный на нити, которая намотана на ось динамомашины с постоянным магнитом и замкнутой на сопротивление R, опускается со скоростью v_1. С какой скоростью v_2 этот груз будет подниматься, если динамомашину включить как электродвигатель в цепь постоянного тока с ЭДС E и тем же сопротивлением цепи?

Решение. Груз, опускаясь со скоростью v_1, приводит во вращение якорь динамомашины, при этом в цепи возникает ЭДС индукции E_1. Цепь якоря замкнута на сопротивление R, следовательно, в этой цепи возникает ток $I=\frac{E_1}{R}$. Согласно закону сохранения энергии, мощность, развиваемая динамомашиной, должна быть равна мощности, отдаваемой грузом при его опускании: $\frac{E_1^2}{R}=mgv_1$, отсюда

$$E_1=\sqrt{mgv_1R}. \tag{3.77}$$

Если динамомашина будет работать как двигатель, то при той же скорости вращения якоря ЭДС индукции будет равна ЭДС динамомашины. Поскольку ЭДС индукции пропорциональна скорости вращения якоря, то

$$E_2=E_1\frac{v_2}{v_1},$$

а закон Ома запишется так:

$$E-E_2=I_2R. \tag{3.78}$$

Согласно закону сохранения энергии, мощность, потребляемая электродвигателем, равна мощности, расходуемой на поднятие груза:

$$EI_2=I_2^2R+mgv_2. \tag{3.79}$$

Решая систему уравнений (3.78), (3.79) и выражая E_1 в соответствии с формулой (3.77), получаем

$$v_2=\frac{\sqrt{mgv_1R}\,(E-mgv_1R)}{mgR}.$$

Пример 5. С какой частотой будет вращаться якорь электродвигателя постоянного тока, включенного в цепь источника с ЭДС E при полном сопротивлении цепи R, если, работая как динамомашина, электродвигатель разовьет ЭДС E_1 при n_1 об/с, а момент сил трения на оси двигателя составляет M? Определить силу тока в цепи и число оборотов при $M=0$.

Решение. Поскольку ЭДС индукции, возникающая в якоре, пропорциональна скорости его вращения $\left(\frac{E_i}{E_1}=\frac{n}{n_1}\right)$, то

$$E_i=E_1\frac{n}{n_1}. \tag{3.80}$$

В соответствии с законом сохранения энергии при работе машины в режиме двигателя имеет место уравнение

$$EI=I^2R+E_iI, \tag{3.81}$$

где EI — полная мощность источника тока; I^2R — тепловая мощность, E_iI — механическая мощность двигателя.

Механическую мощность двигателя можно выразить через механический момент нагрузки и угловую скорость вращения якоря:

$$E_iI = F_{\text{тр}}v,$$

где $F_{\text{тр}}$ — сила трения; $v = 2\pi rn$ — линейная скорость точек на оси вала. Тогда равенство $E_iI = F_{\text{тр}}2\pi rn$ можно переписать так:

$$E_iI = 2\pi nM, \tag{3.82}$$

где $M = F_{\text{тр}}r$ — механический момент нагрузки.

Из уравнений (3.80) и (3.82) найдем

$$I = \frac{2\pi Mn_1}{E_1}. \tag{3.83}$$

Подставив выражение (3.83) в (3.81) и решив полученное уравнение относительно n, получим

$$n = \frac{E}{E_1}n_1 - \frac{2\pi Mn_1^2}{E_1^2}R.$$

Если механическая нагрузка на валу якоря отсутствует ($M = 0$), то $n = \frac{E}{E_1}n_1$. Кроме того, $E_iI = 0$, и уравнение (3.82) принимает вид $EI = I^2R$. Это уравнение имеет два корня: $I_1 = 0$ — сила тока холостого хода и $I_2 = \frac{E}{R}$ — сила тока в цепи при полностью заторможенном якоре.

Задачи для самостоятельного решения

3.155. Будет ли возникать индукционный ток в замкнутом контуре, находящемся в однородном магнитном поле, если контур: а) перемещать поступательно; б) вращать вокруг оси, проходящей через его центр, перпендикулярно к плоскости; в) вращать вокруг оси, лежащей в его плоскости?

3.156. Магнитный поток, связанный с замкнутым контуром сопротивлением 0,5 Ом, в течение 10 с после начала отсчета времени равен 50 мВб, затем возрастает в течение 10 с на 3 мВб за 2 с, после этого убывает на 10 мВб за 1 с до нуля. Начертить график зависимости от времени силы тока в контуре, магнитного потока, связанного с контуром, и ЭДС индукции в контуре.

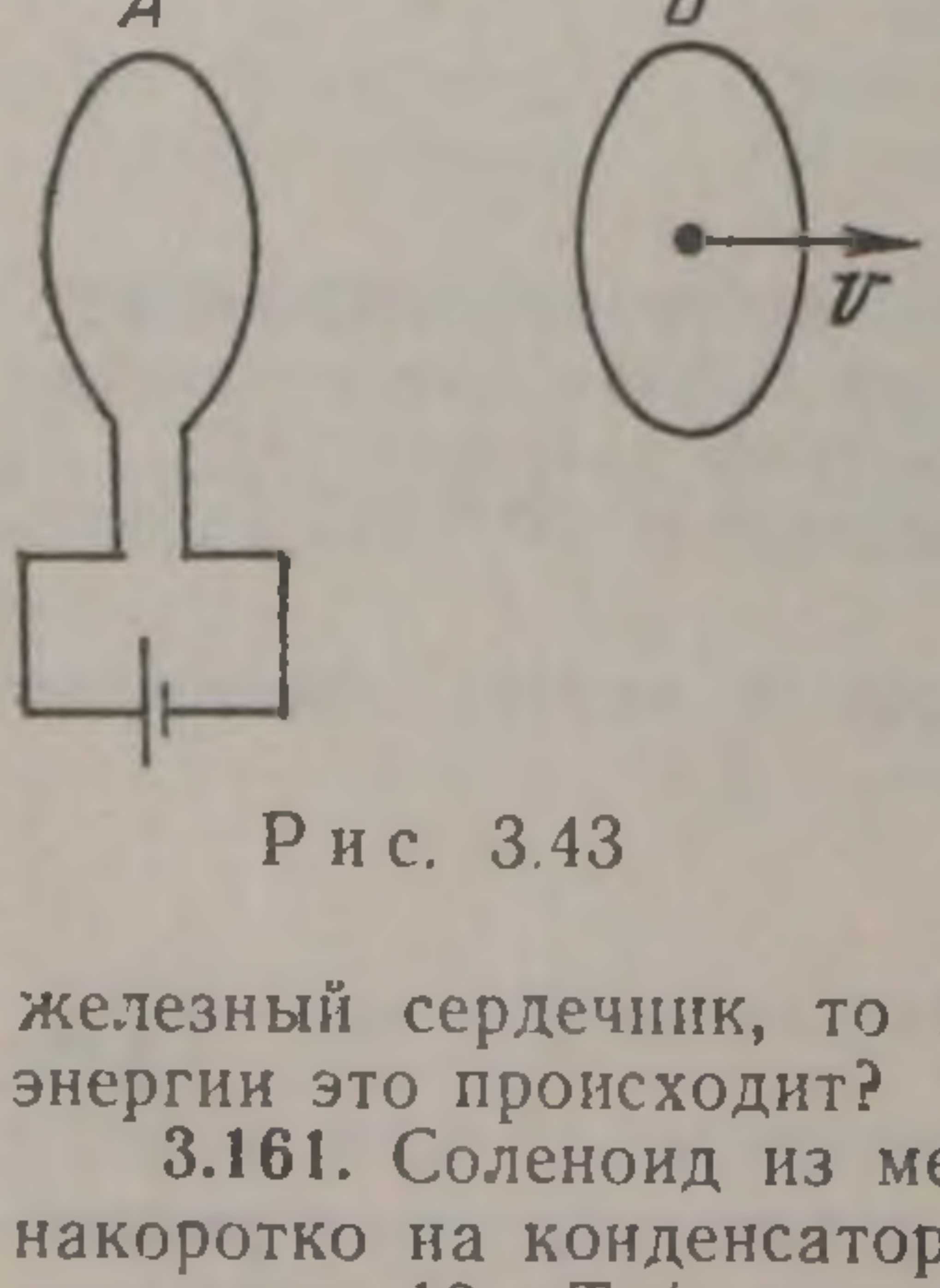


Рис. 3.43

3.157. Определить направление индукционного тока в контуре B (рис. 3.43), если контуры: а) удаляются друг от друга; б) приближаются друг к другу.

3.158. В каком направлении потечет ток по участку цепи AB в контурах, показанных на рис. 3.44, если замкнуть ключ?

3.159. Прямой полосовой магнит падает сквозь замкнутый на гальванометр соленоид. Начертить примерный график изменения силы тока со временем.

3.160. В замкнутую накоротко катушку вставлена катушка меньшего диаметра, по которой течет постоянный ток. Если во вторую катушку вдвигать железный сердечник, то первая катушка нагревается. Почему и за счет какой энергии это происходит?

3.161. Соленоид из медной проволоки поперечным сечением 0,2 мм² замкнут накоротко на конденсатор емкостью 10 мкФ и помещен в изменяющееся со скоростью 10 мТл/с магнитное поле. Определить заряд конденсатора и тепловую мощность в соленоиде, если он имеет 1000 витков диаметром 5 см.

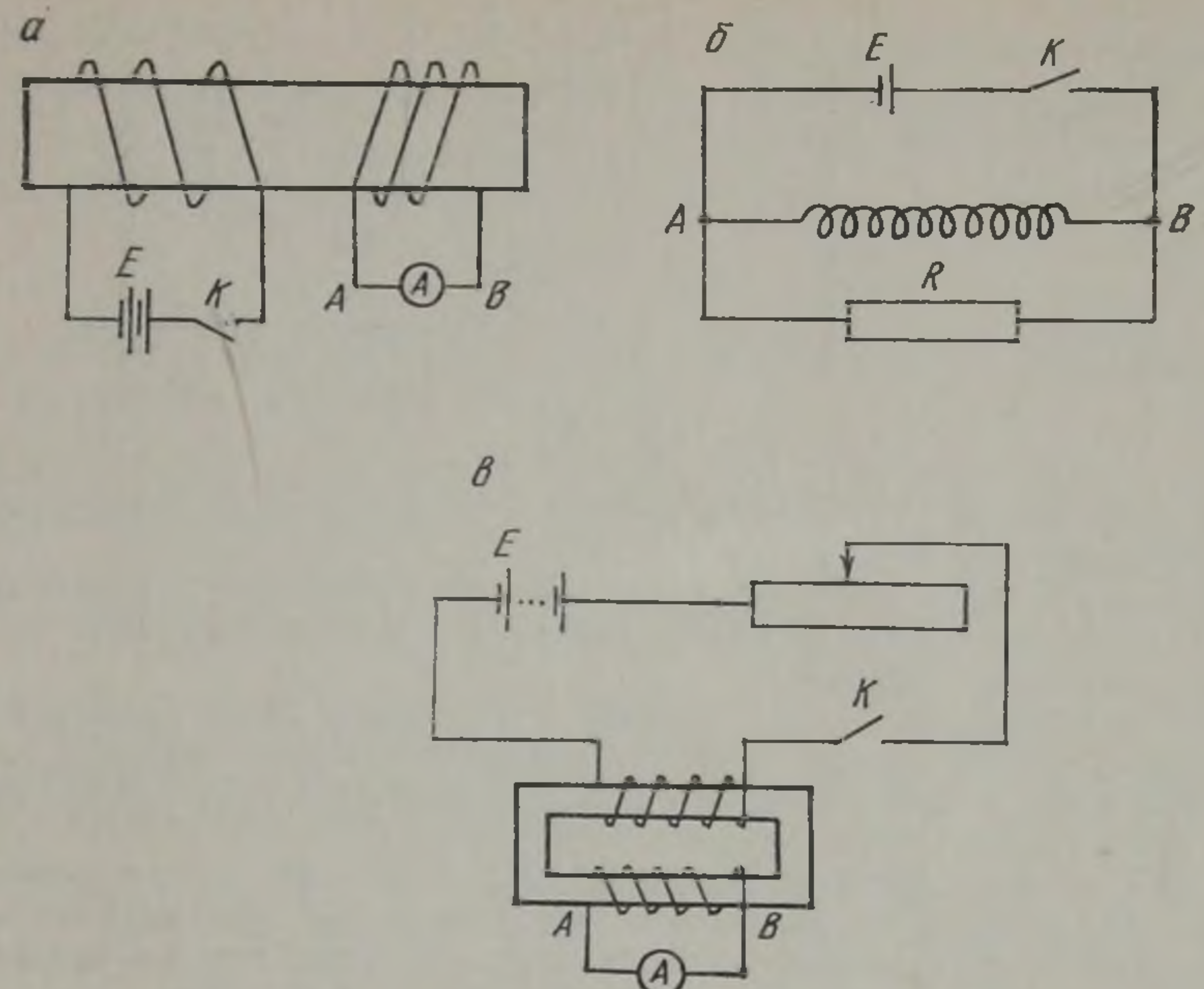


Рис. 3.44

3.162. Проводники (рис. 3.45) находятся в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости чертежа. Когда поле стало изменяться (оставаясь однородным), в левом проводнике ($S=10$ см^2) возникла ЭДС индукции 10 В. Определить ЭДС индукции в правом проводнике, если $S_1=7$ см^2, $S_2=3$ см^2. Магнитные поля, созданные токами в проводниках, не учитывать.

3.163. В магнитном поле с индукцией 60 мТл в течение 0,5 с поворачивается на угол 180° соленоид из 100 витков диаметром 10 см каждый. Определить среднее значение ЭДС, возникающей в соленоиде, если его ось до и после поворота направлена вдоль поля.

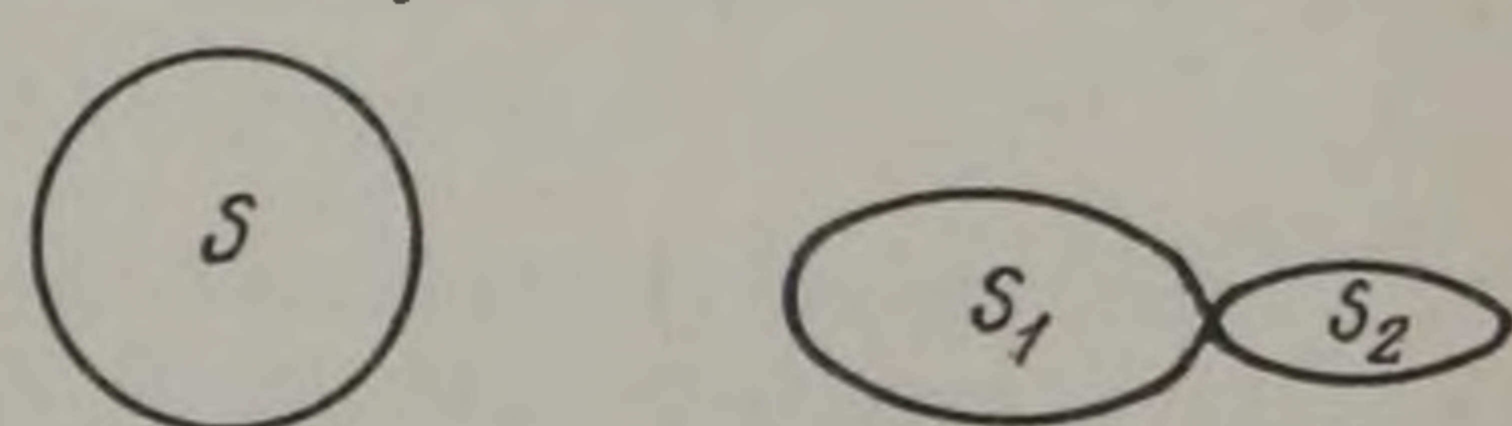


Рис. 3.45

3.164. Соленоид находится в магнитном поле, параллельном его оси. При включении магнитного поля за 10^{-2} с в соленоиде возникает ЭДС индукции 1,2 В. Какая ЭДС возникнет при повороте оси соленоида на угол 60° за 10^{-3} с?

3.165. Квадратный каркас из тонкой медной проволоки массой 1 г помещен в магнитное поле с индукцией 0,1 Тл так, что плоскость его перпендикулярна к линиям индукции поля. Определить, какое количество электричества протечет по проводнику, если квадрат вытянуть в линию.

3.166. Металлический стержень длиной 0,5 м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов, делая 8 с$^{-1}$. Определить разность потенциалов на концах стержня, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

3.167. Металлический стержень длиной 1 м скользит с постоянной скоростью 2 м/с вдоль рельсов в магнитном поле с индукцией 0,1 мТл, направленной так, как показано на рис. 3.46. Определить силу тока на участке AB и заряд на конденсаторе емкостью 1 мкФ, если $L=4$ мГн, $R=0{,}2$ Ом. Сопротивлением рельсов и стержня пренебречь.

3.168. Катушку индуктивностью 3 Гн подключают к источнику тока с ЭДС на конденсаторе емкостью 1 мкФ, если $L=4$ мГн, $R=0{,}2$ Ом. Сопротивлением катушки и источника тока пренебречь.

3.169. Определить среднее значение ЭДС на концах соленоида длиной 15 см и диаметром 5 см, выполненного из медной проволоки диаметром 0,8 мм, если

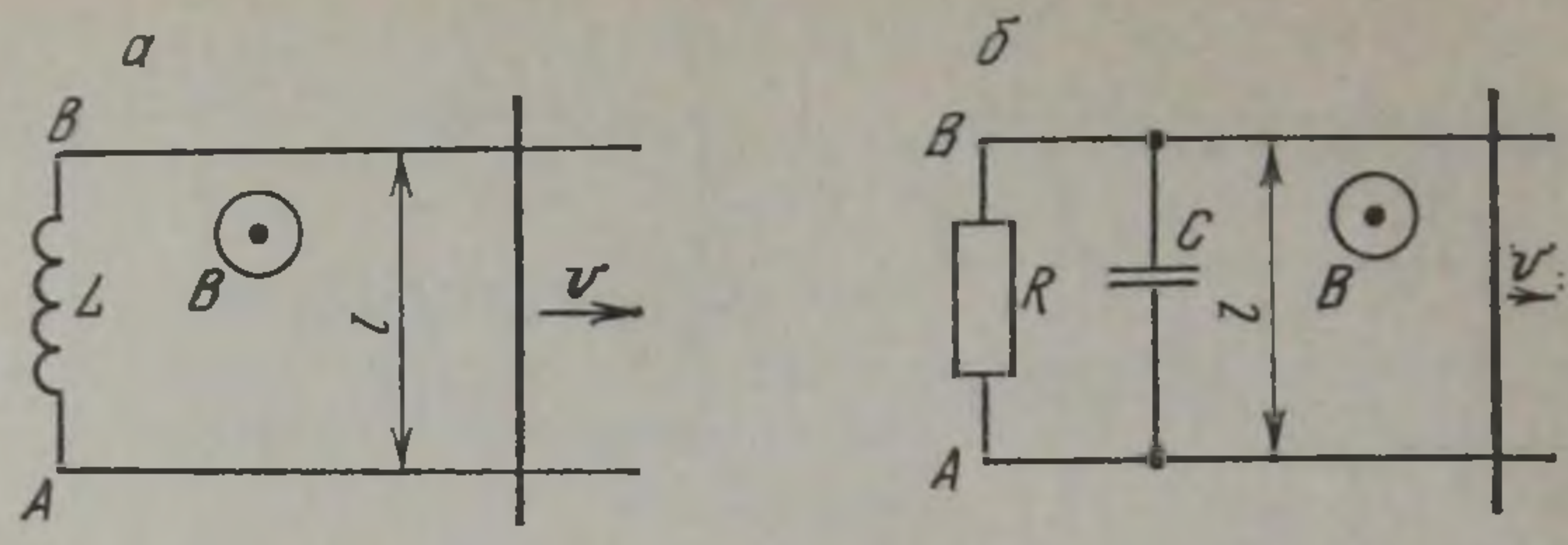


Рис. 3.46

сила тока в цепи при ее размыкании уменьшается до нуля за 1 мс, а магнитная индукция при замкнутой цепи равна 1,2 Тл.

3.170. Почему электродвигатель, работающий вхолостую, нагревается меньше, чем когда он нагружен? В каком случае в обмотке двигателя выделяется наибольшее количество теплоты?

3.171. На горизонтальный вал двигателя радиусом 2 см равномерно наматывается нить с грузом массой 1 кг на конце. Определить частоту вращения вала, если двигатель подключен к источнику постоянного тока с ЭДС 24 В, полное сопротивление цепи 10 Ом, сила тока в цепи 1,5 А.

3.172. Какую максимальную механическую мощность может развить электродвигатель, сопротивление обмотки которого 2,2 Ом, при включении в сеть напряжением 220 В? Какую силу тока он при этом потребляет? Определить значение силы тока в обмотке при механической мощности 0,5 кВт.

3.173. Электродвигатель постоянного тока, включенный в цепь напряжением 24 В (полное сопротивление цепи 20 Ом), вращается со скоростью 10 $с^{-1}$ при силе тока в цепи 0,27 А. Какую ЭДС будет развивать этот двигатель, работая как динамомашина при 25 $с^{-1}$.

3.11. Колебания и волны. Механические колебания

Основные законы и формулы

Колебаниями называются процессы, многократно повторяющиеся через определенные промежутки времени.

Промежуток времени, в течение которого совершается одно полное колебание, называется *периодом*. Период и частота (число колебаний за 1 с) связаны соотношением

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

Гармоническим колебанием называется периодическое колебательное движение, при котором координаты тела меняются во времени по закону синуса (или косинуса):

$$x = X_{max} \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (3.84)$$

где x — величина, периодически меняющаяся во времени; X_{max} — модуль ее максимального значения (амплитуда); t — время; $\omega = 2\pi/T$ — циклическая частота. Величина $\varphi = \omega t + \varphi_0$ называется *фазой колебания*, а φ_0 — *начальной фазой колебания*.

Скорость и ускорение при гармонических колебаниях соответственно равны:

$$v = \omega X_{max} \cos(\omega t + \varphi_0); \qquad (3.85)$$

$$a = -\omega^2 X_{max} \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (3.86)$$

Тело совершает гармонические колебания при условии, если сила, вызывающая эти колебания, пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению. Модуль этой силы

$$F = ma = m\omega^2 x = -kx, \tag{3.87}$$

где $k = m\omega^2$ — коэффициент, измеряемый силой, вызывающей смещение x, равное единице.

Период и частота малых колебаний математического маятника вычисляется по формулам:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};\ \nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{3.88}$$

где l — длина маятника; g — ускорение силы тяжести.

Циклическая частота собственных колебаний и период T пружинного маятника соответственно равны:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}};\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{3.89}$$

где k — коэффициент жесткости пружины; m — масса колеблющегося тела.

Полная энергия тела, совершающего гармонические колебания, $E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$ или с учетом формул (3.84), (3.85), (3.87)

$$E = \frac{kX^2_{max}}{2}.$$

Решение задач

Задачи о колебаниях, предлагаемые в этом параграфе, сгруппированы следующим образом: задачи, при решении которых основными расчетными являются общие уравнения колебательного движения (3.84), (3.87), (3.89); задачи о математическом маятнике; задачи на расчет поправок к маятниковым часам.

1. При решении задач первой группы следует отметить, что смещение, скорость и ускорение гармонического колебания, которые описываются формулами (3.84)—(3.86), можно записать в другом виде, учитывая связь между синусом и косинусом:

$$\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right);\quad \sin\alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right).$$

При определении средних величин скорости и ускорения колеблющейся точки на пути от крайнего положения до положения равновесия важно иметь в виду, что методом среднего арифметического в этом случае пользоваться нельзя, поскольку скорость и ускорение при гармоническом колебании не являются линейными функциями времени.

При решении задач на применение формулы (3.89) следует указать на особенность гармонических свободных колебаний (независимость их частоты от амплитуды). Частота ω_0 определяется только свойствами самой системы — ее массой m и коэффициентом жесткости k.

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний с равными периодами возникает гармоническое колебание того же периода, амплитуда и начальная фаза которого определяются уравнениями:

$$X_{max} = \sqrt{X_{1\,max}^2 + X_{2\,max}^2 + 2X_{1\,max}X_{2\,max}\cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_{1\,max}\sin\varphi_1 + X_{2\,max}\sin\varphi_2}{X_{1\,max}\cos\varphi_1 + X_{2\,max}\cos\varphi_2}.$$

При сложении n ($n>2$) одинаково направленных гармонических колебаний равных периодов для определения амплитуды и начальной фазы результирующего колебания более эффективным является метод векторных диаграмм.

Пример 1. Уравнение движения материальной точки массой 5 г имеет вид $x = 4\sin\left(\frac{2\pi}{8}t + 2\right)$ см. Определить амплитуду колебаний, циклическую частоту, период колебаний, начальную фазу, максимальную скорость, максимальное ускорение, максимальную силу, поддерживающую это движение, и полную энергию колеблющейся точки.

Решение. Из аналогии данного в условии задачи уравнения и уравнения гармонических колебаний (3.84) следует, что: амплитуда колебаний $X_{max} = 4$ см; циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ c^{-1}; начальная фаза $\varphi_0 = 2$ рад; скорость точки $v = \dot{x} = X_{max}\omega\cos(\omega t + \varphi_0)$; период колебаний $T = \frac{2\pi}{\omega} = 8$ с.

Максимальная скорость будет в том случае, когда фаза $\omega t + \varphi_0 = 0$, а $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$; таким образом, $v_{max} = X_{max}\omega = 3{,}14$ см/с. Скорость точки будет максимальной в положении равновесия.

Ускорение точки $a = \ddot{x} = -X_{max}\omega^2\sin(\omega t + \varphi_0)$ будет максимальным при фазе $\omega t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. В этом случае $\sin(\omega t + \varphi_0) = 1$ и $a_{max} = -X_{max}\omega^2 = -2{,}5$ см/с². Ускорение будет максимальным в крайних точках (максимально удаленных от положения равновесия). Знак минус указывает на то, что ускорение всегда направлено в сторону, противоположную смещению точки.

Максимальную силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F_{max} = ma_{max} = 1{,}25 \text{ мкН}.$$

Полная энергия точки $E = E_к + E_п$. Так как

$$E_к = \frac{1}{2}mX_{max}^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0);$$

$$E_п = \frac{1}{2}m\,X_{max}^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0),$$

то

$$E = \frac{1}{2} mX_{\max}^2 \omega^2 \cos^2 (\omega t + \varphi_0) +$$

$$+ \frac{1}{2} mX_{\max}^2 \omega^2 \sin^2 (\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} mX_{\max}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} mX_{\max}^2 \frac{\pi^2}{16} = 250 \text{ мДж}.$$

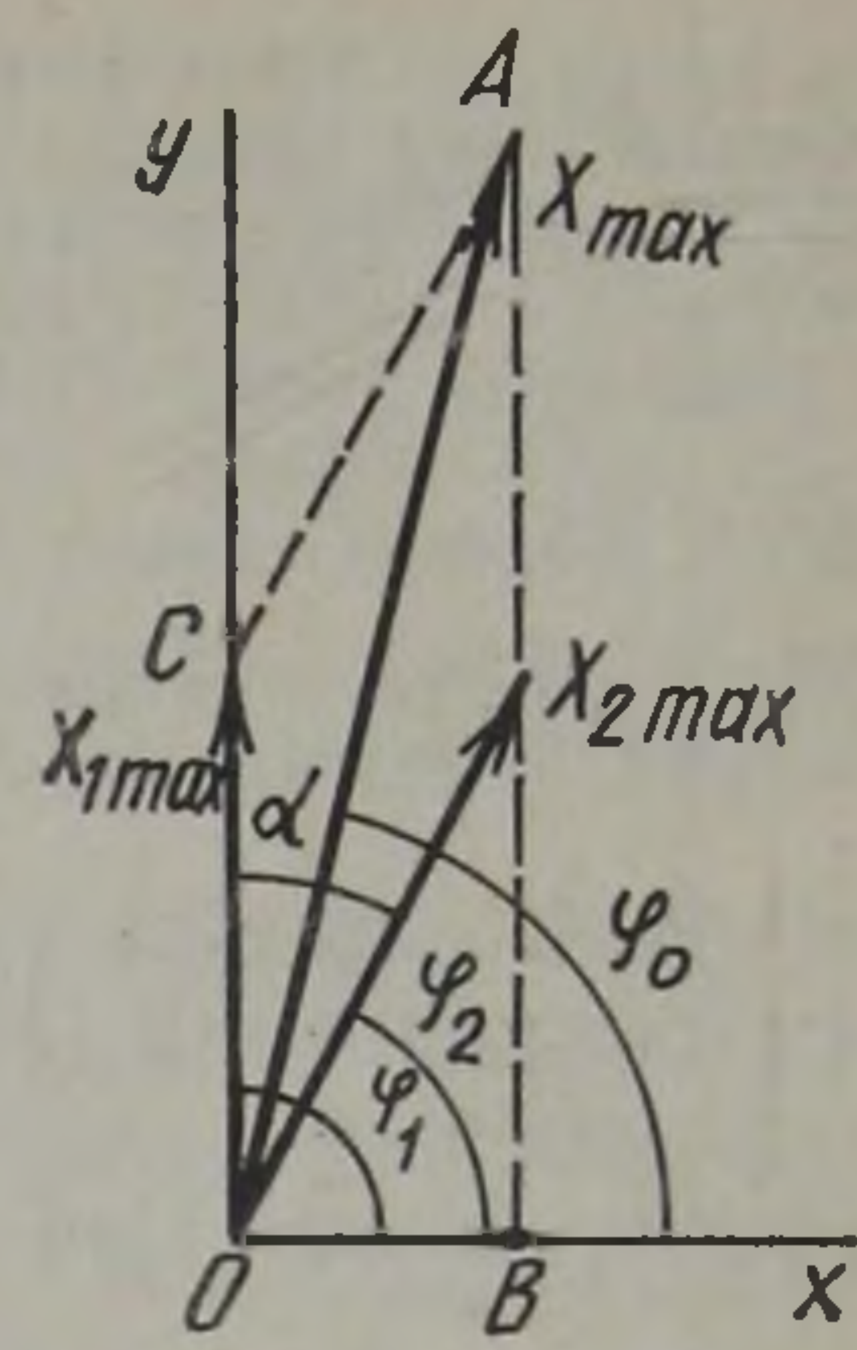


Рис. 3.47

Пример 2. Складываются два гармонических колебания одного направления с одинаковыми периодами $T_1 = T_2 = 1{,}5$ с и амплитудами $X_{1\max} = X_{2\max} = 0{,}02$ м. Начальные фазы колебаний $\varphi_1 = \pi/2$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Определить амплитуду и начальную фазу результирующего колебания и написать его уравнение. Построить векторную диаграмму сложения амплитуд.

Решение. Построим векторную диаграмму. Уравнение первого гармонического колебания $x_1 = 0{,}02 \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} + \frac{\pi}{2}\right)$, второго $x_2 = 0{,}02 \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} + \frac{\pi}{3}\right)$. Уравнение результирующего колебания той же частицы $x = X_{\max} \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} t + \varphi_0\right)$, где $X_{\max}$ и φ_0 — амплитуда и начальная фаза результирующего колебания, которые нужно определить.

Амплитуду найдем из треугольника AOC (рис. 3.47):

$$OA^2 = OC^2 + CA^2 + 2OC \cdot CA \cos\alpha$$

или

$$X_{\max}^2 = X_{1\max}^2 + X_{2\max}^2 + 2X_{1\max} X_{2\max} \cos\alpha.$$

Так как $X_{1\max} = X_{2\max}$, а $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{6}$, то

$$X_{\max} = \sqrt{2X_{1\max}^2 + 2X_{1\max}^2 \cos\alpha} = X_{1\max} \sqrt{2(1 + \cos\alpha)} = 3{,}86 \text{ см}.$$

Начальную фазу результирующего колебания найдем из треугольника AOB:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{AB}{OB} = \frac{X_{1\max}\sin\varphi_1 + X_{2\max}\sin\varphi_2}{X_{1\max}\cos\varphi_1 + X_{2\max}\cos\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = 3{,}78; \ \varphi = 5\pi/12.$$

Тогда уравнение результирующего колебания имеет вид

$$x = 0{,}0386 \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}5} t + \frac{5\pi}{12}\right) \text{ м}.$$

Пример 3. Доска с лежащим на ней грузом массой 1 кг совершает гармоническое колебание в вертикальном направлении с периодом 0,5 с и амплитудой 2 см. Определить величину силы давления груза на доску. Какова должна быть амплитуда колебаний доски, чтобы от нее начал отскакивать груз?

Решение. Запишем уравнение движения груза: $m\mathbf{g} + \mathbf{N} = m\mathbf{a}$, где $\mathbf{N} = -\mathbf{F}$. Считаем направление вниз положительным, тогда искомая сила давления $F = m(g - a)$. Так как колебания гармонические, то $x = X_{\max} \sin \omega t$, а ускорение $a = -\omega^2 X_{\max}$. Следовательно,

$$F = m(g + \omega^2 X_{\max} \sin \omega t).$$

При движении доски ниже положения равновесия сила давления груза всегда больше силы тяжести, так как ускорение отрицательно, поэтому тело отскочить не может. При движении в верхней части ускорение направлено вниз (положительно) и при $a = g$ сила давления становится равной нулю. Тело отскакивает (продолжая двигаться вверх с замедлением) при $a = \omega^2 X_{max}$ (предельное значение). Условие отрыва $\omega^2 X_{max} \gg g$, $X_{max} \gg \frac{g}{\omega^2}$. При амплитуде 6,2 м тело оторвется раньше, чем доска дойдет до максимального отклонения вверх. Решение можно получить также при анализе графика $F = F(t)$.

2. Во вторую группу включены задачи, связанные с применением соотношений (3.88), (3.89). Следует помнить, что формулы (3.88) справедливы при условии, если ускорение точки подвеса маятника равно нулю. При равнопеременном движении точки подвеса $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$, где $\mathbf{g}' = \mathbf{g} + \mathbf{a}$. Вектор **a** равен по модулю вектору ускорения точки подвеса и противоположен ему по направлению.

Пример 4. К потолку лифта подвешен математический маятник, длина которого l. С каким ускорением опускается лифт, если маятник за время t совершает n полных колебаний? С каким ускорением и в каком направлении должен двигаться лифт, чтобы число колебаний возросло в 1,41 раза по сравнению с колебаниями маятника в неподвижном лифте?

Решение. Период колебаний маятника в движущемся лифте зависит не только от ускорения свободного падения, но и от ускорения движения лифта. Действительно, если лифт движется ускоренно, то $\mathbf{F} = m(\mathbf{g} + \mathbf{a})$.

Гармонические колебания маятника вызываются силой $F = -kx$, где $k = m\omega^2$ — коэффициент квазиупругости, x — смещение. С другой стороны, $F = F_н \sin\alpha = F_н \frac{x}{l}$. Поэтому $m\omega^2 x = F_н \frac{x}{l}$, откуда $\omega^2 = \frac{g \pm a}{l}$, но $\omega = 2\pi/T$, следовательно, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}$. Так как период колебаний $T = t/n$, то совместным решением двух последних уравнений найдем a. Для движения лифта с ускорением, направленным против g,

$$a = \frac{t^2 g - 4\pi^2 l n^2}{t^2}.$$

Для движения лифта с ускорением, совпадающим по направлению с ускорением силы тяжести,

$$a = \frac{4\pi^2 l n^2 - t^2 g}{t^2}.$$

Для того чтобы за одно и то же время маятник совершил в 1,41 раза больше колебаний, надо, чтобы период уменьшился в $\sqrt{2}$ раз:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi\sqrt{l/g}}{2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}} = \frac{\sqrt{g+a}}{\sqrt{g}} = \sqrt{2}.$$

Это возможно только в том случае, если $a = g$ и направлено противоположно g, т. е. при ускоренном подъеме или замедленном опускании с ускорением свободного падения. Если лифт опускается ускоренно с ускорением g, то $T = \infty$, т. е. маятник покоится, так как находится в состоянии невесомости.

Важно подчеркнуть, что с чем большей скоростью движется лифт, тем сильнее будет отличаться период колебаний маятника от периода колебаний в покоящемся лифте. Движение с постоянной скоростью не изменит периода при любой скорости движения. В этом проявляется механический принцип относительности.

3. В связи с изучением устройства маятниковых часов следует ознакомить учащихся с решением задач на изменение хода часов в зависимости от температуры (изменение длины), ускорения свободного падения (при подъеме над уровнем моря) или при размещении часов в неинерциальной системе отсчета (лифт или корабль, движущийся с ускорением).

Рассмотрим общий метод решения. Обычно в таких задачах отражаются две ситуации: часы идут верно или их показания неправильны.

Если часы идут верно, то $\tau_1 = kn_1$, где τ_1 — продолжительность суток, n_1 — число колебаний за это время. Для часов с неправильным ходом $\tau_2 = kn_2$, где τ_2 — показания этих часов, n_2 — число колебаний за истинный интервал времени τ_1. Тогда $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{n_1}{n_2}$. Но $n_1 = \frac{\tau_1}{T_1}$, а $n_2 = \frac{\tau_2}{T_2}$. Следовательно,

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{T_2}{T_1} \text{ или } \frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{l_2}{l_1}\frac{g_1}{g_2}},$$

откуда

$$\tau_2 = \tau_1 \sqrt{\frac{l_1}{l_2}\frac{g_2}{g_1}}.$$

Если колебания происходят в одном месте ($g_1 = g_2$), то

$$\tau_2 = \tau_1 \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}.$$

В задачах подобного типа обычно указывается изменение температуры Δt и $l_2 \approx l_1(1 + \alpha\Delta t)$. Тогда

$$\tau_2 = \frac{\tau_1}{\sqrt{1 + \alpha\Delta t}}.$$

Для упрощения решения следует указать, что $\sqrt{1 + \alpha\Delta t} \approx 1 + \frac{\alpha\Delta t}{2}$. Если же $l = \text{const}$, но часы подняты на высоту H, то

$$g_2 = g_1 \frac{R_З}{(R_З + H)^2} \text{ и } \tau_2 = \tau_1 \frac{R_З}{R_З + H}.$$

Изменение хода вычисляется из равенства $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$.

Задачи для самостоятельного решения

3.174. Уравнение движения имеет вид $x = 2\sin \pi t$. Определить, за какую долю периода точка отклоняется от положения равновесия: а) на амплитуду; б) на половину амплитуды.

3.175. Материальная точка совершает гармонические колебания с частотой 500 Гц и амплитудой 0,02 см. Определить: а) средние значения скорости и ускорения точки на пути от ее крайнего положения до положения равновесия; б) максимальные значения этих величин.

3.176. Амплитуда гармонических колебаний тела массой 10 г равна 5 м, полная энергия 31 мкДж. Написать уравнение гармонических колебаний тела, если начальная фаза 60°. Определить момент времени (ближайший к началу отсчета), в который тело будет иметь максимальное смещение.

3.177. Тело массой 10 г совершает колебания, описываемые уравнением $x = 5\sin 2t$ см. В некоторый момент времени сила, действующая на него, равна 5 мН, а полная энергия 12,5 мкДж. Определить фазу и кинетическую энергию тела в этот момент времени.

3.178. Математический маятник длиной 1 м отклонили на угол 5° и отпустили. Написать уравнение движения маятника.

3.179. Как будет меняться период колебаний сосуда с водой, подвешенного на длинной нити, если вода постепенно вытекает через отверстие в его дне?

3.180. Кабина, к потолку которой подвешен математический маятник длиной 1 м, начинает опускаться вертикально вниз с ускорением $g/4$. Через 3 с после начала движения кабина начинает двигаться равномерно, а затем в течение 3 с тормозится до остановки. Определить период гармонических колебаний маятника на каждом участке пути.

3.181. Маятник длиной 1,2 м подвешен к потолку вагона, движущегося горизонтально по прямой с ускорением 2,2 м/с^2. Найти период колебаний маятника.

3.182. С каким ускорением и в каком направлении должна двигаться кабина лифта, чтобы находящийся в ней математический маятник за 2 мин 30 с совершил 100 колебаний?

3.183. Период колебаний шарика массой 16 г, подвешенного на непроводящей нити, равен 1 с. Если шарик зарядить отрицательно и поместить в электрическое поле напряженностью 130 В/м, направленное вертикально, период равен 0,8 с. Определить заряд шарика.

3.184. Пуля массой 10 г, движущаяся со скоростью 500 м/с, попала в подвешенный на невесомой нити деревянный шар массой 1 кг и застряла в нем. При этом нить отклонилась на угол 60°. Определить период колебаний шара.

3.185. Тело, неподвижно висевшее на пружине, растягивало ее на 10 см. Тело сместили из положения равновесия по вертикали и отпустили, в результате чего оно стало совершать колебания. Определить их период.

3.186. Подставка совершает в горизонтальном направлении гармонические колебания с периодом 5 с. Находящееся на подставке тело начинает по ней скользить, когда амплитуда колебаний достигает 0,6 м. Определить коэффициент трения между телом и подставкой.

3.187. Груз подвешен к пружине с помощью нити. Какова должна быть амплитуда колебаний груза, чтобы эти колебания были гармоническими? Масса груза 0,1 кг, жесткость пружины 1,6 кН/м.

3.188. Груз массой 0,1 кг подвешен к двум пружинам с жесткостью 10^3 и $3 \cdot 10^3$ Н/м с помощью нити и блока. Определить период малых колебаний груза. Нить и блок считать невесомыми.

3.189. Закрепленная на концах струна длиной 0,8 м растянута с силой 0,2 Н. К середине струны прикреплен точечный груз массой 10 г. Определить период малых колебаний груза. Массой струны и силой тяжести точечного груза пренебречь.

3.190. Ареометр массой 55 г плавает в жидкости плотностью $1{,}27 \cdot 10^3$ кг/м^3. Если его сместить из положения равновесия по вертикали и отпустить, он начинает колебаться. Определить период колебаний ареометра, если радиус цилиндрической трубки, в которой заключена шкала прибора, равен 0,3 см. Колебания считать незатухающими.

3.191. Маятниковые часы на экваторе идут точно. Уйдут ли они вперед или отстанут (и на сколько в сутки), если их перенести на полюс?

3.192. Как изменится период колебаний стального маятника настенных часов при увеличении температуры на 10 °С? На сколько будут отставать или спешить за сутки часы? Считать, что полный период колебаний маятника часов 2 с.

3.12. Электромагнитные колебания. Переменный ток

Основные законы и формулы

Свободные электромагнитные колебания возникают в колебательном контуре — электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных катушки индуктивности и конденсатора. Для таких колебаний справедливы следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} q &= q_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0);\\ u &= U_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0);\\ i &= I_{max}\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \end{aligned}\right\} \tag{3.90}$$

где q, q_{max} — мгновенное и максимальное значения заряда конденсатора; u, U_{max} — мгновенное и максимальное значения напряжения на обкладках конденсатора; i, I_{max} — мгновенное и максимальное значения силы тока; $\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — циклическая частота.

Период колебаний контура (при $R = 0$) определяется по формуле Томсона

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \tag{3.91}$$

Полная электромагнитная энергия контура равна сумме энергий магнитного и электрического полей:

$$E = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}. \tag{3.92}$$

Переменный ток — это вынужденные электромагнитные колебания, форма которых определяется законом изменения ЭДС источника тока. Если ЭДС в цепи изменяется по закону $e = E_{max}\sin\omega t$, то в такой цепи установятся вынужденные колебания тока той же частоты $i = I_{max}\sin(\omega t + \varphi_0)$. При этом величины I и φ определяются по формулам:

$$I = \frac{U_{max}}{Z};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ — полное сопротивление цепи; $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C}$ — индуктивное и емкостное сопротивления; $X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ — полное реактивное сопротивление переменному току.

Для цепи, содержащей только активное сопротивление, $Z = R$, $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0$, а мгновенное значение тока определяется по формуле

$$i = I_{max}\sin\omega t.$$

При чисто индуктивном сопротивлении $Z = \omega L$, $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, $\varphi = \pi/2$, а ток отстает по фазе от напряжения на $\pi/2$ и определяется по формуле

$$i = I_{max}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

При чисто емкостном сопротивлении $Z = 1/\omega C$, $\operatorname{tg}\varphi = -\infty$, $\varphi = -\pi/2$, а мгновенное значение тока определяется по формуле

$$i = I_{\max}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

В случае смешанной нагрузки сдвиг фаз между током и напряжением находится в пределах $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. При условии $X_L - X_C = 0$ сила тока в цепи достигает максимального значения: $I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z} = \frac{U_{\max}}{R}$ (электрический резонанс).

Эффективной (действующей) силой и *эффективным напряжением переменного синусоидального тока* называется сила и напряжение такого постоянного тока, при котором на нагрузке рассеивается та же мощность, что и при данном переменном токе:

$$I_д = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}; \quad U_д = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Средняя мощность переменного тока

$$P_{ср} = IU\cos\varphi,$$

где $\cos\varphi$ — коэффициент мощности. В случае чисто реактивного сопротивления ($R=0$) $\cos\varphi=0$, а при чисто активной нагрузке $\cos\varphi=1$.

Так как энергию потребляет только активное сопротивление, эту мощность называют *активной* и определяют по формуле

$$P_а = IU\cos\varphi = I^2R.$$

Преобразование тока, при котором меняется его сила практически без изменения мощности, называется *трансформацией*. Коэффициент трансформации

$$k = \frac{n_1}{n_2} = \frac{E_1}{E_2},$$

где n_1, n_2 — число витков в первичной и вторичной обмотках; E_1, E_2 — ЭДС индукции в соответствующих обмотках.

Если падением напряжения на активном сопротивлении в первичной цепи трансформатора можно пренебречь, то $E_1 = U_1$, а в режиме холостого хода $E_2 = U_2$. Тогда

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{U_1}{U_2}.$$

КПД трансформатора — это отношение мощности P_2, отдаваемой вторичной обмоткой, к мощности P_1, подводимой к первичной обмотке:

$$\eta = \frac{P_2}{P_1}.$$

Решение задач

По этой теме условно можно выделить следующие группы задач: задачи на применение формулы Томсона; задачи на применение закона Ома для расчета простейших электрических цепей переменного тока; задачи на расчет мощности и экономической эффективности цепей переменного тока.

1. В основе решения задач первой группы лежат равенства (3.90)—(3.92). Следует помнить, что формула Томсона (3.92) справедлива лишь в случаях, если активным сопротивлением колебательного контура можно пренебречь. При решении ряда задач по этой теме дополнительно могут быть использованы формулы емкости плоского конденсатора и индуктивности катушки.

Пример 1. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C=1{,}8$ мкФ и катушки индуктивностью $L=0{,}2$ Гн. Определить максимальную силу тока I_{max} в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_{max}=100$ В.

Решение. Рассмотрим два способа решения задачи. Первый из них основан на исследовании уравнения свободных электромагнитных колебаний, второй — на законе сохранения энергии.

1-й способ. Если сопротивлением контура пренебречь, то $\omega=\omega_0$, и, следовательно, в этом контуре будут незатухающие колебания. При этом

$$q=q_{max}\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Сила тока есть производная заряда по времени, поэтому

$$i=\omega_0 q_{max}\cos(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (3.93)$$

где $\omega_0 q$ — максимальное значение силы тока в контуре.

Подставляя значение $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ в формулу (3.93) и учитывая равенство $q^{max}=CU$, определяем искомую величину:

$$I_{max}=\omega_0 q=\sqrt{\frac{1}{LC}}\,CU_{max}=U_{max}\sqrt{\frac{C}{L}}=0{,}3 \text{ А}.$$

2-й способ. В процессе незатухающих электромагнитных колебаний полная электромагнитная энергия контура остается постоянной. При этом в те моменты, когда конденсатор максимально заряжен, сила тока равна нулю. Следовательно, полная энергия контура

$$E_{эл}=\frac{CU^2_{max}}{2}. \qquad (3.94)$$

Когда конденсатор разряжен ($U=0$), сила тока достигает максимального значения. Тогда полная энергия

$$E_{max}=\frac{LI^2{}_{max}}{2}, \qquad (3.95)$$

Приравняв правые части уравнений (3.94), (3.95), найдем

$$I_{max}=U_{max}\sqrt{\frac{C}{L}}=0{,}3 \text{ А}.$$

Пример 2. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L=0{,}1$ Гн и конденсатора емкостью $C=0{,}9$ мкФ. Сколько времени проходит от момента, когда конденсатор полностью разряжен, до момента, когда его энергия превышает вдвое энергию катушки? Активным сопротивлением катушки пренебречь.

Решение. Если отсчитывать время от момента полной разрядки конденсатора, то напряжение на его обкладках определяется соотношением

$$U = U_{max} \sin \frac{2\pi}{T} t, \tag{3.96}$$

а период

$$T = 2\pi \sqrt{LC}. \tag{3.97}$$

По условию, энергия конденсатора вдвое больше энергии катушки. Значит,

$$\frac{1}{2} CU^2 = I^2 L, \tag{3.98}$$

где I — ток в катушке. Он отстает от напряжения (по фазе) на $\pi/2$, и тогда

$$i = I_{max} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right) = -I_{max} \cos \frac{2\pi}{T} t. \tag{3.99}$$

Согласно закону Ома, имеем

$$I_{max} = \frac{U_{max}}{\frac{2\pi}{T} L}. \tag{3.100}$$

Решая совместно уравнения (3.96) — (3.100), получаем $t = \sqrt{LC} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{2}$. Подставив в это выражение численные значения L и C, получим $t = 95{,}5$ мкс.

2. Приступая к решению задач на расчет цепей переменного тока, следует помнить об отличии таких цепей от цепей постоянного тока. В случае переменного тока величины I, U, E, определяющие электрические процессы во всей цепи и на ее отдельных участках, совершают гармонические колебания, находясь в различных фазах. Поэтому при параллельном соединении потребителей энергии напряжения на всех участках одинаковы, а токи складываются векторно. При последовательном соединении сила тока на всех участках цепи одинакова, а напряжения складываются по правилу сложения векторных величин с учетом угла разности фаз между ними.

При решении задач методом векторного сложения нужно отложить вектор силы тока $\mathbf{I}$, вектор падения напряжения $\mathbf{U}_R$ совместить с вектором силы тока $\mathbf{I}$, вектор индуктивного падения напряжения $\mathbf{U}_L$ отложить вверх под углом 90°, а вектор емкостного падения напряжения $\mathbf{U}_C$ — вниз под углом 90° к вектору тока $\mathbf{I}$. Сложив геометрически векторы напряжений, получим вектор полного напряжения $\mathbf{U}$, приложенного на всей цепи. При этом если $X_L > X_C$, то $\mathbf{U}_C > \mathbf{U}_L$, а общее напряжение опережает по фазе ток на положительный угол φ. Поэтому в цепи преобладает индуктивное сопротивление (рис. 3.48, *а*). Если $X_C > X_L$, то $\mathbf{U}_C < \mathbf{U}_L$, и цепь имеет емкостный характер. При этом общее напряжение отстает от тока на отрицательный угол φ (рис. 3.48, *б*). Наконец, при резонансе ($X_L = X_C$) $\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_C$. При этом напряжение совпадает по фазе с током (рис. 3.48, *в*).

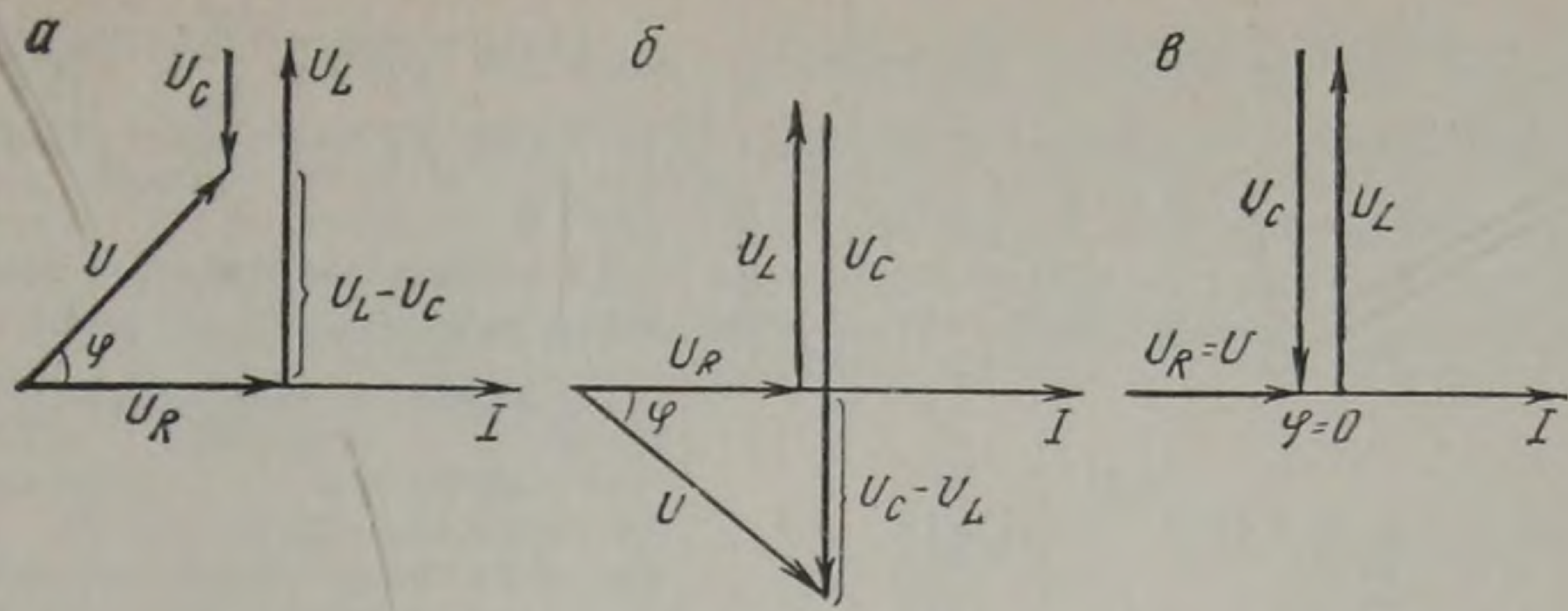


Рис. 3.48

3. При решении задач на расчет мощности и экономической эффективности цепей переменного тока следует помнить, что амперметр и вольтметр в цепи переменного тока измеряют действующие значения силы тока и напряжения. Ваттметр же измеряет среднюю или активную мощность $P_a = IU\cos\varphi$, т. е. учитывает коэффициент мощности. Необходимо учитывать также, что расчет по формулам $Q = U^2/R$ и $Q = I^2Rt$ возможен только в случае чисто активной нагрузки, так как на индуктивном и емкостном сопротивлениях теплота не выделяется.

Следует предупредить нередкую ошибку учащихся, смешивающих разные физические величины: коэффициент мощности ($\cos\varphi$) и коэффициент полезного действия (КПД). Коэффициент мощности показывает, какая часть электрической энергии превращается необратимо во внутреннюю или механическую энергию и в какой мере используется силовая установка, приводящая в действие генератор, а КПД — ту часть выработанной электроэнергии, которая используется полезно.

Пример 3. При включении катушки в цепь постоянного тока с напряжением $U_{пост} = 12$ В амперметр показал силу тока $I_{пост} = 4$ А. Если же эту катушку включить в цепь переменного тока с таким же напряжением и частотой $\nu = 50$ Гц, сила тока $I_{пер} = 2{,}4$ А. Определить: а) индуктивность катушки; б) активную мощность в цепи, если последовательно с катушкой включить конденсатор емкостью 394 мкФ. Нарисовать векторную диаграмму для случая «б».

Решение. Так как при постоянном токе реактивное сопротивление отсутствует, то, согласно закону Ома, $R = \dfrac{U_{пост}}{I_{пост}}$. При переменном токе с помощью этого же закона можно найти полное сопротивление катушки $Z_1 = \dfrac{U_{пер}}{I_{пер}}$, а затем определить X_L из формулы $Z_1^2 = R^2 + X_L^2$. Зная X_L и частоту тока ν и учитывая, что $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$, найдем $L = \dfrac{X_L}{2\pi\nu}$.

Активная мощность тока при включенном в цепь конденсаторе

$$P_a = U_{пер} I'_{пер} \cos\varphi,$$

где

$$I'_{пер} = \frac{U_{пер}}{Z_2} = \frac{U_{пер}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

Нужный для вычисления коэффициент мощности $\cos\varphi = \frac{R}{Z_2}$. Подставив численные значения, получим $R = 3$ Ом, $Z_1 = 5$ Ом, $X_L = 4$ Ом, $X_C = 8$ Ом, $L = 12{,}7$ мГн, $\cos\varphi = 0{,}6$, $I'_{пер} = 2{,}4$ А, $P = 17{,}3$ Вт.

Так как $X_C > X_L$, то вектор напряжения будет отставать от вектора тока на угол φ. Учитывая, что $U_C = 2U_L$, строим векторную диаграмму (рис. 3.49).

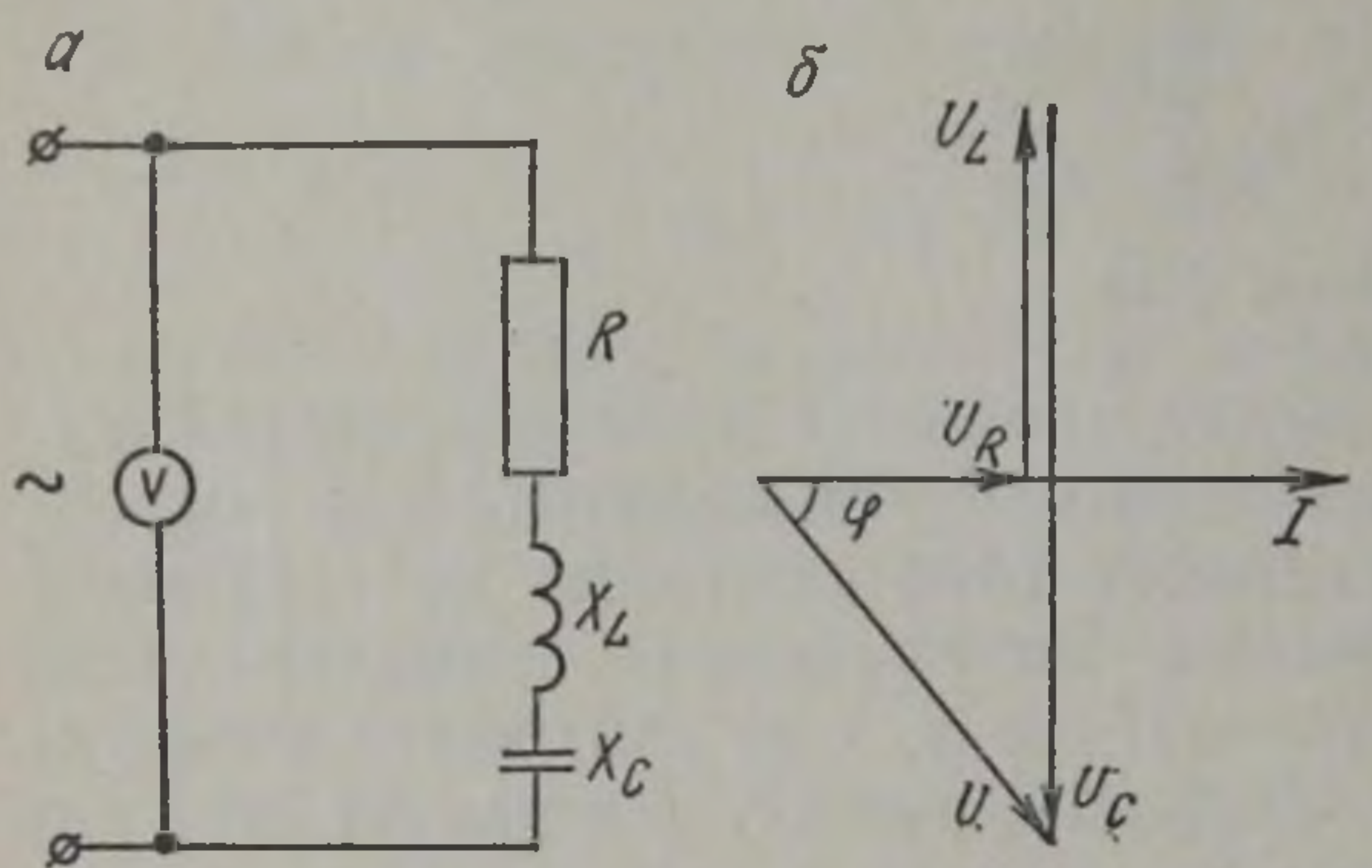


Рис. 3.49

Пример 4. Определить сопротивление вторичной обмотки трансформатора с коэффициентом трансформации $k = 10$, если при включении первичной обмотки в сеть напряжением 210 В во вторичной обмотке сила тока 5 А, а напряжение 6 В. Потерями энергии в первичной обмотке пренебречь.

Решение. По условию задачи, потерями в первичной обмотке пренебрегаем, поэтому ЭДС индукции в первичной обмотке $E_1 = U_1$. Учитывая, что $k = \frac{E_1}{E_2}$, найдем $E_2 = \frac{E_1}{k}$. Но $E_2 = I_2 r_2 + U_2$, где I_2 — ток вторичной обмотки, r_2 — ее сопротивление, U_2 — падение напряжения. В результате получим

$$I_2 r_2 = E_2 - U_2 = \frac{U_1}{k},$$

откуда

$$r_2 = \frac{\frac{U_1}{k} - U_2}{I_2} = \frac{U_1 - kU_2}{kI_2} = 3 \text{ Ом}.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.193. К колебательному контуру, имеющему сопротивление R, подключают добавочное сопротивление r один раз параллельно, другой последовательно. Будет ли и как меняться затухание электрических колебаний в контуре, если: а) $r \ll R$; б) $r \gg R$; в) $r = R$?

3.194. Как изменятся графики зависимости силы тока, напряжения, заряда на обкладках конденсатора в колебательном контуре, если: а) в тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно нулю, мгновенно изменить емкость; б) в момент, когда сила тока в контуре равна нулю, мгновенно изменить индуктивность катушки?

3.195. В колебательном контуре индуктивностью 1 мГн сила тока изменяется по закону $i = 0{,}02\cos\left(10^6 t + \frac{\pi}{2}\right)$ А. Определить емкость конденсатора, включенного в этот контур. В какой части контура была сосредоточена энергия электромагнитного поля в момент начала отсчета времени?

3.196. ЭДС в цепи переменного тока изменяется по закону $E = 100\sin 20\pi t$ В. Определить максимальное и эффективное значения ЭДС и ее значение для фазы $\pi/4$, а также период и частоту изменения силы тока.

3.197. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью 2 нФ и катушки индуктивности, активное сопротивление которой мало. Определить индуктивность катушки и период свободных колебаний в контуре, если амплитуда напряжения на конденсаторе 80 В, а действующее зачение силы тока в контуре 1 мА.

3.198. Две катушки, индуктивности которых 60 и 40 мГн, соединены параллельно. Какими будут максимальные значения силы тока в катушках, если параллельно им подключить конденсатор емкостью 240 пФ, предварительно заряженный до напряжения 100 В?

3.199. На рис. 3.50 показаны участки цепи переменного тока. На каком участке и в каком случае: а) напряжение не зависит от силы тока; б) сила тока не зависит от напряжения?

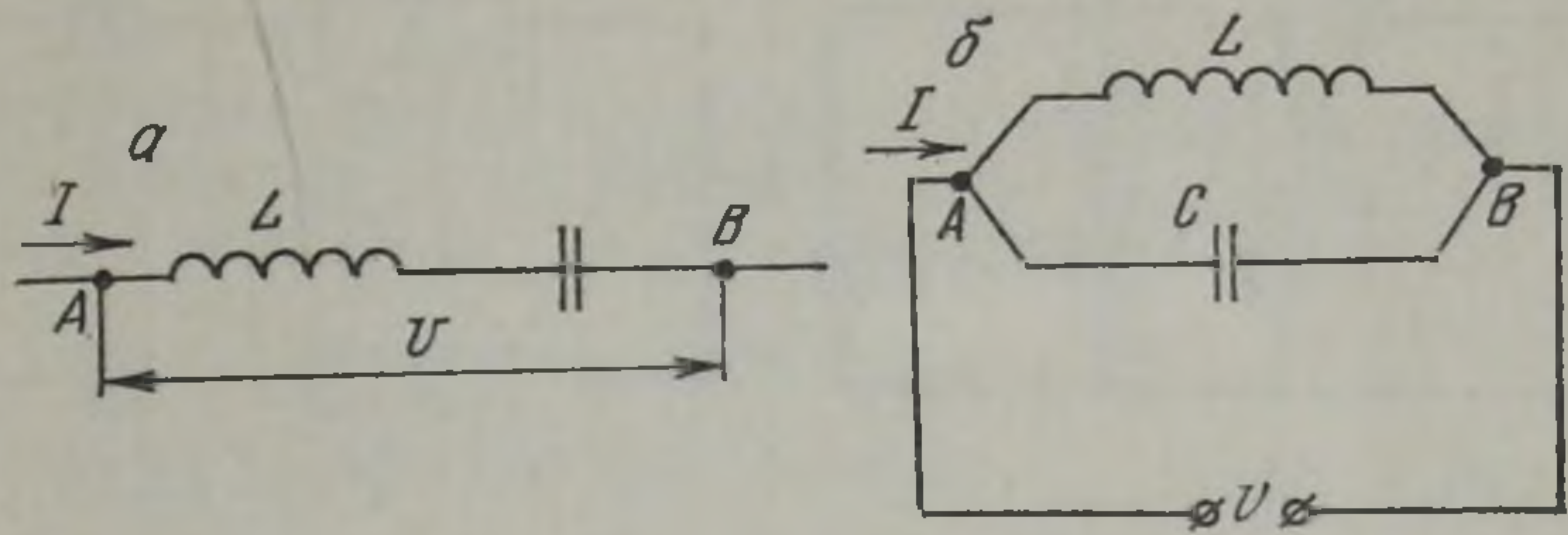


Рис. 3.50

3.200. Как, имея конденсатор, источник переменного тока, вольтметр, соединительные провода, резистор с известным сопротивлением, определить емкость конденсатора?

3.201. На рис. 3.51 показаны графики напряжения и тока в батарее конденсаторов. Пользуясь графиком, определить частоту тока, величину емкостного сопротивления и электроемкость батареи конденсаторов. Как изменится график при переключении батареи конденсаторов с параллельного соединения на последовательное?

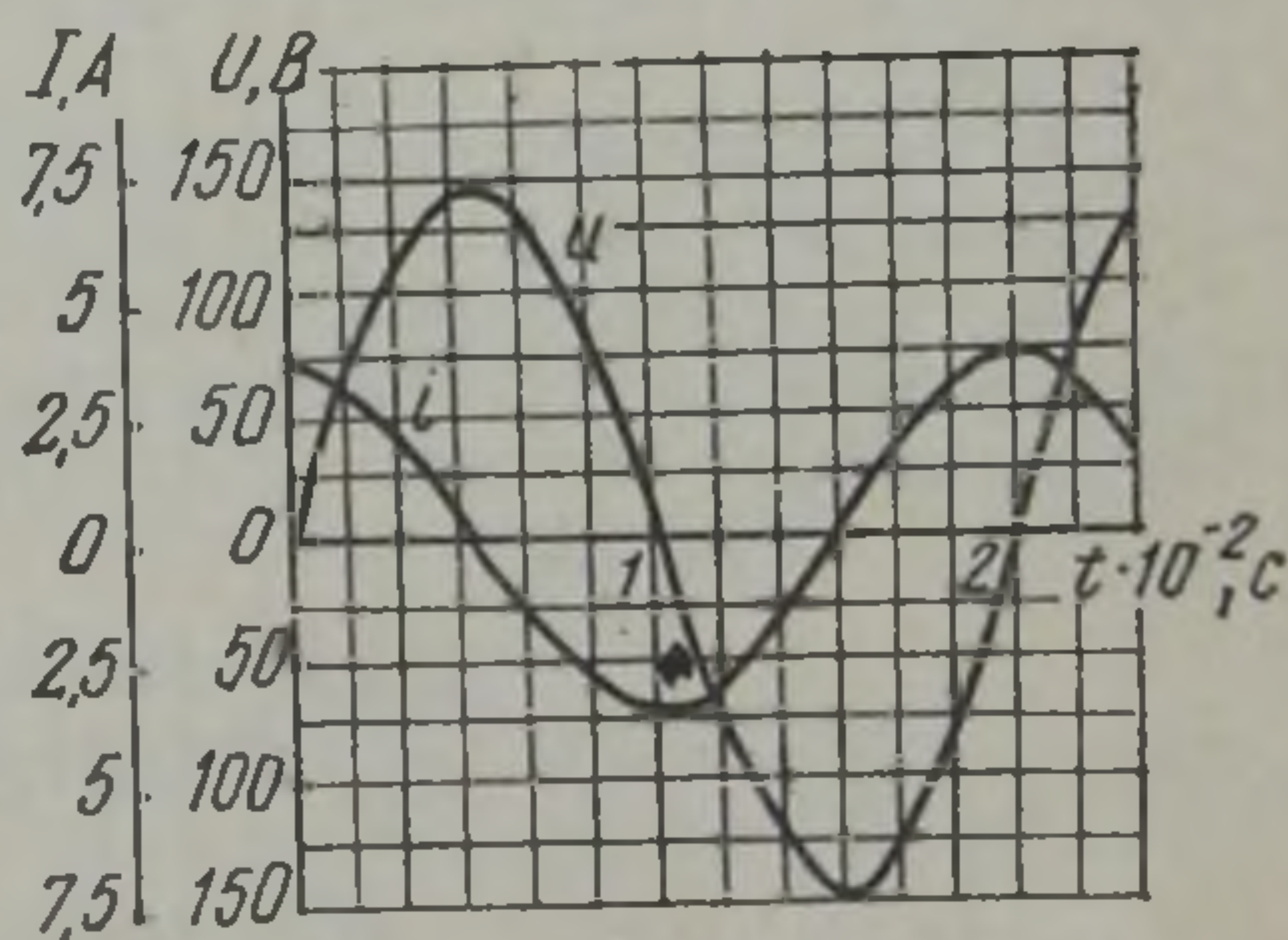


Рис. 3.51

3.202. Сколько времени будет гореть неоновая лампа, если подключить ее на одну минуту в сеть переменного тока с действующим напряжением 120 В и частотой 50 Гц? Лампа зажигается и гаснет при напряжении 84 В.

3.203. Имеются источник переменного тока, напряжение на клеммах которого меняется по закону $u = 120 \sin \omega t$ В, активное сопротивление 60 Ом, индуктивное — 80 Ом, емкостные — 60 и 80 Ом соответственно. Определить полное сопротивление при параллельном соединении сопротивлений: а) активного и индуктивного; б) индуктивного и меньшего емкостного; в) индуктивного и большего емкостного.

3.204. Реостат сопротивлением 100 Ом, катушка, активное сопротивление которой 120 Ом и индуктивность 0,6 Гн, и конденсатор включены последовательно в цепь переменного тока частотой 50 Гц. Какова должна быть электроемкость конденсатора, чтобы ток в цепи был максимальным? Чему равно при этом эффективное значение тока, если эффективное напряжение 120 В?

3.205. Квадратная рамка площадью 50 см² из медного провода вращается со скоростью 600 об/с в однородном магнитном поле с индукцией 0,1 Тл вокруг оси, которая совпадает с осью рамки и перпендикулярна к магнитному полю. Определить, на сколько градусов изменится температура обмотки рамки за 5 мин. Теплопотерями пренебречь.

3.206. Построить векторную диаграмму и найти полное сопротивление и сдвиг фаз для цепи с последовательным соединением: а) катушки и реостата; б) конденсатора и реостата.

3.207. В цепи (рис, 3.52) активное сопротивление 3 Ом, емкостное 2 Ом, индуктивное 4 Ом. Определить показания приборов, если цепь находится под напряжением 36 В. Построить векторную диаграмму и определить угол сдвига фаз между током и напряжением.

3.208. Как, имея источник переменного тока, лампы на 36 В, вольтметр, конденсатор известной емкости и соединительные провода, определить номинальную мощность лампы?

3.209. Ваттметр на щите показывает мощность 12 кВт, вольтметр — напряжение 380 В и амперметр — силу тока 36 А. Определить сдвиг фаз в цепи, полное и активное сопротивления нагрузки.

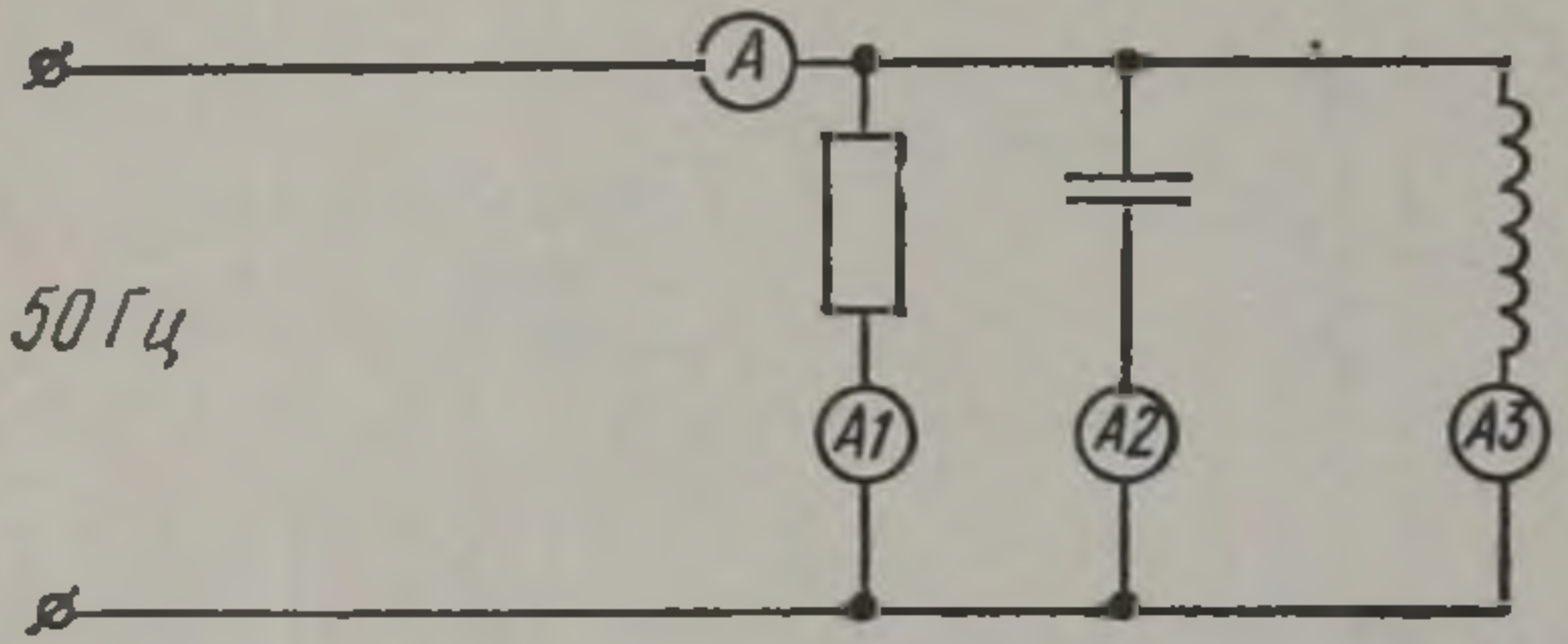


Рис. 3.52

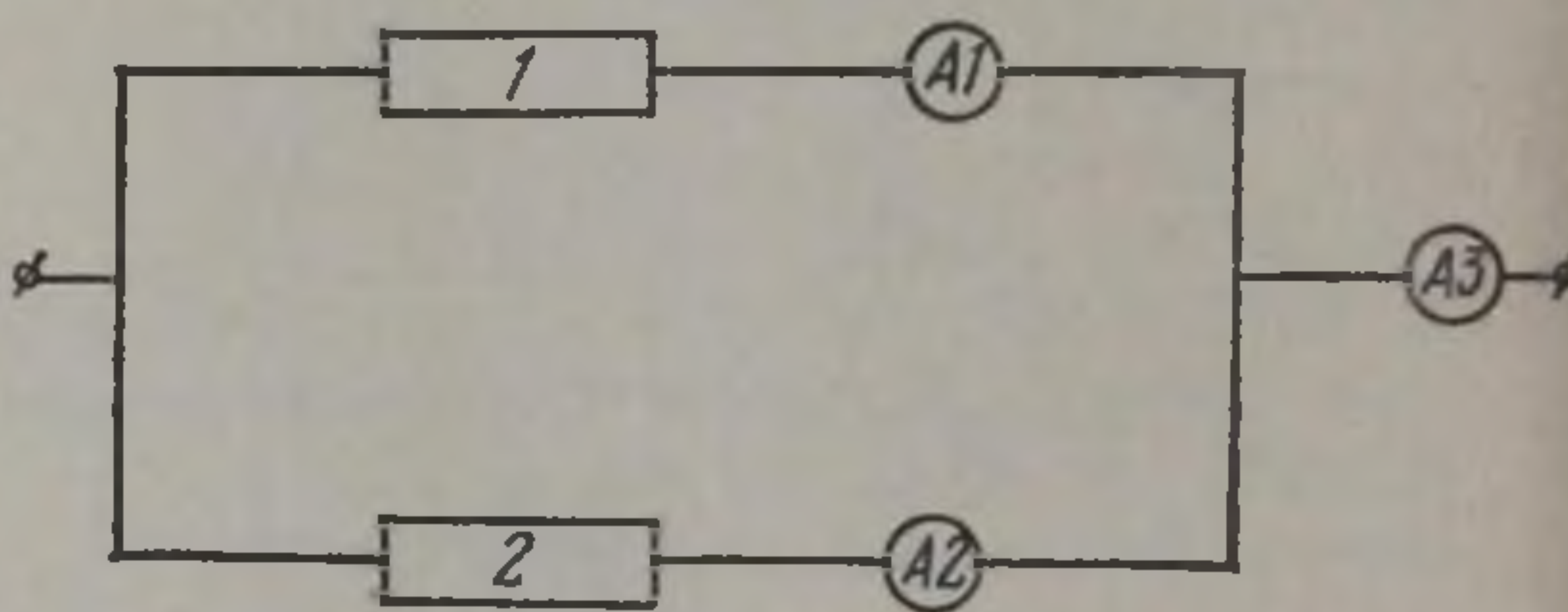


Рис. 3.53

3.210. Определить активное сопротивление катушки, если ее индуктивное сопротивление 50 Ом и при включении в сеть напряжением 120 В она потребляет мощность 144 Вт.

3.211. Если включить в городскую сеть участок цепи, состоящий из «черных ящиков» *1* и *2* (рис. 3.53), то показания амперметров равны соответственно: $I_1=0{,}3$ А, $I_2=0{,}4$ А, $I_3=0{,}5$ А. Что может находиться в этих ящиках?

3.212. С помощью какого оборудования и каким образом можно определить количество витков в обмотках школьного разборного трансформатора?

3.213. Объяснить, почему «парит» в воздухе медное кольцо, расположенное на одном сердечнике с катушкой, при включении последней в цепь переменного тока.

3.214. Трансформатор, повышающий напряжение со 100 В до 3,3 кВ, имеет замкнутый сердечник в виде кольца. Через кольцо пропущен провод, концы которого подсоединены к вольтметру, показывающему 0,5 В. Сколько витков имеют обмотки трансформатора? Определить ток в первичной обмотке, если ток вторичной обмотки равен 0,2 А, а КПД трансформатора 90 %.

3.13. Механические волны. Звук. Электромагнитные волны

Основные законы и формулы

Волнами называются возмущения состояния вещества или поля, распространяющиеся в пространстве с течением времени.

Длиной волны называется расстояние между точками, колеблющимися с разностью фаз 2π. За время, равное периоду T колебаний частиц, фронт волны перемещается в однородной среде на расстояние

$$\lambda = vT \text{ или } \lambda = \frac{v}{\nu}, \qquad (3.101)$$

где $\nu = \dfrac{1}{T}$ — частота колебаний частиц.

Плоская монохроматическая волна описывается уравнением

$$y = A\sin\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (3.102)$$

где y — смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии x от источника колебаний, характеризующихся амплитудой A, циклической частотой ω и начальной фазой φ_0.

Разность фаз двух точек бегущей волны $\Delta\varphi$ и разность хода Δx (разность расстояний этих точек от источника колебаний) связаны соотношением

$$\Delta\varphi = 2\pi \frac{\Delta x}{\lambda}. \tag{3.103}$$

В результате интерференции волн амплитуда достигает максимального значения, если разность хода двух волн, возбуждающих колебания в этой точке, равна целому числу волн:

$$\Delta x = k\lambda, \tag{3.104}$$

и минимального значения при условии

$$\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

Скорость распространения волн в тонких стержнях определяется по формуле

$$v = \sqrt{E/\rho}, \tag{3.105}$$

где E — модуль Юнга; ρ — плотность материала стержня.

Скорость звука в газах

$$v = \sqrt{\chi \frac{P}{\rho}}, \tag{3.106}$$

где $\chi = \frac{C_p}{C_V}$ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме; P и ρ — давление и плотность газа, не возмущенного волной.

Скорость распространения электромагнитных волн равна скорости света в данной среде, а остальные характеристики (λ, ν, T) аналогичны соответствующим характеристикам упругих волн.

Решение задач

Задачи по этой теме можно разделить на три основные группы: задачи, в которых определяют или учитывают скорость распространения упругих волн в различных средах; задачи на применение уравнения плоской волны и вычисление фаз колебаний точек среды, в которой распространяется упругая волна; задачи, в которых рассматривается интерференция упругих волн.

1. Для решения задач первой группы используются формулы (3.101), (3.105), (3.106). Здесь важно обратить внимание на различие понятий фазовая скорость распространения упругой волны и скорость гармонического колебания точек среды, в которой распространяется волна. Скорость гармонического колебательного движения $v = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ — это мгновенная скорость колебания

точки для времени t. Скорость же распространения волны в данной среде — величина постоянная.

Следует разграничивать также понятия волновая поверхность и фронт волны. Если волновых поверхностей для данной волны можно провести сколько угодно, то волновой фронт (самая удаленная от вибратора волновая поверхность) один. Волновые поверхности, как и фронт волны, перемещаются вперед со скоростью волны.

Пример 1. Из пункта A в пункт B дважды был послан звуковой сигнал частотой $\nu=50$ Гц, причем во второй раз при температуре на $\Delta T=20$ К выше, чем в первый. Число волн, укладывающихся на расстоянии от A до B, во второй раз оказалось, как и в первый, четным, но на две меньше. Определить расстояние между пунктами, если при повышении температуры на 1 К скорость звука увеличилась на 0,5 м/с. Скорость звука в первом опыте принять равной 330 м/с.

Решение. Длина волны в первом опыте $\lambda_1 = \frac{l}{n}$, где n — число длин волн, укладывающихся на расстоянии l. Во втором опыте $\lambda_2 = \frac{l}{n-2}$. До повышения температуры скорость звука $v_1 = \nu\lambda_1 = \nu\frac{l}{n}$, а после повышения $v_2 = \nu\lambda_2 = \nu\frac{l}{n-2}$. Или, так как $n = \nu\frac{l}{v_1}$, то

$$v_2 = \frac{\nu l v_1}{\nu l - 2v_1}.$$

Скорость звука возрастает по линейному закону: $v_2 = v_1(1+\alpha\Delta T)$, где $\alpha = \frac{0,5}{330}$ К$^{-1}$. Подставив в данное выражение значение v_2, получим

$$l = \frac{2v_1(1+\alpha\Delta T)}{\nu\alpha\Delta T} \approx 450 \text{ м}.$$

Пример 2. Радиолокатор работает на длине волны $\lambda=20$ см и излучает $n=5000$ импульсов в секунду длительностью $\tau=0,02$ мкс каждый. Определить число колебаний в одном импульсе и глубину разведки радиолокатора.

Решение. Число колебаний в одном импульсе $N=\nu\tau$, где ν — частота колебаний. Так как $\nu = \frac{c}{\lambda}$, где c — скорость распространения электромагнитных волн, то

$$N = \frac{c\tau}{\lambda}.$$

За промежуток времени $t = \frac{1}{n}$ между двумя последовательными импульсами электромагнитные волны доходят до цели и, отразившись, возвращаются обратно. Поэтому $2S = ct$, где S — глубина разведки. Таким образом,

$$S = \frac{ct}{2} = \frac{c}{2n}.$$

Подставив численные значения, получим $S = 30$ км.

2. При решении задач второй группы основным является равенство (3.102), которое можно представить в виде $y = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \right.$

$-\frac{x}{\lambda}\Big)$. Из этого уравнения следует, что смещение точки, равное y, является функцией двух переменных — времени t и расстояния x, т. е. $y = f(t, x)$. Все остальные величины (A, T, λ) считаются известными. При $x = 0$ получается уравнение колебаний вибратора $y = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$, при $t = 0$ — уравнение волны в данный момент времени $y = -A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Графически эти уравнения изображаются одинаково — с помощью бесконечной синусоиды. Но в первом случае это график колебания одной точки во времени, а во втором — график смещений разных точек волны.

Общее уравнение при $t \neq 0$, $x \neq 0$ определяет смещение одной точки в волне через время t от начала колебаний первой точки и на расстоянии x от исследуемой точки до первоначальной.

Следует отметить, что уравнение (3.102) является универсальным для волн различной физической природы.

Пример 3. Смещение от положения равновесия точки, находящейся на расстоянии 4 см от источника колебаний, через промежуток времени $T/6$ равно половине амплитуды. Определить длину волны.

Решение. Преобразуем уравнение волны $y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v}\right)$, учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{T}$ и $\lambda = vT$:

$$y = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Тогда

$$\frac{A}{2} = A \sin \left(\frac{2\pi T}{6T} - \frac{2\pi \cdot 0{,}04}{\lambda}\right)$$

или после преобразования

$$\frac{1}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{0{,}08\pi}{\lambda}\right),$$

откуда видно, что аргумент синуса равен $\pi/6$ рад, т. е. $\frac{\pi}{3} - \frac{0{,}08\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{6}$. Следовательно, $\lambda = 0{,}48$ м.

Пример 4. Плоская волна, возбуждаемая вибратором, колеблющимся по закону $y = 0{,}2 \sin 62{,}8$ м, распространяется со скоростью $v = 10$ м/с. Записать уравнение плоской волны. Определить: длину бегущей волны; перемещение частиц среды за период; смещение точек, расположенных на расстояниях $x_1 = 10{,}25$ м и $x_2 = 10{,}75$ м от вибратора, через 5 с от момента начала колебаний вибратора; разность фаз колебаний этих точек и длину стоячей волны, образующейся в результате интерференции волны, идущей от вибратора, и волны, отраженной от преграды.

Решение. Уравнение плоской волны имеет вид $y = A \sin 2\pi\nu \left(t - \frac{x}{v}\right)$. Запишем уравнение плоской волны, возбуждаемой вибратором:

$$y = 0{,}2 \sin 62{,}8 \left(t - \frac{x}{10}\right) \text{ м}.$$

Длину бегущей волны найдем по формуле $\lambda = \frac{v}{\nu}$, а неизвестную частоту определим из уравнения колебаний вибратора: $x = \frac{v}{\nu}$, где $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Тогда $\lambda = 1$ м.

Перемещение частиц среды за период находим, учитывая, что они участвуют только в колебательном движении. Такое перемещение равно нулю.

Смещение точек среды через 5 с от начала колебаний вибратора определим по уравнению плоской волны, подставив значения x_1 и x_2: $y_1 = -0{,}2$ м; $y_2 = 0{,}2$ м. Разность фаз колебаний точек $\Delta\varphi = 2\pi\nu\frac{l}{v} = 3{,}14$ рад.

Точки колеблются в противоположных фазах. Длина стоячей волны равна длине бегущих волн, в результате интерференции которых она образовалась, поэтому $\lambda_{ст} = \lambda = 1$ м.

3. Для решения задач, связанных с интерференцией упругих волн, используются соотношения (3.102)—(3.104). Особое место занимают задачи, в которых рассматриваются стоячие волны. При решении этих задач важно отметить, что стоячие волны возникают при сложении двух колебаний, вызванных падающей и отраженной волнами. Так, если падающая волна проходит расстояние x, а отраженная $2l - x$, где l — длина шнура, то уравнения падающей и отраженной волн примут вид:

$$y_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right);\ y_2 = -A\cos\left(t - \frac{2l - x}{v}\right).$$

Тогда уравнение результирующего колебания можно записать так:

$$y = y_1 + y_2 = 2A\sin\omega\left(\frac{l - x}{v}\right)\sin\omega\left(t - \frac{l}{v}\right).$$

Амплитуда стоячей волны $2A\sin\omega\left(\frac{l - x}{v}\right)$ равна нулю, когда аргумент синуса составляет число, кратное π, т. е. $\omega\left(\frac{l - x}{v}\right) = n\pi$. Отсюда $x = l - \frac{n\lambda}{2}$. Следовательно, первый узел образуется на концах шнура ($n = 0$), а все последующие — на расстоянии полуволны друг от друга. Аналогично можно установить, что первая пучность находится на расстоянии $\pi/4$ от закрепленного конца, а расстояние между ближайшими пучностями составляет $\lambda/2$.

Важно обратить внимание также на различие бегущей и стоячей волн, подчеркнув при этом, что колебание отдельных точек в этих волнах подчиняется синусоидальному закону. И в этом отношении бегущая и стоячая волны неразличимы. Различие обнаруживается при сравнении колебаний соседних точек. В бегущей волне, согласно уравнению $y = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$, «соседние» по направлению распространения колебаний точки колеблются с одинаковой амплитудой, но имеют разные координаты x и, следовательно, разные фазы $\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Чем дальше точка от вибратора, тем больше ее колебания отстают по фазе В стоячей же волне амплитуда меняется от точки к точке, достигая максимума в пучностях и оставаясь все время равной нулю в узлах. Что же касается фазы колебаний $\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$, то она не зависит от расстояния x и, следовательно, одинакова у всех точек. Точнее, синфазно колеблются все точки, лежащие между соседними узлами. При переходе же через узел фаза меняется на π.

Пример 5. Медный стержень длиной $l=0{,}5$ м закреплен в середине. Найти частоты возможных собственных продольных колебаний стержня.

Решение. Частота ν собственных колебаний в стержне связана с длиной λ бегущей волны соотношением $\lambda=vT=\frac{v}{\nu}$. При этом скорость v продольных волн в стержне можно найти по формуле $v=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Тогда получим $\nu=\frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Задача сводится к определению длин волн, соответствующих собственным колебаниям стержня. Этим колебаниям всегда отвечает такое распределение стоячих волн по длине тела, которое удовлетворяет граничным условиям: на закрепленном конце тела должен быть узел смещений, на свободном — пучность. Следовательно, на концах данного стержня должны быть пучности смещений, а посередине его — узел смещений, так как в этом месте стержень закреплен. Таким образом, на всей длине стержня должно укладываться четное число полуволн и еще две четверти волны, а значит, $l=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$, где $k=0, 1, 2, 3, \ldots$

Отсюда $\lambda=\frac{2l}{2k+1}$. Подставив это значение λ в формулу для частоты, получим

$$\nu=\frac{1}{2l}(2k+1)=3{,}7\,(2k+1)\ \text{кГц}.$$

Значение $k=0$ дает основную частоту собственных колебаний $\nu_0=3{,}7$ кГц; значения $k=1, 2, 3, \ldots$ соответствуют высшим гармоническим частотам.

Задачи для самостоятельного решения

3.215. Звуковое ощущение сохраняется у человека примерно 0,1 с. На каком расстоянии должен находиться человек от преграды, чтобы слышать раздельно основной и отраженный от преграды звуки? Скорость звука 340 м/с.

3.216. Маяк посылает кораблю одновременно два сигнала: первый — звуковыми волнами в воздухе, второй — в воде при температуре 0 °С. На корабле второй сигнал был услышан через 4 с после первого. Определить расстояние от корабля до маяка, если скорость звука в воздухе 340 м/с.

3.217. Определить длину железной трубы, если звук от удара по трубе у одного конца слышен у другого конца дважды с интервалом времени 1 с. Скорость звука в воздухе 340 м/с, в железе 5,3 км/ч.

3.218. На лодку набегают волны, поднятые теплоходом. Предложить способ определения длины волны.

3.219. Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью 15 м/с. Период колебаний точек шнура 1,2 с, амплитуда 2 см. Определить длину волны, фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, отстоящей на расстоянии 45 м от источника волн, через 4 с, а также разность фаз колебаний двух точек, лежащих на луче и отстоящих от источника волн на расстояниях 20 м и 30 м.

3.220. Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x=5\sin\pi t$ см. Написать уравнение волны, если скорость распространения колебаний 200 м/с, а также уравнение колебаний точки, отстоящей на расстоянии 400 м от источника колебаний.

3.221. Определить скорость распространения волны, если частота колебаний 500 Гц, расстояние между точками 5 см, а разность фаз колебаний в этих точках $\pi/6$.

3.222. Длина звуковой волны в воздухе 30 см. Определить разность фаз между точками этой волны в металле, где скорость звука 5 км/с и расстояние между точками 16 м.

3.223. Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой 300 Гц. Скорость распространения колебаний в среде 1,5 км/с. Определить, при какой наименьшей разности волновых путей будет наблюдаться: а) максимальное усиление колебаний; б) максимальное ослабление.

3.224. Труба длиной 1 м заполнена воздухом при нормальном атмосферном давлении. Один раз труба открыта с одного конца, другой — с обоих концов и в третий раз закрыта с обоих концов. При каких наименьших частотах в трубе будут возникать стоячие звуковые волны в каждом из этих случаев? Скорость звука в воздухе 340 м/с.

3.225. К верхнему концу цилиндрического сосуда высотой 1 м, в который наливают воду, поднесли камертон, звучащий с частотой 340 Гц. Определить, на каком расстоянии от поверхности воды до края сосуда происходят заметные первое и второе усиления звука.

3.226. Определить возможные собственные частоты колебаний стержня длиной l, если закреплены: а) оба его конца; б) один конец.

3.227. Собственная частота колебаний стальной струны 4 Гц. Определить длину струны, если ее диаметр 0,5 мм, а натяжение 0,1 Н.

3.228. Определить длину электромагнитной волны в воздухе и трансформаторном масле ($\varepsilon=2{,}2$), если частота передатчика 60 мГц.

3.229. Определить основную частоту, излучаемую полуволновой антенной, и частоту гармоник.

3.230. Полуволновая антенна длиной 0,5 м погружена в этиловый спирт ($\varepsilon=26$). Чему равна длина электромагнитной волны при выходе из сосуда (в воздухе)?

3.231. Звуковые волны длиной 2 м падают на мембрану микрофона. Вследствие колебаний мембраны в цепи возникают электрические колебания. Определить длину волны этих колебаний.

3.232. За какое время происходит одно полное колебание в контуре, излучающем электромагнитную волну длиной 300 м?

3.233. Контур приемника с конденсатором емкостью 20 пФ настроен на волну длиной 5 м. Определить индуктивность катушки контура и частоту колебаний.

3.234. Радиоприемник принимает волны длиной от 25 до 200 м. Как и во сколько раз изменяется расстояние между пластинами плоского конденсатора в контуре при переходе от λ_1 до λ_2?

3.235. Катушка индуктивностью 30 мкГн замкнута на конденсатор, площадь пластин которого 100 см^2 и расстояние между ними 0,1 мм. Определить диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур резонирует на волну длиной 750 м.

3.236. Диапазон длин волн колебательного контура 1км$\leqslant\lambda\leqslant$2 км. Определить диапазон изменения индуктивности вариометра, если емкость контура 10^3 пФ.

3.237. Напряжение на обкладках конденсатора емкостью 0,8 мкФ изменяется по закону $U=50\cos(10^4\pi t)$. Записать закон изменения силы тока в цепи. Определить индуктивность контура и длину излучаемых им волн.

3.238. Радиолокатор может обнаружить цель, находящуюся на расстоянии от 100 м до 100 км. Определить длительность посылаемых импульсов и частоту их следования. Почему при радиолокации электромагнитные колебания излучаются короткими импульсами?

3.239. Определить показатель преломления звуковых волн на границе воздух — стекло. Модуль Юнга для стекла $6{,}9\cdot10^{10}$Н/м^2, плотность стекла $2{,}6\cdot10^3$кг/м^3, температура воздуха 293 К. Скорость звука в воздухе 340 м/с.

4. ОПТИКА. СТРОЕНИЕ АТОМА

4.1. Отражение света. Зеркала

Основные законы и формулы

Законы отражения света формулируются следующим образом.

1. Падающий луч, отраженный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восставленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости.

2. Угол отражения (β) равен углу падения (α):

$$\beta=\alpha.$$

Фокусное расстояние сферического зеркала радиусом R

$$F=\frac{R}{2}.$$

Пусть светящаяся точка находится на расстоянии d от зеркала, а ее изображение получается на расстоянии f от него, тогда

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{2}{R}=\frac{1}{F}. \tag{4.1}$$

В формуле (4.1) все расстояния от зеркала до действительных точек берутся со знаком плюс, до мнимых — со знаком минус. Фокусное расстояние вогнутого зеркала положительно, выпуклого — отрицательно. Учитывая правило знаков, для вогнутого зеркала имеем

$$\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

для выпуклого зеркала

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}.$$

Если предмет высотой h_0 расположен перпендикулярно к главной оптической оси и высота его изображения оказывается равной h, то линейное увеличение, даваемое зеркалом,

$$k=\frac{h}{h_0}=\frac{f}{d}.$$

Для плоского зеркала $R=\infty$. Формула (4.1) преобразуется в равенство $d=-f$.

Решение задач

Задачи на законы отражения можно разделить на две основные группы: задачи на отдельное зеркало и задачи на системы зеркал. В свою очередь первая группа задач может быть разбита на три подгруппы: задачи о плоском, вогнутом и выпуклом зеркалах. Во всех указанных группах задач различают расчетные задачи и задачи, где требуется провести только графическое построение. Решение каждого типа задач имеет свои методические особенности.

1. Решение расчетных задач на отдельное зеркало следует начинать с построения изображения, пользуясь существующими правилами построения изображений. При этом всегда надо обращать особое внимание на расположение предмета относительно характерных точек сферического зеркала, так как от этого зависят положение и размеры изображения.

Построив изображение предмета и обозначив расстояния от предмета и изображения до зеркала, переходят к составлению расчетных уравнений. Основные расчетные уравнения составляют на основании формулы зеркала и выражения для коэффициента линейного увеличения. При составлении уравнений следует учитывать знаки отрезков, входящих в формулу зеркала.

Иногда в условии задачи даются дополнительные данные, позволяющие составить вспомогательные расчетные уравнения. Вспомогательные уравнения составляются, как правило, на основе чертежа. Полученная система основных и вспомогательных расчетных уравнений решается относительно искомой величины. При решении задач, в которых рассматривают не одно, а два и более положений одного и того же предмета, необходимо строить изображения и составлять уравнения для каждого случая отдельно.

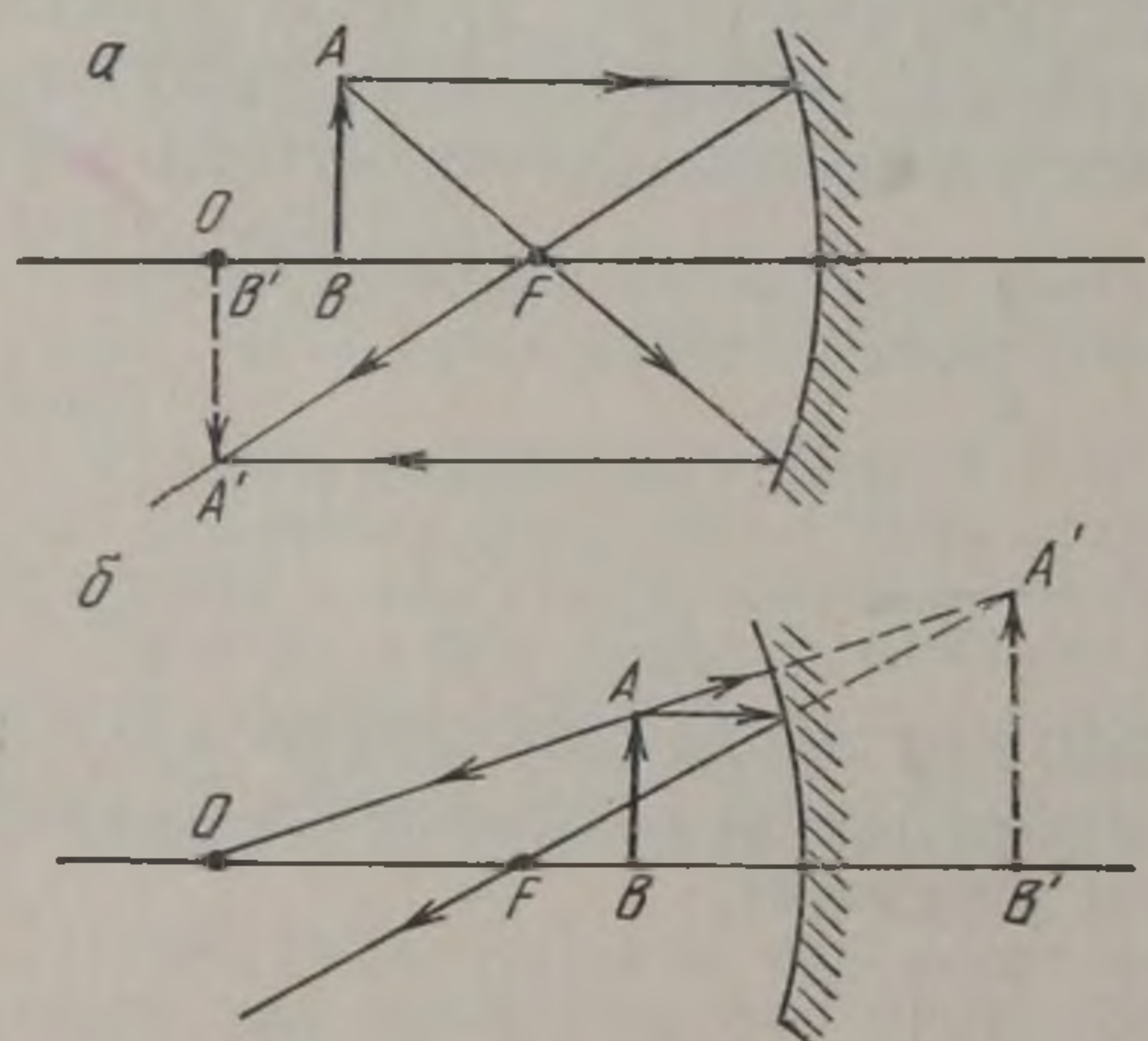


Рис. 4.1

Пример 1. Светящаяся точка расположена на расстоянии $h_0=0{,}2$ м от главной оптической оси вогнутого зеркала. Ее изображение находится на расстоянии $h_1=0{,}4$ м от той же оси и на расстоянии $l=0{,}5$ м от главного фокуса. Чему равно фокусное расстояние зеркала?

Решение. В условии задачи ничего не говорится о том, каким является изображение точки — мнимым или действительным. Поэтому следует рассмотреть два случая.

1. Изображение действительное (рис. 4.1, *а*). Светящуюся точку A можно считать принадлежащей некоторому предмету AB, расположенному перпендикулярно к главной оптической оси зеркала. Поскольку изображение действительное, то

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (4.2)$$

Увеличение, даваемое зеркалом,

$$k=\frac{h_1}{h_0}=\frac{f}{d}. \qquad (4.3)$$

В нашем случае $A'F=l$, $AB=h_0$, $A'B'=h_1$.

Решая уравнения (4.2), (4.3) совместно, находим F. После преобразования уравнения (4.2) имеем:

$$\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}=\frac{h_1}{h_0}=2;\ \frac{F}{d-F}=2;\ d=\frac{3}{2}F;$$

$$f=2d=3F;\ B'F=f-F=2F=0{,}3\ \text{м};\ F=0{,}15\ \text{м}.$$

2. Изображение мнимое (рис. 4.1, *б*). Поскольку изображение мнимое, то

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F};\ \frac{F}{F-d}=\frac{f}{d}=\frac{h_1}{h_0}=2;$$

$$d=\frac{1}{2}F;\ f=2d=F;\ B'F=F+f=2F=0{,}3\ \text{м};\ F=0{,}15\ \text{м}.$$

2. Задачи на построение чаще всего предусматривают определение путем графического построения положения изображения предмета в зеркале и направления распространения некоторого произвольного луча после отражения от зеркала. В условиях таких задач указываются, как правило, вид зеркала, его характерные точки, положение и размеры предмета или ход луча до отражения в зеркале.

Для построения изображения предмета достаточно построить изображение его отдельных точек: крайних точек предмета, точек излома. Это возможно, так как мы рассматриваем идеальные оптические системы, в которых всякая прямая линия преобразуется в прямую. Если предмет представляет прямую, перпендикулярную к главной оптической оси зеркала, то для построения его изображения достаточно построить изображение крайней точки, не лежащей на главной оптической оси. Изображение точек предмета строят при помощи двух характерных лучей.

Некоторые трудности вызывает построение изображения точки, лежащей на главной оптической оси. Чтобы найти изображение такой точки, берут луч, проходящий через оптический центр зеркала, который отразится по тому же направлению, что и падал. Второй луч выбирают произвольно. Ход второго луча после отражения определяется с помощью понятий побочной оптической оси и побочного фокуса.

Пример 2. Определить графически, при каких положениях глаза наблюдатель сможет видеть в плоском зеркале одновременно изображения точки *A* и отрезка прямой *BC*, расположенных относительно зеркала так, как показано на рис. 4.2.

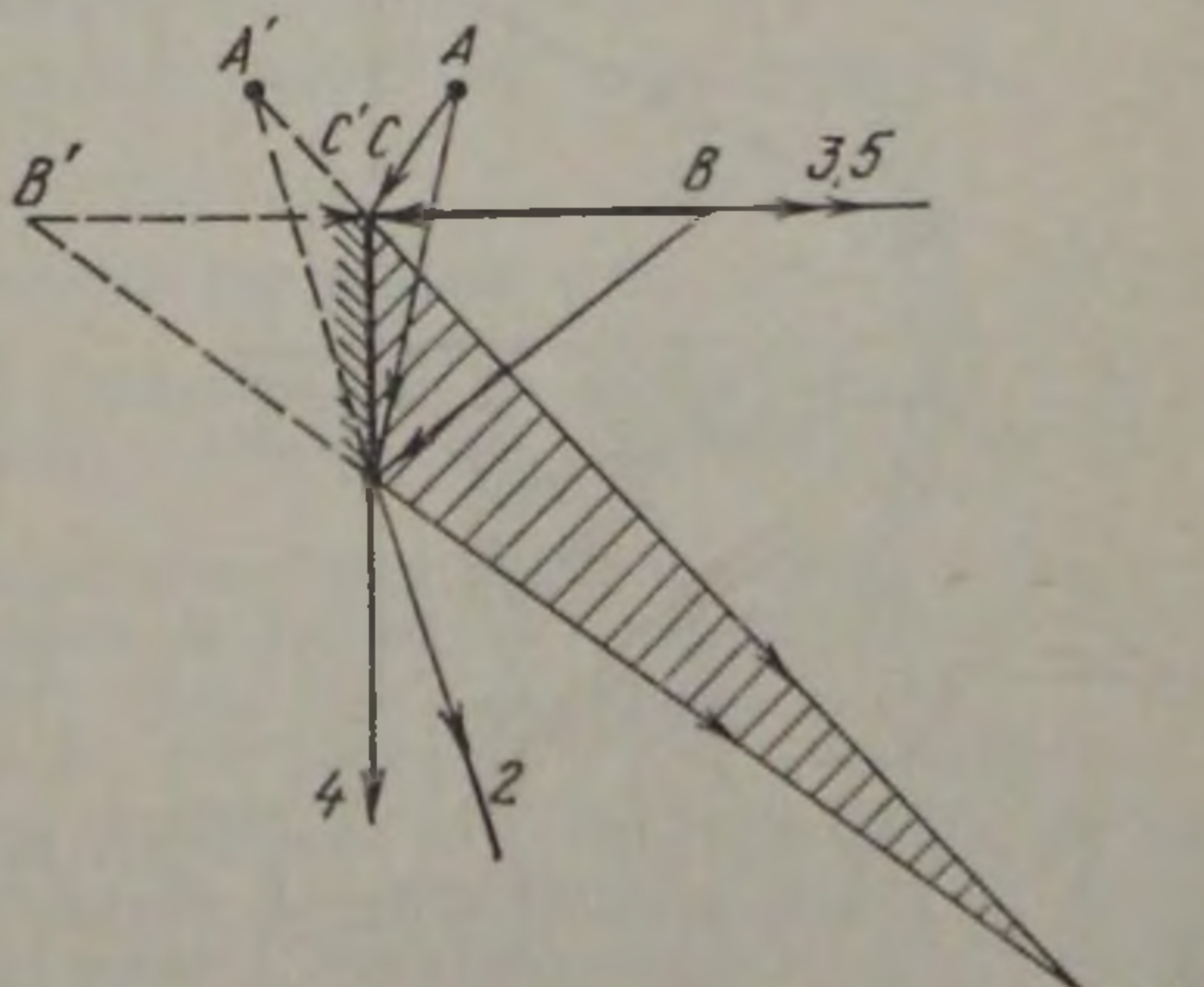


Рис. 4.2

Решение. Наблюдатель сможет одновременно видеть изображение точки *A* и отрезка прямой *BC* в том случае, если в глаз будут попадать отраженные лучи, выходящие до падения на зеркало из точек *A*, *B* и *C*. Лучи, выходящие из точки *A*, отражаются от зеркала расходящимся пучком *1*, *2* и дают изображение *A′*. Лучи, выходящие из крайних точек *B* и *C* предмета, отразившись, идут расходящимися пучками *3*, *4* и *5*, *6*, давая мнимые изображения соответственно точек *B* и *C*. Изображения остальных точек отрезка *BC* будут располагаться в пространстве, ограниченном лучами *3*, *4*.

Как видно из чертежа, пространство, в каждой точке которого встре-

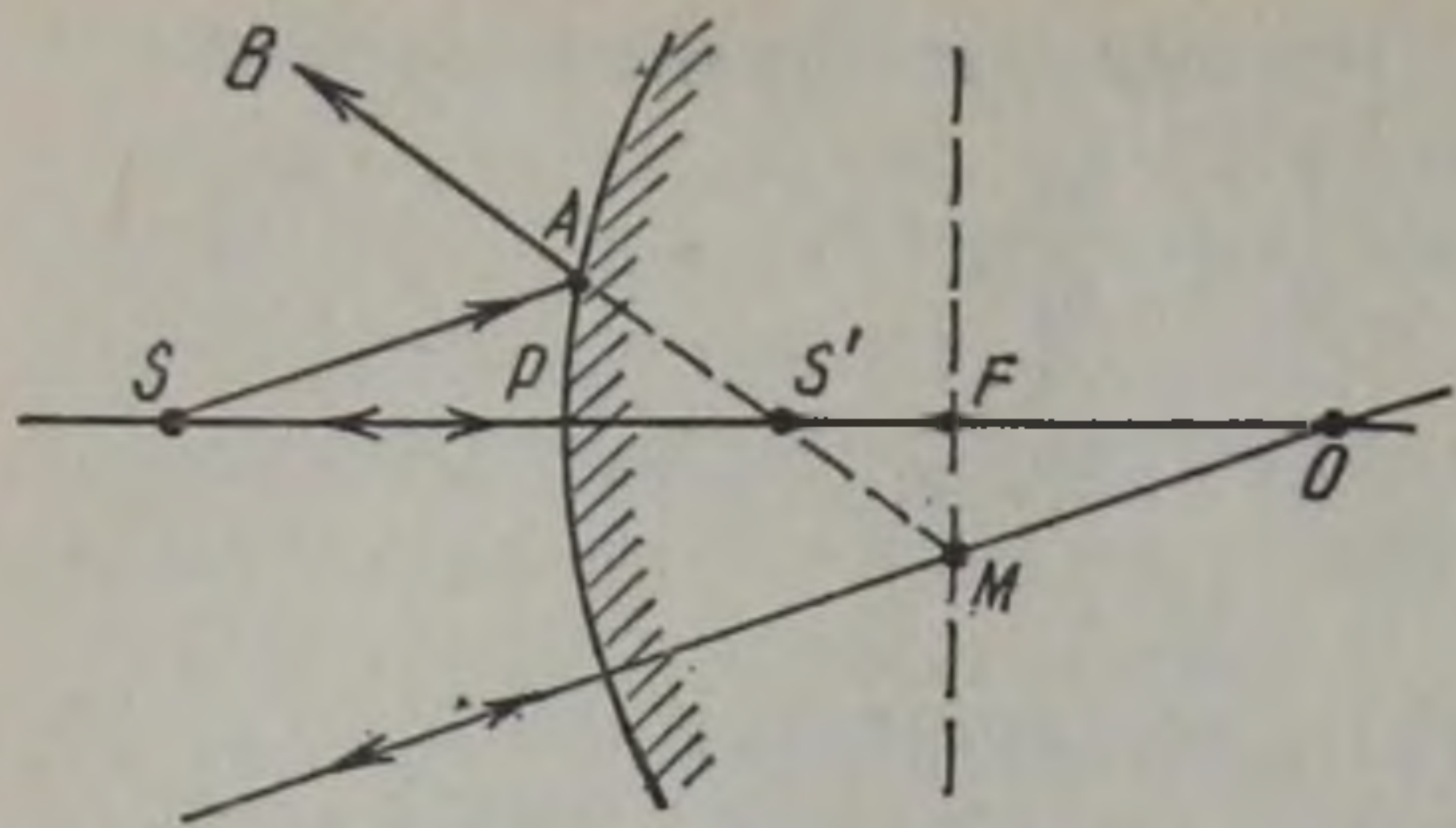


Рис. 4.3

чаются лучи, дающие изображения A', B', C', заключено внутри заштрихованного треугольника, в одной из точек которого и должен находиться глаз наблюдателя

Пример 3. Построить изображение светящейся точки, находящейся на главной оптической оси выпуклого зеркала. Положения оптического центра, полюса и фокуса зеркала известны (рис. 4.3).

Решение. Для построения изображения точки S возьмем два луча: луч SP, идущий вдоль главной оптической оси, и луч SA, падающий на зеркало под произвольным углом. Первый луч после отражения от зеркала идет обратно вдоль главной оптической оси. Чтобы определить направление луча SA после отражения от зеркала, проведем побочную оптическую ось, параллельную этому лучу. Два параллельных луча (SA и идущий вдоль побочной оси) отразятся так, что их продолжения пересекутся в точке M, лежащей на фокальной плоскости зеркала. Точка пересечения продолжения луча AB с главной оптической осью зеркала и будет изображением точки S',

3. Определенный класс задач на построение предусматривает по заданному взаимному расположению предмета и по его изображению относительно оптической оси определение вида сферического зеркала, его характерных точек. При решении таких задач пользуются свойствами характерных лучей, применяемых при построении изображений.

Пример 4. Дан ход луча *1* после отражения от вогнутого зеркала (рис. 4.4). Как пойдет после отражения луч *2*?

Решение. Чтобы построить ход луча *2* после отражения от зеркала, необходимо знать положение характерных точек F и O зеркала. Возьмем на луче *1* точку S и построим симметричную ей точку S'' (рис. 4.5). Луч SP после отра-

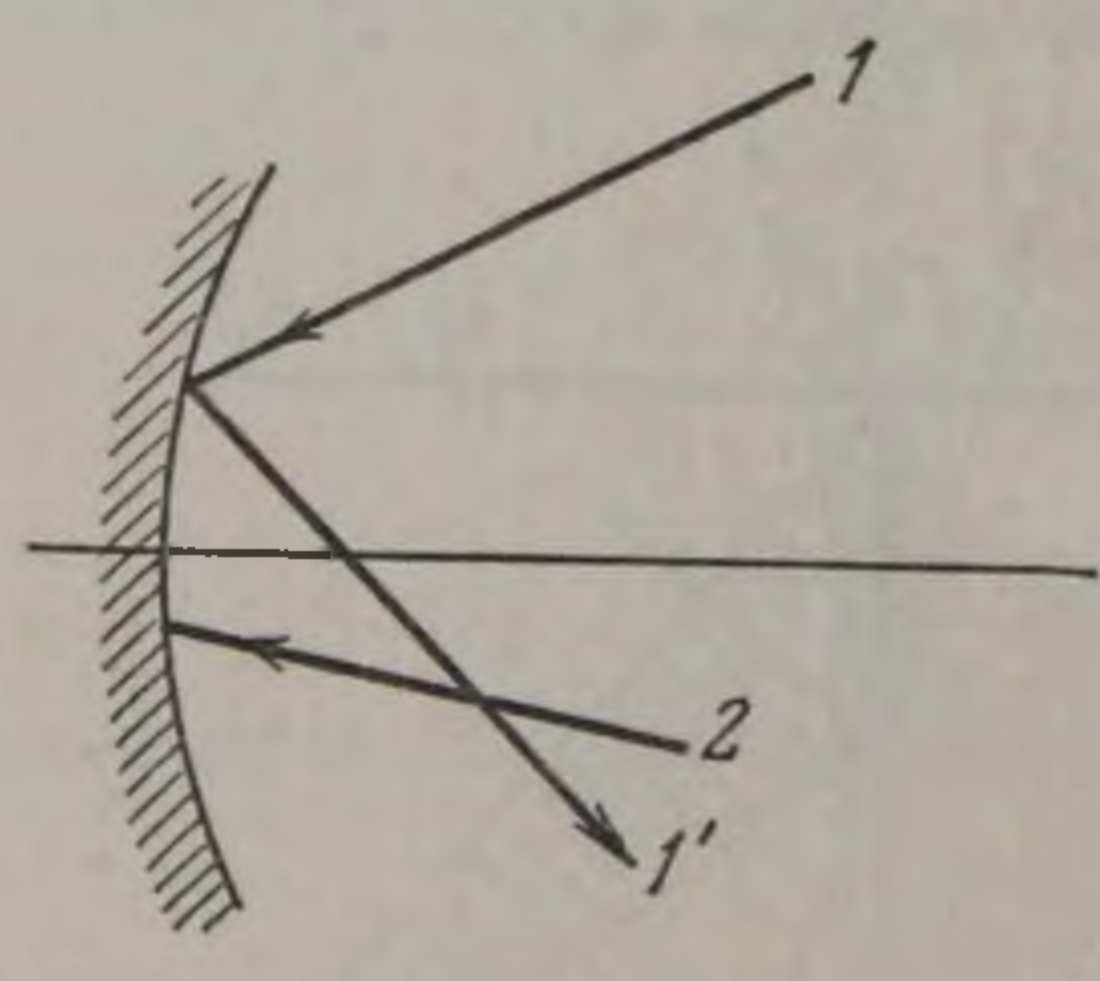


Рис. 4.4

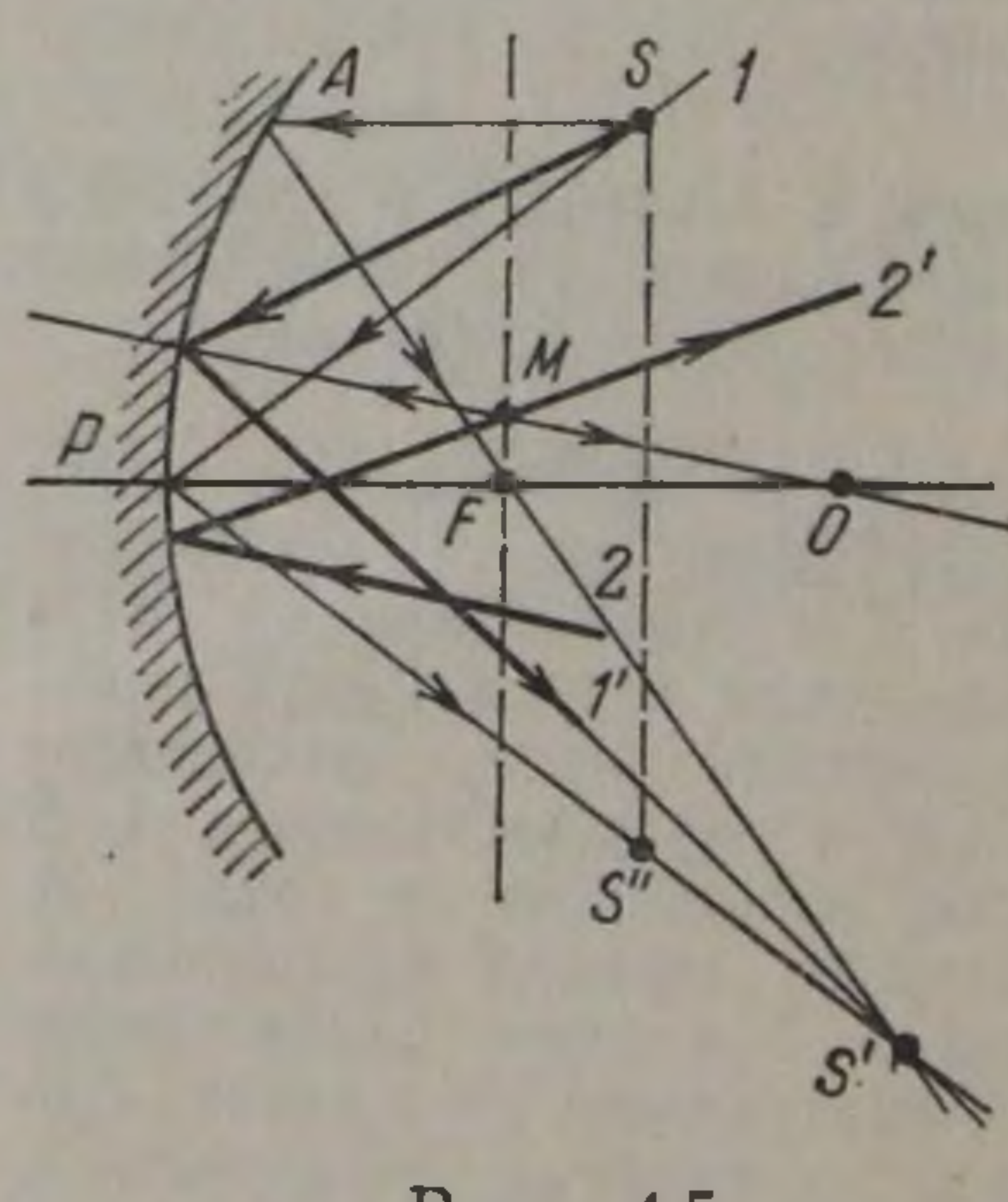


Рис. 4.5

жения пересекает луч $1'$ в некоторой точке S', которая является изображением точки S. Параллельный главной оптической оси луч SA после отражения пересекает главную оптическую ось в точке фокуса F. Зная положение фокуса, можно определить положение оптического центра O. Проведем параллельно лучу *2* побочную оптическую ось, которая пересекается с фокальной плоскостью зеркала в точке M. Луч *2* после отражения от зеркала пройдет через точку M.

4. Задачи, связанные с расчетами и построениями в системах зеркал требуют определенных навыков решения. В таких задачах надо найти изображение предмета после двукратного отражения падающих лучей сначала от одного, а затем от другого зеркала. При этом расчеты и построения основываются на том, что в силу обратимости хода лучей изображение, даваемое первым зеркалом, можно рассматривать как предмет для второго. Если изображение, даваемое первым зеркалом, располагается перед вторым, то промежуточный предмет следует считать действительным, и в формуле, записанной для второго зеркала, $d>0$. Если изображение окажется за вторым зеркалом, то $d<0$.

Системы зеркал могут представлять различные сочетания: выпуклое — плоское, вогнутое — выпуклое, вогнутое — вогнутое и т. д. Однако решение задач данного типа имеет много общего. При решении таких задач можно выделить следующие этапы:

1) изобразив общую главную оптическую ось системы, располагают зеркала и их характерные точки в строгом соответствии с численными значениями заданных величин в условии задачи;

2) строят изображение предмета в первом зеркале;

3) зная положение промежуточного изображения относительно второго зеркала и считая его предметом для последнего, строят изображение предмета, даваемое системой зеркал;

4) учитывая знаки отрезков d, f, F, записывают основные уравнения для первого и второго зеркал;

5) используя дополнительные условия задачи, составляют вспомогательные уравнения. При составлении вспомогательных уравнений следует иметь в виду, что увеличение, даваемое системой зеркал при двукратном отражении лучей,

$$k=\frac{h_2}{h_0}=\frac{h_1}{h_0}\,\frac{h_2}{h_1}=\frac{f_1}{d_1}\,\frac{f_2}{d_2}=k_1k_2,$$

где h_0 — высота предмета; h_1 — высота изображения, даваемого первым зеркалом; h_2 — высота изображения, даваемого системой зеркал; k_1 и k_2 — увеличение, даваемое каждым зеркалом системы.

Пример 5. Два плоских зеркала образуют двугранный угол $\varphi=\frac{2\pi}{n}$, где n — целое число. Точечный источник света S находится между зеркалами на равном расстоянии от каждого из них. Сколько изображений источника получается в зеркалах?

Решение. Чтобы определить полное число возможных изображений в данном случае, следует иметь в виду, что мнимое изображение, даваемое одним зеркалом, можно считать предметом для второго (рис. 4.6). Из равенства треугольников SOA, SOB, BOS_1, AOS_2, ... следует, что источник S и его изображения в зеркалах лежат на окружности с центром в точке O. Получающиеся изображения S, S_1, S_2, S_3, ... разбивают всю окружность на n равных частей. Каждому центральному углу величиной φ соответствует изображение источника в зеркалах, за исключением одного из них, в котором находится сам источник. Поэтому число изображений $k=\frac{360^\circ}{\varphi}-1$.

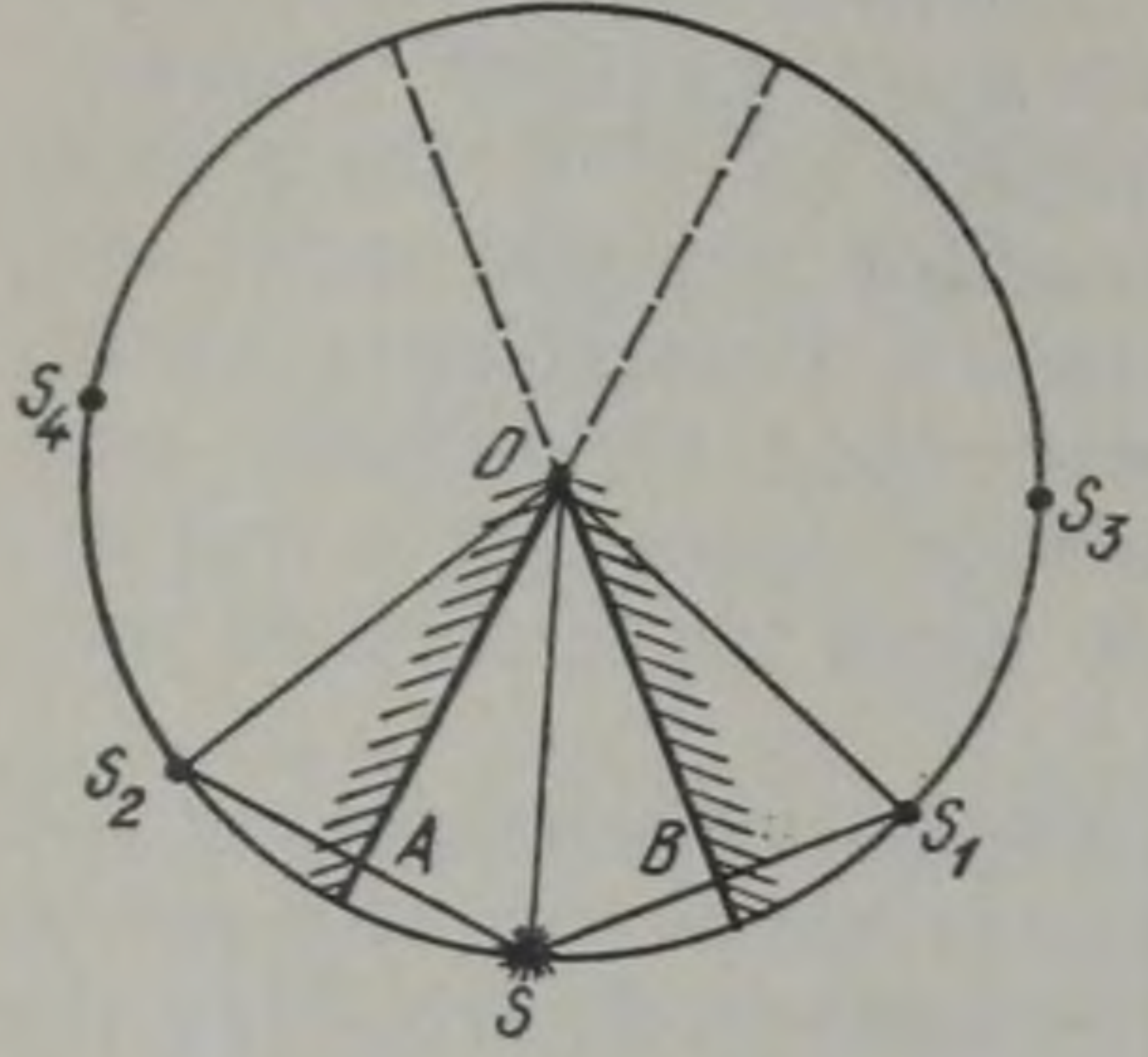


Рис. 4.6

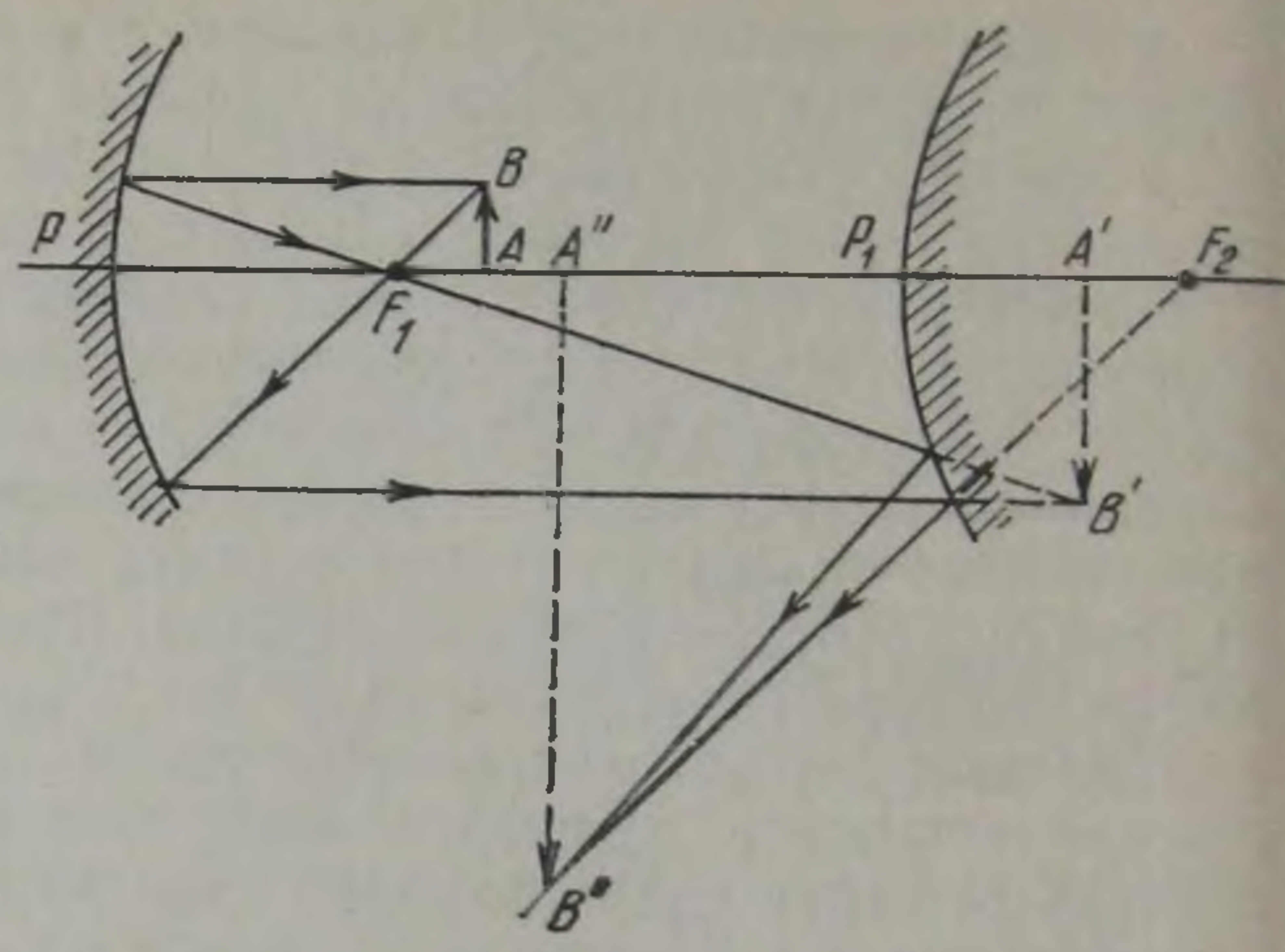


Рис. 4.7

Пример 6. Вогнутое и выпуклое сферические зеркала расположены так, что их оптические оси совпадают. На расстоянии $\frac{4}{3}F$ от полюса вогнутого зеркала расположен предмет (рис. 4.7). Фокусное расстояние вогнутого зеркала $F_1 = 2F$. Расстояние между зеркалами равно $3F$. Чему равно общее линейное увеличение системы?

Решение. Общее увеличение системы зеркал

$$k = k_1 k_2,$$

где $k_1 k_2$ — линейные увеличения вогнутого и выпуклого зеркал соответственно:

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1}; \; k_2 = \frac{f_2}{d_2}.$$

Запишем основные уравнения для обоих зеркал:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F}; \; \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F_1};$$

$$f_1 = \frac{Fd_1}{d_1 - F}; \; f_1 = 4F; \; k_1 = 3;$$

$$d_2 = -F; \; f_2 = 2F; \; k_2 = 2.$$

Тогда $k = 6$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Точечный источник света находится на оси выпуклого сферического зеркала. Расстояние между источником и оптическим центром зеркала l, между источником и его изображением L. Чему равен радиус зеркала?

4.2. Каков радиус вогнутого зеркала, если действительное изображение предмета, расположенного на расстоянии 20 см от зеркала, в 1,5 раза больше соответствующего изображения в плоском зеркале?

4.3. Когда предмет находится на расстоянии 2 м от вогнутого сферического зеркала, его действительное изображение получается на расстоянии 50 см от зеркала. Где и какое получится изображение этого предмета, если его приблизить к зеркалу на 1,9 м?

4.4. Плоское зеркало и некоторый предмет AB расположены так, как показано на рис. 4.8. Где должен располагаться глаз наблюдателя, чтобы предмет был виден целиком?

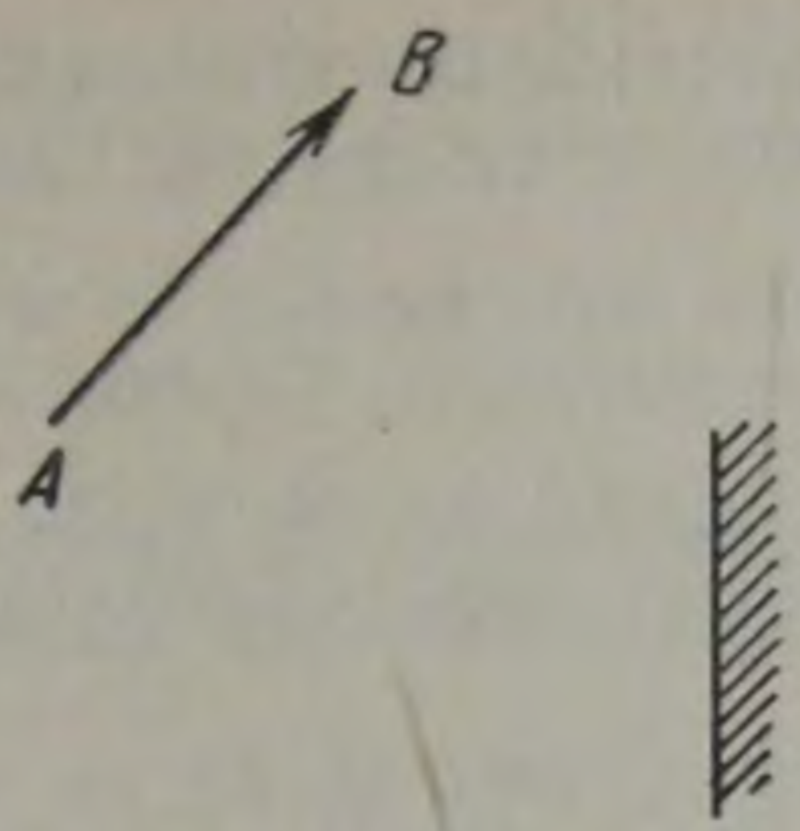


Рис. 4.8

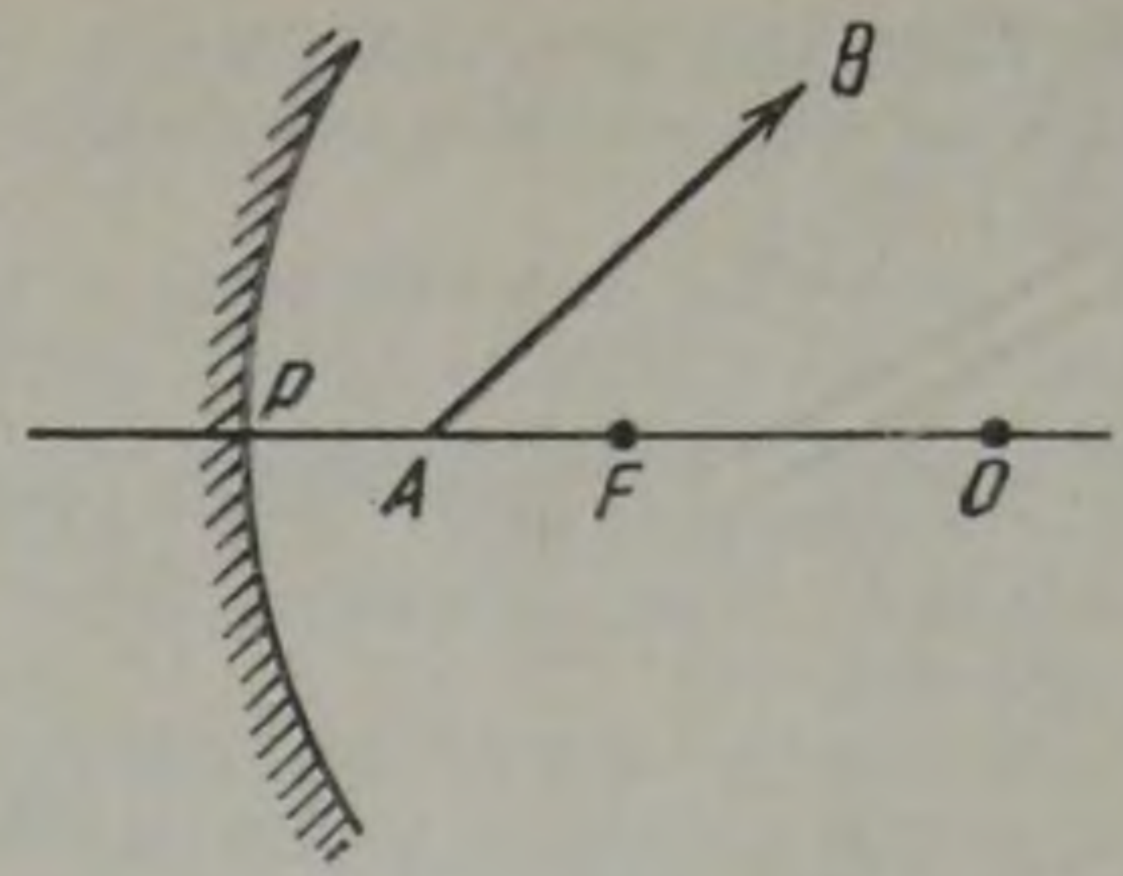


Рис. 4.9

4.5. Солнечные лучи, падающие под углом на плоское горизонтальное зеркало, отражаются на вертикальный экран. На зеркале лежит непрозрачный шар. Определить путем построения размеры тени на экране.

4.6. Построить изображение предмета AB, расположенного относительно вогнутого зеркала так, как указано на рис. 4.9.

4.7. Даны положения предмета S, его изображения S' и главной оптической оси сферического зеркала (рис. 4.10, *а*). Определить тип зеркала, его положение, положение оптического центра и фокуса.

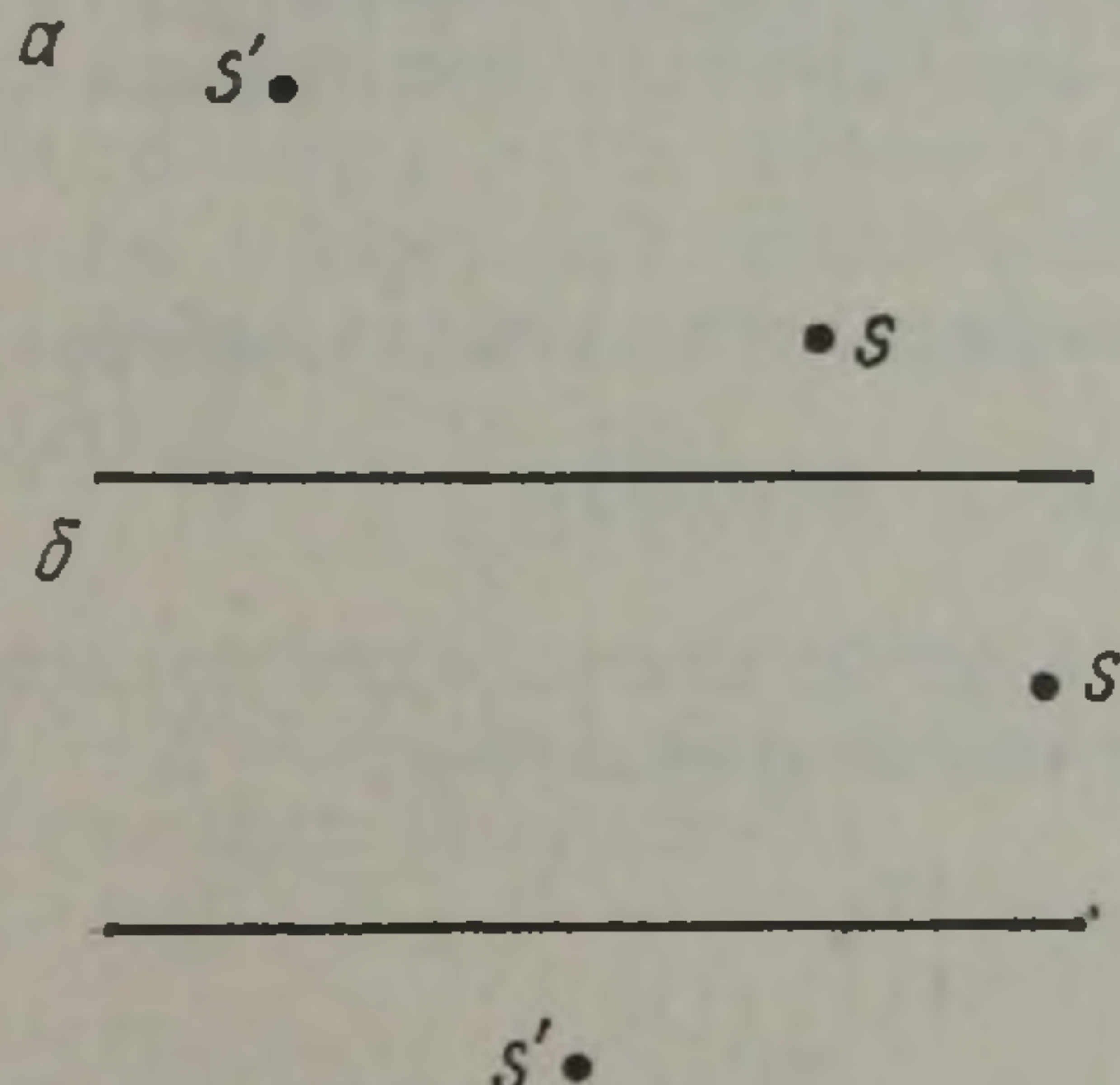


Рис. 4.10

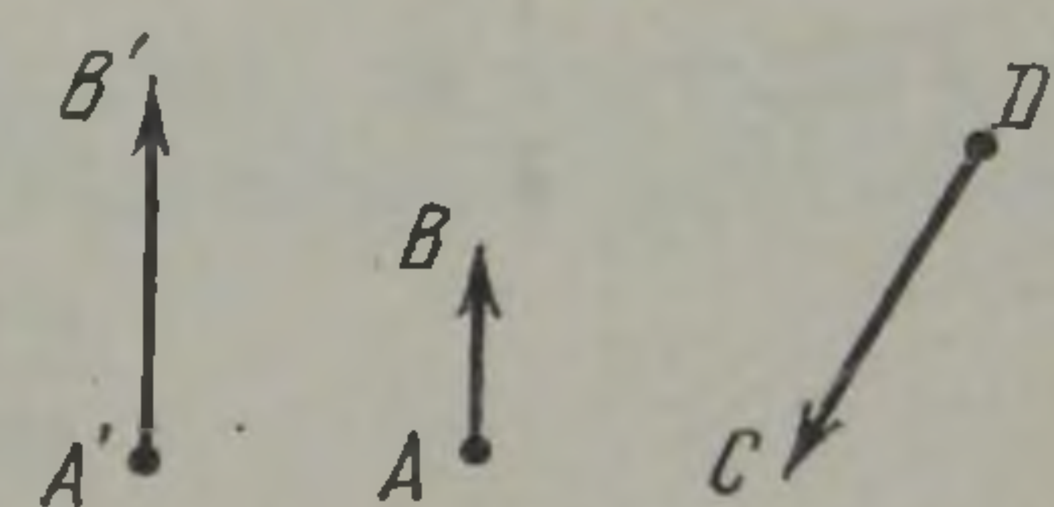


Рис. 4.11

4.8. Даны положения предмета S, его изображения S' и главной оптической оси сферического зеркала (рис. 4.10, *б*). Определить тип зеркала, его положение, положение оптического центра и фокуса.

4.9. На рис. 4.11 даны положения предмета AB и его изображения $A'B'$ в сферическом зеркале. Построить изображение предмета CD.

4.10. Дан ход луча *1* после отражения от вогнутого сферического зеркала (рис. 4.12). Как пойдет после отражения луч *2*?

4.11. Дан ход луча *1* после отражения от выпуклого сферического зеркала (рис. 4.13). Как пойдет после отражения луч *2*?

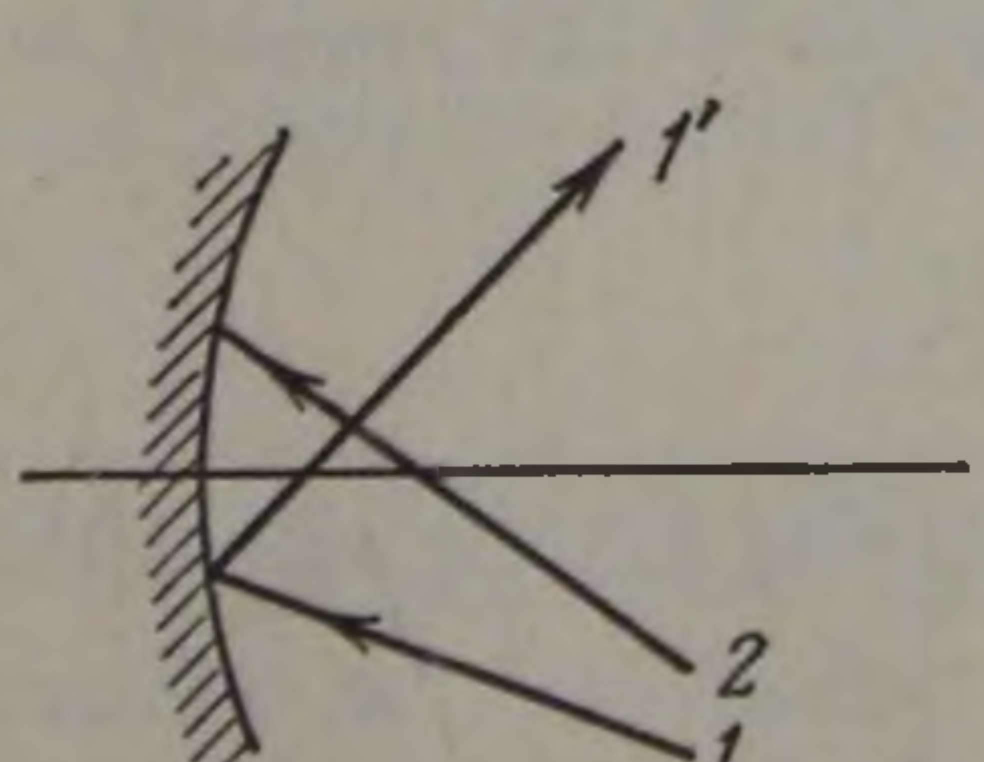


Рис. 4.12

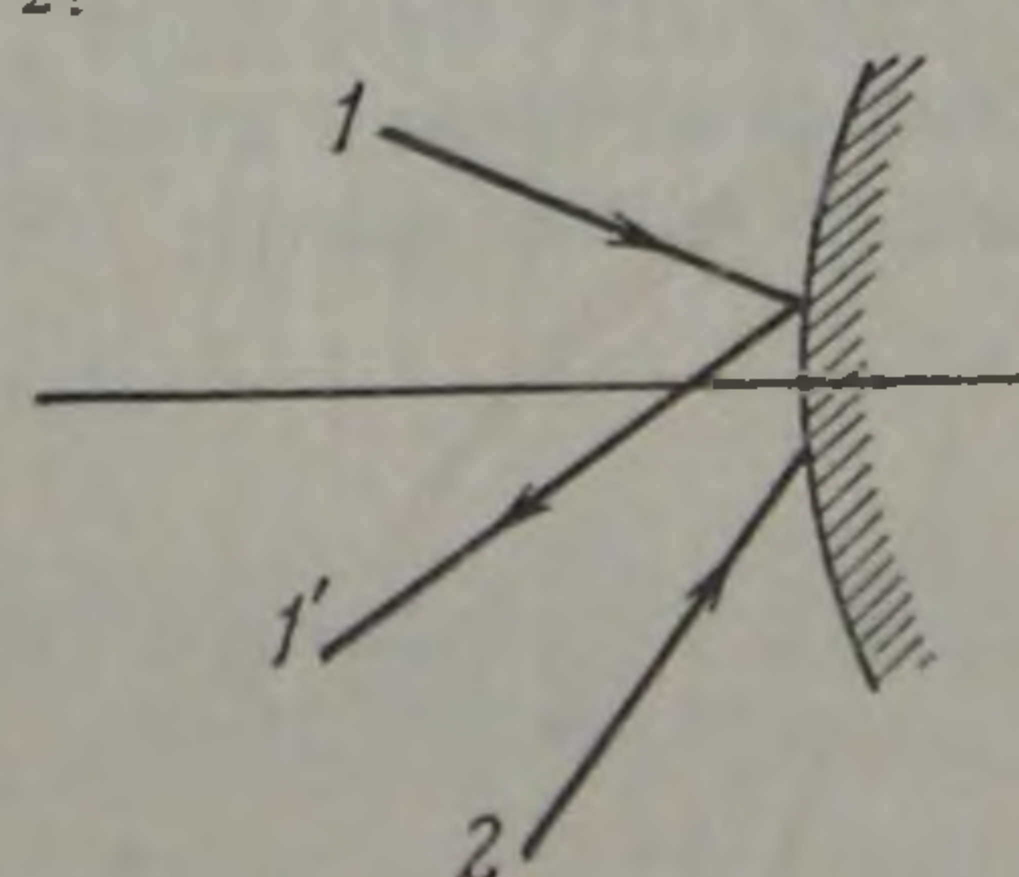


Рис. 4.13

4.12. Точечный источник света и два его изображения, даваемых двумя плоскими зеркалами, лежат в вершинах равностороннего треугольника. Как расположены зеркала?

4.13. Доказать, что источник и его изображения, полученные от зеркал, расположенных под углом α друг к другу, лежат на окружности. Точечный источник расположен на биссектрисе угла α.

4.14. Определить число изображений точечного источника S, расположенного на биссектрисе угла, образованного двумя плоскими зеркалами ($\alpha=60°$). Построить чертеж.

4.15. В центре вогнутого сферического зеркала радиусом 80 см находится полюс выпуклого зеркала с фокусным расстоянием 40 см. Между фокусом и центром вогнутого зеркала на расстоянии 50 см от его вершины перпендикулярно к оптической оси расположен предмет высотой 2 см. Определить положение и высоту изображения в выпуклом зеркале, создаваемого лучами, отраженными от вогнутого зеркала.

4.16. Два одинаковых вогнутых зеркала радиусом 80 см имеют общую оптическую ось, и их фокусы совпадают. На расстоянии 60 см от вершины одного из них помещен точечный источник света. Где получится изображение после отражения лучей от обоих зеркал?

4.17. Внутренняя поверхность стенок шара радиусом 36 см зеркальная. На расстоянии $R/2$ от центра шара помещен точечный источник, посылающий свет к наиболее удаленной части шара. Где будет находиться изображение источника? Как изменится положение изображения, если источник будет посылать свет к ближней стенке?

4.2. Преломление света. Линзы. Оптические приборы

Основные законы и формулы

При переходе из одной среды в другую происходит преломление светового луча, и справедливо следующее равенство:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n=\frac{n_2}{n_1},$$

где α — угол падения луча; β — угол преломления; n — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1, n_2 — абсолютные показатели преломления соответственно первой и второй сред.

При некотором значении угла падения $\alpha_{пр}$ угол преломления $\beta=90°$. Этот угол падения называется *предельным*. Если $\alpha>\alpha_{пр}$, то лучи отражаются от границы раздела обратно в первую среду. Соответствующее явление получило название *полного внутреннего отражения*.

Связывающие фокусное расстояние F с отрезками d и f формулы для сферических зеркал справедливы и для линз. Для тонкой собирающей линзы имеем

$$\frac{1}{d}\pm\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

(Знак минус соответствует мнимому изображению предмета.) Для тонкой рассеивающей линзы

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=-\frac{1}{F}.$$

Величину D, обратную фокусному расстоянию, называют *оптической силой* линзы:

$$D = \frac{1}{F}.$$

Если R_1 и R_2 — радиусы кривизны сферических поверхностей, ограничивающих линзу, то

$$\frac{1}{F} = \left(\frac{n_л}{n_{ср}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где $n_л$, $n_{ср}$ — показатели преломления соответственно вещества линзы и окружающей среды.

Линейное увеличение линзы

$$k = \frac{f}{d}.$$

Если две тонкие линзы с оптическими силами D_1 и D_2 сложены вплотную, то оптическая сила образовавшейся системы

$$D = D_1 + D_2.$$

Для получения изображения предметов часто используют различные системы линз. Примерами оптических систем могут служить лупа, микроскоп, зрительная труба.

Линейное увеличение, даваемое лупой с фокусным расстоянием F, определяется так:

$$k = \frac{d_0}{F},$$

где d_0 — расстояние наилучшего зрения. Для нормального глаза $d_0 = 25$ см. Для микроскопа

$$k = \frac{Ld_0}{F_1F_2},$$

где L — расстояние между окуляром и объективом (длина тубуса микроскопа); F_1, F_2 — фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра.

Для наблюдения изображений удаленных предметов применяют зрительные трубы. Увеличение, даваемое зрительной трубой, определяется по формуле

$$k = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{F_1}{F_2},$$

где α — угол зрения на рассматриваемый предмет; β — угол, под которым видно его изображение; F_1, F_2 — фокусные расстояния объектива и окуляра зрительной трубы.

Решение задач

Задачи на преломление света можно разделить на пять групп: задачи о преломлении света на плоской границе раздела двух сред; задачи на построение изображений предметов в отдельных линзах; задачи, в которых требуется путем графического построения определить по заданному положению предмета и изображения, где находится линза, ее тип и основные характерные точки; расчетные задачи на преломление света в одиночных линзах; задачи на оптические системы, состоящие из нескольких линз или линз и зеркал.

1. Задачи о преломлении света на плоской границе двух сред решают на основании общей формулы второго закона преломления с использованием законов и формул математики. Прежде всего необходимо сделать чертеж, при этом устанавливают по данным условия задачи, переходит ли световой луч из оптически менее плотной среды в более плотную или наоборот. После того как сделан чертеж, записывают второй закон преломления для каждого перехода луча из одной среды в другую и составляют вспомогательные уравнения на основании данных условия задачи. Решают полученную систему уравнений относительно неизвестной величины.

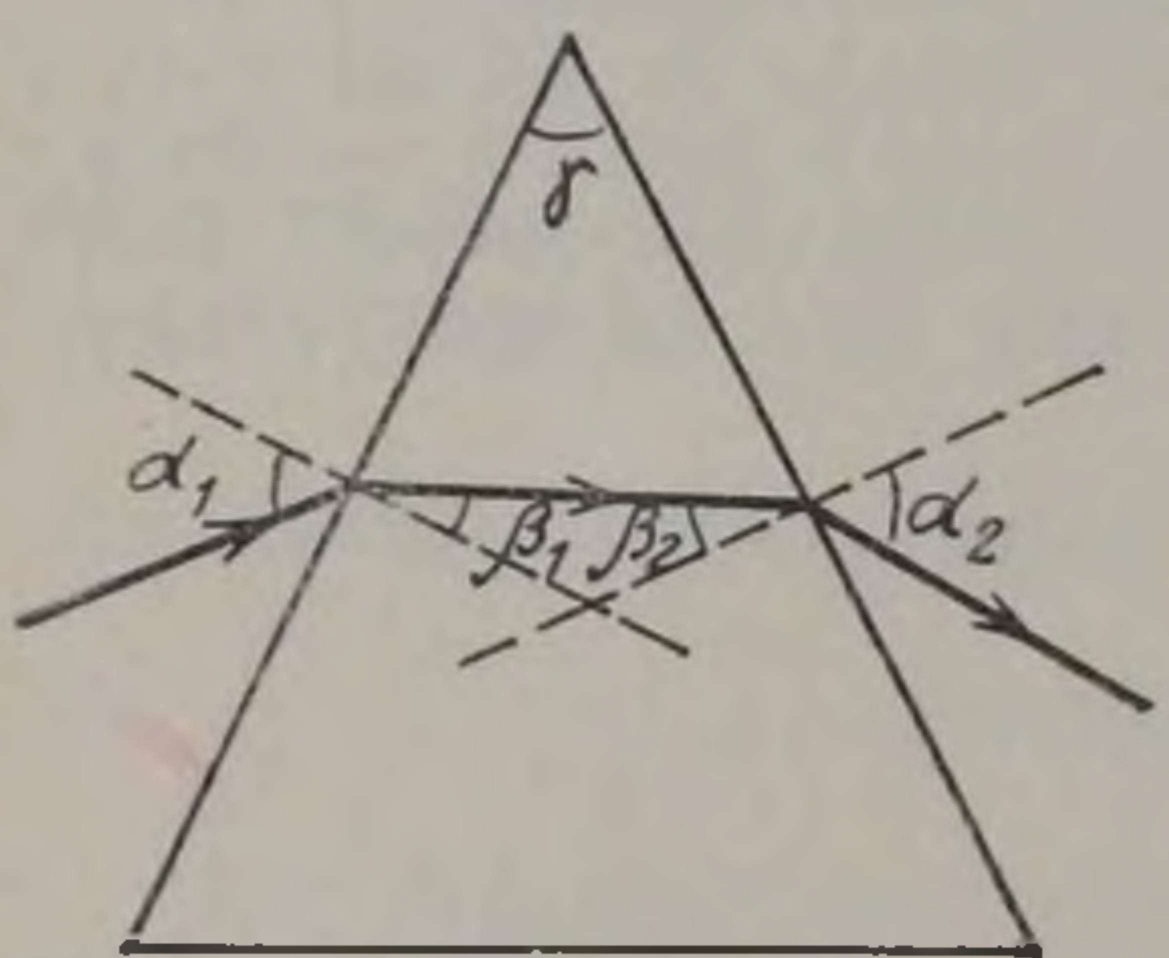


Рис. 4.14

Пример 1. Преломляющий угол стеклянной ($n=1{,}5$) призмы $\gamma=60°$. Под какими углами возможно прохождение преломленного луча сквозь вторую боковую грань, если на первую грань лучи падают под произвольными углами?

Решение. Строим ход преломленного луча в призме (рис. 4.14). Запишем второй закон преломления для первой и второй граней призмы:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}=n;$$

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}=\frac{1}{n}. \qquad (4.4)$$

Преломленный свет пройдет через вторую грань призмы лишь при условии, что угол падения на эту грань β_2 меньше предельного угла $\alpha_{пр}$. Величину предельного угла можно найти из соотношения $\frac{\sin\alpha_{пр}}{\sin 90°}=\frac{1}{n}$:

$$\sin\alpha_{пр}=\frac{1}{n};\ \alpha_{пр}=41°48';\ \beta_2<\alpha_{пр}<41°48'.$$

Как следует из рисунка, преломляющий угол призмы

$$\gamma=\beta_1+\beta_2. \qquad (4.5)$$

При изменении угла падения луча на первую грань α_1 от 90° до 0° угол β_1 будет меняться от $\alpha_{пр}=41°48'$ до 0°. Согласно формуле (4.5), при этом β_2 будет принимать значения от $60°-\alpha_{пр}=18°12'$ до 60°. Но преломленный свет пройдет через вторую грань при $18°12'\leqslant\beta_2\leqslant41°48'$. Тогда, согласно равенству (4.4), $27°54'\leqslant\alpha_2\leqslant90°$. При падении луча по другую сторону перпендикуляра выход преломленного луча через вторую грань невозможен, так как $\beta_2>\alpha_{пр}$.

2. Задачи на построение изображений предметов в отдельных линзах решаются аналогично задачам на сферические зеркала, с учетом лишь указанных выше особенностей построения изображений в линзах.

Пример 2. Построить изображение предмета AB (рис. 4.15) в рассеивающей линзе. Положение характерных точек линзы известно.

Решение. Для построения изображения предмета AB необходимо построить изображения точек A и B. При построении изображения точки B можно использовать луч, идущий параллельно главной оптической оси, и луч, падающий по направлению на задний фокус линзы. Первый после преломления пойдет таким образом, что его продолжение попадет в передний фокус, второй — параллельно главной оптической оси. Изображение точки B будет на пересечении продолжений преломленных лучей. Для построения изображения точки A используют два луча: луч, идущий вдоль главной оптической оси, и произвольный луч, параллельный некоторой побочной оси. После преломления продолжение второго луча пройдет через точку M пересечения побочной оси с передней фокальной плоскостью. Точка A' будет являться изображением точки A. Соединив A' с B', получим мнимое изображение предмета AB в рассеивающей линзе.

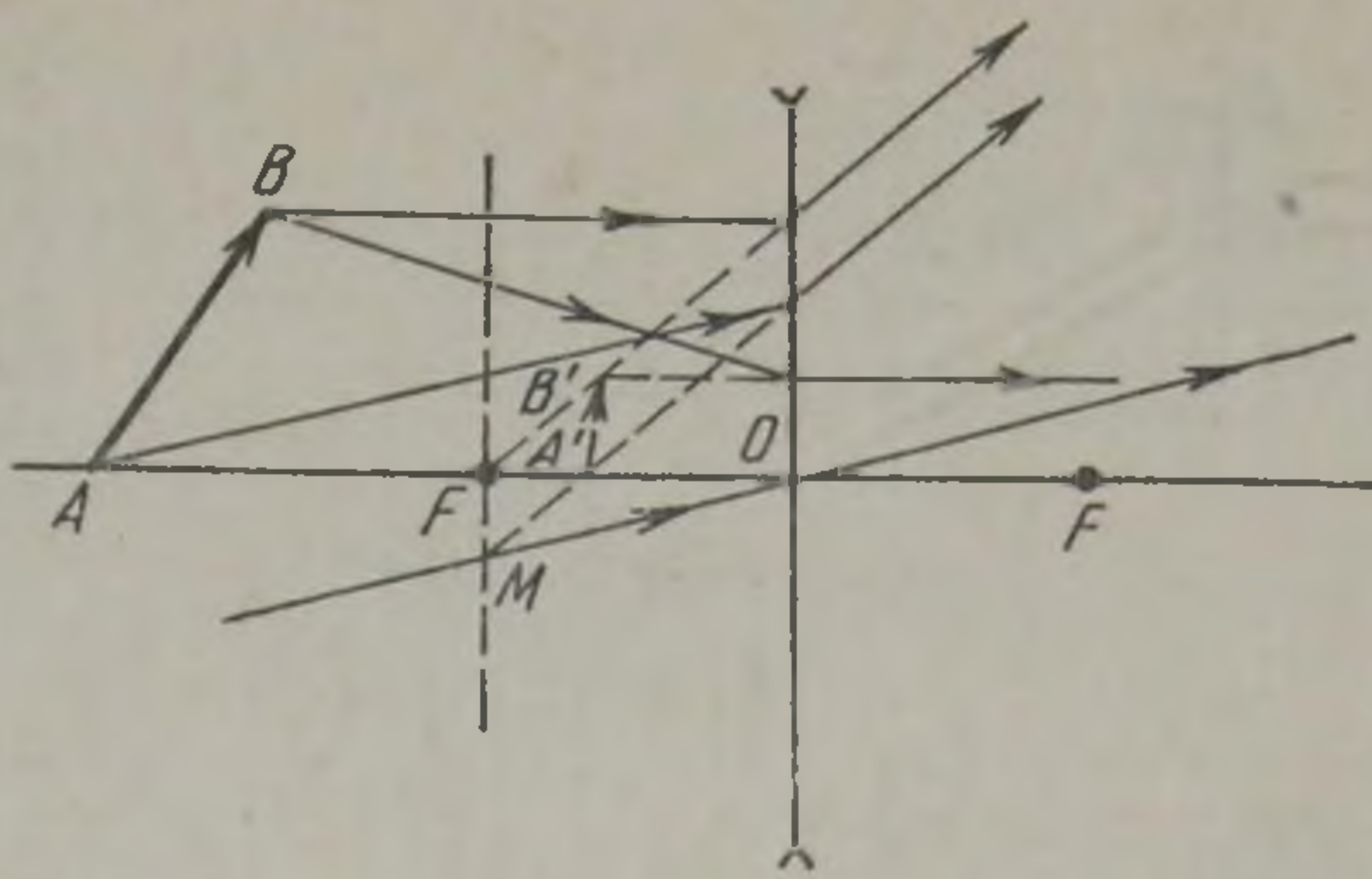


Рис. 4.15

3. Задачи, в которых требуется путем графического построения определить положение линзы, ее тип и положение характерных точек, решаются на основании свойств характерных лучей для линзы.

Пример 3. Даны положения предмета S, его изображения S' и главной оптической оси линзы (рис. 4.16, *а*). Определить тип линзы, ее положение, положение фокусов.

Решение. Чтобы определить положение линзы, можно воспользоваться свойством луча, проходящего через оптический центр линзы. Такой луч должен, не преломляясь, попасть из точки S в ее изображение S' (рис. 4.16, *б*). Соединив

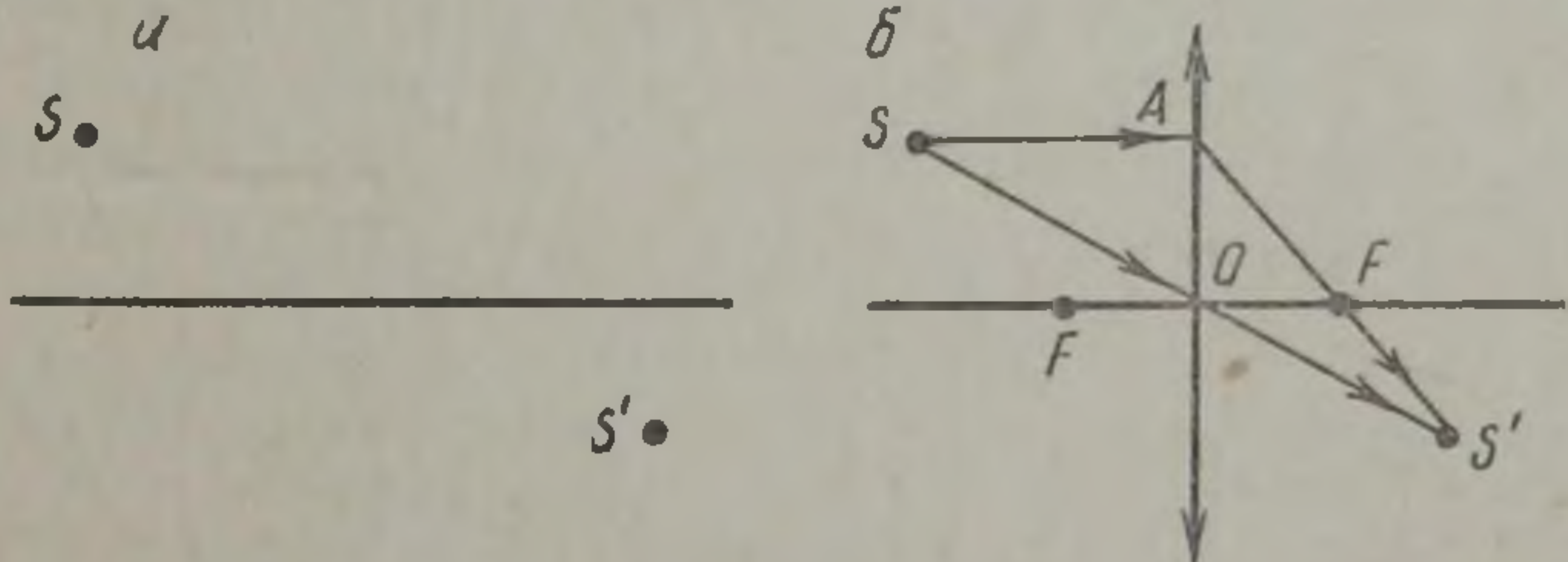


Рис. 4.16

точки S и S', получим на пересечении с главной оптической осью положение оптического центра O. Поскольку предмет и изображение находятся по разные стороны от главной оптической оси, то линза является собирающей. Построив ход луча SA, параллельного главной оптической оси, после преломления в линзе, получим положение заднего фокуса линзы. Передний фокус расположен симметрично относительно линзы.

4. Решение расчетных задач на преломление света в одиночных линзах сводится, как и в случае зеркал, к составлению основных и вспомогательных уравнений. Полученную систему уравнений решают относительно искомой величины.

Пример 4. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F=25$ см проецирует изображение предмета на экран, расположенный от линзы на расстоянии

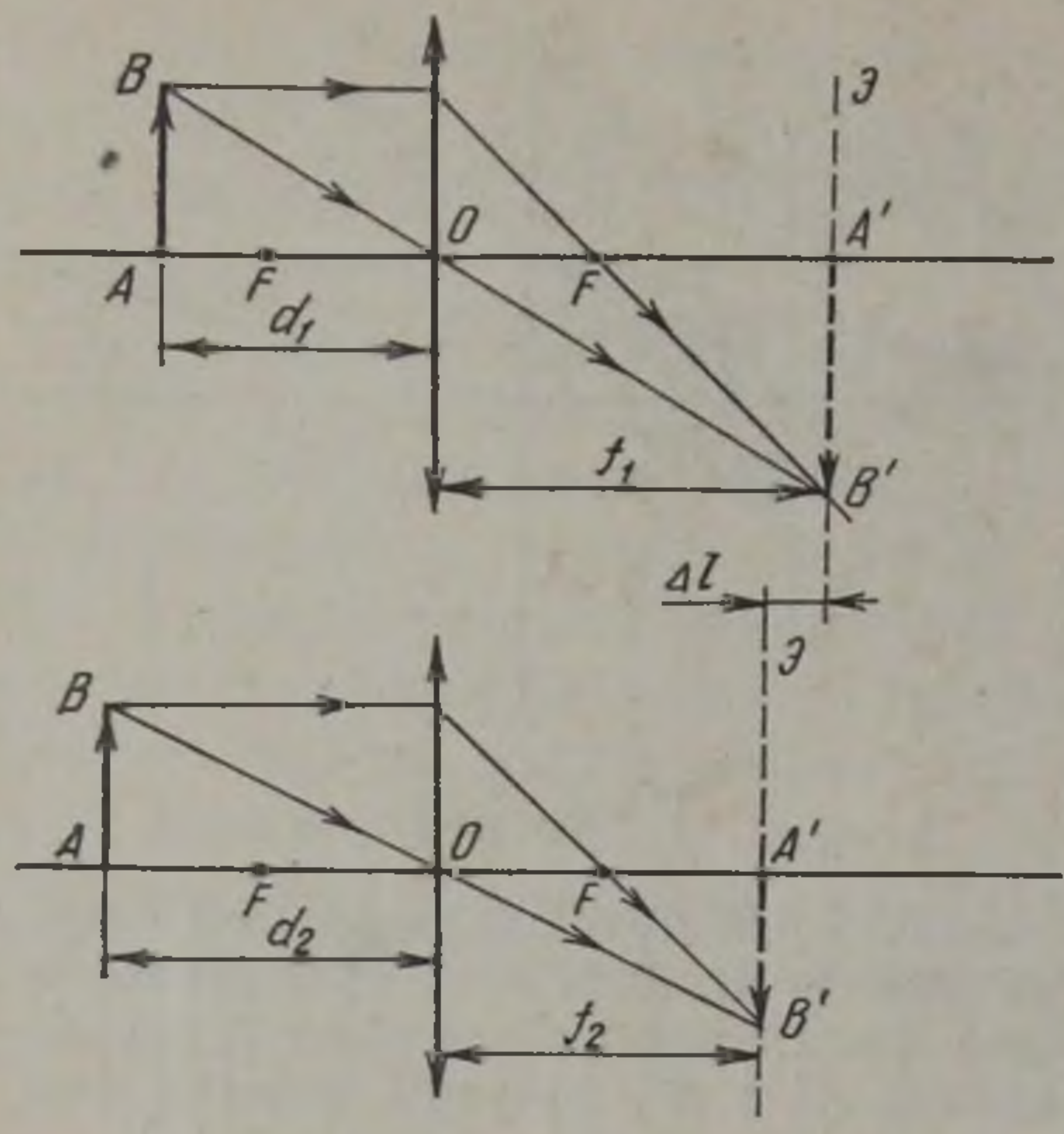


Рис. 4.17

$f_1=5{,}25$ м. Экран придвинули к линзе на $\Delta l=25$ см. На сколько следует переместить предмет, чтобы опять получить четкое изображение его на экране?

Решение. Строим изображение предмета в линзе для двух положений (рис. 4.17). Запишем общую формулу линзы для двух случаев:

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F};\quad \frac{1}{d_2}+\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}.$$

На основании данных условия задачи составим вспомогательные уравнения:

$$\Delta d=d_2-d_1;$$
$$f_2=f_1-\Delta l.$$

Решив полученную систему уравнений относительно Δd, получим, что $\Delta d\approx\approx 0{,}07$ см.

5. Решение задач на оптические системы линз аналогично решению задач на системы зеркал. Расчет величины и положения окончательного изображения здесь также основан на принципе обратимости световых лучей, из которого следует, что изображение, даваемое первой линзой, можно рассматривать как предмет для второй и т. д. В оптических системах, составленных нз линзы и зеркала, преобразование светового потока происходит трижды. Лучи от светящегося предмета падают на линзу, преломляются в ней и идут на зеркало. Отражаясь от зеркала, они вновь преломляются в линзе и дают окончательное изображение. При составлении уравнений и дальнейших расчетах всякий раз следует учитывать, является ли промежуточное изображение мнимым или действительным предметом для последующей линзы.

Пример 5. Одна сторона двояковогнутой симметричной стеклянной линзы посеребрена. Показатель преломления стекла $n=1{,}6$, радиус кривизны поверхности линзы $R=20$ см. На расстоянии $d=50$ см от линзы находится предмет высотой $h=6$ см. Определить величину изображения, даваемого оптической системой.

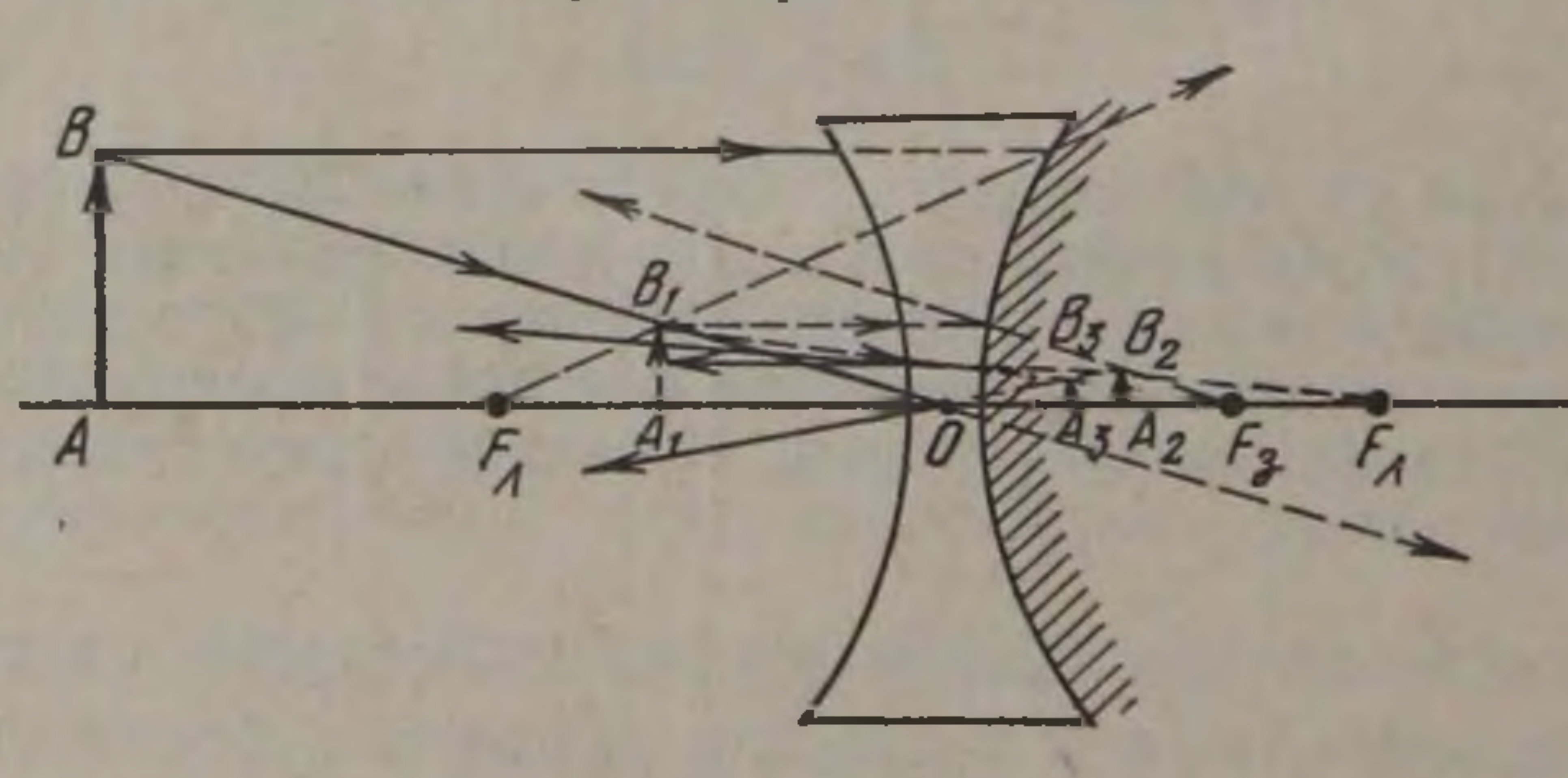


Рис. 4.18

Решение. Окончательным изображением предмета AB в системе будет изображение A_3B_3 (рис. 4.18). Искомая величина изображения может быть связана с высотой предмета h следующим образом:

$$\frac{h_3}{h} = k,$$

где k — увеличение системы, которое равно произведению увеличений, составляющих систему: $k = k_1 k_2 k_3$;

$$k_1 = \frac{f_1}{d_1};\ k_2 = \frac{f_2}{d_2};\ k_3 = \frac{f_3}{d_3}.$$

Отрезки d_1, f_1, d_2, f_2, d_3, f_3 могут быть определены из уравнений, составленных на основании общих формул линзы и зеркала. Для линзы

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F_л},$$

где $\frac{1}{F_л} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$. В нашем случае $R_1 = R_2 = 20$ см, $F_л = \frac{50}{3} \approx$ $\approx 16{,}6$ см, $f_1 = 12{,}5$ см, $k_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Для зеркала

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f_2} = -\frac{1}{F_з},$$

где $F_з = \frac{R}{2} = 10$ см, $d_2 = f_1$, $f_2 \approx 5{,}55$ см, $k_2 = \frac{4}{9}$, $\frac{1}{d_3} - \frac{1}{f_3} = -\frac{1}{F_л}$, $f_3 \approx$ $\approx 4{,}16$ см, $k_3 = \frac{3}{4}$, $k = \frac{1}{12}$, $h_3 = 0{,}5$ см.

Задачи для самостоятельного решения

4.18. Стеклянная призма ($n_1 = 1{,}6$) с преломляющим углом 60° отклоняет падающий на нее луч в воздухе на некоторый угол. Как изменится угол отклонения, если призму погрузить в воду ($n_2 = 1{,}33$)? Угол падения на первую грань призмы в обоих случаях равен 50°.

4.19. Предмет находится на расстоянии 15 см от плоскопараллельной стеклянной пластинки ($n = 1{,}5$) толщиной 4,5 см. Наблюдатель рассматривает предмет через пластинку, причем луч зрения нормален к ней. Определить расстояние между изображением предмета и ближайшей гранью.

4.20. Человек смотрит на свое изображение в вогнутом зеркале радиусом 0,5 м, положенном на дно сосуда, наполненного водой. На какое расстояние аккомодирован глаз человека, если он находится на высоте 0,25 м над уровнем воды, а зеркало — на глубине 0,5 м под уровнем воды?

4.21. Найти построением ход луча за собирающей (рис. 4.19, *а*) и рассеивающей (рис. 4.19, *б*) тонкими линзами.

4.22. На рис. 4.20 изображен луч AB, прошедший сквозь рассеивающую линзу. Построить ход луча до линзы, если положение ее фокусов известно.

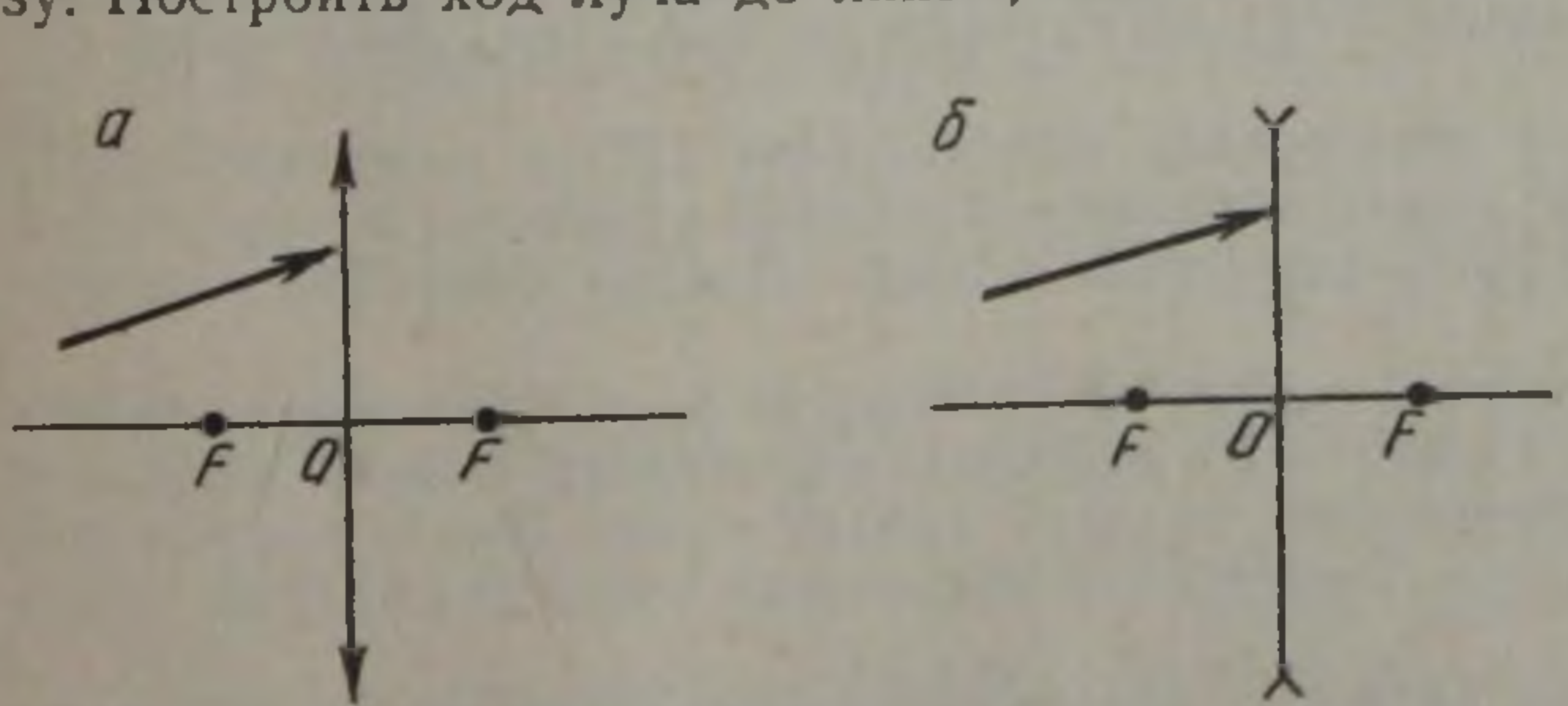


Рис. 4.19

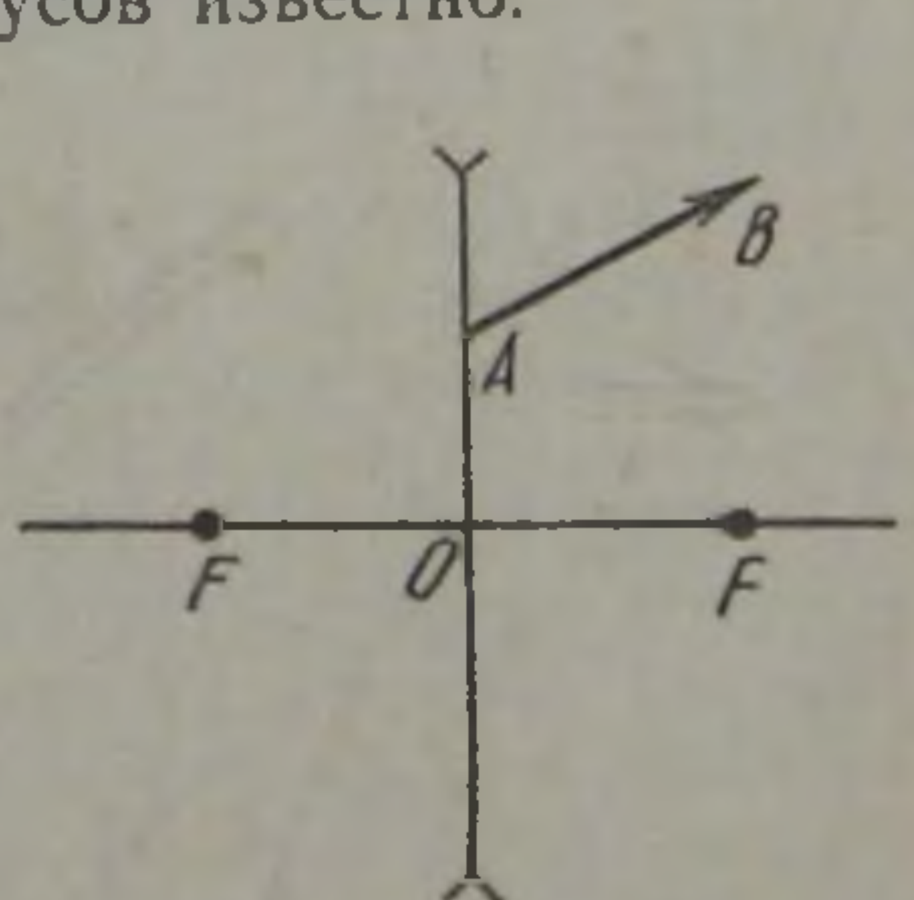


Рис. 4.20

4.23. Построить изображение предмета AB в собирающей линзе (рис. 4.21).

4.24. Известны положения точки S и ее изображения S' относительно оптической оси (рис. 4.22). Найти построением положения линзы и ее фокусов.

4.25. На рис. 4.23 даны положения предмета AB и его изображения $A'B'$. Найти построением положения линзы и ее фокусов.

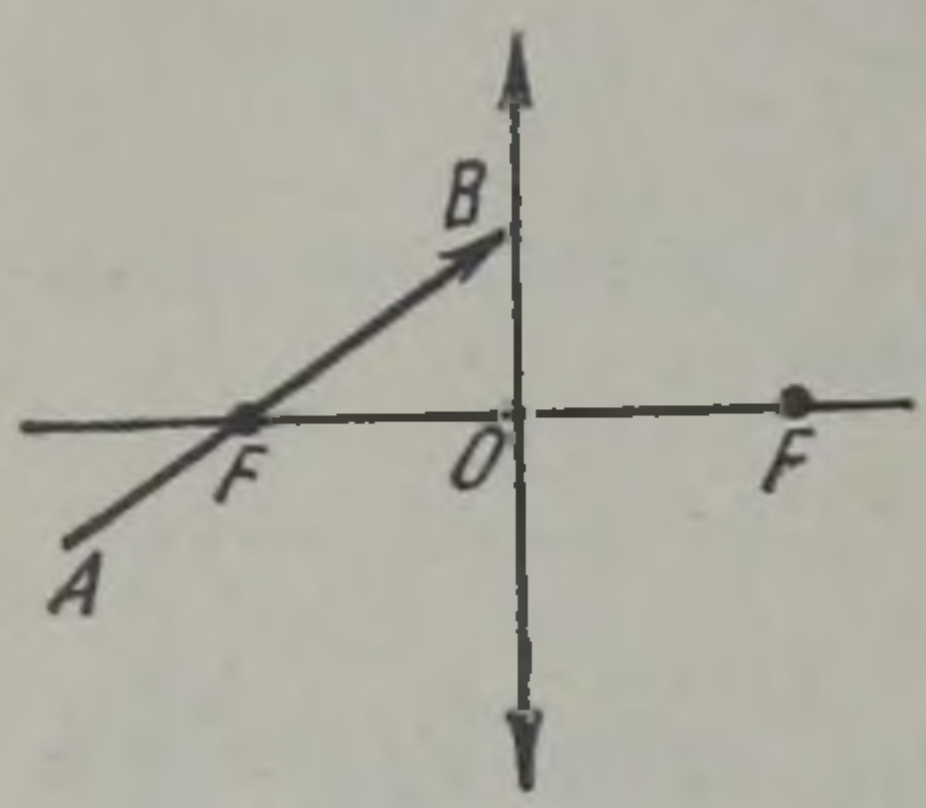


Рис. 4.21

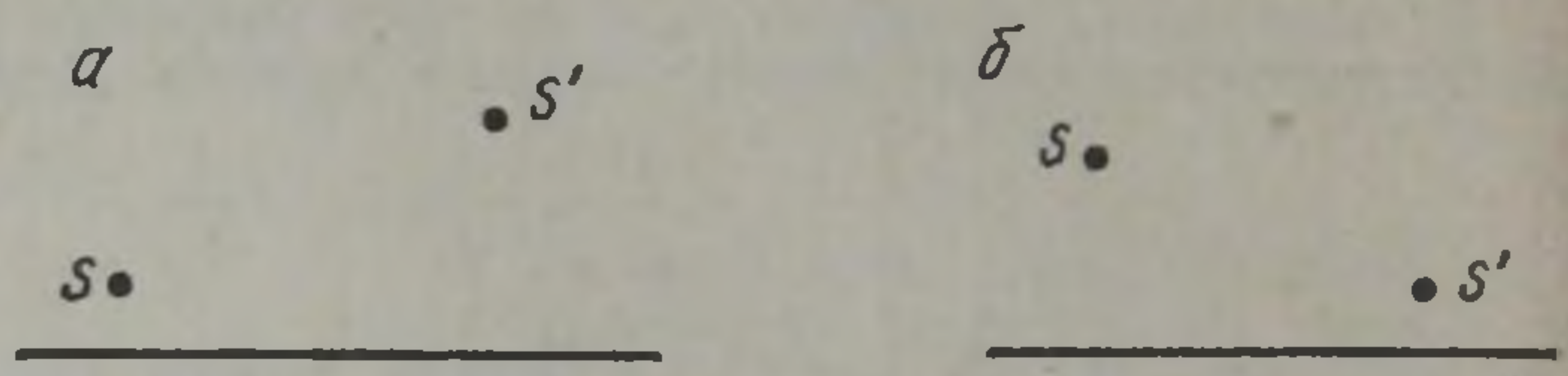


Рис. 4.22

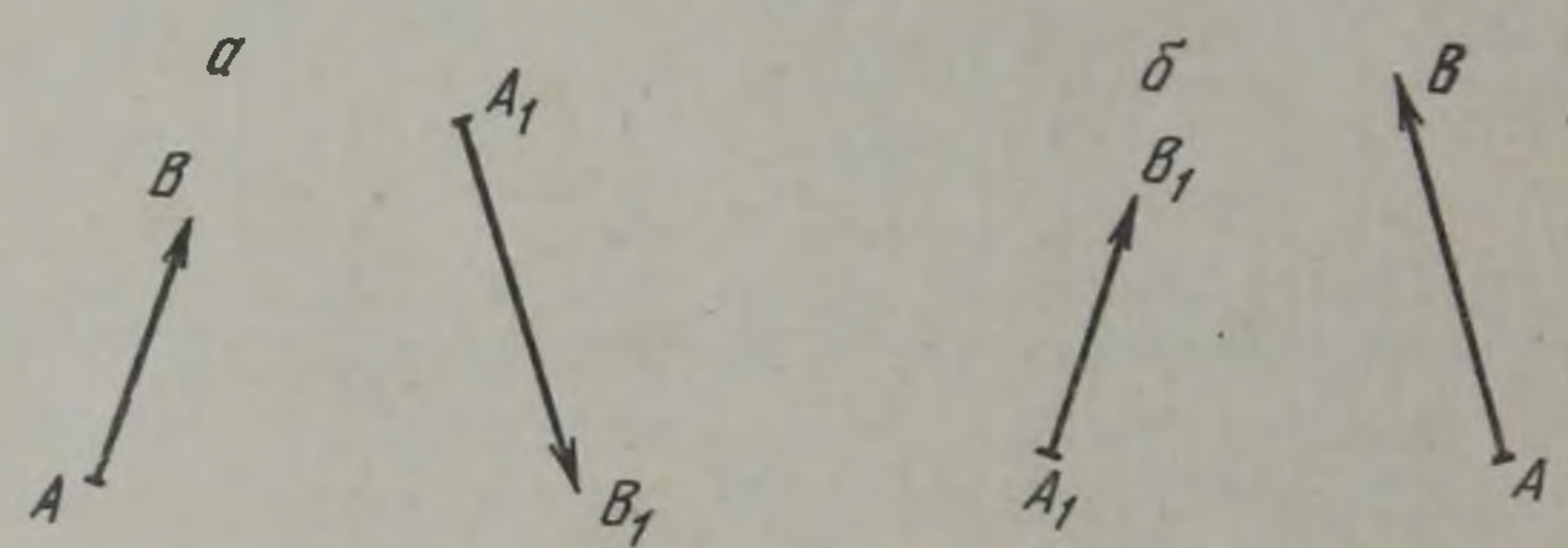


Рис. 4.23

4.26. Тонкая линза дает прямое мнимое изображение предмета, величина которого оказалась в 2 раза меньше предмета. Если предмет сместить на 10 см вдоль оптической оси, то изображение предмета уменьшится еще в 2 раза. Где находился предмет вначале и какова оптическая сила линзы?

4.27. Плосковыпуклая линза, радиус кривизны которой 30 см и показатель преломления 1,5, будучи погруженной в воду ($n=1{,}33$), дает изображение предмета с увеличением, равным 2. Найти расстояния от предмета и изображения до линзы.

4.28. Определить положение изображения предмета, даваемого оптической системой, состоящей из собирающей линзы с фокусным расстоянием 20 см и вогнутого зеркала радиусом 20 см. Расстояние от линзы до зеркала 30 см, от предмета до линзы 40 см.

4.29. Тонкая двояковыпуклая линза положена на плоское зеркало. Где надо поместить точечный источник света, чтобы изображение его, даваемое этой системой, было действительным и совпадало с самим источником?

4.30. Две тонкие линзы с фокусными расстояниями 0,10 и 0,125 м установлены на расстоянии 0,05 м друг от друга. Найти величину и положение изображения предмета высотой 4 см, расположенного на расстоянии 2 м перед оптической системой.

4.31. Собирающая линза с показателем преломления 1,70 и рассеивающая с показателем преломления 1,51 имеют одинаковый радиус кривизны поверхностей 10 см. Линзы сложили вплотную и погрузили в воду. Каково фокусное расстояние этой системы в воде?

4.32. Центрированная оптическая система состоит из трех линз с фокусными расстояниями соответственно 10 см, -20 и 39 см. Расстояние между второй и третьей линзами 19 см. На оптическую систему падает пучок света, выходящий из переднего фокуса первой линзы. Определить положение точки схождения пучка по выходе из системы линз.

4.33. С помощью линзы на экране, расположенном на расстоянии 40 см от линзы, получают четкое изображение предмета. Между линзой и предметом перпендикулярно к оптической оси линзы поместили плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной 9 см. Чтобы изображение предмета на экране осталось четким, его сместили на 60 см. Чему равно фокусное расстояние линзы?

4.34. Оптические силы объектива и окуляра микроскопа равны соответственно 100 и 20 дптр. Увеличение микроскопа равно 50. Каково будет увеличение этого микроскопа, если расстояние между объективом и окуляром увеличить на 2 см?

4.3. Фотометрия

Основные законы и формулы

Световой поток Ф, излучаемый источником, определяется следующим образом:

$$\Phi = \frac{W}{t},$$

где W — величина лучистой энергии; t — время излучения.

Сила света точечного источника

$$I = \frac{\Phi}{\omega}, \tag{4.6}$$

где Φ — световой поток; ω — телесный угол: $\omega = \frac{S}{r^2}$; S — площадь основания конуса с вершиной в центре сферы радиусом r. Полный телесный угол $\omega_0 = 4\pi$.

Полный световой поток, излучаемый точечным источником,

$$\Phi_0 = 4\pi I. \tag{4.7}$$

Освещенность, создаваемая световым потоком Ф на некоторой поверхности S,

$$E = \frac{\Phi}{S}. \tag{4.8}$$

Освещенность, создаваемая точечным источником света силой I на бесконечно малой площадке, удаленной от источника на расстояние r, определяется по формуле

$$E = \frac{I}{r^2}\cos\alpha, \tag{4.9}$$

где α — угол падения лучей на освещаемую площадку.

При нормальном падении лучей ($\alpha = 0$) освещенность площадки

$$E_0 = \frac{I}{r^2}. \tag{4.10}$$

Тогда равенство (4.9) можно записать в виде

$$E = E_0 \cos\alpha. \tag{4.11}$$

Иногда равенства (4.10), (4.11) называют соответственно *первым* и *вторым законами освещенности.*

Если освещенность E поверхности создается несколькими источниками, то

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = \sum_{i=1}^{n} E_i. \tag{4.12}$$

Решение задач

Задачи по фотометрии можно разделить на две группы: задачи, в которых требуется определить освещенность, создаваемую одним или несколькими точечными источниками, или другие фотометрические величины; задачи на использование законов фотометрии в сочетании с законами отражения и преломления света.

1. Задачи первого типа решаются путем составления основных уравнений на основании формул (4.6) — (4.12). Часто перед составлением уравнений необходимо сделать чертеж, указав на нем положение источников света, заданные расстояния, ход лучей и углы падения лучей. Используя чертеж, иногда надо составлять вспомогательные уравнения, связывающие расстояния и тригонометрические функции углов падения лучей. Полученную систему уравнений решают относительно искомой величины.

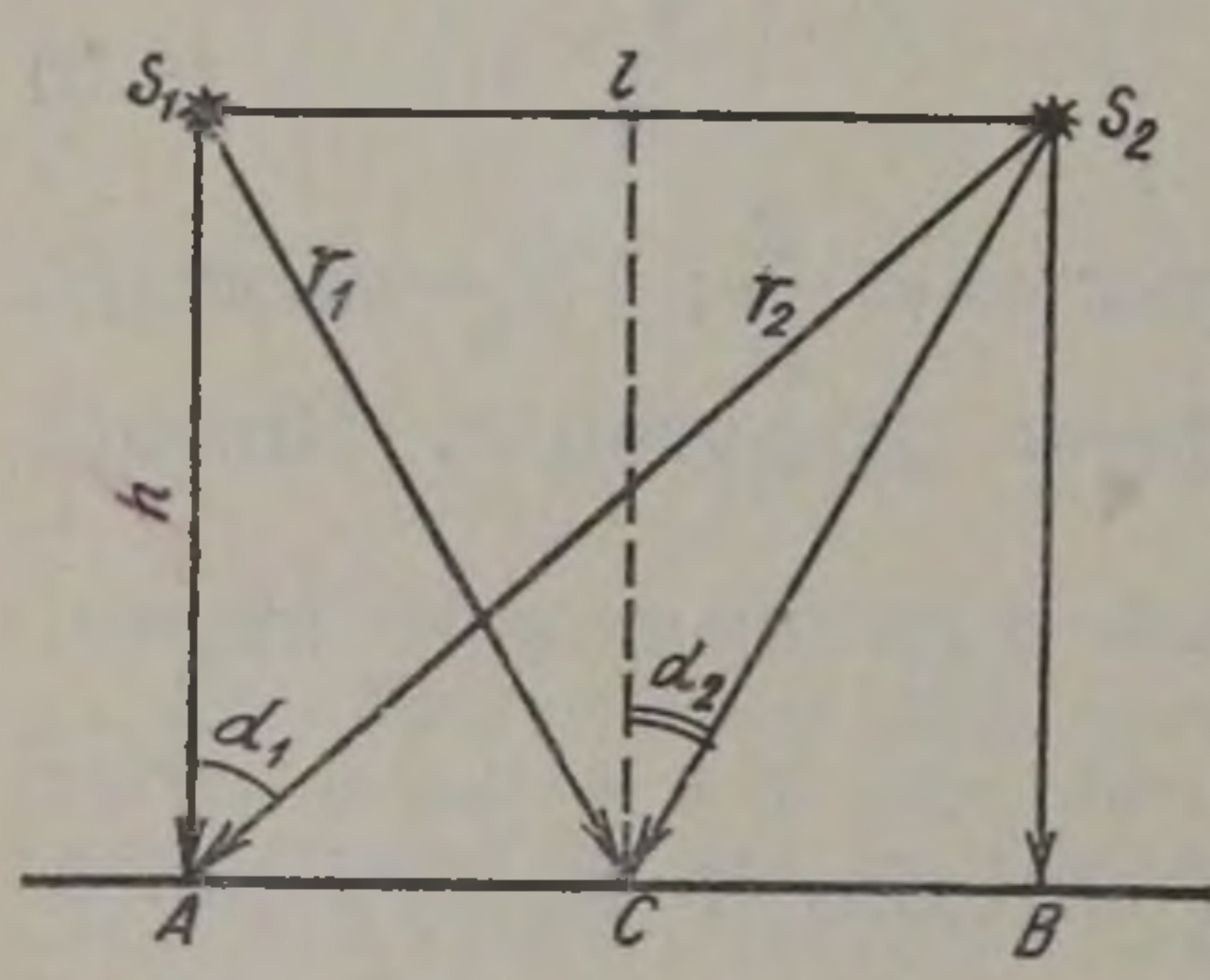


Рис. 4.24

Пример 1. Над горизонтальной площадкой на высоте 2 м и на расстоянии 1 м друг от друга помещены два точечных источника света, дающих световые потоки по 300 лм каждый. Определить освещенность площадки в точках под источниками света и на середине расстояния между ними.

Решение. Освещенности в точках A и B под источниками (рис. 4.24) равны, т. е. $E_A = E_B$. В точке A $E_A = E_1 + E_2$, где $E_1 = \frac{I_1}{h^2}$, $E_2 = \frac{I_2 \cos\alpha_1}{r_2^2}$.

В нашем случае $I_1 = I_2 = I$. Поскольку источник точечный, то $\Phi = 4\pi I$, $I = \frac{\Phi}{4\pi}$.

Как следует из рис. 4.24,

$$\cos\alpha_1 = \frac{h}{r_2};\; r_2^2 = h^2 + l^2;\; E_2 = \frac{Ih}{(h^2 + l^2)^{3/2}}.$$

Тогда

$$E_A = \frac{I}{h^2} + \frac{Ih}{(h^2 + l^2)^{3/2}} = \frac{\Phi}{4\pi}\left(\frac{1}{h^2} + \frac{h}{(h^2 + l^2)^{3/2}}\right);\; E_A = E_B \approx 10{,}2 \text{ лк}.$$

Освещенность в точке C также будет создаваться двумя источниками:

$$E_C = E_1' + E_2';\; E_1' = E_2' = \frac{I\cos\alpha_2}{r_1^2};\quad \cos\alpha_2 = \frac{h}{r_1};$$

$$r_1^2 = h^2 + \frac{l^2}{4};\; E_1' = \frac{Ih}{\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}}.$$

Тогда

$$E_C = 2E_1' = \frac{2Ih}{\left(h^2 + \frac{l^2}{4}\right)^{3/2}} \approx 10{,}9 \text{ лк}.$$

2. В задачах второго типа чаще всего требуется определить освещенность в какой-либо точке, создаваемую лучами, идущими от точечного источника света после их отражения от зеркала или преломления линзой. При решении таких задач следует прежде всего построить изображение точечного источника в заданной оптической системе и рассматривать полученное изображение как второй источник, создающий добавочную освещенность. Следующим этапом решения является определение положения дополнительных источников и их силы света. Силу света таких источников чаще всего рассчитывают, используя величину светового потока. При этом должны быть учтены потери светового потока за счет поглощения и рассеяния световых лучей. Определив положение дополнительных источников и их силу света, составляют основные и вспомогательные уравнения.

Пример 2. Точечный источник, сила света которого равна 40 кд, находится на главной оптической оси выпуклого зеркала радиусом 40 см. На расстоянии 40 см от зеркала перпендикулярно к его оптической оси расположен экран. Чему равна максимальная освещенность экрана, если коэффициент отражения зеркала 0,9 и источник удален от зеркала на 20 см?

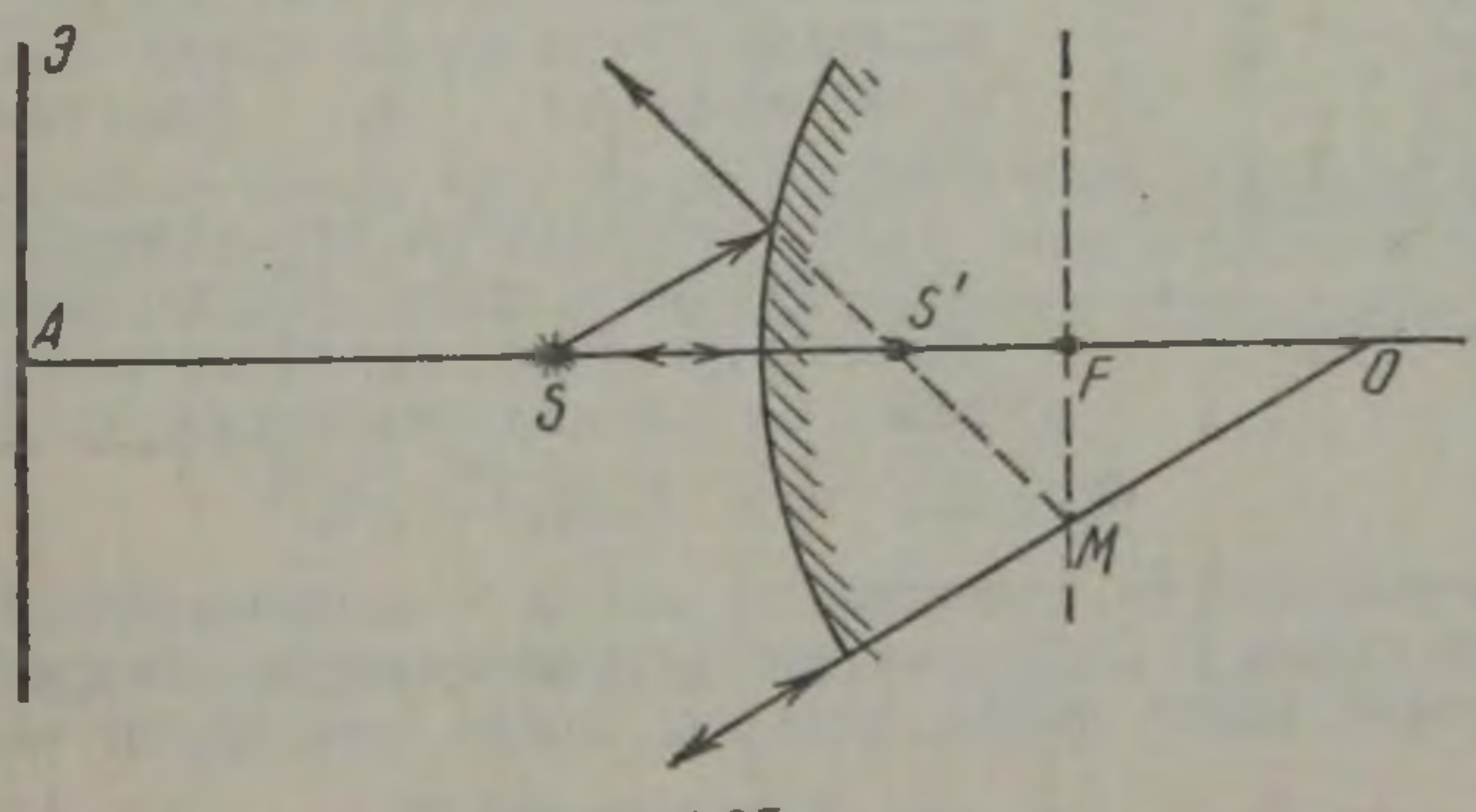


Рис. 4.25

Решение. Максимальная освещенность будет в точке A экрана (рис. 4.25). Она будет равна сумме освещенностей, создаваемых самим источником S и его мнимым изображением в выпуклом зеркале S':

$$E = E_1 + E_2;$$

$$E_1 = \frac{I}{r_1^2}; \quad E_2 = \frac{I_1}{r_2^2},$$

где I_1 — сила света источника S', которую определим на основании закона сохранения световой энергии. Выберем на поверхности зеркала маленькую площадку ΔS. Поток световой энергии, распространяющийся от источника в телесном угле $\omega_0 = \frac{\Delta S}{d^2}$, после отражения идет в телесном угле $\omega_1 = \frac{\Delta S}{f^2}$. На основании закона сохранения световой энергии имеем:

$$\Phi_0 = \Phi_1; \quad I_0\omega_0 = I_1'\omega_1,$$

откуда

$$I_1' = \frac{f^2}{d^2} I_0.$$

Учитывая потери световой энергии при отражении, силу света источника определим так: $I_1 = 0,9 \frac{f^2}{d^2} I_0$. На основании формулы зеркала определяем f и d:

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{f} = -\frac{1}{F}; \; F = \frac{R}{2} = 20 \text{ см}; \; d = 20 \text{ см}; \; f = 10 \text{ см}.$$

Тогда $I_1 = 9$ кд; $r_2 = 40 + f = 50$ см;

$$E = \frac{I}{r_1^2} + \frac{I_1}{r_2^2} = 1036 \text{ лк}.$$

Пример 3. Изображение Солнца получено на экране с помощью системы из двух одинаковых линз с фокусным расстоянием F, сложенных вплотную. Как изменится освещенность изображения Солнца, если оно будет получено одной такой линзой?

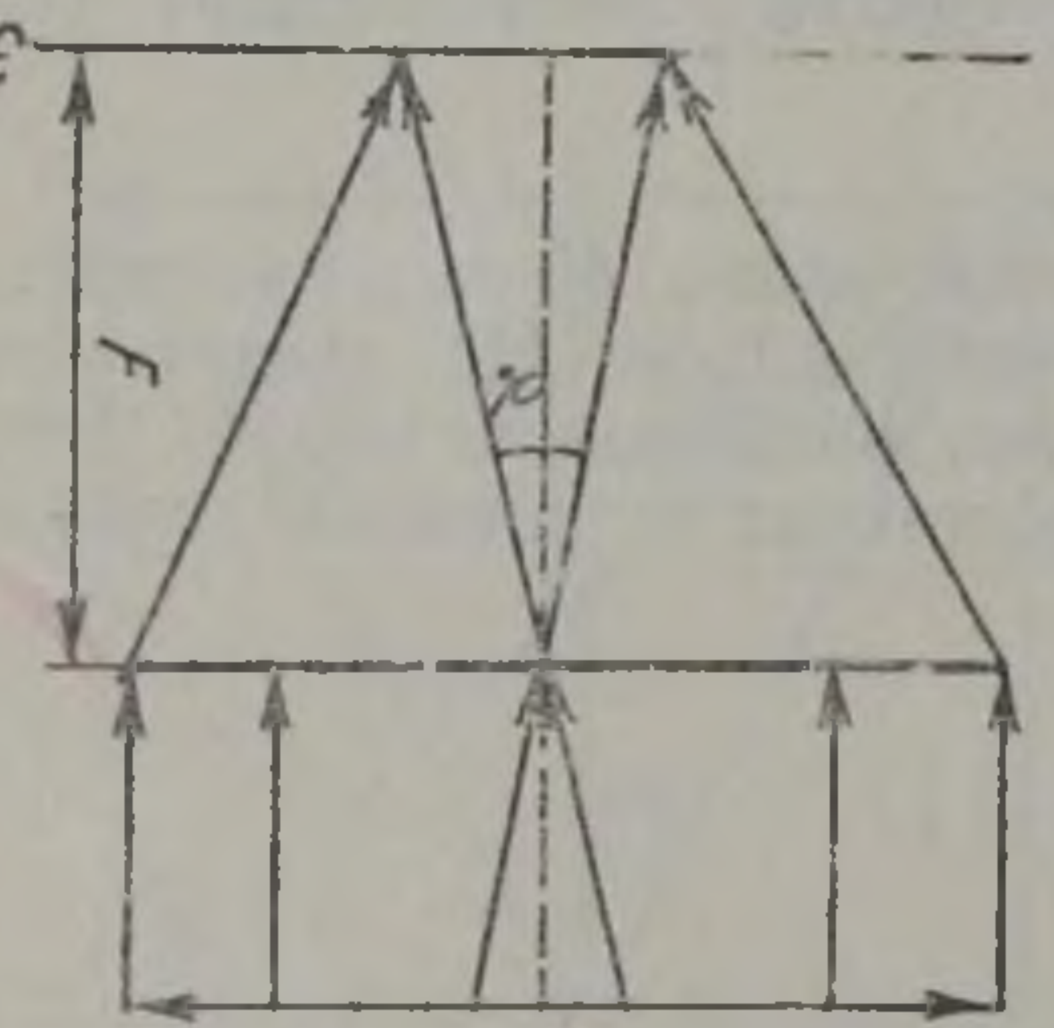


Рис. 4.26

Решение. Если на пути солнечных лучей, падающих нормально на поверхность экрана, поставить собирающую линзу так, чтобы она давала изображение Солнца, то световой поток, распределявшийся ранее по площади экрана, равной площади линзы $S_л$, будет концентрироваться на площади изображения Солнца $S_и$. Так как солнечные лучи падают на линзу почти параллельно, то изображение Солнца получается приблизительно в фокальной плоскости (рис. 4.26).

Предполагается, что поглощение света линзой пренебрежимо мало. Тогда световой поток, падающий на линзу, равен световому потоку, падающему на площадь изображения Солнца, т. е.

$$\Phi_л = \Phi_и \quad \text{или} \quad E_л S_л = E_и S_и,$$

где $E_л$, $E_и$ — освещенности поверхности линзы и изображения Солнца.

Пусть диаметр линзы D и угол между лучами, идущими от крайних точек Солнца через оптический центр линзы, равен α. Тогда, как видно из чертежа,

$$S_и = \pi r_и^2 = \pi F^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку угол α мал, то

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}; \; S_и = \pi \left(\frac{\alpha F}{2}\right)^2.$$

Площадь линзы

$$S_л = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Освещенность изображения Солнца

$$E_и = E_л \left(\frac{D}{\alpha F}\right)^2.$$

Если изображение Солнца получено с помощью системы из двух линз, то его освещенность

$$E_и' = E_л \left(\frac{D}{\alpha F_0}\right)^2,$$

где F_0 — фокусное расстояние системы линз:

$$\frac{1}{F_0}=\frac{2}{F}; \quad F_0=\frac{F}{2}.$$

Следовательно, $\frac{E_и'}{E_и}=4$ (освещенность изображения Солнца уменьшится в 4 раза).

Пример 4. При фотографировании предмета с увеличением в 2 раза экспозиция равна 9 с. Какой должна быть экспозиция, если предмет нужно сфотографировать в натуральную величину?

Решение. В данной задаче в отличие от предыдущих рассматривается протяженный источник. Основная трудность решения такого рода задач состоит в определении величины светового потока, падающего на получаемое изображение. Обычно при расчетах допускают, что диаметр линзы (объектива) мал по сравнению с его фокусным расстоянием.

При фотографировании предмета с различных расстояний необходимо, чтобы на единицу площади пленки, где получается изображение предмета, приходилась одинаковая световая энергия, т. е.

$$\frac{W_1}{S_1}=\frac{W_2}{S_2}, \tag{4.13}$$

где W_1 — энергия, которая приходится на площадь изображения S_1 за время t_1 при фотографировании с расстояния d_1; W_2 — энергия, которая приходится на площадь изображения S_2 за время t_2 при фотографировании с расстояния d_2.

Равенство (4.13) можно записать через соответствующие освещенности изображений:

$$E_1t_1=E_2t_2,$$

откуда

$$t_2=\frac{E_1t_1}{E_2}. \tag{4.14}$$

Поскольку предполагается, что диаметр линзы мал по сравнению с фокусным расстоянием F, то при подсчете телесных углов, под которыми линзу видно из различных точек предмета, их можно считать равными друг другу:

$$\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_n=\frac{S_л}{d_1^2},$$

где $S_л$ — площадь линзы.

Световой поток, идущий на линзу от элементарной площадки предмета,

$$\Delta\Phi=w\frac{S_л}{d^2}\Delta S,$$

где w — энергия, которая излучается ежесекундно в единичный телесный угол.

Полный световой поток, падающий на линзу со всей площади предмета S_0,

$$\Phi_1=\Sigma\,\Delta\Phi=w\frac{S_л}{d_1^2}S_0.$$

Если пренебречь потерями светового потока и считать, что весь поток Φ_1, падающий от предмета на линзу, попадает на изображение, то

$$E_1=\frac{\Phi_1}{S_1}=w\frac{S_л}{d_1^2}\frac{S_0}{S_1}; \quad \frac{S_1}{S_0}=k_1^2; \quad k_1=\frac{f_1}{d_1}; \quad \frac{1}{d_1}+\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}.$$

Тогда

$$E_1=\frac{wS_л}{(k_1+1)^2F^2}.$$

Для другого расстояния d_2, аналогично рассуждая, получим

$$E_2 = \frac{wS_л}{(k_2+1)^2 F^2}.$$

Подставив значения освещенностей в равенство (4.14), имеем

$$t_2 = \left(\frac{k_2+1}{k_1+1}\right)^2 t_1 = 4 \text{ с}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.35. Полный световой поток, излучаемый точечным источником, равен 500 лм. Источник расположен на высоте 2 м от освещаемой площадки. Чему равна освещенность площадки на расстоянии 2 м от точки нормального падения лучей?

4.36. Над площадкой на одинаковой высоте 2 м висят три лампы по 200 кд. Лампы расположены на расстоянии 2 м друг от друга. Найти освещенность под каждой лампой.

4.37. Лампа в 400 кд находится на расстоянии 1 м от экрана. На каком расстоянии следует поставить позади лампы плоское зеркало параллельно экрану, чтобы освещенность в центре экрана увеличилась на 100 лк?

4.38. Точечный источник света находится на расстоянии l от экрана. Как изменится освещенность центральной точки экрана, если за источником поместить два плоских зеркала, составляющих двугранный угол 90°? Расстояние от источника до вершины двугранного угла l. Источник находится на биссектрисе двугранного угла, образованного зеркалами.

4.39. В фокусе вогнутого сферического зеркала радиусом 40 см находится точечный источник, сила света которого 100 кд. Какова будет максимальная освещенность экрана, расположенного перпендикулярно к главной оптической оси на расстоянии 120 см от экрана?

4.40. Точечный источник света находится на главной оптической оси выпуклого зеркала радиусом R. Коэффициент отражения зеркала k. Максимальная освещенность экрана, расположенного перпендикулярно к оптической оси на расстоянии R от зеркала, равна E. Какова сила света точечного источника? Расстояние от источника до зеркала равно $R/2$.

4.41. При помощи собирающей линзы диаметром 9 см и фокусным расстоянием 50 см на экране получают изображение Солнца. Угловой диаметр Солнца 32′. Во сколько раз освещенность изображения будет больше освещенности, создаваемой Солнцем непосредственно?

4.42. Освещенность изображения лунного диска, полученного с помощью линзы диаметром 1 см и фокусным расстоянием 10 см, равна 10 лк. Угловой диаметр Луны 0,01 рад. Какую освещенность создает Луна на Земле?

4.43. На расстоянии 50 см от небольшого экрана находится точечный источник света. Если посередине между экраном и источником поместить собирающую линзу, то освещенность экрана не меняется. Чему равна оптическая сила линзы?

4.44. С помощью собирающей линзы можно получить изображение небольшого предмета на экране при двух ее положениях с увеличениями $k_1=2$ и $k_2=3$. Сравнить освещенности получаемых изображений предмета.

4.45. С помощью линзы можно получить изображение небольшого предмета на экране при двух ее положениях, отстоящих друг от друга на расстоянии 40 см. Освещенности изображений предмета при этом отличаются в 4 раза. На каком расстоянии от экрана расположен предмет?

4.46. При фотографировании предмета, находящегося на расстоянии 2 м, экспозиция была равна t_1. При увеличении расстояния втрое экспозиция оказалась в 4 раза меньше, чем t_1. Чему равно фокусное расстояние объектива фотоаппарата?

4.4. Световые волны. Интерференция и дифракция света

Основные законы и формулы

Показатель преломления $n = \frac{c}{v}$, где c — скорость света в вакууме, а v — скорость света в среде, зависит от длины волны света. Это явление носит название *дисперсии света.*

При наложении когерентных ($\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$) волн имеет место интерференция света. Результат интерференции световых волн зависит от величины оптической разности хода волн в точке наблюдения. Оптическая разность хода двух световых лучей

$$\Delta = L_2 - L_1,$$

где L_1, L_2 — оптические длины путей.

Интерференционный максимум интенсивности света соответствует оптической разности хода лучей, численно равной четному числу полуволн:

$$\Delta_{\max} = 2k\frac{\lambda}{2}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.15}$$

где λ — длина световой волны в вакууме.

Интерференционный минимум интенсивности света соответствует оптической разности хода лучей, численно равной нечетному числу полуволн:

$$\Delta_{\min} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}. \tag{4.16}$$

Радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете определяются формулой

$$r_{\text{т}} = \sqrt{kR\lambda}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.17}$$

радиусы светлых колец

$$r_{\text{с}} = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{4.18}$$

где R — радиус кривизны поверхности линзы; k — порядковый номер кольца.

В случае дифракции в параллельных лучах от одной щели положение минимумов освещенности на экране определяется условием

$$b \sin\varphi = k\lambda, \qquad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где b — ширина щели; k — порядок минимума.

При нормальном падении света на дифракционную решетку положение главных максимумов определяется условием

$$d \sin\varphi = k\lambda, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где d — постоянная (период) решетки, равная расстоянию между серединами двух соседних щелей; k — порядок спектра.

Решение задач

1. Большинство задач на дисперсию света носит качественный характер. В таких задачах, как правило, требуется объяснить на основании дисперсии света то или иное наблюдаемое явление. Расчетные задачи предполагают чаще всего определение пространственного распределения световых лучей с различной длиной волны в процессе их преломления в средах. Решение этих задач сводится к составлению основных уравнений на основании второго закона преломления и вспомогательных, полученных с помощью дополнительных данных условия задачи.

Пример 1. Как можно объяснить обратный порядок цветов в первой (основной) и второй радуге?

Решение. Радуга возникает благодаря преломлению солнечных лучей в дождевых каплях. При этом вследствие дисперсии света происходит разложение

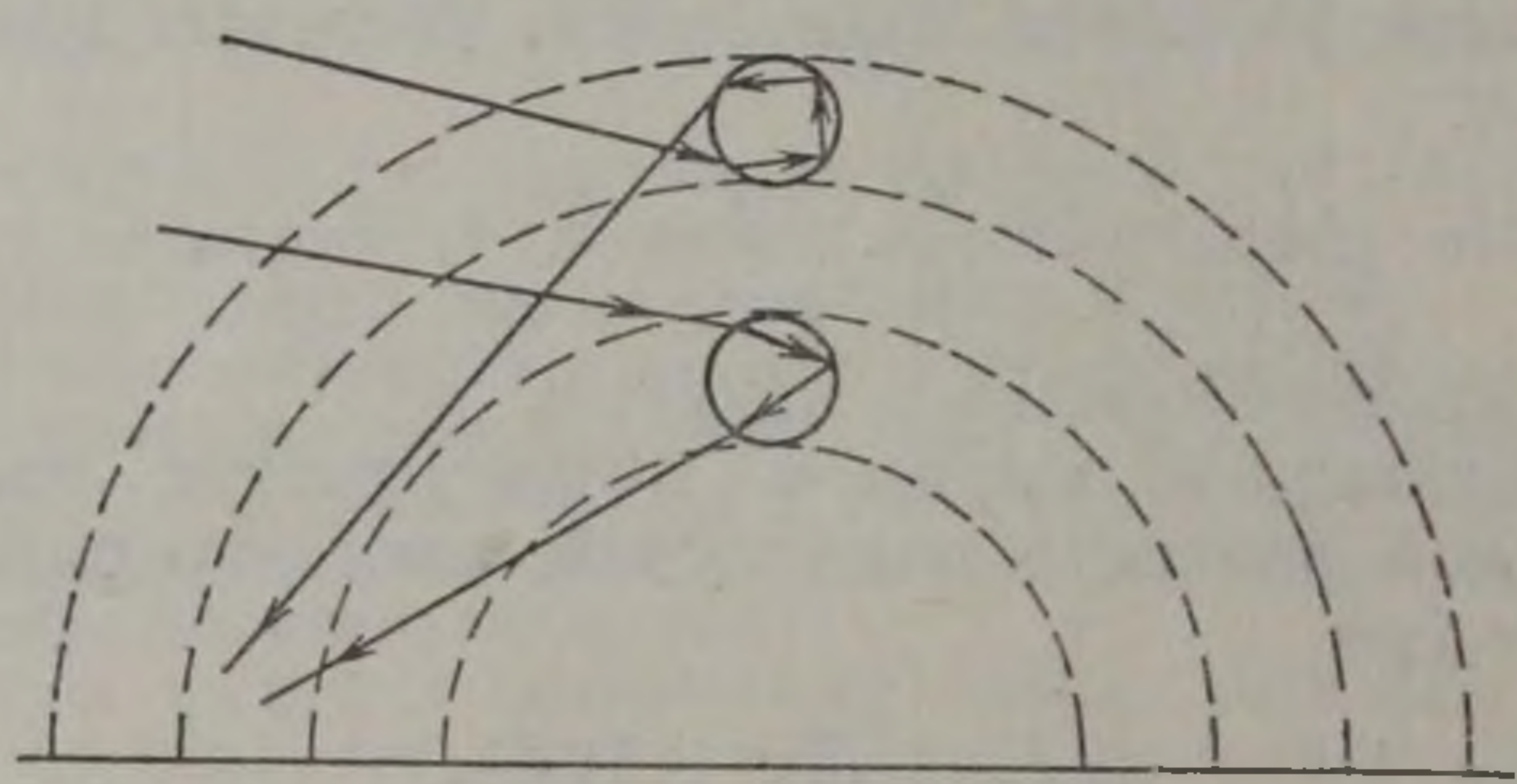


Рис. 4.27

солнечного света в спектр. Если происходят два преломления и одно отражение внутри капли (рис. 4.27), то получается первая (основная) радуга. В случае первой радуги солнечный луч, выйдя из капли и попав в глаз наблюдателя, дает изображение спектра, вытянутое сверху вниз. Внешний край первой радуги красный, нижний — фиолетовый. Угол между лучами, падающими на каплю и выходящими из нее, для красных лучей составляет 42,5°, а для фиолетовых — 40,5°.

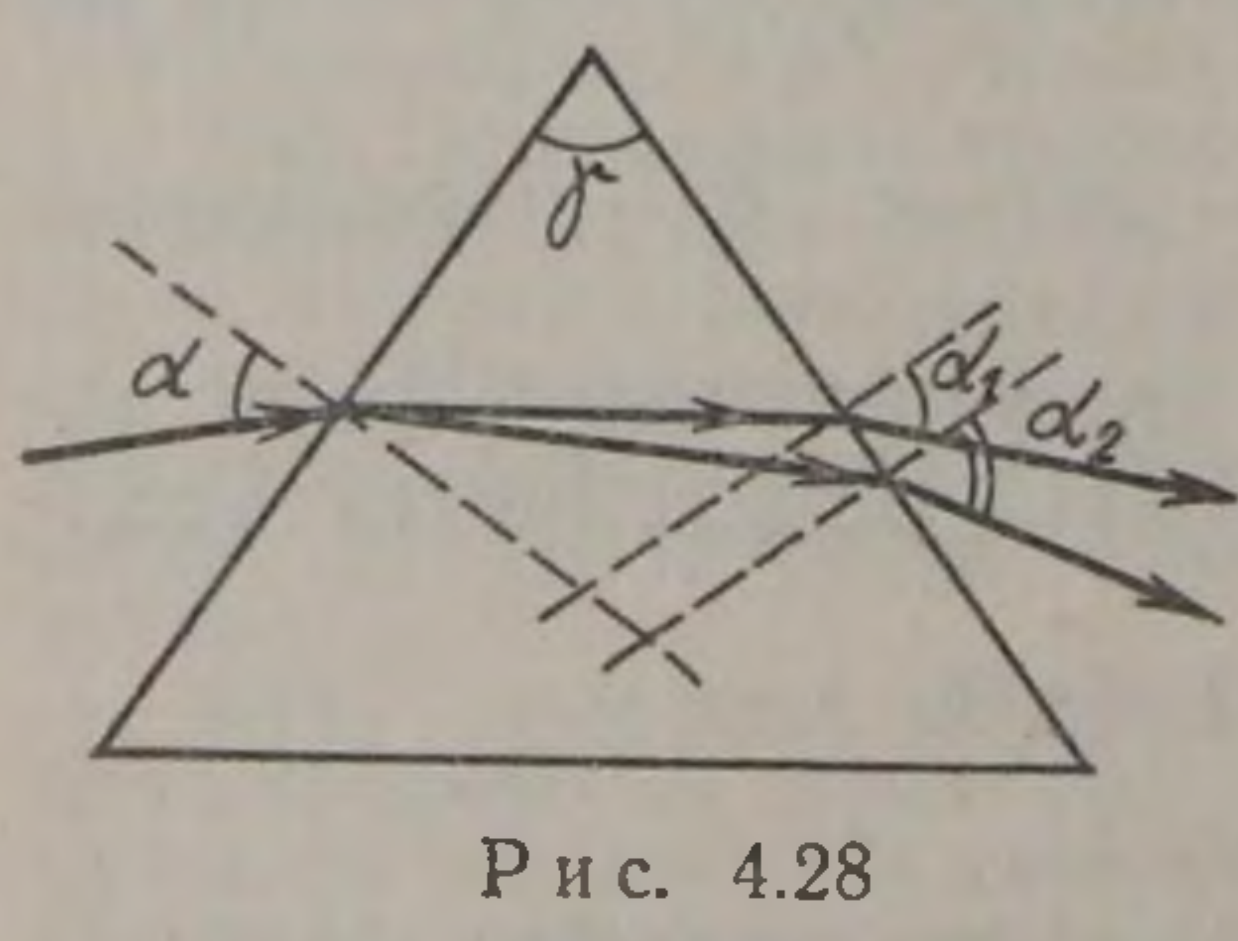


Рис. 4.28

Если в капле происходят два преломления и два отражения, то получается вторая радуга большего диаметра, но менее интенсивная. Благодаря двум отражениям внутри капли во второй радуге наблюдается обратный порядок цветов. Угол между лучами, падающими на каплю и выходящими из нее, для красных лучей равен приблизительно 50°, а для фиолетовых — 53,5°.

Пример 2. Луч белого света падает на боковую грань призмы под углом $\alpha=30°$. Преломляющий угол призмы $\gamma=45°$. Показатели преломления стекла призмы для красных и фиолетовых лучей сответственно равны $n_{\text{кр}}=1{,}62$ и $n_{\text{ф}}=1{,}67$. Чему равен угол между крайними лучами спектра по выходе из призмы?

Решение. Угол между крайними лучами спектра (рис. 4.28) $\theta=\alpha_2-\alpha_1$, где α_1, α_2 — углы выхода из призмы соответственно красного и фиолетового лучей. Эти углы можно определить, записав закон преломления для красных и фиолетовых лучей на обеих боковых гранях призмы:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_{1\,кр}} = n_{кр}; \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_{1\,ф}} = n_{ф};$$

$$\beta_{1\,кр} = 18°; \quad \beta_{1\,ф} = 17°24'.$$

Углы падения $\beta_{2\,кр}$ и $\beta_{2\,ф}$ можно определить из равенства $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ (см. рис. 4.28):

$$\beta_{2\,кр} = 27°; \quad \beta_{2\,ф} = 27°36'.$$

На основании закона преломления

$$\frac{\sin\beta_{2\,кр}}{\sin\alpha_1} = \frac{1}{n_{кр}}; \quad \frac{\sin\beta_{2\,ф}}{\sin\alpha_2} = \frac{1}{n_{ф}};$$

$$\alpha_1 = 47°18'; \quad \alpha_2 = 50°42'; \quad \theta = 3°24'.$$

2. Задачи на интерференцию света можно разделить на две группы: задачи, связанные с интерференцией волн от двух когерентных источников; задачи на интерференцию в тонких пластинках.

К задачам первой группы относятся случаи интерференции, полученной с помощью опыта Юнга, зеркал Френеля, бипризмы Френеля, зеркала Ллойда, билинзы Бийе. Задачи на интерференцию в плоскопараллельных и клинообразных тонких слоях, частным случаем которых являются кольца Ньютона, относят к задачам второй группы. Решение тех и других задач можно осуществить единым образом: выяснив причины появления оптической разности хода между интерферирующими лучами, определяют величину этой разности, после чего в соответствии с данными задачи записывают условие максимума или минимума интерференции. Это условие и является основным уравнением для определения искомой величины. Иногда при решении задач на интерференцию света используют готовые формулы (4.15) — (4.18).

Пример 3. В опыте Юнга когерентными источниками служат две узкие щели S_1 и S_2, расположенные на расстоянии l друг от друга (рис. 4.29). На расстоянии $D \gg l$ от источников расположен экран. Длина волны света, излучаемого

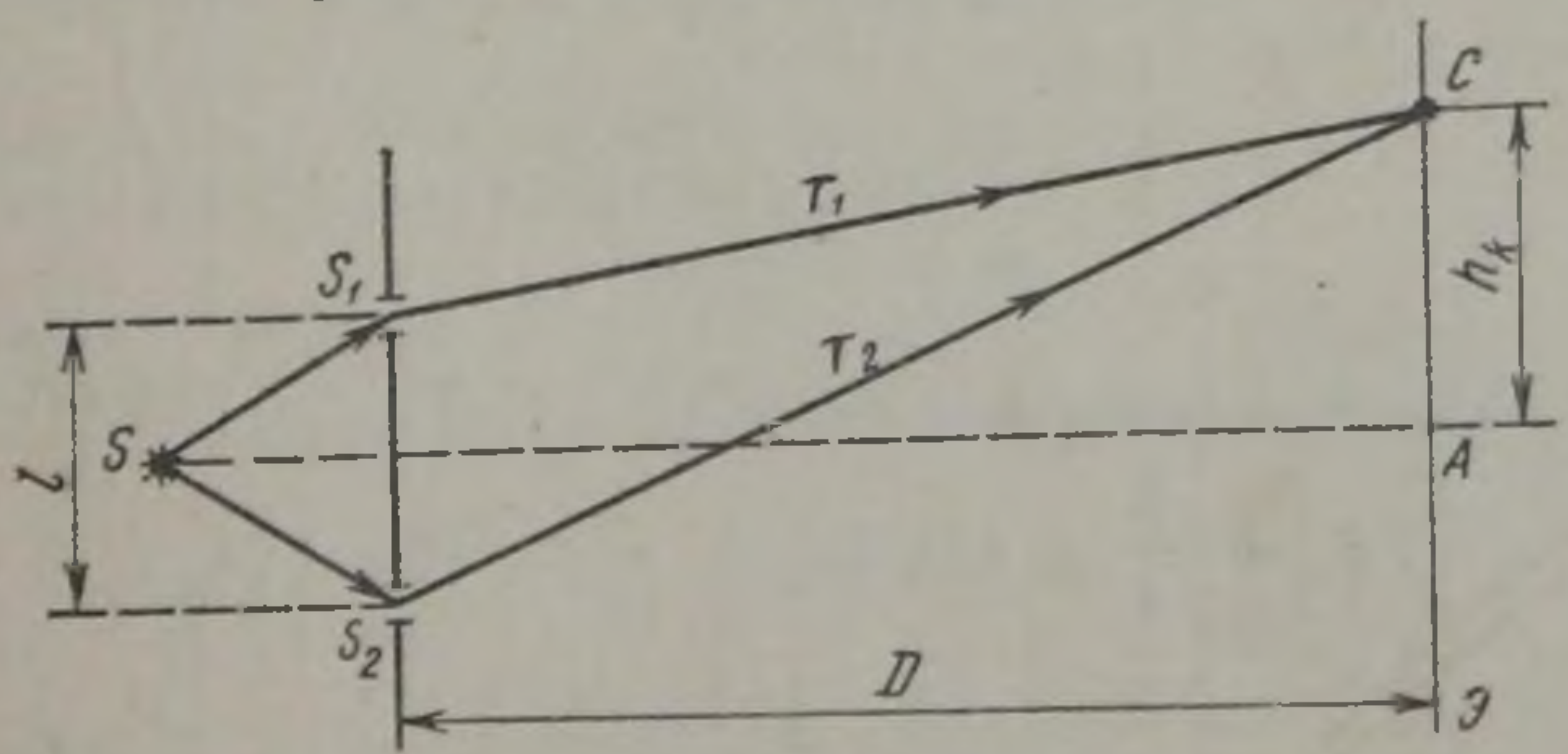


Рис. 4.29

источником, λ. Определить расстояние между соседними интерференционными полосами вблизи середины экрана.

Решение. Допустим, что в некоторой точке C экрана будет наблюдаться k-й максимум освещенности. Поскольку предполагается, что вся установка находится в воздухе, то $\Delta = r_2 - r_1$. Условие максимума интерференции $r_2 - r_1 = k\lambda$. Из чертежа имеем:

$$r_2^2 = D^2 + \left(h_k + \frac{l}{2}\right)^2;$$

$$r_1^2 = D^2 + \left(h_k - \frac{l}{2}\right)^2.$$

Тогда

$$r_2^2 - r_1^2 = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2h_k l.$$

В соответствии с условием задачи $D \gg l$ и картину наблюдают вблизи середины экрана, поэтому $d_2 + d_1 \approx 2D$. Следовательно,

$$d_2 - d_1 = k\lambda \approx \frac{2h_k l}{2D} \approx \frac{h_k l}{D}.$$

Расстояние k-го максимума от центра экрана

$$h_k = \frac{k\lambda D}{l}.$$

Расстояние между интерференционными полосами

$$\Delta h = h_{k+1} - h_k = \frac{\lambda D}{l}.$$

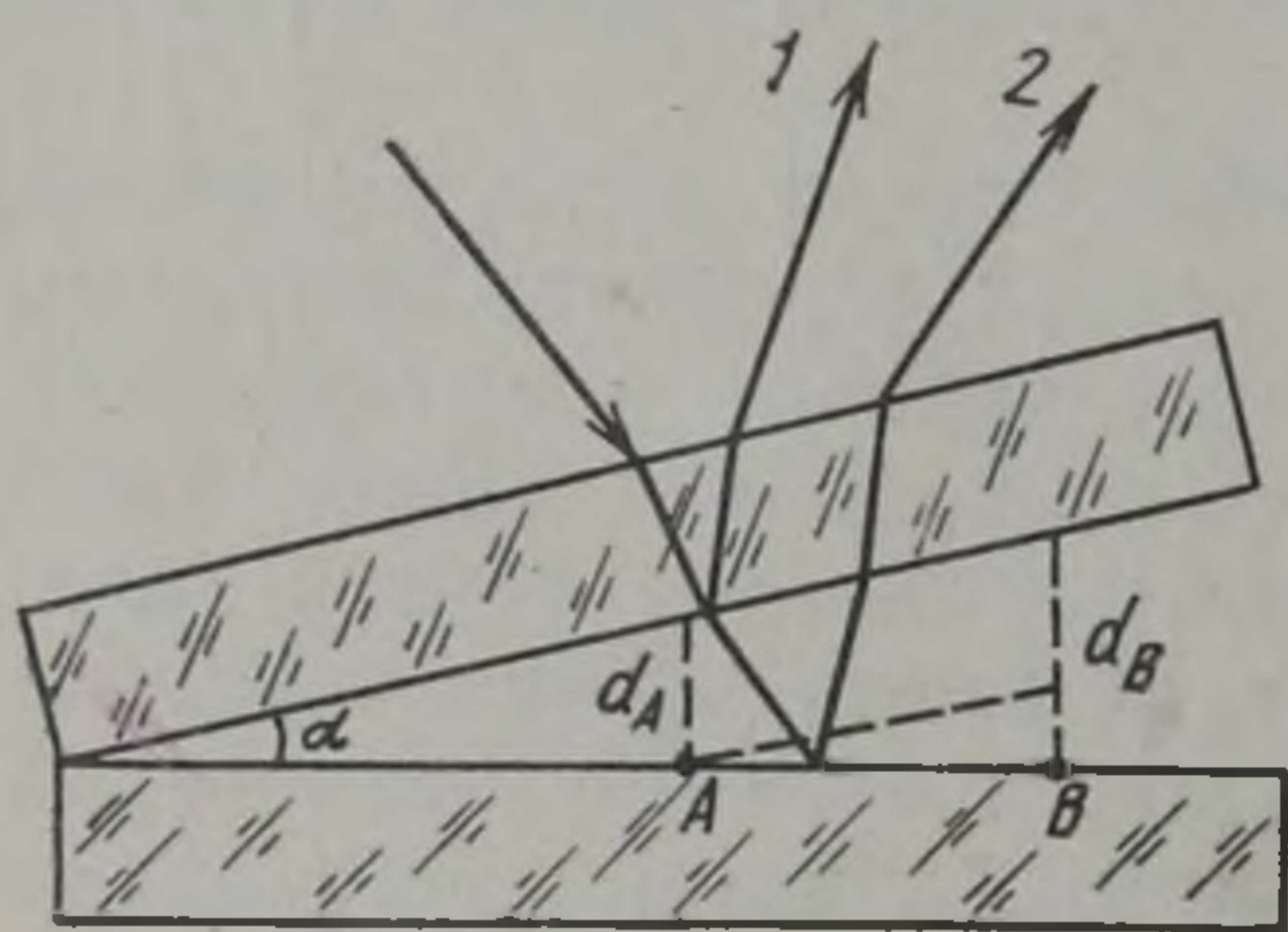


Рис. 4.30

Пример 4. Воздушный клин образован двумя плоскопараллельными пластинками, на которые нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Определить угол α между пластинками, если ширина интерференционных полос, наблюдаемых в отраженном свете, составляет $\Delta h = 5 \cdot 10^{-4}$ м.

Решение. В данном случае интерферируют лучи *1* и *2*, отраженные от двух поверхностей воздушного клина (рис. 4.30). Пусть точка A соответствует k-й интерференционной полосе, B — $(k+1)$-й, d_A и d_B — соответствующие толщины воздушного клина. Учитывая, что угол α мал, можем записать:

$$\alpha = \frac{d_B - d_A}{AB},$$

где $AB = \Delta h$;

$$\alpha = \frac{d_B - d_A}{\Delta h}.$$

Запишем условие максимума для k-й и $(k+1)$-й полос:

$$2d_A + \frac{\lambda}{2} = k\lambda; \quad 2d_B + \frac{\lambda}{2} = (k+1)\lambda,$$

откуда

$$d_B - d_A = \frac{\lambda}{2}.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\lambda}{2\Delta h} \quad \alpha = 5 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 1'40''.$$

3. Большая часть задач на дифракцию света предполагает расчет дифракции в параллельных лучах от одной щели или на дифракционной решетке. Основные уравнения при решении таких задач составляются на основании условий максимума или минимума дифракции на соответствующих объектах. Иногда дифракционная картина проецируется на экран, который, как правило, расположен на сравнительно большом расстоянии от дифракционной решетки. В таких случаях следует иметь в виду, что синусы углов с достаточной степенью точности можно заменить их тангенсами. Кроме того, на линзу падает параллельный пучок лучей, следовательно, изображение дифракционной картины проецируется в фокальную плоскость линзы.

Пример 5. На дифракционную решетку, имеющую период $d=2\cdot 10^{-6}$ м, падает нормально свет, пропущенный сквозь светофильтр, который пропускает волны длиной от 400 до 500 нм. Будут ли спектры различных порядков накладываться друг на друга?

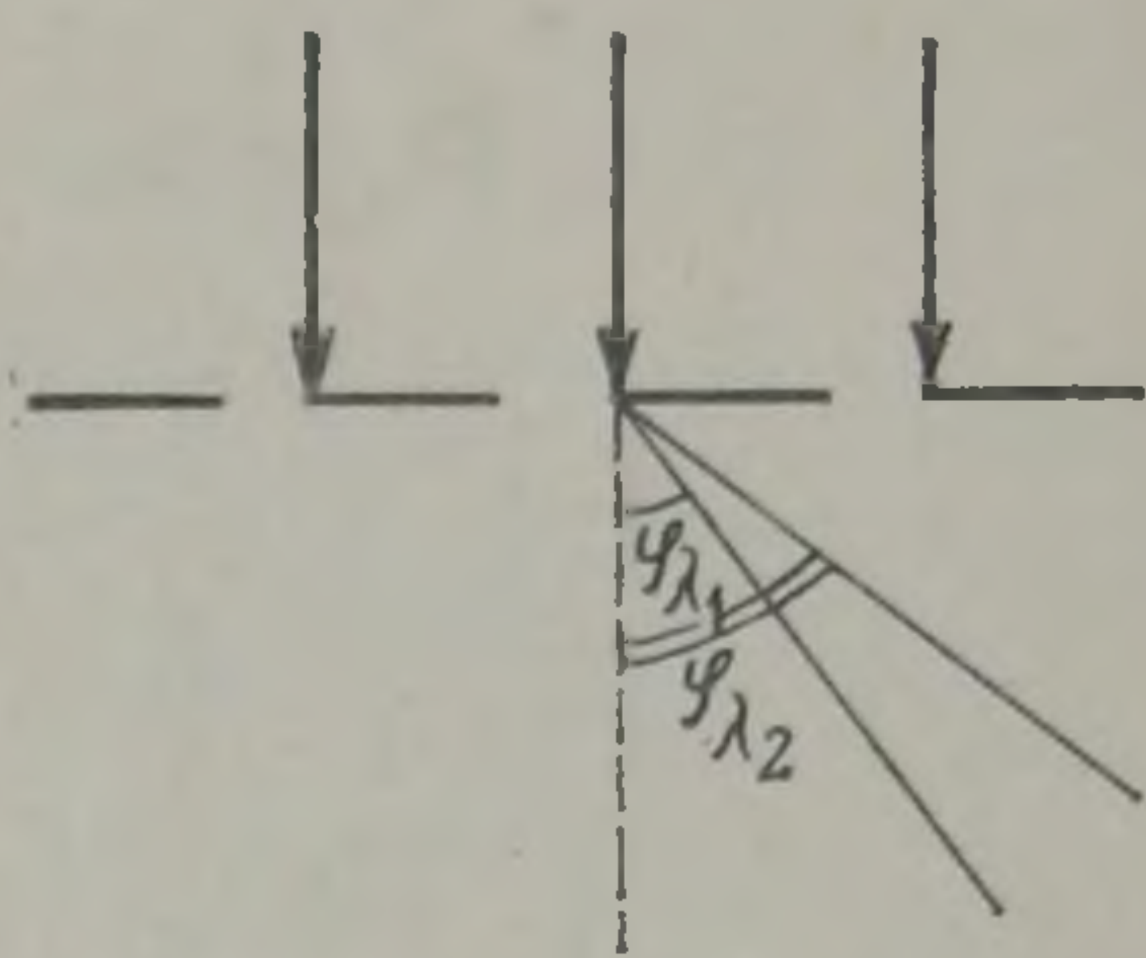


Рис. 4.31

Решение. Соприкасание спектров будет иметь место в том случае, когда окажется, что углы дифракции для $\lambda_1=400$ нм и $\lambda_2=500$ нм в двух соседних порядках будут равны (рис. 4.31), т. е.

$$\varphi_{k+1}^{(\lambda_1)}=\varphi_k^{(\lambda_2)}.$$

Запишем условие максимумов дифракции:

$$k\lambda_2=d\sin\varphi_k^{(\lambda_2)};\quad (k+1)\,\lambda_1=d\sin\varphi_{k+1}^{(\lambda_1)}.$$

Тогда условие наложения спектров можно записать в следующем виде:

$$k\lambda_2=(k+1)\,\lambda_1,$$

откуда

$$k=\frac{\lambda_1}{\lambda_2-\lambda_1}=4.$$

Следовательно, частично могут накладываться спектры 5-го и более высоких порядков. Поэтому, чтобы ответить на вопрос задачи, необходимо выяснить, возможно ли с помощью данной решетки при таких условиях получить 5-й и более высокие порядки спектров.

Максимальному порядку k спектра соответствует $\varphi=90°$ ($\sin\varphi=1$). Следовательно,

$$k_{\max}=\frac{d}{\lambda}.$$

В нашем случае $k_{\max}=4$. Поэтому спектры перекрываться не будут.

Пример 6. На узкую щель нормально падает параллельный пучок монохроматического света (рис. 4.32). Дифракционная картина проецируется на экран с помощью линзы. Как надо изменить ширину щели, чтобы центральная светлая полоса уменьшилась в 2 раза?

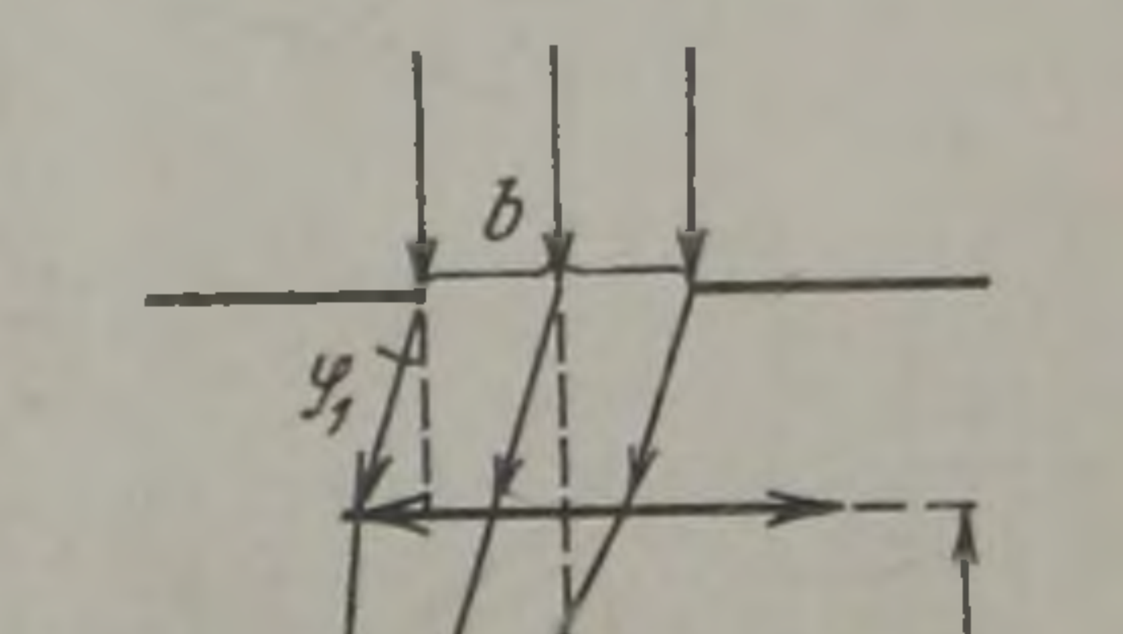


Рис. 4.32

Решение. Центральная светлая полоса заключена между двумя минимумами первого порядка. Ее ширина l зависит от угла дифракции φ, соответствующего первому ($k=1$) минимуму. Согласно условию минимума дифракции на одной щели, имеем:

$$k\lambda = b_1 \sin\varphi_1; \qquad k\lambda = b_2 \sin\varphi_2,$$

откуда

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}.$$

Поскольку угол φ мал, то

$$\sin\varphi_1 \approx \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{l_1}{2F}; \quad \sin\varphi_2 \approx \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{l_2}{2F}.$$

Тогда $\dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{l_1}{l_2} = 2.$

Задачи для самостоятельного решения

4.47. Рассматривая преломление параллельного пучка лучей внутри капельки воды и считая показатель преломления для красных лучей равным 1,333, показать, что все точки радуги видны под углом 42° (для красного света) по отношению к прямой, соединяющей глаз наблюдателя и центр радуги.

4.48. Можно ли в Минске во время летнего солнцестояния наблюдать радугу в любое время дня?

4.49. Длина волны в воде уменьшается в n раз (n — показатель преломления). Означает ли это, что водолаз не может видеть окружающие предметы в естественном цвете?

4.50. Луч света, содержащий две монохроматические составляющие, падает на боковую грань призмы с преломляющим углом 60° под углом 45°. Показатели преломления для этих составляющих равны соответственно 1,515 и 1,520. Определить угол между обеими составляющими лучами после призмы, когда последнюю поместили в воду ($n_в = 1,33$).

4.51. Угол между зеркалами Френеля 10′. На зеркала падает монохроматический свет ($\lambda = 600$ нм) от щели, находящейся на расстоянии 10 см от линии пересечения зеркал. На экране, расположенном на расстоянии 2,7 м от зеркал, наблюдают интерференционную картину. Определить расстояние между интерференционными полосами в центральной части экрана.

4.52. Монохроматический свет от узкой щели падает на бипризму Френеля с преломляющим углом 1°30′, с помощью которой получают интерференционную картину на экране, расположенном на расстоянии 1,5 м от бипризмы. Щель находится от бипризмы на расстоянии 50 см. Ширина интерференционных полос в центре экрана 0,2 мм. Показатель преломления стекла бипризмы для падающего света 1,52. Чему равна длина волны падающего на бипризму света?

4.53. Двояковыпуклая тонкая линза, оптическая сила которой 5 дптр, разрезана пополам, и половинки раздвинуты на расстояние 1 мм. Источник монохроматического света ($\lambda = 500$ нм) расположен на расстоянии 18 см от линзы. На экране, отстоящем от линзы на расстоянии 5,4 м, наблюдают интерференционную картину. Как изменится полное число интерференционных полос на экране, если расстояние от источника до линзы увеличить в 2 раза?

4.54. В опыте Ллойда источником света служит параллельная зеркалу светящаяся щель, середина которой находится на расстоянии 1 мм от продолжения отражающей поверхности. Экран удален от щели на расстояние 4 м, длина волны света 500 нм. На каком расстоянии от середины центральной полосы находится третья светлая полоса? Что произойдет с интерференционной картиной, если ввести в световой пучок, идущий непосредственно из щели, плоскопараллельную стеклянную пластинку ($n = 1,5$) толщиной 0,01 см?

4.55. Плоскопараллельная пластинка с показателем преломления 1,5 освещается параллельным пучком монохроматического света ($\lambda = 590$ нм). При изменении угла падения α в некотором интервале имеются лишь два значения: $\alpha_1 = 30°$

и $\alpha_2=34°$, соответствующих максимальной интенсивности отраженного света. Определить толщину пластинки.

4.56. На тонкий стеклянный ($n=1,5$) клин нормально падает монохроматический свет ($\lambda=600$ нм). На расстоянии 1 м от клина расположен экран, на который с помощью линзы с фокусным расстоянием 16 см проецируют возникающую интерференционную картину в отраженных лучах. Угол клина $4 \cdot 10^{-5}$ рад. Чему равна ширина наблюдаемых на экране интерференционных полос?

4.57. Пространство между соприкасающимися плосковыпуклой линзой и плоскопараллельной пластинкой заполнено водой ($n=1,33$). Радиус кривизны сферической поверхности линзы 1 м. Определить радиус пятого темного кольца Ньютона в отраженном свете с $\lambda=500$ нм.

4.58. Плосковыпуклая стеклянная линза с радиусом кривизны 40 см соприкасается выпуклой поверхностью со стеклянной пластинкой. При этом в отраженном свете радиус некоторого темного кольца 2,5 мм. Наблюдая за данным кольцом, линзу осторожно отодвинули от пластины на 10^{-5} м. Чему равен радиус этого кольца после изменения положения линзы?

4.59. Свет, длина волны которого 500 нм, падает нормально на щель шириной 10 нм. Найти угловое положение первых минимумов, расположенных по обе стороны центрального максимума. Как изменится угловое положение этих минимумов, если свет будет падать под углом 30° к нормали?

4.60. На дифракционную решетку, содержащую 400 штрихов на длине 1 мм, падает нормально свет ($\lambda=600$ нм). Найти общее число дифракционных максимумов, которые дает эта решетка, и угловое положение последних максимумов.

4.61. Свет, длина волны которого 600 нм, падает нормально на дифракционную решетку, нанесенную на плоскую поверхность плосковыпуклой стеклянной ($n=1,5$) линзы, радиус кривизны которой 20 см. Период решетки $6 \cdot 10^{-6}$ м. Чему равно расстояние между симметрично расположенными главными максимумами первого порядка на экране в фокальной плоскости этой линзы?

4.5. Действие света.

Световые кванты. Фотоэффект

Основные законы и формулы

Фотон, подобно частицам, обладает энергией, массой и импульсом. Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \tag{4.19}$$

где h — постоянная Планка: $h=6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; ν — частота света; c — скорость света в вакууме; λ — длина световой волны.

Масса и импульс фотона соответственно равны:

$$m = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}; \tag{4.20}$$

$$K = mc = \frac{h}{\lambda}. \tag{4.21}$$

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта имеет вид

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2}, \tag{4.22}$$

где $h\nu$ — энергия поглощенного веществом фотона; A — работа выхода электрона; $mv^2/2$ — максимальная кинетическая энергия вылетающего электрона.

Освещаемая поверхность испытывает световое давление, величину которого можно определить следующим образом:

$$P = \frac{I}{c}(1+\beta), \tag{4.23}$$

где I — световая энергия, падающая на единицу площади поверхности за единицу времени; β — коэффициент отражения.

Решение задач

Задачи на световые кванты и взаимодействие их с веществом можно разделить на три группы: задачи на световые кванты; задачи на фотоэффект; задачи на световое давление.

При решении задач второй и третьей групп следует иметь в виду, что взаимодействие фотонов с веществом подчиняется законам сохранения энергии и импульса. Закон сохранения энергии, записанный для взаимодействия фотона с электроном вещества при внешнем фотоэффекте, дает уравнение Эйнштейна (4.22); закон сохранения импульса, примененный к взаимодействию фотона с веществом, приведет к равенству (4.23).

1. В задачах на световые кванты, как правило, требуется определить основные характеристики и число фотонов. Решение таких задач сводится к составлению основных уравнений на основании формул (4.19) — (4.21).

Пример 1. Точечный источник монохроматического света ($\lambda = 550$ нм) излучает световой поток мощностью 10 Вт. На каком расстоянии можно заметить этот источник, если пороговая чувствительность глаза к длине волны $\lambda = 550$ нм соответствует потоку из 60 фотонов? Диаметр зрачка принять равным 0,5 см, поглощением света в воздухе пренебречь.

Решение. Число фотонов, попадающих в глаз за единицу времени,

$$n = \frac{N}{S} S_1,$$

где N — число фотонов, испускаемых источником в единицу времени; S — площадь сферы радиусом, равным расстоянию r от источника до наблюдателя: $S = 4\pi r^2$; S_1 — площадь зрачка: $S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}$. Поскольку число фотонов

$$N = \frac{P}{h\nu} = \frac{P\lambda}{hc},$$

то

$$n = \frac{P\lambda d_1^2}{16hcr^2},$$

откуда

$$r = \sqrt{\frac{P\lambda d_1^2}{16hcn}} = 0{,}85 \text{ Мм}.$$

2. Основным уравнением при решении задач на фотоэффект является уравнение Эйнштейна. В ряде задач используется понятие задерживающей разности потенциалов (U). При этом предпо-

лагается, что даже самые быстрые фотоэлектроны задерживаются обратным электрическим полем, пролетев в нем расстояние, соответствующее разности потенциалов U, и начальная кинетическая энергия электронов $E_к$ численно равна работе сил тормозящего электрического поля:

$$E_к = \frac{mv^2}{2} = eU.$$

При определении скорости фотоэлектронов следует иметь в виду, каким является электрон: классическим или релятивистским. Электрон считают классическим, если его кинетическая энергия $E_к$ значительно меньше энергии покоя E_0 ($E_0 = m_0c^2$). Если это условие не выполняется, то электрон следует считать релятивистской частицей и применять к нему формулы теории относительности.

Пример 2. Квант света с длиной волны $\lambda = 232$ нм освобождает с поверхности платинового электрода фотоэлектрон. Чему равен импульс, сообщаемый при этом электроду, если известно, что фотоэлектрон вылетает навстречу падающему кванту?

Решение. Импульс, сообщаемый электроду,

$$K = K_ф + K_э,$$

где $K_ф$ — импульс фотона: $K_ф = \frac{h}{\lambda}$; $K_э$ — импульс фотоэлектрона: $K_э = mv$.

Скорость фотоэлектрона v можно определить из уравнения Эйнштейна:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2};$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A;$$

$$v = \sqrt{\frac{2hc - 2\lambda A}{\lambda m}}.$$

Тогда

$$K = \frac{h}{\lambda} + \sqrt{\frac{2hcm - 2\lambda m A}{\lambda}} = 1{,}33 \cdot 10^{-25} \text{ кг} \cdot \text{м/с}.$$

3. В задачах на световое давление расчет искомой величины производится чаще всего на основании формулы (4.23). При этом следует обратить внимание на то, что формула (4.23) справедлива лишь для случая нормального падения света на освещаемую поверхность. Если в задаче рассматривается наклонное падение лучей на поверхность, то расчет давления света проводится на основании закона сохранения импульса.

Пример 3. Плоская световая волна интенсивностью $I = 2 \cdot 10^3$ Вт/м² падает на плоское зеркало с коэффициентом отражения $\beta = 0{,}8$ под углом $\varphi = 45°$. Определить световое давление на зеркало.

Решение. Исходя из определения давления и применив к зеркалу второй закон Ньютона, можно записать:

$$P = \frac{F_п}{S} = \frac{F_п t}{St} = \frac{(\Delta K)_п}{St},$$

где $(\Delta K)_п$ — проекция импульса ΔK, сообщенного фотонами за время t зеркалу, на направление нормали к нему; S — площадь освещенной поверхности. Величины S и $(\Delta K)_п$ зависит от угла падения φ. Найдем эти зависимости. Как видно из рис. 4. 33, *а*,

$$S = \frac{S_0}{\cos\varphi},$$

где S_0 — площадь поперечного сечения светового пучка.

На рис. 4. 33, *б* изображены суммарные импульсы фотонов, падающие на зеркало (**K**) и отраженные от него (**K**′). Согласно закону сохранения импульса, имеем

$$\Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}' - \mathbf{K}.$$

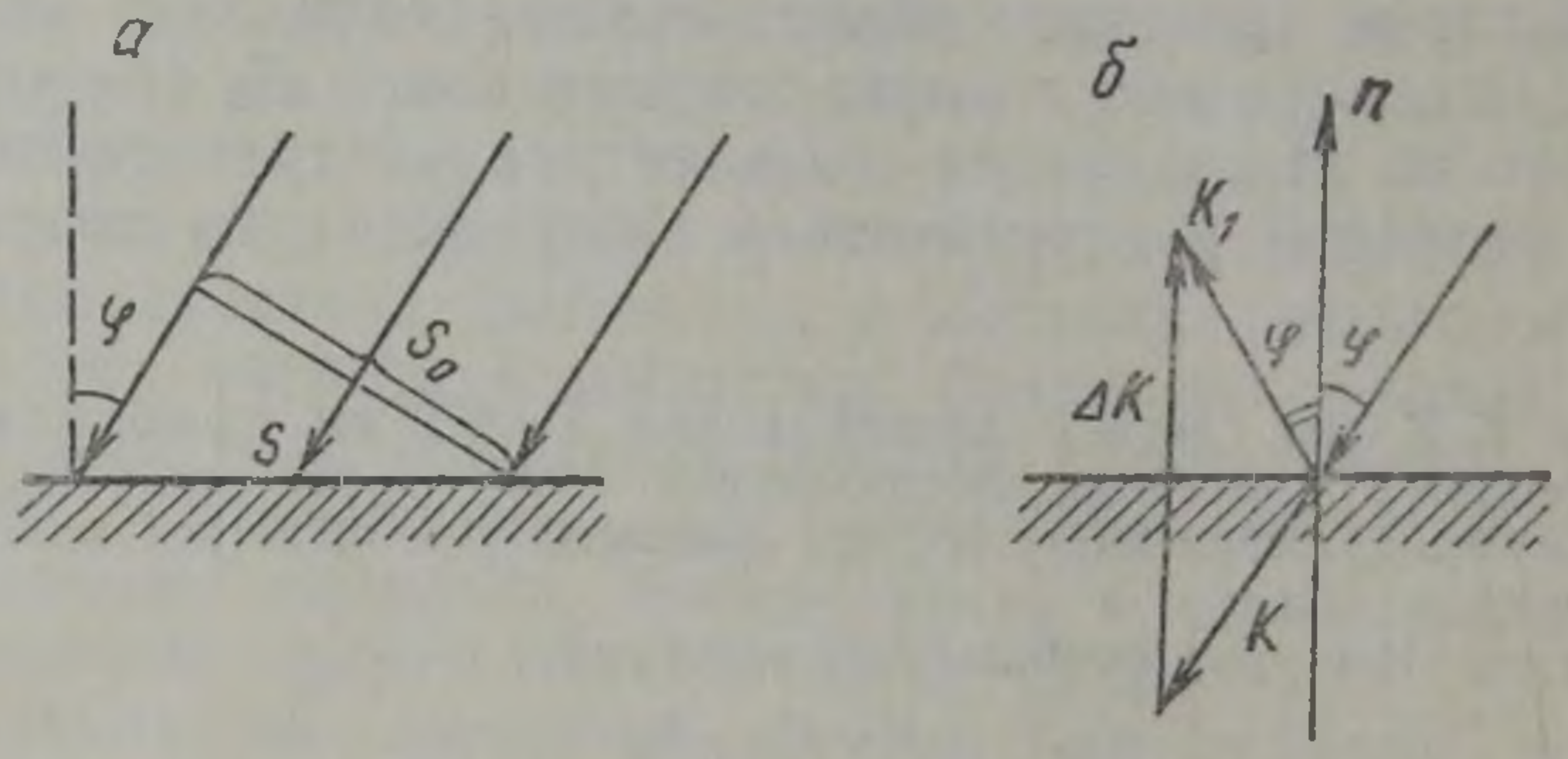


Рис. 4.33

Переходя к проекциям на направление нормали **n**, получаем

$$(\Delta K)_п = K'_п - K_п = K' \cos\varphi + K\cos\varphi = (K' + K)\cos\varphi.$$

Тогда

$$P = \frac{(K' + K)\cos^2\varphi}{S_0 t}.$$

При $\varphi = 0$ $P = P_0$, $\quad P_0 = \dfrac{K' + K}{S_0 t}$. С другой стороны,

$$P_0 = \frac{I}{c}(1 + \beta),$$

следовательно,

$$P = \frac{I}{c}(1 + \beta)\cos^2\varphi = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Па}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.62. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна четвертой части энергии фотона, а импульс — импульсу фотона? Чему равна при этом длина волны фотона?

4.63. Фотоэлемент имеет чувствительность по току, равную $2 \cdot 10^{-4}$ А/лм. Принимая, что такая чувствительность имеет место при освещении фотоэлемента монохроматическим светом, длина волны которого 550 нм, и световому потоку 1 лм соответствует мощность 0, 0016 Вт, определить число фотонов, приходящихся на один электрон, участвующий в фототоке.

4.64. Точечный источник света мощностью 10 Вт испускает свет, длина волны которого 589 нм. На каком расстоянии от источника средняя плотность потока фотонов составляет $6 \cdot 10^{-17}$ $1/(м^2 \cdot с)$?

4.65. При поочередном освещении поверхности некоторого металла светом с длиной волны $3{,}5 \cdot 10^{-7}$ м и $5{,}4 \cdot 10^{-7}$ м обнаружили, что соответствующие максимальные скорости фотоэлектронов отличаются друг от друга в 2 раза. Найти работу выхода с поверхности этого металла.

4.66. При фотоэффекте с платиновой поверхности задерживающий потенциал оказался равным 0,8 В. Найти максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

4.67. Определить работу выхода электрона из металла, если известно, что фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла светом с некоторой частотой, полностью задерживаются обратным потенциалом 6,6 В, а вырываемые светом с частотой $4{,}6 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$ — потенциалом в 2,5 раза больше первого. Чему равна частота света в первом случае?

4.68. Металлический шарик, удаленный от других тел, облучают монохроматическим светом, длина волны которого 200 нм. Теряя фотоэлектроны, шарик зарядился до максимального потенциала 1,7 В. Из какого металла сделан шарик?

4.69. Плоскую металлическую пластинку освещают рентгеновским излучением со сплошным спектром, коротковолновая граница которого соответствует длине волны 30 нм. Красная граница для металла 332 нм. Чему будет равна максимальная скорость фотоэлектронов на расстоянии 3 см от поверхности пластинки, если вне пластинки имеется задерживающее однородное электрическое поле напряженностью 1 кВ/м?

4.70. Электроды вакуумного фотоэлемента (цезий — медь) замкнуты снаружи накоротко. Цезиевый электрод освещается монохроматическим светом. Определить длину волны света, при которой в цепи фотоэлемента появляется ток.

4.71. Имеется вакуумный фотоэлемент, один из электродов которого цезиевый, другой медный. Цезиевый электрод освещается монохроматическим светом, длина волны которого $2{,}2 \cdot 10^{-7}$ м. Чему равна максимальная скорость фотоэлектронов, подлетающих к медному электроду, если электроды замкнуты снаружи накоротко?

4.72. Параллельный пучок монохроматических лучей ($\lambda = 6{,}62 \cdot 10^{-7}$ м) падает нормально на абсолютно черную поверхность и производит давление $3 \cdot 10^{-7}$ Па. Определить концентрацию фотонов в световом пучке.

4.73. Баллон электрической лампы мощностью 100 Вт представляет собой сферический сосуд радиусом 5 см. Стенки лампы отражают 10 % падающего на них света. Полагая, что вся потребляемая мощность идет на излучение, определить давление света на стенки лампы.

4.74. Длительность импульса рубинового лазера составляет 10^{-4} с. Узкий, почти параллельный пучок монохроматического лазерного света сфокусирован в пятнышко диаметром 10^{-5} м на поверхность, перпендикулярную к пучку, с коэффициентом отражения 0,5. Среднее за время импульса давление света на поверхность при этом оказалось равным $6{,}4 \cdot 10^{6}$ Па. Чему равна энергия, излучаемая лазером в импульсе?

4.75. Чему равно давление лучей Солнца на поверхность стеклянной пластинки, отражающей 4 % энергии солнечных лучей и поглощающей 6 % энергии? Пластинка помещена на таком же расстоянии от Солнца, как и Земля. Угол падения лучей равен нулю, интенсивность солнечной радиации $1{,}35 \cdot 10^{-3}$ Вт/м^2.

4.76. Параллельный пучок света интенсивностью $2 \cdot 10^{-3}$ Вт/м^2 падает под углом 60° на плоское зеркало. При этом световое давление на зеркало равно $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ Па. Чему равен коэффициент отражения зеркала?

4.6. Основы теории относительности

Основные законы и формулы

Длина тела l в направлении движения со скоростью v относительно системы отсчета меньше длины l_0 покоящегося тела:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \qquad (4.24)$$

Интервал времени t_0 между двумя событиями, отсчитанный движущимися вместе с телом часами, связан с интервалом времени t между теми же событиями, измеренным покоящимися часами, соотношением

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.25)$$

Релятивистский закон сложения скоростей выражается формулой

$$v_{рез} = \frac{v + u}{1 + \frac{vu}{c^2}}, \qquad (4.26)$$

где v — скорость тела; u — скорость движущегося наблюдателя.

При больших скоростях движения масса тела не остается постоянной. Зависимость массы тела от скорости его движения определяется формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (4.27)$$

где m_0 — масса покоящегося тела.

Импульс тела

$$K = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \qquad (4.28)$$

При изменении массы тела на величину Δm полная энергия тела меняется на величину

$$\Delta E = \Delta m c^2. \qquad (4.29)$$

Зависимость кинетической энергии тела от скорости дается уравнением

$$E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \qquad (4.30)$$

Решение задач

Задачи на основы теории относительности можно условно разделить на две группы: задачи на относительность основных характеристик релятивистской частицы; задачи на закон сохранения энергии для релятивистской частицы.

1. Решение задач первой группы, как правило, может быть осуществлено на основании формул (4.24) — (4.28). Иногда при решении таких задач используют релятивистскую форму записи второго закона Ньютона:

$$\mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt}.$$

Пример 1. Электрон разгоняется в электрическом поле напряженностью $E=3\cdot10^5$ В/м. Определить скорость электрона через время $t=10^{-9}$ с от начала движения. Какова была бы скорость электрона, если бы его масса не зависела от скорости?

Решение. На электрон со стороны электрического поля будет действовать сила $F=eE$. Запишем уравнение движения электрона в форме

$$F=\frac{dK}{dt}=\frac{d\,(mv)}{dt}.$$

Учитывая зависимость массы от скорости, последнее уравнение можно записать в виде

$$F=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right).$$

При $t=0$ $v=0$. Тогда

$$Ft=\frac{m_0v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

откуда

$$v=\frac{Fct}{\sqrt{m_0^2c^2+F^2t^2}}=\frac{eEct}{\sqrt{m_0^2c^2+(eE)^2t^2}}=2{,}6\cdot10^8\ \text{м/с}.$$

Пренебрегая зависимостью массы от скорости, получаем

$$v_1=\frac{eEt}{m_0}=5{,}3\cdot10^8\ \text{м/с}.$$

Такой расчет скорости дал результат $v_1>c$, что противоречит второму постулату специальной теории относительности.

2. В задачах второй группы чаще всего требуется определить кинетическую энергию, скорость или импульс релятивистской частицы, для чего можно использовать формулы (4.27) — (4.30). Иногда следует иметь в виду, что равенство (4.30) получено на основании того, что кинетическая энергия релятивистской частицы вычисляется как разность между полной энергией частицы $E=mc^2$ и энергией ее покоя $E_0=m_0c^2$.

В отдельных задачах при составлении основных уравнений следует наряду с законом сохранения энергии использовать закон сохранения импульса.

Пример 2. Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B=5\cdot10^{-2}$ Тл по окружности радиусом $r=4\cdot10^{-2}$ м. Чему равна кинетическая энергия электрона?

Решение. Решение задачи сводится к определению скорости или импульса электрона. Для этого запишем уравнение движения электрона в магнитном поле. На электрон действует сила, перпендикулярная к вектору **v**. Модуль скорости не изменяется. Следовательно, остается постоянной и масса частицы. Второй закон Ньютона можно записать так:

$$\frac{mv^2}{r}=evB,$$

откуда $K=erB$.

Чтобы выразить $E_к$ через K, необходимо выяснить, классической или релятивистской частицей следует считать электрон в данных условиях. Для этого находим величину импульса:

$$K = erB = 3{,}2 \cdot 10^{-22}\ кг \cdot м/с.$$

С другой стороны, для электрона имеем

$$m_0 c = 2{,}73 \cdot 10^{-22}\ кг \cdot м/с,$$

значит, $K > m_0 c$, поэтому электрон — релятивистская частица. Следовательно,

$$E_к = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right); \quad K = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Исключив v, получим

$$E_к = m_0 c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{K^2}{m_0^2 c^2}} - 1 \right) = 4{,}48 \cdot 10^{-14}\ Дж.$$

Пример 3. Доказать, что свободный электрон в вакууме не может полностью поглотить фотон.

Решение. Для доказательства воспользуемся законами сохранения энергии и импульса. Допустим, что процесс полного поглощения состоялся. Тогда законы сохранения энергии и импульса запишутся в виде:

$$h\nu = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right);$$

$$\frac{h\nu}{c} = \Delta \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Обозначив $\frac{v}{c} = \beta$ и решив эти уравнения относительно β, получим следующие два значения: $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 1$. Оба этих значения не имеют физического смысла, так как электрон не может приобрести скорость, равную скорости света, а также, обладая импульсом, иметь скорость, равную нулю. Поэтому допущение, что процесс полного поглощения произошел, неправомерно.

Задачи для самостоятельного решения

4.77. Какую скорость должно иметь движущееся тело, чтобы его продольные размеры уменьшились в 2 раза?

4.78. Найти собственное время жизни частицы, если ее скорость отличается от скорости света в вакууме на 0,5 %, а расстояние, пролетаемое до распада, равно примерно $3 \cdot 10^5$ м.

4.79. С какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его масса стала в 3 раза больше его массы покоя?

4.80. Чему равна скорость, при которой релятивистский импульс частицы в 5 раз превышает ее ньютоновский импульс?

4.81 Электрон движется в однородном электрическом поле напряженностью 10^6 В/м. Через какое время от начала движения его скорость станет равной 0,9 с?

4.82. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его масса стала вдвое больше массы покоя?

4.83. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов 10^6 В. Чему стал равен его импульс?

4.84. Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле на-

напряженностью $5 \cdot 10^6$ В/м. Через сколько времени кинетическая энергия электрона станет равной его энергии покоя?

4.85 Релятивистский протон движется равномерно по окружности радиусом 2 см в однородном магнитном поле индукцией 0,5 Тл. Определить скорость протона и действующую на него силу.

4.86. Найти зависимость импульса от кинетической энергии релятивистской частицы, масса покоя которой m_0. Определить импульс электрона с кинетической энергией $8 \cdot 10^{-11}$ Дж.

4.87. Определить импульс протона, масса которого равна массе покоя изотопа гелия $_2He^4$. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы приобрести этот импульс?

4.88. Кинетическая энергия электрона в 2 раза больше его энергии покоя. Определить полную энергию и массу электрона.

4.89. Какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его полная энергия стала в 6 раз больше энергии покоя?

4.90. Протон и электрон, двигаясь из состояния покоя, проходят ускоряющую разность потенциалов 10^7 В. Во сколько раз масса движущегося протона больше массы электрона? Сравнить полученный результат с величиной отношения масс покоя.

4.91. Чтобы увеличить скорость частицы от 0,6 до 0,8 с, необходимо совершить работу $3{,}44 \cdot 10^{-14}$ Дж. Чему равна масса покоя частицы?

4.92. Какую работу необходимо совершить, чтобы увеличить скорость электрона от $1{,}5 \cdot 10^8$ до $2{,}7 \cdot 10^8$ м/с? Сравнить полученный результат со значением, вычисленным по классическим формулам.

4.93. Показать, что свободный электрон не может излучать энергию.

4.7. Строение атома

Основные законы и формулы

Постулаты Бора:

1. Электроны могут двигаться в атоме только по определенным орбитам, радиусы которых удовлетворяют условию

$$mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}, \tag{4.31}$$

где m — масса электрона; v_n — скорость его на n-й орбите; r_n — радиус этой орбиты; h — постоянная Планка; n — целое число (квантовое число).

2. При переходе электрона с одной орбиты на другую атом излучает или поглощает квант энергии. При этом энергия кванта

$$h\nu = E_{\text{п}} - E_{\text{к}}, \tag{4.32}$$

где $E_{\text{п}}$, $E_{\text{к}}$ — энергии электрона на соответствующих орбитах.

Частоту ν или длину волны λ линий спектра атома водорода можно найти, пользуясь следующей формулой:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{4.33}$$

где k, n — номера соответствующих орбит; c — скорость света в вакууме; R — постоянная Ридберга:

$$R = \frac{e^4 m}{8\varepsilon_0 h^3 c} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}; \tag{4.34}$$

e — заряд электрона; m — его масса; h — постоянная Планка; ε_0 — электрическая постоянная.

Аналогичная формула для водородоподобных ионов имеет вид

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad (4.35)$$

где Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

Закон радиоактивного распада выражается формулой

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (4.36)$$

где N_0 — число радиоактивных ядер в момент времени $t=0$; N — их число по истечении времени t; λ — постоянная радиоактивного распада.

Период полураспада T и постоянная распада λ связаны соотношением

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Закон радиоактивного распада запишется в виде

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Энергия связи ядра

$$\Delta E = c^2 \Delta m$$

или

$$\Delta E = c^2[Zm_p + (A - Z)m_n - m_я],$$

где Δm — дефект массы ядра; Z — атомный номер; A — массовое число; m_p, m_n, $m_я$ — массы соответственно протона, нейтрона и ядра.

Энергия ядерной реакции

$$\Delta E = c^2\left(\sum m_1 - \sum m_2\right),$$

где $\sum m_1$ — сумма масс частиц до реакции; $\sum m_2$ — сумма масс частиц после реакции. Если $\sum m_1 > \sum m_2$, то реакция идет с выделением энергии, если же $\sum m_1 < \sum m_2$, то реакция идет с поглощением энергии.

Решение задач

Задачи рассматриваемой темы можно условно разделить на следующие группы: задачи на постулаты Бора; задачи на закономерности в спектрах атома водорода и водородоподобных ионов; задачи на закон радиоактивного распада; задачи на ядерные реакции.

1. В задачах на постулаты Бора чаще всего требуется определить одну из характеристик электрона (радиус орбиты, скорость движения, импульс, энергию). С этой целью можно воспользоваться формулами (4.31) и (4.32). При решении некоторых задач следует иметь в виду, что электрон, движущийся по орбите, кроме кинетической энергии, обладает и потенциальной энергией, обусловленной кулоновской силой притяжения его ядром атома.

Пример 1. Как изменится орбитальный момент импульса электрона в атоме водорода при переходе электрона из возбужденного состояния в основное испусканием одного кванта, длина волны которого $\lambda=97{,}25$ нм?

Решение. Согласно определению момента импульса, можно записать:

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{mv_1r_1}{mv_nr_n}=\frac{v_1r_1}{v_nr_n},$$

где величины с индексом 1 относятся к основному состоянию, а с индексом n — к возбужденному.

Чтобы найти отношение моментов импульса, необходимо знать главное квантовое число n возбужденного состояния. Для этого определим полную энергию электрона в некотором n-м состоянии:

$$E=E_{\text{п}}+E_{\text{к}},$$

где

$$E_{\text{п}}=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r};\quad E_{\text{к}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Тогда полная энергия

$$E=-\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}.$$

Радиус орбиты найдем из следующих соотношений:

$$mvr=n\frac{h}{2\pi};\quad \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{mv^2}{r}.$$

После соответствующих преобразований находим:

$$r=\frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi mZe^2};\ v=\frac{Ze^2}{2\varepsilon_0 nh}.$$

Для полной энергии имеем

$$E=-\frac{me^4Z^2}{8\varepsilon_0^2n^2h^2}=-\frac{Z^2Rhc}{n^2}.$$

Согласно второму постулату Бора,

$$h\nu=\frac{hc}{\lambda}=E_{\text{п}}-E_1=-\frac{Z^2Rhc}{n^2}+\frac{Z^2Rhc}{1^2},$$

откуда

$$n=\sqrt{\frac{Z^2R\lambda}{Z^2R\lambda-1}}=4.$$

Тогда для отношения моментов импульса получим

$$\frac{P_1}{P_n}=\frac{1}{n}=\frac{1}{4}.$$

2. В большинстве задач, в которых рассматриваются спектры атома водорода и водородоподобных ионов, необходимо определить длину волны λ или частоту ν излучаемых линий, для чего можно использовать формулы (4.33) и (4.35). Прежде чем применять указанные формулы, надо, исходя из условия задачи, определить числа k и n, входящие в эти формулы. Кроме того, постоянная Ридберга R, определяемая формулой (4.34), вычислена в предположении, что в атоме водорода или водородоподобного иона электрон вращается вокруг неподвижного ядра. Это возможно лишь при

условии, что масса ядра бесконечно велика по сравнению с массой электрона.

Пример 2. Атом водорода поглощает фотон, вследствие чего электрон, находившийся на второй боровской орбите, вылетает из атома со скоростью $v=6\cdot10^5$ м/с. Чему равна частота фотона?

Решение. На основании закона сохранения энергии можно записать:

$$h\nu=\Delta E+\frac{mv^2}{2},$$

где ΔE — минимальная энергия, при сообщении которой электрону последний покинет атом. Эта энергия численно равна энергии излучения при обратном переходе атома:

$$\Delta E=h\nu_{\infty 2}=hRc\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)=\frac{hRc}{4}.$$

Тогда

$$h\nu=\frac{hRc}{4}+\frac{mv^2}{2},$$

откуда

$$\nu=\frac{Rc}{4}+\frac{mv^2}{2h}=1{,}07\cdot10^{15}\ \text{с}^{-1}.$$

3. При решении задач на закон радиоактивного распада обычно различают два случая: радиоактивный распад изолированного вещества и распад одного радиоактивного вещества, взятого в смеси с другим радиоактивным веществом, из которого возникает первое. В первом случае пользуются законом радиоактивного распада в форме (4.36). Если время распада Δt пренебрежимо мало по сравнению с периодом полураспада T данного изотопа ($\Delta t\ll T$), то число нераспавшихся ядер N можно считать практически постоянным в течение всего времени Δt и равным их начальному числу N_0. Тогда ΔN можно определить по формуле

$$\Delta N=\lambda N_0\Delta t.$$

Во втором случае закон радиоактивного распада применяют к материнскому и дочернему веществам. При этом следует обратить внимание на случай, когда период полураспада T_1 материнского вещества существенно превышает период полураспада T_2 дочернего вещества ($T_1\gg T_2$), тогда по истечении некоторого промежутка времени между этими веществами устанавливается радиоактивное равновесие (число распадающихся в единицу времени ядер дочернего вещества равно числу вновь образующихся ядер этого вещества в результате распада материнских ядер). Условие радиоактивного равновесия запишется в виде

$$\lambda_1N_1=\lambda_2N_2.$$

В некоторых задачах вместо числа ядер N дается масса радиоактивного вещества. Чтобы определить число N, пользуются соотношением

$$N=\frac{m}{\mu}N_A,$$

где μ — молярная масса вещества; N_A — число Авогадро

Пример 3. Изотоп Co^{60} β-радиоактивен. Каков заряд всех β-частиц, испущенных этим изотопом за 1 год, если масса исходного препарата 1г?

Решение. Заряд, уносимый испущенными электронами,

$$q = e\Delta N,$$

где $\Delta N = N_0 - N$. На основании закона радиоактивного распада имеем

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$\Delta N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Но $N_0 = \frac{m}{\mu} N_A$, поэтому $\Delta N = \frac{m}{\mu} N_A (1 - e^{-\lambda t})$.

Заряд

$$q = \frac{em}{\mu} N_A (1 - e^{-\lambda t}) = 200 \text{ Кл}.$$

4. В основе решения задач на ядерные реакции лежит применение законов сохранения: заряда ядра, массового числа, энергии и импульса. Прежде всего при решении таких задач следует правильно записать реакцию, что можно сделать на основании первых двух законов сохранения. Законы сохранения энергии и импульса чаще всего используются для определения кинетической энергии, скорости движения и направления разлета продуктов реакции. Применяя закон сохранения импульса и поглощения ядром бомбардирующей частицы, следует иметь в виду, что этот процесс можно рассматривать как неупругий удар.

Закон сохранения энергии для ядерных реакций необходимо записывать в релятивистской форме:

$$\sum m_0 c^2 + \sum E_к = \sum m_0' c^2 + \sum E_к',$$

где $\sum m_0 c^2$ — сумма энергий покоя частиц до реакции; $\sum E_к$ — сумма их кинетических энергий; $\sum m_0' c^2$, $\sum E_к'$ — суммы соответствующих величин для продуктов реакции.

Задачи для самостоятельного решения

4.94. Пользуясь теорией Бора, определить для первой орбиты в атоме водорода радиус орбиты, скорость и ускорение электрона, энергию основного состояния атома.

4.95. Как изменится угловая скорость обращения электрона в атоме водорода при переходе с первой орбиты на третью?

4.96. Определить кинетическую, потенциальную и полную энергии электрона в атоме водорода на второй боровской орбите.

4.97. Вычислить для иона He II радиус первой боровской орбиты, скорость электрона на ней и его кинетическую энергию.

4.98. Во сколько раз изменятся момент импульса и энергия электрона атома водорода при возбуждении его квантом энергией 12,8 эВ?

4.99. Какую наименьшую энергию должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр атома водорода имел три спектральные линии? Какова длина волны этих линий?

4.100. На сколько изменится кинетическая энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона, длина волны которого 486 нм?

4.101. Квант света, возникающий при резонансном переходе в однократно ионизированном атоме гелия He II, вырывает электрон из атома водорода, который находится в основном состоянии. Чему равна скорость этого электрона за пределами атома?

4.102. Первоначально покоившийся атом водорода испустил фотон, соответствующий головной линии серии Лаймана. Определить изменение длины волны фотона, вызванное отдачей атома.

4.103. Чему равно число распадов за сутки в 1 г радона?

4.104. Какая доля атомов радиоактивного изотопа радия распадается: а) за 1 с; б) за сутки; в) за год?

4.105. Определить возраст урановой руды, если известно, что на 1 кг урана $_{92}U^{238}$ в этой руде приходится 0,32 кг свинца $_{82}Pb^{206}$. Свинец, содержащийся в урановой руде, является конечным продуктом распада урана.

4.106. Радиоизотоп A_1 с постоянной распада λ_1 превращается в радиоизотоп A_2 с постоянной распада λ_2. Считая, что в начальный момент препарат содержал только ядра изотопа A_1, найти закон накопления радиоизотопа A_2 со временем.

4.107. Какой изотоп образуется из $_{90}Th^{232}$ после четырех α-распадов и двух β-распадов?

4.108. Сколько α- и β-распадов испытывает $_{95}Am^{241}$, превращаясь в конечном счете в стабильный изотоп $_{83}Bi^{209}$?

4.109. Покоившееся ядро Po^{200} испустило α-частицу с кинетической энергией 5,77 МэВ. Какую долю полной энергии, освобождаемой в этом процессе, составляет энергия отдачи дочернего ядра?

4.110. Какую энергию надо затратить, чтобы осуществить превращение 1 г алюминия $_{13}Al^{27}$ в кремний $_{14}Si^{30}$, если известно, что при бомбардировке ядра алюминия α-частицами энергией 8 МэВ только одна α-частица из $2 \cdot 10^6$ частиц вызывает превращение?

ЛИТЕРАТУРА

Балаш В. А. Задачи по физике и методы их решения.— М.: Просвещение, 1974.— 430 с.

Бугаев А. И. Методика преподавания физики в средней школе: Теоретические основы.— М.: Просвещение, 1981.— 288 с.

Горбунова О. И., Зайцева А. М., Красников С. Н. Задачник-практикум по общей физике: Оптика, атомная физика/Под ред. А. В. Александрова.— М.: Просвещение, 1977.— 110 с.

Зайцева А. М. Задачник-практикум по общей физике: Механика/Под ред. А. В. Александрова.— М.: Просвещение, 1972.— 128 с.

Каменецкий С. Е., Орехов В. П. Методика решения задач по физике в средней школе.— М.: Просвещение, 1974.— 384 с.

Кобушкин В. К. Методика решения задач по физике.— Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1972.— 247 с.

Методика преподавания физики в 6—7 классах средней школы/В. П. Орехов, А. В. Усова, К. В. Альбин и др.; Под ред. В. П. Орехова и А. В. Усовой.— М.: Просвещение, 1976.— 384 с.

Методика преподавания физики в 8—10 классах средней школы/В. П. Орехов, А. В. Усова, И. К. Турышев и др.; Под ред. В. П. Орехова и А. В. Усовой.— М.: Просвещение, 1980, ч. 1.— 320 с.

Основы методики преподавания физики: Общие вопросы/А. К. Абас-заде, Б. А. Воронцов-Вельяминов, М. И. Блудов и др.; Под ред. Л. И. Резникова, А. В. Перышкина, П. А. Знаменского.— М.: Просвещение, 1965.— 374 с.

Разумовский В. Г. Развитие творческих возможностей учащихся.— М.: Просвещение, 1975.— 272 с.

Савченко Н. Е. Решение задач по физике.— Мн.: Выш. школа, 1977.— 240 с.

Тарасов Л. В., Тарасова Н. Н. Вопросы и задачи по физике.— М.: Высш. школа, 1968.— 238 с.

Тулькибаева Н. Н., Усова А. В. Методика обучения учащихся решению физических задач.— Челябинск: Изд-во Челябинского пед. ин-та, 1979.— 43 с.

Эсаулов А. Ф. Психология решения задач.— М.: Высш. школа, 1972.— 216 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

4. Оптика. Строение атома

Василий Иосифович Богдан
Василий Александрович Бондарь
Дмитрий Иванович Кульбицкий
Владимир Андреевич Яковенко

ПРАКТИКУМ ПО МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Зав. редакцией Л. Д. Духвалов
Редактор Е. В. Сукач
Мл. редактор В. М. Кушилевич
Обложка В. А. Ягдарова.
Худож. редактор Ю. С. Сергачев
Техн. редактор И. П. Тихонова
Корректор В. В. Неверко

ИБ № 1418

Сдано в набор 15.02.83. Подписано в печать 15.11.83. АТ 16223. Формат 60×90[1]/[16]. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 17. Усл. кр.-отт. 17,25. Уч.-изд. л. 20,92. Тираж 15 000 экз. Зак. 3378. Цена 90 к.

Издательство «Вышэйшая школа» Государственного комитета БССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 220048. Минск, проспект Машерова, 11.

Минский ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат МППО им. Я. Коласа. 220005. Минск, Красная, 23.