

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФГАОУ ВПО
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ОБЩЕЙ ФИЗИКИ
Баширов Фэрид Исрафилович**

**ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК**

Казань – 2014

Учебное пособие по разделу физики "ЭЛЕКТРОСТАТИКА И ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК" для студентов института геологии и нефтегазовых технологий КФУ.

От автора.

Пособие создано на основе лекций по физике, которые читались автором студентам геологам и географам Казанского Федерального Университета на протяжении последних 30 лет, а также студентам технических специальностей государственного университета г. Конакри в 1998 – 2010 годах.

Автор с благодарностью примет любые замечания, которые будут способствовать улучшению содержания и представления материала.

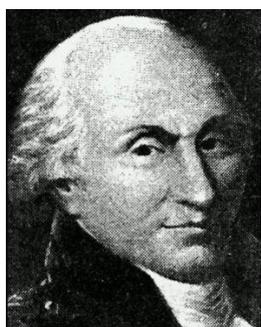
Д.ф.м.н., профессор Баширов Ф.И.

Email: fbashir@mail.ru

10.12. 2013

ВВЕДЕНИЕ

Данный раздел посвящен изучению основ электродинамики. В 1785 году французский физик Кулон (Charles de Coulomb, 1736 - 1806) установил закон взаимодействия двух неподвижных заряженных точечных тел. В 1820 году датский физик Эрстед (Hans Christian Oersted, 1777-1851) доказал, что электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Ампер, Био и Савар определили вначале опытным путём и затем теоретически силу, с которой магнитное поле действует на проводник, по которому протекает электрический ток. (André Marie Ampère, французский физик и математик, 1775-1836. Jean-Baptiste Biot, французский физик, математик и астроном, 1774-1862. Félix Savart, французский физик, 1791-1841.)



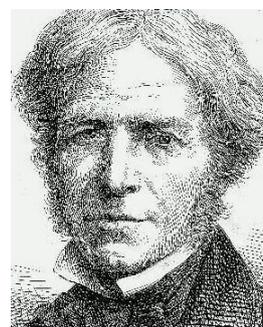
Charles de Coulomb



Hans Christian Oersted



Ampère André Marie



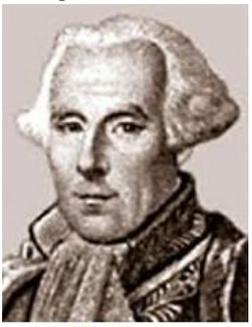
Michael Faraday



Hertz Heinrich Rudolf



Maxwell James Clerk



Félix Savart



Jean-Baptiste Biot

В 1831 г. Фарадей (Michael Faraday, английский физик и химик, 1791-1867) открыл явление электромагнитной индукции. Теория Максвелла (James Clerk Maxwell, английский ученый, 1831-1879) заложила фундамент классической электродинамики (1867). Основываясь на экспериментальных данных, он предложил уравнения, достаточные для описания всех электромагнитных явлений, где квантовые законы не проявляются. Теория Максвелла получила практическое развитие в работах Герца (Heinrich Rudolf Hertz, немецкий физик, 1857-1894) и Попова (Александр Степанович Попов, русский физик, изобретатель радио, 1859-1906). Ророн создал первый радиоприемник (1896) и осуществил передачу и прием радиосигналов с помощью азбуки Морзе.



А.С. Попов

I. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПУСТОТЕ

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ

Все тела в природе состоят из мельчайших частиц, которые условно названы элементарными частицами (микрочастицами). Одно из физических свойств, которым обладает микрочастица – это масса. Следовательно, все элементарные частицы взаимно притягиваются на основе закона всемирного тяготения. Кроме того, большая часть элементарных частиц находится во взаимодействии под влиянием сил, которые часто сильнее сил гравитации и играют доминирующую роль в образовании конденсированного состояния вещества. Такой тип взаимодействия был назван электрическим взаимодействием, а соответствующее физическое свойство частицы – электрическим зарядом. Также было обнаружено, что движущиеся заряженные частицы порождают еще один вид взаимодействия – магнитное взаимодействие.

Согласно современным представлениям электрический заряд – скалярная физическая величина, определяющая интенсивность электрического взаимодействия частиц (тел). Изучение электромагнитных взаимодействий основано на концепции взаимодействия на коротких расстояниях. Это означает, что взаимодействие между частицами или заряженными телами распространяется с конечной скоростью равной скорости света. В пустоте, эта скорость равна $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

В природе обнаружены частицы, электрические заряды которых противоположны по знаку. Заряд электрона считается отрицательным, а заряд протона (микрочастица, которая входит в состав ядра атома) – положительным. Атомы и молекулы любого вещества нейтральны. Большая часть тел – также электрически нейтральная (число электронов равно числу протонов). Если тело заряжено отрицательно – это означает, что оно имеет избышек электронов. Тело – положительное, если имеется недостаток электронов. В процессе электризации электрический заряд тела изменяется строго определенными порциями, равными или кратными значению наименьшего количества электричества, названного элементарным электрическим зарядом. Устойчивая частица с наименьшей массой $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг, обладающая элементарным отрицательным электрическим зарядом, – это электрон. Его заряд равен $e = -1,6 \times 10^{-19}$ Кл (Кулон). Заряд протона положителен и по модулю равен заряду электрона, масса протона – $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг. Отрицательный заряд тела, имеющего N избыточных заряженных элементарных частиц – электронов, кратен целому числу заряда электрона: $Q = Ne$. Впервые элементарный заряд был измерен Милликеном в 1909 году. (Robert Andrews Millikan, американский физик, 1868-1953. Нобелевский лауреат по физике, 1923).



R.A. Millikan

В настоящее время, опытным путём с высокой степенью точности установлено, что дробные значения заряда не существуют. Значение заряда, измеренное по отношению к разным Галилеевым системам отсчета, – всегда одно и то же, и оно не зависит от механического состояния системы отсчета, движется ли оно или покоится. Полный заряд электрически изолированной системы не меняется. Закон сохранения электрического заряда означает, что электрические заряды не создаются и не исчезают, а они передаются от одного тела другому или перераспределяются внутри данного тела. Кроме протонов и электронов имеется большое число других элементарных частиц. Они участвуют в разных процессах взаимных преобразований, но какой бы ни был процесс, полный заряд частиц до преобразования равен полному заряду после преобразования: $\sum Q_i = \text{Const}$. У закона сохранения заряда – такой же фундаментальный смысл в физике, как другие законы сохранения (энергии, импульса, момента импульса и т.д.).

ЗАКОН КУЛОНА

Основной закон электростатики, закон Кулона – это закон взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов. Он гласит: электрическая сила взаимодействия между двумя заряженными неподвижными точечными телами пропорциональна произведению их зарядов, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой линии, проведенной от одного заряда к другому. Закон Кулона, примененный к взаимодействию точечных зарядов Q_1 и Q_2 , находящихся на расстоянии r один от другого в пустоте, пишется в форме:

$$F = k \frac{|Q_1| |Q_2|}{r^2},$$

где k коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения физических величин.

Взаимодействие зарядов одного знака – отталкивание, взаимодействие зарядов противоположных знаков – притяжение. Сила отталкивания F , действующая на заряд Q_2 со стороны заряда того же знака Q_1 , совпадает по направлению с радиус-вектором \mathbf{r} , проведенным от заряда Q_1 к заряду Q_2 (рис. 1a). Сила притяжения, действующая на заряд Q_2 со стороны заряда противоположного знака Q_1 , направлена против направления радиус-вектора \mathbf{r} , проведенного от заряда Q_1 к заряду Q_2 (рис. 1b). Поэтому, силы отталкивания условились считать как положительные, а силы притяжения – отрицательными. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона определен в системе СИ формулой:

$$k = 1/4\pi\epsilon_0.$$

Тогда закон Кулона принимает вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2}.$$

Величина ϵ_0 называется электрической постоянной. Она является одной из фундаментальных постоянных в физике. Определим числовое значение ϵ_0 , рассмотрев взаимодействие двух положительных точечных зарядов по 1 Кл каждый, расположенных на расстоянии 1 м. Сила взаимодействия зарядов в этом случае, найденная экспериментально, равна $9 \cdot 10^{11}$ Н (Ньютонов). Переписывая закон Кулона относительно ϵ_0 , находим:

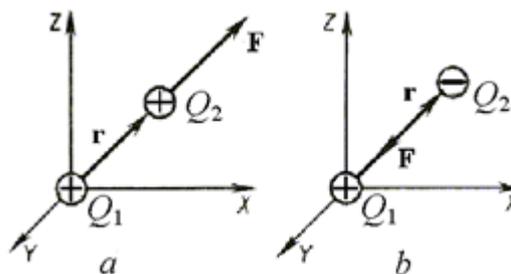


Рис. 1

$$\epsilon_0 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi r^2 F}; \quad \epsilon_0 = \frac{1 \text{ Кл}^2}{4\pi \cdot 1 \text{ м}^2 \cdot 9 \cdot 10^9 \text{ Н}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2 \cdot \text{Н}} = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\Phi}{\text{м}} = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{м}},$$

или $\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \Phi/\text{м} = 8,85 \cdot 10^{-12} \Phi/\text{м}$ (Фарад на метр). Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами в наиболее общей (векторной) форме пишется как:

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

ВЕКТОР НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Согласно современной физике, передача взаимодействия между телами не может осуществиться без участия материи. Взаимодействие между заряженными телами, находящимися, в общем случае, в состоянии движения в некоторой системе отсчета, является электромагнитным взаимодействием. Тип материи, посредством которой осуществляется электромагнитное взаимодействие, получил название электромагнитное поле. В системе неподвижных электрических зарядов это взаимодействие осуществляется при помощи электростатического поля, однако не передается мгновенно. Оно переносится с некоторой конечной скоростью, максимальное значение которой равно скорости распространения света в вакууме: $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Электрическое поле – это форма материи, обладающая особыми физическими свойствами, главное из которых заключается в следующем положении: на электрические заряды, помещенные в это поле, действуют силы, пропорциональные этим зарядам. Присутствие электрического поля, созданного некоторым зарядом Q , можно обнаружить, если внести некоторый другой заряд в пространство, окружающее этот заряд Q .

Чтобы изучать свойства поля, обычно используется положительный точечный пробный заряд. Кроме того, предполагается, что пробный заряд не искажает поле, которое изучается, то есть, собственное поле пробного заряда

пренебрежимо мало. Сила, действующая на пробный заряд $Q_{\text{пр}}$ в поле точечного заряда Q , равна:

$$\mathbf{F} = \frac{Q Q_{\text{пр}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

На различные пробные заряды Q_1, Q_2, Q_3 действуют различные силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ в той же точке поля, но отношения $\mathbf{F}_1/Q_1, \mathbf{F}_2/Q_2, \mathbf{F}_3/Q_3$ для этой точки поля всегда одни и те же. Можно было бы найти аналогичные отношения для различных точек поля, то есть охарактеризовать численно все поле этой величиной. Физическая величина \mathbf{E} , заменяющее отношение $\mathbf{F}/Q_{\text{пр}}$, называется напряженностью электростатического (электрического) поля и она численно равна силе, действующей на единичный положительный точечный заряд:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F} / Q_{\text{пр}}.$$

Следовательно, напряженность – силовая характеристика поля. Очевидно, что напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом Q , равна:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{Q_{\text{пр}}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

где r – расстояние от заряда Q до точки поля, определенного радиус-вектором \mathbf{r} . Напряженность \mathbf{E} – векторная величина. Направление силы, с которым поле действует на пробный заряд (положительный точечный заряд), помещенной в точку поля, берется в качестве положительного направления вектора напряженности:

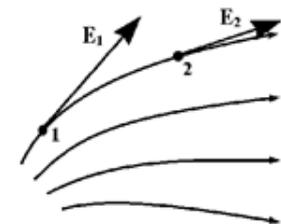


Рис. 2

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Физическое поле полезно для наглядности представить графически силовыми линиями (рис. 2). Линия (в большинстве случаев криволинейная), в каждой точке которой касательная совпадает с вектором напряженности поля, называется силовой линией (или линией поля). Силовые линии электростатического поля никогда не могут быть замкнутыми. У них обязательно есть начало и конец, или они приходят из бесконечности и уходят в бесконечность. Это подтверждает наличие в природе двух типов электрических зарядов. Условились считать, что линии электростатического поля направлены от положительных зарядов к отрицательным зарядам, то есть, они выходят из положительных зарядов и входят в отрицательные заряды. Эти линии никогда не пересекаются. Пересечение линий означало бы неопределенность направления вектора напряженности электрического поля в точке пересечения. Плотность (густота) силовых линий характеризует модуль напряженности поля. В местах, где напряженность меньше, линии

менее плотно расположены. Примеры силовых линий поля, создаваемых наиболее простыми распределениями зарядов, представлены на рис. 3. Электрическое поле, напряженность которого по модулю и направлению одинакова ($\mathbf{E} = \text{Const}$) - однородное поле. Электрические поля равномерно заряженной плоскости (рис. 4a) и внутри плоского конденсатора вдали от краев (рис. 4b) – примеры такого однородного поля.

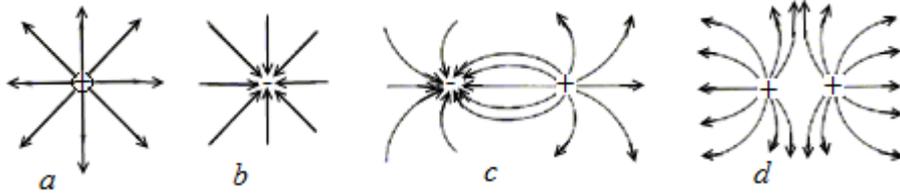


Рис. 3

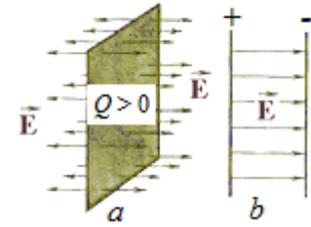


Рис.4

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. СЛОЖЕНИЕ ПОЛЕЙ

Результирующая сила, действующая на точечный заряд Q со стороны двух других зарядов Q_1 и Q_2 , равна векторной сумме сил \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 , действующих со стороны каждого из зарядов Q_1 и Q_2 . Так как $\mathbf{F}_1 = Q\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{F}_2 = Q\mathbf{E}_2$, где \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 – напряженности поля, созданного соответственными зарядами Q_1 и Q_2 , то $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_1 + Q\mathbf{E}_2 = Q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)$. Из этого следует, что векторную сумму $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$ следует считать результирующей напряженностью поля в точке, где помещен заряд Q (рис. 5):

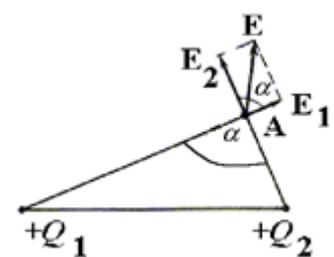


Рис.5

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/Q = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2.$$

Тем самым провозглашается принцип суперпозиции полей. Модуль E результирующего вектора \mathbf{E} для двух полей находится по теореме косинуса:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha},$$

где E_1 и E_2 – модули полей, созданных зарядами Q_1 и Q_2 в точке А, α - угол между векторами \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 . Принцип суперпозиции, в общем случае, формулируется так: если различные заряженные частицы создают в данной точке поля напряженностью \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{E}_3 и т.д., то напряженность, результирующего поля в этой точке равна векторной сумме напряженностей отдельных полей:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 + \dots$$

Из принципа суперпозиции следует, что поля не оказывают взаимного влияние и для отыскания значения напряженности результирующего поля, созданного системой заряженных частиц, достаточно знать значение напряженности поля, созданного каждой точечной зарядом.

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Электростатическая система, состоящая из двух точечных зарядов, одинаковых по модулю, но противоположных по знаку, называется электрическим диполем (рис. 6). Вектор \vec{l} , проведенный от отрицательного заряда $-Q$ к положительному заряду $+Q$, называется осью диполя. Основным параметром диполя служит вектор электрического дипольного момента $\vec{p} = \mathbf{p}$, равный произведению величины заряда Q на вектор оси диполя \vec{l} и направленный от отрицательного заряда к положительному заряду: $\vec{p} = Q \cdot \vec{l}$. В однородном электрическом поле напряженности \mathbf{E} на положительный заряд действует сила $\mathbf{F}_+ = Q \mathbf{E}_+$, и на другой отрицательный заряд действует сила $\mathbf{F}_- = -Q \mathbf{E}_-$ (рис. 7). Эти силы равны по модулю и противоположно направлены. Они образуют пару сил, плечо которой равно $l \cdot \sin \alpha$, и создают момент \mathbf{M} пары сил \mathbf{F}_+ и \mathbf{F}_- . Вектор \mathbf{M} равен векторному произведению векторов \mathbf{p} и \mathbf{E} : $\mathbf{M} = [\mathbf{p}, \mathbf{E}] = \mathbf{p} \wedge \mathbf{E} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}]$ и направлен перпендикулярно векторам \mathbf{p} и \mathbf{E} (на рис. 7 – на нас). Это направление задается согласно правилу правого винта (буравчика). Модуль M равен $M = p E \sin \alpha$, где α – угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{E} . В однородном поле момент пары сил поворачивает диполь так, чтобы векторы \mathbf{p} и \mathbf{E} были параллельны.

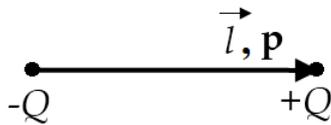


Рис. 6

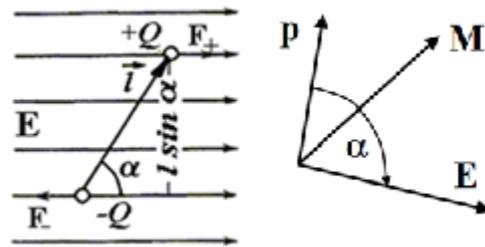


Рис. 7

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Пример 1. Поле в точке A лежащей на продолжении оси диполя (рис. 8). Векторы \mathbf{E}_+ и \mathbf{E}_- направлены снаружи диполя в различных направлениях, и модуль результирующей напряженности будет равен модулю разности модулей напряженности действующих полей:

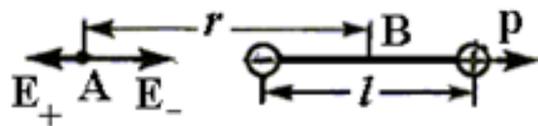


Рис. 8

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r-l/2} - \frac{Q}{r+l/2} \right] \quad \text{или} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{r+l/2}{r-l/2} - \frac{r-l/2}{r+l/2} \right],$$

где r – расстояние от центра диполя до точки, расположенной на продолжении оси диполя. Назовем *точечным диполем* диполь, размеры которого во много раз меньше расстояния диполя до внешних тел: $r \gg l$. Пренебрегая величиной $(l/2)^2$ в знаменателе, мы получим результат расчета:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ql}{r^3} \quad \text{или} \quad E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

где p – модуль дипольного электрического момента.

Пример 2. *Напряженность электрического поля в центре диполя.* Она равна векторной сумме полей E_+ и E_- , созданных противоположными зарядами: отрицательными и положительными зарядами, в частности, в точке В (рис. 8). В центре оси диполя (между зарядами $-Q$ и $+Q$) результирующий вектор напряженности $E = E_+ + E_-$ с учетом того, что $E_+ = -E_-$, равен: $E = 2E_+$, а ее модуль:

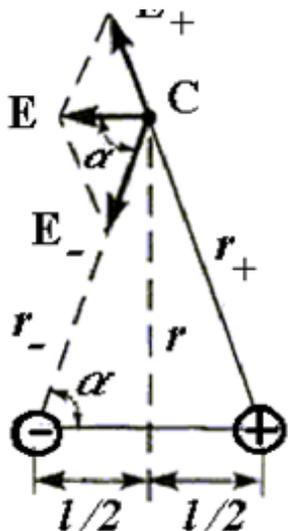


Рис. 9

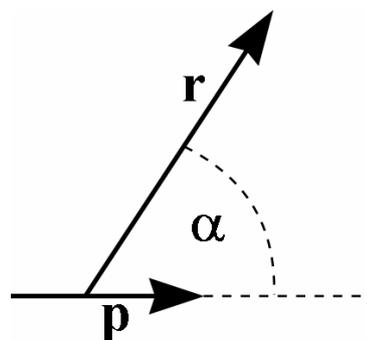


Рис. 10

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{l/2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8Q}{l^2} = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{l^2}.$$

Пример 3. Вычислим напряженность поля в точке С, находящейся на перпендикуляре, восставленном в центре оси точечного диполя (рис. 9). Так как $r_+ = r_-$, имеем:

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_-^2}.$$

Модуль результирующего вектора напряженности в точке С, равен:

$$E = E_+ \cos \alpha + E_- \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r_-^2} \cos \alpha.$$

С учетом того, что $\cos \alpha = \frac{l/2}{r_-}$ и $r_- \approx r_+ = r$,

для точечного диполя получим:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r_-^2} \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Q}{r_-^2} \frac{l/2}{r_-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{r_-^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql}{r_-^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3}.$$

В общем случае, напряженность поля диполя в произвольной точке определяется формулой:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha},$$

где p – модуль дипольного момента, r – расстояние от центра диполя до точки поля, α – угол между радиус-вектором \mathbf{r} и вектором диполя \mathbf{p} (рис. 10).

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ.
ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО.

Число силовых линий dN_E , пронизывающих поверхность dS перпендикулярную линиям, определяет поток $d\Phi_E$ вектора напряженности электрического поля (рис. 11).

Для однородного поля поток вектора \mathbf{E} через произвольную плоскую поверхность S или через плоскую поверхность S_n , проекцию поверхности S на плоскость перпендикулярную силовым линиям, равна

$$\Phi_E \equiv N_E = E S_n = E S \cos \alpha = \mathbf{E} S \mathbf{n} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{S},$$

где α – угол между вектором \mathbf{E} и нормалью \mathbf{n} к плоской поверхности \mathbf{S} (рис. 12). Поток Φ_E вектора \mathbf{E} – скалярная величина.

В общем случае, поток вектора напряженности через произвольную поверхность S равен

$$\Phi_E \equiv N_E = \int_S E_n dS = \int_S E dS \cos \alpha = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S},$$

где E_n – проекция вектора \mathbf{E} на нормаль \mathbf{n} к элементу поверхности dS , вектор элементарной поверхности равен $d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$. Эти выражения служат в качестве определения потока вектора напряженности поля, созданного системой зарядов.

Рассмотрим частный случай. Определим поток вектора напряженности через сферическую поверхность радиуса r , в центре которой расположен положительный точечный заряд $Q > 0$ (рис. 13). Линии поля перпендикулярны поверхности сферы, то есть, $\alpha = 0$ и $\cos \alpha = 1$. Тогда, согласно формуле $\Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S}$, имеем:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_S E_n dS = \oint_S E dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Эта формула приемлема также, если заряд расположен в произвольном месте внутри замкнутой поверхности, которая не является сферой. На рис. 13 можно видеть, что количество силовых линий, пересекающих произвольную поверхность и сферу – одинаковое. Принято во внимание, что выходящие линии положительны, а входящие линии – отрицательные.

Если поле образовано системой дискретно распределенных зарядов, то поток вектора электрического поля через любую замкнутую поверхность в пустоте равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i.$$

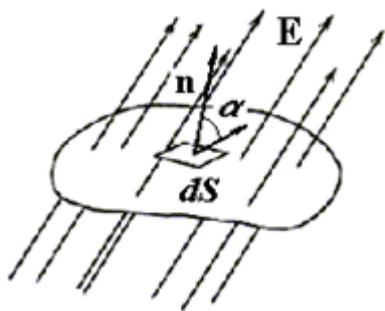


Рис. 11

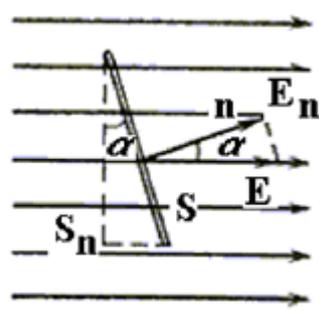


Рис. 12

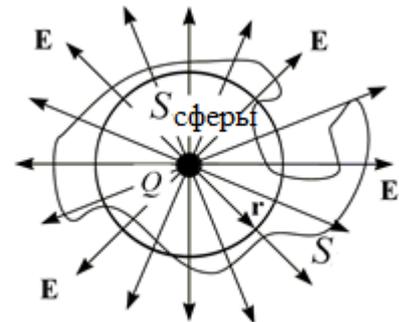


Рис. 13

Это есть интегральная форма теоремы Гаусса-Остроградского. (Gauss Carl Friedrich, немецкий математик, физик и астроном, 1777-1855. Остроградский Михаил Васильевич, русский математик, 1801-1862). Если заряды отсутствуют внутри поверхности ($Q = 0$), то $\Phi_E = 0$ и электрическое поле также там отсутствует $E = 0$. Мощный метод вычисления электрических полей, создаваемых пространственно распределенными зарядами, основан на теореме Гаусса-Остроградского. Следует отметить, что знание свойств геометрической симметрии в распределении заряда и окружающей поверхности значительно облегчает процесс решения задач связанных с применением теоремы Гаусса-Остроградского.

Получим сейчас дифференциальную (локальную) форму теоремы Гаусса-Остроградского, описывающую векторное свойство поля в данной точке. Для начала представим интегральную форму теоремы Гаусса-Остроградского для объемного непрерывного распределения зарядов:

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i Q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Здесь ρ объёмная плотность электрических зарядов. Кроме того, запишем математическую теорему Остроградского-Гаусса:

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV,$$

где пределы интегрирования по объёму простираются на все пространство, заключенное внутри поверхности S . Приравнивая правые части выражений для Φ_E находим:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV,$$

откуда следует теорема Гаусса-Остроградского в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon_0 .$$

Несколько замечаний по поводу дифференциального математического оператора дивергенция "div". Это – сокращение французского слова *divergence* расхождение. Он применяется только к векторным величинам и имеет следующий физический смысл: если дивергенция вектора существует, (не равна нулю), то силовые линии напряженности этого векторного поля выходят из источника и входят в точки стока таких линий. Вывод: векторное поле, которое обладает как источником, так и стоком силовых линий – всегда потенциальное. Короче, нет источника – нет потенциального поля, нет заряда – нет электростатического поля. (Внимание, силовые линии любого поля могут приходить из бесконечности и/или удалиться в бесконечность).



Gauss Carl Friedrich



Остроградский М.В.

Оператор "div" (так же как и операторы "grad" и "rot") является суммой трех частных производных и обозначается часто знаком ∇ (читается набла). В декартовой системе координат он записывается как:

$$\operatorname{div} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} ,$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – орты координатных осей x , y , z . Оператор "div" действует на векторную физическую величину. Следовательно, в данном случае, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E}$ – рассматривается как скалярное произведение вектора набла ∇ и вектора напряженности \mathbf{E} , и результат этого произведения – скалярная величина:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \mathbf{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} .$$

Дифференциальной формой теоремы Гаусса-Остроградского подтверждается экспериментальный факт того, что локально распределённые электрические заряды, заданные объёмной плотностью ρ для непрерывного распределения заряда, представляют собой источники линий напряженности электрического поля.

ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛЕЙ

Заряды могут быть расположены линейно, на поверхности и в объеме. Понятие *линейной плотности* λ вводится для электрических зарядов, распределённых вдоль удлинённого тела, отношением: $\lambda = dQ/dl$, где dQ заряд, расположенный на части тела, длина которой dl . Для равномерного распределения линейная плотность равна: $\lambda = Q/l$.

Поверхностная плотность зарядов определяется соотношением: $\sigma = dQ/dS$, где dQ заряд, расположенная на поверхности dS . В случае равномерного распределения имеем, что $\sigma = Q/S$.

Объёмная плотность зарядов дается формулой: $\rho = dQ/dV$, где dQ заряд, приданный объёму dV . Для заряда Q равномерно распределённого в объёме V имеем: $\rho = Q/V$.

1. *Напряженность электрического поля, созданного равномерно заряженной сферой.* Дано: радиус сферы R_0 , его заряд Q , расстояние точки пространства A от центра сферы O равно r (рис. 14). Существует два различных варианта вычисления: точка A находится во внутренней части сферы ($r_1 \leq R_0$) или снаружи ($r_2 \geq R_0$).

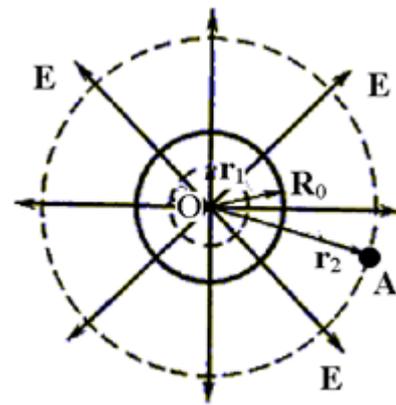


Рис. 14

Внутри сферы, поле не возникает, потому что нет зарядов в сферическом пространстве радиуса $r_1 < R_0$. Следовательно, $\Phi_E = 0$ и $E = 0$.

Найдем модуль E в точке A снаружи сферы. Так как заряд Q равномерно распределён, поверхностная плотность $\sigma = Q / S = \text{Const}$. Применим теорему Гаусса-Остроградского, принимая во внимание сферическую симметрию физической системы. Прочертим сферу радиуса $r_2 = OA > R_0$. Поток вектора поля через сферическую поверхность радиуса r_2 равен $\Phi_E = E_n S = E \cdot 4\pi r_2^2$. Принято во внимание, что $E_n = E \cos \alpha = E$ для $\alpha = 0$. Согласно теореме Гаусса-Остроградского тот же поток равен $\Phi_E = Q/\epsilon_0$. Следовательно,

$$E \cdot 4\pi r_2^2 = Q/\epsilon_0 \text{ и, наконец, } E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}.$$

Из этой формулы следует, что напряженность поля вне сферы, несущей заряд Q , равна напряженности поля, созданного точечным зарядом Q , помещенным в центре сферы. На внешней поверхности сферы ($r_2 = R_0$) напряженность равна: $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0^2}$. Вводя замену $Q = \sigma S = \sigma 4\pi R_0^2$, получим

другое выражение напряженности поля на поверхности сферы: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$.

2. Поле бесконечно длинного цилиндра радиуса R_0 , равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ (рис. 15). Согласно свойству симметрии распределения заряда поле вне цилиндра обладает осевой симметрией, т.е. напряженность поля меняется только с расстоянием от оси цилиндра. Так как линии поля не пересекают основание цилиндра, то линии поля, проходящие через боковую цилиндрическую поверхность радиуса $r_2 \geq R_0$ и длины l , образуют полный поток, равный $\Phi_E = E_n S = E \cdot 2\pi r_2 l$. Заряд, ответственный за этот поток, есть $Q = \sigma \cdot S_0 = \sigma \cdot 2\pi R_0 l$. По теореме Гаусса-Остроградского имеем: $\Phi_E = Q/\epsilon_0 = \sigma \cdot 2\pi R_0 l / \epsilon_0$.

Из всех этих результатов следует, что $E \cdot 2\pi r_2 l = \sigma \cdot 2\pi R_0 l / \epsilon_0$ и, наконец, $E = \sigma R_0 / \epsilon_0 r_2$. Применяя понятие линейной плотности λ , найдем связь между плотностями λ и σ : $\lambda = Q/l = \sigma S/l = \sigma \cdot 2\pi R_0 l / l = 2\pi R_0 \sigma$ или $\sigma = \lambda / 2\pi R_0$. Следовательно, получаем, что напряженность поля, созданного длинным равномерно заряженным цилиндром в пустоте, пропорциональна линейной плотности заряда и обратно пропорциональна расстоянию от оси цилиндра:

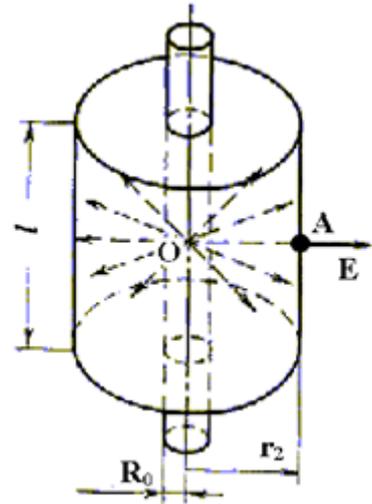


Рис. 15

$$E = \sigma R_0 / \epsilon_0 r_2 = \lambda / 2\pi R_0 \cdot R_0 / \epsilon_0 r_2 = \lambda / 2\pi \epsilon_0 r_2.$$

Эта последняя формула приемлема также для расчета напряженности поля вокруг длинной равномерно заряженной нити, так как нить – предельный случай цилиндра.

3. Напряженность поля, созданного бесконечно протяженной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ (рис. 16). В силу симметрии, очевидно, что силовые линии перпендикулярны плоскости и поля, расположенные по обе стороны от плоскости, отличаются направлением: они противоположно направлены. В этом случае, разумно в качестве замкнутой поверхности выбрать поверхность призмы, расположенной перпендикулярно заряженной плоскости. Пусть dS_1 и dS_2 – две поверхности образующие два противоположных основания призмы. Высота призма $2l$ и ее основания отстоят от плоскости на расстоянии l . Тогда, рассчитываемый поток $d\Phi_E$ есть сумма потока $d\Phi_{\text{бок}}$, проходящего через боковую часть призмы, и потока $d\Phi_{\text{осн}}$, пронизывающего оба основания призмы. Так как $d\Phi_{\text{бок}} = 0$, то $d\Phi_E$ равен $d\Phi_{\text{осн}}$, то есть:

$$d\Phi_E = E_1 dS_1 + E_2 dS_2 = 2E dS.$$

Согласно теореме Гаусса-Остроградского: $d\Phi_E = \sigma dS / \epsilon_0$ и $2E dS = \sigma dS / \epsilon_0$, откуда следует результат решения задачи: $E = E_1 = E_2 = \sigma / 2\epsilon_0$ и вывод: поле вокруг бесконечной равномерно заряженной плоскости – однородное.

4. Поле создано двумя равномерно заряженными, параллельными, бесконечно протяженными плоскостями. Плотности заряда плоскостей σ_1 и σ_2 (знаки зарядов произвольные). Применяя принцип суперпозиции, находим два результата для напряженности поля:

→ пространство между плоскостями $-E = |E_1 - E_2| = |\sigma_1 - \sigma_2| / 2\epsilon_0$ и

→ пространство локализовано вне плоскостей $-E = E_1 + E_2 = \sigma_1 + \sigma_2 / 2\epsilon_0$.

На практике часто применяется конденсатор (накопитель зарядов), состоящий из двух или более проводящих пластин (обкладок). Рассмотрим поле плоского конденсатора, состоящего из двух обкладок, на которые помещены равные по модулю заряды с поверхностной плотностью σ_1 и σ_2 , но противоположные по знаку ($\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$). Напряженность поля в пространстве между двумя плоскостями $E = \sigma / \epsilon_0$ оказывается в два раза больше его значения по отношению к полю, создаваемому одиночной заряженной плоскостью. Вне конденсатора поле отсутствует (рис. 17).

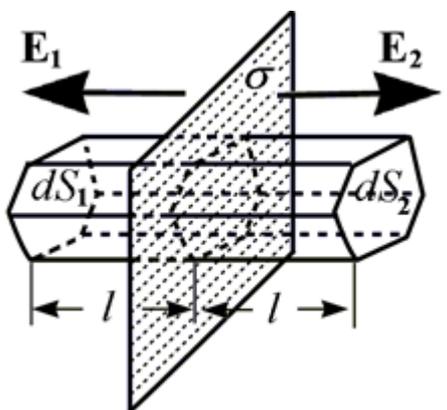


Рис. 16

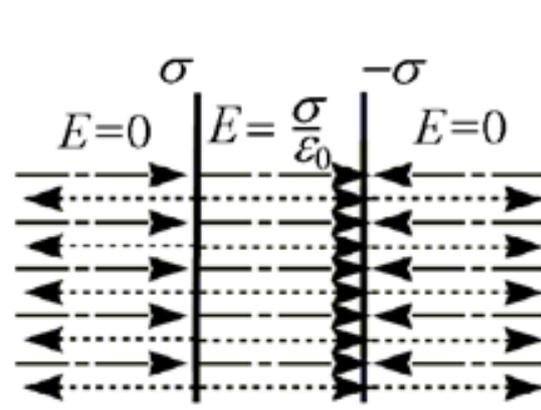


Рис. 17

ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Элементарная работа, совершаемая силой \mathbf{F} при перемещении пробного заряда $Q_{\text{пр}}$ на пути ds равна:

$$dA = F ds \cos\alpha,$$

где α – угол между вектором силы и направлением движения. Условимся считать работу, совершаемую силами поля, положительной $dA > 0$. Если эта работа совершается внешними силами, то $dA < 0$. Интегрируя последнее выражение, мы найдем работу сил поля при перемещении заряда на произвольной траектории из некоторой точки a , в точку b :

$$A = \int_a^b F \cos\alpha ds = \int_a^b E Q_{\text{пр}} \cos\alpha ds,$$

где $F = EQ_{\text{пр}}$ – модуль силы, действующей на пробный заряд в каждой точке поля, напряженность которой задается вектором \mathbf{E} .

Докажем, что работа перемещения электрического заряда $Q_{\text{пр}}$ в поле зависит только от начальных и конечных положений заряда в пространстве.

Пусть пробный заряд $Q_{\text{пр}}$ перемещается в поле, созданном зарядом Q , из точки a , удаленной от Q на расстояние r_1 , в точку b , удаленную от Q на расстояние r_2 , по пути $aa'b$ (рис. 18). На пути aa' работа не совершается, так как перемещение происходит перпендикулярно вектору \mathbf{E} , следовательно, и \mathbf{F} . Таким образом, работа переноса пробного заряда из a в b равна:

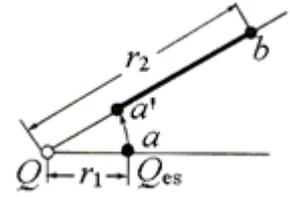


Рис. 18

$$A = \int_a^b E Q_{\text{пр}} \cos \alpha ds = \frac{Q Q_{\text{пр}}}{4\pi \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{Q Q_{\text{пр}}}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right),$$

что означает, что работа перемещения точечного электрического заряда, совершенная силами поля, не зависит от формы пути, а она зависит от начального и конечного относительного положения точек траектории. Таким отличительным свойством обладает так называемое потенциальное физическое поле. Из этого следует, что работа, совершаемая в электростатическом поле вдоль замкнутого контура, равна нулю: $\oint \mathbf{E} Q_{\text{пр}} ds = 0$. Так как $Q_{\text{пр}} \neq 0$, имеем также, что $\oint \mathbf{E} ds \equiv \oint \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$. В теории поля, интеграл $\oint \mathbf{E} d\mathbf{r}$ называется циркуляцией вектора поля. Итак, циркуляция вектора электростатического поля равна нулю.

Рассмотренное свойство потенциального поля может быть выражено в дифференциальной форме при помощи теоремы Стокса (George Gabriel Stokes, английский физик, 1819-1903). Эта теорема выражает связь интеграла по круговой траектории с интегралом по поверхности:



George Gabriel Stokes

$$\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S}.$$

Здесь S – произвольная поверхность, опирающаяся на замкнутый контур l . Обозначение $\text{rot} \mathbf{E} = [\nabla \mathbf{E}]$ – это векторный дифференциальный оператор ротора, действующий на вектор напряженности поля. Физический смысл интеграла $\iint_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ – поток вектора $\text{rot} \mathbf{E}$ через поверхность S .

Так как $\oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0$, то $\iint_S \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = 0$ и $\text{rot} \mathbf{E} = 0$.

Это означает, что нет потока ротора вектора \mathbf{E} через произвольную поверхность S . Так как $\text{rot} \mathbf{E} = 0$, то электростатическое поле не является роторным (вихревым) полем, т.е. линии поля не замкнуты, они – прерывистые. Такое заключение уже было сделано согласно теореме Гаусса-Остроградского: электрические заряды являются источниками или стоками конечных линий вектора \mathbf{E} .

Чтобы облегчить восприятие только что введенного оператора ротора, отметим здесь, что запись $[\nabla \mathbf{E}]$ можно рассматривать как векторное произведение векторного оператора набла ∇ на вектор \mathbf{E} . Результат этого

векторного произведения в декартовой системе координат может быть представлен следующим образом:

$$\begin{aligned}
 [\nabla \mathbf{E}] = \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k} = \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\
 &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k}.
 \end{aligned}$$

Перемещение зарядов меняет их взаимное расположение. Поэтому работа, совершаемая электрическими силами, равна вариации потенциальной энергии перемещаемого заряда: $A = - \Delta W_{\Pi}$. Отрицательный знак, стоящий перед вариацией энергии, является отражением факта убыли потенциальной энергии, если работа совершается только силами поля. (Выполняется закон сохранения энергии.)

Для вычисления потенциальной энергии электрического заряда в данной точке поля возьмем какую-нибудь точку пространства в качестве начала отсчёта. Известно, что при перемещении заряда из начальной точки в данную точку поля совершается одинаковая работа A , какой бы ни была форма траектории. Поэтому, в любой точке поля потенциальная энергия W_{Π} заряда равна работе, которую надо совершить, чтобы внести туда этот заряд. Так как работа в электрическом поле и потенциальная энергия пропорциональны величине пробного заряда, имеем: $W_{\Pi} = \varphi \cdot Q_{\text{пр}}$. Здесь множитель φ – физическая величина, называемая потенциалом электрического поля. Следовательно, потенциал может быть вычислен по формуле $\varphi = W_{\Pi}/Q_{\text{пр}}$, и он характеризует потенциальную энергию, которой обладает положительный единичный точечный заряд, будучи помещенным в данную точку поля.

Чтобы вычислять полную потенциальную энергию заряда, надо найти работу сил поля по перемещению заряда из данной точки поля в точку, где поле отсутствует. Например, можно предположить, что поле в бесконечности отсутствует для конечного распределения зарядов. Тогда можно записать выражение, позволяющее вычислить потенциальную энергию точечного заряда:

$$W_{\Pi} = \int_r^{\infty} F \cos \alpha dr = \int_r^{\infty} \mathbf{F} dr = - \int_{\infty}^r \mathbf{F} dr.$$

Отсюда следует другая важная формула, которая позволяет вычислить потенциал любого электростатического поля:

$$\varphi = -\frac{W_{\Pi}}{Q} = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

В этих двух последних формулах, выражения $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ и $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ – скалярные произведения векторов соответственно $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ и $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, где $d\mathbf{r}$ – вектор элементарного смещения.

На практике чаще интересуются разностью потенциалов между двумя точками поля, чем потенциала в точке. Разность потенциалов двух точек, определенных радиус-векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 равна:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{\infty}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\infty}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Понятие разности потенциалов применимо только к двум разным точкам поля.

Потенциал и разность потенциалов – энергетические характеристики электрического поля. Они являются скалярными величинами и могут быть положительными или отрицательными по знаку. Необходимо отметить, что физическим смыслом обладает только разность потенциалов, так как она отражает работу перемещения заряда, исполненную силами поля. Говоря о потенциале в данной точке поля, всегда подразумевается разность потенциалов. В этом случае в расчет принимается тот факт, что положение одной точки заранее известно, а другая точка находится в бесконечности, так как потенциал может быть определен однозначно только по отношению к некоторому уровню, принятому за ноль. Потенциал бесконечности условно равен нулю.

Выбор положения точек с нулевым потенциалом не влияет на значение разности потенциалов. Этот выбор осуществляется в зависимости от поставленной задачи. При решении некоторых задач разумно выбрать за ноль электрический потенциал Земли, но не удаленной точки.

ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Электростатическое поле можно представить графически не только силовыми линиями напряженности, а также при помощи эквипотенциальных поверхностей – геометрических мест точек одинакового потенциала. Эквипотенциальная поверхность в пересечении с плоскостью дает эквипотенциальную линию. Эквипотенциальные линии полей, созданных положительным и отрицательным точечными зарядами, представлены окружностями на рис. 19. Эквипотенциальные линии – концентрические окружности, эквипотенциальные поверхности – концентрические сферы для полей, потенциал которых описывается формулой $\varphi = Q/4\pi\epsilon_0 r$. На рисунках показано, что линии напряженности (радиальные лучи) перпендикулярны эквипотенциальным линиям (концентрическим окружностям). Докажем, что линии напряженности всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Вычислим работу перемещения заряда на эквипотенциальной

поверхности от точки 1 до точки 2 (рис. 20). Так как $\varphi_1 = \varphi_2$, то $A = Q (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$. С другой стороны $A = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F dr \cos \alpha$. Следовательно, интеграл $\int_{r_1}^{r_2} F dr \cos \alpha$ равен нулю. Это приемлемо для произвольной траектории между двумя точками в одном единственном случае, когда $\cos \alpha = 0$, т.е. $\alpha = 90^\circ$, что доказывает начальное утверждение о взаимной ортогональности силовых линий и эквипотенциальных поверхностей во всех электростатических полях.

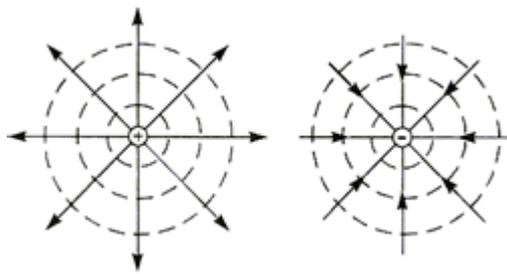


Рис. 19

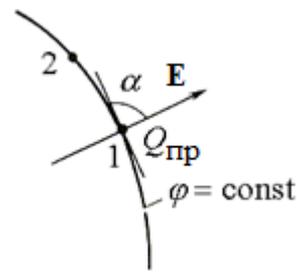


Рис. 20

НАПРЯЖЕННОСТЬ КАК ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛА

Электрическое поле характеризуется двумя физическими величинами: силовой (напряженность \mathbf{E}) и энергетической (потенциал φ). Напряженность и потенциал – разные характеристики одного и того же поля в данной точке. Следовательно, между ними должна быть определенная связь. Рассмотрим две точки с координатами (x, y, z) и $(x + \Delta x, y, z)$ между которыми перемещается заряд Q . Элементарная работа, которую надо совершить силам поля, равна: $dA = -Q d\varphi = -Q \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx$. Кроме того, прямой расчет работы

перемещения данного заряда на том же пути приводит к выражению

$$dA = \int_x^{x+dx} Q E_x dx = Q E_x dx, \text{ где } E_x \text{ – проекция вектора напряженности на ось}$$

Ox. Из правых частей этих выражений получим связь напряженности и

$$\text{потенциала вдоль направления Ox: } E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

В силу изотропии свободного пространства для других направлений можно написать подобные уравнения:

$$E_y = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ и } E_z = - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Вектор электрического поля перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям. Так как в нерелятивистской физике свойства материи не зависят от выбора системы отсчета, часто полезно менять систему отсчета с тем, чтобы изучение физического явления было более удобным. В данном случае, удобно заменить координатные направления, привязанные к осям x, y, z

и z , системой координат, связанной с эквипотенциальными поверхностями, в которой одна из осей координат перпендикулярна к эквипотенциальным поверхностям во всех точках поля (рис. 21). Эта ось называется нормалью, и единичный вектор нормали обозначается \mathbf{n} . В результате преобразования систем отсчета, мы получаем прямую связь между вектором поля и потенциалом:

$$\mathbf{E} \equiv E\mathbf{n} = -\frac{d\varphi}{dn}.$$

Эта связь формулируется следующим образом: вектор напряженности равен по модулю первой производной потенциала по нормали к эквипотенциальной поверхности. Напряженность направлена в сторону убыли потенциала. Так как первая производная всегда характеризует скорость, то $\frac{d\varphi}{dn}$ – это скорость вариации потенциала вдоль нормали. В согласии с понятием напряженности, потенциал поля может только убывать вдоль вектора нормали. Следовательно, быстрота убыли потенциала на единицу расстояния, измеряемого вдоль нормали, равна напряженности.

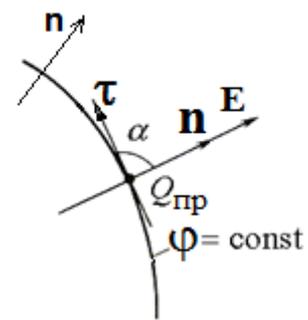


Рис. 21

Величина $\frac{d\varphi}{dn}$ называется градиентом потенциала, обозначается $\text{grad } \varphi$ (или $\nabla\varphi$) и произносится: “градиент фи” (или “набла фи”). Поэтому выражение $\mathbf{E} = -\frac{d\varphi}{dn}$ принимает вид:

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi.$$

Тогда следует утверждение: вектор напряженности \mathbf{E} равен градиенту потенциала φ и направлен в сторону убыли потенциал.

С точки зрения математики градиент – это дифференциальный векторный оператор набла ∇ . В прямоугольной системе координат, он записывается так же, как дивергенция и ротор:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

В данном случае он действует на скалярную величину. В нашем случае этой величиной является потенциал электростатического поля:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Эта формула позволяет нам вычислить напряженность поля при известном распределении потенциала в пространстве.

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА

Подставляя уравнение связи напряжённости с потенциалом

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \text{ (или } \mathbf{E} = -\nabla \varphi \text{)}$$

в выражение дифференциальной формы теоремы Гаусса-Остроградского

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \text{ (или } \nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \text{),}$$

получим уравнение Пуассона для электростатического поля (Siméon Denis Poisson, французский математик и политический деятель, 1781-1840):

$$\text{div } -\text{grad } \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad \left(\text{или } \nabla -\nabla \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \right).$$

Оператор дивергенция градиента, примененный к скаляру, равноценно заменяется оператором Лапласа или, просто, лапласианом Δ (Pierre Simon Laplace, французский математик, физик и астроном, 1749 -1827):

$$\text{div grad } \varphi \equiv \Delta \varphi \text{ (или } \nabla \nabla \varphi \equiv \nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi \text{)}.$$



Simeon Denis Poisson



Pierre Simon Laplace

В декартовой системе координат лапласиан – это сумма трех частных производных второго порядка, представленная ниже:

$$\Delta = \nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Таким образом, запись уравнения Пуассона упрощается к виду:

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho.$$

Эта формула дает прямую связь между потенциалом и распределением зарядов. Следует отметить, что три уравнения:

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi \text{ и } \Delta \varphi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$

составляют основу теории потенциального поля.

ПРИМЕРЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

1. *Сфера*, равномерно заряженная с поверхностной плотностью σ , R_0 – радиус сферы. Выше было найдено, что такая сфера создает поле, для которого $E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, где Q – полный заряд сферы и $r_2 \geq R_0$. Тогда, разность

потенциалов в этом поле равна $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$.

Заменив $Q = 4\pi\sigma R_0^2$, находим $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma R_0^2}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$. Полагая $r_1 = R_0$ и r_2

$= \infty$, получаем потенциал заряженной сферы: $\varphi = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_0}$.

2. Поле длинного цилиндра, равномерно заряженного с поверхностной плотностью σ или линейной плотностью λ . Выше было найдено, что $E = \sigma R_0 / \epsilon_0 r = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$ ($r_2 \geq R_0$). Тогда для разности потенциалов между двумя точками, удаленными от поверхности цилиндра на расстоянии r_1 и r_2 имеем:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0 r} dr = \frac{\sigma R_0}{\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad \text{или} \quad \Delta\varphi = - \int_{r_2}^{r_1} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Потенциал точек такого поля не существует, т.к. $\ln r_2 \rightarrow \infty$ для $r_2 \rightarrow \infty$.

3. Поле бесконечно протяженной плоскости, равномерно заряженной с поверхностной плотностью σ . Напряженность поля всюду равна: $E = \sigma / 2\epsilon_0$. Для разности потенциалов между точками, расположенными на расстоянии x_1 и x_2 от плоскости получим:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_{x_2}^{x_1} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1)$$

4. Поле внутри двух параллельных бесконечно протяженных плоскостей, заряженных противоположным электричеством. Напряженность поля в пространстве между этими плоскостями была определена как: $E = \sigma / \epsilon_0$. Тогда, разность потенциалов между плоскостями равна:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = - \int_l^0 \frac{\sigma}{\epsilon_0} dx = \frac{\sigma l}{\epsilon_0},$$

где l – расстояние между плоскостями.

II. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Диэлектрики представляют обширный класс веществ, важных в практическом применении. К диэлектрикам (или изоляторам) относят вещества, которые не проводят электрический ток. Диэлектрики могут находиться в трех агрегатных состояниях: газовом (азот, водород), жидком (спирт, масло) и твёрдом (янтарь, фарфор, кварц, парафин).

В идеальном диэлектрике свободные заряды отсутствуют. Электроны связаны с ядрами атомов и, чтобы нарушить эту связь, требуется воздействие сильных активаторов. Оценим напряженность кулоновского электрического поля внутри атома. Эта напряженность на расстоянии порядка 10^{-10} м от атома составляет:

$$E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad E = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-20}} \approx 10^{11} \text{ В/м.}$$

Эта величина почти в 10000 раз больше напряженности электрического поля, которая достигается в настоящее время в технике. Однако, вопреки такому большому количественному отличию, диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле, и само поле претерпевают существенные изменения, которые объясняются атомно-молекулярной структурой диэлектрика. Любая молекула или изолированный атом представляет собой систему, полный заряд которой равен нулю. Как об этом уже было сказано, размеры молекулы – более 10^{-10} м. Поведение молекулы во внешнем электрическом поле эквивалентно поведению диполя. Положительный заряд такого диполя, равный полному заряду ядер, помещен в центре распределения положительных зарядов; отрицательный заряд равен полному заряду электронов и оказывается в центре распределения отрицательных зарядов. С точки зрения поведения в электрическом поле все диэлектрики классифицированы и при грубом подходе разбиты на три группы.

1. *Нейтральные (не полярные) диэлектрики.* Молекулы таких диэлектриков имеют симметричную структуру (центры размещения положительных и отрицательных зарядов совпадают при отсутствии внешнего электрического поля) и не обладают собственным постоянным дипольным моментом. Примеры: бензол, парафин, полиэтилен, водород, кислород, азот, неон.

2. *Полярные диэлектрики.* Молекулы имеют асимметричную структуру (центры размещения положительных и отрицательных зарядов не совпадают при отсутствии внешнего электрического поля) и представляют собой жесткие диполи. Оценим величину собственного постоянного дипольного момента полярной молекулы по формуле $p \approx Ql$: $p \approx 10^{-19} \cdot 10^{-10} = 10^{-29}$ Кл·м. В отсутствии внешнего поля дипольные моменты ориентированы произвольно (беспорядочно) и результирующий дипольный момент всех молекул ничтожно мал: $\sum_i p_i = 0$. К таким диэлектрикам относятся вода, фенол, нитробензол.

3. *Кристаллические диэлектрики*, имеющие ионную структуру, – слабо полярные диэлектрики. К таковым относятся поваренная соль NaCl, хлористый калий KCl, нашатырь NH₄Cl, иодат цезия CsJ.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле совершается процесс электрической поляризации диэлектрика, сопровождающийся возникновением отличного от нуля электрического дипольного момента в некотором объеме вещества, – диэлектрик поляризуется.

Типы поляризации:

1. *Электронная поляризация*. Если неполярная (так же как и полярная) молекула помещается во внешнее электрическое поле E_0 (рис. 19a), под воздействием электрического поля электроны смещаются и молекула приобретает дипольный момент p_i (рис. 19b). Это происходит почти мгновенно, в течение времени порядка 10^{-15} с.

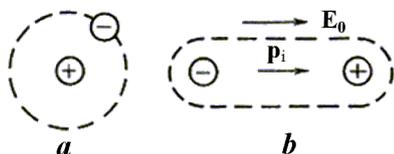


Рис. 19

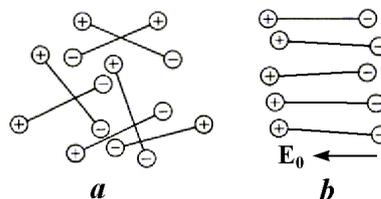


Рис. 20

3. *Ионная поляризация*. Если кристаллический диэлектрик как, например, NaCl и CsCl, имеющий кристаллическую ионную решетку, в узлах которой последовательно чередуются положительные и отрицательные ионы, поместить во внешнее электрическое поле E_0 , то происходит смещение решетки, составленной из положительных ионов вдоль поля, в то время как все отрицательные ионы смещаются против поля. Это происходит в течение интервала времени порядка 10^{-13} с.

2. *Дипольная, ориентационная, релаксационная поляризация*. Жесткие диполи полярного диэлектрика, первоначально находившиеся в состоянии беспорядка (рис. 20a), при наличии внешнего поля E_0 стремятся повернуться по направлению действия электрических сил (рис. 20b). Это происходит в течение интервала времени порядка 10^{-10} с.

ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

Степень поляризации диэлектрика характеризуется векторной величиной P , названной вектором поляризации или, просто, поляризация, которая равна векторной сумме молекулярных дипольных моментов заключенных в

единице объема вещества: $P = \frac{1}{V} \sum_i p_i$, где p_i - дипольный момент i -той

молекулы. В изотропном диэлектрике, поляризация в слабых полях пропорциональна напряженности внутреннего поля: $P = \alpha \epsilon_0 E$, где α - диэлектрическая восприимчивость вещества. Диэлектрическая

восприимчивость данного вещества зависит от ее структуры и от температуры, она – безразмерная величина.

ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Вектор поляризации изотропного вещества направлен вдоль действующего внешнего электрического поля. Вследствие поляризации, концевые точки молекулярных диполей на двух противоположных гранях диэлектрика не будут компенсированы соседними диполями, как это происходит внутри диэлектрика (рис. 21). Это приводит к тому, что на одной поверхности будут сконцентрированы положительные заряды, а на другой – отрицательные (рис. 22). Эти электрические заряды называются индуцированными поверхностными связанными зарядами σ' , так как они принадлежат молекулам диэлектрика и не могут быть удалены с его поверхностей. Возрастание напряженности внешнего поля сопровождается увеличением степени ориентированности молекулярных дипольных моментов. Следовательно, плотность поверхностных связанных зарядов σ' увеличивается, и она также может быть использована для характеристики степени поляризации диэлектрика.

Установим связь между величинами \mathbf{P} и σ' . Рассмотрим поведение плоскопараллельной пластины однородного изотропного диэлектрика, помещенного в однородное внешнее электрическое поле (рис. 23). Возьмем элемент объема в форме цилиндра с площадью основания dS , образующая которой параллельна напряженности внешнего поля. Вектор, перпендикулярный поверхности диэлектрика (нормаль), составляет угол α по отношению к вектору напряженности внешнего поля. Объем этого цилиндра равен $dV = l \cdot dS \cdot \cos\alpha$, модуль дипольного момента диэлектрика рассчитывается по формуле $p = PdV = Pl dS \cos\alpha$ или $p = \sigma' l dS$. То есть, поверхностная плотность σ' равна модулю проекции вектора поляризации на внешнюю нормаль к поверхности диэлектрика $\sigma' = P \cos\alpha = P_n$. Принимая во внимание, что $\mathbf{P} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}$, имеем $\sigma' = \epsilon \epsilon_0 E_n$.

Явление поляризации, индуцирующее связанные поверхностные заряды диэлектрика, порождает добавочное внутреннее электрическое поле. Напряженность индуцированного электрического поля, созданного связанными зарядами, направлен против напряженности внешнего поля, поляризующего диэлектрик. Тогда, результирующий вектор напряженности полного поля внутри диэлектрика \mathbf{E} равен $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'$. Таким образом, вектор напряженности поля в диэлектрике \mathbf{E} , характеристика полного поля, состоит из напряженности \mathbf{E}_0 , созданного системой свободных зарядов, и напряженности \mathbf{E}' , созданной системой связанных зарядов. Напряженность полного поля зависит от электрических свойств среды.

Вычислим напряженность поля \mathbf{E}' как напряженность поля, созданного между двумя плоскостями, заряженными противоположным по знаку электричеством с поверхностной плотностью σ' : $E' = \sigma' / \epsilon_0 = \epsilon \epsilon_0 E / \epsilon_0 = \epsilon E$ или в векторной форме $\mathbf{E}' = - \epsilon \mathbf{E}$. Поле, индуцированное связанными

зарядами \mathbf{E}' , направлено против внешнего поля, но полное поле \mathbf{E} параллельно внешнему полю \mathbf{E}_0 . Следовательно, можем записать: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}' = \mathbf{E}_0 - \alpha\mathbf{E}$, откуда $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E} + \alpha\mathbf{E} = (1 + \alpha)\mathbf{E}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / (1 + \alpha)$. Заменяя $\epsilon = (1 + \alpha)$, где ϵ – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, получаем простую связь между напряженностями полей \mathbf{E} и \mathbf{E}_0 :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 / \epsilon \text{ или } \mathbf{E}_0 = \epsilon \mathbf{E}.$$

Физический смысл ϵ : диэлектрическая проницаемость среды указывает, во сколько раз напряженность поля в пустоте превосходит ее значение в диэлектрике. Эта величина – безразмерная, всегда положительная. Значения ϵ сильно меняются для разных веществ: для газа они оказываются в пределах 1,0002 - 1,0060; для неполярных жидкостей – 1,8 - 2,3; полярных жидкостей – 3 - 81; стекла – 3 - 20; разные кристаллы – 4 - 3000 и более.

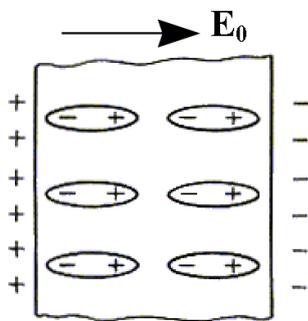


Рис. 21

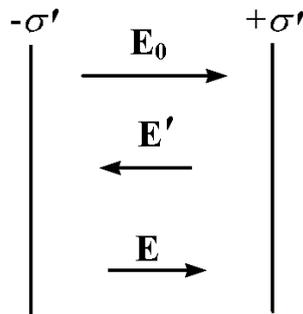


Рис. 22

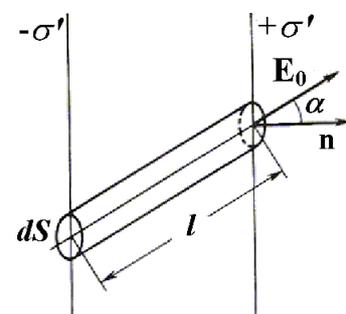


Рис. 23

ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ

Вычисление электрического поля \mathbf{E} в диэлектрике вызывает определенные затруднения, так как поляризация диэлектрика происходит под воздействием внешнего поля, приводящего к образованию индуцированного поля \mathbf{E}' связанных зарядов. Появляются новые силовые линии электрического поля \mathbf{E}' в диэлектрике, которые начинаются на положительных связанных зарядах одной поверхности и заканчиваются на отрицательных связанных зарядах другой поверхности.

На границе двух сред диэлектрическая проницаемость – различная, и напряженность поля претерпевает скачок. Например, пусть дана граница раздела пустоты $\epsilon = 1$ и масла $\epsilon = 3$. На этой границе напряженность поля, перпендикулярно направленная к поверхности раздела сред, уменьшается в три раза, одновременно во столько же раз уменьшается поток вектора напряженности при переходе из пустоты в диэлектрик. Такое резкое изменение вектора напряженности электрического поля на границе двух сред создает некоторые затруднения при вычислении полей, поэтому вводится понятие вектора электрического смещения по формуле: $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E}$.

Электрическое смещение, векторная величина и не зависит от свойств среды. Докажем это: $\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0(\epsilon\mathbf{E}) = \epsilon_0\mathbf{E}_0 = \mathbf{D}_0$. Таким образом, электрическое смещение внутри однородного изотропного диэлектрика \mathbf{D}

совпадает с внешним электрическим смещением \mathbf{D}_0 , определенным в вакууме. Согласно определению электрического смещения следует, что принцип суперпозиции полей также применим для поля вектора \mathbf{D} , как и для поля вектора \mathbf{E} .

Вектор смещения в данной точке поля, созданного системой электрических зарядов, равен векторной сумме векторов электрического смещения в этой точке, исходящих из каждого отдельного заряда $\mathbf{D} = \sum_i \mathbf{D}_i$. Поле вектора \mathbf{D} графически изображается линиями электрического смещения, так же как поле вектора \mathbf{E} – линиями напряженности. На границе двух диэлектриков, линии электрического смещения распространяются не прерываясь. Непрерывность линий смещения облегчает вычисление вектора \mathbf{D} для заданного распределения заряда.

Что касается вектора \mathbf{E} , теорема Гаусса-Остроградского применяется ограниченно только для поля, созданного в пустоте. На границе раздела двух сред (воздух - масло, например) наблюдается скачок вектора \mathbf{E} (рис. 24). Принимая во внимание, что $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$, электрическое смещение \mathbf{D} в каждой точке поля определено только величиной и расположением свободных зарядов и не зависит от свойств среды. Линии вектора \mathbf{D} везде непрерывны и не имеют разрыва в отличие от линий вектора \mathbf{E} .

Вместе с тем, как это уже было подчеркнуто выше, если вектор \mathbf{D} в какой-то точке задан, то всегда можно определить вектор \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} / \epsilon \epsilon_0, \text{ так как } \mathbf{D} = \epsilon \epsilon_0 \mathbf{E}.$$

Вычислим поток вектора электрического смещения поля, созданного зарядом Q через сферическую поверхность радиуса R :

$$\Phi_D = \oiint \mathbf{D} dS = \oiint \frac{Q}{4\pi R^2} dS = Q.$$

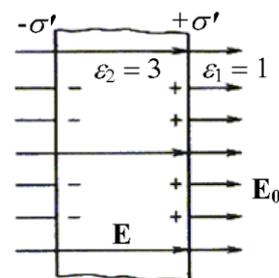


Рис. 24

Если электрическое поле создано системой зарядов в диэлектрике, теорема Гаусса-Остроградского произносится следующим образом: *поток вектора электрического смещения через замкнутую произвольную поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности.*

СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Сегнетоэлектрики – группа кристаллических диэлектриков, у которых есть спонтанная ориентация дипольных моментов молекул в отсутствие внешнего электрического поля. Сегнетоэлектрики состоят из ансамбля областей (доменов) поляризованных в разных направлениях. Примеры сегнетоэлектриков: сегнетова соль ($\text{NaKC}_4\text{H}_4\text{O}_6 \cdot 4\text{H}_2\text{O}$), дигидрофосфат калия (KH_2PO_4), титанат бария (BaTiO_3) и др..

Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика внезапно возрастает в некотором интервале температур, и она – функция напряженности поля. Спонтанная поляризация существует в интервале температур, ограниченных

двумя точками Кюри Θ . (Pierre Curie, французский физик, 1859-1906. Нобелевский лауреат по физике, 1903). Для сегнетовой соли $\Theta_1 = 255 \text{ K}$ и $\Theta_2 = 297 \text{ K}$.

Наличие верхней точки Кюри Θ_2 обязательно для всех представителей этого типа вещества. При $T > \Theta_2$ тепловое движение атомов нарушает спонтанную ориентацию дипольных моментов внутри доменов. Около точки Кюри наблюдается внезапное увеличение удельной теплоемкости, которое указывает на наличие фазового преобразования второго порядка в этой точке. Для сегнетоэлектриков закон пропорциональности $\mathbf{P} = \alpha \epsilon_0 \mathbf{E}$ неприемлем: связь между векторами поляризации \mathbf{P} и напряженности \mathbf{E} – нелинейная и зависит от предыстории значения \mathbf{E} . В сегнетоэлектриках наблюдается явление диэлектрического гистерезиса (рис. 25).



Curie Pierre

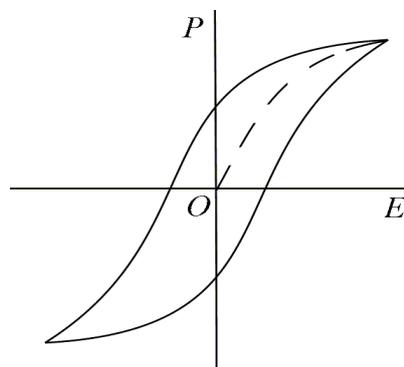
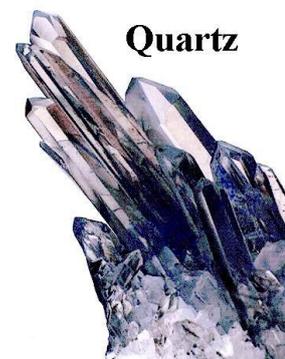


Рис. 25



Quartz

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВО

Появление поверхностных электрических зарядов на кристалле кварца при его деформации было названо пьезоэлектрическим эффектом. Если пьезокристалл поместить в электрическое поле, то в кристалле появляются упругие напряжения, следовательно, кристалл деформируется (обратный эффект). Пьезоэлектрический эффект (особенно в кварце) носит обратимый характер, позволяющий преобразовать силовое воздействие в разность потенциалов, и обратно.

Причина эффекта – смещение электрического и механического равновесия в кристалле под влиянием внешнего возмущения. В отсутствии внешнего влияния диэлектрический кристалл не поляризован. При приложении электрического поля происходит деформация электронных оболочек и относительное смещение атомов и ионов в структуре кристалла, что приводит к макроскопической деформации образца. Если такой кристалл подвергнуть внешнему механическому воздействию, то относительные смещения элементов структуры вызывают электронную и ионную поляризацию, что приводит к появлению связанных зарядов, индуцированных на противоположных гранях кристалла. Пьезоэлектрическая поляризация появляется только у кристаллов, не имеющих структурного центра симметрии и обладающих полярными геометрическими направлениями.

Пьезоэлектрические материалы, чаще всего применяемые, – это кварц SiO_2 , дигидрофосфат аммония $(\text{NH}_4)\text{H}_2\text{PO}_4$, сегнетова соль, титанат бария, пьезокерамика и т.д. Кварц – натуральный минерал, обладающий механическим сопротивлением, сопротивлением к влажности и большой тепловой устойчивостью свойств. К недостаткам кварца следует отнести трудность обработки и относительно слабый пьезоэлектрический эффект. Дигидрофосфат аммония – кристалл, выращенный искусственно, обладает хорошим пьезоэлектрическим эффектом, однако у него нет достаточного механического сопротивления.

Промышленный наиболее используемый пьезоэлектрический материал – пьезокерамика, обладающая большой механической жесткостью, сильным пьезоэлектрическим эффектом, простотой изготовления и невысокой стоимостью. В процессе изготовления пьезокерамики сырье растирают до тонкодисперсного состояния и жарят в печах при температуре 1300 - 1400 °С. Затем он поляризуется посредством серебряных неподвижных электродов в постоянном электрическом поле напряженности 1 – 2 кВ/мм при одновременном увеличении температуры до точки Кюри. Состав пьезокерамики отличается большим разнообразием.

Пьезоэлектрические кристаллы широко используются в качестве электромеханических преобразователей; стабилизаторов и фильтров радиотехнических частот, пьезоэлектрических манометрах, передатчиках и приемниках ультразвуковых колебаний, пьезометрах, звукоснимателях и т.д. Главной частью этих аппаратов является преобразователь, который, составлен из одного или нескольких пьезоэлектрических элементов. В зависимости от технического предназначения пьезоэлектрические элементы могут быть связаны с разными механическими устройствами: мембраны, резонаторы, громкоговорители и т.д.

ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проводниками называются тела, в которых имеются свободные заряды, т.е. заряды способные перемещаться под воздействием бесконечно малой силы. Носители заряда в металлических проводниках – свободные электроны, число которых очень велико: их концентрация – порядка 10^{28} м^{-3} . Поэтому, чтобы иметь состояние равновесия зарядов в проводнике, требуются выполнение следующих условий:

1) напряженность поля везде внутри проводника должна быть равной нулю ($E = 0$), т.е. потенциал внутри проводника $\varphi = \text{Const}$;

2) напряженность поля в каждой точке на поверхности проводника должны быть направлена по нормали к поверхности ($E = E_n$). Следовательно, поверхность проводника эквипотенциальна.

В соответствии с условиями 1 и 2 проводник в целом – эквипотенциальное тело: $\varphi = \text{Const}$ в любой точке проводника при равновесии зарядов.

Если внести заряд Q в проводник, он будет распределен так, что ни в каком месте внутри проводника не будут присутствовать избыточные заряды. Они будут распределены на поверхности проводника с некоторой

поверхностной плотностью σ . Избыточный заряд будет распределен по полю проводнику так же как в сплошном теле – на внешней поверхности.

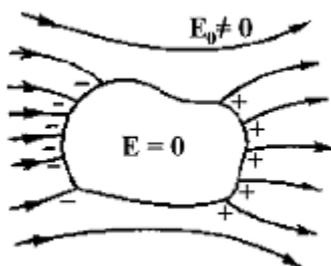


Рис. 26

Если приложить электрическое поле к незаряженному проводнику, носители заряда придут в движение: положительные – по направлению поля, отрицательные – в обратном направлении. Из этого следует, что заряды противоположного знака расположатся на двух противоположных поверхностях проводника. Эти заряды называются индуцированными поверхностными свободными зарядами. Поле, созданное этими зарядами, направлено против внешнего поля. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю. Линии напряженности снаружи проводника перпендикулярны поверхности (рис. 26). Таким образом, нейтральный проводник, внесенный в электрическом поле, разрывает линии напряженности на поверхности. Индуцированные заряды снова расположились на внешней поверхности проводника. Если внутри проводника есть полость, то напряженность поля в этой полости равна нулю при равновесном распределении индуцированных зарядов. Индуцированные заряды исчезают, когда проводник выносят из электрического поля.

Заряд Q , сообщенный проводнику, распределяется на поверхности таким образом, что напряженность поля внутри проводника равна нулю. Потенциал проводника принимает некоторое значение. Если такой же заряд Q сообщить этому проводником в другой раз, он будет распределен таким же образом на поверхности проводника. Потенциал проводника принимает некоторое другое значение. Опытным путем установлено, что потенциал проводника пропорционален заряду, размещенному на нем:

$$\varphi = Q / C,$$

где величина C называется электроемкостью проводника. Из этой формулы следует расчетная формула ёмкости уединенного проводника:

$$C = Q / \varphi.$$

Емкость проводника (или системы проводников) – физическая величина, характеризующая способность проводника (или системы проводников) накапливать электрические заряды. Физический смысл емкости получим, приравняв потенциал проводника 1 вольту. Емкость – это заряд, сообщенный проводнику, при котором потенциал становится равным единице (1 В).

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРОЕМКОСТИ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА.

Електроємкiсть iзолюваного провiдника сферическої форми. При допомiгi формули зв'язу между потенціалом и напруженнiстю получим зв'язь потенціала с зарядом:

$$\varphi = \int_R^{\infty} E dr = \int_R^{\infty} \frac{Q dr}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \Big|_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R},$$

где R - радиус сферы. По формуле $C = Q / \varphi$ мы имеем:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R.$$

Этим результатом подтверждается экспериментальный факт зависимости электроємкiсть iзолюваного провiдника от его геометрических размеров и диэлектрической проницаемости среды.

Електроємкiсть провiдника зависит от расположения соседних проводников. Практический интерес представляет устройство, предназначенное для накопления заряда – конденсатор. Простейший конденсатор представляет собой систему, состоящую из двух близко расположенных проводников: проводящие пластины, отделенные тонким диэлектриком. В этом случае электроємкiсть зависит от геометрии конденсатора и диэлектрических свойств среды, заполняющей промежуток между пластинами.

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЁМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ

В соответствии с геометрической формой различаются плоские, цилиндрические, сферические и многослойные конденсаторы.

1. Плоский конденсатор (рис. 27а):

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\sigma/\epsilon\epsilon_0 d} = \frac{Q}{Q/S/\epsilon\epsilon_0 d} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d},$$

где S – площадь поверхности пластины конденсатора, d – расстояние между пластинами, ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей промежуток между пластинами.

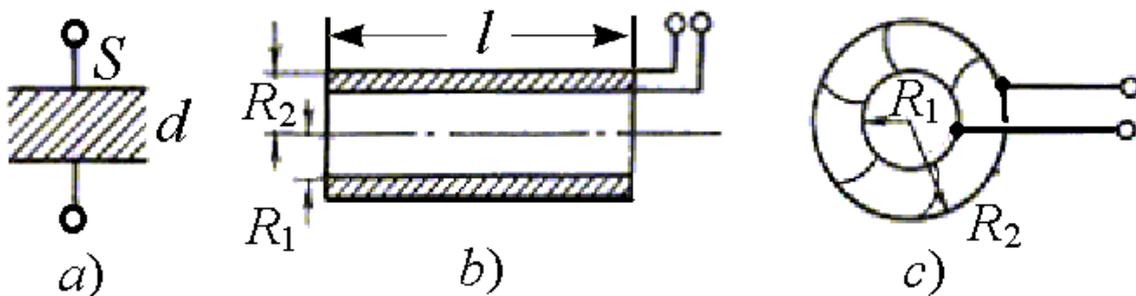


Рис. 27

2. Цилиндрический, трубчатый конденсатор (рис. 27b):

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{\lambda}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{Q}{\frac{Q/l}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln R_2 - \ln R_1},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей полость между двумя цилиндрическими проводящими пластинами, R_1 и R_2 – внутренний и внешний радиусы цилиндрических пластин ($R_2 > R_1$), l – длина конденсатора.

3. Сферический конденсатор (рис. 27c):

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

где R_1 и R_2 – радиусы сфер ($R_2 > R_1$).

4. Плоский многослойный конденсатор:

$$C = \frac{Q}{\Delta\varphi} = \frac{\epsilon_0 S}{d_1/\epsilon_1 + d_2/\epsilon_2 + d_3/\epsilon_3 + \dots},$$

где $\epsilon_1, d_1; \epsilon_2, d_2$ и ϵ_3, d_3 – проницаемость и толщина последовательных диэлектрических слоев многослойного конденсатора.

СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ

Промышленностью производятся конденсаторы, емкости которых имеют строго установленные стандартные значения. Чтобы получить электроемкости необходимого значения, конденсаторы соединяются в батареи.

При *параллельном* соединении конденсаторов (рис. 28) потенциал короткозамкнутых обкладок различных конденсаторов – одинаковый: $\varphi_{C1} = \varphi_{C2} = \varphi_{C3}$ и полный заряд батареи равен сумме зарядов отдельных конденсаторов: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, в то время как $Q_1 = \varphi_{C1} \cdot C_1$, $Q_2 = \varphi_{C2} \cdot C_2$, $Q_3 = \varphi_{C3} \cdot C_3$. Следовательно, $Q = \varphi_{C1} \cdot C_1 + \varphi_{C2} \cdot C_2 + \varphi_{C3} \cdot C_3 = \varphi_{C1} (C_1 + C_2 + C_3)$, откуда $C = Q/\varphi_{C1} = C_1 + C_2 + C_3$. Вывод: электроемкость батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме всех соединенных емкостей:

$$C = C_1 + C_2 + C_3.$$

При *последовательном* соединении конденсаторов (рис. 29) заряд батареи равен заряду каждого конденсатора: $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$, а результирующий потенциал равен сумме индивидуальных потенциалов:

$$\varphi_C = \varphi_{C1} + \varphi_{C2} + \varphi_{C3} = Q_1 / C_1 + Q_2 / C_2 + Q_3 / C_3 = Q / C,$$

откуда:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \text{ или } C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1} + C_3^{-1}.$$

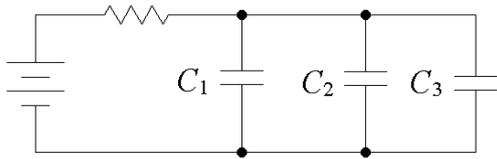


Рис. 28

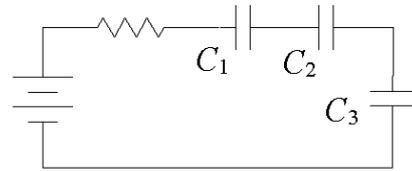


Рис. 29

Вывод: при последовательном соединении конденсаторов обратная величина емкости результирующего конденсатора равна сумме обратных величин емкостей присоединенных конденсаторов.

ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ СИСТЕМЫ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ.

Даны два заряда Q_1 и Q_2 . Они находятся на расстоянии r один от другого. Каждый из этих зарядов под действием поля другого заряда обладает потенциальной энергией: $W_1 = Q_1\phi_{12}$ и $W_2 = Q_2\phi_{21}$, где ϕ_{12} и ϕ_{21} - соответственно потенциалы поля заряда Q_2 на месте заряда Q_1 и заряда Q_1 на месте заряда Q_2 . Выражения потенциалов, соответствующие этим полям, следующие: $\phi_{12} = Q_2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ и $\phi_{21} = Q_1 / 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$. Следовательно, $W_1 = W_2 = Q_1 Q_2 / 4\pi\epsilon\epsilon_0 r$ или $W_1 = W_2 = W = (W_1 + W_2) / 2 = (Q_1\phi_{12} + Q_2\phi_{21}) / 2$.

Таким образом, энергия электрического поля системы, состоящей из N точечных зарядов, равна:

$$W = (Q_1\phi_1 + Q_2\phi_2 + Q_3\phi_3 + \dots + Q_{i-1}\phi_{i-1} + Q_{i+1}\phi_{i+1} + \dots) / 2 \text{ или } W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i,$$

где ϕ_i – потенциал поля, созданного всеми зарядами, за исключением поля заряда Q_i в точке, где находится заряд Q_i .

2. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ИЗОЛИРОВАННОГО ПРОВОДНИКА. Рассматриваем проводник как систему точечных зарядов. Применяем последнюю формулу, полагая, что для проводника $\phi_i = \phi = \text{Const}$. Следовательно,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i = \frac{1}{2} \phi_i \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{1}{2} \phi \sum_{i=1}^n Q_i = \frac{1}{2} Q \phi.$$

Другие равнозначные формулы энергии изолированного проводника:

$$W = \frac{1}{2} Q \phi = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \phi^2,$$

где Q – заряд проводника, C – его ёмкость, и ϕ – его потенциал.

3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ ЗАРЯЖЕННОГО КОНДЕНСАТОРА. В самом простом случае заряженный конденсатор – это система двух проводников, несущих одинаковые по модулю, но противоположные по знаку заряды. Тогда, полная

энергия конденсатора равна сумме потенциальной энергии изолированных проводников W_1 и W_2 и энергии их взаимодействия W_{12} :

$$W = W_1 + W_2 + W_{12}.$$

В силу начальных условий имеем, что $W_1 = -W_2$. Следовательно, полная энергия конденсатора – это энергия взаимодействия между заряженными пластинами: $W = W_{12}$. Вычислим эту энергию по модулю как работу переноса заряда $-Q$ в поле заряда $+Q$ на расстояние между пластинами конденсатора d :

$$W = A = \int_0^d F_{12} dx = \int_0^d QE_1 dx = QE_1 \int_0^d dx =$$

$$QE_1 d = Q\varphi_1 = |Q\varphi_2| = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta\varphi.$$

Здесь $\Delta\varphi$ – разность потенциалов между пластинами конденсатора. Заменяя $\Delta\varphi = U$, получим следующие результирующие выражения:

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C \cdot U^2.$$

которые справедливы для любой формы конденсатора.

ОБЪЁМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Физическая величина, значение которой равно потенциальной энергии поля в единице объема, называется объёмной плотностью энергии. Для однородного поля объёмная плотность энергии: $w = W / V$. Для плоского конденсатора с площадью пластин S и толщиной зазора d имеем:

$$w = W/Sd = CU^2/2Sd = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} Ed^2/2Sd = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2.$$

С учетом связи между электрическим смещением и напряженностью $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$ мы можем выразить также эту плотность как:

$$w = ED/2 \quad \text{или} \quad w = D^2/2\varepsilon\varepsilon_0.$$

Заметим, что выражение $w = ED/2$ наиболее общее. Оно приемлемо для всех электростатических полей в любой изотропной среде. Заменяя смещение и напряженность вектором смещения \mathbf{D} и вектором напряженности \mathbf{E} , получим формулу энергии для всех сред, включая и анизотропную среду:

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E}\mathbf{D} = \frac{1}{2} ED \cos \alpha,$$

где α угол между вектором смещения \mathbf{D} и вектором напряженности \mathbf{E} в анизотропной среде (например, в кристалле некубической сингонии).

Основываясь на таком результате, мы можем найти полную энергию поля интегрированием по объему тела:

$$W = \iiint_V w dV = \iiint_V \frac{1}{2} \mathbf{E}\mathbf{D} dV = \iiint_V \frac{1}{2} ED \cos \alpha dV.$$

III. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Любое упорядоченное движение электрических зарядов называется электрическим током. Ток может течь в твердых телах, жидкостях, газе и вакууме. Если среда – проводник с большим количеством свободных электронов, электрический ток осуществляется благодаря дрейфу этих электронов. Различают ток проводимости и конвективный ток. Дрейф электронов в проводниках, не связанных с движением вещества, называется током проводимости. К токам проводимости относится упорядоченное движение электронов в металлах, ионов в электролитах, электронов и дырок в полупроводниках, ионов и электронов в газах.

Упорядоченное перемещение электрических зарядов, связанное со смещением заряженных тел в пространстве, называется конвективным током. За положительное направление тока принято считать направление дрейфа положительных зарядов. Электроны проводимости (и анионы) перемещаются в направлении, обратном направлению тока.

Количественной характеристикой электрического тока является сила тока I и плотность тока j . Сила тока – скалярная величина, равная количеству электричества, перенесенного через данное сечение проводника за единицу времени (1 с). Численно она равна отношению количества электричества dQ , перенесенного через данное сечение проводника в интервале времени dt , к этому интервалу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Постоянным электрическим током называется ток, у которого величина и направление не изменяются со временем. Следовательно, для постоянного тока имеем:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Q}{t}.$$

Плотность тока – векторная физическая величина, характеризующая силу тока, который протекает через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно направлению движения зарядов. Его модуль равен отношению силы тока dI к площади поперечного сечения проводника dS :

$$j = \frac{dI}{dS}.$$

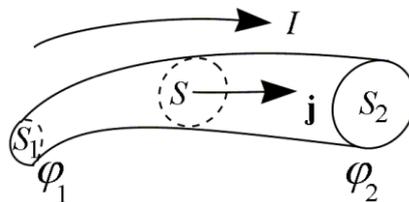


Рис. 30

Вектор j ориентирован в направлении силы тока (рис. 30), т.е., он совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов. Плотность тока обратно пропорциональна сечению проводника при

включении проводников различного поперечного сечения в контуре постоянного тока. Плотность тока, будучи функцией координат: $\mathbf{j} = \mathbf{j}(r)$, характеризует распределение электрического тока по сечению проводника.

Найдем зависимость плотности тока от скорости движения свободных электронов и их концентрации в металлических проводниках. Для этого выделим поверхность единичного сечения ($S = 1 \text{ м}^2$) внутри проводника, расположенную перпендикулярно направлению средней скорости движения зарядов. Построим цилиндр на этой поверхности, взятой в качестве основания. Высоту цилиндра возьмем, равной средней скорости движения зарядов: $\langle v \rangle$. Тогда число электронов, которые проходят через единичную поверхность в единицу времени (1 с), равно числу электронов, содержащихся внутри этого цилиндра. Пусть n – число электронов проводимости в единице объёма (концентрация свободных электронов), тогда произведение $N \cdot \langle v \rangle$ – число электронов проводимости внутри цилиндра, и, наконец, $n \cdot e \cdot \langle v \rangle$ – перенесенный заряд (e – заряд электрона). Следовательно, модуль плотности тока может быть вычислен по формуле:

$$j = n \cdot e \cdot \langle v \rangle.$$

Таким образом, плотность тока в проводнике пропорциональна концентрации свободных электронов и скорости их движения. Отметим особое свойство металлов: для данного металла концентрация свободных электронов практически постоянна и она не зависит от температуры.

При помощи формулы $j = n \cdot e \cdot \langle v \rangle$ мы можем определить среднюю скорость упорядоченного движения электронов в проводнике (скорость дрейфа):

$$\langle v \rangle = \frac{j}{n e}.$$

Например, для плотности тока $j = 10^7 \text{ А/м}^2$ в меди ($n = 8,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$)

3) скорость дрейфа свободных электронов равна:

$$\langle v \rangle = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,5 \cdot 10^{28}} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}.$$

Средняя скорость теплового движения электронов $\langle u \rangle = \sqrt{8kT / (\pi m_e)}$ при температуре окружающей среды $T = 300 \text{ К}$ составляет около 10^5 м/с . Сравнивая это значение со скоростью дрейфа, видим, что скорость дрейфа электронов гораздо меньше скорости их теплового движения.

Следует различать скорость дрейфа электронов и скорость распространения электрического тока в металле. Когда говорим о скорости распространения тока, принимается в расчет скорость распространения электрического поля как причины, вызывающей дрейф электронов. Под воздействием источника тока все электроны начинают свое упорядоченное движение почти одновременно в металлических проводниках, так как скорость распространения электрического поля равна скорости света c . Время установления электрического тока в контуре длины l : $t = l/c$. Для контура длины $1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$ это время равно:

$$t = 10^3 / 3 \cdot 10^8 \approx 3,3 \cdot 10^{-4} \text{ с} = 0,33 \text{ мс}.$$

Плотность тока в электролитах:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ + \mathbf{j}^- = (Q^+ n^+ \mathbf{v}^+ + Q^- n^- \mathbf{v}^-),$$

где \mathbf{j}^+ и \mathbf{j}^- – векторы плотности тока, Q^+ и Q^- – заряды, n^+ и n^- – концентрации, \mathbf{v}^+ и \mathbf{v}^- – векторы скорости упорядоченного движения положительных и отрицательных ионов (катионов и анионов).

УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Заряд, который пересекает бесконечно малую поверхность, перпендикулярную вектору плотности тока внутри проводника в интервале времени dt равен: $dQ = j dS dt$. Если поверхность dS не перпендикулярна вектору \mathbf{j} , надо взять компонент плотности тока j_n перпендикулярный dS (рис. 31). Зная j_n в каждой точке проводника, можно найти силу тока:

$$I = \iint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \iint_S j_n dS = \iint_S j \cos \alpha dS,$$

где $d\mathbf{S}$ – вектор, соответствующий поверхности dS ($d\mathbf{S} = dS \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} – вектор нормали).

В соответствии с формулой $I = \iint_S \mathbf{j} d\mathbf{S}$ сила тока – поток вектора плотности тока через данную поверхность. Следовательно, как любой поток, сила тока I может принять положительные, отрицательные значения, а также быть равной нулю. Сила тока – положительная, если вектор плотности направлен так же как вектор внешней нормали к поверхности. В случае встречных направлений этих двух векторов сила тока – отрицательная.

Пусть внутри бесконечно протяженного проводника дана замкнутая произвольная поверхность S , внутри которой имеется конечное распределение положительных зарядов, а в окружающем пространстве зарядов нет. Для проводников такое состояние – не равновесное. В этом случае число положительных зарядов внутри выбранной поверхности будет убывать, что можно выразить неравенством (рис. 32): $\frac{dQ}{dt} < 0$. С течением времени заряды исчезнут внутри замкнутой поверхности. Следовательно, ток прекратится.

Возможен другой вариант: положительные заряды внутри замкнутой поверхности S отсутствуют, а снаружи они есть. Тогда положительные заряды будут самопроизвольно входить в объем. Из этого следует, что $\frac{dQ}{dt} > 0$. Это означает, что потенциал в этом объеме будет увеличиваться.

Однако, это увеличение не может продолжиться долго: оно может продолжиться до того момента, пока потенциалы по обе стороны от выделенной поверхности не сравняются. Из этих рассуждений можно сделать заключение: оба случая движения зарядов разрывные, и постоянного тока через замкнутую поверхность S не будет.

В отсутствии источника (или стока) в объеме V полный поток вектора плотности тока через замкнутую поверхность ничтожен. Чтобы иметь постоянный ток в проводнике, необходимым условием является наличие

зарядов, входящих с одной стороны замкнутой поверхности, и такого же числа зарядов, выходящих через другую сторону той же поверхности (рис. 33). Это описывается следующей формулой: $I = \oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt} = 0$ (Знак минус

здесь означает, что изменение заряда внутри замкнутой поверхности и сила тока через поверхность имеют различные знаки.) Так, если положительные заряды вытекают из данного объема, то $dQ/dt < 0$, но $I > 0$).

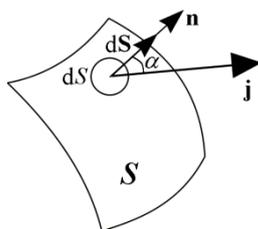


Рис. 31

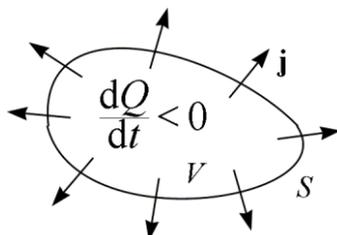


Рис. 32

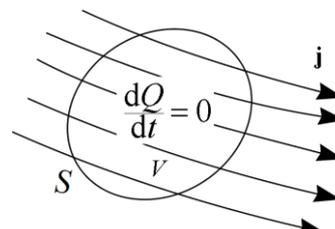


Рис. 33

С другой стороны, с учетом теоремы Остроградского-Гаусса из теории поля $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div } \mathbf{j} dV$ и выражения силы тока $I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$, где ρ объёмная плотность зарядов в объеме V окруженного поверхностью S , имеем:

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV \text{ или } \text{div } \mathbf{j} = -\frac{d}{dt} \rho.$$

Формула $\text{div } \mathbf{j} = -\frac{d}{dt} \rho$, обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка по отношению к координате и времени, названа уравнением непрерывности. Она выражает, так же как ее интегральная форма $\oint_S \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$, закон сохранения заряда: в точках пространства, где присутствует источник вектора \mathbf{j} , происходит убыль электрического заряда.

В случае существования постоянного тока, плотность заряда и другие электрические величины постоянны. Следовательно, уравнение непрерывности для постоянного тока упрощается к виду:

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \text{ (или } \nabla \mathbf{j} = 0).$$

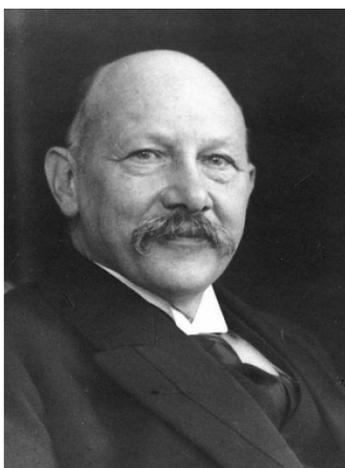
ЗАКОН ОМА. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Чтобы ток протекал по проводнику всегда (непрерывно, постоянно), для этого необходимо поддерживать постоянное электрическое поле. Рассмотрим однородный металлический проводник длины l (рис. 34). Пусть E определяет напряженность электрического поля внутри проводника и $U = \varphi_1 - \varphi_2$ — постоянную разность потенциалов на концах проводника. Тогда:

$$E = (\varphi_1 - \varphi_2) / l = U / l.$$



Ohm Georg Simon



Kamerlingh Onnes



Volta Alessandro

Ом (Ohm Georg Simon, немецкий физик, 1787-1854) открыл, что однозначная зависимость между силой тока в проводнике и разностью потенциалов, приложенных к концевым точкам, соответствует каждому проводнику, если физическое состояние проводника не изменяется со временем. Он установил опытным путём в 1826 году, что сила тока пропорциональна разности потенциалов в металлических проводниках: $I = GU$. Коэффициент пропорциональности G назван электрической проводимостью проводника и обратная величина $R = G^{-1}$ – его электрическим сопротивлением. Электрическое сопротивление – характеристика электрических свойств проводника, определяющая, в какой степени проводник препятствует упорядоченному движению носителей тока.

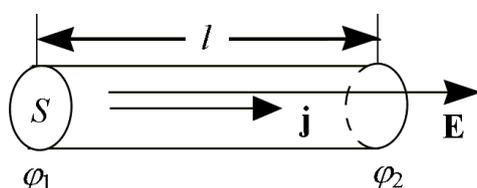


Рис. 34

Проводники, обладающие электрическим сопротивлением в цепях постоянного тока, называются резисторами. Неразветвленная электрическая цепь (составленная только из одного резистора) называется *однородной* электрической цепью. Приведем формулировку закона Ома для однородного участка электрической цепи: *сила тока пропорциональна разности потенциалов на концах участка цепи и обратно пропорциональна его сопротивлению*:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R} = \frac{U}{R}.$$

Элементарное объяснение механизму электрического сопротивления металлов дается в рамках классической физики как возникающее вследствие направленного движения свободных электронов (электрического тока) их столкновений с положительными ионами кристаллической решетки. Столкновения электронов с ионами становятся чаще с повышением

температуры, и сопротивление проводников увеличивается. Сопротивление проводников зависит также от материала проводника и кристаллической структуры решетки.

Для однородного цилиндрического проводника длины l и поперечного сечения S сопротивление определяется формулой: $R = \rho \frac{l}{S}$, где ρ – удельное сопротивление проводника (сопротивление однородного цилиндрического проводника единичной длины и единичного поперечного сечения). Единица удельного сопротивления – Ом-метр (Ом·м).

Величина $\sigma = 1/\rho$, обратная удельному сопротивлению, называется электрической удельной проводимостью проводника. Единица удельной проводимости – Сименс на метр (См/м). Сименс – электрическая проводимость резистора сопротивлением 1 Ом: $1 \text{ См} = 1 \text{ Ом}^{-1}$.

Представим закон Ома в дифференциальной форме, выполнив несколько преобразований выражения закона Ома: $I = U/R$:

$$I = U/R, \quad I = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l} S = \sigma \frac{U}{l} S \quad \text{или} \quad \frac{I}{S} = \sigma \frac{U}{l}.$$

Поскольку, $I/S = j$ – модуль плотности тока, $U/l = E$ – модуль напряженности электрического поля в проводнике, имеем: $j = \sigma E$. Направления векторов \mathbf{j} и \mathbf{E} совпадают, так как носители заряда положительного знака перемещаются в направлении вектора \mathbf{E} в каждой точке проводника. Следовательно, векторная дифференциальная форма закона Ома, связывающая плотность тока с напряженностью электрического поля в одной и той же точке проводника, есть:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Закон Ома, выраженный в виде $I = U/R$ – его интегральная форма, так как он посвящен целому проводнику.

УДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОВОДНИКОВ		
МАТЕРИАЛ	$\rho, 10^{-8} \text{ Ом}\cdot\text{м}$	ПРИМЕЧАНИЕ
Серебро (Ag)	1,5	Наилучший проводник
Медь (Cu)	1,7	Применяется чаще всего
Золото (Au)	2,0	Хороший проводник
Алюминий (Al)	2,5	Применяется часто
Железо (Fe)	9,8	Применяется редко

СОЕДИНЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ

Проводники можно соединять в электрической цепи последовательно (рис. 35а) или параллельно (рис. 35б). Сила тока всех проводников – одна и та же ($I = \text{Const}$) при последовательном включении и разность потенциалов всей цепи равна сумме потенциалов отдельных частей: $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$

Полное сопротивление контура, состоящего из последовательно соединенных проводников, равно сумме сопротивлений отдельных проводников:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{I} = \frac{U_1}{I} + \frac{U_2}{I} + \frac{U_3}{I} = R_1 + R_2 + R_3.$$

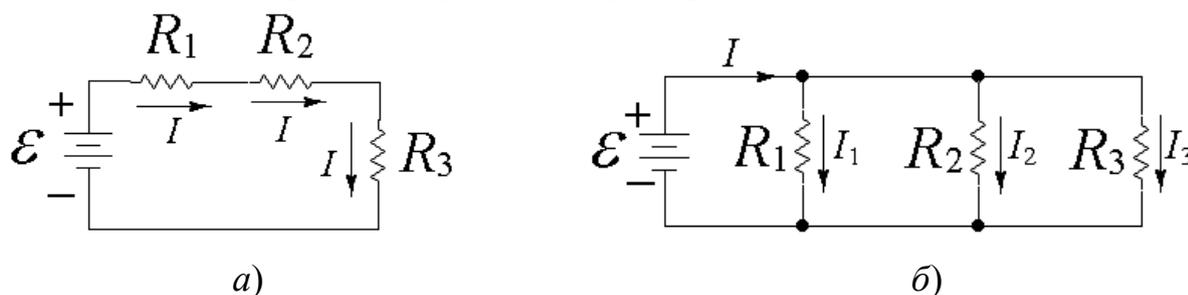


Рис. 35

При параллельном соединении проводников разность потенциалов, приложенных к каждому проводнику – одна и та же: $U = \text{Const}$, а сила тока, входящего в этот разветвлённый контур, равна сумме сил токов, текущих в отдельных проводниках: $I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots$ Обратное значение полного сопротивления R системы проводников есть:

$$\frac{1}{R} = U/I^{-1} = \frac{I}{U} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{U} = \frac{I_1}{U} + \frac{I_2}{U} + \frac{I_3}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ

Удельное электрическое сопротивление проводника зависит не только от происхождения вещества, а также от его термодинамического состояния. Зависимость удельного сопротивления металлических проводников ρ от температуры пишется часто в форме: $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где ρ_0 – удельное сопротивление при 0°C , t – температура (по шкале Цельсия); α – температурный коэффициент сопротивления, характеризующий относительное изменение сопротивления проводника при изменении температуры на $1^\circ \text{C} = 1 \text{ K}$:

$$\alpha = (\rho - \rho_0) / \rho_0.$$

температурный коэффициент сопротивления вещества, вообще говоря, зависит от температуры. Однако для металлов эта зависимость α от t не слишком большая. Для чистых металлов $\alpha \approx 1/273 \text{ K}^{-1}$.

Зависимость сопротивления металлов от температуры положена в основу действия термометров сопротивления, терморезисторов. Они используются как при высоких, так и при низких температурах, когда становится невозможным применение жидкостных и газовых термометров.

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ

В 1911 Камерлинг Оннес (нидерландский физик, 1853-1926, Нобелевский лауреат по физике, 1913) проводил опыты с чистой ртутью (Hg). Он открыл новое неожиданное явление. В процессе охлаждения удельное сопротивление ρ ртути внезапно снизилось до такой величины, что стало практически невозможным его измерить при температуре 4,2 К ($\cong - 269$ °С). Это явление перехода электрического сопротивления к нулю Камерлинг Оннес назвал сверхпроводимостью. В настоящее время сверхпроводимость открыта у более чем 25 металлических элементов, большого числа сплавов, некоторых полупроводников и полимерах. Температура T_C перехода проводника в состояние сверхпроводимости для чистых металлов оказывается в пределах от 0,14 К для иридия (Ir) до 9,25 К для ниобия (Nb). Типичная зависимость удельного сопротивления ρ металлического сверхпроводника от температуры показана на рисунке 36. Строгое объяснение явления сверхпроводимости дается на основе квантовой механики.

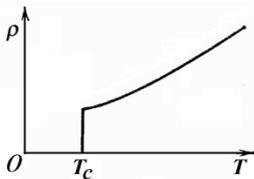


Рис. 36

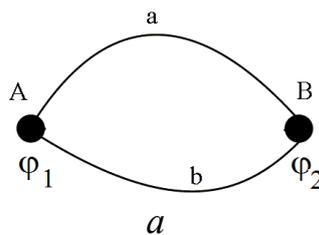
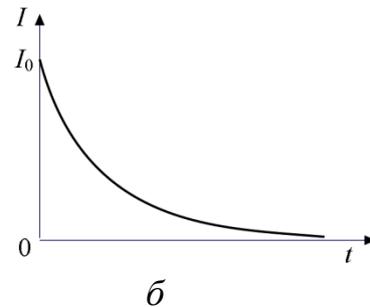


Рис. 37



ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА. НАПРЯЖЕНИЕ. ОБОБЩЁННЫЙ ЗАКОН ОМА

Если два заряженных тела А и В (рис. 37а), находящиеся под различными потенциалами $\varphi_1 > \varphi_2$, соединить при помощи проводника АаВ, то по проводнику потечет электрический ток. После относительно короткого интервала времени потенциалы сравняются и ток исчезнет (рис. 37б). Чтобы поддерживать постоянный ток необходимо также держать неизменяющимся разность потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{Const}$, то есть, все время пополнять зарядами связанные тела. Это можно сделать, перенося положительные заряды от тела В обратно в тело А, тем самым установив круговорот электричества посредством создания замкнутой электрической цепи (АаВbА).

Следовательно, заряды должны будут переместиться против электрических сил на участке ВА, что возможно, если только это перемещение осуществляется посторонними (сторонними) силами, т.е. силами, имеющими не электрическую природу: механические, химические и т.д., которые могут действовать на всей цепи или его отрезках. Приборы, обеспечивающие образование и действие сторонних сил называются источниками тока. В них осуществляется разделение зарядов противоположных знаков. Под действием сторонних сил электрические заряды двигаются внутри источника

тока по направлению, противоположному действию сил электрического поля. Таким способом поддерживается постоянная разность потенциалов на клеммах источника тока.

Сторонние силы совершают работу по перемещению зарядов и, естественно, есть расход энергии источника тока. Работа, которую делают сторонние силы по перемещению положительного единичного электрического заряда в электрической цепи, называется электродвижущей силой источника тока (ЭДС). Единица ЭДС - Вольт. (Алессандро Вольта, граф, итальянский физик, 1745-1827).

Хорошая аналогия ЭДС иллюстрируется примером, представленным на рис. 38. Чтобы поток воды постоянно вытекал из верхнего резервуара 1 к нижнему 2, необходимо при помощи насоса 3 (механические силы) непрерывно из нижнего резервуара перекачивать воду в верхний резервуар.

Внутри проводника, по которому течет постоянный электрический ток, присутствует одновременно поле кулоновских сил \mathbf{E}_Q , а также сторонних $\mathbf{E}_{ст}$. Напряженность результирующего поля согласно принципу суперпозиции полей определена выражением: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_Q + \mathbf{E}_{ст}$. При протекании электрического тока в проводнике АВ (рис. 39) работа кулоновских сил A_Q также как сторонних $A_{ст}$ совершается над переносимым зарядом. Полная работа между точками А и В равна сумме этих двух работ:

$$A_{AB} = A_Q + A_{ст}.$$

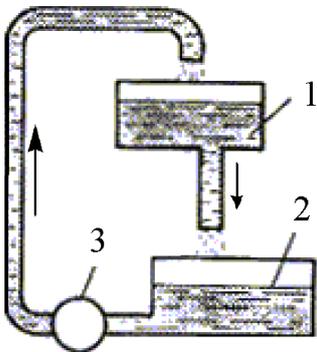


Рис. 38

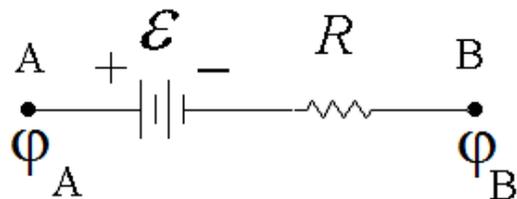


Рис. 39

Поделив обе части этого выражения на Q , мы получаем:

$$\frac{A_{AB}}{Q} = \frac{A_Q}{Q} + \frac{A_{ст}}{Q}.$$

Величина A_Q/Q , равная работе по перемещению положительного единичного заряда под действием сил электрической природы, характеризует разность потенциалов между точками А и В. Величина $A_{ст}/Q = \mathcal{E}$ равная работе по перемещению положительного единичного заряда под действием сторонних сил (не электрической природы), названа электродвижущей силой, действующей на участке АВ. Поэтому:

$$\frac{A_{AB}}{Q} = \varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}.$$

Физическая величина равная полной работе, произведенной кулоновыми и

сторонними силами по перемещению положительного единичного заряда на участке электрической цепи (например, АВ), называется *напряжением* (*падением напряжения*) на этом участке:

$$U_{AB} = \frac{A_{AB}}{Q} = \varphi_A - \varphi_B + E.$$

Падение напряжения на однородном участке (не разветвлённой электрической цепи, содержащей только резистор) равно разности потенциалов, которое по закону Ома равно произведению силы тока на сопротивление. Следовательно, имеем:

$$U_{AB} = IR.$$

Не разветвлённая электрическая цепь, включающая резистор и ЭДС (рис. 39), называется неоднородной электрической цепью. При наличии источника тока, закон Ома также приемлем, однако, напряжение (падение напряжения) включает разность потенциалов и ЭДС. Закон Ома, примененный к неоднородной цепи, называется обобщённым законом Ома, который пишется как:

$$I = \frac{U_{AB} + \mathcal{E}}{R} = \frac{\varphi_A - \varphi_B + \mathcal{E}}{R}.$$

Из этого выражения, мы можем сделать заключение о соответствии между разностью потенциалов и напряжением на концах цепи: они равны между собой в единственном случае, когда ЭДС не действует в цепи:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B = \Delta\varphi, \text{ если } \mathcal{E} = 0.$$

В наиболее общем случае падение напряжения равно сумме разности потенциалов и электродвижущей силы:

$$U = \Delta\varphi + \mathcal{E}.$$

ЭДС может быть экспериментально определена, измеряя разность потенциалов на полюсах не нагруженного источника тока (с предварительно выключенной внешней электрической цепью):

$$\text{если } U = 0, \text{ то } \Delta\varphi + \mathcal{E} = 0 \text{ и } \mathcal{E} = -\Delta\varphi.$$

ЗАМКНУТАЯ ЦЕПЬ

Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из нагрузки с сопротивлением R и источника тока, внутреннее сопротивление которого r (рис 40). Согласно закону сохранения энергии ЭДС источника тока равна сумме падений напряжения на внешних и внутренних частях замкнутой цепи, так как в процессе движения в этом контуре заряд возвращается в свое начальное положение (в точку с тем же потенциалом, $\varphi_A = \varphi_B$):

$$\mathcal{E} = U_R + U_r \text{ или } \mathcal{E} = IR + Ir,$$

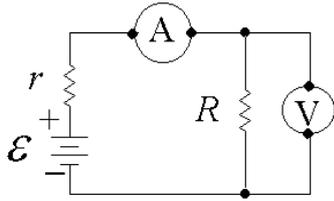


Рис. 40

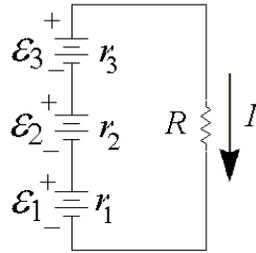


Рис. 41

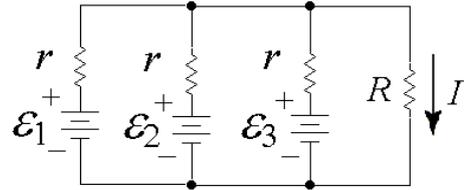


Рис. 42

так как $U_R = IR$ и $U_r = Ir$ – падения напряжения на соответствующих резисторах, внешней R и внутренней r нагрузках замкнутого контура. Отсюда следует:

$$I = \frac{E}{R + r}.$$

Сила тока пропорциональна ЭДС, функционирующей в контуре, и обратно пропорциональна сумме внешнего сопротивления контура и внутреннего сопротивления источника. Это есть закон Ома, примененный к замкнутой цепи. ЭДС и сила тока – алгебраические величины. Если ЭДС благоприятствует движению положительных зарядов в направлении выбранного обхода, то она считается положительной ($\mathcal{E} > 0$). В противном случае ЭДС – отрицательная.

Соединение источников тока в батарее может быть последовательной (рис. 41) и параллельной (рис. 42). Противоположные клеммы двух соседних источников соединены вместе при их последовательном включении, и ЭДС такой батареи равна сумме ЭДС отдельных источников. Согласно закону Ома, сила тока в таком контуре рассчитывается по формуле:

$$I = \frac{E_1 + E_2 + E_3}{R + r_1 + r_2 + r_3} = \frac{\sum E_i}{R + \sum r_i}.$$

При параллельном включении источников между собой соединены все положительные клеммы. В свою очередь, между собой соединены также все отрицательные клеммы. На практике для параллельного соединения источников ЭДС используются только тождественные источники, т.е. такие, у которых соответственные значения ЭДС и внутренних сопротивлений совпадают. В этом случае напряжение на разомкнутой батарее равно напряжению каждой батареи. Это означает, что при параллельном соединении одинаковых источников электроэнергии ЭДС батареи равна ЭДС одного источника, а внутреннее сопротивление батареи уменьшается обратно пропорционально числу соединенных источников n :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i \text{ и } r = r/n.$$

Тогда, согласно закону Ома получим:

$$I = \frac{E}{R + r/n}.$$

РАБОТА И МОЩНОСТЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА

В процессе перемещения электрического заряда dQ в электрической цепи кулоновские и сторонние силы совершают работу $dA = U dQ$. Если контур находится в состоянии покоя и ток, текущий по этому контуру, постоянен ($I = \text{Const}$), работа, совершаемая в течение интервала времени dt , равна: $dA = UI dt$. При помощи этой формулы мы можем вычислить работу, совершаемую электрическим током, безотносительно от того, в какую энергию превращается электрическая энергия. Эта работа, например, может увеличить внутреннюю энергию (температуру) проводника или/и привести в движение проводник с током в магнитном поле и т.д.

Полная работа, совершенная источником тока с ЭДС \mathcal{E} , равна:

$$dA = \mathcal{E} I dt.$$

Единица работы электрического тока – Джоуль. Мощность тока P – работа, совершаемая электрическим током в единицу времени. Для участка цепи имеем:

$$P = \frac{dA}{dt} = IU.$$

Единица мощности электрического тока – Ватт (James Watt, шотландский инженер-механик, 1736-1819).



Watt James



Joule James Prescott



Lenz Heinrich Friedrich

Необратимое преобразование электроэнергии в тепловую энергию в металлах объясняется столкновением электронов с ионами кристаллической решетки. По этой причине интенсивность колебаний ионов около положения равновесия увеличивается. При этом повышается температура проводника. Действительно, температура – это мера средней кинетической энергии хаотического движения атомов вещества, проводника.

Чтобы вычислить электрическую энергию, израсходованную на нагревание проводника, надо знать значение падения напряжения на данном проводнике $U = IR$. Подставляя это выражение в формулу $dA = UI dt$, мы получаем:

$$dA = I^2 R dt.$$

Если проводник неподвижен, согласно закону сохранения энергии вся работа тока идет на нагрев проводника: $dA = dQ$. Таким образом,

$$dQ = I^2 R dt.$$

Количество теплоты, которое выделяется в проводнике с током, пропорционально квадрату силы тока, сопротивлению проводника и времени действия тока – закон Джоуля-Ленца. (James Prescott Joule, английский физик и промышленник, 1818-1889. Генрих Фридрих Ленц, русский физик, 1804-1865).

Представим закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме. Для этого, образуем мысленно в проводнике элементарный цилиндр объёмом $dV = Sdl$, сопротивление которого равно $dR = \rho dl/S$. В интервале времени dt в этом объеме выделится количество тепла, равное:

$$dQ = I^2 dR dt = I^2 \rho \frac{dl}{S} dt = j^2 S^2 \rho \frac{dl}{S} dt = j^2 \rho dV dt.$$

С использованием дифференциальной формы закона Ома $j = \sigma E$ и формулы связи между удельным сопротивлением и удельной электропроводностью $\rho = \sigma^{-1}$, мы получаем: $dQ = \sigma E^2 dV dt$.

Отсюда следует закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме, которым определяется *удельная тепловая мощность тока* – количество тепла, выделяющегося в единице объёма в единицу времени:

$$w = \frac{dQ}{dV dt} = \sigma E^2.$$

ПРАВИЛА КИРХГОФА

На практике часто приходится применять разветвленные, сложные электрические цепи, содержащие узлы. Узлом называется точка A развитого контура, в котором скрещиваются не менее трех проводников, по которым текут электрические токи (рис. 43). Задачи, связанные с наличием тока во всех частях развитого контура, обычно создают затруднения их решения на основе закона Ома. Решение подобных задач упрощается, если применяются два правила Кирхгофа.

Первое правило Кирхгофа (Gustav Robert Kirchhoff, немецкий физик и математик, 1824-1887): *алгебраическая сумма силы токов, скрещивающихся в узле, равна нулю*. Оно вытекает из уравнения непрерывности, данного в интегральной форме: для постоянного тока количество зарядов, входящих в данный узел проводника, равно количеству зарядов, выходящих из него

$$\oint j dS = 0.$$

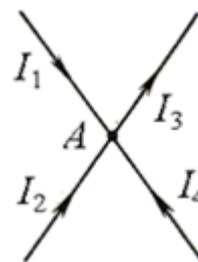


Рис. 43

В соответствии с выбором знака потока вектора плотности электрического тока, сходящие в узле токи считаются имеющими отрицательные знаки, но

исходящие – положительные. Например, для узла А (рис. 43) первое правило записывается как:

$$-I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа – обобщение закона Ома для замкнутых контуров разветвленной электрической цепи: алгебраическая сумма произведений сопротивления на силу тока, протекающего по этому сопротивлению, равна алгебраической сумме ЭДС, взятых по различным участкам замкнутого контура:

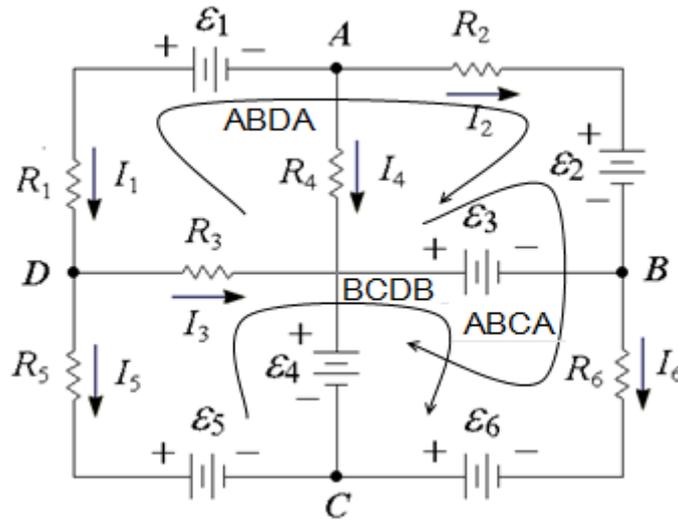


Рис. 44

$$\sum_{i=1}^m R_i I_i = \sum_{i=1}^m E_i,$$

где m – число различных участков данного замкнутого контура. Докажем справедливость этого правила на примере произвольного контура ABCA с элементами R_2 – R_6 – R_4 (рис. 44). Контур состоит из трех неоднородных участков: R_2 – R_6 и $-R_4$. Применим к этим участкам обобщённый закон Ома: $I_2 R_2 = \varphi_A - \varphi_B - \varepsilon_2$, $I_6 R_6 = \varphi_B - \varphi_C + \varepsilon_6$ и $-I_4 R_4 = \varphi_C - \varphi_A + \varepsilon_4$. Вычислив сумму левых и правых частей этих трех уравнений, мы получим: $I_2 R_2 - I_4 R_4 + I_6 R_6 = -\varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6$. Конец доказательства.

Для успешного применения правил Кирхгофа предлагается следующий алгоритм действий:

1) Перенумеровать расчетные элементы электрической цепи в последовательности сверху-вниз и слева-направо:

$$R_1 - R_2 - R_3 - \dots, I_1 - I_2 - I_3 - \dots, \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \dots$$

2) Выбрать произвольно направление и указать стрелкой силу тока ($I_1, I_2, I_3 \dots$) около каждого сопротивления.

3) Отметить знаками + и – клеммы источников тока.

4) Найти и обозначить узлы цепи. Составить уравнения по первому правилу Кирхгофа для узлов, соблюдая знаки для силы тока: например, входящие токи – отрицательные, а исходящие – положительные.

- 5) Выбрать независимые замкнутые контуры. Первый контур выбирается произвольно, а остальные так, чтобы каждый новый контур содержал хотя бы один электрический компонент, не вошедший в уже выбранные контуры.
- 6) Выбрать произвольно замкнутые контуры и указать на чертеже закругленной стрелкой направление их обхода (лучше по ходу часовой стрелки). Направление обхода не изменять вплоть до завершения решения задачи!
- 7) Составить уравнения по второму правилу Кирхгофа для независимых замкнутых контуров, соблюдая знаки для силы тока и ЭДС: Рассматриваемая сила тока – положительная, если ее направление, указанное на чертеже, совпадает с направлением обхода контура, и ее знак – отрицательный, если направление силы тока противоположно направлению обхода.
- 8) Знак ЭДС – положительный (плюс), если источник ЭДС повышает потенциал в направлении обхода контура, т.е. ток, вытекающий из источника, совпадает по направлению с направлением обхода контура. В противоположном случае знак ЭДС – отрицательный (минус).

Правила Кирхгофа позволяют определить численное значение и направление силы тока в любом сопротивлении разветвленной электрической цепи, если известны значения всех сопротивлений и ЭДС.

Для системы, составленной из N проводников-сопротивлений с N образовавшимися токами и k узлами, в общей сложности, должны быть записаны N уравнений: $(k - 1)$ уравнения для узлов и $N - (k - 1) = N - k + 1$ уравнения для независимых контуров.

Поскольку действительные направления силы токов невозможно предсказать точно, то в процессе решения задачи по правилам Кирхгофа сила тока может быть получена отрицательной. Это означает, что указанное на схеме направление данного тока в действительности – обратное.

ПРИМЕР составления уравнений Кирхгофа для схемы рис. 44.

В данной электрической цепи имеются 4 узла: А, В, С и D. Согласно 1-ому правилу Кирхгофа записываем только 3 уравнения:

$$\text{Узел А: } I_1 + I_2 + I_4 = 0;$$

$$\text{Узел В: } -I_2 - I_3 + I_6 = 0;$$

$$\text{Узел С: } -I_4 - I_3 - I_6 = 0;$$

$$\text{Узел D: бесполезный.}$$

Число независимых замкнутых контуров равно 3. Согласно 2-ому правилу записываем еще 3 уравнения для независимых контуров:

$$\text{Контур ABDA: } R_2 I_2 - R_3 I_3 - R_1 I_1 = -\underline{u}_2 + \underline{u}_3 - \underline{u}_1;$$

$$\text{Контур ABCA: } R_2 I_2 + R_6 I_6 - R_4 I_4 = -\underline{u}_2 + \underline{u}_6 + \underline{u}_4;$$

$$\text{Контур BCDB: } R_6 I_6 - R_5 I_5 + R_3 I_3 = \underline{u}_6 + \underline{u}_5 - \underline{u}_3.$$

Окончательный результат решения задачи зависит от начальных условий. Мы получили 6 уравнений, и для определенного ответа число неизвестных должно быть также равным 6.

ПЕРЕХОДНЫЙ ТОК. ЗАРЯД И РАЗРЯД КОНДЕНСАТОРА

Переходным током называется ток, который не устанавливается мгновенно, а в течение конечного времени. Такой ток существует, например, в электрической цепи, составленной из источника тока с ЭДС \mathcal{E} , сопротивлением R и конденсатором C (рис. 45). При замыкании ключа K конденсатор C начинает заряжаться от источника \mathcal{E} . Мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно U_C . Таким образом, данный контур – контур, где происходит процесс заряда конденсатора.

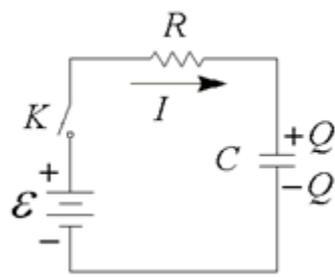


Рис. 45.

Теоретическое изучение процесса заряда конденсатора сделаем на основе закона Ома, пренебрегая внутренним сопротивлением источника:

$$I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}$$

Принимая во внимание формулу связи между зарядом Q и напряжением U_C ($Q = CU_C$) и определение силы тока ($I = \frac{dQ}{dt}$) уравнение

$I = \frac{\mathcal{E} - U_C}{R}$ может быть представлено в форме:

$$R \frac{dQ}{dt} = \mathcal{E} - \frac{Q}{C} \quad \text{или} \quad \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} (Q - C\mathcal{E}) .$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка есть:

$$\ln (Q - C\mathcal{E}) = -\frac{t}{RC} + \ln \text{Const} .$$

Постоянная интегрирования определяется начальным условием: $t = 0, Q = 0$. Тогда,

$$\ln \left(\frac{-C\mathcal{E}}{\text{Const}} \right) = 0, \quad \text{Const} = -C\mathcal{E}, \quad \ln \frac{C\mathcal{E} - Q}{C\mathcal{E}} = -\frac{t}{RC},$$

$$\frac{C\mathcal{E} - Q}{C\mathcal{E}} = \exp \left(-\frac{t}{RC} \right), \quad C\mathcal{E} - Q = C\mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} .$$

Наконец, получаем уравнения, описывающие временную эволюцию заряда, разности потенциалов и силы тока:

$$Q = C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}), \quad U_C = \frac{Q}{C} = \mathcal{E}(1 - e^{-t/RC}), \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC} .$$

Графическое представление эволюции величины заряда, разности потенциалов и силы тока в зависимости от времени дано в относительных единицах на рис. 46 – 48. Следует отметить, что процесс заряда конденсатора происходит по экспоненциальному закону. Заряд и разность потенциалов возрастают соответственно от нуля до $Q_\infty = C\mathcal{E}$ и $U_\infty = \mathcal{E}$, в то время как сила

тока убывает от $I_0 = \mathcal{E} / R$ до нуля. Постоянная времени контура, названная временем релаксации процесса, равна $\tau = RC$. Эта постоянная принята на рис. 46 – 48, равной 1 с.

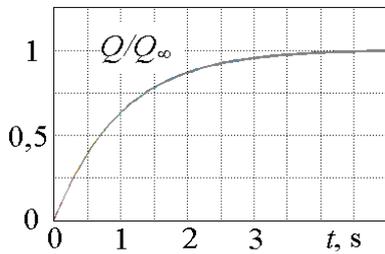


Рис. 46

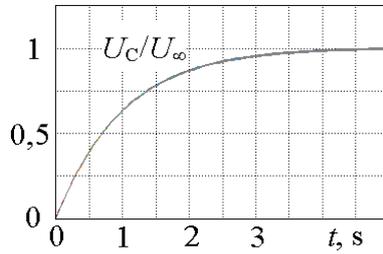


Рис. 47

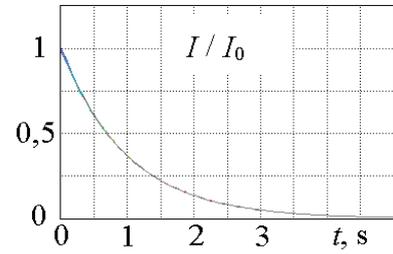


Рис. 48

Процесс разряда конденсатора рассмотрим на примере электрической цепи, схема которого представлена на рис. 49. Предположим, что в начальный момент времени конденсатор C был подключен к источнику с ЭДС \mathcal{E} (ключ K включен в положении 1). После переключения ключа из положения 1 в положение 2, конденсатор начинает разряжаться через сопротивление R . Обыкновенное дифференциальное уравнение процесса находим на основе закона Ома для однородного участка электрической цепи:

$$I = \frac{U_C}{R} = \frac{Q}{RC} \text{ или } \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}, \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Решение этого уравнения есть:

$$Q(t) = \text{Const} \cdot e^{-t/RC}$$

Чтобы найти постоянную интегрирования, воспользуемся начальным условием: $t = 0, Q(0) = \text{Const} = Q_0 = \mathcal{E} / C$. Тогда, решение имеет вид:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{\mathcal{E}}{C} e^{-\frac{t}{RC}}, U = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{RC}} \text{ и } I = \frac{U}{R} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Очевидно, что все переменные электрические величины подчиняются одному и тому же закону – закону экспоненциального убывания с постоянной времени $\tau = RC$. График временной эволюции силы тока представлен на рис. 50. Постоянная времени релаксации принята, равной 1 с.

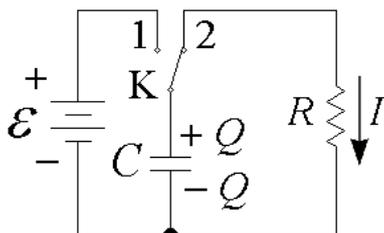


Рис. 49

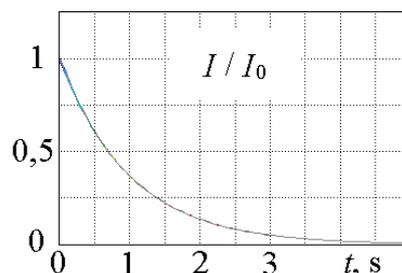


Рис. 50

IV. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ

Около поверхности раздела двух диэлектриков, векторы поля \mathbf{E} и смещения \mathbf{D} должны удовлетворять определенным граничным условиям, которые вытекают из векторных свойств электростатического поля:

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ или } \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} = 0 \text{ и}$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \text{ или } \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q,$$

где ρ - объемная плотность свободных зарядов и Q - полный свободный заряд внутри замкнутой поверхности S .

Рассмотрим границу раздела между двумя изотропными диэлектриками с проницаемостью ε_1 и ε_2 и полями \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 , которые не перпендикулярны границе (рис. 51 и 52). Полезно разложить векторы \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 , \mathbf{D}_1 и \mathbf{D}_2 на его компоненты вдоль нормали и вдоль касательной к поверхности:

$$\mathbf{E}_1 = E_{1n}\mathbf{n} + E_{1\tau}\boldsymbol{\tau} \text{ и } \mathbf{E}_2 = E_{2n}\mathbf{n} + E_{2\tau}\boldsymbol{\tau};$$

$$\mathbf{D}_1 = D_{1n}\mathbf{n} + D_{1\tau}\boldsymbol{\tau} \text{ и } \mathbf{D}_2 = D_{2n}\mathbf{n} + D_{2\tau}\boldsymbol{\tau}.$$

Выберем замкнутый прямоугольный контур l со сторонами a и b (рис. 51, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$). Сторона b контура пересекает перпендикулярно поверхность раздела. Вычислим интеграл циркуляции:

$$\begin{aligned} \oint_l \mathbf{E} d\mathbf{r} &= -E_{1\tau}a + E_{1n}b/2 + E_{2n}b/2 + E_{2\tau}a - E_{2n}b/2 - E_{1n}b/2 = \\ &= -E_{1\tau}a + E_{2\tau}a = -E_{1\tau} + E_{2\tau} \quad a = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $E_{1\tau} = E_{2\tau}$.

Так как вектор смещения связан с вектором напряженности соотношением $\mathbf{D} = \varepsilon\varepsilon_0\mathbf{E}$ и обе среды изотропные, можно найти соотношение между тангенсальными составляющими вектора смещения:

$$D_{1\tau}/\varepsilon_1\varepsilon_0 = D_{2\tau}/\varepsilon_2\varepsilon_0 \text{ или } D_{1\tau}/D_{2\tau} = \varepsilon_1/\varepsilon_2.$$

Чтобы найти соотношения между другими компонентами используем теорему Гаусса-Остроградского $\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q$, где $Q = 0$. В качестве замкнутой поверхности интегрирования выбираем поверхность цилиндра, образующая которого перпендикулярно ориентирована к границе двух сред, эта граница разбивает цилиндр на две тождественные половины, и $S_1 = S_2 = S$ (рис. 52, $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$). Тогда, поток вектора \mathbf{D} есть:

$$\Phi_D = - \int_{S_1} D_{1n} dS_1 + \int_{S_2} D_{2n} dS_2 + \int_{S_{1\text{бок}}} D_{1\tau} dS_{1\text{бок}} + \int_{S_{2\text{бок}}} D_{2\tau} dS_{2\text{бок}} = 0$$

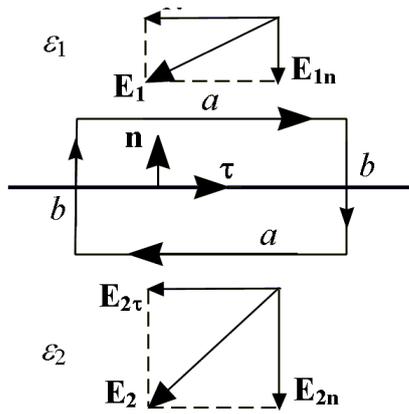


Рис. 51

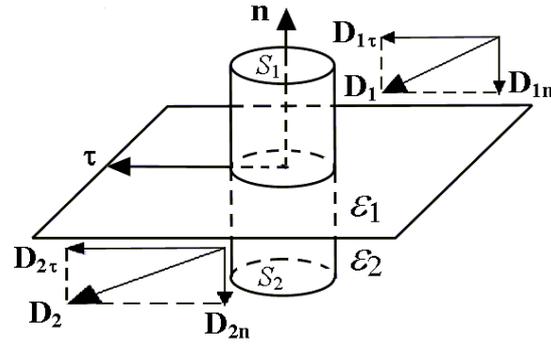


Рис. 52

Последние два интеграла равны нулю, так как они образованы линиями, входящими и выходящими через боковые поверхности цилиндров, без изменения их числа. Это упрощает нашу задачу:

$$\Phi_D = - \int_{S_1} D_{1n} dS_1 + \int_{S_2} D_{2n} dS_2 = -D_{1n} \int_{S_1} dS_1 + D_{2n} \int_{S_2} dS_2 = D_{2n} - D_{1n} S = 0,$$

$D_{2n} - D_{1n} = 0$ или $D_{2n} = D_{1n}$. Так как $D_{2n} = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_{2n}$ и $D_{1n} = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_{1n}$, то имеем:

$$\varepsilon_2 E_{2n} = \varepsilon_1 E_{1n} \text{ или } E_{2n} / E_{1n} = \varepsilon_1 / \varepsilon_2.$$

Таким образом, условия перехода границы раздела двух диэлектриков в отсутствие свободных поверхностных зарядов сводятся к следующим положениям. Тангенсальная составляющая вектора напряженности и нормальная составляющая вектора смещения не изменяются, в то время как, нормальная составляющая вектора напряженности и тангенциальная составляющая вектора смещения претерпевают скачок:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, D_{1n} = D_{2n}, \\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n} \text{ и } D_{1\tau} / \varepsilon_1 = D_{2\tau} / \varepsilon_2.$$

Следует добавить, что линии смещения – непрерывные, они не прерываются на границе, в то время как число линий напряженности различно по обе стороны от границы раздела двух диэлектриков.

ЭЛЕКТРОННАЯ (КЛАССИЧЕСКАЯ) ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

Различные физико-химические свойства тел могут быть объяснены на основе электронного строения вещества. В классической теории электронной проводимости металлов, свободные электроны рассматриваются в качестве электронного газа, похожего на идеальный одноатомный газ, который подчиняется законам классической механики Ньютона. Взаимодействием электронов между собой пренебрегают, они осуществляются только с положительными ионами кристаллической решетки. В соответствии с законом Больцмана о равнораспределении тепловой энергии по степеням свободы ($W_K = kT/2$), электрон обладает средней кинетической энергией теплового движения, равной:

$$W_k = 3kT/2,$$

где k - постоянная Больцмана, T - температура (Ludwig Boltzmann, австрийский физик, 1844-1906).



Ludwig Boltzmann



Sir Isaac Newton



G.H. Wiedemann

В процессе теплового движения, электроны испытывают столкновения. Пройденный путь между двумя последовательными столкновениями называется длиной свободного пробега $\langle l \rangle = \lambda$. При каждом столкновении электрон полностью отдает свою энергию ионам решетки и возобновляет движение с нулевой скоростью. При наличии постоянного тока, электрическое поле действует на каждый электрон внутри проводника, и электрон движется с ускорением a . По 2 закону Ньютона можно определить это ускорение

$$a = F / m_e = eE / m_e,$$

где E – напряженность поля, m_e и e – масса и заряд электрона. (Sir Isaac Newton, английский физик, астроном и математик, 1642-1727).

Если среднее время между двумя последовательными столкновениями обозначить $\langle t \rangle$, то скорость электрона в конце свободного пробега была бы равна $v = a \langle t \rangle = eE \langle t \rangle / m_e$. Полагая, что движение равномерно ускоренное с нулевой начальной скоростью, средняя скорость упорядоченного движения электронов равна:

$$\langle v \rangle = eE \langle t \rangle / 2m_e.$$

Можно определить среднее время между двумя последовательными столкновениями $\langle t \rangle$, если длина свободного пробега $\langle l \rangle = \lambda$ и средняя скорость теплового движения молекул u известны:

$$\langle t \rangle = \langle l \rangle / (u + \langle v \rangle) \approx \langle l \rangle / u = \lambda / u.$$

Так как $u \gg \langle v \rangle$, скоростью $\langle v \rangle$ можно здесь пренебречь. Заменяя $\langle t \rangle$ в формуле $\langle v \rangle = eE \langle t \rangle / 2m_e$ его значением $\langle l \rangle / u$, получим окончательное выражение для средней скорости упорядоченного движения электронов:

$$\langle v \rangle = e\lambda E / 2m_e u.$$

Теперь можем вычислить плотность тока:

$$j = ne \langle v \rangle = ne^2 \lambda E / 2m_e u = (ne^2 \lambda / 2m_e u) E.$$

Сравнивая это выражение с дифференциальной формой закона Ома $j = \sigma E$, получим формулу удельной электропроводности материала проводника (обратная величина удельного сопротивления ρ): $\sigma = \rho^{-1} = ne^2 \lambda / 2m_e u$.

При помощи электронной теории электропроводности металлов можно качественно объяснить электрическое сопротивление металлических проводников. Из выражения $\sigma = \rho^{-1} = ne^2 \lambda / 2m_e u$ следует, что удельная электропроводность металлов пропорциональна концентрации n электронов проводимости (свободных электронов) и средней длине свободного пробега λ . То есть, с увеличением λ , столкновения представляют меньше препятствий упорядоченному движению электронов. Электропроводность обратно пропорциональна средней тепловой скорости u . Тепловая скорость возрастает с увеличением температуры пропорционально $T^{1/2}$, что приводит к убыли проводимости (увеличению сопротивления) проводника. Формулой $\sigma = \rho^{-1} = ne^2 \lambda / 2m_e u$ объясняется зависимость σ и ρ от природы проводника.

При помощи электронной классической теории проводимости металлов можем доказать закон Джоуля-Ленца. Упорядоченное движение электронов происходит под воздействием сил поля. В рамках предположения, что электроны полностью передают кинетическую энергию кристаллической решетке в моменты столкновения, в конце свободного пробега (перед столкновением) скорость электрона равна $v = eE \langle t \rangle / m_e = e\lambda E / m_e u$ и его кинетическая энергия -

$$W_K = m_e v^2 / 2 = m_e (e\lambda E / m_e u)^2 / 2 = e^2 \lambda^2 E^2 / 2m_e u^2.$$

Полная тепловая энергия, освобожденная в проводнике в единицу времени W , равна произведению кинетической энергии электрона W_K на концентрацию электронов n_e , объем проводника V и число столкновений в единицу времени f . Очевидно, $f = u / \lambda$. Следовательно,

$$\begin{aligned} W &= W_K n_e V f = (e^2 \lambda^2 E^2 / 2m_e u^2) n_e V f = \\ &= (e^2 \lambda^2 E^2 / 2m_e u^2) n_e V u / \lambda = (n_e e^2 \lambda E^2 / 2m_e u) V. \end{aligned}$$

Тогда, энергия электрического тока, выделяющаяся в единице объема за единицу времени (*удельная термическая мощность тока*) в рассмотренной теории равна: $w = (n_e e^2 \lambda / 2m_e u) E^2$. Это выражение соответствует дифференциальной форме закона Джоуля-Ленца:

$$w = \sigma E^2.$$

ЗАКОН ВИДЕМАНА-ФРАНЦА

В 1853 г. Видеман (Gustav Henrich Wiedemann, немецкий физик, 1826-1899) и Франц (R. Franz, 1827-1902) опытным путем установили, что отношение коэффициента теплопроводности κ к удельной электропроводности σ для всех металлов – одинаковое при одной и той же температуре и пропорционально абсолютной температуре T .

Целесообразно было предположить, что в металлах явление теплопроводности, как и электропроводности, обусловлено движением свободных электронов. Коэффициент теплопроводности в приближении одноатомного газа для электронов равен:

$$\kappa = nm_e u \lambda c_v / 3,$$

где c_v - удельная теплоемкость. Для электронного газа имеем: $c_v = 3R/2\mu = 3k/2m_e$, где k - постоянная Больцмана, μ - молярная масса. Тогда, $\kappa = nu\lambda k/2$. Из формул $\kappa = nu\lambda k/2$ и $\sigma = ne^2 \lambda/2m_e u$ следует, что отношение коэффициентов κ и σ для металлов равно:

$$\kappa / \sigma = (nu\lambda k/2) / (ne^2 \lambda/2m_e u) = km_e u^2 / e^2.$$

Из кинетической теории газов известно, что $m_e u^2 / 2 = 3kT / 2$, тогда $\kappa/\sigma = km_e u^2 / e^2 = 3 k/e^2 T$. Так как $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К и $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл – постоянные величины, отношение κ/σ не зависит от природы металла, и оно пропорционально абсолютной температуре:

$$\kappa / \sigma = 2,23 \cdot 10^{-8} \cdot T.$$

Эта формула представляет содержание закона Видемана-Франца.

При нормальных условиях ($T = 300$ К) отношение κ/σ равно $6,7 \cdot 10^{-6}$ Дж·Ом/с·К для всех металлов. Экспериментальное значение равно: для свинца – $7,0 \cdot 10^{-6}$ Дж·Ом/с·К, меди – $6,4 \cdot 10^{-6}$ Дж·Ом/с·К, алюминия – $5,8 \cdot 10^{-6}$ Дж·Ом/с·К. Согласие – удовлетворительное. Закон Видемана-Франца неплохо приемлем для большинства металлов при температурах 100 К – 400 К, но при низкой температуре закон сильно нарушается. Расхождение между теоретическими и экспериментальными данными при низких температурах – особенно значительное для наилучших проводников: серебро, медь и золото. Имеются металлы (бериллий, марганец), которые вовсе не подчиняются закону Видемана-Франца. Попытки расширения области применения этой теории и ее дальнейшего развития оказались безуспешными. Решение задачи было найдено в рамках электронной квантовой теории металлов.

ПОНЯТИЯ О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ

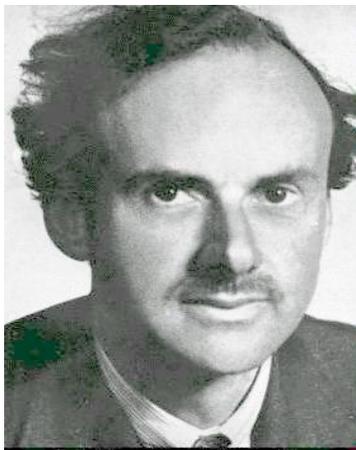
В более строгом, квантовом приближении электронный газ отождествляется с вырожденным квантовым газом, удовлетворяющим статистике Ферми-Дирака – закону, определяющему вероятность распределения по разным уровням энергии частиц, спиновое квантовое число которых – полуцелое (1/2, 3/2, 5/2). (Enrico Fermi, итальянский физик, 1901-1954. Нобелевский лауреат по физике, 1938. Paul Dirac, английский физик, 1902-1984. Нобелевский лауреат по физике, 1933).

Рассматривается модель потенциальной ямы с плоским дном: вне металла потенциальная энергия электронов равна нулю, внутри металла энергии электронов образуют квазинепрерывный спектр, пренебрегая электрическим полем положительных ионов кристаллической решетки и

взаимодействием электронов. Самому высокому занятому уровню соответствует энергия электрона, равная $-A$, где A положительная работа выхода электрона из металла. Учет влияния поля ионов на движение электронов в металле ведет к появлению *энергетических полос* в спектре электронов.



Fermi Enrico



Dirac Paul



Pauli Wolfgang

Импульсы и энергии электронов в металле квантуются, иначе говоря, они имеют определенные (конечные, дискретные, фиксированные) значения. Заполнение энергетических уровней электронами в металле происходит в соответствии с принципом Паули: каждый уровень может быть занят только двумя электронами с антипараллельными спинами (спин – собственный магнитный момент микрочастицы). Наиболее высокий энергетический уровень, занятый электронами при абсолютном нуле температур называется *уровнем Ферми*. Работа выхода отсчитывается, начиная с этого уровня (нижеследующая схема). Число энергетических уровней, занятых электронами в металле, равно по порядку величины числу свободных электронов. (Wolfgang Pauli, швейцарский физик, 1900-1958. Нобелевский лауреат по физике, 1945.)

В металле, близкие квазинепрерывные энергетические уровни образуют энергетические полосы – зоны. Зона, расположенная выше заполненной зоны, занята не полностью, и она называется *зоной проводимости металлов*. Существуют некоторые случаи, когда две последовательные зоны металла перекрываются (например, в щелочноземельных металлах и переходных металлах). Наличие не полностью занятой зоны представляет характерное своеобразие металлической проводимости.



Взаимодействие электронов с положительными ионами кристаллической решетки рассматривается в квантовой теории металлов, как рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях ионов решетки.

КОНТАКТ МЕТАЛЛА С ВАКУУМОМ

В согласии с классической теорией электронной проводимости металлов, электроны проводимости, образующие «электронный газ», принимают участие в тепловом движении. Так как электроны проводимости находятся внутри металла, можно предположить, что на границе проводник-вакуум на электроны действуют силы, направленные внутрь металла. Электрон может покинуть металл только в случае, если он способен совершить работу против этих сил. Эта работа называется работой выхода.

Если электрон покидает металл, он индуцирует на поверхности металла положительный заряд, который мгновенно действует на этот электрон с кулоновой силой, чтобы его вернуть в металл. Работа против этой силы составляет часть работы выхода. Электроны, наиболее быстрые в тепловом движении, способны удалиться на несколько межатомных расстояний от поверхности металла. Отрицательно заряженное облако электронов образуется около поверхности. Плотность этого облака быстро уменьшается по мере удаления от поверхности, которая в результате потери электронов становится положительно заряженной. Положительно заряженная поверхность и заряженное отрицательно облако образуют заряженный конденсатор, поле которого сосредоточено только между его пластинами и не создает электрическое поле во внешнем пространстве. Чтобы электрон прошел этот двойной слой, он должен выполнить некоторую работу. Полная работа выхода обусловлена двумя выше названными причинами. Между поверхностью металла и электронным облаком возникает разность потенциалов $\Delta\phi$, которая называется потенциальным барьером. Такой барьер препятствует расширению процесса выхода электронов. Если электрон внутри металла обладает кинетической энергией W_K , он может покинуть поверхность металла при условии, что $W_K = m_e v^2/2 > A$, где m_e и v соответственно масса и скорость электрона. Работа выхода $A = e \Delta\phi$ и обычно выражается в электрон-вольтах (эВ). Работа 1 эВ – это энергия, приобретаемая электроном в результате его пробега между точками с разностью потенциалов 1 В:

$$1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

При обычной температуре ($T = 300 \text{ К}$) количество электронов, имеющих достаточную стартовую скорость невелико. В зависимости от природы металла, порядок величины работы выхода для металлов составляет несколько электрон-вольт (2 – 5 эВ), а тепловая кинетическая энергия электрона в среднем равна:

$$W_K = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} \cdot 300 \text{ К} = 4,16 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 0,026 \text{ эВ}.$$

КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ

Приведем в плотный контакт два тождественных металла. В результате равенства работы выхода и концентрации электронов в этих металлах не

будет происходить ни потеря электронов в одном металле, ни их накопление в другом. В этом случае разность потенциалов между двумя металлами равна нулю.

Если пластинки двух разных металлов приводятся в плотный контакт, то вследствие различия работы выхода и концентрации электронов на одной пластинке произойдет уменьшение числа электронов и их накопление на другой. В этом случае появляется разность потенциалов. Так как причина этой разности потенциалов не связана с электрическим полем, то она может быть отождествлена с электродвижущей силой (ЭДС). Разность потенциалов между разными металлами, приведенными в соприкосновение, называется контактной разностью потенциалов. Обусловленная двумя причинами, полная разность потенциалов равна:

$$U = U' + U'' = (A_2 - A_1) / e + (kT/e) \ln (n_1/n_2),$$

где A_1 и A_2 – работа выхода соответственно из первого и второго металла; e – заряд электрона; k – постоянная Больцмана; n_1 и n_2 – концентрация свободных электронов в первом и втором металле.

Если концы двух однородных проводников из разных металлов a и b привести в соприкосновение, то на каждом контакте замкнутой цепи появится разность потенциалов (рис 53). При одинаковых условиях окружающей среды обе разности потенциалов будут равны по модулю, но противоположны по знаку для данного обхода контура. Поэтому ЭДС не возникает в замкнутой цепи, составленной из различных металлов, находящихся при одинаковых внешних условиях.

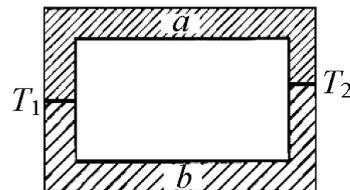


Рис. 53

Если температуры контактов отличаются ($T_1 \neq T_2$), то обе контактные разности потенциалов также отличаются, и появится в контуре ЭДС:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = U_1 - U_2 = \\ &= (A_2 - A_1) / e + (kT_1 / e) \ln (n_1 / n_2) - (A_2 - A_1) / e + (k T_2 / e) \ln (n_1 / n_2) = \\ &= (kT_1 / e) \ln (n_1 / n_2) - (k T_2 / e) \ln (n_1 / n_2) = \\ &= (k / e) (T_1 - T_2) \ln (n_1 / n_2). \end{aligned}$$

Обозначая удельной термоэдс $\varepsilon_0 = (k / e) \ln (n_1 / n_2)$, получаем выражение, используемое на практике чаще всего:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (T_1 - T_2) = \varepsilon_0 \Delta T.$$

Таким образом, термоэдс пропорциональна разности температур спаев.

ЯВЛЕНИЯ ЗЕЕБЕКА, ПЕЛЬТЬЕ И ТОМСОНА

Эффекты Зеебека, Пельтье и Томсона относятся к термоэлектрическим явлениям. Объединение этих трех явлений объясняется существованием корреляции между тепловыми и электрическими процессами в проводниках.

- Явление (эффект) Зеебека – возникновение электродвижущей силы в замкнутой электрической цепи, состоящей из двух разных металлических проводников, контакты которых находятся при различных температурах

(Thomas Johann Seebeck, немецкий физик, 1770-1831). Эффект Зеебека подчиняется закону: $\varepsilon = \varepsilon_0 (T_1 - T_2) = \varepsilon_0 \Delta T$, рассмотренному выше. Удельная термоэдс ε_0 зависит как от материала проводников, так и от интервала температуры.



Jean-Charles-Athanase Peltier



Thomas Johann Seebeck

- Явление (эффект) Пельтье – выделение или поглощение тепла в месте контакта двух металлов различной природы, по которым течет электрический ток (Jean-Charles-Athanase Peltier, французский физик, 1785-1845). Если электрический ток течет от источника внешней ЭДС по термопаре, спаи которой оказываются при одинаковой температуре ($T_1 = T_2$), то температура одного спая будет увеличиваться, а другого – уменьшаться по отношению к начальной температуре.

Это означает, что дополнительно к джоулевому теплу будет выделяться теплота в одном соединении и поглощаться в другом. Это количество тепла Q_p пропорционально силе тока I и времени его протекания t :

$$Q_p = \Pi \cdot I \cdot t,$$

где Π – коэффициент Пельтье. Он является функцией материала контактирующих проводников. Эффект Пельтье зависит от направления тока: результат теплового эффекта изменяется на противоположный при изменении полярности источника тока – горячий спай начнет остывать, а холодный спай будет нагреваться.

- Явление (эффект) Томсона – освобождение или поглощение некоторого количества тепла (тепло Томсона) при протекании электрического тока I по однородному проводнику, в котором предварительно была установлена разность температур ΔT :

$$Q_T = \alpha \Delta T I m.$$

Здесь α – коэффициент Томсона, зависящий от природы проводника. (Thomson sir William, lord Kelvin, английский математик и физик, 1824-1907). Явление Томсона объясняется изменением свойств проводника при его нагреве. В более нагретой части металла тепловая скорость и энергия

электронов повышены по отношению к холодной части. Поэтому диффузия электронов от нагретой части к холодной части больше, чем в обратном направлении. Таким образом, однородный проводник становится неоднородным при его неоднородном нагреве.

Иначе говоря, явление Томсона представляет модификацию явления Пельтье, с тем отличием, что неоднородность создана не различием химической природы проводника, а неоднородностью температуры в данном случае. Если электрический ток течет в таком проводнике против этой разности потенциалов, количество джоулевого тепла оказывается меньше на величину Q_T . Обратно, если появившаяся разность потенциалов способствует протеканию тока, количество тепла Q_T добавится к джоулевому теплу.

На основе эффекта Зеебека функционируют термопары и датчики температуры. Обыкновенная термопара – это последовательное соединение двух металлических проводников различной природы, подключенных свободными концами к электрическому измерительному прибору. Абсолютная точность измерения температуры при помощи термопар достигает 0,01 К. Чтобы увеличить чувствительность датчиков температуры, термопары включаются последовательно в термобатарей. Термобатарей могут быть использованы в качестве генераторов (источников) электрического тока, в том числе, прямых преобразователей солнечной энергии в электрическую энергию.

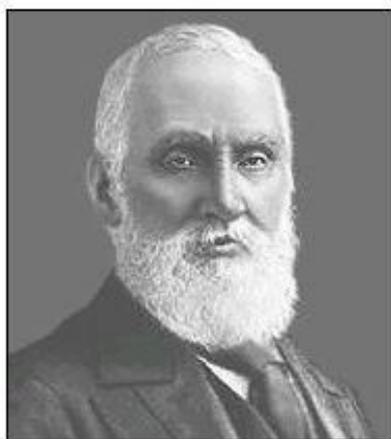
Эффект Пельтье используется в изготовлении бесшумных холодильников. Первые термоэлектрические холодильники, работающие на полупроводниках, были сконструированы под руководством Иоффе (Абрам Федорович Иоффе, русский физик, 1880-1960).

ПРОВОДИМОСТЬ ВАКУУМА

Вакуум – состояние газа, для которого длина свободного пробега молекул сравнима или больше линейных размеров сосуда, в котором заключен газ; при такой степени разрежения столкновениями между молекулами газа можно пренебречь. Чтобы в вакуумной трубке с двумя электродами (катод и анод) тек электрический ток, необходимо туда внести заряженные частицы, например, электроны.

Процесс выхода электронов из металлов называется эмиссией электронов. Существует несколько способов сообщения электронам дополнительной энергии, необходимой для их вырывания из металла:

- нагревание (термоэлектронная эмиссия),
- облучение металла электромагнитными волнами (фотоэлектрический эффект)
- бомбардировка поверхности металла электронами или другими частицами, когда падающая частица приводит к вырыванию нескольких электронов (вторичная электронная эмиссия) и
- выбивание электронов из металла сильным электрическим полем (автоэлектронная эмиссия).



Thomson lord Kelvin



Иоффе А.Ф.



Irving Langmuir

Термоэлектронная эмиссия – явление излучения электронов нагретыми металлами. Электроны, испущенные нагретыми металлами, получили название тепловых электронов. При нагревании металла скорость теплового движения свободных электронов увеличивается пропорционально $t^{1/2}$. При повышенной температуре накаливания скорость некоторых электронов увеличивается настолько, что они выходят из металла. В цепи, представленной на рис. 54 ток отсутствует при холодном катоде, так как электропроводность вакуума практически равна нулю. Если при помощи дополнительного источника тока нагревать катод, то из-за термоэлектронной эмиссии катод начинает испускать электроны и миллиамперметр регистрирует появление тока в контуре. Сила тока зависит от разности потенциалов между катодом и анодом.

Такие приборы – электронные лампы широко применяются в радиотехнике. В зависимости от конструкции различают диоды (двухэлектродная электронная лампа), триоды (трехэлектродная электронная лампа), тетроды, пентоды т.д. В зависимости от нагревателя катода, различают лампы прямого и косвенного накала. Анод имеет, чаще всего, форму цилиндра, вдоль оси которого расположен катод. Катод выполняется из тугоплавкого металла, например, вольфрама, молибдена и т.д. Сила тока в лампе зависит от напряжения анода U_a , температуры нити накаливания (катода), материала катода и геометрия электродов.

Зависимость силы анодного тока от напряжения, приложенного к аноду (рис. 55) называется вольтамперной характеристикой. Как это видно из рисунка, вольтамперная кривая диода имеет нелинейный характер. Это объясняется тем, что около нагретого катода существует электронное облако – пространственный заряд. При увеличении напряжения сила тока медленно увеличивается в области малого анодного напряжения: большая часть электронов снова возвращается в катод под воздействием сил отталкивания со стороны электронного облака. Однако оставшаяся часть достигает анода. При увеличении напряжения анода, плотность электронного облака убывает, в то время как сила тока увеличивается.

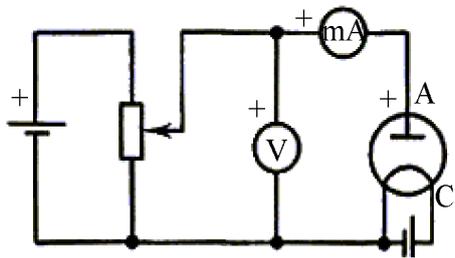


Рис. 54

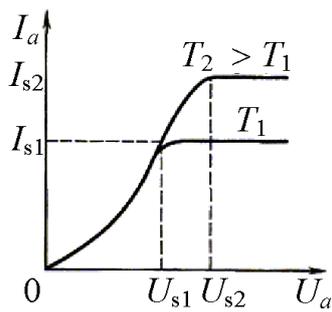


Рис. 55



Sir Owen W. Richardson

Вольтамперная характеристика вакуумного диода в области малых положительных значений напряжения анода U_a описывается законом трех-вторых Богуславского-Ленгмюра. (Irving Langmuir, американский физик и химик, 1881-1957. Нобелевский лауреат по химии, 1932):

$$I = BU_a^{3/2},$$

где B – коэффициент, зависящий от формы и размеров электродов, а также их взаимного расположения.

При определённом значении напряжения $U_a = U_n$ все электроны, исходящие из катода, достигают анода. Сила тока становится максимальной и дальнейшее увеличение напряжения не может больше менять силу тока. Эта сила тока названа током насыщения I_n . Рост температуры катода T приводит к тому, что электронное облако около катода становится более плотным. Как следствие, сила тока достигает максимального значения при более высоком напряжении анода, и ток насыщения увеличивается (рис. 55).

Плотность тока I_s насыщения подчиняется закону, названному формулой Ричардсона-Дэшмана

$$I_s = CT e^{-\frac{A}{kT}},$$

где A – работа выхода электронов из катода, T – абсолютная температура, C – постоянная для всех металлов. (sir Owen Williams Richardson, английский физик, 1879-1959. Нобелевский лауреат по физике, 1928).

Как это следует из формулы Ричардсона-Дэшмана, уменьшение работы выхода приводит к увеличению плотности тока насыщения. Если потенциал анода меньше потенциала катода, ток в цепи лампы исчезнет. Это свойство диодов односторонней проводимости позволяет их использовать в качестве выпрямителя переменного тока (кенотрона).

В большей части электронных вакуумных приборов электрический ток образован электронами, высвободившимися из нагретого катода (электронные лампы, кинескопы, рентгеновские трубки и т.д.). Устройство, предназначенное для создания ориентированного пучка быстрых тепловых

электронов, называется электронной пушкой. Электронные пучки вызывают люминесценцию (флюоресценцию) ряда веществ (стекло, сульфат цинка, кадмия и др.). Такие вещества называют люминофорами. Электронные пучки используются в вакуумной электронике (свечение экранов телевизоров, осциллографов), электронных преобразователях изображения и т.д.

Электронные пучки, при столкновении с телами, вызывают их нагрев. Это свойство применяется для сварки сверхчистых металлов в пустоте. Электронные пучки отклоняются в электрическом и магнитном полях. Возможность управления электронным пучком при помощи электрических и магнитных полей и люминесценция экранов, покрытых люминофором, под воздействием пучков электронов использована в кинескопах.

ПРОВОДИМОСТЬ ГАЗА

При обыкновенных условиях в отсутствие ионизации газ – изолятор. Под внешним возбуждением газ становится проводником электрического тока. Электропроводность газа можно менять посредством нагрева и при помощи облучения ультрафиолетовыми, рентгеновскими, радиоактивными лучами и т.д.

При нормальных условиях в отличие от металлов и электролитов, газ не содержит носителей тока, свободных электронов и ионов, так как он состоит из электрически нейтральных атомов и молекул. Вследствие внешнего возбуждения газ ионизируется: происходит высвобождение электронов из атомов и молекул. При ионизации газа образуются положительные ионы и электроны. Отдельные нейтральные атомы или молекулы газа могут присоединить к себе электроны с образованием отрицательных ионов.

Для ионизации атома или молекулы надо совершить работу ионизации газа, которая определяется интенсивностью взаимодействия освобожденного электрона и образующегося иона. Величина этой работы зависит от химической природы газа. Если атом (или молекула) потерял два электрона, он становится дважды ионизированным и превращается в двухвалентный ион. Процесс ионизации газа сопровождается процессом рекомбинации – преобразования ионов в атомы или нейтральные молекулы. Если внешняя ионизация прекращается, проводимость газа исчезает, и газ перестает быть проводником электрического тока. При устойчивой во времени мощности ионизации, устанавливается динамическое равновесие между процессом ионизации и рекомбинации: количество пар вновь образованных заряженных частиц в среднем равно числу пар ионов, исчезающих вследствие рекомбинации.

Протекание тока в газе – это процесс, который называется газовым разрядом. Если газовый разряд происходит в присутствии внешней ионизации, то такой разряд называется *несамостоятельным*. Несамостоятельный разряд можно изучать при помощи оборудования, в котором ультрафиолетовое облучение действует на воздушный промежуток

между пластинами конденсатора (рис. 56a). Вольтамперная характеристика самостоятельного разряда представлена на рис. 56b. Если увеличивать напряжение, приложенное к пластинам конденсатора, то сила тока I увеличится до некоторого значения I_s , названного током насыщения. Последующее увеличение напряжения U до $U_{пр} = U_d$ не меняет силу тока.

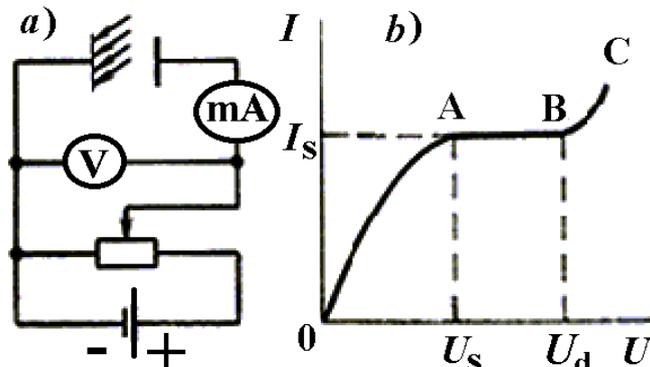


Рис. 56

В процессе ионизации противоположные по знаку заряды образуются в зазоре конденсатора. Если напряжение между пластинами конденсатора понизить до нуля, сила тока также станет равной нулю (точка 0 на рис. 56b), так как носители тока перемещаются произвольно. По мере увеличения напряжения между пластинами конденсатора, все большее число ионов и электронов вовлекается в упорядоченное движение. Они достигают обкладок конденсатора, и сила тока увеличивается. При достижении напряжения, когда все образованные заряды достигают обкладок конденсатора, сила тока становится максимальной для данного значения интенсивности ионизации. Увеличение напряжения до некоторого значения $U_{пр} = U_d$ не способно изменить силу тока. Если ионизация прекращает свое действие, то разряд также останавливается.

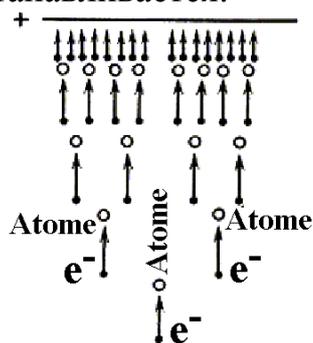


Рис. 57



Василий Владимирович Петров

При дальнейшем возрастании напряжения $U > U_{пр}$ сила тока резко увеличивается. Если внешняя ионизация снимается, разряд не останавливается. Это означает, что ионы, необходимые для поддержки проводимости газа, теперь создаются самим разрядом. Разряд в газе, который осуществляется после окончания действия внешней ионизации, называется самостоятельным газовым разрядом. Он приводит к пробое газодieleктрика. Минимальное напряжение $U_{пр} = U_d$, при котором начинается

самостоятельный газовый разряд, называется пробивным (взрывным) напряжением разряда в газе или напряжением пробоя

Самостоятельный газовый разряд поддерживается ударной ионизацией газа, которая осуществляется электронами, ускоренными в электрическом поле. Под воздействием электрического поля электроны перемещаются с ускорением, их кинетическая энергия увеличивается, благодаря работе сил электрического поля:

$$mv^2/2 = eE\langle l \rangle.$$

Здесь v – скорость и $\langle l \rangle$ – длина свободного пробега электрона.

Если кинетическая энергия электрона становится равной или превышает энергию ионизации атома, атом может быть ионизированным при их столкновении. Вследствие ионизации образуется положительный ион и еще один электрон. Первый электрон теряет свою энергию при столкновении с ионизируемым атомом. Однако, при достаточно интенсивном электрическом поле оба электрона (столкнувшийся и вновь образованный) на длине свободного пробега приобретают энергию, необходимую для повторной ионизации атомов. При следующем столкновении осуществляется ионизация уже двух атомов, и число электронов увеличивается до четырех, после третьей ионизации, появляется восемь электронов, после четвертого – шестнадцать (рис. 57). В газе устанавливается процесс образования электронных и ионных лавин (положительные ионы, образующиеся при ударной ионизации, не представлены на рисунке).

Чтобы разряд был самостоятельным, образование электронных и ионных лавин является необходимым, но не достаточным условием. При отсутствии внешней ионизации необходим также процесс воспроизведения новых электронов в газе вместо тех, которые направились к аноду. Такие электроны появляются у катода в процессе бомбардировки катода протонами и положительными ионами, перемещающимися к катоду под воздействием электрического поля.

При столкновении с катодом ион может выбить электроны с его поверхности. Явление извлечения электронов протонами и ионами с поверхности катода получило название *вторичной электронной эмиссии*. Число электронов, освобожденных ионом с поверхности катода, зависит от энергии иона и материала катода. Только одновременное существование этих двух процессов (образование электронных и ионных лавин и вторичная электронная эмиссия) приводит к самостоятельному разряду.

В зависимости от давления газа, напряжения на электродах, формы и расположения электродов различают разные типы самостоятельного разряда в газе.

1. *Коронный разряд*. Если при атмосферном давлении неоднородное электрическое поле создано при помощи электродов, из которых одно плоское и другое является остроконечным, напряженность электрического поля вокруг каждого из электродов – различная. Для острия плотность заряда

максимальна, поэтому при увеличении электрического напряжения напряженность поля здесь достигает некоторого значения E раньше, чем около плоского электрода. Около острия наблюдается неполный пробой газа: будут образованы электронные и ионные лавины, и начнется свечение газа. Свечение газа около острия напоминает кольцо (корону), поэтому этот тип газового разряда называется коронным. В технике коронный разряд используется в электрических фильтрах, предназначенных для очистки газа от твердых и жидких примесей.

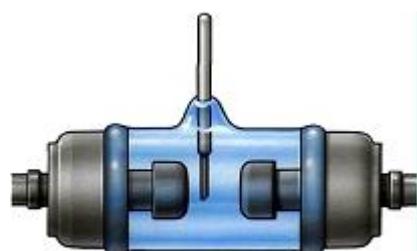
2. *Кистевой и искровой разряд.* При увеличении напряжения коронный разряд преобразуется. Он принимает вид более мощных электронных лавин, образуются сверкающие специфические ветви, и разряд превращается в искру. При дальнейшем повышении напряжения, ветви искрового разряда увеличиваются, становятся длиннее, и будут растянуты вплоть до достижения другого электрода. Образуется мощная взрывная искра. Взрывчатый разряд носит прерывистый характер, так как в процессе пробоя происходит короткое замыкание, и напряжение между электродами сильно падает. Искра исчезает, напряжение снова увеличивается, и процесс пробоя межэлектродного пространства повторяется.

3. *Электрическая дуга.* Если в электрической цепи источник тока – мощный, искра может превратиться в электрическую дугу. Электрическая дуга была получена впервые Петровым В.В. в 1802 году (русский физик, 1761-1834). Он соединил последовательно с мощной электрической батареей и ввел в соприкосновение два куска древесного угля, а затем начал их раздвигать. Так как идеального контакта не было в точках соприкосновения углей, сопротивление было большое. При пропускании тока концы электродов в точках соприкосновения нагрелись, в то время как сами угли не были нагреты, потому что теплопроводность угля – плохая. Раздвижение электродов привело к тепловой ионизации воздушного (газового) пространства, сопровождаемое термоэлектронной эмиссией с нагретого катода. Наиболее нагретая точка дуги была кратером дуги, образованным на аноде в результате его бомбардировки электронами. Температура кратера при нормальном атмосферном давлении достигала 4000°C .

Дуговой разряд наблюдается в случаях, когда в результате нагрева катода главной причиной ионизации газа выступает термоэлектронная эмиссия – излучение электронов сильно нагретыми телами. Электроды могут быть металлическими при дуговом разряде. Дуговой разряд применяется для разных целей: сварка и резка металлов, в электрических печах, прожекторах, разрядниках, проекционных аппаратах и кинопроекторах, и как мощный источник света.

4. *Тлеющий разряд.* При приложении постоянного напряжения порядка нескольких сотен вольт к электродам, расположенным внутри стеклянной трубки, из которой откачивается воздух, при низком давлении появится газовый разряд, который называется тлеющим. В процессе откачки воздуха из трубки расстояние между соседними атомами газа и, следовательно, длина свободного пробега электронов и ионов увеличивается. Поэтому электроны

могут приобрести энергию, необходимую для ударной ионизации, при более низкой напряженности поля между электродами.



Газовый разрядник

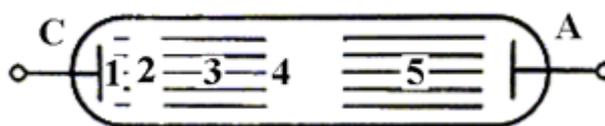


Рис. 57

Если постепенно уменьшать давление в трубке без изменения напряжения, разряд вначале будет кистевой. Затем появится блестящий, извилистый и тонкий канал, соединяющий электроды, и при давлении порядка 1 - 15 Па разряд ведет себя так, как это показано на рис. 58. Сверкающий тонкий слой 1 примыкает к катоду С (катодная светящаяся пленка), после которого устанавливается пространство темного катода 2, затем расположены следующие слои: сверкающий слой 3 (проблесковое свечение) и второе темное пространство 4 (темное пространство Фарадея). После второго темного пространства, расположена блестящая область 5 (положительный столб).

Такое особенное свечение газа связано с распределением потенциала в разрядной трубке. Свечение положительного столба обусловлено излучением света возбужденными атомами, поэтому оно имеет характеристический цвет. Трубка, заполненная неонам, испускает красно-оранжевое свечение, и если трубка заполнена аргоном – цвет сине-зеленый. Это свечение используется в рекламах. При определенном режиме тлеющего разряда распыляется материал катода; это явление применяется для металлизации поверхностей, для изготовления малых зеркал и полупрозрачных пластин. При давлении газа 1,4 - 1,2 Па свечение газа ослабляется, и начинают светиться стенки трубки. В тлеющем разряде положительные ионы освобождают большое количество электронов с катода. Если разряд происходит в трубке с очень большим разрежением, средняя длина свободного пробега электронов увеличивается, и темное прикатодное пространство расширяется.

Электроны, выбитые из катода положительными ионами, движутся почти без столкновений и образуют катодные лучи. Эти лучи распространяются перпендикулярно поверхности катода. Электроны, ускоренные полем, попадая на стекло, вызывают его свечение – катодное свечение. Если в аноде электронной лампы просверлить отверстие, часть электронов, ускоренных электрическим полем, пролетит сквозь отверстие, образуя электронный пучок за анодом. Если в катоде просверлить малые отверстия, положительные ионы, бомбардирующие катод, образуют за катодом пучок лучей, которые получили название каналовые (анодные) лучи.

ПРОВОДИМОСТЬ ПЛАЗМЫ

Плазма – это сильно ионизированный газ, в котором концентрация электронов приблизительно равна концентрации положительных ионов. По способу формирования различают два типа плазмы: высокотемпературная плазма и газоразрядная плазма.

Высокотемпературная плазма состоит из электронов и ионов, и их кинетические энергии в среднем равны, такая плазма – изотермическая, т.е. равновесная, так как при данной температуре потеря заряженных частиц компенсируется термической ионизацией. В зависимости от температуры плазма бывает горячей ($T \approx 10^8$ К) или холодной ($T \approx 10^4 - 10^5$ К).

Средняя кинетическая энергия частиц – различная в газоразрядной плазме. Электроны обладают наиболее высокой температурой (T_e), затем идут ионы (T_i) и нейтральные атомы (T_0). Это означает, что плазма не изотермическая, следовательно, неравновесная.

Так как концентрация электронов равна концентрации ионов, плазма электрически нейтральна. Количественно, переход ионизированного газа в состояние плазмы, оценивается при помощи характеристического размера плазмы D , названного радиусом экранирования Дебая: $D = 5\sqrt{T_e / n}$, где T_e и n – температура и концентрация электронов. Доминирующее объединение частиц противоположного знака осуществляется вокруг любого заряда, что приводит к нейтрализации (экранированию) этой системы на расстоянии приближённо равном D . (Pétrus Debye, американский физик нидерландского происхождения, 1884-1966. Нобелевский лауреат по химии, 1936).

Чтобы ионизированный газ преобразовался в плазму, линейная размерность L области (например, сферический радиус стеклянной емкости), занятой газом, должен превышать в нескольких раз радиус экранирования, т.е. $L \gg D$ или $L \gg 5\sqrt{T_e / n}$. Следовательно, плазму можно рассматривать как квазилинейный ансамбль большого числа заряженных частиц, который занимает область с линейным размером $L \gg D$. Плазма обладает рядом специфических свойств, отличающих ее от нейтрального газа. Эти различия позволяют рассмотреть плазму как особое (четвертое) состояние вещества.

Взаимодействие частиц плазмы между собой характеризуется кулоновыми силами притяжения и отталкивания убывающими с расстоянием намного медленнее, чем силы взаимодействия между молекулами нейтрального газа, которые являются силами, действующими на коротком расстоянии. Частицы плазмы, особенно электроны, легко перемещаются под действием электрического поля. Электрические и магнитные поля сильно действуют на плазму, вызывая появление в нем объёмных зарядов и токов.

Согласно характеру проводимости, плазма приближается к металлам (в металлах объёмный заряд также равен нулю), обладая очень хорошей электропроводностью. В отличие от металлов проводимость плазмы увеличивается с увеличением температуры. Плазма – также хороший проводник тепла. Поэтому тепло легко покидает плазму: электроны и ионы

быстро переносят теплоту на стенки сосуда, температура плазмы падает, и осуществляется рекомбинация зарядов.

Для существования плазмы требуется постоянное внесение энергии извне. Чтобы плазма не касалась стенок установки и не передавала им теплоты, необходимо ее изолировать от стенок установки. Если плазма находится в магнитном поле, характер движения электронов и ионов изменяется, они перемещаются там по траекториям, представляющим винтовые линии вокруг силовой линии магнитного поля. Электроны перемещаются в одном направлении, а положительные ионы – в обратном направлении. Если можно было бы создать такое магнитное поле, линии индукции которого окружали бы плазму со всех сторон (магнитную ловушку), задача теплоизоляции плазмы была бы решена. От решения этой задачи зависит проблема управляемого термоядерного синтеза. В действительности, эта задача гораздо сложнее.

Холодная плазма применяется в газовых лазерах, в магнитогидродинамических генераторах, плазменных ракетных двигателях. Холодная плазма, созданная в плазмотронах (плазменных генераторах), используется для резки и сварки металлов, производстве некоторых химических компонентов, не существующих в природе: CaCl , Na_2 , Al_2O и др.

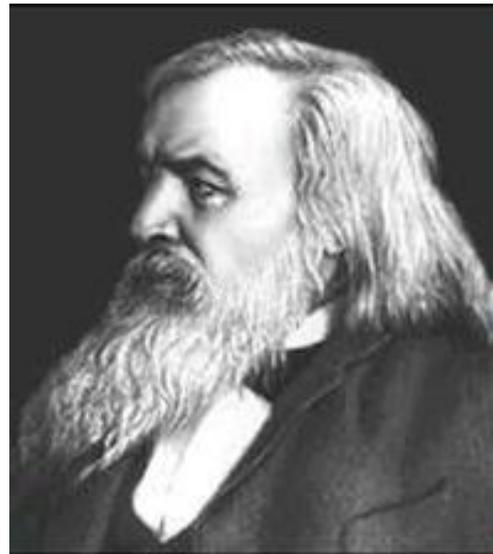
Плазма – состояние вещества, наиболее распространенное во вселенной. Все звезды, в том числе, Солнце, звездные атмосферы, галактическая туманность и межзвездная среда представляют четвертое состояние вещества – плазму. Наша Земля окружена также плазменной оболочкой – ионосферой, снаружи которой находится радиационный пояс, окружающий Землю, где плазма также существует. Магнитные бури и полярные сияния обусловлены процессами, происходящими в околоземной плазме. Отражение радиоволн ионосферной плазмой обеспечивает дальнюю радиосвязь на Земле. Кроме всего, физика плазмы имеет большое значение для изучения процессов, проходящих в космическом пространстве.

Проводимость полупроводников. Собственная проводимость

Полупроводники представляют широкий класс веществ, удельное сопротивление которых уменьшается по экспоненциальному закону с повышением температуры и меняется в широких пределах. В периодической системе элементов Менделеева полупроводники составляют группу элементов, представленную на рис. 59. Широкое применение имеют полупроводники: германий Ge , кремний Si и теллур Te . Внешняя оболочка атомов кремния и германия имеет 4 валентных электрона, создающие ковалентные связи с валентными электронами соседних атомов. Кристаллические полупроводники – твердые тела, у которых при 0 К есть насыщенная электронами валентная энергетическая зона и отделенная относительно узким интервалом энергии запрещенной зоны от пустой зоны проводимости. (Дмитрий Иванович Менделеев, русский химик, 1834-1907).



Debay Petrus



Менделеев Д.И.

Электропроводность химически чистого полупроводника называется собственной проводимостью. Электронная проводимость (проводимость типа "n") появляется, когда электроны переходят из валентной энергетической зоны (самая верхняя зона, насыщенная электронами) в зону проводимости (рис. 60). Энергия, которая должна быть затрачена в этом случае, равна ширине зоны собственной проводимости и названа энергией активации собственной проводимости ΔW_0 . Значения энергии активации (в эВ) собственной проводимости полупроводников указаны в малых кругах рис. 59. Проводимость полупроводника γ увеличивается с повышением температуры T по закону:

$$\gamma = \gamma_0 e^{-\Delta W_0 / 2kT},$$

где k – постоянная Больцмана. Электрическое сопротивление полупроводников уменьшается при нагревании, что существенно отличает полупроводники от металлов.

Наряду с нагреванием, проводимость полупроводников может быть обеспечена благодаря действию достаточно интенсивного электрического поля и фотоэлектрического эффекта (фотопроводимость полупроводников).

Переход электронов из зоны валентности в зону проводимости создает свободные энергетические уровни в насыщенной зоне полупроводника. Движение электрона в этой зоне под действием электрического поля эквивалентно движению положительного заряда ("дырки") численно равной заряду электрона. Дырки перемещаются в направлении электрического поля. Проводимость, осуществленная дырками, называется дырочной проводимостью или проводимостью типа "p".

Полная проводимость полупроводников, составленная из проводимостей типа-n и типа-p, равна:

$$\gamma = en_e u_e + en_h u_h,$$

где e абсолютное значение элементарного заряда, носителей тока

(электронный заряд), n_e и n_h – равные концентрации электронов и дырок, u_e и u_h подвижность электронов и дырок, различных в связи с отличием эффективных масс и времени свободного пробега этих частиц.

5 В (11)	6 С (52)			
	14 Si (11)	15 P (1,5)	16 S (2,5)	
	32 Ge (0,72)	33 As (1,2)	34 Se (1,7)	
	50 Sn (0,1)	51 Sb (0,12)	52 Te (0,36)	53 I (125)

Рис. 59

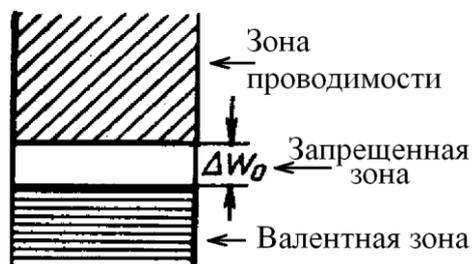


Рис. 60

ПРИМЕСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Проводимость полупроводников называется примесной или внешней, когда электропроводность определяется наличием примесных центров. Под примесными центрами понимают: а) атомы чужих элементов; б) избыточные атомы (по сравнению со стехиометрической композицией) элементов, входящих в полупроводники; с) всевозможные дефекты кристаллической решетки: незанятые узлы, междоузельные атомы или ионы, дислокации в кристалле, изломы и т.д.

Примеси видоизменяют периодическое электрическое поле кристалла и оказывают влияние на движение и энергетическое состояние электронов. Энергетические уровни валентных электронов, принадлежащие атомам примесей, не размещаются в дозволённых энергетических зонах основного кристалла и образуют энергетические уровни примесей, расположенные в запрещенной зоне (локальные уровни).

Примеси могут служить дополнительными источниками электронов в кристалле. Например, в результате замещения четырёхвалентного атома германия пятивалентным атомом фосфора (мышьяка или сурьмы) один электрон атома примеси не может образовать ковалентную связь и становится "излишним".

Энергетический уровень такого электрона расположен ниже зоны проводимости (рис. 61). Эти уровни, заполненные электронами, называются донорными уровнями. Атомы примесей, поставляющие электроны, называются донорными атомами. Чтобы перенести электроны с донорных уровней в незаполненную зону проводимости требуется малая энергия ΔW_e . Например, для кремния $\Delta W_e = 0,054$ эВ, если примесь – мышьяк. В связи с переходом электронов с донорных уровней в зону проводимости появляется примесная проводимость в полупроводнике. Полупроводники этого типа названы электронными полупроводниками или полупроводниками типа: n.

Когда атом четырёхвалентного германия заменен в кристаллической решетке атомом с тремя валентными электронами (бор, алюминий, индий), германию не хватает одного электрона для образования ковалентной связи.

Дефицитный электрон может быть заимствован у соседнего атома германия, в решетке которого появляется положительная дырка (рис. 62). Пошаговое заполнение электронами дырок, образованных в атомах германия, приводит к появлению дополнительной проводимости полупроводника. Энергетические уровни свободных примесей считаются акцепторными уровнями. Они расположены немного выше (на расстоянии ΔW_h), чем верхний уровень зоны валентности кристалла (рис. 63). Например, при внедрении бора в решетку кремния $\Delta W_h = 0,08$ эВ. Атомы примесей такого вида названы акцепторными атомами. Переход электронов из заполненной зоны валентности на акцепторные уровни приводит к возникновению примесной, дырочной проводимости (проводимость типа-р). В этом случае полупроводники называются дырочными полупроводниками или полупроводниками типа-р.

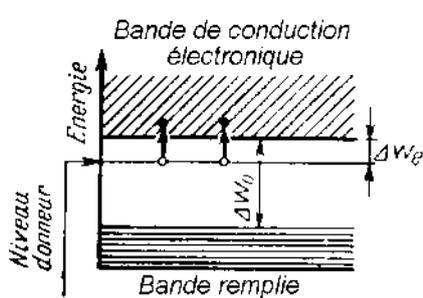


Рис. 61

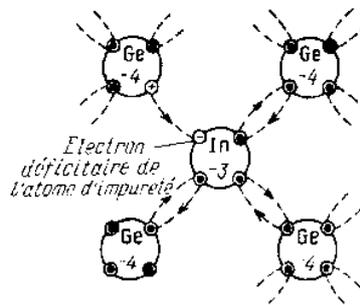


Рис. 62

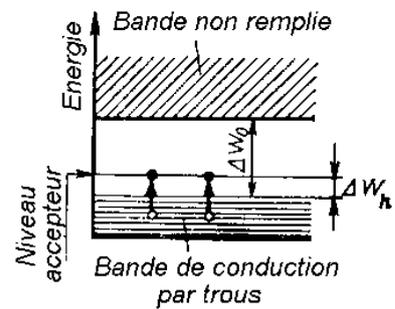


Рис. 63

При допировании полупроводника одновременно донорами и акцепторами, характер проводимости определяется примесью, концентрация носителей тока которой больше. Какой бы ни был тип проводимости, число носителей тока в полупроводниках, значительно меньше, чем в металлах. Концентрация электронов и дырок в полупроводниках, в отличие от металлов, сильно зависит от температуры, увеличиваясь с ее повышением.

КОНТАКТ ДВУХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

Контакт двух полупроводников с различными типами проводимости называется *электронно-дырочный переход* (n-p-переход). Обычно, этот переход реализуется в том же кристалле полупроводника, где создаются области различной проводимости (n и p), введением соответствующих примесей (допинг).

В результате перехода электронов из n-полупроводника в p-полупроводник и переходом дырок в обратном направлении образуется двойной электрический слой в p-n-переходе (так как $A_p > A_n$, где A_p и A_n работы выхода электрона из полупроводников p и n типа). В этом случае наблюдается избыток положительных донорных ионов в контактной области n-типа и избыток отрицательных акцепторных ионов в контактной области p-типа. Следовательно, контактная область двух полупроводников обеднена в основных носителях и обладает ослабленной проводимостью, то есть

представляет запирающий слой. Толщина р-п-перехода d в практически важных случаях составляет $10^{-4} - 10^{-5}$ см.

Если к контактной области приложить внешнее напряжение таким образом, чтобы п-полупроводник был связан с положительным полюсом источника ЭДС (рис. 64), внешнее электрическое поле усиливает поле контактного слоя и вызывает движение электронов п-полупроводника и дырок р-полупроводника в направлениях, противоположных по обе стороны р-п-перехода. Это ведет к расширению запирающего слоя и увеличению его сопротивления. Направление внешнего поля, расширяющее запирающий слой, называется *обратным* направлением или *запирающим* направлением. В этом случае, электрический ток практически не проходит через контакт двух полупроводников.

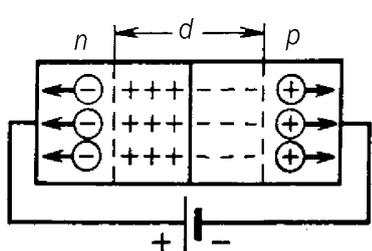


Рис. 64

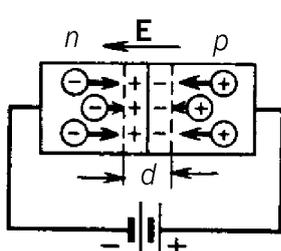


Рис. 65

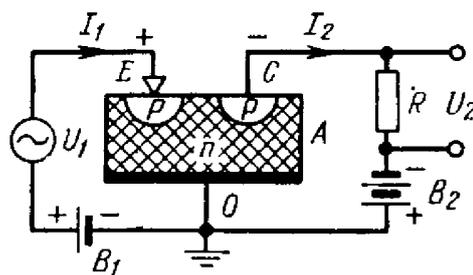


Рис. 66

В *проводящем* или *прямом* направлении (рис. 65) внешнее электрическое поле ориентировано против поля контактного слоя. Электроны и положительные дырки перемещаются *навстречу* друг другу к р-п-переходу под воздействием поля, при этом ширина контактного слоя и его сопротивление уменьшаются. Следовательно, в этом направлении электрический ток может пересечь контакт двух полупроводников.

Действие р-п-перехода, обладающего односторонней проводимостью, подобно выпрямляющему эффекту двухэлектродной лампы, *диода*. Полупроводник с р-п-переходом называется *полупроводниковым диодом*.

ТРАНЗИСТОРЫ

У *транзисторов* (*полупроводниковых триодов*) есть два р-п-перехода. Схема точечного триода на германии показана на рис. 66. Кристалл германия А, обладающий электронной проводимостью п-типа, прикреплен к основанию О в качестве базы. В окрестности двух точечных электродов расположены области дырочной проводимости р-типа: эмиттер Е и коллектор С. Напряжение, предназначенное для усиления U_1 , приложено к эмиттеру. Усиленное напряжение U_2 снимается с сопротивления нагрузки R . Напряжение U_{EO} между эмиттером и базой – положительное, поэтому электрический ток I в цепи эмиттер–база всегда течет через кристалл германия от Е к О по часовой стрелке в прямом направлении р-п-перехода, расположенного в окрестности эмиттера. Напряжение U_{CO} между коллектором и базой – отрицательное, и электрический ток в цепи коллектор–база протекает через кристалл германия только от О к С, то есть в

направлении, соответствующем большому сопротивлению р-n-перехода, расположенному в окрестности коллектора.

Напряжение U_{CE} между эмиттером и коллектором положительно. Даже для малых значений U_{EC} и U_{EO} , напряженность электрического поля велика в окрестности острия эмиттера. В германии р-типа, прилегающем к эмиттеру, образуются положительные дырки. Переход дырок германия р-типа в основную часть кристалла (n-типа) называется *инжекцией дырок*. Эмиттер и прилегающий к нему германий р-типа представляют источник подвижных носителей тока, иначе говоря, играют роль катода электронной лампы. Контакт германия р-типа и германия n-типа в окрестности коллектора представляет слабое сопротивление для дырок. Возрастание тока I_2 в цепи коллектора и падение напряжения на сопротивлении R зависят от числа дырок, которые в единицу времени достигают р-n-перехода, расположенного в окрестности коллектора, и понижают потенциальный барьер. Число дырок зависит от напряженности электрического поля в окрестности эмиттера, иначе говоря, изменяется в согласии с колебаниями входного напряжения U_1 . Поэтому выходное напряжение U_2 усилителя (рис. 6б) зависит от входного напряжения U_1 .

ЛИТЕРАТУРА

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Кн. 2. – М.: Апрель - АСТ. 2003.
2. Иродов И.Е. Электромагнетизм. Основные законы. – М.-СПб.: Физматлит. 2000.
3. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 3. – М.: Физматлит-МФТИ. 2002.
4. Калашников С.Г. Электричество. – М.: Физматлит. 2003.
5. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. М.- СПб., 2002.
6. Геворкян Р.Г. Курс физики. М., 1979.
7. Чертов А.Г. Международная система единиц измерений. – М.: Высшая школа. 1977.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	СТР
ВВЕДЕНИЕ	3
I. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ПУСТОТЕ	4
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЗАРЯДЫ	4
ЗАКОН КУЛОНА	5
ВЕКТОР НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ	6
ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ. СЛОЖЕНИЕ ПОЛЕЙ	8
ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ	9
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ	9
ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ ПОЛЯ. ТЕОРЕМА ГАУССА-ОСТРОГРАДСКОГО	11
ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛЕЙ	14
ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ	16
ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ	19
НАПРЯЖЕННОСТЬ КАК ГРАДИЕНТ ПОТЕНЦИАЛА	20

УРАВНЕНИЕ ПУАССОНА	22
ПРИМЕРЫ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА И РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ	23
II. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	24
ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	24
ПОЛЯРИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИКОВ	25
ВЕКТОР ПОЛЯРИЗАЦИИ. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ВОСПРИИМЧИВОСТЬ	25
ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКЕ. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОНИЦАЕМОСТЬ	26
ВЕКТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СМЕЩЕНИЯ	27
СЕГНЕТОЭЛЕКТРИЧЕСТВО	28
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСТВО	29
ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ	30
ПРИМЕР РАСЧЕТА ЭЛЕКТРОЕМКОСТИ УЕДИНЕННОГО ПРОВОДНИКА	32
ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ЁМКОСТИ КОНДЕНСАТОРОВ	32
СОЕДИНЕНИЕ КОНДЕНСАТОРОВ	33
ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ	34
ОБЪЁМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ	35
III. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	36
УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ	38
ЗАКОН ОМА. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	39
СОЕДИНЕНИЕ ПРОВОДНИКОВ	42
ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ	42
СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ	43
ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА. НАПРЯЖЕНИЕ. ОБОБЩЁННЫЙ ЗАКОН ОМА	43
ЗАМКНУТАЯ ЦЕПЬ	45
РАБОТА И МОЩНОСТЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОН ДЖОУЛЯ-ЛЕНЦА	47
ПРАВИЛА КИРХГОФА	48
ПЕРЕХОДНЫЙ ТОК. ЗАРЯД И РАЗРЯД КОНДЕНСАТОРА	51
IV. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА	53
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ НА ГРАНИЦЕ ДВУХ ДИЭЛЕКТРИКОВ	53
ЭЛЕКТРОННАЯ (КЛАССИЧЕСКАЯ) ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ	54
ЗАКОН ВИДЕМАНА-ФРАНЦА	56
ПОНЯТИЯ О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ	57
КОНТАКТ МЕТАЛЛА С ВАКУУМОМ	59
КОНТАКТ ДВУХ МЕТАЛЛОВ	59
ЯВЛЕНИЯ ЗЕЕБЕКА, ПЕЛЬТЬЕ И ТОМСОНА	60
ПРОВОДИМОСТЬ ВАКУУМА	62
ПРОВОДИМОСТЬ ГАЗА	65
ПРОВОДИМОСТЬ ПЛАЗМЫ	70
ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ. СОБСТВЕННАЯ ПРОВОДИМОСТЬ	71
ПРИМЕСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ ПОЛУПРОВОДНИКОВ	73
КОНТАКТ ДВУХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ	74
ТРАНЗИСТОРЫ	75
ЛИТЕРАТУРА	76