Э. Уиттекер

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Э.Уиттекер

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА

Данная книга представляет собой одно из наиболее полных собраний классических результатов по аналитической механике. В первых главах данной книги изложены основы аналитической динамики, такие как кинематика, динамика твердого тела, уравнения движения, методы их интегрирования, теория колебаний и другие. Также приведены все известные на начало века интегрируемые задачи в динамике материальной точки и динамике твердого тела. Кроме того, в книге освещены такие вопросы, как теория преобразований в динамике, теория гамильтоновых систем и интегрирование при помощи рядов. Много места уделено небесной механике и, в частности, задаче трех тел. Книга предназначена для студентов, аспирантов и полезна для научных сотрудников и преподавателей.

Содержание

Предметный указатель

От редакции

Предлагаем читателю классический трактат Э. Уиттекера по аналитической механике, который даже в последние десятилетия выдержал несколько зарубежных переизданий. Мы сохранили терминологию и обозначения перевода 1935 г., выполненного И. Г. Малкиным — известным специалистом по теории устойчивости движения. Некоторые архаизмы придают книге отпечаток той эпохи российской науки, когда небесную механику писали с прописных букв, а на первом месте в динамике стояла явная «интеграция» дифференциальных уравнений. Однако отметим, что именно Уиттекер впервые в доступной форме вводит в общий курс механики результаты о неинтегрируемости уравнений динамики (теоремы Брунса и Пуанкаре, гл. XIV), а также в последних своих переизданиях обсуждает качественные вопросы движения. В главе XVI он приводит свои результаты по проблеме построения адельфического интеграла, которые нашли свое место в теории нормальных форм, развитой Дж. Д. Биркгофом, К. Зигелем, Ю. Мозером и др.

Возникший сейчас подъем интереса к теории динамических систем нисколько не умалил ценность классического труда, равного которому по полноте охвата материала, точности и лаконичности изложения до сих пор не существует. Этим объясняется также то, что мы отказались от каких-либо комментариев. В противном случае пришлось бы написать отдельную обширную книгу. Мы устранили лишь некоторые неточности и опечатки предыдущего издания.

Предисловие автора к третьему английскому изданию

Главы I–IV этого издания воспроизведены фотолитографически (с некоторыми исправлениями и дополнительными литературными ссылками) со второго издания. Главы XV (Общая теория траекторий) и XVI (Интегрирование при помощи рядов) целиком переделаны в соответствии с исследованиями последних одиннадцати лет. Выражаю свою признательность д-ру T. M. Cherry из Кембриджа и профессору I. L. Synge из Дублина за их любезную помощь.

Эдинбург,
июль 1927

Э. Уиттекер

Содержание

Глава I
Элементы кинематики

§ 1. Движение твердого тела. Предметом *аналитической механики* является изучение движения материальных тел, вызванного их взаимодействием, средствами математического анализа. Является целесообразным отвлечься вначале от причин движения и начать с рассмотрения различных возможных видов движения. Так трактуются вопросы движения в *кинематике*. Ей и посвящен ряд предложений, излагаемых в этой главе и имеющих применение в дальнейших исследованиях.

Кинематика сама по себе является обширной наукой, для изучения которой мы отошлем читателя к специальным монографиям, например к монографии Кёнигса (Koenigs, Paris 1897). Здесь мы ограничиваемся рассмотрением только тех положений кинематики, которые имеют значение при применении кинематики к динамике.

Материальное тело называется *твердым*, если расстояние между двумя любыми его точками не изменяется, так что тело не может ни растягиваться, ни сжиматься, ни изменять свою форму каким-либо другим способом, но может, однако, изменять свое положение относительно окружающей его среды.

Если твердое тело переходит из одного положения в другое, то это изменение положения называется движением тела. Некоторые отдельные частные виды движения имеют специальные названия: если при движении все точки тела, лежащие на некоторой прямой L, остаются неподвижными в пространстве, то такое движение называется *вращением вокруг прямой* L; если при движении одна точка P тела остается неподвижной, то движение называется *вращением вокруг точки* P; если прямые, соединяющие начальные и конечные положения всех точек тела, образуют параллельные отрезки одной и той же длины l, то такое движение называется *поступательным движением* в направлении этих прямых на отрезок l.

§ 2. Теорема Эйлера о вращении тела вокруг точки. Допустим, что одна из точек твердого тела закреплена неподвижно в пространстве. Пусть тело вращается по произвольному закону вокруг этой неподвижной точки. Рассмотрим два любых положения тела и обозначим их соответственно через P и Q. Покажем, что из положения P тело может быть переведено в положение Q вращением вокруг определенной прямой L, проходящей через неподвижную точку, так что, следовательно, *вращение вокруг точки эквивалентно вращению вокруг некоторой прямой, проходящей через эту точку.*

Для доказательства этой теоремы, принадлежащей Эйлеру[1], обозначим закрепленную точку через O, отрезки двух неразрывно связанных с телом прямых, проходящих через O в положении P, через OA и OB, те же отрезки в положении Q — через OA' и OB'. Проведем через биссектрису угла AOA' плоскость, перпендикулярную к плоскости AOA', и через биссектрису угла BOB' плоскость, перпендикулярную к плоскости BOB'. Пусть OC — прямая пересечения построенных таким образом плоскостей в случае, если эти плоскости не совпадают, или же — прямая пересечения плоскостей OAB и $OA'B'$ в случае, если они совпадают.

В обоих случаях прямая OC расположена относительно прямых OA' и OB' так же, как и относительно прямых OA и OB, т. е. углы AOC и BOC равны соответственно углам $A'OC$ и $B'OC$. Следовательно, положение прямой OC останется неизменным, если систему $OABC$ повернуть вокруг O таким образом, чтобы прямые OA и OB перешли в положение OA' и OB'. Так как при этом движении прямая OC остается неподвижной, то оно может быть рассматриваемо как вращение вокруг прямой OC на некоторый определенный угол. Таким образом, теорема доказана.

Допустим, что тело вращается вокруг одной из своих точек, закрепленной неподвижно в пространстве. Согласно теореме Эйлера перемещение этого тела из положения, занимаемого им в момент времени t, в положение, занимаемое в момент времени $t+\Delta t$, может быть получено вращением вокруг определенной прямой, проходящей через закрепленную точку. Предельное положение этой прямой, когда Δt стремится к нулю, называется мгновенной осью вращения тела в момент времени t.

Если тело вращается вокруг неподвижной точки, то геометрическое место всех мгновенных осей вращения в теле есть некоторый конус, имеющий вершину в закрепленной точке; геометрическое место всех мгновенных осей вращения в пространстве есть также конус, с вершиной в закрепленной точке. Показать, что движение тела может быть получено качением без скольжения первого неразрывно связанного с телом конуса по второму неподвижному конусу. (Poinsot.)

Аналогично можно показать, что *всякая плоская фигура может быть переведена из любого заданного положения в любое другое заданное положение в той же плоскости вращением вокруг некоторой точки плоскости или поступательным перемещением.* Эта точка называется *центром вращения.*

Если плоская фигура движется непрерывно, то ее перемещение за бесконечно малый промежуток времени можно рассматривать как

[1] Novi Comment. Petrop., т. 20, стр. 189, § 25, 1776.

вращение вокруг некоторой точки. Эта точка называется мгновенным центром вращения.

Задача 1. Плоская пластинка движется произвольным образом в своей плоскости. Показать, что во всякий момент времени геометрическое место точек перегиба траекторий есть окружность, касающаяся кривых, образованных геометрическими местами мгновенных центров вращения на пластинке и плоскости, в их общей точке касания.

Задача 2. Плоская пластинка подвергается двум последовательным перемещениям в своей плоскости. Пусть D_2 означает прямую, соединяющую оба соответствующих центра вращения, D_1 — ту прямую, которая переходит в D_2 при половине первого перемещения (т. е. при повороте на половину угла), и, наконец, D_3 — ту прямую, в которую переходит D_2 при половине второго перемещения. Показать, что точка пересечения прямых D_1 и D_3 есть центр вращения полного перемещения.

§ 3. Теорема Родрига и Гамильтона[1]**.** Два произвольных следующих друг за другом вращения вокруг неподвижной точки могут быть заменены одним вращением на основании следующей теоремы:

Три последовательных вращения вокруг трех неподвижных осей, проходящих через одну точку на углы, равные соответственно удвоенным углам между образованными этими прямыми плоскостями, возвращают тело в первоначальное положение.

Обозначим оси вращения через OP, OQ и OR. Восставим в точке O к плоскостям QOR, ROP, POQ перпендикуляры Op, Oq, Or.

Если тело поворачивается на 180° вокруг Oq и на 180° вокруг Or, то OP возвращается в первоначальное положение, а Oq переходит в свое зеркальное отображение относительно прямой Or. Если RPQ означает угол между плоскостями PR и PQ, то в результате получается поворот вокруг OP на угол, равный $2\widehat{RPQ}$. Отсюда следует, что три последовательных вращения вокруг осей OP, OQ, OR на углы, равные соответственно $2\widehat{RPQ}$, $2\widehat{PQR}$, $2\widehat{QRP}$, равносильны последовательным вращениям на 180° вокруг прямых Oq, Or, Or, Op, Op, Oq. Но совокупность этих последних вращений не изменяет положения тела. Таким образом, теорема доказана.

§ 4. Сложение двух равных вращений вокруг антипараллельных осей. Особый интерес представляет тот случай, когда тело получает два одинаковых вращения, но в противоположных направлениях вокруг двух параллельных осей. При каждом из этих движений ни одна точка тела не перемещается параллельно осям; следовательно, то же самое будет справедливо и по отношению к результирующему движению. Любая прямая тела, лежащая в плоскости, перпендикулярной

[1] *Rodrigues*, Journ. de Math., т. 5, стр. 380, 1840; *Hamilton*, Lectures on Quaternions, § 344; приводимое здесь доказательство принадлежит Бернсайду (*Burnside*, Acta Math., т. 25, 1902).

к осям вращения, поворачивается при обоих движениях на один и тот же угол, но в различных направлениях, и поэтому ее окончательное положение параллельно исходному. Отсюда следует, что результирующее движение эквивалентно одному поступательному перемещению. Таким образом, два последовательных, одинаковых вращения в противоположные стороны вокруг двух параллельных осей эквивалентны одному поступательному перемещению, перпендикулярному к осям. Другими словами: *вращение вокруг какой-нибудь оси эквивалентно вращению на такой же угол вокруг любой параллельной оси и поступательному перемещению, перпендикулярному к обеим осям.*

Справедливо также и обратное предложение: *перемещение твердого тела, складывающееся из вращения вокруг какой-нибудь оси и поступательного перемещения, перпендикулярного к этой оси, эквивалентно одному вращению вокруг параллельной оси.* Это предложение по существу эквивалентно предложению § 2, что всякое перемещение в плоскости эквивалентно вращению вокруг некоторой точки. Рассматривая угол между начальным и конечным положениями какой-либо связанной с телом прямой, перпендикулярной к оси вращения, придем к заключению, что углы поворота вокруг обеих осей равны между собой.

§ 5. Теорема Шаля о наиболее общем движении твердого тела[1]. Рассмотрим теперь движение более общего характера. Очевидно, что всякое свободно движущееся тело может быть перемещено из любого начального положения P в любое конечное положение Q следующим образом: сначала перемещают произвольную точку тела из ее положения в P в положение в Q таким образом, чтобы все остальные точки тела получили параллельные перемещения; после этого поворачивают тело вокруг этой точки до тех пор, пока оно не займет положения Q. Согласно теореме Эйлера последнее перемещение может быть достигнуто вращением тела вокруг прямой, проходящей через указанную точку. *Самое общее перемещение твердого тела складывается из поступательного перемещения и вращения вокруг некоторой прямой.*

Докажем, что *ось вращения может быть выбрана таким образом, что поступательное перемещение совершается параллельно ей.* Пусть, в самом деле, A — начальное положение какой-нибудь точки, B — ее положение после поступательного перемещения. Пусть AK — прямая, проходящая через A параллельно оси вращения, а K — основание перпендикуляра, опущенного из B на AK. Тогда, очевидно, поступательное перемещение может быть выполнено в два приема: сначала поступательным перемещением, параллельным оси вращения, можно переместить точку A в положение K, а затем вторым поступательным

[1] *Mozzi*, Discorso matematico sopra rotamento momentanio dei corpi, Na poli 1763; *Cauchy*, Exercices de Math., т. II, стр. 87, Paris 1827; Oeuvres (2), т. VII, стр. 94; *Chasles*, Bulletin Univ. des Sciences (Ferussac), т. 14, стр 321, 1830; Comptes Rendus de l'Acad., т. 16, стр. 1420, 1843.

перемещением, перпендикулярным оси вращения, из положения K в положение B. Но согласно § 4 последнее поступательное перемещение совместно со следующим за ним вращением эквивалентно одному вращению вокруг параллельной оси. Поэтому, если за исходную точку принять какую-нибудь точку этой оси, то полное перемещение тела можно составить из поступательного перемещения параллельно определенной прямой и вращения вокруг этой прямой. Таким образом, теорема доказана.

Перемещение, складывающееся из поступательного перемещения и вращения вокруг оси, параллельной этому поступательному перемещению, называется винтовым; *отношение величины поступательного перемещения к углу поворота называется параметром винта.* Очевидно, что при винтовом перемещении не имеет значения порядок последовательности поступательного и вращательного перемещений.

§ 6. Теорема Альфана о сложении двух любых движений. Если тело участвует в двух различных винтовых движениях, то результирующее винтовое движение может быть геометрически построено следующим образом, указанным Альфаном[1]. (Halphen.)

Пусть A_1 и A_2 обозначают соответственно оси данных винтовых движений, а A_{12} их общий перпендикуляр. Обозначим, далее, через B_1 прямую, переходящую в A_{12} после половины первого винтового движения (т. е. винтового движения с вдвое меньшими поступательным и вращательным перемещениями), через B_2 прямую, в которую переходит A_{12} после половины второго движения, и, наконец, через C общий перпендикуляр прямых B_1 и B_2. Тогда, как это показал Альфан, *результирующий винт имеет осью прямую* C *и равен удвоенному винту, переводящему* B_1 *и* B_2. В самом деле, выберем прямые D_1 и D_2 таким образом, чтобы половины данных винтовых движений переводили соответственно A_{12} в положение D_1 и D_2 в положение A_{12}. Пусть C' — общий перпендикуляр прямых D_1 и D_2. Тогда, очевидно, полученная таким образом фигура совпадает с фигурой, полученной от вращения первой на 180° вокруг прямой A_{12}. Отсюда вытекают следующие соотношения:

Отрезок прямой B_1, отсекаемый прямыми A_1 и C, равен отрезку прямой D_1, отсекаемому прямыми A_1 и C'.

Отрезок прямой B_2, отсекаемый прямыми A_2 и C, равен отрезку прямой D_2, отсекаемому прямыми A_2 и C'.

Отрезок прямой C, отсекаемый прямыми B_1 и B_2, равен отрезку прямой C', отсекаемому прямыми D_1 и D_2.

Угол между плоскостями A_1B_1, B_1C равен углу между плоскостями A_1D_1, D_1C'.

---

[1] Nouvelles Annales de Math. (3), т. I, стр. 298, 1882. Приводимое в тексте доказательство принадлежит Бернсайду (*Burnside.* Mess. of Math., т. 19, стр. 104, 1889).

Угол между плоскостями A_2B_2, B_2C равен углу между плоскостями A_2D_2, D_2C'.

Угол между прямыми B_1 и B_2 равен углу между прямыми D_1 и D_2.

Отсюда следует: винт A_1 переводит C в первоначальное положение прямой C', так как точка пересечения прямых B_1 и C переводится в первоначальное положение точки пересечения прямых D_1 и C'; винт A_2 переводит C' в первоначальное положение прямой C, так как точка пересечения прямых D_2 и C' переводится в первоначальное положение точки пересечения прямых B_2 и C. Следовательно, C есть ось результирующего винтового движения и величина поступательного перемещения равна удвоенному отрезку, отсекаемому от C прямыми B_1 и B_2. Далее, прямая B_1, переводимая первым винтовым движением в положение D_1, переводится при втором движении в положение, образующее с B_2 угол, равный углу между B_2 и B_1. Следовательно, величина результирующего вращательного перемещения равна удвоенному углу между B_2 и B_1. Таким образом, теорема Альфана доказана.

Задача 1. Показать, что всякое бесконечно малое перемещение твердого тела может быть разложено на два бесконечно малых вращения и что ось одного из этих вращений может быть выбрана произвольно.

§ 7. Аналитическое представление движения. Перейдем теперь к аналитическому представлению любого движения твердого тела. Выберем неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$. Мы будем предполагать, что эта система правая, т. е. если ось Oz направлена вертикально вверх, а ось Oy на север, то ось Ox будет указывать на восток. Пусть рассматриваемое движение складывается из вращения на угол ω вокруг некоторой оси, имеющей направляющие косинусы α, β, γ и проходящей через некоторую точку A, с координатами a, b, c и поступательного перемещения на отрезок d вдоль этой оси. Угол ω следует брать с определенным знаком: при направленной вертикально вверх оси (α, β, γ) его следует считать положительным, если вращение совершается с юга на север через восток. Пусть точка P, с координатами x, y, z, после полного перемещения займет положение $Q(X, Y, Z)$, а после только поступательного перемещения положение $R(\xi, \eta, \zeta)$. Очевидно, имеем:

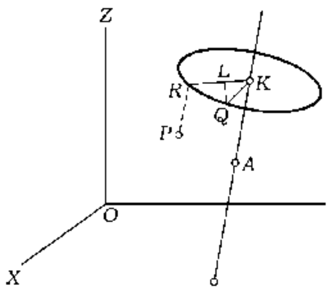

Рис. 1

$$\xi = x + d\cos\alpha,$$
$$\eta = y + d\cos\beta,$$
$$\zeta = z + d\cos\gamma.$$

Обозначим через K основание перпендикуляра, опущенного из R (или Q) на ось вращения, и через L основание перпендикуляра, опущенного из Q на KR. Тогда $X - \xi$ равняется проекции ломаной RLQ на ось Ox. При этом проекции следует брать с соответствующими знаками, так что, например, проекция AB на ось x равна $x_B - x_A$.

Но проекция отрезка KR на ось Ox равна:

$$\xi - a \text{—проекция отрезка } AK \text{ на ось } Ox$$

или

$$\xi - a - \cos\alpha\{(\xi - a)\cos\alpha + (\eta - b)\cos\beta - (\zeta - c)\cos\gamma\}$$

и так как $RL = -(1 - \cos\omega)KR$, то проекция RL на ось Ox равна:

$$-(1-\cos\omega)[\xi - a - \cos\alpha\{(\xi - a)\cos\alpha + (\eta - b)\cos\beta + (\zeta - c)\cos\gamma\}].$$

Кроме того, отрезок LQ перпендикулярен к плоскости RKA и поэтому его направляющие косинусы пропорциональны величинам:

$$(\xi - c)\cos\beta - (\eta - b)\cos\gamma, \qquad (\xi - a)\cos\gamma - (\zeta - c)\cos\alpha,$$
$$(\eta - b)\cos\alpha - (\xi - a)\cos\beta.$$

Так как сумма квадратов этих трех величин, поделенная на $\{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2\}$, равна квадрату синуса угла RAK, то эта сумма равна $(KR)^2$, а эти три величины суть проекции на координатные оси отрезка $\pm KR$, отложенного на прямой LQ. В силу соотношения

$$LQ = \mp KR\sin\omega$$

получаем для проекций LQ на ось x выражение:

$$\pm\sin\omega\{(\zeta - c)\cos\beta - (\eta - b)\cos\gamma\}.$$

В этом выражении следует взять верхний знак, как в этом легко убедиться, направляя, например, ось вращения по оси z. Итак, получаем:

$$X - \xi = -(1-\cos\omega)\{(\xi - a) - \cos^2\alpha(\xi - a) - \cos\alpha\cos\beta(\eta - b) -$$
$$- \cos\alpha\cos\gamma(\zeta - c)\} + \sin\omega\{\cos\beta(\zeta - c) - \cos\gamma(\eta - b)\}.$$

Выражая ξ, η, ζ через x, y, z, получаем:

$$X = x + d\cos\alpha - (1-\cos\omega)\{(x - a)\sin^2\alpha - \cos\alpha\cos\beta(y - b) -$$
$$- \cos\alpha\cos\gamma(z - c)\} + \sin\omega\{\cos\beta(z - c) - \cos\gamma(y - b)\}.$$

Аналогично:

$$Y = y + d\cos\beta - (1-\cos\omega)\{(y-b)\sin^2\beta - \cos\beta\cos\gamma(z-c) - \\ - \cos\beta\cos\alpha(x-a)\} - \sin\omega\{\cos\gamma(x-a) - \cos\alpha(z-c)\},$$
$$Z = z + d\cos\gamma - (1-\cos\omega)\{(z-c)\sin^2\gamma - \cos\gamma\cos\alpha(x-a) - \\ - \cos\gamma\cos\beta(y-b)\} - \sin\omega\{\cos\alpha(y-b) - \cos\beta(x-a)\}.$$ [1]

Эти равенства выражают новые координаты X, Y, Z через координаты x, y, z начального положения точки и через величины, характеризующие движение.

§ 8. Сложение бесконечно малых вращений. Применим предыдущий результат к перемещению, представляющему собой бесконечно малый поворот вокруг оси, выходящей из начала координат. Вместо ω войдет теперь $\delta\psi$, где $\delta\psi$ — бесконечно малая величина, квадратом которой мы пренебрегаем.

Уравнения предыдущего параграфа принимают теперь вид:

$$X = x + (z\cos\beta - y\cos\gamma)\,\delta\psi,$$
$$Y = y + (x\cos\gamma - z\cos\alpha)\,\delta\psi,$$
$$Z = z + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\,\delta\psi.$$

Те же самые уравнения мы получим, если сообщим телу одно за другим три бесконечно малых вращения вокруг осей Ox, Oy, Oz с углами поворота, равными соответственно $\cos\alpha\delta\psi$, $\cos\beta\delta\psi$, $\cos\gamma\delta\psi$. Следовательно, *всякое бесконечно малое вращение $\delta\psi$ вокруг некоторой*

[1] Векторный вывод тех же формул. Имеем (см. рис. 1):

$$\overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PR} + \overline{RL} + \overline{LQ}. \tag{1}$$

Полагаем: $\overline{OQ} = \rho$; $\overline{OP} = r$, $\overline{PR} = d$, $\overline{KR} = r_1$, $\overline{LQ} = l$, $\overline{OA} = a$ и через d^0 обозначим единичный вектор оси AK. Тогда $r_1 = \overline{AR} - \overline{AK} = r + d - a - (r+ +d-a)\cdot d^0 d^0 = r+d-a-r\cdot d^0 d^0 - d + a\cdot d^0 d^0 = (r-a)-(r-a)\cdot d^0 d^0$, так как $d\cdot d^0 d^0 = d$. Далее, $r_1 = |d^0\times(r+d-a)| = |d^0\times(r-a)|$ (так как d^0 и d коллинеарны), $l = r_1\sin\omega$ или $l = |d^0\times(r-a)|\sin\omega$, а так как вектора l и $d^0\times(r+d-a) = d^0\times(r-a)$ и по направлению совпадают, то $l = d^0\times(r-a)\sin\omega$ и, наконец, $\overline{RL} = -(1-\cos\omega)r_1$. Равенство (1) при этих обозначениях перепишется так:

$$\rho = r + d - (1-\cos\omega)r_1 + l,$$

и подставляя вместо r_1 и l их выражения, получим:

$$\rho = r + d - (1-\cos\omega)\{(r-a) - (r-a)\cdot d^0 d^0\} + \sin\omega d^0\times(r-a)$$

или в координатной форме

$$X = x + d\cos\alpha - (1-\cos\omega)\{(x-a) - (x-a)\cos^2\alpha - (y-b)\cos\beta\cos\alpha - \\ -(z-c)\cos\gamma\cos\alpha\} + \sin\omega\{\cos\beta(z-c) - \cos\gamma(y-b)\}$$

и т. д. (**Ред.**).

прямой OK эквивалентно трем последовательным бесконечно малым вращениям вокруг осей Ox, Oy, Oz, с углами поворота, равными соответственно $\delta\psi\cos KOx$, $\delta\psi\cos KOy$, $\delta\psi\cos KOz$, где Ox, Oy, Oz три любые взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через произвольную точку O прямой OK.

§ 9. Параметрическое представление вращения вокруг точки по Эйлеру[1]. Аналитическое выражение поступательного перемещения очень просто; значительно сложнее выражение для вращения, которым мы займемся снова. Пусть твердое тело поворачивается на угол ω вокруг прямой, проходящей через начало координат и имеющей направляющие углы α, β, γ. Согласно § 7 координаты X, Y, Z нового положения точки, имевшей вначале координаты x, y, z, определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}
X &= x - 2\sin^2\frac{\omega}{2}(x\sin^2\alpha - y\cos\alpha\cos\beta - z\cos\alpha\cos\gamma) + \\
&\qquad + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(z\cos\beta - y\cos\gamma), \\
Y &= y - 2\sin^2\frac{\omega}{2}(y\sin^2\beta - z\cos\beta\cos\gamma - x\cos\beta\cos\alpha) + \\
&\qquad + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(x\cos\gamma - z\cos\alpha), \\
Z &= z - 2\sin^2\frac{\omega}{2}(z\sin^2\gamma - x\cos\gamma\cos\alpha - y\cos\gamma\cos\beta) + \\
&\qquad + 2\sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}(y\cos\alpha - x\cos\beta).
\end{aligned}$$

Введем теперь параметры ξ, η, ζ, χ, определяемые равенствами:

$$\xi = \cos\alpha\sin\frac{1}{2}\omega, \quad \eta = \cos\beta\sin\frac{1}{2}\omega,$$
$$\zeta = \cos\gamma\sin\frac{1}{2}\omega, \quad \chi = \cos\frac{1}{2}\omega.$$

Эти параметры связаны, очевидно, соотношением:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2 = 1.$$

При помощи этих параметров предыдущие уравнения могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
X &= (\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 + \chi^2)x + 2(\xi\eta - \zeta\chi)y + 2(\xi\zeta + \eta\chi)z, \\
Y &= 2(\xi\eta + \zeta\chi)x + (-\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 + \chi^2)y + 2(\eta\zeta - \xi\chi)z, \\
Z &= 2(\xi\zeta - \eta\chi)x + 2(\eta\zeta + \xi\chi)y + (-\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2)z.
\end{aligned}$$

[1] Novi Comment. Petrop., т. 20, стр. 208, § 6 и сл., 1776.

Поэтому, если обозначить координатные оси через $OXYZ$, а подвижную систему осей, совпадавшую до движения с первой, данным вращением привести в положение $Oxyz$, то направляющие косинусы одной системы осей по отношению к другой системе определятся при помощи следующей схемы:

	X	Y	Z
x	$\xi^2 - \eta^2 - \zeta^2 + \chi^2$	$2(\xi\eta + \zeta\chi)$	$2(\xi\zeta - \eta\chi)$
y	$2(\xi\eta - \zeta\chi)$	$-\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 + \chi^2$	$2(\eta\zeta + \xi\chi)$
z	$2(\zeta\zeta + \eta\chi)$	$2(\eta\zeta - \xi\chi)$	$-\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2$

Легко обнаружить, что параметры ζ'', η'', ζ'', χ'' вращения, складывающегося из двух последовательных вращений ξ', η', ζ', χ' и ξ, η, ζ, χ, определяются равенствами:

$$\xi'' = \xi\chi' + \eta\zeta' - \zeta\eta' + \chi\xi', \quad \eta'' = -\xi\zeta' + \eta\chi' + \zeta\xi' + \chi\eta',$$
$$\zeta'' = \xi\eta' - \eta\xi' + \zeta\chi' + \chi\zeta', \quad \chi'' = \chi\chi' - \xi\xi' - \eta\eta' - \zeta\zeta'.$$

Эти формулы, найденные в разное время и независимо друг от друга Гауссом, Родригом, Гамильтоном и Кэли, представляют собой в то же время и закон умножения кватернионов, ибо χ, ξ, η, ζ могут быть рассматриваемы как компоненты кватерниона[1] $\chi + \xi i + \eta j + \zeta k$, где i, j, k удовлетворяют соотношениям:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Предыдущие формулы содержатся все в одном равенстве:

$$\chi'' + \zeta'' i + \eta'' j + \zeta'' k = (\chi + \zeta i + \eta j + \zeta k)(\chi' + \zeta' i + \eta' j + \zeta' k).$$

Читатель, знакомый с теорией кватернионов, заметит, что при вращении всякий вектор ρ преобразовывается в вектор $q\rho q^{-1}$, где q означает кватернион $x + \xi i + \eta j + \zeta k$. Сам же кватернион не является оператором вращения.

§ 10. Углы Эйлера. Эйлер[2] предложил еще другой метод параметрического представления движения твердого тела вокруг точки. Этот новый метод обладает тем недостатком, что даваемое им параметрическое представление не симметрично, тем не менее он очень прост и практически удобен.

Пусть O означает неподвижную точку, вокруг которой совершается вращение, а $OXYZ$ — неподвижную, прямоугольную, правую систему координат. Выберем в теле другую систему координат $Oxyz$, движущуюся вместе с телом и совпадавшую до вращения с системой $OXYZ$.

[1] Тензор этого кватерниона равен единице.

[2] Novi Comment. Petrop., т. 20, стр. 189, 1776.

Обозначим через OK нормаль к плоскости zOZ, направленную на восток, когда ось OZ направлена вертикально вверх, а проекция оси Oz на плоскость, перпендикулярную к OZ, направлена на юг. Обозначим, далее, углы zOZ, YOK, yOK через ϑ, φ и ψ. Эти три так называемых эйлеровых угла определяют направление осей $Oxyz$ относительно осей $OXYZ$.

Для определения направляющих косинусов осей Ox, Oy, Oz относительно OX заметим, что эти величины равны соответственно проекциям на Ox, Oy, Oz единичного отрезка, отложенного на OX. Проекция этого единичного отрезка на прямую OK равна $-\sin\varphi$, а на прямую OL, где OL — линия пересечения плоскостей XOY и ZOz, равна $\cos\varphi$. Отрезок $\cos\varphi$, лежащий на OL, имеет проекцию $\cos\varphi\sin\vartheta$ на Oz и проекцию $\cos\varphi\cos\vartheta$ на прямую OM, где OM означает линию пересечения плоскостей xOy и ZOz. Отрезок $\cos\varphi\cos\vartheta$, лежащий на OM, имеет проекцию на ось Ox, равную $\cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi$ и проекцию на ось Oy, равную $-\cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi$. Отрезок $-\sin\varphi$ на OK имеет проекцию $-\sin\varphi\sin\psi$ на Ox и $-\sin\varphi\cos\psi$ на Oy. Окончательно проекции единичного отрезка оси OX равны:

$$
\begin{array}{ll}
\cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & \text{на } Ox,\\
-\cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi & \text{на } Oy,\\
\cos\varphi\sin\vartheta & \text{на } Oz.
\end{array}
$$

Этим способом получаем следующую схему, определяющую направляющие косинусы одной системы координат по отношению к другой[1]:

	X	Y	Z
x	$\cos\varphi\cos\vartheta\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$	$\sin\varphi\cos\vartheta\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi$	$-\sin\vartheta\cos\psi$
y	$-\cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi$	$-\sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi$	$\sin\vartheta\sin\psi$
z	$\cos\varphi\sin\vartheta$	$\sin\varphi\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

[1]При обычном отсчете, когда угол φ определяет положение линии узлов относительно оси X, а угол ψ — положение оси x относительно линии узлов, эти формулы были бы такими:

	X	Y	Z
x	$-\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\cos\psi$	$\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta + \sin\varphi\cos\psi$	$\sin\psi\sin\vartheta$
y	$-\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\psi$	$\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi$	$\cos\psi\sin\vartheta$
z	$\sin\varphi\sin\vartheta$	$-\cos\varphi\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

§ 11. Связь углов Эйлера с параметрами ξ, η, ζ, χ. Связь углов Эйлера с параметрами ξ, η, ζ, χ § 9 можно установить, сравнивая таблицы направляющих косинусов обеих систем координат, полученные в § 9 и 10. Непосредственно эту связь можно установить следующим образом. Пусть система осей $Oxyz$ получается вращением неподвижной системы $OXYZ$ на угол ω вокруг прямой OR, имеющей направляюшие углы α, β, γ. Проведем из точки O как из центра сферу радиуса, равного единице, которая будет, следовательно, пересекаться всякой плоскостью, проходящей через O, по большому кругу и всякой прямой из O в точке. Тогда сферический треугольник RZz имеет стороны γ, γ, ϑ и угол при R, равный ω. Отсюда вытекает соотношение:

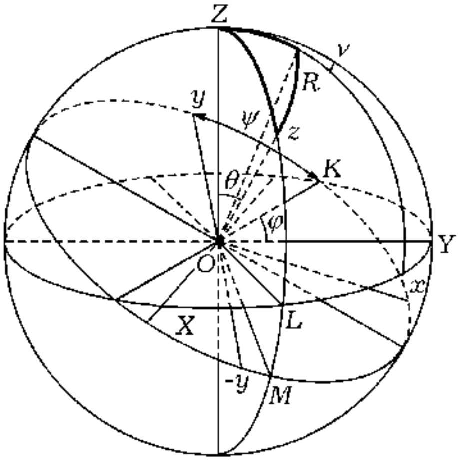

Рис. 2

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \sin\gamma\sin\frac{1}{2}\omega.$$

Обозначим, далее, через ν угол RZY, так что $RZz = \frac{1}{2}\pi - \varphi - \nu$. Тогда дуга RZ перейдет в положение Rz, если сначала ее повернуть на угол φ вокруг Z, затем на угол ϑ вокруг полюса дуги Zz и, наконец, на угол ψ вокруг z. Первое из этих вращений переводит RZ в дугу, которая в точке Z образует с Zz угол $\frac{1}{2}\pi - \varphi - \nu + \varphi = \frac{1}{2}\pi - \nu$; второе вращение переводит ее в дугу, которая образует тот же угол $\frac{1}{2}\pi - \nu$ с дугой Zz, но проходит через точку z; после третьего вращения эта дуга будет проходить опять через z, но будет образовывать с Zz угол $\frac{1}{2}\pi - \nu + \psi$. Но этот угол равен $\pi - RzZ = \pi - RZz = \pi - \left(\frac{1}{2}\pi - \varphi - \nu\right) = \frac{1}{2}\pi + \varphi + \nu$. Следовательно, имеем:

$$\frac{1}{2}\pi + \varphi + \nu = \frac{1}{2}\pi - \nu + \psi$$

или

$$\nu = \frac{1}{2}(\psi - \varphi).$$[1]

Отсюда вследствие того, что сферический треугольник RZX имеет стороны α, γ, $\frac{1}{2}\pi$ и угол при Z, равный $\frac{1}{2}\pi - \nu = \frac{1}{2}(\pi - \psi + \varphi)$, непосредственно вытекает, что

$$\cos\alpha = \sin\gamma \sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi).$$

Заменяя γ уже полученным значением, получим:

$$\cos\alpha \sin\frac{1}{2}\omega = \sin\frac{1}{2}\vartheta \sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$$

или

$$\xi = \sin\frac{1}{2}\vartheta \sin\frac{1}{2}(\psi - \varphi).$$

Аналогично из сферического треугольника RZY получаем:

$$\cos\beta = \sin\gamma \cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$$

и по исключении $\sin\gamma$

$$\cos\beta \sin\frac{1}{2}\omega = \sin\frac{1}{2}\vartheta \cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi)$$

или

$$\eta = \sin\frac{1}{2}\vartheta \cos\frac{1}{2}(\psi - \varphi).$$

Так как мы показали, что сферический треугольник RZz имеет стороны γ, γ, ϑ и углы $\frac{1}{2}(\pi - \psi - \varphi)$, $\frac{1}{2}(\pi - \psi - \varphi)$, ω, то мы можем написать и такие соотношения:

$$\cos\frac{1}{2}\omega = \cos\frac{1}{2}\vartheta \cos\frac{1}{2}(\psi + \varphi),$$

$$\sin\frac{1}{2}\omega \cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\vartheta \sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi).$$

Отсюда

$$\chi = \cos\frac{1}{2}\vartheta \cos\frac{1}{2}(\psi + \vartheta),$$

$$\zeta - \cos\frac{1}{2}\vartheta \sin\frac{1}{2}(\psi + \varphi).$$

[1](см., например, *Леви-Чивита* и *Амальди*, Курс теоретической механики, т. 1, ч. 1, перевод проф. **В. Ф.** Каган). Если мы в эти формулы подставим (см. рис. 2) $\frac{\pi}{2} + \varphi$ вместо φ и $\frac{3\pi}{2} + \psi$ вместо ψ, то получатся формулы, приводимые в тексте. (Ред.)

Следовательно, параметры ξ, η, ζ, χ выражаются через углы Эйлера при помощи следующих равенств:

$$\xi = \sin\frac{1}{2}\vartheta\sin\frac{1}{2}(\psi-\vartheta),\quad \eta = \sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}(\psi-\varphi),$$

$$\zeta = \cos\frac{1}{2}\vartheta\sin\frac{1}{2}(\psi+\varphi),\quad \chi = \cos\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}(\psi+\varphi).$$

§ 12. Связь вращений с линейными преобразованиями; параметры Кэли–Клейна. На поверхности шара начерчены произвольные фигуры S. Этим фигурам при помощи стереографической проекции, за центр которой принята наивысшая точка шара, а за плоскость проекции касательная плоскость в наинизшей точке, отвечают некоторые фигуры P плоскости. Шар поворачивается на некоторый угол вокруг одного из своих диаметров. Обозначим через S' новое положение фигур S. Фигурам S' при помощи стереографической проекции с тем же центром и с той же плоскостью проекций отвечают фигуры P'. Таким образом, вращению шара, переводящему фигуры S в фигуры S', отвечает в плоскости *преобразование* фигур P в фигуры P'. Этим преобразованием мы займемся сейчас более подробно.

Если одна из фигур P есть окружность, то и соответствующая фигура S будет также окружностью, ибо стереографические проекции переводят окружность в окружность. Поэтому S' и, следовательно, соответствующая P будут также окружностями. Следовательно, вращению шара соответствуют преобразования плоскости, преобразующие окружности в окружности.

Каждое такое преобразование может быть выражено аналитически следующим образом[1].

Пусть $z = x+iy$, где x и y прямоугольные координаты произвольной точки плоскости, так что каждой такой точке отвечает определенное значение комплексного переменного z. Аналогично обозначим через z' комплексную переменную $x'+iy'$, где x' и y' — координаты точки, в которую преобразовывается точка (x, y). *Тогда всякое преобразование плоскости, допускающее обратное преобразование и преобразующее окружности в окружности*[2], *определяется уравнением*

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — произвольные комплексные постоянные. К этому преобразованию можно еще присоединить зеркальное отображение относительно одной из координатных осей.

Преобразование, определяемое уравнением вида

$$z' = \frac{az+b}{cz+d},$$

называется линейным. Таким образом, каждому линейному преобразованию плоскости отвечает определенное вращение твердого тела вокруг точки. Ли-

[1] См. *L. R. Ford*, An introduction to the theory of automorphic functions, London 1915.

[2] Прямая рассматривается как частный случай окружности.

В этом и заключается аналитическое выражение связи линейных преобразований с вращением твердого тела.

Преимущество параметров α, β, γ, δ по сравнению с параметрами ξ, η, ζ, χ заключается в том, что при таком же простом законе сложения приходится пользоваться привычным символом $i = \sqrt{-1}$ вместо громоздких символов i, j, k кватернионов Гамильтона.

Задача 1. Пусть ϑ, φ, ψ, означают углы Эйлера. Вектор, соединяющий начало координат с некоторой точкой, движущейся вместе с системой $Oxyz$, имеет до движения углы ϑ_1 и φ_1, а после движения углы ϑ_1' и φ_1'. Обозначив $e^{i\varphi_1} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta_1$ через ζ_1 и $e^{i\varphi_1'} \operatorname{tg} \frac{1}{2}\vartheta_1'$ через ζ_1', показать, что

$$\zeta_1 e^{i\psi} = \frac{\zeta_1' e^{-i\varphi} \cos \frac{1}{2}\vartheta - \sin \frac{1}{2}\vartheta}{\zeta_1' e^{-i\varphi} \sin \frac{1}{2}\vartheta + \cos \frac{1}{2}\vartheta}.$$

Задача 2. При помощи равенств

$$X_1 = \alpha x_1 - \beta x_2,$$
$$X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$$

составить выражения для величин X_1^2, X_2^2, X_1X_2, рассматривая их как чисто арифметические величины, затем величины X_1^2, X_2^2, X_1X_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2 заменить соответственно величинами $-Y + iX$, $Y + iX$, Z, $-y + ix$, $y + ix$, z и показать, что полученные таким образом равенства:

$$\begin{aligned} -Y + iX &= \alpha^2(-y + ix) + 2\alpha\beta z + \beta^2(y + ix), \\ Y + iX &= \gamma^2(-y + ix) + 2\gamma\delta z + \delta^2(y + ix), \\ Z &= \alpha\gamma(-y + ix) + (\alpha\delta + \beta\gamma)z + \beta\delta(y + ix) \end{aligned}$$

определяют зависимость между координатами X, Y, Z некоторой точки в системе $OXYZ$ и ее координатами x, y, z в системе $Oxyz$.

Задача 3. Пусть

$$(-y + ix) : (y + ix) : z = \lambda\lambda' : 1 : \frac{1}{2}(\lambda + \lambda')$$

и

$$(-Y + iX) : (Y + iX) : Z = \lambda_1\lambda_1' : 1 : \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_1').$$

Показать, что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta} \quad \text{и} \quad \lambda_1' = \frac{\alpha\lambda' + \beta}{\gamma\lambda' + \delta}.$$

§ 13. Векторы. Мы переходим теперь к изучению основных свойств поступательного движения твердого тела.

Поступательное перемещение, само по себе, вне зависимости от твердого тела, обладает следующими свойствами:

В этом и заключается аналитическое выражение связи линейных преобразований с вращением твердого тела.

Преимущество параметров α, β, γ, δ по сравнению с параметрами ξ, η, ζ, χ заключается в том, что при таком же простом законе сложения приходится пользоваться привычным символом $i = \sqrt{-1}$ вместо громоздких символов i, j, k кватернионов Гамильтона.

Задача 1. Пусть ϑ, φ, ψ, означают углы Эйлера. Вектор, соединяющий начало координат с некоторой точкой, движущейся вместе с системой $Oxyz$, имеет до движения углы ϑ_1 и φ_1, а после движения углы ϑ_1' и φ_1'. Обозначив $e^{i\varphi_1}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_1$ через ζ_1 и $e^{i\varphi_1'}\operatorname{tg}\frac{1}{2}\vartheta_1'$ через ζ_1', показать, что

$$\zeta_1 e^{i\psi} = \frac{\zeta_1' e^{-i\varphi}\cos\frac{1}{2}\vartheta - \sin\frac{1}{2}\vartheta}{\zeta_1' e^{-i\varphi}\sin\frac{1}{2}\vartheta + \cos\frac{1}{2}\vartheta}.$$

Задача 2. При помощи равенств

$$X_1 = \alpha x_1 - \beta x_2,$$
$$X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$$

составить выражения для величин X_1^2, X_2^2, X_1X_2, рассматривая их как чисто арифметические величины, затем величины X_1^2, X_2^2, X_1X_2, x_1^2, x_2^2, x_1x_2 заменить соответственно величинами $-Y+iX$, $Y+iX$, Z, $-y+ix$, $y+ix$, z и показать, что полученные таким образом равенства:

$$\begin{aligned} -Y+iX &= \alpha^2(-y+ix) + 2\alpha\beta z + \beta^2(y+ix), \\ Y+iX &= \gamma^2(-y+ix) + 2\gamma\delta z + \delta^2(y+ix), \\ Z &= \alpha\gamma(-y+ix) + (\alpha\delta+\beta\gamma)z + \beta\delta(y+ix) \end{aligned}$$

определяют зависимость между координатами X, Y, Z некоторой точки в системе $OXYZ$ и ее координатами x, y, z в системе $Oxyz$.

Задача 3. Пусть

$$(-y+ix):(y+ix):z = \lambda\lambda' : 1 : \frac{1}{2}(\lambda+\lambda')$$

и

$$(-Y+iX):(Y+iX):Z = \lambda_1\lambda_1' : 1 : \frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_1').$$

Показать, что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta} \quad \text{и} \quad \lambda_1' = \frac{\alpha\lambda'+\beta}{\gamma\lambda'+\delta}.$$

§ 13. Векторы. Мы переходим теперь к изучению основных свойств поступательного движения твердого тела.

Поступательное перемещение, само по себе, вне зависимости от твердого тела, обладает следующими свойствами:

1. Оно вполне определяется одним из параллельных и равных отрезков пространства, имеющих данные длину и направление, совпадающие с длиной и направлением поступательного перемещения, ибо такого рода отрезок определяет все величины, необходимые для полного описания операции, определяемой этим перемещением.

2. Пусть AB есть такой отрезок, и $ACDE\dots KB$ какая-нибудь ломаная линия, соединяющая концы этого отрезка. Тогда операция, представляемая отрезком AB, эквивалентна сумме операций, представляемых отрезками AC, CD, DE, ... , KB.

Помимо поступательного перемещения, свойствами 1 и 2 обладают многие операции и величины; все такого рода операции или величины называются *векторными величинами* или *векторами*.

Согласно 2 всякий вектор AB эквивалентен сумме трех векторов AK, KL, LB, параллельных осям координат и образующих ломаную линию, соединяющую точки A и B. Эти три вектора называются компонентами вектора AB относительно данных осей. Если вектор AB имеет длину l и направляющие углы α, β, γ, то его компоненты равны, очевидно, $l\cos\alpha$, $l\cos\beta$, $l\cos\gamma$, так как они являются проекциями AB на оси координат.

Если один вектор эквивалентен некоторому числу других векторов, то он называется их *результантой*.

Если вектор зависит от какого-нибудь параметра (например, времени), то разность двух векторов, соответствующих двум различным значениям этого параметра, есть также вектор. Поэтому производная этого вектора по параметру есть также некоторый вектор. Компоненты этого вектора по осям координат равны производной от его компонентов по параметру.

§ 14. Скорость и ускорение; их векторный характер. Пусть тело совершает непрерывное, но необязательно одинаково направленное поступательное движение, не меняющее его ориентации в пространстве. Его полное перемещение ко времени t есть некоторый вектор; производная от этого вектора по времени, являющаяся также вектором, называется *скоростью* тела. Если x, y, z — координаты какой-нибудь точки тела относительно неподвижных в пространстве осей координат, то компоненты скорости относительно этих осей равны производным от x, y, z по времени, т. е. $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ (где точки над буквами означают дифференцирование по времени).

Точно так же производная скорости по времени есть вектор с компонентами $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ (где точки над буквами означают двукратное дифференцирование по времени); этот вектор называется *ускорением* тела.

Если движутся две точки P и Q, то вектор поступательного перемещения (или скорости или ускорения) точки Q равен сумме векторов поступательного перемещения (или скорости или ускорения) точки P и поступательного перемещения (или скорости или ускорения) точки Q

относительно точки P, т. е. точки Q, отнесенной к системе координатных осей, имеющих начало в точке P и движущихся поступательно вместе с ней.

§ 15. Угловая скорость; ее векторный характер. Рассмотрим тело, непрерывно вращающееся вокруг оси. Если ϑ означает угол, описанный телом к моменту t, то величина $\dot{\vartheta}$ представит в тот же момент времени скорость вращения. Если на оси вращения отложить от какой-нибудь произвольной точки отрезок длиною $\dot{\vartheta}$, то этот отрезок будет вполне характеризовать вращательное движение в момент времени t или, как принято говорить, *угловую скорость* вращения. Направление этому отрезку придают в зависимости от направления вращения, сообразуясь со следующим условием: если вращение совершается с юга на север через восток, то этот отрезок направляется вертикально вверх.

Таким образом, угловая скорость выражается отрезком, имеющим определенные длину и направление. Согласно § 8 всякий бесконечно малый поворот тела на угол $\delta\psi$ вокруг какой-нибудь прямой OK, проходящей через неподвижную точку O тела, может быть заменен тремя последовательными вращениями $\delta\psi\cos\alpha$, $\delta\psi\cos\beta$, $\delta\psi\cos\gamma$ вокруг соответствующих осей Ox, Oy, Oz. $Oxyz$ представляет собой систему прямоугольных осей, относительно которых прямая OK имеет направляющие углы α, β, γ. Отсюда следует, что угловая скорость, выражаемая отрезком $\dot{\psi}$, лежащим на OK, может быть заменена отрезками $\dot{\psi}\cos\alpha$, $\dot{\psi}\cos\beta$, $\dot{\psi}\cos\gamma$, лежащими соответственно на осях Ox, Oy, Oz. Но в этом заключается основное свойство векторов; мы можем, следовательно, сказать, что *угловые скорости можно складывать и разлагать как векторы.* Следует, однако, заметить, что угловая скорость не обладает всеми свойствами, положенными в основание определения вектора: угловая скорость вокруг какой-нибудь прямой не эквивалентна такой же угловой скорости вокруг параллельной прямой. Угловая скорость должна быть поэтому рассматриваема *как вектор, приложенный к определенной прямой.*

Задача 1. Прямой круговой конус, с углом раствора равным 2β, катится без скольжения по плоскости. Определить его мгновенную ось и выразить угловую скорость вращения вокруг этой оси как функцию угловой скорости вращения прямой соприкосновения на плоскости.

Так как все точки образующей конуса, касающейся плоскости, находятся в мгновенном покое в силу отсутствия скольжения, то эта образующая является мгновенной осью вращения. Пусть ω означает угловую скорость вращения конуса вокруг этой образующей, а $\dot{\vartheta}$ — угловую скорость вращения прямой соприкосновения на плоскости. Тогда движение оси конуса может быть представлено как вращение с угловой скоростью $\dot{\vartheta}$ вокруг нормали к плоскости. Но из этого движения и из вращения вокруг своей оси складывается полное движение конуса. Следовательно, компонент угловой скорости конуса относительно перпендикуляра к его оси, проходящего через его вершину, равен $\dot{\vartheta}\cos\beta$; он должен равняться компоненту $\omega\sin\beta$ угловой скорости ω

относительно того же самого направления. Следовательно, равенство

$$\omega = \dot{\vartheta} \operatorname{ctg} \beta$$

и даст искомую зависимость между ω и $\dot{\vartheta}$.

§ 16. Выражение компонентов угловой скорости системы через углы и параметры Эйлера. Мгновенное положение твердого тела, непрерывно вращающегося вокруг неподвижной точки O, удобней всего характеризовать при помощи двух систем координат: системы $OXYZ$, неподвижной в пространстве, и системы $Oxyz$, неизменно связанной с телом и вращающейся вместе с ним. Тогда положение тела определяется тремя углами Эйлера: ϑ, φ, ψ, характеризующими положение системы $OXYZ$ относительно системы $Oxyz$. Вычислим для любого момента времени t компоненты угловой скорости тела относительно подвижных осей.

Пусть OK означает прямую пересечения плоскостей XOY и xOy. Угловая скорость тела складывается, очевидно, из угловых скоростей $\dot{\vartheta}$ вокруг OK, $\dot{\varphi}$ вокруг OZ и $\dot{\psi}$ вокруг Oz. Первую из этих скоростей можно разложить на угловые скорости $\dot{\vartheta}\sin\psi$ вокруг Ox и $\dot{\vartheta}\cos\psi$ вокруг Oy, вторую на угловые скорости $\dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi$ вокруг Ox, $\dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi$ вокруг Oy и $\dot{\varphi}\cos\vartheta$ вокруг Oz. Обозначая через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ компоненты угловой скорости тела относительно осей Ox, Oy, Oz, будем окончательно иметь:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\vartheta}\sin\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi, \\
\omega_2 &= \dot{\vartheta}\cos\psi - \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi, \\
\omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Из этих формул мы можем выразить ω_1, ω_2 и ω_3 как функции симметрических параметров ξ, η, ζ, χ § 9. Ибо мы имеем:

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi+\varphi}{2}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right) = \\
&= \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{\zeta}{\chi}\right) - \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\eta}\right) = \frac{\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}}{\xi^2+\eta^2} + \frac{\chi\dot{\zeta}-\zeta\dot{\chi}}{\zeta^2+\chi^2}.
\end{aligned}$$

Аналогично получаем:

$$\dot{\psi} = \frac{-\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}}{\xi^2+\eta^2} + \frac{\chi\dot{\zeta}-\zeta\dot{\chi}}{\zeta^2+\chi^2};$$

Кроме того, имеем:

$$\cos\vartheta = -\xi^2 - \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2.$$

Подставляя эти значения в формулу $\omega_3 = \dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta$, получаем:

$$\omega_3 = 2(\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta} + \chi\dot{\zeta} - \zeta\dot{\chi}).$$

Аналогично можно получить и выражения для величин ω_1 и ω_2; следовательно, для определения $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\chi\dot{\xi} + \zeta\dot{\eta} - \eta\dot{\zeta} - \xi\dot{\chi}), \\ \omega_2 &= 2(-\zeta\dot{\xi} + \chi\dot{\eta} - \xi\dot{\zeta} - \eta\dot{\chi}), \\ \omega_3 &= 2(\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta} + \chi\dot{\zeta} - \zeta\dot{\chi}). \end{aligned}$$

§17. Производная по времени от вектора, заданного своими компонентами относительно подвижных осей. Пусть в любой момент времени t вектор определяется своими компонентами ξ, η, ζ относительно мгновенного положения правой системы осей $Oxyz$, находящихся, в свою очередь, в движении. Требуется определить вектор, являющийся производной по времени от данного вектора.

Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ означают компоненты угловой скорости системы $Oxyz$ относительно мгновенного положения осей Ox, Oy, Oz.

Производная по времени данного вектора равна векторной сумме производных его компонентов ξ, η, ζ. Вектор ξ, за интервал времени dt, изменяет свою длину, делаясь равным $\xi + \dot{\xi}\,dt$, и в то же время изменяет свое положение вследствие вращения осей. Вследствие вращения вокруг Oy он поворачивается в первоначальной плоскости zOx на угол $\omega_2\,dt$ в сторону, противоположную оси Oz; вследствие вращения вокруг оси Oz он поворачивается в первоначальной плоскости xOy, на угол $\omega_3\,dt$ в сторону Oy. Следовательно, по истечении промежутка времени dt координаты конца вектора по отношению к первоначальному положению осей будут соответственно равны (при отбрасывании бесконечно малых высших порядков):

$$\zeta + \dot{\xi}\,dt, \quad \omega_3\zeta\,dt \quad \text{и} \quad -\omega_2\xi\,dt.$$

Отсюда для компонентов производной вектора ξ получаем значения:

$$\dot{\xi}, \quad \omega_3\xi \quad \text{и} \quad -\omega_2\xi.$$

Аналогично для компонентов производных по времени от векторов η и ζ получаем:

$$\begin{gathered} -\omega_3\eta, \quad \dot{\eta}, \quad \omega_1\eta, \\ \omega_2\zeta, \quad -\omega_1\zeta, \quad \dot{\zeta}. \end{gathered}$$

Складывая, получаем окончательно для компонентов производной по времени данного вектора следующие значения:

$$\dot\xi - \eta\omega_3 + \zeta\omega_2,$$
$$\dot\eta - \zeta\omega_1 + \xi\omega_3,$$
$$\dot\zeta - \xi\omega_2 + \eta\omega_1.$$

Полученные формулы могут быть непосредственно приложены к определению скорости и ускорения точки, заданной в момент времени t своими координатами x, y, z относительно осей, вращающихся с угловой скоростью, имеющей относительно этих же осей компоненты ω_1, ω_2, ω_3. Ибо, подставляя в эти формулы вместо ξ, η, ζ величины x, y, z, мы получим для компонентов скорости значения:

$$\dot x - y\omega_3 + z\omega_2, \quad \dot y - z\omega_1 + x\omega_3, \quad \dot z - x\omega_2 + y\omega_1.$$

Применяя эти же формулы к случаю, когда вектор, от которого ищется производная, есть скорость, мы получим для компонентов ускорения следующие выражения:

$$\frac{d}{dt}(\dot x - y\omega_3 - z\omega_2) - \omega_3(\dot y - z\omega_1 + x\omega_3) + \omega_2(\dot z - x\omega_2 + y\omega_1),$$
$$\frac{d}{dt}(\dot y - z\omega_1 + x\omega_3) - \omega_1(\dot z - x\omega_2 + y\omega_1) + \omega_3(\dot x - y\omega_3 + z\omega_2),$$
$$\frac{d}{dt}(\dot z - x\omega_2 + y\omega_1) - \omega_2(\dot x - y\omega_3 + z\omega_2) + \omega_1(\dot y - z\omega_1 - x\omega_3).$$

Если движение происходит в плоскости, которую мы примем за плоскость xOy, то мы будем иметь только две координаты и один компонент $\dot\vartheta$ угловой скорости. При этом ϑ означает угол между подвижными осями и их положением в какой-нибудь определенный момент времени. Итак, полагая в предыдущих формулах z, ω_1 и ω_2 равными нулю, мы получим в рассматриваемом частном случае для компонентов скорости значения

$$\dot x - y\dot\vartheta \quad \text{и} \quad \dot y + x\dot\vartheta.$$

Компоненты ускорения равны:

$$\ddot x - 2\dot y\dot\vartheta - y\ddot\vartheta - x\dot\vartheta^2 \quad \text{и} \quad \ddot y + 2\dot x\dot\vartheta + x\ddot\vartheta - y\dot\vartheta^2.$$

Задача 1. Показать, что во всякий момент времени, в который направление мгновенной винтовой оси не стационарно, в твердом теле существует *определенная* точка, лежащая на конечном расстоянии, для которой мгновенное ускорение равно нулю.

§ 18. Частные виды разложения скорости и ускорения. Результаты предыдущего параграфа дают возможность получить ряд часто употребляющихся формул для различных видов разложения векторов скорости и ускорения.

1. *Скорость и ускорение в полярных координатах.* Пусть положение точки определяется полярными координатами r, ϑ, φ связанными с ее прямоугольными координатами X, Y, Z относительно неподвижной в пространстве системы осей при помощи соотношений:

$$X = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$Y = r\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$Z = r\cos\vartheta.$$

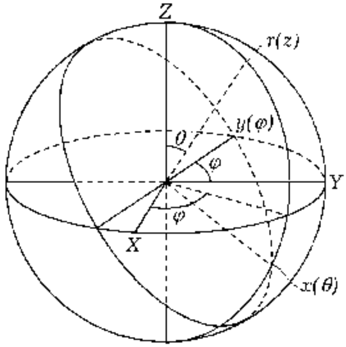

Рис. 3

Требуется определить компоненты скорости и ускорения относительно радиуса-вектора r, перпендикулярной к нему прямой, лежащей в плоскости, проходящей через r и OZ (называющейся обычно *меридианной* плоскостью), и перпендикуляра к меридианной плоскости. Эти три направления мы будем называть *r-направлением*, *ϑ-направлением* и *φ-направлением*. Примем за подвижную ось x прямую, выходящую из O, параллельно ϑ-направлению, за ось y прямую, выходящую из O, параллельно φ-направлению, и за ось z прямую, выходящую из O параллельно r-направлению. Углы Эйлера, определяющие положение подвижной системы $Oxyz$ относительно неподвижной системы $OXYZ$, суть ϑ, φ, 0. Следовательно, компоненты угловой скорости системы $Oxyz$ относительно осей Ox, Oy, Oz суть (§ 16):

$$\omega_1 = -\dot\varphi\sin\vartheta, \quad \omega_2 = \dot\vartheta, \quad \omega_3 = \dot\varphi\cos\vartheta.$$

Движущаяся точка имеет в подвижной системе координаты 0, 0, r. Следовательно, согласно § 17 компоненты скорости этой точки относительно подвижной системы осей суть:

$$r\dot\vartheta, \quad r\dot\varphi\sin\vartheta, \quad \dot r,$$

а компоненты ускорения относительно той же системы осей суть:

$$\frac{d}{dt}(r\dot\vartheta) - r\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta + \dot r\dot\vartheta = r\ddot\vartheta + 2\dot r\dot\vartheta - r\dot\varphi^2\sin\vartheta\cos\vartheta,$$
$$\frac{d}{dt}(r\dot\varphi\sin\vartheta) - \dot r\dot\varphi\sin\vartheta + r\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(r^2\sin^2\vartheta\dot\varphi)$$

и

$$\ddot r - r\dot\vartheta^2 - r\dot\varphi^2\sin^2\vartheta.$$

Если точка движется в плоскости, то мы можем ось z выбрать в этой плоскости и принять ее за полярную ось $\vartheta = 0$ плоской полярной системы координат. Тогда величины r и ϑ станут обыкновенными плоскими полярными координатами точки. Так как $\dot{\varphi}$ обращается в нуль, то компоненты скорости и ускорения относительно r-направления и ϑ-направления будут равны

$$\dot{r} \text{ и } r\dot{\vartheta},$$
$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 \text{ и } r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}.$$

2. *Скорость и ускорение в цилиндрических координатах.* Цилиндрические координаты z, ρ, φ некоторой точки связаны с ее координатами X, Y, Z относительно неподвижной прямоугольной системы осей при помощи соотношений:

$$X = \rho\cos\varphi, \quad Y = \rho\sin\varphi, \quad Z = z.$$

Требуется определить компоненты скорости и ускорения точки относительно параллели к оси z перпендикуляра, опущенного из этой точки на ось z и перпендикуляра к этим двум направлениям. Эти направления мы будем кратко называть z-*направлением*, ρ-*направлением* и φ-*направлением*. Координата φ называется *азимутом* точки.

Выберем подвижную систему координат, имеющую начало в нулевой точке и оси Ox, Oy, Oz, параллельные соответственно ρ-, φ- и z-*направлениям*. Компоненты угловой скорости системы $Oxyz$ относительно осей Ox, Oy, Oz даются, очевидно, равенствами:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}.$$

Координаты движущейся точки в подвижной системе координат равны соответственно ρ, 0, z. Согласно § 17 получим для искомых компонентов скорости значения:

$$\dot{\rho}, \quad \rho\dot{\varphi}, \quad \dot{z},$$

а для компонентов ускорения — значения:

$$\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}, \quad \ddot{z}.$$

3. *Скорость и ускорение как функции естественных координат.* Используем теперь формулы § 17 для нахождения компонентов скорости и ускорения точки, движущейся по любому закону в пространстве, относительно касательной, главной нормали и бинормали к ее траектории.

Мы рассмотрим сначала случай плоского движения точки. Через какую-нибудь неподвижную точку O плоскости проводим оси x и y параллельно касательной и внутренней нормали траектории. Эти оси вращаются вокруг O с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, если через φ обозначим угол, образованный касательной к траектории с какой-нибудь неподвижной прямой плоскости. Обозначив через v скорость точки, через s — путь, пройденный ею к моменту времени t, и через ρ — радиус кривизны траектории, будем иметь:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \rho = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Следовательно, угловая скорость осей может быть записана в виде $\frac{v}{\rho}$.

Так как компоненты скорости по подвижным осям равны соответственно v и 0, то согласно § 17 компоненты ускорения по тем же осям равны $\dot{v}$ и $\frac{v^2}{\rho}$. Из соотношения

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{dv}{ds} = v\frac{dv}{ds}$$

вытекает, что компонент ускорения движущейся точки по касательной к траектории имеет величину $v\frac{dv}{ds}$, а по внутренней нормали — величину $\frac{v^2}{\rho}$.

Скорость движущейся точки определяется ее двумя бесконечно близкими положениями; ускорение определяется поэтому тремя бесконечно близкими положениями. Если мы теперь примем, что траектория точки не является больше плоской кривой, то все же для определения ускорения мы можем считать, что в каждое мгновение траектория лежит в плоскости кривизны, ибо эта плоскость проходит через три бесконечно близкие точки. Поэтому компоненты ускорения относительно касательной, главной нормали и бинормали равны соответственно

$$v\frac{dv}{ds}, \quad \frac{v^2}{\rho}, \quad 0.$$

4. ***Компоненты ускорения по радиусу-вектору и касательной.*** Укажем еще другой вид разложения ускорения на компоненты, в случае, когда точка движется по плоской кривой[1]. Выбрав неподвижное начало координат, обозначим через r радиус-вектор движущейся точки, через p — длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к траектории, через s — путь, пройденный точкой к моменту времени t, через ρ — радиус кривизны траектории, через v или $\dot{s}$ — скорость точки в момент времени t и, наконец, через h — произведение pv. *Тогда ускорение может быть разложено на два компонента,*

[1] Он принадлежит Сиаччи (*Siacci*, Atti della R. Acc. di Torino, т. 14, стр. 750).

из которых один равен $\dfrac{h^2 r}{p^3 \rho}$ *и направлен по радиусу-вектору к началу координат*, а другой равен $\dfrac{h}{p^2}\dfrac{dh}{ds}$ и *направлен по касательной.*

В самом деле, ускорение может быть разложено на два компонента: $v\dfrac{dv}{ds}$ по касательной и $\dfrac{v^2}{\rho}$ по внутренней нормали. Но всякий вектор F, лежащий на радиусе-векторе и направленный в сторону, противоположную от начала координат, может быть разложен на два вектора, из которых один равен — $\dfrac{Fp}{r}$ и направлен по внутренней нормали, а другой равен $F\dfrac{dr}{ds}$ и направлен по касательной. Поэтому вектор $\dfrac{v^2}{\rho}$, направленный по внутренней нормали, имеет по радиусу-вектору, направленному к началу координат, компонент $\dfrac{rv^2}{p\rho}$ и по касательной — компонент $\dfrac{rv^2}{\rho p}\dfrac{dr}{ds}$. Следовательно, ускорение имеет по касательной компонент

$$v\frac{dv}{ds} - \frac{rv^2}{\rho p}\frac{dr}{ds}$$

и по внутреннему радиусу-вектору компонент

$$\frac{rv^2}{\rho p}.$$

Последний компонент равен $\dfrac{h^2 r}{p^3 \rho}$, а первый может быть представлен в виде:

$$\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds} + \frac{v^2}{p}\frac{dp}{ds} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2p^2}\frac{d(v^2p^2)}{ds} \quad \text{или} \quad \frac{h}{p^2}\frac{dh}{ds}.$$

Таким образом, предложение Сиаччи доказано.

Задача 1. *Определить компоненты ускорения точки, движущейся по поверхности тора*

$$x = (c + a\sin\vartheta)\cos\varphi, \quad y = (c + a\sin\vartheta)\sin\varphi, \quad z = a\cos\vartheta$$

относительно касательной к меридианной кривой, нормали и касательной к параллели.

Пусть точка P имеет координаты ϑ и φ. Обозначим через O центр тора и через C — центр меридианного круга, на котором лежит P. Полярные координаты точки C относительно O суть c и φ, а полярные координаты P относительно C суть a, ϑ и φ. Следовательно, компоненты ускорения точки C, относительно O суть:

$c\ddot{\varphi}$	по направлению параллели,
$-c\dot{\varphi}^2$	по направлению OC,
$-c\dot{\varphi}^2\sin\vartheta$	по направлению нормали,
$-c\dot{\varphi}^2\cos\vartheta$	— по направлению меридиана.

Компоненты ускорения точки P относительно C суть:

$$
\begin{aligned}
&a\ddot{\vartheta} - a\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta && \text{по направлению меридиана,}\\
&\frac{a}{\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(\sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}) && \text{по направлению параллели,}\\
&-a\dot{\vartheta}^2 - a\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta && \text{— по направлению нормали.}
\end{aligned}
$$

Отсюда для компонентов абсолютного ускорения точки P получаем:

$$
\begin{aligned}
&a\ddot{\vartheta} - (c + a\sin\vartheta)\dot{\varphi}^2 \cos\vartheta && \text{— по направлению меридиана.}\\
&-a\dot{\vartheta}^2 - a\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta - c\dot{\varphi}^2 \sin\vartheta && \text{— по направлению нормали,}\\
&c\ddot{\varphi} + \frac{a}{\sin\vartheta}\frac{d}{dt}(\sin^2\vartheta \cdot \dot{\varphi}) && \text{по направлению параллели.}
\end{aligned}
$$

Задача 2. *Точка, движущаяся на плоскости, имеет постоянные компоненты ускорения по касательной и нормали. Показать, что траектория точки есть логарифмическая спираль.*

Согласно условиям задачи:

$$v\frac{dv}{ds} = a, \quad \text{где } a \text{ — постоянная, т. е.}$$
$$v^2 = as$$

и

$$\frac{v^2}{\rho} = c, \quad \text{где } c \text{ — постоянная, т. е.}$$
$$s = C\rho, \quad \text{где } C \text{ — также постоянная}$$

или

$$s = C\frac{ds}{d\varphi},$$

где φ означает угол, образованный касательной с какой-нибудь неподвижной прямой.

Интегрируя это уравнение, находим:

$$s = Ae^{B\varphi},$$

где A и B — постоянные. Но это есть натуральное уравнение логарифмической спирали.

Задача 3. *Определить ускорение точки, движущейся по логарифмической спирали с постоянной угловой скоростью относительно полюса.*

Согласно теореме Сиаччи компоненты ускорения по радиусу-вектору и касательной равны соответственно $\dfrac{h^2 r}{p^3 \rho}$ и $\dfrac{h}{p^2}\dfrac{dh}{ds}$. Но если ω означает постоянную угловую скорость точки, то $h = \omega r^2$. Следовательно, компоненты ускорения суть:

$$\frac{\omega^2 r^5}{p^3 \rho} \quad \text{и} \quad \frac{2\omega^2 r^3}{p^2}\frac{dr}{ds}.$$

Так как спирали $\frac{r}{p}$, $\frac{r}{\rho}$ и $\frac{dr}{ds}$ постоянны, то оба компонента ускорения прямо пропорциональны радиусу-вектору.

Упражнения.

1. Мгновенная ось вращения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, сохраняет неизменным свое положение относительно тела. Показать, что в этом случае положение этой оси относительно пространства остается также неизменным, т. е. что движение представляет собой вращение вокруг неподвижной оси.

2. Точка отнесена к осям x и y, вращающимся вокруг начала с угловой скоростью ω. Она имеет относительно точки $x = a$, $y = 0$ ускорение, равное расстоянию, умноженному на $n^2\omega^2$. Показать, что траектория может быть построена беря: 1) точку $x = \frac{n^2 a}{n^2 - 1}$, $y = 0$; 2) равномерное круговое движение с угловой скоростью $(n-1)\omega$ вокруг этой точки и 3) равномерное круговое движение в противоположном направлении с угловой скоростью $(n+1)\omega$ вокруг этой же точки.

3. Скорость точки, движущейся на плоскости, складывается из скорости v по направлению радиуса-вектора относительно какой-нибудь неподвижной точки и скорости v', параллельной какой-нибудь неподвижной прямой. Показать, что соответствующие ускорения суть:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vv'}{r}\cos\vartheta \quad \text{и} \quad \frac{dv'}{dt} - \frac{vv'}{r},$$

где ϑ угол между радиусом-вектором и неподвижной прямой.

4. Точка, движущаяся на плоскости, отнесена к косоугольным осям координат, образующим с какой-нибудь неподвижной прямой углы α и β, где α и β суть заданные функции от времени. Показать, что компоненты скоростей суть:

$$\dot{x} - x\dot{\alpha}\operatorname{ctg}(\beta-\alpha) - \frac{y\dot{\beta}}{\sin(\beta-\alpha)} \quad \text{и} \quad \dot{y} + y\dot{\beta}\operatorname{ctg}(\beta-\alpha) + \frac{\dot{x}\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},$$

и вычислить компоненты ускорения.

5. Точка движется на плоскости. Логарифм отношения ее расстояний от двух неподвижных точек этой плоскости равен ϑ, угол между этими расстояниями равен φ, расстояние между неподвижными точками равно $2k$. Показать, что скорость точки равна

$$\frac{k\sqrt{\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2}}{\operatorname{ch}\vartheta - \cos\varphi}.$$

6. Точка описывает дважды одну и ту же траекторию, причем произведение скоростей в соответствующих положениях при обоих движениях остается постоянным. Показать, что ускорения относятся как квадраты скоростей и что они образуют равные, но противоположно направленные углы с нормалью к траектории. (J. von Vieth.)

7. Точка движется по параболе, параметр которой равен $4a$. На расстоянии r от фокуса она имеет скорость v. Показать, что ее ускорение складывается из ускорении R и N в направлении радиуса-вектора и нормали, причем

$$R = v\frac{dv}{dr}, \quad N = \frac{a^{\frac{1}{2}}}{2r^{\frac{3}{2}}}\frac{d}{dr}(v^2 r).$$

8. Оси x и y вращаются с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 и образуют между собой угол ψ. Показать, что компоненты по осям координат ускорения точки суть:

$$\ddot{x} - x\omega_1^2 - (x\dot{\omega}_1 + 2\dot{x}\omega_1)\operatorname{ctg}\psi - (y\dot{\omega}_2 + 2\dot{y}\omega_2)\frac{1}{\sin\psi}$$

и

$$\ddot{y} - y\omega_2^2 - (x\dot{\omega}_1 + 2\dot{x}\omega_1)\frac{1}{\sin\psi} + (y\dot{\omega}_2 + 2\dot{y}\omega_2)\operatorname{ctg}\psi.$$

9. Скорость точки складывается из ее компонентов u и v по двум направлениям, образующим с неподвижной прямой углы ϑ и φ. Показать, что компоненты f и f' ускорения по тем же направлениям определяются равенствами:

$$f = \dot{u} - u\dot{\vartheta}\operatorname{ctg}\chi - \frac{v\dot{\varphi}}{\sin\chi},$$

$$f' = \dot{v} + \frac{u\dot{\vartheta}}{\sin\chi} + v\dot{\varphi}\operatorname{ctg}\chi,$$

где χ — угол между обоими направлениями. Обозначая, далее, через r и s радиусы-векторы движущейся точки относительно двух неподвижных и через ϑ и φ — углы наклона этих радиусов-векторов относительно прямой, соединяющей эти точки, определить ускорение движущейся точки как функции величин $\omega = \dot{\vartheta}$ и $\omega' = \dot{\varphi}$.

10. A, B и C означают три неподвижные точки, а u, v, w — компоненты скорости какой-нибудь точки P по направлениям PA, PB, PC. Показать, что компоненты ускорения определяются выражением:

$$\dot{u} + uv\left(\frac{1}{PB} - \frac{\cos APB}{PA}\right) + uw\left(\frac{1}{PC} - \frac{\cos APC}{PA}\right)$$

и двумя другими выражениями, аналогичными этому.

11. Движение плоской пластинки задано ее угловой скоростью ω и компонентами u и v скорости начала координат по осям Ox, Oy, взятыми на пластинке. Определить компоненты скорости любой точки пластинки. Показать, далее, что уравнения

$$\frac{d}{dt}\operatorname{arctg}\left(\frac{u - y\omega}{v + x\omega}\right) = \pm\omega$$

опеделяют на пластинке две окружности, из которых первая есть геометрическое место точек перегиба всех траекторий, а вторая геометрическое место центров кривизны, огибающих всех прямых пластинки.

12. Точка описывает кривую двойной кривизны. Показать, что ее ускорение может быть разложено на два компонента, из которых один направлен по радиусу-вектору относительно проекции какой-нибудь неподвижной точки на плоскость кривизны, а другой по касательной. Значения этих компонентов равны соответственно:

$$\frac{r}{p^3}\frac{T^2}{\rho} \quad \text{и} \quad \frac{T}{p^2}\frac{dT}{ds} + \frac{T^2}{p^4}\,q\,\frac{dq}{ds}.$$

Здесь ρ означает радиус кривизны, q — расстояние неподвижной точки от ее проекции на плоскость кривизны, r и p — расстояния этой проекции от движущейся точки и от касательной, T — произвольную функцию (произведение скорости на p), s — дугу. (Siacci.)

13. На плоскости лежат окружность, прямая и точка. Положение точки определяется ее расстоянием p от прямой и длиной t касательной, проведенной из нее к окружности. Компоненты ее скорости по направлениям, определяемым отрезками t и p, равны соответственно u и v. Угол между этими направлениями равен ϑ. Показать, что

$$\dot{u} - uv\cos\frac{\vartheta}{t} \quad \text{и} \quad \dot{v} - u\frac{v}{t}$$

суть компоненты ускорения по тем же направлениям.

14. Точка движется по дуге окружности. Ее расстояния от концов A и B какой-нибудь неподвижной хорды равны r и r'. Показать, что компоненты ускорения точки P по направлениям AB и BP равны соответственно:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{vv'}{rr'}(r - r\cos\alpha) \quad \text{и} \quad \frac{dv'}{dt} + \frac{vv'}{rr'}(r' - r\cos\alpha),$$

где v, v' суть компоненты скорости по направлениям r, r', а α угол APB.

Точка описывает половину окружности под действием ускорений, направленных к концам некоторого диаметра и в каждом положении обратно пропорциональных расстояниям r, r' от этих концов. Показать, что эти ускорения равны соответственно:

$$\frac{4a^4V^2}{r^3r'^2} \quad \text{и} \quad \frac{4a^4V^2}{r^2r'^3},$$

где a — радиус окружности, а V — скорость точки в направлении диаметра.

15. Твердое тело движется параллельно плоскости. Его движение определяется компонентами u и v скорости какой-нибудь точки C и его угловой скоростью ω. Определить координаты относительно C одной из точек I, имеющей скорость 0 и показать, что всякая другая точка P движется перпендикулярно к PI.

Определить, далее, координаты точки I, имеющей ускорения, равные нулю, и выразить ускорение точки P как функцию ее координат относительно I.

16. Точка движется с постоянной относительной скоростью V на плоскости, вращающейся с угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к ней прямой. Показать, что траектория точки определяется уравнением:

$$\frac{V\vartheta}{\omega} = \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{V}{\omega}\arccos\frac{a}{r},$$

где r и ϑ отнесены к неподвижным осям, а a — кратчайшее расстояние точки от оси вращения.

17. Ускорение движущейся точки Q определяется в каждое мгновение отрезком ωa, где ω — неподвижная точка, а a движется равномерно по окружности с центром ω. Показать, что в каждое мгновение скорость точки Q определяется отрезком Op, где O — неподвижная точка, а p — движется равномерно по некоторой окружности. Определить траекторию точки. (Camb. Math. Tripos., ч. I, 1902.)

18. Точка движется по кривой пересечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и однополого гиперболоида $\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda}$. Ее скорость в той точке, где траектория пересекается двуполым гиперболоидом $\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}$ равна:

$$h\left\{\frac{\mu(\mu-\lambda)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

где h постоянная. Показать, что компонент ускорения по нормали к эллипсоиду равен:

$$\frac{h^2abc(\mu-\lambda)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)\sqrt{\lambda\mu}}.$$

19. Твердое тело катится без скольжения по плоскости. Его угловая скорость имеет в каждое мгновение компоненты ω_1 и ω_2 по касательным к линиям кривизны в точке соприкасания тела с плоскостью и компонент ω_3 по нормали к его поверхности. Показать, что точка касания имеет компоненты ускорения:

$$-R_2\omega_1\omega_3, \quad -R_1\omega_2\omega_3, \quad R_1\omega_2^2+R_2\omega_1^2,$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны поверхности тела в этой точке.

Глава II
Уравнения движения

§ 19. Понятие покоя и движения. В предыдущей главе мы часто говорили о покоящихся и движущихся системах. До тех пор пока вопрос касался чисто кинематических исследований, не было особой необходимости останавливаться на сущности этих понятий. Мы понимали под движением системы не более как изменение ее конфигурации по отношению к другой системе, условно принимаемой нами за покоящуюся, не задумываясь над тем, что означает абсолютный покой.

Но переходя теперь к изучению движения тела, как следствия определённых причин, мы не можем более оставлять без внимания эти вопросы.

В обыденной речи слово покой обычно употребляется по отношению к земным предметам для выражения того обстоятельства, что эти предметы не изменяют своего положения относительно поверхности земного шара. Но Земля вращается вокруг своей оси, вращаясь одновременно вокруг Солнца, которое, в свою очередь, увлекая за собой все планеты, движется с очень большой скоростью в каком-то еще не очень точно определенном направлении в пространстве. Отсюда следует бесплодность всякой попытки найти что-либо действительно покоящееся.

В XIX в. считали, что эфир — носитель световых электрических и магнитных явлений — является абсолютно покоящейся средой, если отвлечься от его малых колебаний. Этим устанавливался базис для абсолютного покоя. Но это представление об эфире было в корне подорвано современным принципом относительности[1]. Последний утверждает, что и в самой области электромагнитных явлений невозможно отличить абсолютного покоя от любого, общего всем частям системы, равномерного поступательного движения.

Вследствие этого в динамике, когда мы будем говорить о движении тела, мы будем предполагать существование системы координат, относительно которой изучается движение. Является целесообразным эту *систему отсчета* называть покоящейся, не имея в виду ввести этим самым понятие абсолютного покоя. Если мы будем рассматривать движение земных тел в некотором месте земной поверхности, то в качестве системы отсчета мы будем принимать систему, покоящуюся относительно Земли. Как показывает опыт, получающиеся при этом

[1] См. *Whittaker*, History of the Theories of Aether and Electricity, гл. 12, London, 1910; или *Conway*, Relativity, London 1915.

предположении законы с достаточной степенью точности объясняют наблюдаемые явления. Другими словами: отклонения, вызываемые движением Земли, настолько незначительны, что в большинстве случаев ими можно пренебречь.

Далее, мы должны придать точный смысл тому понятию, которое мы приписываем слову *время*. В предыдущей главе оно обозначало только некоторый параметр, от которого зависит конфигурация системы. Принцип относительности вскрыл те большие трудности, с которыми связана всякая попытка выяснения понятия времени. В частности, совсем не просто определить понятие *одновременности*, т. е. выяснить смысл, который придается утверждению, что два явления в различных местах в пространстве происходят одновременно. Тем не менее мы можем указать следующий способ измерения времени, выполнимый при помощи обычных инструментов и вполне достаточный для нашей цели. Мы примем, что интервал времени между явлениями измеряется углом, на который поворачивается Земля в своем суточном движении между началом первого и второго явления. При этом угол измеряется относительно неподвижных звезд, собственным движением которых, ввиду его незначительности, можно при таком наблюдении пренебречь. Эта угловая мера может быть переведена в обычные меры в средних солнечных часах, минутах и секундах, если угол в 360° приравнять интервалу времени в $\dfrac{24 \times 365\frac{1}{4}}{366\frac{1}{4}}$ часов.

§ 20. Законы движения[1]. В качестве простейшего примера движения земных тел относительно связанной с Землей системы отсчета мы рассмотрим движение свободной *материальной точки* в пустоте, т. е. очень маленького материального тела, движущегося совершенно независимо от окружающей его среды. Наблюдая различные траектории этого тела, соответствующие различным начальным условиям движения, можно методом, указанным в предыдущем параграфе, вычислить ускорение в любых точках этих траекторий. При этом оказывается, что для всех траекторий ускорение имеет постоянную величину и всегда направлено вертикально вниз. Это ускорение называется ускорением *тяжести* или *гравитации* и обозначается обычно через g. Его величина в наших широтах составляет примерно 981 *см/сек*^{2}.

На основании этого опытного закона можно вычислить траекторию движения в пустоте любой свободной земной материальной точки, если только известны начальные условия движения. Мы не за-

[1]Законы движения открыл Ньютон (Newton, Philosophiae, naturalis principia mathematica London 1867). (В дальнейшем цитируется под названием «Principia».)

нимаемся здесь этим вычислением, ибо оно относится к содержанию другой главы.

Следующим по простоте движения является движение в пустоте на земной поверхности двух материальных точек, связанных между собой при помощи невесомой и нерастяжимой нити. Если нить ненатянутая, то каждая из этих точек будет двигаться с ускорением тяжести, следовательно, так же как если бы второй точки совсем не существовало. Но если нить натянута, то возникает взаимное влияние точек на их движения. Мы можем так же, как и раньше, наблюдать траекторию одной из них и вычислить ускорение, которое имеет ее движение во всякий момент времени. Тогда получается следующий опытный закон: *Ускорение во всякий момент времени может быть представлено как результирующая двух векторов, из которых один есть* g, *а направление другого совпадает с мгновенным положением нити.*

Действие одной материальной точки на движение другой сводится, следовательно, к тому, что к ускорению тяжести добавляется еще другое ускорение, направленное по линии, соединяющей обе точки, и складывающееся с ускорением тяжести по векторному закону. Из наблюдения движения обеих точек, которые мы обозначим через A и B, можно вычислить величину мгновенного ускорения f_1 точки A, вызываемого действием точки B, и величину мгновенного ускорения f_2 точки B вызываемого действием точки A. Вычисление показывает, что *отношение* f_1 *к* f_2 *остается постоянным во все время движения.* Если бы мы стали исследовать движение при различных начальных условиях, при различных температурах и т. д., то мы пришли бы к заключению, что *это отношение есть специфическая физическая постоянная тел* A *и* B.[1]

Наблюдение более сложных систем показывает, что эти экспериментально найденные законы могут быть обобщены таким образом, что они могут служить достаточным обоснованием как земной, так и космической динамики. Обобщенный опытный закон может быть сформулирован следующим образом: *при движении системы связанных между собой материальных точек ускорение каждой отдельной точки складывается из ускорения, которое она имела бы при свободном движении, и ускорений, направленных по линиям, соединяющим эту точку с другими точками системы, влияющими на ее движение. Кроме того, всем точкам* A, B, C, … *можно поставить в соответствие определенные числа* m_A, m_B, m_C, … *такие, что отношение ускорения, направленного по* AB, *вызванного действием точки* B *на точку* A, *к ускорению, направленному по* BA, *вызванному действием точки* A *на точку* B,

[1] Это отношение есть не что иное, как отношение весов тела A и B. Отношение этих весов, наблюдаемых в одной и той же точке земной поверхности, есть вполне определенная величина, независящая от места наблюдения.

равно $m_B : m_A$. Отношения чисел m_A, m_B, ... суть физические постоянные материальных точек.

Постоянное совпадение результатов наблюдений с результатами вычислений динамики, основанной на этом законе, может служить доказательством его справедливости.

Заметим, что этим законом устанавливаются лишь только *отношения* чисел m_A, m_B, ... Приписывая какой-либо определенной точке A *единицу массы*, назовем отношения $m_B : m_A$, $m_C : m_A$, ... *массами* точек B, C, ...

Массы подчиняются закону аддитивности в том смысле, что масса материальной точки, складывающейся из нескольких материальных точек, равна сумме масс этих точек. На этом основании можно говорить о массах тел конечной протяженности, имеющих любую величину и форму.

За единицу массы принято считать массу одной тысячной доли определенного платинового эталона (*основного килограмма*). Эта единица называется граммом. Число, выражающее отношение массы какого-либо тела к этой единице массы, называется *массой тела, выраженной в граммах.*

§ 21. Сила. Мы видели, что взаимодействие двух материальных точек A и B выражается в появлении у точки A ускорения f_A, а у точки B ускорения f_B и что эти ускорения суть векторы, направленные соответственно по AB и BA, величины которых обратно пропорциональны массам m_A и m_B. Поэтому векторы $m_A f_A$ и $m_B f_B$ равны по величине, но направлены в противоположные стороны. Вектор $m_A f_A$ называется *силой*, с которой точка B действует на точку A, а вектор $m_B f_B$ называется силой, с которой точка A действует на точку B.

При помощи этого способа выражения мы можем закон о взаимодействии связанных в систему материальных точек выразить следующим образом: *силы взаимодействия всякой пары связанных между собой материальных точек равны и противоположны.* Этот закон называется *законом действия и противодействия* (реакции).

Складывая вертикально все силы, действующие на точку A вследствие ее связанности с другими материальными точками, мы получим результирующую силу, выражающую общее действие всех остальных материальных точек на точку A. Деля эту силу на m_A, мы получим ускорение, которое получает точка A вследствие действия этих материальных точек; ускорение, складывающееся из этого ускорения и ускорения, которое имела бы точка, если бы она была свободной, представляет собой действительное ускорение точки A.

Вообще справедливо следующее: если точка массы m вследствие действия некоторой причины получает ускорение, выражаемое вектором f, то вектор mf называется *силой*, действующей на точку вследствие наличия этой причины[1]. Результирующая всех действующих на точку сил вследствие наличия каких угодно причин называется *равнодействующей* этих сил. Если для некоторого момента времени равнодействующая сила, действующая на точку, имеет относительно неподвижной прямоугольной системы координат компоненты X, Y, Z, а компоненты ускорения, с которым точка описывает свою траекторию, суть $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, то

$$m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z.$$

Введем еще два других часто употребляющихся понятия.

Проведем из точки приложения силы отрезок K, совпадающий по величине и направлению с величиной и направлением силы. Спроектируем отрезок K на плоскость, перпендикулярную к некоторой прямой L. Произведение этой проекции на ее расстояние от L называется *моментом* силы относительно прямой L.

Если компоненты X, Y, Z силы, действующей на отдельную материальную точку, суть заданные функции от ее координат x, y, z, то они определяют *силовое поле*.

§ 22. Работа. Рассмотрим систему материальных точек, движение которых либо совершенно свободно, либо подчинено определенным ограничениям. Эти ограничения могут быть вызваны либо связями, существующими между точками самой системы, либо связями между точками системы и точками, к этой системе не принадлежащими. Пусть точка массы m имеет при определенной конфигурации системы прямоугольные координаты x, y, z и пусть компоненты равнодействующей силы, приложенной к ней, суть X, Y, Z. Обозначим через $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ координаты точки, бесконечно близкой к точке (x, y, z), в которую последняя может быть переведена без нарушения связей, наложенных на систему. (Если, например, связь заключается в том, что точка m должна все время оставаться на некоторой поверхности.) Тогда выражение

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

называется *работой*[2] сил, действующих на точку m, на бесконечно малом перемещении из положения (x, y, z) в положение $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$.

Очевидно, это выражение может быть физически истолковано как произведение отрезка, на который перемещается точка, на компонент силы по этому направлению.

[1] Сила соответствует *vis motrix* у Ньютона(Principia I, def. 8).

[2] Ньютон определяет «actio agentis» как произведение скорости на компонент силы по направлению движения; очевидно, что оно является производной от работы по времени. См. Principia, т. I, стр. 25, изд. 1687 г.

Так как силы складываются векторно, то сумма компонентов какого угодно числа сил, приложенных к одной точке, по какому угодно направлению равна компоненту равнодействующей по этому же направлению. Поэтому *работа силы, приложенной к какой-нибудь точке, при некотором заданном перемещении равна сумме работ при этом же перемещении всех сил, на которые может быть разложена данная сила.*

Допустим, что при движении системы материальная точка m перешла из произвольно выбираемого начального положения в некоторое конечное положение, отстоящее от начального на конечном расстоянии. Тогда под работой сил на этом конечном перемещении мы будем понимать сумму работ этих сил на всех бесконечно малых перемещениях, на которые можно мыслить разложенным конечное перемещение. Эта работа выражается, следовательно, интегралом

$$\int \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right) ds,$$

распространенным на отрезок s траектории точки от ее начального до конечного положений.

Эти определения могут быть распространены и на всю систему материальных точек. Допустим, что все точки системы получают какие-нибудь перемещения, не нарушающие условий связей, тогда под работой произведенной системой при этом движении, мы будем понимать сумму работ всех приложенных к ней сил.

§ 23. Силы, не производящие работы. В динамических системах приходится часто встречаться с силами, обладающими тем свойством, что при движении системы эти силы не производят никакой работы.

Среди сил, обладающих таким свойством, мы отметим следующие:

1. Силы реакции (противодействия) покоящихся гладких поверхностей. При этом под *гладкими* мы понимаем такие поверхности, для которых сила реакции направлена перпендикулярно к поверхности и поэтому всякое бесконечно малое перемещение точки, к которой приложена сила реакции, направлено перпендикулярно к этой силе, и работа равна нулю.

2. Силы реакции покоящихся абсолютно шероховатых поверхностей. *Абсолютная шероховатость* означает, что всякое тело, касающееся поверхности, может по ней катиться, но не скользить, и поэтому точка, к которой приложена сила реакции, с точностью до величин порядка выше первого, не смещается при бесконечно малом перемещении тела, и работа силы реакции равна нулю.

3. Равнопротивоположные силы реакции двух твердо связанных материальных точек. В самом деле, пусть x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 суть координаты обеих точек, а X, Y, Z — компоненты силы, с которой первая

точка действует на вторую, и, следовательно, X, Y, Z компоненты силы, с которой вторая точка действует на первую. Тогда сумма работ обеих сил при произвольном элементарном перемещении равна:

$$X(\delta x_2 - \delta x_1) + Y(\delta y_2 - \delta y_1) + Z(\delta z_2 - \delta z_1).$$

Но так как расстояние между точками не изменяется, то

$$\delta\left\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right\} = 0$$

или

$$(x_2 - x_1)(\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1)(\delta y_2 - \delta y_1) + (z_2 - z_1)(\delta z_2 - \delta z_1) = 0.$$

В силу же того, что силы реакции направлены по прямой, соединяющей обе точки, имеем:

$$X : Y : Z = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1).$$

Из двух последних уравнений находим, что

$$X(\delta x_2 - \delta x_1) + Y(\delta y_2 - \delta y_1) + Z(\delta z_2 - \delta z_1) = 0,$$

откуда и вытекает, что сумма работ обеих сил реакции равна нулю.

4. С точки зрения динамики всякое твердое тело может быть рассматриваемо как система материальных точек, связанных между собой таким образом, что расстояния между двумя любыми точками остаются неизменными. Из 3 следует, что силы реакции, действующие между отдельными точками тела и удерживающие их на неизменных расстояниях друг от друга (эти силы называются внутренними или молекулярными в отличие от внешних сил, как, например, силы тяжести), при любом движении тела не производят никакой работы.

5. Сила реакции в винтовых нарезках, в шарнирах, связывающих два тела системы, в неподвижных цапфах, в которых могут вращаться отдельные тела системы, очевидно также принадлежит к силам, не производящим работы.

При вычислении полной работы системы при каком угодно ее перемещении все такого рода силы не должны приниматься в расчет.

§ 24. Координаты динамической системы. С точки зрения динамики всякая материальная система состоит из материальных точек, связанных различного рода связями. Так, твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, которые при помощи соответствующих внутренних сил реакции удерживаются на неизменных расстояниях друг от друга.

Если известно строение такого рода системы, как то: форма, величина и масса ее частей и возникающие в них силы напряжений, то конфигурация системы в любой момент времени может быть задана как функция определенных величин, изменяющихся при изменении конфигурации. Эти величины называются *координатами* системы. Так, например, положение какой-нибудь свободной материальной точки вполне определяется ее тремя координатами относительно неподвижной системы осей. Положение материальной точки, движущейся внутри очень узкой произвольно изогнутой трубки, вполне определяется одной координатой — длиной дуги, отсчитываемой от произвольно выбранной точки трубки. Положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, вполне определяется тремя координатами; за эти координаты могут быть выбраны, например, углы Эйлера ϑ, φ, ψ § 10. Положение двух точек, связанных между собой натянутой и нерастяжимой нитью, вполне определяется пятью координатами: тремя прямоугольными координатами одной из этих точек и двумя направляюшими косинусами нити; в самом деле, если эти пять величин известны, то однозначно определяется и положение второй точки.

Задача. Сколько независимых координат определяют мгновенное положение твердого тела, которое при своем движении все время касается некоторой гладкой поверхности?

Мы будем обычно обозначать число координат, необходимых для определения конфигурации системы, через n и ограничимся рассмотрением только тех случаев, для которых это число конечно. Сами координаты мы будем обозначать через $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Если связи, наложенные на систему, изменяются со временем (если, например, система состоит из одной материальной точки, вынужденной двигаться по некоторой поверхности, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси), то может возникнуть необходимость для определения конфигурации системы с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ присоединить еще и время t.

Величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ мы будем часто называть скоростями, соответствующими координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Тяжелая гибкая нить, свободно движущаяся в пространстве, представляет пример такой динамической системы, которая при принятом ограничении относительно конечности n выпадает из нашего рассмотрения; в самом деле, конфигурация такой нити не может быть определена при помощи конечного числа параметров.

§ 25. Голономные и неголономные системы. Мы будем различать двоякого рода динамические системы, различие которых весьма существенно при аналитическом исследовании движения. Это различие мы поясним на простом примере.

Рассмотрим движение шара данного радиуса, который при своем движении все время касается некоторой неподвижной плоскости, которую мы примем за плоскость xy. Положение шара в каждое мгновение вполне определяется пятью координатами: двумя прямоугольными координатами x, y центра шара и тремя углами Эйлера ϑ, φ, ψ, определяющими вращение шара вокруг своего центра. Шар может занимать любое положение, при котором он сохраняет соприкасание с плоскостью, поэтому все пять координат x, y, ϑ, φ, ψ могут принимать любые значения.

Если плоскость — гладкая, то перемещение из положения с координатами x, y, ϑ, φ, ψ в бесконечно близкое положение, определяемое координатами $x+\delta x$, $y+\delta y$, $\vartheta+\delta\vartheta$, $\varphi+\delta\varphi$, $\psi+\delta\psi$, где δx, δy, $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ — любые бесконечно малые величины, является возможным перемещением, т. е. шар может выполнить это перемещение без нарушения наложенных на него связей. Но если плоскость является абсолютно шероховатой, то это перемещение при произвольных δx, δy, $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ не будет возможным. В самом деле, перемещение точки касания (с точностью до величин порядка выше первого) должно равняться нулю, и поэтому величины δx, δy, $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$ не являются более независимыми. В рассматриваемом случае эти величины удовлетворяют двум неинтегрируемым линейным дифференциальным уравнениям. Таким образом *для шара, находящегося на абсолютно шероховатой плоскости, перемещение, определяемое произвольными бесконечно малыми изменениями координат, не является обязательно возможным.*

Система называется *голономной*, если всякое перемещение, определяемое любым бесконечно малым изменением координат, является возможным (например, шар на гладкой плоскости), в противном случае система называется неголономной (например, шар на шероховатой плоскости).

Произвольные бесконечно малые изменения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ координат динамической системы, которые для голономной системы всегда определяют возможное движение, должны для неголономной системы удовлетворять некоторому числу m уравнений связей, для того чтобы они определяли возможное движение. Число $n-m$ называется *числом степеней свободы*. Голономные системы характеризуются, следовательно, тем, что для них число степеней свободы всегда равно числу независимых координат, необходимых для определения конфигурации системы.

§ 26. Уравнения движения Лагранжа для голономных систем[1]**.** Рассмотрим движение голономной системы с n степенями свободы. Обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_n$ координаты системы, определяющие ее конфигурацию в момент времени t, и через x_i, y_i, z_i координаты какой-нибудь точки массы m_i относительно неподвижной в пространстве прямоугольной системы осей. Эти прямоугольные координаты являются известными (в силу известности строения системы) функциями величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и, может быть, времени t.

---

[1] *Lagrange.* Mecanique Analytique, 1788, Second Partie, Section IV. Эти уравнения встречаются впервые в более ранней работе Лагранжа «Miscell. Taurin», т. 2, 1760.

Пусть эти функции представляются уравнениями:

$$x_i = f_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$
$$y_i = \varphi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t),$$
$$z_i = \psi_i(q_1, q_2, \ldots, q_n, t).$$

Если X_i, Y_i, Z_i означают компоненты равнодействующей всех сил (как внутренних, так и внешних), действующих на точку m_i, то уравнения движения этой точки имеют вид:

$$m_i\ddot{x}_i = X_i, \quad m_i\ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i\ddot{z}_i = Z_i.$$

Умножим эти уравнения соответственно на

$$\frac{\partial f_i}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r};$$

затем сложим их и просуммируем по всем точкам системы. Тогда получим:

$$\sum_i m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + \ddot{y}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} + \ddot{z}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r}\right) = \sum_i \left(X_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r}\right),$$

где знак $\sum$ означает суммирование по всем точкам системы, следовательно, либо интегрирование (если система есть твердое тело), либо суммирование по некоторому конечному числу точек. Но

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial q_r}$$

и поэтому

$$\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} = \ddot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_r}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i\left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial q_1 \partial q_r}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_2 \partial q_r}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial q_n \partial q_r}\dot{q}_n + \frac{\partial^2 f_i}{\partial t \partial q_r}\right) =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}\right) - \dot{x}_i \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_r} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial q_r}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right).$$

Отсюда

$$\sum_i m_i \left(\ddot{x}_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + \ddot{y}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} + \ddot{z}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)\right\} - \frac{1}{2}\sum_i m_i \frac{\partial}{\partial q_r}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2).$$

Выражение

$$\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 - \dot{z}_i^2),$$

представляющее собой полусумму произведений массы каждой отдельно взятой точки на квадрат ее скорости, называется *кинетической энергией* системы[1]. В силу того, что структура системы нам известна, мы можем кинетическую энергию выразить[2] как функцию величин

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t.$$

Мы будем ее в дальнейшем обозначать через

$$T(q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

и будем предполагать, что она нам известна как функция своих аргументов. Так как

$$\dot{x}_i = \frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial f_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial f_i}{\partial t}$$

и $\dot{y}_i$ и $\dot{x}_i$ суть также линейные функции от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, то T есть квадратичная функция от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Если функции f_i, φ_i и ψ_1 не содержат явно времени (что представляется всякий раз, когда связи системы не зависят от времени), то $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ будут однородными линейными функциями от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, и T будет однородной квадратичной функцией относительно тех же аргументов.

Кинетическая энергия системы в силу самого ее определения существенно положительна, следовательно, T есть *определенная положительная* квадратичная форма относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Поэтому ее дискриминант и его главные миноры любого порядка также положительны.

Из уравнений движения мы получим таким образом уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = \sum_i \left(X_i\frac{\partial f_i}{\partial q_r} - Y_i\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} + Z_i\frac{\partial \psi_i}{\partial q_r}\right).$$

Левая часть этого уравнения не зависит явно от координат отдельных точек системы; попытаемся и правую часть привести к такой же форме. Для этой цели сообщим системе перемещение, при котором координата q_r принимает значение $q_r + \delta q_r$, а остальные координаты и время остаются неизменными. Так как система голономна, то такое перемещение возможно без нарушения связей. Координаты точки m_i принимают при таком перемещении значения

$$x_i + \frac{\partial f_i}{\partial q_r}\delta q_r, \quad y_i + \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r}\delta q_r, \quad z_i + \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r}\delta q_r;$$

[1] Произведение массы точки на квадрат ее скорости Лейбниц называет vis viva (Acta erud., 1695).

[2] Методы вычисления для твердого тела указаны в пятой главе.

поэтому сумма работ всех сил, действующих на систему, равна:

$$\sum_i \left(X_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r} \right) \delta q_r.$$

Среди этих сил находятся и такие, которые не производят никакой работы. К ним, как мы это видели в § 23, относятся следующие силы:

1. Внутренние силы, действующие на точки твердых тел системы.

2. Давления в шарнирных стержнях неизменной длины, силы реакций в неподвижных цапфах и силы натяжения нерастяжимых нитей.

3. Силы реакции неподвижных гладких поверхностей или кривых, с которыми могут находиться в соприкосновении некоторые тела системы, а также и силы реакции абсолютно шероховатых поверхностей, если последние вообще входят в голономную систему.

4. Силы реакции гладких поверхностей или кривых, совершающие некоторые заданные движения, с которыми могут находиться в соприкосновении тела системы. В самом деле, для рассматриваемого перемещения предполагается, что t, если оно вообще входит в качестве координаты, не изменяется и, следовательно, поверхности и кривые при этом перемещении остаются в покое. Таким образом, этот случай приведем к предыдущему.

Все силы, приложенные к системе, за исключением тех, которые не производят работы, называются *внешними*. Отсюда следует, что выражение

$$\sum_i \left(X_i \frac{\partial f_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial \psi_i}{\partial q_r} \right) \delta q_r$$

представляет собой сумму работ внешних сил при перемещении, в котором q_r переходит в $q_r + \delta q_r$, а остальные координаты остаются неизменными. Так как структура системы и приложенные силы нам известны, то эта величина есть известная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. Обозначим ее через

$$Q_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, t)\, \delta q_r.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы получили, таким образом, n обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, в которых $q_1, q_2, \ldots, q_n$ являются зависимыми, а t — независимой переменными. Так как число уравнений равно числу зависимых переменных, то теоретически этих уравнений достаточно для определения движения при заданных начальных условиях. Резюмируя, мы можем полученный результат высказать следующим образом:

Пусть T кинетическая энергия системы, а $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n$ работа приложенных к ней внешних сил при произвольно выбираемом перемещении $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$, где $T, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ в силу известности структуры системы суть известные функции от $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t$.

Тогда уравнения движения системы могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Эти уравнения называются *уравнениями Лагранжа.* В них не входят неизвестные силы реакции (например, силы напряжений). Определение этих сил реакции является задачей особого отдела механики кинетостатики[1]. Мы можем, следовательно, сказать: *в уравнениях Лагранжа кинетостатические силы исключены.*

§ 27. Консервативные силы; кинетический потенциал. Некоторые силовые поля обладают тем свойством, что работа сил этих полей при движении динамической системы зависит лишь только от начального и конечного положений системы. Другими словами, работа имеет одно и то же значение независимо от того, из какой последовательности бесконечно малых перемещений складывается конечное движение.

Такого рода силовым полем является, например, поле силы тяжести. Как известно, работа силы тяжести при перемещении материальной точки массы m из положения, имеющего высоту h, в положение с высотой k равна $mg(h-k)$, т. е. не зависит от пути, по которому точка перешла из первого положения во второе.

Такого рода силовые поля называются консервативными. Пусть конфигурация системы определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Примем какую-нибудь определенную конфигурацию, например соответствующую координатам

$$q_r = \alpha_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

за основную. Если внешние силы, действующие на систему, — консервативны, то работа этих сил при перемещении системы из конфигурации $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ в основную конфигурацию есть определённая функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, не зависящая от вида перемещения. Эта функция, обозначаемая в дальнейшем через $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, называется *потенциальной энергией*[2] системы в конфигурации $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Работа

[1] См. *Heun*, Jahresber. d. D. Math. V., т. 9, стр. 1, 1900.

[2] Потенциальная функция введена Лагранжем (*Lagrange*, Oeuvres, т. 6, стр. 335). Название «потенциал» введено Грином (*Green*) (1828).

внешних сил при бесконечно малом перемещении $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ равна, очевидно, бесконечно малому уменьшению функции V, т. е. выражению:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\partial V}{\partial q_2}\delta q_2 - \cdots - \frac{\partial V}{\partial q_n}\delta q_n.$$

В силу этого уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Вводя новую функцию L от $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n, t$ при помощи равенства

$$L = T - V,$$

мы можем эти уравнения привести к виду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция L называется *кинетическим потенциалом*, или функцией Лагранжа. Она одна вполне характеризует голономную систему, подвергнутую действию консервативных сил, если рассмотрению подлежат лишь только вопросы чисто динамического порядка.

§ 28. Явный вид уравнений Лагранжа. Покажем теперь, как можно из уравнений Лагранжа получить явное выражение вторых производных от координат по времени.

Допустим, что конфигурация системы вполне определяется одними координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ без времени t, так что кинетическая энергия системы представляет собой однородную квадратичную функцию от $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$. Согласно § 26 такого рода случай представится всякий раз, когда уравнения связей не содержат явно времени, и не представятся, вообще говоря, тогда, когда среди этих условий имеются вынужденные движения (как, например, при вынужденном движении точки по вращающейся кривой).

Итак, пусть кинетическая энергия будет:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\dot q_k \dot q_l,$$

где $a_{kl} = a_{lk}$ суть известные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Уравнения движения системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\dot{q}_s\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_r}\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} a_{rs}\ddot{q}_s + \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\begin{bmatrix} lm \\ r\end{bmatrix}\dot{q}_l\dot{q}_m = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где символ Кристофеля $\begin{bmatrix} lm \\ r\end{bmatrix}$ означает величину $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{lr}}{\partial q_m} + \frac{\partial a_{mr}}{\partial q_l} - \frac{\partial a_{lm}}{\partial q_r}\right)$.

Так как эти уравнения содержат ускорение $\ddot{q}_s$ линейно, то они могут быть относительно них разрешены. Пусть D означает детерминант

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и A_{rs} его миноры, соответствующие элементам a_{rs}. Умножая уравнения предыдущей системы соответственно на $A_{1\nu}, A_{2\nu}, \ldots, A_{n\nu}$, складывая их и замечая, что $\sum\limits_{r=1}^{n} A_{r\nu}a_{rs}$ равна D или нулю в зависимости от того $s = \nu$ или $s \neq \nu$, получим:

$$D\ddot{q}_\nu + \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{r\nu}\begin{bmatrix} lm \\ r\end{bmatrix}\dot{q}_l\dot{q}_m = \sum_{r=1}^{n} A_{r\nu}Q_r$$

или

$$\ddot{q}_\nu = -\frac{1}{D}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{r\nu}\begin{bmatrix} lm \\ r\end{bmatrix}\dot{q}_l\dot{q}_m + \frac{1}{D}\sum_{r=1}^{n} A_{r\nu}Q_r.$$

Эти уравнения, выражающие явно $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$ через $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, эквивалентны системе уравнений Лагранжа.

§ 29. Движение системы, равномерно вращающейся вокруг оси. Во многих динамических системах имеются части, находящиеся в вынужденном равномерном вращении вокруг некоторой неподвижной оси. Простейшим примером может служить движение стеклянной бусинки на вращающейся проволоке. Если система является голономной, то можно, конечно, применить и в этом случае уравнения Лагранжа. Но часто бывает гораздо удобней воспользоваться нижеприводимой теоремой, дающей возможность приведения такого рода систем к системам, у которых вынужденное вращение отсутствует.

Допустим, что система без учета вынужденного вращения имеет n степеней свободы. Принимая ось вращения за ось z и отсчитывая азимут φ от некоторой плоскости, проходящей через ось z и вращающейся с угловой скоростью вынужденного движения, мы можем цилиндрические координаты любой точки m системы выразить как функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, не содержащие явно t. Если тогда T есть кинетическая энергия системы в действительном движении, а $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \cdots + Q_n\delta q_n$, где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ зависят только от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, работа внешних сил при любом бесконечно малом перемещении, и если T — кинетическая энергия системы в предположении, что угловая скорость вынужденного движения равна нулю, то

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left\{\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2(\dot{\varphi} + \omega)^2\right\},$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\sum m\left\{\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right\}.$$

Так как структура системы нам известна, то $\frac{1}{2}\sum mr^2 = W$ есть известная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Величина $\sum mr^2\dot{\varphi}$ есть также известная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и притом — линейная относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Эта функция равна нулю, если при $\omega = 0$ ни одна точка системы не имеет компонента движения по направлению φ. Если $n = 1$, т. е. если имеется только одна координата q, то она делается полной производной от некоторой функции от q по времени. Эти два случая встречаются наиболее часто, и мы можем учесть их оба сразу, если примем, что $\sum mr^2\dot{\varphi}$ имеет вид $\frac{dY}{dt}$, где Y есть некоторая заданная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Тогда

$$T = T_1 + \omega\frac{dY}{dt} + \omega^2 W$$

и уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_r}\right) + \frac{d}{dt}\left(\omega\frac{\partial Y}{\partial q_r}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_r} - \omega\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Y}{\partial q_r}\right) - \omega^2\frac{\partial W}{\partial q_r} = Q_r \ (r = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T_1}{\partial q_r} = -\frac{\partial(-\omega^2 W)}{\partial q_r} + Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти уравнения показывают, что *рассматриваемое движение происходит так, как если бы угловая скорость вынужденного движения равнялась нулю, но к потенциальной энергии был бы добавлен член* $-\frac{1}{2}\sum mr^2\omega^2$. Итак, путем изменения потенциальной энергии мы можем привести исследование системы, имеющей вынужденное вращение вокруг неподвижной оси, к исследованию системы, у которой такое движение отсутствует. Фиктивная сила, которой мы заменяем здесь действие вынужденного вращения, называется *центробежной*.

§ 30. Уравнения Лагранжа в квазикоординатах. В приведенной в § 26 форме уравнений Лагранжа переменными являются координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и время t. Так как знание этих величин и структура системы достаточно для определения положения любой точки системы, то эти величины называют еще *истинными координатами*. Выясним теперь, какую форму примут уравнения Лагранжа, если мы отбросим ограничение об истинности координат[1].

Допустим, что динамическая система, определяемая истинными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеет кинетическую энергию T, а работа внешних сил, действующих на систему на перемещении $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$, пусть будет $Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n$. Тогда уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda} = Q_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ будут n независимых друг от друга линейных комбинаций скоростей $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$, определяемых при помощи уравнений:

$$\omega_r = \alpha_{1r}\dot q_1 + \alpha_{2r}\dot q_2 + \ldots + \alpha_{nr}\dot q_n \qquad (r = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{nn}$ суть данные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Пусть, далее, $d\pi_1, d\pi_2, \ldots, d\pi_n$ означают n независимых линейных комбинаций от дифференциалов $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$, определяемых уравнениями:

$$d\pi_r = \alpha_{1r}dq_1 + \alpha_{2r}dq_2 + \ldots + \alpha_{nr}dq_n \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где коэффициенты α имеют те же значения, что и в предыдущих уравнениях. Последние уравнения непосредственно интегрируются, если для всех λ, r, m выполняются условия $\frac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_m} - \frac{\partial \alpha_{mr}}{\partial q_\lambda} = 0$. В этом случае

[1] Частные случаи рассматриваемых в этом параграфе теорем были уже известны Лагранжу и Эйлеру. Обобщенная форма уравнений принадлежит Больцману (*Boltzmann*, Wiener Sitzungsberichte, т. 111, стр. 1603, 1902) и Гамелю (*Hamel*, Zeitschr. f. Math. u. Phys., т. 50, стр. 1, 1904).

будут существовать истинные координаты π_r. Но так как уравнения могут быть и не интегрируемыми, то и величины $d\pi_1, d\pi_2, \ldots, d\pi_n$ могут и не являться дифференциалами от координат $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$. Назовем их дифференциалами *квазикоординат*.

Пусть решения уравнений (2) относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ имеют вид:

$$\dot{d}_\lambda = \beta_{\lambda 1}\omega_1 + \beta_{\lambda 2}\omega_2 + \ldots + \beta_{\lambda n}\omega_n \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Умножая уравнения (1) на $\beta_{1r}, \beta_{2r}, \ldots, \beta_{nr}$ и складывая, получим:

$$\sum_\lambda \beta_{\lambda r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right\} = \sum_\lambda \beta_{\lambda r} Q_\lambda.$$

Величина $\sum\limits_\lambda Q_\lambda \delta q_\lambda$ есть работа внешних сил, действующих на систему, при произвольном перемещении; поэтому величина $\sum\limits_\lambda \beta_{\lambda r} Q_\lambda \delta\pi_\lambda$ есть работа этих сил при перемещении, при котором все $\delta\pi$, за исключением $\delta\pi_r$, равны нулю. Поэтому, если работа внешних сил системы при произвольном бесконечно малом перемещении $(\delta\pi_1, \delta\pi_2, \ldots, \delta\pi_n)$ равна:

$$\Pi_1\delta\pi_1 + \Pi_2\delta\pi_2 + \ldots + \Pi_n\delta\pi_n,$$

то

$$\sum_\lambda \beta_{\lambda r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right\} = \Pi_r.$$

При помощи уравнений (3) можно исключить из функции T величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Тогда T станет функцией от $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$. (Для упрощения мы предполагаем, что T не содержит явно t.) Преобразованную таким образом функцию T мы обозначим через $\overline{T}$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} = \sum_s \frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}\alpha_{\lambda s},$$

и поэтому

$$\sum_\lambda \beta_{\lambda r}\left\{\sum_s \alpha_{\lambda s}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}\right) + \sum_s \frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}\frac{d\alpha_{\lambda s}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\lambda}\right\} = \Pi_r.$$

Но

$$\sum_\lambda \beta_{\lambda r}\alpha_{\lambda s} - \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ 1 & \text{при } r = s. \end{cases}$$

Следовательно, можем написать:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_r}\right)+\sum_{\lambda}\sum_{s}\beta_{\lambda r}\frac{d\alpha_{\lambda s}}{dt}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}-\sum_{\lambda}\beta_{\lambda r}\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=\Pi_r.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\lambda}+\sum_{s}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}\frac{\partial \omega_s}{\partial q_\lambda}=\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_\lambda}+\sum_{s}\sum_{m}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}\frac{\partial \alpha_{ms}}{\partial q_\lambda}\dot{q}_m.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_r}\right)+\sum_{\lambda}\sum_{s}\sum_{m}\beta_{\lambda r}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}\dot{q}_m\left(\frac{\partial \alpha_{\lambda s}}{\partial q_m}-\frac{\partial \alpha_{ms}}{\partial q_\lambda}\right)-\sum_{\lambda}\beta_{\lambda r}\frac{\partial \overline{T}}{\partial q_r}=\Pi_r.$$

Величина $\sum\limits_{\lambda}\beta_{\lambda r}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q_\lambda}$ или $\sum\limits_{\lambda}\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial q_\lambda}\dfrac{\partial q_\lambda}{\partial \pi_r}$ представляет собой $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_r}$, если π_r является истинной координатой. Мы будем обозначать эту величину через $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_r}$, независимо от того, является ли π_r истинной координатой или нет. Выражение

$$\sum_{\lambda}\sum_{m}\beta_{\lambda r}\beta_{ml}\left(\frac{\partial \alpha_{\lambda s}}{\partial q_m}-\frac{\partial \alpha_{ms}}{\partial q_\lambda}\right)$$

зависит только от соотношений между истинными координатами и дифференциалами квазикоординат и совершенно не зависит от структуры и движения системы. Обозначим это выражение через γ_{rsl}. Таким образом, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_r}\right)+\sum_{s}\sum_{l}\gamma_{rsl}\omega_l\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_s}-\frac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_r}=\Pi_r \qquad (r=1,\,2,\,\ldots\,,\,n).$$

Эти n уравнений представляют собой уравнения движения в квазикоординатах. Если квазикоординаты являются истинными координатами, то в силу $\dfrac{\partial \alpha_{\lambda r}}{\partial q_m}-\dfrac{\partial \alpha_{mr}}{\partial q_\lambda}=0$ все величины γ_{rsl} обращаются в нуль и уравнения делаются обычными уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\pi}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial \pi_r}=\Pi_r \qquad (r=1,\,2,\,\ldots\,,\,n).$$

Задача. Твердое тело вращается вокруг одной из своих точек. За координаты тела можно принять три угла Эйлера ϑ, φ, ψ, определяющие положение системы осей $Oxyz$, связанных с телом и движущихся вместе с ним относительно системы осей $OXYZ$, неподвижных в пространстве. Произвольное перемещение $(\delta\vartheta, \delta\varphi, \delta\psi)$ тела эквивалентно трем бесконечно малым вращениям $\delta\pi_1$, $\delta\pi_2$, $\delta\pi_3$ вокруг осей Ox, Oy, Oz и поэтому величины $d\pi_1$, $d\pi_2$, $d\pi_3$ можно принять за дифференциалы квазикоординат. Обозначим угловые скорости тела относительно осей Ox, Oy, Oz через ω_1, ω_2, ω_3; тогда $d\pi_1$, $d\pi_2$, $d\pi_3$ суть дифференциалы квазикоординат, соответствующие скоростям ω_1, ω_2, ω_3. Показать, что уравнения движения тела имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_1}\right) - \omega_3\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_2} + \omega_2\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_3} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_1} = \Pi_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_2}\right) - \omega_1\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_3} + \omega_3\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_1} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_2} = \Pi_2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_3}\right) - \omega_2\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_1} + \omega_1\frac{\partial \overline{T}}{\partial \omega_2} - \frac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_3} = \Pi_3.$$

Здесь $\overline{T}$ есть кинетическая энергия тела, выраженная через ω_1, ω_2, ω_3, ϑ, φ, ψ, а Π_1, Π_2, Π_3 — моменты действующих на тело внешних сил относительно осей Ox, Oy, Oz, а $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_r}$ означает выражение

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial \pi_r} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \pi_r} + \frac{\partial \overline{T}}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial \pi_r}.$$

Ниже будет показано, что $\overline{T}$ зависит лишь только от ω_1, ω_2, ω_3 и поэтому все $\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \pi_r}$ равны нулю.

§ 31. Силы с потенциалом, зависящим от скоростей. Иногда бывает возможным ввести потенциальную функцию или потенциальную энергию и для таких динамических систем, у которых действующие силы зависят не только от положения, но и от скоростей и ускорений.

Допустим, что динамическая система имеет координаты q_1, $q_2, \ldots, q_n$. Пусть работа внешних сил при произвольном перемещении $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ будет равна

$$Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n.$$

Если Q_r может быть представлено в виде:

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_r}\right) \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

где V есть функция от $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, то уравнения Лагранжа принимают вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot q_r}\right) \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Поэтому, если определить кинетический потенциал L при помощи равенства

$$L = T - V,$$

то эти уравнения перейдут в

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Функция V может быть рассматриваема как обобщение потенциальной энергии. Примером системы с такого рода потенциальной энергией может служить движение точки, подверженной действию электромагнитных сил притяжения от какого-нибудь неподвижного центра, по закону Вебера[1]. Согласно этому закону сила, действующая на точку, отнесённая к единице массы, равна:

$$\frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{\dot{r}^2 - 2r\ddot{r}}{c^2}\right),$$

где r — расстояние точки от притягивающего центра. В этом случае

$$V = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right).$$

Задача. Силы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, действующие на динамическую систему с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, допускают обобщенную потенциальную функцию V, т. е.

$$Q_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_r}\right).$$

Показать, что $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть линейные функции от $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$ удовлетворяющие следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial \ddot{q}_i},$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \ddot{q}_i}\right),$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i}\right).$$

Относительно общих условий существования кинетического потенциала см. *Helmholtz*, Journal für Math., т. 100, 1896, *Mayer*, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Kl. т. 40, 1896. *Hirsch*, Math. Annalen, т. 50, 1898.

[1] *W. Weber*, Annalen d. Phys., т. 73, стр. 193, 1848. *Whittaker*, History of the Theories of Aether and Electricity, стр. 226–231.

§ 32. Начальные движения. В общем случае уравнения движения динамической системы не могут быть разрешены в конечной форме при помощи известных функций. Но, однако, всегда возможно (за исключением некоторых особых случаев, которые мы здесь не рассматриваем) систему дифференциальных уравнений проинтегрировать при помоши *степенных рядов*, т. е. найти для зависимых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ выражения следующего вида:

$$\begin{aligned}
q_1 &= a_1 + b_1 t + c_1 t^2 + d_1 t^3 + \ldots, \\
q_2 &= a_2 + b_2 t + c_2 t^2 + d_2 t^3 + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_n &= a_n + b_n t + c_n t^2 + d_n t^3 + \ldots
\end{aligned}$$

При этом коэффициенты $a, b, \ldots$ могут быть найдены путем подстановки этих рядов в дифференциальные уравнения и приравнивания нулю коэффициентов при различных степенях t. Разложения получаются сходящимися для всех значений t, лежащих в определенном круге сходимости комплексной плоскости.

Очевидно, что эти ряды вполне характеризуют начальный характер движения. В самом деле, если t отсчитывать от начала движения, то $a_1, b_1, \ldots$ являются соответственно начальными значениями величин $q_1, \dot{q}_1, \ldots$ Следующий пример показывает, как можно исследовать при помощи этого метода начальное движение системы.

Пример. Точка массы 1, движущаяся по плоскости, находится в начальный момент в покое. На нее действует сила, которая в произвольной точке (x, y) имеет по неподвижным прямоугольным осям компоненты X и Y. Определить радиус кривизны траектории в начале движения.

Пусть $x + \xi$ и $y + \eta$, где ξ и η бесконечно малые величины, суть координаты точки, бесконечно близкой к исходной точке (x, y). Тогда уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{\xi} = X(x + \xi, y + \eta) = X(x, y) + \xi \frac{\partial X(x, y)}{\partial x} + \eta \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} + \ldots,$$

$$\ddot{\eta} = Y(x, y) + \xi \frac{\partial Y(x, y)}{\partial x} + \eta \frac{\partial Y(x, y)}{\partial y} + \ldots$$

Полагаем

$$\xi = at^2 + bt^3 + ct^4 + \ldots,$$
$$\eta = dt^2 + et^3 + ft^4 + \ldots$$

(ξ и η не содержат членов ниже второй степени, так как при $t = 0$, $\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta}$ обращаются в нуль). Подставляя эти разложения в диффереициальные уравнения и приравнивая нулю коэффициенты при различных степенях t, получим следующие соотношения:

$$a = \frac{1}{2}X(x, y), \quad b = 0, \quad c = \frac{1}{24}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

$$d = \frac{1}{2}Y(x, y), \quad e = 0, \quad f = \frac{1}{24}\left(X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Поэтому траектория вблизи точки $(x,\, y)$ определяется рядами:

$$\xi = Xu + \frac{1}{6}\left(X\frac{\partial X}{\partial x} + Y\frac{\partial X}{\partial y}\right)u^2 + \cdots,$$

$$\eta = Yu + \frac{1}{6}\left(X\frac{\partial Y}{\partial x} + Y\frac{\partial Y}{\partial y}\right)u^2 + \cdots,$$

где $u = \dfrac{1}{2}t^2$.

Если координаты ξ, η точек кривой выражены через параметр, то, как известно, радиус кривизны имеет выражение:

$$\frac{\left\{\left(\dfrac{d\xi}{du}\right)^2 + \left(\dfrac{d\eta}{du}\right)\right\}^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2\eta}{du^2}\dfrac{d\xi}{du} - \dfrac{d^2\xi}{du^2}\dfrac{d\eta}{du}}.$$

Отсюда для искомого радиуса кривизны траектории вблизи начальной точки $u = 0$ находим значение:

$$\frac{3(X^2 + Y^2)^{\frac{3}{2}}}{\left(X\dfrac{\partial Y}{\partial x} + Y\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right)X - \left(X\dfrac{\partial X}{\partial x} + Y\dfrac{\partial X}{\partial y}\right)Y}.$$

§ 33. Закон подобия в динамических системах[1]**.** Всякой системе связанных между собой материальных точек и твердых тел можно поставить в соответствие некоторую подобную систему, получаемую изменением масштабов. Если массы и силы обеих систем, которые мы будем называть *первоначальной* и *отображенной* , находятся в постоянных соотношениях, то скорости в обеих системах не будут одинаковы и они также будут находиться в постоянных отношениях.

[1]Newton, Principia, Lib. II, Sect. 7, Prop. 32.

Установим соотношения между изменениями различных масштабов. Пусть линейные размеры первоначальной и преобразованной систем находятся в отношении $x:1$, массы соответствующих точек в отношении $y:1$, скорости в отношении $z:1$ и, следовательно, интервалы времени между соответствующими фазами в отношении $1:z$ и, наконец, силы в отношении $w:1$.

Каждая материальная точка удовлетворяет уравнению движения вида:

$$m\ddot{x} = X.$$

Следовательно, если m изменяется в отношении $y:1$, $\ddot{x}$ — в отношении $xz^2:1$ и X — в отношении $w:1$, то

$$w = xyz^2.$$

Последнее равенство и устанавливает искомое соотношение между величинами x, y, z, w.

Пример. Если действующие силы суть силы тяжести, то $w = y$ и, поэтому, $xz^2 = 1$. Следовательно, отношение скоростей равно обратному отношению корней квадратных из линейных размеров.

Если действующие силы суть силы притяжения между отдельными точками и притом такие, что каждая точка притягивает все остальные точки с силами, прямо пропорциональными массам и обратно пропорциональными квадратам расстояний, то $w = \dfrac{y^2}{x^2}$. Следовательно, скорости относятся как $y^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{2}}$.

§ 34. Движение под действием обратно направленных сил. Рассмотрим частный случай подобия, когда $w = -1$.

Движение системы, у которой связи не зависят от времени, а действующие силы зависят лишь только от положения ее точек, определяются уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Здесь T есть однородная квадратичная функция от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ зависящая, кроме того, произвольным образом от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а Q_r — функции одних лишь координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Введем новую независимую переменную τ, определяемую уравнением $\tau = it$, где $i = \sqrt{-1}$. Обозначим штрихами дифференцирование по переменной τ. Так как $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)$ и $\dfrac{\partial T}{\partial q_r}$ однородны относительно dt и порядок однородности равен 2, то предыдущие уравнения преобразовываются в уравнения:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial T^*}{\partial q'_r}\right) - \frac{\partial T^*}{\partial q_r} = -Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где T^* образована из величин $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ по тому же закону, что и T из величин $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Если τ рассматривать как время, то последние уравнения представляют собой уравнения движения первоначальной системы под действием сил, имеющих те же величины, но противоположные направления. Если, кроме того, через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ обозначить начальные значения величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ для какого-нибудь частного движения первоначальной системы, то $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, -i\beta_1, -i\beta_2, \ldots, -i\beta_n$ являются начальными значениями соответствующих величин в преобразованной системе. Мы получаем, таким образом, теорему: *во всякой динамической системе со связями, не зависящими от времени, и с силами, зависящими лишь только от координат, интегралы уравнений движения останутся вещественными, если t заменить через $i\tau$, а начальные значения $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ через $i\beta_1, i\beta_2, \ldots, i\beta_n$. Полученные таким образом выражения определяют движения системы при старых начальных условиях, но при силах, имеющих первоначальные величины, но противоположные направления.*

§ 35. Импульсивные движения. В некоторых случаях, например, при ударе твердых тел, скорости материальных точек динамической системы изменяются настолько быстро, что при аналитическом представлении явления можно пренебречь промежутком времени, в течение которого оно происходит.

Законы[1] такого рода *импульсивных* движений обладают далеко идущей аналогией с движениями, вызываемыми длительно действующими силами, и могут быть выражены следующим образом.

Произведение массы материальной точки на вектор ее мгновенной скорости есть вектор, приложенный в этой точке, называющейся ее мгновенным *количеством движения*[2]. Компоненты количества движения точки массы m по осям координат равны, очевидно, $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$. *Компонентом количества движения системы материальных точек* по какому-нибудь направлению называется сумма компонентов по тому же направлению количеств движения всех точек системы, взятых в отдельности. Импульсивное изменение скоростей в системе может быть

[1] Они содержатся в законах удара, открытых в 1668 г. Валлисом и Реном (Phil. Trans. № 43, стр. 864, 867).

[2] У Ньютона (Principia, Lib. I) — quantitas motus. Идея этого понятия может быть прослежена до Декарта.

рассматриваемо как следствие внезапных добавлений количеств движения к отдельным точкам системы.

Эффект воздействия, вызывающего импульсивное движение системы, измеряется количеством движения, которое оно сообщает свободной материальной точке. Если компоненты скорости по неподвижным осям какой-нибудь точки массы m имели до импульса значения u_0, v_0, w_0, а после импульса значения u, v, w, то вектор с компонентами

$$m(u - u_0), \quad m(v - v_0), \quad m(\omega - \omega_0)$$

(приложенный в точке m) представляет собой импульс, действующий на точку. Для исследования импульсивного движения системы связанных точек необходим, очевидно, экспериментальный закон, аналогичный закону действия и противодействия для обыкновенных сил. Этот закон выражается следующим образом: *Полный импульс, действующий на каждую отдельную материальную точку системы, складывается из внешнего импульса и импульсов, направленных по линиям, соединяющим ее с остальными точками системы, воздействующими, вследствие наличия связей, на ее движение. Внешний импульс, т. е. импульс, сообщенный точке извне, измеряется количеством движения, которое эта точка получила бы, если бы она была совершенно свободной. Импульсы, сообщаемые друг другу двумя связанными материальными точками, равны по величине, но направлены в противоположные стороны.*

Если компоненты импульса рассматривать как интегралы по времени от компонентов обыкновенной силы весьма большой величины, но действующей очень короткий промежуток времени, то высказанный закон согласуется с обычным законом действия и противодействия для конечных сил.

Изменение кинетической энергии вследствие импульсов. Изменение кинетической энергии динамической системы, на точки которой действует заданная последовательность импульсов, может быть определена следующим образом.

Допустим, что к точке массы m приложен импульс I, имеющий относительно неподвижной системы осей направляющие косинусы λ, μ, ν. Под действием этого импульса скорость точки, имевшая значение v_0 и направляющие косинусы L_0, M_0, N_0 примет значение v и будет направлена по прямой с направляющими косинусами L, M, N. Уравнения импульсивного движения есть суть:

$$m(vL - v_0L_0) = I\lambda, \quad m(vM - v_0M_0) = I\mu, \quad m(vN - v_0N_0) = I\nu.$$

Умножая эти уравнения соответственно на

$$\frac{1}{2}(vL - v_0L_0), \quad \frac{1}{2}(vM - v_0M_0), \quad \frac{1}{2}(vN - v_0N_0)$$

и складывая, получим:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}Iv(L\lambda + M\mu + N\nu) + \frac{1}{2}Iv_0(L_0\lambda + M_0\mu + N_0\nu).$$

Следовательно, изменение кинетической энергии точки равно произведению из импульса на среднее арифметическое значение компонента скорости, по направлению импульса до и после действия импульса.

Рассмотрим теперь динамическую систему, состоящую из связанных материальных точек и твердых тел, которой сообщена заданная последовательность импульсов. Применяя предшествующий результат к каждой отдельной частице системы и суммируя, найдем, что изменение *кинетической энергии системы равно сумме произведений импульсов на среднее арифметическое значение компонентов скоростей точек приложения до и после импульса на направление импульса.* При этом, очевидно, не следует принимать в расчет взаимных импульсов молекул твердых тел.

§ 36. Уравнения Лагранжа для импульсивных движений. Уравнения импульсивного движения динамической системы могут быть приведены к виду, аналогичному уравнениям Лагранжа для движения под действием конечных сил[1].

Пусть X_i, Y_i, Z_i означают компоненты полного (внешнего и внутреннего) импульса, приложенного к точке системы, имеющего массу m_i и координаты x_i, y_i, z_i.

Тогда уравнения импульсивного движения этой точки суть:

$$m_i(\dot{x}_i \quad \dot{x}_{i0}) = X_i, \quad m_i(\dot{y}_i \quad \dot{y}_{i0}) = Y_i, \quad m_i(\dot{z}_i \quad \dot{z}_{i0}) = Z_i,$$

где $\dot{x}_{i0}, \dot{y}_{i0}, \dot{z}_{i0}, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ суть компоненты скорости до и после импульса.

Если $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть n независимых координат, определяющих конфигурацию системы, то

$$\sum_i m_i \left\{ (\dot{x}_i - \dot{x}_{i0}) \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + (\dot{y}_i - \dot{y}_{i0}) \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + (\dot{z}_i - \dot{z}_{i0}) \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right\} =$$

$$= \sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right),$$

где суммирование распространено на все точки системы.

Если выполнить суммирование в правой части этого равенства, то, так же как и в § 26, из этой суммы выпадут внутренние импульсы, действующие между точками системы. Поэтому величина

$$\sum_i \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right)$$

может быть легко определена, если известны все внешние импульсы. Обозначим ее через Q_r. Тогда

$$\sum_i m_i \left\{ (\dot{x}_i - \dot{x}_{i0}) \frac{\partial x_i}{\partial q_r} - (\dot{y}_i - \dot{y}_{i0}) \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + (\dot{z}_i - \dot{z}_{i0}) \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right\} = Q_r.$$

[1] *Lagrange.* Méc. Anal. (2-е изд.), т. 2, стр. 183.

Но, так же, как и в § 26,

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_r}, \quad \text{следовательно,} \quad \dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\left(\frac{1}{2}\dot{x}_i^2\right)$$

и аналогично

$$\dot{x}_{i0}\frac{\partial x_i}{\partial q_r} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{r0}}\left(\frac{1}{2}x_{i0}^2\right),$$

где $\dot{q}_{r0}$ и $\dot{q}_r$ суть скорости, соответствующие координате q_r до и после импульса. Следовательно, если

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$

есть кинетическая энергия системы, то предыдущее уравнение может быть написано в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)_0 = Q_r,$$

где $\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)_0$ означает значение величины $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}$ в момент, предшествующий импульсу.

Аналогичные уравнения получаются и для остальных координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Мы получаем, таким образом, *систему из n уравнений Лагранжа для импульсивного движения*:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)_0 = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти уравнения служат для определения $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ через $\dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}, \ldots, \dot{q}_{n0}$. В отличие от уравнений Лагранжа для движения под действием конечных сил они являются алгебраическими, а не дифференциальными уравнениями, так как они не содержат вторых производных от координат по времени.

Упражнения.

1. Два движущиеся в пространстве твердых тела связаны нерастяжимой нитью, соединяющей какую-нибудь точку первого тела с какой-нибудь точкой второго. Нить предполагается натянутой, и, кроме того, одно из тел катится без скольжения по неподвижной поверхности. Сколько степеней свободы имеет система и сколько независимых переменных необходимо для определения ее конфигурации?

2. Точка отнесена к криволинейным координатам a, b, c. Квадрат ее скорости равен:

$$2T = A\dot{a}^2 + B\dot{b}^2 + C\dot{c}^2 + 2F\dot{b}\dot{c} + 2G\dot{c}\dot{a} + 2H\dot{a}\dot{b}.$$

Показать, что компоненты p, q, r скорости по касательным к координатным кривым определяются тремя уравнениями вида:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}}\right) - \frac{\partial T}{\partial a} = p\sqrt{A} + \frac{H}{\sqrt{B}}q + \frac{G}{\sqrt{C}}r.$$

3. Точка, покоящаяся в начальный момент в начале координат, находится под действием силового поля, компоненты которого X, Y, Z для положения (x, y, z) определяются разложениями:

$X = a + bx +$ члены второго и более высокого порядка относительно x, y, z,
$Y = cx +$ члены второго и более высокого порядка относительно x, y, z,
$Z = dx^2 +$ члены третьего и более высокого порядка относительно x, y, z.

Определить кривизну и кручение траектории в начале координат.

Глава III
Методы интегрирования

§ 37. Задачи, разрешимые в квадратурах. В последней главе мы показали, что определение движения некоторой голономной динамической системы с конечным числом степеней свободы сводится к разрешению некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ означают координаты, определяющие положение системы в момент времени t, а n — число степеней свободы. Тогда система уравнений движения состоит из n дифференциальных уравнений второго порядка с зависимыми переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и с независимым переменным t. Порядок системы равен $2n$ (под порядком системы мы понимаем сумму наивысших порядков производных от зависимых переменных, входящих в уравнения этой системы). Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что число произвольных постоянных интегрирования, входящих в общее решение какой-нибудь системы дифференциальных уравнений, равно порядку этой системы. *Следовательно, общее решение какой-нибудь голономной динамической задачи с n степенями свободы содержит $2n$ постоянных интегрирования.*

Всякая система дифференциальных уравнений k-го порядка может быть приведена к виду:

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_k$ — известные функции их аргументов. Для этой цели следует ввести в качестве новых зависимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ первоначальные зависимые переменные и их производные до наивысшего порядка, встречающегося в первоначальной системе уравнений.

Так, например, система уравнений четвертого порядка

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = Q_1(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2), \quad \frac{d^2 q_2}{dt^2} = Q_2(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)$$

(где Q_1 и Q_2 — функции указанных аргументов) подстановкой

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_2, \quad x_3 = \dot{q}_1, \quad x_4 = \dot{q}_2$$

приводятся к виду:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_3,\ \frac{dx_2}{dt}=x_4,\ \frac{dx_3}{dt}=Q_1(x_1, x_2, x_3, x_4),\ \frac{dx_4}{dt}=Q_2(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Мы можем, следовательно, рассматривать систему

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

как нормальную форму некоторой системы дифференциальных уравнений k-го порядка.

Если некоторая функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_k, t)$ *обладает тем свойством, что* $\frac{df}{dt}$ *уничтожается, когда вместо* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *подставить любые функции от* t, *удовлетворяющие вышеуказанным дифференциальным уравнениям, то уравнение*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = \text{const}$$

называется интегралом системы. Легко найти условие, при котором некоторая заданная функция f представляет интеграл системы. Ибо из уравнения $\frac{df}{dt} = 0$ вытекает:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\dot{x}_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}\dot{x}_k + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}X_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}X_k + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Это соотношение должно тождественно выполняться для того, чтобы уравнение

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = \text{const}$$

могло быть интегралом нашей системы дифференциальных уравнений.

Иногда интегралом системы называют самую функцию f, а не уравнение $f = \text{const}$.

Полное решение системы дифференциальных уравнений k-го порядка дается k интегралами

$$f_r(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

с произвольными постоянными $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если только эти интегралы независимы, т. е. если ни один из них не является следствием остальных. Ибо, если

$$x_r = \varphi_r(a_1, a_2, \ldots, a_k, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

суть значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ как функций от $t, a_1, a_2, \ldots, a_k$, которые можно найти из этих уравнений, и если выбрать некоторую произвольную систему функций $x_1, x_2, \ldots, x_k$ от t, удовлетворяющих нашим дифференциальным уравнениям, то согласно вышесказанному произвольным постоянным a_r, следует лишь только придать определенным образом выбранные значения, чтобы уравнения

$$f_r(x_1, x_2, \ldots, x_k, t) = a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

выполнялись для выбранных нами функций $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Следовательно, система функций $x_1, x_2, \ldots, x_k$ содержится среди функций, определяемых уравнениями $x_r = \varphi_r$. Таким образом, решение динамической задачи с n степенями свободы сводится к нахождению $2n$ интегралов некоторой системы дифференциальных уравнений $2n$-го порядка.

Так, например, уравнение второго порядка

$$\ddot{q} = -q$$

имеет два интеграла:

$$q^2 + \dot{q}^2 = a_1, \quad \operatorname{arctg} \frac{q}{\dot{q}} - t = a_2,$$

где a_1 и a_2 — произвольные постоянные. Решение этих уравнений относительно q и $\dot{q}$ даст:

$$q = a_1^{\frac{1}{2}} \sin(t + a_2), \quad \dot{q} = a_1^{\frac{1}{2}} \cos(t + a_2).$$

Эти уравнения представляют решение нашего дифференциального уравнения.

Мы будем сначала заниматься теми задачами, которые могут быть разрешены в элементарных функциях или в неопределенных интегралах от элементарных функций, т. е. задачами, разрешимыми в квадратурах. Возможность или невозможность решения динамической задачи в квадратурах целиком зависит от вида кинетического потенциала. Настоящая глава посвящена выяснению тех, наиболее часто встречающихся частных видов кинетического потенциала, при которых динамическая задача разрешается в квадратурах.

§ 38. Системы с циклическими координатами. Согласно § 27 движение консервативной голономной системы с n степенями свободы определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — координаты, а L — кинетический потенциал.

Величина $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$ называется *импульсом* или *моментом*, соответствующим координате q_r.

Может случиться, что некоторые координаты, например $q_1, q_2, \ldots, q_k$, не входят явно в функцию L, но эта функция содержит явно соответствующие скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$. Такого рода координаты носят название *циклических.* Мы увидим в дальнейшем, что когда задача разрешима в квадратурах, то в большинстве случаев это является следствием существования циклических координат.

Уравнениями Лагранжа, соответствующими k циклическим координатам, будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

интегрирование которых даст:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \beta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

где через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ обозначены постоянные интегрирования. Последние уравнения дают, очевидно, k интегралов нашей системы.

Покажем теперь, каким образом, используя эти k интегралов, можно понизить порядок системы[1].

Полагаем

$$L - \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = R.$$

При помощи k уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \beta_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

можно выразить соответствующие циклическим координатам скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_k$ и, следовательно, величину R как функцию переменных:

$$q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \ldots, \dot{q}_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k.$$

Обозначим через δf приращение некоторой функции f от аргументов:

$$q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$$

или

$$q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n, \dot{q}_{k+1}, \dot{q}_{k+2}, \ldots, \dot{q}_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$$

[1]Эти преобразования представляют собой частный случай преобразований Гамильтона, рассматриваемых в десятой главе. Тем не менее они были самостоятельно открыты Раусом (Routh) в 1876 г. и несколько позже Гельмгольцем.

при произвольных бесконечно малых изменениях

$$\delta q_{k+1},\, \delta q_{k-2},\, \ldots,\, \delta q_n,\, \delta \dot{q}_1,\, \delta \dot{q}_2,\, \ldots,\, \delta \dot{q}_n$$

этих аргументов. Тогда согласно определению R

$$\delta R = \delta \left(L - \sum_{r-1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right),$$

но

$$\delta L = \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r + \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r$$

и

$$\delta \left(\sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) = \sum_{r=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \delta \beta_r,$$

так как

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \beta_r.$$

Отсюда

$$\delta R = \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r - \sum_{r=k+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r - \sum_{r=1}^{k} \dot{q}_r \delta \beta_r.$$

Так как бесконечно малые величины, входящие в правую часть последнего уравнения, совершенно произвольны и независимы, то это уравнение эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} &= \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} \qquad (r = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n), \\ \frac{\partial L}{\partial q_r} &= \frac{\partial R}{\partial q_r} \qquad (r = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n), \\ \dot{q}_r &= -\frac{\partial R}{\partial \beta_r} \quad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, k). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа, получим:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n).$$

Но R есть функция только переменных

$$\dot{q}_{k+1},\, \dot{q}_{k+2},\, \ldots,\, \dot{q}_n,\, q_{k+1},\, q_{k+2},\, \ldots,\, q_n$$

и постоянных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$; мы получили, таким образом, новую систему уравнений Лагранжа, которую можно отнести к некоторой новой динамической задаче с $n-k$ степенями свободы. Новыми координатами будут служить величины $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$, а новым кинетическим потенциалом величина R. Если после решения новой динамической задачи переменные $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$ будут определены как функции времени, то остальные первоначальные переменные, а именно $q_1, q_2, \ldots, q_n$, можно будет найти из уравнений:

$$q_r = -\int \frac{\partial R}{\partial \beta_r} dt \qquad (r = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким образом, *динамическая задача с n степенями свободы и с k циклическими координатами может быть сведена к динамической задаче с $n - k$ степенями свободы.*

Вышеуказанное приведение основано на том обстоятельстве, что если кинетический потенциал не содержит явно какой-нибудь координаты q_r, но содержит соответствующую скорость $\dot{q}_r$, то можно сразу указать один интеграл уравнения движения, а именно $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \mathrm{const}$. Это является частным случаем значительно более общей теоремы, которую мы докажем ниже. Эта теорема даст возможность сразу найти интеграл уравнений движения, если для них известно бесконечно малое контактное преобразование.

Если первоначальная задача касается консервативной динамической системы, связи которой не зависят от времени, то кинетический потенциал L распадается на две части: на кинетическую энергию, представляющую собой однородную квадратичную функцию относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$ и на потенциальную энергию (с противоположным знаком), зависящую только от величин $q_{k+1}, q_{k+2}, \ldots, q_n$. Однако в новой динамической системе, к которой приводится первоначальная, кинетический потенциал R уже не может быть разложен таким образом, так как он в общем случае содержит и члены, линейные относительно скоростей. Вообще, если решение какой-нибудь лагранжевой системы приведено к решению другой лагранжевой системы с меньшим числом переменных, то кинетический потенциал этой новой системы не раскладывается обязательно на две части, соответствующие кинетической и потенциальной энергиям. Системы уравнений Лагранжа мы будем называть натуральными, если соответствующий кинетический потенциал содержит только нулевые и вторые степени скоростей; лагранжевы системы, не обладающие этим свойством, мы будем называть *ненатуральными.*

В виде примера рассмотрим динамическую систему с двумя степенями свободы с кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2} \frac{\dot{q}_1^2}{a - bq_2^2} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2$$

и с потенциальной энергией

$$V = c - dq_2^2,$$

где a, b, c, d — данные постоянные величины.

Координата q_1 является, очевидно, циклической, так как она не содержится явно ни в T, ни в V.

Кинетический потенциал системы равен:

$$L = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_1^2}{a + bq_2^2} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - c - dq_2^2.$$

Отсюда интеграл, соответствующий циклической координате q_1, имеет вид:

$$\frac{\dot{q}_1}{a + bq_2^2} = \beta,$$

где значение постоянной β определяется из начальных условий движения.

Для кинетического потенциала приведенной системы получаем:

$$R = L - \dot{q}_1\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - c - dq_2^2 - \frac{1}{2}\beta^2(a + bq_2^2).$$

Таким образом, задача приводится к интегрированию уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_2} = 0$$

или

$$\ddot{q}_2 + (2d + b\beta^2)q_2 = 0.$$

Решение этого линейного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$q_2 = A\sin\left\{(2d + b\beta^2)^{\frac{1}{2}}t + \varepsilon\right\},$$

где A и ε — постоянные интегрирования, значения которых могут быть определены из начальных условий движения. Это уравнение определяет координату q_2 как функцию времени. Значение q_1 как функции времени может быть найдено из соотношения:

$$q_1 = \beta\int(a + bq_2^2)dt,$$

что дает:

$$q_1 = (\beta a + \frac{1}{2}\beta bA^2)t - \frac{\beta bA^2}{4(2d + \beta b^2)^{\frac{1}{2}}}\sin 2\{(2d + b\beta^2)^{\frac{1}{2}}t - \varepsilon\}.$$

Таким образом, задача полностью разрешена.

§ 39. Интегралы количества движения и момента количества движения. Мы рассмотрим сейчас два типа циклических координат, наиболее часто встречаемых в динамических задачах.

1. *Системы с интегралом количества движения.* Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ означают координаты какой-нибудь консервативной голономной системы с n степенями свободы, а T и V — ее кинетическую и потенциальную энергии.

Уравнения движения этой системы суть:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

Допустим, что одна из координат, например q_1, является циклической и что она, кроме того, обладает тем свойством, что изменение ее на величину l, при сохранении значений остальных координат $q_2, q_3, \ldots, q_n$, соответствует поступательному перемещению всей системы на отрезок l по какому-нибудь определенному направлению. Примем это направление за ось x некоторой неподвижной прямоугольной системы координат. Так как координата q_1 циклическая, то мы имеем интеграл:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \mathrm{const}.$$

Выясним физический смысл этого интеграла.

Имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\sum m_i(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2),$$

где суммирование распространено на все точки системы. Отсюда

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_1} + \dot{y}_i\frac{\partial \dot{y}_i}{\partial \dot{q}_1} + \dot{z}_i\frac{\partial \dot{z}_i}{\partial \dot{q}_1}\right) =$$
$$= \sum m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right) = \sum m_i\dot{x}_i,$$

так как в нашем случае

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1} = 1, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_1} = 0.$$

Но согласно § 35 величина $\sum m_i\dot{x}_i$ представляет слагающую по оси x количества движения системы точек m_i; в этом и заключается физическое значение величины $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$.

Мы можем поэтому интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \mathrm{const}$$

истолковать следующим образом:

Если связи допускают поступательное перемещение системы как твердого тела в каком-нибудь определенном направлении и если при этом потенциальная энергия системы не изменяется (поступательное перемещение, очевидно, не отражается на зависимости кинетической энергии от скоростей и, следовательно, соответствующая координата является циклической), *то слагающая количества движения по этому направлению есть величина постоянная.*

Эта теорема называется *теоремой о сохранении количества движения*[1]. Про системы, для которых она справедлива, говорят, что они допускают интеграл количества движения.

2. *Системы с интегралом момента количества движения.* Выберем снова систему с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ с кинетической энергией T и с потенциальной энергией V. Кроме того, допустим, что координата q_1 — циклическая и обладает тем свойством, что изменению ее на величину α, при сохранении значений остальных координат, соответствует вращение всей системы на угол α вокруг некоторой неподвижной в пространстве прямой.

Так как q_1 — циклическая координата, то имеет место интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \text{const}, \tag{1}$$

которому мы сейчас дадим физическое истолкование.

Имеем, как и прежде:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum m_i \left(\dot{x}_i \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + \dot{y}_i \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + \dot{z}_i \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \right),$$

где суммирование распространяется на все точки системы. Но, полагая

$$x_i = r_i \cos\varphi_i, \quad y_i = r_i \sin\varphi_i,$$

будем иметь:

$$d\varphi_i = dq_1,$$

так что

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial \varphi_i} = -r_i \sin\varphi_i = -y_i, \quad \frac{\partial y_i}{\partial q_1} = \frac{\partial y_i}{\partial \varphi_1} = r_i \cos\varphi_i = x_i, \quad \frac{\partial z_i}{\partial q_1} = 0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \sum m_i(-\dot{x}_i y_i + \dot{y}_i x_i). \tag{2}$$

Если r означает мгновенное расстояние некоторой точки массы m от некоторой заданной прямой, а ω — угловую скорость вращения вокруг

[1]Этот закон вытекает из примечания Ньютона (Principia, книга I, введение к разделу XI), что общий центр тяжести некоторого числа твердых тел, находящихся только под действием их взаимных притяжений, находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.

нее, то произведение $mr^2\omega$ называется *моментом количества движения* точки относительно этой прямой.

Пусть движущаяся точка за интервал времени dt переходит из положения P в бесконечно близкое положение P'. Тогда ее момент количества движения относительно произвольной прямой OK, проходящей через произвольно выбранную точку O, равен, очевидно, пределу дроби $\frac{m}{dt}$ × на удвоенную площадь проекции треугольника OPP' на некоторую плоскость, перпендикулярную к OK.

Если l, m, n суть направляющие косинусы прямой OK, а λ, μ, ν направляющие косинусы нормали к плоскости OPP', то момент количества движения относительно OK равен произведению из $l\lambda+m\mu+n\nu$ на момент количества движения относительно нормали к плоскости OPP'. Поэтому, если под h_1, h_2, h_3 понимать моменты количества движения точки относительно трех взаимно перпендикулярных осей $Oxyz$, то согласно вышесказанному момент количества движения относительно любой прямой, выходящей из O и имеющей относительно $Oxyz$ направляющие косинусы l, m, n, равен:

$$lh_1 + mh_2 + nh_3.$$

Этот результат может быть выражен следующим образом:

Моменты количества движения относительно различных осей, проходящих через одну точку, складываются по векторному закону.

Момент количества движения динамической системы относительно некоторой заданной оси определяется как сумма моментов количества движения отдельных точек системы относительно этой оси. В частности, момент количества движения системы точек m_i, с координатами x_i, y_i, z_i относительно оси z равен:

$$\sum_i m_i r_i^2 \dot{\varphi},$$

где

$$x_i = r_i \cos\varphi_i, \quad y_i = r_i \sin\varphi_i,$$

и суммирование распространяется на все точки системы. Это выражение для момента количества движения может быть представлено в виде:

$$\sum_i m_i(\dot{y}_i x_i - \dot{x}_i y_i).$$

Сравнение с уравнением (2) показывает, что момент количества движения рассматриваемой системы относительно оси z равен $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$.

Поэтому из уравнения (1) вытекает, что момент количества движения системы относительно оси z есть величина постоянная.

Отсюда следует:

Если связи допускают вращение системы как твердого тела относительно некоторой оси и если при этом потенциальная энергия не изменяется, то момент количества движения системы относительно этой оси есть величина постоянная.

Эта теорема называется теоремой о *сохранении момента количества движения*[1].

Задача 1. Некоторая система из n свободных материальных точек движется под действием сил взаимного притяжения. Эти силы являются производными некоторого кинетического потенциала V, содержащего координаты и компоненты скоростей, так что уравнения движения имеют вид:

$$m_r \ddot{x}_r = \frac{\partial V}{\partial x_r} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_r}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Показать, что эти уравнения допускают интегралы:

$$\sum_r \left(m_r \dot{x}_r + \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_r}\right) = \text{const},$$

$$\sum_r \left(m_r \dot{y}_r + \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_r}\right) = \text{const},$$

$$\sum_r \left(m_r \dot{z}_r + \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_r}\right) = \text{const},$$

$$\sum_r \left\{m_r(y_r \dot{z}_r - z_r \dot{y}_r) + y_r \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_r} - z_r \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_r}\right\} = \text{const},$$

$$\sum_r \left\{m_r(z_r \dot{x}_r - x_r \dot{z}_r) + z_r \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_r} - x_r \frac{\partial V}{\partial \dot{z}_r}\right\} = \text{const},$$

$$\sum_r \left\{m_r(x_r \dot{y}_r - y_r \dot{x}_r) + x_r \frac{\partial V}{\partial \dot{y}_r} - y_r \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_r}\right\} = \text{const}.$$

Эти интегралы могут быть рассматриваемы как обобщения интегралов количества движения и моментов количества движения. (Levy).

§ 40. Общая теорема о моменте количества движения. Теорема о сохранении момента количества движения есть частный случай более общей теоремы, которая может быть получена следующим образом.

Рассмотрим систему, состоящую из некоторого числа свободных или связанных материальных точек. Если помимо реакции взаимодействия на систему действуют другие силы реакции, то мы отнесем последние к числу внешних сил. Возьмем произвольную неподвижную

[1]Закон Кеплера о том, что площадь, описываемая радиусом-вектором планеты, изменяется пропорционально времени, был обобщен Ньютоном на общий случай движения точки под действием центральных сил. Это дало повод к открытию общего закона о сохранении момента количества движения.

в пространстве прямую и выберем одну из координат, например q_1, таким образом, чтобы изменение одной лишь координаты q_1, при сохранении значений остальных координат, соответствовало вращению всей системы как единого целого вокруг выбранной прямой и чтобы угол поворота равнялся изменению q_1. Связи, наложенные на систему, имеют такой характер, что такого рода движение системы является возможным.

Уравнение Лагранжа, соответствующее координате q_1,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1$$

сводится к уравнению

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = Q_1,$$

так как величина q_1 (в отличие от $\dot{q}_1$) не имеет никакого влияния на кинетическую энергию, так что $\dfrac{\partial T}{\partial q_1} = 0$. Но $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}$ есть момент количества движения системы относительно данной прямой; $Q_1 \delta q_1$ есть работа внешних сил при элементарном перемещении δq_1, т. е. при вращении системы вокруг данной прямой на элементарный угол δq_1. Отсюда следует, что Q_1 есть момент внешних сил относительно данной прямой. Мы имеем поэтому следующую теорему: *Производная по времени от момента количества движения системы относительно данной прямой равна моменту внешних сил относительно этой прямой.* Если момент внешних сил равен нулю, то отсюда, очевидно, вытекает теорема о сохранении момента количества движения.

Аналогично может быть получена теорема: *Производная по времени от компонента количества движения по какому-нибудь неизменному направлению равна компоненту по этому же направлению всех действующих на систему внешних сил.*

Для импульсивных движений имеют место аналогичные теоремы:

Импульсивное приращение компонента количества движения системы по какому-нибудь определенному направлению равно компоненту по тому же направлению всех действующих на систему внешних импульсов.

Импульсивное приращение момента количества движения системы относительно произвольной оси равно моменту относительно той же оси всех действующих на систему внешних импульсов.

§ 41. Уравнение энергии. Займемся выводом одного интеграла, играющего весьма важную роль во всех динамических исследованиях и во всех вопросах физики.

Допустим, что связи консервативной динамической системы с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и с кинетическим потенциалом L не зависят от времени и, следовательно, кинетический потенциал L не содержит явно t, а зависит лишь только от переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Относительно L мы не делаем пока никаких дальнейших ограничений, так что исследование одинаково справедливо как для натуральных систем, так и для ненатуральных, получающихся после приведения систем с циклическими координатами.

Имеем:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{r=1}^{n} \ddot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial q_r} = \sum_{r=1}^{n} \ddot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}.$$

Интегрируя, получаем:

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = h,$$

где h — постоянная. Это уравнение, представляющее собой интеграл уравнений движения, называется *интегралом энергии* или *законом сохранения энергии*[1].

Как мы видели, для натуральных систем, связи которых не зависят от времени, кинетический потенциал L может быть представлен в виде $T - V$, где кинетическая энергия T представляет собой однородную функцию второго порядка относительно скоростей, а V зависит лишь только от координат. В этом случае интеграл энергии принимает вид:

$$h = \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = \sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - T + V = 2T - T + V = T + V,$$

так как T есть однородная функция второго порядка относительно

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n.$$

Отсюда следует: *В консервативных натуральных системах сумма кинетической и потенциальной энергий есть величина постоянная.* Это постоянное значение называется полной энергией системы.

Предыдущий результат может быть также получен и непосредственно из элементарных уравнений движения. Ибо из уравнений движения для одной материальной точки:

$$m_i \ddot{x}_i = X_i, \quad m_i \ddot{y}_i = Y_i, \quad m_i \ddot{z}_i = Z_i$$

[1] Этот закон развит трудами Гюйгенса, Ньютона, И. и Д. Бернулли и Лагранжа из элементарного частного случая, который был известен еще Галилею, что скорость материальной точки, падающей по наклонной плоскости, зависит только от высоты падения.

вытекает

$$\sum_i m_i(\dot x_i \ddot x_i + \dot y_i \ddot y_i + \dot z_i \ddot z_i) = \sum_i (X_i \dot x_i + Y_i \dot y_i + Z_i \dot z_i),$$

где суммирование распространяется на все точки системы, или

$$d\sum_i \frac{1}{2} m_i(\dot x_i^2 + \dot y_i^2 + \dot z_i^2) = \sum_i (X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i).$$

Приращение кинетической энергии при бесконечно малом перемещении системы равно, следовательно, работе действующих на систему сил при этом перемещении, т. е. равно убыли потенциальной энергии. Сумма кинетической и потенциальной энергий остается, следовательно, постоянной.

Уравнение энергии

$$d\frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) = X dx + Y dy + Z dz$$

(где для простоты система принимается состоящей только из одной материальной точки) остается справедливым не только тогда, когда x, y, z означают координаты в какой-нибудь абсолютно покоящейся системе. Система отсчета может также находиться в равномерном поступательном движении в каком-нибудь определенном направлении.

Допустим, в самом деле, что ξ, η, ζ означают координаты точки относительно неподвижной в пространстве системы, параллельно подвижной системе $Oxyz$, так что

$$x = \xi - at, \quad y = \eta - bt, \quad z = \zeta - ct,$$

где a, b, c означают постоянные компоненты скорости начала O подвижной системы. Из уже доказанного соотношения

$$d\frac{1}{2}m(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2) = X d\xi + Y d\eta + Z d\zeta$$

вытекает, что

$$d\frac{1}{2}m\{(\dot x+a)^2+(\dot y+b)^2+(\dot z+c)^2\}=X(dx+a\,dt)+Y(dy + b\,dt) + Z(dz + c\,dt)$$

или

$$d\frac{1}{2}m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+dm(a\dot x+b\dot y+c\dot z)=X\,dx+Y\,dy+Z\,dz+(aX+bY+cZ)\,dt.$$

Но

$$dm(a\dot x+b\dot y + c\dot z)=m(a\ddot x+b\ddot y+c\ddot z)\,dt=m(a\ddot\xi+b\ddot\eta+c\ddot\zeta)\,dt = (aX+bY+cZ)\,dt$$

и поэтому

$$d\frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) = X dx + Y dy + Z dz,$$

чем и доказывается теорема.

Заметим, что из этого результата могут быть получены уравнения движения материальной точки. Для этого следует положить $x = \xi - at$ и т. д. и вычесть из уравнения энергии в координатах ξ, η, ζ уравнение энергии в координатах x, y, z.

§ 42. Приведение динамической системы к системе с меньшим числом степеней свободы при помощи уравнения энергии. На основании уравнения энергии движение консервативной системы с одной степенью свободы может быть определено при помощи квадратур. В самом деле, если q означает координату, то интеграл энергии

$$\dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = h$$

устанавливает зависимость между $\dot{q}$ и q.

Если из этой зависимости выразить явно $\dot{q}$ через q:

$$\dot{q} = f(q),$$

то дальнейшее интегрирование даст решение задачи под видом:

$$t = \int \frac{dq}{f(q)} + \text{const}.$$

Если, однако, мы имеем дело с задачей с большим числом степеней свободы, то одного уравнения энергии уже недостаточно для ее разрешения. Но интеграл энергии, так же как интегралы, соответствующие циклическим координатам, может быть использован для приведения системы к системе с меньшим числом степеней свободы[1].

С этой целью заменим в функции L величины $\dot{q}_2, \dot{q}_3, \ldots, \dot{q}_n$ величинами $\dot{q}_1 q'_2, \dot{q}_1 q'_3, \ldots, \dot{q}_1 q'_n$, где $q'_r = \dfrac{dq_r}{dq_1}$, и полученную в результате функцию обозначим через $W(\dot{q}_1, q'_2, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Дифференцирование равенства

$$L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n) = W(\dot{q}_1, q'_2, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

даст:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} - \sum_{r=2}^{n} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1^2}\frac{\partial W}{\partial q'_r}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial W}{\partial q'_r} \quad (r = 2, 3, \ldots, n), \tag{4}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = \frac{\partial W}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

[1] *Whittaker*, Mess. of Math., т. 30, 1900.

Уравнения (3) и (4) дают:

$$\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} + \sum_{r=2}^{n} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}. \tag{6}$$

Заменим теперь в интеграле энергии

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = h$$

величины $\dot{q}_r$ через $\dot{q}_1 q'_r$ и выразим из полученного уравнения величину $\dot{q}_1$ как функцию величин $q'_2, q'_3, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$. При помощи полученного выражения для $\dot{q}_1$ функция

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}$$

представится как функция от $q'_2, q'_3, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Полученную таким образом функцию обозначим через L'. Тогда из равенства (6) вытекает, что функция L' совпадает с $\dfrac{\partial W}{\partial \dot{q}_1}$ и лишь только иначе выражена. Дифференцирование по q'_r и по q_r уравнения энергии, которое согласно (6) может быть записано в виде

$$\dot{q}_1 \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1} - W = h$$

и которое рассматривается как соотношение, выражающее $\dot{q}_1$ как неявную функцию от $q'_2, q'_3, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, дает:

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r} = \frac{\partial W}{\partial q'_r} - \dot{q}_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r}, \tag{7}$$

$$\dot{q}_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r} = \frac{\partial W}{\partial q_r} - \dot{q}_1 \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q_r}. \tag{8}$$

Из дифференцирования равенства

$$L' = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_1},$$

рассматриваемого как тождество между переменными $q'_2, q'_3, \ldots, q'_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, вытекает:

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r} = \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q'_r} + \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q'_r}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_r} = \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1 \partial q_r} - \frac{\partial^2 W}{\partial \dot{q}_1^2} \frac{\partial \dot{q}_1}{\partial q_r}. \tag{10}$$

Сравнивая (7) и (9), найдем, что

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r} = \frac{1}{\dot q_1}\frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

и сравнивая (8) и (10), имеем:

$$\frac{\partial L'}{\partial q_r} = \frac{1}{\dot q_1}\frac{\partial W}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Комбинируя эти уравнения с (4) и (5), найдем:

$$\frac{\partial L'}{\partial q'_r} = \frac{\partial L}{\partial \dot q_r}, \quad \frac{\partial L'}{\partial q_r} = \frac{1}{\dot q_1}\frac{\partial L}{\partial q_r}.$$

Подстановка этих значений в уравнения движения даст систему:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right) - \dot q_1 \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)$$

или окончательно:

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q'_r}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Но эти уравнения могут быть рассматриваемы как уравнения движения некоторой новой динамической системы, имеющей кинетический потенциал L' и координаты $q_2, q_3, \ldots, q_n$ и в которой роль времени играет независимая переменная q_1. В общем случае эта система, так же как и системы, получающиеся от приведения систем с циклическими координатами, не будет натуральной, т. е. кинетический потенциал L' будет содержать не только члены нулевой и второй степеней относительно скоростей $q'_2,\ q'_3,\ \ldots,\ q'_n$. Но так как уравнения системы имеют форму уравнений Лагранжа, то большинство положений относительно динамических систем будет справедливо также и для нее. *Интеграл энергии дает, таким образом, возможность привести данную динамическую систему с n степенями свободы к некоторой другой динамической системе с $n-1$ степенями свободы.*

В общем случае новая система не допускает интеграла энергии, так как независимая переменная q_1 может войти явно в новый кинетический потенциал L'. Но если для первоначальной системы координата q_1 является координатой циклической, то она не войдет явно ни в одно из действий вышеизложенного процесса приведения и, следовательно, не войдет также и в L'. Отсюда следует, что в этом случае и новая система допускает интеграл энергии, а именно:

$$\sum_{r=2}^{n} q'_r \frac{\partial L'}{\partial q'_r} - L' = \mathrm{const}.$$

Это обстоятельство может быть использовано для дальнейшего понижения числа степеней свободы.

Согласно вышеизложенным положениям всякая консервативная динамическая система с n степенями свободы и с $n-1$ циклическими координатами может быть полностью разрешена в квадратурах. Для этого нужно поступать двояким образом: можно сначала, пользуясь циклическими координатами, привести систему к системе с одной степенью свободы, которая допускает интеграл энергии и поэтому может быть разрешена способом, указанным в начале этого параграфа. Или мы можем при помощи интеграла энергии понизить число степеней свободы на единицу, при помощи интеграла энергии новой системы еще на единицу и т. д., пока не придем к системе с одной степенью свободы, решение которой может быть опять найдено вышеуказанным способом.

Задача 1. Динамическая система имеет кинетический потенциал

$$L = \frac{1}{2} f(q_2)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 - \psi(q_2).$$

Показать, что зависимость между q_1 и q_2 дается дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q_2'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_2} = 0,$$

где $q_2' = \dfrac{dq_2}{dq_1}$ и L' определяется равенством

$$L' = \{2h - 2\psi(q_2)\}^{\frac{1}{2}}\{f(q_2) + {q_2'}^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Показать, далее, что определяемая этим дифференциальным уравнением ненатуральная система допускает интеграл энергии, и привести при помощи него решение задачи к квадратурам.

§ 43. Разделение переменных; динамические системы типа Лиувилля. Особый класс динамических систем, разрешаемых в квадратурах, образуют системы, для которых кинетическая и потенциальные энергии имеют частный вид:

$$T = \frac{1}{2}v_1(q_1)\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}v_2(q_2)\dot{q}_2^2 + \dots + \frac{1}{2}v_n(q_n)\dot{q}_n^2,$$
$$V = \omega_1(q_1) + \omega_2(q_2) + \dots + \omega_n(q_n),$$

где $v_1, v_2, \ldots, v_n, w_1, w_2, \ldots, w_n$ произвольные функции их аргументов. Тогда кинетический потенциал распадается на сумму членов, из которых каждый зависит только от одной переменной и ее производной.

В этом случае уравнениями Лагранжа будут:

$$\frac{d}{dt}\{v_r(q_r)\dot{q}_r\} \quad \frac{1}{2}v_r'(q_r)\dot{q}_r^2 = \quad \omega_r'(q_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

или
$$v_r(q_r)\ddot{q}_r + \frac{1}{2}v_r'(q_r)\dot{q}_r^2 = -\omega_r'(q_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти уравнения могут быть непосредственно проинтегрированы и дают:
$$\frac{1}{2}v_r(q_r)\dot{q}_r^2 + \omega_r(q_r) = c_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — постоянные интегрирования. Полученные уравнения могут быть снова проинтегрированы, так как переменные q_r и t разделены. Таким образом, мы получим:
$$t = \int \left\{\frac{v_r(q_r)}{2c_r - 2\omega_r(q_r)}\right\}^{\frac{1}{2}} dq_r + \gamma_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ — постоянные интегрирования. Последние уравнения представляют решение задачи.

Значительное расширение этого класса динамических задач дано Лиувиллем[1]. Он показал, что все динамические задачи, для которых кинетическая и потенциальная энергии могут быть представлены в виде:
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\{u_1(q_1) + u_2(q_2) + \cdots + u_n(q_n)\}\{v_1(q_1)\dot{q}_1^2 + v_2(q_2)\dot{q}_2^2 + \\ &\qquad + \cdots + v_n(q_n)\dot{q}_n^2\}, \\ V &= \frac{\omega_1(q_1) + \omega_2(q_2) + \cdots + \omega_n(q_n)}{u_1(q_1) + u_2(q_2) + \cdots + u_n(q_n)}, \end{aligned}$$

всегда решаются в квадратурах.

В самом деле, заменяя переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ переменными $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, где
$$q_r' = \int \sqrt{v_r(q_r)}dq_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

и опуская штрихи при переменных, мы приведем кинетическую и потенциальную энергии к виду:
$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}u(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2), \\ V &= \frac{1}{u}\{\omega_1(q_1) + \omega_2(q_2) + \cdots + \omega_n(q_n)\}, \end{aligned}$$

где
$$u = u_1(q_1) + u_2(q_2) + \cdots + u_n(q_n).$$

[1] Journal de Math., т. 14, стр. 257, 1849.

Уравнение Лагранжа для координаты q_1

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

дает:

$$\frac{d}{dt}(u\dot{q}_1) - \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial q_1}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2) = -\frac{\partial V}{\partial q_1}.$$

После умножения на $2u\dot{q}_1$ это уравнение даст:

$$\frac{d}{dt}(u^2\dot{q}_1^2) - u\dot{q}_1\frac{\partial u}{\partial q_1}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2) = -2u\dot{q}_1\frac{\partial V}{\partial q_1}.$$

Но из интеграла энергии вытекает, что

$$\frac{1}{2}u(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2) = h - V,$$

где h — постоянная. Поэтому уравнение для координаты q_1 может быть переписано так:

$$\frac{d}{dt}(u^2\dot{q}_1^2) = 2(h - V)\dot{q}_1\frac{\partial u}{\partial q_1} - 2u\dot{q}_1\frac{\partial V}{\partial q_1} = 2\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\{(h - V)u\} =$$

$$= 2\dot{q}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\{hu_1(q_1) - \omega_1(q_1)\} = 2\frac{d}{dt}\{hu_1(q_1) - \omega_1(q_1)\}.$$

Интегрируя, получим:

$$\frac{1}{2}u^2\dot{q}_1^2 = hu_1(q_1) - \omega_1(q_1) + \gamma_1,$$

где γ — постоянная интегрирования. Аналогичные уравнения мы получим для всех координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Соответствующие постоянные $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ должны, на основании интеграла энергии, удовлетворять условию

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n = 0.$$

Полученные уравнения дают:

$$\{hu_1(q_1) - \omega_1(q_1) + \gamma_1\}^{-\frac{1}{2}}dq_1 = \{hu_2(q_2) - \omega_2(q_2) + \gamma_2\}^{-\frac{1}{2}}dq_2 =$$

$$= \ldots = \{hu_n(q_n) - \omega_n(q_n) + \gamma_n\}^{-\frac{1}{2}}dq_n.$$

Эта система уравнений, которая разделением переменных может быть непосредственно проинтегрирована, и даст решение задачи.

Относительно дальнейших исследований по этому вопросу сошлемся на *Hadamard*, Bull. des Sc. Math., т. 35, стр. 106, 1911 и *Burgatti*, Rom. Acc. L. Rend. (5), т. 20, стр. 108, 1911.

Упражнения.

1. На некоторую точку плоскости с координатами x, y и с массой m действует сила, проекции которой X, Y не зависят от времени. Показать, что, исключая t из дифференциальных уравнений движения, можно привести задачу к интегрированию уравнения

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{Y - X\dfrac{dy}{dx}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}\right\} - 2X = 0.$$

2. Система свободных материальных точек находится в движении. Ее потенциальная энергия зависит только от ее координат и остается неизменной, если системе в любом ее расположении сообщить поступательное перемещение как твердому телу на любой отрезок и в любом направлении. Какие интегралы движения можно написать сразу?

3. В динамической системе с двумя степенями свободы кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{\dot{q}_1^2}{2(a + bq_2)} + \frac{1}{2}q_2^2\dot{q}_2^2;$$

а потенциальная энергия

$$V = c + dq_2,$$

где a, b, c, d — постоянные. Показать, что выражение q_2 как функция времени определяется уравнением:

$$(q_2 - k)(q_2 + 2k)^2 - h(t - t_0)^2;$$

где h, k, t_0 — постоянные.

4. Кинетический потенциал динамической системы равен:

$$L = \frac{\dot{q}_1^2}{aq_2 + b} + \frac{1}{2}\dot{q}_2^2 + 2q_2^3 + cq_2,$$

где a, b, c — данные постоянные. Показать, что выражение q_2 как функции времени определяется уравнением:

$$q_2 = \wp(t + \varepsilon),$$

где ε — произвольная постоянная, а $\wp$ — эллиптическая функция Вейерштрасса.

5. Доказать, что кинетическая энергия системы с циклическими координатами есть сумма квадратичной функции T' от скоростей, соответствующих нециклическим координатам, и квадратичной функции K от импульсов, соответствующих циклическим координатам.

Определить в случае трех координат x, y, φ, из которых φ — циклическая, уравнения движения типа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T'}{\partial x} - \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} + k\dot{y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial \dot{x}}\right)\right\} = 0.$$

Здесь V означает потенциальную энергию, а K — импульс, соответствующий циклической координате; производные от $\dot{\varphi}$ по $\dot{x}$ и $\dot{y}$ вычислены из линейного уравнения, определяющего K как функцию от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{\varphi}$ (Camb. Math. Tripos, 1904).

6. Динамическая система с двумя степенями свободы имеет кинетический потенциал

$$L = \frac{\dot{q}_2^2}{4q_2} + q_2\dot{q}_1^2 + l^2\dot{q}_1^2.$$

Показать при помощи интеграла энергии, что решение зависит от решения задачи с кинетическим потенциалом

$$L' = \left(\frac{q_2'^2}{4q_2} + q_2 + l^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Используя интеграл энергии последней системы, показать далее,что q_1 и q_2 связаны соотношением:

$$cq_2 = \wp(q_1 + \varepsilon) - \frac{1}{3}(2cl^2 - 1),$$

где c и ε — постоянные интегрирования, а $\wp$ — эллиптическая функция.

7. Кинетическая энергия динамической системы есть

$$T = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2),$$

а потенциальная энергия

$$V = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2}.$$

Показать при помощи теоремы Лиувилля или другим способом, что q_1 и q_2 связаны соотношением:

$$a^2q_1^2 + b^2q_2^2 + 2abq_1q_2\cos\gamma - \sin^2\gamma,$$

где a, b, γ — постоянные интегрирования.

8. Материальная точка с прямоугольными координатами x, y имеет кинетическую энергию

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)$$

и потенциальную энергию

$$V = \frac{A}{x^2} + \frac{A'}{y^2} + \frac{B}{r} + \frac{B'}{r'} + C(x^2 + y^2).$$

Здесь A, A', B, B', C — постоянные, а r и r' — расстояния точки (x, y) от точек $(c, 0)$ и $(-c, 0)$, где c также постоянная. Введя новые переменные $\frac{1}{2}(r + r')$ и $\frac{1}{2}(r - r')$, показать, что данная система принадлежит к типу Лиувилля, и дать ее решение.

9. Наблюдения, что кошки всегда падают на лапы, дали повод к следующей задаче:

Система, мгновенное состояние которой определяется положением и скоростями ее отдельных элементов, имеет в начальный момент скорости, равные нулю. Может ли эта система в некоторый последующий момент восстановить свое первоначальное расположение, но с иной ориентировкой в пространстве? Показать, что вопрос имеет утвердительный ответ, если система не консервативная или если силы допускают неоднозначный потенциал, и что ответ получается отрицательный для консервативных систем с однозначным потенциалом. (См. *Painleve* Comptes Rendus, т. 139, стр. 1170, 1904).

Глава IV
Разрешимые задачи динамики точки

§ 44. Материальная точка с одной степенью свободы; математический маятник. Приложим методы, изложенные в предыдущей главе, к исследованию движения одной материальной точки в тех случаях, когда интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений выполняется в квадратурах.

Рассмотрим сначала движение материальной точки, движущейся по гладкой, покоящейся кривой под действием сил, зависящих только от положения точки на кривой.

Пусть s означает путь, пройденный точкой к моменту времени t, отсчитываемый от произвольно выбираемой точки кривой. Тангенсальный компонент силы, приложенной к точке, обозначим через $f(s)$.

Кинетическая энергия точки равна

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2,$$

а потенциальная энергия равна, очевидно,

$$-\int\limits_{s_0}^{s} f(s)\,ds,$$

где s_0 постоянная. Интеграл энергии имеет поэтому вид:

$$\frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \int\limits_{s_0}^{s} f(s)\,ds + c,$$

где c постоянная интегрирования.

Интеграция этого уравнения даст:

$$t = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_{s_0}^{s} \left\{ \int\limits_{s_0}^{s} f(s)\,ds + c \right\}^{-\frac{1}{2}} ds + l,$$

где l — новая постоянная интегрированил. Это уравнение даст решение задачи, ибо оно связывает величины s и t с постоянными интегрирования.

Постоянные c и l могут быть определены из начальных условий движения. Допустим для этого, что движущаяся точка выходит в момент времени $t = t_0$ из положения $s = s_0$, имея при этом скорость, равную u. Тогда, подставляя эти значения в интеграл энергии, получим:

$$c = \frac{1}{2}mu^2,$$

а подставляя эти значения в уравнение, связывающее s и t,получим

$$l = t_0.$$

Одной из наиболее известных задач рассматриваемого типа является задача о движении *математического маятника.* Здесь кривая имеет вид окружности радиуса a, расположенной в вертикальной плоскости, и единственной силой, приложенной к движущейся точке, является сила тяжести[1]. Обозначая через ϑ угол между радиусом-вектором (выходящим из центра круга) движущейся точки и направленной вниз вертикалью, будем иметь:

$$s = a\vartheta, \quad f(s) = -mg\sin\vartheta,$$

и поэтому уравнение энергии принимает вид:

$$a\dot{\vartheta}^2 = 2g\cos\vartheta + \text{const} = -4g\sin^2\frac{\vartheta}{2} + \text{const}.$$

Обозначим через h значение величины $\dfrac{a^2\dot{\vartheta}^2}{2g}$ в наинизшей точке окружности. Тогда последнее уравнение может быть написано в виде:

$$a^2\dot{\vartheta}^2 = 2gh - 4ga\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Полагая $\sin\frac{1}{2}\vartheta = y$, получим:

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{a}(1 - y^2)\left(\frac{h}{2a} - y^2\right).$$

Следует различать два типа движения маятника: движение колебательное, когда точка колеблется около наинизшей точки окружности,

[1] В действительном маятнике кривая заменена штангой, соединяющей материальную точку с центром круга. Изохронизм малых колебаний маятника открыл Галилей (1632); формулу для периода дал Гюйгенс (1673). Колебания с конечной амплитудой исследовал впервые Эйлер (1736).

и движение круговое, когда точка обладает настолько большой скоростью, что она все время описывает полные круги в одном и том же направлении. Рассмотрим эти случаи в отдельности.

1. При колебательном движении точка останавливается, не достигая наивысшей точки окружности; поэтому $\dot{y}$ обращается в нуль при некотором значении $y < 1$. Следовательно, $\frac{h}{2a} < 1$. Полагая

$$h = 2ak^2,$$

где k — новая положительная постоянная, меньшая единицы, будем иметь:

$$\dot{y}^2 = \frac{gk^2}{a}\left(1 - k^2 \cdot \frac{y^2}{k^2}\right)\left(1 - \frac{y^2}{k^2}\right).$$

Решение этого уравнения имеет вид[1]:

$$y = k\,\mathrm{sn}\left\{\sqrt{\frac{g}{a}}(t - t_0),\, k\right\},$$

где t_0 — произвольная постоянная.

Это уравнение дает решение задачи колебательного движения маятника. Постоянными интегрирования являются t_0 и k; они должны быть определены из начальных условий движения. Из известных свойств эллиптической функции sn вытекает, что движение является периодическим. Период колебания, т. е. промежуток времени между двумя последовательными прохождениями (в одну и ту же сторону), маятника через одну и ту же точку равен $4\sqrt{\frac{a}{g}}K$, где

$$K = \int_0^1 (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(1 - k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

2. При круговом движении маятника $h > 2a$. Следовательно, полагая $2a = hk^2$, будем иметь $k < 1$.

Дифференциальное уравнение принимает теперь вид:

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{ak^2}(1 - y^2)(1 - k^2y^2).$$

Его решение есть

$$y = \mathrm{sn}\left\{\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{t - t_0}{k},\, k\right\}.$$

[1] См. *Уиттекер* и *Ватсон*, Курс современного анализа (перевод с английского Г. М. Голузина), § 22, 11.

Постоянные интегрирования t_0 и k должны быть определены из начальных условий.

3. Допустим, наконец, что $h = 2a$, так что движущаяся точка как раз достигает наивысшей точки окружности. Дифференциальное уравнение принимает теперь вид:

$$\dot{y}^2 = \frac{g}{a}(1 - y^2)^2$$

или

$$\dot{y} = \sqrt{\frac{g}{a}}(1 - y^2).$$

Его решение есть

$$y = \operatorname{th}\left\{\sqrt{\frac{g}{a}}(t - t_0)\right\}.$$

Аппелль (Appell)[1] заметил, что при помощи теоремы § 34 можно получить представление о мнимых периодах эллиптических функций, входящих в решение задачи движения маятника. В самом деле, для точки, опущенной без начальной скорости с высоты h над наинизшей точкой окружности, движение определяется уравнением:

$$y = k \operatorname{sn}\left\{\sqrt{\frac{g}{a}}(t - t_0), k\right\},$$

где $k^2 - \frac{h}{2a}$.

Если бы сила тяжести была направлена вверх, то согласно § 34 при тех же начальных условиях, движение определилось бы уравнением:

$$y = k \operatorname{sn}\left\{i\sqrt{\frac{g}{a}}(\tau - \tau_0), k\right\}.$$

Но это движение имеет тот же период, что и движение с высоты $2a - h$, при силе тяжести, направленной вниз. Последнее же движение определяется уравнением:

$$y = k' \operatorname{sn}\left\{\sqrt{\frac{g}{a}}(\tau - \tau_0), k'\right\},$$

где ${k'}^2 = 1 - k^2$.

Оно имеет вещественный период $4\sqrt{\frac{a}{g}}K'$. Поэтому функция

$$\operatorname{sn}\left\{i\sqrt{\frac{g}{a}}(\tau - \tau_0), k\right\}$$

[1] Comptes Rendus, т. 87, 1878.

должна иметь период $4\sqrt{\frac{a}{g}}K'$ и, следовательно, функция $\operatorname{sn}(u, k)$ — период $4iK'$. Таким образом, двоякая периодичность эллиптических функций выводится и из динамических соображений.

Задача 1. Точка массы 1 движется по эпициклоиде, описываемой точкой окружности радиуса b, катящейся по неподвижной окружности радиуса a. Она отталкивается центром неподвижной окружности с силой, равной μr, где r — расстояние между этим центром и движущейся точкой. Показать, что движение периодично и что период равен:

$$2\pi\left\{\frac{(a+2b)^2-a^2}{\mu a^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(При решении удобней всего воспользоваться уравнением эпициклоиды в форме

$$(a+2b)^2-r^2=\frac{a^2s^2}{(a+2b)^2-a_2},$$

где s есть длина дуги эпициклоиды, отсчитываемая от вершины.)

§ 45. Движение точки по движущейся кривой. Рассмотрим теперь некоторые случаи движения точки по гладкой, пространственной кривой, которая, в свою очередь, находится в наперед заданном движении.

1. *Равномерно вращающаяся кривая.* Допустим сначала, что кривая равномерно вращается вокруг неподвижной оси. Не нарушая общности рассуждений, мы можем массу точки принять равной единице. Кроме того, мы будем предполагать, что поле действующих на точку внешних сил допускает потенциал, симметричный относительно оси вращения, т. е. выражающийся через цилиндрические координаты z и r, где z параллельна оси вращения, а r — расстояние точки от оси. При таком предположении потенциальная энергия точки может быть выражена как функция дуги s. Обозначим эту функцию через $V(s)$ и напишем уравнение кривой в виде

$$r=g(s).$$

Согласно § 29 движение точки происходит так, как если бы угловая скорость кривой равнялась нулю, а потенциальная энергия равнялась $V-\frac{1}{2}r^2\omega^2$. Поэтому уравнение энергии может быть написано в виде:

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2-\frac{1}{2}\omega^2\{g(s)\}^2+V(s)=c,$$

где c — постоянная.

Интеграция этого уравнения дает:

$$t=\int^{s}[2c+\omega^2\{g(s)\}^2-2V(s)]^{-\frac{1}{2}}ds+\text{const}.$$

Это соотношение, устанавливающее зависимость между t и s, и даст решение задачи.

Задача 1. Точка движется под действием силы тяжести по плоской кривой, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси; плоскость кривой проходит через ось вращения. Показать, что если скорость точки постоянна, то кривая имеет форму параболы (направленной вогнутостью вверх) с вертикальной осью.

Задача 2. Материальная точка движется под действием силы тяжести по окружности радиуса a, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси, образующей с плоскостью круга угол α. Угловое расстояние движущейся точки от наинизшей точки окружности равно ϑ. Показать, что

$$\sec\vartheta = \frac{a\omega^2\cos\alpha}{6g} + \wp\left\{\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{2a}}(t-t_0)\right\},$$

где функция $\wp$ образована при помощи корней:

$$e_1 = 1 - \frac{a\omega^2\cos\alpha}{6g}, \quad e_2 = -1 - \frac{a\omega^2\cos\alpha}{6g}, \quad e_3 = \frac{a\omega^2\cos\alpha}{3g},$$

а t_0 — постоянная.

2. *Кривая движется с постоянным ускорением в определенном направлении.* Рассмотрим теперь движение точки по прямой, наклоненной к горизонту под углом α, и движущейся в вертикальной плоскости с постоянным горизонтальным ускорением f. Если начало координат примем в исходном положении точки и направим ось x по горизонтали, а ось y вертикально вверх, то для кинетической энергии будем иметь:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

где

$$x - y\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{2}ft^2,$$

т. е.

$$T = \frac{1}{2}(\dot{y}\operatorname{ctg}\alpha + ft)^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 = \frac{1}{2}\dot{y}^2\frac{1}{\sin^2\alpha} + \dot{y}ft\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{2}f^2t^2.$$

Потенциальная энергия будет

$$V = gy.$$

Уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

поэтому даст:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sin^2\alpha}+ft\operatorname{ctg}\alpha\right)=-g$$

или

$$\ddot{y}=(-g-f\operatorname{ctg}\alpha)\sin^2\alpha.$$

Интегрируя в предположении, что точка в начальный момент находится в покое, получим:

$$y=\frac{1}{2}t^2(-g\sin\alpha-f\cos\alpha)\sin\alpha,$$

и поэтому

$$x=\frac{1}{2}t^2(-g\cos\alpha+f\sin\alpha)\sin\alpha.$$

Эти уравнения дают решение задачи. Так как система содержит явно время, то интеграла энергии не существует.

§ 46. Движение двух свободных материальных точек под действием сил взаимного притяжения или отталкивания. В качестве дальнейшего примера рассмотрим движение двух свободных точек с массами m_1 и m_2, движущихся под действием сил взаимного притяжения или отталкивания, направленных по линии, соединяющей обе точки, и зависящих только от расстояния между точками.

Система имеет шесть степеней свободы, так как прямоугольные координаты каждой точки могут принимать какие угодно значения. В качестве шести координат системы примем координаты X, Y, Z центра тяжести обеих точек, отнесенные к неподвижной системе осей, и координаты x, y, z точки m_2 относительно подвижных осей, имеющих начало в точке m_1, и направленных параллельно неподвижным осям.

Координаты точек m_1 и m_2 относительно неподвижных осей соответственно равны:

$$X-\frac{m_2x}{m_1+m_2},\quad Y-\frac{m_2y}{m_1+m_2},\quad Z-\frac{m_2z}{m_1+m_2},$$
$$X+\frac{m_1x}{m_1+m_2},\quad Y+\frac{m_1y}{m_1+m_2},\quad Z+\frac{m_1z}{m_1+m_2}.$$

Отсюда для кинетической энергии системы получаем:

$$T=\frac{1}{2}m_1\left(\dot{X}-\frac{m_2\dot{x}}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}m_1\left(\dot{Y}-\frac{m_2\dot{y}}{m_1+m_2}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}m_1\left(\dot{Z}-\frac{m_2\dot{z}}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{X}+\frac{m_1\dot{x}}{m_1+m_2}\right)^2+$$
$$+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{Y}+\frac{m_1\dot{y}}{m_1+m_2}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{Z}+\frac{m_1\dot{z}}{m_1+m_2}\right)^2$$

или

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Так как потенциальная энергия системы зависит только от расстояния между точками, то она может быть выражена как функция от x, y, z. Обозначим ее через $V(x, y, z)$.

Уравнениями Лагранжа для движения системы будут:

$$\ddot{X} = 0, \quad \ddot{Y} = 0, \quad \ddot{Z} = 0,$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}; \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Первые три уравнения показывают, что центр тяжести движется прямолинейно и равномерно. Из последних трех уравнений вытекает, что *точка m_2 движется относительно точки m_1 так, как если бы точка m_1 была неподвижна и притягивала точку m_2 с силой, для которой потенциальная энергия равна* $\frac{m_1 + m_2}{m_1} V$.[1]

Задача 1. Если две свободные точки движутся под действием сил взаимного притяжения, то касательные к их траекториям пересекают любую неподвижную плоскость в двух точках, обладающих тем свойством, что прямая, их соединяющая, все время проходит через неподвижную точку.

§ 47. Общий случай центральных сил; теорема Гамильтона. Согласно предыдущему параграфу задача движения двух материальных точек под действием сил взаимного притяжения или отталкивания сводится к задаче притяжения или отталкивания одной единственной материальной точки от некоторого неподвижного центра. Последняя задача есть известная *задача центральных сил*.

Общность рассуждений не будет, очевидно, нарушена, если мы массу материальной точки примем равной единице. Каковы бы ни были начальные условия движения, эта точка будет всегда оставаться в плоскости, проходящей через центр сил и вектор начальной скорости, ибо на нее не действуют никакие силы, которые могли бы отклонить ее движение от этой плоскости. Поэтому положение точки может быть задано полярными координатами r и ϑ в этой плоскости с началом координат в центре сил. Обозначим через P ускорение, направленное к центру сил. Величина P во время движения не будет обязательно зависеть от одной лишь величины r.

Кинетическая энергия T материальной точки равна $\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2\right)$, а работа силы при бесконечно малом перемещении $(\delta r, \delta\vartheta)$ равна

$$-P\delta r.$$

[1] *Newton*, Principia, кн. I, раздел 11.

Поэтому лагранжевыми уравнениями движения точки будут:

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -P; \quad \frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = 0.$$

Интегрирование второго уравнения дает

$$r^2\dot{\vartheta} = h,$$

где h — постоянная интегрирования. Этот интеграл соответствует циклической координате ϑ и может быть истолкован как интеграл момента количества движения относительно неподвижного центра. Для определения дифференциального уравнения траектории исключим из первого уравнения dt при помощи соотношения

$$\frac{d}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\vartheta}.$$

Таким образом, получим уравнение:

$$\frac{h}{r^2}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\vartheta}\right) - \frac{h^2}{r^3} = -P$$

или, полагая

$$u = \frac{1}{r},$$

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2}.$$

Полученное уравнение есть уравнение траектории[1] в полярных координатах. Его интегрирование помимо h введет еще две другие произвольные постоянные, и четвертая постоянная получится при определении t из уравнения:

$$t = \frac{1}{h}\int r^2\,d\vartheta + \text{const}.$$

Часто употребляется уравнение траектории в координатах r, p, где p означает расстояние от неподвижного центра до касательной к траектории. Оно может быть получено непосредственно при помощи теоремы Сиаччи (§ 18). Так как введенная там величина h является в рассматриваемом теперь случае постоянной, то непосредственно получаем:

$$P = \frac{h^2r}{p^3\rho}$$

[1] В основном это имеется у Ньютона в «Principia» (книга 1, § 2 и 3) и у Клеро — *Clairaut*, Theorie de la lune (1765); в вышеприведенной форме у *Whewell*, Dynamics (1823).

или

$$P - \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}.$$

Это и есть уравнение траектории.

Так как $h = vp$, где v означает скорость, то из этого уравнения вытекает, что

$$v^2 = P\frac{\rho p}{r}$$

или

$$v^2 = \frac{1}{2}Pq,$$

где q означает хорду круга кривизны траектории, проходящую через центр сил.

Часто приходится искать силу, под действием которой материальная точка описывает наперед заданную траекторию. Если траектория задана в полярных координатах, то эта сила находится непосредственно из уравнения:

$$P = h^2u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right).$$

Если же траектория задана в координатах r, p, то можно воспользоваться уравнением:

$$P = \frac{h^2}{p^3}\frac{dp}{dr}.$$

Если, наконец, траектория задана в прямоугольных координатах, то поступаем следующим образом:

Примем начало координат в неподвижном центре и пусть $f(x, y)=0$ есть уравнение траектории. Интеграл момента количества движения дает:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = h.$$

Дифференцирование уравнения кривой дает:

$$f_x\dot{x} + f_y\dot{y} = 0,$$

где $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Из этих уравнений находим:

$$\dot{x} = \frac{-hf_y}{xf_x + yf_y}, \quad \dot{y} = \frac{hf_x}{xf_x + yf_y}.$$

Повторное дифференцирование даст:

$$\ddot{x} = \dot{x}\frac{\partial\dot{x}}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial\dot{x}}{\partial y} =$$

$$= \frac{hf_y}{xf_x + yf_y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{hf_y}{xf_x + yf_y}\right) - \frac{hf_x}{xf_x + yf_y}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{hf_y}{xf_x + yf_y}\right)$$

Выполняя дифференцирование, получим:

$$\ddot{x} = \frac{h^2 x(-f_y^2 f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} - f_x^2 f_{yy})}{(xf_x + yf_y)^3}.$$

Отсюда же получится искомая сила P, так как

$$\ddot{x} = -P\frac{x}{r},$$

то

$$P = \frac{h^2 r(f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy})}{(xf_x + yf_y)^3}.$$

Это равенство дает искомую центральную силу.

Наиболее важным является тот частный случай, когда заданная траектория представляет собой коническое сечение:

$$2f(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

В этом случае для всех точек конического сечения выражение

$$f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_x f_y + f_{yy}f_x^2$$

принимает постоянное значение

$$-(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2),$$

а величина

$$xf_x + yf_y$$

равна

$$-(gx - fy + c),$$

т. е. отличается лишь постоянным множителем от величины перпендикуляра, опущенного из точки (x, y) на поляру начала координат, относительно конического сечения. Отсюда получается следующее изящное выражение для центральной силы, под действием которой материальная точка описывает коническое сечение, данное Гамильтоном[1]. *Сила, действующая на материальную точку в положении (x, y), прямо пропорциональна радиусу-вектору точки (x, y) относительно центра сил и обратно пропорциональна кубу перпендикуляра, опущенного из точки (x, y) на поляру центра сил.*

Предоставляем читателю доказать две следующие теоремы, которые могут быть рассматриваемы как обращение теоремы Гамильтона:

[1] Proc. Roy. Irish. Acad., 1846.

1. Если точка движется под действием силы, направленной к неподвижному центру пропорциональной ее расстоянию от центра и обратно пропорциональной кубу расстояния от некоторой прямой, то траектория движения есть коническое сечение.

2. Если точка движется под действием силы, направленной к началу координат и равной по величине

$$\mu(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}(\alpha x^2+2\beta xy-\gamma y^2)^{-\frac{3}{2}},$$

где x и y — прямоугольные координаты, а μ, α, β, γ — постоянные, то траектория есть коническое сечение, касающееся прямых

$$\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=0.$$

Дарбу (C. R., т. 84, стр. 936) показал, что только что указанные силы являются единственными, под действием которых траектории суть конические сечения, если эти силы зависят от одного лишь расстояния до неподвижного центра. Сюшар (Suchar, Nouv. Ann., т. 6, стр. 532) нашел еще и другие силы, в выражение которых входят компоненты скорости движущейся точки.

Задача 1. Точка описывает коническое сечение под действием гамильтоновой силы $\dfrac{\mu r}{p^2}$. Показать, что период обращения равен $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\mu}}p_0^{3/2}$, где p_0 — перпендикуляр, опущенный из центра конического сечения на поляру центра сил. (Glaisher).

Задача 2. Показать, что материальная точка под действием силы

$$\frac{\mu r}{(Ax^2+2Hxy+By^2+I)^3}$$

при подходящем выборе начальной скорости опишет коническое сечение, асимптоты которого параллельны прямым:

$$Ax^2+2Hxy+By^2=0.$$

(Glaisher).

§ 48. Случаи центрального движения, разрешимые в квадратурах; интеграция с помощью круговых и эллиптических функций. Важнейшим случаем центрального движения является тот, в котором величина центральной силы зависит только от расстояния r. Если эту силу обозначить через $f(r)$, то будем иметь дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2}+u-\frac{f(r)}{h^2u^2}.$$

Интеграция его дает:

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2=c-\frac{2}{h^2}\int^r f(r)dr-u^2,$$

где c — постоянная. Повторной интеграцией находим уравнение траектории в полярных координатах:

$$\vartheta = \int^{r} \left\{ c - \frac{2}{h^2} \int^{r} f(r)\,dr - \frac{1}{r^2} \right\}^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{r^2}.$$

Если с помощью этого уравнения определить r в функции от ϑ, то это даст время в виде интеграла:

$$t = \frac{1}{h} \int^{\vartheta} r^2\,d\vartheta + \mathrm{const}.$$

Таким образом, если сила зависит только от расстояния, то задача центрального движения всегда разрешима в квадратурах.

Задача 1. Показать, что дифференциальные уравнения движения материальной точки всегда разрешимы в квадратурах, если центральная сила F имеет вид:

$$F = \frac{\Phi(\vartheta)}{r^2(at+b)},$$

где Φ — функция только ϑ, а a и b — произвольные постоянные. (Armellini.)

Рассмотрим теперь частный случай, когда центральная сила есть положительная или отрицательная целая степень расстояния, т. е. пропорциональна его n-й степени, и исследуем случаи, когда квадратуры выполнимы с помощью известных функций. Разберем прежде всего задачи, которые могут быть решены в круговых функциях. Вышенаписанный интеграл, определяющий ϑ, может быть представлен в форме:

$$\vartheta = \int \left(a + bu^2 + cu^{-n-1}\right)^{-\frac{1}{2}} du,$$

где a, b, c — постоянные, кроме случая $n = -1$, когда вместо u^{-n-1} будет стоять логарифм. Если потребовать, чтобы задача решалась в круговых функциях, то получим условие: полином, стоящий под корнем интеграла, может иметь высшей степенью число, не превышающее двух. Отсюда следует, что $-n-1 = 0, 1, 2$, т. е.

$$n = -1,\ -2,\ -3.$$

Случай $n = -1$, на основании предыдущего замечания, исключается. Следует еще присоединить случай $n = 1$, так как при этом подрадикальное выражение, введением u^2 в качестве новой переменной, приводится к квадратному трехчлену.

Выясним теперь, в каких случаях интеграция выполняется в эллиптических функциях[1].

Для этого подкоренной полином должен быть третьей или четвертой степени относительно переменной интегрирования[2]. При независимой переменной u это выполняется, если $n = 0, -4, -5$. Кроме того, если принять за новую переменную u^2, то условие будет выполнено и для

$$n = 3,\ 5,\ -7.$$

Таким образом, задача центрального движения, в которой сила пропорциональна n-й степени расстояния, может быть разрешена в круговых или эллиптических функциях в следующих случаях:

$$n = 5,\ 3,\ 1,\ 0,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -7.$$

Задача 2. Показать, что задача может быть решена в эллиптических функциях, если n имеет значения:

$$n = -\frac{3}{2},\ -\frac{5}{2},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{5}{3},\ -\frac{7}{3}.$$

Общим случаем дробных значений n занимался Нобиле (Nobile, Giornale di Mat., т. 46, стр. 313, 1908).

Особый интерес представляют задачи, разрешаемые в круговых функциях; им, как мы видели, соответствуют значения $n = 1, -2, -3$. Случай $n=-2$ рассмотрим в ближайшем параграфе. При $n=1$ и $n=-3$ можно поступить следующим образом:

1. $n = 1$.

Притягивающая сила будет:

$$f(r) = \mu r.$$

Для определения траектории получим равенство:

$$\vartheta = -\int^{u}\left(c - \frac{\mu}{h^2u^2} - u^2\right)^{-\frac{1}{2}} du = -\frac{1}{2}\int^{v}\left(cv - \frac{\mu}{h^2} - v^2\right)^{-\frac{1}{2}} dv,$$

где $u^2 = v$. таким образом

$$2\vartheta = -\int^{v}\left\{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{\mu}{h^2}\right) - \left(v - \frac{c}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} dv$$

---

[1] Этот случай впервые исследовал Лежандр (Théories des Fonctions Elliptiques, 1825), затем **Штадер** (*J. F. Stader*. Journal f. Math., т. 46, стр. 262, 1853).

[2] *Уиттекер* и *Ватсон*. Курс современного анализа, § 22, 7.

или, обозначая постоянную интегрирования через γ:

$$2(\vartheta - \gamma) = \arccos \frac{v \quad \dfrac{c}{2}}{\left(\dfrac{c^2}{4} - \dfrac{\mu}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

откуда

$$\frac{1}{r^2} - \frac{c}{2} + \left(\frac{c^2}{4} - \frac{\mu}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos(2\vartheta - 2\gamma).$$

Это есть центральное уравнение эллипса (если $\mu > 0$) или гиперболы (если $\mu < 0$).

Следовательно, траектории представляют конические сечения, центр которых находится в центре притяжения[1].

2. $n = -3$.

Центральная сила будет:

$$f(r) = \frac{\mu}{r^3}.$$

Следовательно, будем иметь:

$$\vartheta = -\int^{u} \left\{c - \left(\frac{\mu}{h^2} - 1\right) u^2\right\}^{-\frac{1}{2}} du.$$

Интегрирование даст:

$$u = A\cos(k\vartheta + \varepsilon), \quad \text{если} \quad \mu < h^2 \quad \text{и где} \quad k^2 = 1 - \frac{\mu}{h^2},$$

$$u = A\,\mathrm{ch}(k\vartheta + \varepsilon), \quad \text{если} \quad \mu > h^2 \quad \text{и где} \quad k^2 = \frac{\mu}{h^2} - 1,$$

$$u = A\vartheta + \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \mu = h^2;$$

во всех трех равенствах A и ε означают постоянные интегрирования. Эти кривые иногда называют спиралями Котса (Cotes). Последняя кривая есть обратная спираль[2].

В связи с силами, которые обратно пропорциональны третьей степени расстояния, можно сделать следующее замечание: пусть

$$r = f(\vartheta)$$

[1] Ньютон нашел, что если точка описывает эллипс под действием силы, направленной в его центр, то сила пропорциональна расстоянию (Principia, книга 1, § 2, Prop. X).

[2] *Newton*, Principia, книга 1, § 2, IX; *R. Cotes*, Harmonia Mensurarum, стр. 31, 98.

траектория точки, находящейся под действием центральной силы $P(r)$, направленной в начало. Тогда траекторию, которая получится в результате действия центральной силы $P(r)+\frac{c}{r^3}$, где c — постоянная, можно изобразить в виде:

$$r=f(k\vartheta),$$

где k — произвольная постоянная. При этом промежуток времени, в течение которого радиус-вектор, проведенный из неподвижного центра в движущуюся точку, изменяется от значения r_1 до значения r_2, будет одинаков для обеих траекторий. В самом деле, если отметим штрихами величины, относящиеся ко второй траектории, то будем иметь:

$$P'={h'}^2u^2\left(u+\frac{d^2u}{d{\vartheta'}^2}\right)={h'}^2u^3+\frac{{h'}^2}{k^2}u^2\frac{d^2u}{d\vartheta^2}={h'}^2u^3+\frac{{h'}^2}{h^2k^2}(P-h^2u^3).$$

Поэтому, если мы выберем новую постоянную момента количества движения h' так, чтобы $h'=hk$ (это уравнение и будет доказывать упомянутое выше утверждение о равенстве промежутков времени, так как оно может быть представлено в виде $\frac{dt'}{{r'}^2}=\frac{dt}{r^2}$, то получим:

$$P'=P-\frac{h^2(1-k^2)}{r^3},$$

что и доказывает теорему; ее называют иногда *теоремой Ньютона о вращающихся траекториях*.

Задачи центрального движения для $n=5,\ 3,\ 0,\ -4,\ -5,\ -7$, как мы видели, приводят к эллиптическим интегралам. Если эти интегралы мы обратим, то сможем получить решение в эллиптических функциях. В качестве примера разберем случай $n=-5$.

Пусть μu^5 будет сила, направленная в центр притяжения. Будем наперед полагать, что материальной точке сообщена меньшая начальная скорость, чем та, которую она имела бы, если бы приблизилась из бесконечности в исходную точку изучаемого движения, причем так, что ее полная энергия

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2+\frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta}^2-\frac{\mu}{4r^4}$$

стала бы отрицательной. Обозначим эту энергию через $-\frac{1}{2}\gamma$.

Рассматривая уравнение энергии

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\vartheta}^2-\frac{\mu}{2r^4}+\gamma=0$$

совместно с уравнением

$$r^2\dot{\vartheta}=h,$$

получим:

$$\left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 = -\frac{\gamma}{h^2}r^4 - r^2 + \frac{\mu}{2h^2}.$$

Если теперь вместо r введем новую переменную ρ,определяемую равенством

$$r = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h\left(\rho + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}},$$

то дифференциальное уравнение обратится в следующее:

$$\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2 = 4\left(\rho + \frac{1}{3}\right)\left(\rho^2 - \frac{\rho}{3} - \frac{2}{9} - \frac{\mu\gamma}{2h^4}\right).$$

Если γ положительно, то корни уравнения

$$\rho^2 - \frac{\rho}{3} - \frac{2}{9} - \frac{\mu\gamma}{2h^4} = 0$$

будут действительными; сумма их равна $\frac{1}{3}$ и меньший корень меньше, чем $-\frac{1}{3}$. Если обозначим больший корень через e_1, меньший — через e_3 и величину $-\frac{1}{3}$ через e_2, то будем иметь:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$
$$e_1 > e_2 > e_3,$$
$$\left(\frac{d\rho}{d\vartheta}\right)^2 = 4(\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3),$$

следовательно,

$$\rho = \wp(\vartheta - \varepsilon),$$

где ε означает постоянную интегрирования, а функция $\wp$ образована по корням e_1, e_2, e_3. Отсюда находим:

$$r = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{h\left\{\wp(\vartheta - \varepsilon) + \frac{1}{3}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Заметим теперь, что r — положительно и на основании уравнения энергии не может превышать величины $\sqrt[4]{\frac{\mu}{2\gamma}}$. Поэтому выражение

$\wp(\vartheta-\varepsilon)+\dfrac{1}{3}$ действительно положительно и имеет нижнюю положительную границу. Но для $e_1>e_2>e_3$ и при всяких вещественных значениях ϑ функция $\wp(\vartheta-\varepsilon)$ будет действительной и будет превышать конечную нижнюю границу лишь в том случае, если ε действительно.

Итак, ε действительно и соответствующим выбором начального значения ϑ может быть сделано равным нулю.

На основании этого получаем полярное уравнение траектории[1]:

$$r=\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{h\left\{\wp(\vartheta)+\dfrac{1}{3}\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Время может быть определено из равенства:

$$t=\frac{1}{h}\int r^2\,d\vartheta$$

или

$$t=\frac{\mu}{2h^3}\int\frac{d\vartheta}{\wp(\vartheta)-e_2}.$$

Выполнение этого интегрирования даст для t уравнение:

$$t=-\frac{\mu h^{-3}}{2(e_2-e_1)(e_2-e_3)}\left\{\zeta(\vartheta)+\frac{1}{2}\frac{\wp'(\vartheta)}{\wp(\vartheta)-e_2}+e_2\vartheta\right\},$$

где $\zeta(\vartheta)$ есть функция дзета Вейерштрасса[2].

Задача 3. Показать, что уравнение траектории материальной точки, движущейся под действием притягивающей силы $\dfrac{\mu}{r^5}$, имеет вид:

$$r=a\,\mathrm{sn}\left(K-\frac{\vartheta}{\sqrt{1+k^2}},\,k\right)$$

или

$$\frac{a}{r}=k\,\mathrm{sn}\left(K-\frac{\vartheta}{\sqrt{1+k^2}},\,k\right);$$

предполагается, что $h^2>4\mu E>0$, где h — момент количества движения относительно силового центра, а E — избыток полной энергии над потенциальной в бесконечности. (Cambridge Math. Tripos, ч. 1, 1894.)

---

[1] Траектории разобраны и классифицированы В. Д. Макмилланом (*W. D. Macmillan*, Amer. Journal Math., т. 30, стр. 282, 1908).

[2] См. *Уиттекер* и *Ватсон*, Курс современного анализа, § 20, 4.

Задача 4. Материальная точка обладает постоянным ускорением, направленным в начало координат. Показать, что радиус-вектор r, аргумент ϑ и время t могут быть представлены как функции действительного вспомогательного угла u в виде:

$$r = \wp(iu + \omega_1) - \wp(\omega + a),$$

$$\left(\frac{\mu}{2}\right)^{\frac{1}{2}} t = i\zeta(\omega_1 + iu) + u\wp(\omega_2 + a) - i\zeta(\omega_1),$$

$$e^{i\vartheta} = e^{-2iu\zeta(\omega_2+a)} \frac{\sigma(\omega_1 + iu + \omega_2 + a)\sigma(\omega_1 - \omega_2 - a)}{\sigma(\omega_1 + iu - \omega_2 - a)\sigma(\omega_1 + \omega_2 + a)}$$

(Schoute).

Особенно интересны те точки на траектории, в которых возраставший до этого времени радиус-вектор начинает убывать или, наоборот, убывающий возрастать. Точка первого рода называется *апоцентром*, второго рода *перицентром*, общее их название: апсиды. Если апсида — не особая точка кривой, то в ней должно быть:

$$\frac{dr}{d\vartheta} = 0.$$

Это равенство показывает, что касательная к траектории перпендикулярна радиусу-вектору.

Если Солнце рассматривается как силовой центр, то апоцентр и перицентр именуют обычно *афелием* и *перигелием*.

Задача 5. Материальная точка притягивается неподвижным центром с силой

$$\frac{\mu}{r^2} - \frac{\nu}{r^3}.$$

Показать, что угол между радиусами-векторами, проведенными к двум следующим друг за другом апсидам, имеет величину

$$\frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\nu}{h^2}}},$$

где h — постоянная момента количества движения.

§ 49. Движение по закону тяготения[1] Ньютона. Из трех задач центрального движения, которые решаются круговыми функциями, когда сила пропорциональна целой степени расстояния, нам осталось рассмотреть еще случай $n = -2$. Этот случай движения является важнейшим в небесной механике, так как по закону тяготения Ньютона взаимное притяжение двух небесных тел изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.

[1]Newton. Principia, книга 1, § 3, предл. XI, XII, XIII.

1. *Траектории.* Итак, разберем движение материальной точки, которая притягивается силой μu^2 из неподвижной точки, выбранной за начало координат. При этом u — величина, обратная расстоянию движущейся точки до неподвижного центра. Пусть в точке траектории с полярными координатами c и α движущаяся точка обладает некоторой начальной скоростью v_0, составляющей с c угол γ. Тогда моментом количества движения будет:

$$h = cv_0 \sin\gamma,$$

а уравнением траектории будет:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2} = \frac{\mu}{v_0^2c^2\sin^2\gamma}.$$

Это линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами имеет интеграл:

$$u = \frac{\mu}{v_0^2c^2\sin^2\gamma}\{1 + e\cos(\vartheta - \widetilde{\omega})\},$$

где e и $\widetilde{\omega}$ — постоянные интеграции.

Это есть уравнение конического сечения в полярных координатах, фокус которого лежит в начале, эксцентриситет есть e и полупараметр которого l определяется равенством

$$l = \frac{v_0^2c^2\sin^2\gamma}{\mu}.$$

Постоянная $\widetilde{\omega}$ определяет положение линии апсид и называется *длиной перигелия.*

Что фокус конического сечения совпадает с силовым центром, это согласуется с теоремой Гамильтона, потому что тогда перпендикуляр на поляру силового центра равен перпендикуляру на направляющую линию и поэтому пропорционален r. Таким образом, по теореме Гамильтона сила будет пропорциональна $\frac{1}{r^2}$.

Для определения постоянных e и $\widetilde{\omega}$ в функциях начальных значений c, α, γ, v_0 заметим, что в начале движения

$$\vartheta = \alpha, \quad u = \frac{1}{c}, \quad \frac{du}{d\vartheta} = -\frac{1}{c}\operatorname{ctg}\gamma.$$

Если мы внесем эти значения в уравнение траектории, а также в уравнение, получаемое дифференцированием его по ϑ, то получим:

$$v_0^2c\sin^2\gamma = \mu + \mu e\cos(\alpha - \widetilde{\omega}),$$
$$v_0^2c\sin\gamma\cos\gamma = \mu e\sin(\alpha - \widetilde{\omega}).$$

Решение этих уравнений относительно c и $\widetilde{\omega}$ дает:

$$e^2 = 1 + \frac{v_0^4 c^2 \sin^2\gamma}{\mu^2} - \frac{2v_0^2 c \sin^2\gamma}{\mu},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \widetilde{\omega}) = \frac{-\mu}{v_0^2 c \sin\gamma \cos\gamma} + \operatorname{tg}\gamma.$$

Если коническое сечение — эллипс, то его большую полуось a называют обыкновенно средним расстоянием точки. Имеем:

$$a = \frac{l}{1 - e^2},$$

что после подстановки найденных уже значений l и e^2 даст:

$$v_0^2 = \mu\left(\frac{2}{c} - \frac{1}{a}\right).$$

Это уравнение определяет a в функции начальных значений.

Период обращения движущейся точки, т. е. время, потребное для полного обхода эллипса, равен

$$\frac{2}{h} \times \text{площадь эллипса.}$$

Здесь h — двойная секториальная скорость радиуса-вектора на эллипсе. Поэтому период будет $\dfrac{2\pi ab}{h}$, где b означает малую полуось.

Но

$$h = v_0 c \sin\gamma = \sqrt{\mu l} = b\sqrt{\frac{\mu}{a}},$$

следовательно, период равен $2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}}$.

Обычно величина $\mu^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{3}{2}}$ обозначается через n; тогда период обращения будет $\dfrac{2\pi}{n}$. Величину n называют средним движением, так как она представляет среднее значение $\dot{\vartheta}$ для полного обхода.

Бертран и Кёнигс показали, что для всех законов движения при силах, исчезающих в бесконечности, закон Ньютона является единственным, при котором все траектории алгебраические, и единственным, — при котором все они замкнуты.

Задача 1. Показать, что для отталкивающей силы, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния, траекторией будет ветвь гиперболы, фокус которой находится вне отталкивающего центра.

2. *Скорости.* Рассмотрим теперь случай, когда траекторией служит эллипс. Уравнение

$$v_0^2 = \mu\left(\frac{2}{c} - \frac{1}{a}\right)$$

устанавливает связь между средним расстоянием a, скоростью v_0 и радиусом-вектором c в начальной точке движения. Так как всякая точка траектории может быть принята за начальную, то это уравнение можно записать так:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

где v — скорость точки с радиусом-вектором r.

Если траектория — гипербола с большой полуосью a, то соответственно находим:

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right).$$

Для параболы это уравнение принимает вид:

$$v^2 = \frac{2\mu}{r}.$$

Отсюда следует, что траектория будет эллипсом, гиперболой или параболой, смотря по тому, будет ли $v_0^2 \neq \frac{2\mu}{c}$, *т. е. смотря по тому, будет ли скорость в начале движения меньше скорости, которую приобрела бы точка, приблизившись из неподвижного состояния в бесконечности в начальное положение, равна этой скорости или больше ее. Далее, можно показать что в каждой точке траектории скорость можно разложить на компоненты* $\frac{\mu}{h}$ *и* $\frac{\mu c}{h}$, *перпендикулярные соответственно к радиусу-вектору и к большой оси конического сечения, и что, следовательно, оба эти компонента постоянны.* Действительно, пусть S — силовой центр, P — движущаяся точка, G — точка пересечения нормали к коническому сечению в точке P с большой осью, GL — перпендикуляр из G на SP, SY — перпендикуляр из S на касательную в точке P. Тогда стороны треугольника SPG будут, очевидно, перпендикулярны к скорости и обоим указанным ее компонентам. Поэтому компонент, перпендикулярный к радиусу-вектору, есть

$$\frac{v \cdot SP}{PG} = \frac{h \cdot SP}{SY \cdot PG} = \frac{h}{PL} = \frac{h}{l} = \frac{\mu}{h},$$

а компонент, перпендикулярный к оси, равен компоненту, перпендикулярному к радиусу-вектору, умноженному на $\frac{SG}{SP}$, т. е. равен $\frac{c\mu}{h}$.

Таким образом, утверждение доказано.

Задача 2. Доказать, что при эллиптическом движении по закону Ньютона проекции двух скоростей на внешнюю биссектрису угла между радиусами-векторами равны между собой, а сумма этих проекций на внутреннюю биссектрису равна проекции отрезка с постоянными длиной и направлением. (Cailler.)

Задача 3. Доказать, что при эллиптическом движении по закону Ньютона величина интеграла $\int T\,dt$, где T означает кинетическую энергию, после одного полного оборота не зависит от эксцентриситета, а будет зависеть от среднего расстояния. (Grinwis.)

Задача 4. Точка движется по эллипсу под действием силы $\dfrac{\mu}{r^2}$. В некоторой определенной точке траектории постоянная μ претерпевает небольшое изменение. Доказать, что этой точкой должен быть конец малой полуоси, если эксцентриситеты начальной и новой траекторий совпадают.

3. *Аномалии в эллиптическом движении.* Если материальная точка P описывает эллипс под действием силы, направленной в фокус S, то угол ASP, где A — ближайшая к фокусу апсида, называется *истинной аномалией* ϑ точки P. Далее, опишем из центра O эллипса круг радиуса OA; если теперь через точку P проведем перпендикуляр к направлению OA и обозначим его пересечение с кругом через Q, то угол AOQ называется *эксцентрической аномалией* u точки P.

Если n означает среднее движение, а t — время, в течение которого пробегается точкой дуга AP, то величину nt называют *средней аномалией* точки P. Найдем теперь соотношения, связывающие эти аномалии. Связь между ϑ и u получается следующим образом.

Имеем:

$$\frac{1}{r} = 1 + e\cos\vartheta \quad \text{и} \quad r = a - ex,$$

где x — прямоугольная координата точки P с началом координат в центре эллипса.

Следовательно,

$$r = a(1 - e\cos u).$$

Отсюда получаем:

$$(1 - e\cos u)(1 + e\cos\vartheta) = 1 - e^2.$$

Это равенство можно представить в виде:

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

или

$$\sin u = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin\vartheta}{1 + e\cos\vartheta}.$$

Связь между u и nt получим так. Имеем:

$$t=\frac{2}{h}\times \text{площадь } ASP=\frac{2}{nab}\cdot\frac{b}{a}\times\text{площадь } ASQ=\frac{2}{na^2}(\text{площадь } ACQ-$$
$$-\text{площадь } SCQ),$$

где C — центр эллипса, или

$$t=\frac{2}{na^2}\left\{\frac{a^3}{2}u-\frac{a^2e}{2}\sin u\right\}$$

и, наконец,

$$nt=u-e\sin u.$$

Это есть так называемое *уравнение Кеплера.*

Номограмма для решения этого уравнения была составлена Кретьеном (*H. Chretien,* Assoc. Franc. Congres. Reims. стр. 83, 1907). Решение в рядах есть у многих авторов. По этому вопросу есть важная, новая работа Леви-Чивита (*Levi-Civita,* Atti della R. Acc. dei Lincei. Rendiconti (5). Т. 13, стр. 260, 1904).

Найдем, наконец, *связь между* ϑ и nt. Если из соотношения между u и ϑ определим u как функцию от ϑ и подставим в равенство

$$nt=u-e\sin u,$$

то получим выражение:

$$nt=\arcsin\left\{\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta}\right\}-\frac{e(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta},$$

дающее время в функции от истинной аномалии ϑ.

Среди неопубликованных заметок Ньютона найдено было его вычисление истинной аномалии по средней на основании геометрических соображений.

Задача 5. Доказать, что

$$u-nt+2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}J_r(re)\sin rnt.$$

где J_r означает функцию Бесселя r-го порядка[1].

[1] Этот ряд назван так по имени Бесселя, однако им пользовался еще Лагранж (Oeuvres. т. III, стр. 130).

В самом деле, имеем:

$$\frac{1}{n}\frac{du}{dt} = \frac{1}{1-e\cos u} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d(nt)}{1-e\cos u} + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rnt}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos rnt\, d(nt)}{1-e\cos u}{}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} du + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\cos rnt}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\cos\left[r(u-e\sin u)\right]du = 1 - 2\sum_{r=1}^{\infty}J_r(re)\cos rnt.^{2}$$

Интегрированием получаем искомый результат.

Задача 6. Доказать, что

$$\vartheta = nt + 2e\sin nt + \frac{5}{4}e^2\sin 2nt + \ldots$$

Задача 7. Показать, что при гиперболическом движении по закону Ньютона имеет место равенство:

$$\mu^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}t = \ln\left\{\frac{(e+1)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} - (e-1)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2}}{(e+1)^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\vartheta}{2} + (e-1)^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\vartheta}{2}}\right\} + e(e^2-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\vartheta}{1+e\cos\vartheta},$$

а при параболическом:

$$\left(\frac{\mu}{2p^3}\right)^{\frac{1}{2}} t = \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\vartheta}{2},$$

где p означает расстояние между фокусом и вершиной параболы.

Задача 8. Доказать, что при эллиптическом движении по закону Ньютона сумма четырех промежутков времени, в которые точка проходит от перигелия до соответствующих точек пересечения эллипса с концентрическим кругом, постоянна для всех концентрических кругов. Показать также, что эта сумма остается постоянной, если центр кругов перемещается параллельно большой оси. (Oekinghaus)

4. *Теорема Ламберта.* Ламберт (Lambert) в 1761 г. доказал, что при эллиптическом движении по закону Ньютона время, в течение которого описывается точкой некоторая дуга, зависит только от большой оси, суммы расстояний начальной и конечной точек дуги до центра сил и от длины хорды, соединяющей эти точки. Таким образом, время вполне определяется перечисленными отрезками и не зависит от формы эллипса[3].

[1]Ряд Фурье, см. *Уиттекер* и *Ватсон*, Курс современного анализа, гл. 9.

[2]Там же, гл. 17.

[3]Первоначальное доказательство Ламберта было геометрическим и синтетическим: теорема была обобщена и доказана аналитически Лагранжем (Oeuvres, т. IV, стр. 559, 1778.)

Пусть u и u' означают эксцентрическую аномалию в начальной и конечной точках движения. Тогда будем иметь:

$$n \times \text{время движения} = u' - e\sin u' - (u - e\sin u) =$$
$$= (u' - u) - 2e\sin\frac{u' - u}{2}\cos\frac{u' + u}{2}.$$

Обозначим теперь через c длину хорды, а через r и r' — радиусы-векторы; тогда получим:

$$\frac{r - r'}{a} = 1 - e\cos u + 1 - e\cos u' = 2 - 2e\cos\frac{u' - u}{2}\cos\frac{u' + u}{2}$$

и

$$c^2 = a^2(\cos u' - \cos u)^2 + b^2(\sin u' - \sin u)^2 =$$
$$= 4a^2\sin^2\frac{u' - u}{2}\left(1 - e^2\cos^2\frac{u + u'}{2}\right),$$

следовательно,

$$\frac{c}{a} = 2\sin\frac{u' - u}{2}\left(1 - e^2\cos^2\frac{u + u'}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда имеем:

$$\frac{r + r' + c}{a} = 2 - 2\cos\left\{\frac{u' - u}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{u + u'}{2}\right)\right\},$$

а также:

$$\frac{r + r' - c}{a} = 2 - 2\cos\left\{-\frac{u' - u}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{u + u'}{2}\right)\right\},$$

следовательно[1],

$$2\arcsin\frac{1}{2}\left(\frac{r + r' + c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{u' - u}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{u + u'}{2}\right),$$

и аналогично:

$$2\arcsin\frac{1}{2}\left(\frac{r + r' - c}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{u' - u}{2} + \arccos\left(e\cos\frac{u - u'}{2}\right).$$

[1]Заметим, что в теореме Ламберта знак корня остается неопределенным. Читатель без труда заметит, какой знак соответствует заданным начальному и конечному положениям.

Если ввести новые величины α и β, определяемые равенствами

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r+r'+c}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r+r'-c}{a}\right)^{\frac{1}{2}},$$

то предыдущие соотношения можно представить в виде:

$$\alpha - \beta = u' - u, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = e\cos\frac{u+u'}{2}$$

и отсюда окончательно:

$$n \times \text{время движения} = \alpha - \beta - 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \\ = (\alpha - \sin\alpha) - (\beta - \sin\beta).$$

В этом и состоит теорема Ламберта.

Задача 9. Исследовать предельный случай, когда малая полуось обращается в нуль, когда, следовательно, движение становится прямолинейным.

Задача 10. Какой вид получает теорема Ламберта для параболического движения? Чтобы ответить на этот вопрос, полагаем среднее расстояние a очень большим, а следовательно, углы α и β очень малыми. Тогда приближенно будем иметь:

$$\text{искомое время} = \frac{\alpha^3-\beta^3}{6n} = \left(\frac{a^3}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{r+r'+c}{a}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r+r'-c}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = \\ = \frac{1}{6\mu^{\frac{1}{2}}}\left\{(r+r'+c)^{\frac{3}{2}} - (r-r'-c)^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Это и есть искомый вид теоремы[1].

Задача 11. Вывести теорему Ламберта для параболического движения непосредственно из формул этого движения.

§ 50. Центральные и параллельные силы. Если при центральном движении центр сил расположен в большом удалении от рассматриваемой части силового поля, то сила будет действовать на материальную точку в различных ее положениях почти в одном и том же направлении. Предельный случай при бесконечно удаленной силе и даст проблему движения материальной точки в поле параллельных сил.

[1] Результат установленный Эйлером в его Determinatio Orbitae Cometae Anni 1742 (1743) еще до опубликования общей теоремы Ламбертом.

Для исследования последнего случая введем в плоскости движения прямоугольные оси Ox и Oy, так, чтобы ось Ox была направлена параллельно силам. Пусть $X(x)$ означает силу и пусть она не зависит от y. Будем иметь уравнения движения:

$$\ddot{x} = X(x), \quad \ddot{y} = 0,$$

что даст после интеграции:

$$t = ay + b = \int^{x} \left\{ 2 \int X(x) dx + c \right\}^{\frac{1}{2}} dx + l,$$

где a, b, c, l постоянные интегрирования; их значения определяются по начальным данным для x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$. Если, с одной стороны, можно трактовать движение в поле параллельных осей как частный случай центрального движения, то, с другой стороны, достаточно иметь решение этой специальной задачи, чтобы указать его и в общем случае. Действительно, если материальная точка притягивается силой P, направленной в начало координат, то уравнения ее движения суть:

$$\ddot{x} = -P\frac{x}{r}, \quad \ddot{y} = -P\frac{y}{r}.$$

Момент количества движения движущейся точки относительно начала координат имеет постоянное значение $x\dot{y} - y\dot{x} = h$. Введем новые координаты X и Y с помощью подстановки

$$X = \frac{x}{y}, \quad Y = \frac{1}{y}.$$

Определим также новую переменную T уравнением:

$$T = \int \frac{dt}{y^2}.$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{dX}{dT} = \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dt}{dT} = \left(\frac{\dot{x}}{y} - \frac{\dot{y}x}{y^2}\right) y^2 = -h,$$

$$\frac{dY}{dT} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{dt}{dT} = \quad \frac{\dot{y}}{y^2} y^2 = \quad \dot{y};$$

поэтому

$$\frac{d^2X}{dT^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dT^2} = -y^2\ddot{y} = -P\frac{y^3}{r}.$$

Если T рассматривать как время, то из этих уравнений следует, что материальная точка с координатами X, Y движется так, как будто на нее действует сила, параллельная оси Y величины $-\dfrac{Py^3}{r}$.

Так как из решения этой подмененной задачи выводится решение и первоначальной, то, следовательно, *задачу центрального движения можно свести к задаче движения в поле параллельных сил.*

Задача 1. Показать, что материальная точка, подверженная действию только силы тяжести, описывает параболу с вертикальной осью и с раствором вниз.

Задача 2. Под действием силы, параллельной оси x, точка может описывать кривую $f(x, y) = 0$. Показать, что величина силы отличается только постоянным множителем от величины:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^{-3}\left\{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right\}.$$

Задача 3. Доказать, что если материальная точка при любом начальном движении в поле параллельных сил движется всегда по коническому сечению, то сила обратно пропорциональна третьей степени расстояния от некоторой прямой, перпендикулярной направлению силы.

§ 51. Теорема Бонне. Рассмотрим теперь движение точки, притягиваемой одновременно несколькими центрами. Бесконечное множество задач этого типа решается с помощью следующей теоремы Бонне (Bonnet)[1]:

Если заданная траектория может быть описана точкой под действием каждого отдельного из n заданных силовых полей, причем скорости в произвольной точке P этой траектории будут соответственно $v_1, v_2, \ldots, v_n$, то та же траектория может описываться точкой под действием поля, наложенного из P заданных полей; при этом скорость в точке P будет равна $\left(v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Для того чтобы материальная точка двигалась по наперед заданной траектории, мы предполагаем, что в суммарном поле сил должна существовать некоторая добавочная сила R, перпендикулярная к этой траектории.

Пусть A — некоторая точка траектории такого рода, что для нее квадрат скорости движущейся точки равен сумме квадратов скоростей, которые она имела бы в точке A при отдельных силовых полях. Если взять уравнения энергии изучаемого движения и всех n отдельных движений, то легко заметить, что кинетическая энергия первого равна сумме кинетических энергий отдельных движений. Это означает,

[1] Journ. de math., т. 9, стр. 43, 1844 и примечание IV тома II последнего издания «Mec. Anal.» Лагранжа (Oeuvres de Lagrange, т. XII, стр. 353).

что скорость произвольной точки P равна $(v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2)^{\frac{1}{2}}$. Поэтому составляющая силы по нормали к траектории будет:

$$m\frac{v_1^2+v_2^2+\dots+v_n^2}{\rho}=F_1+F_2+\dots+F_n+R,$$

где m означает массу точки, ρ — радиус кривизны траектории, а $F_1, F_2, \dots, F_n$ — нормальные компоненты сил отдельных полей в точке P. Но так как

$$\frac{mv_1^2}{\rho}=F_1,\quad \frac{mv_2^2}{\rho}=F_2,\quad \dots,\quad \frac{mv_n^2}{\rho}=F_n,$$

то добавочная сила $R=0$.

Следовательно, данная траектория есть возможная траектория суммарного поля, получающегося от наложения отдельных полей.

Задача 1. Показать, что материальная точка может описывать эллипс, если в направлении его фокусов на нее действуют силы:

$$\mu\frac{r^3+8a^3}{8a^3r^2}\quad\text{и}\quad\mu\frac{r'^3+8a^3}{8a^3r'^2}.$$

Это непосредственно следует из теоремы Бонне, если принять во внимание, что заданные силы эквивалентны каждая двум силам, одна из которых равна:

$$\frac{\mu}{4a^3}\times\text{расстояние до центра эллипса, а другие }\frac{\mu}{r^2}\text{ и }\frac{\mu}{r'^2}.$$

§ 52. Определение наиболее общего поля сил по заданной траектории или заданному семейству траекторий. Пусть

$$\Phi(x,\,y)=c$$

есть уравнение кривой. Если c будет переменным параметром, то это уравнение представит семейство кривых. Предполагая, что сила зависит только от положения материальной точки, определим силовое поле, для которого данное семейство кривых будет представлять семейство возможных траекторий. Обозначим скорость точки через v, а компоненты силы, отнесенной к единице массы, в направлении осей координат через X и Y. Так как тангенсальная и нормальная составляющие ускорения соответственно равны $\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}$ и $\frac{v^2}{\rho}$, то имеем:

$$X=-\frac{v^2}{\rho}\Phi_x(\Phi_x^2+\Phi_y^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\Phi_y(\Phi_x^2+\Phi_y^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$Y=-\frac{v^2}{\rho}\Phi_y(\Phi_x^2+\Phi_y^2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\Phi_x(\Phi_x^2+\Phi_y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Если вместо $\dfrac{1}{\rho}$ вставить его значение

$$\frac{\Phi_y^2\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{yy}}{(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

то будем иметь:

$$X = -\Phi_x v^2 \frac{\Phi_y^2\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} + \Phi_x^2\Phi_{yy}}{(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)^2} - \frac{1}{2}\frac{dv^2}{ds}\Phi_y(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Если ввести величину u, определяемую равенством

$$v^2 = -u(\Phi_x^2 + \Phi_y^2),$$

а $\dfrac{d}{ds}$ заменить через

$$(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)^{-\frac{1}{2}}\left(\Phi_x\frac{\partial}{\partial y} - \Phi_y\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

то уравнение перейдет в следующее:

$$X = u(\Phi_x\Phi_{yy} - \Phi_y\Phi_{xy}) + \frac{1}{2}\Phi_y\frac{du}{ds}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Величина u здесь произвольна, так как она зависит от скорости, с которой точка движется по заданной траектории. Так как по предположению X и Y — функции положения движущейся точки, то можно принять, что u есть произвольная функция от x, y. Поэтому будем иметь:

$$X = u(\Phi_x\Phi_{yy} - \Phi_y\Phi_{xy}) + \frac{1}{2}\Phi_y(\Phi_x u_y - \Phi_y u_x)$$

и соответственно:

$$Y = u(\Phi_y\Phi_{xx} - \Phi_x\Phi_{xy}) + \frac{1}{2}\Phi_x(\Phi_y u_x - \Phi_x u_y),$$

где u — произвольная функция от x, y. Это выражение для силового поля, в котором заданное семейство кривых есть семейство возможных траекторий, впервые дал Даинелли (Dainelli)[1].

---

[1] Giornale di Mat., T. 18, стр. 271. 1880.

Задача 1. Показать, что материальная точка может описывать заданную кривую под действием произвольных сил P_1, P_2, ..., направленных в заданные неподвижные центры, если эти силы удовлетворяют уравнению:

$$\sum_k \frac{1}{p_k^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{P_k p_k^3 \rho}{r_k}\right) = 0,$$

где r_k есть радиус-вектор, проведенный из k-го центра, p_k — перпендикуляр из центра на касательную к траектории и ρ — радиус кривизны последней.

Тангенциальные и нормальные составляющие всех сил, действующих на точку, будут соответственно:

$$T = -\sum_k P_k \frac{dr_k}{ds}, \qquad N = \sum_k P_k \frac{p_k}{r_k};$$

поэтому из уравнения

$$2T = \frac{d(v^2)}{ds} = \frac{d}{ds}(\rho N)$$

следует:

$$\sum_k \left\{2P_k \frac{dr_k}{ds} + \frac{d}{ds}\left(P_k \frac{\rho p_k}{r_k}\right)\right\} = 0$$

или

$$\sum_k \frac{1}{p_k^2}\frac{d}{ds}\left(\frac{P_k p_k^3 \rho}{r_k}\right) = 0.$$

Задача 2. Материальная точка может двигаться по заданной наперед кривой под действием каждой из данных сил Φ_1, Φ_2, ..., действующих в известных (различных) направлениях. Чтобы та же кривая описывалась точкой под общим действием совокупности сил F_1, F_2, ..., направления которых совпадают с соответственными направлениями сил Φ_1, Φ_2, ..., должно выполняться условие:

$$\sum_k c_k \Phi_k \frac{d}{ds}\left(\frac{F_k}{\Phi_k}\right) = 0,$$

где c_k означает хорду круга кривизны кривой, взятую в направлении Φ_k. (Curtis.)

Задача 3. Точка движется в плоском силовом поле с потенциалом V. Показать, что если V удовлетворяет уравнению:

$$0 = f(V)\left\{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right\} + \\ + \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right\}^2,$$

то кривая равного потенциала есть возможная траектория.

§ 53. Задача двух притягивающих центров. Если точка движется в плоскости под действием произвольных сил, то уравнения ее движения в общем случае нельзя разрешить в квадратурах. Наряду с задачей центрального движения к задачам, разрешимым в квадратурах, относится также известная задача двух притягивающих центров. В этой задаче требуется определить плоское движение материальной точки, притягиваемой двумя неподвижными точками плоскости по закону Ньютона. Разрешимость этой задачи обнаружил Эйлер[1].

Пусть $2c$ — расстояние между центрами, начало координат в середине прямой, соединяющей центры, а сама эта прямая принята за ось x. Тогда координаты обоих центров будут $(c, 0)$ и $(-c, 0)$. Пусть масса точки равна единице, тогда ее потенциальная энергия будет:

$$V = -\mu\{(x-c)^2 + y^2\}^{-\frac{1}{2}} - \mu'\{(x+c)^2 + y^2\}^{-\frac{1}{2}},$$

где постоянные μ, μ' характеризуют величину притягивающих сил.

Если будет действовать только одна из притягивающих сил, то всякий эллипс или гипербола, имеющие фокусами оба центра, являются возможными траекториями. Поэтому по теореме Бонне, если действуют оба притяжения, всякие эллипсы и гиперболы, софокусные с предыдущими, будут также возможными траекториями. Для этой задачи положение материальной точки удобно определять так называемыми эллиптическими координатами ξ, η, которые связаны с прямоугольными координатами x, y равенствами:

$$x = c\operatorname{ch}\xi\cos\eta, \quad y = c\operatorname{sh}\xi\sin\eta.$$

Уравнения $\xi = \mathrm{const}$ и $\eta = \mathrm{const}$ дают софокусные эллипсы или гиперболы, фокусами которых являются оба притягивающих центра. Они образуют частное семейство траекторий. Потенциальная энергия как функция от ξ, η будет:

$$V = -\frac{\mu}{c(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)} - \frac{\mu'}{c(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta)},$$

а кинетическая энергия T имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{c^2}{2}(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2).$$

Очевидно, получается задача типа Лиувилля, а поэтому можно применить для нее развитые в предыдущей главе методы интегрирования.

---

[1] *Euler*, Mem.de Berlin, стр. 228. 1760; Nov. Comm. Petrop., т. 10, стр. 207, 1764; т. 11, стр. 152. 1765; *Lagrange*, Mem. de Turin, т. 4, стр. 118. 215, 1766–1769 или Oeuvres, т. II, стр. 67.

Уравнение Лагранжа для координаты ξ получает вид:

$$c^2 \frac{d}{dt}\{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\dot{\xi}\} - c^2 \operatorname{ch}\xi \operatorname{sh}\xi(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \xi}$$

или

$$c^2 \frac{d}{dt}\{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^2\dot{\xi}^2\} - 2c^2 \operatorname{ch}\xi \operatorname{sh}\xi(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\dot{\xi}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) =$$

$$= -2(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\dot{\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi},$$

или, принимая во внимание уравнение энергии $T + V = h$, имеем:

$$c^2 \frac{d}{dt}\{(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^2\dot{\xi}^2\} =$$

$$= -2(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\dot{\xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + 2(h - V)\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) =$$

$$= 2\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\{(h - V)(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\} = 2\dot{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}\{h(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) +$$

$$+\frac{\mu}{c}(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta) + \frac{\mu'}{c}(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)\} = 2\frac{d}{dt}(h \operatorname{ch}^2 \xi + \frac{\mu + \mu'}{c}\operatorname{ch}\xi).$$

Интеграция дает:

$$\frac{c^2}{2}(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^2\dot{\xi}^2 = h \operatorname{ch}^2 \xi + \frac{\mu + \mu'}{c}\operatorname{ch}\xi - \gamma,$$

где γ — постоянная интегрирования.

Если последнее уравнение вычтем из уравнения энергии, которое можно представить в виде:

$$\frac{c^2}{2}(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) =$$

$$= h(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) + \frac{\mu}{c}(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta) + \frac{\mu'}{c}(\operatorname{ch}\xi + \cos\eta),$$

то получим:

$$\frac{c^2}{2}(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)^2\dot{\eta}^2 = -h\cos^2 \eta - \frac{\mu' - \mu}{c}\cos\eta + \gamma.$$

Исключая dt из последних двух уравнений, будем иметь:

$$\frac{(d\xi)^2}{h \operatorname{ch}^2 \xi + \frac{\mu + \mu'}{c}\operatorname{ch}\xi - \gamma} = \frac{(d\eta)^2}{-h\cos^2 \eta - \frac{\mu' - \mu}{c}\cos\eta + \gamma}.$$

Вводя здесь вспомогательную переменную u, получим:

$$u = \int \left\{ h \operatorname{ch}^2 \xi + \frac{\mu + \mu'}{c} \operatorname{ch} \xi - \gamma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\xi,$$

$$u = \int \left\{ -h \cos^2 \eta - \frac{\mu' - \mu}{c} \cos \eta + \gamma \right\}^{-\frac{1}{2}} d\eta.$$

Получившиеся интегралы являются эллиптическими, и поэтому ξ и η можно выразить в виде эллиптических функций:

$$\xi = \chi(u), \quad \eta = \varphi(u).$$

Этими уравнениям, в которых эллиптические координаты ζ, η являются функциями параметра u, и определяется траектория движущейся материальной точки[1].

§ 54. Движение по поверхности[2]. Рассмотрим теперь движение материальной точки, вынужденной оставаться на некоторой гладкой поверхности и подверженной каким угодно силам.

Обозначим через X, Y, Z компоненты по осям прямоугольных координат действующей на точку внешней силы, не включая сюда силу, вынуждающую точку оставаться на поверхности. Введем также следующие обозначения: v скорость точки; s дуга и ρ радиус кривизны траектории; χ угол между главной нормалью к траектории и нормалью к поверхности движения; λ, μ, ν — направляюшие косинусы той нормали к траектории, которая лежит в касательной плоскости. Все величины отнесены к моменту времени t. Пусть, наконец, масса равна единице. Ускорение будет складываться из двух компонентов: $v\dfrac{dv}{ds}$ — в направлении касательной и $\dfrac{v^2}{\rho}$ — в направлении главной нормали к траектории. Последний, в свою очередь, можно разложить на две составляющих: $\dfrac{v^2}{\rho}\sin\chi$ в направлении прямой, с направляющими косинусами λ, μ, ν и $\dfrac{v^2}{\rho}\cos\chi$ в направлении нормали к поверхности.

Уравнения движения будут иметь вид:

$$v\frac{dv}{ds} = X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}, \tag{1}$$

$$\frac{v^2}{\rho}\sin\chi = X\lambda + Y\mu + Z\nu. \tag{2}$$

[1] Некоторые обобщения задачи двух притягивающих центров есть в статье Хилтебейтеля (*Hiltebeitel*, Amer. Journ. Math., т. 33, стр. 337, 1911).

[2] Самыми ранними исследованиями движения на поверхности являются исследования Галилея движения тяжелой точки по наклонной плоскости. Движение тяжелой точки по горизонтальному кругу некоторого шара было исследовано Гюйгенсом (Horologium oscillatorium, 1673).

Эти уравнения вместе с уравнением поверхности полностью определяют движение. Действительно, из уравнения поверхности можно определить z как функцию от x, y, а затем все величины в уравнениях (1) и (2) выразить через x, y, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$. Таким образом, уравнения (1) и (2) сводятся к системе дифференциальных уравнений четвертого порядка для определения x и y как функций t. Если силы консервативны, то выражение

$$-X\,dx - Y\,dy - Z\,dz$$

будет дифференциалом потенциальной функции $V(x,\ y,\ z)$. Тогда уравнение (1) интегрируется и даст уравнение энергии:

$$\frac{1}{2}v^2 + V(x, y, z) = c,$$

где c — постоянно.

Если теперь вставить в уравнение (2) найденное значение v^2, то получим:

$$2(c - V)\frac{\sin\chi}{\rho} = X\lambda + Y\mu + Z\nu.$$

После исключения z с помощью уравнения поверхности это даст дифференциальное уравнение второго порядка для x и y, определяющее траекторию на поверхности.

В общем случае дифференциальные уравнения движения точки на поверхности не интегрируются в квадратурах. Однако, в двух случаях задачу можно поставить так, что при этом результаты могут быть использованы и при различных других зависимостях.

1. *Движение по инерции.* Если на точку не действуют никакие внешние силы, то уравнение (2) даст $\chi = 0$, т. е. *траектории будут геодезическими линиями на поверхности*[1]. Из уравнения энергии следует, что эти геодезические линии описываются точкой с постоянной скоростью.

Задача 1. Точка движется свободно по неподвижной, гладкой, линейчатой поверхности, стрикционная линия которой есть ось z, а образующая в точке z имеет направляющие косинусы:

$$\sin\alpha\cos\frac{z}{m}, \quad \sin\alpha\sin\frac{z}{m}, \quad \cos\alpha.$$

Определить движение.

Обозначим через v расстояние точки $(x,\ y,\ z)$ поверхности от стрикционной линии, взятое по образующей. Далее, пусть точка $(0,\ 0,\ \zeta)$ есть точка пересечения этой образующей со стрикционной линией. Тогда будем иметь:

$$x = v\sin\alpha\cos\frac{\zeta}{m}, \quad y = v\sin\alpha\sin\frac{\zeta}{m}, \quad z = \zeta + v\cos\alpha.$$

[1] Это — теорема Эйлера (Mechanica, т. II, гл. 4, 1736).

Материальная точка обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}\left(\dot{v}^2 + \dot{\zeta}^2 \frac{v^2}{m^2} \sin^2\alpha + \dot{\zeta}^2 + 2\dot{\zeta}\dot{v}\cos\alpha\right).$$

Величины v и ζ можно принять за координаты, определяющие положение точки. Очевидно, координата ζ — циклическая, ей соответствует интеграл $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{\zeta}} = k$, где k — постоянная, или

$$\left(\frac{v^2}{m^2}\sin^2\alpha + 1\right)\dot{\zeta} + \dot{v}\cos\alpha = k.$$

Интегралом энергии будет:

$$T = h,$$

где h — тоже постоянная. Исключая из обоих интегралов $\dot{\zeta}$, получим:

$$\dot{v}^2(v^2 + m^2) = 2hv^2 + (2h - k^2)m^2\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Если в начале движения $\dot{v}$ достаточно велико по сравнению с $\dot{\zeta}$ то будем иметь $(2h - k^2) > 0$. В этом предположении можем написать:

$$(2h - k^2)\frac{m^2}{\sin^2\alpha} = 2h\lambda^2,$$

где λ — новая постоянная, и, следовательно, получаем уравнение:

$$\dot{v}^2(v^2 + m^2) = 2h(v^2 + \lambda^2),$$

которое может быть проинтегрировано, если ввести вещественную вспомогательную переменную u, определяемую равенством:

$$u = \int\limits_0^v \left\{(m^2 + v^2)(\lambda^2 + v^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} dv.$$

Полагая здесь

$$v = \lambda m x^{-\frac{1}{2}},$$

будем иметь:

$$u = \int\limits_x^\infty \left\{4x(x + \lambda^2)(x + m^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Это равенство эквивалентно следующему:

$$x = \wp(u) - e_1,$$

где функция $\wp$ образована при помощи корней e_1, e_2, e_3, определяемых равенствами:

$$e_1 - e_2 = \lambda^2, \quad e_1 - e_3 = m^2, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Связь между переменными v и u будет, следовательно, определена равенством:

$$v = \lambda m \left\{\wp(u) - e_1\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Подставляя это значение в уравнение, связывающее v и t, получим:

$$(2h)^{\frac{1}{2}} t = \int \frac{(e_1 - e_3)\{\wp(u) - e_2\}}{\wp(u) - e_1}\, du + \text{const} =$$

$$= \int \{-e_3 + \wp(u + \omega_1)\}\, du + \text{const}^1 = -e_3 u - \zeta(u + \omega_1) + \text{const}.$$

Это соотношение дает t как функцию от вспомогательной переменной u и, следовательно, вместе с уравнением

$$v = \lambda m \left\{\wp(u) - e_1\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

дает связь между v и t.

2. *Движение по развертывающейся поверхности.* Пусть точка движется по развертывающейся поверхности. Воспользуемся известной теоремой, что дуга s и величина $\dfrac{\sin\chi}{\rho}$ при развертывании поверхности на плоскость остаются неизменными. Тогда из вышенаписанных уравнений движения получим следующий результат: *Если поверхность, по которой под действием произвольных сил движется материальная точка, развертывается на плоскость, то плоская кривая, соответствующая траектории точки, будет описываться соответствующей точкой со скоростью, равной скорости точки на траектории, если только сила, действующая на точку в плоском движении, будет по величине и направлению равна проекции на касательную плоскость силы, действующей на движущуюся по поверхности точку.*

Задача 2. Тяжелая точка брошена на поверхность прямого, кругового конуса, имеющего вертикальную ось и вершину, расположенную сверху, со скоростью, которую она приобрела бы, двигаясь без начальной скорости из вершины. Показать, что траектория на конусе имеет в плоскости развертки уравнение:

$$r^{\frac{3}{2}} \sin \frac{3}{2}\vartheta = a^{\frac{3}{2}}.$$

После развертывания конуса на плоскость получается задача плоского движения, под действием постоянной отталкивающей силы, направленной из начала координат, причем материальная точка имеет скорость, обращающуюся в нуль в начале координат. Поэтому существуют интегралы:

$$\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 = Cr, \quad \text{где } C \text{ — постоянная},$$

$$r^2\dot\vartheta = h, \quad \text{где } h \text{ — постоянная}.$$

[1] См. *Уиттекер* и *Ватсон.* Курс современного анализа, § 20, 33.

Эти уравнения дают:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2 + 1 = \frac{Cr^3}{h^2} = \frac{r^3}{a^3},$$

где a — новая постоянная. Полагая $u = \frac{1}{r}$, имеем поэтому:

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 = \frac{1 - a^3u^3}{a^3u},$$

следовательно,

$$\vartheta = \int \frac{a^{\frac{3}{2}}u^{\frac{1}{2}}\,du}{(1 - a^3u^3)^{\frac{1}{2}}},$$

или

$$\vartheta = \frac{2}{3}\int \frac{dv}{(1 - v^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{где} \quad v = u^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$$

т. е.

$$\vartheta = \frac{2}{3}\arcsin v.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению:

$$r^{\frac{3}{2}}\sin\frac{3}{2}\vartheta - a^{\frac{3}{2}}.$$

Задача 3. При движении точки P по развертывающейся поверхности площадь, описываемая касательной IP к ребру возврата, изменяется пропорционально времени. Доказать, что слагающая силы, перпендикулярная к IP и лежащая в касательной плоскости, пропорциональна величине $\frac{\rho}{IP^4}$, где ρ — радиус кривизны ребра возврата. (Hazzidakis).

§ 55. Движение по поверхности вращения; случаи, разрешимые в круговых и эллиптических функциях[1]. Важнейшим, разрешимым в квадратурах, случаем движения точки по поверхности является следующий: материальная точка движется без трения по поверхности вращения под действием силы, определяемой потенциалом, симметричным относительно оси вращения. Пусть положение точки в пространстве определяется цилиндрическими координатами z, r, φ, причем ось z взята в направлении оси вращения, r есть расстояние точки до этой оси, а азимут φ есть угол между r и неподвижной плоскостью, проходящей через ось вращения.

Уравнение поверхности будет иметь вид:

$$r = f(z).$$

[1] Движение материальной точки по поверхности вращения исследовано Ньютоном (Principia, книга 1, раздел 10).

Потенциальная функция будет функцией z и r (она не может содержать φ вследствие ее симметрии относительно оси вращения). Для точки, лежащей на поверхности, она может быть представлена в виде $V(z)$ = функции только z, так как r можно заменить его значением $f(z)$. Масса точки пусть равна единице. Согласно § 18 кинетическая энергия будет:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\left\{[f'(z)^2 - 1]\dot{z}^2 + [f(z)]^2\dot{\varphi}^2\right\}.$$

Очевидно, φ есть циклическая координата; ей соответствует интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = k,$$

где k есть постоянная, или

$$[f(z)]^2\dot{\varphi} = k.$$

Это уравнение можно понимать как интеграл момента количества движения относительно оси вращения.

Уравнение энергии будет:

$$T - V = h,$$

где h — постоянная. Если мы вставим сюда значение $\dot{\varphi}$ из предыдущего равенства, то получим:

$$[f'(z)^2 + 1]\dot{z}^2 + k^2 f(z)^{-2} + 2V(z) = 2h.$$

Интеграция этого уравнения даст:

$$t = \int [f'(z)^2 + 1]^{\frac{1}{2}} [2h - 2V(z) - k^2 f(z)^{-2}]^{-\frac{1}{2}} dz + \text{const}.$$

Таким образом, соотношение между t и z получено одной квадратурой. Значения r и φ определяются из уравнения поверхности и из уравнения:

$$f(z)^2\dot{\varphi} = k.$$

Рассмотрим теперь движение по такой поверхности, для которой эти квадратуры выполняются с помощью известных функций.

Мы будем предполагать, что ось z направлена вертикально вверх и что тяжесть — единственная внешняя сила, т. е.

$$V(z) = gz.$$

1. ***Круговой цилиндр.*** Для кругового цилиндра $r = a$ предыдущим интегралом будет:

$$t = \int \left(2h - 2gz - \frac{k^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dz.$$

Если начало координат выбрать так, чтобы $2ha^2 = k^2$, то получим:

$$t = \int (-2gz)^{-\frac{1}{2}} dz$$

или

$$z = -\frac{1}{2} g(t - t_0),$$

где t_0 — постоянная.

Уравнение

$$a^2 \dot{\varphi} = k$$

тогда даст:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{k}{a^2}(t - t_0),$$

где φ_0 — тоже постоянная.

2. *Шар.* Случай, когда поверхность есть шар

$$r = (l^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

представляет *задачу сферического маятника*[1]. Такое движение может быть получено следующим образом: тяжелая точка соединена с неподвижной точкой твердым, невесомым стержнем, который может свободно вращаться вокруг этой неподвижной точки.

В этом случае для t получаем выражение:

$$t = \int \left\{\frac{z^2}{l^2 - z^2} + 1\right\}^{\frac{1}{2}} \left\{2h - 2gz - \frac{k^2}{l^2 - z^2}\right\}^{-\frac{1}{2}} dz$$

или

$$t = l \int \{(2h - 2gz)(l^2 - z^2) - k^2\}^{-\frac{1}{2}} dz.$$

[1] *Lagrange*, Mecanique Analytique. Полное решение в якобиевых эллиптических функциях дал Тиссо (*A. Tissot.* Journal Math. (1), т. 17, стр. 88, 1852); собственное решение Якоби с помощью эллиптических функций задачи вращающегося твердого тела опубликовано уже в 1839 г.

Проблема сферического маятника сводится в основном к решению дифференциальных уравнений Ламе второго порядка.

В правой части стоит эллиптический интеграл, который может быть приведен к канонической форме Вейерштрасса. Пусть z_1, z_2, z_3 означают корни кубического уравнения

$$2(h - gz)(l^2 - z^2) - k^2 = 0.$$

Выражение

$$2(h - gz)(l^2 - z^2) - k^2$$

при $z = l$ и при $z = -l$ отрицательно, при достаточно же больших положительных значениях z, а также при некоторых значениях z, относящихся к нашей задаче (эти значения лежат между $-l$ и $+l$, так как точка остается на шаре), оно положительно. Поэтому один из корней, например z_1, должен быть больше l, а оба другие, из которых пусть $z_2 > z_3$, должны лежать между $-l$ и $+l$. Значения z для действительного движения находятся между z_2 и z_3, так как подрадикальное выражение должно быть положительным. Положим

$$z = \frac{h}{3g} + \frac{2l^2}{g}\zeta,$$

где ζ — новая переменная, и

$$z_r = \frac{h}{3g} + \frac{2l^2}{g}e_r \qquad (r = 1,\, 2,\, 3),$$

где e_1, e_2, e_3 — новые постоянные, удовлетворяющие уравнению:

$$e_1 + e_2 + e_3 - \frac{g}{2l^2}\left(z_1 - z_2 + z_3 - \frac{h}{g}\right) - 0$$

и условию $e_1 > e_2 > e_3$.

Уравнение, связывающее t и z, примет вид:

$$t = \int \left\{4(\zeta - e_1)(\zeta - e_2)(\zeta - e_3)\right\}^{-\frac{1}{2}} d\zeta$$

или

$$\zeta = \wp(t + \varepsilon),$$

где ε постоянная интегрирования, а $\wp$ образована при помощи корней e_1, e_2, e_3. Если e_1, e_2, e_3 являются действительными и расположены в убывающем порядке, то функции $\wp(u)$ и $\wp'(u)$ обе действительны, когда u действительно (при этом $\wp$ больше e_1) и когда u имеет вид $u = \omega_3$ действительная величина, где ω_3 — полупериод, соответствующий корню e_3. В последнем случае $\wp(u)$ лежит между e_2 и e_3. При действительном движении z находится между z_2 и z_3; следовательно, ζ между e_2 и e_3. Постоянная ε поэтому должна состоять из мнимой части ω_3 и вещественной части, зависящей от начального момента времени. Подходящим выбором нулевого момента времени последнюю часть можно сделать равной нулю, и тогда связь между z и t получим в виде:

$$z = \frac{h}{3g} + \frac{2l^2}{g}\wp(t + \omega_3).$$

Азимут φ определяется уравнением:

$$d\varphi = \frac{k}{r^2}\,dt = \frac{k\,dt}{l^2 - z^2}.$$

Поэтому имеем:

$$\varphi - \varphi_0 = k\int \frac{dt}{l^2 - \left\{\dfrac{h}{3g} + \dfrac{2l^2}{g}\wp(t + \omega_3)\right\}^2},$$

где φ_0 — постоянная интегрирования.

Для выполнения интегрирования обозначим через λ и μ значение величины $t + \omega_3$ при z, соответственно равном l и $-l$. Уравнениями, определяющими постоянные λ и μ, будут:

$$l - \frac{h}{3g} = \frac{2l^2}{g}\wp(\lambda), \quad -l - \frac{h}{3g} = \frac{2l^2}{g}\wp(\mu).$$

Из них следует:

$$\wp'(\lambda) = \wp'(\mu) = \frac{ikg}{2l^3}.$$

Тогда интеграл преобразовывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varphi - \varphi_0 &= -\frac{kg^2}{4l^4}\int \frac{dt}{\{\wp(t + \omega_3) - \wp(\lambda)\}\{\wp(t + \omega_3) - \wp(\mu)\}} = \\
&= -\frac{kg}{4l^3}\int \left\{\frac{dt}{\wp(t + \omega_3) - \wp(\lambda)} - \frac{dt}{\wp(t + \omega_3) - \wp(\mu)}\right\} = \\
&= \frac{i}{2}\int \left\{\frac{\wp'(\lambda)\,dt}{\wp(t + \omega_3) - \wp(\lambda)} - \frac{\wp'(\mu)\,dt}{\wp(t + \omega_3) - \wp(\mu)}\right\}.
\end{aligned}$$

Но[1]

$$\frac{\wp'(\lambda)}{\wp(z) - \wp(\lambda)} = \zeta(z - \lambda) - \zeta(z + \lambda) + 2\zeta(\lambda),$$

[1] *Уиттекер* и *Ватсон*. Курс современного анализа, § 20, 53, пример 2.

поэтому

$$\int \frac{\wp'(\lambda)\,dt}{\wp(t+\omega_3)-\wp(\lambda)} = \ln\frac{\sigma(t+\omega_3-\lambda)}{\sigma(t+\omega_3+\lambda)} \cdot 2\zeta(\lambda)t,$$

и, следовательно,

$$e^{2i(\varphi\ \ \varphi_0)} = e^{2\{\zeta(\mu)\ \ \zeta(\lambda)\}t}\frac{\sigma(t+\omega_3-\mu)\sigma(t+\omega_3-\lambda)}{\sigma(t+\omega_3+\mu)\sigma(t+\omega_3-\lambda)}.$$

Это равенство, определяющее φ в функции t, и решает до конца задачу. Можно показать, что если t возрастает на величину ω_1, то φ_1 увеличивается на величину:

$$-2i\omega_1\{\zeta(\mu)-\zeta(\lambda)\}-2i\eta_1(\lambda-\mu).$$

Задача 1. Конец сферического маятника совершает периодические колебания между двумя параллельными кругами шара. Показать, что разность азимутов движущейся точки в ее положениях на верхнем круге и на нижнем, параллельном круге, которого она достигает через полупериод, находится в пределах между $\frac{\pi}{2}$ и π. (Puiseux и Halphen.) Периодические решения задачи сферического маятника исследовал *F. R. Moulton* (Palermo Rend., T. 32, стр. 338, 1911).

3. *Параболоид.* Разберем теперь движение по параболоиду

$$r = 2a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}.$$

В этом случае имеем:

$$t = \int (a+z)^{\frac{1}{2}}\left(2hz-2gz^2-\frac{k^2}{4a}\right)^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Чтобы получить решение задачи в эллиптических функциях, введем вспомогательную величину v, определяемую равенством:

$$v = \int^{z}(a+z)^{-\frac{1}{2}}\left(2hz-2gz^2-\frac{k^2}{4a}\right)^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Пусть α и β ($\alpha \geqslant \beta$) — корни квадратного уравнения

$$2hz-2gz^2-\frac{k^2}{4a}=0.$$

Тогда последний интеграл можно написать в форме:

$$v = \left(-\frac{g}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\int^{z}\{4(z+a)(z-\beta)(z-\alpha)\}^{-\frac{1}{2}}dz.$$

Определим новую переменную ζ равенством

$$z = -(a-\alpha)\zeta + \frac{-a-\alpha-\beta}{3}.$$

Пусть также e_1, e_2, e_3 значения ζ, соответствующие значениям a, β и α величины z. Тогда интеграл будет иметь вид:

$$\left\{\frac{g(a+\alpha)}{2}\right\}^{\frac{1}{2}} v = \int\limits_{\zeta} \{4(\zeta-e_1)(\zeta-e_2)(\zeta-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}\, d\zeta$$

и можно легко показать, что

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad e_1>e_2>e_3.$$

Теперь введем величину u, определяемую равенством

$$v = \left\{\frac{2}{g(a+\alpha)}\right\}^{\frac{1}{2}} u.$$

Обращение интеграла тогда дает:

$$\zeta = \wp(u+\varepsilon),$$

где ε — постоянная интеграции, а $\wp$ образована с помощью корней e_1, e_2, e_3, которые даются равенствами:

$$e_1 = \frac{2a+\alpha+\beta}{3(a+\alpha)}, \quad e_2 = \frac{-a+\alpha-2\beta}{3(a+\alpha)}, \quad e_3 = \frac{-a-2\alpha+\beta}{3(a+\alpha)}.$$

Так как при действительном движении z, очевидно, находятся между α и β, то $\wp(u+\varepsilon)$ должно заключаться между e_3 и e_2; так как u должно оставаться вещественным, поэтому мнимая часть постоянной ε должна быть равна полупериоду ω_3. Вещественную часть можно предположить равной нулю, так как u зависит лишь от нижнего предела интеграла.

Таким образом, имеем:

$$z = -(a+\alpha)\wp(u+\omega_3) + \frac{h-ag}{3g}, \quad \text{так как} \quad \alpha+\beta = \frac{h}{g}.$$

Уравнением, определяющим t, будет:

$$t = \int (a+z)dv = -\left\{\frac{2(a+\alpha)}{g}\right\}^{\frac{1}{2}} \int \{\wp(u+\omega_3)-e_1\}\, du,$$

$$t = -\left\{\frac{2(a+\alpha)}{g}\right\}^{\frac{1}{2}} \{-\zeta(u-\omega_3)-e_1 u\}.$$

Этим самым l определено как функция вспомогательного переменного u.

Найдем теперь азимут φ. Имеем:

$$d\varphi = \frac{k\,dt}{r^2} = \frac{k\,dt}{4az} = \frac{k}{4a}\left\{\frac{2}{g(a+\alpha)}\right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\wp(u+\omega_3)-e_1}{\wp(u+\omega_3)-\dfrac{-a+\alpha+\beta}{3(a+\alpha)}}\,du$$

и поэтому

$$\frac{4a}{k}\left\{\frac{g(a+\alpha)}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}(\varphi-\varphi_0) =$$

$$-u+\left\{\frac{-a+\alpha+\beta}{3(a+\alpha)}-e_1\right\}\int\frac{du}{\wp(u-\omega_3)-\dfrac{-a-\alpha-\beta}{3(a+\alpha)}} -$$

$$= u - \frac{a(a+\alpha)^{\frac{1}{2}}(-2g)^{\frac{1}{2}}}{k}\int\frac{\wp'(l)\,du}{\wp(u+\omega_3)-\wp(l)},$$

где φ_0 — постоянная интеграция, а l — вспомогательная постоянная, определяемая равенством

$$\wp(l) = \frac{-a-\alpha+\beta}{3(a+\alpha)}; \quad \text{следовательно,} \quad \wp'(l) = \frac{k}{(-2g)^{\frac{1}{2}}(a+\alpha)^{\frac{3}{2}}}.$$

Теперь уравнение для φ можем написать так:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{ku}{a\{8g(a+\alpha)\}^{\frac{1}{2}}} - \frac{i}{2}\int\frac{\wp'(l)\,du}{\wp(u+\omega_3)-\wp(l)}.$$

Интегрирование (как и в задаче сферического маятника) дает:

$$e^{2i(\varphi-\varphi_0)} = e^{\left[\frac{2ik}{a\{8g(a-\alpha)\}^{\frac{1}{2}}}+2\zeta(l)\right]u}\,\frac{\sigma(u+\omega_3-l)}{\sigma(u+\omega_3+l)}.$$

Это уравнение, определяющее φ через вспомогательную переменную u, и дает полное решение задачи.

4. *Конус.* Рассмотрим, наконец, движение по конусу

$$r = z\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

где α — половина угла раствора.

Так как эта поверхность развертывающаяся, то можно применить результаты § 54. Вследствие этого траектория точки, движущейся по конусу под действием тяжести, будет такой же, какую опишет точка единичной массы, двигаясь по развертке конуса на плоскость, под действием постоянной, центральной, притягивающей силы $g\cos\alpha$. (Силовой центр плоскости соответствует вершине конуса.) Получаем, таким образом, известный случай центрального движения, в котором задача решается в эллиптических функциях. Следовательно, тотчас же получаем и решение задачи движения по конусу.

Задача 2. Показать, что движение точки под действием тяжести по поверхности вращения с вертикальной осью может быть выражено в эллиптических функциях, если поверхность задана одним из следующих уравнений:

$$9ar^2 = z(z-3a)^2,$$
$$2r^4 + 3a^2r^2 - 2za^3 = 0,$$
$$\left(r^2 - az - \frac{1}{2}a^2\right)^2 = a^3z.$$

Задача 3. Показать, что та же задача разрешима в эллиптических функциях, если поверхность задана в виде:

$$(x^2+y^2)^3 + 2a^6 = 8a^3z(x^2+y^2)$$

(Salkowski).

Задача 4. Показать, что если алгебраическая поверхность вращения обладает тем свойством, что геодезические линии могут быть выражены в виде эллиптических функций параметра, то для этой поверхности r^2 и z могут быть выражены рационально в функции некоторого параметра. Т. е. уравнение поверхности, рассматриваемое как соотношение между r^2 и z, есть уравнение уникурсальной кривой. При этом z, r, φ суть цилиндрические координаты точки поверхности. (Kobb.)

Задача 5. Показать, что в следующих случаях движения точки по поверхности вращения все траектории будут замкнутыми:

1. Если поверхность есть шар, а сила действует в направлении касательной к меридиану и пропорциональна величине $\sin^{-\frac{1}{2}}\vartheta$, где ϑ — половина высоты точки (траектории суть сферические коники с фокусом в полюсе).

2. Если поверхность есть шар, а сила действует в направлении меридиана и пропорциональна величине $\sin\vartheta\cos^{-3}\vartheta$ (траектории — сферические коники с центром в полюсе)[1].

§ 56. Теорема Жуковского. Пусть требуется найти потенциальную функцию, при которой заданное на поверхности семейство кривых

[1] Возможность еще и других случаев исследовал Дарбу (*Darboux*, Bull. de la Soc. Math. de France, т. 5. 1877).

есть семейство возможных траекторий материальной точки, вынужденной оставаться на этой поверхности. Три прямоугольных координаты точки на поверхности можно выразить в функции двух параметров u, v, так что линейный элемент на поверхности представится в виде:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

где E, F, G — известные функции u, v. Семейство кривых, описываемых точкой под действием искомых сил, пусть задано уравнением

$$q(u,\,v) = \mathrm{const},$$

и пусть

$$p(u,\,v) = \mathrm{const}$$

есть принадлежащая этому семейству кривых семейство ортогональных траекторий. Тогда вместо u, v в качестве параметров поверхности можно принять p и q. С помощью этих параметров линейный элемент можно представить в форме:

$$ds^2 = E'\,dq^2 + G'\,dp^2.$$

Член, содержащий $dp\,dq$, выпадает, так как кривые $p = \mathrm{const}$ и $q = \mathrm{const}$ пересекаются под прямым углом. E' и G' — известные функции p и q.

Кинетическая энергия точки, движущейся на поверхности, есть

$$T = \frac{1}{2}(E'\dot{q}^2 + G'\dot{p}^2).$$

Поэтому уравнения движения Лагранжа будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}(E'\dot{q}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E'}{\partial q}\dot{q}^2 + \frac{\partial G'}{\partial q}\dot{p}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial q},$$

$$\frac{d}{dt}(G'\dot{p}) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial E'}{\partial p}\dot{q}^2 + \frac{\partial G'}{\partial p}\dot{p}^2\right) = -\frac{\partial V}{\partial p},$$

где V — неизвестная потенциальная функция. Эти уравнения должны удовлетворяться при $\dot{q} = 0$; следовательно, они приводятся к виду:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial G'}{\partial q}\dot{p}^2 = \frac{\partial V}{\partial q},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}(G'\dot{p}^2) = -\frac{\partial V}{\partial p}.$$

Отсюда, исключая $\dot{p}^2$, найдем:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(G'\frac{\partial V}{\partial q} : \frac{\partial G'}{\partial q}\right) + \frac{\partial V}{\partial p} = 0.$$

Интеграция этого уравнения дает:

$$G' \frac{\partial V}{\partial q} : \frac{\partial G'}{\partial q} + V = f(q),$$

где f — произвольная функция или

$$\frac{\partial}{\partial q}(VG') = \frac{\partial G'}{\partial q} f(q),$$

а поэтому

$$V = \frac{g(p)}{G'} + \frac{1}{G'} \int \frac{\partial G'}{\partial q} f(q)\, dq,$$

где g — также произвольная функция.

Величина $\frac{1}{G'}$ есть дифференциальный параметр первого порядка $\Delta_1(p)$[1] функции p. Получаем, таким образом, теорему Жуковского, высказанную им в 1890 г.:

Если $q = \mathrm{const}$ есть семейство кривых на поверхности, а $p = \mathrm{const}$ — семейство их ортогональных траекторий, то кривые $q = \mathrm{const}$ суть возможные траектории материальной точки на поверхности, если сила, действующая на точку, допускает потенциал

$$V = \Delta_1(p) g(p) + \Delta_1(p) \int f(q) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{\Delta_1(p)} \right) dq,$$

где f и g означают произвольные функции, а Δ_1 есть дифференциальный параметр первого порядка.

Написанное выше уравнение дает:

$$\frac{1}{2}\dot{p}^2 = \frac{\partial V}{\partial q} : \frac{\partial G'}{\partial q} = -\frac{1}{G'} V + \frac{f(q)}{G'}.$$

Поэтому уравнением энергии движения будет:

$$\frac{1}{2} G' \dot{p}^2 + V = f(q).$$

---

[1] Если линейный элемент на поверхности задан в виде:

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

то первый дифференциальный параметр функции $\varphi(u, v)$ определяется так:

$$\Delta_1(\varphi) = \frac{1}{EG - F^2} \left\{ E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right\}.$$

Дифференциальный параметр есть инвариант поверхности, т. е. при переходе от переменных u, v к новым переменным u', v' дифференциальный параметр преобразовывается в выражение, составленное по тому же способу из новых переменных u', v' с соответствующими коэффициентами E', F', G'.

Упражнения.

1. Материальная точка под действием тяжести движется без трения по циклоиде

$$s = 4a\sin\varphi,$$

где s — дуга, а φ — угол касательной с горизонтом. Показать, что движение имеет период $4\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$.

2. Точка движется без трения по окружности под действием силы, которая направлена в неподвижную точку и пропорциональна расстоянию от этой точки. Показать, что движение будет типа движения маятника.

3. Точка движется по прямой под действием двух отталкивающих центров равной напряженности μ и расположенных на расстоянии $2c$ друг от друга. Каждая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния.

На расстоянии $kc(k < 1)$ от середины прямой, соединяющей центры, находится материальная точка, обладающая нулевой начальной скоростью. Показать, что точка будет колебаться с периодом:

$$\frac{2\sqrt{c^3(1-k^2)}}{\mu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}\,d\vartheta.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1899.)

4. Точка падает по кривой из состояния покоя в заданной точке O. Показать, что кривая есть лемниската, если точка описывает любую дугу OP в то же время, в которое она прошла бы соответствующую хорду OP.

5. Точка движется вниз по кривой $y^3 + ax^2 = 0$, выходя из начала координат с начальной скоростью $\frac{2}{3}(2ag)^{\frac{1}{2}}$. Ось x горизонтальна. Показать, что вертикальный компонент скорости будет постоянным. (Nicomedi.)

6. В точках с полярными координатами $\vartheta = 0$, $r = a$, $\vartheta = \pi$ и $r = a$ находятся центры сил, пропорциональных третьей степени расстояния. Под действием этих сил материальная точка описывает кривую $r^2 = 2a^2\cos 2\vartheta$. Показать, что если μ есть сила, действующая на единице расстояния, а скорость в узле кривой равна $\frac{2\sqrt{\mu}}{a}$, то петля кривой проходится точкой за время $\frac{\pi a^2}{2\sqrt{\mu}}$. (Camb. Math. Tripos, часть 1. 1898.)

7. Свободная материальная точка описывает пространственную кривую под действием силы, направление которой пересекает постоянно заданную прямую. Показать, что скорость точки обратно пропорциональна расстоянию ее до прямой и косинусу угла, образованного проходящей через эту прямую и точку плоскостью с нормальной плоскостью траектории. (Dainelli.)

8. Тяжелая точка вынужденно движется по прямой, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной вертикальной оси, расположенной на заданном расстоянии. Показать, что уравнением движения будет:

$$r - Ae^{\omega t}\cos\alpha + Be^{-\omega t}\cos\alpha,$$

где r расстояние движущейся точки до некоторой неподвижной точки на прямой, α угол прямой с горизонталью, а A и B постоянные. (H. am Ende.)

9. Тяжелая точка движется по прямой, которая вращается с заданной переменной угловой скоростью вокруг горизонтальной оси. Показать, что уравнением движения будет:

$$\ddot{r} = \mp g\sin\alpha\sin\vartheta - r\dot{\vartheta}^2\sin^2\alpha \mp a\ddot{\vartheta}\sin\alpha,$$

где α — угол между прямой и осью вращения, ϑ — угол вертикали с кратчайшим расстоянием между осью и прямой и r расстояние движущейся точки до точки пересечения этого кратчайшего расстояния с вращающейся прямой. (Vollhering.)

10. Точка скользит без трения по прямой, которая вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. Показать, что если движущаяся точка выходит из положения относительного покоя в точке пересечения прямой с ее кратчайшим расстоянием до оси, то за время t он пройдет по прямой отрезок, равный

$$\frac{2g}{\omega^2}\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\operatorname{sh}^2\left(\frac{1}{2}\omega t\sin\alpha\right),$$

где α угол прямой с вертикалью. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1899.)

11. Точка, на которую не действуют никакие внешние силы, вынуждена оставаться на круге. который вращается вокруг неподвижной точки в своей плоскости. Показать, что точка имеет движение, подобное движению маятника

12. Колечко скользит по проволоке, изогнутой в круг радиуса a, которая вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно одной из своих точек. В начальный момент колечко находится в конце диаметра, проведенного через центр вращения, и имеет скорость относительно проволоки $2\omega b$. Показать, что положение колечка будет определяться равенствами:

$$\sin\varphi = \operatorname{sn} b\frac{\omega t}{a} \qquad \left(\operatorname{mod}\frac{a}{b}\right)$$

или

$$\sin\varphi = \left(\frac{b}{a}\right)\operatorname{sn}\omega t \qquad \left(\operatorname{mod}\frac{b}{a}\right),$$

смотря потому $a < b$ или $a > b$, φ означает угол между радиусом-вектором колечка и указанным выше диаметром. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1900.)

13. Кривая

$$x^3 + y^3 = a^3$$

описывается точкой под действием силы, направленной перпендикулярно асимптоте. Показать, что сила пропорциональна выражению

$$xy(x^2 + y^2)^{-3}.$$

14. На материальную точку действует сила, компоненты которой X, Y, в направлении неподвижных осей представляют сопряженные функции координат. Показать, что задача всегда разрешима в квадратурах.

15. Пусть C есть замкнутая траектория, которую описывает материальная точка под действием центральной силы, S центр сил, O центр тяжести кривой C и G центр тяжести той же кривой в предположении, что плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна скорости. Показать, что точки S, O, G лежат на прямой, и что $2SG = 3SO$. (Laisant.)

16. Показать, что движение точки в плоскости под действием постоянной силы, направленной в точку, не лежащую в плоскости, может быть выражено в эллиптических функциях.

17. Показать, что кривые

$$ax + by + c = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

где a, b, c — произвольные постоянные, а f — заданная функция, могут описываться точкой под действием одной и той же центральной силы с центром в начале координат.

18. Материальной точкой описывается окружность под действием притягивающей силы с центром на этой окружности. Показать, что сила обратно пропорциональна пятой степени расстояния.

19. Материальная точка описывает подеру окружности относительно произвольной точки плоскости, служащей одновременно центром действующей на точку силы. Показать, что сила имеет вид:

$$\frac{A}{r^4} + \frac{B}{r^5},$$

где A и B — постоянные.

Показать также, что вид силы будет тот же, если будет описываться инверсия эллипса относительно фокуса. (Curtis.)

20. Из точки с координатами $r = R$, $\vartheta = 0$ брошена материальная точка со скоростью V, составляющей с радиусом-вектором точки угол α. Пусть $f(r, \vartheta, R, V, \sin\alpha) = 0$ — уравнение траектории при этих условиях. Доказать, что при тех же начальных данных, но при дополнительной центральной силе $\dfrac{\mu}{r^3}$ точка опишет кривую

$$f\left[r, n\vartheta, R, V(n^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^{\frac{1}{2}}, n\sin\alpha(n^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^{-\frac{1}{2}}\right] = 0,$$

где

$$n^2 = f - \frac{\mu}{V^2R^2\sin^2\alpha}.$$

21. Точка массы 1 описывает кривую под действием притягивающей силы P с центром в начале координат и трансверсальной силы T, перпендикулярной к радиусу-вектору. Показать, что дифференциальное уравнение кривой будет:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{P}{h^2u^2} - \frac{T}{h^2u^3}\frac{du}{d\vartheta}, \quad \frac{d^2h}{d\vartheta^2} = 2Tu^{-3}.$$

Доказать также, что если сила P равна нулю и точка движется по логарифмической спирали с углом наклона α к радиусу-вектору, то при этом

$$T = \mu r^{2\sec^2\alpha - 3}, \quad h = (\mu\sin\alpha\cos\alpha)^{\frac{1}{2}} r^{\sec^2\alpha}.$$

22. Материальная точка, на которую действует центральная сила, пропорциональная расстоянию и направленная в точку O, брошена из точки P таким образом, что когда она достигает точки Q имеет место равенство $OP = OQ$. Показать, что, наименьшая, достаточная для этого начальная скорость равна $OP[\mu\sin(POQ)]^{\frac{1}{2}}$, где μOP есть сила, действующая на единицу массы в точке P. (Camb. Math. Tripos. часть 1, 1901.)

23. Определить плоскую кривую такого рода, что две материальные точки под действием притягивающих сил с общим произвольно расположенным в плоскости центром, могут описывать одновременно кривую и ее подеру относительно центра сил. При этом обе движущиеся точки должны находиться в соответственных местах кривой и ее подеры. Для движения по подере определить также и вид силы. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1897.)

24. Пусть $f(x, y)$ однородная функция первого измерения. Чтобы кривая $f(x, y) = 1$ описывалась точкой с ускорением, направленным в начало координат и зависящим только от расстояния, необходимо и достаточно, чтобы f удовлетворяла условию:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - F(r) = 0.$$

На основании этого показать, что все кривые такого рода можно представить уравнением:

$$r(A + B\sin\vartheta + C\cos\vartheta) = 1.$$

Разобрать также случай, когда $f(x, y)$ однородная функция n-го измерения.

25. Эллипс с центром в точке C описывается точкой под действием центральной силы с центром в точке O на большой оси эллипса. Показать, что имеет место равенство

$$nt = u - e\sin u,$$

где $\dfrac{2\pi}{n}$ есть время обращения, e — отношение CO к большой полуоси, u — эксцентрический угол, который приобретает точка за время t и отсчитываемый от линии апсид.

26. Две свободные материальные точки μ и M движутся в плоскости под действием центральной силы с центром в неподвижной точке O. Показать, что частное от деления скорости точки μ в произвольной точке m ее траектории на скорость, которой обладает в точке m центральная проекция точки M на траекторию μ, равно постоянному отношению площадей, ометаемых радиусами $O\mu$ и OM в единицу времени, умноженному на квадрат отношения OM к Om, представляющего определенную функцию f от координат точки m. (Dainelli.)

27. Материальная точка движется свободно по параболе под действием притягивающей силы, направленной в фокус. Показать, что если на касательной в движущейся точке в каждый момент времени фиксировать точку в расстоянии $\dfrac{4a\cos\frac{1}{2}\vartheta}{\vartheta + \sin\vartheta}$ от точки касания, то эта точка опишет центральную кривую с центром в фокусе, причем площадь, описываемая радиусом-вектором, изменяется по тому же закону, как и у параболы. Здесь $4a$ параметр, а ϑ угол, образованный линией апсид с прямой, соединяющей материальную точку с вершиной. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896.)

28. В точке наибольшего удаления от Солнца периодическая комета испытывает малое приращение скорости δv. Показать, что тогда наименьшее расстояние кометы от Солнца увеличивается на величину:

$$4\delta v \cdot \left\{ \frac{a^3(1-e)}{\mu(1+e)} \right\}^{\frac{1}{2}} .$$

29. Пусть POP' хорда, проходящая через фокус эллипса, представляющего траекторию вокруг Солнца. Показать, что время движения от точки P до точки P' через перигелий равно времени падения на Солнце с расстояния $2a$ до расстояния $a(1+\cos\alpha)$, где $\alpha - 2\pi - (u'-u)$, а $u'-u$ разность эксцентрических аномалий точек P и P'.

30. Материальная точка движется в плоскости под действием двух сил притяжения $\dfrac{\mu}{r^3 r'^2}$ и $\dfrac{\mu}{r^2 r'^3}$. Центры сил помещаются в двух неподвижных точках, расстояние между которыми $2d$. Показать, что если точка имеет начальную скорость, равную скорости, которую она приобрела бы, двигаясь из положения покоя в бесконечности до своего исходного положения, то возможной траекторией будет окружность, относительно которой центры сил являются инверсиями друг друга. Если радиус окружности a, то время обращения будет:

$$4\pi a^2 \mu^{\frac{-1}{2}} (a^2 \cdot d^2)^{\frac{1}{2}}.$$

31. Тяжелая точка брошена на внутреннюю часть поверхности гладкого шара. В момент прикосновения к шару она имеет горизонтальную скорость v и угловое расстояние от вертикального диаметра, равное α. Показать, что точка никогда не может опуститься ниже исходного круга широт, если

$$v^2 > ag \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha$$

и — подняться выше его, если

$$v^2 < ag \sin\alpha \operatorname{tg}\alpha.$$

32. Материальная точка горизонтально брошена на внутреннюю поверхность гладкого шара радиуса a. В момент прикосновения скорость точки равна V, а угловая высота над наинизшей точкой шара равна α. Показать, что высшее положение, которого может достичь точка на шаре, определяется угловой высотой β, причем β — меньшее из значений ψ и χ, определяемых уравнениями:

$$(3\cos\psi - 2\cos\alpha)ag - V^2 = 0,$$
$$(\cos\chi + \cos\alpha)V^2 - 2ag\sin^2\chi = 0.$$

33. Движение сферического маятника происходит между горизонтальными плоскостями, находящимися на расстояниях $\frac{3}{5}a$ и $\frac{4}{5}a$ от точки подвеса. Показать, что конец маятника по истечении времени t после прохождения наинизшей точки сферы будет находиться в горизонтальной плоскости, находящейся на расстоянии

$$\frac{1}{5}a\left\{4 - \operatorname{sn}^2 t\sqrt{\frac{13g}{14a}}\right\} \qquad \left(\operatorname{mod}\sqrt{\frac{7}{65}}\right)$$

под точкой подвеса, а горизонтальная координата, при начале координат в точке подвеса, определяется из уравнения:

$$\ddot{x} = \frac{gx}{a}\left\{-\frac{12}{7} + \frac{3}{5}\operatorname{sn}^2 t\sqrt{\frac{13g}{14a}}\right\},$$

представляющего частный вид уравнения Ляме.

34. Сферический маятник совершает малые колебания. Показать, что проекция конца маятника на горизонтальную плоскость описывает эллипс, ось которого вращается в направлении движения с угловой скоростью

$$\frac{3}{8}\vartheta_1\vartheta_0\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где ϑ_0 и ϑ_1 — углы наибольшего и наименьшего отклонений от вертикали, l — длина маятника и g — ускорение силы тяжести. (Resal.)

35. Материальная точка движется вынужденно по сферической поверхности; на нее действует сила притяжения, пропорциональная величине $r^{-2}(d^2 - r^2)^{-\frac{3}{2}}$ с центром в точке M на сфере. Здесь d означает диаметр сферы, а r — прямолинейное расстояние движущейся точки до точки M. Положение точки на сфере пусть определяется широтой ϑ и долготой φ, считая при этом M за полюс. Показать, что из уравнений движения будет следовать дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\sin^4\vartheta}\left(\frac{d\vartheta}{d\varphi}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2\vartheta} = a\operatorname{ctg}\vartheta + b,$$

где a и b — постоянные. Проинтегрировать это уравнение и показать, что траекторией служит коническое сечение на сфере.

36. Точка массы m движется по внутренней стороне поверхности кругового конуса с углом при вершине 2α. На точку действует сила $\dfrac{m\mu}{r^3}$, отталкивающая ее от оси. Момент количества движения точки относительно оси есть $m\sqrt{\mu}\operatorname{tg}\alpha$. Показать, что траектория есть ветвь гиперболы с эксцентриситетом $\cos^{-1}\alpha$. (Camb. Math. Tripos, часть 1. 1897.)

37. Точка движется по конусу под действием центральной силы с центром в вершине. Показать, что траектория будет плоским коническим сечением только в том случае, если сила имеет вид:

$$\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^3}.$$

38. Точка единичной массы движется по внутренней стороне поверхности параболоида вращения с параметром $4a$. На точку действует отталкивающая от оси сила μr, где r — расстояние до оси. Показать, что точка описывает параболу, если начальная скорость ее перпендикулярна оси и равна $2a\mu^{\frac{1}{2}}$.

39. Материальная точка движется по гладкой, винтовой поверхности $z = a\varphi$, под действием силы μr, отнесенной к единичной массе и направленной в каждой точке образующей внутрь. Здесь r означает расстояние до оси z. В точке, где касательная плоскость образует угол α с плоскостью xy, движущаяся точка получает начальную скорость $\mu^{\frac{1}{2}}a$, перпендикулярную к образующей. Показать, что проекция траектории на плоскость xy имеет уравнение:

$$\frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{\cos^2\alpha}\operatorname{ch}^2(\varphi\cos\alpha) - 1.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896.)

40. Показать, что задача движения по инерции материальной точки на линейчатой поверхности, образующие которой пересекают стрикционную линию под постоянным углом и для которой отношение длины общей нормали двух соседних образующих к величине угла между этими образующими постоянно, может быть решена в квадратурах. (Astor.)

41. Точка (x, y, z) с потенциальной энергией $ax^2 + by^2 + cz^2$ движется вынужденно по шару $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Определить ее движение. (*C. Neumann*, Journal für Math., т. 56, стр. 46, 1859.)

Глава V
Динамические характеристики твердого тела

§ 57. Определения. Прежде чем перейти к исследованию проблем динамики твердого тела, разрешимых в квадратурах, введем некоторые величины, присущие твердому телу и зависящие от распределения в нем масс. Эти величины определяют динамическое состояние тела. С точки зрения динамики твердое тело состоит из материальных точек. Представлением материальной точки является точка, обладающая массой m и имеющая в некоторой неподвижной прямоугольной системе координаты x, y, z.

Величина

$$\sum m(y^2 + z^2),$$

где суммирование распространено на все материальные точки системы, называется *моментом инерции* тела относительно оси[1]. Соответственно определяется и момент инерции относительно любой оси, как сумма произведений масс всех точек на квадраты их расстояний от осей. В случае непрерывного распределения масс тела в пространстве знак суммы, очевидно, заменится знаком интеграла. Так, сумма $\sum m(y^2 + z^2)$ перейдет в интеграл $\iiint (y^2 + z^2)\rho\, dx\, dy\, dz$, где ρ означает *плотность* (массу единицы объема) тела в точке (x, y, z).

Величина

$$\sum mxy$$

называется *центробежным моментом* инерции или *моментом девиации* тела относительно осей Ox, Oy; соответственно $\sum myz$ и $\sum mzx$ суть моменты девиации относительно других пар осей. Для моментов инерции и девиации пользуются обычно обозначениями:

$$A = \sum m(y^2 + z^2), \quad B = \sum m(z^2 + x^2), \quad C = \sum m(x^2 + y^2),$$
$$F = \sum myz, \quad G = \sum mzx, \quad H = \sum mxy.$$

Два тела, имеющие равные моменты инерции относительно всех прямых пространства, называются *эквимоментными*. Ниже будет выяснено, что это одновременно влечет за собой совпадение моментов девиации тел относительно всех пар взаимно перпендикулярных осей.

[1]Моменты инерции впервые ввел Гюйгенс в своих исследованиях маятника.

Если M — масса тела, а k — величина такая, что Mk^2 есть момент инерции относительно данной прямой, то k называется ***радиусом инерции*** тела относительно этой прямой.

Момент инерции плоского тела относительно перпендикулярной к плоскости тела прямой часто именуют моментом инерции относительно точки пересечения прямой и плоскости.

§ 58. Моменты инерции простейших тел[1]. 1. *Прямоугольник.* Определим момент инерции однородной, прямоугольной пластинки со сторонами $2a$ и $2b$ относительно прямой, параллельной стороне $2a$ и проходящей через центр тяжести пластинки. Назовем эту прямую осью x, перпендикуляр к ней в O — осью y; тогда искомый момент инерции будет:

$$\sum my^2 \quad \text{или} \quad \int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-a}^{a} \sigma y^2\,dx\,dy,$$

где σ означает ***поверхностную плотность***, т. е. массу пластинки, отнесенную к единице поверхности. Выполнение интеграции дает для момента инерции значение

$$\frac{4}{3}\sigma ab^3 \text{ или масса прямоугольника} \times \frac{1}{3}b^2.$$

Из этого результата можно получить момент инерции однородного стержня, относительно прямой, перпендикулярной к стержню проходящей через его центр тяжести. При этом стержень рассматривается как прямоугольник, а стороны сечения стержня считаются очень малыми. Поэтому момент инерции будет:

$$\text{масса стержня} \times \frac{1}{3}b^2,$$

где $2b$ — длина стержня.

2. *Параллелепипед.* Пусть однородный прямоугольный параллелепипед имеет стороны $2a, 2b, 2c$. Требуется определить его момент инерции относительно оси Ox, проходящий через центр тяжести и параллельной стороне $2a$. Имеем:

$$\sum m(y^2+z^2) \quad \text{или} \quad \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\int\limits_{-c}^{c} \rho(y^2+z^2)\,dz\,dy\,dx,$$

где ρ означает плотность.

Выполнение интеграции дает:

$$\frac{8\rho\,abc}{3}(b^2+c^2) \text{ или масса параллелепипеда} \times \frac{1}{3}(b^2+c^2).$$

[1] Для практических целей моменты инерции тела определяются экспериментально; подходящие для этого приспособления описывают Берримен (*W. H. Derriman*, Phil. Mag., т. 5, стр. 648, 1903) и Кэсси (*W. R. Cassie*, Phys. Soc. Proc., т. 21, стр. 497, 1909).

3. *Эллипс и круг.* Определим момент инерции относительно оси x однородной пластинки, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Он равен:

$$\int_{-a}^{a} \int_{-\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{\frac{b}{a}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} \sigma y^2 \, dy \, dx,$$

где σ поверхностная плотность. Выполнение интеграции дает:

$$\frac{1}{4}\pi a b^3 \sigma \quad \text{или масса эллипса} \times \frac{1}{4} b^2.$$

Отсюда момент инерции круга радиуса b относительно диаметра будет:

$$\text{масса круга} \times \frac{1}{4} b^2.$$

4. *Эллипсоид и шар.* Аналогично для однородного эллипсоида с плотностью ρ, заданного уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

момент инерции относительно оси x будет:

$$\iiint \rho(y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

где интегрирование распространяется на объем эллипсоида.

Для вычисления этого интеграла положим:

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta,$$

где ξ, η, ζ — новые переменные; получим:

$$\rho \, a b^3 c \iiint \eta^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta + \rho \, a b c^3 \iiint \zeta^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

где интеграция распространена уже на объем шара

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

Так как, очевидно, интегралы

$$\iiint \xi^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \iiint \eta^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \quad \iiint \zeta^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

равны, то искомый момент инерции можно записать в форме:

$$\rho\, abc(b^2 + c^2) \iiint \xi^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

или

$$\pi\rho\, abc(b^2 + c^2) \int\limits_{-1}^{+1} \xi^2 (1 - \xi^2)\, d\xi$$

или

$$\frac{4}{15}\pi\rho\, abc(b^2 + c^2)$$

или, наконец,

$$\text{масса эллипсоида} \times \frac{1}{5}(b^2 + c^2).$$

Отсюда имеем момент инерции однородного шара относительно диаметра:

$$\text{масса шара} \times \frac{2}{5}a^2.$$

5. *Треугольник.* Пусть теперь требуется определить момент инерции однородной треугольной пластинки, с поверхностной плотностью σ, относительно произвольной прямой, находящейся в плоскости треугольника. Пусть положение прямой определяется длинами перпендикуляров α, β, γ, опущенных на нее из вершин треугольника. Если x, y, z — координаты центра тяжести элемента пластинки, то расстояние его до данной прямой есть $\alpha x + \beta y + \gamma z$. Поэтому искомый момент инерции будет:

$$\sigma \iint (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2\, dS,$$

где dS означает элемент площади пластинки. Если теперь Y длина перпендикуляра из точки (x, y, z) на сторону треугольника c, X отрезок стороны c между основанием этого перпендикуляра и вершиной A, то имеем:

$$Y = zb \sin A$$

и

$$X \sin A - Y \cos A = \text{перпендикуляру из } (x,\, y,\, z) \text{ на сторону } b = yc \sin A.$$

Поэтому

$$dy\,dz = \frac{\partial(y,\,z)}{\partial(X,\,Y)}\,dX\,dY = \frac{1}{bc\sin A}\,dX\,dY = \frac{1}{2\Delta}\,dS,$$

где Δ означает площадь треугольника. Следовательно, интеграл $\iint y^2\,dS$, который распространен на площадь треугольника, можно записать в виде:

$$2\Delta\iint y^2\,dy\,dz,$$

причем новый интеграл распространяется на все положительные значения y и z, сумма которых меньше единицы. Он будет равен:

$$2\Delta\int\limits_0^1 y^2(1-y)\,dy$$

или $\dfrac{1}{6}\Delta$. На основании симметрии заключаем, что интегралы $\iint x^2\,dS$ и $\iint z^2\,dS$ имеют одинаковые значения, а аналогичные вычисления дают для интегралов

$$\iint yz\,dS, \quad \iint zx\,dS, \quad \iint xy\,dS$$

одно и то же значение $\dfrac{1}{12}\Delta$. Если внесем эти значения в интеграл $\sigma\iint(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2\,dS$, то для момента инерции треугольника, относительно заданной прямой, получим выражение:

$$\frac{1}{6}\,\sigma\Delta(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)$$

или окончательно:

$$\frac{1}{3}\times\text{масса треугольника}\times\left\{\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\right\}.$$

Эта формула, очевидно, выражает также момент инерции относительно данной прямой трех точек, помещенных в серединах сторон треугольника и имеющих массы, равные трети массы треугольника. Таким образом, треугольник и система таких трех точек эквимоментны.

Задача 1. Показать, что однородный тетраэдр массы M имеет момент инерции такой же, как система пяти точек, из которых четыре имеют массу по $\dfrac{1}{20}M$ и находятся в вершинах тетраэдра, а пятая, с массой $\dfrac{4}{5}M$, лежит в его центре тяжести.

§ 59. Определение момента инерции относительно произвольной оси по моменту инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести параллельно первой. Моменты инерции, которые определялись в предыдущем параграфе, относились по большей части к прямым, занимающим некоторые исключительные положения в теле. Однако с помощью этих результатов можно определять моменты инерции тела и относительно других прямых. Для этого воспользуемся следующей теоремой:

Пусть $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ — полином второй степени (не обязательно однородный) относительно координат, компонентов скорости и компонентов ускорения точки массы m. Пусть также x, y, z координаты центра тяжести тела, представляющего совокупность таких точек. Положим

$$x = \overline{x} + x_1, \quad y = \overline{y} + y_1, \quad z = \overline{z} + z_1.$$

Если внесем теперь эти значения в функцию f, то будем иметь:

1. Члены, не содержащие x_1, y_1, z_1; очевидно, они все находятся в выражении:

$$f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dot{\overline{x}}, \dot{\overline{y}}, \dot{\overline{z}}, \ddot{\overline{x}}, \ddot{\overline{y}}, \ddot{\overline{z}}).$$

2. Члены, не содержащие $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$, находящиеся все в выражении:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1).$$

3. Члены, линейные относительно $x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1$. Если составить выражение $\sum mf(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$, то эти члены исчезают вследствие соотношений:

$$\sum mx_1 = 0, \quad \sum my_1 = 0, \quad \sum mz_1 = 0.$$

Поэтому получаем равенство:

$$\sum mf(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) =$$
$$= \sum mf(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1) +$$
$$+ f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \dot{\overline{x}}, \dot{\overline{y}}, \dot{\overline{z}}, \ddot{\overline{x}}, \ddot{\overline{y}}, \ddot{\overline{z}}) \sum m.$$

Следовательно, значение выражения $\sum mf$ относительно произвольной системы координат равно его значению относительно осей, параллельных прежним и проходящих через центр тяжести тела, сложенному с произведением массы тела на значение функции f в центре тяжести, координаты которого взяты в первоначальной системе. Отсюда тотчас следует, *что моменты инерции и моменты девиации тела относительно произвольных осей равны соответственным моментам инерции и* *девиации относительно осей, параллельных первым и проходящих через центр, тяжести тела, сложенным с соответствующими моментами инерции и девиации всей массы тела, сконцентрированной в центре тяжести относительно первоначальных осей.*

В виде примера допустим, что надо вычислить момент инерции прямого, однородного стержня массы M и длины l относительно прямой, перпендикулярной к стержню и проходящей через один из его концов. Из предыдущего параграфа следует, что момент инерции относительно параллельной оси, проходящей через середину стержня, равен $\frac{1}{3}M\left(\frac{l}{2}\right)^2$. Поэтому, по предыдущей теореме следует, что искомый момент инерции равен:

$$M\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}Ml^2.$$

§ 60. Связь между моментами инерции относительно различных систем координат с общим началом. В предыдущем параграфе мы установили соотношение между моментами инерции относительно параллельных систем осей. Покажем теперь, что можно найти моменты инерции тела относительно любых прямоугольных осей, если они известны относительно прямоугольных осей, имеющих то же начало.

Пусть A, B, C, F, G, H — моменты инерции и девиации относительно системы $Oxyz$, которая имеет общее начало с системой $Ox'y'z'$. Направляющие косинусы обеих систем пусть заданы таблицей

	x'	y'	z'
x	l_1	l_2	l_3
y	m_1	m_2	m_3
z	n_1	n_2	n_3

Если через A', B', C', F', G', H' обозначим моменты инерции и девиации относительно осей $Ox'y'z'$, то будем иметь:

$$A' = \sum m({y'}^2 + {z'}^2),$$

где суммирование распространено на все точки системы, или

$$\begin{aligned}
A' &= \sum m\{(l_2x + m_2y + n_2z)^2 + (l_3x + m_3y + n_3z)^2\} = \\
&= \sum m\{x^2(l_2^2 + l_3^2) + y^2(m_2^2 + m_3^2) + z^2(n_2^2 + n_3^2) + \\
&+ 2yz(m_2n_2 + m_3n_3) + 2zx(n_2l_2 + n_3l_3) + 2xy(l_2m_2 + l_3m_3)\} = \\
&= \sum m\{x^2(m_1^2 + n_1^2) + y^2(n_1^2 + l_1^2) + \\
&+ z^2(l_1^2 + m_1^2) - 2m_1n_1yz - 2n_1l_1zx - 2l_1m_1xy\} = \\
&= \sum m\{l_1^2(y^2 + z^2) + m_1^2(z^2 + x^2) + \\
&+ n_1^2(x^2 + y^2) - 2m_1n_1yz - 2n_1l_1zx - 2l_1m_1xy\} = \\
&= Al_1^2 + Bm_1^2 + Cn_1^2 - 2Fm_1n_1 - 2Gn_1l_1 - 2Hl_1m_1
\end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned}
B' &= Al_2^2 + Bm_2^2 + Cn_2^2 - 2Fm_2n_2 - 2Gn_2l_2 - 2Hl_2m_2, \\
C' &= Al_3^2 + Bm_3^2 + Cn_3^2 - 2Fm_3n_3 - 2Gn_3l_3 - 2Hl_3m_3.
\end{aligned}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}
F &= \sum my'z' = \sum m(l_2x + m_2y + n_2z)(l_3x + m_3y + n_3z) = \\
&= l_2l_3\sum mx^2 + m_2m_3\sum my^2 + n_2n_3\sum mz^2 + (m_2n_3 + m_3n_2)\sum myz + \\
&+ (n_2l_3 + n_3l_2)\sum mzx + (l_2m_3 + l_3m_2)\sum mxy = \\
&= \frac{1}{2}l_2l_3(B + C - A) + \frac{1}{2}m_2m_3(C + A - B) + \frac{1}{2}n_2n_3(A + B - C) + \\
&+ (m_2n_3 + m_3n_2)F + (n_2l_3 + n_3l_2)G + (l_2m_3 + l_3m_2)H
\end{aligned}$$

или

$$\begin{gathered}
-F' = Al_2l_3 + Bm_2m_3 + Cn_2n_3 - \\
-F(m_2n_3 + m_3n_2) - G(l_3n_2 + l_2n_3) - H(l_2m_3 + l_3m_2)
\end{gathered}$$

и, соответственно,

$$\begin{gathered}
-G' = Al_3l_1 + Bm_3m_1 + Cn_3n_1 - \\
-F(m_3n_1 + m_1n_3) - G(l_1n_3 + l_3n_1) - H(l_3m_1 + l_1m_3), \\
-H' = Al_1l_2 + Bm_1m_2 + Cn_1n_2 - \\
-F(m_1n_2 + m_2n_1) - G(l_2n_1 + l_1n_2) - H(l_1m_2 + l_2m_1).
\end{gathered}$$

Таким образом, величины A', B', C', F', G', H' определены. Этот результат, вместе с выводами предыдущего параграфа, позволяет определять моменты инерции и девиации заданного тела относительно произвольной прямоугольной системы осей, если эти моменты известны относительно некоторой другой прямоугольной системы.

Задача 1. Пусть начало координат находится в центре тяжести материальной системы. Доказать, что моменты инерции и девиации относительно трех взаимно перпендикулярных, пересекающихся прямых с координатами

$$(l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1),\ (l_2, m_2, n_2, \lambda_2, \mu_2, \nu_2),\ (l_3, m_3, n_3, \lambda_3, \mu_3, \nu_3)$$

имеют вид:

$$A' + M(\lambda_1^2 - \mu_1^2 + \nu_1^2) \text{ и т. д. и } F' - M(\lambda_2\lambda_3 - \mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3) \text{ и т. д.},$$

где A', B', C', F', G', H' имеют те же значения, что и выше, а M есть масса тела.

§ 61. Главные оси инерции; эллипсоид инерции Коши. Рассмотрим поверхность второго порядка

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Fyz - 2Gzx - 2Hxy = 1,$$

где A, B, C, F, G, H моменты инерции и девиации в системе осей $Oxyz$.

Из равенства

$$A' = Al_1^2 + Bm_1^2 + Cn_1^2 - 2Fm_1n_1 - 2Gn_1l_1 - 2Hl_1m_1$$

следует тогда, что величина, обратная квадрату любого радиуса-вектора поверхности, равна моменту инерции тела относительно этого радиуса-вектора. Поэтому эта поверхность второго порядка будет инвариантна по отношению к выбору системы координат с общим началом. Следовательно, в системе прямоугольных осей $Ox'y'z'$ с тем же началом уравнение ее будет:

$$A'x'^2 - B'y'^2 + C'z'^2 - 2F'y'z' - 2G'z'x' - 2H'x'y' = 1,$$

где A', B', C', F', G', H', моменты инерции и девиации в этой системе осей. Эта поверхность второго порядка называется *эллипсоидом инерции* тела относительно точки O, а ее главные оси — *главными осями инерции* тела для точки O. Уравнение поверхности, отнесенное к этим осям, не будет содержать членов с произведениями координат; следовательно, моменты девиации относительно этих осей исчезают. Моменты же инерции для этих осей называются *главными моментами* инерции тела относительно точки O[1].

Поверхность, получающаяся отображением эллипсоида инерции относительно его центра по методу обратных поляр, есть тоже эллипсоид, который иногда называют гирационным эллипсоидом.

[1]Главные оси инерции открыли Эйлер (Mem. de Berlin 1758) и Сегнер (*I. A. Segner*, Specimen Theoriae Turbinum, 1755). Эллипсоид инерции был введен в 1827 г. Коши (Exerc. de math., т. 2, стр. 93).

Задача 1. Высота однородного прямого кругового конуса равна половине радиуса основания. Показать, что его эллипсоид инерции относительно вершины есть шар.

§ 62. Вычисление момента количества движений движущегося твердого тела. Определим теперь момент количества движения движущегося твердого тела относительно произвольной прямой и для произвольного момента времени.

Пусть M — масса тела, центр тяжести которого G имеет координаты $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ и компоненты скорости в момент времени $t-(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w})$ в некоторой (покоящейся или движущейся) прямоугольной системе $Oxyz$, начало O которой неподвижно. Пусть, далее, ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты угловой скорости тела относительно точки G по осям координат $Gx_1y_1z_1$, параллельным $Oxyz$ и проходящим через G, а m — материальная точка тела, имеющая в момент времени t координаты x, y, z и компоненты скорости u, v, w.

Положим:

$$x = \overline{x} + x_1, \quad y = \overline{y} + y_1, \quad z = \overline{z} + z_1,$$
$$u = \overline{u} + u_1, \quad v = \overline{v} + v_1, \quad w = \overline{w} + w_1.$$

По определению центра тяжести, имеем равенства:

$$\sum mx_1 = 0, \quad \sum my_1 = 0, \quad \sum mz_1 = 0.$$

Так как, кроме того (§ 17),

$$u_1 = z_1\omega_2 - y_1\omega_3, \quad v_1 = x_1\omega_3 - z_1\omega_1, \quad w_1 = y_1\omega_1 - x_1\omega_2,$$

то

$$\sum mu_1 = 0, \quad \sum mv_1 = 0, \quad \sum mw_1 = 0.$$

Если теперь обозначим через h_3 момент количества движения тела относительно оси Oz, то получим:

$$\begin{aligned}
h_3 = \sum m(xv - yu) &= \sum m\{(\overline{x} + x_1)(\overline{v} + v_1) - (\overline{y} + y_1)(\overline{u} + u_1)\} = \\
&= \sum m(\overline{xv} - \overline{yu}) + \sum m(x_1v_1 - y_1u_1) = \\
&= M(\overline{xv} - \overline{yu}) + \sum m(x_1^2\omega_3 - x_1z_1\omega_1 - y_1z_1\omega_2 + y_1^2\omega_3) = \\
&= M(\overline{xv} - \overline{yu}) - G\omega_1 - F\omega_2 + C\omega_3,
\end{aligned}$$

где A, B, C, F, G, H означают моменты инерции и девиации тела относительно осей $Gx_1y_1z_1$. Аналогично имеем для моментов количества движения относительно осей Ox и Oy:

$$h_1 = M(\overline{yw} - \overline{zv}) + A\omega_1 - H\omega_2 - G\omega_3,$$
$$h_2 = M(\overline{zu} - \overline{xw}) - H\omega_1 + B\omega_2 - F\omega_3.$$

Отсюда по § 39 можно найти момент количества движения относительно любой прямой, проходящей через начало.

Добавление. Если тело вынуждено вращаться вокруг одной из своих неподвижных точек, которая закреплена в пространстве, то центр тяжести можно не вводить. Пусть, в самом деле, $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты угловой скорости тела относительно неподвижной точки по осям произвольной (покоящейся или движущейся) прямоугольной системы координат, проходящих через эту точку, а A, B, C, F, G, H — моменты инерции и девиации относительно этих осей. Компоненты скорости u, v, w материальной точки m с координатами x, y, z будут (§ 17):

$$u = z\omega_2 - y\omega_3, \quad v = x\omega_3 - z\omega_1, \quad w = y\omega_1 - x\omega_2.$$

Момент количества движения относительно оси z, т. е. $\sum m(xv - yu)$ можно теперь записать в виде:

$$\sum m(x^2\omega_3 - xz\omega_1 - yz\omega_2 + y^2\omega_3)$$

или

$$-G\omega_1 - F\omega_2 + C\omega_3.$$

Аналогично для осей x и y:

$$A\omega_1 - H\omega_2 + G\omega_3$$

и

$$-H\omega_1 - B\omega_2 - F\omega_3.$$

§ 63. Вычисление кинетической энергии движущегося твердого тела. Кинетическую энергию движущегося твердого тела можно вычислить таким же способом, как и момент количества движения. Если мы обратимся к общей теореме § 59 для случая, когда полином $f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ имеет вид: $\dot{x}^2 - \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, то получим непосредственно результат: *кинетическая энергия движущегося твердого тела массы M равна сумме кинетической энергии точки массы M, находящейся в центре тяжести тела, и кинетической энергии движения тела относительно центра тяжести.* Для определения кинетической энергии тела относительно центра тяжести G, выберем прямоугольные (покоящиеся или неподвижные) оси с началом в центре тяжести. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты угловой скорости тела относительно G по этим осям, а x, y, z — координаты материальной точки m тела. Компоненты скорости точки по этим осям в движении относительно центра тяжести будут (§ 17):

$$z\omega_2 - y\omega_3, \quad x\omega_3 - z\omega_1, \quad y\omega_1 - x\omega_2.$$

Поэтому кинетическая энергия движения относительно центра тяжести есть

$$\frac{1}{2}\sum m\{(z\omega_2 - y\omega_3)^2 + (x\omega_3 - z\omega_1)^2 + (y\omega_1 - x\omega_2)^2\}$$

или
$$\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2F\omega_2\omega_3 - 2G\omega_3\omega_1 - 2H\omega_1\omega_2),$$

где A, B, C, F, G, H — моменты инерции и девиации относительно координатных осей. Это выражение можно с помощью § 60 представить в виде полупроизведения квадрата результирующей угловой скорости тела в движении относительно центра тяжести на момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

Добавление. Если одна точка твердого тела неподвижна, то можно не вводить центра тяжести. В самом деле, пусть ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты угловой скорости тела относительно неподвижной точки O по произвольным (неподвижным или движущимся) осям $Oxyz$, проходящим через O, x, y, z — координаты точки m тела относительно этих осей. Компоненты скорости этой точки суть (§ 17):

$$z\omega_2 - y\omega_3, \quad x\omega_3 - z\omega_1, \quad y\omega_1 - x\omega_2.$$

Аналогично получаем выражение для кинетической энергии:

$$\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2F\omega_2\omega_3 - 2G\omega_3\omega_1 - 2H\omega_1\omega_2),$$

Отсюда следует: если одна из координатных осей, например ось x, есть мгновенная ось вращения, то кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}A\omega_1^2$. Так как направление осей координат можно выбрать произвольно, то кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг своей закрепленной точки, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I — момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения, а ω — угловая скорость его относительно этой оси.

Задача 1. Плоская пластинка свободно вращается вокруг горизонтальной оси, лежащей в ее плоскости, а эта ось, в свою очередь, вращается вокруг пересекающей ее вертикали. Показать, что если φ означает азимут горизонтальной оси, а ψ — угол наклона пластинки относительно вертикали, то кинетическая энергия равна:

$$\frac{1}{2}A(\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\psi) + \frac{1}{2}B\dot{\varphi}^2 + H\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\psi,$$

где A, B, H — моменты инерции и девиации пластинки относительно горизонтальной оси и перпендикуляра к ней в точке ее пересечения с вертикалью.

§ 64. Независимость движения центра тяжести от движения тела, относительно него. По предыдущему параграфу кинетическую энергию движущегося тела можно подразделить на две части, из которых одна зависит от движения центра тяжести, а другая представляет кинетическую энергию в движении относительно центра тяжести. Докажем теперь, что обе части движения тела можно рассматривать независимо друг от друга[1].

[1] *Euler* Scientia Navalis, т. 1, § 128, 1749.

Пусть твердое тело массы M движется под действием произвольных сил. Положение тела пусть определяется тремя координатами центра тяжести x, y, z по отношению к неподвижным в пространстве осям, и тремя углами Эйлера ϑ, φ, ψ, определяющими положение произвольной прямоугольной системы осей, связанных с телом, относительно неподвижной системы, имеющей то же начало. Кинетическая энергия тогда выразится так:

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + f(\vartheta, \varphi, \psi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}),$$

где $f(\vartheta, \varphi, \psi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$ есть кинетическая энергия движения тела относительно центра тяжести G.

Пусть

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z + \Theta\,\delta\vartheta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi$$

есть работа приложенных к телу внешних сил на произвольном перемещении тела.

Уравнениями движения Лагранжа будут:

$$M\ddot{x} = X, \quad M\ddot{y} = Y, \quad M\ddot{z} = Z,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial f}{\partial\vartheta} = \Theta,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial f}{\partial\varphi} = \Phi,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial f}{\partial\psi} = \Psi.$$

Три первых уравнения показывают, что *центр тяжести тела движется так, как будто в нем сконцентрирована вся масса тела, а силы, действующие на него, равны внешним силам, действующим на тело, и одинаково с ними направлены.* Это можно заключить из того, что работа этих сил на произвольном перемещении в случае, если вся масса сосредоточена в центре тяжести, равна $X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$.

Из трех остальных уравнений следует, что тело движется вокруг центра тяжести так, как будто центр тяжести удерживается неподвижно и на тело действует та же система сил. Это потому, что при движении тела относительно центра тяжести его кинетическая энергия есть $f(\vartheta, \varphi, \psi, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$ и работа сил на произвольном перемещении равна $\Theta\,\delta\vartheta + \Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi$.

Очевидно, этот результат справедлив и для импульсивных движений.

Добавление. Плоское твердое тело (например пластинка любой формы) движется в своей плоскости. Пусть x, y — координаты его центра тяжести; M

масса; ϑ — угол, образованный прямой, неизменно связанной с телом, с прямой, закрепленной в плоскости, Mk^2 — момент инерции тела относительно центра тяжести; X, Y — суммы компонентов по осям координат всех действующих на тело внешних сил и, наконец, L — момент внешних сил относительно центра тяжести. Тогда кинетическая энергия будет равна:

$$\frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - k^2\dot{\vartheta}^2),$$

а работа внешних сил при перемещении $(\delta x, \delta y, \delta\vartheta)$:

$$X\delta x + Y\delta y + L\delta\vartheta.$$

Поэтому уравнения движения имеют вид:

$$M\ddot{x} = X, \quad M\ddot{y} = Y, \quad Mk^2\ddot{\vartheta} = L.$$

Задача 1. Представить одно из уравнений движения плоского твердого тела в виде:

$$M(pf + k^2\ddot{\vartheta}) = L,$$

где M — масса тела; f — ускорение центра тяжести; p — перпендикуляр на вектор ускорения из начала координат; Mk^2 — момент инерции относительно начала; ϑ — угол между неподвижной в теле прямой и прямой, закрепленной в плоскости, а L — момент внешних сил относительно начала координат.

Упражнения.

1. Однородный прямой круговой конус имеет массу M, угол при вершине β и образующую l. Показать, что момент инерции относительно оси конуса равен:

$$\frac{3}{10}Ml^2\sin^2\beta,$$

относительно прямой, проходящей через вершину перпендикулярно оси:

$$\frac{3}{5}Ml^2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\beta\right)$$

и относительно образующей:

$$\frac{3}{4}Ml^2\sin^2\beta\left(\cos^2\beta + \frac{1}{5}\right).$$

2. Показать, что момент инерции части плоскости, ограниченной обеими петлями лемнискаты

$$r^2 = a^2\cos 2\vartheta$$

относительно оси кривой, равен:

$$\frac{(3\pi - 8)a^2}{48} \times \text{масса заданной части плоскости.}$$

3. В плоскости находятся несколько точек. Их массы $m_1, m_2, \ldots$, взаимные расстояния $d_{12}, \ldots$, и относительные скорости $v_{12}, \ldots$ Доказать, что

$$\frac{\left(\sum m_1 m_2 d_{12}^2\right)}{\sum m}, \quad \frac{\left(\sum m_1 m_2 h_{12}^2\right)}{\sum m}, \quad \frac{\left(\sum m_1 m_2 v_{12}^2\right)}{2\sum m}$$

выражают соответственно момент инерции относительно центра тяжести, момент количества движения относительно центра тяжести и кинетическую энергию относительно центра тяжести.

4. Доказать, что момент инерции полого куба относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к одной из граней, равен

$$\frac{10}{9} M a^2,$$

где M — масса куба, а $2a$ — длина ребра. При этом стенки куба предполагаются очень тонкими.

5. Показать, что поверхность тора относительно своей оси имеет момент инерции

$$2\pi\rho^2 a^2 c\left(c^2 + \frac{3}{4}a^2\right),$$

где a — радиус образующего круга, c — расстояние его центра от оси тора и ρ — плотность.

6. Показать, относительно какой из своих точек и при каких условиях заданная прямая есть главная ось инерции тела; если эти условия выполнены, то определить обе другие, проходящие через эту точку, главные оси инерции.

Однородная квадратная пластинка ограничена осью x, осью y и прямыми $x = 2c$, $y = 2c$. Прямая $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 2$ отсекает от нее некоторый угол. Показать, что обе главные оси инерции полученной площади относительно центра квадрата, лежащие в плоскости, наклонены к оси x под углом ϑ, который определяется уравнением:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{ab - 2c(a+b) - 3c^2}{(a-b)(a+b-2c)}.$$

7. Показать, что огибающая тех прямых плоскости некоторой пластинки, относительно которых эта пластинка имеет постоянный момент инерции, есть семейство софокусных эллипсов и гипербол. Определить отсюда направление главных осей инерции в произвольной точке.

8. Определить главные моменты инерции для вершины пластинки, ограниченной параболой с параметром $4a$ и прямой, перпендикулярной оси параболы и отстоящей на расстоянии h от вершины. Доказать, что если $15h > 28a$, то две главные оси инерции в точке параболы с абсциссой $-a + \left(a^2 - \frac{4ah}{5} + \frac{3h^2}{7}\right)^{\frac{1}{2}}$ совпадают с касательной и нормалью.

9. Исследовать расположение главных осей инерции для плоского тела. Дать условия того, что материальные точки m_i с координатами x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ эквимоментны заданной пластинке. Показать, что из этих условий можно исключить шесть величин: m_1, m_2, x_1, x_2, y_1, y_2. Если система трех точек эквимоментна пластинке, то площадь треугольника, который они образуют, равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, умноженному на произведение главных радиусов инерции в центре тяжести.

10. Однородная часть плоскости, ограниченная эллипсом $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, имеет эллиптическое отверстие (с полуосями c, d), большая ось которого совпадает с прямой $x = y$, а центр отстоит от начала координат на величину r. Показать, что

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{8abxy - cd\left[4(x\sqrt{2} - r)(y\sqrt{2} - r) - (c^2 - d^2)\right]}{ab\left[4(x^2 - y^2) + a^2 - b^2\right] - cd\left[2(x\sqrt{2} - r)^2 - 2(y\sqrt{2} - r)^2\right]},$$

если ϑ — угол одной из главных осей инерции в точке (x, y) с осью x.

11. Система тел или материальных точек произвольным образом движется или деформируется. Показать, что сумма произведений масс отдельных точек на квадраты соответствующих перемещений равна произведению всей массы системы на квадрат проекции (на любое направление) перемещения центра тяжести, сложенному с суммой произведений масс точек на квадраты расстояний, на которые нужно переместиться точкам для достижения конечных положений, после того как им сообщили одинаковые перемещения, равные по величине и направлению проекции перемещения центра тяжести. (Fouret.)

12. Главные моменты инерции тела относительно его центра тяжести суть A, B, C. К телу добавлена малая масса, имеющая относительно тех же осей главные моменты инерции A', B', C'. Доказать, что суммарное тело, относительно новых главных осей инерции для нового центра тяжести, имеет главные моменты инерции

$$A + A', \quad B + B', \quad C + C',$$

если пренебречь бесконечно малыми порядка выше первого. (Hoppe.)

13. Доказать, что в произвольной точке заданной материальной системы главные оси инерции совпадают с нормалями трех поверхностей второго порядка, проходящих через эту точку и принадлежащих некоторой определенной софокусной системе.

Пусть l, m, n, λ, μ, ν представляют собой шесть координат какой-нибудь главной оси, и декартова система координат совпадает с главными осями инерции в центре тяжести. Показать, что

$$Al\lambda + Bm\mu + Cn\nu = 0$$

и что, следовательно, главные оси инерции некоторой заданной системы образуют квадратичный комплекс.

14. Параллелограмм образован двумя парами стержней длины $2a$ и $2b$ и с массами m и m', связанными в концах идеальными шарнирами. В вершины параллелограмма помещены четыре массы, из которых каждая равна M. Выразить момент количества движения системы относительно начала координат как функции координат x и y центра тяжести и углов ϑ и φ, образованных сторонами параллелограмма с осью x.

Глава VI
Разрешимые задачи динамики твердого тела

§ 65. Движение системы с одной степенью свободы; вращение вокруг оси и т. д. Мы применим сейчас принципы, изложенные в предшествующих главах, к определению движения голономных систем твердых тел для тех случаев, когда решение может быть получено в квадратурах.

Естественно мы исследуем сначала системы с одной степенью свободы. Согласно § 42 такого рода системы допускают решение в квадратурах, если они обладают интегралом энергии. Случается иногда (например, в системах, в которых одна из кривых или поверхностей связей находится в некотором вынужденном движении), что задача, не обладая начальной своей постановке интегралом энергии, однако может быть приведена (при помощи, например, теоремы § 29) к другой задаче, для которой интеграл энергии имеется. После выполнения такого приведения может быть выполнена и интеграция. Разъясним это на следующих примерах.

1. *Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.* Рассмотрим вращение одного-единственного твердого тела вокруг некоторой неподвижной в пространстве оси. Пусть I момент инерции тела относительно оси вращения. Тогда кинетическая энергия равна $\frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2$, где ϑ угол между двумя плоскостями, проходящими через ось вращения, из которых одна неподвижна в пространстве, а другая неизменно связана с твердым телом и движется вместе с ним. Пусть Θ означает момент внешних сил, приложенных к телу, относительно оси вращения, так что работа этих сил при бесконечно малом перемещении, соответствующем переходу от ϑ к $\vartheta + \delta\vartheta$ равна $\Theta\delta\vartheta$. Уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\vartheta} = \Theta$$

дает тогда:

$$I\ddot{\vartheta} = \Theta$$

одно дифференциальное уравнение второго порядка для определения ϑ.

Если силы консервативны и если $V(\vartheta)$ означает потенциальную энергию, то это уравнение принимает вид:

$$I\ddot{\vartheta} = \frac{\partial V}{\partial\vartheta},$$

и его интеграция даст уравнение энергии:

$$\frac{1}{2}I\dot{\vartheta}^2 + V(\vartheta) = c,$$

где c — некоторая постоянная. Вторичное интегрирование дает:

$$t = I^{\frac{1}{2}} \int \{2(c - V)\}^{-\frac{1}{2}}\, d\vartheta + \text{const}.$$

Этим соотношением между ϑ и t, в которой обе постоянные интегрирования вычисляются из начальных условий движения, и определяется движение тела.

Особую важность представляет тот случай, когда ось вращения горизонтальна и единственной действующей силой является сила тяжести. Пусть G будет центром тяжести тела, C — основанием перпендикуляра, опущенного из G на ось вращения, и $CG = h$. Потенциальная энергия есть $-Mgh\cos\vartheta$, где M — масса тела и ϑ — угол между CG и направленной вниз вертикалью. Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{Mgh}{I}\sin\vartheta = 0.$$

Оно совпадает с уравнением движения математического маятника длины $\dfrac{I}{Mh}$. Поэтому, так же как и в § 44, движение может быть представлено в эллиптических функциях. Решение имеет вид:

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = k\,\mathrm{sn}\left\{\left(\frac{Mgh}{I}\right)^{\frac{1}{2}}(t - t_0),\, k\right\}$$

для случая колебаний и

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \mathrm{sn}\left\{\frac{1}{k}\left(\frac{Mgh}{I}\right)^{\frac{1}{2}}(t - t_0),\, k\right\}$$

для случая кругового движения. Длина $\dfrac{I}{Mh}$ эквивалентного математического маятника называется приведенной длиной маятника.

Если O есть такая точка прямой CG, что $OC = \dfrac{I}{Mh}$, то O называется центром качаний, а C — точкой подвеса. Получается неожиданная закономерность: *точка подвеса и центр качаний могут быть взаимно перемещены,* т. е. если O есть центр качаний, когда C — точка подвеса, то C делается центром качаний, когда O делают точкой подвеса.

Для доказательства этого положения заметим, что, согласно сказанному в § 59, момент инерции тела относительно O равен моменту инерции относительно $G + M\cdot GO^2 = I - M\cdot CG^2 + M\cdot GO^2$. Поэтому:

$$\frac{\text{Момент инерции относительно } O}{\text{Расстояние центра тяжести от } O} = \frac{I - Mh^2 + M\left(\dfrac{I}{Mh} - h\right)^2}{\dfrac{I}{Mh} - h} =$$
$$= Mh + M\left(\frac{I}{Mh} - h\right) = \frac{I}{h}.$$

Следовательно, если тело подвесить в O, то уравнение движения примет прежний вид:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{Mgh}{I}\sin\vartheta = 0,$$

чем положение и доказывается. Очевидно, что периоды колебаний вокруг точек C и O будут одинаковы.

2. *Движение стержня, по которому ползет насекомое.* Концы прямолинейного однородного стержня массы m и длины $2a$ скользят по гладкой горизонтальной окружности радиуса c. Вдоль стержня ползет насекомое, масса которого равна массе стержня, с некоторой постоянной относительной скоростью v.

К моменту времени t стержень образует с некоторым постоянным направлением на плоскости угол ϑ, а насекомое отползает от середины стержня на отрезок x. Кинетическая энергия стержня равна $\frac{1}{2}m\left(c^2 - \frac{2a^2}{3}\right)\dot{\vartheta}^2$; кинетическая энергия насекомого складывается из скорости $\dot{x} - (c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\dot{\vartheta}$ в направлении стержня и из скорости $x\dot{\vartheta}$, перпендикулярной к нему. Общая кинетическая энергия системы будет поэтому

$$T = \frac{1}{2}m\left(c^2 - \frac{2a^2}{3}\right)\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{x} - (c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\dot{\vartheta}\right\}^2 + \frac{1}{2}mx^2\dot{\vartheta}^2.$$

Потенциальной энергии система не имеет.

Так как $x = vt$ (t отсчитывается от момента, для которого $x = 0$), то

$$T = \frac{1}{2}m\left(c^2 - \frac{2a^2}{3}\right)\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\left\{v - (c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\dot{\vartheta}\right\}^2 + \frac{1}{2}mv^2t^2\dot{\vartheta}^2.$$

Единственная входящая в это выражение координата ϑ является циклической. Поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \mathrm{const},$$

или

$$m\left(c^2 - \frac{2a^2}{3}\right)\dot{\vartheta} - m(c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\left\{v - (c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\,\dot{\vartheta}\right\} + mv^2t^2\dot{\vartheta} = \mathrm{const},$$

или

$$\dot{\vartheta}\left(2c^2 - \frac{5}{3}a^2 + v^2t^2\right) = \mathrm{const}.$$

Интегрирование последнего уравнения дает:

$$\vartheta - \vartheta_0 = k\,\mathrm{arctg}\left\{vt\left(2c^2 - \frac{5}{3}a^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\},$$

где ϑ_0 и k — постоянные. Полученная формула определяет положение стержня во всякий момент времени.

3. *Движение конуса по абсолютно шероховатой наклонной плоскости.* Однородный прямой круговой конус, масса которого M и угол при вершине 2β, движется по абсолютно шероховатой плоскости (т. е. по такой плоскости, по которой он может только катиться, но не скользить), наклоненной под углом α к горизонту. Длина образующей равна l, а угол, который в момент времени t образует соприкасающаяся образующая с прямой наибольшего наклона плоскости, равен ϑ. Если через χ обозначить угол, образованный осью конуса с направленной вверх вертикалью, то χ является одной из сторон сферического треугольника, вершины которого лежат соответственно на нормали к плоскости, направленной вверх вертикали и оси конуса. Две другие стороны будут тогда α и $\frac{1}{2}\pi - \beta$ и угол, образованный ими, равен $\pi - \vartheta$. Поэтому

$$\cos\chi = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\cos\vartheta.$$

Высота центра тяжести конуса над его вершиной равна $\frac{3}{4}l\cos\beta\cos\chi$ и потенциальная энергия конуса равна этой высоте, умноженной на Mg. Поэтому, если V — потенциальная энергия конуса, то (с точностью до постоянного слагаемого)

$$V = -\frac{3}{4}Mgl\sin\alpha\cos^2\beta\cos\vartheta.$$

Для вычисления кинетической энергии конуса мы воспользуемся его моментами инерции, относительно его оси и относительно прямой, перпендикулярной к оси и проходящей через вершину. Эти моменты легко вычисляются непосредственным интегрированием, при котором конус мыслится разложенным на отдельные диски, перпендикулярные к оси, и соответственно равны:

$$\frac{3}{10}Ml^2\sin^2\beta \quad \text{и} \quad \frac{3}{5}Ml^2\left(\cos^2\beta+\frac{1}{4}\sin^2\beta\right).$$

Так как направляющие косинусы образующей относительно прямоугольных осей, проходящих через вершину конуса, ось которого принята за ось z, могут быть приняты равными $\sin\beta$, 0 и $\cos\beta$, то, согласно теореме § 60, момент инерции относительно образующей равен:

$$\frac{3}{5}Ml^2\left(\cos^2\beta+\frac{1}{4}\sin^2\beta\right)\sin^2\beta+\frac{3}{10}Ml^2\sin^2\beta\cos^2\beta$$

или

$$\frac{3}{4}Ml^2\sin^2\beta\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right).$$

Так как конус катится по плоскости без скольжения, то все точки образующей, по которой он касается плоскости, находятся в покое. Отсюда следует, что эта образующая является мгновенной осью вращения конуса. Поэтому, если ω — угловая скорость вращения конуса вокруг этой образующей, то его кинетическая энергия равна (§ 63):

$$\frac{3}{8}Ml^2\sin^2\beta\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)\omega^2.$$

Но согласно § 15

$$\omega=\dot{\vartheta}\operatorname{ctg}\beta;$$

подставляя это значение ω, для кинетической энергии конуса получим значение:

$$T=\frac{3}{8}Ml^2\cos^2\beta\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)\dot{\vartheta}^2.$$

Поэтому уравнения движения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\vartheta}=-\frac{\partial V}{\partial\vartheta}$$

принимает вид:

$$\frac{3}{4}Ml^2\cos^2\beta\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)\ddot{\vartheta}+\frac{3}{4}Mgl\sin\alpha\cos^2\beta\sin\vartheta-0$$

или

$$\ddot{\vartheta}+\frac{g\sin\alpha}{l\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right)}\sin\vartheta=0.$$

Оно совпадает с уравнением движения математического маятника длины

$$\frac{l}{\sin\alpha}\left(\cos^2\beta+\frac{1}{5}\right).$$

Поэтому его интегрирование, так же как и в § 44, может быть выполнено при помощи эллиптических функций.

4. *Движение стержня во вращающейся раме.* Концы однородного тяжелого стержня скользят без трения по горизонтальному и вертикальному брусьям некоторой рамы, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикального бруса.

Пусть $2a$ — длина стержня, M — его масса, ϑ — угол, который он образует с вертикалью. Согласно § 29 действие вращения сводится к тому, что к потенциальной энергии стержня добавляется член

$$-\frac{1}{2}\omega^2\rho\int x^2\sin^2\vartheta\,dx,$$

где ρ — плотность, а x — расстояние какой-нибудь точки стержня от его конца, лежащего на вертикальном брусе. После интегрирования этот добавочный член принимает вид:

$$-\frac{2}{3}M\omega^2a^2\sin^2\vartheta.$$

Так как часть потенциальной энергии, зависящая от тяжести, равна

$$-Mga\cos\vartheta,$$

то для полной потенциальной энергии имеем:

$$V=-Mga\cos\vartheta-\frac{2}{3}M\omega^2a^2\sin^2\vartheta.$$

Горизонтальный и вертикальный компоненты скорости центра тяжести стержня равны соответственно $a\dot\vartheta\sin\vartheta$ и $a\dot\vartheta\cos\vartheta$. Поэтому та часть кинетической энергии стержня, которая зависит от движения центра тяжести, равна $\frac{1}{2}Ma^2\dot\vartheta^2$. Вторая же часть кинетической энергии, зависящая от вращения стержня вокруг его центра тяжести, равна $\frac{1}{6}Ma^2\dot\vartheta^2$, так как момент инерции стержня относительно его середины равен $\frac{1}{3}Ma^2$. Отсюда для полной кинетической энергии стержня получаем выражение:

$$T=\frac{2}{3}Ma^2\dot\vartheta^2.$$

Следовательно, интеграл энергии имеет вид:

$$\frac{2}{3}Ma^2\dot\vartheta^2-Mga\cos\vartheta-\frac{2}{3}M\omega^2a^2\sin^2\vartheta=\mathrm{const}.$$

или, полагая $x = \cos\vartheta$:

$$\dot{x}^2 = (1 - x^2)\left\{\varepsilon^2 - \left(\omega x - \frac{3g}{4a\omega}\right)^2\right\},$$

где ε — некоторая постоянная. Эта постоянная необходимо должна быть положительной, так как $\dot{x}^2$ и $1 - x^2$ положительны. Мы будем предполагать, что ε достаточно мало и что $\frac{3g}{4a\omega^2} < 1$. При этих предположениях величина x будет колебаться в пределах $\frac{3g}{4a\omega^2} \pm \frac{\varepsilon}{\omega}$.

Для выполнения дальнейшего интегрирования положим[1]:

$$x = 1 + \frac{\frac{1}{2}\omega^2\left(1 - \frac{3g}{4a\omega^2} - \frac{\varepsilon}{\omega}\right)\left(1 - \frac{3g}{4a\omega^2} + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)}{\xi + \frac{3g}{8a} - \frac{5}{12}\omega^2 - \frac{3g^2}{64a^2\omega^2} - \frac{\varepsilon^2}{12}},$$

где ξ — новая зависимая переменная. Подставляя это выражение x в дифференциальное уравнение, получим:

$$\dot{\xi}^2 = 4(\xi - e_1)(\xi - e_2)(\xi - e_3),$$

где значениям

$$\xi - e_1, \quad \xi - e_2, \quad \xi - e_3$$

соответствуют значения:

$$x = -1 \quad x = \frac{3g}{4a\omega^2} - \frac{\varepsilon}{\omega}, \quad x = \frac{3g}{4a\omega^2} + \frac{\varepsilon}{\omega}.$$

Легко видеть, что $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ и $e_1 > e_2 > e_3$.

Отсюда для ξ имеем:

$$\xi = \wp(t - \gamma),$$

где γ — постоянная, а функция $\wp$ образована при помощи корней e_1, e_2 и e_3. Так как $e_1 > e_2 > e_3$ и функция $\wp$, для вещественных значений t, лежит между e_2 и e_3 (в силу того, что x лежит между $\frac{3g}{4a\omega^2} - \frac{\varepsilon}{\omega}$ и $\frac{3g}{4a\omega^2} + \frac{\varepsilon}{\omega}$, то мнимая часть постоянной γ необходимо должна равняться полупериоду ω_3. Что касается вещественной части γ, то так как

[1] См. *Уиттекер* и *Ватсон*, Курс современного анализа. § 20, 6.

она зависит только от начального момента отсчета времени, она может быть принята равной нулю. Поэтому

$$\xi = \wp(t + \omega_3),$$

следовательно,

$$\cos\vartheta = 1 + \frac{\frac{1}{2}\omega^2\left(1 - \frac{3g}{4a\omega^2} - \frac{\varepsilon}{\omega}\right)\left(1 - \frac{3g}{4a\omega^2} + \frac{\varepsilon}{\omega}\right)}{\wp(t+\omega_3) + \frac{3g}{8a} - \frac{5\omega^2}{12} - \frac{3g^2}{64a^2\omega^2} + \frac{\varepsilon^2}{12}};$$

Последнее уравнение определяет ϑ как функцию от t.

5. ***Движение диска, у которого одна точка движется по наперед заданному закону.*** Точка A диска, массы M, лежащего в горизонтальной плоскости, движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса c.

Пусть G — центр тяжести диска и $AG = a$. Точка A имеет ускорение $c\omega^2$, направленное по внутренней нормали окружности. Поэтому, если всем точкам диска сообщить ускорение $c\omega^2$ в направлении внешней нормали, а точку A закрепить, то полученное движение представит относительное движение диска вокруг точки A. Результирующая всех сил, действующих на диск в этом относительном движении, равна $Mc\omega^2$, приложена в точке G и направлена по внешней нормали окружности.

Допустим, что углы, образованные прямой AG и внешней нормалью с каким-нибудь неизменным направлением в плоскости, равны соответственно ϑ и φ. Тогда работа этой равнодействующей при бесконечно малом перемещении $\delta\vartheta$ равна:

$$Mc\omega^2 a\sin(\varphi - \vartheta)\delta\vartheta.$$

Кинетическая энергия тела равна $\frac{1}{2}Mk^2\dot{\vartheta}^2$, где Mk^2 — момент инерции диска относительно точки A. Поэтому уравнение движения принимает вид:

$$Mk^2\ddot{\vartheta} = Mac\omega^2\sin(\varphi - \vartheta).$$

Но так как $\dot{\varphi} = \omega$, то $\ddot{\varphi} = 0$. Поэтому, полагая $\delta - \varphi = \psi$, получим:

$$\ddot{\psi} + \frac{ac\omega^2}{k^2}\sin\psi = 0.$$

Последнее уравнение совпадает с уравнением движения математического маятника длины $\dfrac{k^2 g}{ac\omega^2}$. Поэтому, так же как и в § 44, интегрирование этого уравнения может быть выполнено в эллиптических функциях.

6. *Качение диска по окружности другого вращающегося диска.* В вертикальной плоскости находятся два одинаковых круглых диска радиуса a и массы M. Края дисков обладают абсолютной шероховатостью и поддерживаются в постоянном соприкосновении однородной штангой массы m и длины $2a$, соединяющей их центры. Один из центров закреплен неподвижно, а соответствующий диск A вращается с постоянным угловым ускорением α. Определить движение соединяющей штанги и второго диска B.

К моменту времени t штанга образует с направленной вниз вертикалью угол φ, а диск A поворачивается на угол ϑ. Угловая скорость диска A равна $\dot{\vartheta}$, а скорость точки соприкасания дисков равна $a\dot{\vartheta}$. Так как центр диска B имеет скорость $2a\dot{\varphi}$, то угловая скорость вращения диска B вокруг своего центра равна $2\dot{\varphi} - \dot{\vartheta}$. Каждый из дисков имеет относительно своего центра момент инерции, равный $\frac{1}{2}Ma^2$. Поэтому кинетическая энергия всей системы равна:

$$T = \frac{1}{2}M\frac{a^2}{2}\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}M\frac{a^2}{2}(2\dot{\varphi} - \dot{\vartheta})^2 + \frac{1}{2}M(2a)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\frac{4a^2}{3}\dot{\varphi}^2$$

и

$$\dot{\vartheta} = \alpha t + \varepsilon,$$

где ε есть величина постоянная.

Для потенциальной энергии имеем:

$$V = -(2M + m)ag\cos\varphi.$$

Уравнением Лагранжа будет:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

или:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(6M + \frac{4}{3}m\right)a^2\dot{\varphi} - Ma^2\dot{\vartheta}\right\} = -(2M + m)ag\sin\varphi$$

и так как $\ddot{\vartheta} = \alpha$, то

$$\left(6M + \frac{4}{3}m\right)a^2\ddot{\varphi} - Ma^2\alpha + (2M + m)ag\sin\varphi = 0.$$

После интегрирования получаем:

$$\left(3M + \frac{2}{3}m\right)a^2\dot{\varphi}^2 - Ma^2\alpha\varphi - (2M + m)ag\cos\varphi = c,$$

где c — постоянная интегрирования, величина которой зависит от начальных условий.

Так как в полученном уравнении переменные t и φ разделены, то дальнейшее интегрирование может быть выполнено в квадратурах. Окончательный интеграл и представит движение.

Задача 1. Показать, что если в начальный момент система находилась в покое и штанга была направлена вертикально вниз, то она достигнет горизонтального положения, если

$$\alpha > \frac{4g}{\pi a}\left(1 + \frac{m}{2M}\right).$$

§ 66. Движение системы с двумя степенями свободы. В динамике твердого тела, так же как и в динамике точки, возможность решения в квадратурах какой-нибудь задачи, с двумя степенями свободы, во многом зависит от существования циклических координат. Весьма часто интеграл, соответствующий циклической координате, может быть интерпретирован как интеграл количества движения или как интеграл момента количества движения. Составление и решение соответствующих дифференциальных уравнений основывается на принципах, изложенных в предшествующих главах. Мы поясним ход вычислений на следующих примерах.

1. *Стержень в кольце.* Мы исследуем сначала движение прямолинейного однородного стержня, проходящего через очень узкое кольцо, лежащее в горизонтальной плоскости. Стержень может свободно скользить в кольце и вращаться в плоскости.

В момент времени t стержень образует с некоторой неизменной прямой плоскости угол ϑ и середина его отстоит от кольца на отрезок r. Длина стержня равна $2l$ и масса его M. Момент инерции стержня относительно его середины равен $\dfrac{1}{3}Ml^2$. Отсюда для кинетической энергии стержня имеем выражение:

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{3}l^2\dot{\vartheta}^2\right).$$

Потенциальной энергии стержень не имеет.

Координата ϑ является циклической; соответствующий ей интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \mathrm{const}$$

имеет вид:

$$\left(r^2 + \frac{1}{3}l^2\right)\dot{\vartheta} = \mathrm{const}.$$

Интеграл энергии будет:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{3}l^2\dot{\vartheta}^2 = \mathrm{const}.$$

Деля второй интеграл на квадрат первого, получим:

$$\frac{\left(\dfrac{dr}{d\vartheta}\right)^2}{\left(r^2+\dfrac{1}{3}l^2\right)^2}+\frac{1}{r^2+\dfrac{1}{3}l^2}=c,$$

где c — постоянная, или

$$\dot{\vartheta}+\text{const}-\int\left\{\left(r^2+\frac{1}{3}l^2\right)\left(cr^2+\frac{1}{3}cl^2-1\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}dr.$$

Полагая $cr^2=s$, можем написать:

$$\dot{\vartheta}+\text{const}=\int\left\{4s\left(s+\frac{1}{3}cl^2\right)\left(s+\frac{1}{3}cl^2-1\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}ds.$$

Следовательно, обозначая через $\wp$ эллиптическую функцию Вейерштрасса, соответствующую корням:

$$e_1=\frac{1}{3}\left(-1+\frac{2}{3}cl^2\right),\quad e_2=\frac{1}{3}\left(2-\frac{1}{3}cl^2\right),\quad e_3=\frac{1}{3}\left(-1-\frac{1}{3}cl^2\right),$$

удовлетворяющих при достаточно большом значении величины $\dfrac{dr}{d\vartheta}$ условию $e_1>e_2>e_3$, будем иметь:

$$s=\wp(\vartheta-\vartheta_0)-e_1,$$

где ϑ_0 — постоянная интегрирования. Так как s положительно, то для всех действительных значений ϑ имеем $\wp(\vartheta-\vartheta_0)>e_1$, и поэтому постоянная ϑ_0 будет действительной.

Таким образом, решение задачи дается уравнением:

$$cr^2=\wp(\vartheta-\vartheta_0)+\frac{1}{3}-\frac{2}{9}cl^2.$$

2. *Качение одного цилиндра по внутренней поверхности другого.* Тяжелый однородный абсолютно шероховатый цилиндр массы m и радиуса r катится без скольжения по внутренней поверхности полого цилиндра массы M и радиуса R, вращающегося вокруг своей оси (расположенной горизонтально).

В момент времени t плоскость, проходящая через ось первого цилиндра, образует с вертикалью, направленной вниз, угол φ, а второй цилиндр поворачивается на угол ϑ. Для угловых скоростей цилиндров относительно своих осей легко получаются значения $\dot{\vartheta}$ и $\dfrac{(R-r)\dot{\varphi}-R\dot{\vartheta}}{r}$.

Моменты инерции цилиндров относительно своих осей соответственно равны MR^2 и $\frac{1}{2}mr^2$. Для кинетической и потенциальной энергий системы получаем выражения:

$$T = \frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}mr^2\left(\frac{R-r}{r}\dot{\varphi} - \frac{R}{r}\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2,$$
$$V = -mg(R-r)\cos\varphi.$$

Координата ϑ является, очевидно, циклической; ей соответствует интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \mathrm{const}$$

или

$$MR^2\dot{\vartheta} - \frac{1}{2}mR\left\{(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}\right\} = k,$$

где k постоянная.

Интеграл энергии

$$T - V = h,$$

где h постоянная, даст:

$$\frac{1}{2}MR^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{4}m\left\{(R-r)\dot{\varphi} - R\dot{\vartheta}\right\}^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)\cos\varphi = h.$$

Исключение $\dot{\vartheta}$ из обоих интегралов даст уравнение:

$$\frac{m(3M+m)}{2(2M+m)}(R-r)^2\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)\cos\varphi = h - \frac{k^2}{(2M+m)R^2}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением энергии математического маятника длины

$$\frac{3M+m}{2M+m}(R-r).$$

Его решение, так же как и в § 44, выполняется в эллиптических функциях.

3. *Стержень скользит своими концами по гладкому круговому обручу.* Обруч расположен вертикально и вращается вокруг своего вертикального диаметра.

Масса стержня равна m, его длина $2a$; масса обруча равна M и его радиус r. В момент времени t стержень образует с горизонталью угол ϑ, а обруч имеет по отношению к некоторой неизменной вертикальной плоскости азимут φ. Момент инерции стержня по отношению к оси, проходящей через центр обруча перпендикулярно к его плоскости, равен $m\left(r^2 - \frac{2}{3}a^2\right)$. Момент инерции стержня относительно вертикального диаметра обруча равен

$$m\left\{(r^2 - a^2)\sin^2\vartheta + \frac{1}{3}a^2\cos^2\vartheta\right\}.$$

Отсюда кинетическая энергия системы

$$T=\frac{1}{2}m\left(r^2-\frac{2}{3}a^2\right)\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{4}Mr^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\dot{\varphi}^2\left(r^2\sin^2\vartheta-a^2\sin^2\vartheta+\frac{1}{3}a^2\cos^2\vartheta\right).$$

Потенциальная энергия

$$V = -mg(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\cos\vartheta.$$

Координата φ является, очевидно, циклической; ей соответствует интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \text{const}$$

или

$$\frac{1}{2}Mr^2\dot{\varphi} + m\dot{\varphi}\left(r^2\sin^2\vartheta - a^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{3}a^2\cos^2\vartheta\right) = k,$$

где k — постоянная. Вводя значение $\dot{\varphi}$ из этого уравнения в интеграл энергии

$$T - V = h,$$

получим:

$$\frac{1}{2}m\left(r^2 - \frac{2}{3}a^2\right)\dot{\vartheta}^2 =$$
$$=h+mg(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\cos\vartheta-\frac{k^2}{Mr^2+2m\left(r^2\sin^2\vartheta-a^2\sin^2\vartheta+\frac{1}{3}a^2\cos^2\vartheta\right)}.$$

Интегрирование этого уравнения, которое может быть выполнено разделением переменных, дает ϑ как функцию от t и, следовательно, решение задачи.

4. *Обруч и кольцо.* Система состоит из однородного гладкого обруча радиуса a, находящегося в горизонтальной плоскости и катящегося без скольжения по неподвижной прямой, и из маленького колечка, скользящего без трения по обручу. Масса колечка составляет $\frac{1}{\lambda}$ часть массы обруча. В начальный момент обруч находится в покое, а кольцо имеет скорость v и расположено в точке, наиболее отдаленной от неподвижной прямой.

Пусть φ угол, на который поворачивается обруч за промежуток времени t от начала движения. Обозначим через ψ угол, на который повернется за это время диаметр обруча, проходящий через кольцо. Полагая массу кольца равной единице и, следовательно, массу обруча равной λ мы получим для момента инерции обруча относительно его центра значение λa^2. Центр обруча имеет скорость $a\dot{\varphi}$: скорость кольца складывается из двух слагаемых $a\dot{\varphi}$ и $a\dot{\psi}$, образующих между собой угол ψ. Следовательно, система обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}\lambda a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\lambda a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}(a^2\dot{\varphi}^2 + a^2\dot{\psi}^2 + 2a^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi) =$$
$$= \frac{1}{2}(2\lambda + 1)a^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}a^2\dot{\psi}^2 - a^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\psi.$$

Потенциальная энергия системы равна нулю.

Координата φ является, очевидно, циклической; ей соответствует интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \text{const}$$

или

$$(2\lambda + 1)a^2\dot{\varphi} + a^2\dot{\psi}\cos\psi = av,$$

так как av есть начальное значение величины $\dfrac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}$.

Интегрирование этого уравнения дает:

$$(2\lambda + 1)\varphi + \sin\psi - \frac{vt}{a} = 0,$$

так как начальное значение левой части равно нулю. Отсюда

$$\varphi = \frac{1}{2\lambda + 1}\left(\frac{vt}{a} - \sin\psi\right).$$

Это уравнение определяет φ как функцию от ψ.

Уравнение энергии имеет вид:

$$T = T_{(t=0)} = \frac{1}{2}v^2.$$

Заменяя в нем $\dot{\varphi}$ значением

$$\frac{\dfrac{v}{a} - \dot{\psi}\cos\psi}{2\lambda + 1},$$

получим:

$$a^2(2\lambda + \sin^2\psi)\dot{\psi}^2 = 2\lambda v^2.$$

откуда

$$t = \frac{a}{v\sqrt{2\lambda}} \int\limits_0^{\psi} (2\lambda + \sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}\, d\psi.$$

Подставляя $\sin\psi = x$, получим:

$$t = \frac{a}{v\sqrt{2\lambda}} \int\limits_0^{x} (2\lambda + x^2)^{\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Для вычисления этого интеграла введем вспомогательную переменную u, определяемую равенством:

$$u = \int\limits_0^{x} (2\lambda + x^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

При подстановке $x^2 = \dfrac{2\lambda}{\xi}$, где ξ — новая переменная, этот интеграл переходит в следующий:

$$u = \int\limits_{\xi}^{\infty} \{4\xi(\xi + 1)(\xi - 2\lambda)\}^{-\frac{1}{2}}\, d\xi.$$

Отсюда

$$\xi = \wp(u) - \frac{1}{3}(1 - 2\lambda),$$

где функция $\wp$ образована при помощи корней:

$$e_1 = \frac{1}{3}(1 + 4\lambda), \quad e_2 = \frac{1}{3}(1 - 2\lambda), \quad e_3 = -\frac{2}{3}(1 + \lambda).$$

Эти корни действительны и удовлетворяют условию $e_1 > e_2 > e_3$. Поэтому для действительных значений u, $\wp(u)$ также действительна и больше e_1.

Далее

$$dt = \frac{a}{v\sqrt{2\lambda}} (2\lambda + x^2)^{\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

или

$$\frac{v\sqrt{2\lambda}\, dt}{a} = \left\{ 2\lambda + \frac{2\lambda}{\wp(u) - e_2} \right\} du.$$

Отсюда, интегрируя, находим:

$$\frac{vt\sqrt{2\lambda}}{a} = \frac{1}{3}(1+4\lambda)u + \zeta(u) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \frac{1}{3}(1-2\lambda)},$$

где $\zeta(u)$ есть дзета-функция Вейерштрасса.

Следовательно, ψ и t *выражаются через вспомогательную переменную при помощи уравнений*:

$$\sin^2\psi = \frac{2\lambda}{\wp(u) - \frac{1}{3}(1-2\lambda)}$$

$$\frac{vt\sqrt{2\lambda}}{a} = \frac{1}{3}(1+4\lambda)u + \zeta(u) + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u)}{\wp(u) - \frac{1}{3}(1-2\lambda)}.$$

§ 67. Начальные движения. В § 32 мы изложили общие принципы определения характера начального движения системы, выходящей в некоторый заданный момент времени из состояния покоя. Приведем несколько примеров для движения твердого тела.

1. *Точка массы m подвешена на нити длины b к окружности диска радиуса a и массы $2m$. Диск может вращаться вокруг своей горизонтальной оси, и его диаметр, проходящий через точку подвеса нити, занимает в начальный момент горизонтальное положение. Определить начальное движение точки.*

Пусть ко времени t от начала движения диск поворачивается на некоторый угол φ, а нить образует с вертикалью некоторый угол ψ. Горизонтальная и направленная вниз вертикальная координата материальной точки относительно центра диска соответственно равны:

$$a\cos\vartheta + b\sin\varphi, \quad a\sin\vartheta + b\cos\varphi.$$

Поэтому квадрат скорости этой точки равен:

$$a^2\dot\vartheta^2 + b^2\dot\varphi^2 - 2ab\sin(\vartheta+\varphi)\dot\vartheta\dot\varphi$$

и, следовательно, кинетическая энергия системы:

$$T = ma^2\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}mb^2\dot\varphi^2 - mab\sin(\vartheta+\varphi)\dot\vartheta\dot\varphi.$$

Для потенциальной энергии имеем:

$$V = -mg(a\sin\vartheta + b\cos\varphi).$$

Уравнения движения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\vartheta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

дают:

$$2a^2\ddot\vartheta - ab\cos(\vartheta+\varphi)\dot\varphi^2 - ga\cos\vartheta - ab\sin(\vartheta+\varphi)\ddot\varphi = 0,$$
$$b^2\ddot\varphi - ab\cos(\vartheta+\varphi)\dot\vartheta^2 + gb\sin\varphi - ab\sin(\vartheta+\varphi)\ddot\vartheta = 0.$$

Начальные значения величин ϑ, φ, $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$ равны нулю. Поэтому полученные уравнения показывают, что в начале движения $\ddot\vartheta = \dfrac{g}{2a}$ и $\ddot\varphi = 0$. Разложение ϑ по степеням t начинается, следовательно, членом $\dfrac{gt^2}{4a}$, а разложение φ — членом не ниже третьего порядка. Полагаем:

$$\vartheta = \frac{gt^2}{4a} + At^2 + Bt^4 + \ldots,$$
$$\varphi = Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + Ft^6 + \ldots,$$

подставим эти значения в дифференциальные уравнения и сравним коэффициенты при одинаковых степенях t. Вычисляя коэффициенты $A, B, C, \ldots$ из полученных, таким образом, уравнений, находим:

$$\vartheta = \frac{gt^2}{4a} + 0t^4 + \ldots,$$
$$\varphi = \frac{g^2t^4}{32ab} - \frac{g^3t^6}{1920ab^2} + \ldots$$

Обозначим через x и y координаты материальной точки относительно горизонтальной и направленной вниз вертикальной осей, проходящих через ее начальное положение. Тогда приближенно

$$x = a(1-\cos\vartheta) - b\sin\varphi = \frac{1}{2}a\vartheta^2 - b\varphi = \frac{g^3t^6}{1920ab}$$

и

$$y = a\sin\vartheta + b(\cos\varphi - 1) = a\vartheta = \frac{gt^2}{4}.$$

Исключение t из этого уравнения даст:

$$y^3 = 30abx.$$

Это и есть искомое приближенное уравнение траектории точки вблизи начального положения.

2. *Кольцо массы m скользит по однородному стержню длины $2a$ и массы M, вращающемуся вокруг одного из своих концов. В начале движения стержень расположен горизонтально и кольцо отстоит на отрезок r_0 от закрепленного конца. Определить кривизну начальной траектории кольца.*

Пусть r, ϑ — полярные координаты кольца в момент времени t относительно конца стержня и горизонтали, причем угол ϑ отсчитывается от этой прямой вниз. Кинетической и потенциальной энергией соответственно будут:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}M\frac{4a^2}{3}\dot{\vartheta}^2$$
$$V = -mgr\sin\vartheta - Mga\sin\vartheta.$$

Уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\partial V}{\partial r},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$$

дают:

$$\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - g\sin\vartheta = 0,$$
$$\frac{3}{4}Ma^2\ddot{\vartheta} + mr^2\ddot{\vartheta} + 2mr\dot{r}\dot{\vartheta} - Mga\cos\vartheta - mgr\cos\vartheta = 0.$$

Так как $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$, ϑ в начале движения равны нулю, то разложения r и ϑ могут быть приняты в виде:

$$r = r_0 + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + \ldots,$$
$$\vartheta = b_2t^2 + b_3t^3 + \ldots$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, найдем:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{12}b_2(g + 4b_2r_0),$$
$$b_2 = \frac{3g(Ma + mr_0)}{2(4Ma^2 + 3mr_0^2)}.$$

Координаты кольца по отношению к горизонтальной и вертикальной осям, проходящим через его начальное положение, будут:

$$x = r\cos\vartheta - r_0, \quad y = r\sin\vartheta$$

или приближенно:

$$x = \left(a_4 - \frac{1}{2} r_0 b_2^2\right) t^4, \quad y = r_0 b_2 t^2.$$

Для кривизны траектории имеем:

$$\frac{1}{\rho} = \lim \frac{2x}{y^2} = \frac{2a_4}{b_2^2 r_0^2} - \frac{1}{r_0}.$$

После подстановки найденных значений b_2 и a_4 получаем:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{Ma(4a - 3r_0)}{9r_0^2(Ma - mr_0)}.$$

Это и есть искомая начальная кривизна траектории кольца.

Задача 1. Два однородных стержня AB и BC, с массами m_1 и m_2 и длинами a и b, связаны шарниром в точке B и могут вращаться вокруг закрепленной точки A. В начале движения стержень AB горизонтален, а стержень BC вертикален. Показать, что начальная траектория точки, отсекающей одну треть стержня BC, может быть представлена в виде:

$$y^3 = 60\left(1 + \frac{2m_2}{m_1}\right) abx.$$

(Camb. Math. Tripos., часть 1. 1896.)

§ 68. Движение системы с тремя степенями свободы. Так же как и в случае с двумя степенями свободы, возможность разрешения в квадратурах задачи движения системы с тремя степенями свободы обусловливается обычно или существованием двух циклических координат, дающих интегралы количества движения и момента количества движения, или возможностью разделения переменных в кинетическом потенциале. Поясним это на следующих примерах.

1. *Движение стержня в заданном силовом поле.* Однородный стержень массы m и длины $2a$ может свободно двигаться по гладкой горизонтальной плоскости. Каждый элемент стержня притягивается неподвижной прямой с силой, прямо пропорциональной массе элемента и его расстоянию от прямой.

Пусть x и y — координаты середины стержня, а ϑ — угол, под которым он наклонен к притягивающей прямой. Тогда для кинетической и потенциальной энергий имеем:

$$T = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \frac{1}{3} a^2 \dot{\vartheta}^2\right),$$

$$V = \frac{m\mu}{4a} \int\limits_{-a}^{+a} (y + r \sin\vartheta)^2 \, dr$$

где μ — постоянная, или:

$$V = \mu m\left(\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}a^2\sin^2\vartheta\right).$$

Уравнения Лагранжа дают:

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -\mu y.$$
$$2\ddot{\vartheta} + \mu\sin 2\vartheta = 0.$$

Из первых двух уравнений получаем:

$$x = ct - d, \quad y = f\sin(\mu^{\frac{1}{2}}t + \varepsilon),$$

где c, d, f, ε — постоянные интегрирования. Середина стержня описывает, следовательно, синусоиду. Уравнение для ϑ имеет вид уравнения маятника и поэтому может быть проинтегрировано так же, как и в § 44.

2. *Движение стержня и цилиндра на плоскости.* Система состоит из однородного гладкого цилиндра массы M и радиуса c, движущегося по гладкой горизонтальной плоскости, и тяжелого стержня массы m и длины $2a$. Стержень находится в вертикальной плоскости, проходящей через центр тяжести цилиндра и перпендикулярной к его оси. Одним своим концом он опирается на плоскость, на которой находится цилиндр, касаясь в то же время поверхности цилиндра.

Допустим, что в момент времени t расстояние образующей, вдоль которой цилиндр касается плоскости, от ее положения в начальный момент равно x, цилиндр повернулся на угол φ и стержень образует с вертикалью угол ϑ. Выберем систему координат в плоскости стержня; за оси x и y примем соответственно горизонтальное и вертикальное направления: за начало координат примем точку, лежащую на первоначальном положении прямой соприкосновения цилиндра и плоскости. Тогда координаты середины стержня будут соответственно равны:

$$x - c\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right) + a\sin\vartheta \quad \text{и} \quad a\cos\vartheta.$$

Пусть к моменту времени t цилиндр повернулся на угол φ. Система имеет кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{6}ma^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}m\left\{\dot{x} - \frac{c\dot{\vartheta}}{2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right) + a\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right\}^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}ma^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{4}Mc\dot{\varphi}^2$$

и потенциальную энергию:

$$V = mga\cos\vartheta.$$

Координаты x и φ будут, очевидно, циклическими; им соответствуют интегралы:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \text{const}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \text{const}.$$

Первый из них может быть истолкован как интеграл количества движения системы относительно оси x, а второй как интеграл момента количества движения цилиндра относительно своей оси. Этим интегралам можно придать вид:

$$m\left\{\dot{x} - \frac{c\dot{\vartheta}}{2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right) + a\dot{\vartheta}\cos\vartheta\right\} + M\dot{x} = \text{const},$$

$$\frac{1}{2}Mc^2\dot{\varphi} = \text{const}.$$

Исключая из этих уравнений и уравнения энергии

$$T + V = \text{const}$$

величины $\dot{x}$ и $\dot{\varphi}$, получим:

$$\dot{\vartheta}^2\left[\,\frac{1}{3}a^2 + a^2\sin^2\vartheta + \frac{M}{M+m}\left\{a\cos\vartheta - \frac{c}{2}\sin^{-2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\vartheta}{2}\right)\right\}^2\,\right] = d - 2ga\cos\vartheta,$$

где d — постоянная. Так как в этом уравнении переменные ϑ и t разделяются, то из него можно будет выразить величину ϑ как функцию от t. Тогда предыдущие два интеграла дадут возможность найти также и величины x и φ.

§ 69. Движение по инерции твердого тела, имеющего неподвижную точку. Одной из важнейших задач динамики системы с тремя степенями свободы является определение движения твердого тела, имеющего закрепленную точку O и на которое не действуют никакие внешние силы[1]. К этой задаче приводится, например, определение движения твердого тела вокруг своего центра тяжести, когда все силы, действующие на тело, приводятся к одной результирующей, проходящей через центр тяжести.

В такой системе момент количества движения относительно любой неподвижной прямой, проходящей через точку опоры, остается постоянным (§ 40). Отсюда следует, что прямая, относительно которой момент количества движения имеет наибольшее значение, не изменяет своего направления в пространстве. Эту так называемую *неизменяемую прямую* мы примем за ось OZ. За оси OX и OY мы примем две какие-нибудь другие прямые, выходящие из точки опоры и образующие вместе с OZ прямоугольный триэдр. Моменты количества движения относительно осей OX и OY равны нулю; ибо в противном случае результирующей моментов количества движения относительно осей OX, OY

[1] *Euler*, Memoires de Berlin, 1758. Эллиптические функции к решению задачи впервые применил Руэб (*Rueb*, Specimen inaugural. Utrecht, 1834); решение дополнено Якоби (Journal f. Math., т. 39, стр. 293, 1849).

и OZ соответствовала бы прямая, относительно которой момент количества движения был бы больше момента, взятого по отношению к OZ, что противоречит условию. Отсюда согласно § 39 момент количества движения относительно произвольной прямой, выходящей из O и образующей с OZ угол ϑ, равен $d\cos\vartheta$, если d означает момент количества движения относительно OZ.

Положение твердого тела будет известно для всякого момента времени t, если будут известны мгновенные положения трех главных осей инерции, соответствующих точке O. Эти три оси мы примем за оси подвижной системы координат $Oxyz$, движущейся вместе с телом. Обозначим через ϑ, φ, ψ углы Эйлера, определяющие положение осей $Oxyz$ по отношению к осям $OXYZ$. Через A, B и C обозначим главные моменты инерции тела относительно O, причем $A > B > C$. И, наконец, обозначим через ω_1, ω_2, ω_3 угловые скорости системы относительно осей Ox, Oy и Oz. Тогда согласно § 10 и § 62 будут иметь место следующие уравнения:

$$\begin{aligned} A\omega_1 &= -d\sin\vartheta\cos\psi, \\ B\omega_2 &= d\sin\vartheta\cos\psi, \\ C\omega_3 &= d\cos\vartheta \end{aligned}$$

или (§ 16):

$$\begin{aligned} \dot\vartheta\sin\psi - \dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi &= -\frac{d}{A}\sin\vartheta\cos\psi, \\ \dot\vartheta\cos\psi + \dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi &= \frac{d}{B}\sin\vartheta\sin\psi, \\ \dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta &= \frac{d}{C}\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Этими тремя уравнениями определяются три интеграла уравнений движения системы. Они содержат только одну произвольную постоянную d, так как вследствие специального выбора системы координат обе другие постоянные интегрирования обращаются в нуль. Полученными уравнениями мы воспользуемся вместо уравнений Лагранжа для определения ϑ, φ и ψ.

Разрешая эти уравнения относительно $\dot\vartheta$, $\dot\varphi$ и $\dot\psi$, получим:

$$\begin{aligned} \dot\vartheta &= \frac{(A-B)d}{AB}\sin\vartheta\cos\psi\sin\psi, \\ \dot\varphi &= \frac{d}{A}\cos^2\psi - \frac{d}{B}\sin^2\psi, \\ \dot\psi &= \left(\frac{d}{C} - \frac{d}{A}\cos^2\psi - \frac{d}{B}\sin^2\psi\right)\cos\vartheta. \end{aligned}$$

На основании § 63 интеграл энергии (являющийся следствием этих трех уравнений) может быть написан сразу. Он имеет вид:

$$A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = c,$$

где c — постоянная. Заменяя в нем величины ω_1, ω_2, ω_3 их выражениями через ϑ и ψ, мы его можем представить либо в виде:

$$\frac{A-B}{AB}\sin^2\vartheta\cos^2\psi = -\frac{Bc-d^2}{Bd^2} + \frac{B-C}{BC}\cos^2\vartheta,$$

либо в виде:

$$\frac{A-B}{AB}\sin^2\vartheta\sin^2\psi = \frac{Ac-d^2}{Ad^2} - \frac{A-C}{AC}\cos^2\vartheta.$$

Так как $A>B>C$, то величина $cA-d^2=B(A-B)\omega_2^2+C(A-C)\omega_3^2$ будет положительной, а $cC-d^2$ — отрицательной. Величина $Bc-d^2$ может быть как положительной, так и отрицательной; мы будем предполагать, что она положительна.

При помощи последних равенств первое из трех дифференциальных уравнений может быть написано следующим образом:

$$\frac{d}{dt}(\cos\vartheta) = -d\left\{-\frac{Bc-d^2}{Bd^2}+\frac{B-C}{BC}\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{Ac-d^2}{Ad^2}-\frac{A-C}{AC}\cos^2\vartheta\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Этим уравнением $\cos\vartheta$ определяется как одна из якобиевых эллиптических функций[1] от некоторой линейной функции от t. Оба предыдущих уравнения показывают, что $\sin\vartheta\cos\psi$ и $\sin\vartheta\sin\psi$ являются двумя другими функциями Якоби.

Поэтому полагаем:

$$\sin\vartheta\cos\psi = P\operatorname{cn}u, \quad \sin\vartheta\sin\psi = Q\operatorname{sn}u, \quad \cos\vartheta = R\operatorname{dn}u,$$

где P, Q, R — постоянные, а u — некоторая линейная функция от t, т. е. $u=\lambda t+\varepsilon$. Величины P, Q, R, λ и модуль k эллиптических функций должны быть выбраны таким образом, чтобы предыдущие уравнения совпадали со следующими:

$$k^2\operatorname{cn}^2 u = -k'^2 + \operatorname{dn}^2 u,$$
$$k^2\operatorname{sn}^2 u = 1 - \operatorname{dn}^2 u,$$
$$\frac{d}{du}\operatorname{dn}u = -k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u.$$

[1] Относительно теории эллиптических функций см. *Уиттекер* и *Ватсон*, Курс современного анализа, гл. 20–22.

Сравнения коэффициентов дает:

$$P^2 = \frac{A(d^2 - cC)}{d^2(A-C)}, \quad Q^2 = \frac{B(d^2 - cC)}{d^2(B-C)}, \quad R^2 = \frac{C(cA - d^2)}{d^2(A-C)};$$

$$k^2 = \frac{(A - B)(d^2 - cC)}{(B-C)(Ac-d^2)}, \quad \lambda^2 = \frac{(B - C)(cA - d^2)}{ABC}.$$

Уравнение для k^2 показывает, что k —вещественно, а уравнения

$$1 - k^2 = \frac{(A-C)(Bc-d^2)}{(B-C)(Ac-d^2)},$$

что $1 - k^2 > 0$, т. е. $k < 1$. Очевидно, что величины P, Q, R и λ будут также вещественны.

Определим теперь вещественную величину a из одновременно выполняющихся уравнений:

$$\operatorname{sn} ia = \left\{\frac{C(Ac-d^2)}{A(d^2-cC)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{cn} ia = \left\{\frac{d^2(A-C)}{A(d^2-cC)}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

$$\operatorname{dn} ia = \left\{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$k'^{-\frac{1}{2}} \operatorname{dn} ia = \frac{\vartheta_{00}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)},$$

где ϑ-функции определяются разложениями:

$$\vartheta_{00}(\nu) = 1 + 2q\cos 2\pi\nu + 2q^4\cos 4\pi\nu + 2q^9\cos 6\pi\nu + \cdots,$$

$$\vartheta_{01}(\nu) = 1 - 2q\cos 2\pi\nu + 2q^4\cos 4\pi\nu - 2q^9\cos 6\pi\nu + \cdots,$$

$$\vartheta_{10}(\nu) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos \pi\nu - 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3\pi\nu + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5\pi\nu + \cdots,$$

$$\vartheta_{11}(\nu) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin \pi\nu - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3\pi\nu + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5\pi\nu + \cdots$$

и $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ то имеем:

$$\frac{1 + 2q\operatorname{ch} 2\gamma + 2q^4\operatorname{ch} 4\gamma + \cdots}{1 - 2q\operatorname{ch} 2\gamma + 2q^4\operatorname{ch} 4\gamma + \cdots} = (K')^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{B(A-C)}{A(B-C)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\gamma = \dfrac{\pi a}{2K}$. Из этого уравнения γ (а следовательно, и a) может быть вычислена последовательными приближениями.

Эйлеровы углы ϑ, ψ для момента времени t определятся теперь уравнениями:

$$\sin\vartheta\cos\psi = \frac{\operatorname{cn}(\lambda t + \varepsilon)}{\operatorname{cn} ia},$$

$$\sin\vartheta\sin\psi = \frac{\operatorname{dn} ia \operatorname{sn}(\lambda t + \varepsilon)}{\operatorname{cn} ia},$$

$$\cos\vartheta = \frac{\operatorname{sn} ia \operatorname{dn}(\lambda t + \varepsilon)}{i \operatorname{cn} ia}$$

или (опуская ε):

$$\sin\vartheta\cos\psi = \frac{\vartheta_{01}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)\vartheta_{10}\left(\dfrac{\lambda t}{2K}\right)}{\vartheta_{10}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t}{2K}\right)},$$

$$\sin\vartheta\sin\psi = \frac{\vartheta_{00}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)\vartheta_{11}\left(\dfrac{\lambda t}{2K}\right)}{\vartheta_{10}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t}{2K}\right)},$$

$$\cos\vartheta = \frac{\vartheta_{11}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)\vartheta_{00}\left(\dfrac{\lambda t}{2K}\right)}{\vartheta_{10}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t}{2K}\right)}.$$

Модуль k эллиптических функций известен. Поэтому параметр q ϑ-функций может быть определен уравнением:

$$q = \frac{k^2}{16} + \frac{k^4}{32} + \frac{21k^6}{1024} + \cdots$$

или быстрее сходящимся рядом:

$$q = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\beta + \frac{1}{16}\operatorname{tg}^{10}\beta + \frac{15}{512}\operatorname{tg}^{18}\beta + \cdots,$$

где $\cos\beta = k'^{\frac{1}{2}}$. Величина K может быть вычислена из ряда:

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_{00} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots$$

Таким образом, период $\dfrac{4K}{\lambda}$ наклона осей $Oxyz$ относительно прямой OZ определен.

Полагая теперь $\dfrac{\pi a}{2K} = \gamma$ и $\dfrac{\pi\lambda}{2K} = \mu$, будем иметь:

$$\sin\vartheta\cos\psi = \frac{(1 - 2q\operatorname{ch}2\gamma + 2q^4\operatorname{ch}4\gamma - \cdots)(\cos\mu t + q^2\cos 3\mu t + \cdots)}{(\operatorname{ch}\gamma + q^2\operatorname{ch}3\gamma + \cdots)(1 - 2q\cos 2\mu t + 2q^4\cos 4\mu t + \cdots)},$$

$$\sin\vartheta\sin\psi = \frac{(1 + 2q\operatorname{ch}2\gamma + 2q^4\operatorname{ch}4\gamma + \cdots)(\sin\mu t - q^2\sin 3\mu t + \cdots)}{(\operatorname{ch}\gamma + q^2\operatorname{ch}3\gamma + \cdots)(1 - 2q\cos 2\mu t + 2q^4\cos 4\mu t + \cdots)},$$

$$\cos\vartheta = \frac{(\operatorname{sh}\gamma - q^2\operatorname{sh}3\gamma + \cdots)(1 + 2q\cos 2\mu t + 2q^4\cos 4\mu t + \cdots)}{(\operatorname{ch}\gamma + q^2\operatorname{ch}3\gamma + \cdots)(1 - 2q\cos 2\mu t - 2q^4\cos 4\mu t + \cdots)}.$$

Величины q, μ и γ могут быть рассматриваемы как постоянные, характеризующие движение.

Задача. Тело является однородным эллипсоидом, плотность которого равна единице, с полуосями:

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3.$$

Три главных момента инерции суть:

$$A = \frac{4}{15}\,\pi\, abc(b^2 + c^2) = 20{,}8\,\pi, \quad B = 16\,\pi, \quad C = 8\,\pi.$$

Пусть начальные угловые скорости будут:

$$\omega_1 = \frac{1}{4}, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_3 = 1.$$

Тогда постоянной энергии будет:

$$c = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 13{,}3\,\pi,$$

а постоянная момента количества движения определится равенством:

$$d^2 = A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = 155{,}04\,\pi^2,$$

так что

$$d = 12{,}452\,\pi,\ Ac - d^2 = 121{,}60\,\pi^2,\ Bc - d^2 = 57{,}76\,\pi^2,\ d^2 - cC = 48{,}64\,\pi^2.$$

Модуль эллиптических функций определяется равенством:

$$k^2 = \frac{(A - B)(d^2 - cC)}{(B - C)(Ac - d^2)} = 0{,}240.$$

Отсюда
$$k'^2 = 1 - k^2 = 0{,}760,$$
$$q = \frac{1}{2}\frac{1 - k'^{\frac{1}{2}}}{1 + k'^{\frac{1}{2}}} + 2\left\{\frac{1}{2}\frac{1 - k'^{\frac{1}{2}}}{1 + k'^{\frac{1}{2}}}\right\}^5 + \cdots = 0{,}0171,$$
$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + 2q - 2q^4 + 2q^9 + \cdots = 1{,}0342,$$
следовательно,
$$K = 1{,}68013,$$
$$K' = -\frac{K}{\pi}\ln q = 2{,}176.$$

Далее,
$$\lambda^2 = \frac{(B - C)(Ac - d^2)}{ABC} = 0{,}3654,$$
следовательно,
$$\lambda = 0{,}6045$$
и
$$\mu = \frac{\pi\lambda}{2K} = 0{,}5651.$$

Период углов ϑ и ψ есть $\dfrac{4K}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{\mu} = 11{,}118$.

Для разложения ϑ и ψ в тригонометрические ряды нам необходимо определить γ. Для этой цели воспользуемся соотношением:
$$\frac{B(A - C)}{A(B - C)} = 1{,}2308,$$
т. е.
$$\left\{\frac{B(A - C)}{A(B - C)}\right\}^{\frac{1}{2}} = 1{,}1094.$$
И поэтому, пренебрегая q^4, будем иметь:
$$\frac{1 + 2q\operatorname{ch}2\gamma}{1 - 2q\operatorname{ch}2\gamma} = \frac{1{,}1094}{0{,}9337}.$$
Отсюда следует:
$$\operatorname{ch}2\gamma = 2{,}503,$$
$$2\gamma = 1{,}568,$$
$$\gamma = 0{,}784.$$

Величина a определится теперь из равенства:
$$a = \frac{2K}{\pi}\gamma = 0{,}8385.$$

Для предельного случая $A = B$ модуль k делается равным нулю. Эллиптические функции переходят, следовательно, в круговые, и решение может быть написано следующим образом:

$$\sin\vartheta\cos\psi = \frac{\cos\lambda t}{\operatorname{ch} a}, \quad \sin\vartheta\sin\psi = \frac{\sin\lambda t}{\operatorname{ch} a}, \quad \cos\vartheta = \operatorname{th} a,$$

где

$$\lambda = \left\{\frac{(A-C)(Ac-d^2)}{A^2C}\right\}^{\frac{1}{2}}, \ \operatorname{sh} a = \left\{\frac{C(Ac-d^2)}{A(d^2-cC)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \ \operatorname{ch} a = \left\{\frac{d^2(A-C)}{A(d^2-cC)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Движение, следовательно, складывается из равномерной прецессии относительно неизменяемой прямой OZ и вращения тела вокруг собственной оси симметрии Oz.

Другой предельный случай представится тогда, когда $d^2 = cB$ и, следовательно, $k^2 = 1$. В этом случае эллиптические функции переходят в гиперболические. Это иллюстрируется следующими примерами.

Задача 1. Твердое тело движется по инерции вокруг неподвижной точки. Показать, что если $d^2 = Bc$ и при $t = 0$ ω_1 и ω_3 положительны, а $\omega_2 = 0$, то для всякого значения времени t направляющие косинусы оси B относительно первоначального направления главных осей равны соответственно:

$$\alpha\operatorname{th}\chi - \frac{\gamma\sin\mu}{\operatorname{ch}\chi}, \quad \frac{\cos\mu}{\operatorname{ch}\chi}, \quad \gamma\operatorname{th}\chi + \frac{\alpha\sin\mu}{\operatorname{ch}\chi},$$

где

$$\mu = \frac{dt}{B}, \ \chi = \frac{dt}{B}\left\{\frac{(A-B)(B-C)}{AC}\right\}^{\frac{1}{2}}, \ \alpha = \left\{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}\right\}^{\frac{1}{2}}, \ \gamma = \left\{\frac{C(A-B)}{B(A-C)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для доказательства заметим, что при $Bc = d^2$ координата ϑ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\vartheta}\right) = d\left(\frac{B-C}{BC}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{Ac-d^2}{Ad^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\vartheta} - \frac{A-C}{AC}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

допускающему интеграл

$$\cos\vartheta = \frac{\gamma}{\operatorname{ch}\chi},$$

где γ и χ имеют вышеопределенные значения. Уравнение

$$\frac{A-B}{AB}\sin^2\vartheta\sin^2\psi = \frac{Ac-d^2}{Ad^2} \quad \frac{A-C}{AC}\cos^2\vartheta$$

даст тогда:

$$\sin\vartheta\sin\psi = \operatorname{th}\chi$$

и уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{A}\cos^2\psi + \frac{d}{B}\sin^2\psi$$

даст:

$$\sin(\varphi - \mu) = -\gamma \sin\psi.$$

Эти уравнения показывают, что направляющие косинусы оси B относительно осей $OXYZ$, т. е. (§ 10) величины:

$$-\cos\varphi\cos\vartheta\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi, \quad -\sin\varphi\cos\vartheta\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi, \quad \sin\vartheta\sin\psi$$

равны соответственно:

$$-\frac{\sin\mu}{\operatorname{ch}\chi}, \quad \frac{\cos\mu}{\operatorname{ch}\chi}, \quad \operatorname{th}\chi.$$

Пусть $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}$ означают первоначальные направления главных осей. Так как

$$A^2\omega_1^2 + C^2\omega_3^2 = d^2 = Bc = B(A\omega_1^2 + C\omega_3^2)$$

и, следовательно,

$$A\omega_1 = \alpha d, \quad C\omega_3 = \gamma d,$$

то для направляющих косинусов направлений $\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}$ относительно $OXYZ$ имеет место следующая схема:

	X	Y	Z
ω_{10}	γ	0	α
ω_{20}	0	1	0
ω_{30}	$-\alpha$	0	γ

Поэтому направляющие косинусы оси B относительно ω_{10}, ω_{20}, ω_{30} равны:

$$-\frac{\gamma\sin\mu}{\operatorname{ch}\chi} - \alpha\operatorname{th}\chi, \quad \frac{\cos\mu}{\operatorname{ch}\chi}, \quad \frac{\alpha\sin\mu}{\operatorname{ch}\chi} + \gamma\operatorname{th}\chi.$$

Задача 2. Показать, что при $d^2 = BC$ ось Oy описывает на шаре, с центром в закрепленной точке, локсодрому относительно меридиана, проходящего через неизменяемую прямую.

Возвращаясь снова к общему случаю, дадим выражение третьего угла Эйлера φ как функции от времени. Имеем:

$$\dot{\varphi} = \frac{d}{A} + d\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\sin^2\psi.$$

Но

$$\operatorname{ctg}\psi = \frac{\operatorname{cn}\lambda t}{\operatorname{dn} ia \operatorname{sn}\lambda t},$$

откуда следует:

$$\sin^2\psi = \frac{\operatorname{dn}^2 ia \operatorname{sn}^2\lambda t}{1 - k^2\operatorname{sn}^2 ia \operatorname{sn}^2\lambda t}.$$

Эта функция обращается в нуль при $t = 0$ и имеет полюсы при нулевых значениях знаменателя, т. е. в точках, для которых

$$\operatorname{sn}\lambda t = \pm\frac{1}{k\operatorname{sn} ia} = \pm\operatorname{sn}(ia \pm iK').$$

Поэтому в параллелограмме периодов $(2K, 2iK')$ эта функция имеет полюсы в точках

$$\lambda t = ia + iK' \quad \text{и} \quad \lambda t = -ia + iK'.$$

В окрестности первого полюса имеем $\lambda t = ia + iK' + \varepsilon$ и, пренебрегая высшими степенями ε, имеем:

$$\sin^2\psi = \frac{\dfrac{\operatorname{dn}^2 ia}{k^2\operatorname{sn}^2 ia}}{1-\left\{\dfrac{\operatorname{sn}^2 ia}{\operatorname{sn}^2(ia+\varepsilon)}\right\}} = \frac{\operatorname{dn}^2 ia}{k^2\operatorname{sn}^2 ia + 2\varepsilon k^2\operatorname{sn} ia\operatorname{cn} ia\operatorname{dn} ia - k^2\operatorname{sn}^2 ia}.$$

Отсюда вычет функции $d\left(\dfrac{1}{B} - \dfrac{1}{A}\right)\sin^2\psi$ (рассматриваемой как функция от λt) для этого полюса равен:

$$\frac{1}{2i}\left\{\frac{(B-C)(Ac-d^2)}{ABC}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{2i}.$$

Поэтому, если рассматривать как переменную $\dfrac{\lambda t}{2K}$, то вычет равен $\dfrac{-i\lambda}{4K}$. Так как теперь для нашей функции известны нули, полюсы и вычеты, то мы ее можем представить как сумму логарифмических производных ϑ-функций. А именно, так как $\vartheta_{01}(v)$ имеет простой нуль, при $v = \dfrac{1}{2}\omega = \dfrac{iK'}{2K}$, то

$$\dot\varphi = \frac{d}{A} - \frac{i\lambda}{4K}\left\{\frac{\vartheta_{01}'\left(\dfrac{\lambda t - ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t - ia}{2K}\right)} - \frac{\vartheta_{01}'\left(\dfrac{\lambda t + ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t + ia}{2K}\right)} + 2\frac{\vartheta_{01}'\left(\dfrac{ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)}\right\}$$

и поэтому

$$e^{2i\varphi} = \operatorname{const}\frac{\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t - ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t + ia}{2K}\right)}\cdot e^{\left\{\frac{2id}{A}\cdot\frac{\lambda}{K}\frac{\vartheta_{01}'\left(\frac{ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\frac{ia}{2K}\right)}\right\}t}.$$

Но величина $\dfrac{\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t - ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{\lambda t + ia}{2K}\right)}$, рассматриваемая как функция от t, имеет вещественный период $\dfrac{2K}{\lambda}$. Поэтому показательная функция правой части дает *среднее движение* φ, т. е. прецессионное движение системы относительно неизменяемой прямой. Так как

$$\vartheta_{01}(v) = 1 - 2q\cos 2\pi v + 2q^4\cos 4\pi v - \ldots,$$
$$\vartheta'_{01}(v) = 4\pi q\sin 2\pi v - 8\pi q^4\sin 4\pi v - \ldots,$$

то коэффициент при t в выражении для φ, т. е. постоянная часть величины $\dot{\varphi}$ или прецессия

$$\frac{d}{A} + \frac{\lambda}{2iK}\frac{\vartheta'_{01}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)}{\vartheta_{01}\left(\dfrac{ia}{2K}\right)},$$

может быть написана в форме:

$$\frac{d}{A} + 4\mu\frac{q\,\mathrm{sh}\,2\gamma - 2q^4\,\mathrm{sh}\,4\gamma + \ldots}{1 - 2q\,\mathrm{ch}\,2\gamma - 2q^4\,\mathrm{ch}\,4\gamma - \ldots}$$

из которой он и вычисляется.

Пример 1. Для вышерассмотренного эллипсоида с полуосями $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ имеем:

$$2\gamma = 1{,}568, \quad \mathrm{sh}\,2\gamma = 2{,}294, \quad \mathrm{ch}\,2\gamma = 2{,}503,$$
$$d = 12{,}452\pi, \quad A = 20{,}8\pi, \quad \mu = 0{,}5651, \quad q = 0{,}0171.$$

Поэтому среднее движение φ, которое при отбрасывании q^4 может записано в форме:

$$\frac{d}{A} + 4\mu\cdot\frac{q\,\mathrm{sh}\,2\gamma}{1 - 2q\,\mathrm{ch}\,2\gamma},$$

равно

$$0{,}5986 + 0{,}0970 = 0{,}6956.$$

Пример 2. На однородный круглый диск, центр которого O закреплен неподвижно, не действуют никакие внешние силы. Диску сообщена начальная угловая скорость Ω вокруг диаметра, совпадающего с неподвижной прямой $O\xi$, и угловая скорость n вокруг оси, совпадающей с неподвижной прямой $O\zeta$. Показать, что для всякого последующего момента времени

$$\chi = 2\arcsin\left[\frac{\Omega}{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}}\sin\left\{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t\right\}\right],$$

$$\omega = \operatorname{arcctg}\left[\frac{\Omega}{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{tg}\left\{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t\right\}\right],$$

где χ означает угол между $O\zeta$ и осью Oz диска, а ω — угол, образованный плоскостями $\zeta O\xi$ и ζOz.

Пусть, как и выше, OZ совпадает с неизменяемой прямой. В сферическом треугольнике $Z\zeta z$, вершины которого образованы точками пересечения прямых OZ, $O\zeta$, Oz с некоторой сферой, имеющей центр в O, $Zz - \vartheta$, $\zeta Zz - \varphi$. Кроме того, для диска имеют место соотношения $C = 2B = 2A$. Поэтому

$$d^2 = A^2\Omega^2 + C^2n^2 = A^2(\Omega^2+4n^2),$$

откуда

$$\frac{d}{A} = (\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Уравнения движения для ϑ и φ дают:

$$\dot\vartheta = 0, \quad \dot\varphi = \frac{d}{A} = (\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}},$$

откуда

$$\vartheta = Z\zeta = \arccos\frac{2n}{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi = (\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}t.$$

Поэтому в сферическом треугольнике $Z\zeta z$:

$$Z\zeta = Zz = \arccos\frac{2n}{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}}, \ \widehat{\zeta Z z} = (\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}t, \ \widehat{\zeta Z z} = \omega, \ \zeta z = \chi.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sin\frac{1}{2}\chi = \sin Z\zeta\sin\frac{1}{2}\zeta Zz = \frac{\Omega}{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}}\sin\left\{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t\right\}$$

и

$$\operatorname{ctg}\omega - \cos Z\zeta \operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta Zz - \frac{2n}{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{tg}\left\{(\Omega^2+4n^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{2}t\right\}.$$

Таким образом, мы получили искомые уравнения.

§ 70. Кинематическое представление движения по Пуансо; полодии и герполодии. Изящный метод кинематического представления движения по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки дал Пуансо[1].

Эллипсоид инерции тела относительно закрепленной точки имеет по отношению к подвижной системе координат $Oxyz$ уравнение:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Рассмотрим касательную плоскость к эллипсоиду инерции, перпендикулярную к неизменяемой прямой. Пусть p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость. Так как направляющие косинусы этого перпендикуляра равны соответственно $\frac{A\omega_1}{d}$, $\frac{B\omega_2}{d}$, $\frac{C\omega_3}{d}$ то

$$p^2 = \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2}{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2} = \frac{c}{d^2} = \text{const}.$$

Таким образом, перпендикуляр, опущенный на касательную плоскость, остается неизменным как по величине, так и по направлению; следовательно, и касательная плоскость остается неизменной в пространстве. Эллипсоид инерции все время касается этой неизменяемой плоскости. Пусть x', y', z' координаты точки касания эллипсоида с плоскостью. Отождествляя уравнения:

$$Axx' + Byy' + Czz' = 1 \quad \text{и} \quad A\omega_1 x - B\omega_2 y + C\omega_3 z = pd,$$

мы получим для этих координат значения:

$$x' = \frac{\omega_1}{pd} = \frac{\omega_1}{\sqrt{c}}, \quad y' = \frac{\omega_2}{pd} = \frac{\omega_2}{\sqrt{c}}, \quad z' = \frac{\omega_3}{pd} = \frac{\omega_3}{\sqrt{c}}.$$

Радиус-вектор точки (x', y', z') является, следовательно, мгновенной осью вращения тела. Отсюда следует: *тело движется таким образом, что связанный с ним эллипсоид инерции относительно закрепленной*

[1] *Poinsot*, Theorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834.

точки катится без скольжения по некоторой неподвижной плоскости, перпендикулярной к неизменяемой прямой. При этом угловая скорость пропорциональна радиусу-вектору точки касания, так что проекция ее на неизменяемую прямую остается постоянной.

Задача 1. Тело, вращающееся вокруг неподвижной точки, находится сначала в покое, а затем подвергается действию постоянной по величине и направлению пары сил. Показать, что построение Пуансо остается справедливым и в этом случае, но проекция угловой скорости на неизменяемую прямую является не постоянной, а некоторой функцией времени.

В самом деле, момент количества движения тела относительно неподвижной оси OZ, перпендикулярной к плоскости пары, получает за всякий элементарный промежуток времени dt приращение Ndt. Следовательно, в момент времени t момент количества движения тела относительно OZ равен Nt. Компоненты момента количества движения по главным осям инерции $Oxyz$ равны соответственно $A\omega_1$, $B\omega_2$, $C\omega_3$, где A, B и C — главные моменты инерции, а ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты угловой скорости. Поэтому

$$A\omega_1 = -Nt\sin\vartheta\cos\psi, \quad B\omega_2 = Nt\sin\vartheta\sin\psi, \quad C\omega_3 = Nt\cos\vartheta,$$

где ϑ, φ и ψ — углы Эйлера, определяющие направление осей $Oxyz$ относительно неподвижных осей $OXYZ$. Эти уравнения отличаются от уравнений движения тела по инерции только тем, что вместо dt в них входит tdt. Следовательно, движение, определяемое этими уравнениями, отличается от движения по инерции тем, что все скорости умножаются на величину t, чем и доказывается вышеуказанное предложение.

Задача 2. Гиперболоид связан с телом, вращающимся по инерции вокруг неподвижной точки; направления осей гиперболоида совпадают с главными осями инерции тела относительно закрепленной точки; квадраты полуосей пропорциональны соответственно величинам $d^2 - Ac$, $d^2 - Bc$, $d^2 - Cc$, где A, B, C — главные моменты инерции тела относительно закрепленной точки, c — его удвоенная кинетическая энергия и d — главный момент количества движения. Показать, что при движении гиперболоид катится по некоторому круговому цилиндру, ось которого параллельна оси главного момента количества движения, и проходит через закрепленную точку. (Siacci.)

При движении тела точка касания эллипсоида с плоскостью описывает на эллипсоиде некоторую кривую, которая называется полодией. Ее уравнение относительно главных осей инерции дается, очевидно, уравнением эллипсоида совместно с уравнением $p = \text{const}$, т. е. уравнениями:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \frac{d^2}{c}.$$

Задача 3. Показать, что если $A = B$, то полодия будет окружностью.

Задача 4. Пусть $A \geqslant B \geqslant C$. Показать, что все полодии разбиваются на два класса: полодии первого класса представляют собой замкнутые кривые, охватывающие ось z эллипсоида инерции, и соответствуют случаю $cB > d^2 > cC$;

полодии второго класса представляют собой замкнутые кривые, охватывающие ось x, и соответствуют случаю $cA > d^2 > cB$. Оба эти класса разделяются полодией, соответствующей соотношению $cB - d^2 = 0$. Эта последняя полодия состоит из двух эллипсов, проходящих через концы средней оси эллипсоида инерции.

Кривая, описываемая точкой касания эллипсоида с неподвижной плоскостью на этой плоскости, называется *герполодией.*

Для определения уравнения герполодии обозначим через ρ и χ полярные координаты точки касания с началом в основании перпендикуляра, опущенного из закрепленной точки на неподвижную плоскость. Если x', y', z' означают координаты той же точки относительно подвижных осей $Oxyz$, то величина $x'^2+y'^2+z'^2$ равна квадрату радиуса-вектора, соединяющего эту точку с точкой опоры, и поэтому

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \rho^2 + \frac{c}{d^2}.$$

Заменяя x', y', z' их значениями из уравнений:

$$x' = \frac{\omega_1}{\sqrt{c}} = -\frac{d\sin\vartheta\cos\psi}{A\sqrt{c}},$$
$$y' = \frac{\omega_2}{\sqrt{c}} = \frac{d\sin\vartheta\sin\psi}{B\sqrt{c}},$$
$$z' = \frac{\omega_3}{\sqrt{c}} = \frac{d\cos\vartheta}{C\sqrt{c}},$$

получим:

$$\rho^2 = -\frac{c}{d^2} + \frac{d^2}{A^2c}\sin^2\vartheta\cos^2\psi + \frac{d^2}{B^2c}\sin^2\vartheta\sin^2\psi + \frac{d^2}{C^2c}\cos^2\vartheta.$$

Заменяя ϑ и ψ их выражениями через t, будем иметь:

$$\rho^2 = \frac{(cA-d^2)(d^2-cC)}{cd^2A^2B^2C^2}\left\{ACB^2 - \frac{(B-C)(A-B)d^2}{\wp(t)-e_3}\right\} =$$
$$= \frac{(cA-d^2)(d^2-cC)}{cd^2AC}\cdot\frac{\wp(t)-\wp(l-\omega)}{\wp(t)-e_3},$$

где ω — полупериод, соответствующий корню e_1. Полученное уравнение определяет радиус-вектор герполодии как функцию времени.

Для определения χ заметим, что величина $\dfrac{\sqrt{c}\rho^2\dot{\chi}}{d}$ равна ушестеренному объему тетраэдра, вершины которого образованы точкой опоры, основанием перпендикуляра, опущенного из точки опоры на неподвижную плоскость, и двумя бесконечно близкими точками касания, деленному на соответствующий интервал времени. Эта величина может быть представлена в форме:

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ \dfrac{Acx'}{d^2} & \dfrac{Bcy'}{d^2} & \dfrac{Ccz'}{d^2} \\ \dot{x}' & \dot{y}' & \dot{z}' \end{vmatrix} = \frac{c}{d^2} x'y'z' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ A & B & C \\ \dfrac{\dot{x}'}{x'} & \dfrac{\dot{y}'}{y'} & \dfrac{\dot{z}'}{z'} \end{vmatrix}.$$

За исключением $\dot{\chi}$ все входящие величины являются известными функциями времени. Заменяя эти величины их выражениями через t и сокращая, получим:

$$\dot{\chi} = \frac{d}{B\left\{\wp(t) - \wp(l+\omega)\right\}}\left\{\wp(l) - \frac{(B-C)e_2 + (A-B)e_1}{A-C}\right\}.$$

Этому выражению можно придать вид:

$$\dot{\chi} = \frac{d}{B} - \frac{i}{2}\frac{\wp'(l+\omega)}{\wp(t) - \wp(l+\omega)}.$$

Это уравнение может быть так же проинтегрировано, как и уравнение, определяющее угол φ. Интегрирование даст:

$$e^{2i(\chi-\chi_0)} = e^{\left\{\frac{2id}{B} - 2\zeta(l+\omega)\right\}t}\frac{\sigma(t+l+\omega)}{\sigma(t-l-\omega)},$$

где χ_0 — постоянная интегрирования. Таким образом, текущие координаты ρ и χ герполодии определены как функции от t.

Задача 5. Материальная точка движется таким образом, что ее момент количества движения относительно начала координат есть линейная функция квадрата радиуса-вектора, а квадрат ее скорости есть квадратичная функция квадрата радиуса-вектора, в которой коэффициент при наивысшей степени имеет отрицательное значение. Показать, что траектория есть герполодия Пуансо, причем, однако, A, B и C не ограничиваются уже только положительными значениями.

Задача 6. Исследовать случаи, при которых полодия состоит из: a) двух эллипсов, пересекающихся по средней оси эллипсоида инерции; b) двух параллельных окружностей; c) двух точек. В этих случаях герполодия будет спиралью (уравнение которой может быть выражено в эллиптических функциях), окружностью или точкой.

§ 71. Движение волчка по абсолютно шероховатой плоскости; определение угла ϑ. Волчком называется тело, имеющее ось симметрии и оканчивающееся острым концом.

Мы исследуем движение волчка, вращающегося вокруг своей оси и опирающегося своим острым концом O на абсолютно шероховатую плоскость. Конец O можно практически рассматривать как закрепленную точку. Задача приводится к определению движения тела вращения под действием силы тяжести, когда одна из точек его оси закреплена неподвижно в пространстве[1].

Пусть A, A, C — моменты инерции тела относительно связанной с ним системы координат $Oxyz$, начало которой совпадает с закрепленной точкой, а ось z с осью волчка. Направление осей $Oxyz$ мы будем определять по отношению к неподвижной в пространстве системе $OXYZ$ при помощи трех углов Эйлера ϑ, φ, ψ. Ось OZ предполагается направленной вертикально вверх.

Для кинетической энергии имеем согласно § 63 выражение:

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2\right),$$

где ω_1, ω_2, ω_3 компоненты угловой скорости по подвижным осям координат. Для них согласно § 16 справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot\vartheta\sin\psi - \dot\varphi\sin\vartheta\cos\psi,\\
\omega_2 &- \dot\vartheta\cos\psi - \dot\varphi\sin\vartheta\sin\psi,\\
\omega_3 &= \dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta.
\end{aligned}$$

Поэтому кинетическая энергия:

$$T = \frac{1}{2}A\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}A\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}C\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2.$$

Потенциальная энергия:

$$V = Mgh\cos\vartheta,$$

где M — масса волчка и h — расстояние его центра тяжести от закрепленной точки.

Отсюда для кинетического потенциала имеем:

$$L = T - V = \frac{1}{2}A\dot\vartheta^2 + \frac{1}{2}A\dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}C\left(\dot\psi + \dot\varphi\cos\vartheta\right)^2 - Mgh\cos\vartheta.$$

Координаты φ и ψ являются, очевидно, циклическими; им соответствуют интегралы:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi} = \text{const},\qquad \frac{\partial T}{\partial\dot\psi} = \text{const}$$

---

[1] *Lagrange*, Mec. Anal., Oeuvres, т. 12, стр. 251.

или

$$A\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + C\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta = a,$$

$$C\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right) = b,$$

где a и b — постоянные. Эти интегралы могут быть истолкованы как интегралы моментов количества движения относительно осей OZ и Oz и, следовательно, могли бы быть получены непосредственно из общих динамических принципов.

Измененный кинетический потенциал приведенной системы (§ 38) равен:

$$R = L - a\dot{\varphi} - b\dot{\psi} = \frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 - \frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} - \frac{b^2}{2C} - Mgh\cos\vartheta.$$

Член $-\dfrac{b^2}{2C}$ может быть отброшен как постоянный. Уравнением движения будет

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial\vartheta} = 0,$$

т. е. ϑ изменяется так же, как и в динамической системе с одной степенью свободы, имеющей кинетическую энергию $\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2$ и потенциальную энергию

$$\frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + Mgh\cos\vartheta.$$

Поэтому зависимость между ϑ и t может быть получена из интеграла энергии приведенной системы, а именно:

$$\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 = -\frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} - Mgh\cos\vartheta - c,$$

где c — некоторая постоянная.

Полагая в этом уравнении $\cos\vartheta = x$, получим:

$$A^2\dot{x}^2 = -(a - bx)^2 - 2AMgh(x - x^3) + 2Ac(1 - x^2).$$

В правой части стоит полином третьей степени относительно x; при $x = -1$ он имеет отрицательное значение; при некоторых действительных значениях ϑ, т. е. при некоторых значениях x, заключенных между -1 и $-\mathbf{1}$, он должен быть положителен, так как левая часть уравнения положительна; при $x = 1$ он снова принимает отрицательное значение, а при $x = +\infty$ — положительное значение. Следовательно, полином имеет два действительных корня в интервале $(-1, +1)$ и третий корень, также действительный, больший единицы. Обозначим эти три корня соответственно через

$$\cos\alpha, \quad \cos\beta, \quad \operatorname{ch}\gamma,$$

где $\cos\beta > \cos\alpha$, так что $\alpha > \beta$.

Тогда дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\left(\frac{Mgh}{2A}\right)^{\frac{1}{2}} dt = \{4(x - \cos\alpha)(x - \cos\beta)(x - \operatorname{ch}\gamma)\}^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Полагая

$$x = \frac{2A}{Mgh}z + \frac{1}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \operatorname{ch}\gamma) = \frac{2A}{Mgh}z + \frac{2Ac + b^2}{6AMgh},$$

получим:

$$t + \mathrm{const} = \int \{4(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)\}^{-\frac{1}{2}}\, dz,$$

где постоянные e_1, e_2, e_3 определяются уравнениями:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{Mgh}{2A}\operatorname{ch}\gamma - \frac{2Ac + b^2}{12A^2},\\
e_2 &= \frac{Mgh}{2A}\cos\beta - \frac{2Ac + b^2}{12A^2},\\
e_3 &= \frac{Mgh}{2A}\cos\alpha - \frac{2Ac + b^2}{12A},
\end{aligned}$$

так что e_1, e_2, e_3 действительны и удовлетворяют соотношениям:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 > e_2 > e_3.$$

Следовательно, z и t связаны соотношением:

$$z = \wp(t + \varepsilon),$$

где ε — постоянная интегрирования, а функция $\wp$ образована при помощи корней e_1, e_2, e_3. Отсюда следует, что

$$x = \frac{2A}{Mgh}\wp(t + \varepsilon) + \frac{2Ac + b^2}{6AMgh}.$$

Для того чтобы $\dot{x}$ при действительных значениях t был действительным, необходимо, очевидно, чтобы при действительных величинах t $\wp(t+\varepsilon)$ заключалась между e_2 и e_3. Поэтому мнимая часть величины ε должна равняться полупериоду ω_3, соответствующему корню e_3. Действительная часть ε зависит от начала отсчета времени и подходящим выбором последнего может быть сделана нулем. Поэтому имеем окончательно:

$$\cos\vartheta = \frac{2A}{Mgh}\wp(t+\omega_3) + \frac{2Ac+b^2}{6AMgh}.$$

Это уравнение дает выражение угла Эйлера ϑ через время[1].

Задача 1. Волчок приведен в движение таким образом, что в начальный момент

$$\vartheta = 60^\circ, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 2\left(\frac{Mgh}{3A}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \dot{\psi} = (3A - C)\left(\frac{Mgh}{3AC^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Показать, что для всякого другого момента времени t

$$\frac{1}{\cos\vartheta} - 1 + \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{\dfrac{Mgh}{A}}t\right)},$$

так что ось волчка непрерывно приближается к вертикали.

В самом деле, для постоянных a, b, c легко находим значения:

$$a = b = (3MghA)^{\frac{1}{2}}, \quad c = Mgh,$$

так что уравнение, определяющее x, принимает вид:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{Mgh}{A}(1-x^2)(2x-1),$$

чем и доказывается высказанное предположение.

Задача 2. На тело вращения, которое может вращаться вокруг одной закрепленной точки своей оси, действуют силы, имеющие потенциал $\mu\operatorname{ctg}^2\vartheta$, где ϑ — угол, образованный осью с некоторой неподвижной прямой. Показать, что уравнения движения могут быть проинтегрированы в элементарных функциях.

[1] Рассматриваемая задача может быть приведена к задаче движения сферического маятника (§ 55), если величины M, C, A, h, a, b, c, $\cos\vartheta$, φ, l, k заменить соответственно величинами 1, 0, l^2, l, k, 0, h, $\frac{z}{l}$, φ, λ, μ.

Поступая так же, как и в случае волчка, на абсолютно шероховатой плоскости, мы получим для интеграла энергии приведенной системы уравнение:

$$\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 = -\frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} - \mu\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta} + c.$$

Полагая $\cos\vartheta = x$, получим отсюда:

$$A^2\dot{x}^2 = -(a - bx)^2 - 2A\mu x^2 + 2Ac(1 - x^2).$$

Квадратичная форма, стоящая в правой части, будет отрицательной при $x = 1$ и при $x = -1$ и положительной при некоторых значениях x, лежащих между -1 и $+1$, так как левая часть при некоторых действительных значениях и является положительной. Следовательно, эта форма имеет два вещественных корня, лежащих между -1 и $+1$. Обозначая эти корни через $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, мы приведем это уравнение к виду:

$$\lambda^2\dot{x}^2 = (\cos\alpha - x)(x - \cos\beta),$$

решением которого будет:

$$x = \cos\alpha\sin^2\frac{t}{2\lambda} - \cos\beta\cos^2\frac{t}{2\lambda}.$$

§ 72. Определение остальных углов Эйлера и параметров Кэли–Клейна; шаровой волчок. В предыдущем параграфе мы выразили ϑ как функцию времени; остается определить теперь другие углы Эйлера: φ и ψ. С этой целью мы воспользуемся обоими интегралами, соответствующими циклическим координатам φ и ψ. Решение этих интегралов относительно $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ даст:

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta},$$

$$\dot{\psi} = \frac{b}{C} - \frac{(a - b\cos\vartheta)\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta}.$$

Из полученных уравнений для $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ и уравнения для $\dot{\vartheta}$ мы видим, что если рассматривать движения в зависимости от постоянных M, A, C, h и постоянных интегрирования a, b, c, то постоянная C входит только в постоянный член выражения для $\dot{\psi}$. Отсюда следует, что вспомогательному волчку с моментами инерции A, A, A мы можем придать такое движение, чтобы его ось симметрии постоянно совпадала с осью симметрии заданного волчка. Единственное различие в движениях обоих волчков будет заключаться в том, что вспомогательный волчок будет обладать дополнительной постоянной угловой скоростью $\dfrac{b(C - A)}{AC}$ вокруг своей оси симметрии. Такого рода волчок с равными моментами инерции называется *шаровым.* Следовательно, движение всякого волчка может быть легко представлено как движение некоторого шарообразного волчка. Мы можем, следовательно, не нарушая общности рассуждений, вместо произвольного волчка всегда рассматривать волчок шарообразный.

Полагая в силу вышесказанного $C = A$ для определения φ и ψ получим следующие уравнения:

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} = \frac{a+b}{2A(\cos\vartheta+1)} - \frac{a-b}{2A(\cos\vartheta-1)},$$

$$\dot{\psi} = \frac{b - a\cos\vartheta}{A\sin^2\vartheta} = \frac{a+b}{2A(\cos\vartheta+1)} + \frac{a-b}{2A(\cos\vartheta-1)}.$$

Заменяя $\cos\vartheta$ его значением из уравнения

$$\cos\vartheta = \frac{2A}{Mgh}\wp(t+\omega_3) + \frac{2Ac+b^2}{6AMgh}$$

и полагая

$$\wp(l) = \frac{Mgh}{2A} - \frac{2Ac+b^2}{12A^2},$$

$$\wp(k) = -\frac{Mgh}{2A} - \frac{2Ac+b^2}{12A^2},$$

так что l и k являются известными мнимыми постоянными (они равны значениям $t+\omega_3$, соответствующим $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$), мы приведем эти уравнения к виду:

$$\dot{\varphi} = \frac{Mgh(a+b)}{4A^2}\cdot\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)} - \frac{Mgh(a-b)}{4A^2}\cdot\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)},$$

$$\dot{\psi} = \frac{Mgh(a+b)}{4A^2}\cdot\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)} - \frac{Mgh(a-b)}{4A^2}\cdot\frac{1}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)}.$$

Постоянные коэффициенты, стоящие в правых частях полученных уравнений, могут быть выражены через значения производной от функции $\wp$. Для этого мы установим зависимость между функцией $\wp$ и ее производной. Эта зависимость легко устанавливается, если значение x из уравнения:

$$x = \frac{2A}{Mgh}\wp(t+\omega_3) + \frac{2Ac+b^2}{6AMgh}$$

подставить в уравнение:

$$A^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -(a-bx)^2 - 2AMgh(x-x^3) + 2Ac(1-x^2).$$

Если k принять за аргумент функции $\wp$, то из определения k вытекает, что соответствующее значение x равно -1. Поэтому последнее уравнение дает:

$$A^2\left\{\frac{2A\wp'(k)}{Mgh}\right\}^2=-(a+b)^2$$

или

$$\wp'(k)=\frac{iMgh(a+b)}{2A^2}.$$

Аналогично получим:

$$\wp'(l)=\frac{iMgh(a-b)}{2A^2}.$$

Поэтому уравнения для φ и ψ могут быть записаны в форме:

$$2i\dot{\varphi}=\frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}-\frac{\wp'(l)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)},$$

$$2i\dot{\psi}=\frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}+\frac{\wp'(l)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(l)}.$$

Но

$$\frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}$$

есть эллиптическая функция, полюсы которой в каждом параллелограмме периодов конгруэнтны значениям $t=\pm k-\omega_3$. Соответствующие вычеты равны 1 и -1; функция имеет нули при $t+\omega_3=0$. Поэтому

$$\frac{\wp'(k)}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}=\zeta(t+\omega_3-k)-\zeta(t+\omega_3+k)+2\zeta(k)$$

и, следовательно,

$$\int\frac{\wp'(k)\,dt}{\wp(t+\omega_3)-\wp(k)}=\ln\frac{\sigma(t+\omega_3-k)}{\sigma(t+\omega_3+k)}+2\zeta(k)t+\text{const}.$$

Поэтому интегралы уравнений для φ и ψ могут быть записаны в форме:

$$e^{2i(\varphi-\varphi_0)}=\frac{\sigma(t+\omega_3-k)\sigma(t-\omega_3+l)}{\sigma(t+\omega_3+k)\sigma(t-\omega_3-l)}e^{2\{\zeta(k)-\zeta(l)\}t},$$

$$e^{2i(\psi-\psi_0)}=\frac{\sigma(t+\omega_3-k)\sigma(t-\omega_3-l)}{\sigma(t+\omega_3+k)\sigma(t-\omega_3+l)}e^{2\{\zeta(k)+\zeta(l)\}t},$$

где φ_0 и ψ_0 — постоянные интегрирования.

Эти уравнения приводят к простым выражениям для параметров Кэли Клейна $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (§ 12), определяющих положение подвижных осей $Oxyz$ относительно неподвижных осей $OXYZ$. Ибо согласно определению:

$$\alpha = \cos\frac{1}{2}\vartheta \cdot e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}, \quad \beta = i\sin\frac{1}{2}\vartheta \cdot e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)},$$

$$\gamma = i\sin\frac{1}{2}\vartheta \cdot e^{\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)}, \quad \delta = \cos\frac{1}{2}\vartheta \cdot e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)};$$

но, с другой стороны,

$$\cos^2\frac{1}{2}\vartheta = +\cos\vartheta = 1 + \frac{2A}{Mgh}\wp(t+\omega_3) + \frac{2Ac+b^2}{6AMgh} =$$

$$= \frac{2A}{Mgh}\left\{\wp(t+\omega_3) - \wp(k)\right\} = -\frac{2A}{Mgh}\frac{\sigma(t-\omega_3+k)\sigma(t+\omega_3-k)}{\sigma^2(k)\sigma^2(t+\omega_3)}$$

или

$$\cos\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{-A}{Mgh}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left\{\sigma(t+\omega_3+l)\sigma(t+\omega_3-l)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\sigma(l)\sigma(t+\omega_3)}$$

и аналогично:

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \left(\frac{A}{Mgh}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\left\{\sigma(t+\omega_3+l)\sigma(t+\omega_3-l)\right\}^{\frac{1}{2}}}{\sigma(l)\sigma(t+\omega_3)}.$$

Поэтому, комбинируя эти уравнения с найденными выражениями для $e^{2i\varphi}$ и $e^{2i\psi}$, найдем:

$$\alpha = \left(\frac{-A}{Mgh}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}i(\varphi_0+\psi_0)}}{\sigma(k)}\frac{\sigma(t+\omega_3-k)}{\sigma(t+\omega_3)}e^{t\zeta(k)},$$

$$\beta = \left(\frac{-A}{Mgh}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}i(\varphi_0-\psi_0)}}{\sigma(l)}\frac{\sigma(t+\omega_3+l)}{\sigma(t+\omega_3)}e^{-t\zeta(l)},$$

$$\gamma = \left(\frac{-A}{Mgh}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2}i(\psi_0-\varphi_0)}}{\sigma(l)}\frac{\sigma(t+\omega_3-l)}{\sigma(t+\omega_3)}e^{t\zeta(l)},$$

$$\delta = \left(\frac{-A}{Mgh}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{2}i(\varphi_0+\psi_0)}}{\sigma(k)}\frac{\sigma(t+\omega_3-k)}{\sigma(t+\omega_3)}e^{-t\zeta(k)}.$$

Эти уравнения дают выражения параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как функция времени.

Задача 1. Волчок массы M движется вокруг закрепленной точки своей оси симметрии. Моменты инерции относительно оси симметрии и относительно перпендикулярной к ней прямой, проходящей через точку опоры, равны соответственно C и A. Центр тяжести находится на расстоянии h от точки опоры. Волчок приводится в положение, при котором угол, образованный его осью и направленной вниз вертикалью, равен $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и ему сообщают угловую скорость $\dfrac{\sqrt{AMgh\sqrt{3}}}{C}$ вокруг его оси. Показать, что ось, если ее пустить, опишет конус

$$\sin^2\vartheta\sin 2\varphi = \left(-\cos\vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\cos\vartheta + \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

или

$$\sin^2\vartheta\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt[4]{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos\vartheta\right)^{\frac{1}{2}},$$

где φ — азимут, а ϑ — угол наклона оси волчка относительно направленной вверх вертикали. (Camt. Math. Tripos, часть I, 1894.)

В рассматриваемом случае начальные значения равны:

$$\cos\vartheta = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = 0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \frac{\sqrt{AMgh\sqrt{3}}}{C}.$$

Они дают:

$$a = -\frac{\sqrt{AMgh}}{\sqrt[4]{3}}, \quad b = \sqrt[4]{3}\sqrt{AMgh}, \quad C = -Mgh\sqrt{3}.$$

Подставляя эти значения в общее дифференциальное уравнение для ϑ, т. е. в уравнение

$$\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 = -\frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} - Mgh\cos\vartheta + c,$$

получим:

$$A\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta = -Mgh\left(\cos\vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3} + 2\cos\vartheta\right)\left(-\cos\vartheta + \sqrt{3}\right).$$

Уравнение

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b\cos\vartheta}{A^2\sin^2\vartheta}$$

даст:

$$\dot{\varphi} = -\sqrt{\frac{Mgh\sqrt{3}}{A}}\cdot\frac{\cos\vartheta + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sin^2\vartheta}.$$

Деля это уравнение на квадратный корень из предыдущего, получим:

$$\varphi - 3^{\frac{1}{4}} \int \left(-\cos\vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{3} + 2\cos\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\cos\vartheta + \sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}$$

или

$$\varphi = 3^{\frac{1}{4}} \int \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{3} - 2x\right)^{-\frac{1}{2}} \left(x + \sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-1}\, dx,$$

где $x = -\cos\vartheta$.

Полагая теперь

$$u = \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(x - \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^{-\frac{1}{2}},$$

дифференцируя, получим:

$$\frac{du}{dx} = \frac{3}{2}(1 - x^2) \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(x + \sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^{-\frac{3}{2}}$$

и

$$1 + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} u^2 = \frac{3^{\frac{3}{2}} (1 - x^2)^2}{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)}.$$

Поэтому имеем:

$$\varphi = \frac{3^{\frac{3}{4}}}{4\sqrt{2}} \int \frac{du}{1 + \frac{3^{\frac{3}{2}}}{8} u^2}$$

или

$$2\varphi = \operatorname{arctg}\left(3^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} u\right)$$

или

$$\operatorname{tg} 2\varphi = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}} \left(-\cos\vartheta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \left(-\cos\vartheta - \sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\vartheta\right)^{-\frac{1}{2}},$$

что эквивалентно высказанному выше положению.

Задача 2. Показать, что логарифмы параметров Кэли Клейна, рассматриваемые как функции t, представляют эллиптические интегралы третьего рода.

Задача 3. Вывести выражения параметров Кэли–Клейна как функций времени, показав, что они удовлетворяют дифференциальным уравнениям вида:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + Yy = 0,$$

где Y есть некоторая двоякопериодическая функция времени. Эти уравнения принадлежат к типу уравнений Эрмита–Ламэ и, следовательно, могут быть проинтегрированы при помощи эллиптических функций второго рода.

Одним из простых видов движения волчка является такое движение, при котором ось волчка сохраняет постоянный наклон по отношению к вертикали. При таком так называемом *стационарном* движении величины $\dot{\vartheta}$ и $\ddot{\vartheta}$ равны постоянно нулю. Так как

$$\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 = -\frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} - Mgh\cos\vartheta - c,$$

то

$$0 - \frac{d}{d\vartheta}\left\{\frac{(a - b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta} + Mgh\cos\vartheta\right\}$$

По выполнении дифференцирования и замене величины $a - b\cos\vartheta$ ее значением $A\dot{\varphi}\sin^2\vartheta$ получим:

$$0 = -b\dot{\varphi} + A\dot{\varphi}^2\cos\vartheta + Mgh.$$

Это уравнение дает зависимость между постоянными $\dot{\varphi}$, ϑ и b (из которых последняя зависит от скорости вращения волчка вокруг его оси) при стационарном движении.

§ 73. Движение волчка на гладкой плоскости[1]**.** Волчок, вращающийся вокруг своей оси, опирается своим острым концом на гладкую горизонтальную плоскость. Реакция плоскости направлена вертикально вверх, и поэтому горизонтальный компонент скорости центра тяжести G волчка есть величина постоянная. Не нарушая общности рассуждений, мы можем этот компонент принять равным нулю, так что центр тяжести будет перемещаться по неподвижной вертикальной прямой. Эту прямую мы примем за ось Z; две горизонтальные взаимно перпендикулярные прямые образуют оси X и Y.

Пусть $Gxyz$ — главные оси инерции волчка в центре тяжести, A, A, C — соответствующие моменты инерции и, следовательно, Gz есть ось симметрии. Положение осей $Gxyz$ относительно осей X, Y, Z пусть определяется углами Эйлера ϑ, φ, ψ.

[1] *Poisson*, Traite de Mecanique, т. II, стр. 198, 1811.

Высота точки G над плоскостью равна $h\cos\vartheta$, где h — расстояние центра тяжести от точки опоры. Отсюда для той части кинетической энергии, которая обусловлена движением G, получаем выражение $\frac{1}{2}Mh^2\sin^2\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2$, где M — масса волчка. Поэтому так же, как и в § 71, полная кинетическая энергия волчка:

$$T=\frac{1}{2}Mh^2\sin^2\vartheta\cdot\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2+\frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta+\frac{1}{2}C\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta\right)^2$$

и потенциальная энергия его:

$$V=Mgh\cos\vartheta.$$

Поступая так же, как и в § 71, мы получим два интеграла:

$$A\dot{\varphi}\sin^2\vartheta+C\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta=a,$$
$$C\left(\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\vartheta\right)=b,$$

соответствующие циклическим координатам φ и ψ, где a и b — постоянные интегрирования. Для кинетического потенциала приведенной системы мы находим выражение:

$$\frac{1}{2}(A+Mh^2\sin^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2-\frac{(a-b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta}-Mgh\cos\vartheta.$$

Следовательно, ϑ изменяется так же, как и в системе с одной степенью свободы, имеющей кинетическую энергию, равную

$$\frac{1}{2}(A+Mh^2\sin^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2,$$

и потенциальную энергию, равную

$$\frac{(a-b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta}+Mgh\cos\vartheta.$$

Зависимость между ϑ и t устанавливается интегралом энергии этой последней системы, а именно:

$$\frac{1}{2}(A+Mh^2\sin^2\vartheta)\dot{\vartheta}^2=-\frac{(a-b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta}-Mgh\cos\vartheta+c,$$

где c — постоянная. Полагая $\cos\vartheta=x$, отсюда получим:

$$A(A+Mh^2-Mh^2x^2)\dot{x}^2=-(a-bx)^2-2AMgh(x-x^3)+2Ac(1-x^2).$$

В этом уравнении переменные x и t разделены, так что решение может быть получено в квадратурах. Выполнение квадратуры потребует, однако, гиперэллиптических функций или автоморфных функций второго рода.

§ 74. Волчок Ковалевской. В общем случае задача движения твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести не может быть разрешена в квадратурах. Рассмотренные в § 69, 71 случаи, когда центр тяжести совпадает с точкой опоры (и, следовательно, сила тяжести не имеет влияния на движение) и когда центр тяжести и точка опоры лежат на оси симметрии тела, являлись долгое время единственными известными случаями, при которых решение задачи приводится к квадратурам. Однако в 1888 г. Софья Ковалевская показала[1], что задача может быть разрешена в квадратурах и тогда, когда два момента инерции в точке опоры равны между собой и каждый из них вдвое дольше третьего момента, т. е. $A = B = 2C$, а центр тяжести тела лежит в плоскости этих равных моментов.

Примем за ось x прямую, соединяющую точку опоры с центром тяжести, расстояние которого от точки опоры обозначим через a. Пусть углы Эйлера ϑ, φ, ψ определяют положение главных осей инерции $Oxyz$ по отношению к неподвижным прямоугольным осям $OXYZ$. Ось OZ направим вертикально вверх. Пусть, далее, M — масса тела, а $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты его угловой скорости по осям $Oxyz$. Тогда кинетическая и потенциальная энергии тела определяются равенствами:

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2\right) = $$

$$= C\left\{\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)^2\right\},$$

$$V = -Mga\sin\vartheta\cos\psi.$$

Координата φ будет, очевидно, циклической и дает интеграл

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \mathrm{const}$$

или

$$2\dot{\varphi}\sin^2\vartheta + \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta = k,$$

где k — некоторая постоянная. Интегралом энергии будет:

$$T + V = \mathrm{const}$$

или

$$\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)^2 - \frac{Mga}{C}\sin\vartheta\cos\psi = h.$$

[1] Acta Math., т. 12, стр. 177, 1888.

Софья Ковалевская нашла еще один алгебраический интеграл, который может быть определен следующим образом.

Кинетический потенциал

$$L = C\dot{\vartheta}^2 - C\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \frac{1}{2}C\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta\right)^2 + Mga\sin\vartheta\cos\psi$$

и уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\vartheta} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\psi} = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0.$$

Первое уравнение дает:

$$2\ddot{\vartheta} = \left(\dot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\right)\dot{\varphi}\sin\vartheta - \frac{Mga}{C}\cos\vartheta\sin\psi,$$

а исключая $\ddot{\psi}$ из второго и третьего уравнений, получим:

$$2\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta\right) = -\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\right)\dot{\vartheta} + \frac{Mga}{C}\cos\vartheta\sin\psi.$$

Умножая первое из этих уравнений на i и складывая его со вторым, получим:

$$2\frac{d}{dt}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right) = i\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\right)\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right) + i\frac{Mga}{C}\cos\vartheta e^{-i\psi}.$$

Это уравнение мы можем привести к виду:

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{Mga}{C}\sin\vartheta e^{-i\psi}\right\} =$$
$$= i\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\right)\left\{\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{Mga}{C}\sin\vartheta e^{-i\psi}\right\}$$

или

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt} = i\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\right),$$

где

$$U = \left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right)^2 - \frac{Mga}{C}\sin\vartheta e^{-i\psi}.$$

Из равенства

$$V = \left(\dot{\varphi}\sin\vartheta - i\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{Mga}{C}\sin\vartheta e^{i\psi}$$

аналогично вытекает:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -i\left(\dot{\varphi}\cos\vartheta - \dot{\psi}\right).$$

Поэтому

$$\frac{1}{U}\frac{dU}{dt} + \frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = 0$$

или

$$UV = \mathrm{const.}$$

Следовательно, имеет место следующее уравнение:

$$\left\{\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{Mga}{C}\sin\vartheta e^{-i\psi}\right\} \times$$
$$\times\left\{\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta - i\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{Mga}{C}\sin\vartheta e^{i\psi}\right\} = \mathrm{const}$$

или

$$\left(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta\right)^2 + \left(\frac{Mga}{C}\right)^2\sin^2\vartheta +$$
$$+\frac{Mga}{C}\sin\vartheta\left\{e^{i\psi}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta + i\dot{\vartheta}\right)^2 + e^{-i\psi}\left(\dot{\varphi}\sin\vartheta - i\dot{\vartheta}\right)^2\right\} = \mathrm{const.}$$

Это и есть искомый третий алгебраический интеграл системы.

Эти три интеграла образуют систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка, которая служит для определения ϑ, φ, ψ вместо первоначальной системы уравнений движения. Так как φ не входит явно ни в одно из этих уравнений, то, пользуясь одним из них, можно исключить $\dot{\varphi}$ из двух других. Тогда для определения ϑ и ψ получится система из двух уравнений первого порядка. Софья Ковалевская показала, что эти уравнения могут быть проинтегрированы в гиперэллиптических функциях. Самое решение можно найти в уже цитированном сочинении Ковалевской[1].

[1] См. также *Kötter*, Acta Math., т. 17, стр. 209, 1893; *Стеклов*, *Горячев* и *Чаплыгин*, Труды Об-ва естеств., т. 10. 1899; т. 12, 1904; *G. Dumas*, Nouv. Ann., сер. 4, т. 4, стр. 355, 1904; *Husson*, Toulouse Ann., сер. 2, т. 8, стр. 73, 1906; *Husson*, Acta Math., т. 31, стр. 71, 1907; *N. Kowalevski*. Math. Ann., т. 65, стр. 528. 1908; *P. Stäckel*, Math. Ann., т. 65, стр. 538. 1908; *O. Olsson*, Arkiv för Mat., т. 4, № 7. 1908; *R. Marcolongo*, Rom. Acc. Rend., сер. 5, т. 17, стр. 698, 1908; *F. de Brun*, Arkiv för Mat., т. 6, № 9, 1910; *P. Burgatti*, Rend. d. Palermo, т. 29, стр. 396, 1910; *O. Lazzarino*, Rend. d. Soc. Reale di Napoli, сер. 3a, т. 17, стр. 68, 1911.

Задача 1. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы Ox, Oy, Oz относительно OZ, а x, y, τ определяются уравнениями:

$$\omega_2^2 x = \left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \frac{Mga\gamma_1}{C}\right)\left\{\left(\omega_3\omega_1 + \frac{Mga\gamma_3}{C}\right)^2 - \omega_3^2\omega_2^2\right\} +$$

$$+ 2\omega_3\omega_2\left(2\omega_1\omega_2 - \frac{Mga\gamma_2}{C}\right)\left(\omega_3\omega_1 + \frac{Mga\gamma_3}{C}\right),$$

$$\omega_2^2 y = \left(2\omega_1\omega_2 + \frac{Mga\gamma_3}{C}\right)\left\{\left(\omega_3\omega_1 + \frac{Mga\gamma_3}{C}\right)^2 - \omega_3^2\omega_2^2\right\} -$$

$$- 2\omega_3\omega_2\left(\omega_3\omega_1 + \frac{Mga\gamma_3}{C}\right)\left(\omega_1^2 - \omega_2^2 + \frac{Mga\gamma_1}{C}\right),$$

$$\omega_2^2 d\tau = \left\{\left(\omega_3\omega_1 + \frac{Mga\gamma_3}{C} + +\omega_3^2\omega_2^2\right)^2\right\} dt.$$

Показать при помощи интеграла Ковалевской (не пользуясь интегралами энергии и момента количества движения), что уравнениям движения можно придать вид:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

где V — функция только от x и y, так что задача сводится к определению движения материальной точки в плоском консервативном поле сил. (Колосов).

Р. Лиувилль показал[1], что единственным дальнейшим общим случаем, при котором движение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием силы тяжести допускает третий алгебраический интеграл, будет тот, при котором:

1) эллипсоид инерции в точке опоры есть эллипсоид вращения;

2) центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции;

3) отношение $\dfrac{2C}{A}$ есть произвольно выбираемое целое число (A, A, C — моменты инерции в точке опоры).

Ср. исследования, цитированные в предыдущем подстрочном примечании.

Задача 2. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки, для которой соответствующие моменты инерции связаны соотношениями: $A = B = 4C$. Центр тяжести тела лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции на расстоянии h от O. Показать, что если постоянная момента количества движения относительно вертикали, проходящей через O, обращается в нуль, то существует интеграл:

$$\omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) + gh\omega_1\cos\vartheta = \text{const},$$

[1] Acta Math., т. 20, стр. 239, 1897.

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты угловой скорости относительно главных осей $Oxyz$, причем ось Ox — есть прямая, соединяющая точку O с центром тяжести. Показать далее, что задача разрешима в квадратурах и приводит к гиперэллиптическим интегралам. (Чаплыгин.)

§ 75. Импульсивное движение. Как мы уже указывали в § 36, решение задачи импульсивного движения не требует интегрирования дифференциальных уравнений и приводится, вообще говоря, к простым алгебраическим выкладкам. В приводимых ниже примерах рассматриваются различные случаи импульсивных движений твердых тел.

Задача 1. Два однородных стержня AB и BC одинаковой длины $2a$, связанные в B идеально гладким шарниром, лежат в горизонтальной плоскости и образуют между собой прямой угол. Середине стержня AB сообщается такой импульс, что оба стержня начинают двигаться как одно твердое тело. Определить направление этого импульса и показать, что скорости концов A и C относятся как $\sqrt{13} : 1$.

Не нарушая общности рассуждений, мы можем принять, что масса каждого стержня равна единице. Пусть $\dot{x}$ и $\dot{y}$ означают компоненты скорости точки B относительно осей Ox и Oy, параллельных исходным положениям стержней BA и BC. Угловые скорости этих стержней обозначим через $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\varphi}$. Тогда компоненты скорости середины стержня AB суть $\dot{x}$ и $\dot{y} + a\dot{\vartheta}$, а компоненты скорости середины стержня BC суть $\dot{x} - a\dot{\varphi}$ и $\dot{y}$. Отсюда для кинетической энергии системы получаем:

$$T = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{y} + a\dot{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{6}a^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{x} - a\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{6}a^2\dot{\varphi}^2.$$

Обозначим компоненты искомого импульса через I_1 и I_2. Точка, которой сообщен импульс, получает при бесконечно малом перемещении системы перемещения δx и $\delta y + a\delta\vartheta$. Поэтому уравнения § 36 дают:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = I_1, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = I_2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = I_2 a, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

или

$$I_1 = 2\dot{x} - a\dot{\varphi}, \quad I_2 a = a\dot{y} + \frac{4}{3}a^2\dot{\vartheta},$$

$$I_2 = 2\dot{y} + a\dot{\vartheta}, \qquad 0 = -a\dot{x} + \frac{4}{3}a^2\dot{\varphi}.$$

Из условия, что стержни движутся как одно твердое тело, вытекает, что $\dot{\vartheta} = \dot{\varphi}$. Поэтому полученные уравнения дают:

$$\frac{1}{4}\dot{x} = \dot{y} = \frac{1}{3}a\dot{\vartheta} = \frac{1}{3}a\dot{\varphi} = \frac{1}{5}I_1 = \frac{1}{5}I_2.$$

Отсюда следует, что $I_1 = I_2$, т. е. что импульс образует с BA угол в 45°. Так как компоненты скоростей точек A и C суть соответственно $\dot{x}$, $\dot{y} + 2a\dot{\vartheta}$ и $\dot{x} - 2a\dot{\varphi}$, $\dot{y}$, то точки A и C имеют скорости $\sqrt{65}\dot{y}$ и $\sqrt{5}\dot{y}$ которые относятся как $\sqrt{13} : 1$.

Задача 2. Параллелограмм образован двумя парами однородных стержней, связанных между собой идеальными шарнирами. Длины стержней равны $2a$ и $2b$, их массы m и m', их радиусы инерции k и k'. Параллелограмм движется поступательно вдоль одной из своих диагоналей со скоростью V. Он ударяется о гладкую твердую стену, перпендикулярную к диагонали и образующую со сторонами углы ϑ и φ. Вершина параллелограмма, ударившаяся о стену, вследствие удара мгновенно останавливается. Показать, что величина импульса равна:

$$2V\left\{(m+m')^{-1}+(mk^2+m'a^2)^{-1}a^2\cos^2\vartheta+(mb^2+m'k'^2)^{-1}b^2\cos^2\varphi\right\}^{-1}.$$

Пусть x и y координаты центра параллелограмма, где x отмеряется перпендикулярно к стене. Кинетическая энергия системы есть:

$$T=(m-m')\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)+(mk^2+m'a^2)\dot{\vartheta}^2-(mb^2+m'k'^2)\dot{\varphi}^2.$$

Ударившаяся вершина имеет абсциссу $x+a\cos\vartheta+b\sin\varphi$; поэтому при произвольном перемещении $(\delta x, \delta y, \delta\vartheta, \delta\varphi)$ ее перемещение вдоль оси x равно $\delta x+a\cos\vartheta\delta\vartheta+b\cos\varphi\delta\varphi$. Отсюда, обозначая величину импульса через I, получим уравнения движения в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}\right)_0=-I,$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}}-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\vartheta}}\right)_0=-Ia\cos\vartheta,$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}-\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)_0=-Ib\cos\varphi$$

или

$$2(m+m')(\dot{x}-V)=-I,$$
$$2(mk^2+m'a^2)\dot{\vartheta}=-Ia\cos\vartheta,$$
$$2(mb^2+m'k'^2)\dot{\varphi}=-Ib\cos\varphi.$$

Так как ударившаяся вершина имеет конечную скорость, равную нулю, то, кроме того,

$$\dot{x}+a\dot{\vartheta}\cos\vartheta+b\dot{\varphi}\cos\varphi=0.$$

Исключение $\dot{x}$, $\dot{\vartheta}$ и $\dot{\varphi}$ из этих уравнений даст:

$$V=I\left\{\frac{1}{2(m+m')}+\frac{a^2\cos^2\vartheta}{2(mk^2+m'a^2)}+\frac{b^2\cos^2\varphi}{2(mb^2+m'k'^2)}\right\},$$

чем и доказывается предложение.

В только что приведенном примере рассматривается случай *внезапного торможения*. Если какая-нибудь точка (или прямая) свободно движущегося тела внезапно удерживается и приводится в какое-нибудь заданное вынужденное движение, то это вызывает импульсивное изменение в движении тела. Это импульсивное изменение может быть определено из условия, что общий момент количества движения тела относительно любой оси, проходящей через удерживаемую точку (или относительно удерживаемой прямой), остается неизменным. Это условие вытекает из того обстоятельства, что рассматриваемый импульс не даст никакого момента относительно удерживаемой точки или прямой.

Задача 3. Однородный круглый диск вращается с угловой скоростью ω вокруг одного из своих диаметров. Точка P окружности диска внезапно останавливается. Показать, что скорость центра непосредственно после торможения составляет $\frac{1}{5}$ скорости точки P до торможения.

Пусть m — масса диска, а α — угол между радиусом точки P и неподвижным диаметром, вокруг которого диск вращался до торможения. Первоначальная скорость точки P равна $c\omega\sin\alpha$, где c — радиус диска. Первоначальный момент количества движения тела относительно оси, проходящей через точку P параллельно первоначальной оси вращения, равен $\frac{1}{4}mc^2\omega$ и остается после торможения неизменным. Поэтому момент количества движения диска относительно касательной в точке P имеет после торможения величину $\frac{1}{4}mc^2\omega\sin\alpha$. Но момент инерции диска относительно этой касательной равен $\frac{5}{4}mc^2$; поэтому угловая скорость вращения диска вокруг нее равна $\frac{1}{5}\omega\sin\alpha$. Следовательно, центр диска имеет скорость $\frac{1}{5}\omega c\sin\alpha$, что составляет $\frac{1}{5}$ первоначальной скорости точки P.

Задача 4. Плоская пластинка массы m, имеющая форму параллелограмма, имеет в серединах двух параллельных сторон две гладкие цапфы. Материальная точка, масса которой также равна m, ударяется в одну из вершин параллелограмма и после удара остается в этой вершине. Показать, что реакция одной из цапф равна нулю.

Упражнения.

1. Диск может свободно вращаться вокруг любой горизонтальной оси, перпендикулярной к его плоскости. Показать, что геометрическое место точек подвеса, для которых эквивалентный математический маятник имеет заданную длину L, состоит из двух окружностей. Показать далее, что если A есть точка одной окружности, B — точка другой, а L' длина математического маятника, соответствующего точке подвеса, лежащей на середине отрезка AB, то радиус инерции стержня относительно центра тяжести определяется уравнением:

$$k^2L'^2 = \left(\frac{1}{2}L^2 - c^2\right)\left(L'^2 - \frac{1}{2}L^2 + c^2\right),$$

где c — длина отрезка AB.

2. Тяжелое твердое тело может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Какое положение следует придать этой оси, если она должна проходить через наперед заданную точку и если соответствующий математический маятник должен иметь заданную длину? Показать, что ось, удовлетворяющая этим условиям, должна являться образующей некоторого конуса четвертого порядка.

3. Шар радиуса b катится без скольжения под действием силы тяжести по циклоиде:

$$x = a(\vartheta + \sin\vartheta), \quad y = a(1 - \cos\vartheta).$$

В начальный момент шар находится в покое и его центр лежит на горизонтали $y = 2a$. Показать, что в наинизшей точке центр шара имеет скорость, определяемую равенством:

$$V^2 = \frac{10}{7} g(2a - b).$$

4. Однородный гладкий куб с ребром $2a$ и массой M расположен симметрично на двух одинаковых досках ширины b и массы M, укрепленных на двух стенах, расстояние между которыми равно $2c$. Показать, что если одна из досок опускается и начинает вращаться вокруг своего ребра, которым она прикреплена к стене, то начальное угловое ускорение куба равно:

$$\frac{Mg(c-a)^2(c-b) + \frac{1}{2}mgb(c-a)(c-b+a)}{M(c-a)^2\{k^2 + (c-b)^2\} + I(c-b+a)^2},$$

где Mk^2 — момент инерции куба относительно своего центра, а I — момент инерции доски относительно ребра. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1899.)

5. Однородный стержень массы M и длины $2a$ движется по горизонтальной плоскости, и один из его концов скользит без трения по неподвижной прямой. Показать, что в момент времени t расстояние y середины стержня от прямой определяется уравнением:

$$\int\limits_{\frac{y}{a}}^{1} \left(1 - \frac{3}{4}x^2\right)^{\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{3It}{2Ma}.$$

6. Четыре одинаковых однородных стержня длины $2a$ соединены идеальными шарнирами в ромб $ABCD$. Шарнир A закреплен неподвижно, а шарнир C может скользить по гладкому вертикальному стержню, проходящему через A. В начальный момент шарниры C и A совпадают, а вся система вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси. Показать, что

$$a\omega^2 \cos\alpha = 3g \sin^2\alpha,$$

где α означает половину наименьшего угла между верхними стержнями в последующем движении. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1900.)

7. На гладкой горизонтальной плоскости лежит круглый диск массы M. Точка массы $\frac{1}{3}M$ движется на этом диске по окружности радиуса a, проходящей через его центр тяжести. В начальный момент точка находится в центре тяжести. Определить движение системы. Пусть $a\varphi$ — дуга, описанная точкой, а ϑ — угол, на который за это время поворачивается диск. Показать, что

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \frac{k}{(k^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{tg}\frac{(k^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}{k}\left(\frac{1}{2}\varphi - \vartheta\right),$$

где Mk^2 момент инерции диска относительно оси, проходящей через его центр тяжести перпендикулярно к его плоскости.

8. Твердое тело, свободно движущееся под действием силы тяжести, вращается с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной к плоскости его движения и проходящей через его центр тяжести. Показать, что геометрическое место мгновенных осей вращения есть параболический цилиндр с параметром $\left(\sqrt{4a} + \frac{\sqrt{2g}}{\omega}\right)^2$ и что вершина этой параболы лежит на высоте $\frac{\sqrt{2g}}{\omega}$ над вершиной траектории центра тяжести, имеющей параметр $4a$.

9. Точка массы m находится внутри однородной гладкой трубки, которая может вращаться в вертикальной плоскости вокруг своей середины. В начале движения трубка горизонтальна. Показать, что если ϑ означает угол наклона трубки относительно вертикали в тот момент, когда ее угловая скорость достигает максимума ω, то

$$4(mr^2 - Mk^2)\omega^4 - 8mgr\omega^2\cos\vartheta - mg^2\sin^2\vartheta = 0,$$

где Mk^2 момент инерции трубки относительно своей середины, а r расстояние материальной точки от этой середины.

10. Четыре однородных стержня, связанных в концах идеальными шарнирами, образуют параллелограмм, который может двигаться без трения в горизонтальной плоскости, причем одна из его вершин закреплена неподвижно. В начале движения стержни образуют прямые углы, две противоположные стороны имеют угловую скорость ω и две другие стороны — угловую скорость, равную нулю. Показать, что система имеет угловую скорость ω, когда углы параллелограмма достигают максимума или минимума.

11. Два однородных шероховатых шара одинакового радиуса a и с массами m и m' покоятся на гладкой горизонтальной плоскости таким образом, что шар m' лежит на наивысшей точке шара m. Показать, что если систему привести в движение, то угол ϑ, образованный их общей нормалью с вертикалью, определяется уравнением:

$$a\dot{\vartheta}^2(7m + 5m'\sin^2\vartheta) = 5g(m + m')(1 - \cos\vartheta).$$

12. Однородный стержень AB длины $2a$ может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости. Одним из своих концов стержень прикреплен к гибкой нерастяжимой нити длины c, которая другим своим концом прикреплена к неподвижной точке O плоскости. Вначале точки O, A и B лежат на одной прямой и стержню сообщают поступательное движение со скоростью V в направлении, перпендикулярном к нему. Показать, что косинус наибольшего угла, образованного стержнем с нитью при движении, равен $1 - \dfrac{a}{6c}$.

13. Два стержня длины $2a$ скреплены своими концами с неподвижной точкой при помощи идеального шарнира. Третий стержень такой же длины может скользить без трения по этим стержням при помощи двух гладких колечек, прикрепленных к его концам. Вначале все три стержня лежат на одной горизонтальной прямой и концы третьего стержня совпадают с серединами первых двух. Стержням сообщают вращение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω. Показать, что третий стержень под действием тяжести только тогда соскользнет с первых двух, когда

$$\omega^2 \leqslant \frac{2g}{a\sqrt{3}}.$$

14. Тонкостенный полый цилиндр радиуса a и массы M удерживается в горизонтальном положении на шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Внутри цилиндра на образующей, вдоль которой цилиндр касается плоскости, находится насекомое массы m, которое в тот момент, когда цилиндр отпускают, начинает ползти с постоянной относительной скоростью V. Показать, что цилиндр находится в мгновенном покое, когда радиус, проходящий через насекомое, образует с вертикалью угол ϑ, определяемый уравнением:

$$V^2\{1 - \cos(\vartheta - \alpha)\} + ag(\cos\alpha - \cos\vartheta) = \left(1 + \frac{M}{m}\right) ag(\vartheta - \alpha)\sin\alpha.$$

15. Однородная гладкая плоская трубка может вращаться без трения вокруг пересекающей ее оси, лежащей в ее плоскости. Момент инерции трубки относительно оси вращения равен I. Точка массы m движется внутри трубки. В начальный момент точка находилась в точке пересечения трубки с осью вращения и имела скорость V, а трубка имела угловую скорость Ω. Показать, что если на систему не действуют никакие внешние силы, то квадрат относительной скорости точки равен:

$$V^2 + \frac{Ir^2}{I - mr^2}\Omega^2,$$

где r — расстояние точки от оси вращения.

16. Однородный стержень массы M покоится на двух горизонтальных колышках, причем оба его конца выходят за эти колышки. Другой однородный стержень массы m и длины $2l$ прикреплен к первому при помощи шарнира в точке, лежащей между обоими колышками. В начальный момент второй стержень горизонтален и соприкасается с первым; после этого его отпускают, и он начинает колебаться в вертикальной плоскости, проходящей через первый стержень. Показать, что

$$(M + m)x + ml\sin\vartheta = ml$$

и

$$\left(\frac{4}{3} - \frac{m}{m+M}\cos^2\vartheta\right)l\dot{\vartheta}^2 = 2g\cos\vartheta,$$

где ϑ — угол, образованный вторым стержнем с вертикалью, а x — отрезок, на который отодвинулся первый стержень от положения равновесия.

17. Плоская пластинка может свободно вращаться вокруг закрепленной точки своей плоскости. На этой пластинке лежит вторая пластинка, которая может скользить без трения по некоторой прямой первой пластинки. Показать, что между углом поворота ϑ и величиной x относительного скольжения существует соотношение:

$$\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + P\frac{dx}{d\vartheta} + Q = 0,$$

где P — линейная, а Q — квадратичная функция от x^2.

18. Маятник состоит из прямолинейного стержня и прикрепленной к его концу круглой вертикальной коробочки. Внутри коробочки находится диск, имеющий форму кругового сегмента. Расстояния центра C коробочки от точки O подвеса маятника и центра тяжести G сегмента суть l и c. Показать, что удвоенная работа системы при ее движении из положения равновесия равна:

$$(Mk^2 + ml^2)\dot{\vartheta}^2 + m({k'}^2 + c^2)\dot{\varphi}^2 + 2mcl\cos(\vartheta - \varphi)\dot{\vartheta}\dot{\varphi},$$

где M и m — массы маятника и сегмента, k — радиус инерции маятника относительно O, k' — радиус инерции сегмента относительно G, ϑ и φ — углы, образованные OC и CG с вертикалью.

19. На гладкой горизонтальной плоскости находится круглый диск, который может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. На окружность этого диска намотана нить таким образом, что она имеет свободную прямолинейную часть длины l. В конце этой прямолинейной части находится материальная точка массы m. Ей сообщается начальная скорость, перпендикулярная к направлению нити так, что нить начинает наматываться на диск. Показать, что если в полученном в результате движении системы нить начнет снова разматываться, то наименьшая длина, которой достигнет ее прямолинейная часть, равна:

$$\left(l^2 - a^2 - \frac{Mk^2}{m}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где M масса диска, a его радиус и k его радиус инерции.

20. Тележка скатывается вниз по наклонной шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Верх тележки параллелен плоскости, и на нем лежит шероховатый шар. Показать, что тележка имеет относительно плоскости ускорение:

$$\frac{14M + 4M' + 14m}{14M + 4M' + 21m} g \sin\alpha,$$

где M — масса тележки без колес, m — сумма масс колес (являющихся однородными дисками) и M' — масса шара. Трением между колесами и их осями пренебрегаем.

21. Однородный стержень массы m_1 и длины $2a$, который может свободно вращаться вокруг своего закрепленного конца, наклонен в начале движения под углом $\frac{\pi}{6}$ к вертикали. К нижнему его концу прикреплен идеальным шарниром второй стержень массы m_2 и длины $2a$. В начале движения второй стержень горизонтален и образует с первым тупой угол. Показать, что $3m_1 = 14m_2$, если середина второго стержня начинает движение под углом $\frac{\pi}{6}$ к вертикали.

22. Однородный круглый диск подвешен при помощи двух симметрично расположенных упругих нитей. Они прикреплены к наивысшей точке диска, образуют с вертикалью углы α и имеют в ненапряженном состоянии длину c. Одна из нитей перерезается. Показать, что траектория центра диска имеет в начале движения кривизну:

$$\frac{c\sin 4\alpha - b\sin 2\alpha}{b(b-c)},$$

где b длина нитей при положении равновесия.

23. Два стержня AC и CB одинаковой длины $2a$ связаны в точке C идеальным шарниром. Стержень AC может свободно вращаться вокруг закрепленной точки A. Конец B стержня CB связан с точкой A при помощи нерастяжимой нити длины $\dfrac{4a}{\sqrt{3}}$. Система находится в равновесии, и нить перерезается. Показать, что радиус кривизны начальной траектории точки B равен:

$$\frac{4}{181}\sqrt{\frac{41^3}{3}}a.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1897.)

24. Стержень длины $2a$ удерживается в горизонтальном положении при помощи двух невесомых нитей, перекинутых через два гладких блока, находящихся на одинаковой высоте и на расстоянии $2a$ друг от друга. К свободным концам нитей подвешены два одинаковых груза, равных половине веса стержня. Одна из нитей перерезается. Показать, что начальная траектория освободившегося конца стержня имеет кривизну $\dfrac{27}{25a}$.

25. Тяжелая однородная шероховатая доска может вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, отстоящей от центра тяжести на расстоянии c. На доске лежит тяжелый шероховатый шар. В начальный момент доска находится в горизонтальном положении, а шар отстоит от оси вращения на расстоянии b в сторону центра тяжести. Показать, что начальная кривизна траектории центра шара равна:

$$\frac{21b\vartheta}{5-11\vartheta},$$

где $\vartheta = \dfrac{mb - Mc}{mb + Ma}$, m и M — массы шара и доски, Mab — момент инерции доски относительно оси вращения.

26. На невесомом стержне длины $2c$ находятся две материальные точки массы m, расположенные на расстоянии k от середины по обе стороны от нее. К концам стержня привязана нить длины $2a$, через которую продето колечко массы m'. Вся система расположена на горизонтальной плоскости. В начальный момент нить натянута таким образом, что колечко находится на продолжении стержня, и ему сообщается начальная скорость перпендикулярно к направлению стержня. Показать, что относительное движение колечка имеет колебательный характер, если

$$\frac{c^2}{k^2} > 1 + \frac{2m}{m'}.$$

27. Три однородных одинаковых стержня длины c скреплены в равносторонний треугольник ABC, вес которого равен W. Однородная штанга длины $2b$ и веса W' прикреплена к точке C таким образом, что она может вокруг нее свободно вращаться. Вся система находится в равновесии, касаясь поверхности гладкого шара радиуса a; стержень AB расположен горизонтально и касается поверхности шара, а штанга расположена в вертикальной плоскости, проходящей через центр треугольника ABC; штанга и центр треугольника ABC находятся по разные стороны вертикали, проходящей через C. Показать, что плоскость треугольника образует с горизонтом угол, косинус которого равен:

$$\frac{ab\mu + 2c\lambda^2}{n\mu\left(a^2 + \frac{1}{4}c^2\right) - \lambda^2\mu - 2abc},$$

где

$$\lambda^2 = a^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}bc, \quad \mu^2 = 12a^2 - c^2, \quad n = \frac{W}{W'}.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896.)

28. Тело, на которое не действуют никакие силы, движется таким образом, что компонент его угловой скорости по одной из главных осей инерции остается постоянным. Показать, что угловая скорость тела остается постоянной и определить ее компоненты по двум другим осям инерции, предполагая, что моменты инерции относительно этих осей равны между собой.

29. Показать, что герполодии не имеют точек возврата. (Hess.) (Простое доказательство этой теоремы дано *Lecornu*, Bull. de la Soc. Math. de France, т. 34, стр. 40, 1906.)

30. Показать, что при движении твердого тела вокруг закрепленной точки всякая неразрывно связанная с твердым телом поверхность второго порядка, гомоцикличная к эллипсоиду инерции относительно закрепленной точки, катится без скольжения по некоторой неподвижной поверхности второго порядка, имеющей центр в закрепленной точке и являющейся поверхностью вращения относительно неизменяемой прямой. (Gebbia.)

31. Показать, что при движении по инерции твердого тела вокруг закрепленной точки три диаметра эллипсоида инерции относительно закрепленной точки и диаметр взаимного эллипсоида, определяемые соответственно пересечениями неизменяемой плоскости, с главными плоскостями и с плоскостью, перпендикулярной к мгновенной оси вращения, описывают площади, пропорциональные времени, так что ускорение концов этих диаметров направлено к центру. (Siacci.)

32. Тело вращается вокруг закрепленной точки под действием сил, момент которых относительно мгновенной оси вращения равен нулю. Показать, что угловая скорость пропорциональна радиусу-вектору эллипсоида инерции, лежащему на оси вращения. Показать также, что эта теорема остается в силе и тогда, когда тело, вращаясь вокруг закрепленной точки, вынуждено скользить по неподвижной поверхности. (Flye St. Marie.)

33. Плоская пластинка имеет в начальный момент одинаковые угловые скорости Ω относительно большой и малой осей инерции центра тяжести и не имеет никакой угловой скорости относительно третьей главной оси. Предполагая, что на тело не действуют никакие силы, выразить угловые скорости относительно главных осей инерции через эллиптические функции времени. Показать также, что имеет место соотношение:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\Omega\left\{\Omega^2 - \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \operatorname{dn}(\Omega t) = \left\{\Omega^2 - \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} \operatorname{ctg}\vartheta,$$

где ϑ — угол между плоскостью пластинки и какой-нибудь неподвижной плоскостью. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896.)

34. Тело обладает кинетической симметрией относительно оси, проходящей через закрепленную точку, не совпадающую с центром тяжести. Показать, что при любых начальных условиях движения (за одним лишь исключением) центр тяжести тела никогда не достигает вертикального положения над точкой опоры, и определить его наивысшее поднятие.

35. Показать, что при движении волчка по шероховатой плоскости существует система осей $O\xi\eta\zeta$, движение которой как относительно подвижной системы $Oxyz$, так и относительно неподвижной системы $OXYZ$ является движением Пуансо. В первом случае неизменяемой плоскостью является плоскость, перпендикулярная к оси волчка, а во втором случае — горизонтальная плоскость. (Якоби).

36. Однородное тело вращения вращается вокруг закрепленной точки таким образом, что его движение можно представить как равномерное качение кругового конуса, связанного с телом, по другому такому же конусу, неподвижному в пространстве. Угол раствора конусов равен 2α, и ось первого совпадает с осью тела. Показать, что, для того чтобы вызвать такое движение, необходимо к телу приложить пару сил с моментом:

$$\frac{1}{2}\Omega^2 \operatorname{tg}\alpha\{C + (C - A)\cos 2\alpha\},$$

где Ω — результирующая угловая скорость, а C и A — главные моменты инерции тела в закрепленной точке. Показать также, что плоскость пары совпадает с плоскостью осей обоих конусов.

37. Вертикальная плоскость равномерно вращается вокруг лежащей на ней вертикальной оси. К одной из точек этой оси прикреплена вершина шероховатого конуса вращения. Прямая соприкасания конуса с плоскостью образует с вертикалью угол ϑ, экстремальные значения которого суть β и γ. Угол раствора конуса равен 2α. Показать, что

$$k^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2gh\,\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\,\frac{(\cos\vartheta-\cos\beta)(\cos\gamma-\cos\vartheta)}{\cos\beta+\cos\gamma},$$

где h — расстояние центра тяжести конуса от его вершины, а k — его радиус инерции относительно образующей. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896).

38. Твердое тело может вращаться вокруг вертикальной оси, относительно которой его момент инерции равен I. Другое тело, имеющее форму диска, может вращаться вокруг горизонтальной оси, связанной с телом и пересекающей вертикальную ось. В положении равновесия моменты инерции и девиации диска относительно горизонтальной и вертикальной осей равны соответственно A, B и F. Показать, что при движении системы движение первого тела носит колебательный характер с амплитудой колебаний, равной:

$$\frac{2F}{\{B(A+I)\}^{\frac{1}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{B^{\frac{1}{2}}\sin\alpha}{(A+I)^{\frac{1}{2}}},$$

где α — угол наклона диска относительно вертикали.

39. Гироскоп состоит из симметричного тяжелого маховика, который может свободно двигаться внутри тяжелой сферической оболочки. Он висит на нити длины l, прикрепленной своим концом к оболочке. Центры тяжести маховика и оболочки совпадают. Вся система равномерно вращается с угловой скоростью и вокруг вертикали, по отношению к которой нить и ось гироскопа наклонены соответственно под углами α и β. Показать, что

$$\Omega^2(l\sin\alpha + a\sin\beta + b\cos\beta) = g\operatorname{tg}\alpha$$

и

$$\dot{I}\Omega\sin\beta - A\Omega^2\sin\beta\cos\beta - Mg\frac{a\sin(\beta-\alpha)+b\cos(\beta-\alpha)}{\cos\alpha},$$

где M — масса гироскопа, a и b — координаты точки прикрепления нити, отнесенные к осям, из которых одна совпадает с осью маховика, а другая к ней перпендикулярна, I — момент количества движения маховика относительно его оси, A — момент инерции маховика относительно перпендикуляра к его оси. (Camb Math. Tripos, часть I, 1900.)

40. Динамическая система состоит из произвольного числа одинаковых однородных стержней, связанных в концах при помощи идеальных шарниров и лежащих вначале на одной прямой. Произвольной точке системы сообщается импульс, перпендикулярный к стержню. Показать, что если u, v, w означают начальные скорости середин трех последовательных стержней, то $u + 4v + w = 0$.

41. Произвольное число однородных стержней, массы которых равны соответственно A, B, C, $\ldots$, Z, связаны в концах идеальными шарнирами и лежат на одной прямой в горизонтальной плоскости. Конец стержня Z свободен, а концу стержня A сообщается скорость V в направлении, перпендикулярном к стержню. Показать, что если скорости шарниров (AB), (BC), $\ldots$ и конца стержня Z обозначить соответственно через a, b, c, $\ldots$, z, то

$$0 = A(V + 2a) + B(2a + b), \quad 0 = B(a + 2b) + C(2b + a), \quad \ldots,$$
$$0 = Y(x + 2y) + Z(2y + z)$$

и

$$y + 2z = 0.$$

42. Шесть одинаковых однородных стержней связаны при помощи идеальных шарниров в правильный шестиугольник. Середине одного из стержней сообщается импульс, перпендикулярный к стержню. Показать, что противоположная сторона шестиугольника начнет двигаться со скоростью, составляющей $\frac{1}{10}$ скорости стороны, к которой приложен импульс. (Camb. Math. Tripos, 1882.)

43. Тело, имеющее закрепленную точку, выводится из состояния покоя при помощи удара. Показать, что начальная ось вращения совпадает с полярой плоскости импульсивной пары относительно эллипсоида инерции.

44. Нулевая точка положительного октанта эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ закреплена неподвижно. Показать, что если к октанту приложить импульсивную пару, лежащую в плоскости

$$\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)\frac{z}{c},$$

то он начнет вращаться вокруг оси z.

45. Эллипсоид вращается вокруг своего центра с угловой скоростью, компоненты которой по главным осям равны ω_1, ω_2 и ω_3. Центр эллипсоида свободен, а одна из точек (x, y, z) его поверхности внезапно закрепляется. Определить импульсивную реакцию этой точки.

46. Два стержня AB и BC, связанные между собой в точке B идеальным шарниром, образуют угол α. Точку A внезапно заставляют двигаться параллельно внешней биссектрисе угла ABC. Показать, что начальные угловые скорости стержней AB и BC относятся как

$$\left(2 + 3\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) : \left(2 - 15\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

47. Однородный конус вращается с угловой скоростью ω вокруг образующей. В какой-нибудь момент времени эту образующую делают свободной и вместо нее закрепляют пересекающий ее диаметр основания. Показать, что новая угловая скорость равна:

$$\left(1 + \frac{h^2}{8k^2}\right)\omega\sin\alpha,$$

где h — высота конуса, α — половина угла раствора, а k — радиус инерции относительно какого-нибудь диаметра основания.

48. Шероховатый круговой диск может вращаться вокруг оси, перпендикулярной к его плоскости. На этом диске покоится шероховатый конус, вершина которого лежит на оси вращения. Показать, что если диск вращать с угловой скоростью Ω, то конус приобретет кинетическую энергию, равную:

$$\frac{\Omega^2}{2\left\{\dfrac{\cos^2\alpha}{A} + \dfrac{\sin^2\alpha}{C}\right\}}.$$

49. Один конец нерастяжимой нити прикреплен к неподвижной точке, а другой конец — к точке поверхности некоторого тела массы M. Тело начинает свободно падать под действием силы тяжести, двигаясь поступательно. Показать, что в тот момент, когда нить натягивается, потеря кинетической энергии вследствие толчка равна:

$$\frac{V^2}{2\left\{\dfrac{1}{M} + \dfrac{\lambda^2}{A} + \dfrac{\mu^2}{B} + \dfrac{\nu^2}{C}\right\}},$$

где V — компонент скорости тела в направлении нити непосредственно перед толчком, когда нить имеет с телом только одну общую точку; l, m, n, λ, μ, ν — суть координаты нити в момент натяжения, A, B и C — главные моменты инерции тела относительно центра тяжести.

Глава VII
Теория колебаний

§ 76. Колебания около положения равновесия. В динамике часто приходится иметь дело с системами, для которых существует положение равновесия, т. е. такое положение, в котором система может постоянно пребывать в состоянии покоя. Например, сферический маятник принимает положение равновесия, если его конец находится на вертикали (сверху или снизу), проходящей через точку подвеса. Если $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — координаты, определяющие положение системы, имеющей кинетический потенциал L, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — значения этих координат в положении равновесия, то уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

должны выполняться для значений:

$$\ddot{q}_1 = 0, \quad \ddot{q}_2 = 0, \ldots, \quad \ddot{q}_n = 0, \quad \dot{q}_1 = 0, \quad \dot{q}_2 = 0, \quad \ldots, \quad \dot{q}_n = 0,$$
$$q_1 = \alpha_1, \quad q_2 = \alpha_2, \quad \ldots, \quad q_n = \alpha_n.$$

Поэтому значения координат для различных возможных положений равновесия удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

в которых величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ положены равными нулю.

Если в начале движения система находится вблизи положения равновесия и все ее точки получают очень незначительные начальные скорости, то во многих случаях отклонение системы от положения равновесия будет ничтожно мало. Все точки системы остаются вблизи исходных положений и имеют все время небольшие скорости. В настоящей главе мы займемся исследованием такого рода движений[1];

[1] Точнее, мы займемся в этой главе исследованием предельных форм, к которым стремятся эти движения, когда начальное отклонение от состояния покоя в положении равновесия стремится к нулю. Исследование движений при малом конечном отклонении от состояния покоя в положении равновесия составляет содержание гл. XVI. Результаты этой главы могут быть рассматриваемы как первое приближение.

мы будем их называть *колебаниями около положения равновесия*[1].

Мы ограничиваемся естественно системами, имеющими конечное число степеней свободы. Теорию колебаний систем с неограниченным числом степеней свободы можно найти в сочинениях по акустике.

Пусть система определяется кинетической и потенциальной энергиями T и V, а ее положение — координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$. Мы будем предполагать, что T не содержит явно времени. T есть, следовательно, некоторая квадратичная форма величин $\dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n$ с коэффициентами, являющимися произвольными функциями от $q_1, q_2, \dots, q_n$. Не нарушая общности рассуждений, мы можем, очевидно, предполагать, что положению равновесия соответствуют нулевые значения координат. Следовательно, во все время движения величины $q_1, q_2, \dots, q_n, \dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n$ будут очень малыми.

Коэффициенты при квадратах и произведениях величин $\dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n$ в выражении T являются функциями от $q_1, q_2, \dots, q_n$. Так как все координаты и скорости очень малы, то мы можем в качестве приближения к движению ограничиться членами наинизшего порядка в T. Поэтому мы заменяем все коэффициенты их постоянными значениями, которые они принимают при $q_1 = q_2 = \dots = q_n = 0$. В силу этого кинетическая энергия делается квадратичной формой от $\dot q_1, \dot q_2, \dots, \dot q_n$ с постоянными коэффициентами.

В разложении V по возрастающим степеням $q_1, q_2, \dots, q_n$ член, не зависящий от $q_1, q_2, \dots, q_n$, может быть отброшен, так как он не имеет влияния на уравнения движения. Кроме того, V не содержит линейных членов относительно $q_1, q_2, \dots, q_n$, так как в случае величины $\dfrac{dV}{dq_r}$ не обращались бы в нуль в положении равновесия, что, как мы видели, является необходимым. Следовательно, разложение V начинается членами второго порядка относительно $q_1, q_2, \dots, q_n$. Пренебрегая членами высшего порядка, мы получим для V некоторую однородную квадратичную форму относительно $q_1, q_2, \dots, q_n$ с постоянными коэффициентами.

Задача колебаний вокруг положения равновесия приводится, следовательно, к интегрированию уравнений движения Лагранжа, в которых кинетическая и потенциальная энергии являются соответственно однородными квадратичными формами относительно скоростей и координат с постоянными коэффициентами.

§ 77. Нормальные координаты. Для интеграции уравнений движения некоторой колеблющейся системы напишем ее кинетическую

[1]Теория колебаний развилась из исследований Галилея о малых колебаниях маятника. В первой половине XVIII в. Б. Тейлор (Brook Taylor), Даламбер, Эйлер и Д. Бернулли исследовали колебания натянутой струны. Последний высказал в 1753 г. принцип разложения сложных колебаний на независимые простые колебания. Общая теория колебаний систем с конечным числом степеней свободы дана в 1762–1765 гг. Лагранжем (Oeuvres, т. 1, стр. 520).

и потенциальную энергии в форме:

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + 2a_{13}\dot{q}_1\dot{q}_3 + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + 2a_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n\right),$$

$$V = \frac{1}{2}(b_{11}q_1^2 + b_{22}q_2^2 + \cdots + b_{nn}q_n^2 + 2b_{12}q_1q_2 + 2b_{13}q_1q_3 + \cdots$$

$$\cdots + 2b_{n-1,n}q_{n-1}q_n).$$

Согласно § 26 T есть определенная положительная квадратичная форма и определитель из коэффициентов a_{rs} отличен от нуля. (В противною случае T содержало бы меньше чем n независимых переменных.) Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = \frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

При переходе к новым координатам $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, являющимся линейными комбинациями величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$, уравнения движения переходят в уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r'}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r'} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

являющиеся, очевидно, линейными комбинациями первоначальных уравнений.

Умножим первоначальные уравнения последовательно на некоторые неопределенные постоянные $m_1, m_2, \ldots, m_n$[1] и сложим их. Полученное в результате уравнение будет вида:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \lambda Q = 0,$$

где

$$Q = h_1q_1 + h_2q_2 + \cdots + h_nq_n,$$

если постоянные $m_1, m_2, \ldots, m_n$, $h_1, h_2, \ldots, h_n$; λ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
b_{11}m_1 + b_{12}m_2 + \cdots + b_{1n}m_n &= \lambda(a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \cdots + a_{1n}m_n) = \lambda h_1,\\
b_{21}m_1 + b_{22}m_2 + \cdots + b_{2n}m_n &= \lambda(a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \cdots + a_{2n}m_n) = \lambda h_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
b_{n1}m_1 + b_{n2}m_2 - \cdots + b_{nn}m_n &- \lambda(a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 - \cdots + a_{nn}m_n) - \lambda h_n.
\end{aligned}$$

[1] Излагаемый здесь метод принадлежит Жордану (Comptes Rendus, т. 74 стр. 1395, 1872).

Эти уравнения могут выполняться одновременно только тогда, когда λ есть корень детерминантного уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda - b_{11} & a_{12}\lambda - b_{12} & \dots & a_{1n}\lambda - b_{1n} \\ a_{21}\lambda - b_{21} & a_{22}\lambda - b_{22} & \dots & a_{2n}\lambda - b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda - b_{n1} & a_{n2}\lambda - b_{n2} & \dots & a_{nn}\lambda - b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Если $\lambda = \lambda_1$ есть один из корней этого уравнения, то из предыдущих уравнений можно определить одну возможную систему значений $m_1, m_2, \dots, m_n, h_1, h_2, \dots, h_n$. Эти значения могут в некоторых случаях быть неопределенными, но во всяком случае этим способом может быть всегда определена по крайней мере одна функция Q, которая удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \lambda_1 Q = 0.$$

Сделаем теперь линейное преобразование, при котором определенная таким образом величина Q будет одной из новых координат. Не создавая никакой путаницы, мы будем новые переменные обозначать также через $q_1, q_2, \dots, q_n$. Пусть q_1 идентично с Q, так что предыдущие уравнения удовлетворяются при $h_1 = 1$, $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$. Так как T есть определенная положительная форма, то ни один из коэффициентов $a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ при квадратах величин $\dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots, \dot{q}_n$ не равен нулю. Мы можем поэтому вместо $q_2, q_3, \dots, q_n$ опять ввести новые переменные:

$$q_2 + \frac{a_{12}}{a_{22}}q_1, \quad q_3 + \frac{a_{13}}{a_{33}}q_1, \dots, q_n + \frac{a_{1n}}{a_{nn}}q_1.$$

После такого преобразования T станет свободным от членов $\dot{q}_1\dot{q}_2, \dot{q}_1\dot{q}_3, \dots, \dot{q}_1\dot{q}_n$: мы можем поэтому принять, что $a_{21}=a_{31}=\dots=a_{n1}=0$.

Комбинируя условия $h_1 = 1$, $h_2 = h_3 = \dots = h_n = 0$, $a_{21} = a_{31} = \dots = a_{n1} = 0$ с уравнениями, определяющими $m_1, m_2, \dots, m_n, h_1, h_2, \dots, h_n, \lambda$, мы получим:

$$\begin{aligned} &m_1 = \frac{1}{a_{11}}, \quad && m_2 = 0, \quad && m_3 = 0, \quad && \dots \quad && , m_n = 0, \\ &b_{11} = \lambda_1 a_{11}, \quad && b_{21} = 0, \quad && b_{31} = 0, \quad && \dots \quad && b_{n1} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_1}$$

принимает вид:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \lambda_1 q_1 = 0,$$

а уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n)$$

переходят в

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T'}{\partial \dot{q}_r}\right) = -\frac{\partial V'}{\partial q_r} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n),$$

где

$$T' = T - \frac{1}{2}a_{11}\dot{q}_1^2, \quad V' = V - \frac{1}{2}\lambda_1 a_{11} q_1^2,$$

так, что T' и V' не содержат соответственно величин $\dot{q}_1$ и q_1.

Последняя система уравнений может быть рассматриваема как относящаяся к задаче колебаний некоторой системы с $n-1$ степенями свободы. Поступая с последней системой так же, как и с предыдущей, мы освободимся еще от одной координаты, например q_2, так что, полагая

$$T'' = T' - \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2, \quad V'' = V' - \frac{1}{2}\lambda_2 a_{22} q_2^2$$

(где λ_1 и a_{22} — некоторые определенные постоянные), мы получим, что T'' и V'' не содержат соответственно величин $\dot{q}_2$ и q_2. Координаты $q_3, q_4, \ldots, q_n$ определятся из уравнений колебаний некоторой системы с $n-2$ степенями свободы, для которой кинетическая и потенциальная энергии равны соответственно T'' и V''.

Продолжая этот процесс дальше, мы придем в конце концов к такому выбору координат, при котором кинетическая и потенциальная энергии первоначальной системы, выраженные в новых координатах, примут вид:

$$T = \frac{1}{2}(\alpha_{11}\dot{q}_1^2 + \alpha_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + \alpha_{nn}\dot{q}_n^2), \quad V = \frac{1}{2}(\beta_{11}q_1^2 + \beta_{22}q_2^2 + \cdots + \beta_{nn}q_n^2),$$

где $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{nn}$ $\beta_{11}, \beta_{22}, \ldots, \beta_{nn}$ — некоторые постоянные.

Вводя, наконец, в качестве координат величины $\sqrt{\alpha_{11}}q_1$, $\sqrt{\alpha_{22}}q_2, \ldots, \sqrt{\alpha_{nn}}q_n$ вместо величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$, мы получим для кинетической и потенциальной энергий выражения:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2), \quad V = \frac{1}{2}(\mu_1 q_1^2 + \mu_2 q_2^2 + \cdots + \mu_n q_n^2),$$

где

$$\mu_r = \frac{\beta_{rr}}{\alpha_{rr}}.$$

При этом приведении не имеет значения, будет ли детерминантное уравнение иметь только различные корни или оно будет иметь группы кратных корней. Окончательный результат может быть поэтому выражен следующим образом: если *кинетическая и потенциальная энергии заданы в форме*:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n),$$

$$V = \frac{1}{2}(b_{11}q_1^2 + b_{22}q_2^2 + \cdots + b_{nn}q_n^2 + 2b_{12}q_1q_2 + \cdots + 2b_{n-1,n}q_{n-1}q_n),$$

то всегда можно найти такое линейное преобразование координат, при котором кинетическая и потенциальная энергии, выраженные в новых координатах, примут вид:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2),$$

$$V = \frac{1}{2}(\mu_1 q_1^2 + \mu_2 q_2^2 + \cdots + \mu_n q_n^2),$$

где величины $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ *— постоянны.* Эти новые координаты называются *нормальными* или *главными* координатами колеблющейся системы.

Согласно известной теореме алгебры корни детерминантного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda - b_{11} & a_{12}\lambda - b_{12} & \ldots & a_{1n}\lambda - b_{1n} \\ a_{21}\lambda - b_{21} & a_{22}\lambda - b_{22} & \ldots & a_{2n}\lambda - b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\lambda - b_{n1} & a_{n2}\lambda - b_{n2} & \ldots & a_{nn}\lambda - b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

суть также значения величины λ, при которых выражение

$$(a_{11}\lambda - b_{11})q_1^2 + (a_{22}\lambda - b_{22})q_2^2 + \cdots + (a_{nn}\lambda - b_{nn})q_n^2 + \\ +2(a_{12}\lambda - b_{12})q_1q_2 + \cdots + 2(a_{n-1,n}\lambda - b_{n-1,n})q_{n-1}q_n$$

может быть выражено при помощи меньшего чем n числа независимых переменных (являющихся линейными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_n$). Так как это свойство сохраняется при всяком линейном преобразовании переменных, то отсюда следует, что детерминантное уравнение обладает свойством *инвариантности,* т. е. если $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ обозначают некоторые линейные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а T и V, выраженные в переменных $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, принимают вид:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}'\dot{q}'^2_1 + a_{22}'\dot{q}'^2_2 + \cdots + 2a_{12}'\dot{q}_1'\dot{q}_2' + \cdots)$$

$$V = \frac{1}{2}(b_{11}'q'^2_1 + b_{22}'q'^2_2 + \cdots + 2b_{12}'q_1'q_2' + \cdots),$$

то корни детерминантного уравнения $\|a_{rs}'\lambda - b_{rs}'\| = 0$ совпадают с корнями первоначального уравнения $\|a_{rs}\lambda - b_{rs}\| = 0$.

Но если кинетическая и потенциальная энергии введением нормальных координат приведены к виду:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2),$$
$$V = \frac{1}{2}(\mu_1 q_1^2 + \mu_2 q_2^2 + \dots + \mu_n q_n^2),$$

то детерминантное уравнение принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \lambda - \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - \mu_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \mu_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - \mu_n \end{vmatrix} = 0.$$

Корни же последнего уравнения суть $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Отсюда следует: *постоянные $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, являющиеся коэффициентами при квадратах нормальных координат в выражении потенциальной энергии, суть n корней (простых или кратных) детерминантного уравнения $\|a_{rs}\lambda - b_{rs}\| = 0$, где a_{rs} и b_{rs} — коэффициенты в первоначальных выражениях кинетической и потенциальной энергий.*

Задача приведения кинетической и потенциальной энергий к их выражению в нормальных координатах равносильна, очевидно, задаче одновременного приведения двух заданных квадратичных форм с n переменными к суммам квадратов некоторых новых n переменных. Ибо то обстоятельство, что T есть функция от скоростей, а V — от координат, не имеет существенного значения, так как скорости $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ преобразуются по тому же закону, что и координаты $q_1, q_2, \dots, q_n$.

Из предыдущего может показаться, что такого рода приведение двух квадратичных форм всегда возможно. Это, однако, неверно. Так, например, две квадратичные формы

$$ax^2 + bxy + az^2 \text{ и } cx^2 + dxy + cz^2$$

не могут быть приведены одновременно к виду:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \text{ и } \alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2,$$

где ξ, η, ζ — линейные функции от x, y, z.

Для того, чтобы две данные квадратичные формы

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + 2a_{12}x_1x_2 + \dots,$$
$$b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \dots + 2b_{12}x_1x_2 + \dots$$

могли быть одновременно приведены к виду:

$$\alpha_1\xi_1^2 + \alpha_2\xi_2^2 + \dots + \alpha_n\xi_n^2,$$
$$\beta_1\xi_1^2 + \beta_2\xi_2^2 + \dots + \beta_n\xi_n^2,$$

необходимо, чтобы элементарные делители определителя $\|a_{rs}\lambda - b_{rs}\|$ были линейны[1]. Но если одна из двух данных форм будет знакоопределенной (что справедливо для кинетической энергии нашей динамической системы), то элементарные делители всегда линейны, и, следовательно, одновременное приведение к суммам квадратов будет возможным. Этим и объясняется то обстоятельство, что такое приведение в задаче колебаний всегда выполнимо.

Вейерштрасс показал в 1858 г.[2], что приведение к нормальным координатам для динамической системы всегда возможно. Прежние исследователи (следуя Лагранжу) ошибочно предполагали, что в случае кратных корней детерминантного уравнения нормальные координаты не будут существовать и что в окончательных интегралах уравнений движения время будет входить не только через тригонометрические и показательные функции.

§ 78. Теорема Сильвестера о вещественности корней детерминантного уравнения. В предыдущем параграфе мы видели, что введением новых координат, являющихся линейными функциями первоначальных, можно кинетическую и потенциальную энергии колеблющейся системы привести к виду:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \cdots + \dot{q}_n^2),$$

$$V = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \cdots + \lambda_n q_n^2).$$

Теперь встает вопрос, будет ли это преобразование действительным, т. е. будут ли коэффициенты преобразования $m_1, m_2, \ldots, m_n, h_1, h_2, \ldots, h_n$ действительными или комплексными. Так как эти коэффициенты определяются линейными уравнениями, коэффициенты которых за исключением, быть может, корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ несомненно действительны, то задача сводится к исследованию, будут ли корни уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda - b_{11} & a_{12}\lambda - b_{12} & \ldots & a_{1n}\lambda - b_{1n} \\ a_{21}\lambda - b_{21} & a_{22}\lambda - b_{22} & \ldots & a_{2n}\lambda - b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\lambda - b_{n1} & a_{n2}\lambda - b_{n2} & \ldots & a_{nn}\lambda - b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

действительными. При этом известно, что величины a_{rs} и b_{rs} действительны и что форма

$$a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \cdots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots + 2a_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n$$

является определенной положительной.

---

[1] См. *Muths*, Elementarteiler, Leipzig 1899, или *Bôcher*, Einführung in die höhere Algebra, Leipzig 1910. (Есть русский перевод: *Бохер*, Введение в высшую алгебру, ОНТИ, 1934.)

[2] См. *Weierstrass*, Gesammelte werke, т. 1, стр. 233.

Пусть[1] Δ означает определитель $|a_{rs}\lambda - b_{rs}\|$, Δ_1 — определитель, получающийся вычеркиванием из Δ первой строки и первого столбца, Δ_2 — вычеркиванием первых двух строк и первых двух столбцов, и т. д. Как известно, для всякого симметрического определителя

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

имеет место соотношение:

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha_{11}} \frac{\partial D}{\partial \alpha_{22}} - \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha_{12}}\right)^2 = D \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha_{11} \partial \alpha_{22}}.$$

Поэтому, если $\dfrac{\partial D}{\partial \alpha_{11}}$ обращается в нуль, то величины D и $\dfrac{\partial^2 D}{\partial \alpha_{11} \partial \alpha_{22}}$ имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что если при каком-нибудь значении λ один из членов ряда:

$$\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n \qquad (\Delta_n = 1)$$

обращается в нуль, то при том же значении λ два следующих члена должны иметь противоположные знаки.

Пусть $\overline{\Delta}_r$ означает определитель, который получается из Δ, если в нем λ заменить единицей, а величины b_{rs} положить равными нулю. $\overline{\Delta}_r$ есть, следовательно, коэффициент при наивысшей степени λ в Δ_r. Так как

$$a_{11}\dot{q}_1^2 + a_{22}\dot{q}_2^2 + \dots + a_{nn}\dot{q}_n^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \dots + 2a_{n-1,n}\dot{q}_{n-1}\dot{q}_n$$

есть определенная положительная форма, то величина $\overline{\Delta}_r$ — положительна при всяком r от нуля до n. Поэтому все коэффициенты при наивысших степенях λ в функциях $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ имеют одинаковые знаки. Отсюда вытекает, что при изменении λ от $-\infty$ до $+\infty$ в этом ряде функций потеряется n перемен знака.

Но так как Δ_n отличен от нуля, а Δ_{r-1} и Δ_{r+1} имеют противоположные знаки, когда Δ_r обращается в нуль, то ряд функций $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ может только тогда потерять или получить перемену знака, когда λ проходит через нулевое значение величины Δ. Когда λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, этот ряд функций теряет n перемен знака; *поэтому все n корней определителя* Δ действительны. *Преобразование к нормальным координатам всегда действительно*[2].

[1] Приводимое доказательство принадлежит Нансону (*Nanson*, Mess. of Math., т. 26, стр. 59, 1896).

[2] *Sylvester*, Phil. Mag., сер. 4, т. 4, стр. 1852; Coll. Papers, т. 1, стр. 378.

Так как при переходе λ через нулевое значение определителя Δ пара функций Δ, Δ_1 теряет одну перемену знака, то Δ_1 необходимо меняет знак в интервале между двумя корнями Δ. Следовательно, n корней определителя Δ разделяются $n-1$ корнями определителя Δ_1. Точно так же корни любой из функций Δ_r разделяются корнями функции Δ_{r+1}. Но Δ_n не имеет никаких корней; если Δ_{n-1} имеет одинаковые знаки при $\lambda = 0$ и $\lambda = -\infty$, то корень функции Δ_{n-1} не может быть отрицательным. Если также функция Δ_{n-2} имеет одинаковые знаки при $\lambda = 0$ и $\lambda = -\infty$, то ее корни не могут быть отрицательными. Ибо при этом предположении Δ_{n-2} либо совсем не имеет отрицательных корней, либо он их имеет два. Последнее, однако, невозможно, так как Δ_{n-1} не имеет отрицательного корня, который мог бы разделить отрицательные корни величины Δ_{n-2}. Вообще справедливо следующее положение: для того, чтобы ни одна функция из ряда $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ не имела отрицательных корней, необходимо, чтобы каждая из этих функций имела одинаковые знаки при $\lambda = 0$ и $\lambda = -\infty$. Таким образом, для того, чтобы все корни определителя Δ были положительны, необходимо, чтобы каждая из величин Δ_r имела при $\lambda = 0$ знак величины $(-1)^{n-r}$, т. е. чтобы все определители

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \ldots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \ldots & b_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}, \quad \ldots \quad , b_{nn}$$

были положительными. Но в этом, как известно, заключается условие положительности формы:

$$b_{11}q_1^2 + b_{22}q_2^2 + \cdots + b_{nn}q_n^2 + 2b_{12}q_1q_2 + \cdots + 2b_{n-1,n}q_{n-1}q_n.$$

Следовательно: *для того, чтобы детерминантное уравнение* $\|a_{rs}\lambda - b_{rs}\| = 0$ *имело только положительные корни, необходимо, чтобы квадратичная форма*

$$b_{11}q_1^2 + b_{22}q_2^2 + \cdots + b_{nn}q_n^2 + 2b_{12}q_1q_2 + \cdots + 2b_{n-1,n}q_{n-1}q_n$$

была определенной положительной, т. е. потенциальная энергия колебательного движения была существенно положительной.

§ 79. Интегрирование уравнений. Периоды. Устойчивость. Для того, чтобы конфигурацию колеблющейся системы представить как функцию времени, определим сначала нормальные координаты системы и выразим через них кинетическую и потенциальную энергии. Мы получим для них выражения:

$$T = \frac{1}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \cdots + \dot q_n^2), \quad V = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \cdots + \lambda_n q_n^2),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — нормальные координаты, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни детерминантного уравнения $\|a_{rs}\lambda - b_{rs}\| = 0$, которые согласно предыдущему являются все действительными.

Уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = -\frac{\partial V}{\partial q_r}$$

для какой-нибудь координаты q_r принимает вид:

$$\ddot{q}_r - \lambda_r q_r = 0.$$

Это уравнение имеет интегралы:

$$\begin{aligned} q_r &= A_r \cos(\sqrt{\lambda_r}t + B_r) && \text{при } \lambda_r > 0,\\ q_r &= A_r t + B_r && \text{при } \lambda_r = 0,\\ q_r &= A_r e^{\sqrt{-\lambda_r}t} + B_r e^{-\sqrt{-\lambda_r}t} && \text{при } \lambda_r < 0, \end{aligned}$$

где A_r и B_r — постоянные интегрирования.

Из этих интегралов заключаем: если в начале движения все нормальные координаты за исключением одной, например q_r, равны нулю, а постоянная λ, соответствующая этой неуничтожающейся координате, положительна, то система совершает колебания, при которых изменяется только q_r. Кроме того, система принимает первоначальное положение по истечении промежутка времени $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda r}}$. Это обстоятельство высказывают обычно следующим образом: *каждой нормальной координате q_r, для которой соответствующая постоянная λ положительна, отвечает независимый вид колебаний системы с периодом $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda r}}$.*

Если система отнесена к другим любым координатам, не являющимся нормальными, то эти новые координаты являются линейными функциями нормальных. Колебания, соответствующие отдельным нормальным координатам, совершенно независимы друг от друга. Поэтому всякое мыслимое колебание системы может быть рассматриваемо как результат наложения n независимых нормальных колебаний. В этом заключается теорема о сложении колебаний, высказанная впервые Д. Бернулли[1].

Если не все величины $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ положительны, то, как это вытекает из вышеписанных интегралов, нормальные координаты q_r, которым соответствуют неположительные корни λ_r, при малом отклонении системы от положения равновесия не колеблются около их нулевых значений. Напротив, эти координаты, вообще говоря, возрастают таким образом, что наше предположение, положенное в основу всего исследования (предположение о возможности пренебрегать высшими степенями координат), делается необоснованным. В этом случае вообще нет никаких колебаний. Положение равновесия называется тогда неустойчивым. Но если отклонение от положения равновесия произведено таким образом, что оно не затрагивает нормальных координат,

[1]Histoire de l'Academie de Berlin, annee 1753, стр. 147.

соответствующих неположительным корням, то система совершает колебания, при которых остальные нормальные координаты колеблются около их нулевых значений.

Колебания, соответствующие нормальным координатам с положительными значениями корней λ_r называются *устойчивыми*. Согласно изложенному в предыдущих параграфах, для того, чтобы положение равновесия было устойчивым, необходимо, чтобы потенциальная энергия колеблющейся системы была определенной положительной формой.

Этот результат можно также получить из интеграла энергии

$$T + V = h.$$

Здесь T и V — квадратичные формы, представляющие соответственно кинетическую и потенциальную энергии, а h — некоторая постоянная. Если первоначальное отклонение от положения равновесия мало, то величина h будет также малой. Но T есть определенная положительная форма: если теперь V — также определенная и положительная форма, то каждая из форм T и V должна быть меньше h; поэтому обе эти формы должны сохранять в течение всего движения малое значение. Следовательно, система не отклоняется значительно от положения равновесия, т. е. положение равновесия устойчиво.

§ 80. Примеры колебаний около положения равновесия. Рассмотрим для пояснения несколько примеров колебаний систем около положения равновесия.

1. Определить период колебаний цилиндра произвольного сечения, который может катиться по внешней поверхности другого абсолютно шероховатого покоящегося цилиндра.

Пусть s означает дугу на покоящемся цилиндре, отсчитываемую от положения равновесия до точки касания цилиндра. Через ρ и ρ' обозначим радиусы кривизны неподвижного и подвижного цилиндров в точке касания в положении равновесия. При этом ρ и ρ' считаются положительными, если цилиндры касаются внешним образом. Пусть M — масса подвижного цилиндра, Mk^2 — его момент инерции относительно центра тяжести, c — расстояние центра тяжести от начального положения точки касания на подвижном цилиндре.

Если α есть угол между общей нормалью к цилиндру и вертикалью в первоначальном положении, то $\alpha + \dfrac{S}{\rho}$ есть тот же угол в момент времени t, $\alpha + \frac{s}{\rho} + \frac{s}{\rho'}$ — угол между вертикалью и прямой, соединяющей центр кривизны подвижного цилиндра с первоначальным положением его точки касания, и $\frac{s}{\rho} - \frac{s}{\rho'}$ — угол между вертикалью и прямой, соединяющей последнюю точку с центром тяжести подвижного цилиндра. Отсюда для подвижного цилиндра имеем угловую скорость:

$$\dot{s}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)$$

и, следовательно, кинетическую энергию:

$$T = \frac{1}{2}M(k^2 + c^2)\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}\right)^2 \dot{s}^2.$$

Для потенциальной энергии имеем: $V = Mg$, умноженному на высоту центра тяжести подвижного цилиндра над его исходным положением, т. е. равно

$$Mg\left\{(\rho - \rho')\cos\left(\alpha + \frac{s}{\rho}\right) - \rho'\cos\left(\alpha + \frac{s}{\rho} - \frac{s}{\rho'}\right) + c\cos\left(\frac{s}{\rho} - \frac{s}{\rho'}\right)\right\}$$

или, отбрасывая члены выше второго порядка:

$$V = \frac{1}{2}Mg\left\{\frac{\rho + \rho'}{\rho\rho'}\cos\alpha - c\left(\frac{\rho - \rho'}{\rho\rho'}\right)^2\right\}s^2.$$

Уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) - \frac{\partial T}{\partial s} = -\frac{\partial V}{\partial s}$$

дает:

$$M(k^2 + c^2)\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right)^2 \ddot{s} + Mg\left\{\frac{\rho + \rho'}{\rho\rho'}\cos\alpha - c\left(\frac{\rho + \rho'}{\rho\rho'}\right)^2\right\}s = 0$$

Следовательно, колебания определяются уравнением:

$$s = A\cos(\lambda t + \varepsilon),$$

где A и ε — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями, а λ определяется уравнением:

$$\lambda^2 = \frac{g}{k^2 + c^2}\left\{\frac{\rho\rho'}{\rho + \rho'}\cos\alpha - c\right\}.$$

Период колебаний равен $\dfrac{2\pi}{\lambda}$.

2. Определить периоды нормальных колебаний точки, колеблющейся под действием силы тяжести около положения равновесия на некоторой покоящейся гладкой поверхности.

Касательная плоскость в положении равновесия материальной точки будет, очевидно, горизонтальной. Возьмем начало координат в положении равновесия и направим оси x и y по касательным к линиям кривизны в этой точке. Ось z направим вертикально вверх. Тогда для уравнения поверхности будем приближенно иметь:

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2},$$

где ρ_1 и ρ_2 — главные радиусы кривизны, считаемые положительными, если они направлены вверх. Для кинетической и потенциальной энергий имеем приближенно:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

где m означает массу, и

$$V = mgz = mg\left(\frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}\right).$$

Из этих равенств вытекает, что x и y являются нормальными координатами. Уравнения движения имеют вид:

$$\ddot{x} + \frac{g}{\rho_1}x = 0, \quad \ddot{y} + \frac{g}{\rho_2}y = 0.$$

Следовательно, периоды нормальных колебаний соответственно равны:

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho_1}{g}}, \quad 2\pi\sqrt{\frac{\rho_2}{g}}.$$

3. Определить нормальные колебания твердого тела, имеющего закрепленную точку и колеблющегося под действием произвольной системы консервативных сил около положения равновесия.

Примем за неподвижную систему координат главные оси инерции тела в неподвижной точке в положении равновесия. Подвижные оси координат пусть совпадают, как обычно, с главными осями инерции. Положение тела в любой момент времени t мы будем определять четырьмя параметрами ξ, η, ζ, χ § 9. Мы рассматриваем ξ, η, ζ как независимые координаты системы, а χ определяется из соотношения:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2 = 1.$$

Компоненты угловой скорости тела по подвижным осям координат определяются согласно § 16 равенствами:

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 2(\chi\dot{\xi} + \zeta\dot{\eta} - \eta\dot{\zeta} - \xi\dot{\chi}),\\
\omega_2 &= 2(-\zeta\dot{\xi} + \chi\dot{\eta} + \xi\dot{\zeta} - \eta\dot{\chi}),\\
\omega_3 &= 2(\eta\dot{\xi} - \xi\dot{\eta} + \chi\dot{\zeta} - \zeta\dot{\chi}).
\end{aligned}$$

Так как колебания очень малы, то мы рассматриваем ξ, η, ζ как малые первого порядка. χ отличается от единицы на малую величину второго порядка, следовательно, с точностью до величин порядка выше первого:

$$\omega_1 = 2\dot{\xi}, \quad \omega_2 = 2\dot{\eta}, \quad \omega_3 = 2\dot{\zeta}.$$

Кинетическая энергия тела, которая дается уравнением

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2),$$

где A, B, C — главные моменты инерции точки опоры, может быть написана в виде:

$$T - 2(A\dot{\xi}^2 + B\dot{\eta}^2 + C\dot{\zeta}^2).$$

Потенциальную энергию тела, являющуюся определенной функцией его положения, т. е. параметров ξ, η, ζ, мы обозначим через $V(\xi, \eta, \zeta)$.

Так как положению равновесия соответствуют нулевые значения величин ζ, η, ζ, то в разложение $V(\xi, \eta, \zeta)$ по возрастающим степеням ξ, η, ζ не должно входить линейных членов. Наинизшим членом будет, следовательно, член второго порядка, так что, пренебрегая членами более высоких порядков, можем написать:

$$V = a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\zeta\xi + 2h\xi\eta,$$

где a, b, c, f, g, h — некоторые постоянные.

Задача определения нормальных координат равносильна совместному приведению двух форм:

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2, \quad a\xi^2 + b\eta^2 + c\zeta^2 + 2f\eta\zeta + 2g\zeta\xi + 2h\xi\eta$$

к виду:

$$A_1x^2 + B_1y^2 + C_1z^2, \quad a_1x^2 + b_1y^2 + c_1z^2,$$

где x, y, z — некоторые линейные формы величин ξ, η, ζ.

Уравнение эллипсоида инерции, отнесенного к неподвижной системе координат в его положении равновесия, имеет вид:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

Рассмотрим одновременно поверхность второго порядка:

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2fYZ + 2gZX + 2hXY = 1,$$

которую мы будем называть эллипсоидом равного потенциала, и определим общую систему сопряженных диаметров обоих эллипсоидов. Пусть X', Y', Z' — отнесенные к этим диаметрам координаты какой-нибудь точки, имеющей в неподвижной системе координаты X, Y, Z. Пусть зависимость между X', Y', Z' и X, Y, Z устанавливается соотношениями:

$$X = l_1X' + m_1Y' + n_1Z',$$
$$Y = l_2X' + m_2Y' + n_2Z',$$
$$Z = l_3X' + m_3Y' + n_3Z'.$$

Посредством этого преобразования уравнения эллипсоидов приводятся к виду:

$$A_1X'^2 + B_1Y'^2 + C_1Z'^2 = 1, \quad a_1X'^2 + b_1Y'^2 + c_1Z'^2 = 1.$$

Следовательно, преобразованием, определяющим нормальные координаты, будет:

$$\xi = l_1x + m_1y + n_1z,$$
$$\eta = l_2x + m_2y + n_2z,$$
$$\zeta = l_3x + m_3y + n_3z.$$

Отсюда следует, что при нормальных колебаниях, при которых изменяется один лишь x, постоянно соблюдаются соотношения:

$$\xi : \eta : \zeta = l_1 : l_2 : l_3.$$

Но согласно определениям § 9 величины ξ, η, ζ с точностью до величин порядка выше первого, очевидно, пропорциональны направляющим косинусам мгновенной оси вращения твердого тела. Следовательно, эти нормальные колебания представляют собой малые колебания около прямой

$$X : Y : Z = l_1 : l_2 : l_3,$$

т. е. около прямой

$$Y' = 0, \qquad Z' = 0,$$

являющейся общим сопряженным диаметром обоих эллипсоидов.

Таким образом: *нормальные колебания тела представляют собой малые колебания около общих сопряженных диаметров эллипсоида инерции и эллипсоида равного потенциала.*

4. Определить нормальные координаты и периоды нормальных колебаний системы с тремя степенями свободы, для которой

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad V = \frac{1}{2}\{p^2(x^2 + y^2) - 2\alpha z(x + y) + q^2 z^2\},$$

где α мало по сравнению с p и q. Показать далее, что если система выведена из положения равновесия таким образом, что y и z вначале равны нулю, то по истечении промежутка времени $\pi p(q^2 - p^2)/\alpha^2$ x-колебание мгновенно прекращается, и тогда существует y-колебание, имеющее амплитуду первоначального x-колебания.

Эта форма кинетической и потенциальной энергий наводит на мысль ввести преобразование:

$$x + y = 2\xi, \qquad x - y = 2\eta,$$

которое даст:

$$T = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}\dot{z}^2, \quad V = p^2\xi^2 + p^2\eta^2 - 2\alpha z\xi + \frac{1}{2}q^2 z^2.$$

Переменная η есть, следовательно, нормальная координата. Для приведения остальных членов кинетической и потенциальной энергий к суммам квадратов, полагаем:

$$z = \zeta - \frac{2\alpha}{q^2 - p^2}\varphi, \qquad \xi = \varphi + \frac{\alpha}{q^2 - p^2}\zeta$$

и тогда получим:

$$T = \dot{\eta}^2 + \left\{1 + \frac{2\alpha^2}{(q^2 - p^2)^2}\right\}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{2\alpha^2}{(q^2 - p^2)^2}\right\}\dot{\zeta}^2,$$

$$V = p^2\eta^2 + \left\{p^2 - \frac{\alpha^2(2q^2 - 4p^2)}{(q^2 - p^2)^2}\right\}\varphi^2 + \frac{1}{2}\left\{q^2 + \frac{(4q^2 - 2p^2)\alpha^2}{(q^2 - p^2)^2}\right\}\zeta^2.$$

Переменные η, φ, ζ будут, следовательно, нормальными координатами. Пусть в начальный момент

$$x = k, \ y = 0, \ z = 0,$$
$$\dot{x} = 0, \ \dot{y} = 0, \ \dot{z} = 0$$

и k настолько мало, что можно пренебречь его произведением на какие-либо другие малые величины. При этой степени приближения вначале будем иметь:

$$\eta = \frac{1}{2}k, \qquad \varphi = \frac{1}{2}k, \qquad \zeta = 0.$$

Поэтому колебания для нормальных координат η, φ определятся уравнениями:

$$\eta = \frac{1}{2}k\cos pt, \qquad \varphi = \frac{1}{2}k\cos\left[t\left\{\frac{p^2 - \dfrac{\alpha^2(2q^2-4p^2)}{(q^2-p^2)^2}}{1+\dfrac{2\alpha^2}{(q^2-p^2)^2}}\right\}^{\frac{1}{2}}\right].$$

Последнему уравнению можно придать вид:

$$\varphi = \frac{1}{2}k\cos\left[pt\left\{1 - \frac{\alpha^2}{p^2(q^2-p^2)}\right\}\right]$$

или

$$\varphi = \frac{1}{2}k\cos pt\cos\frac{\alpha^2 t}{p(q^2-p^2)} + \frac{1}{2}k\sin pt\sin\frac{\alpha^2 t}{p(q^2-p^2)}.$$

Следовательно, начальное движение может быть приближенно представлено уравнениями:

$$\eta = \frac{1}{2}k\cos pt, \qquad \varphi = \frac{1}{2}k\cos pt$$

или

$$x = k\cos pt, \qquad y = 0.$$

По истечении промежутка времени $\dfrac{\pi p(q^2-p^2)}{\alpha^2}$ движение приближенно представится уравнениями:

$$\eta = \frac{1}{2}k\cos pt, \qquad \varphi = -\frac{1}{2}k\cos pt$$

или

$$x = 0, \quad y = -k\cos pt,$$

что и доказывает наше предложение.

§ 81. Влияние новой связи на периоды колеблющейся системы. Мы исследуем теперь изменение периодов нормальных колебаний системы около положения устойчивого равновесия, когда в этой системе вследствие введения новой связи уменьшается число степеней свободы.

Допустим, что первоначальная система отнесена к нормальным координатам $q_1, q_2, \ldots, q_n$, так что ее кинетическая и потенциальная энергии имеют вид:

$$T = \frac{1}{2}(\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \ldots + \dot q_n^2), \quad V = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \ldots + \lambda_n q_n^2).$$

Пусть новая связь представлена уравнением:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0.$$

Так как $q_1, q_2, \ldots, q_n$ очень малы, то мы можем в разложении f по степеням $q_1, q_2, \ldots, q_n$ ограничиться рассмотрением лишь членов первой порядка малости. Мы представляем поэтому уравнение связи в виде:

$$A_1 q_1 + A_2 q_2 + \ldots + A_n q_n = 0,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторые постоянные величины. В этом уравнении отсутствует свободный член, так как положение равновесия не должно нарушать условий связи. При помощи полученного уравнения можно исключить q_n из выражений кинетической и потенциальной энергий. Исключая, получаем:

$$T = \frac{1}{2}\left\{\dot q_1^2 + \dot q_2^2 + \ldots + \dot q_{n-1}^2 + \frac{1}{A_n^2}(A_1\dot q_1 + A_2\dot q_2 + \ldots + A_{n-1}\dot q_{n-1})^2\right\},$$

$$V=\frac{1}{2}\left\{\lambda_1 q_1^2+\lambda_2 q_2^2+\ldots+\lambda_{n-1} q_{n-1}^2+\frac{\lambda_n}{A_n^2}(A_1 q_1+A_2 q_2+\ldots+A_{n-1} q_{n-1})^2\right\}.$$

Уравнения движения системы с новой связью состоят, следовательно, из $n-1$ уравнений:

$$\ddot q_r + \lambda_r q_r + A_r\left\{\frac{1}{A_n^2}(A_1\ddot q_1 + \ldots + A_{n-1}\ddot q_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{\lambda_n}{A_n^2}(A_1 q_1 + \ldots + A_{n-1} q_{n-1})\right\} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1)$$

или

$$\ddot q_r + \lambda_r q_r + \mu A_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

где

$$\mu = \frac{1}{A_n^2}(A_1\ddot q_1 + \ldots - A_{n-1}\ddot q_{n-1}) +$$
$$+ \frac{\lambda_n}{A_n^2}(A_1 q_1 + \ldots + A_{n-1} q_{n-1}) = -\frac{\ddot q_n}{A_n} - \frac{\lambda_n q_n}{A_n}.$$

Следовательно, уравнения движения системы со связью могут быть представлены в виде:

$$\ddot q_r + \lambda_r q_r + \mu A_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где μ — неизвестно.

Пусть нормальное колебание измененной системы определяется уравнениями:

$$q_1 = \alpha_1 \cos\sqrt{\lambda}t, \quad q_2 = \alpha_2 \cos\sqrt{\lambda}t, \ \ldots, \ q_n = \alpha_n \cos\sqrt{\lambda}t,$$
$$\mu = \nu \cos\sqrt{\lambda}t.$$

Подстановка в уравнения движения даст:

$$\alpha_r(\lambda_r - \lambda) + \nu A_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Подставляя определяемые этими уравнениями значение $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ в уравнение

$$A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n = 0,$$

получим:

$$\frac{A_1^2}{\lambda_1 - \lambda} + \frac{A_2^2}{\lambda_2 - \lambda} + \ldots + \frac{A_n^2}{\lambda_n - \lambda} = 0.$$

Это уравнение, определяющее λ, имеет $n-1$ корней, которые, как это легко заключить из формы уравнения, лежат в интервалах между величинами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Соответствующие этим корням значения величины $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ и будут периодами нормальных колебаний системы с дополнительной связью. *Следовательно, $n - 1$ периодов нормальных колебаний системы с дополнительной связью лежат между n периодами первоначальной системы.*

§ 82. Стационарный характер нормальных колебаний. Допустим, что к динамической системе добавлено столько связей, что она сохраняет только одну степень свободы. Как это повлияет на колебания системы? Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — нормальные координаты системы. Уравнения связей, которые, так же как и в предыдущем параграфе, линейны относительно координат, могут быть представлены в рассматриваемом случае в виде:

$$q_1 = \mu_1 q, \quad q_2 = \mu_2 q, \quad q_n = \mu_n q,$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — постоянные, а q - новая переменная, определяющая конфигурацию измененной системы в момент времени t.

Первоначальная система имеет кинетическую и потенциальную энергии:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \ldots + \dot{q}_n^2), \quad V = \frac{1}{2}(\lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \ldots + \lambda_n q_n^2).$$

Следовательно, периоды ее нормальных колебаний будут:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}}, \quad \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_2}}, \ldots, \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Для измененной системы имеем:

$$T = \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2)\dot{q}^2, \quad V = \frac{1}{2}(\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2^2 + \ldots + \lambda_n\mu_n^2)q^2.$$

Период колебания измененной системы равен $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$, где λ определяется равенством:

$$\lambda = \frac{\lambda_1\mu_1^2 + \lambda_2\mu_2^2 + \ldots - \lambda_n\mu_n^2}{\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_n^2}.$$

При изменении связей λ сохраняет постоянное значение, если только $n-1$ из величин $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ равны нулю. Это постоянное значение равно одной из величин $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Таким образом, мы имеем следующую теорему: *если на систему наложено столько связей, что она сохраняет только одну степень свободы, то период колебаний измененной системы сохраняет постоянное значение для всех связей, при которых колебание есть одно из нормальных колебаний первоначальной системы.*

§ 83. Колебания около стационарного состояния движения. Под стационарным движением мы понимаем такое движение системы с циклическими координатами, при котором нециклические координаты и скорости, соответствующие циклическим координатам, сохраняют постоянные значения. Состояние стационарного движения имеет некоторую аналогию с состоянием равновесия.

Примером стационарного движения может служить рассмотренный в § 72 частный случай движения волчка. В качестве другого примера стационарного движения можно указать на движение материальной точки на плоскости под действием центральной силы, когда потенциальная энергия зависит только от расстояния точки до центра сил. В этом случае возможно движение с постоянной скоростью по круговой траектории. Это движение стационарно, ибо радиус-вектор не изменяется и угловая скорость $\dot{\vartheta}$, соответствующая циклической координате ϑ, остается также постоянной.

Если движение в начальный момент отклоняется весьма мало от стационарного и если это отклонение остается незначительным во все время движения, то оно называется *колебанием около стационарного состояния.*

Колебание около стационарного состояния называется устойчивым[1], если это движение стремится к определенной предельной форме, а именно к стационарному состоянию, когда первоначальное отклонение от стационарного состояния достаточно мало.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — циклические, а $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — нециклические координаты системы. Тогда k циклическим координатам соответствуют k интегралов:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_r} - \beta_r \qquad (r - 1, 2, \ldots, k),$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — постоянные интегрирования. Мы будем предполагать, что эти постоянные в колебательном движении имеют те же

[1]Это определение принадлежит Клейну и Зоммерфельду.

значения, что и при невозмущенном стационарном движении, около которого изучается колебание. Это означает только то, что мы каждому виду колебаний ставим в соответствие определенное стационарное движение.

Допустим, что система консервативна и связи не зависят от времени. Пусть кинетическая энергия имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} b_{ij}\dot{q}_i\dot{p}_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\dot{p}_i\dot{p}_j,$$

где коэффициенты a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} суть некоторые функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Интегралами, соответствующими циклическим координатам, будут:

$$\sum_i c_{ij}\dot{p}_i + \sum_i b_{ij}\dot{q}_i = \beta_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть C_{ij} означает минор, соответствующий элементу c_{ij} определителя, составленного из коэффициентов c_{ij}, деленный на этот определитель. Решение последних уравнений относительно величин $\dot{p}_r$ дает:

$$\dot{p}_r = \sum_s C_{rs}\left(\beta_s - \sum_l b_{ls}\dot{q}_l\right).$$

Вставляя эти значения $\dot{p}_r$ в выражение для T и принимая во внимание свойство миноров, получим:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(a_{ij} - \sum_{l,s} C_{ls}b_{il}b_{js}\right)\dot{q}_i\dot{q}l + \frac{1}{2}\sum_{l,s} C_{ls}\beta_l\beta_s.$$

Упростим теперь систему путем освобождения от циклических координат. Пусть R означает измененный кинетический потенциал:

$$R = T - V - \sum_{r=1}^{k}\dot{p}_r\beta_r =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(a_{ij} - \sum_{l,s} C_{ls}b_{il}b_{js}\right)\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{l,r,s} C_{rs}\beta_r b_{ls}\dot{q}_l - \frac{1}{2}\sum_{l,s} C_{ls}\beta_l\beta_s - V.$$

Не нарушая общности рассуждений, мы можем предполагать, что при стационарном движении все величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$ имеют нулевые значения. Тогда, если в разложении коэффициентов, входящих в R, по степеням величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$ пренебречь членами выше второго порядка относительно величин $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ по сравнению с членами второго порядка, то в выражение R будут входить лишь члены линейные и квадратичные относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Члены, линейные относительно $\dot{q}_1$,

$\dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и независящие от $q_1, q_2, \ldots, q_n$ выпадут сами собой из уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

и потому они могут быть отброшены с самого начала. Члены, линейные относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и независящие от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, не входят вовсе в выражение R, так как уравнения движения должны выполняться при $q_1 = q_2 = \cdots = q_n = 0$. *Решение задачи колебаний около стационарного состояния движения сводится к интегрированию уравнений Лагранжа, в которых кинетический потенциал есть однородная квадратичная функция скоростей и координат с постоянными коэффициентами.*

Отличие колебаний около положения равновесия и около стационарного движения заключается в том, что в последнем случае в выражение кинетического потенциала входят члены вида $q_r\dot{q}_s$. Такого рода члены называются *гироскопическими.* Колебания около стационарного состояния движения представляют собой в действительности не что иное, как колебания около положения равновесия приведенной или ненатуральной (§ 38) системы, к которой приводится первоначальная после освобождения от циклических координат.

Уравнения движения колеблющейся системы имеют поэтому вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial R}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где R может быть представлено в виде:

$$R = \frac{1}{2}\sum_{r,\,s} \alpha_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s + \frac{1}{2}\sum_{r,\,s} \beta_{rs}q_r q_s + \sum_{r,\,s} \gamma_{rs}q_r\dot{q}_s \quad (r,\, s = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\alpha_{rs} = \alpha_{sr}, \quad \beta_{rs} = \beta_{sr},$$

но γ_{rs}, вообще говоря, отлична от γ_{sr}. В развернутой форме уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} \alpha_{11}\ddot{q}_1 - \beta_{11}q_1 + \alpha_{12}\ddot{q}_2 + (\gamma_{21} - \gamma_{12})\dot{q}_2 - \beta_{12}q_2 + \alpha_{13}\ddot{q}_3 + \\ \qquad\qquad + (\gamma_{31} - \gamma_{13})\dot{q}_3 - \beta_{13}q_3 + \cdots = 0, \\ \alpha_{21}\ddot{q}_1 + (\gamma_{12} - \gamma_{21})\dot{q}_1 - \beta_{21}q_1 + \alpha_{22}\ddot{q}_2 - \beta_{22}q_2 + \alpha_{23}\ddot{q}_3 + \\ \qquad\qquad + (\gamma_{32} - \gamma_{23})\dot{q}_3 - \beta_{23}q_3 + \cdots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Они представляют собой линейные уравнения с постоянными коэффициентами, которые в общем имеют тот же характер, что и соответствующие уравнения в случае колебаний около положения равновесия. Они отделяются лишь появлением гироскопических членов с коэффициентами $(\gamma_{sr} - \gamma_{rs})$. Вследствие появления этих членов система не может быть преобразована к нормальным координатам[1]. Однако мы увидим, что главное свойство колебаний около положения равновесия сохраняется, а именно всякое колебание можно рассматривать как результат наложения n чисто периодических колебаний. Последние, так же как и раньше, мы будем называть главными колебаниями системы.

§ 84. Интегрирование уравнений. Интегрирование уравнений движения приведет нас к некоторым дальнейшим заключениям о характере колебаний.

Мы преобразуем сначала эти уравнения к системе уравнений первого порядка. Пусть R — измененный кинетический потенциал системы, который в нашей задаче является однородной квадратичной функцией величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Мы полагаем

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} = q_{n+r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

так что $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}$ являются линейными функциями величин $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, и наоборот. Уравнения движения принимают вид:

$$\dot{q}_{n+r} = \frac{\partial R}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Если δ означает приращение некоторой функции переменных q_1, $q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}, \ldots, q_{2n}$ при бесконечно малом изменении этих переменных, то

$$\delta R = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r \right) = \sum_{r=1}^{n} (\dot{q}_{n+r} \delta q_r + q_{n+r} \delta \dot{q}_r) =$$

$$= \delta \left(\sum_{r=1}^{n} q_{n+r} \dot{q}_r \right) + \sum_{r=1}^{n} (\dot{q}_{n+r} \delta q_r - \dot{q}_r \delta q_{n+r}).$$

Пусть H означает величину

$$\sum_{r=1}^{n} q_{n+r} \dot{q}_r - R,$$

рассматриваемую как функция величин $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$. H есть, следовательно, известная однородная квадратичная функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$. Последнее уравнение принимает тогда вид:

$$\delta H = \sum_{r=1}^{n} (\dot{q}_r \delta q_{n+r} - \dot{q}_{n+r} \delta q_r).$$

[1] То есть система не может быть приведена к нормальным координатам при помощи точечного преобразования. Но это, однако, может быть выполнено при помощи контактного преобразования, о чем будет подробней указано в гл. XVI.

Следовательно, система уравнений движения, являющаяся системой второго порядка, может быть заменена системой из $2n$ уравнений первого порядка

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial q_{n+r}}, \qquad \dot{q}_{n+r} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

с независимыми переменными $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$[1].

Покажем, что функция H, входящая в уравнения движения вместо характеристической функции R, есть сумма кинетической и потенциальной энергий рассматриваемой динамической системы.

В самом деле, R содержит члены второго, первого и нулевого порядков относительно скоростей, а

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r}$$

согласно теореме Эйлера равна сумме удвоенных членов второго порядка и членов первого порядка. Следовательно, функция H, равная согласно определению функции

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_r} - R,$$

равна сумме членов второго порядка и взятых с обратными знаками членов первого порядка функции R. Сравнивая с данными на страницах 257 и 259 выражениями для T и V, получаем:

$$H = T + V.$$

Таким образом, H есть полная энергия динамической системы, рассматриваемая как функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$.

При колебаниях около положения равновесия условие устойчивости заключается в том, что потенциальная энергия, так же как и кинетическая, представляет собой определенную положительную форму. Мы делаем теперь аналогичное предположение и в рассматриваемом нами случае колебаний около стационарного состояния движения. Именно, мы предположим, *что полная энергия H есть определенная положительная квадратичная форма переменных* $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$. Докажем, что при этом условии стационарное движение устойчиво и уравнения движения могут быть проинтегрированы следующим способом[2].

[1] Это преобразование является частным случаем преобразования Гамильтона, рассматриваемого в гл. X.

[2] Этот способ интегрирования принадлежит Вейерштрассу (Berl. Monats berichte, 1879).

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$sq_{n+r} + \frac{\partial H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})}{\partial q_r} = y_r,$$

$$-sq_r + \frac{\partial H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})}{\partial q_{n+r}} = y_{n+r} \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

с переменными $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$. Если $f(s)$ означает определитель системы, а

$$f(s)_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

— минор, соответствующий λ-й горизонтали и μ-й вертикали, то выражения величин $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$ через $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ даются уравнениями:

$$q_\mu = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} y_\lambda \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Порядок $f(s)$ относительно s равен $2n$, а порядок $f(s)_{\lambda\mu}$ не выше чем $2n - 1$.

Для интегрирования уравнений движения рассмотрим выражения для $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$ вида:

$$q_\mu = \int\limits_{(C)} \frac{p_\mu(s)}{f(s)} e^{s(t-t_0)}\, ds \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где интегрирование распространено на окружность C достаточно большого радиуса, внутри которой заключены все корни уравнения $f(s) = 0$. Эти значения $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$ удовлетворяют уравнениям движения, если выполняются уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\int\limits_C e^{s(t-t_0)} \left\{ sp_{n-r} + \frac{\partial H(p_1, p_2, \ldots, p_{2n})}{\partial p_r} \right\} \frac{ds}{f(s)} = 0, \\ &\int\limits_C e^{s(t-t_0)} \left\{ -sp_r + \frac{\partial H(p_1, p_2, \ldots, p_{2n})}{\partial p_{n+r}} \right\} \frac{ds}{f(s)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Если поэтому $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ означают такие полиномы относительно s, которые обращают в нуль выражения, стоящие в скобках подынтегральных выражений, для всех нулевых значений функции $f(s)$, то уравнения будут удовлетворены, так как при этих условиях подынтегральные функции не будут иметь внутри круга C никаких особых точек[1].

[1] См. *Уиттекер* и *Ватсон*, Курс современного анализа. § 5, 2.

Следовательно, $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ должны быть решениями уравнений:

$$\left.\begin{aligned} sp_{n+r} + \frac{\partial H(p_1, p_2, \ldots, p_{2n})}{\partial p_r} = 0, \\ -sp_r + \frac{\partial H(p_1, p_2, \ldots, p_{2n})}{\partial p_{n+r}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

при s, равном одному из корней уравнения $f(s) = 0$. Последнее условие будет удовлетворено, если положить

$$p_\mu(s) = a_1 f(s)_{1\mu} + a_2 f(s)_{2\mu} + \ldots + a_{2n} f(s)_{2n,\mu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ — произвольные постоянные. Уравнения движения удовлетворяются, следовательно, значениями:

q_μ = коэффициенту при $\dfrac{1}{s}$ в разложении[1] Лорана выражения

$$\{a_1 f(s)_{1\mu} + a_2 f(s)_{2\mu} + \ldots + a_{2n} f(s)_{2n,\mu}\} \frac{e^{s(t-t_0)}}{f(s)} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n)$$

по положительным и отрицательным степеням s.

Исследование определителя $f(s)$ показывает, что порядок относительно s его миноров типа

$$f(s)_{n+\mu,\,\mu} \quad \text{и} \quad f(s)_{\mu,\,n+\mu}$$

равен $2n - 1$, а порядок всех остальных миноров равен $2n - 2$. Поэтому коэффициенты при $\dfrac{1}{s}$ в разложениях Лорана выражений $\dfrac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$, за исключением тех случаев, когда $\lambda = n + \mu$ или когда $\mu = n + \lambda$ равны нулю. При $\lambda = n + \mu$ эти коэффициенты равны -1, а при $\mu = n + \lambda$ они равны -1.

Полагая $t = t_0$, находим, что все величины

$$a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$$

представляют собой значения величин

$$q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_{2n}, -q_1, -q_2, \ldots, -q_n$$

в момент времени t.

Полагая поэтому $\varphi(t)_{\lambda\mu}$ = коэффициенту при $\dfrac{1}{s}$ в разложении Лорана функции $\dfrac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} e^{s(t-t_0)}$ и обозначая через $q_1^0, q_2^0, \ldots, q_{2n}^0$ значения величин $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$, соответствующие значению t_0 времени t находим:

$$q_\mu = \sum_{\alpha=1}^{n} \{q_{n+\alpha}^0 \varphi(t)_{\alpha\mu} - q_\alpha^0 \varphi(t)_{n+\alpha,\mu}\} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

[1] См. *Уиттекер* и *Ватсон*. Курс современного анализа, § 5, 6.

Для вычисления величин $\varphi(t)_{\lambda\mu}$ необходимо исследовать более подробно корни детерминантного уравнения $f(s) = 0$. Пусть $ki + l$, где $i = \sqrt{-1}$, а k и l являются действительными числами, есть любой корень этого уравнения. Тогда $2n$ уравнений

$$\left.\begin{aligned} (ki+l)q_{n+\alpha} - \frac{\partial H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})}{\partial q_\alpha} = 0, \\ (ki+l)q_\alpha - \frac{\partial H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})}{\partial q_{n+\alpha}} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$$

могут быть удовлетворены системой значений величин $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$, из которых по крайней мере одна отлична от нуля. Пусть

$$\xi_1 + i\eta_1,\ \xi_2 + i\eta_2,\ \ldots,\ \xi_{2n} + i\eta_{2n},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}$ — действительные величины, и будет такого рода системой значений. Полагая

$$\frac{\partial H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})}{\partial q_\mu} = H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})_\mu$$

и разделяя действительные и мнимые части, из последних уравнений получим:

$$\left.\begin{aligned} H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})_\alpha + l\xi_{n+\alpha} - k\eta_{n+\alpha} = 0, \\ H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})_{n+\alpha} - l\xi_\alpha + k\eta_\alpha = 0, \\ H(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n})_\alpha + l\eta_{n+\alpha} + k\xi_{n+\alpha} = 0, \\ H(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n})_{n+\alpha} - l\eta_\alpha - k\xi_\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \quad (1)$$

Но так как H есть однородная квадратичная функция своих аргументов, то

$$2H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}) = \sum_{\lambda=1}^{2n} \xi_\lambda H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})_\lambda.$$

Совместно с двумя первыми уравнениями системы 1 это даст:

$$\left.\begin{aligned} 2H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n}) = k\sum_{\alpha=1}^{n}(\xi_\alpha\eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha\xi_{n+\alpha}). \\ \text{Аналогично} \qquad\qquad \\ 2H(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n}) = k\sum_{\alpha=1}^{n}(\xi_\alpha\eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha\xi_{n+\alpha}). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Умножая первое из уравнений (1) на η_α, второе — на $\eta_{n+\alpha}$ и суммируя по α от 1 до n, получим:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} \eta_\lambda H(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{2n})_\lambda = l \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha})$$

и аналогично:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} \xi_\lambda H(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{2n})_\lambda = -l \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}).$$

Так как левые части этих уравнений совпадают, то

$$l \sum_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha}) = 0.$$

Так как H есть определенная положительная форма, то уравнения (2) показывают, что ни k и ни $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} (\xi_\alpha \eta_{n+\alpha} - \eta_\alpha \xi_{n+\alpha})$ не могут равняться нулю; следовательно, l равно нулю. *Все корни уравнения $f(s) = 0$ будут вида ki, где k — отличная от нуля действительная величина.* Если уравнение $f(s) = 0$ имеет кратный корень s' j-го порядка, то каждая из функций $f(s)_{\lambda\mu}$ делится нацело на $(s - s')^{j-1}$.

В самом деле, пусть $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ — некоторая определенная система действительных величин. Определим некоторую систему значений величин $q_1, q_2, \ldots, q_{2n}$ при помощи уравнений:

$$\left.\begin{aligned} sq_{n+\alpha} + H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})_\alpha &= c_\alpha, \\ sq_\alpha - H(q_1, q_2, \ldots, q_{2n})_{n+\alpha} &= c_{n+\alpha} \end{aligned}\right\} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

так что

$$q_\mu = \sum_{\lambda=1}^{2n} \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} c_\lambda \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Пусть $s_1 i$ — произвольный корень уравнения $f(s) = 0$, а m — наименьшее положительное число, для которого все функции

$$(s - s_1 i)^m \frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$$

остаются конечными при $s = s_1 i$. Если s выбрано достаточно близко от $s_1 i$, то q_μ может быть разложено в ряд:

$$(g_\mu + h_\mu i)(s - s_1 i)^{-m} + (g'_\mu + h'_\mu i)(s - s_1 i)^{-m+1} + \ldots,$$

где g_μ, h_μ, g'_μ, h'_μ означают некоторые действительные постоянные. Допустим, что величины $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ выбраны таким образом, что g_μ и h_μ отличны от нуля. Подставляя эти значения q_μ в уравнения (3) и сравнивая коэффициенты при $(s - s_1 i)^{-m}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n})_\alpha - s_1 h_{n+\alpha} = 0,\\ H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n})_{\alpha+n} + s_1 h_\alpha = 0,\\ H(h_1, h_2, \ldots, h_{2n})_\alpha - s_1 g_{n+\alpha} = 0,\\ H(h_1, h_2, \ldots, h_{2n})_{n+\alpha} - s_1 g_\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Сравнивая коэффициенты при $(s - s_1 i)^{-m+1}$, получим:

$$\left.\begin{aligned} &H(g'_1, g'_2, \ldots, g'_{2n})_\alpha - s_1 h'_{n+\alpha} + g_{n+\alpha} =\\ &\qquad - \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m > 1,\\ c_\alpha & \text{при} \quad m = 1, \end{cases}\\ &H(g'_1, g'_2, \ldots, g'_{2n})_{n+\alpha} - s_1 h'_\alpha - g_\alpha =\\ &\qquad = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m > 1,\\ c_{n+\alpha} & \text{при} \quad m = 1, \end{cases}\\ &H(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{2n})_\alpha + s_1 g'_{n+\alpha} + h_{n+\alpha} = 0,\\ &H(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{2n})_{n+\alpha} - s_1 g'_\alpha - h_\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Но согласно теореме Эйлера об однородных функциях:

$$2H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n}) = \sum_{\lambda=1}^{2n} g_\lambda H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n})_\lambda$$

или в силу (4):

$$2H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n}) = s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha})$$

и аналогично:

$$2H(h_1, h_2, \ldots, h_{2n}) = s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}),$$

откуда, очевидно, вытекает, что величина

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n-\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha})$$

отлична от нуля.

Кроме того, первые два уравнения (4) дают:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} h'_\lambda H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n})_\lambda - s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (h_\alpha h'_{n+\alpha} - h'_\alpha h_{n+\alpha}) = 0, \tag{6}$$

а последние два уравнения (4) дают:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} g'_\lambda H(h_1, h_2, \ldots, h_{2n})_\lambda - s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha g'_{n+\alpha} - g'_\alpha g_{n+\alpha}) = 0. \tag{7}$$

Но при $m > 1$ из первых двух уравнений (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{2n} h_\lambda H(g'_1, g'_2, \ldots, g'_{2n})_\lambda - s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (h_\alpha h'_{n+\alpha} - h'_\alpha h_{n+\alpha}) - \\ - \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

а из последних двух уравнений (5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{2n} g_\lambda H(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{2n})_\lambda + s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha g'_{n+\alpha} - g'_\alpha g_{n+\alpha}) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Так как H есть функция однородная и квадратичная, то имеют место следующие тождества:

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} h'_\lambda H(g_1, g_2, \ldots, g_{2n})_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{2n} g_\lambda H(h'_1, h'_2, \ldots, h'_{2n})_\lambda \tag{10}$$

и

$$\sum_{\lambda=1}^{2n} g'_\lambda H(h_1, h_2, \ldots, h_{2n})_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{2n} h_\lambda H(g'_1, g'_2, \ldots, g'_{2n})_\lambda. \tag{11}$$

Из уравнений (6), (9), (10) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) = s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (h_\alpha h'_{n+\alpha} - h'_\alpha h_{n+\alpha}) - \\ - s_1 \sum_{\alpha=1}^{n} (g_\alpha g'_{n+\alpha} - g'_\alpha g_{n+\alpha}), \end{aligned}$$

а из уравнений (7), (8), (11):

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) = -s_1\sum_{\alpha=1}^{n}(h_\alpha h'_{n+\alpha} - h'_\alpha h_{n+\alpha}) + \\ + s_1\sum_{\alpha=1}^{n}(g_\alpha g'_{n+\alpha} - g'_\alpha g_{n+\alpha}).$$

Сравнение этих формул даст:

$$\sum_{\alpha=1}^{n}(g_\alpha h_{n+\alpha} - h_\alpha g_{n+\alpha}) = 0,$$

что по доказанному невозможно. Поэтому предположение, что $m > 1$, на основании которого получено уравнение (8), должно быть отброшено как неверное, и, следовательно, $m = 1$. Поэтому: *если $f(s)$ делится нацело на $(s - s_1 i)^k$, то все функции $f(s)_{\lambda\mu}$, делятся нацело на $(s - s_1 i)^{k-1}$.*

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_r$ означают модули неравных корней уравнения $f(s) = 0$. Тогда все функции $\dfrac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$ могут обращаться в бесконечность только при $s = \pm s_1 i, \pm s_2 i, \ldots, \pm s_r i$. Обозначая через

$$(\lambda, \mu)_\rho + i(\lambda, \mu)'_\rho$$

[где $(\lambda, \mu)_\rho$ и $(\lambda, \mu)'_\rho$ являются действительными] коэффициенты при $(s - s_\rho i)^{-1}$ в разложениях Лорана функций $\dfrac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)}$ по степеням $(s - s_\rho i)$ и замечая, что эти функции имеют полюсы только в точках $s = \pm s_\rho i)$ и притом полюсы первого порядка, получим:

$$\frac{f(s)_{\lambda\mu}}{f(s)} = \sum_{\rho=1}^{r}\left\{\frac{(\lambda, \mu)_\rho + i(\lambda, \mu)'_\rho}{s - s_\rho i} + \frac{(\lambda, \mu)_\rho - i(\lambda, \mu)'_\rho}{s + s_\rho i}\right\}.$$

Следовательно, $\varphi(t)_{\lambda\mu}$ равны коэффициентам при $\dfrac{1}{s}$ в разложениях выражений:

$$e^{s(t-t_0)}\sum_{\rho=1}^{r}\left\{\frac{(\lambda, \mu)_\rho + i(\lambda, \mu)'_\rho}{s - s_\rho i} + \frac{(\lambda, \mu)_\rho - i(\lambda, \mu)'_\rho}{s + s_\rho i}\right\}$$

в ряды Лорана по степеням s.

Но коэффициент при $\dfrac{1}{s}$ в разложении $\dfrac{e^{s(t-t_0)}}{(s-s_\rho i)}$ равен $e^{s_\rho(t-t_0)i}$, а коэффициент при $\dfrac{1}{s}$ в разложении $\dfrac{e^{s(t-t_0)}}{(s+s_\rho i)}$ равен $e^{-s_\rho(t-t_0)i}$. Поэтому

$$\varphi(t)_{\lambda\mu} = 2\sum_{\rho=1}^{n}\{(\lambda,\mu)_\rho \cos s_\rho(t-t_0) - (\lambda,\mu)'_\rho \sin s_\rho(t-t_0)\}$$

и, следовательно, окончательно:

$$\begin{gathered} q_\mu = 2\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{r}[q^0_{n+\alpha}\{(\alpha,\mu)_\rho \cos s_\rho(t-t_0) - (\alpha,\mu)'_\rho \sin s_\rho(t-t_0)\} - \\ -q^0_\alpha\{(n+\alpha,\mu)_\rho \cos s_\rho(t-t_0) - (n+\alpha,\mu)'_\rho \sin s_\rho(t-t_0)\}] \\ (\mu = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n). \end{gathered}$$

Эти формулы представляют общий интеграл уравнений движения. Следовательно, *если полная энергия системы, колеблющейся около стационарного состояния движения, есть определенная положительная квадратичная форма, то колебание может быть представлено при помощи тригонометрических функций от t, и стационарное движение устойчиво. Периоды нормальных колебаний равны соответственно $\dfrac{2\pi}{s_1}$, $\dfrac{2\pi}{s_2}$, ..., где $\pm is_1$, $\pm is_2$, ... — корни уравнения $f(s) = 0$, степень которого относительно s^2 равна числу нециклических координат системы.*

Исследование остается одинаково справедливым как для простых, так и для кратных корней детерминантного уравнения.

Коэффициенты $(\lambda,\, \mu)_\rho$, $(\lambda,\, \mu)'_\rho$ связаны соотношениями:

$$(\lambda,\mu)_\rho = -(\mu,\lambda)_\rho, \qquad (\lambda,\mu)'_\rho = (\mu,\, \lambda)'_\rho,$$

и, следовательно,

$$(\lambda,\, \lambda)_\rho = 0.$$

Эти соотношения вытекают из равенств:

$$\begin{gathered} f(s) = f(-s), \\ f(s)_{\lambda\mu} = f(-s)_{\mu\lambda}, \end{gathered}$$

являющихся следствием самого определения функций $f(s)$ и $f(s)_{\lambda\mu}$.

Задача 1. Система после упрощения при помощи циклических координат имеет четное число $2k$ степеней свободы. Показать, что если циклические скорости очень велики (что будет, например, иметь место, если циклические координаты означают углы поворота быстро вращающихся маховиков), то k колебаний имеют очень большие периоды, а другие k колебаний — очень малые. А именно, периоды первых k колебаний прямо пропорциональны циклическим скоростям, а периоды остальных колебаний обратно пропорциональны этим скоростям.

Пуанкаре указал[1], что если исследовать устойчивость при помощи метода малых колебаний, то некоторые обстоятельства могут оказаться незамеченными. Рассмотрим, например[2], материальную точку, находящуюся на внутренней стороне шарообразного сосуда, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг вертикального диаметра. Если сосуд абсолютно гладкий, то равновесие точки в наиболее низком положении будет несомненно устойчивым, так как вращение сосуда не будет иметь на нее никакого влияния. Но если имеет место хотя бы незначительное трение между точкой и сосудом и если угловая скорость сосуда превосходит некоторое определенное значение, то точка будет искать выход наружу по некоторой спирали, пока она не займет такого положения, при котором будет вращаться вместе с сосудом наподобие конца конического маятника.

§ 85. Примеры колебаний около стационарного состояния движения. Для пояснения рассмотрим несколько примеров колебаний системы около стационарного состояния движения.

1. Материальная точка описывает окружность $r = a$, $z = b$ под действием сил, для которых потенциальная энергия равна $V = \varphi(r, z)$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Причем известно, что $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ обращается в нуль при $r = a$, $z = b$. Определить условия устойчивости движения.

Если массу точки обозначить через m, то, полагая

$$x = r\cos\vartheta, \qquad y = r\sin\vartheta,$$

получим для кинетической и потенциальной энергий выражения:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + \dot z^2),$$
$$V = \varphi(r, z).$$

Циклической координате ϑ соответствует интеграл $mr^2\dot\vartheta = k$, где k — некоторая постоянная. Отсюда для измененного кинетического потенциала R имеем выражение:

$$R = T - V - k\dot\vartheta = \frac{1}{2}m\dot r^2 + \frac{1}{2}m\dot z^2 - \varphi(r, z) - \frac{k^2}{2mr^2}.$$

Для стационарного движения должны выполняться условия:

$$\frac{\partial R}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

[1] Acta Math., т. 7, стр. 259; 1885.

[2] На этот пример указал Ламб (Proc. Roy. Soc., т. 80, стр. 168, 1908).

Последнее условие выполняется само собою согласно условиям задачи; первое же условие дает:

$$k^2 = ma^3 \frac{\partial \varphi}{\partial a}.$$

Поэтому

$$R = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 - \varphi(r, z) - \frac{a^3}{2r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial a}.$$

Полагая

$$r = a + \rho, \qquad z = b + \zeta$$

и пренебрегая членами второго порядка относительно ρ и ζ, получим:

$$R = \frac{1}{2} m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \left(\varphi_{aa} + \frac{3}{a}\varphi_a\right) - \rho\zeta\varphi_{ab} - \frac{1}{2}\zeta^2\varphi_{bb}.$$

Так как R не содержит линейных членов относительно $\dot{\rho}$ и $\dot{\zeta}$, то задача по существу совпадает с задачей колебаний около положения равновесия. Поэтому условие устойчивости заключается в том (§ 79), что форма

$$\rho^2 \left(\varphi_{aa} + \frac{3}{a}\varphi_a\right) + 2\rho\zeta\varphi_{ab} + \zeta^2\varphi_{bb}$$

должна быть определенной положительной, так как величины

$$\left(\varphi_{aa} - \frac{3}{a}\varphi_a\right)\varphi_{bb} - \varphi_{ab}^2$$

и φ_{bb} должны быть обе положительными. В этом и заключается искомое условие устойчивости стационарного движения.

Добавление. Если точка массы 1 описывает плоскую круговую траекторию радиуса a под действием центральной силы, центр которой совпадает с центром окружности, причем $\varphi(r)$ есть потенциальная энергия, r — расстояние от центра, то измененный кинетический потенциал имеет вид:

$$\frac{1}{2}\dot{\rho}^2 - \frac{1}{2}\rho^2 \left(\varphi_{aa} + \frac{3}{a}\varphi_a\right)$$

где $r = a + \rho$, и условие устойчивости имеет вид:

$$\varphi_{aa} + \frac{3}{a}\varphi_a > 0.$$

Период колебаний около кругового движения равен тогда

$$2\pi \left\{\varphi_{aa} + \frac{3}{a}\varphi_a\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Определить период колебаний около стационарного кругового движения некоторой материальной точки, движущейся под действием силы тяжести по некоторой поверхности вращения, ось которой вертикальна.

Пусть поверхность имеет уравнение $z = f(r)$, где z, r, φ — цилиндрические координаты, и ось поверхности совпадает с осью z. Если материальной точке, находящейся в произвольной точке поверхности, сообщить подходящую начальную скорость в направлении горизонтальной касательной, то она станет двигаться с постоянной скоростью по горизонтальной окружности. Пусть радиус этой окружности равен a, а масса точки равна единице.

Кинетический потенциал

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + \dot{z}^2) - gz = \frac{1}{2}\dot{r}^2\{1 + f'^2(r)\} + \frac{1}{2}r^2\dot{\vartheta}^2 - gf(r).$$

Циклической координате ϑ соответствует интеграл $r^2\dot{\vartheta} = k$; следовательно, измененный кинетический потенциал будет:

$$R = \frac{1}{2}\dot{r}^2\{1 + f'^2(r)\} - gf(r) - \frac{k^2}{2r^2}.$$

Таким образом, задача приведена к определению колебаний около положения равновесия для некоторой системы с одной степенью свободы и с кинетическим потенциалом R. Условие равновесия имеет вид:

$$\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)_{r=a} = 0$$

или

$$k^2 = ga^3 f'(a).$$

Отсюда следует:

$$R = \frac{1}{2}\dot{r}^2\{1 + f'^2(r)\} - gf(r) - \frac{ga^3 f'(a)}{2r^2}.$$

Полагая $r = a + \rho$, где ρ — мало, и разлагая по степеням ρ, получим:

$$R = \frac{1}{2}\dot{\rho}^2\{1 + f'^2(a)\} - \frac{1}{2}g\rho^2\left\{f''(a) + \frac{3}{a}f'(a)\right\}.$$

Уравнение движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \rho} = 0$$

имеет, следовательно, вид:

$$\ddot{\rho}\{1 + f'^2(a)\} + g\rho\left\{f''(a) + \frac{3}{a}f'(a)\right\} = 0.$$

Условием устойчивости будет

$$f''(a) + \frac{3}{a}f'(a) > 0$$

и период колебаний есть

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\left\{\frac{1 + f'^2(a)}{f''(a) + \frac{3}{a}f'(a)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Задача 1. Поверхность есть параболоид вращения, ось которого вертикальна и вершина расположена снизу. Показать, что период колебаний равен

$$\pi\left(\frac{l^2+a^2}{gl}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где l — полупараметр параболоида.

3. Определить колебания волчка, вершина которого находится на абсолютно шероховатой плоскости, около стационарного состояния движения.

Пусть A — момент инерции волчка относительно прямой, проходящей через его вершину перпендикулярно к оси, ϑ — угол между осью и вертикалью, M — масса волчка, h — расстояние его центра тяжести от вершины. Мы видели в § 71, что после приведения системы при помощи циклических координат φ и ψ угол ϑ определяется интегрированием дифференциального уравнения движения системы, имеющей кинетический потенциал

$$R=\frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2-\frac{(a-b\cos\vartheta)^2}{2A\sin^2\vartheta}-Mgh\cos\vartheta,$$

где a и b — постоянные, зависящие от начальных условий движения.

Пусть α и n представляют значения ϑ и $\dot{\varphi}$ при стационарном движении. Тогда (§ 72)

$$An^2\cos\alpha+Mgh=bn,$$

$$An\sin^2\alpha=a-b\cos\alpha.$$

Для исследования колебаний волчка около стационарного состояния движения полагаем $\vartheta=\alpha-x$, где x мало, и разлагаем R по возрастающим степеням x, пренебрегая членами выше второго порядка относительно x. Тогда, исключая a и b при помощи двух последних уравнений, мы получим для R значение:

$$R=\frac{1}{2}A\dot{x}^2-\frac{1}{2}Ax^2\left\{n^2\sin^2\alpha+\left(n\cos\alpha-\frac{Mgh}{An}\right)^2\right\}.$$

Следовательно, уравнение движения для x имеет вид:

$$\ddot{x}+\left\{n^2\sin^2\alpha+\left(n\cos\alpha-\frac{Mgh}{An}\right)^2\right\}x=0.$$

Так как коэффициент при x есть величина положительная, то стационарное движение устойчиво. Период колебания равен

$$2\pi\left\{n^2-\frac{2Mgh\cos\alpha}{A}+\frac{M^2g^2h^2}{A^2n^2}\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

4. Вертикальный волчок. Метод, примененный в предыдущем параграфе, должен быть изменен, если $\alpha=0$, т. е. если ось волчка остается все время вертикальной и он вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью, ибо в

этом случае стационарное движение с малым α должно быть рассматриваемо как колебание около стационарного движения, соответствующего $\alpha = 0$. Так что здесь получаются два независимых периода нормальных колебаний, соответствующие периодам стационарного движения, и колебаний около него в предыдущем примере.

Так же как и в § 71, имеем для кинетической и потенциальной энергий волчка выражения:

$$T = \frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{2}C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta)^2,$$
$$V = Mgh\cos\vartheta.$$

Циклической координате ψ соответствует интеграл

$$b = C(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\cos\vartheta).$$

После приведения кинетический потенциал системы принимает вид:

$$R = \frac{1}{2}A\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta + b\dot{\varphi}\cos\vartheta - Mgh\cos\vartheta.$$

В последних двух членах $\cos\vartheta$ может быть заменен через $\cos\vartheta - 1$, так как появляющиеся вследствие этого члены $-b\dot{\varphi}$ и Mgh не войдут в уравнения движения.

Так как в течение всего движения угол φ остается малым, то мы вместо ϑ и φ вводим координаты ξ, η, определяемые уравнениями:

$$\xi = \sin\vartheta\cos\varphi, \qquad \eta = \sin\vartheta\sin\varphi.$$

Из этих уравнений, пренебрегая членами выше второго порядка относительно ξ, η, $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, находим:

$$\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\vartheta = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2,$$
$$\dot{\varphi}\sin^2\vartheta = \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi},$$
$$1 - \cos\vartheta = \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2).$$

Поэтому

$$R = \frac{1}{2}A\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\eta}^2 - \frac{1}{2}b(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + \frac{1}{2}Mgh(\xi^2 + \eta^2).$$

Уравнениями движения будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\eta}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0$$

или

$$A\ddot{\xi} + b\dot{\eta} - Mgh\xi = 0,$$
$$A\ddot{\eta} + b\dot{\xi} - Mgh\eta = 0.$$

Если $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ означает период нормального колебания, то, полагая $\xi = Ie^{i\sqrt{\lambda}t}$, $\eta = Ke^{i\sqrt{\lambda}t}$ и исключая I и K, придем к уравнению:

$$\begin{vmatrix} -\lambda A - Mgh & ib\sqrt{\lambda} \\ -ib\sqrt{\lambda} & -\lambda A - Mgh \end{vmatrix} = 0$$

или

$$(\lambda A + Mgh)^2 - b^2\lambda = 0.$$

Оба корня этого квадратного уравнения дают значения λ, соответствующие обоим нормальным колебаниям. Мы должны, следовательно, исследовать эти корни более подробно. Решением этого квадратного уравнения будет:

$$\lambda = \frac{1}{2A^2}\left\{b^2 - 2AMgh \pm b(b^2 - 4AMgh)^{\frac{1}{2}}\right\};$$

поэтому

$$\sqrt{\lambda} = \pm\frac{1}{2A}\left\{b \pm (b^2 - 4AMgh)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Следовательно, оба значения $\sqrt{\lambda}$ будут действительными или мнимыми, в зависимости от того, будет ли b^2 больше или меньше, чем $4AMgh$. В первом случае стационарное вращение вокруг вертикали устойчиво, во втором случае оно неустойчиво.

Не следует думать, что при неустойчивом движении ось волчка непременно отходит далеко от вертикали. Неустойчивость указывает лишь на то, что при $b^2 < 4AMgh$ возмущенное движение, как бы мало ни было возмущение, не стремится слиться с невозмущенным движением.

В действительности ось волчка может оставаться близко от вертикали, несмотря на то, что $b^2 < 4AMgh$ отрицательно и движение, следовательно, неустойчиво. Но в этом случае наибольшее отклонение от вертикали при заданном b, как бы мало ни было начальное возмущение, не может быть сделано сколь угодно малым[1].

§ 86. Колебания систем с переменными связями. Если связи системы зависят от времени (например, если точка движется по гладкой кривой или поверхности, вращающихся вокруг некоторой оси), то кинетическая энергия может содержать не только члены нулевого и второго порядка относительно скоростей, но и члены линейные. Следовательно, в уравнения колебаний таких систем могут войти гироскопические члены, даже тогда, когда рассматриваются колебания около относительного положения равновесия. Интегрирование уравнений может быть выполнено теми же способами, что и при колебаниях систем около стационарного состояния движения. Поясним это на следующем примере.

---

[1] Об устойчивости вертикального волчка см. *Klein*, Bull. Amer. Math.: Soc., т. 3. стр. 129, 292, 1897.

Задача 1. Определить периоды нормальных колебаний тяжелой материальной точки около ее положения равновесия, совпадающего с наиболее низкой точкой некоторой поверхности, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через эту точку.

Пусть x, y, z означают координаты точки, отнесенной к системе координат, связанной с движущейся поверхностью, причем ось z направлена вертикально вверх, а оси x и y направлены по касательным к линиям кривизны в наиболее низкой точке поверхности. Уравнением поверхности будет:

$$z = \frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2} + \text{члены высших порядков.}$$

Для кинетической и потенциальной энергий системы имеем:

$$T = \frac{1}{2}m\left\{(\dot{x} - y\omega)^2 + (\dot{y} - x\omega)^2 + \dot{z}^2\right\},$$
$$V = Mgz.$$

В задаче колебаний кинетический потенциал есть, следовательно,

$$L = \frac{1}{2}m\left\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\omega(x\dot{y} - y\dot{x}) - \omega^2(x^2 + y^2)\right\} - mg\left(\frac{x^2}{2\rho_1} + \frac{y^2}{2\rho_2}\right).$$

Уравнения движения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

дают:

$$\ddot{x} - 2\omega\dot{y} + x\left(\frac{g}{\rho_1} - \omega^2\right) = 0,$$
$$\ddot{y} + 2\omega\dot{x} + y\left(\frac{g}{\rho_2} - \omega^2\right) = 0.$$

Если $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ есть период нормального колебания, то, полагая в полученных уравнениях $x = Ae^{i\sqrt{\lambda}t}$, $y = Be^{i\sqrt{\lambda}t}$ и исключая A и B, получим:

$$\begin{vmatrix} -\lambda - \omega^2 + \dfrac{g}{\rho_1} & -\omega i\sqrt{\lambda} \\ 2\omega i\sqrt{\lambda} & -\lambda - \omega^2 + \dfrac{g}{\rho^2} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\left(\lambda + \omega^2 - \frac{g}{\rho_1}\right)\left(\lambda + \omega^2 - \frac{g}{\rho_2}\right) - 4\lambda\omega^2 = 0.$$

Корни этого квадратного относительно λ уравнения и определяют периоды малых колебаний.

Упражнения.

1. Материальная точка движется по кривой, вращающейся вокруг постоянной оси. Потенциальная энергия $V(s)$ точки зависит только от ее положения, определяемого дугой s. Показать, что период колебаний точки около ее относительного положения равновесия на кривой равен

$$2\pi \left\{ -\frac{dV}{ds}\frac{d}{ds}\ln\left(-\frac{r\,\dfrac{dr}{ds}}{\dfrac{dV}{ds}} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

где r расстояние точки от оси вращения.

2. Определить колебания тяжелого горизонтального цилиндра, катящегося по внутренней стороне другого, неподвижного полого цилиндра. Показать, что эквивалентный математический маятник имеет длину $(b-a)(3M+m)(2M+m)$. Здесь b и M означают радиус и массу наружного цилиндра, а a и m радиус и массу внутреннего цилиндра.

3. Тонкостенная полусферическая чашка массы M и радиуса a находится на шероховатой горизонтальной плоскости. Точка массы m лежит на ее гладкой внутренней стороне. Система совершает малые колебания, причем траектория точки и центр тяжести чашки лежат в одной плоскости. Показать, что нормальные колебания имеют периоды $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_1}}$ и $\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda_2}}$, где λ_1 и λ_2 суть корни уравнения:

$$ma\lambda g - (g - a\lambda)\left(\frac{1}{2}g - \frac{2}{3}a\lambda\right)M = 0.$$

4. Нить длины $4a$ нагружена на равных расстояниях тремя грузами m, M, m и подвешена симметрично в двух точках A и B. Груз M совершает малые колебания по вертикали. Показать, что эквивалентный математический маятник имеет длину:

$$\frac{a\cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cos^2\alpha + \sin\beta\cos^2\beta},$$

где α и β — углы наклона частей нити относительно вертикали.

5. Однородный стержень длины $2a$ подвешен на короткой нити длины l. Показать, что продолжительность колебания приблизительно в $1+\frac{9l}{32a}$ раз больше, чем продолжительность колебания стержня относительно одного из своих концов.

6. Эллиптический цилиндр, ограниченный двумя плоскостями, перпендикулярными к его оси, покоится на двух гладких, взаимно перпендикулярных, неподвижных плоскостях, образующих каждая угол в 45° с горизонтом. Показать, что существуют два устойчивых и два неустойчивых положения равновесия и что в первом случае эквивалентный математический маятник имеет длину:

$$\frac{ab(a^2+b^2)}{2\sqrt{2}(a-b)^2(a-b)},$$

где a и b полуоси поперечного сечения цилиндра.

7. Шероховатый круглый цилиндр радиуса a и массы m нагружен таким образом, что его центр тяжести находится на расстоянии h от оси. Цилиндр лежит на доске такой же массы, которая может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости. Система получает в устойчивом положении равновесия небольшое возмущение. Показать, что эквивалентный математический маятник имеет длину $\dfrac{k^2}{h}+\dfrac{(a-h)^2}{2h}$, где mk^2 момент инерции цилиндра относительно горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести.

8. Один конец однородного стержня длины b и массы m прикреплен при помощи шарнира к гладкой вертикальной стене; другой конец стержня прикреплен аналогичным образом к поверхности однородного шара массы M и радиуса a. Показать, что колебание около положения равновесия имеет период $\dfrac{2\pi}{p}$, где

$$p_2\left\{\sin\beta\sin^2(\alpha-\beta)+\frac{2}{3}\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)+\frac{2}{5}\sin\beta\cos^2\beta\right\}-$$
$$=\frac{g}{ab\cos\alpha}(a\sin\alpha\cos^2\alpha+b\sin\beta\cos^2\beta),$$

а α и β определяются уравнениями:

$$a\sin\alpha+b\sin\beta-a=0,$$
$$\left(\frac{1}{2}m+M\right)\operatorname{tg}\beta-M\operatorname{tg}\alpha-0.$$

9. Внутри тонкостенного круглого цилиндра массы M и радиуса b, покоящегося на шероховатой горизонтальной плоскости, находится шероховатый шар массы m и радиуса a. Система получает возмущение в плоскости, перпендикулярной к образующей. Найти уравнения конечных колебаний и два интеграла. Показать далее, что при малых колебаниях эквивалентный математический маятник имеет длину:

$$\frac{14M(b-a)}{10M+7m}.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1899.)

10. Шар радиуса c лежит на горизонтальной проволоке, согнутой в эллипс с полуосями a и b. Показать, что продолжительность колебания под действием силы тяжести около устойчивого положения равновесия совпадает с продолжительностью колебания математического маятника длины l, определяемой уравнением:

$$b^2 dl - (a^2 - b^2)(d^2 + k^2),$$

где $k^2 = \frac{2}{5}c^2$, $d^2 = c^2 - b^2$.

11. Ромб, образованный четырьмя однородными стержнями длины a, связанными шарнирами, лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Один из углов равен 2α. Вершины ромба связаны упругими нитями, длины которых в естественном состоянии равны $2a\cos\alpha$ и $2a\sin\alpha$. Одна из нитей слегка натягивается и затем отпускается. Показать, что в возникающем после этого движении периоды, в течение которых натянуты соответственно первая и вторая нити, относятся как

$$(\cos\alpha)^{\frac{3}{2}} : (\sin\alpha)^{\frac{3}{2}}.$$

12. Точка массы m привязана при помощи n одинаковых упругих нитей к вершинам правильного n-угольника. Длина каждой нити в естественном состоянии равна a; радиус окружности, описанной около многоугольника, равен c. Показать, что точка, при ее отклонении от положения равновесия в плоскости многоугольника, совершает прямолинейные гармонические колебания, для которых эквивалентный математический маятник имеет длину $\dfrac{2mgac}{n\lambda(2c-a)}$, где λ модуль упругости нитей; напротив, для колебаний, перпендикулярных к плоскости многоугольника, длина эквивалентного математического маятника равна $\dfrac{mgac}{n\lambda(2c-a)}$.

13. Уравнение энергии материальной точки имеет вид:

$$f(x)x^2 = 2\varphi(x) + \mathrm{const},$$

где $\varphi(x)$ уничтожается при $x - a$. Пусть $\varphi^{(2p)}(x)$ означает первую необращающуюся в нуль (при $x = a$) производную от $\varphi(x)$. Показать, что колебание около положения $x = a$ имеет период:

$$\frac{4}{h^{p-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p} + \frac{1}{2}\right)} \left\{-\frac{\Gamma(2p) f(a)\pi}{4p\varphi^{(2p)}(a)}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

где h означает значение величины $x - a$ при наибольшем отклонении. (Elliot.)

14. Центр тяжести конуса, имеющего во всем остальном обычную кинетическую симметрию относительно вершины, лежит на расстоянии c от оси. Конус колеблется около положения равновесия на горизонтальной плоскости. Показать, что эквивалентный математический маятник имеет длину:

$$\frac{\cos\alpha}{MC}(A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha),$$

если плоскость, на которой лежит конус, шероховатая, и длину:

$$\frac{\cos\alpha}{MC}\left(\frac{\sin^2\alpha}{A} + \frac{\cos^2\alpha}{C}\right),$$

если эта плоскость гладкая.

15. Некоторое число одинаковых однородных стержней длины $2a$ связаны концами при помощи идеальных шарниров в одной точке и образуют между собой равные углы наподобие прутьев дождевого зонтика. Образованный таким образом конус накрывает некоторый покоящийся шар радиуса b и находится на нем в покое. Систему выводят из положения равновесия, сообщая вершине небольшие вертикальные колебания. Показать, что эти колебания имеют период:

$$2\pi\left(\frac{a}{3g}\cdot\frac{1+3\sin^2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}\alpha,$$

где $\dfrac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} = \dfrac{a}{b}$. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896.)

16. Тяжелая прямоугольная пластинка удерживается в горизонтальном положении при помощи четырех упругих нитей, прикрепленных к ее вершинам и к некоторой неподвижной точке, расположенной на вертикали, проходящей через центр пластинки. Показать, что вертикальные колебания имеют период:

$$2\pi\left(\frac{g}{c} + \frac{4c^2\lambda}{k^3M}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где c расстояние пластинки в положении равновесия от неподвижной точки, a — длина половины диагонали, $k = (a^2+c^2)^{\frac{1}{2}}$, а λ — модуль упругости нитей.

17. Тяжелая плоская пластинка, подвешенная на трех вертикальных нерастяжимых нитях разной длины, находится в равновесии в горизонтальном положении. Показать, что нормальные колебания состоят:

1) из вращений вокруг двух вертикальных осей, лежащих в плоскости, проходящей через центр тяжести точек подвеса, предполагая, что в каждой из них сосредоточена масса, равная обратной величине длины соответствующей нити; 2) из горизонтальных колебаний, параллельных этой плоскости.

18. Однородный стержень длины $2a$ может свободно вращаться вокруг своего закрепленного конца. К другому концу этого стержня привязана нить длины b, к которой, в свою очередь, привязан шар радиуса c. Массы шара и стержня равны между собой. Определить движение системы при малом отклонении ее от вертикального положения равновесия и показать, что периоды колебаний определяются уравнением:

$$2abc\mu^2 - g\mu^2(6bc + 19ca + 5ab) + g^2\mu(35a + 15b + 21c) - g^3 = 0.$$

19. Однородная проволока, согнутая в эллипс с полуосями a и b, покоится на шероховатой горизонтальной плоскости таким образом, что малая полуось направлена вертикально вверх. К наивысшей точке проволоки подвешен на нити длины l маленький шарик, масса которого равна массе проволоки. Показать, что период колебаний в вертикальной плоскости равен периоду колебаний математического маятника длины x, определяемой уравнением:

$$\left\{x\left(3b - \frac{2a^2}{b}\right) + 5b^2 + k^2\right\}(x - l) + 4b^2 l = 0,$$

где k — радиус инерции относительно центра тяжести.

20. Концы нерастяжимой нити прикреплены к двум неподвижным точкам, расположенным на одной высоте на расстоянии, равном $\frac{3}{4}$ длины нити друг от друга. Нить проходит через два гладких колечка, прикрепленных к концам однородного стержня, длина которого равна половине длины нити. Стержень находится в равновесии в горизонтальном положении. Ему сообщают небольшое возмущение в вертикальной плоскости, проходящей через точки подвеса нити. Показать, что в начале движения нормальные координаты, выраженные через время, равны соответственно $L\cos(pt + \alpha)$ и $M\operatorname{ch}(qt + \beta)$, где p^2 и $-q^2$ суть корни уравнения:

$$x^4 - \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{g}{a}x^2 - \frac{3}{4}\frac{g^2}{a^2} = 0.$$

21. Однородный тяжелый стержень длины $2a$, подвешенный к неподвижной точке при помощи нити длины b, выводится из вертикального положения при помощи небольшого толчка. Показать, что периоды нормальных колебаний равны: $\frac{2\pi}{p_1}$ и $\frac{2\pi}{p_2}$, где p_1 и p_2 — корни уравнения:

$$abp^4 - (4a + 3b)gp^2 + 3g^2 = 0.$$

22. Круглый диск массы M подвешен к неподвижной точке при помощи нити, прикрепленной к его центру. На его периметре, в точке P, укреплена неподвижно материальная точка массы m. Составить уравнения движения в вертикальной плоскости, выбрав за координаты углы ϑ и φ, которые образуют линии OC и CP с вертикалью, и показать, что при колебании системы около положения равновесия периоды этих координат определяются уравнением:

$$(M+m)(p^2a-g)\{(M+2m)cp^2-2mg\}=2m^2cap^4,$$

где a — длина нити OC и c — радиус диска.

23. Сосуд, имеюший форму полусферы радиуса b, покоится на гладком столе так, что плоскость его края горизонтальна. В сосуде покоится шероховатый шар радиуса b, масса которого составляет $\frac{1}{4}$ массы сосуда. Шару сообщается небольшое отклонение в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и сосуда. Показать, что вызванные этим колебания имеют периоды $\frac{2\pi}{p_1}$ и $\frac{2\pi}{p_2}$, где p_1^2 и p_2^2 — корни уравнения:

$$156b^2x^2-260bxg+75g^2=0.$$

24. Однородный круговой диск радиуса a и массы m удерживается в равновесии на гладкой горизонтальной плоскости при помощи трех упругих лент. Ленты прикреплены к трем равноотстоящим точкам окружности диска и к трем точкам плоскости, лежащим на продолжениях радиусов диска, проходящих через первые три точки. При равновесии диска ленты имеют длину l, в нерастянутом состоянии длину l_0, а их модуль упругости равен λ. Показать, что диск имеет периоды колебаний:

$$2\pi\left\{\frac{\mu}{2l-l_0}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{и} \quad 2\pi\left\{\frac{\mu a}{4(a+l)(l-l_0)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $\mu=\dfrac{2mll_0}{3\lambda}$. (Camb. Math. Tripos, часть I, 1898.)

25. Материальная точка описывает окружность под действием силы притяжения к центру, пропорциональной n-й степени расстояния. Показать, что при $n<3$ движение неустойчиво. Показать далее, что если сила изменяется как $r^{-2}e^{-\frac{r}{a}}$, то движение будет устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, будет ли радиус окружности больше или меньше величины a.

26. Материальная точка движется в пространстве под действием центральной силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния и некоторого постоянного поля сил. Показать, что одним из возможных стационарных движений является равномерное движение по окружности, но что это движение только тогда устойчиво, когда окружность лежит да прямом круговом конусе, имеющем вершину в центре сил и угол раствора, больший чем $2\arccos\frac{1}{3}$.

27. Материальная точка движется равномерно по окружности под действием сил притяжения к двум неподвижным центрам. Силы притяжения обратно пропорциональны квадратам расстояния. Показать, что движение неустойчиво, если $3\cos\vartheta\cos\varphi < 1$, где ϑ и φ — углы, под которыми виден радиус окружности из притягивающих центров. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1889.)

28. Тяжелая материальная точка бросается горизонтально на внутреннюю поверхность кругового конуса, имеющего вертикальную ось и открытого кверху. Первоначальное расстояние точки от вершины конуса равно c, а угол раствора конуса равен 2α. Определить, при каком условии точка опишет горизонтальную окружность. Показать далее, что период колебания около этого стационарного движения равен периоду колебаний математического маятника длиной $\frac{c}{3\cos\alpha}$.

29. Через центр круглого диска, перпендикулярно к его плоскости, проходит тонкий стержень, длина которого равна радиусу диска. Показать, что, для того чтобы система при вертикальном положении стержня могла двигаться наподобие волчка, необходимо, чтобы скорость какой-нибудь точки окружности диска была больше скорости, приобретаемой телом, падающим без начальной скорости с высоты, равной удесятеренному радиусу.

30. Симметричный волчок с вертикальной осью вращается настолько быстро, что его движение устойчиво. Показать, что два вида движения, отличающиеся очень мало от этого стационарного движения и определяющиеся простыми гармоническими функциями времени, являются предельными формами стационарных движений, при которых ось очень мало отклонена от вертикали, и что период колебаний есть предел периода колебаний стационарного движения с малоотклоненной осью, когда это отклонение стремится к нулю.

31. Конец однородного стержня длины $2a$, радиус инерции которого относительно конца равен k, описывает горизонтальную окружность радиуса c с постоянной угловой скоростью ω. Показать, что если движение стационарно, то стержень находится в вертикальной плоскости, проходящей через центр окружности, и образует с вертикалью угол α, определяемый уравнением:

$$\omega^2\left(k^2+\frac{ac}{\sin\alpha}\right)=\frac{ag}{\cos\alpha}.$$

Показать также, что периоды нормальных колебаний суть $\dfrac{2\pi}{\lambda_1}$ и $\dfrac{2\pi}{\lambda_2}$, где λ_1 и λ_2 — корни уравнения:

$$(k^2\lambda^2\sin\alpha-\omega^2ac)(k^2\lambda^2\sin\alpha-\omega^2ac-\omega^2k^2\sin^3\alpha)=4\omega^2k^4\lambda^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1889.)

32. Исследовать движение конического маятника, выведенного из состояния стационарного движения малыми вертикальными гармоническими колебаниями точки подвеса. Может ли при таком возмущении стационарное движение сделаться неустойчивым?

33. Середина одной из сторон однородного прямоугольника закреплена неподвижно, а прямая, соединяющая ее с серединой противолежашей стороны, описывает с постоянной угловой скоростью круговой конус с углом при вершине, равным 2α. Во всем остальном прямоугольник свободен. Определить возможные стационарные формы движения и показать, что продолжительность колебания около устойчивого стационарного движения равна периоду обращения, деленному на $\sin\alpha$.

34. Тело вращения, имеющее плоскость симметрии, проходящую через центр тяжести и перпендикулярную к оси тела, висит на нити длины b, прикрепленной к концу оси. Длина оси равна $2a$, масса тела равна M, а главные моменты инерции в центре тяжести равны A, A и C. Телу сообщается небольшое возмущение из состояния стационарного движения, при котором ось тела и нить вертикальны, а тело равномерно вращается вокруг этой оси. Показать, что нормальные колебания имеют периоды $\dfrac{2\pi}{p_1}$ и $\dfrac{2\pi}{p_2}$, где p_1^2 и p_2^2 — корни уравнения:

$$Ma^2gp^2=(g-bp^2)(Mag+Cnp-Ap^2).$$

35. Симметричный волчок, острие которого покоится в неподвижном гнезде, вращается вокруг своей, расположенной вертикально, оси. На него поставлен второй волчок, который также вращается вокруг своей оси, расположенной вертикально, причем острие волчка также покоится в некотором гнезде. Показать, что если все корни уравнения

$$(Mcgx^2+C\Omega x+A)\{(M'c'+Mh)gx^2+C'\Omega'x+(A'+Mh^2)\}=M^2h^2c^2$$

действительны, то система устойчива. Здесь Ω и Ω' означают угловые скорости верхнего и нижнего волчков, M и M' — их массы, C и C' — их моменты инерции относительно оси симметрии, A и A' — их моменты инерции относительно горизонтальных осей, проходящих через острия, c, c' — расстояния центров тяжести от соответствующего острия, h — расстояние между остриями. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1898.)

36. Однородное тело, касающееся гладкой горизонтальной плоскости, находится в состоянии устойчивого стационарного вращения с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести и точку касания. Тело имеет две плоскости симметрии, проходящие через вертикаль. Главные радиусы кривизны в точке касания равны ρ_1 и ρ_2. Момент инерции относительно главных осей в центре тяжести (эти оси параллельны линиям кривизны) равны A и B, а момент инерции относительно вертикали равен C. Центр тяжести лежит на высоте $a = a_1 + \rho_1 = a_2 + \rho_2$ над точкой касания. Вес тела равен $\lambda\omega^2$. Показать, что движение устойчиво, если выполняются следующие условия:

$$I.\ (\lambda a_1 + A - C)(\lambda a_2 + B - C) > 0,$$
$$II.\ \lambda(a_1 A + a_2 B) < AB + (A - C)(B - C),$$

III. λ не должно заключаться между двумя значениями величины:

$$\frac{(A+B-C)[\sqrt{B}\{a_1 A + a_2(A-C)\}^{\frac{1}{2}} + \sqrt{A}\{a_2 B + a_1(B-C)^2\}^{\frac{1}{2}}]^2}{(a_1 A - a_2 B)^2},$$

если оба радикала, входящие в это выражение, действительны. (Camb. Math. Tripos, часть 1. 1897.)

Глава VIII
Неголономные системы. Диссипативные системы

§ 87. Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями. Мы переходим теперь к исследованию неголономных динамических систем. Согласно § 23 в такого рода системах число независимых координат, необходимых для определения конфигурации системы в любой момент времени, превышает число степеней свободы, так как система подчинена некоторому числу связей, которые по предположению не дают работы и выражаются неинтегрируемыми[1] кинематическими соотношениями:

$$A_{1k}\,dq_1 + A_{2k}\,dq_2 + \cdots + A_{nk}\,dq_n + T_k\,dt = 0 \quad (k = 1,\,2,\,\ldots\,,\,m),$$

где A_{11}, A_{12}, $\ldots$, A_{nm}, T_1, T_2, $\ldots$, T_m суть заданные функции от координат времени.

Наиболее известным примером неголономной системы является твердое тело, катящееся без скольжения по неподвижной поверхности. Условие, выражающее отсутствие скольжения, записывается двумя соотношениями вышеуказанного типа. Еще более простой пример представляет собой колесо с острым краем, катящееся по горизонтальному листу бумаги, как в интеграторах Паскаля и Абданк–Абакановича. Колесо движется только в своей собственной мгновенной плоскости, так как трение в остром крае лишает его возможности бокового скольжения. Если координаты точки соприкасания с бумагой суть x и y, а азимут плоскости колеса есть φ, то имеет место неголономное условие связи

$$dy - \operatorname{tg}\varphi\,dx = 0.$$

Если m есть число кинематических соотношений, то $n - m$ есть число степеней свободы. Непосредственное приложение уравнений Лагранжа к такого рода системам невозможно. Но, однако, эти уравнения могут быть обобщены таким образом, что исследование движения неголономных систем может быть проведено тем же способом, что и систем голономных.

Пусть конфигурация неголономной системы в любой момент времени определяется координатами q_1, q_2, $\ldots$, q_n система имеет кинетическую энергию T, а обусловленные неголономностью кинематические соотношения суть:

$$A_{1k}\,dq_1 + A_{2k}\,dq_2 + \cdots + A_{nk}\,dq_n + T_k\,dt = 0 \quad (k = 1,\,2,\,\ldots\,,\,m),$$

[1] Если эти соотношения интегрируемы, то некоторые из величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$ могут быть выражены как функции остальных, и, следовательно, координаты не являются независимыми, что противоречит условию.

Мы можем рассматривать нашу систему с двух точек зрения: с одной стороны, мы можем предполагать, что система подчинена выше написанным кинематическим условиям, а с другой стороны, мы можем предполагать, что к системе приложены некоторые дополнительные внешние силы, а именно силы реакций кинематических связей, которые нужно приложить к системе, чтобы она этим связям удовлетворяла. Остановимся пока на последней точке зрения. Пусть

$$Q'_1\,\delta q_1 + Q'_2\,\delta q_2 + \cdots - Q'_n\,\delta q_n$$

представляет собой элементарную работу дополнительных сил при каком-нибудь возможном перемещении $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$ (которое сейчас уже не подчинено условию совместимости с кинематическими связями), и пусть

$$Q_1\,\delta q_1 + Q_2\,\delta q_2 + \cdots - Q_n\,\delta q_n$$

выражает элементарную работу первоначальных внешних сил при этом перемещении. Так как введением дополнительных внешних сил система приведена к голономной, то можно применить уравнения Лагранжа. Следовательно, уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + Q'_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Силы $Q'_1, Q'_2, \ldots, Q'_n$ не известны; но они обладают тем свойством, что их элементарная работа равна нулю при всяком перемещении, совместимом со связями. Поэтому величина

$$Q'_1\,dq_1 + Q'_2\,dq_2 + \cdots + Q'_n\,dq_n$$

равна нулю при всех значениях $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$, удовлетворяющих соотношениям:

$$A_{1k}\,dq_1 + A_{2k}\,dq_2 + \cdots + A_{nk}\,dq_n = 0.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения:

$$Q'_r = \lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2} + \ldots + \lambda_m A_{rm} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ не зависят от r. Поэтому *мы имеем всего $n + m$ уравнений*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r + \lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2} + \ldots + \lambda_m A_{rm} \quad (r=1, 2, \ldots, n),$$

$$A_{1k}\dot{q}_1 + A_{2k}\dot{q}_2 + \cdots + A_{nk}\dot{q}_n = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots, m),$$

и *эти уравнения служат для определения $n + m$ неизвестных величин* $q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Таким образом, задача приводится к интегрированию этой системы дифференциальных уравнений[1].

[1] Обобщение уравнений Лагранжа на неголономные системы принадлежит Ферреру (*Ferrers*, Quart. Journ. Math., т. 12, стр. 1, 1871); *C. Neumann*, Leipziger Berichte, т. 40, стр. 22, 1888; *Vierkandt*, Monatshefte f. Math. u. Phys., т. 4, стр. 31, 1892.

§ 88. Уравнения движения относительно подвижных осей. Метод, изложенный в предыдущем параграфе, зависит существенно от приведения неголономных систем к голономным путем введения дополнительных сил, обусловленных кинематическими связями. Практически это часто наиболее удобно выполняется тем, что составляют уравнения движения для каждого тела системы в отдельности. Кроме того, часто бывает выгодно пользоваться системой координат, движущейся как относительно пространства, так и относительно тела. Поэтому мы хотим сейчас составить уравнения движения твердого тела относительно системы осей, имеющих начало в центре тяжести тела и движущихся произвольным образом в пространстве[1].

Пусть G — центр тяжести тела, а $Gxyz$ — подвижная система осей. Обозначим через u, v, w компоненты скорости центра тяжести относительно подвижных осей и через ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 — компоненты угловой скорости системы $Gxyz$ относительно этих же осей. Компоненты угловой скорости тела относительно подвижных осей мы обозначим через ω_1, ω_2, ω_3. Согласно § 64 центр тяжести G движется как свободная материальная точка, в которой сконцентрирована вся масса M тела и к которой приложены все действующие на тело внешние силы. (При этом следует учитывать все силы реакций за исключением внутренних реакций между отдельными точками тела.) Допустим, что эти внешние силы имеют относительно подвижных осей $Gxyz$ компоненты X, Y, Z.

Центр тяжести G имеет по оси Gx компонент скорости u и компонент ускорения, равный $\dot{u} - v\vartheta_3 + w\vartheta_2$ (§ 17). Поэтому имеет место уравнение:

$$M\left(\dot{u} - v\vartheta_3 + w\vartheta_2\right) = X,$$

которое может быть переписано в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \vartheta_3\frac{\partial T}{\partial v} + \vartheta_2\frac{\partial T}{\partial w} = X,$$

где T — кинетическая энергия тела, выраженная через u, v, w, ω_1, ω_2, ω_3. Аналогичные уравнения имеют место и для движения центра тяжести в направлении осей Gy и Gz.

Рассмотрим относительное движение тела вокруг центра тяжести G, которое согласно § 64 не зависит от движения G. Согласно § 62, 63 момент количества движения тела относительно Gx равен $\dfrac{\partial T}{\partial\omega_1}$. Поэтому приращение момента количества движения тела относительно неподвижной в пространстве оси, мгновенно совпадающей с Gx, равно:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\omega_1}\right) - \vartheta_3\frac{\partial T}{\partial\omega_2} + \vartheta_2\frac{\partial T}{\partial\omega_3}.$$

[1] При пользовании этим методом оси координат выбирают обычно таким образом, чтобы моменты инерции и девиации относительно них оставались постоянными. Однако это условие несущественно.

Если L, M, N суть моменты внешних сил относительно осей $Gxyz$, то (§ 40) имеет место уравнение:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) - \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} = L$$

и два аналогичных уравнения.

Следовательно, движение тела определяется шестью уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) - \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial v} + \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial w} = X, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) - \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} = L,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) - \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial w} + \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial u} = Y, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right) - \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = M,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) - \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial u} + \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial v} = Z, \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right) - \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = N.$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения представляют собой не что иное, как уравнения Лагранжа в квазикоординатах и поэтому они могут быть получены при помощи теоремы § 30.

Задача 1. Начало координат подвижной системы не закреплено неподвижно в теле, а имеет относительно подвижных осей компоненты скорости u_1, u_2, u_3. Величины ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 суть компоненты угловой скорости подвижных осей относительно этих же осей, v_1, v_2, v_3 суть компоненты скорости относительно подвижных осей той точки тела, которая в данное мгновение совпадает с началом координат, и ω_1, ω_2, ω_3 суть компоненты угловой скорости тела относительно подвижных же осей. Показать, что уравнения движения могут быть написаны в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_1}\right) - \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial v_2} + \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial v_3} = X,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_2}\right) - \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial v_3} + \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial v_1} = Y,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v_3}\right) - \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} + \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} = Z,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_1}\right) - u_3 \frac{\partial T}{\partial v_2} + u_2 \frac{\partial T}{\partial v_3} - \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} + \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} = L,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_2}\right) - u_1 \frac{\partial T}{\partial v_3} + u_3 \frac{\partial T}{\partial v_1} - \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} + \vartheta_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} = M,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega_3}\right) - u_2 \frac{\partial T}{\partial v_1} + u_1 \frac{\partial T}{\partial v_2} - \vartheta_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + \vartheta_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} = N,$$

где X, Y, Z, L, M, N означают компоненты и моменты внешних сил относительно подвижных осей.

§ 89. Приложение к отдельным видам неголономных систем. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих теорию неголономных систем.

Задача 1. Шар катится по неподвижному шару.

Исследуем движение шероховатого шара радиуса a и массы m, который катится под действием силы тяжести по поверхности неподвижного шара радиуса b.

Пусть b, ϑ и φ означают полярные координаты точки касания относительно полярной системы с началом в центре неподвижного шара и с полярной осью, направленной по вертикали. Выберем подвижные оси $GABC$, где G центр движущегося шара, GC — продолжение линии центров шаров, GA — горизонталь, перпендикулярная к GC, GB перпендикуляр к GA и GC в направлении возрастания ϑ.

Относительно этих осей, пользуясь обозначениями предыдущего параграфа, будем иметь:

$$\vartheta_1 = -\dot{\vartheta}, \quad \vartheta_2 = -\dot{\varphi}\sin\vartheta, \quad \vartheta_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta,$$
$$u = -(a+b)\dot{\varphi}\sin\vartheta, \quad v = (a+b)\dot{\vartheta}, \quad w = 0,$$
$$T = \frac{1}{2}m\left\{u^2 + v^2 + w^2 + \frac{2a^2}{5}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right)\right\}.$$

Если F и F' суть компоненты силы, приложенной к точке касания, по направлениям GA и GB, то

$$X = F, \quad Y = mg\sin\vartheta + F',$$
$$L = F'a, \quad M = -Fa, \quad N = 0.$$

Следовательно, уравнения движения предыдущего параграфа принимают вид:

$$m\left(\dot{u} - v\vartheta_3\right) = F = -\frac{2}{5}am\left(\dot{\omega}_2 - \vartheta_1\omega_3 + \vartheta_3\omega_1\right),$$
$$m\left(\dot{v} + u\vartheta_3\right) - mg\sin\vartheta = F' = \frac{2}{5}am\left(\dot{\omega}_1 - \vartheta_3\omega_2 + \vartheta_2\omega_3\right),$$
$$\dot{\omega}_3 - \vartheta_2\omega_1 + \vartheta_1\omega_2 = 0.$$

Кроме того, компоненты скорости точки касания по направлениям GA и GB суть $u - a\omega_2$ и $v + a\omega_1$; поэтому уравнения, выражающие условие отсутствия скольжения точки касания, имеют вид:

$$u - a\omega_2 = 0, \quad v + a\omega_1 = 0.$$

По исключении F, F', ω_1 и ω_2 находим:

$$\dot{u} - v\vartheta_3 - \frac{2}{7}a\vartheta_1\omega_3 = 0, \quad \dot{v} + u\vartheta_3 - \frac{2}{7}a\vartheta_2\omega_3 - \frac{5}{7}g\sin\vartheta = 0, \quad \dot{\omega}_3 = 0.$$

Последнее уравнение дает $\omega_3 = n$, где n — постоянная. Заменяя в первых двух уравнениях u, v, ϑ_1 и ϑ_2 их выражениями через ϑ, $\dot\vartheta$ и $\dot\varphi$, получим:

$$(a+b)\frac{d}{dt}(\dot\varphi\sin\vartheta) + (a+b)\dot\vartheta\dot\varphi\cos\vartheta - \frac{2}{7}an\dot\vartheta = 0,$$

$$(a+b)\ddot\vartheta - (a-b)\dot\varphi^2\cos\vartheta\sin\vartheta + \frac{2}{7}an\dot\varphi\sin\vartheta - \frac{5}{7}g\sin\vartheta = 0.$$

Первое уравнение после умножения на $\sin\vartheta$ может быть непосредственно проинтегрировано и дает:

$$(a+b)\dot\varphi\sin^2\vartheta + \frac{2}{7}an\cos\vartheta = k,$$

где k — постоянная. Умножая второе уравнение на $\dot\vartheta$, первое уравнение на $\dot\varphi\sin\vartheta$ и складывая, мы снова придем к интегрируемому уравнению, из которого получим:

$$\dot\vartheta^2 + \dot\varphi^2\sin^2\vartheta + \frac{10}{7}\frac{g}{a+b}\cos\vartheta = h,$$

где h — постоянная. Последнее уравнение есть уравнение энергии.

Исключение $\dot\varphi$ из обоих этих непосредственных интегралов дает:

$$(a+b)^2\sin^2\vartheta\cdot\dot\vartheta^2 = -\left(k - \frac{2}{7}an\cos\vartheta\right)^2 - \frac{10}{7}g(a-b)\sin^2\vartheta\cos\vartheta +$$
$$+h(a+b)^2\sin^2\vartheta;$$

полагая $\cos\vartheta = x$, получим:

$$(a+b)^2\dot x^2 = h(a+b)^2(1-x^2) - \left(k - \frac{2}{7}anx\right)^2 - \frac{10}{7}g(a-b)x(1-x^2).$$

Полином третьей степени относительно x, стоящий в правой части этого выражения, принимает положительное значение при $x = +\infty$, отрицательное при $x = 1$ и положительное при некоторых действительных значениях ϑ, т. е значениях x, лежащих между -1 и $+1$. Поэтому он имеет один корень, больший единицы, и два корня между -1 и $+1$. Обозначим эти корни через

$$\operatorname{ch}\gamma,\quad \cos\beta,\quad \cos\alpha,$$

где $\cos\beta > \cos\alpha$. Тогда

$$\left(\frac{10}{7}\frac{g}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}(t+\varepsilon) = \int\{(x-\operatorname{ch}\gamma)(x-\cos\beta)(x-\cos\alpha)\}^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

где ε — постоянная интегрирования. Полагая

$$x = \frac{14}{5}\frac{a-b}{g}z + \frac{1}{3}(\operatorname{ch}\gamma + \cos\beta + \cos\alpha) = \frac{14}{5}\frac{a+b}{g}z +$$

$$+\frac{7h(a+b)^2 - \frac{4}{7}a^2n^2}{30g(a+b)},$$

получим:

$$(t+\varepsilon) = \int \{4(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)\}^{-\frac{1}{2}}\, dz$$

или

$$z = \wp(t-\varepsilon),$$

где функция $\wp$ образована при помощи корней:

$$e_1 = \frac{5g}{14(a+b)}\left\{\operatorname{ch}\gamma - \frac{7h(a+b)^2 + \frac{4}{7}a^2n^2}{30g(a+b)}\right\},$$

$$e_2 = \frac{5g}{14(a+b)}\left\{\cos\beta - \frac{7h(a+b)^2 + \frac{4}{7}a^2n^2}{30g(a+b)}\right\},$$

$$e_3 = \frac{5g}{14(a+b)}\left\{\cos\alpha - \frac{7h(a+b)^2 + \frac{4}{7}a^2n^2}{30g(a+b)}\right\}.$$

Величины e_1, e_2, e_3 являются действительными и удовлетворяют соотношениям:

$$e_1+e_2+e_3=0, \quad e_1>e_2>e_3.$$

Но x является действительным при действительных значениях t и лежит (так как $\dot{x}$ действителен) между $\cos\alpha$ и $\cos\beta$, поэтому z действителен и лежит между e_2 и e_3. Мнимая часть постоянной, стоящей в аргументе функции $\wp$, будет, следовательно, полупериодом, соответствующим корню e_3; обозначим его через ω. Действительная часть постоянной ε подходящим выбором начального момента времени может быть обращена в нуль. Поэтому окончательно имеем:

$$\cos\vartheta = \frac{14}{5}\frac{(a+b)}{g}\wp(t+\omega) + \frac{7h(a+b)^2 + \frac{4}{7}a^2n^2}{30g(a+b)}.$$

Это уравнение устанавливает зависимость между ϑ и t. Вторая координата φ центра движущегося шара находится интегрированием уравнения:

$$\dot{\varphi} = \frac{k - \frac{2}{7}an\cos\vartheta}{(a+b)\sin^2\vartheta}.$$

Интеграция может быть выполнена так же, как и в § 72 при вычислении углов Эйлера для волчка, движущегося на шероховатой плоскости.

Задача 2. Шероховатый шар катится под действием силы тяжести по другому неподвижному шероховатому шару. Обозначим через z_2 и z_3 наибольшую и наименьшую высоты центра движущегося шара, а через z высоту этого центра в момент времени t, отсчитываемый от того момента, когда $z=z_2$. Показать, что

$$(z_2-z)[\wp(t)-e_2] = (z_2-z_3)(e_1-e_2),$$

где e_1, e_2 и $e_3 = -e_1 - e_2$ — действительные величины, удовлетворяющие неравенствам $e_1>e_2>e_3$.

Задача 3. Шар катится по движущемуся шару.

Рассмотрим движение шероховатого шара радиуса a и массы m, катящегося под действием силы тяжести по другому шару радиуса b и массы M, вращающемуся вокруг своего закрепленного центра.

Пусть ϑ и φ — полярные координаты точки соприкасания, отнесенные к неподвижной полярной системе координат с началом в центре неподвижного шара и с осью $\vartheta = 0$, направленной вертикально вверх. Для составления уравнения движения шара m выберем, как и в первой задаче, подвижную систему координат $GABC$, где GC есть продолжение линии центров OG обоих шаров, а прямая GA горизонтальна. Обозначим через ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 компоненты угловой скорости подвижной системы относительно подвижных осей, а через $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — компоненты угловой скорости шара m относительно этих же осей. Тогда, как и в первой задаче:

$$\vartheta_1 = -\dot{\vartheta}, \quad \vartheta_2 = -\dot{\varphi}\sin\vartheta, \quad \vartheta_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta,$$

$$u = -(a+b)\dot{\varphi}\sin\vartheta, \quad v = (a+b)\dot{\vartheta}, \quad w = 0,$$

$$T = \frac{1}{2}m\left\{u^2 + v^2 + w^2 + \frac{2a^2}{5}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2\right)\right\}.$$

Если компоненты силы, действующей на шар m в точке соприкасания, по направлениям GA и GB суть F и F', то

$$X = F, \quad Y = mg\sin\vartheta + F', \quad L = F'a, \quad M = -Fa, \quad N = 0.$$

Поэтому уравнения движения шара m суть:

$$m\left(\dot{u} - v\vartheta_3\right) = F = -\frac{2}{5}am\left(\dot{\omega}_2 - \vartheta_1\omega_3 + \vartheta_3\omega_1\right), \tag{1}$$

$$m\left(\dot{v} + u\vartheta_3\right) - mg\sin\vartheta = F' = \frac{2}{5}am\left(\dot{\omega}_1 - \vartheta_3\omega_2 + \vartheta_2\omega_3\right), \tag{2}$$

$$\dot{\omega}_3 - \vartheta_2\omega_1 + \vartheta_1\omega_2 = 0. \tag{3}$$

Для определения движения шара M выберем другую подвижную систему координат, начало которой совпадает с точкой O, а оси параллельны $GABC$. Обозначим через $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ компоненты угловой скорости шара относительно этих осей. Тогда для шара M будем иметь:

$$T' = \frac{1}{2}M\,\frac{2}{5}b^2\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2\right),$$

и уравнениями движения его будут:

$$-\frac{2}{5}bM\left(\dot{\Omega}_2 - \vartheta_1\Omega_3 + \vartheta_3\Omega_1\right) = F, \tag{4}$$

$$\frac{2}{5}bM\left(\dot{\Omega}_1 - \vartheta_3\Omega_2 + \vartheta_2\Omega_3\right) = F', \tag{5}$$

$$\dot{\Omega}_3 - \vartheta_2\Omega_1 + \vartheta_1\Omega_2 = 0. \tag{6}$$

Условиями того, что в точке соприкосновения отсутствует скольжение, будут:

$$u - a\omega_2 = b\Omega_2, \quad v + a\omega_1 = -b\Omega_1. \tag{7}$$

Для интегрирования этой системы уравнений умножим соответственно уравнения (3) и (6) на a и b и сложим. Тогда, принимая во внимание (7), будем иметь:

$$a\dot{\omega}_3 + b\dot{\Omega}_3 + u\vartheta_1 + v\vartheta_2 = 0$$

или

$$a\dot{\omega}_3 + b\dot{\Omega}_3 = 0.$$

Интегрируя, получим:

$$a\omega_3 + b\Omega_3 = an,$$

где n — постоянная.

Кроме того, из уравнений (4) и (7) вытекает, что

$$-\frac{2}{5}M\left(\dot{u} - a\dot{\omega}_2 - b\vartheta_1\Omega_3 - \vartheta_3 v - \vartheta_3 a\omega_1\right) = F.$$

Исключая отсюда и из (1) F и $\dot{\omega}_2 + \vartheta_3\omega_1$, получим:

$$\frac{7M+5m}{2M}\left(\dot{u} - \vartheta_3 v\right) = an\vartheta_1$$

или

$$\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}\sin\vartheta) - \dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cos\vartheta - \frac{2Man\dot{\vartheta}}{(7M+5m)(a-b)} = 0. \qquad (8)$$

Аналогично уравнения (5) и (7) дают:

$$\frac{2}{5}M\left(-\dot{v} - a\dot{\omega}_1 - u\vartheta_3 + a\vartheta_3\omega_2 + b\vartheta_2\Omega_3\right) = F'.$$

Исключая отсюда и из (2) F' и $\dot{\omega}_1 - \vartheta_3\omega_2$, получим:

$$\frac{7M-5m}{2M}\left(\dot{v} + u\vartheta_3\right) = an\vartheta_2 - \frac{5(M+m)}{2M}g\sin\vartheta$$

или

$$\ddot{\vartheta} - \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{5(M-m)g\sin\vartheta}{(7M+5m)(a+b)} = -\frac{an}{a+b}\frac{2M}{7M+5m}\dot{\varphi}\sin\vartheta. \qquad (9)$$

Уравнения (8) и (9), служащие для определения ϑ и φ как функций от t, имеют в основном тот же вид, что и уравнения, определяющие ϑ и φ в первой задаче. Действительно, прежние уравнения могут быть получены из (8) и (9), если M предположить очень большим. Поэтому интегрирование может быть выполнено так же, как и там.

Задача 4. Однородный шар катится по шероховатой горизонтальной плоскости под действием сил, результирующая которых проходит через центр шара. Показать, что центр шара движется как свободная материальная точка, к которой приложены те же силы, но уменьшенные в отношении $5:7$.

Задача 5. Составить уравнения движения шероховатого шара, катящегося под действием силы тяжести по внутренней поверхности прямого круглого цилиндра, ось которого образует с вертикалью угол α. Показать, что если для шара $k^2 = \frac{1}{3}a^2$, где a — радиус шара, а k — его радиус инерции, и если шар находится в покое, когда угол, образованный двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра, из которых одна вертикальна, а другая проходит через центр шара, равен β, то в случае, когда этот угол равен ϑ, центр шара имеет в направлении осей скорость, равную

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3gb^2\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\sin\frac{1}{2}\vartheta\operatorname{arcch}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta}{\cos\frac{1}{2}\beta}\right)+\cos\frac{1}{2}\vartheta\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\right)\right\},$$

где $b+a$ — радиус цилиндра.

Относительно дальнейших примеров см. Воронец, Math. Ann., т. 70, стр. 410, 1911.

§ 90. Колебания неголономных систем. Перейдем теперь к исследованию малых колебаний неголономных систем. При этом обнаруживается, что при колебаниях около положения равновесия неголономность системы не имеет существенного значения.

Итак, рассмотрим колебания около положения равновесия некоторой неголономной системы с n независимыми координатами и с $n-m$ степенями свободы, связи которой не зависят явно от времени. Пусть T и V — кинетическая и потенциальная энергии системы, для задачи о колебаниях T предполагается однородной квадратичной формой относительно $\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n$, а V — такой же формой относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем коэффициенты в обеих формах предполагаются постоянными.

Если

$$A_{1k}\dot q_1 + A_{2k}\dot q_2 + \cdots + A_{nk}\dot q_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

суть уравнения неголономных связей, то согласно § 87 уравнениями движения будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_r} - \lambda_1 A_{r1} + \lambda_2 A_{r2} + \ldots + \lambda_m A_{rm} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Из этих уравнений мы видим, что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ будут, вообще говоря, малыми величинами того же порядка, что и координаты. Поэтому в задаче о колебаниях нам следует учитывать только постоянные части величин $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nm}$. Следовательно, колебания протекают так, как если бы коэффициенты $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nm}$ были независящими от координат постоянными величинами. Но в этом случае уравнения

$$A_{1k}\dot q_1 + A_{2k}\dot q_2 + \cdots + A_{nk}\dot q_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

могут быть проинтегрированы и дают:

$$A_{1k}q_1 - A_{2k}q_2 + \cdots + A_{nk}q_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

где все постоянные интегрирования равны нулю, так как система значений

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ \ldots,\ q_n = 0$$

определяет возможное положение системы.

Поэтому колебания неголономной системы совпадают с колебаниями такой голономной системы, у которой связи могут быть представлены в проинтегрированной форме:

$$A_{1k}q_1 + A_{2k}q_2 + \cdots + A_{nk}q_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Следовательно, для определения колебаний мы можем исключить при помощи этих уравнений m координат $q_1, q_2, \ldots, q_m$ из функций T и V. Тогда мы получим голономную систему с $n - m$ степенями свободы, у которой кинетическая и потенциальная энергии выражены как функции $n - m$ координат и соответствующих скоростей. Колебания такой системы могут быть определены обычными способами предшествующей главы.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу[1].

Тяжелое однородное тело, имеющее форму полусферы, покоится на шероховатой горизонтальной плоскости, причем его выпуклая сторона обращена вниз. На верхнюю плоскость этой полусферы поставлена вторая полусфера, причем точка соприкасания совпадает с центром первой полусферы. Определить малые колебания системы около этого положения равновесия.

Выберем следующие системы координат:

1. Систему Z_2xyz, неразрывно связанную с верхней полусферой, с началом в центре тяжести Z_2.

2. Систему $Z_1\xi\eta\zeta$, неразрывно связанную с нижней полусферой, с началом в центре тяжести Z_1.

3. Неподвижную в пространстве систему с началом в точке соприкасания нижней полусферы с плоскостью в положении равновесия.

Мы предполагаем далее, что в положении равновесия оси Z_2z, $Z_1\zeta$ и Rn вертикальны и, следовательно, совпадают, а оси Z_2x, $Z_1\xi$ и Rl, а следовательно, также и оси Z_2y, $Z_1\eta$ и Rm параллельны между собой.

Допустим, что в момент времени t координаты какой-нибудь точки относительно этих различных систем координат связаны соотношениями:

$$\begin{aligned}
\xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,\\
\eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,\\
\zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,\\
l &= a + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta,\\
m &= b + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta,\\
n &= c + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta.
\end{aligned}$$

---

[1]Задача принадлежит Керкговен–Витгофу (*Kerkhoven–Wythoff*) Nieuw Archief voor Wiskunde, т. IV, 1899

В этих формулах преобразования 24 коэффициента определяют положение системы в любой момент времени. Но так как система имеет только шесть степеней свободы, то эти коэффициенты или их производные должны быть связаны восемнадцатью соотношениями. Двенадцать из них являются обычными условиями ортогональности и имеют вид:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0,$$
$$a_1^2+a_2^2+a_3^2=1, \qquad a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

Остальные шесть соотношений содержат условия касания и качения, выводом которых мы сейчас и займемся.

Обозначим через R_1 и R_2 радиусы нижней и верхней полусфер, а через l_1 и l_2 — расстояния их центров тяжести от ограничивающих диаметральных плоскостей, так что $l_1=\dfrac{3}{8}R_1$ и $l_2=\dfrac{3}{8}R_2$. Точка касания верхней и нижней полусфер имеет координаты:

$$x_2=-R_2\gamma_1, \quad y_2=-R_2\gamma_2, \quad z_2=l_2-R_2\gamma_3.$$

Условиями, выражающими, что эта точка покоится относительно нижней полусферы, будут:

$$\dot\alpha+\dot\alpha_1x_2+\dot\alpha_2y_2+\dot\alpha_3z_2=0,$$
$$\dot\beta+\dot\beta_1x_2+\dot\beta_2y_2+\dot\beta_3z_2=0,$$
$$\dot\gamma+\dot\gamma_1x_2+\dot\gamma_2y_2+\dot\gamma_3z_2=0.$$

Последнее из этих уравнений дает $\dot\gamma+l_2\dot\gamma_3=0$. Это уравнение может быть получено дифференцированием уравнения:

$$l_1-\gamma-\gamma_3l_2=-R_2,$$

выражающего условие касания обеих полусфер. Что же касается первых двух уравнений, то из них вытекает, что

$$\dot\alpha-\dot\alpha_1R_2\gamma_1-\dot\alpha_2R_2\gamma_2-\dot\alpha_3(l_2-R_2\gamma_3)=0,$$
$$\dot\beta-\dot\beta_1R_2\gamma_1-\dot\beta_2R_2\gamma_2+\dot\beta_3(l_2-R_2\gamma_3)=0.$$

Эти уравнения выражают, что верхняя полусфера катится по нижней. В первом приближении они дают:

$$\dot\alpha=\dot\alpha_3(R_2-l_2), \quad \dot\beta=\dot\beta_3(R_2-l_2)$$

или, интегрируя, получим:

$$\alpha=\alpha_3(R_2-l_2), \quad \beta=\beta_3(R_2-l_2).$$

Аналогично условием касания нижней полусферы с плоскостью будет:

$$c-c_3l_1=R_1$$

и условиями качения будут:

$$a=a_3(R_1-l_1), \quad b=b_3(R_1-l_1).$$

Таким образом, мы получили восемнадцать уравнений, связывающих между собой двадцать четыре коэффициента. Выбирая за независимые координаты системы шесть величин α_2, β_3, γ_1, a_2, b_3, c_1 и разрешая уравнения относительно остальных восемнадцати коэффициентов, с необходимым приближением будем иметь:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \gamma_1(l_2 - R_2), & a &= c_1(l_1 - R_1),\\
\alpha_1 &= 1 - \frac{1}{2}\left(\alpha_2^2 + \gamma_1^2\right), & a_1 &= 1 - \frac{1}{2}\left(a_2^2 + c_1^2\right),\\
\alpha_3 &= -\gamma_1, & a_3 &= -c_1,\\
\beta &= \beta_3(R_2 - l_2), & b &= b_3\left(R_1 - l_1\right),\\
\beta_1 &= -\alpha_2, & b_1 &= -a_2,\\
\beta_2 &= 1 - \frac{1}{2}\left(\alpha_2^2 + \beta_3^2\right), & b_2 &= 1 - \frac{1}{2}\left(a_2^2 + b_3^2\right),\\
\gamma &= R_2 + l_1 - l_2\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\gamma_1^2 + \beta_3^2\right)\right\}, & c &= R_1 - l_1\left\{1 - \frac{1}{2}\left(c_1^2 + b_3^2\right)\right\},\\
\gamma_2 &= -\beta_3, & c_2 &= -b_3,\\
\gamma_3 &= 1 - \frac{1}{2}\left(\gamma_1^2 + \beta_3^2\right), & c_3 &= 1 - \frac{1}{2}\left(c_1^2 + b_3^2\right).
\end{aligned}
$$

Для потенциальной энергии системы имеем:

$$
V = M_1 g c + M_2 g(c + c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)
$$

или, пренебрегая членами выше второго порядка, получим:

$$
\begin{aligned}
\frac{V}{g} = b_3^2\left(\frac{3}{16}R_1M_1 - \frac{5}{16}R_2M_2\right) - \frac{5}{8}M_2R_2b_3\beta_3 + \frac{3}{16}M_2R_2\beta_3^2 +\\
+c_1^2\left(\frac{3}{16}R_1M_1 - \frac{5}{16}R_2M_2\right) - \frac{5}{8}M_2R_2c_1\gamma_1 + \frac{3}{16}M_2R_2\gamma_1^2.
\end{aligned}
$$

Для нахождения кинетической энергии системы выразим соответственно координаты l, m, n произвольной точки верхней или нижней полусфер через ее координаты в системах Z_2xyz и $Z_1\xi\eta\zeta$ и составим для каждой полусферы выражение $\frac{1}{2}\sum m(\dot{l}^2 + \dot{m}^2 + \dot{n}^2)$, пренебрегая членами выше второго порядка. Тогда, замечая, что главными моментами инерции в центре тяжести для полусферы массы M и радиуса R будут $\frac{2}{5}MR^2$, $\frac{83}{320}MR^2$ и $\frac{83}{320}MR^2$ для кинетической энергии системы T получим:

$$
\begin{aligned}
2T &= \frac{2}{5}\dot{a}_2^2\left(M_1R_1^2 + M_2R_2^2\right) + \frac{4}{5}\dot{a}_2\dot{\alpha}_2M_2R_2^2 - \frac{2}{5}\dot{\alpha}_2^2M_2R_2^2 +\\
&+\dot{b}_3^2\left\{\frac{13}{20}M_1R_1^2 + M_2\left(\frac{13}{20}R_2^2 + \frac{5}{4}R_1R_2 + R_1^2\right)\right\} + 2\dot{b}_3\dot{\beta}_3M_2R_2\left(\frac{13}{20}R_2 + \frac{5}{8}R_1\right) +\\
&\quad + \frac{13}{20}\dot{\beta}_3^2M_2R_2^2 + \dot{c}_1^2\left\{\frac{13}{20}M_1R_1^2 + M_2\left(\frac{13}{20}R_2^2 + \frac{5}{4}R_1R_2 + R_1^2\right)\right\} +\\
&\quad + 2\dot{c}_1\dot{\gamma}_1M_2R_2\left(\frac{5}{8}R_1 + \frac{13}{20}R_2\right) + \frac{13}{20}\dot{\gamma}_1^2M_2R_2^2.
\end{aligned}
$$

Уравнения движения распадаются, очевидно, на три самостоятельные системы, а именно:

1. Уравнения для координат a_2 и α_2. Эти уравнения не содержат никаких членов из V. Им, собственно говоря, не соответствуют никакие колебания. И действительно, равновесие не нарушится, если каждую сферу повернуть на произвольный угол вокруг оси симметрии. Поэтому эти уравнения можно не рассматривать,

2. Уравнения для координат b_3 и β_3.

3. Уравнения для координат c_1 и γ_1. Эти уравнения будут, очевидно, такие же, как и уравнения для координат b_3 и β_3, и поэтому мы можем рассматривать только последние.

В развернутой форме уравнения для b_3 и β_3 имеют вид:

$$\left\{\frac{13}{20}M_1R_1^2 + M_2\left(R_1^2 - \frac{5}{4}R_1R_2 + \frac{13}{20}R_2^2\right)\right\}\ddot{b}_3 + M_2R_2\left(\frac{5}{8}R_1 - \frac{13}{20}R_2\right)\ddot{\beta}_3 +$$

$$+g\left(\frac{3}{8}M_1R_1 - \frac{5}{8}M_2R_2\right)b_3 - \frac{5}{8}gM_2R_2\beta_3 = 0,$$

$$\left(\frac{5}{8}R_1 - \frac{13}{20}R_2\right)\ddot{b}_3 + \frac{13}{20}R_2\ddot{\beta}_3 - \frac{5}{8}gb_3 + \frac{3}{8}g\beta_3 = 0.$$

Соответствующее детерминантное уравнение для λ, где $2\pi/\sqrt{\lambda}$ — период, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$A = \left\{\frac{13}{20}M_1R_1^2 + M_2\left(R_1^2 - \frac{5}{4}R_1R_2 + \frac{13}{20}R_2^2\right)\right\}\lambda - g\left(\frac{3}{8}M_1R_1 - \frac{5}{8}M_2R_2\right),$$

$$B = \left(\frac{5}{8}R_1 + \frac{13}{20}R_2\right)\lambda + \frac{5}{8}g,$$

$$C = M_2R_2\left(\frac{5}{8}R_1 + \frac{13}{20}R_2\right)\lambda + \frac{5}{8}gM_2R_2,$$

$$D = \frac{13}{20}R_2\lambda - \frac{3}{8}g,$$

и является квадратным уравнением относительно λ. Его корни положительны, когда

$$9M_1R_1 < 40M_2R_2.$$

В этом заключается условие устойчивости равновесия.

При исследовании колебаний неголономных систем около стационарного состояния движения удобней всего пользоваться уравнениями § 88. Мы поясним этот метод на следующем примере.

Задача 1. Тело вращения, у которого экваториальная плоскость является плоскостью симметрии, находится в стационарном состоянии движения, при котором оно катится по шероховатой горизонтальной плоскости, так что его экваториальная плоскость все время вертикальна. Угловая скорость тела равна n. Определить период малых колебаний около этого стационарного состояния движения.

Пусть G — центр тяжести тела, а C и A — его моменты инерции в точке G относительно оси симметрии и перпендикулярной к ней прямой. В качестве подвижной системы координат выберем систему $Gxyz$, где Gz совпадает с осью тела, Gy перпендикулярна плоскости, проходящей через Gz и точку соприкасания (так что Gy горизонтальна), а Gx перпендикулярна к плоскости Gyz. Обозначим через F, F' и R компоненты силы, приложенной к телу в точке соприкасания, причем F лежит в плоскости Gxz, F' параллелен к Gy, а R перпендикулярен к плоскости, по которой катится тело. Пусть, как обычно ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 и ω_1, ω_2, ω_3 означают компоненты угловой скорости системы $Gxyz$ и тела, а u, v, w — компоненты скорости точки G в направлении подвижных осей.

Пусть, наконец, ρ означает радиус кривизны меридиана тела на экваторе, a — радиус экваториальной окружности, ϑ — угол между Gz, и вертикалью, φ — угол между осью Gy и ее положением в невозмущенном движении. Тогда

$$\vartheta_1 = \omega_1 = -\dot{\varphi}\sin\vartheta, \quad \vartheta_2 = \omega_2 = \dot{\vartheta}, \quad \vartheta_3 = \dot{\varphi}\cos\vartheta,$$

и кинетическая энергия есть:

$$T = \frac{1}{2}M(u^2 + v^2 + w^2) + \frac{1}{2}A\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{1}{2}C\omega_3^2.$$

Поэтому, если P есть точка касания, PK перпендикуляр из этой точки на ось, GN — перпендикуляр из G на горизонтальную плоскость, то уравнения § 18 дают:

$$\begin{cases} M(\dot{u} - v\vartheta_3 + w\vartheta_2) = F\cos\vartheta - (R - Mg)\sin\vartheta, \\ M(\dot{v} - w\vartheta_1 + u\vartheta_3) = F', \\ M(\dot{w} - u\vartheta_2 + v\vartheta_1) = (R - Mg)\cos\vartheta + F\sin\vartheta, \\ A\dot{\omega}_1 - A\omega_2\vartheta_3 + C\omega_3\vartheta_2 = -F'\cdot GK, \\ A\dot{\omega}_2 - C\omega_3\vartheta_1 + A\omega_1\vartheta_3 = -F\cdot GN - R\cdot NP, \\ C\dot{\omega}_3 = F'\cdot PK. \end{cases}$$

В этих уравнениях GK и NP принимаются положительными в направлении оси x и ее горизонтальной проекции.

Условие, что в точке P отсутствует скольжение, дает:

$$\begin{aligned} u\cos\vartheta - w\sin\vartheta - GN\cdot\omega_2 = 0, \\ v + PK\cdot\omega_3 - GK\cdot\omega_1 = 0, \end{aligned}$$

и из условия, что тело касается плоскости, находим:

$$w\cos\vartheta - u\sin\vartheta = \frac{d}{dt}(-GK\cos\vartheta + PK\sin\vartheta).$$

Эти уравнения определяют движение в общем случае, когда отклонение от невозмущенного движения не предполагается бесконечно малым. Но если сделать это предположение, то

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} + \chi, \quad \omega_3 = n + \widetilde{\omega}, \quad v = -an + \eta,$$

где χ, $\widetilde{\omega}$, η малы. Величины F, F', u, w, ω_1, ω_2, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 также очень малы, а величина R очень мало отличается от Mg. Кроме того, $NP = (\rho - a)\chi$. Поэтому уравнения принимают вид:

$$M(\dot{u} + an\vartheta_3) = -R + Mg, \quad M\dot{\eta} = F',$$
$$M(\dot{w} - an\vartheta_1) = F, \quad A\dot{\omega}_1 + Cn\vartheta_2 = 0,$$
$$A\dot{\omega}_2 - Cn\vartheta_1 = -Fa - Mg(\rho - a)\chi,$$
$$C\dot{\widetilde{\omega}} = F'a, \quad w - a\omega_2 = 0, \quad \eta + a\widetilde{\omega} = 0,$$

где

$$\omega_1 = \vartheta_1 = -\dot{\varphi}, \quad \omega_2 = \vartheta_2 = \dot{\chi}, \quad \vartheta_3 = 0.$$

Исключая F, F' и R и заменяя ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3, ω_1, ω_2 их значениями, получим:

$$A\ddot{\varphi} - Cn\dot{\chi} = 0,$$
$$A\ddot{\chi} + (C + Ma^2)n\dot{\varphi} + Mg(\rho - a)\chi - Ma\dot{w} = 0,$$
$$C\dot{\widetilde{\omega}} = Ma\dot{\eta}, \quad w = a\dot{\chi}, \quad \eta = -a\widetilde{\omega}.$$

Из третьего и пятого уравнений находим, что $\dot{\widetilde{\omega}}$ и $\dot{\eta}$ равны нулю и, следовательно, $\widetilde{\omega}$ и η постоянны. Остальные три уравнения по исключении w принимают вид:

$$A\ddot{\varphi} - Cn\dot{\chi} = 0,$$
$$(Ma^2 + A)\ddot{\chi} + (C + Ma^2)n\dot{\varphi} + Mg(\rho - a)\chi = 0.$$

Поэтому уравнение, определяющее χ, есть:

$$A(A + Ma^2)\ddot{\chi} + \{MgA(\rho - a) + Cn^2(C + Ma^2)\}\chi = 0.$$

Из него для периода колебаний находим выражение:

$$2\pi\left\{\frac{A(A + Ma^2)}{MgA(\rho - a) + Cn^2(C - Ma^2)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

§ 91. Диссипативные системы. Трение. Мы переходим теперь к исследованию таких динамических систем, для которых закон сохранения механической энергии не имеет места, и эта энергия все время переходит в другие виды (например теплоту), которые не рассматриваются в динамике. Мы рассмотрим сначала *системы с трением.*

Если соприкасаются два не вполне гладких тела, то сила реакции в точке соприкасания может быть разложена на два компонента, из которых один направлен по общей нормали к поверхностям тел в точке касания и называется *нормальным давлением*, а другой лежит в общей касательной плоскости и называется *силой трения.* Последняя подчиняется следующему экспериментальному закону[1]: *Два соприкасающихся тела не скользят до тех пор, пока сила трения, необходимая*

[1] Г. Амонтон открыл, что трение пропорционально нормальному давлению (Paris Mem., 1699, стр. 206).

для предотвращения скольжения, не превосходит μ-кратной величины нормального давления, где величина μ зависит только от материала соприкасающихся поверхностей и называется коэффициентом трения. Если же сила, необходимая для предотвращения скольжения, превосходит μ-кратную величину нормального давления, то скольжение действительно будет иметь место, и возникающая сила трения будет в μ раз превосходить нормальное давление.

Пенлеве показал, что четыре допущения: 1) что имеют место только что высказанные законы трения; 2) что существуют твердые тела; 3) что нормальное давление между телами не может быть отрицательным и 4) что все ускорения и напряжения конечны, — вместе взятые, могут в некоторых случаях стоять в противоречии с основными законами динамики. См. по этому поводу работы: *Пенлеве*, *Лекорню*, *Деспарра* и *Клейна* (Comptes Rendus, т. 140, стр. 635, 702 и 847. 1905; там же, т. 141. стр. 310, 401 и 546, 1905; Ges. math. Abh. т. 2, стр. 704).

Рассмотрим некоторые примеры движения систем при наличии сил трения.

Задача 1. *Движение точки по неподвижной шероховатой плоской кривой.*

Материальная точка движется в узкой шероховатой трубке, согнутой в плоскую кривую, под действием силы, зависящей только от положения точки. $f(s)$ и $g(s)$ суть тангенциальный и нормальный компоненты силы, отнесенной к единице массы. При этом s есть расстояние движущейся точки от некоторой точки кривой, отмеряемое вдоль кривой в сторону движения. Пусть R есть нормальная реакция, отнесенная к единице массы, а μ — коэффициент трения.

Так как точка обладает тангенциальным и нормальным ускорениями $v\dfrac{dv}{ds}$ и $\dfrac{v^2}{\rho}$, где v — скорости точки, а ρ — радиус кривизны траектории, то имеют место уравнения:

$$v\frac{dv}{ds} = f(s) - \mu R, \quad \frac{v^2}{\rho} = g(s) - R.$$

Исключая R, находим:

$$\frac{dv^2}{ds} + \frac{2\mu}{\rho}v^2 = 2f(s) + 2\mu g(s).$$

Интегрирование даст:

$$v^2 = ce^{-2\mu\varphi} + 2e^{-2\mu\varphi}\int^s e^{2\mu\varphi}\{f(s) + \mu g(s)\}\,ds,$$

где $\varphi = \displaystyle\int \frac{ds}{\rho}$, а c — постоянная, зависящая от начальных условий движения.

Правая часть этого уравнения есть известная функция от s, которую мы обозначим через $F(s)$. Тогда

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = F(s).$$

Следовательно, s и t связаны соотношением:

$$t - t_0 = \int^{s} \{F(s)\}^{-\frac{1}{2}}\, ds.$$

Этим соотношением и решается задача.

Задача 2. Круговой обруч массы M стоит на шероховатой плоскости. На конце горизонтального диаметра на нем укреплена точка массы m. Выяснить, будет ли обруч катиться и скользить.

Для решения задачи допустим, что обруч может катиться, и выясним, будет ли сила трения, необходимая для такого движения, больше или меньше силы трения, имеющей место в действительности, т. е. равной μ-кратной величине нормального давления. Допустим, что обруч повернулся от начального положения на угол ϑ, а центр тяжести системы имеет относительно горизонтали и направленной вниз вертикали, проходящих через его начальное положение, координаты x и y. Тогда

$$x = a\vartheta - \frac{ma}{M+m}(1 - \cos\vartheta), \quad y = \frac{ma}{M+m}\sin\vartheta,$$

где a радиус обруча.

Кинетическая и потенциальная энергии выразятся так:

$$T = Ma^2\dot{\vartheta}^2 + ma^2\dot{\vartheta}^2(1 - \sin\vartheta),$$
$$V = -mga\sin\vartheta.$$

Поэтому уравнением движения Лагранжа будет:

$$mga\cos\vartheta - \frac{d}{dt}\left[2a^2\dot{\vartheta}\{M + m(1 - \sin\vartheta)\}\right] + ma^2\dot{\vartheta}^2\cos\vartheta.$$

Для начального движения это уравнение даст:

$$2a\ddot{\vartheta}(M+m) = mg.$$

Следовательно, в начале движения

$$\ddot{x} - a\ddot{\vartheta} - \frac{mg}{2(M+m)}, \quad \ddot{y} - \frac{m}{M+m}a\ddot{\vartheta} - \frac{m^2 g}{2(M+m)^2}.$$

Если F есть сила трения, а R — нормальное давление, то в начале движения имеем:

$$\frac{F}{R} = \frac{\ddot{x}}{-\ddot{y} + g} = \frac{m(M+m)}{2M^2 + 4Mm + m^2}.$$

Следовательно, обруч будет катиться или скользить в зависимости от того, будет ли коэффициент трения больше или меньше, чем

$$\frac{m(M+m)}{2M^2 + 4Mm + m^2}.$$

Задача 3. Материальная точка движется под действием силы тяжести на шероховатой циклоиде, плоскость которой вертикальна, а линия основания горизонтальна. Пусть φ означает угол наклона касательной в любой точке циклоиды относительно горизонтали, так что уравнением циклоиды будет:

$$s = 4a \sin\varphi,$$

а $\operatorname{tg}\varepsilon$ — коэффициент трения. Показать, что движение определяется уравнением

$$ce^{\varphi \operatorname{tg}\varepsilon}\sin(\varphi+\varepsilon) = \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\frac{t}{2\cos\varepsilon}\right),$$

где c — постоянная.

§ 92. Силы сопротивления, зависящие от скорости. Движение снаряда в воздухе дает пример другого вида диссипативных систем, так как сопротивление воздуха зависит от скорости. Нельзя указать общего метода, одинаково применимого для всех задач с такого рода силами. Однако один частный, практически важный случай — движение снаряда под действием силы тяжести и сопротивления, пропорционального некоторой степени скорости, — может быть разрешен следующим способом.

Для малых скоростей (не свыше 30 м/сек) сопротивление воздуха движению снаряда можно с достаточной точностью считать пропорциональным квадрату скорости. Для больших скоростей (примерно 600 м/сек) сопротивление воздуха есть приближенно линейная функция скорости.

Пусть v есть скорость снаряда в момент времени t, kv^n — сопротивление на единицу массы, ϑ — угол наклона траектории относительно горизонтали и ρ — ее радиус кривизны. Компоненты ускорения снаряда по направлениям касательной и нормали к траектории суть $v\dfrac{dv}{ds}$ и $\dfrac{v^2}{\rho}$. Поэтому уравнениями движения будут:

$$v\frac{dv}{ds} = -g\sin\vartheta - kv^n, \quad \frac{v^2}{\rho} = g\cos\vartheta.$$

Деля первое уравнение на второе, получим:

$$\frac{1}{v^{n+1}}\frac{dv}{d\vartheta} - \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{v^n} = \frac{k}{g\cos\vartheta}$$

или

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{v^n}\right) + \frac{1}{v^n}\frac{d}{d\vartheta}\left(n\ln\frac{1}{\cos\vartheta}\right) = -\frac{nk}{g}\frac{1}{\cos\vartheta}.$$

Интегрирование дает:

$$\frac{1}{v^n\cos^n\vartheta} + \text{const} = -\frac{nk}{g}\int\frac{d\vartheta}{\cos^{n+1}\vartheta}.$$

Это уравнение выражает v через ϑ. Из уравнения $v^2 = \rho g \cos\vartheta$ находим:

$$gt = -\int \frac{v\,d\vartheta}{\cos\vartheta},$$

и так как v есть известная функция от ϑ, то это уравнение определяет t как функцию от ϑ.

Прямоугольные координаты x и y могут быть теперь определены из уравнений:

$$x = \int v\cos\vartheta\,dt, \quad y = \int v\sin\vartheta\,dt.$$

Таким образом, решение задачи приведено к квадратурам.

Силы сопротивления, пропорциональные v, v^2 или $av + bv^2$, исследованы Ньютоном (Principia, кн. II, § 1, 2 и 3). Случай сопротивления, пропорционального любой степени скорости, исследовал И. Бернулли[1] (1711).

Даламбер[2] показал, что если gu означает отношение сопротивления к массе снаряда, то интегрирование выполнимо в следующих случаях:

$$u = a + bv^n,\ \ u = a + b\ln v,\ \ u = av^n + R - bv^{-n},\ \ u = a(\ln v)^n + R\ln v + b,$$

где a, b, n — произвольные постоянные, а R — также постоянная, зависящая от первых трех.

Сиаччи[3] нашел много других интегрируемых случаев, среди которых мы укажем на следующий:

$$\ln\int v\,du = \frac{1}{2}c\int\frac{du}{1+a(u-1)^c} - \frac{1}{2}c\int\frac{du}{1+b(u+1)^c} + C.$$

где a, b, c, C произвольные постоянные. Это уравнение определяет v как функцию от u: число входящих членов конечно, если c рационально.

Пуассон[4] обнаружил (1806), что теория особых решений дифференциальных уравнений находит приложение в динамике, в особенности в задачах движения материальной точки под действием сил сопротивления. Уравнение прямолинейного движения материальной точки под действием силы сопротивления, пропорциональной квадратному корню из скорости, имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = -av^{\frac{1}{2}}.$$

Если c^2 есть начальная скорость, то пока t не превосходит величины $\frac{2c}{a}$, движение определяется общим интегралом

$$v = \left(c - \frac{1}{2}at\right)^2,$$

[1] Opera, т. I, стр. 502

[2] Traite de l'equilibre et du mouvement des fluides, Paris 1714.

[3] Comptes Rendus, т. 132, стр. 1175, 1901

[4] Journ. de L'ecole Polyt., т. 6, тетр. 13, стр. 60.

а после этого оно будет представляться *особым решением*

$$v = 0.$$

Задача 1. Тяжелая точка падает вертикально вниз без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Показать, что путь, пройденный точкой к моменту времени t, равен:

$$\frac{gt}{\mu} - \frac{g}{\mu} + \frac{g}{\mu^2} e^{-\mu t},$$

где μv — сопротивление на единицу массы.

Задача 2. Тяжелая точка падает вертикально вниз без начальной скорости в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости. Показать, что путь, пройденный точкой к моменту времени t, равен:

$$\frac{1}{\mu} \ln \operatorname{ch} \sqrt{g\mu} t,$$

где μv^2 — сопротивление на единицу массы.

§ 93. Функция рассеяния Релея. Если на систему действуют внешние силы сопротивления, прямо пропорциональные скоростям точек приложения, то уравнения движения такой системы могут быть выражены при помощи кинетической энергии, потенциальной энергии и одной новой функции.

Рассмотрим какую-нибудь точку системы, масса которой равна m, а координаты суть x, y, z. Пусть потеря энергии системы при перемещении $(\delta x, \delta y, \delta z)$ этой точки вследствие приложенной к ней силы сопротивления равняется

$$k_x \dot{x}\, \delta x + k_y \dot{y}\, \delta y + k_z \dot{z}\, \delta z,$$

где k_x, k_y, k_z суть функции только от x, y, z. Тогда уравнениями движения этой точки будут:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_x \dot{x} + X, \\ m\ddot{y} &= -k_y \dot{y} + Y, \\ m\ddot{z} &= -k_z \dot{z} + Z, \end{aligned}$$

где X, Y, Z — компоненты результирующей всех действующих на точку сил (внешних и внутренних) за исключением сопротивления.

Введем функцию F, определяемую равенством:

$$F = \frac{1}{2} \sum \left(k_x \dot{x}^2 - k_y \dot{y}^2 + k_z \dot{z}^2 \right),$$

где суммирование распространяется на все точки системы. Эта *функция рассеяния* F выражает скорость убывания энергии системы вследствие наличия сил сопротивления.

Умножая соответственно уравнения движения точки m на $\dfrac{\partial x}{\partial q_r}$, $\dfrac{\partial y}{\partial q_r}$, $\dfrac{\partial z}{\partial q_r}$, где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ — координаты системы, и суммируя по всем точкам системы, получим:

$$\sum m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)=-\sum\left(k_x\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+k_y\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+k_z\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)+ \\ +\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_r}+Y\frac{\partial y}{\partial q_r}+Z\frac{\partial z}{\partial q_r}\right).$$

Так же как и в § 26:

$$\sum m\left(\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+\ddot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+\ddot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r},$$

где T — кинетическая энергия, и

$$\sum\left(X\frac{\partial x}{\partial q_r}+Y\frac{\partial y}{\partial q_r}+Z\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)=Q_r,$$

где $Q_1\delta q_1+Q_2\delta q_2+\cdots+Q_n\delta q_n$ — работа внешних сил (за исключением сил сопротивления) при любом бесконечно малом перемещении, а

$$-\sum\left(k_x\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+k_y\dot{y}\frac{\partial y}{\partial q_r}+k_z\dot{z}\frac{\partial z}{\partial q_r}\right)= \\ =-\sum\left(k_x\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r}+k_y\dot{y}\frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{q}_r}+k_z\dot{z}\frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{q}_r}\right)=-\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}.$$

Таким образом, *уравнения движения системы в координатах* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ могут быть представлены в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r}=Q_r \qquad (r=1,2,\ldots,n).$$

Задача 1. Пусть силы сопротивления зависят только от относительных (а не абсолютных) скоростей точек приложения, так что силы, действующие на две точки (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2), имеют компоненты:

$$-k_x(\dot{x}_1-\dot{x}_2),\quad -k_y(\dot{y}_1-\dot{y}_2),\quad -k_z(\dot{z}_1-\dot{z}_2)$$

и

$$-k_x(\dot{x}_2-\dot{x}_1),\quad -k_y(\dot{y}_2-\dot{y}_1),\quad -k_z(\dot{z}_2-\dot{z}_1)$$

Показать, что уравнения движения в обобщенных координатах могут быть выражены при помощи функции рассеяния вида:

$$\frac{1}{2}\sum\left\{k_x(\dot{x}_1-\dot{x}_2)^2+k_y(\dot{y}_1-\dot{y}_2)^2+k_z(\dot{z}_1-\dot{z}_2)^2\right\}.$$

§ 94. Колебания диссипативных систем. Если динамическая система характеризуется своими кинетической и потенциальной энергиями и функцией рассеяния, то малые колебания около положения равновесия такого рода системы могут быть исследованы методами, аналогичными тем, которые мы изложим в гл. VII.

Примем для простоты, что система обладает только двумя степенями свободы. Так же как и в § 76 можно показать, что в задаче колебаний кинетическую энергию и функцию рассеяния можно считать однородными квадратичными функциями от скоростей, а потенциальную энергию — однородной квадратичной функцией от координат, причем все эти три функции имеют постоянные коэффициенты. Выбирая координаты таким образом, чтобы в случае отсутствия функции рассеяния они стали нормальными координатами системы для этих трех функций, получим выражения

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2\right),$$

$$F = \frac{1}{2}\left(a\dot{q}_1^2 + 2h\dot{q}_1\dot{q}_2 + b\dot{q}_2^2\right),$$

$$V = \frac{1}{2}\left(\lambda_1\dot{q}_1^2 + \lambda_2\dot{q}_2^2\right),$$

где λ_1 и λ мы будем полагать положительными, и, следовательно, в случае отсутствия сил сопротивления равновесие будет устойчивым.

Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_r} + \frac{\partial V}{\partial q_r} = 0$$

или

$$\ddot{q}_1 + a\dot{q}_1 + h\dot{q}_2 + \lambda_1 q_1 = 0,$$
$$\ddot{q}_2 + h\dot{q}_1 + b\dot{q}_2 + \lambda_2 q_2 = 0.$$

Попробуем удовлетворить этим уравнениям решением вида:

$$q_1 = Ae^{pt}, \quad q_2 = Be^{pt}.$$

Подстановка этих значений в дифференциальные уравнения дает:

$$A\left(p^2 - ap + \lambda_1\right) + Bhp = 0,$$
$$Ahp + B\left(p^2 + bp + \lambda_2\right) - 0.$$

Отсюда следует, что p должно быть корнем уравнения

$$\left(p^2 + ap - \lambda_1\right)\left(p^2 + bp + \lambda_2\right) - h^2p^2 - 0.$$

Предполагая, что силы сопротивления настолько малы, что можно пренебречь квадратами величин a, h и b для корней уравнения, мы получим значения:

$$p_1 = i\sqrt{\lambda_1} - \frac{1}{2}a, \quad p_2 = i\sqrt{\lambda_2} - \frac{1}{2}b.$$

Подставляя корень p_1 из второго уравнения, связывающего A и B, получим равенство:

$$\frac{B}{A} = \frac{ih\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения имеют частное решение:

$$q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{-\frac{1}{2}at} \left(\cos\sqrt{\lambda_1}t + i\sin\sqrt{\lambda_1}t\right),$$

$$q_2 = h\sqrt{\lambda_1}e^{-\frac{1}{2}at} \left(i\cos\sqrt{\lambda_1}t - \sin\sqrt{\lambda_2}t\right).$$

Второе частное решение получится заменой i на $-i$. Следовательно, два независимых действительных решения дифференциальных уравнений определяются равенствами:

$$q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{-\frac{1}{2}at}\cos\sqrt{\lambda_1}t, \quad q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{-\frac{1}{2}at}\sin\sqrt{\lambda_1}t,$$

$$q_2 = -h\sqrt{\lambda_1}e^{-\frac{1}{2}at}\sin\sqrt{\lambda_1}t, \qquad q_2 = h\sqrt{\lambda_1}e^{-\frac{1}{2}at}\cos\sqrt{\lambda_1}t.$$

Поэтому наиболее общее действительное решение, соответствующее корню p_1, имеет вид:

$$q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)Ae^{-\frac{1}{2}at}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}t + \varepsilon\right),$$

$$q_2 = h\sqrt{\lambda_1}Ae^{-\frac{1}{2}at}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}t + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right),$$

где A и ε действительные произвольные постоянные. Оно выражает нормальное колебание системы. Присоединяя сюда решение, соответствующее корню p_2, мы получим окончательно общее решение задачи колебаний в виде:

$$q_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)Ae^{-\frac{1}{2}at}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}t + \varepsilon\right) + h\sqrt{\lambda_2}Be^{-\frac{1}{2}bt}\sin\left(\sqrt{\lambda_2}t + \frac{\pi}{2} + \gamma\right),$$

$$q_2 - h\sqrt{\lambda_1}Ae^{-\frac{1}{2}at}\sin\left(\sqrt{\lambda_1}t + \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) + (\lambda_2 - \lambda_1)Be^{-\frac{1}{2}bt}\sin\left(\sqrt{\lambda_2}t + \gamma\right),$$

где A, B, ε, γ четыре постоянные, определяемые начальными условиями.

Сделаем сейчас еще одно дальнейшее предположение, что силы сопротивления имеют такой характер, что энергия системы все время уменьшается, т. е. что F есть определенная положительная форма, и, следовательно, a и b — положительны. Тогда из последних уравнений вследствие того, что они содержат множители $e^{-\frac{1}{2}at}$ и $e^{-\frac{1}{2}bt}$, вытекает, что амплитуды колебаний неограниченно убывают. Периоды нормальных колебаний, если пренебречь квадратами величин a, b и h, будут такие же, как и в случае отсутствия сил сопротивления. При этом для каждого нормального колебания амплитуда одной из координат очень мала по сравнению с амплитудой другой координаты, а фаза смещена на четверть периода.

Аналогичное исследование приводит к таким же результатам и в случае систем с большим числом степеней свободы. В предположении, что силы сопротивления очень малы, а функция рассеяния и потенциальная энергия суть определенные положительные формы, можно показать, что силы сопротивления не изменяют (при пренебрежении квадратами функции рассеяния) периодов нормальных колебаний и что колебания непрерывно затухают. Если, далее, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть нормальные координаты системы при отсутствии сопротивления, то существует нормальное колебание системы с сопротивлением, при котором амплитуда координат $q_2, q_3, \ldots, q_n$ мала по сравнению с амплитудой координаты q_1, а фазы смещены на четверть периода.

Задача 1. Исследовать колебания системы при действии периодических внешних сил, имеющих такие же периоды, как и свободные колебания системы, и выяснить, какое значение имеют в этом случае малые силы рассеяния.

§ 95. Удар. Энергия динамической системы может теряться[1] еще и другими путями, например при взаимном столкновении двух принадлежащих системе тел. Такое взаимное столкновение вызывает обычно потерю динамической энергии.

Аналитическое исследование явлений удара основывается на следующем, найденном опытным путем, законе[2]: *При ударе двух тел отношение абсолютных значений нормального компонента относительной скорости соприкасающихся поверхностей до и после удара есть определенная величина, зависящая только от материала тел.*

Это отношение обозначается через e. Тела, для которых $e = 0$, называются *неупругими*.

Этим самым проблема удара сводится к задаче импульсивного движения, в котором неизвестные импульсивные силы в точке соприкаса-

[1] Имеется в виду потеря механической энергии. Энергия как таковая не пропадает, а переходит в другие формы, например в теплоту.

[2] Законы удара открыты в 1668 г. Валлисом и Реном (*John Wallis*, Phil. Trans., № 43, стр. 864, *Christopher Wren*, там же, стр. 867).

ния тел определяются из условия, что изменение нормальных компонентов скоростей тел удовлетворяет вышеуказанному закону.

§ 96. Потеря энергии при ударе. Определим потерю кинетической энергии при взаимном ударе двух гладких тел.

Рассмотрим какую-нибудь точку массы m, принадлежащую одному из обоих тел. Обозначим соответственно через u_0, v_0, w_0 и u, v, w компоненты ее скорости непосредственно до и после удара, а через U, V, W компоненты результирующей всех приложенных к ней (внешних и внутренних) импульсивных сил. Тогда уравнения импульсивного движения (§ 35) дают:

$$m(u-u_0)=U, \quad m(v-v_0)=V, \quad m(w-w_0)=W.$$

Умножая эти уравнения соответственно на $u+eu_0$, $v+ev_0$, $w+ew_0$, складывая и суммируя по всем точкам обоих тел, получим:

$$\sum m\{(u-u_0)(u+eu_0)+(v-v_0)(v+ev_0)+(w-w_0)(w+ew_0)\}=$$
$$=\sum\{U(u+eu_0)+V(v+ev_0)+W(w-ew_0)\}.$$

Но для всех внутренних импульсов (если они вообще входят)

$$\sum(Uu+Vv+Ww)=0 \quad \text{и} \quad \sum(Uu_0+Vv_0+Ww_0)=0,$$

ибо согласно закону действия и противодействия соответствующие импульсивные силы дают в каждой сумме по два взаимно уничтожающихся члена.

Согласно же закону удара та часть величины $u+eu_0$, которая отвечает нормальному компоненту скорости, имеет одинаковое значение для двух сталкивающихся при ударе точек, вследствие чего в сумме $\sum U(u+eu_0)$ и соответственно в суммах $\sum V(v+ev_0)$ и $\sum W(w+ew_0)$ члены, отвечающие импульсивной силе между обоими телами, также выпадают. Поэтому

$$\sum\{U(u+eu_0)-V(v+ev_0)+W(w+ew_0)\}=0$$

и, следовательно,

$$\sum m\{(u-u_0)(u+eu_0)+(v-v_0)(v+ev_0)+(w-w_0)(w+ew_0)\}=0$$

или

$$\sum m(u^2+v^2+w^2)-\sum m(u_0^2+v_0^2+w_0^2)=$$
$$=-\frac{1-e}{1+e}\sum m\left\{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2+(w-w_0)^2\right\}.$$

Отсюда следует, что *потеря кинетической энергии при ударе будет равна* $\frac{1-e}{1+e}$*-кратной кинетической энергии того движения, которое следует присоединить к движению непосредственно до удара, чтобы получить движение, получающееся непосредственно после удара.*

§ 97. Примеры на удар. Импульсивное изменение движения при ударе двух свободных твердых тел проще всего определяется следующим образом.

Движение каждого отдельного тела до и после удара определяется шестью величинами (например, тремя компонентами скорости центра тяжести и тремя компонентами угловой скорости тела в относительном движении вокруг центра тяжести). Следовательно, для определения импульсивного изменения движения необходимо двенадцать уравнений. Шесть уравнений непосредственно получаются из условия, что момент количества движения каждого отдельного тела относительно любой прямой, проходящей через точку соприкосновения, остается неизменным (так как импульсивные силы приложены в этой точке). Одно уравнение дает условие, что количество движения системы в направлении нормали в точке соприкосновения остается неизменным (ибо нормальные компоненты импульсивных сил между обоими телами равны и противоположны). Еще одно уравнение можно получить из закона удара. Остальные четыре уравнения для абсолютно гладких тел могут быть получены из условия, что количества движения каждого тела в направлении любой касательной к их поверхностям в точке соприкосновения остаются неизменными (так как для гладких тел импульсы направлены по нормали). Напротив, для тел вполне и не вполне шероховатых условие сохранения количества движения в направлении касательной в точке соприкосновения дает только два уравнения. Для абсолютно шероховатых тел остальные два уравнения могут быть получены из условия, что после удара компонент относительной скорости тел в любом тангенциальном направлении равен нулю. Для не вполне шероховатых тел с коэффициентом трения, равным μ, эти уравнения получатся из условий, что

α) после удара компонент относительной скорости в любом тангенциальном направлении равен нулю, если необходимый для этого тангенциальный компонент импульса не превосходит μ-кратной величины нормального компонента импульса;

β) если последнее условие не выполнено, то имеет место тангенциальный импульс, равный μ-кратной величине нормального импульса между телами.

Таким образом, во всех случаях все необходимые двенадцать уравнений могут быть получены.

Этот же способ с небольшими изменениями можно применить также и тогда, когда движение происходит на плоскости или одно из тел закреплено неподвижно. Более подробно все эти выкладки разъясняются на следующих примерах.

Задача 1. Абсолютно неупругий шар массы M падает со скоростью V на абсолютно шероховатый и неупругий клин, боковая поверхность которого наклонена под углом α относительно гладкой горизонтальной плоскости, на которой он покоится. Показать, что величина вертикального компонента скорости центра шара непосредственно после удара равна:

$$\frac{5(M+m)V\sin^2\alpha}{7M+2m+5m\sin^2\alpha}.$$

Пусть U скорость клина после удара, u — скорость шара, параллельная боковой поверхности клина относительно этой поверхности. ω — угловая скорость шара и a — его радиус.

Теорема о сохранении количества движения по горизонтальному направлению дает:

$$m(u\cos\alpha - U) = MU.$$

Кинематическое условие в точке касания имеет вид:

$$a\omega = u.$$

Условие сохранения момента количества движения шара относительно точки соприкосновения выражается уравнением:

$$mVa\sin\alpha = \frac{2}{5}ma^2\omega + ma(u - U\cos\alpha).$$

Исключая из полученных уравнений ω и U, получим:

$$u\sin\alpha = \frac{5(M+m)V\sin^2\alpha}{7M+2m+5m\sin^2\alpha}.$$

что и требовалось доказать.

Задача 2. Шар радиуса a вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси, образующей с вертикалью угол α и движущейся со скоростью V в вертикальной плоскости, проходящей через ось в направлении, образующем угол α с горизонтом. При этом шар ударяется о горизонтальную абсолютно шероховатую плоскость, обладающую абсолютной упругостью в тангенциальном направлении. Определить угол между вертикальной плоскостью, содержащей новое направление движения, и прежней вертикальной плоскостью.

Выберем систему координат $Oxyz$ с началом O в точке соприкосновения, с плоскостью yOz, совпадающей с первоначальной плоскостью движения, и с осью Oz, направленной по вертикали. Пусть ω_1 и ω_2 означают компоненты угловой скорости шара относительно Ox и Oy после удара, а M — его масса.

Приравнивая моменты количества движения относительно Ox до и после удара, получим:

$$MaV\cos\alpha = \frac{7}{5}Ma^2\omega_1.$$

Делая то же самое и относительно оси Oy, получим:

$$\frac{2}{5}Ma^2\Omega\sin\alpha = \frac{7}{5}Ma^2\omega_2.$$

Тогда тангенс угла между новой плоскостью движения и плоскостью yOz равен (вследствие абсолютной шероховатости плоскости) $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ или

$$\frac{\frac{2}{5}Ma^2\Omega\sin\alpha}{MaV\cos\alpha}$$

или

$$\frac{2}{5}a\left(\frac{\Omega}{V}\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Задача 3. Абсолютно шероховатый круглый диск радиуса c и массы M ударяется о стержень массы m и длины $2a$, который может свободно вращаться вокруг своей середины. Точка соприкосновения отстоит от середины стержня на расстоянии b. Центр диска движется в направлении, образующем со стержнем до удара угол α, а после удара — угол β. Показать, что

$$2(3Mb^2 + ma^2)\operatorname{tg}\beta = 3(ema^2 - 3Mb^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

Пусть V начальная скорость диска, v его конечная скорость, Ω его конечная угловая скорость.

Так как в точке касания отсутствует скольжение, то

$$v\cos\beta + c\Omega = 0.$$

Если ω означает конечную угловую скорость стержня, а I — нормальный импульс между диском и стержнем, то уравнением движения стержня будет

$$Ib = \frac{1}{3}ma^2\omega.$$

Уравнение импульсивного движения диска в направлении, перпендикулярном стержню, имеет вид:

$$M(v\sin\beta + V\sin\alpha) = I.$$

а из закона удара вытекает соотношение:

$$v\sin\beta + b\omega = eV\sin\alpha.$$

Равенство момента количества движения диска относительно точки соприкосновения до и после удара дает:

$$V\cos\alpha = v\cos\beta \quad \frac{1}{2}c\Omega.$$

Исключая из полученных уравнений v, Ω, I и ω, получим:

$$2\operatorname{tg}\beta(3Mb^2 + ma^2) = 3\operatorname{tg}\alpha(mea^2 - 3Mb^2),$$

что и требовалось доказать.

Задача 4. Круговой обруч, движущийся в собственной плоскости без вращения, ударяется о неподвижное шероховатое препятствие, имеющее форму прямого ребра. Центр обруча движется от удара со скоростью V в направлении, образующем с ребром угол α. Коэффициент трения равен μ. Определить импульсивное изменение движения.

Пусть u и v означают компоненты скорости центра обруча относительно ребра и перпендикуляра к нему после удара, ω — его угловую скорость, M — массу и a — радиус. Приравнивая моменты количества движения относительно точки соприкосновения до и после удара, получим:

$$-Ma^2\omega + Mau = MVa\cos\alpha.$$

Закон удара даст уравнение:

$$v = eV\sin\alpha.$$

Так как ребро шероховатое, то величина $u + a\omega$ после удара обращается в нуль, если только необходимая для этого импульсивная сила трения не превосходит μ-кратной величины нормального импульса. В противном случае импульсивная сила трения равна μ-кратной величине нормального импульса.

Пусть F — импульсивная сила трения, а R — нормальный импульс. Тогда

$$M(u - V\cos\alpha) = -F, \quad M(v + V\sin\alpha) = R, \quad Ma^2\omega = -aF.$$

Поэтому имеем:

$$R = M(1+e)V\sin\alpha,$$

и если $u - a\omega = 0$, то будем иметь:

$$F = \frac{1}{2}MV\cos\alpha.$$

Поэтому величина $u + a\omega$ после удара обратится в нуль, если

$$\mu \geqslant \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2(1+e)},$$

если же μ этому неравенству не удовлетворяет, то будем иметь:

$$F = \mu M(1-e)V\sin\alpha.$$

Следовательно, при

$$\mu \geqslant \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2(1+e)}$$

движение определяется уравнениями:

$$u = V\cos\alpha + a\omega, \quad v = eV\sin\alpha, \quad u - a\omega = 0,$$

а при

$$\mu < \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2(1+e)}$$

уравнениями:

$$u = V\cos\alpha + a\omega, \quad v = eV\sin\alpha, \quad a\omega = -\mu(1+e)V\sin\alpha.$$

Упражнения.

1. Абсолютно шероховатый шар радиуса a вращается с постоянной угловой скоростью n вокруг вертикального диаметра. В точке, удаленной от наивысшей точки на расстояние $a\alpha$, на него положен второй однородный шар радиуса b. Определить движение и угловую скорость второго шара в любой точке. Показать, что этот шар оставляет поверхность первого шара в точке, для которой угловое расстояние ϑ от наивысшей точки определяется уравнением:

$$\cos\vartheta = \frac{10}{17}\cos\alpha + \frac{4}{119}\frac{a^2n^2\sin^2\alpha}{(a+b)g}.$$

(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1889.)

2. Шероховатый шар радиуса a катится под действием силы тяжести по поверхности конуса вращения (вершина которого расположена сверху), вращающегося с постоянной угловой скоростью n вокруг своей вертикальной оси. Угол раствора конуса равен 2α, расстояние центра шара от оси конуса равно $r\sin\alpha$, угол поворота вертикальной плоскости, проходящей через центр шара, относительно конуса равен ψ, угловая скорость шара относительно общей нормали равна ω_3. Показать, что

$$7\dot{r}^2 + \frac{2-5\sin^2\alpha}{49}\left(\frac{A}{r}+nr+B\right)^2 - 10gr\cos\alpha = C,$$

$$a(\omega_3 - n\sin\alpha) = \frac{\cos\alpha}{7}\left(\frac{A}{r}+nr\right) + \frac{(2+5\sin^2\alpha)B}{14\cos\alpha},$$

$$\left(7\dot{\psi}-6n\right)r^2 = A,$$

где A, B, C — некоторые постоянные.
(Camb. Math. Tripos, часть 1, 1897.)

3. Однородное тело вращения массы M с плоским круговым основанием радиуса c катится без скольжения своим краем по шероховатой горизонтальной плоскости. Показать, что ϑ, ω и Ω определяются уравнениями:

$$Mac\frac{d}{d\vartheta}(\Omega\cos^2\vartheta) - Mc^2\Omega\cos^2\vartheta = (C+Mc^2)\cos\vartheta\frac{d\omega}{d\vartheta},$$

$$\{A(C+Mc^2) - M^2a^2c^2\}\frac{d}{d\vartheta}(\Omega\cos^2\vartheta) + C(C+Mc^2)\omega\cos\vartheta -$$
$$-MacC\Omega\cos^2\vartheta = 0,$$

$$(A+Mc^2)\dot{\vartheta}^2 + A\Omega^2\cos^2\vartheta - 2Mac\omega\Omega\cos\vartheta + (C-Mc^2)\omega^2 +$$
$$+2Mg(a\sin\vartheta + c\cos\vartheta) = \text{const},$$

где ϑ — угол наклона оси тела к горизонту, Ω — угловая скорость вертикальной плоскости, проходящей через ось тела, ω — угловая скорость тела относительно своей оси, A — момент инерции тела относительно диаметра основания, C — момент инерции тела относительно своей оси, a — расстояние центра тяжести от основания. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1898.)

4. Колесо с $4n$ симметрично расположенными спицами катится с горизонтально направленной осью по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Колесо и спицы сделаны из тяжелой тонкой проволоки. Показать, что условием устойчивости будет:

$$V^2 > \frac{3}{4}\frac{2n+\pi}{4n+3\pi}ga,$$

где a — радиус колеса, а V — его скорость.

5. Тело катится под действием тяжести по неподвижной горизонтальной плоскости, принимаемой за плоскость yz. Показать, что

$$\sum m\left\{(y-y_A)\dot{z}-(z-z_A)\dot{y}\right\}=\mathrm{const},$$

где x, y, z — координаты материальной точки, m, x_A, y_A, z_A — координаты точки касания, и суммирование распространено на все точки тела. (Neumann)

6. Одна половина горизонтальной плоскости гладкая, а другая половина абсолютно шероховатая. Однородный тяжелый эллипсоид с полуосями a, b, c движется в направлении оси a со скоростью v из гладкой части плоскости в шероховатую, причем его ось b все время вертикальна. Показать, что если

$$v^2 < 2g\frac{b^2-k^2}{b^2}(a-b),$$

где k — радиус инерции относительно оси c, то эллипсоид снова возвращается на гладкую часть плоскости, и при этом его движение является колебанием около стационарного состояния движения.

Показать также, что для частного случая $a=2b$, ось b эллипсоида, после возвращения на гладкую часть плоскости, не может образовывать с вертикалью угла большего, чем $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{5}{7}}$.

7. Внутри оболочки, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения, центр тяжести которого совпадает с его центром, находится симметричный гироскоп, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Центр гироскопа и его ось совпадают с центром и осью эллипсоида. Показать, что при стационарном движении эллипсоида по абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, при котором его центр описывает круг радиуса c с угловой скоростью Ω, угол α наклона оси относительно вертикали определяется уравнением:

$$\{Mbc(a\operatorname{ctg}\alpha + b) - Ab\cos\alpha + C(a\sin\alpha + c)\}\Omega^2 +$$
$$C'b\omega\Omega - Mgb(a - b\operatorname{ctg}\alpha) = 0,$$

где M означает общую массу гироскопа и оболочки, A — момент инерции оболочки и гироскопа, вместе взятых, относительно прямой, проходящей через центр перпендикулярно к их оси, C и C' — моменты инерции оболочки и гироскопа (в отдельности) относительно их осей, a — расстояние между точкой касания эллипсоида с плоскостью и его центром, измеряемое параллельно оси, b — расстояние этой точки касания от оси. (Camb. Math. Tripos, часть I, 1899.)

8. Однородный шероховатый шар радиуса a скатывается из состояния покоя по двум взаимно перпендикулярным скрещивающимся стержням, кратчайшее расстояние между которыми равно $2c$, и которые наклонены (оба) под углом α к вертикали. Пусть ρ_0 и ρ'_0 — начальные расстояния точек касания от точек кратчайшего расстояния между стержнями, а ρ и ρ' — эти расстояния в последующий момент времени, когда уже достигнута скорость, равная V. Показать, что

$$V^2 = 16c^2\,\frac{\left\{\rho^2{\rho'}^2 - a^2(\rho^2 + {\rho'}^2)\right\}\dot\rho\dot\rho'}{\left\{16c^4 - (\rho^2 - {\rho'}^2)^2\right\}\rho\rho'}$$

и

$$V^2\,\frac{28a^2 - 20c^2 - 5\rho^2 - 5{\rho'}^2}{4a^2 - 4c^2 - \rho^2 - {\rho'}^2} =$$
$$-\left\{(\rho - \rho_0 + \rho' - \rho'_0)\cos\alpha + \frac{1}{4c}(\rho^2 - \rho_0^2 - {\rho'}^2 + {\rho'}_0^2)\sqrt{-\cos 2\alpha}\right\}.$$

(Camb. Math. Tripos, часть I, 1899.)

9. Материальная точка движется под действием силы тяжести по шероховатой винтовой линии с вертикальной осью, радиусом a и углом γ. Показать, что скорость v и путь s могут быть выражены как функции некоторого параметра ϑ в виде:

$$-\frac{2}{a}\cos\gamma\cdot s = \int\frac{(1+\vartheta^2)\,d\vartheta}{\vartheta\,\{\mu\cos\gamma + \vartheta(\mu\cos\gamma + 2\sin\gamma)\}},$$
$$v^2 = \frac{ga}{2\cos\gamma}\left(\vartheta - \frac{1}{\vartheta}\right).$$

10. Материальная точка бросается горизонтально со скоростью u на наклонную шероховатую плоскость так, что она по ней скользит. Исследовать движение и показать, что при

$$2 \geqslant 2\mu \operatorname{ctg} \alpha > 1$$

точка приближается асимптотически к прямой наибольшего уклона, отстоящей на расстоянии:

$$\frac{u^2}{g} \frac{2\mu \cos \alpha}{4\mu^2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha},$$

где μ — коэффициент трения и α — угол наклона плоскости.

11. Шероховатая трубка, имеющая форму циклоиды, поставлена вертикально так, что ее вершина расположена в наивысшей точке. Радиус образующего круга равен a. Из вершины скатывается материальная точка с начальной скоростью $\sqrt{4ag}\sin \alpha$. Показать, что она достигает острия циклоиды со скоростью:

$$\left[4ag \cos^2 \alpha \left\{1 - 2 \sin \alpha e^{-\left(\frac{1}{2}\pi - \alpha\right) \operatorname{tg} \alpha}\right\}\right]^{\frac{1}{2}},$$

где α — угол трения.

12. Тяжелый стержень длины $2a$ движется в вертикальной плоскости таким образом, что один его конец все время касается шероховатой вертикальной стены, а другой конец шероховатой горизонтальной плоскости. Коэффициенты трения стены и плоскости одинаковы и равны $\operatorname{tg} \varepsilon$. Показать, что наклон стержня относительно вертикали в любой момент времени определяется уравнением:

$$\ddot{\vartheta}(k^2 + a^2 \cos 2\varepsilon) - a^2 \dot{\vartheta}^2 \sin 2\varepsilon = ag \sin(\vartheta - 2\varepsilon).$$

13. В наинизшей точке тонкостенного сферического сосуда, стоящего на шероховатой горизонтальной плоскости, находится материальная точка конечной массы. Коэффициент трения между материальной точкой и сосудом известен, а коэффициент трения между сосудом и плоскостью практически бесконечно велик. Движение с двумя степенями свободы вызвано тем, что сосуду при помощи толчка сообщают угловую скорость Ω. Составить уравнение, определяющее угол поворота сосуда в тот момент времени, когда точка начинает скользить.

14. Вертикальный круговой диск радиуса a касается шероховатой (коэффициент трения μ) пластинки, которая может свободно вращаться вокруг лежащей на ее верхней поверхности горизонтальной оси, проходящей через ее центр тяжести. Точка касания диска отстоит от оси на расстоянии b. Нить, укрепленная одним концом к наиболее отдаленной от пластинки точке диска, протянута параллельно поверхности пластинки к перпендикулярной к ней стойке, прикрепленной к доске и проходящей через ось. Центр тяжести пластинки со стойкой лежит на оси. В тот момент, когда система приходит в движение, центр диска лежит в горизонтальной плоскости, проходящей через ось. Показать, что диск начинает скользить, когда угол наклона пластинки к вертикали достигает величины ϑ, определяемой уравнением:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{A + a^2 + 6\mu ab + 3b^2}{2\mu A + 7\mu a^2 + \frac{5}{2}ab},$$

где A — отношение момента инерции пластинки относительно оси вращения к массе диска.

15. Обруч брошен вниз по наклонной плоскости со скоростью V. Угол наклона плоскости равен α, а коэффициент трения равен μ ($> tg\alpha$). В начальный момент обруч имеет такую обратно направленную угловую скорость Ω, что по истечении промежутка времени t_1 он начинает катиться вверх и затем, находясь в таком движении в течение промежутка времени t_2, снова начинает катиться вниз. Показать, что если движение происходит в вертикальной плоскости, перпендикулярной к наклонной плоскости, то

$$(t_1 + t_2)g\sin\alpha = a\Omega - V.$$

16. Кольцо радиуса a укреплено на гладкой горизонтальной плоскости. Внутри этого кольца положено на плоскость второе кольцо, касающееся первого. Внутреннее кольцо приводится в движение без вращения с начальной скоростью V, направленной по касательной в точке соприкосновения. Определить, когда оно перестанет скользить, если коэффициент трения равен μ, и показать, что к этому моменту времени точка касания опишет дугу длиной $\dfrac{a\ln 2}{\mu}$. Исследовать, какое получится движение, если в тот момент, когда внутреннее кольцо перестанет скользить, внешнее кольцо внезапно освободить. Показать, что за промежуток времени, в течение которого внутреннее кольцо, катясь по внешнему, опишет половину его периметра, центр последнего переместится на расстояние:

$$\frac{m}{M+m}(a-b)(\pi^2+4)^{\frac{1}{2}},$$

где m и b — масса и радиус внутреннего кольца, а M — масса наружного кольца. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1900.)

17. Показать, что при падении тяжелой точки в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости, величина

$$e^{-k\alpha} + e^{k\beta},$$

где kv^2 сопротивление, а α и β два отрезка, проходимые точкой за два последовательных равных интервала времени τ, зависит только от τ, но не зависит от начальной скорости.

18. Показать, что при падении без начальной скорости тяжелой материальной точки в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости, путь, пройденный точкой к моменту времени t, равен $\dfrac{U^2 \ln \operatorname{ch} \dfrac{gt}{U}}{g}$, а ее скорость равна $U \operatorname{th} \dfrac{gt}{U}$. Здесь U есть конечная скорость в этой среде.

Показать далее, что угол ϑ асимптоты траектории снаряда в такой среде определяется уравнением:

$$\frac{U^2}{V^2} = \operatorname{arcsh} \operatorname{ctg} \vartheta + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\sin \vartheta},$$

где V скорость снаряда в момент горизонтального движения.

19. Показать, что координаты x и y материальной точки, падающей под действием силы тяжести в среде с сопротивлением R, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{2gR}{v^4 \cos^3 \varphi} = 0,$$

где v скорость, а φ угол касательной с горизонталью.

20. Материальная точка движется под действием силы тяжести в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Показать, что уравнение траектории, отнесенное к вертикальной асимптоте и прямой, параллельной направлению движения при бесконечно большой скорости $(t - -\infty)$, может быть представлено в виде:

$$y = b \ln \frac{x}{a}.$$

21. Показать, что при движении снаряда в сопротивляющейся среде, вызывающей замедление kv^3, где k мало, приближенное (пренебрегая k^2) уравнение траектории при горизонтальном выстреле с начальной скоростью V имеет вид:

$$y - \frac{gx^2}{2V^2} + \frac{kgx^3}{3V}\left(1 - \frac{g^2x^2}{10V^4}\right);$$

где за ось x взято направление выстрела, а за ось y направленная вниз вертикаль.

22. Материальная точка движется прямолинейно по инерции в сопротивляющейся среде, сопротивление которой есть $\dfrac{v^2 - v^3 \ln s}{s}$, где v — скорость, а s — расстояние от заданной точки прямой. Показать, что зависимость между s и t определяется уравнением вида:

$$t = a + \frac{1}{2} cs^2 + s \ln s,$$

где a и c — постоянные.

23. Материальная точка движется в сопротивляющейся среде под действием притягивающего центра. Пусть R — вызванное сопротивлением среды замедление, а v — скорость. Показать, что секториальная скорость радиуса вектора из центра силы пропорциональна

$$e^{-\int \frac{R}{v}\,dt}.$$

24. Показать, что в сопротивляющейся среде материальная точка может описывать параболу под действием центральной силы, направленной к фокусу и пропорциональной расстоянию, если сопротивление в точке, где скорость равна v, равно $k\{v(v - v_0)\}^{\frac{1}{2}}$, где v_0 — скорость в вершине. Определить k.

25. Материальная точка движется в сопротивляющейся среде под действием центральной силы P. Сопротивление среды равно R.

Показать, что

$$\frac{d}{ds}\left\{Pp^2 \frac{dr}{dp}\right\} = -2Rp^2,$$

где r — радиус-вектор, а p — перпендикуляр на касательную.

Если $u = \frac{1}{r}$, $P = \mu u^2$, $R = kv^2$, то показать, что, пренебрегая вторыми и высшими степенями k, уравнение траектории будет иметь вид:

$$p\frac{d^2p}{du^2} - 3\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = \frac{2\mu k}{h^2}\frac{u^2}{(1 - p^2u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где h — определенная постоянная.

26. Материальная точка, отталкиваемая центральной силой $\varphi(r)$ от начала, находится в сопротивляющейся среде, замедляющая сила которой равна k-кратной величине скорости. Показать, что траектория определяется уравнениями:

$$r^2\dot{\vartheta} = he^{-kt}, \quad \ddot{r} + k\dot{r} - h^2r^{-3}e^{-2kt} = \varphi(r),$$

где h — постоянная.

27. Материальная точка описывает окружность под действием притягивающей силы, пропорциональной расстоянию, из внутренней точки. Сопротивление среды равно произведению квадрата скорости на плотность. Показать, что плотность в любой точке пропорциональна тангенсу угла между прямыми, соединяющими эту точку с центром силы и центром окружности.

28. Стержень длины a вращается вокруг закрепленного конца. На него не действуют никакие силы за исключением сопротивления воздуха. Предполагая, что эффект замедления от сопротивления на элемент длины dx равен $A\,dx$, умноженному на квадрат скорости, показать, что угловая скорость в момент времени t определяется уравнением:

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega} - \frac{Aa^4}{4Mk^2}t,$$

где Mk^2 — момент инерции стержня относительно конца, а Ω — постоянная.

29. Гладкий овальный диск массы M, не имеющий поступательной скорости, вращающийся с угловой скоростью ω на гладкой горизонтальной плоскости, ударяется о середину горизонтального стержня массы m. Показать, что угловая скорость уменьшится в отношении

$$(M+m)k^2 - mex^2 : (M+m)k^2 + mx^2,$$

где e — коэффициент упругости, x — расстояние центра тяжести от нормали в точке соприкосновения, k — радиус инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести.

30. Два стержня одинаковой длины a и массы m связаны верхними концами при помощи шарнира. Они падают на гладкую неупругую плоскость, сохраняя симметрию относительно вертикальной плоскости. Непосредственно перед ударом шарнир имел скорость V, а каждый из стержней угловую скорость Ω, увеличивающую наклон α к горизонту. Показать, что импульс между каждым стержнем и плоскостью равен:

$$\frac{m(k^2 + c^2\sin^2\alpha)(V + a\Omega\cos\alpha)}{k^2 + c^2 + a(a-2c)\cos^2\alpha},$$

где c расстояние центра тяжести каждого стержня от шарнира, а mk^2 — их моменты инерций относительно центра тяжести.

31. Три одинаковых однородных стержня AB, BC, CD длины $2a$, связанные шарнирами в точках B и C, лежат на одной прямой и движутся с заданной скоростью по горизонтальной плоскости перпендикулярно к их направлению. Концы A и D ударяются одновременно о два неподвижных, неупругих препятствия, приводящие их в состояние покоя. Определить, при каком условии стержни образуют равносторонний треугольник и показать, что при ударе теряется $\frac{1}{5}$ первоначального количества движения.

32. Однородный гладкий куб может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центры двух противоположных граней. Он находится в покое, причем его противоположные грани горизонтальны. Второй куб, равный первому, падает без вращения со скоростью u и сталкивается с первым по прямой, параллельной оси вращения и отстоящей на расстоянии c от вертикальной плоскости, проходящей через эту ось. Показать, что нижний куб приобретает вследствие удара угловую скорость, равную:

$$\frac{(1+e)cu}{c^2+k^2+a^2(1-\sin 2\alpha)},$$

где α — угол наклона нижней грани падающего куба относительно горизонтали, $2a$ длина ребра, k радиус инерции и e постоянная § 95.

Далее, определить движение верхнего куба непосредственно после удара.

33. Вполне упругий круговой диск массы M и радиуса c ударяется без вращения о стержень массы m и длины $2a$, который может свободно вращаться вокруг своей середины. Точка соприкосновения отстоит от середины стержня на расстоянии b. Показать, что $Mb^2 = ma^2$, если компонент скорости центра диска по направлению, перпендикулярному стержню, уменьшается после удара вдвое и если трение достаточно велико, чтобы предотвратить скольжение.

34. Абсолютно шероховатый шар падает на горизонтальную плоскость с высоты h и с начальной скоростью V. Шар имеет в начале также и угловую скорость Ω относительно горизонтального диаметра, перпендикулярного к плоскости движения. Показать, что он переместится в горизонтальном направлении на расстояние:

$$\frac{2\sqrt{2}}{7}\sqrt{\frac{h}{g}}\frac{e}{1-e}(5V+2a\Omega),$$

прежде чем он перестанет прыгать по плоскости. Здесь e есть коэффициент упругости, и расстояние отмеряется от первой точки соприкосновения.

Сравнить кинетические энергии в начале и в конце.

35. Однородный упругий шар (коэффициент упругости e) брошен на вертикальную шероховатую стену таким образом, что его центр движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной к стене. Компоненты начальной скорости центра шара суть u и v, и шар вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси, перпендикулярной к вертикальной плоскости. Определить движение после удара и показать, что если центр шара возвращается в исходное положение, то точка соприкосновения шара со стеной при ударе имеет относительно исходной точки координаты:

$$\frac{2eu}{g}\frac{(7e+5)v+2a\Omega}{7+10e+7e^2}+a$$

и

$$\frac{2e}{g}\frac{\{(7e+5)v+2a\Omega\}\{v(7+5e)-2ae\Omega\}}{(7+10e+7e^2)^2},$$

где a — радиус шара.

Глава IX
Принципы наименьшего действия и наименьшей кривизны

§ 98. Траектории динамической системы. Основным вопросом динамики является исследование изменения во времени координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, определяющих положение динамической системы. Если система имеет не более трех степеней свободы, то мы можем иногда вносить большую ясность в изложение, давая проблеме геометрическое толкование. Примером может служить пространственная траектория точки, прямоугольные координаты которой относительно неподвижных осей являются координатами положения системы q_1, q_2, q_3; она дает ясное представление о последовательных состояниях системы. Для $n > 3$ таким же образом можно движение системы представлять через траекторию точки с координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в n-мерном пространстве. Траекторию этой точки мы назовем *траекторией системы*. В дальнейшем мы будем также употреблять такие геометрические термины, как «пересечение», «смежность» и т. д., в применении к форме или состоянию движения системы.

§ 99. Принцип Гамильтона для консервативных голономных систем. Рассмотрим произвольную консервативную голономную систему, конфигурация которой для всякого момента времени определяется n независимыми координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и которая имеет кинетический потенциал L. Пусть AB — дуга кривой в n-мерном пространстве, представляющая отрезок траектории системы, и пусть CD — смежная дуга кривой, которая может и не быть отрезком траектории системы. Введением дополнительных сил можно, конечно, добиться, чтобы и CD стала траекторией. Пусть точка $q_1, q_2, \ldots, q_n$, изображающая конфигурацию системы в момент времени t, находится в точке P дуги AB. Предположим, что каждой точке на CD поставлен в соответствие определенный момент времени таким образом, что на CD (или на кривой, частью которой является CD) существует точка, отвечающая тому же моменту времени, что и точка P. Допустим также, что при обходе дуги CD соответствующие значения времени изменяются в одном направлении. Если точка описывает дугу CD, то ее последовательным положениям соответствует непрерывная последовательность значений $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. И, таким образом, каждой точке на CD соответствует также система значений $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$.

Обозначим через δ изменение, отвечающее переходу от точки дуги AB к той точке кривой CD, которая соответствует тому же моменту времени. Через t_0, t_1, $t_0 + \Delta t_0$, $t_1 + \Delta t_1$ обозначим значения времени, отвечающие соответственно концам A, B, C и D; наконец, через L_R обозначим значение функции L в произвольной точке R, лежащей на одной из обеих дуг кривых.

Если теперь образуем разность значений интеграла

$$\int L(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t)\, dt,$$

распространенного на дуги AB и CD, то получим:

$$\int\limits_{CD} L\,dt - \int\limits_{AB} L\,dt = L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L\,dt =$$

$$= L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r \right) dt =$$

$$= L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r \right\} dt.$$

На основании уравнений Лагранжа имеем:

$$\int\limits_{CD} L\,dt - \int\limits_{AB} L\,dt = L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right) dt =$$

$$= L_B \Delta t_1 - L_A \Delta t_0 + \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right)_B - \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right)_A.$$

Если обозначить через $(\Delta q_r)_B$ прирост q_r при переходе от B к D, то имеем:

$$(\Delta q_r)_B = (\delta q_r)_B + (\dot{q}_r)_B \Delta t_1;$$

точно так же, если $(\Delta q_r)_A$ есть соответствующий прирост q_r при переходе от A к C, то

$$(\Delta q_r)_A = (\delta q_r)_A + (\dot{q}_r)_A \Delta t_0$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{CD} L\,dt - \int\limits_{AB} L\,dt - \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \Delta q_r + \left(L - \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \dot{q}_r \right) \Delta t \right]_A^B.$$

Допустим теперь, что точка C совпадает с A, а точкам D и B и точкам C и D отвечают соответственно моменты времени t_0 и t_1, так что величины $\Delta q_1, \Delta q_2, \ldots \Delta q_n, \Delta t$ в точках A и B уничтожаются. Последнее равенство переходит в следующее:

$$\int\limits_{CD} L\,dt - \int\limits_{AB} L\,dt = 0,$$

и мы из этого заключаем, что *интеграл $\int L\,dt$ для любого отрезка AB траектории системы принимает стационарное значение, если в качестве смежных кривых сравнения CD берутся такие, которые имеют одинаковые концы с соответственно одинаковыми моментами времени для этих концов.* Эта теорема именуется принципом Гамильтона [1].

Если кинетический потенциал L не содержит явно времени, то условие, что время должно иметь одинаковые для обеих дуг кривых начальное и конечное значения, мы, очевидно, можем заменить условием, что время пробега кривых AB и CD одно и то же. Действительно, величина $\sum\limits_{r=1}^{n} \dot q_r \dfrac{\partial L}{\partial \dot q_r} - L$, представляющая полную энергию, в этом случае постоянна.

Гельмгольц (Journ. f. Math., т. 100, стр. 151) нашел, что условиями стационарности величины

$$\int \left\{ L(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n, q_1, q_2, \ldots q_n) + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \vartheta_r}(\dot q_r - \vartheta_r) \right\} dt$$

(где ϑ и q считаются независимыми переменными) будут: $\vartheta_r = \dot q_r$,

$$0 = \frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vartheta_r}\right) \qquad (r = 1, 2, \ldots n),$$

так что вопрос снова сводится к уравнениям Лагранжа.

§100. Принцип наименьшего действия для консервативных голономных систем. Предположим теперь, что кинетический потенциал динамической системы не содержит явно времени, так что существует интеграл энергии

$$\sum_{r=1}^{n} \dot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - L = h.$$

Пусть снова AB — отрезок траектории системы, CD — отрезок смежной кривой, каждой точке которой соответствуют значения времени такие, что имеет место уравнение:

$$\sum_{r=1}^{n} \dot q_r \frac{\partial L}{\partial \dot q_r} - L = h + \Delta h,$$

[1] Hamilton, Phil. Trans., стр. 307, 1834; там же, стр 95, 1835.

где Δh — малая постоянная. Тогда будем иметь:

$$\int\limits_{CD}\left(\sum_{r=1}^{n}\dot q_r\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)dt-\int\limits_{AB}\left(\sum_{r=1}^{n}\dot q_r\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)dt=$$

$$=\int\limits_{CD}(h+\Delta h)\,dt-\int\limits_{AB}h\,dt+\int\limits_{CD}L\,dt-\int\limits_{AB}L\,dt=$$

$$=(h+\Delta h)(t_1+\Delta t_1-t_0-\Delta t_0)-h(t_1-t_0)+\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\Delta q_r-h\Delta t\right]_A^B=$$

$$=\left[\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\Delta q_r+t\Delta h\right]_A^B.$$

Если теперь мы совместим точки C с A и D с B, а Δh будем приближать к нулю, то получим:

$$\int\limits_{CD}\left(\sum_{r=1}^{n}\dot q_r\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)dt=\int\limits_{AB}\left(\sum_{r=1}^{n}\dot q_r\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)dt.$$

Из этого уравнения следует, что *интеграл* $\int\left(\sum\limits_{r=1}^{n}\dot q_r\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)dt$ *имеет стационарное значение для любого отрезка траектории по сравнению со смежными кривыми, которые имеют те же концы и для которых установлено соответствие времени с координатами так, что удовлетворяется то же уравнение энергии.* Интеграл

$$\int\left(\sum_{r=1}^{n}\dot q_r\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)dt$$

называется *действием*, а эта теорема — *принципом наименьшего действия.*

Для естественных систем, у которых L есть разность между кинетической энергией T, являющейся однородной квадратичной функцией скоростей и независящей от скоростей потенциальной энергии V, имеем (§ 41):

$$\sum_{r=1}^{n}\dot q_r\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}=2T.$$

Стационарный интеграл имеет, следовательно, вид $\int T\,dt$.

Принцип наименьшего действия берет начало от попытки Мопертюи (Mém. de l'Acad., стр. 417, 1744) получить для корпускулярной теории света принцип, аналогичный принципу наименьшего времени Ферма. Эйлер доказал принцип Мопертюи для отдельной материальной точки при действии на неё центральной силы (теорема 2, стр. 309 в «Methodus inveniendi lineas curvas», 1744). Лагранж распространил его на многие, более общие проблемы (Miscell. Taurin, т. 2, 1760–1761; Oeuvres, т. I, стр. 365).

Задача 1. Показать, что принцип наименьшего действия можно распространить следующим образом на системы, не обладающие интегралом энергии. Величину

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L$$

обозначим через h. Тогда интеграл

$$\int \left(\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} + t \frac{dh}{dt} \right) dt$$

имеет стационарное значение для любого отрезка траектории системы по сравнению с кривыми, обладающими теми же концами, и с одинаковыми значениями h на них.

Задача 2. Динамическая система, для которой существует интеграл энергии, приводится, как в § 42, к системе более низкого порядка. Показать, что принцип наименьшего действия для начальной системы тождествен с принципом Гамильтона для приведенной системы.

§ 101. Распространение принципа Гамильтона на неконсервативные динамические системы. Распространим теперь принцип Гамильтона на голономные динамические системы, силы которых не предполагаются более консервативными. Пусть T означает кинетическую энергию такой системы, а $\sum\limits_{r=1}^{n} Q_r \, \delta q_r$ работу внешних сил при произвольном перемещении $(\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n)$. Тогда уравнениями движения системы будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть α — отрезок траектории, а β — отрезок соседней кривой, имеющей те же концы. Будем предполагать, что этим концам на обоих отрезках α и β отвечают одинаковые моменты времени t_0 и t_1. Обозначим символом δ изменение, соответствующее переходу от положения на дуге α к положению для того же момента времени на дуге β. Тогда будем иметь:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T + \sum_{r=1}^{n} Q_r \delta q_r \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r + Q_r \delta q_r \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta \dot{q}_r + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) \delta q_r \right\} dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right) dt = \left[\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Этот результат

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta T-\sum_{r=1}^{n} Q_r\delta q_r\right)dt=0$$

(как и теорему § 99, которая представляет его частный случай) называют также принципом Гамильтона.

§ 102. Распространение принципа Гамильтона и принципа наименьшего действия на неголономные системы[1]**.** Мы сейчас покажем, что принцип Гамильтона в несколько измененной формулировке имеет место также и для неголономных систем.

Пусть n координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ неголономной консервативной системы связаны m неинтегрируемыми кинематическими соотношениями:

$$A_{1k}\,dq_1+A_{2k}\,dq_2+\ldots+A_{nk}\,dq_n+T_k\,dt=0 \quad (k=1,\,2,\,\ldots,\,m),$$

в которых $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{nm}, T_1, \ldots, T_m$ суть заданные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Если L есть кинетический потенциал, то (§ 87) движение будет определяться n уравнениями:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=\lambda_1 A_{r1}+\lambda_2 A_{r2}+\ldots+\lambda_m A_{rm} \quad (r=1,\,2,\,\ldots,\,n)$$

вместе с вышенаписанными кинематическими уравнениями. При этом неизвестными величинами являются:

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m.$$

Пусть AB — некоторая дуга траектории системы, а CD — кривая, получившаяся из AB после такого перемещения последней, которое совместимо с мгновенными кинематическими уравнениями, т. е. с написанными выше уравнениями, но лишь без членов $T_k\,dt$. Вообще CD не является сама траекторией, которую точка может непрерывно описывать в соответствии с кинематическими условиями; она есть, следовательно, кинематически невозможная траектория.

Здесь сам собою возникает вопрос: почему мы не выбираем за CD кинематически возможную траекторию? На это следует ответить, что тогда переходы от AB к CD не могли бы быть согласованы с кинематическими условиями; в неголономных системах переход между двумя заданными смежными конфигурациями, вообще говоря, кинематически невозможен. Существует значительно (бесконечно) больше возможных смежных положений, чем возможных перемещений из заданного положения.

[1] См. *Hölder, Gött.* Nachr., стр. 122, 1898 и Gott. Nachr., стр. 322, 1900.

Как и при доказательстве принципа Гамильтона в § 99, обозначим через δ изменение, отвечающее переходу от некоторой точки на дуге AB к соответствующей точке на кривой сравнения CD. Составим выражение:

$$\int\limits_{CD} L\,dt - \int\limits_{AB} L\,dt = L_B\Delta t_1 - L_A\Delta t_0 +$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_r}\delta\dot q_r+\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r\right)dt = L_B\Delta t_1 - L_A\Delta t_0 +$$

$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial\dot q_r}\delta\dot q_r+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_r}\right)\delta q_r-(\lambda_1A_{r1}+\ldots+\lambda_mA_{rm})\delta q_r\right\}dt.$$

Так как перемещения удовлетворяют уравнению:

$$A_{1k}\,\delta q_1 + A_{2k}\,\delta q_2 + \ldots - A_{nk}\,\delta q_n = 0,$$

то из этого следует, что члены вида $\lambda_s A_{rs}\delta q_r$ в интеграле взаимно уничтожаются. Поэтому имеем:

$$\int\limits_{CD} L\,dt-\int\limits_{AB} L\,dt = L_B\Delta t_1-L_A\Delta t_0+\int\limits_{t_0}^{t_1}\sum_{r=1}^{n}\left\{\frac{\partial L}{\partial\dot q_r}\delta\dot q_r+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_r}\right)\delta q_r\right\}dt.$$

Доказательство заканчивается, как и в § 99, и мы получаем, *что принцип Гамильтона имеет место для всех динамических систем как голономных, так и неголономных. При этом кривые сравнения должны получаться из траекторий всегда с такими изменениями, которые не нарушают кинематических уравнений связи. Однако только для голономных систем измененное движение является одновременно и возможным, и если, следовательно, мы сравним действительное движение со смежными движениями, совместимыми с кинематическими условиями связей, то принцип Гамильтона будет справедлив лишь для голономных систем.*

Очевидно, то же самое имеет место для принципа наименьшего действия и принципа Гамильтона для неконсервативных систем.

§ 103. Являются ли стационарные интегралы действительно минимальными? Кинетические фокусы. До сих пор нами было установлено только, что интегралы в принципе Гамильтона и наименьшего действия имеют стационарное значение для траектории по сравнению с соседними кривыми. Возникает вопрос, будут ли эти интегралы представлять maxima или minima?

Рассмотрим для действительной траектории некоторое число смежных кривых. Пусть они проходят через те же конечные точки и непрерывны, хотя могут иметь конечное число угловых точек. На кривой такого рода точка $(q_1, q_2 + \delta q_2)$ пусть отвечает точке (q_1, q_2) действительной траектории. Мы дальше часто будем заменять δq_2 через $\alpha\varphi$, где малая постоянная α характеризует порядок малости рассматриваемых выражений, а φ — величина, исчезающая на границах интервала.

Разложение функции

$$f(q_1, q_2 + \alpha\varphi, q_2' + \alpha\varphi')$$

по возрастающим степеням α имеет вид:

$$f(q_1, q_2, q_2') + \alpha(U_0\varphi + U_1\varphi') + \frac{1}{2}\alpha^2(U_{00}\varphi^2 + 2U_{01}\varphi\varphi' + U_{11}{\varphi'}^2) + \ldots$$

Обозначим в выражении

$$\int f(q_1, q_2 + \alpha\varphi, q_2' + \alpha\varphi')\, dq_1$$

члены, содержащие α линейно, через δI, члены, содержащие α^2, через $\delta^2 I$. В произвольной точке малого интервала интегрирования значение φ' велико по сравнению с φ. В самом деле, так как φ исчезает на границах, то

$$\varphi = \int\limits_P^R \varphi'\, dq_1,$$

где P и R означают граничные точки; если, следовательно, β — наибольшее численное значение φ' между P и R, то φ не может превышать величины $(q_{1(R)} - q_{1(P)})\beta$, и отношение $\varphi : \varphi'$ уменьшением интервала может быть сделано бесконечно малым.

Если интервал достаточно мал, то в $\delta^2 I$ преобладающим является член $\dfrac{1}{2}\int U_{11}{\varphi'}^2\, dq_1$, знак которого совпадает со знаком U_{11} (знак dq_1 предполагается положительным). Поэтому для малого интервала I будет максимум или минимум, смотря по тому, будет ли U_{11} отрицательно или положительно. Но

$$U_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial {q'}_2^2} = (h - \psi)^{\frac{1}{2}}(a_{11} + 2a_{12}q_2' + a_{22}{q'}_2^2)^{\ \frac{3}{2}}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

положительно, так как кинетическая энергия есть определённая положительная форма и, следовательно, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Итак, имеем: *для малых областей действие на действительной траектории есть минимум.*

Рассмотрим для действительной траектории некоторое число смежных кривых. Пусть они проходят через те же конечные точки и непрерывны, хотя могут иметь конечное число угловых точек. На кривой такого рода точка $(q_1, q_2 + \delta q_2)$ пусть отвечает точке (q_1, q_2) действительной траектории. Мы дальше часто будем заменять δq_2 через $\alpha\varphi$, где малая постоянная α характеризует порядок малости рассматриваемых выражений, а φ — величина, исчезающая на границах интервала.

Разложение функции

$$f(q_1, q_2 + \alpha\varphi, q_2' + \alpha\varphi')$$

по возрастающим степеням α имеет вид:

$$f(q_1, q_2, q_2') + \alpha(U_0\varphi + U_1\varphi') + \frac{1}{2}\alpha^2(U_{00}\varphi^2 + 2U_{01}\varphi\varphi' + U_{11}{\varphi'}^2) + \ldots$$

Обозначим в выражении

$$\int f(q_1, q_2 + \alpha\varphi, q_2' + \alpha\varphi')\, dq_1$$

члены, содержащие α линейно, через δI, члены, содержащие α^2, через $\delta^2 I$. В произвольной точке малого интервала интегрирования значение φ' велико по сравнению с φ. В самом деле, так как φ исчезает на границах, то

$$\varphi = \int\limits_P^R \varphi'\, dq_1,$$

где P и R означают граничные точки; если, следовательно, β — наибольшее численное значение φ' между P и R, то φ не может превышать величины $(q_{1(R)} - q_{1(P)})\beta$, и отношение $\varphi : \varphi'$ уменьшением интервала может быть сделано бесконечно малым.

Если интервал достаточно мал, то в $\delta^2 I$ преобладающим является член $\frac{1}{2}\int U_{11}{\varphi'}^2\, dq_1$, знак которого совпадает со знаком U_{11} (знак dq_1 предполагается положительным). Поэтому для малого интервала I будет максимум или минимум, смотря по тому, будет ли U_{11} отрицательно или положительно. Но

$$U_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial {q'_2}^2} = (h - \psi)^{\frac{1}{2}}(a_{11} + 2a_{12}q_2' + a_{22}{q'_2}^2)^{-\frac{3}{2}}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$$

положительно, так как кинетическая энергия есть определённая положительная форма и, следовательно, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Итак, имеем: *для малых областей действие на действительной траектории есть минимум.*

Выберем теперь на траектории точку A и рассмотрим вторую траекторию, проходящую через эту точку и составляющую с первой малый угол. Пусть обе траектории встречаются еще в точке B. Предельное положение точки B, при неограниченном уменьшении угла между траекториями, называется кинетическим фокусом точки A первоначальной траектории, или точкой, сопряженной с A.

Покажем теперь, что и для конечной области действие будет минимум, если только на траектории конечная точка не лежит за точкой, сопряженной с начальной. Пусть снова P и Q — границы интервала. Мы видели, что если точка Q близка к P, то величина $\delta^2 I$ всегда положительна и порядка α^2 по сравнению со значениями I в точках P и Q. Если мы, следовательно, будем все более и более удалять Q от P, то, очевидно, $\delta^2 I$ может в первый раз стать отрицательным тогда, когда Q перейдет точку, в которой $\delta^2 I$ может обратиться в нуль, при надлежащем выборе величины $\alpha\varphi$.

Итак, пусть PBQ — отрезок действительной траектории и точка Q есть первая точка, через которую можно провести смежную кривую PHQ, для которой $\delta^2 I$ есть нуль. Покажем, что эта кривая сама есть траектория. Допустим обратное, что PHQ не есть траектория. Соединим две ее близкие точки A и C траекторией ADC. Тогда интеграл, распространенный на кривую ADC, будет меньше, чем интеграл по кривой AHC, поэтому интеграл по кривой $PADCQ$ меньше, чем интеграл по кривой PHQ, который по предположению равен интегралу, распространенному на PBQ. Следовательно, $\delta^2 I$ на $PADCQ$ отрицательно, и Q не может быть первой точкой при продвижении от P, для которой $\delta^2 I$ перестает быть положительным. Это противоречит доказанному. Следовательно, $PAHCQ$ есть траектория, а Q — кинетический фокус P. *Итак, действие есть минимум, если конечная точка интервала лежит на траектории перед кинетическим фокусом начальной точки.*

Разберем теперь случай, когда кинетический фокус начальной точки на траектории лежит перед конечной точкой. Мы используем предыдущие обозначения. Начальная и конечная точки пусть будут P и R. Выберем на кривой PHQ и дуге QR точки E и F настолько близкие, чтобы соединяющая их траектория EGF давала минимум. Так как интеграл по EGF меньше, чем интеграл, взятый по EQF, то интеграл по $PEGFR$ должен быть меньше интеграла по $PEQR$: последний равен интегралу по $PBQR$, так как интегралы от P и Q совпадают. Поэтому интеграл по $PBQR$ не есть минимум. Он, однако, и не максимум, так как интеграл, распространенный на любую часть этого интервала, есть минимум. Итак, *если фокус начальной точки лежит перед конечной точкой интервала, то действие не будет ни максимумом, ни минимумом.*

Простым примером, поясняющим результаты этого параграфа, является движение по инерции материальной точки на гладком шаре. Траекториями служат большие круги, и действие, распространенное на произвольную кривую (траекторию или нет), пропорционально длине пути. Кинетический фокус произвольной точки A есть диаметрально противоположная точка в A' на шаре, так как два больших круга, проходящих через A, пересекаются только в A'. Наша теорема приводит, таким образом, здесь к тому результату, что дуга большого круга, соединяющая две точки A и B, тогда и только тогда является кратчайшим расстоянием, когда противоположный полюс A' точки A не лежит на этой дуге, т. е. когда она меньше половины большого круга.

§ 104. Представление движения динамической системы с помощью геодезических линий. Пользуясь принципом наименьшего действия, можно сделать интересное преобразование движения естественной динамической системы с двумя степенями свободы. Пусть система имеет кинетическую энергию

$$\frac{1}{2}\{a_{11}(q_1, q_2)\dot{q}_1^2 + 2a_{12}(q_1, q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}(q_1, q_2)\dot{q}_2^2\}$$

и потенциальную энергию $\psi(q_1, q_2)$. По § 100 траектории, принадлежащие к системам решений с общей энергией h, определены тем условием, что интеграл

$$\int (a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2)\, dt$$

стационарен для любого отрезка действительной траектории по сравнению с кривыми, имеющими те же самые концы, и для dt, связанного с дифференциалами координат уравнением:

$$\frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2) + \psi(q_1, q_2) = h.$$

Поэтому интеграл

$$\int (h-\psi)^{\frac{1}{2}} (a_{11}\, dq_1^2 + 2a_{12} dq_1\, dq_2 + a_{22}\, dq_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

стационарен. Это выражает принцип наименьшего действия для движения по инерции материальной точки на любой поверхности, линейный элемент которой задан выражением:

$$ds^2 - (h-\psi)(a_{11}\, dq_1^2 + 2a_{12}\, dq_1 dq_2 + a_{22}\, dq_2^2),$$

и определяет поэтому геодезические линии этой поверхности. *Уравнения траекторий данной динамической системы совпадают, следовательно, с уравнениями геодезических линий на этой поверхности.*

Задача 1. Доказать, что параболические траектории свободной тяжелой точки соответствуют геодезическим линиям на определенной поверхности вращения.

Задача 2. Показать, что траектории, описываемые точкой плоскости под действием центральной силы $\varphi'(r)$, соответствуют геодезическим линиям поверхности вращения, меридианная кривая которой имеет уравнение $z = f(\rho)$, где

$$f'(\rho) = \left\{\left(\rho\frac{dr}{rd\rho}\right)^2 - 1\right\}^{\frac{1}{2}},$$

а r и ρ связаны соотношением:

$$\rho^2 = r^2\{-\varphi(r) + h\}.$$

§ 105. Принцип наименьшей кривизны Гаусса–Герца. Мы разберем теперь принцип, который, как и принцип Гамильтона, может служить для определения траектории динамической системы, но который, однако, не зависит от направления интегрирования.

Пусть x_r, y_r, z_r — координаты произвольной материальной точки m_r, принадлежащей динамической (голономной или неголономной) системе, а X_r, Y_r, Z_r — компоненты действующих на эту точку внешних сил. Рассмотрим функцию:

$$\sum m_r\left\{\left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{y}_r - \frac{Y_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{z}_r - \frac{Z_r}{m_r}\right)^2\right\},$$

где суммирование распространено на все точки системы, а $\ddot{x}_r, \ddot{y}_r, \ddot{z}_r$ относятся к произвольной кинематически возможной траектории, координаты и скорости которой в соответствующий момент времени совпадают с координатами и скоростями действительной траектории. Эта функция представляет то, что Гаусс называет *принуждением*, а Герц *кривизной*[1] рассматриваемой кинематически возможной траектории (Герц исследовал, главным образом, случай движения по инерции). Мы воспользуемся обозначениями Герца.

Следует доказать, что *среди всех совместимых со связями (не производящими по предположению никакой работы) траекторий действительная траектория обладает наименьшей кривизной*[2].

В простом случае движения по инерции отдельной материальной точки по гладкой поверхности эта теорема выражает, очевидно, лишь тот факт, что пространственная кривизна кривой (в обычном смысле) есть наименьшая из всех возможных, при условии, что материальная точка остается на поверхности.

[1]Точнее, у Герца назывался кривизной квадратный корень из этой функции.

[2]*Gauss*, Journ. f. Math., т. 4, стр. 232, 1829; *Werke*, т. 5, стр. 23. Гаусс измерял принуждение суммой произведений из масс точек на квадраты соответствующих отклонений от освобожденного от связей движения. Написанное аналитическое выражение впервые дано Шеффлером (*H. Scheffler*, Zeitschrift f. Math., т. 3, стр. 197, 1858). Теория Герца находится в его «Mechanik».

При доказательстве этой теоремы мы предположим, что уравнения связей имеют вид:

$$\sum_r x_{kr}\, dx_r = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m),$$

где через x_r мы обозначили любую из трех координат точки системы, а коэффициенты x_{kr} суть данные функции координат. Из этого уравнения дифференцированием получим:

$$\sum_r x_{kr}\ddot{x}_r + \sum_r \sum_s \frac{\partial x_{kr}}{\partial x_s}\dot{x}_r\dot{x}_s = 0.$$

Пусть $\ddot{x}_r$ компонент ускорения нашей типичной точки на рассматриваемой траектории (которая кинематически возможна, но не предполагается непременно действительной траекторией) и $\ddot{x}_{r0}$ соответствующий компонент ускорения на действительной траектории. Если мы вычтем последнее уравнение, составленное для действительной траектории, из аналогичного уравнения, составленного для кинематически возможной траектории, то получим:

$$\sum x_{kr}(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0}) = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m),$$

так как скорости для обеих кривых одинаковы.

Это уравнение показывает, что малое перемещение системы, при котором перемещение δx_r координат x_r пропорциональны $(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0})$, совместимо со связями и, следовательно, есть возможное перемещение.

Компоненты сил, вызываемых связями, будут вида $m_r\ddot{x}_{r0} - X_r$; эти силы при возможном перемещении никакой работы не производят. Поэтому получаем:

$$\sum_r (m_r\ddot{x}_{r0} - X_r)(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0}) = 0.$$

Этим уравнениям можно придать вид:

$$\sum_r m_r\left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 = \sum_r m_r\left(\ddot{x}_{r0} - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 + \sum_r m_r(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0})^2$$

или (если координаты снова обозначить через x, y, z)

$$\begin{gathered}
\sum_r m_r\left\{\left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{y}_r - \frac{Y_r}{m_r}\right)^2 - \left(\ddot{z}_r - \frac{Z_r}{m_r}\right)^2\right\} = \\
= \sum_r m_r\left\{\left(\ddot{x}_{r0} - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{y}_{r0} - \frac{Y_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{z}_{r0} - \frac{Z_r}{m_r}\right)^2\right\} - \\
+ \sum_r m_r\left\{(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0})^2 + (\ddot{y}_r - \ddot{y}_{r0})^2 + (\ddot{z}_r - \ddot{z}_{r0})^2\right\}.
\end{gathered}$$

Так как в правой части все члены последней суммы положительны, то

$$\sum_r m_r \left\{ \left(\ddot{x}_r - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{y}_r - \frac{Y_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{z}_r - \frac{Z_r}{m_r}\right)^2 \right\} >$$
$$> \sum_r m_r \left\{ \left(\ddot{x}_{r0} - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{y}_{r0} - \frac{Y_r}{m_r}\right)^2 + \left(\ddot{z}_{r0} - \frac{Z_r}{m_r}\right)^2 \right\},$$

чем и доказывается теорема.

§ 106. Кривизна траектории в функции обобщенных координат. Липшиц[1] доказал, что для голономной динамической системы с n степенями свободы кривизну кинематически возможной траектории можно представить в функции производных от n независимых координат, определяющих конфигурацию системы.

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть координаты; соответствующие им ускорения для любой кинематически возможной траектории — $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$, которые для действительной траектории (при тех же $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$) пусть будут $\ddot{q}_{10}, \ddot{q}_{20}, \ldots, \ddot{q}_{n0}$. Если мы снова через x_r обозначим любую из трех прямоугольных координат материальной точки m_r, через x_r — соответствующий ей компонент силы, то кривизна Гаусса Герца будет $\sum\limits_r m_r \left(\ddot{x}_{r0} - \dfrac{X_r}{m_r}\right)^2$. На основании последнего параграфа вместо этого можно написать:

$$\sum_r m_r \left(\ddot{x}_{r0} - \frac{X_r}{m_r}\right)^2 - \sum_r m_r \left(\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0}\right)^2.$$

Первая сумма одинакова для всех кривых сравнения, так как она зависит только от действительной траектории, поэтому ее можно совсем не писать, назвав кривизной оставшуюся сумму, так как свойство минимума общего выражения кривизны от этого не потеряется. Пусть кинетическая энергия есть:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l,$$

где величины a_{kl} суть данные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Обозначим через D определитель, составленный из a_{kl}, а через A_{kl} алгебраическое дополнение элемента a_{kl}.

Из равенства

$$\sum_r m_r \dot{x}_r^2 = \sum_k \sum_l a_{kl} \dot{q}_k \dot{q}_l$$

[1] Journ. f. Math, т. 82, стр. 323. Кроме того, см. *Wassmuth*, Wien. Sitz., т. 104, 1895. В связи с принципом наименьшей кривизны укажем на дальнейшие исследования Лейтингера (*Leitinger*, Wien. Sitz, т. 116, стр. 1321, 1908) и Шенкеля (*Schenkl*, Wien. Sitz., т. 122, стр. 721, 1913).

следует:

$$a_{kl} = \sum_r m_r \frac{\partial x_r}{\partial q_k} \frac{\partial x_r}{\partial q_l}.$$

Далее имеем:

$$\ddot{x}_r = \sum_k \frac{\partial x_r}{\partial q_k} \ddot{q}_k + \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 x_r}{\partial q_k \partial q_l} \dot{q}_k \dot{q}_l;$$

так как координаты и скорости для всех рассматриваемых кривых совпадают, то, следовательно,

$$\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0} = \sum_k \frac{\partial x_r}{\partial q_k} (\ddot{q}_k - \ddot{q}_{k0}).$$

Но если положим

$$S_k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - \sum_r \frac{\partial x_r}{\partial q_k} X_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то в силу того, что последнее выражение на действительной траектории исчезает, получим: S_k — разности значений $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)$ для кривой сравнения и действительной траектории или

$$S_k = \sum_l a_{kl} (\ddot{q}_i - \ddot{q}_{l0}) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Отсюда получаем:

$$\ddot{q}_k - \ddot{q}_{k0} = \frac{1}{D} \sum_l A_{kl} S_l \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0} = \frac{1}{D} \sum_k \sum_l \frac{\partial x_r}{\partial q_k} A_{kl} S_l.$$

Поэтому кривизна $\sum_r m_r (\ddot{x}_r - \ddot{x}_{r0})^2$ равна:

$$\frac{1}{D^2} \sum_{r, k, l, i, j} m_r \frac{\partial x_r}{\partial q_k} \frac{\partial x_r}{\partial q_i} A_{kl} A_{ij} S_l S_j$$

или

$$\frac{1}{D^2} \sum_{k, l, i, j} a_{ki} A_{kl} A_{ij} S_l S_j.$$

Но по известному свойству определителей:

$$\sum_i \sum_k a_{ki} A_{kl} A_{ij} = D A_{lj}.$$

Поэтому кривизну можно представить в функции *обобщенных координат* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *и их производных в виде:*

$$\frac{1}{D}\sum_l \sum_j A_{lj} S_j S_l.$$

§ 107. Уравнения Аппеля. На основании принципа Гаусса–Герца Аппель получил общую форму дифференциальных уравнений динамики, охватывающих как голономные, так и неголономные системы[1].

Рассмотрим произвольную динамическую систему. Пусть изменения координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ связаны неинтегрируемыми уравнениями:

$$A_{1k}\,dq_1 - A_{2k}\,dq_2 + \cdots + A_{nk}\,dq_n + T_k\,dt = 0 \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, m).$$

Само собою разумеется, таких уравнений для голономной системы не будет.

Обозначим через S функцию $\sum\limits_k m_k\left(\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2\right)$, где m_k — масса той точки системы, которая в момент времени t имеет прямоугольные координаты x_k, y_k, z_k. Из уравнений, определяющих положение материальной точки через координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, мы можем S выразить в функции координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и их первых и вторых производных по времени. Кроме того, пользуясь уравнениями связей, можно m из скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ представить в функции остальных. Соответствующие этим последним скоростям координаты обозначим через $p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}$. Дифференцированием этих соотношений величины $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$ мы можем выразить в функциях от величины $\ddot{p}_1, \ddot{p}_2, \ldots, \ddot{p}_{n-m}, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots, \dot{p}_{n-m}, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Следовательно, и S выразится в функции от этих переменных.

Теперь малое перемещение, совместимое со связями, можно определить посредством изменений $\delta p_1, \delta p_2, \ldots, \delta p_{n-m}$ переменных p_1, $p_2, \ldots, p_{n-m}$. Пусть $\sum\limits_{r=1}^{n-m} P_r \delta p_r$ представляет работу внешних сил при этом перемещении. Тогда как и в § 26, имеем:

$$\sum_k m_k\left(\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial p_r} + \ddot{y}_k \frac{\partial y_k}{\partial p_r} + \ddot{z}_k \frac{\partial z_k}{\partial p_r}\right) = P_r.$$

Пусть

$$\delta x_k = \sum_{r=1}^{n-m} \pi_r \delta p_r$$

будет уравнением, представляющим изменение переменной x_k в функции от изменений $p_1, p_2, \ldots, p_{n-m}$, где $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{n-m}$ — известные функции координат. Уравнения этого типа, конечно, неинтегрируемы.

[1] Journ. f. Math., т. 121, стр. 310, 1900.

Отсюда получаем: $\dfrac{\partial x_k}{\partial p_r} = \pi_r$. Поэтому уравнение, представляющее $\dot{x}_k$ в функции от $\dot{p}_1, \dot{p}_2, \ldots, \dot{p}_{n-m}$ примет вид:

$$\dot{x}_k = \sum_{r=1}^{n-m} \pi_r \dot{p}_r + \alpha,$$

где α означает функцию координат. Дифференцирование этого равенства даст:

$$\ddot{x}_k = \sum_{r=1}^{n-m} \pi_r \ddot{p}_r + \sum_{r=1}^{n-m} \frac{d\pi_r}{dt} \dot{p}_r + \frac{d\alpha}{dt},$$

откуда следует:

$$\frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{p}_r} = \pi_r = \frac{\partial x_k}{\partial p_r}.$$

Поэтому

$$P_r = \sum_k m_k \left(\ddot{x}_k \frac{\partial x_k}{\partial p_r} + \ddot{y}_k \frac{\partial y_k}{\partial p_r} + \ddot{z}_k \frac{\partial z_k}{\partial p_r} \right) = \\ = \sum_k m_k \left(\ddot{x}_k \frac{\partial \ddot{x}_k}{\partial \ddot{p}_r} + \ddot{y}_k \frac{\partial \ddot{y}_k}{\partial \ddot{p}_r} + \ddot{z}_k \frac{\partial \ddot{z}_k}{\partial \ddot{p}_r} \right) = \frac{\partial S}{\partial \ddot{p}_r}.$$

Итак, *уравнения как голономной, так и неголономной динамической системы могут быть записаны в форме:*

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{p}_r} = P_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-m),$$

где S означает функцию $\frac{1}{2} \sum m_k \left(\ddot{x}_k^2 + \ddot{y}_k^2 + \ddot{z}_k^2\right)$, а число координат p_1, $p_2, \ldots, p_{n-m}$ равно числу степеней свободы системы[1].

Очевидно, эта теорема имеет также место, если величины $p_1, \ldots, p_{n-m}$ будут не истинными координатами, а квазикоординатами.

Задача 1. Вывести из уравнений Аппеля уравнения

$$A\dot{\omega}_1 - (B - C)\omega_2\omega_3 = L,$$
$$B\dot{\omega}_2 - (C - A)\omega_3\omega_1 = M,$$
$$C\dot{\omega}_3 - (A - B)\omega_1\omega_2 = N$$

для движения твердого тела с одной закрепленной точкой. Здесь ω_1, ω_2, ω_3 — компоненты угловой скорости тела в направлениях его главных осей инерции относительно точки опоры; A, B, C — главные моменты инерции; L, M, N — моменты внешних сил относительно главных осей.

§ 108. Теорема Бертрана. К группе теорем, относящихся к принципу Гаусса–Герца, следует причислить также и следующую теорему Бертрана[2]: *Если различные точки движущейся (голономной) или*

[1] О связи этого уравнения с принципом наименьшего действия см. *H. Brell*, Wien. Sitzungsber., т. 122, стр. 933, 1913.

[2] Примечания Бертрана к «Méc. Anal.» Лагранжа и Journal de Liouville (1), т. 7, стр. 166, 1842.

неголономной системы получают заданные импульсы, то кинетическая энергия получающегося движения будет больше, чем кинетическая энергия, которую приобрела бы система при тех же импульсах, если бы к первоначальным связям были добавлены любые другие связи, определяемые реакциями вполне гладких или вполне шероховатых поверхностей, или твердых соединений между материальными точками системы.

Пусть m есть масса материальной точки системы, которая до импульса, после него и в сравнительном движении имеет соответственно компоненты скорости:

$$u,\, v,\, \omega; \quad u',\, v',\, \omega'; \quad u_1,\, v_1,\, w_1.$$

Обозначим через X, Y, Z компоненты действующей на точку внешней импульсивной силы, через X', Y', Z' компоненты импульсивной силы, происходящей от связей, и через $X'+X_1$, $Y'+Y_1$, $Z'+Z_1$ — компоненты импульсивной силы от связей при сравнительном движении.

Уравнениями импульсивного движения будут:

$$\begin{aligned} m(u'-u) &= X+X', \;\; m(u_1-u) = X+X'+X_1,\\ m(v'-v) &= Y+Y', \;\; m(v_1-v) = Y+Y'+Y_1,\\ m(w'-w) &= Z+Z', \;\; m(w_1-w) = Z+Z'+Z_1. \end{aligned}$$

Вычитание дает:

$$m(u_1-u') = X_1, \quad m(v_1-v') = Y_1, \quad m(w_1-w') = Z_1.$$

Умножим последние равенства соответственно на u_1, v_1, w_1, сложим их и результат просуммируем по всем точкам системы. Тогда получим:

$$\sum \{m(u_1-u')u_1+(v_1-v')v_1+(w_1-w')w_1\} = \sum (X_1u_1+Y_1v_1+Z_1w_1).$$

Из самой природы связей следует, что сумма работ всех действующих на систему конечных сил, пропорциональных импульсивным силам X_1, Y_1, Z_1 при всяком перемещении, компоненты которого пропорциональны величинам u_1, v_1, w_1, равна нулю.

Поэтому имеем:

$$\sum (X_1u_1+Y_1v_1+Z_1w_1) = 0$$

или

$$\sum \{m(u_1-u')u_1+(v_1-v')v_1+(w_1-w')w_1\} = 0.$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \sum m(u'^2+v'^2+w'^2) - \sum m(u_1^2+v_1^2+w_1^2) &=\\ = \sum m\{(u'-u_1)^2+(v'-v_1)^2+(w'-w_1)^2\}. \end{aligned}$$

а это показывает, что

$$\frac{1}{2}\sum m(u'^2 + v'^2 + \omega'^2) > \frac{1}{2}\sum m(u_1^2 + v_1^2 + \omega_1^2),$$

и теорема Бертрана доказана.

Теорема легко переносится на случай, когда силы не импульсивны, а действуют непрерывно. В этом случае прирост кинетической энергии в единицу времени становится меньше при введении новых связей, не оказывающих влияния на потенциальную энергию.

Следующую теорему, данную лордом Кельвином и известную под именем теоремы Томсона[1], можно доказать аналогичным способом: *если любое число точек материальной системы внезапно приведено в движение с наперед заданными скоростями, то кинетическая энергия получающегося движения меньше, чем кинетическая энергия всякого другого кинематически возможного движения, которое может выполнять система при тех же скоростях. Излишек равен энергии такого движения, которое, будучи сложено с одним из указанных движений, должно давать другое.*

Лорд Рейлей[2] нашел, что теоремы Томсона и Бертрана можно выразить так, что из них будет следовать, что введение новых связей увеличивает инерцию или момент инерции системы.

Задача 1. Из $2n$ равных стержней составлена цепь $n-1$ ромбов (сторона каждого ромба равна половине длины стержня), так что в вершине каждого ромба имеется шарнир. Концы (каждый в виде полуромба) получающихся при этом «нюрнбергских ножниц» открыты. Свободным концам стержней на одном из концов ножниц сообщены импульсы P перпендикулярно направлению диагонали. Показать, что концы стержней другого конца ножниц имеют в направлении диагонали начальную скорость

$$\frac{3P}{m}\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + n^2\sin^2\alpha},$$

где m масса каждого отдельного стержня, 2α угол между стержнями в их точках пересечения. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1896.)

Упражнения.

1. Пусть решена задача движения точки на поверхности с линейным элементом

$$dS^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

под действием сил, имеющих потенциал $V(u, v)$. Показать, что тогда можно решить задачу движения материальной точки на поверхности с линейным элементом

$$ds^2 = V(u,v)(E\,du^2 - 2F\,du\,dv + G\,dv^2)$$

под действием сил с потенциальной энергией $\dfrac{1}{V(u, v)}$. (Darboux.)

[1] Thomson and Tait, Natural Phylosophy, § 317.

[2] Theory of Sound, т. 1, стр. 100.

2. Пусть для двух систем, имеющих кинетические энергии $\sum a_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ и $\sum b_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$ и соответствующие потенциальные энергии U и V, траектории совпадают, но описываются системами с различными скоростями. Соотношения между координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$ будут, следовательно, для обоих движений одинаковы. Доказать равенства:

$$V = \frac{\alpha U + \beta}{\gamma U + \delta},$$

$$\sum b_{ik} dq_i dq_k = (\gamma U + \delta) \sum a_{ik} dq_i dq_k,$$

где α, β, γ, δ — постоянные. (Painleve.)

3. Материальная точка движется в плоскости под действием сил с потенциальной энергией $V(x, y)$. Пусть все траектории, для которых постоянная энергия равна h, подчинены преобразованию:

$$x = \varphi(X, Y), \qquad y = \psi(X, Y),$$

где φ и ψ — сопряженные функции координат x и y. Доказать, что получающиеся при этом новые кривые представляют траектории точки, движущиеся под действием сил с потенциальной энергией:

$$[V\{\varphi(X, Y), \psi(X, Y)\} - h] \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)^2 \right\},$$

и что постоянная энергия этого движения есть нуль. (Goursat.)

4. Пусть T и V означают кинетическую и потенциальную энергии динамической системы. Доказать, что два выражения:

$$2\frac{d^2V}{dt^2} + \sum m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2),$$

$$\sum \frac{1}{m} \left\{ \left(m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 - \left(m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\}$$

отличаются на величину, не зависящую от ускорений, и что, следовательно, выражение

$$\frac{d^2T}{dt^2} - \frac{1}{2} \sum m(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2)$$

есть максимум, если ускорения принимают значения, соответствующие действительному движению, по сравнению со всеми совместимыми со связями движениями, которые имеют тот же интеграл энергии и равные для одинаковых моментов времени координаты и скорости. (Forster.)

Глава X
Системы Гамильтона и их интегральные инварианты

§ 109. Гамильтонова форма дифференциальных уравнений движения. Мы придадим теперь дифференциальным уравнениям движения консервативной голономной динамической системы новую форму, которая служит основанием почти всех дальнейших динамических теорий.

Пусть система имеет координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и кинетический потенциал L, так что уравнения движения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Мы полагаем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = p_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\dot{p}_r = \frac{\partial L}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

При помощи первой из этих двух систем уравнений мы можем рассматривать величины одного из двух рядов $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n$ как функции величин другого ряда.

Пусть δ означает приращение любой функции переменных q_1, $q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ или $q_1, q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ при бесконечно малых изменениях аргументов. Тогда

$$\delta L = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_r}\delta q_r - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\delta \dot{q}_r\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n}(\dot{p}_r\delta q_r + p_r\delta\dot{q}_r) = \delta\sum_{r=1}^{n}p_r\dot{q}_r + \sum_{r=1}^{n}(\dot{p}_r\delta q_r - \dot{q}_r\delta p_r)$$

или

$$\delta\left\{\sum_{r=1}^{n}p_r\dot{q}_r - L\right\} = \sum_{r=1}^{n}(\dot{q}_r\delta p_r - \dot{p}_r\delta q_r).$$

Следовательно, обозначая через H величину $\sum\limits_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r - L$, рассматриваемую как функцию переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$, будем иметь:

$$\delta H = \sum_{r=1}^{n} (\dot{q}_r \delta p_r - \dot{p}_r \delta q_r) \tag{1}$$

или

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Движение всякой динамической системы может быть определено дифференциальными уравнениями вида (2), *называемыми каноническими или уравнениями Гамильтона.* Зависимыми переменными являются величины $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, и система состоит из $2n$ уравнений первого порядка, в то время как система Лагранжа состоит из n уравнений второго порядка.

Эти уравнения получены Гамильтоном в 1834 г.[1] Его результаты были частично получены еще ранее французскими математиками. Пуассон[2] уже в 1809 г. сделал первый шаг в этом направлении, он ввел в рассмотрение величину:

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\dot{q}_r - T,$$

представил ее как функцию переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и получил, таким образом, первую половину системы Гамильтона. Лагранж[3] в 1810 г. ввел специальную систему уравнений (для вариации элементов орбиты) в форме Гамильтона, в которой роль функции H играет функция возмущений. Кроме этого, к этой форме уравнений привела и теория нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Ибо, как это показали Пфафф[4] в 1814 г. и Коши[5] (в дополнение к более ранним работам Лагранжа и Монжа) в 1819 г., дифференциальные уравнения характеристик уравнения в частных производных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

где

$$p_s = \frac{\partial z}{\partial x_s},$$

имеют вид:

$$\frac{dx_1}{\dfrac{\partial f}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\dfrac{\partial f}{\partial p_2}} = \ldots = \frac{dx_n}{\dfrac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}} = \frac{dp_2}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\dfrac{\partial f}{\partial x_n}}.$$

[1] Brit. Ass. Rep., стр. 513, 1834: Phil. Trans., стр. 95, 1835.
[2] Journal de l'Ecole polyt., т. 8, тетр. 15, стр. 226, 1809.
[3] Mém. de l'Inst., стр. 343, 1809.
[4] Berl. Abhandl., стр. 76, 1814–1815.
[5] Bull. Soc.philomath., стр. 10, 1819.

Исследования Гамильтона были распространены Остроградским[6] (1848–1850) и Донкином[7] (1854) на те случаи, когда кинетический потенциал содержит явно время.

Уравнение (1) иногда называют *гамильтоновым уравнением возможной работы*. Это уравнение может быть записано более симметрично в форме:

$$\delta\left(\sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r - H\, dt\right) = d\left(\sum_{r=1}^{n} p_r \delta q_r - H\delta t\right),$$

в которой оно сразу устанавливает важность дифференциальной формы

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r - H\, dt$$

в связи с дифференциальными уравнениями динамики (§ **137**).

Если кинетический потенциал L не содержит явно времени, то, очевидно, то же самое будет справедливо и по отношению к функции Гамильтона H; в этом случае система допускает интеграл энергии

$$\sum_{r=1}^{n} \dot{q}_r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - L = h,$$

где h — некоторая постоянная. Вместо этого уравнения мы можем писать:

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = h.$$

Это уравнение представляет интеграл энергии динамической системы, для которой функция Гамильтона H не содержит явно времени. Вместе с тем из § 41 вытекает, что для натуральных систем H есть сумма кинетической и потенциальной энергий.

Задача 1. Показать, что уравнения движения математического маятника могут быть представлены в виде:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где

$$H = \frac{1}{2}p^2 - gl^{-1}\cos q$$

и где q означает угол между маятником и вертикалью в момент времени t, l — длина маятника, и масса маятника принята равной единице.

[6]Mélanges de l'Acad.de St.-Pét., октябрь, 1848; Mém. de l'Acad. de St.-Pét., т. 6, стр. 385, 1850.

[7]Phil. Trans., стр. 71, 1854.

§ 110. Дифференциальные уравнения вариационных задач. В предыдущей главе мы видели, что вся теория динамики может быть построена на стационарном характере определенного вида интегралов, а именно интегралов, которые встречаются в принципе Гамильтона и в принципе наименьшего действия. Аналогичным образом дифференциальные уравнения большинства задач физики могут быть получены из задач вариационного исчисления.

Так, например, задача определения термического равновесия в изотропном проводнике, поверхность которого имеет в каждой точке заданную температуру, может быть сформулирована следующим образом: среди всех функций V, принимающих на поверхности заданное значение, определить такие, для которых интеграл

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right\} dx\,dy\,dz,$$

распространенный на объем всего проводника, имеет минимум.

Мы сейчас покажем, что *все дифференциальные уравнения вариационных задач с одной независимой переменной могут быть приведены к форме Гамильтона*[1].

Для простоты ограничимся случаем двух зависимых переменных. Доказательство остается, однако, справедливым и при любом числе зависимых переменных.

Пусть

$$L(t, y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots, \overset{(m)}{y}, z, \dot{z}, \ddot{z}, \ldots, \overset{(n)}{z})$$

есть функция независимой переменной t, зависимых переменных y, z и их производных до порядков m и n.

Условия стационарности интеграла

$$\int L(t, y, \dot{y}, \ldots, \overset{(m)}{y}, z, \dot{z}, \ldots, \overset{(n)}{z})\,dt$$

согласно обычным методам вариационного исчисления могут быть записаны в виде:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}}\right),$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{z}}\right).$$

[1] Ср. *Остроградский*, Mém. de l'Acad. de St.-Pét., т. 6, стр. 385, 1850.

Полагаем теперь:

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{y}}\right) + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}}\right)$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dddot{y}}\right) - \cdots + (-1)^{m-2}\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}}\right)$$

. . . .

$$p_m = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}}$$

$$p_{m+1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{z}}\right) + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{z}}\right)$$

$$p_{m+2} = \qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial \ddot{z}} - \cdots + (-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}\left(\frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{z}}\right)$$

. . . .

$$p_{m+n} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{z}}$$

и

$$q_1 = y, \quad q_2 = \dot{y}, \ldots, q_m = \overset{(m-1)}{y},$$

$$q_{m+1} = z, \quad q_{m+2} = \dot{z}, \ldots, q_{m+n} = \overset{(n-1)}{z}.$$

Тогда, если представим величину

$$H = -L + p_1 q_2 + p_2 q_3 + \cdots + p_{m-1} q_m + p_m \overset{(m)}{y} + p_{m+1} q_{m+2} + \cdots$$
$$\cdots + p_{m+n-1} q_{m+n} + p_{m+n} \overset{(n)}{z},$$

где H предполагается выраженной в функции от $t, q_1, \ldots, q_{m-n}$, $p_1, \ldots, p_{m-n}$, ибо, исключив из нее $\overset{(m)}{y}$ и $\overset{(n)}{z}$ при помощи уравнений $p_m - \dfrac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}}$; $p_{m+n} - \dfrac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{z}}$, мы представим ее как функцию переменных $q_1, q_2, \ldots, q_{m+n}, p_1, p_2, \ldots, p_{m+n}$, и если обозначим через δ приращение при бесконечно малых изменениях аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_{m+n}, p_1, p_2, \ldots, p_{m+n}$, то будем иметь:

$$\delta H = -\sum_{r=0}^{m-1} \frac{\partial L}{\partial \overset{(r)}{y}} \delta q_{r+1} - \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}} \delta \overset{(m)}{y} - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\partial L}{\partial \overset{(r)}{z}} \delta q_{m+r+1} - \frac{\partial L}{\partial \overset{(n)}{z}} \delta \overset{(n)}{z} +$$
$$+ \sum_{r=1}^{m-1} p_r \delta q_{r+1} + p_m \delta \overset{(m)}{y} + \sum_{r=1}^{m-1} q_{r+1} \delta p_r + \overset{(m)}{y} \delta p_m +$$
$$+ \sum_{r=m+1}^{m+n-1} p_r \delta q_{r+1} + p_{m+n} \delta \overset{(n)}{z} + \sum_{r=m+1}^{m+n-1} q_{r+1} \delta p_r + \overset{(n)}{z} \delta p_{m+n}$$

При помощи уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \dot{p}_1, \ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{p}_2 + p_1, \ \frac{\partial L}{\partial \ddot{y}} = \dot{p}_3 + p_2, \ \ldots, \ \frac{\partial L}{\partial \overset{(m)}{y}} = p_m$$

выражению δH можно придать вид:

$$\delta H = -\sum_{r=1}^{m+n} \dot{p}_r \delta q_r + \sum_{r=1}^{m+n} \dot{q}_r \delta p_r.$$

Если, следовательно, H представлена как функция переменных $t, p_1, p_2, \ldots, p_{m+n}, q_1, q_2, \ldots, q_{m+n}$, то будем иметь:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m+n),$$

и мы получаем, таким образом, *дифференциальные уравнения задачи в форме Гамильтона.*

Системы дифференциальных уравнений, возникающие из вариационных задач, часто называются *изопериметрическими системами.*

§ 111. Интегральные инварианты. Специфические свойства дифференциальных уравнений Гамильтона самым тесным образом связаны со свойствами определенных выражений, названных Пуанкаре[1] *интегральными инвариантами.*

Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} = X_n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ суть заданные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Мы можем их рассматривать как уравнения движения некоторой точки с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в пространстве n измерений.

[1] Acta Math., т. 13, 1890.

Многообразие такого рода точек, занимающих в начальный момент некоторую p-мерную область ζ_0, будет и для всякого последующего момента времени занимать некоторую p-мерную область ζ. Распространенный на область ζ p-кратный интеграл называется *интегральным инвариантом*, если он сохраняет одинаковые значения для всякого момента времени t. Число p называется *порядком* интегрального инварианта.

Так, например, при движении несжимаемой жидкости интеграл для объема жидкости, распространенный на все ее частицы, заполняющие в начальный момент определенную область, будет интегральным инвариантом, ибо состоящий из этих частиц объем жидкости не изменяется со временем.

Задача 1. Определить движение по инерции материальной точки на плоскости. Пусть x, y — координаты этой точки, а u и v — компоненты ее скорости. Уравнения движения могут быть записаны в виде:

$$\dot{x} = u, \quad \dot{y} = v, \quad \dot{u} = 0, \quad \dot{v} = 0.$$

Интеграл

$$I = \int (\delta x - t\delta u),$$

распространенный на отрезок кривой четырехмерного пространства x, y, u, v, представляющий собой геометрическое место всех точек, занимавших в начальный момент заданный отрезок кривой, в момент времени t будет интегральным инвариантом. В самом деле, решение динамической задачи дается уравнениями:

$$u = a, \quad v = b, \quad x = at - c, \quad y = bt - d,$$

где a, b, c, d — постоянные интегрирования. Поэтому имеем:

$$I = \int (t\delta a + \delta c - t\delta a) = \int \delta c,$$

т. е. I не зависит от t.

Задача 2. Показать, что

$$\int (u\delta x - x\delta u)$$

есть интегральный инвариант для плоского движения материальной точки, имеющей координаты x, y, компоненты скорости u, v и притягивающейся началом координат с силой, прямо пропорциональной расстоянию.

§ 112. Уравнения в вариациях. Интегральные инварианты заданной системы дифференциальных уравнений дают интегралы некоторой другой системы дифференциальных уравнений, выводящейся из первой.

Пусть дана система:

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \ldots x_n, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_1 + \delta x_1, x_2 + \delta x_2, \ldots, x_n + \delta x_n$ представляют собой два бесконечно близких решения этой системы. Величины $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ предполагаются, следовательно, бесконечно малыми.

Тогда имеем:

$$\frac{d}{dt}(x_r+\delta x_r)=X_r(x_1+\delta x_1, x_2+\delta x_2, \ldots x_n+\delta x_n, t)\ (r=1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt}\delta x_r = \frac{\partial X_r}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial X_r}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial X_r}{\partial x_n}\delta x_n \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти последние n уравнений совместно с первоначальными уравнениями могут быть рассматриваемы как система из $2n$ дифференциальных уравнений с зависимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n, \delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$.

Если

$$\int \sum_r F_r(x_1, x_2 \ldots, x_n)\, \delta x_r$$

есть интегральный инвариант первоначальной системы, то производная по времени от величины

$$\sum_r F_r(x_1, x_2 \ldots, x_n)\, \delta x_r$$

в силу дифференциальных уравнений расширенной системы должна равняться нулю, так как путь интегрирования совершенно произволен. Следовательно,

$$\sum_r F_r(x_1, x_2 \ldots, x_n)\delta x_r = \mathrm{const}$$

есть интеграл расширенной системы. *Интегральному инварианту первого порядка первоначальной системы соответствует интеграл расширенной системы, и наоборот.*

Если известно частное решение $x_1, x_2, \ldots, x_n$ первоначальной системы, то мы можем ввести определяемые им значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в дифференциальные уравнения расширенной системы. Тогда мы получим n линейных дифференциальных уравнений для определения величин $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, т. е. для определения того решения первоначальной системы, которое будет соседним с известным частным решением. Эти n линейных уравнений называются уравнениями в вариациях.

§ 113. Интегральные инварианты первого порядка. Установим теперь условие, которому должны удовлетворять функции M_1, $M_2, \ldots, M_n$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, для того чтобы выражение

$$\int (M_1\delta x_1 + M_2\delta x_2 + \cdots - M_n\delta x_n)$$

было интегральным инвариантом первого порядка для системы уравнений:

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \ldots x_n, t) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Для этого необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dt}(M_1\delta x_1 + M_2\delta x_2 + \cdots + M_n\delta x_n) = 0,$$

где производные от $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ должны быть определены из введенной в предыдущем параграфе расширенной системы дифференциальных уравнений.

Поэтому

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{dM_r}{dt}\delta x_r + M_r\frac{d\delta x_r}{dt}\right) = 0$$

или

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial M_r}{\partial t}\delta x_r + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial M_r}{\partial x_k}X_k\delta x_r + M_r\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial X_r}{\partial x_k}\delta x_k\right) = 0.$$

Так как величины $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ независимы, то необходимо, чтобы коэффициенты при δx_r в этом уравнении обращались в нуль. Следовательно, *условиями для интегральной инвариантности* будут:

$$\frac{\partial M_r}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial M_r}{\partial x_k}X_k + \sum_{k=1}^{n}M_k\frac{\partial X_k}{\partial x_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Добавление 1. Если известен один интеграл дифференциальных уравнений, например

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \text{const},$$

то один интегральный инвариант может быть найден непосредственно. В самом деле, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial F}{\partial x_r}\right)X_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_k}X_k\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right) = 0.$$

Поэтому *выражение*

$$\int \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_r} \delta x_r$$

есть *интегральный инвариант.*

Добавление 2. Справедливо и обратное. Если $\int \sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\partial U}{\partial x_r} \delta x_r$, *где* U — *данная функция переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, *есть интегральный инвариант некоторой системы дифференциальных уравнений, то для этой системы может быть найден один интеграл.* В самом деле, имеем:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x_r}\right) + \sum_{k=1}^{n} X_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial U}{\partial x_r}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_r} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} X_k\right),$$

следовательно, выражение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_k} X_k,$$

являющееся известной функцией переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, не зависит от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим эту известную величину через $\varphi(t)$. Тогда имеем:

$$\frac{dU}{dt} = \varphi(t)$$

или

$$U - \int \varphi(t)\,dt = \mathrm{const},$$

а это и есть интеграл системы.

§ 114. Относительные интегральные инварианты. До сих пор мы рассматривали только такие интегральные инварианты, которые обладают свойством инвариантности независимо от того или иного частного выбора области начальных значений, по которой производится интегрирование. Такие интегральные инварианты называются иногда *абсолютными.* Теперь мы переходим к таким интегралам, которые обладают свойством инвариантности только в тех случаях, когда область интегрирования, выражаясь языком n-мерной геометрии, образует *замкнутое* многообразие. Такие интегралы носят название *относительных* интегральных инвариантов.

Теория относительных интегральных инвариантов может быть сведена к теории абсолютных интегральных инвариантов следующим образом.

Пусть

$$\int (M_1 \delta x_1 + M_2 \delta x_2 + \cdots + M_n \delta x_n)$$

есть относительный интегральный инвариант системы уравнений:

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $M_1, M_2, \ldots, M_n, X_1, X_2, \ldots, X_n$ — некоторые функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Этот интеграл будет, следовательно, инвариантом относительно t, если интегрирование распространяется на некоторую замкнутую кривую пространства $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющую собой геометрическое место положений точек, лежавших в начальный момент на определенной замкнутой кривой, в момент времени t.

Согласно теореме Стокса этот интеграл может быть преобразован к виду:

$$\iint \sum_{j,i} \left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j} - \frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right) \delta x_i \delta x_j,$$

где теперь уже интегрирование распространено на некоторую поверхность, ограниченную нашей замкнутой кривой. Эта поверхность может быть рассматриваема как геометрическое место положений точек в момент времени t, которые в начальный момент лежали на определенной поверхности, ограниченной первоначальным положением кривой. Так как эта поверхность не замкнута, то интеграл есть *абсолютный* интегральный инвариант второго порядка для нашей системы уравнений.

Аналогично, обобщая теорему Стокса, можно показать, что всякий относительный интегральный инвариант p-го порядка эквивалентен некоторому абсолютному интегральному инварианту $(p+1)$-го порядка.

§ 115. Относительный интегральный инвариант системы Гамильтона. Мы переходим теперь к случаю, когда система дифференциальных уравнений есть система Гамильтона, т. е имеет вид:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где H — известная функция величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$.

Пусть $\Omega - \int L\,dt$ — интеграл Гамильтона и, следовательно, L — кинетический потенциал. Пусть, далее, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ означают начальные значения переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, а δ — вариацию, соответствующую переходу от какой-нибудь точки одной траектории к одновременной точке смежной траектории. Тогда согласно § 99 имеем:

$$\delta\Omega = \sum_{r-1}^{n} p_r \delta q_r - \sum_{r-1}^{n} \beta_r \delta\alpha_r.$$

Пусть C_0 есть произвольная замкнутая кривая $2n$-мерного пространства, координаты которого суть $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, а C — ее положение в момент времени t. Интегрирование последнего уравнения по системе траекторий, соединяющих C_0 и C, даст:

$$\int\limits_C \sum_{r=1}^n p_r \delta q_r = \int\limits_{C_0} \sum_{r=1}^n \beta_r \delta \alpha_r.$$

Это уравнение показывает, что *величина* $\int \sum\limits_{r=1}^n p_r \delta q_r$ *есть относительный интегральный инвариант для всякой системы дифференциальных уравнений типа Гамильтона.*

§ 116. О системах с относительным интегральным инвариантом $\int \sum p_r \delta q_r$. Изучим теперь обратную задачу, подсказанную результатом предыдущего параграфа, а именно: определить все возможные системы дифференциальных уравнений, обладающие относительным интегральным инвариантом $\int \sum\limits_{r=1}^n p_r \delta q_r$, где $q_1, q_2, \ldots, q_n$ означают одну половину, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — другую половину зависимых переменных.

Пусть предложена система дифференциальных уравнений $2n$-го порядка, в которой зависимые переменные могут быть разделены на два таких ряда $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что величина

$$\int (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_n \delta q_n)$$

есть относительный интегральный инвариант этой системы, а следовательно, по теореме Стокса величина

$$\iint (\delta p_1 \delta q_1 + \delta p_2 \delta q_2 + \cdots + \delta p_n \delta q_n)$$

есть ее абсолютный интегральный инвариант.

Пусть эта система имеет вид:

$$\frac{dq_r}{dt} = Q_r, \quad \frac{dp_r}{dt} = P_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ означают известные функции переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$. Так как область интегрирования для абсолютного интегрального инварианта имеет два измерения, то мы можем предполагать, что каждая точка этой области определяется двумя величинами λ и μ, которые не зависят от времени и характеризуют траекторию, выходящую из этой точки. Тогда абсолютный интегральный инвариант может быть представлен в виде:

$$\iint \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(\lambda, \mu)} \right) d\lambda \, d\mu,$$

и так как λ и μ не зависят от времени, то

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(q_i, p_i)}{\partial(\lambda, \mu)} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial(Q_i, p_i)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{\partial(q_i, P_i)}{\partial(\lambda, \mu)}\right\} = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial(q_k, p_i)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial(p_k, p_i)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial(q_i, q_k)}{\partial(\lambda, \mu)} + \frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial(q_i, p_k)}{\partial(\lambda, \mu)}\right\} = 0.$$

Но вследствие произвольности выбора области интегрирования и величин λ, μ все коэффициенты при величинах $\frac{\partial q_k}{\partial \lambda}\frac{\partial p_i}{\partial \mu}$, $\frac{\partial q_i}{\partial \lambda}\frac{\partial q_k}{\partial \mu}$ и $\frac{\partial p_k}{\partial \lambda}\frac{\partial p_i}{\partial \mu}$ должны равняться нулю. Таким образом, имеем:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} + \frac{\partial P_k}{\partial p_i} &= 0,\\ \frac{\partial P_i}{\partial q_k} - \frac{\partial P_k}{\partial q_i} &= 0,\\ \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i} &= 0\end{aligned}\right\}\qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти уравнения показывают, что должна существовать некоторая функция

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t)$$

такая, что

$$Q_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad P_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, получаем следующий результат: *Если система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dq_r}{dt} = Q_r, \quad \frac{dp_r}{dt} = P_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет относительный интегральный инвариант, то она необходимо имеет форму Гамильтона:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Этот результат дает теорему, обратную доказанной в предыдущем параграфе.

Добавление. Если

$$\int (p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \dots + p_n\delta q_n)$$

есть относительный интегральный инвариант системы уравнений:

$$\frac{dq_r}{dt} = Q_r, \quad \frac{dp_r}{dt} = P_r \qquad (r = 1, 2, \dots, k),$$

где $k > n$, то аналогичным образом можно показать, что уравнения для $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$ образуют систему Гамильтона:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

где H есть функция только величин $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t$, не зависящая от $q_{n-1}, q_{n+2}, \dots, q_k, p_{n+1}, p_{n+2}, \dots, p_k$.

§ 117. Интегральные инварианты как функции интегралов. Если решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \dots x_n, t) \qquad (r = 1, 2, \dots, n)$$

известно, то легко составить ее относительные и абсолютные интегральные инварианты.

В самом деле, пусть

$$\begin{gathered} y_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = c_1, \\ y_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = c_n \end{gathered}$$

(где $c_1, c_2, \dots, c_n$ постоянные) суть n интегралов системы. Тогда, очевидно, абсолютные интегральные инварианты первого порядка задаются выражением:

$$\int (N_1\,\delta y_1 + N_2\,\delta y_2 + \dots + N_n\,\delta y_n),$$

где $N_1, N_2, \dots, N_n$ суть произвольные функции переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$, не зависящие явно от времени. Относительные интегральные инварианты задаются выражением:

$$\int (N_1\,\delta y_1 + N_2\,\delta y_2 + \dots - N_n\,\delta y_n + \delta F),$$

где F произвольная функция переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, t$, так как член $\int \delta F$ для всякого замкнутого контура равен нулю.

Отсюда следует, что *всякая система дифференциальных уравнений имеет бесчисленное множество относительных и абсолютных интегральных инвариантов первого порядка.*

§ 118. Теорема Ли и Кёнигса. Предыдущие результаты дают возможность доказать теорему Ли[1] и Кёнигса[2] о приведении системы обыкновенных дифференциальных уравнений к форме Гамильтона.

Пусть
$$\frac{dx_r}{dt} = X_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k)$$
есть данная система дифференциальных уравнений, а
$$\int (\xi_1 \delta x_1 + \xi_2 \delta x_2 + \cdots + \xi_k \delta x_k)$$
(где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ — данные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$) — один из ее абсолютных или относительных интегральных инвариантов первого порядка. В предыдущем параграфе мы видели, что существует бесчисленное множество такого рода интегральных инвариантов.

Допустим, что дифференциальная форма
$$\xi_1 \delta x_1 + \xi_2 \delta x_2 + \cdots + \xi_k \delta x_k$$
приведена к каноническому виду
$$p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_n \delta q_n - \delta \Omega,$$
где $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, \Omega$ суть независимые функции величин $x_1, x_2, \ldots, x_k$, причем $n \leqslant k$; при этом Ω может быть равной нулю[3]. Пусть, далее, $u_1, u_2, \ldots, u_{k-2n}$ есть вторая система функций от $x_1, x_2, \ldots, x_k$, так что вместе с $p_1, p_2, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$ она образует k независимых функций от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Допустим, что система дифференциальных уравнений введением этих k новых величин в качестве независимых переменных приведена к виду:
$$\frac{dq_r}{dt} = Q_r, \quad \frac{dp_r}{dt} = P_r \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\frac{du_s}{dt} = U_s \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, k - 2n),$$
где $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, U_1, U_2, \ldots, U_{k-2n}$ суть некоторые функции новых переменных.

Выражение
$$\int (p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 + \cdots + p_n \delta q_n)$$
будет интегральным инвариантом для новой системы (абсолютным или относительным), так как при преобразованиях, подобных тем, которые

[1] Archiv for Math. og Natur., т. 2, стр. 10, 1877.

[2] Comptes Rendus. т. 121, стр. 875, 1895

[3] Доказательство возможности такого приведения (требующего в общем случае интегрирования некоторого числа обыкновенных дифференциальных уравнений) можно найти в любом руководстве по проблеме Пфаффа.

мы произвели, свойство инвариантности не нарушается. Отсюда следует (§ 116), что первые $2n$ уравнений имеют вид:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где H — некоторая функция, зависящая только от величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $p_1, p_2, \ldots, p_n, t$. Данная система дифференциальных уравнений привелась, таким образом, к системе $2n$-го порядка Гамильтона и к $k - 2n$ дополнительным уравнениям:

$$\frac{du_s}{dt} = U_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, k - 2n).$$

§ 119. Последний множитель. Прежде чем перейти к рассмотрению интегральных инвариантов более высоких порядков, введем понятие *последнего множителя* системы дифференциальных уравнений, данное Якоби[1] в 1884 г.

Пусть предложена система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X},$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ суть некоторые функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$. Предположим, что известны $n - 1$ интегралов этой системы, и пусть эти интегралы будут:

$$f_r(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n - 1).$$

При помощи этих интегралов мы представим величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ как функции от x_n и x. Тогда еще останется проинтегрировать лишь одно уравнение первого порядка

$$\frac{dx_n}{X'_n} = \frac{dx}{X'},$$

где штрихи означают, что в функциях X_n и X величины $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ заменены их выражениями через x_n и x.

Покажем, что *интеграл этого уравнения есть*

$$\int \frac{M'}{\Delta'} \left(X'\, dx_n - X'_n\, dx \right) = \mathrm{const},$$

где M означает одно из решений уравнения в частных производных

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(MX_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(MX_2) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}(MX_n) + \frac{\partial (MX)}{\partial x} = 0,$$

[1] Journ. f. Math., т. 27, стр. 199; т. 29, стр. 213, 333.

а Δ — *якобиан*

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}.$$

Функция M называется последним множителем системы дифференциальных уравнений.

Для доказательства этой теоремы воспользуемся следующей леммой:

Если система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

преобразованием переменных приведена к другой системе:

$$\frac{dy_r}{dt} = Y_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial X_r}{\partial x_r} = \frac{1}{D} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial (DY_r)}{\partial y_r},$$

где

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}.$$

Доказательство этой леммы может быть проведено следующим образом Имеем:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial X_r}{\partial x_r} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_r} \left(\sum_{r=1}^{n} Y_k \frac{\partial x_r}{\partial y_r} \right) = \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \frac{\partial}{\partial y_s} \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k \frac{\partial x_r}{\partial y_k} \right) =$$
$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \left(Y_k \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_s \partial y_k} + \frac{\partial Y_k}{\partial y_s} \frac{\partial x_r}{\partial y_k} \right).$$

В последнем выражении коэффициент при $\dfrac{\partial Y_k}{\partial y_s}$ равен $\sum\limits_{r=1}^{n} \dfrac{\partial y_s}{\partial x_r} \dfrac{\partial x_r}{\partial y_k}$; он равен единице или нулю в зависимости от того, k равно или не равно s. Далее, $\dfrac{\partial y_s}{\partial x_r} = \dfrac{A_{rs}}{D}$, где A_{rs} означает алгебраическое дополнение определителя D, соответствующее элементу $\dfrac{\partial x_r}{\partial y_s}$. Поэтому коэффициент при Y_k в вышеуказанном выражении, равный

$$\sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \frac{\partial^2 x_r}{\partial y_s \partial y_k},$$

может быть представлен в виде:

$$\frac{1}{D}\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}A_{rs}\frac{\partial^2 x_r}{\partial y_s \partial y_k} \text{ или } \frac{1}{D}\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial\left(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, \dfrac{\partial x_r}{\partial y_k}, x_{r+1}, \ldots, x_n\right)}{\partial(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

или

$$\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial y_k}.$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial X_r}{\partial x_r} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial Y_k}{\partial y_k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{Y_k}{D}\frac{\partial D}{\partial y_k} = \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial(DY_k)}{\partial y_k},$$

что и доказывает лемму.

Положим теперь в первоначальной задаче

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X} = dt$$

и перейдем от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$, к переменным $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, x_n, x$. Тогда в силу доказанной леммы будем иметь:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} = \Delta\left\{\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{X_n'}{\Delta'}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X'}{\Delta'}\right)\right\}.$$

Поэтому величина M, являющаяся решением уравнения

$$\frac{1}{M}\frac{dM}{dt} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0,$$

удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{\Delta M}\frac{dM}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{X_n'}{\Delta'}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X'}{\Delta'}\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{X_n'M'}{\Delta'}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X'M'}{\Delta'}\right) = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что величина

$$\frac{M'}{\Delta'}\left(X'dx_n - X_n'dx\right)$$

есть полный дифференциал некоторой функции от x_n и x, чем и доказывается теорема о последнем множителе.

Гидродинамическое истолкование последнего множителя по Больцману и Лярмору. (Larmor.)

Теорема о последнем множителе может быть также получена и при помощи физических рассуждений. Для упрощения ограничимся случаем трех переменных, так что система дифференциальных уравнений принимает вид:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

где u, v, w некоторые функции от x, y, z, и последний множитель удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}(Mu) - \frac{\partial}{\partial y}(Mv) + \frac{\partial}{\partial z}(Mw) = 0.$$

Это уравнение показывает, что в гидродинамической задаче стационарного движения жидкости, имеющей в точке (x, y, z) плотность M и компоненты скорости u, v, w, выполняется уравнение неразрывности.

Пусть

$$\varphi(x, y, z) = C$$

есть интеграл дифференциальных уравнений. Тогда жидкость течет между поверхностями семейства, определяемого этим уравнением. Следовательно, достаточно рассматривать поток в бесконечно тонком двухмерном слое, ограниченном поверхностями C и $C + \delta C$. Поток через промежуток между двумя произвольными точками P и Q поверхности C должен быть равным для всех кривых, соединяющих эти точки. Так как сумма потоков через две дуги PR и RQ в точности равна потоку через дугу PQ, то поток через произвольную дугу PQ может быть представлен в виде $f(Q) - f(P)$. Следовательно, если ds означает элемент дуги, τ — переменную толщину слоя, т. е.

$$\tau = \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \delta C,$$

а ξ нормальный к ds компонент скорости, то

$$\int\limits_P^Q M\xi\tau\, ds = f(Q) - f(P)$$

и, следовательно, $M\xi\tau\, ds$ есть полный дифференциал некоторой функции положения. Легко видеть, что это выражение может быть записано в виде $\dfrac{M\delta C(v\,dx - u\,dy)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}$. Вследствие этого

$$\frac{M(v\,dx - u\,dy)}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}$$

есть полный дифференциал. Это и есть теорема о последнем множителе для рассматриваемого случая.

Для $\xi\, ds$ легко находим значение:

$$\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix}.$$

Следовательно, теорема о последнем множителе показывает, что $M(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2)^{-\frac{1}{2}}$ есть интегрирующий множитель уравнения:

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u & v & w \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix} = 0.$$

Это, как заметил Аппель (Comptes Rendus, т. 155, стр. 878, 1912), есть симметричная форма теоремы о последнем множителе.

§ 120. Нахождение интеграла при помощи двух множителей. Допустим, что найдены два различных решения M и N уравнения в частных производных, определяющего последний множитель, так что

$$\left(X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial}{\partial x_n} + X\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln M + \\ + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

и

$$\left(X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial}{\partial x_n} + X\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln N + \\ + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0.$$

Вычитание этих уравнений дает:

$$\left(X_1\frac{\partial}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial}{\partial x_n} + X\frac{\partial}{\partial x}\right)\ln\frac{M}{N} = 0.$$

Но в этом заключается условие того, что

$$\ln\frac{M}{N} = \mathrm{const}$$

есть интеграл системы

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X}.$$

Имеем, следовательно, теорему: *Частное от деления двух последних множителей некоторой системы дифференциальных уравнений есть интеграл этой системы.*

Читатель, знакомый с теорией бесконечно малых преобразований, легко докажет, что если уравнение

$$X_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + X_n\frac{\partial f}{\partial x_n} + X\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

допускает бесконечно малые преобразования:

$$\xi_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \xi_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n} + \xi_i\frac{\partial f}{\partial x} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то величина, обратная детерминанту

$$\begin{vmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n & X \\ \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} & \xi_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} & \xi_n \end{vmatrix},$$

есть последний множитель.

§ 121. Приложение теории последнего множителя к системам Гамильтона. Использование известного интеграла. Если рассматриваемая система дифференциальных уравнений есть система Гамильтона, то, очевидно, $\sum\limits_r \dfrac{\partial x_r}{\partial x_r} = 0$ и, следовательно, $M = 1$ есть решение уравнения, определяющего последний множитель. Таким образом, *единица есть последний множитель системы Гамильтона.*

Этот результат приводит к теореме, что для консервативных голономных систем с двумя степенями свободы может быть выполнено полное интегрирование уравнений движения, если кроме интеграла энергии известен еще один интеграл.

Пусть, в самом деле, для системы

$$\frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{dp_1}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_1}} = \frac{dp_2}{-\dfrac{\partial H}{\partial q_2}} = dt,$$

кроме интеграла энергии $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h$, известен еще один интеграл $V(q_1, q_2, p_1, p_2) = c$. Согласно теореме о последнем множителе выражение

$$\int \frac{1}{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(p_1, p_2)}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial p_2}\, dq_1 - \frac{\partial H}{\partial p_1}\, dq_2 \right\} = \text{const}$$

есть также интеграл. При этом в подынтегральном выражении величины p_1 и p_2 должны быть заменены их выражениями через q_1 и q_2, получаемыми из известных интегралов H и V.

Но если мы предположим, что результат решения уравнений $H = h$ и $V = c$ относительно p_1 и p_2 дает:

$$p_1 = f_1(q_1, q_2, h, c), \qquad p_2 = f_2(q_1, q_2, h, c),$$

то тогда должны тождественно выполняться равенства:

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial c} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial c} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial c} + \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial c} = 1$$

и поэтому

$$\frac{\partial f_1}{\partial c} = \frac{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(p_1, p_2)}}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial c} = \frac{-\dfrac{\partial H}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(p_1, p_2)}}.$$

Теорема о последнем множителе равносильна, следовательно, утверждению, что

$$\int \left(\frac{\partial f_1}{\partial c} dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial c} dq_2 \right)$$

есть интеграл уравнений движения.

Этот результат непосредственно приводит к вышеназванной теореме, которую мы сформулируем следующим образом[1]: *Если динамическая система, определяемая уравнениями:*

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

имеет, кроме интеграла энергии $H(q_1, q_2, p_1, p_2) = h$, еще интеграл $V(q_1, q_2, p_1, p_2) = c$, не содержащий явно времени, то выражение $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2$, в котором p_1 и p_2 должны быть заменены их выражениями через q_1 и q_2 из интегралов, есть полный дифференциал некоторой функции $\vartheta(q_1, q_2, h, c)$, и двумя остальными интегралами системы будут:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial c} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial h} = t + \text{const}.$$

Эта теорема показывает, что если выбрать какое-нибудь семейство из ∞^1 траекторий (например траекторий, выходящих из точки $q_1 = \alpha_1$, $q_2 = \alpha_2$), обладающих одинаковой энергией, так что каждой точке (q_1, q_2) соответствуют определенные значения величин p_1 и p_2 (именно те значения p_1 и p_2, которые соответствуют принадлежащей семейству траектории, проходящей через точку (q_1, q_2)), то значение интеграла $\int(p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2)$, распространенного на любую кривую, соединяющую две определенные точки (q_{10}, q_{20}) и (q_{11}, q_{21}), не зависит от пути интегрирования.

Для окончания доказательства, дифференцируя уравнения $H = h$, $V = c$, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial H}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{\partial f_1}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = 0.$$

Из них следует, что

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = \frac{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(q_1, p_1)}}{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(p_1, p_2)}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial q_1} = \frac{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(p_2, q_2)}}{\dfrac{\partial(V, H)}{\partial(p_1, p_2)}},$$

[1]Эта теорема есть простое применение известного метода интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. Уравнения динамической системы суть уравнения характеристик уравнения с частными производными. Как теорема динамики она была высказана сначала для частного случая (движения только одной материальной точки) Якоби (Comptes Rendus, т. 3, стр. 59, 1836), а в общей формулировке — Пуассоном (Journ. de Math., т. 2, стр. 317, 1837) и Лиувиллем (Journ. de Math., т. 5, стр. 351, 1840).

Но так как $V = c$ есть интеграл, то имеем:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial V}{\partial p_1}\dot{p}_1 + \frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial p_2}\dot{p}_2 = 0$$

или

$$\frac{\partial(V,\, H)}{\partial(q_1,\, p_1)} + \frac{\partial(V,\, H)}{\partial(q_2,\, p_2)} = 0$$

и поэтому

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \frac{\partial f_1}{\partial q_2} = 0.$$

Это уравнение показывает, что $f_1\,dq_1 + f_2\,dq_2$ есть полный дифференциал некоторой функции $\vartheta(q_1,\, q_2,\, h,\, c)$, и результат, полученный выше из теории последнего множителя, показывает, что $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial c} = \mathrm{const}$ есть интеграл.

Кроме того,

$$dt = \frac{dq_1}{\dfrac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dq_2}{\dfrac{\partial H}{\partial p_2}}$$

и поэтому

$$dt = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial p_2}dq_1 - \dfrac{\partial V}{\partial p_1}dq_2}{\dfrac{\partial(V,\, H)}{\partial(p_2,\, p_1)}}.$$

Вычисляя величины $\dfrac{\partial f_1}{\partial h}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial h}$ по тому же способу, что и величины $\dfrac{\partial f_1}{\partial c}$ и $\dfrac{\partial f_2}{\partial c}$, получим:

$$\frac{\partial f_1}{\partial h} = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial p_2}}{\dfrac{\partial(V,\, H)}{\partial(p_2,\, p_1)}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial h} = \frac{\dfrac{\partial V}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial(V,\, H)}{\partial(p_1,\, p_2)}}.$$

Следовательно,

$$dt = \frac{\partial f_1}{\partial h}dq_1 + \frac{\partial f_2}{\partial h}dq_2$$

или

$$t = \frac{\partial\vartheta}{\partial h} + \mathrm{const}.$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

Задача. В задаче с двумя притягивающими центрами (§ 53) r, r' означают радиусы-векторы из центров сил, а ϑ и ϑ' — углы, образуемые этими радиусами-векторами с линией центров. Вывести интеграл

$$r^2 r'^2 \dot{\vartheta}\dot{\vartheta}' - 2c(\mu\cos\vartheta + \mu'\cos\vartheta') = \text{const}$$

и найти при помощи доказанной теоремы полное решение.

§ 122. Интегральные инварианты, порядок которых равен порядку системы. Теория последнего множителя тесно связана с теорией интегральных инвариантов, порядок которых совпадает с порядком системы.

Пусть

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

где X_r — данные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k, t$, есть некоторая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Какому условию должна удовлетворять функция M от $x_1, x_2, \ldots, x_k, t$, для того чтобы величина

$$\iint\ldots\int M\,\delta x_1\delta x_2\ldots\delta x_k$$

была интегральным инвариантом.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_k$ означают произвольную систему постоянных интегрирования наших дифференциальных уравнений, так что после их разрешения величины $x_1, x_2, \ldots, x_k$ могут быть представлены как функции от $c_1, c_2, \ldots, c_k, t$. Тогда

$$\int\ldots\int M\,\delta x_1\delta x_2\ldots\delta x_k = \iint\ldots\int M\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)}\delta c_1\delta c_2\ldots\delta c_k.$$

Поэтому условием инвариантности будет:

$$\frac{d}{dt}\left\{M\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)}\right\} = 0$$

или

$$\frac{dM}{dt}\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)} + M\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}, X_r, x_{r+1}, \ldots, x_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)} = 0,$$

или

$$\frac{dM}{dt}\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)} + M\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial X_r}{\partial x_r}\frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial(c_1, c_2, \ldots, c_k)} = 0,$$

или

$$\frac{dM}{dt} + M\sum_{r=1}^{k}\frac{\partial X_r}{\partial x_r} = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что M есть *последний множитель для рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.*

Этот результат приводит непосредственно к следующей теореме: *Если движение динамической системы определяется уравнениями:*

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где H — произвольная функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$, то выражение

$$\int\int \ldots \int \delta q_1 \delta q_2 \ldots \delta q_n \delta p_1 \delta p_2 \ldots \delta p_n$$

есть интегральный инвариант этой системы. В самом деле, последний множитель в этом случае равен единице. Эта теорема имеет важное значение в приложениях динамики к термодинамике.

Задача. В системе с двумя степенями свободы интеграл энергии, разрешенный относительно p_1, имеет вид:

$$H'(q_1, q_2, p_2, h) + p_1 = 0.$$

Показать, что для всех траекторий, соответствуюших одному и тому же значению постоянной интегрирования, величина

$$\frac{\partial H'}{\partial h} \delta q_1 \delta q_2 \delta p_2$$

не зависит от времени и от выбора координат. Показать далее, что траектории могут быть рассматриваемы как линии тока в стационарном движении жидкости, имеющей плотность $\dfrac{\partial H'}{\partial h}$.

§ 123. Приведение дифференциальных уравнений к форме Лагранжа. Укажем еще на одну задачу, в которой находит применение теория последнего множителя. Задача эта заключается в следующем. Определить, при каких условиях данная система $\ddot{q}_k = f_k(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ дифференциальных уравнений второго порядка эквивалентна системе Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

в которой L означает некоторую функцию от

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t.$$

Если обе системы эквивалентны, то, очевидно, уравнения:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k} \dot{q}_k \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

должны обращаться в тождество, если в них заменить $\ddot{q}_k$ через f_k. Следовательно, *искомое условие заключается в том, что должна существовать функция L, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений с частными производными:*

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_k} f_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial q_k}\dot{q}_k\right) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_r \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

в которых величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, t являются независимыми переменными.

Для $n = 1$ эта задача может быть разрешена при помощи последнего множителя. Ибо тогда L должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} f + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0;$$

из него вытекает:

$$-\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} f\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial q}\dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q} \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q}\right) = \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^2 \partial q}\dot{q} + \frac{\partial^3 L}{\partial \dot{q}^2 \partial t}.$$

Полагая поэтому $\dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} = M$, находим, что M должно удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}(Mf) + \frac{\partial}{\partial q}(M\dot{q}) + \frac{\partial M}{\partial t} = 0.$$

Из последнего же уравнения вытекает, что M есть последний множитель для системы уравнений:

$$dt = \frac{dq}{\dot{q}} = \frac{d\dot{q}}{f(\dot{q}, q, t)}.$$

Следовательно, *для $n = 1$ задача отыскания функции L приводится к отысканию последнего множителя данной системы.*

§ 124. Частный случай. При $n > 1$ наиболее важным случаем будет тот, при котором каждая из функций f есть сумма некоторой однородной и квадратичной относительно $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ функции F_r и некоторой функции G_r, не зависящей от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$. Предстоит, следовательно, исследовать, будут ли уравнения

$$\ddot{q}_r = F_r + G_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

эквивалентны системе:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где T однородная и квадратичная функция от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$ с коэффициентами, зависящими от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть функции одних лишь величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Очевидно, что T не зависит от функций $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Поэтому мы можем принять, что все эти функции равны нулю, и придать задаче следующую постановку: определить такую функцию T, чтобы уравнения

$$\ddot{q}_r = F_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

были эквивалентны системе:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Задача приводится к вопросу о существовании функции T, удовлетворяющей уравнениям с частными производными:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_k} F_k + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial q_k} \dot{q}_k - \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как F_k — однородна, то $\sum\limits_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} = 2F_k$; следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_k} F_k = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_k} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 F_k}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (r=1, 2, \ldots, n).$$

Но так как $\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_r}$ есть линейная однородная функция, то

$$\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_r} \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial^2 F_k}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s}$$

и поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_k} F_k - \sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}.$$

Следовательно, уравнения, которым должна удовлетворять функция T, могут быть представлены в виде:

$$\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_r \partial \dot{q}_s} \dot{q}_s - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\sum_{s=1}^{n} \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_r} \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_s} \right) - \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_r} \right) = 0$$
$$(r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Очевидно, они могут быть заменены уравнениями:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Полагая снова $f_r = G_r + F_r$, получим теорему: *Если система уравнений*

$$\ddot{q}_r = f_r \quad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

где f_r есть сумма двух функций, из которых одна является квадратичной относительно скоростей, а другая не содержит их, может быть преобразована к виду:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

то функция T есть интеграл системы:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \dot{q}_r} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial T}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Упражнения.

1. В задаче с двумя притягивающими центрами расстояние между центрами равно $2c$, а большие полуоси обоих софокусных относительно центров конических сечений, проходящих через движущуюся точку, равны q_1 и q_2. Положив

$$p_1 = \frac{q_1^2 - q_2}{q_1^2 - c^2} \frac{dq_1}{dt}, \quad p_2 = \frac{q_1^2 - q_2^2}{c^2 - q_2^2} \frac{dq_2}{dt},$$

показать, что уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\, 2),$$

где

$$H = \frac{1}{2} \frac{q_1^2 - c^2}{q_1^2 - q_2^2} p_1^2 + \frac{1}{2} \frac{c^2 - q_2^2}{q_1^2 - q_2^2} p_2^2 - \frac{\mu_1}{q_1 - q_2} - \frac{\mu_2}{q_1 - q_2},$$

а μ_1 и μ_2 постоянные.

2. Показать, что

$$\iiiint \sum \delta q_i\, \delta p_i\, \delta q_j\, \delta p_j$$

(где суммирование распространено на $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ сочетаний индексов i и j) есть интегральный инвариант для всякой системы Гамильтона с переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. (Poincare.)

3. Показать, что уравнения

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

где

$$H = q_1 p_1 - q_2 p_2 - a q_1^2 + b q_2^2,$$

допускают интеграл:

$$\frac{p_2 - b q_2}{q_1} = \text{const},$$

и что два остальных интеграла согласно § 127 имеют вид:

$$q_1 q_2 = \text{const},$$
$$\ln q_1 = t + \text{const}.$$

4. Пусть M есть последний множитель для системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{dx}{X},$$

для которой известен интеграл:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x) = \text{const}.$$

Пусть штрих, поставленный над какой-нибудь функцией от $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$, означает, что переменная x_n заменена в ней ее выражением через $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x$, определяемым интегралом. Показать, что величина $\dfrac{M'}{\dfrac{\partial f}{\partial x_n'}}$ есть последний множитель для приведенной системы:

$$\frac{dx_1}{X_1'} = \frac{dx_2}{X_2'} = \cdots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}'} = \frac{dx}{X'}.$$

(Jacobi.)

5. Пусть $\vartheta_1 = \mathrm{const}$, $\vartheta_2 = \mathrm{const}$, $\ldots$, $\vartheta_n = \mathrm{const}$ есть система интегралов уравнений:

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Показать, что

$$\frac{1}{X}\frac{\partial(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

есть последний множитель.

6. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n$ суть n зависимых переменных, а $I_1, I_2, \ldots, I_k$ — линейных дифференциальных выражений, определяемых равенствами:

$$I_r = \sum_{k=1}^{n} \{p_{rk}(t)u_k + q_{rk}(t)\dot{u}_k + r_{rk}(t)\ddot{u}_k\} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Если $v_1, v_2, \ldots, v_n$ означают такие функции от t, что выражение

$$v_1 I_1 + v_2 I_2 + \cdots + v_n I_n$$

есть полный дифференциал, то показать, что в таком случае функции $v_1, v_2, \ldots, v_n$ будут удовлетворять некоторой системе n линейных дифференциальных уравнений, называемой сопряженной по отношению к системе линейных уравнений:

$$I_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Если, далее, F_r означает величину

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

где L есть некоторая данная функция от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t$, то показать, что система линейных дифференциальных уравнений

$$\sum_k \left(\frac{\partial F_r}{\partial q_k} u_k + \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_k}\dot{u}_k + \frac{\partial F_r}{\partial \ddot{q}_k}\ddot{u}_k\right) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

сопряжена самой себе.

Показать, что обратное предложение также справедливо. (Hirsch.)

Глава XI
Теория преобразований в динамике

§ 125. Характеристическая функция Гамильтона, контактные преобразования. Мы видели[1], что интегрирование уравнений движения динамической задачи, разрешимых в квадратурах, приводится в общем к преобразованию данной динамической системы к системе с меньшим числом степеней свободы. В настоящей главе мы излагаем общую теорию, лежащую в основании всех такого рода преобразований и поэтому всякого решения динамической задачи.

Основы этой теории заложены в знаменитом сочинении Гамильтона по оптике, представленном им в 1824 г.[2] Ирландской академии наук. Основные принципы, изложенные в этом сочинении, были затем распространены их автором и на область динамики.

Чтобы лучше проследить ход идей Гамильтона, остановимся несколько на той связи, которая существует между проблемами оптики и динамики. В настоящее время эта связь уже не имеет того значения, какое она имела во времена Гамильтона, когда корпускулярная теория света еще в значительной степени сохранялась в силе. Траектория светового луча, распространяющегося в оптически неоднородной, но изотропной среде с показателем преломления μ, может быть определена на основании принципа Ферма[3], утверждающего, что для действительной траектории света между двумя заданными точками интеграл

$$\int \mu(x, y, z)\, ds$$

принимает стационарное значение по сравнению со всякой другой смежной кривой, проходящей через эти две точки. С другой стороны, действительная траектория свободной материальной точки массы 1, движущейся в консервативном поле сил с потенциальной энергией $\varphi(x, y, z)$, и при постоянной энергии, равной h, согласно принципу наименьшего действия (§ 100) определяется тем, что для нее интеграл

$$\int \{h - \varphi(x, y, z)\}^{\frac{1}{2}}\, ds$$

[1] См. гл. III, §38–42.

[2] Trans. R. Irish. Acad., т. 15, стр. 69, 1828, т. 16, стр. 4, 93, 1830; т. 17, стр. 1, 1837.

[3] См. книгу автора «History of the Theories of Aether and Electricity», стр. 9–10, и 102–103.

принимает стационарное значение по сравнению со всякой другой смежной кривой, проходящей через те же начальную и конечную точки. Сравнивая эти два закона, мы видим, что *траектории материальной точки в динамической задаче совпадают с траекториями распространения света в задаче оптики, если потенциальная энергия в первой задаче и показатель преломления во второй задаче связаны соотношением:*

$$\mu = (h - \varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

На основании этого факта сторонники корпускулярной теории надеялись найти объяснение оптическим явлениям, ибо согласно их воззрениям световой луч рассматривался как совокупность быстро движущихся материальных частиц. Однако вышеуказанное предложение остается справедливым при любых гипотезах относительно природы света, и поэтому установление связи между оптикой и динамикой возможно также и при *волновой теории* света. Эта мысль лежит в основе теории Гамильтона.

Если мы положим в основу волновую теорию, то математическое описание распространения света может быть проведено двумя методами: методом *световых лучей* и методом *волновых фронтов*. Последний метод, предложенный в 1690 г. Гюйгенсом, заключается в следующем.

Волновой фронт, или геометрическое место возмущений в оптической среде в некоторый момент времени t, имеет вид некоторой поверхности σ. Каждый элемент волнового фронта можно рассматривать как источник возбуждения распространяющихся наружу побочных волн, так что в какой-нибудь последующий момент времени t' исходящее из точки (x, y, z) первоначального волнового фронта возмущение распространяется на некоторую поверхность. Чтобы определить уравнение этой поверхности, заметим, что промежуток времени, в течение которого свет распространяется из произвольной точки (x, y, z) в произвольную точку (x', y', z'), есть функция одних лишь величин x, y, z, x', y', z'. Обозначим эту функцию через $V(x, y, z, x', y', z')$. Гамильтон называл функцию $V(x, y, z, x', y', z')$ *характеристической функцией* рассматриваемой среды. Следовательно, возмущение, исходящее в момент времени t из точки (x, y, z) первоначального волнового фронта, к моменту времени t' распространится на поверхность, уравнением которой в координатах x', y', z' будет:

$$V(x, y, z, x', y', z') = t' - t. \tag{1}$$

По принципу распространения волн Гюйгенса полное возмущение в момент времени t' представится волновым фронтом, являющимся огибающей побочных волн, исходящих из всех элементов первоначального волнового фронта. Обозначим эту огибающую через Σ, направляющие косинусы нормали к поверхности волнового фронта σ в точке (x, y, z) через l, m, n, а направляющие косинусы нормали в соответственной[1] точке (x', y', z') волнового фронта Σ через l', m', n'. Они являются вместе с тем и направляющими косинусами световых лучей в точках (x, y, z) и (x', y', z'), так как в изотропной среде световой луч нормален к волновому фронту[2]. Так как Σ есть огибающая поверхностей V, соответствующих различным точкам поверхности σ, то для всех значений отношений $dx : dy : dz$, соответствующих направлениям в касательных плоскостях к σ, т. е. удовлетворяющих уравнению

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0,$$

должно выполняться уравнение:

$$\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz = 0.$$

Поэтому имеем:

$$\frac{1}{l}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{n}\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{2}$$

Так как l', m', n' суть направляющие косинусы нормали к поверхности V в точке (x', y', z'), то, кроме того, имеем:

$$\frac{1}{l'}\frac{\partial V}{\partial x'} = \frac{1}{m'}\frac{\partial V}{\partial y'} = \frac{1}{n'}\frac{\partial V}{\partial z'}. \tag{3}$$

Световой луч, исходящий в момент времени t из точки (x, y, z) в направлении (l, m, n), в момент времени t' проходит через точку (x', y', z') в направлении (l', m', n'). Уравнения (1), (2) и (3) совместно с уравнением

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1 \tag{4}$$

образуют систему из шести уравнений для определения шести величин x', y', z', l', m', n' как функций от x, y, z, l, m, n. *Эти уравнения вполне определяют поведение светового луча в среде при помощи одной только функции* $V(x, y, z, x', y', z')$. Заметим, что эти уравнения являются не дифференциальными и определяют изменения системы

[1] Точка (x', y', z') соответствует точке (x, y, z), если побочная волна, выходящая из (x, y, z), касается огибающей Σ в точке (x', y', z').

[2] Для простоты мы предполагаем, что среда оптически неоднородна, но изотропна. Гамильтон исследовал и более общий случай кристаллической среды.

световых лучей после распространения в течение конечного промежутка времени в проинтегрированной форме. Таким образом, всякая оптическая задача сводится к определению характеристической функции $V(x, y, z, x', y', z')$ для рассматриваемой оптической среды.

С точки зрения чисто математической мы можем рассматривать переход от переменных x, y, z, l, m, n к переменным x', y', z', l', m', n' или, выражаясь геометрически, переход от поверхностей σ к поверхностям Σ, как некоторое *преобразование*. Следовательно, функция V определяет преобразование пространства, переводящее всякую поверхность σ в некоторую другую поверхность Σ. Если две поверхности σ и σ' касаются в какой-нибудь точке, то, очевидно, в соответственной точке будут касаться также и преобразованные поверхности Σ и Σ'. На этом основании С. Ли называет эти преобразования *контактными*. Таким образом, *функция V определяет контактное преобразование, переводящее всякий волновой фронт σ в такой волновой фронт Σ, который получается из первого после распространения возмущения в среде в течение промежутка времени $t' - t$.*

Простейшим примером контактного преобразования является известное в геометрии преобразование по методу *взаимных поляр*. Чтобы получить поляру некоторой поверхности σ относительно заданной поверхности второго порядка, мы строим для каждой точки (x, y, z) поверхности σ ее полярную плоскость относительно поверхности второго порядка и находим огибающую Σ всех этих плоскостей. Эта поверхность Σ и есть искомая поляра. Переход от σ к Σ является, очевидно, контактным преобразованием. В этом случае характеристическая функция V линейна как относительно x, y, z, так и относительно x', y', z'.

Продолжим изложение теории Гамильтона. Придадим уравнениям (2) и (3) вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \chi l, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \chi m, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \chi n,$$
$$\frac{\partial V}{\partial x'} = \lambda l', \quad \frac{\partial V}{\partial y'} = \lambda m', \quad \frac{\partial V}{\partial z'} = \lambda n',$$

где величины χ и λ могут быть легко определены следующим образом. Полученные уравнения могут быть записаны в виде:

$$dV - \chi(l\,dx + m\,dy + n\,dz) + \lambda(l'\,dx' + m'\,dy' + n'\,dz'). \tag{5}$$

При перемещении из точки (x', y', z') в направлении луча на элемент расстояния ds' величина V увеличивается на элементарный промежуток времени, в течение которого луч проходит элемент ds'. Но если единицы мер выбрать таким образом, чтобы скорость света в свободном эфире равнялась единице, то скорость света в точке (x', y', z') будет равняться $\dfrac{1}{\mu'}$, где μ' есть показатель преломления среды в точке $(x',\, y',\, z')$. Следовательно, свет проходит элемент ds' в течение промежутка времени:

$$\mu' ds' = \mu'(l'^2 + m'^2 + n'^2)\, ds' = \mu'(l'\, dx' + m'\, dy' + n'\, dz').$$

Сравнивая с (5), мы видим, что $\lambda = \mu'$. Аналогично получим, что и $\chi = -\mu$, где μ — показатель преломления в точке $(x,\, y,\, z)$. Следовательно, общая формула Гамильтона имеет вид:

$$dV = \mu'(l'\, dx' + m'\, dy' + n'\, dz') - \mu(l\, dx + m\, dy + n\, dz).$$

Полагая

$$\mu l = \xi, \quad \mu m = \eta, \quad \mu n = \zeta, \quad \mu' l' = \xi', \quad \mu' m' = \eta', \quad \mu' n' = \zeta',$$

мы придадим этой формуле вид:

$$dV = \xi'\, dx' + \eta'\, dy' + \zeta'\, dz' - \xi\, dx - \eta\, dy - \zeta\, dz. \tag{6}$$

Величины $\xi,\, \eta,\, \zeta,\, \xi',\, \eta',\, \zeta'$ Гамильтон называет *компонентами нормальной медлительности распространения волн* в точках $(x,\, y,\, z)$ и $(x',\, y',\, z')$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда интервал времени $t' - t$ между положениями σ и Σ одного и того же волнового фронта очень мал. Обозначим этот интервал через Δt. В этом случае контактное преобразование называется *бесконечно малым*. Положим:

$$\left.\begin{aligned} &x' = x + \alpha\Delta t,\ y' = y + \beta\Delta t,\ z' = z + \gamma\Delta t,\\ &\xi' = \xi + u\Delta t,\ \ \eta' = \eta + v\Delta t,\ \ \zeta' = \zeta + w\Delta t, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$
$$V = W\Delta t.$$

Тогда уравнение (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} dW\Delta t &= (\xi + u\Delta t)(dx + d\alpha\Delta t) + (\eta + v\Delta t)(dy + d\beta\Delta t) +\\ &\quad + (\zeta + w\Delta t)(dz + d\gamma\Delta t) - \xi\, dx - \eta\, dy - \zeta\, dz =\\ &= u\Delta t\, dx + v\Delta t\, dy + w\Delta t\, dz + \xi\Delta t\, d\alpha + \eta\Delta t\, d\beta + \zeta\Delta t\, d\gamma \end{aligned}$$

или

$$dW = u\, dx + v\, dy + w\, dz + \xi\, d\alpha + \eta\, d\beta + \zeta\, d\gamma$$

или

$$d(\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma - W) = \alpha\, d\xi + \beta\, d\eta + \gamma\, d\zeta - u\, dx - v\, dy - w\, dz.$$

Обозначая функцию $\xi\alpha + \eta\beta + \zeta\gamma - W$ через H и рассматривая ее как функцию от $x,\, y,\, z,\, \xi,\, \eta,\, \zeta$, получим:

$$dH = \alpha\, d\xi + \beta\, d\eta + \gamma\, d\zeta - u\, dx - v\, dy - w\, dz. \tag{8}$$

Но в силу (7) в пределе $u = \dfrac{d\xi}{dt}$, $\alpha = \dfrac{dx}{dt}$ и т. д.

Поэтому

$$dH = \frac{dx}{dt}d\xi + \frac{dy}{dt}d\eta + \frac{dz}{dt}d\zeta - \frac{d\xi}{dt}dx - \frac{d\eta}{dt}dy - \frac{d\zeta}{dt}dz.$$

Следовательно, производные по времени от шести величин $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ определяются равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \eta}, \frac{dz}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \zeta}, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Но это есть такая же система уравнений, как и уравнения динамики в форме Гамильтона. Наше исследование показывает, что она может быть рассматриваема как аналитическое выражение бесконечно малого преобразования, т. е. движения волнового фронта из одного положения в другое бесконечно близкое. Интегралы этой гамильтоновой системы суть уравнения (1), (2), (3) и (4). Последние уравнения выражают конечное контактное преобразование, т. е. движение волнового фронта из одного какого-нибудь положения в другое положение, которого оно достигает по истечении конечного промежутка времени. Таким образом мы видим, что, *используя волновую теорию света, Гамильтон получил возможность написать уравнения динамики в проинтегрированной форме, зависящей только от одной неизвестной функции.*

§ 126. Контактные преобразования в пространстве с любым числом измерений. Оставшуюся часть этой главы мы посвятим исследованию приложений вышеизложенных идей Гамильтона к динамическим системам с каким угодно числом степеней свободы и установлению связи получаемых результатов с некоторыми теоремами Лагранжа, Пуассона, Пфаффа и Якоби.

Мы определим сначала понятие контактных преобразований в пространстве n измерений, обобщая с этой целью уравнение (6) предыдущего параграфа.

Пусть

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$$

$2n$ переменных величин, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ $2n$ других переменных, определяемых как функции первых при помощи $2n$ уравнений. Переход от переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ к переменным $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ называется контактным преобразованием, если уравнения, связывающие обе системы переменных, обладают тем свойством, что дифференциальная форма

$$P_1\,dQ_1 + P_2\,dQ_2 + \cdots + P_n\,dQ_n - p_1\,dq_1 - p_2\,dq_2 - \cdots - p_n\,dq_n,$$

рассматриваемая как функция величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ и их дифференциалов, является полным дифференциалом некоторой функции от

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Заметим, что это определение отличается от обычного определения контактных преобразований, даваемого в приложениях к геометрии и к теории уравнений с частными производными. Последнее определение гласит: контактным преобразованием называется такое преобразование $2n+1$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, z$ в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, Z$, при котором выполняется уравнение:

$$dZ - P_1\,dQ_1 - P_2\,dQ_2 - \cdots - P_n\,dQ_n = \rho(dz - p_1\,dq_1 - p_2\,dq_2 - \cdots - p_n\,dq_n),$$

где ρ — некоторая функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, z$.

Если n переменных $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ зависят только от переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то уравнения, связывающие обе эти системы переменных, называются в этом случае *точечным преобразованием*, а контактное преобразование, преобразующее переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$, называется *расширенным точечным преобразованием.*

Из самого определения контактных преобразований совершенно ясно, что два последовательно выполненных контактных преобразования сводятся к одному преобразованию переменных, являющемуся также контактным. Если, далее, преобразование, переводящее $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$, является контактным, то и обратный ход от переменных $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ к переменным $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ выполняется также при помощи контактного преобразования. Это обстоятельство высказывают обычно следующим образом: *преобразование, обратное контактному, есть также контактное.* Вместе с вышеизложенным это показывает, что *контактные преобразования обладают свойством группы.*

Задача 1. Показать, что преобразование, определяемое уравнениями:

$$Q = (2q)^{\frac{1}{2}} e^{k} \cos p,$$

$$P = (2q)^{\frac{1}{2}} e^{-k} \sin p,$$

является контактным.

В этом случае имеем:

$$P\,dQ - p\,dq = (2q)^{\frac{1}{2}} \sin p \left\{ (2q)^{-\frac{1}{2}} \cos p\,dq - (2q)^{\frac{1}{2}} \sin p\,dp \right\} - p\,dp =$$
$$= d(q \sin p \cos p - qp),$$

выражение, являющееся полным дифференциалом.

Задача 2. Показать, что преобразование

$$Q = \ln\left(\frac{1}{q}\sin p\right),$$
$$P = q\operatorname{ctg} p$$

является контактным.

Задача 3. Показать, что преобразование

$$Q = \ln(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p),$$
$$P = 2(1 + q^{\frac{1}{2}}\cos p)q^{\frac{1}{2}}\sin p$$

является контактным.

Дадим теперь явное аналитическое выражение контактных преобразований.

Пусть переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ преобразуются в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ контактным преобразованием, так что

$$\sum_{r=1}^{n}(p_r\,dQ_r - p_r\,dq_r) = dW,$$

где dW — полный дифференциал.

Может случиться, что уравнения, выражающие $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ через $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, дают возможность полного исключения величин $P_1, P_2, \ldots, P_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ и получения одного или нескольких уравнений, связывающих только величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$. Пусть число таких уравнений равно k и пусть они имеют вид:

$$\Omega_n(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k) \tag{10}$$

Для выяснения смысла этих уравнений перейдем временно к геометрической теории контактных преобразований в обычном пространстве трех измерений и рассмотрим три следующих случая:

α) Имеется только одно уравнение между старыми и новыми переменными

$$\Omega(x, y, z, x', y', z') = 0.$$

Если x, y, z даны, то это уравнение, левая часть которого рассматривается как функция от x', y', z', представляет некоторую поверхность. Каждая точка (x, y, z) переходит, следовательно, в некоторую поверхность, которую мы назовем Ω-поверхностью. Любая поверхность σ переходит в некоторую поверхность Σ, являющуюся огибающей всех Ω-поверхностей, соответствующих каждой отдельной точке поверхности σ.

Это самый общий случай, который мы рассматривали в § 125.

β) Имеются два уравнения:

$$\Omega_1(x, y, z, x', y', z') = 0, \quad \Omega_2(x, y, z, x', y', z') = 0.$$

Если x, y, z даны, то эти уравнения представляют некоторую кривую с координатами x', y', z'. Каждая точка (x, y, z) переходит, следовательно, в некоторую кривую, которую мы назовем K-кривой. Любая поверхность σ преобразуется в некоторую поверхность Σ, являющуюся огибающей всех K-кривых, соответствующих каждой отдельной точке поверхности σ.

γ) Имеются три уравнения:

$$\begin{aligned}
&\Omega_1(x, y, z, x', y', z') = 0,\\
&\Omega_2(x, y, z, x', y', z') = 0,\\
&\Omega_3(x, y, z, x', y', z') = 0.
\end{aligned}$$

Каждая точка (x, y, z) преобразуется теперь в точку (x', y', z'), любая поверхность σ в поверхность Σ, являющуюся геометрическим местом точек (x', y', z'), соответствующих каждой отдельной точке поверхности σ.

Так как в уравнении

$$\sum_{r=1}^{n}(p_r\,dQ_r - p_r\,dq_r) = dW$$

величины $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n, dQ_1, dQ_2, \ldots, dQ_n$ подчинены только условиям:

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\Omega_r}{\partial q_2}dq_2 + \cdots + \frac{\partial\Omega_r}{\partial q_n}dq_n + \frac{\partial\Omega_r}{\partial Q_1}dQ_1 + \\
+\frac{\partial\Omega_r}{\partial Q_2}dQ_2 + \cdots + \frac{\partial\Omega_r}{\partial Q_n}dQ_n = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

то необходимо должны иметь место уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
P_r &= \frac{\partial W}{\partial Q_r} + \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial Q_r} + \cdots + \lambda_k\frac{\partial\Omega_k}{\partial Q_r},\\
p_r &= -\frac{\partial W}{\partial q_r} - \lambda_1\frac{\partial\Omega_1}{\partial q_r} - \cdots - \lambda_k\frac{\partial\Omega_k}{\partial q_r}
\end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, k), \tag{11}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ неопределенные множители, а W функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Уравнения (10) совместно с уравнениями (11) образуют систему $2n + k$ уравнений, служащих для определения $2n + k$ величин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ как функций от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Поэтому *эти уравнения могут быть рассматриваемы как явное аналитическое выражение контактного преобразования при помощи характеризующих его функций* $W, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$.

Обратно, если даны $k+1$ произвольных функций $W, \Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, где $k \leqslant n$, и если величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ суть функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, определяемые уравнениями[1]:

$$\Omega_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 0 (r = 1, 2, \ldots, k),$$
$$P_r = \frac{\partial W}{\partial Q_r} + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_r} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$
$$p_r = -\frac{\partial W}{\partial q_r} - \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_r} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_r} \, (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то переход от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ *к* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ *есть контактное преобразование.* В самом деле, в силу этих уравнений величина

$$\sum_{r=1}^{n} (p_r \, dQ_r \quad p_r \, dq_r)$$

равна dW, т. е. полному дифференциалу.

Задача 4. Пусть

$$Q = (2q)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos p, \quad P = (2q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \sin p.$$

Показать, что

$$P = \frac{\partial W}{\partial Q}, \quad p = -\frac{\partial W}{\partial q},$$

где

$$W = \frac{1}{2} Q (2qk - k^2 Q^2)^{\frac{1}{2}} - q \arccos \left\{ k^{\frac{1}{2}} \frac{Q}{(2q)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

т. е. что переход от q, p к Q, P есть контактное преобразование.

§ 127. Билинейный ковариант дифференциальной формы. Рассмотрим дифференциальную форму:

$$X_1 \, dx_1 + X_2 \, dx_2 + \cdots + X_n \, dx_n,$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ означают произвольные функции независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Такого рода форма называется *пфаффовым*

[1] Эти уравнения впервые встречаются у Якоби в «Vorlesungen über Dynamik», стр. 470, 1866, где выясняется значений этих уравнений для преобразования уравнения в частных производных первого порядка (к которому применяются задачи динамики). Значение этих уравнений в теории контактных преобразований открыл С. Ли.

выражением[1] в переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Мы будем употреблять для него символ ϑ_δ, полагая

$$\vartheta_\delta = X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 + \cdots + X_n\,\delta x_n,$$

где δ — символ системы независимых вариаций. Тогда будем иметь:

$$\begin{aligned}\delta\vartheta_d - d\vartheta_\delta = \delta(X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_n\,dx_n) - \\ - d(X_1\,\delta x_1 + X_2\,\delta x_2 + \cdots + X_n\,\delta x_n) = \\ = \delta X_1\,dx_1 + \cdots + \delta X_n\,dx_n + X_1\delta dx_1 + \cdots + X_n\delta dx_n - \\ - dX_1\delta x_1 - \cdots - dX_n\delta x_n - X_1 d\delta x_1 - \cdots - X_n d\delta x_n.\end{aligned}$$

Замечая, что в силу независимости вариаций d и δ имеет место соотношение $d\delta x_r = \delta dx_r$, и заменяя dX_r и δX_r через

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial X_r}{\partial x_n}dx_n \quad \text{и} \quad \frac{\partial X_r}{\partial x_1}\delta x_1 + \cdots + \frac{\partial X_r}{\partial x_n}\delta x_n,$$

получим:

$$\delta\vartheta_d - d\vartheta_\delta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}dx_i\delta x_j,$$

где через a_{ij}, обозначены величины $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}\dfrac{\partial X_j}{\partial x_i}$.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — новые независимые переменные, в которые переходят после некоторого преобразования переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и пусть после такого преобразования дифференциальная форма принимает вид:

$$Y_1\,dy_1 + Y_2\,dy_2 + \cdots + Y_n\,dy_n.$$

Обозначим величины $\dfrac{\partial Y_i}{\partial y_j}\dfrac{\partial Y_j}{\partial y_i}$ через b_{ij}. Так как величина $\delta\vartheta_d - d\vartheta_\delta$ имеет, очевидно, одни и те же значения, в каких бы переменных мы ее ни выражали, то должно быть:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,dx_i\,\delta x_j = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\,dy_i\,\delta y_j.$$

На основании последнего уравнения величину $\sum\limits_{i=1,j=1}^{n} a_{ij}\,dx_i\,\delta x_j$ называют *билинейным ковариантом* формы $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\,dx_i$.

§ 128. Условия для контактного преобразования, выраженные через билинейный ковариант. Допустим, что перемен-

[1] Знаменитый мемуар Пфаффа об этих выражениях был представлен берлинской академии в 1815 г. (Abhandl. d. Akad. d. Wiss., стр. 76, 1814–1815).

ные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ связаны контактным преобразованием с переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, так что разность величин $\sum\limits_{r=1}^{n} P_r\,\delta Q_r$ и $\sum\limits_{r=1}^{n} p_r\,dq_r$ есть полный дифференциал.

Согласно предыдущему параграфу билинейный ковариант дифференциальной формы не изменяется, если к этой форме добавляется полный дифференциал. В самом деле, билинейный ковариант зависит только от величины $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i}$, обращающихся для полного дифференциала в нуль. Далее, мы видели, что билинейный ковариант какой-нибудь формы при любом преобразовании переходит в билинейный ковариант преобразованной формы. Отсюда следует, что билинейные коварианты форм $\sum\limits_{r=1}^{n} P_r\,dQ_r$ и $\sum\limits_{r=1}^{n} p_r\,dq_r$ равны между собой, т. е. что

$$\sum_{r=1}^{n}(\delta P_r\,dQ_r - dP_r\,\delta Q_r) = \sum_{r=1}^{n}(\delta p_r\,dq_r - dp_r\,\delta q_r).$$

Если переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ переходят в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ при помощи контактного преобразования, то величина

$$\sum_{r=1}^{n}(\delta p_r\,dq_r - dp_r\,\delta q_r)$$

остается инвариантной относительно этого преобразования.

Пример 1. Для преобразования, определяемого равенствами:

$$Q = (2q)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos p, \quad P = (2q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \sin p.$$

имеем:

$$dP = (2q)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \sin p\,dq + (2q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \cos p\,dp,$$

$$\delta Q = (2q)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos p\,\delta q - (2q)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \sin p\,\delta p,$$

$$\delta P = (2q)^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \sin p\,\delta q + (2q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \cos p\,\delta p,$$

$$dQ = (2q)^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \cos p\,dq - (2q)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}} \sin p\,dp,$$

$$dP\,\delta Q - \delta P\,dQ = -\sin^2 p(dq\,\delta p - \delta q\,dp) +$$
$$+ \cos^2 p(dp\,\delta q - \delta p\,dq) = dp\,\delta q - \delta p\,dq,$$

следовательно, преобразование является контактным.

§ 129. Условия для контактного преобразования, выраженные через скобки Лагранжа. Придадим теперь другую форму условиям, которым должно удовлетворять преобразование, преобразующее переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$, для того чтобы оно было контактным.

Если $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ суть произвольные функции двух переменных u и v и, может быть, еще и некоторых других переменных, то выражение

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial q_r}{\partial u}\frac{\partial p_r}{\partial v} - \frac{\partial q_r}{\partial v}\frac{\partial p_r}{\partial u}\right)$$

называется скобками Лагранжа[1] и обозначается обычно символом $[u, v]$.

Пусть теперь $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ будут произвольными функциями $2n$ переменных $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Заменим в выражении

$$\sum_{r=1}^{n}(dp_r\,\delta q_r - \delta p_r\,dq_r)$$

величины dp_r их значениями:

$$\frac{\partial p_r}{\partial Q_1}\,dQ_1 - \frac{\partial p_r}{\partial Q_2}\,dQ_2 + \cdots + \frac{\partial p_r}{\partial Q_n}\,dQ_n + \frac{\partial p_r}{\partial P_1}\,dP_1 + \frac{\partial p_r}{\partial P_2}\,dP_2 + \cdots + \frac{\partial p_r}{\partial P_n}\,dP_n$$

и аналогичными выражениями все остальные вариации. Тогда в сокращенной записи будем иметь:

$$\sum_{r=1}^{n}(dp_r\,\delta q_r - \delta p_r\,dq_r) = \sum_{k,\,l}[u_k, u_l](du_l\,\delta u_k - \delta u_l\,du_k),$$

где суммирование в правой части равенства распространено на всевозможные пары переменных u_k, u_l системы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Но если преобразование переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ есть преобразование контактное, то

$$\sum_{r=1}^{n}(dp_r\,\delta q_r - \delta p_r\,dq_r) - \sum_{r=1}^{n}(dP_r\,\delta Q_r - \delta P_r\,dQ_r).$$

[1] *Lagrange*, Mem. de l'Institut de France, 1808; Oeuvres, т. 6, стр. 713.

Последнее равенство справедливо при всевозможных видах вариаций δ и d. Поэтому сравнение с предыдущим равенством даст:

$$
\begin{aligned}
&[P_i, P_k] = 0, \ \ [Q_i, Q_k] = 0 && (i, k = 1, 2, \ldots, n),\\
&[Q_i, P_k] = 0 && (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq k),\\
&[Q_i, P_i] = 1 && (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Эти уравнения могут быть рассматриваемы как уравнения в частных производных, определяющие $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ ***как такие функции от*** $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$, ***при которых переход от одних переменных к другим есть контактное преобразование.*** Эти уравнения выражают в явной аналитической форме условия инвариантности выражения:

$$\sum_{r=1}^{n}(dp_r\,\delta q_r - \delta p_r\,dq_r).$$

§ 130. Скобки Пуассона. Введем еще другой вид скобок, тесно связанный со скобками Лагранжа.

Если u и v суть две произвольные функции переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, то выражение

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_r}\frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r}\frac{\partial v}{\partial q_r}\right)$$

называется *скобками Пуассона*[1] и обозначается символом (u, v).

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ означают $2n$ независимых функций от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, так что, и наоборот, $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ являются функциями от $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$. Очевидно, между скобками Пуассона (u_r, u_s) и скобками Лагранжа $[u_r, u_s]$ должна существовать некоторая зависимость, которую мы теперь и отыщем.

Имеем:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{t=1}^{2n}(u_t, u_r)[u_t, u_s] =\\
&= \sum_{t=1}^{2n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial q_i}\frac{\partial u_r}{\partial p_i} - \frac{\partial u_t}{\partial p_i}\frac{\partial u_r}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial q_j}{\partial u_t}\frac{\partial p_j}{\partial u_s} - \frac{\partial p_j}{\partial u_t}\frac{\partial q_j}{\partial u_s}\right).
\end{aligned}
$$

Выполним умножение в правой части равенства и заметим, что величины:

$$\sum_{t=1}^{2n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial q_i}\frac{\partial p_j}{\partial u_t}\right) \quad \text{и} \quad \sum_{t=1}^{2n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial p_i}\frac{\partial q_j}{\partial u_t}\right)$$

[1] *Poisson*, Journal de l'Ecole polytechn., т. 8, тетр. 15., стр. 266, 1809.

равны нулю, а величины:

$$\sum_{t=1}^{2n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial q_i}\frac{\partial q_j}{\partial u_t}\right) \quad \text{и} \quad \sum_{t=1}^{2n}\left(\frac{\partial u_t}{\partial p_i}\frac{\partial p_j}{\partial u_t}\right)$$

равны единице или нулю в зависимости от того, i равно или не равно j.

Тогда наше уравнение примет вид:

$$\sum_{t=1}^{2n}(u_t, u_r)[u_t, u_s] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_r}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial u_s} + \frac{\partial u_r}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial u_s}\right)$$

и, следовательно,

$$\sum_{t=1}^{2n}(u_t,\, u_r)[u_t,\, u_s] = 0 \qquad \text{при } r \neq s$$

и

$$\sum_{t=1}^{2n}(u_t,\, u_r)[u_t,\, u_r] = 1.$$

Но в этом заключаются условия того, что оба детерминанта:

$$\begin{vmatrix} [u_1, u_1] & [u_1, u_2] & \dots & [u_1, u_{2n}] \\ [u_2, u_1] & [u_2, u_2] & \dots & [u_2, u_{2n}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [u_{2n}, u_1] & [u_{2n}, u_2] & \dots & [u_{2n}, u_{2n}] \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} (u_1, u_1) & (u_2, u_1) & \dots & (u_{2n}, u_1) \\ (u_1, u_2) & (u_2, u_2) & \dots & (u_{2n}, u_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (u_1, u_{2n}) & (u_2, u_{2n}) & \dots & (u_{2n}, u_{2n}) \end{vmatrix}$$

взаимно обратны, т. е. каждый элемент одного детерминанта равен алгебраическому дополнению соответствующего элемента второго детерминанта, деленному на этот второй детерминант. В самом деле, произведение обоих детерминантов равно единице. *Скобки Лагранжа и скобки Пуассона связаны*, следовательно, *таким образом, что образованные из них детерминанты взаимно обратны.*

Задача 1. Пусть f, φ, ψ — три произвольные функции от $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$. Показать, что

$$((f,\, \varphi),\, \psi) + ((\varphi,\, \psi),\, f) + ((\psi,\, f),\, \varphi) = 0.$$

Задача 2. Пусть F и Φ означают функции от $f_1, f_2, \dots, f_n$, являющихся, в свою очередь, функциями от $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$. Показать, что

$$(F,\, \Phi) = \sum_{r,s}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial f_s}\frac{\partial F}{\partial f_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_r}\frac{\partial F}{\partial f_s}\right)(f_r,\, f_s),$$

где суммирование распространено на всевозможные сочетания f_r и f_s.

§ 131. Условия для контактного преобразования, выраженные через скобки Пуассона. Пусть теперь $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ означают $2n$ функций от $2n$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Покажем теперь, что *условия контактности преобразования, преобразующего одну систему переменных в другую, могут быть написаны следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&(P_i, P_j) = 0,\ (Q_i, Q_j) = 0 && (i, j = 1, 2, \ldots, n),\\
&(Q_i, P_j) = 0 && (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j),\\
&(Q_i, P_i) = 1 && (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}$$

В самом деле, в § 129 мы видели, что условия для контактности преобразования выражались следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
&[P_i, P_j] = 0,\ [Q_i, Q_j] = 0 && (i, j = 1, 2, \ldots, n),\\
&[Q_i, P_j] = 0 && (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j),\\
&[Q_i, P_i] = 1 && (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned}$$

Поэтому уравнения

$$\sum_{t=1}^{2n} (u_t, u_r)[u_t, u_s] = 0 \qquad (r \neq s)$$

предыдущего параграфа переходят в

$$\begin{aligned}
&(Q_i, Q_j) = 0,\ (P_i, P_j) = 0 && (i, j = 1, 2, \ldots, n),\\
&(P_j, Q_i) = 0 && (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j),
\end{aligned}$$

а уравнения

$$\sum_{t=1}^{2n} (u_t, u_r)[u_t, u_r] = 1$$

дают:

$$(Q_i, P_i) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

что и доказывает теорему.

Задача 1. Пусть переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ связаны с переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ при помощи контактного преобразования. Показать, что

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial Q_r} \frac{\partial \psi}{\partial P_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial P_r} \frac{\partial \psi}{\partial Q_r} \right) = \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial \psi}{\partial p_r} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \right)$$

т. е. что скобки Пуассона от двух произвольных функций φ и ψ в обеих системах переменных совпадают.

Задача 2. Пусть через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ обозначены известные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, удовлетворяющие уравнениям с частными производными:

$$(Q_r, Q_s) = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Показать, что можно определить n функций $P_1, P_2, \ldots, P_n$ таким образом, что преобразование $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ будет контактным.

§ 132. Расширенные точечные преобразования и подгруппа преобразований Матьё. Если в данной группе преобразований можно выделить такую систему преобразований, что преобразование, обратное всякому преобразованию этой системы, есть одно из преобразований этой же системы и совокупность двух последовательных преобразований этой системы представляет преобразование, принадлежащее к ней же, то такую систему называют *подгруппой* данной группы.

Совокупность всех преобразований, удовлетворяющих условию

$$\sum_{r=1}^{n} P_r\, dQ_r - \sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r,$$

образует, очевидно, подгруппу общей группы контактных преобразований. Такие преобразования исследовал Матьё[1].

По существу они совпадают с преобразованиями, названными С. Ли «однородными контактными преобразованиями в $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$».

Согласно § 126 величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ в рассматриваемом нами случае находятся путем исключения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ из $2n + k$ уравнений:

$$\Omega_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

$$P_r = \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_r} - \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial Q_r} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$p_r = -\lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_r} - \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_r} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Из вида этих уравнений вытекает, что если все величины $p_1, p_2, \ldots, p_n$ умножаются на произвольный множитель, то на этот же множитель умножатся и все величины $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Следовательно, $P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть однородные функции (но не обязательно целые) первого порядка относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Внутри группы преобразований Матьё можно, очевидно, выделить подгруппу таких преобразований, для которых $P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть

[1] Journal de Math., т. 19, стр. 265, 1874.

функции не только однородные относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, но и целые, т. е. линейные, относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, так что для этой подгруппы имеем равенства вида:

$$P_r = \sum_{k=1}^{n} p_k f_{rk}(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Вводя эти значения в уравнение

$$\sum_{r=1}^{n} P_r\, dQ_r - \sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r = 0$$

и приравнивая нулю коэффициенты при p_k, получим:

$$\sum_{r=1}^{n} f_{rk}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\, dQ_r = dq_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

следовательно, $q_1, q_2, \ldots, q_n$ являются функциями одних лишь Q_1, $Q_2, \ldots, Q_n$ и

$$f_{rk} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_r} \qquad (r, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, *рассматриваемые преобразования могут быть получены путем установления произвольных соотношений между* $q_1, q_2, \ldots, q_n$ *и* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ *и последующего определения* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ *из соотношений:*

$$P_r = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти преобразования представляют собой расширенные точечные преобразования (§ 126).

Задача 1. Пусть

$$\sum_{r=1}^{n} P_r\, dQ_r = \sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r.$$

показать, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial Q_r}{\partial p_k} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial P_r}{\partial p_k} = P_r.$$

§ 133. Бесконечно малые контактные преобразования. Мы переходим теперь к преобразованиям, в которых новые переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ отличаются от старых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ на бесконечно малые величины Δq_1, $\Delta q_2, \ldots, \Delta q_n, \Delta p_1, \Delta p_2, \ldots, \Delta p_n$, где

$$\left.\begin{aligned} \Delta q_r &= \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\Delta t, \\ \Delta p_r &= \psi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)\Delta t \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

а Δ произвольная бесконечно малая величина. Имеем, следовательно, в этом случае:

$$\left.\begin{aligned} Q_r &= q_r + \Delta q_r = q_r + \varphi_r \Delta t, \\ P_r &= p_r + \Delta p_r = p_r + \psi_r \Delta t \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

и преобразование определяется функциями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

Допустим теперь, что это преобразование является контактным. Тогда

$$\sum_{r=1}^{n} (P_r\, dQ_r - p_r\, dq_r) = dW,$$

где W некоторая функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ или

$$\sum_{r=1}^{n} \{(p_r + \psi_r \Delta t)(dq_r + d\varphi_r \Delta t) - p_r\, dq_r\} = dW$$

или

$$\Delta t \sum_{r=1}^{n} (\psi_r dq_r - p_r d\varphi_r) - dW.$$

Очевидно, что функция W содержит величину Δt в качестве множителя. Полагая поэтому $W = U \Delta t$ где U произвольная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, из предыдущего уравнения получим:

$$\sum_{r=1}^{n} (\psi_r\, dq_r + p_r\, d\varphi_r) = dU.$$

Отсюда имеем:

$$\sum_{r=1}^{n} (\psi_r\, dq_r - \varphi_r\, dp_r) = d(U - \sum_{r=1}^{n} p_r \varphi_r) = \\ = -dK(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$

следовательно,

$$\varphi_r = \frac{\partial K}{\partial p_r}, \quad \psi_r = -\frac{\partial K}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, *самое общее бесконечно малое контактное преобразование определяется уравнениями*:

$$Q_r - q_r + \frac{\partial K}{\partial p_r} \Delta t, \quad P_r - p_r - \frac{\partial K}{\partial q_r} \Delta t \qquad (r - 1, 2, \ldots, n),$$

где K — произвольная функция от переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, а Δt — произвольная, не зависящая от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, бесконечно малая величина.

Любая функция $f(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n)$, аргументы которой $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ подвергаются бесконечно малому контактному преобразованию, получает приращение:

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{\partial K}{\partial p_r} - \frac{\partial f}{\partial p_r}\frac{\partial K}{\partial q_r}\right)\Delta t$$

или

$$(f, K)\Delta t.$$

На этом основании скобки Пуассона (f, K) считают символом самого общего бесконечно малого преобразования бесконечной группы, состоящей из всевозможных контактных преобразований $2n$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

§ 134. Новое понимание динамики на основе контактных преобразований. Теорема, полученная в предыдущем параграфе, дает нам возможность распространить на любые голономные консервативные динамические системы теорему, высказанную в § 125 только относительно определенных простых систем. Ибо движение определяется (§ 109) уравнениями вида:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

а согласно предыдущему параграфу эти уравнения могут быть истолкованы в том смысле, что переход значений переменных в момент времени t к их значениям в момент времени $t + \Delta t$ есть бесконечно малое контактное преобразование. *Весь процесс движения можно рассматривать как постепенное развертывание контактного преобразования.* Этот результат есть только обобщение теоремы, что *путь светового луча может быть определен через постепенное распространение волнового фронта.* Эта теорема совместно с положением, что контактные преобразования образуют группу, и служит основой теории преобразований динамических систем.

Отсюда непосредственно вытекает: Если $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ означают переменные динамической системы, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — их значения в некоторый определенный момент времени $t = t_0$, то уравнения, определяющие $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ как функции от $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (являющиеся решениями дифференциальных уравнений движения), представляют собой контактное преобразование $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в $q_1, q_2, \ldots, q_n$,

$p_1, p_2, \ldots, p_n$. При этом t рассматривается как параметр, входящий в уравнения, определяющие это преобразование.

§ 135. Теорема Гельмгольца. Так как значения переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в момент времени t определяются через их значения $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в момент времени t_0 контактным преобразованием, то (§ 128)

$$\sum_{i=1}^{n}(\Delta p_i\,\delta q_i - \delta p_i\,\Delta q_i) = \sum_{i=1}^{n}(\Delta\beta_i\,\delta\alpha_i - \delta\beta_i\,\Delta\alpha_i)$$

где символы Δ и δ соответствуют изменениям координат при переходе от траектории к двум различным смежным кривым.

Допустим, что δ означает переход к кривой, которая определяется значениями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_r + \delta\beta_r, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ в момент времени t_0, а Δ — переход к кривой, которая определяется значениями $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}, p_s + \Delta p_s, p_{s+1}, \ldots, p_n$ в момент времени t_1. Тогда предыдущее уравнение принимает вид:

$$\Delta p_s\,\delta q_s = -\delta\beta_r\,\Delta\alpha_r.$$

Следовательно, приращение q_r при некотором приращении β_r (при котором $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r-1}, \beta_{r+1}, \ldots, \beta_n$ не варьируются) равно по величине, но противоположно по знаку приращения α_r, которое соответствует приращению p_s (при котором $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_{s-1}, p_{s+1}, \ldots, p_n$ не варьируются) на величину, равную приращению β_r.

Гельмгольц заметил[1], что для многих систем этот результат можно истолковать физически. Небольшой импульс, сообшенный системе, может быть измерен вызванным им изменением одного из количеств движения $p_1, p_2, \ldots, p_n$, а изменение α_s вследствие изменения p_s может быть реализовано в *обращенном* движении, т. е. в движении системы, у которой в каждом положении скорости отличаются знаком от соответствующих этому положению скоростей в необращенном движении, так что будущее обращенной системы совпадает с прошедшим первоначальной системы.

Поэтому мы можем полученный результат выразить следующим образом: *Изменение в первоначальной системе какой-нибудь координаты q_s за произвольный промежуток времени, вызванное импульсивным изменением β_r, равно и противоположно по знаку изменению в обращенном движении за этот же промежуток времени координаты α_r вызванному таким же по величине импульсивным изменением начального количества движения p_s*[2].

[1] Journal f. Math., т. 100, 1886.

[2] См. Lamb, Proc. Lond. Math. Soc., т. 19, стр. 144. 1898.

Задача 1. Точка описывает эллипс под действием центральной силы с центром в центре эллипса. В момент, когда она проходит через конец большой оси, ей сообщается небольшая скорость δv в направлении нормали. Показать, что тангенциальное отклонение по истечении четверти периода обращения равно $\mu^{-\frac{1}{2}}\delta v$, где μ — постоянная силы. Показать далее, что тангенциальная скорость δv, сообщенная точке в момент прохождения через конец малой оси, вызывает по истечении четверти периода нормальное отклонение такой же величины $\mu^{-\frac{1}{2}}\delta v$. (Lamb.)

§ 136. Теорема Якоби о преобразовании данной динамической системы в другую динамическую систему. Из § 116 вытекает, что при преобразовании переменных в системе Гамильтона

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

получается снова система Гамильтона:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

если новые переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ обладают тем свойством, что выражение

$$\int (P_1\,\delta Q_1 + P_2\,\delta Q_2 + \cdots + P_n\,\delta Q_n)$$

есть интегральный инвариант (абсолютный или относительный) для первоначальной системы.

Такого рода преобразования в общем случае свойственны рассматриваемой задаче, т. е. они преобразовывают заданную, а не произвольно взятую систему Гамильтона опять в систему Гамильтона. Однако среди этих преобразований имеются и такие, которые любую систему Гамильтона преобразовывают снова в систему Гамильтона. Эти преобразования можно получить следующим образом.

Согласно § 115 величина

$$\int \sum_{r=1}^{n} p_r\,\delta q_r$$

является относительным интегральным инвариантом для всякой гамильтоновой системы. Пусть $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ суть $2n$ переменных, получающихся из $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, при помощи контактного преобразования, так что

$$\sum_{r=1}^{n} P_r\,dQ_r - \sum_{r=1}^{n} p_r\,dq_r = dW,$$

где dW — полный дифференциал. Уравнения, определяющие преобразование, могут содержать явно время, так что $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ будут функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$. Но мы будем предполагать, что в вышенаписанном уравнении символ d означает вариацию, при которой время не варьируется. Если же варьируется также и t, то это уравнение перейдет в

$$\sum_{r-1}^{n} P_r\, dQ_r - \sum_{r-1}^{n} p_r\, dq_r = dW + U\, dt,$$

где U — некоторая функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$.

Но вариация δ в интегральном инварианте соответствует переходу от какой-нибудь точки траектории к равновременной точке смежной кривой. Поэтому, если рассматривать переменные как функции от $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ и t, где $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ — постоянные интегрирования, входящие в решение уравнений движения, то вариация δ получится в результате изменений одних лишь величин $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ без изменения t. Следовательно, как частный случай последнего уравнения имеем:

$$\sum_{r=1}^{n} P_r\, \delta Q_r - \sum_{r=1}^{n} p_r\, \delta q_r = \delta W$$

и поэтому

$$\int \sum_{r=1}^{n} P_r\, \delta Q_r$$

есть относительный интегральный инвариант. Следовательно, преобразованные дифференциальные уравнения, в которых за зависимые переменные приняты $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$, имеют гамильтонову форму и могут быть представлены в виде:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где K — функция от $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$.

При контактном преобразовании переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в любой динамической задаче сохраняется гамильтонов вид уравнений движения[1].

При обычном преобразовании координат в динамической задаче, при котором $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ суть функции только от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, контактное преобразование есть только расширенное точечное преобразование.

[1] Эта важная теорема впервые высказана Якоби (Comptes Rendus, т. 5, стр. 61, 1837).

Задача 1. Показать, что контактное преобразование, определяемое уравнениями:

$$q = (2Q)^{\frac{1}{2}} k^{\ \frac{1}{2}} \cos P, \quad p = (2Q)^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} \sin P,$$

преобразует систему:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где

$$H = \frac{1}{2}(p_2 + k^2 q^2),$$

в систему:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P}, \quad \frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q},$$

где

$$K = kQ.$$

§ 137. Связь уравнений динамики с дифференциальной формой. Значение контактных преобразований для динамики еще более уяснится, если ввести в рассмотрение определенную дифференциальную форму, инвариантно связанную с динамической системой.

Пусть

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots - X_{2n+1}\,dx_{2n+1}$$

произвольная дифференциальная форма с $2n+1$ независимыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$. Согласно § 127 билинейный ковариант

$$\sum_{i=1}^{2n+1} \sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij}\,dx_i\,\delta x_j$$

этой формы, где a_{ij} означают величины $\dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i}$, связан с ней инвариантно. Приравнивая в отдельности нулю все коэффициенты при $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{2n+1}$, мы получим $2n+1$ уравнений:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_{i1}\,dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2n+1} a_{i2}\,dx_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{2n+1} a_{i,\,2n+1}\,dx_i = 0.$$

Так как определитель, составленный из величин a_{ij}, кососимметричен и нечетного порядка, то он тождественно равен нулю и уравнения совместны между собой. Они называются первой системой уравнений Пфаффа дифференциальной формы $\sum\limits_{r=1}^{2n+1} X_r\,dx_r$ и по самому закону своего образования инвариантно связаны с этой формой. Следовательно, если преобразованием переменных, при котором новые переменные $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$ суть заданные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$, дифференциальная форма преобразуется в

$$\sum_{r=1}^{2n+1} Y_r\,dy_r$$

и соответствующая этой новой форме первая система Пфаффа есть

$$\sum_{i=1}^{2n+1} b_{i1}\,dy_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2n-1} b_{i2}\,dy_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{2n+1} b_{i,\,2n+1}\,dy_i = 0,$$

то эти уравнения эквивалентны уравнениям:

$$\sum_{i=1}^{2n+1} a_{i1}\,dx_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{2n+1} a_{i2}\,dx_i = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{i=1}^{2n+1} a_{i,\,2n+1}\,dx_i = 0.$$

Рассмотрим теперь специальную дифференциальную форму

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_n\,dq_n - H\,dt$$

с $2n+1$ переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$, где H — произвольная функция от этих переменных. Если составить величины a_{ij} соответствующие этой форме, то в качестве ее первой пфаффовой системы получим уравнения:

$$-dp_r - \frac{\partial H}{\partial q_r}dt = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$dq_r - \frac{\partial H}{\partial p_r}dt = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\partial H - \frac{\partial H}{\partial t}dt = 0.$$

Последнее из этих уравнений есть следствие остальных; поэтому вместо этой системы мы можем написать:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Но эти уравнения суть уравнения движения динамической системы, для которой функция Гамильтона равна H. Отсюда следует: *Динамическая система с гамильтоновой функцией H инвариантно связана с дифференциальной формой*

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_n\,dq_n - H\,dt$$

в том смысле, что уравнения движения динамической системы в любых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, \tau$ образуют первую систему уравнений Пфаффа для дифференциальной формы

$$X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_{2n}\,dx_{2n} + T\,d\tau,$$

в которую переходит форма

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_n\,dq_n - H\,dt$$

после замены переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$ новыми переменными $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, \tau$.

§ 138. Гамильтонова функция преобразованных уравнений. Результат предыдущего параграфа приводит к новому доказательству теоремы, что уравнения динамики:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

сохраняют гамильтонову форму при контактном преобразовании переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Кроме того, из него можно получить вид функции K преобразованной системы:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть, в самом деле, контактное преобразование определяется уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\Omega_r = 0 && (r = 1, 2, \ldots, n),\\
&P_r = \frac{\partial W}{\partial Q_r} + \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial Q_r} + \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial Q_r} + \cdots + \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial Q_r} && (r = 1, 2, \ldots, n),\\
&p_r = -\frac{\partial W}{\partial q_r} - \lambda_1 \frac{\partial \Omega_1}{\partial q_r} - \lambda_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial q_r} - \cdots - \lambda_k \frac{\partial \Omega_k}{\partial q_r} && (r = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned}$$

где $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k, W$ — произвольные функции переменных

$$q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, t.$$

В силу этих уравнений выполняется тождественно равенство:

$$\sum_{r=1}^{n} p_r dq_r - \sum_{r=1}^{n} P_r dQ_r - \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial q_r}\, dq_r + \frac{\partial W}{\partial Q_r}\, dQ_r \right) - \\ - \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial \Omega_s}{\partial q_r}\, dq_r + \frac{\partial \Omega_s}{\partial Q_r}\, dQ_r \right)$$

и поэтому (если d есть символ вариации, при которой изменяются все переменные, включая и t)

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\, dq_r = \sum_{r=1}^{n} P_r\, dQ_r + \frac{\partial W}{\partial t}\, dt - dW + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial t}\, dt$$

или

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\,dq_r - H\,dt = \sum_{r=1}^{n} P_r\,dQ_r - \left(H - \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial t}\right) dt - dW.$$

Стоящий в правой части равенства полный дифференциал dW может быть отброшен, так как он не влияет на первую пфаффову систему дифференциальной формы. Поэтому *контактное преобразование преобразует систему уравнений*:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

в систему

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$K = H - \frac{\partial W}{\partial t} - \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \frac{\partial \Omega_s}{\partial t},$$

причем K следует представить как функцию от $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, t$.

§ 139. Преобразования, в которых преобразуется также и независимая переменная. Результат, полученный в § 137, дает также возможность определить преобразования всей совокупности $2n-1$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$ в новые переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, T$, при которых система Гамильтона:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

переходит снова в гамильтонову систему:

$$\frac{dQ_r}{dT} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dT} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

В самом деле, эта задача эквивалентна задаче определения преобразований, переводящих дифференциальную форму:

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_n\,dq_n + h\,dt,$$

у которой переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, h, t$ связаны соотношением:

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) + h = 0$$

в дифференциальную форму:

$$P_1\,dQ_1 + P_2\,dQ_2 + \dots + P_n\,dQ_n + k\,dT \text{ — полный дифференциал,}$$

в которой переменные $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, k, T$ связаны соотношением:

$$K(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, T) + k = 0.$$

Этому условию удовлетворяет всякое контактное преобразование $2n + 2$ переменных $q_1, q_2, \dots, q_n, t, p_1, p_2, \dots, p_n, h$ в переменные $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, T, P_1, P_2, \dots, P_n, k$. Если такое преобразование составлено, то функцию K можно определить, заменяя в уравнении

$$H(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) + h = 0$$

величины $q_1, q_2, \dots, q_n, t, p_1, p_2, \dots, p_n, h$ их выражениями через Q_1, $Q_2, \dots, Q_n, T, P_1, P_2, \dots, P_n, k$ и разрешая это уравнение относительно k. Полученное уравнение будет вида:

$$K(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, T) + k = 0,$$

и искомое преобразование полностью определится.

§ 140. Новая формулировка задачи интегрирования. В § 137 мы видели, что при преобразовании переменных в системе

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \dots, n)$$

новые дифференциальные уравнения образуют первую пфаффову систему той дифференциальной формы, в которую после преобразования переходит форма:

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \dots + p_n\,dq_n - H\,dt.$$

Допустим, что мы нашли преобразование, определяемое уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} q_r &= \varphi_r(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, t),\\ p_r &= \psi_r(Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n, t) \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \dots, n),$$

преобразующее нашу дифференциальную форму в

$$P_1\,dQ_1 + P_2\,dQ_2 + \dots + P_n\,dQ_n - dT,$$

где dT — полный дифференциал некоторой функции от $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, $P_1, P_2, \dots, P_n, t$. Тогда соответствующая первая система уравнений Пфаффа имеет вид:

$$dQ_r = 0, \quad dP_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Интегрирование ее даст:

$$Q_r = \text{const}, \quad P_r = \text{const} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно уравнения:

$$\left.\begin{aligned} q_r &= \varphi_r(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, t), \\ p_r &= \psi_r(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n, t) \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

представляют собой общее решение уравнений движения, если величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ рассматривать как произвольные постоянные.

Таким образом, задача интегрирования приводится к определению преобразования, при котором последний член преобразованной дифференциальной формы есть полный дифференциал.

Упражнения.

1. Показать, что преобразование, определяемое равенствами:

$$Q_1 = q_1^2 + \lambda^2 p_1^2, \quad Q_2 = q_2^2 + \lambda^2 p_2^2,$$
$$P_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{q_1}{\lambda p_1}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{q_2}{\lambda p_2}\right), \quad P_2 = \lambda \operatorname{arctg}\left(\frac{q_2}{\lambda p_2}\right),$$

является контактным и что оно преобразует динамическую систему с гамильтоновой функцией $\dfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + \lambda^{-2} q_1^2 + \lambda^{-2} q_2^2)$ в динамическую систему с гамильтоновой функцией Q_2.

2. $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ суть произвольные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Пусть

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \cdots + p_n\,dq_n = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \cdots + X_{2n}\,dx_{2n},$$

и $a_{mn} = \dfrac{\partial X_m}{\partial x_n} - \dfrac{\partial X_n}{\partial x_m}$ определитель, составленный из a_{mn}, A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}, деленное на D и u, v — произвольные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Показать, что

$$\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial u}{\partial q_r}\frac{\partial v}{\partial p_r} - \frac{\partial u}{\partial p_r}\frac{\partial v}{\partial q_r}\right) = \sum_{i=1}^{2n}\sum_{k=1}^{2n} A_{ik}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}.$$

(Clebsch.)

3. Показать, что для всякой гамильтоновой системы интегральные инварианты:

$$\iint \ldots \int \delta q_1 \, \delta q_2 \ldots \delta q_n \, \delta p_1 \, \delta p_2 \ldots \delta p_n,$$
$$\iint \ldots \int \delta Q_1 \, \delta Q_2 \ldots \delta Q_n \, \delta P_1 \, \delta P_2 \ldots \delta P_n,$$

где интегрирование распространено на соответствующие друг другу области, равны между собой, если $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, P_1, P_2, \ldots, P_n$ связаны между собой контактным преобразованием.

4. Показать, что контактное преобразование, определяемое равенствами:

$$q_1 = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}(2Q_1)^{\frac{1}{2}} \cos P_1 + \lambda_2^{-\frac{1}{2}}(2Q_2)^{\frac{1}{2}} \cos P_2,$$

$$q_2 = -\lambda_1^{-\frac{1}{2}}(2Q_1)^{\frac{1}{2}} \cos P_1 + \lambda_2^{-\frac{1}{2}}(2Q_2)^{\frac{1}{2}} \cos P_2,$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(2\lambda_1 Q_1)^{\frac{1}{2}} \sin P_1 + \frac{1}{2}(2\lambda_2 Q_2)^{\frac{1}{2}} \sin P_2,$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(2\lambda_1 Q_1)^{\frac{1}{2}} \sin P_1 + \frac{1}{2}(2\lambda_2 Q_2)^{\frac{1}{2}} \sin P_2,$$

преобразует систему:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

где

$$H = p_1^2 + p_2^2 + \frac{1}{8}\lambda_1^2(q_1 - q_2)^2 + \frac{1}{8}\lambda_2^2(q_1 + q_2)^2,$$

в систему:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

где

$$K = \lambda_1 Q_1 - \lambda_2 Q_2.$$

Проинтегрировать эту систему и тем самым также и первоначальную.

Глава XII
Свойства интегралов динамических систем

§ 141. Понижение порядка системы Гамильтона при помощи интеграла энергии. В § 42 мы показали, что, используя интеграл энергии, можно понизить порядок лагранжевой системы уравнений движения консервативной голономной системы. Мы хотим теперь доказать аналогичную теорему и относительно систем уравнений движений в форме Гамильтона.

Допустим, что функция Гамильтона H какой-нибудь динамической системы с n степенями свободы не содержит явно времени, так что интеграл энергии имеет вид:

$$H + h = 0$$

где h — некоторая постоянная.

Разрешив это уравнение относительно p_1, представим его в виде:

$$p_1 - K(p_2, p_3, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, h) = 0.$$

Системе соответствует дифференциальная форма

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_n\, dq_n + h\, dt,$$

переменные которой $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ связаны предыдущим уравнением. Поэтому эта дифференциальная форма преобразуется в форму: $p_2\, dq_2 + p_3\, dq_3 + \cdots + p_n\, dq_n + h\, dt - K(p_2, p_3, \ldots, p_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, h)\, dq_1$ с $2n+1$ переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, h, t$.

Но этой форме соответствуют (§ 137) дифференциальные уравнения:

$$\frac{dq_r}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_r}, \frac{dp_r}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_r}, \quad (r = 2, 3, \ldots, n),$$
$$\frac{dt}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial h}, \frac{dh}{dq_1} = 0.$$

Последние два уравнения могут быть отделены от остальных, ибо первые $2n-2$ уравнений не содержат явно времени, и h является постоянной. *Первоначальные дифференциальные уравнения могут быть, следовательно, заменены системой:*

$$\frac{dq_r}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial p_r}, \qquad (r = 2, 3, \ldots, n)$$

с $n-1$ степенями свободы.

Этот результат, как это может быть показано непосредственным преобразованием, эквивалентен результату, полученному в § 139.

Задача 1. Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}. \qquad (r = 1,\ 2),$$

где

$$H = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{2q_2^2}p_1^2 - \frac{\mu}{2q_2^2};$$

а μ — некоторая постоянная. Легко видеть, что они являются уравнениями движения материальной точки, притягиваемой неподвижным центром с силой, обратно пропорциональной третьей степени расстояния. Переменные q_2 и q_1 представляют собой полярные координаты (радиус-вектор и полярный угол) материальной точки относительно притягивающего центра.

Положим $H = -h$ и приведем систему при помощи предыдущей теоремы к виду:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_2}; \quad \frac{dp_2}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_2},$$

где

$$K = -\left(\mu - q_2^2 p_2^2 - 2hq_2^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как K не содержит явно координаты q_1, то последняя система имеет интеграл $K = \text{const}$. Поэтому мы можем повторить предыдущую операцию. Полагая $K = -k$, получим:

$$p_2 = \left(\frac{\mu - k^2}{q_2^2} - 2h\right)^{\frac{1}{2}} = -L.$$

Следовательно, система приводится к единственному уравнению:

$$\frac{dq_1}{dq_2} = \frac{\partial L}{\partial k} = \frac{k}{q_2^2}\left(\frac{\mu - k^2}{q_2^2} - 2h\right)^{-\frac{1}{2}},$$

интеграл которого (предполагая $\mu < k^2$) имеет вид:

$$q_2 = (k^2 - \mu)^{\frac{1}{2}}(-2h)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\cos\left\{\left(1 - \frac{\mu}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}(q_1 + \varepsilon)\right\}},$$

где ε — произвольная постоянная. Полученное уравнение определяет траектории в полярных координатах.

§ 142. Гамильтоново уравнение с частными производными. Если переменные динамической системы, определяемой уравнениями:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

подвергнуть контактному преобразованию, определяемому уравнениями:

$$P_r = -\frac{\partial W}{\partial Q_r}, \quad p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \qquad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где W есть заданная функция величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, t$, то согласно § 138 система уравнений движения примет вид:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$K = H + \frac{\partial W}{\partial t}.$$

И если эта функция K равна нулю, то говорят, что задача сведена к задаче равновесия. Но функция K обращается в нуль, когда W удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(q_1, q_2, \ldots, q_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, t) + \\ + H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = 0,$$

т. е. когда величина W, рассматриваемая как функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) = 0.$$

Это уравнение называется *гамильтоновым уравнением с частными производными*, соответствующим данной динамической системе. Оно открыто Гамильтоном в 1834 г.[1] и является распространением на динамику уравнения, открытого им десятью годами раньше в связи с исследованием по оптике.

Допустим, что известен полный интеграл этого уравнения, т. е. решение, содержащее n произвольных постоянных наряду с аддитивной постоянной. Пусть эти постоянные будут $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, так что решение имеет вид:

$$W(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t).$$

Преобразуем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ первоначальной динамической системы в переменные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \quad \beta_r = \frac{\partial W}{\partial \alpha_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как W удовлетворяет уравнению Гамильтона, то гамильтонова функция преобразованной системы будет равна нулю, и, следовательно, новыми уравнениями движения будут:

$$\frac{d\alpha_r}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_r}{dt} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

[1] Phil. Trans., стр. 247, 1834; там же, стр. 95, 1835.

так что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в течение всего движения сохраняют постоянные значения.

Отсюда следует, что *если W есть полный интеграл уравнения Гамильтона, содержащий n произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то уравнения:*

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \quad \beta_r = -\frac{\partial W}{\partial \alpha_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

дают полное решение динамической задачи, так как они дают возможность выразить $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ через время t и $2n$ произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$[1]. Таким образом, решение динамической задачи с n степенями свободы приводится к нахождению полного интеграла одного уравнения с частными производными первого порядка с $n+1$ независимыми переменными.

Следует заметить, что обратная теорема о том, что решение уравнения с частными производными типа Гамильтона приводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений (дифференциальных уравнений характеристик), имеющей в рассматриваемом случае форму Гамильтона, высказана Пфаффом и Коши в развитие еще более ранних исследований Лагранжа и Монжа, еще до того как Гамильтон и Якоби начали заниматься вопросами динамики.

Относительно использования неполного интеграла уравнения Гамильтона (т. е. интеграла, содержащего менее чем n произвольных постоянных) см. *Lehmann–Filhes*, Astr. Nachr., т. 165, стр. 209, 1904.

Далее, следует заметить, что уравнение Гамильтона в вышеприведенной форме несправедливо для неголономных систем. Относительно обобщенного уравнения, справедливого и для неголономных систем, см. Quanjel, Rendiconti di Palermo, т. 22, стр. 263, 1906.

Интегрирование уравнения Гамильтона разделением переменных исследовал Даллаква (*F. A. Dall'Acqua*, Math. Ann., т. 66, стр. 398, 1908).

Задача 1. Рассмотрим систему:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{\mu}{q}$$

а μ — некоторая постоянная. Этой системе соответствует уравнение Гамильтона:

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)^2 - \frac{\mu}{q},$$

полный интеграл которого может быть найден следующим образом. Положим

$$W = f(t) + \varphi(q),$$

[1] Эта теорема принадлежит Якоби (Journ. f. Math., т. 27, стр. 97, 1837 и Journ. de Math., т. 3, стр. 60, 161, 1837).

где f и φ — некоторые функции своих аргументов. Тогда

$$0 = f'(t) + \frac{1}{2}\{\varphi'(q)\}^2 - \frac{\mu}{q}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, полагая

$$f'(t) = \frac{\mu}{q} - \frac{1}{2}\{\varphi'(q)\}^2 = \frac{\mu}{\alpha},$$

где α — некоторая постоянная. Это дает:

$$f(t) = \mu\frac{t}{\alpha}, \quad \varphi(q) = (2\mu\alpha)^{\frac{1}{2}} \arcsin\left(\frac{q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \left\{\frac{2\mu q(\alpha - q)}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$W = \mu\frac{t}{\alpha} + (2\mu\alpha)^{\frac{1}{2}} \arcsin\left(\frac{q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} + \left\{\frac{2\mu q(\alpha - q)}{\alpha}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому решение первоначальной задачи дается уравнениями $\beta = -\dfrac{\partial W}{\partial \alpha}$, $p = \dfrac{\partial W}{\partial q}$, где α и β — постоянные интегрирования.

§ 143. Интеграл Гамильтона как решение гамильтонова уравнения с частными производными. Уравнение Гамильтона имеет бесчисленное множество полных интегралов, каждый из которых определяет такое контактное преобразование переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ динамической системы в переменные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ (преобразование распространяется также и на t), при котором уравнения движения, выраженные в переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, переходят в уравнения соответствующей статической задачи, т. е. величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ являются постоянными.

Среди бесчисленного множества всех этих преобразований особенно интересным является то преобразование, при котором величины $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ совпадают с *начальными значениями* величин $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, т. е. с их значениями в начальный момент времени t_0. В этом случае можно дать явную форму соответствующему полному интегралу Гамильтона. Интеграл гамильтонова принципа (§ 99) есть:

$$\int_{t_0}^{t} L\,dt,$$

где L — кинетический потенциал динамической системы. Обозначим через δ вариацию, соответствующую малым изменениям $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2, \ldots, \delta\alpha_n, \delta\beta_1, \delta\beta_2, \ldots, \delta\beta_n$ начальных значений.

Тогда согласно § 99

$$\delta\int_{t_0}^{t} L\,dt - \sum_{r=1}^{n}(p_r\,\delta q_r - \beta_r\,\delta\alpha_r).$$

По выполнении интегрирования величина $\int\limits_{t_0}^{t} L\,dt$ будет представлена как функция от $q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t$, (мы предполагаем, что это возможно, т. е. что невозможно исключением $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ из уравнений, связывающих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, установить какие-нибудь уравнения, связывающие одни лишь величины $q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$). Полученную таким образом функцию Гамильтон назвал *главной функцией*. Обозначим ее через $W(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Тогда получим:

$$\frac{\partial W}{\partial q_r} = p_r, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_r} = \beta_r$$

Следовательно, *преобразование переменных* $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$, *в* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ *является контактным и интеграл от кинетического потенциала есть функция, определяющая это преобразование*[1].

Далее,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt}$$

или

$$L = \frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r$$

или

$$0 = \frac{\partial W}{\partial t} + H$$

Следовательно, *интеграл от кинетического потенциала удовлетворяет уравнению*:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) = 0,$$

т. е. уравнению Гамильтона.

Задача 1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ означают начальные значения (в момент t_0) переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ некоторой динамической системы, определяемой уравнениями:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

[1] *Hamilton*, Phil. Trans., стр. 307, 1834; там же, стр. 95, 1835. В своих первых динамических исследованиях Гамильтон пользовался «характеристической функцией», точно соответствующей характеристической функции, с большим успехом введенной в теоретическую оптику, именно интегралом действия как функцией начальных и конечных значений координат. Однако он нашел, что эта функция в динамике содержит константу энергии, и в силу этого заменил ее введенной выше главной функцией.

Предполагается, что из уравнений, связывающих $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ с $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ можно исключить $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ и получить, таким образом, некоторое число m уравнений, связывающих одни лишь величины $q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Предполагается далее, что последние разрешены относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и имеют, следовательно, вид:

$$F_r = f_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n, t) - \alpha_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Пусть V означает гамильтонов интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} L\,dt$ системы, выраженной через $q_1, q_2, \ldots, q_n, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$.

Вывести уравнения:

$$p_r = \frac{\partial V}{\partial q_r} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial q_r},$$

$$\beta_r = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_r} - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial \alpha_r};$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — произвольные множители, и показать, что функция

$$W = V + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$$

есть интеграл с частными производными:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_n}, t\right) = 0.$$

§ 144. Связь интегралов с бесконечно малыми преобразованиями системы. Пусть

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

уравнения любой динамической системы и пусть

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = \text{const}$$

один из ее интегралов. Мы покажем сейчас, что при помощи этого интеграла можно найти одно частное решение уравнений в вариациях (§ 112).

В самом деле, уравнение в вариациях для δq_r имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\delta q_r - \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_r}\delta q_1 + \cdots - \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_r}\delta q_n + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_r}\delta p_1 + \cdots + \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_r}\delta p_n;$$

но

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_r}\frac{\partial \varphi}{\partial p_1} + \dots + \frac{\partial^2 H}{\partial q_n \partial p_r}\frac{\partial \varphi}{\partial p_n} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_r}\frac{\partial \varphi}{\partial q_1} - \dots - \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_r}\frac{\partial \varphi}{\partial q_n} - \\
= \frac{\partial}{\partial p_r}\left(-\sum_{k=1}^{n}\frac{dp_k}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial p_k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{dq_k}{dt}\frac{\partial \varphi}{\partial q_k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_k \partial p_r} - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_k \partial p_r} = \\
= \frac{\partial}{\partial p_r}\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_r}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_r}\right).
\end{gathered}
$$

Поэтому уравнениям в вариациях для $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_n$ можно удовлетворить значениями:

$$
\delta q_r = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}, \quad \delta p_r = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \dots, n),
$$

где ε — очень малая постоянная. Аналогично можно показать, что те же значения удовлетворяют и уравнениям в вариациях для $\delta p_1, \delta p_2, \dots, \delta p_n$. Следовательно, *уравнения:*

$$
\delta q_r = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}, \quad \delta p_r = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}, \qquad (r = 1, 2, \dots, n),
$$

где ε — очень малая постоянная величина, а φ — интеграл первоначальной системы, представляют частное решение уравнений в вариациях.

Очевидно, этот результат может быть выражен следующим образом: Бесконечно малое контактное преобразование переменных $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n$, определяемое равенствами:

$$
\delta q_r = \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial p_r}, \quad \delta p_r = -\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \dots, n),
$$

преобразует всякую траекторию в бесконечно близкую траекторию и, следовательно, совокупность всех траекторий в самое себя. Выражаясь языком теории групп, мы можем сказать, что динамическая система *допускает* это бесконечно малое преобразование. Таким образом, имеет место теорема: *Интегралы динамической системы и контактные преобразования, переводящие систему в самое себя, представляют собой по сути дела одно и то же. Каждому интегралу*

$$
\varphi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) = \mathrm{const}
$$

соответствует бесконечно малое контактное преобразование, символом которого (§ 133) *являются скобки Пуассона* (φ, f).

Очевидно, приведение системы при помощи циклических координат основано на частном случае этой теоремы, для которого интеграл имеет вид $p_r = \text{const}$, если q_r есть циклическая координата. Этому интегралу соответствует преобразование, при котором изменяется одна лишь координата q_r.

§ 145. Теорема Пуассона. Предыдущий результат приводит к одной теореме Пуассона[1], высказанной им в 1809 г. и дающей возможность по двум известным интегралам динамической системы получить новое выражение, остающееся постоянным вдоль всякой траектории и дающее, следовательно (если оно независимо от уже известных двух интегралов), новый интеграл системы.

Пусть двумя известными интегралами будут:

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = \text{const},$$
$$\psi(q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = \text{const}.$$

Рассмотрим бесконечно малое контактное преобразование с символом (ψ, f). Так как ψ есть интеграл системы, то это преобразование переводит (§ 144) одни траектории в другие, бесконечно близкие.

При этом преобразовании функция ψ получает приращение $\varepsilon(\varphi, \psi)$, где ε — очень малая постоянная величина. Но так как величина φ является интегралом, то она сохраняет постоянные значения как на первоначальной, так и на бесконечно близкой траекториях. Следовательно, величина (φ, ψ) не должна изменяться в течение всего движения. Мы получаем, таким образом, теорему Пуассона: *Если φ и ψ суть два интеграла системы, то скобка Пуассона (φ, ψ) в течение всего движения остается постоянной.*

Если выражение (φ, ψ), являющееся функцией переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n; p_1, p_2, \ldots, p_n; t$ не сводится к постоянной и не может быть выражено как функция от φ и ψ или других известных интегралов, то уравнение

$$(\varphi, \psi) = \text{const}$$

есть новый интеграл системы[1].

Следующий пример показывает, как можно применить теорему Пуассона для получения нового интеграла динамической системы, если два таких интеграла уже известны.

Рассмотрим движение свободной материальной точки с массой, равной единице, с прямоугольными координатами q_1, q_2, q_3 и с компонентами скорости p_1, p_2, p_3 под действием центральной силы с центром в начале координат.

Интегралы моментов количества движения относительно двух осей имеют вид:

$$p_3 q_2 - q_3 p_2 = \text{const},$$
$$p_1 q_3 - q_1 p_3 = \text{const}.$$

[1] Journal de l'Ecole polyt., т. 8, стр. 266, 1809.

[1] Эту теорему разбирает Бертран в примечании VII к третьему изданию «Mec. Annal.» Лагранжа (1853); см. также *Lagrange*, Oeuvres, т. II, стр. 484. Относительно обобщения теоремы Пуассона на неголономные системы см. *Dautheville*, Bull. de la Soc. math. de France, т. 37, стр. 120, 1909.

Мы их рассматриваем как два известных интеграла φ и ψ; тогда скобка Пуассона будет равна:

$$(\varphi, \psi) = \sum_{r=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \frac{\partial \psi}{\partial p_r} \quad \frac{\partial \psi}{\partial q_r} \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \right) = p_2 q_1 \quad q_2 p_1.$$

И действительно, уравнение

$$p_2 q_1 - q_2 p_1 = \mathrm{const}$$

есть новый интеграл системы, а именно интеграл момента количества движения относительно третьей оси.

§ 146. Теорема Лагранжа. Теорема Пуассона, как это и следовало ожидать, имеет аналог и в теории скобок Лагранжа.

Пусть интегралы

$$u_r = a_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2n)$$

представляют полное решение динамической системы с n степенями свободы. Здесь величины u_r суть известные функции переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$, а a_r произвольные постоянные. При помощи этих уравнений можно выразить $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ как функции от $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ и от t и составить скобки Лагранжа $[a_r, a_s]$, где a_r и a_s — две произвольные величины из ряда $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$.

Так как переход от значений переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ в момент времени t к их значениям в момент времени $t + \Delta t$ есть контактное преобразование, то (§ 128)

$$\frac{d}{dt} \sum_{r=1}^{n} (\Delta q_r \, \delta p_r - \delta q_r \, \Delta p_r) = 0,$$

где Δ и δ означают символы двух независимых переходов от какой-нибудь траектории к двум другим бесконечно близким траекториям. Если обозначить через δ вариацию, при которой из всех величин $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ изменяется одна лишь величина a_i, а через δ вариацию, при которой изменяется лишь a_j, то предыдущее уравнение переходит в

$$\frac{d}{dt} \sum_{r=1}^{n} \left(\frac{\partial q_r}{\partial a_i} \frac{\partial p_r}{\partial a_j} - \frac{\partial q_r}{\partial a_j} \frac{\partial p_r}{\partial a_i} \right) - 0$$

или

$$\frac{d}{dt} [a_i, a_j] = 0,$$

т. е. скобка Лагранжа $[a_i, a_j]$ *в течение всего движения остается постоянной вдоль всякой траектории.* Эта теорема высказана Лагранжем в 1808 г.

Теорема Лагранжа в противоположность теореме Пуассона не дает возможности нахождения новых интегралов, ибо для вычисления скобки Лагранжа нужно предварительно знать все интегралы системы.

§ 147. Система в инволюции. Пусть даны r функций $u_1, u_2, \ldots, u_r$ от $2n$ независимых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Если все скобки Пуассона (u_i, u_k) могут быть выражены через $u_1, u_2, \ldots, u_r$, то говорят, что функции $u_1, u_2, \ldots, u_r$ образуют группу[1]. Каждая из функций $u_1, u_2, \ldots, u_r$ принадлежит к этой группе.

Если все величины (u_i, u_k) равны нулю, то говорят, что функции $u_1, u_2, \ldots, u_r$ находятся в *инволюции* друг к другу или что они образуют систему в *инволюции.*

Допустим, что $u_1, u_2, \ldots, u_r$ находятся в инволюции, а уравнения $v = 0$, $w = 0$ являются следствиями уравнений:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots, \quad u_r = 0.$$

Покажем, что v и w удовлетворяют уравнению:

$$(v, w) = 0.$$

В самом деле, так как $u_1, u_2, \ldots, u_r$ находятся в инволюции, то каждое из уравнений $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_r = 0$ допускает r бесконечно малых преобразований с символами:

$$(u_1, f), \quad (u_2, f), \quad \ldots, \quad (u_r, f).$$

Так как уравнение $v = 0$ является следствием этих уравнений, то и оно допускает все эти преобразования. Это означает, что

$$(u_k, v) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Следовательно, каждое из уравнений $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_r = 0$ допускает бесконечно малое преобразование с символом (v, f). Но уравнение $w = 0$ является следствием этих уравнений, и потому оно также должно допускать это преобразование. Поэтому

$$(v, w) = 0,$$

что и доказывает наше предположение.

Имеем, следовательно: *если функции $u_1, u_2, \ldots, u_r$ находятся в инволюции и уравнения*:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = 0, \quad \ldots, \quad v_r = 0$$

[1] *Lie*, Math. Ann., т. 8, стр. 215, 1875.

являются следствиями уравнений:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \dots, \quad u_r = 0,$$

то и функции $v_1, v_2, \dots, v_r$ находятся также в инволюции.

§ 148. Решение динамической задачи с n степенями свободы, для которой известны n интегралов. Теорема § 121, доказанная для системы с двумя степенями свободы, может быть теперь распространена на систему с любым числом степеней свободы. Эта теорема гласит[2]. *Пусть уравнения:*

$$\varphi(q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t) = a_r \qquad (r = 1, 2, \dots, n)$$

с произвольными постоянными $a_1, a_2, \dots, a_n$ представляют собой n известных независимых интегралов динамической системы:

$$\frac{dq_r}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} - -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r - 1, 2, \dots, n),$$

где H есть данная функция от $q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n, t$, а функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ находятся в инволюции.

Если систему уравнений $\varphi_r = a_r$ разрешить относительно p_1, $p_2, \dots, p_n$ и полученные выражения:

$$p_r = f_r(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n, t) \qquad (r = 1, 2, \dots. n)$$

вставить в выражение:

$$p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 + \dots + p_n\,dq_n - H\,dt$$

то оно перейдет в полный дифференциал:

$$dV(q_1, q_2, \dots, q_n, a_1, a_2, \dots, a_n, t),$$

и остальные интегралы системы выразятся уравнениями:

$$\frac{\partial V}{\partial a_r} = b_r \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

где $b_1, b_2, \dots, b_n$ произвольные постоянные.

В самом деле, так как функции $\varphi_1 - a_1, \varphi_2 - a_2, \dots, \varphi_n - a_n$ находятся в инволюции, то согласно предыдущему параграфу то же самое будет иметь место и по отношению к функциям $p_1 - f_1, p_2 - f_2, \dots, p_n - f_n$.

[2] Эта теорема содержит в основном известный метод полного решения нелинейного уравнения с частными производными в его приложении к уравнению Гамильтона. Как теорема динамики она была высказана Лиувиллем (Journ. d. Math., т. 20, стр. 137, 1855).

Поэтому

$$(p_r - f_r,\, p_s - f_s) = 0 \qquad (r,\, s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

или

$$\frac{\partial f_s}{\partial q_r} - \frac{\partial f_r}{\partial q_s} = 0 \qquad (r,\, s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n).$$

Далее, имеем:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_r} = \frac{dp_r}{dt} = \frac{df_r}{dt} = \frac{\partial f_r}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial q_s}\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial f_r}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial f_s}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_s}$$

и поэтому

$$\frac{\partial f_r}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial q_r} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_r},$$

где H_1 есть H, выраженное как функция аргументов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $a_1, a_2, \ldots, a_n, t$.

Уравнения:

$$\frac{\partial f_s}{\partial q_r} = \frac{\partial f_r}{\partial q_s}, \qquad \frac{\partial f_r}{\partial t} = -\frac{\partial H_1}{\partial q_r}$$

показывают, что

$$f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 + \cdots + f_n\, dq_n - H_1\, dt$$

есть полный дифференциал некоторой функции $V(q_1, q_2, \ldots, q_n, a_1, a_2, \ldots, a_n, t)$, чем и доказывается первая часть теоремы.

Обозначая теперь d полный дифференциал функции V относительно всех ее аргументов, будем иметь:

$$dV = f_1\, dq_1 + f_2\, dq_2 + \cdots + f_n\, dq_n - H_1\, dt + \sum_r \frac{\partial V}{\partial a_r}\, da_r.$$

Если в этом уравнении заменить величины a_r их значениями φ_r, то оно перейдет в тождество относительно $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t$

$$dV - \sum_r \frac{\partial V}{\partial a_r} d\varphi_r = p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_n\, dq_n - H\, dt,$$

в левой части которого величины $a_1, a_2, \ldots, a_n$, входящие в dV и $\sum \dfrac{\partial V}{\partial a_r}$, должны быть заменены их значениями $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Это тождество показывает, что дифференциальная форма

$$p_1\, dq_1 + p_2\, dq_2 + \cdots + p_n\, dq_n - H\, dt$$

выраженная в переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, t$ переходит в

$$-\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial a_r} d\varphi_r + dV$$

и что, следовательно, система дифференциальных уравнений первоначальной динамической задачи эквивалентна первой системе Пфаффа этой дифференциальной формы, а именно системе:

$$d\left(\frac{\partial V}{\partial a_r}\right) = 0, \quad d\varphi_r = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, величины $\dfrac{\partial V}{\partial a_r}$ остаются постоянными в течение всего движения, т. е. уравнения:

$$\frac{\partial V}{\partial a_r} = b_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — новые произвольные постоянные, являются интегралами системы. Таким образом, теорема полностью доказана.

Задача 1. В движении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки ϑ, φ, ψ означают углы Эйлера, определяющие положение тела относительно произвольных подвижных осей $OXYZ$, проходящих через неподвижную точку, A, B, C — главные моменты инерции тела в неподвижной точке, a — постоянную энергии, a_1 — момент количества движения относительно неподвижной оси OZ и a_2 — момент количества движения относительно перпендикуляра к неизменяемой плоскости. Далее, пусть $\vartheta_1, \varphi_1, \psi_1$ означают соответственно величины $\dfrac{\partial T}{\partial\dot\vartheta}$, $\dfrac{\partial T}{\partial\dot\varphi}$, $\dfrac{\partial T}{\partial\dot\psi}$. Вывести уравнения:

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left\{\frac{(a_2^2 - a_1^2 - \vartheta_1^2)^{\frac{1}{2}}}{a_1}\right\} - \operatorname{arctg}\left\{\frac{(a_2^2 - \psi_1^2 - \vartheta_1^2)^{\frac{1}{2}}}{\psi_1}\right\};$$

$$\varphi_1 = -a_1,$$

$$\frac{\pi}{2} - \psi = \operatorname{arctg}\left\{\vartheta_1(a_2^2 - \psi_1^2 - \vartheta_1^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} - \operatorname{arctg}\left\{-\frac{A(2Ba - a_2^2)C + (C-B)\psi_1^2}{B(2Aa - a_2^2)C - (C-A)\psi_1^2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Показать далее, что

$$\vartheta\, d\vartheta_1 + \psi\, d\psi_1 + a_1\, d\varphi$$

есть полный дифференциал некоторой функции V и что остальными интегралами системы будут:

$$\frac{\partial T}{\partial a} = b - t, \quad \frac{\partial T}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial T}{\partial a_2} = b_2,$$

где b, b_1, b_2 произвольные постоянные. (Siacci.)

§ 149. Теорема Леви–Чивита. Леви Чивита[1] установил зависимость, существующую между интегралами динамической системы и некоторыми семействами частных решений уравнений движения.

Рассмотрим сначала систему с некоторым числом циклических координат, и пусть эти циклические координаты будут $q_1, q_2, \ldots, q_m$, а нециклические координаты — $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$; кинетический потенциал системы обозначим через L.

Циклическим координатам соответствуют интегралы:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = \text{const} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m);$$

им соответствует определенная совокупность частных решений системы, а именно совокупность тех стационарных движений (§ 83), для которых $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ имеют постоянные, произвольно выбираемые значения, а постоянные значения $q_{m+1}, q_{m+2}, \ldots, q_n$ определяются из уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Так как m постоянных значений величин $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ и m начальных значений величин $q_1, q_2, \ldots, q_m$ выбираются совершенно произвольно, то имеем ∞^{2m} таких частных решений. Теорема Леви Чивита, к выводу которой мы сейчас переходим, является обобщением этого результата.

Пусть

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

уравнения движения некоторой динамической системы, для которой функция H не содержат явно времени.

Пусть, далее,

$$F_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

некоторая система M уравнений, которая, будучи разрешена относительно $p_1, p_2, \ldots, p_m$, переходит в систему:

$$p_r = f_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

и *инвариантна* относительно уравнений Гамильтона, т. е. дифференцирование уравнений (2) по времени даст уравнения, которые выполняются тождественно в силу уравнений Гамильтона и (2).

[1] Rend. della R. Acc. dei Lincei, т. 10, стр. 3, 1901; см. *Burgatti*, там же, т. 11, стр. 309, 1902.

Эти инвариантные уравнения охватывают отдельные интегралы системы, в этом случае они содержат произвольные постоянные.

В силу инвариантности уравнений (2) имеем:

$$-\frac{\partial H}{\partial q_r} = \frac{df_r}{dt} = -\sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial p_j}\frac{\partial H}{\partial q_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_r}{\partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m).$$

Полагая

$$\{V, W\} = \sum_{j=m+1}^{n} \left(\frac{\partial V}{\partial p_j}\frac{\partial W}{\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\frac{\partial W}{\partial p_j}\right),$$

отсюда получим:

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} + \{H, f_r\} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_r}{\partial q_s} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

Это уравнение переходит в тождество, если каждую из величин $p_1, p_2, \ldots, p_n$ заменить соответствующей функцией f_r.

Кроме того, мы предполагаем, что уравнения (1) или (2) находятся в инволюции. Это условие дает:

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_s} - \frac{\partial f_s}{\partial q_r}\{f_r, f_s\} = 0 \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

Обозначим через K функцию, в которую переходит величина H, если в ней заменить $p_1, p_2, \ldots, p_m$ их значениями $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_r} &= \frac{\partial K}{\partial p_r} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial p_r} \\ \frac{\partial H}{\partial q_r} &= \frac{\partial K}{\partial q_r} - \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial q_r} \end{aligned}\right\} \quad (r = m+1, m-2, \ldots, n), \tag{5}$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} = \frac{\partial K}{\partial q_r} \quad \sum_{s-1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Из (5) следует:

$$\{H, f_r\} = \{K, f_r\} + \sum_{s-1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\{f_r, f_s\} \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

что вместе с (6) даст:

$$\frac{\partial H}{\partial q_r} + \{H, f_r\} = \frac{\partial K}{\partial q_r} + \{K, f_r\} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\left[-\frac{\partial f_s}{\partial q_r} + \{f_r, f_s\}\right].$$

Вводя это значение величины $\dfrac{\partial H}{\partial q_r} + \{H, f_r\}$ в (3) и используя (4), получим уравнения:

$$\frac{\partial K}{\partial q_r} + \{K, f_r\} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Мы покажем теперь, что система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} p_r = f_r(p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n) \quad (r = 1, 2, \ldots, m)\\ \frac{\partial K}{\partial p_r} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial q_r} = 0 \quad (r = m+1, m+2, \ldots, n)\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

инвариантна относительно уравнений Гамильтона, т. е. что величины:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_r}\right) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_r}\right) \qquad (r = m+1, m+2, \ldots, n)$$

обращаются в нуль в силу уравнений (1), (8), (3), (4), (5), (6) и (7).

Из уравнений Гамильтона следует, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_r}\right) = \left\{H, \frac{\partial K}{\partial p_r}\right\} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_r}\right) = \left\{H, \frac{\partial K}{\partial q_r}\right\} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}\end{aligned}\right\} \quad (r = m-1, \ldots, n). \tag{9}$$

Дифференцируя (7) и принимая во внимание (8), получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial q_s} + \left\{\frac{\partial K}{\partial p_r}, f_s\right\} = 0,\\ \frac{\partial^2 K}{\partial q_r \partial q_s} + \left\{\frac{\partial K}{\partial q_r}, f_s\right\} = 0\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(s = 1, 2, \ldots, m;\\ r = m+1, m+2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{10}$$

Из (5), принимая во внимание (8), вытекает:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_r} = -\sum_{s-1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial p_r}\\ \frac{\partial H}{\partial q_r} = -\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial f_s}{\partial q_r}\end{aligned}\right\} \qquad (r - m+1, m+2, \ldots, n).$$

Поэтому уравнения (9) переходят в

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_r}\right) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial q_s} + \left\{\frac{\partial K}{\partial p_r}, f_s\right\}\right]\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_r}\right) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial p_s}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial p_r \partial q_s} + \left\{\frac{\partial K}{\partial q_r}, f_s\right\}\right]\end{aligned}\right\} (r = m+1, m+2, \ldots, n)$$

или в силу (10)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial p_r}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial q_r}\right) = 0 \qquad (r = m+1, m+2, \ldots, n).$$

Следовательно, система уравнений (1) и (8) инвариантна относительно уравнений Гамильтона.

Выразим теперь при помощи (1) и (8) переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $q_{m+1}, \ldots, q_n$ через $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Подставляя эти значения в уравнения Гамильтона, в силу инвариантности уравнений (1) и (8), мы получим m независимых уравнений, выражающих $\dfrac{dq_1}{dt}, \dfrac{dq_2}{dt}, \ldots, \dfrac{dq_m}{dt}$ в виде функций от $q_1, q_2, \ldots, q_m$; остальные уравнения будут удовлетворяться тождественно. Общее решение этой системы, содержащее m произвольных постоянных, даст ∞^m частных решений Гамильтона. Интегрирование этой системы на основании интеграла энергии приводится к интегрированию системы $(m-1)$-го порядка. Таким образом, получается теорема Леви–Чивита: *Каждой системе из m инвариантных уравнений, находящихся в инволюции и принадлежащих некоторой гамильтоновой системе, соответствует совокупность ∞^m частных решений системы Гамильтона, определение которых зависит от интегрирования системы $(m-1)$-го порядка.*

Если инвариантные уравнения (1) являются интегралами системы, то они содержат m новых произвольных постоянных. *Системе из интегралов уравнений Гамильтона, находящейся в инволюции, соответствует в общем случае совокупность ∞^{2m} частных решений этих уравнений, определение которых зависит от интегрирования некоторой системы $(m-1)$-го порядка.*

Задача 1. Показать, что в динамической системе, определяемой функцией Гамильтона

$$H = q_1p_1 - q_2p_2 - aq_1^2 + bq_2^2,$$

интегралу

$$\frac{p_2 - bq_2}{q_1} = \mathrm{const}$$

соответствуют (по Леви–Чивита) частные решения:

$$q_1 = 0, \quad q_2 = e^{-t+\varepsilon}, \quad p_1 = ae^{-t+\varepsilon}, \quad p_2 = be^{-t+\varepsilon},$$

где ε — произвольная постоянная.

§ 150. Системы с интегралами, линейными относительно импульсов. Мы переходим теперь к изучению систем, допускающих интегралы частного вида.

Пусть динамическая система, определяемая уравнениями:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

допускает интеграл:

$$f_1p_1 + f_2p_2 + \cdots + f_np_n = \text{const},$$

линейный и однородный относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Здесь $f_1, f_2, \ldots, f_n$ суть некоторые данные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Рассмотрим систему уравнений $(n-1)$-го порядка:

$$\frac{dq_1}{f_1} = \frac{dq_2}{f_2} = \cdots = \frac{dq_n}{f_n}.$$

Пусть ее система решений состоит из $n-1$ интегралов

$$Q_r(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \text{const} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1),$$

и пусть функция Q_n определяется уравнением:

$$Q_n = \int \frac{dq_1}{f_1},$$

где в выражении f_1 величины $q_2, q_3, \ldots, q_n$ следует заменить их выражениями через $q_1, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$.

Если переменные изменяются таким образом, что изменяется лишь только величина Q_n, а величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}$ остаются постоянными, то в силу предыдущего уравнения получаем:

$$\frac{dq_1}{f_1} = \frac{dq_2}{f_2} = \cdots = \frac{dq_n}{f_n} = dQ_n.$$

Следовательно, если величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ будем рассматривать как новые переменные, через которые могут быть выражены старые переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то

$$\frac{\partial q_k}{\partial Q_n} = f_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Рассмотрим теперь контактное преобразование, являющееся расширением точечного преобразования из переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, так что новые переменные $P_1, P_2, \ldots, P_n$ определяются (132) уравнениями:

$$P_r = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

В силу этого преобразования дифференциальные уравнения динамической системы переходят в новую систему Гамильтона:

$$\frac{dQ_r}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P_r}, \quad \frac{dP_r}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

а известный интеграл в

$$P_n = \text{const}.$$

Так как $\dfrac{dP_n}{dt} = 0$, то $\dfrac{\partial K}{\partial Q_n} = 0$ и, следовательно, K не содержит явно Q_n. Таким образом, получаем теорему: *Если динамическая система допускает интеграл, линейный и однородный относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то всегда существует такое точечное преобразование переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ в новые переменные $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, при котором преобразованная функция Гамильтона не содержит явно Q_n.* Преобразованная система имеет, следовательно, циклическую координату, и мы имеем теорему: *Интегралами, линейными относительно импульсов, обладают только такие динамические системы, которые либо имеют циклические координаты, либо могут быть преобразованы в системы с циклическими координатами при помощи расширенного точечного преобразования.*

Обратная теорема, очевидно, также справедлива.

Этот результат может быть также получен и из теоремы (§ 144), т. е. что дифференциальные уравнения движения допускают бесконечно малое преобразование с символом (φ, f), если

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = \text{const}$$

есть интеграл системы. В самом деле, если функция φ линейна и однородна относительно $p_1, p_2, \ldots, p_n$, то это преобразование (§ 132) является расширенным точечным преобразованием. Если это точечное преобразование при помощи преобразования координат преобразовано в точечное преобразование с символом $\dfrac{\partial f}{\partial Q_n}$, то функция преобразованных уравнений Гамильтона не может, очевидно, явно зависеть от Q_n.

Рассмотрим теперь систему частного вида, у которой кинетический потенциал складывается из кинетической энергии $T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n)$, являющейся квадратичной функцией скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, и из потенциальной энергии $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, которая от скоростей не зависит. Для того чтобы эта система допускала интеграл, линейный относительно скоростей, необходимо, чтобы она либо имела циклическую координату, либо могла быть переведенной в такую систему при помощи точечного преобразования. Но в обоих случаях функции T и V допускают одно и то же бесконечно малое преобразование, а именно то преобразование, которое соответствует бесконечно малому изменению одной лишь циклической координаты, при неизменных остальных координатах и скоростях, если координаты выбраны таким образом, что одна из них является циклической. Обратно, если T и V допускают одно и то же бесконечно малое преобразование, то система допускает интеграл, линейный относительно скоростей. Этот результат представляет собой *теорему Леви* (Lévy)[1], опубликованную им в 1878 г.

[1] Comptes Rendus, т. 86.

Задача 1. Показать, что если уравнения движения материальной точки допускают интеграл, линейный относительно импульсов, то направление действия силы принадлежит к некоторому линейному комплексу (*Cerruti*, Collect. math. in mem. D. Chetini. Ср. *P. Grossi*, Rend. di Palermo, т. 24, стр. 25, 1907)

Задача 2. Пусть уравнения:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где $T = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k$, а $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ суть данные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, допускают интеграл:

$$C_1\dot q_1 + C_2\dot q_2 + \cdots + C_n\dot q_n + C = \mathrm{const},$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Показать, что неизменяемая система может быть перемещена в некотором направлении из любого положения в пространстве S_n, определяемого формой:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d\dot q_i\, d\dot q_k.$$

Показать, что необходимое и достаточное условие для этого заключается в том, что ds^2 может быть преобразован таким образом, что коэффициенты не будут содержать одной из переменных. (Cerruti и Lévy.)

§ 151. Определение сил, действующих на систему, если известен один из ее интегралов. Прежде чем перейти к исследованию систем, допускающих интегралы, квадратичные относительно скоростей, выведем одну теорему, высказанную Бертраном[1]: Если при движении динамической системы известна кинетическая энергия, но неизвестны действующие силы (зависящие, однако, лишь только от координат точек приложения, но не от скоростей), то эти силы могут быть определены, если известен один интеграл. Кроме того, этот интеграл не может быть выбран совершенно произвольно, он должен удовлетворять некоторым определенным условиям.

Пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ суть n независимых координат, определяющих положение системы, а T — ее кинетическая энергия. Обозначим неизвестные силы, являющиеся функциями одних лишь координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$, через $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Тогда уравнениями движения будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть

$$\varphi(\dot q_1, \dot q_2, \ldots, \dot q_n, q_1, q_2, \ldots, q_n, t) = \mathrm{const}$$

[1] Journ. de Math., т. 17, стр. 121, 1852.

один из интегралов системы. Дифференцируя его, получаем:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Вводя в это уравнение значения $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_n$ из уравнений движения, получим уравнение в $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, линейное относительно этих величин. Это уравнение должно удовлетворяться тождественно, так как оно содержит одни лишь величины $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, q_1, q_2, \ldots, q_n$, которым всегда можно придать произвольные независимые значения. Дифференцируя это тождество по $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, мы получим n новых уравнений, также линейных относительно $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, из которых эти величины могут быть вычислены. Интеграл тогда и только тогда действительно принадлежит некоторой динамической системе, если полученные величины $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ удовлетворяют уравнению:

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_r} \ddot{q}_r + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} \dot{q}_r + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Если уравнения, определяющие $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, не являются независимыми, так что $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ остаются неопределенными, то данный интеграл принадлежит нескольким отличным друг от друга динамическим задачам.

Задача 1. Показать, что интеграл уравнений плоского движения материальной точки, принадлежащий двум различным динамическим задачам, должен необходимо иметь вид:

$$F(\varphi', x, y, t) = \text{const},$$

где x, y — прямоугольные координаты точки, а $\varphi'(x, y)$ означает производную по времени от некоторой функции $\varphi(x, y)$, которая, будучи приравнена постоянной, даст уравнение семейства прямых. (Bertrand.)

§ 152. Приложение к задаче движения материальной точки, уравнения движения которой допускают квадратичный относительно скоростей интеграл. В качестве приложения метода Бертрана рассмотрим следующую задачу: Какого вида должна быть потенциальная энергия V, для того чтобы уравнения плоского движения материальной точки под действием консервативных сил

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

допускали помимо интеграла энергии еще и интеграл вида:

$$P\dot{x}^2 + Q\dot{x}\dot{y} + R\dot{y}^2 + S\dot{y} + T\dot{x} + K = \text{const},$$

где P, Q, S, T, K означают функции от x, y.

Дифференцируя последнее уравнение и вводя значения $\ddot{x}$ и $\ddot{y}$ уравнений движения, получим:

$$\begin{gathered}\dot{x}^3\frac{\partial P}{\partial x}+\dot{y}^3\frac{\partial R}{\partial y}+\dot{x}^2\dot{y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)+\dot{y}^2\dot{x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)-\\ -2P\dot{x}\frac{\partial V}{\partial x}-Q\left(\dot{x}\frac{\partial V}{\partial y}+\dot{y}\frac{\partial V}{\partial x}\right)-2R\dot{y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial S}{\partial y}\dot{y}^2+ \qquad (11)\\ +\frac{\partial T}{\partial x}\dot{x}^2+\dot{x}\dot{y}\left(\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial K}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial K}{\partial y}\dot{y}-S\frac{\partial V}{\partial y}-T\frac{\partial V}{\partial x}=0.\end{gathered}$$

Приравнивая члены третьего порядка относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ нулю, находим:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial R}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial x}=0.$$

Отсюда легко получить, что квадратичные члены должны иметь вид:

$$(ay^2+by+c)\dot{x}^2+(ax^2-b'x+c')\dot{y}^2+(-2axy-b'y-bx+c_1)\dot{x}\dot{y},$$

где a, b, c, b', c', c_1 — постоянные.

Приравнивая в уравнении (11) члены второго порядка относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$ нулю, получаем:

$$\frac{\partial S}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial T}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial S}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}=0.$$

Из этих уравнений заключаем, что

$$S=mx+p,\quad T=-my+q,$$

где m, p и q — постоянные.

Приравнивая нулю в уравнении (11) члены, не зависящие от $\dot{x}$ и $\dot{y}$, получаем:

$$S\frac{\partial V}{\partial y}+T\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

или

$$\frac{\partial V}{\partial y}(mx+p)-\frac{\partial V}{\partial x}(my-q)=0.$$

Это уравнение показывает, что если m, p, q отличны от нуля, то сила направлена к неподвижному центру, имеющему координаты $-\frac{p}{m}$ и $\frac{q}{m}$. Этот простой случай мы исключим; мы предположим, следовательно, что $m=p=q=0$, т. е. что интеграл не содержит членов, линейных относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$.

Приравнивая нулю в уравнении (11) члены, линейные относительно $\dot{x}$ и $\dot{y}$, получаем:

$$-2P\frac{\partial V}{\partial x} - Q\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial x} = 0,$$

$$2R\frac{\partial V}{\partial y} - Q\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y} = 0.$$

Дифференцируя эти уравнения соответственно по x и y и приравнивая полученные таким образом значения $\frac{\partial^2 K}{\partial x \partial y}$, получаем:

$$2P\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} =$$

$$= 2R\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + Q\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

Заменяя еще P, Q, R полученными для них значениями, находим:

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)(-2axy - b'y - bx + c_1) + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(ay^2 - ax^2 +$$

$$+by - b'x + c - c') + \frac{\partial V}{\partial x}(6ay + 3b') - \frac{\partial V}{\partial y}(-6ax - 3b') = 0.$$

По Дарбу[1] это уравнение с частными производными для функции V может быть проинтегрировано следующим образом.

Если отвлечься от частного случая, когда постоянная равна нулю, то всегда можно при помощи преобразования координат преобразовать данный интеграл к более простому виду:

$$\frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + c\dot{x}^2 + c'\dot{y}^2 + k = \text{const}.$$

Это равносильно предположению, что

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad b' = 0, \quad c_1 = 0;$$

заменяя еще $c - c'$ через $\frac{1}{2}c^2$, мы приведем дифференциальное уравнение для V к виду:

$$xy\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + (y^2 - x^2 - c^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - 3y\frac{\partial V}{\partial x} - 3x\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

[1] Archives Neerlandaises (2), т. 6, стр. 371. 1901.

Для интегрирования этого уравнения составим дифференциальное уравнение характеристик:

$$xy(dy^2 - dx^2) + (x^2 - y^2 - c^2)\,dx\,dy = 0.$$

Рассматривая в этом уравнении x^2 и y^2 как новые переменные, находим, что оно принадлежит к уравнениям типа Клеро и поэтому имеет интеграл:

$$(m+1)(mx^2 - y^2) - mc^2 = 0,$$

где m означает произвольную постоянную. После небольшого изменения обозначений мы можем этому интегралу придать вид:

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - c^2} = 1,$$

где α означает новую произвольную постоянную. Полученная форма интеграла показывает, что характеристики уравнений с частными производными состоят из двух семейств софокусных конических сечений.

Если параметры α, β софокусных эллипсов и гипербол принять за новые переменные, так что

$$x = \frac{\alpha\beta}{c}, \quad y = \frac{1}{c}\{(\alpha^2 - c^2)(c^2 - \beta^2)\}^{\frac{1}{2}},$$

то согласно общей теории уравнение с частными производными примет вид:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\beta} + A\frac{\partial V}{\partial\alpha} + B\frac{\partial V}{\partial\beta} = 0,$$

где A и B — функции от α и β. В рассматриваемом случае при переходе к этим переменным уравнение принимает вид:

$$(\beta^2 - \alpha^2)\frac{\partial V^2}{\partial\alpha\partial\beta} - 2\beta\frac{\partial V}{\partial\alpha} + 2\alpha\frac{\partial V}{\partial\beta} = 0,$$

в котором оно может быть непосредственно проинтегрировано. Интегрирование даст:

$$(\alpha^2 - \beta^2)V = f(\alpha) - \varphi(\beta),$$

где f и φ — произвольные функции их аргументов. Отсюда следует: *при плоском движении материальной точки под действием консервативных сил тогда и только тогда существует помимо интеграла энергии еще другой интеграл, квадратичный относительно скоростей, когда потенциальная энергия имеет вид*:

$$V = \frac{f(\alpha) - \varphi(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2}$$

где α и β означают параметры софокусных эллипсов и гипербол.

Так как дифференцированием мы получаем уравнение:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2 - c^2} + \frac{\dot{\beta}^2}{c^2 - \beta^2}\right),$$

то кинетическая энергия равна:

$$T = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)\left(\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2 - c^2} + \frac{\dot{\beta}^2}{c^2 - \beta^2}\right),$$

и вид T и V показывает, что *система принадлежит к типу Лиувилля* (§ 43), *и, следовательно, интегрирование приводится к квадратурам.*

§ 153. Общие динамические системы, допускающие интегралы, квадратичные относительно скоростей. Наиболее общий вид динамических систем, допускающих помимо интеграла энергии еще и другие интегралы, квадратичные относительно скоростей, до сих пор еще не найден. Согласно § 43 такого рода интегралами обладают все системы типа Лиувилля или приводящиеся к ним при помощи точечного преобразования. Кроме того, найдены еще другие более общие случаи[1].

Задача 1. Пусть

$$\varphi_{kl}(q_k) \qquad (k, l = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

означают n^2 функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, а

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_{kl}\Phi_{kl} \qquad (l = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

образованный из них детерминант. Показать, что если кинетическая энергия динамической системы может быть приведена к виду:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_{k1}}\dot{q}_k^2,$$

а потенциальная энергия равна нулю, то кроме интеграла энергии

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_{k1}}\dot{q}_k^2 = \alpha_1$$

существуют $n-1$ квадратичных и однородных относительно скоростей интегралов:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi\Phi_{kl}}{\Phi_{k1}^2}\dot{q}_k^2 = \alpha_l \qquad (l = 2,\, 3,\, \ldots,\, n),$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — произвольные постоянные, и решение задачи приводится к квадратурам. (Stäckel.)

[1] См. *G. di. Pirro*, Annali di Mat., т. 24, стр. 315, 1896.

Задача 2. Уравнения движения динамической системы с двумя степенями свободы имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r}\right) = 0, \qquad (r = 1,\, 2),$$

где

$$T = \frac{1}{2}\left(a\dot q_1^2 + 2h\dot q_1 \dot q_2 + b\dot q_2^2\right),$$

и a, h, b означают произвольные функции координат q_1, q_2. Эта система допускает интеграл:

$$a'\dot q_1^2 + 2h'\dot q_1\dot q_2 + b'\dot q_2^2 = \text{const},$$

квадратичный относительно $\dot q_1$ и $\dot q_2$ и отличный от интеграла энергии; здесь a', h', b' означают некоторые функции от координат.

Полагаем $ab - h^2 = \Delta$, $a'b' - {h'}^2 = \Delta$ и

$$T' = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{\Delta'}\right)\left(a'{q'}_1^2 + 2h'q_1'q_2' + b'{q'}_2^2\right),$$

где $q_r' = \dfrac{dq_r}{dt'}$. Показать, что уравнения:

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial T'}{\partial q_r'}\right) - \frac{\partial T'}{\partial q_r} = 0, \qquad (r = 1,\, 2)$$

устанавливают ту же зависимость между координатами q_1, q_2, что и первоначальные уравнения, и что одна система уравнений может быть переведена в другую при помощи преобразования:

$$\Delta\, dt = \Delta'\, dt'.$$

Упражнения.

1. Система определяется кинетической энергией:

$$\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{\dot q_1^2}{\Phi_{11}} - \frac{\dot q_2^2}{\Phi_{21}} + \cdots + \frac{\dot q_n^2}{\Phi_{n1}}\right),$$

(где Φ означает детерминант

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix};$$

у которого элементы k-й строки зависят только от координаты q_k, а Φ_{kl} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу φ_{kl}) и потенциальной энергией:

$$-\frac{\Psi}{\Phi},$$

где

$$\Psi = \Phi_{11}\psi_1 + \Phi_{22}\psi_2 - \cdots + \Phi_{nn}\psi_n,$$

и ψ_k являются функциями одних лишь q_k. Показать, что уравнение Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{2\Phi}\left\{\Phi_{11}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2+\Phi_{21}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2+\cdots+\Phi_{n1}\left(\frac{\partial W}{\partial q_n}\right)^2\right\}-\frac{\Psi}{\Phi}=0$$

допускает полный интеграл:

$$W=-\alpha_1 t+\sum_{i=1}^{n}\int\{\alpha_1\varphi_{i1}+\alpha_2\varphi_{i2}+\cdots+\alpha_n\varphi_{in}+2\psi_i\}^{\frac{1}{2}}\,dq_i$$

с произвольными постоянными $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

2. Пусть

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)=\text{const}$$

есть интеграл некоторой динамической системы, допускающей интеграл энергии. Показать, что уравнения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{const},\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\text{const}\quad \text{и т. д.}$$

являются также интегралами.

3. Система уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dq_r}{dt}&=A_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t),\\ \frac{dp_r}{dt}&=B_r(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t)\end{aligned}\right\}\quad (r=1, 2, \ldots, n)$$

обладает тем свойством, что скобка Пуассона (φ, ψ), образованная из двух любых интегралов φ и ψ, является также интегралом. Показать, что уравнения имеют форму Гамильтона:

$$\frac{dq_r}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{dp_r}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_r}\qquad (r=1, 2, \ldots, n).$$

4. Пусть уравнения:

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\text{const},\quad \alpha_2=\text{const},\quad \ldots,\quad \alpha_k=\text{const},\\ &\beta_1=\text{const},\quad \beta_2=\text{const},\quad \ldots,\quad \beta_k=\text{const}\end{aligned}$$

означают $2k$ произвольных интегралов некоторой гамильтоновой системы дифференциальных уравнений с переменными $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_2, p_2, \ldots, p_n$. Показать, что

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_1,\ldots,\lambda_k}\pm\frac{\partial\alpha_1}{\partial q_{\lambda_1}}\frac{\partial\alpha_2}{\partial q_{\lambda_2}}\cdots\frac{\partial\alpha_k}{\partial q_{\lambda_k}}\frac{\partial\beta_1}{\partial p_{\lambda_1}}\frac{\partial\beta_2}{\partial p_{\lambda_2}}\cdots\frac{\partial\beta_k}{\partial p_{\lambda_k}}$$

является также интегралом. (Laurent.)

5. Величина

$$(H_1, H_2, \ldots, H_n) = \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\partial(H_1, H_2, \ldots, H_n)}{\partial(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni})},$$

где H_1, H_2, $\ldots$, H_n суть некоторые функции от $n\nu$ переменных x_{ji} $(j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, \nu)$, называется скобкой Пуассона n-го порядка. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_{h\nu}$ означают $h\nu$ функций переменных $y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{h\nu}$; $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{k\nu}$, $a_1, \ldots, a_{h\nu}$, где $h + k = n$ и пусть

$$P_i(G^n) \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \binom{h\nu}{n}\right)$$

означают все скобки Пуассона, которые можно образовать из n каких-нибудь функций G. Показать, что уравнения:

$$P_i(G^n) = 0 \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \binom{h\nu}{n}\right)$$

являются необходимыми и достаточными условиями для того, чтобы функции

$$y_{st} = F_{st}(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{k\nu}, a_1, a_2, \ldots, a_{h\nu})$$
$$(s = 1, 2, \ldots, h;\ t = 1, 2, \ldots, \nu),$$

получаемые решением уравнений:

$$G_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h\nu),$$

удовлетворяли системе совокупности дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка:

$$P_i(y^h, F) = 0 \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, \binom{h\nu}{n}\right),$$

где $P_i(y^h, F)$ означает выражение, получаемое из $P_i(F^n)$ заменою h из функций F столькими же функциями y. (Albeggiani.)

6. Точка массы 1, имеющая относительно неподвижных прямоугольных осей координаты x и y, движется в плоскости под действием сил с потенциальной энергией $f(x, y)$; полная энергия точки равна h. Показать, что если ортогональные траектории кривых:

$$\frac{1}{h - f(x,y)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \ln\{h - f(x,y)\} = \text{const}$$

являются траекториями материальной точки, то ее уравнения движения допускают интеграл, линейный и однородный относительно скоростей $\dot{x}$, $\dot{y}$.

7. Уравнения движения свободной системы, состоящей из m материальных точек, имеют вид:

$$\frac{d^2x_s}{dt^2} = X_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, 3m).$$

Система допускает интеграл вида:

$$\sum_{s=1}^{3m} f_s\dot{x}_s - Ct = \text{const},$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_{3m}$ суть функции от $x_1, x_2, \ldots, x_{3m}$, а C — постоянная. Показать, что интеграл может принять вид:

$$\sum_{s=1}^{3m} k_s\dot{x}_s + \sum_{r,\, s=1}^{3m} a_{rs}\,(x_s\dot{x}_r - x_r\dot{x}_s) - Ct = \text{const},$$

где величины k_s и a_{rs} суть постоянные. (Pennacchietti.)

8. Две материальные точки движутся на одной поверхности под действием различных сил, которые для каждой точки зависят только от положения. Уравнения движения этих точек имеют общий, независимый от времени, интеграл. Показать, что при этих условиях поверхность может быть развернута на некоторую поверхность вращения. (Bertrand.)

Глава XIII
Задача трех тел

§ 154. Введение. Знаменитейшая задача динамики, так называемая задача трех тел, может быть сформулирована следующим образом:

Три материальные точки взаимно притягиваются по закону Ньютона, согласно которому между каждыми двумя из этих точек имеет место сила притяжения, прямо пропорциональная массам этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними; точки могут свободно двигаться в пространстве и могут находиться в начальный момент в любом состоянии движения. Определить дальнейшее движение.

Эта задача имеет большое значение в небесной механике. Тела солнечной системы притягиваются по закону Ньютона, и так как они имеют (приближенно) форму шаров, размеры которых малы по сравнению с их взаимными расстояниями, то можно задачу движения идеализировать, заменив каждое тело материальной точкой, находящейся в центре тяжести и обладающей всей массой тела[1].

Уравнения задачи трех тел не могут быть проинтегрированы в конечной форме при помощи известных до сих пор в анализе функций. Эта трудность послужила настолько сильным стимулом к исследованию, что, начиная с 1750 г. по настоящее время, вышло свыше 800 исследований по этому вопросу, часть из которых принадлежит величайшим математикам мира[2].

В настоящей главе мы займемся уже найденными интегралами этой системы и их применением к приведению задачи к системе с меньшим числом степеней свободы.

§ 155. Дифференциальные уравнения задачи. Обозначим наши три материальные точки через P, Q, R, их массы через m_1, m_2, m_3, их взаимные расстояния — через r_{23}, r_{31}, r_{12}. Выберем

[1] Движение каждого из тел вокруг центра тяжести, при котором естественно следует учитывать величину и форму тела, исследуя отдельно, например в теории прецессии и нутации. Однако в некоторых случаях (например для спутников больших планет) сжатие тел вызывает настолько значительный эффект, что такое разложение движения становится неуместным.

[2] По истории задачи трех тел см. *A. Gautier*, Essai historique sur le probléme des trois corps, Paris, 1817; *R. Grant*, History of Physical Astronomy from the earliest ages to the middle of the nineteenth century, London 1852; *E. T. Whittaker*, Report on the progress of the solution of the Problem of Three Bodies, Brit. Ass. Rep. стр. 121, 1899; *E. Lovett*, Quart. Journ. Math., т. 42, стр. 252, 1911.

неподвижную прямоугольную систему осей $Oxyz$ и пусть q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9 означают соответствующие координаты точек P, Q, R. Система обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2\right) + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{q}_4^2 + \dot{q}_5^2 + \dot{q}_6^2\right) + \frac{1}{2}m_3\left(\dot{q}_7^2 + \dot{q}_8^2 + \dot{q}_9^2\right).$$

Между точками m_1 и m_2 действует сила притяжения $k^2 m_1 m_2 r_{12}^{-2}$, где k^2 означает постоянную закона тяготения. Единицы измерений выберем таким образом, чтобы $k^2 = 1$ и, следовательно, сила притяжения равнялась $m_1 m_2 r_{12}^{-2}$. Этой силе в выражении потенциальной энергии соответствует член $m_1 m_2 r_{12}^{-1}$. Система обладает поэтому потенциальной энергией:

$$\begin{aligned} V = & -\frac{m_2 m_3}{r_{23}} - \frac{m_3 m_1}{r_{31}} - \frac{m_1 m_2}{r_{12}} = \\ & = -m_2 m_3\left\{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - \\ & - m_3 m_1\left\{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - \\ & - m_1 m_2\left\{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Уравнения движений системы имеют вид:

$$m_k \ddot{q}_r = -\frac{\partial V}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9),$$

где k — наибольшее число, удовлетворяющее неравенству $k \leqslant \frac{1}{3}(r+2)$. Эта система состоит из девяти дифференциальных уравнений второго порядка и, следовательно, имеет восемнадцатый порядок.

Полагая

$$m_k \dot{q}_r = p_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9)$$

и

$$H = \sum_{r=1}^{9} \frac{p_r^2}{2m_k} + V,$$

мы приведем систему к каноническому виду:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9).$$

Таким образом, для определения переменных $q_1, q_2, \ldots, q_9, p_1, p_2, \ldots, p_9$ мы получили 18 дифференциальных уравнений первого порядка.

Лагранж[1] показал, что эта система может быть приведена к системе шестого порядка.

[1] Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Acad. de Paris, т. 9, 1772. Естественно, Лагранж не приводит систему к гамильтоновой форме. Об улучшенном приведении лагранжевой системы см. *Bohlin*, Kongl. Sv. Vet.-Handl., т. 42. № 9. 1907.

Что такое приведение действительно возможно, заключаем из следующих соображений.

С одной стороны, так как кроме сил взаимного притяжения на систему не действуют никакие силы, то центр тяжести системы движется прямолинейно и равномерно. Это обстоятельство выражается шестью интегралами:

$$\begin{gathered}
p_1 + p_4 + p_7 = a_1, \\
p_2 + p_5 + p_8 = a_3, \\
p_3 + p_6 + p_9 = a_5, \\
m_1 q_1 + m_2 q_4 - m_3 q_7 - (p_1 + p_4 + p_7)\, t = a_2, \\
m_1 q_2 + m_2 q_5 - m_3 q_8 - (p_2 + p_5 + p_8)\, t - a_4, \\
m_1 q_3 + m_2 q_6 + m_3 q_9 - (p_3 + p_6 + p_9)\, t = a_6,
\end{gathered}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_6$ — постоянные. Можно, следовательно, ожидать, что при помощи этих интегралов возможно понизить порядок системы до двенадцати.

С другой стороны, моменты количества движения тел относительно осей координат остаются во все время движения постоянными. Это обстоятельство выражается аналитически уравнениями:

$$\begin{gathered}
q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_4 p_5 - q_5 p_4 + q_7 p_8 - q_8 p_7 = a_7, \\
q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 + q_8 p_9 - q_9 p_8 = a_8, \\
q_3 p_1 - q_1 p_3 + q_6 p_4 - q_4 p_6 + q_9 p_7 - q_7 p_9 = a_9,
\end{gathered}$$

где a_7, a_8, a_9 также постоянны. При помощи этих трех интегралов мы можем понизить порядок системы с двенадцати до девяти. Но если за одну из координат принять азимут φ одного из тел относительно какой-нибудь неподвижной оси (например оси Oz), а остальные координаты выбрать так, чтобы они определяли положение системы относительно плоскости с этим азимутом, то координата φ будет циклической, и соответствующий ей интеграл, являющийся одним из интегралов моментов, дает возможность понизить порядок системы на две единицы. Этим способом система уравнений движения может быть приведена к восьмому порядку. Это положение, содержащееся в скрытой форме в вышецитированном исследовании Лагранжа, впервые высказано в явной форме Якоби[1] в 1843 г. Такое приведение системы обычно называют *исключением узла.*

Наконец, так же как и в § 42, можно при помощи интеграла энергии и исключения времени понизить порядок системы еще на три единицы.

---

[1] Journ. f. Math., т. 26, стр. 115. С точки зрения теории уравнений с частными производными мы можем это обстоятельство высказать так, что интегралы моментов дадут начало системе в инволюции, состоящей из двух функций, находящихся в инволюции относительно H и между собой. Поэтому уравнение с частными производными Гамильтона–Якоби с 6 независимыми переменными может быть приведено к уравнению с $6 - 2 = 4$ независимыми переменными, а именно к уравнению Гамильтона–Якоби приведенной системы.

Уравнения движения могут быть, следовательно, приведены к системе шестого порядка.

§ 156. Уравнение Якоби. Якоби[1] для исследования движения системы из любого числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, ввел функцию:

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{m_i m_j}{M}r_{ij}^2,$$

в которой m_i и m_j означают массы двух точек системы, r_{ij} — расстояние между ними в момент времени t, M — массу всей системы, и суммирование распространяется на всевозможные пары точек системы. Эта функция имеет значение при исследовании устойчивости системы и называется *якобиевой функцией* Φ.

Мы будем предполагать, что центр тяжести системы находится в покое; пусть x_i, y_i, z_i будут координатами точки m_i относительно неподвижных прямоугольных осей координат с началом в центре тяжести.

Система обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2\right);$$

поэтому

$$2MT = \left(\sum_i m_i\right)\sum_i m_i\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 - \dot{z}_i^2\right).$$

Но

$$\left(\sum_i m_i\right)\sum_i m_i\dot{x}_i^2 - \left(\sum_i m_i\dot{x}_i\right)^2 = \sum_{i,j} m_i m_j\left(\dot{x}_i - \dot{x}_j\right)^2,$$

где суммирование в правой части распространено на все пары точек системы, а вследствие свойств центра тяжести $\sum\limits_i m_i\dot{x}_i = 0$.

Таким образом, получается:

$$T=\frac{1}{2M}\sum_{i,j} m_i m_j\left\{(\dot{x}_i-\dot{x}_j)^2 - (\dot{y}_i-\dot{y}_j)^2 + (\dot{z}_i-\dot{z}_j)^2\right\}=\frac{1}{2M}\sum_{i,j} m_i m_j v_{i,j}^2,$$

где v_{ij} означает скорость точки m_i относительно m_j.

Аналогично можно показать, что

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(x_i^2 - y_i^2 + z_i^2\right) = \Phi.$$

[1] Vorlesungen über Dynamik, стр. 22.

Если теперь V означает потенциальную энергию системы, произвольная постоянная которой выбрана таким образом, чтобы V обращалась в нуль, когда материальные точки находятся на бесконечно больших расстояниях друг от друга, то

$$V = -\sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Уравнениями движения точки m_i будут:

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad m_i \ddot{y}_i = -\frac{\partial V}{\partial y_i}, \quad m_i \ddot{z}_i = -\frac{\partial V}{\partial z_i}.$$

Умножим эти уравнения соответственно на x_i, y_i, z_i, сложим и просуммируем их по всем точкам системы. Тогда, принимая во внимание, что V есть однородная функция (-1)-го порядка относительно своих переменных, получим:

$$\sum_i m_i \left(x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i - z_i \ddot{z}_i\right) = V$$

или

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2\right) - 2T = V,$$

или

$$\frac{d^2 \Phi}{dt^2} = 2T + V.$$

Это и есть *уравнение Якоби.*

§ 157. Приведение к двенадцатому порядку при помощи интегралов движения центра тяжести. Перейдем теперь к изложению самого способа приведения[1]. Оказывается, что при всех необходимых для этого преобразованиях сохраняется гамильтонова форма уравнений.

Возьмем уравнения задачи трех тел в полученной в § 155 канонической форме:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, 9)$$

[1] Преобразование § 157 принадлежит Пуанкаре (Compt. Rendus т. 123, 1896); преобразование § 158 принадлежит автору и опубликовано впервые в первом издании этой книги. Это преобразование заслуживает особого внимания, так как оно является расширенным точечным преобразованием, откуда следует, что приведение уравнений к лагранжевой форме, (в противоположность гамильтоновой) может быть произведено при помощи простого точечного преобразования. Второе преобразование при последующем приведении (§160) не является расширенным точечным преобразованием. Другое приведение задачи трех тел основывается на теории инволюционных систем С. Ли. См. *Lie*, Math. Ann., т. 8, стр. 282; далее: *Воронец*, Известия Киевского унив. 1907; *Levi–Civita*, Atti del. R. Ist. Veneto, т. 74, стр. 907, 1915.

и понизим сначала при помощи интеграла движения центра тяжести порядок этой системы до 12. Для этого преобразуем переменные системы при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9),$$

где

$$W = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3 + p_4 q'_4 + p_5 q'_5 + p_6 q'_6 + (p_1 - p_4 + p_7)\, q'_7 + \\ + (p_2 + p_5 + p_8)\, q'_8 + (p_3 + p_6 + p_9)\, q'_9.$$

Истолковывая эти уравнения, легко видеть, что q'_1, q'_2, q'_3, суть координаты точки m_1 относительно m_3; q'_4, q'_5, q'_6 — координаты точки m_2 относительно m_3, а q'_7, q'_8, q'_9 суть координаты точки m_3. Далее, p'_1, p'_2, p'_3 суть компоненты количества движения точки m_1; p'_4, p'_5, p'_6 — компоненты количества движения точки m_2, а p'_7, p'_8, p'_9 — компоненты количества движения всей системы.

После преобразования переменных дифференциальные уравнения движения переходят (§ 138) в следующие:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9),$$

а функция H принимает вид:

$$H = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)\left(p'^2_1 + p'^2_2 + p'^2_3\right) + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)\left(p'^2_4 + \right. \\ \left. + p'^2_5 + p'^2_6\right) + \frac{1}{m_3}\left\{p'_1 p'_4 + p'_2 p'_5 + p'_3 p'_6 + \frac{1}{2} p'^2_7 + \frac{1}{2} p'^2_8 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} p'^2_9 - p'_7 (p'_1 + p'_4) - p'_8 (p'_2 + p'_5) - p'_9 (p'_3 + p'_6)\right\} - \\ - m_2 m_3 \left\{q'^2_4 + q'^2_5 + q'^2_6\right\}^{-\frac{1}{2}} - m_3 m_1 \left\{q'^2_1 + q'^2_2 + q'^2_3\right\}^{-\frac{1}{2}} - \\ m_1 m_2 \left\{(q'_1 - q'_4)^2 + (q'_2 - q'_5)^2 + (q'_3 - q'_6)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Так как q'_7, q'_8, q'_9 в H не входят, то они являются циклическими координатами; им соответствует интегралы:

$$p'_7 = \text{const}, \quad p'_8 = \text{const}, \quad p'_9 = \text{const}.$$

Не нарушая общности рассуждений, мы можем предположить, что эти постоянные интегрирования равны нулю, так как это означает лишь только то, что центр тяжести находится в покое. Тогда кинетический потенциал системы, приведенной при помощи циклических координат, получится от первоначального кинетического потенциала заменою величин p_7', p_8', p_9' нулями. Тем же путем из H получится и новая функция Гамильтона. Следовательно, *система двенадцатого порядка, к которой приводятся уравнения движения в задаче трех тел, может быть написана* (отбрасывая штрихи) *в форме*:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

причем

$$H = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) + \\ + \frac{1}{m_3}(p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6) - m_2 m_3 \left\{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - m_3 m_1 \left\{q_1^2 + \right. \\ \left. + q_2^2 + q_3^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - m_1 m_2 \left\{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Эта система обладает интегралом энергии:

$$H = \text{const}$$

и тремя интегралами моментов количества движения:

$$\begin{aligned} q_2 p_3 - q_3 p_2 + q_5 p_6 - q_6 p_5 &= A_1, \\ q_3 p_1 - q_1 p_3 + q_6 p_4 - q_4 p_6 &= A_2, \\ q_1 p_2 - q_2 p_1 + q_4 p_5 - q_5 p_4 &= A_3, \end{aligned}$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные интегрирования.

§ 158. Приведение к восьмому порядку при помощи интегралов моментов и исключения узла. Приведем теперь полученную в предыдущем параграфе систему двенадцатого порядка к системе восьмого порядка при помощи интеграла энергии и исключения узла.

Преобразуем переменные при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad p_r' = \frac{\partial W}{\partial q_r'} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

где

$$\begin{aligned} W = p_1 (q_1' \cos q_5' - q_2' \cos q_6' \sin q_5') + p_2 (q_1' \sin q_5' + \\ + q_2' \cos q_6' \cos q_5') + p_3 q_2' \sin q_6' + p_4 (q_3' \cos q_5' - q_4' \cos q_6' \sin q_5') + \\ + p_5 (q_3' \sin q_5' + q_4' \cos q_6' \cos q_5') + p_6 q_4' \sin q_6' \end{aligned}$$

Новым переменным можно придать следующее простое физическое истолкование:

Выберем кроме неподвижных осей $Oxyz$ еще систему подвижных осей $Ox'y'z'$. Ось Ox' направим по линии узлов, т. е. прямой пересечения плоскости $Ox'y'z'$ с плоскостью трех тел, ось Oy' — по перпендикуляру к Ox' в плоскости трех тел и ось Oz' — по нормали к этой плоскости. Тогда q_1', q_2' будут координатами m_1 относительно осей, проходящих через m_3 параллельно осям Ox', Oy'; q_3', q_4' будут координатами m_2 относительно тех же осей; q_5' будет углом между Ox' и Ox, q_6' углом между Oz' и Oz; p_1' и p_2' будут компонентами количества движения m_1 относительно осей Ox', Oy'; p_3', p_4' будут компонентами количества движения m_2 относительно тех же осей, p_5', p_6' моментами количества движения всей системы относительно осей Oz и Ox'.

Уравнениями движения в новых координатах (§ 138) будут:

$$\frac{dq_r'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r'}, \quad \frac{dp_r'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r'} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

где функция H, выраженная в новых переменных, имеет вид:

$$\begin{aligned} H = {} & \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)\left[p'^2_1 - p'^2_2 - \frac{1}{(q_2'q_3' - q_1'q_4')^2}\left\{(p_1'q_2' - p_2'q_1' + {}\right.\right. \\ & \left.\left. + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_4' \operatorname{ctg} q_6' + \frac{p_5'q_4'}{\sin q_6'} + p_6'q_3'\right\}^2\right] + \\ & + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)\left[p'^2_3 - p'^2_4 - \frac{1}{(q_2'q_3' - q_1'q_4')^2}\left\{(p_1'q_2' - p_2'q_1' + {}\right.\right. \\ & \left.\left. + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_2' \operatorname{ctg} q_6' + \frac{p_5'q_2'}{\sin q_6'} + p_6'q_1'\right\}^2\right] + \frac{1}{m_3}\left[p'_1p'_3 + p'_2p'_4 - {}\right. \\ & - \frac{1}{(q_2'q_3' - q_1'q_4')^2}\left\{(p_1'q_2' - p_2'q_1' - p_3'q_4' - p_4'q_3')q_4' \operatorname{ctg} q_6' + {}\right. \\ & \left. + \frac{p_5'q_4'}{\sin q_6'} + p_6'q_3'\right\}\left\{(p_1'q_2' - p_2'q_1' + p_3'q_4' - p_4'q_3')q_2' \operatorname{ctg} q_6' + {}\right. \\ & \left.\left. + \frac{p_5'q_2'}{\sin q_6'} + p_6'q_1'\right\}\right] - m_2m_3(q'^2_3 + q'^2_4)^{-\frac{1}{2}} - m_3m_1(q'^2_1 + q'^2_2)^{-\frac{1}{2}} - \\ & - m_1m_2\{(q_1' - q_3')^2 + (q_2' - q_4')^2\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Координата q'_5, не входящая явно в H, является циклической. Ей соответствует интеграл:

$$p'_5 = k,$$

где k постоянная.

Уравнение $\dfrac{dq'_5}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial k}$ может быть проинтегрировано простой квадратурой, если выполнено интегрирование всех остальных уравнений. Следовательно, уравнения для q'_5 и p'_5 из системы выпадают, и она приводится к системе десятого порядка:

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6),$$

где всюду в H величина p'_5 должна быть заменена постоянной k.

Мы использовали пока только один из интегралов моментов (а именно $p'_5 = k$) и исключение узла. Оба остальных интеграла моментов в новых переменных принимают вид:

$$(p'_2 q'_1 - p'_1 q_2 + p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4)\frac{\sin q'_5}{\sin q'_6} + k \sin q'_5 \operatorname{ctg} q'_6 + p'_6 \cos q'_5 = A_1,$$

$$-(p'_2 q'_1 - p'_1 q_2 + p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4)\frac{\cos q'_5}{\sin q'_6} + k \cos q'_5 \operatorname{ctg} q'_6 + p'_6 \sin q'_5 = A_2.$$

Значения постоянных A_1, A_2 зависят от положения неподвижных осей $Oxyz$. Направим ось Oz по главному моменту количества движения системы. Тогда A_1 и A_2 обращаются в нуль (§ 69). Введенная таким образом плоскость Oxy называется *неизменяемой плоскостью* системы. Последние два уравнения переходят теперь в

$$k \cos q'_6 = p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 + p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4,$$
$$p'_6 = 0.$$

Эти уравнения определяют q'_6 и p'_6 как функции переменных и могут поэтому заменить уравнения:

$$\frac{dq'_6}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_6}, \quad \frac{dp'_6}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_6}.$$

Система переходит, таким образом, в

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, 3,\, 4),$$

где

$$
\begin{aligned}
H = &\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)\Big[{p'}_1^2 + {p'}_2^2 + \\
&+ \frac{{q'}_4^2}{(q'_2 q'_3 - q'_1 q'_1)^2}\left\{(p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 + p'_3 q'_4 - p'_4 q'_3)\operatorname{ctg} q'_6 + \frac{k}{\sin q'_6}\right\}^2\Big] + \\
&+ \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)\Big[{p'}_3^2 + {p'}_4^2 + \\
&+ \frac{{q'}_2^2}{(q'_2 q'_3 - q'_1 q'_4)^2}\left\{(p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 + p'_3 q'_4 - p'_4 q'_3)\operatorname{ctg} q'_6 + \frac{k}{\sin q'_6}\right\}^2\Big] + \\
&+ \frac{1}{m_3}\Big[{p'}_1 {p'}_3 + {p'}_2 {p'}_4 - \\
&- \frac{q'_2 q'_4}{(q'_2 q'_3 - q'_1 q'_4)^2}\left\{(p'_1 q'_2 - p'_2 q'_1 + p'_3 q'_4 - p'_4 q'_3)\operatorname{ctg} q'_6 + \frac{k}{\sin q'_6}\right\}^2\Big] - \\
&- m_2 m_3({q'}_3^2 + {q'}_4^2)^{-\frac{1}{2}} - m_3 m_1({q'}_1^2 + {q'}_2^2)^{-\frac{1}{2}} - \\
&- m_1 m_2\{(q'_1 - q'_3)^2 + (q'_2 - q'_4)^2\}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Здесь q'_6 должна быть заменена ее значением, определяемым из уравнения:

$$k\cos q'_6 = p'_2 q'_1 - p'_1 q'_2 + p'_4 q'_3 - p'_3 q'_4,$$

после того как взяты производные от H.

Обозначим через H' функцию, в которую переходит H после замены в ней q'_6 вышеуказанным значением. Тогда, если обозначим через s одну из переменных q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, будем иметь:

$$\frac{\partial H'}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial q'_6}\frac{\partial q'_6}{\partial s}$$

Но так как $p'_6 = 0$, то $\dfrac{\partial H}{\partial q'_6} = p'_6 = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial H'}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s}$$

Другими словами: мы можем ввести в H значение q'_6 *до того, как взяты производные от H.* Поэтому, опуская вновь штрихи, мы приведем уравнения движения задачи трех тел к системе восьмого порядка:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$H = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)(p_1^2 + p_2^2) + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)(p_3^2 + p_4^2) +$$
$$+\frac{1}{m_3}(p_1p_3 + p_2p_4) +$$
$$+(q_2q_3 - q_1q_4)^{-2}\left\{\left(\frac{1}{2m_1}+\frac{1}{2m_3}\right)q_4^2 + \left(\frac{1}{2m_2}+\frac{1}{2m_3}\right)q_2^2 - \frac{q_2q_4}{m_3}\right\}\times$$
$$\times\{k^2 - (p_2q_1 - p_1q_2 + p_4q_3 - p_3q_4)^2\} - m_2m_3(q_3^2 + q_4^2)^{-\frac{1}{2}} -$$
$$-m_3m_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} - m_1m_2\{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Некоторые из величин, входящих в H, имеют простое физическое значение. Так, например, величина $q_2q_3 - q_1q_4$ равна удвоенной площади треугольника, образованного телами. Далее,

$$\frac{2m_1m_2m_3}{m_1 + m_2 + m_3}\left\{\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)q_4^2 + \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)q_2^2 - \frac{1}{m_3}q_2q_4\right\}$$

есть момент инерции системы относительно прямой пересечения неизменяемой плоскости с плоскостью тел.

Заметим еще, что H отличается от своего значения при $k = 0$ только членами, не содержащими p_1, p_2, p_3, p_4. Эти члены в H мы можем рассматривать как составную часть потенциальной энергии. Следовательно, система отличается от системы с $k = 0$ только значением потенциальной энергии. Легко показать, что при $k = 0$ движение происходит в плоскости.

§ 159. Приведение к шестому порядку. Дальнейшее приведение системы уравнений движения от восьмого порядка к шестому может быть произведено при помощи интеграла энергии

$$H = \text{const}$$

и исключения времени. При этом согласно теореме § 141 приведение может быть сделано таким образом, чтобы система сохраняла форму Гамильтона. Так как нам в дальнейшем не придется пользоваться этим приведением, то мы его не излагаем здесь подробно.

Полученная таким образом система Гамильтона шестого порядка является по современному состоянию этого вопроса системой наиболее низкого порядка, к которой приводятся уравнения движения общей задачи трех тел.

§ 160. Другой способ приведения системы от восемнадцатого порядка к шестому. Укажем еще другой способ приведения общей задачи трех тел к системе Гамильтона шестого порядка[1].

[1] Этот способ принадлежит Радо (*Radau*, Annales de l'École Norm. Sup., т. 5, стр. 311, 1868).

Преобразуем первоначальную гамильтонову систему уравнений движения (§ 155) при помощи контактного преобразования:

$$q'_r = \frac{\partial W}{\partial p'_r}, \quad p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 9),$$

где

$$\begin{aligned} W = {} & p'_1(q_4 - q_1) + p'_2(q_5 - q_2) + p'_3(q_6 - q_3) + \\ & + p'_4\left(q_7 - \frac{m_1 q_1 + m_2 q_4}{m_1 + m_2}\right) + p'_5\left(q_8 - \frac{m_1 q_2 + m_2 q_5}{m_1 + m_2}\right) + \\ & + p'_6\left(q_9 - \frac{m_1 q_3 + m_2 q_6}{m_1 + m_2}\right) + p'_7(m_1 q_1 + m_2 q_4 + m_3 q_7) + \\ & + p'_8(m_1 q_2 + m_2 q_5 + m_3 q_8) + p'_9(m_1 q_3 + m_2 q_6 + m_3 q_9). \end{aligned}$$

В новых переменных интегралы движения центра тяжести имеют вид:

$$q'_7 = q'_8 = q'_9 = p'_7 = p'_8 = p'_9 = 0.$$

Преобразованная система есть, следовательно, система двенадцатого порядка. Она имеет вид (опуская штрихи):

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

где

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2\mu}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{2\mu'}(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) - m_1 m_2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{-\frac{1}{2}} - \\ & - m_1 m_3 \left\{ q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \right\}^{-\frac{1}{2}} - \\ & - m_2 m_3 \left\{ q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) \right\}^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

и

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu' = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Новым переменным может быть придан физический смысл следующим образом: пусть G центр тяжести m_1 и m_2. Тогда q_1, q_2, q_3 суть проекции отрезка m_1m_2 на неподвижные оси; q_4, q_5, q_6 проекции на те же оси отрезка Gm_3. Далее,

$$\mu\frac{dq_r}{dt} = p_r \quad (r = 1,\, 2,\, 3);$$

$$\mu'\frac{dq_r}{dt} = p_r \quad (r = 4,\, 5,\, 6).$$

Очевидно, новая система Гамильтона представляет уравнения движения двух материальных точек с массами μ и μ', из которых первая находится в точке с координатами q_1, q_2, q_3, а вторая - в точке с координатами q_4, q_5, q_6. При этом обе материальные точки движутся свободно в пространстве под действием сил с потенциальной энергией, представляемой теми членами в H, которые не содержат величин p. Таким образом, задача трех тел заменена задачей двух тел, движущихся под действием определенной таким способом системы сил. Идея этой замены содержится уже в исследовании Якоби, относящемся к 1843 г.[1] В явной форме она выражена впервые Бертраном[2] в 1852 г.

Выберем оси координат таким образом, чтобы плоскость xy являлась неизменяемой плоскостью для движения точек μ, μ', т. е. чтобы момент количества движения относительно всякой прямой плоскости xy обращался в нуль.

Преобразуем систему Гамильтона двенадцатого порядка при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, 6),$$

где

$$W = (p_2 \sin q'_5 - p_1 \cos q'_5) q'_1 \cos q'_3 + q'_1 \sin q'_3 \{(p_2 \cos q'_5 - p_1 \sin q'_5)^2 + p_3^2\}^{\frac{1}{2}} +$$
$$+ (p_5 \sin q'_6 - p_4 \cos q'_6) q'_2 \cos q'_4 + q'_2 \sin q'_4 \{(p_5 \cos q'_6 - p_4 \sin q'_6)^2 + p_6^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Новые переменные, как это нетрудно видеть, имеют следующее физическое значение: q'_1 и q'_2 суть радиусы-векторы, соединяющие начало координат с точками μ и μ'; q'_3 есть угол между q'_1 и прямой пересечения (или узлом) неизменяемой плоскости с плоскостью двух последовательных положений q'_1 (которую мы будем называть плоскостью мгновенного движения точки μ); q'_4 угол между q'_2 и узлом неизменяемой плоскости с плоскостью мгновенного движения точки μ'; q'_5 — угол между Ox и первым узлом; q'_6 угол между Ox и вторым узлом;

[1] Journ. f.Math., т. 26, стр. 115.
[2] Journ. de Math., т. 17. стр, 393.

далее, p'_1 равно $\mu\dot{q}'_1$, p'_2 равно $\mu'\dot{q}'_2$, p'_3 есть момент количества движения точки μ относительно начала координат, p'_4 — момент количества движения точки μ' относительно начала координат, p'_5 — момент количества движения относительно перпендикуляра, проведенного из начала координат к неизменяемой плоскости, p'_6 — момент количества движения точки μ' относительно этой же прямой.

Уравнения движения принимают новый вид (§ 138):

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

где функция H должна быть выражена через новые переменные. Эту систему мы преобразуем при помощи контактного преобразования:

$$p''_r = \frac{\partial W}{\partial q''_r}, \quad q'_r = \frac{\partial W}{\partial p'_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

где

$$W = q''_5(p'_5 - p'_6) + q''_6(p'_5 + p'_6) + q''_1 p'_1 + q''_2 p'_2 + q''_3 p'_3 + q''_4 p'_4.$$

Тогда уравнения движения переходят в

$$\frac{dq''_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p''_r}, \quad \frac{dp''_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q''_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Но H не содержит q''_6, как это можно заключить или из непосредственного выражения H через новые переменные, или из того обстоятельства, что q''_6 зависит от положения произвольно выбираемой оси Ox, в то время как все остальные координаты от этого не зависят. Поэтому имеем:

$$\dot{p}''_6 = -\frac{\partial H}{\partial q''_6} = 0;$$

следовательно,

$$p''_6 = k,$$

где k — постоянная. Это уравнение представляет собой не что иное, как один из интегралов моментов количества движения. Заменяя в выражении H величину p''_6 ее значением k, мы сможем уравнение

$$\dot{q}''_6 = \frac{\partial H}{\partial k}$$

проинтегрировать простой квадратурой, если только будут предварительно проинтегрированы все остальные уравнения. Поэтому уравнения для p''_6 и q''_6 могут быть отделены от системы, и последняя приводится к системе десятого порядка:

$$\frac{dq''_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p''_r}, \quad \frac{dp''_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q''_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 5).$$

Мы должны еще использовать оба остальных интеграла моментов. Нетрудно видеть, что в новых переменных они имеют вид:

$$q_5'' = 90^\circ, \quad kp_5'' = {p''}_3^2 - {p''}_4^2.$$

Так как плоскость xy есть неизменяемая плоскость, то в эти интегралы не входят произвольные постоянные интегрирования. Теперь система уравнений движения может быть заменена обоими этими интегралами и уравнениями:

$$\frac{dq_r''}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r''}, \quad \frac{dp_r''}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r''} \qquad (r = 1,\, 2,\, 3,\, 4).$$

В этой системе q_5'' может быть заменено через 90° до вычисления производных от H, а p_5'' должно быть заменено его значением $\dfrac{({p''}_3^2 - {p''}_4^2)}{k}$ после этого вычисления. Обозначим через H' функцию, в которую переходит H после замены в ней p_5'' только что указанным его значением, а через s одну из переменных q_1'', q_2'', q_3'', q_4'', p_1'', p_2'', p_3'', p_4''; будем иметь:

$$\frac{\partial H'}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial H}{\partial p_5''} - \frac{\partial p_5''}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s} + \dot{q}_5'' \frac{\partial p_5''}{\partial s} = \frac{\partial H}{\partial s}.$$

Поэтому замену p_5'' в H можно произвести до вычисления его производных. Таким образом, система уравнений движения приведена к системе восьмого порядка, которая при опускании штрихов представится в виде:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, 3,\, 4).$$

Здесь H по выполнении указанных преобразований примет вид:

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{1}{2\mu}\left(p_1^2 + \frac{p_3^2}{q_1^2}\right) + \frac{1}{2\mu'}\left(p_2^2 + \frac{p_4^2}{q_2^2}\right) - m_1 m_2 q_1^{-1} - \\ & -m_1 m_3 \left\{ q_2^2 - \frac{2m_2 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2p_3 p_4}\sin q_3 \sin q_4\right) + \right. \\ & \left. + \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} q_1^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} - \\ & -m_2 m_3 \left\{ q_2^2 - \frac{2m_1 q_1 q_2}{m_1 + m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2p_3 p_4}\sin q_3 \sin q_4\right) + \right. \\ & \left. + \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} q_1^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Полученная система может быть преобразована (способом, указанным в § 141, т. е. при помощи интеграла энергии и исключения времени) в систему шестого порядка. Но мы, однако, не приводим здесь этого преобразования, так как оно нам в дальнейшем не понадобится.

§ 161. Плоская задача трех тел. Примем теперь, что движение всех трех тел происходит не в трехмерном пространстве, а в некоторой плоскости. Это, очевидно, всегда будет иметь место, если начальные скорости всех тел лежат в плоскости этих тел.

Этот частный случай называется *плоской задачей трех тел*. Приведем в этом случае уравнения движения к системе с возможно более низким порядком.

Пусть q_1, q_2 означают координаты m_1; q_3, q_4 — координаты m_2; а q_5, q_6 — координаты m_3 относительно любой неподвижной системы осей Oxy, лежащих в плоскости движения. Пусть, далее, $p_r = m_k\dot{q}_r$, где k означает наибольшее целое число $\leqslant \dfrac{1}{2}(r+1)$. Уравнения движения, так же как и в § 155, имеют вид:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

где

$$\begin{aligned} H = \frac{1}{2m_1}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2m_2}(p_3^2 + p_4^2) + \frac{1}{2m_3}(p_5^2 + p_6^2) - \\ -m_2m_3\{(q_3 - q_5)^2 + (q_4 - q_6)^2\}^{-\frac{1}{2}} - \\ -m_1m_3\{(q_5 - q_1)^2 + (q_6 - q_2)^2\}^{-\frac{1}{2}} - \\ -m_1m_2\{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2\}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Эти уравнения могут быть приведены при помощи четырех интегралов движения центра тяжести к системе восьмого порядка. Для этой цели преобразуем переменные при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6),$$

где

$$W = p_1q'_1 + p_2q'_2 - p_3q'_3 + p_4q'_4 + (p_1 - p_3 + p_5)q'_5 + (p_2 + p_4 + p_6)q'_6.$$

Легко видеть, что q'_1, q'_2 суть координаты относительно неподвижных осей, параллельных старым осям и проходящих через m_3: q'_3, q'_4 координаты m_2 относительно этих же осей, q'_5, q'_6 координаты m_3 относительно первоначальных осей, p'_1, p'_2 компоненты количества движения m_1, p'_3, p'_4 компоненты количества движения m_2, p'_5, p'_6 компоненты количества движения всей системы.

Так же как и в § 157, из системы уравнений движения выпадают уравнения для q'_5, q'_6, p'_5, p'_6; если отбросить штрихи в новых переменных, то уравнение движения приводится к системе восьмого порядка

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\,2,\,3,\,4),$$

где

$$H = \left(\frac{1}{1m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)(p_1^2 - p_2^2) + \left(\frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_3}\right)(p_3^2 + p_4^2) +$$
$$+\frac{1}{m_3}(p_1p_3 - p_2p_4) - m_2m_3(q_3^2 - q_4^2)^{-\frac{1}{2}} - m_3m_1(q_1^2 + q_2^2)^{-\frac{1}{2}} +$$
$$+m_1m_2\{(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Эта система, как мы это сейчас покажем, обладает циклической координатой, которая даст нам возможность понизить порядок системы еще на две единицы.

Преобразуем систему при помощи контактного преобразования:

$$q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r}, \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 1,\,2,\,3,\,4),$$

где

$$W = p_1q'_1\cos q'_4 + p_2q'_1\sin q'_4 + p_3(q'_2\cos q'_4 - q'_3\sin q'_4) + p_4(q'_2\sin q'_4 + q'_3\cos q'_4).$$

Это преобразование имеет следующее физическое значение: q'_1 есть расстояние m_1m_3; q'_2 и q'_3 суть проекции отрезка m_2m_3 на отрезок m_1m_3 и на перпендикуляр к нему; q'_4 есть угол между m_3m_1 и осью x; p'_1 компонент количества движения m_1 на направление m_3m_1; p'_2 и p'_3 суть компоненты количества движения m_2 параллельный и перпендикулярный к m_3m_1; p'_4 есть момент количества движения системы.

Дифференциальные уравнения движения в новых переменных принимают вид:

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 1,\,2,\,3,\,4),$$

где

$$H = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)\left\{p'^2_1 + \frac{1}{q'^2_1}(p'_3q'_2 - p'_2q'_3 - p'_4)^2\right\} +$$
$$+\left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)(p'^2_2 + p'^2_3) +$$
$$+\frac{1}{m_3}\left\{p'_1p'_2 - \frac{p'_3}{q'_1}(p'_3q'_2 - p'_2q'_3 - p'_4)\right\} - m_2m_3(q'^2_2 + q'^2_3)^{\frac{1}{2}} -$$
$$-m_3m_1q'^{-1}_1 - m_1m_2\{(q'_1 - q'_2)^2 + q'^2_2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как координата q'_4 не содержится явно в H, то она является циклической. Ей соответствует интеграл $p'_4 = k$, где k — постоянная. Это есть не что иное, как интеграл момента количества движения системы. Уравнение $\dot{q}'_4 = \dfrac{\partial H}{\partial p'_4}$ может быть разрешено простой квадратурой, если выполнено интегрирование всех остальных уравнений. Следовательно, из системы уравнений движения выпадают уравнения для p'_4 и q'_4.

Если мы теперь опять новые переменные будем писать без штрихов, то уравнения движения принимают вид:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3),$$

где

$$H = \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_3}\right)\left\{p_1^2 + \frac{1}{q_1^2}(p_3q_2 - p_2q_3 - k)^2\right\} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2m_2} + \frac{1}{2m_3}\right)(p_2^2 + p_3^2) + \frac{1}{m_3}\left\{p_1p_2 - \frac{p_3}{q_1}(p_3q_2 - p_2q_3 - k)\right\} -$$
$$- m_2m_3(q_2^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}} - m_3m_1q_1^{-1} - m_1m_2\{(q_1 - q_2)^2 + q_3^2\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Полученная таким образом система будет шестого порядка и при помощи интеграла энергии и исключения времени может быть приведена (§ 141) к системе четвертого порядка.

§ 162. Ограниченная задача трех тел. Еще более частным случаем задачи трех тел, занимающим значительное место в новейших исследованиях, является так называемая ограниченная задача трех тел.

Два тела S и J[1] движутся по круговым траекториям вокруг их общего центра тяжести O под действием сил взаимного притяжения. Третье тело P, не обладающее массой, т. е. такое тело, которое само притягивается телами S и J, но не влияет на их движение, движется в той же плоскости, что и P с J. Ограниченная задача трех тел заключается в определении движения тела P, так называемого *планетоида*.

Обозначим через m_1 и m_2 массы S и J. Положим:

$$F = \frac{m_1}{SP} + \frac{m_2}{JP}.$$

В плоскости движения выберем неподвижные прямоугольные оси Ox и Oy, выходящие из точки O. Пусть P имеет координаты X, Y и компоненты скорости U и V. Уравнениями движения тела P будут:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial Y}$$

[1]Обозначения S и J взяты потому, что вся эта теория имеет своей целью исследование движения планеты очень малой массы, находящейся под действием Солнца и Юпитера, причем действием остальных планет и отклонением Солнца и Юпитера от кругового движения пренебрегается.

или в гамильтоновой форме:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial U}, \quad \frac{dY}{dt} = \frac{\partial H}{\partial V}, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{\partial H}{\partial X}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial H}{\partial Y},$$

где

$$H = \frac{1}{2}(U^2 - V^2) - F.$$

Так как F есть функция не только от X и Y, но также и от t, то уравнение $H = \text{const}$ не является интегралом системы.

Преобразуем переменные при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$X = \frac{\partial W}{\partial U}, \quad Y = \frac{\partial W}{\partial V}, \quad u = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial W}{\partial y},$$

где

$$W = U(x\cos nt - y\sin nt) + V(x\sin nt + y\cos nt),$$

а n — угловая скорость прямой SJ. Уравнения движения переходит в

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial K}{\partial u}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial K}{\partial v}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial y},$$

где (§ 138)

$$K = H - \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2}(u^2 + v^2) - n(uy - vx) - F.$$

Нетрудно видеть, что x и y суть координаты планетоида относительно подвижной системы координат, выбранной таким образом, что ось x направлена по прямой OJ, а ось y по перпендикуляру, опущенному к ней из точки O. F является теперь функцией только от x и y, следовательно, t явно не входит в K, и уравнение

$$K = \text{const}$$

есть интеграл системы. Этот интеграл называется *якобиевым интегралом*[1] ограниченной задачи трех тел.

Мы можем уравнениям движения придать другую форму, если сделаем еще одно контактное преобразование:

$$x = \frac{\partial W}{\partial u}, \quad y = \frac{\partial W}{\partial v}, \quad p_1 = \frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad p_2 = \frac{\partial W}{\partial q_2},$$

где

$$W - q_1(u\cos q_2 + v\sin q_2).$$

[1] *Jacobi*, Comptes Rendus, т. 3, стр. 59, 1836.

Новые переменные определяются непосредственно уравнениями:

$$q_1 = OP, \quad q_2 = POJ, \quad p_1 = \frac{d}{dt}(OP), \quad p_2 = OP^2\frac{d}{dt}(POX),$$

и уравнения движения переходят в

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\, 2),$$

где

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2}\right) - np_2 - F.$$

Другую форму[1] эти уравнения примут, если мы их преобразуем при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \quad q'_r = \frac{\partial W}{\partial p'_r} \qquad (r = 1,\, 2)$$

где

$$W = p'_2 q_2 + \int\limits_{p'_1\{p'_1 - ({p'}_1^2 - {p'}_2^2)^{\frac{1}{2}}\}}^{q_1} \left\{-\frac{{p'}_2^2}{u^2} + \frac{2}{u} - \frac{1}{{p'}_1^2}\right\}^{\frac{1}{2}} du,$$

где u означает переменную интегрирования. Эти уравнения (для контактного преобразования) могут быть написаны также и в таком виде:

$$p_1 = \left(-\frac{{p'}_2^2}{q_1^2} + \frac{2}{q_1} - \frac{1}{{p'}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad p_2 = p'_2,$$

$$q'_1 = \arccos\left\{\frac{1 - \dfrac{q_1}{{p'}_1^2}}{\left(1 - \dfrac{{p'}_2^2}{{p'}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\} - \left(-\frac{{p'}_2^2}{{p'}_1^2} + \frac{2q_1}{{p'}_1^2} - \frac{q_1^2}{{p'}_1^4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$q'_2 = q_2 - \arccos\left\{\frac{\dfrac{{p'}_2^2}{q_1} - 1}{\left(1 - \dfrac{{p'}_2^2}{{p'}_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

[1] Эта форма уравнений дана Пуанкаре в «Methodes Nouvelles de la Mec Celeste».

Нетрудно показать, что q_1' есть средняя аномалия планетоида на эллипсе, который он описал бы вокруг неподвижного тела с массой 1, помещенного в точке O, если бы ему (планетоиду) в его мгновенном положении была сообщена его мгновенная скорость q_2' есть измеряемая от OJ долгота линии апсид этого эллипса; p_1' равно $a^{\frac{1}{2}}$, p_2' равно $\{a(1-e^2)\}^{\frac{1}{2}}$, где a — большая полуось эллипса, а e его эксцентриситет. Так как H не содержит явно времени, то $H = \text{const}$ есть интеграл уравнений движения, которые имеют теперь вид:

$$\frac{dq_r'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r'}, \quad \frac{dp_r'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r'} \qquad (r = 1, 2).$$

Полагая сумму масс тел S и J равной единице и обозначая эти массы соответственно через $1-\mu$ и μ, будем иметь:

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{q_1^2} - np_2 - \frac{1-\mu}{SP} - \frac{\mu}{JP}\right).$$

Эта аналитическая относительно p_1', p_2', q_1', q_2', μ функция будет периодической относительно q_1' и q_2' с периодом 2π. Чтобы найти в H член, не зависящий от μ, положим $\mu = 0$. Так как при этом SP делается равным q_1, то

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{q_1} - \frac{1}{p_1'^2}\right) - np_2' - \frac{1}{q_1} = -\frac{1}{2p_1'^2} - np_2'.$$

Если теперь опять опустить штрихи, то уравнения движения ограниченной задачи трех тел могут быть написаны в виде:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\ 2),$$

где H может быть разложена в ряд:

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \cdots,$$

в котором

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - np_2,$$

а H_1 и H_2 суть некоторые периодические относительно q_1 и q_2 функции с периодом, равным 2π.

Уравнения этой системы четвертого порядка могут быть приведены к системе Гамильтона второго порядка при помощи интеграла энергии $H = \text{const}$ и исключения времени.

§ 163. Обобщение на задачу n-тел. Часть из преобразований, использованных в этой главе для понижения порядка системы уравнений задачи трех тел, может быть обобщена таким образом, что она может быть распространена и на общую задачу n-тел, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. В первоначальной постановке уравнения задачи n-тел образуют систему $6n$-го порядка. Затем при помощи шести интегралов движения центра тяжести, трех интегралов моментов количества движения, интеграла энергии, исключения времени и узла эта система может быть приведена к $(6n-12)$-му порядку.

Это приведение выполнил Беннет (*T. L. Bennett*, Mess. of Math. (2), т. 44, стр. 113, 1904).

Упражнения.

1. В задаче трех тел единицы измерений выбраны таким образом, что интеграл энергии имеет вид:

$$\frac{1}{2}\left(v_1^2+v_2^2+v_3^2\right)=\frac{1}{r_{23}}+\frac{1}{r_{31}}+\frac{1}{r_{12}}-\frac{1}{r},$$

где r_{12} — расстояние между телами, имеющими скорости v_1 и v_2, а r — положительная постоянная. Показать, что момент количества движения системы относительно центра тяжести не превышает по величине $3\sqrt{\frac{r}{2}}$. (Camb. Math. Tripos, часть 1, 1893.)

2. В задаче трех тел пусть Φ означает функцию Якоби, Ω — угол между некоторой определенной прямой неизменяемой плоскости с прямой ее пересечения с плоскостью трех тел, i — угол наклона плоскости трех тел относительно неизменяемой плоскости, η — площадь треугольника, образованного телами. Показать, что

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{k}{\Phi},\quad \frac{1}{\sin i}\frac{di}{dt}=k\left\{\frac{M}{m_1m_2m_3\eta^2}-\frac{1}{\Phi^2}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где k — момент количества движения системы относительно нормали к неизменяемой плоскости. (De Gasparis.)

3. Задача трех тел приведена, как в § 160, к задаче двух тел μ и μ'. Пусть q_1 и q_2 суть расстояния тел μ и μ' от нулевой точки, q_3 и q_4 суть углы между q_1, q_2 и прямой пересечения плоскости тел с неизменяемой плоскостью. Обозначим соответственно через p_1 и p_2 величины $\mu\dot{q}_1$ и $\mu'\dot{q}_2$, а через p_3 и p_4 — компоненты моментов количества движения тел μ и μ' в плоскости, проходящей через оба тела и начало. Показать, что уравнения движения могут быть написаны в виде:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

где $H = \text{const}$ есть интеграл энергии. (Bour.)

4. Преобразовать гамильтонову систему восемнадцатого порядка задачи трех тел (§ 155) при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$\begin{aligned}
q_1' &= \left\{(q_4 - q_7)^2 + (q_5 - q_8)^2 + (q_6 - q_9)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\\
q_2' &= \left\{(q_7 - q_1)^2 + (q_8 - q_2)^2 + (q_9 - q_3)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\\
q_3' &= \left\{(q_1 - q_4)^2 + (q_2 - q_5)^2 + (q_3 - q_6)^2\right\}^{\frac{1}{2}},\\
q_4' &= b_1(q_1 + iq_2) + b_2(q_4 + iq_5) + b_3(q_7 + iq_8),\\
q_5' &= c_1q_3 + c_2q_6 + c_3q_9,\\
q_6' &= m_1q_1 + m_2q_4 + m_3q_7,\\
q_7' &= m_1q_2 + m_2q_5 + m_3q_8,\\
q_8' &= m_1q_3 + m_2q_6 + m_3q_9,\\
q_0' &= \frac{a_1(q_1 + iq_2) + a_2(q_4 + iq_5) + a_3(q_7 + iq_8)}{b_1(q_1 + iq_2) + b_2(q_4 + iq_5) + b_3(q_7 + iq_8)},\\
p_r &= \sum_{k=0}^{8} p_k' \frac{\partial q_k'}{\partial q_r} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, 8),
\end{aligned}$$

где $i = \sqrt{-1}$ и $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ суть 9 произвольных постоянных, удовлетворяющих уравнениям:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0,\ b_1 + b_2 + b_3 = 0,\ c_1 + c_2 + c_3 = 0,\ a_2b_3 - a_3b_2 = 1.$$

Показать, что интегралы движения центра тяжести имеют вид:

$$q_6' = q_7' = q_8' = p_6' = p_7' = p_8' = 0.$$

Показать далее, что если неизменяемую плоскость принять за плоскость xy, то переменная p_5' обращается в нуль, а интеграл моментов относительно нормали к неизменяемой плоскости принимает вид:

$$p_4'q_4' = k,$$

где k — постоянная.

Показать также, что уравнения движения приводятся к системе восьмого порядка:

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 0,\, 1,\, 2,\, 3),$$

где

$$\begin{aligned} H - \sum {p'}_1^2 {q'}_1^2 \frac{m_2 + m_3}{2m_2 m_3} + \sum \frac{p'_2 p'_3}{q'_2 q'_3} \cdot \frac{{q'}_2^2 + {q'}_3^2 - {q'}_1^2}{2m_1} + \\ + \sum \frac{1}{m_1} \{p'_0(a_1 - b_1 q'_0) + kb_1\} \left\{ \frac{p'_3}{q'_3}(a_3 - b_3 q'_0) - \frac{p'_2}{q'_2}(a_2 - b_2 q'_0) \right\} - \\ - \sum \frac{m_2 m_3}{q'_1}. \end{aligned}$$

Привести эту систему при помощи теоремы § 141 к шестому порядку. (Bruns.)

Глава XIV
Теоремы Брунса и Пуанкаре

§ 164. Теорема Брунса. 1. *Формулировка теоремы.* Мы видели (§ 155), что уравнения движения в задаче трех тел допускают десять интегралов: шесть интегралов движения центра тяжести, три интеграла моментов количества движения и интеграл энергии. Все эти так называемые классические интегралы являются *алгебраическими*, т. е. имеют вид:

$$f(q_1, q_2, \dots, q_9, p_1, p_2, \dots, p_9, t) = \text{const},$$

где f означает алгебраическую функцию координат $q_1, q_2, \dots, q_9$, $p_1, p_2, \dots, p_9$ и времени t.

Было сделано много неудачных попыток найти еще и другие алгебраические интегралы задачи трех тел, не зависящие от этих десяти. И вот в 1887 г. Брунс[1] доказал, что таких интегралов больше не существует. Другими словами: *Классические интегралы являются единственными независимыми алгебраическими интегралами задачи трех тел.*

Следует заметить[2], что несуществование алгебраических интегралов не обусловливает обязательно большой сложности уравнений. Одно из наиболее простых дифференциальных уравнений — линейное уравнение с постоянными коэффициентами:

$$\ddot{x} - (\mu_1 + \mu_2)\dot{x} + \mu_1\mu_2 x = 0$$

не имеет алгебраических интегралов, за исключением того случая, когда $\dfrac{\mu_1}{\mu_2}$ рациональное число. В последнем случае уравнение имеет первый интеграл:

$$\frac{(\dot{x} - \mu_2 x)^{\mu_2}}{(\dot{x} - \mu_1 x)^{\mu_1}} = \text{const},$$

который может быть преобразован в алгебраический.

2. *Представление интегралов как функций координат* § 160. Мы переходим теперь к доказательству теоремы Брунса, рассматривая сначала только такие интегралы, которые не содержат явно времени.

---

[1] Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., стр. 1, 55, 1887; Acta Math., т. 11, стр. 25; см. также *Forsyth*, Theory of Differential Equations, т. 3, гл. 17, 1900.

[2] См. *Bohlin*, Astron. Iakttagelser och Undres. a Stockholms Observ., т. 9, № 1, 1908.

Уравнения движения задачи могут быть написаны в виде (§ 160):

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6), \tag{1}$$

где

$$H = T - U,$$

$$T = \frac{1}{2\mu}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + \frac{1}{2\mu'}\left(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2\right),$$

$$U = m_1 m_2 \left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)^{-\frac{1}{2}} + m_1 m_2 \left\{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)\right\}^{-\frac{1}{2}} +$$

$$+ m_2 m_3 \left\{q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right)\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \mu' = \frac{m_3(m_1 + m_2)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Обозначим

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = \mu';$$

тогда

$$T = \sum_{r=1}^{6} \frac{p_r^2}{2\mu_r}.$$

Пусть координатами трех тел соответственно будут (q_1', q_2', q_3'), (q_4', q_5', q_6'), (q_7', q_8', q_9') и пусть $m_k \dot{q}_r' = p_r'$, где k означает наибольшее число, удовлетворяющее условию $k \leqslant \frac{1}{3}(r + 2)$. Интегралы, существование которых мы исследуем, имеют вид:

$$\varphi(q_1', q_2', \ldots, q_9', p_1', p_2', \ldots, p_9') = a,$$

где a — произвольная постоянная, а φ означает алгебраическую функцию от ее аргументов. Формулы § 160 дают возможность выразить $q_1', q_2', \ldots, q_9', p_1, p_2, \ldots, p_9$ как линейные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_9$, $p_1, p_2, \ldots, p_9$. Если мы эти функции подставим в интеграл, то мы получим уравнение:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, p_2, \ldots, p_6) = a. \tag{2}$$

Если интеграл φ складывается из интегралов движения центра тяжести, то функция f приведется, очевидно, к постоянной. В противном случае f есть алгебраическая функция переменных $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6$. Нам предстоит, следовательно, исследовать, допускают ли уравнения (1) интегралы вида (2).

3. *Интегралы содержат импульсы.* Покажем сначала, что интеграл вида (2) необходимо содержит величины p, т. е. что он не может являться функцией одних лишь величин $q_1, q_2, \ldots, q_6$.

В самом деле, допустим, что интеграл

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_6) = a$$

не содержит ни одной из величин $p_1, p_2, \ldots, p_6$. Дифференцирование по t дает:

$$0 = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial q_r}\dot{q}_r = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial f}{\partial q_r}\frac{p_r}{\mu_r}.$$

Поэтому должны выполняться тождественно уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial q_r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Следовательно, f не содержит также $q_1, q_2, \ldots, q_6$, т. е. сводится к постоянной.

4. *Интеграл содержит только одно иррациональное выражение.* Так как взаимные расстояния тел являются иррациональными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_6$, то и U также является иррациональной функцией этих переменных. Но если обозначить через s сумму всех трех взаимных расстояний, то, как это нетрудно видеть, все эти расстояния могут быть выражены как рациональные функции семи величин $q_1, q_2, \ldots, q_6, s$. Другими словами, иррациональности, входящие в расстояния, могут быть выражены через одну иррациональность s. Поэтому мы можем принять, что U есть рациональная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_6, s$.

Что касается функции f, то она, являясь алгебраической относительно $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6$, не является обязательно рациональной. Приведем уравнение (2) к рациональному виду и расположим его по степеням a. Будем иметь:

$$\begin{aligned} a^m &+ a^{m-1}\varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) + \\ &+ a^{m-2}\varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) + \cdots + \\ &+ \varphi_m(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ суть некоторые рациональные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6$. Если левая часть этого уравнения приводима в переменных $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$, т. е. может быть разложена на множители вида:

$$a^l + a^{l-1}\psi_1(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s) + \cdots + \\ + \psi_l(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s) = 0, \tag{4}$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_l$ суть некоторые рациональные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$, то одно из этих уравнений даст то значение a, которое соответствует уравнению (2), и мы можем рассматривать это уравнение вместо уравнения (3). Так как уравнения вида (4) содержат как частный случай уравнения вида (3), то мы можем принять, что значение a определяется посредством $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$ неприводимым уравнением вида (4).

Дифференцируя (4) по t и принимая во внимание уравнения (1), будем иметь:

$$a^{l-1}(\psi_1, H) + a^{l-2}(\psi_2, H) + \cdots + (\psi_l, H) = 0, \tag{5}$$

где, как обычно, (ψ_r, H) означают скобки Пуассона от ψ'_r и H.

Примем сначала, что выражения (ψ_r, H), являющиеся рациональными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$, не обращаются в нуль одновременно. Тогда уравнения (4) и (5) должны иметь по крайней мере один общий корень a: вследствие этого уравнение (4) в переменных $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$ будет приводимым. Но так как это уравнение не приводимо, то исходное предположение приводит к противоречию. Выражения (ψ_r, H) должны, следовательно, равняться нулю. Это значит, что все коэффициенты уравнения (4) являются интегралами уравнения (1). *Интеграл f может быть алгебраически выражен через другие интегралы, являющиеся рациональными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$.*

5. *Интеграл есть частное двух алгебраических полиномов.* Теперь мы уже можем ограничиться рассмотрением интегралов вида:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s) = a, \tag{6}$$

где f означает рациональную функцию указанных аргументов. Вид функции f может быть выяснен еще более точно при помощи следующих рассуждений. Если в уравнениях движения заменить величины q_r, p_r, t величинами $q_r k^2$, $p_r k^{-1}$, tk^2, где k — некоторая постоянная, то эти уравнения не изменяются. Поэтому если эту подстановку сделать в уравнение (6), то это уравнение, как бы ни было выбрано k, останется интегралом системы.

Но f есть рациональная функция аргументов и поэтому может быть представлена как дробь двух полиномов относительно

$q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$. Если в этих полиномах заменить величины q_r, p_r, s величинами $q_r k^2, p_r k^{-1}, sk^2$, то функция f после умножения числителя и знаменателя на подходящую степень k примет вид:

$$f = \frac{A_0 k^p + A_1 k^{p-1} + \cdots + A_p}{B_0 k^q + B_1 k^{q-1} + \cdots + B_q},$$

где $A_0, A_1, \ldots, B_q$ суть некоторые полиномы относительно $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$. Так как $\dfrac{df}{dt}$, то имеем:

$$\left(B_0 k^q + B_1 k^{q-1} + \cdots + B_q\right)\left(\frac{dA_0}{dt}k^p + \cdots + \frac{dA_p}{dt}\right) -$$
$$-\left(A_0 k^p + A_1 k^{p-1} + \cdots + A_p\right)\left(\frac{dB_0}{dt}k^q + \cdots + \frac{dB_q}{dt}\right) = 0.$$

Но величина k — произвольная; поэтому в этом уравнении должны обращаться в нуль все коэффициенты при отдельных степенях k. Имеем, следовательно,

$$0 = B_0 \frac{dA_0}{dt} - A_0 \frac{dB_0}{dt},$$
$$0 = B_1 \frac{dA_0}{dt} + B_0 \frac{dA_1}{dt} - A_1 \frac{dB_0}{dt} A_0 \frac{dB_1}{dt},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0 = B_q \frac{dA_p}{dt} - A_p \frac{dB_q}{dt}$$

Эти $q + p + 1$ уравнений равносильны системе:

$$\frac{1}{A_0}\frac{dA_0}{dt} = \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \cdots = \frac{1}{A_p}\frac{dA_p}{dt} = \frac{1}{B_0}\frac{dB_0}{dt} = \cdots = \frac{1}{B_q}\frac{dB_q}{dt},$$

откуда вытекает, что каждая из величин

$$\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \ldots, \frac{A_p}{A_0}, \frac{B_0}{A_0}, \ldots, \frac{B_q}{A_0}$$

является интегралом. Мы получили таким образом теорему: *каждый интеграл вида f может быть составлен из интегралов вида:*

$$\frac{G_2(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s)}{G_1(q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s)} = \text{const},$$

в котором каждая из функций G_1, G_2 является полиномом относительно своих аргументов, которые лишь умножаются на некоторую *степень k, если переменные q_r, p_r, s заменить соответственно через $q_r k^2$, $p_r k^{-1}$, sk^2.* Мы можем, следовательно, ограничиться рассмотрением интегралов только такого вида.

Далее, заметим, что функции G_1 и G_2 без ограничения общности рассуждений могут быть приняты действительными. В самом деле, если P и Q суть действительная и мнимая части какого-нибудь интеграла

$$P + iQ = \text{const},$$

то равенство

$$\frac{dP}{dt} + i\frac{dQ}{dt} = 0$$

должно выполняться тождественно, но так как дифференциальные уравнения не содержат мнимых членов, то $\frac{dP}{dt}$ и $\frac{dQ}{dt}$ должны быть действительными. Поэтому каждая из величин $\frac{dP}{dt}$ и $\frac{dQ}{dt}$ в отдельности равна нулю; следовательно, P и Q являются сами интегралами и каждый комплексный интеграл складывается из двух действительных. Мы можем поэтому предполагать в дальнейшем, что функция $\frac{G_1}{G_2}$ является действительной.

6. *Образование интегралов из числителя и знаменателя дроби.* Разложим функцию G_1 на произведение неразложимых полиномов относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$, коэффициенты которых являются рациональными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_6, s$. Пусть ψ есть один из этих полиномов, входящий множителем в G_1 λ-раз, и пусть χ означает произведение всех остальных множителей, так что

$$G_1 = \psi^\lambda \chi.$$

Если G_1 не приводимо, то естественно $G_1 = \psi$ и $\chi = 1$.

Уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{G_1}{G_2}\right) = 0$$

даст

$$\frac{\lambda}{\psi}\frac{d\psi}{dt} + \frac{1}{\chi}\frac{d\chi}{dt} - \frac{1}{G_2}\frac{dG_2}{dt} = 0$$

или

$$\frac{d\psi}{dt} = \psi\left(\frac{1}{\lambda G_2}\frac{dG_2}{dt} - \frac{1}{\lambda\chi}\frac{d\chi}{dt}\right).$$

Но $\frac{d\psi}{dt}$ есть целая рациональная функция от $p_1, \ldots, p_6$; ψ есть также целая рациональная функция от $p_1, \ldots, p_6$, но степени на единицу ниже, чем $\dfrac{d\psi}{dt}$. Далее, ψ не имеет общих множителей с G_2 или с χ. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\lambda G_2}\frac{dG_2}{dt}-\frac{1}{\lambda\chi}\frac{d\chi}{dt}$$

есть целая рациональная функция первого порядка относительно p_1, $p_2, \ldots, p_6$. Обозначим этот полином через ω. Тогда будем иметь:

$$\frac{d\psi}{dt}=\omega\psi.$$

Аналогичным образом можно показать, что и все остальные неприводимые множители функции G_1 удовлетворяют такого рода уравнениям. Если все эти различные множители G_1 обозначить соответственно через ψ', ψ'', так что

$$G_1=\psi'^{\mu}\psi''^{\nu}\ldots,$$

и если уравнения, которым они удовлетворяют, имеют вид:

$$\frac{1}{\psi'}\frac{d\psi'}{dt}=\omega',\quad \frac{1}{\psi''}\frac{d\psi''}{dt}\omega'',\quad \ldots,$$

то

$$\frac{1}{G_1}\frac{dG_1}{dt}=\frac{\mu}{\psi'}\frac{d\psi'}{dt}+\frac{\nu}{\psi''}\frac{d\psi''}{dt}+\cdots=\mu\omega'+\nu\omega''+\cdots=\omega,$$

где ω есть целая и рациональная функция первого порядка относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$ и рациональная относительно $q_1, q_2, \ldots, q_6, s$. Таким образом, G_1 удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dG_1}{dt}=\omega G_1,$$

и так как $\dfrac{G_1}{G_2}$ есть интеграл, то и G_2 удовлетворяет уравнению:

$$\frac{dG_2}{dt}=\omega G_2.$$

Так как G_1 и G_2 удовлетворяют одному и тому же уравнению, то мы обе эти функции будем в дальнейшем обозначать через φ; следовательно, φ означает действительный полином относительно $p_1, \ldots, p_6, q_1, \ldots, q_6, s$, удовлетворяющий уравнению $\varphi=\omega\varphi$.

Но φ лишь умножается на некоторую степень k, если величины q_r, p_r, s, заменить соответственно через q_rk^2, p_rk^{-1}, sk^2. Так как

$$\omega=\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt}=\sum_{r=1}^{6}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}\frac{p_r}{\mu}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right),$$

то ω умножается при этой подстановке на k^{-3}. Следовательно, ω не может содержать члена, свободного от $p_1, \ldots, p_6$, ибо такой член должен был бы умножиться на четную степень k. Поэтому ω имеет вид:

$$\omega = \omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_6 p_6,$$

где каждая из величин ω_r является однородной функцией (-1)-го порядка относительно $q_1, \ldots, q_6, s$.

Далее, пусть один из членов функции φ будет m-го порядка относительно $p_1, \ldots, p_6$ и n-го порядка относительно $q_1, \ldots, q_6, s$, а другой член m'-го порядка относительно $p_1, \ldots, p_6$ и n'-го порядка относительно $q_1, \ldots, q_6, s$. Так как оба эти члена при вышеуказанной постановке умножаются на одну и ту же степень k, то

$$-m + 2n = -m' + 2n',$$

и поэтому $m - m'$ есть четное число. Следовательно, φ может быть расположен следующим образом:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_2 + \varphi_4 + \cdots,$$

где φ_0 означает совокупность членов наивысшего порядка относительно $p_1, \ldots, p_6$, φ_2 — совокупность членов порядка на две единицы ниже и т. д. Каждая из этих величин φ_r есть полином относительно $q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6, s$, однородный как относительно $p_1, \ldots, p_6$, так и относительно $q_1, \ldots, q_6, s$.

Докажем теперь следующее: *Если s не входит явно в φ_0, то φ путем умножения на подходящую рациональную функцию от $q_1, \ldots, q_6$ может быть преобразован в интеграл.*

В самом деле, если φ_0 не содержит s, то из уравнения:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega\varphi$$

или

$$\frac{d\varphi_0}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt} + \cdots = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_6 p_6)(\varphi_0 + \varphi_2 + \cdots)$$

из сравнения членов наивысшего порядка относительно $p_1, \ldots, p_6$ вытекает, что

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_r} = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_6 p_6)\varphi_0.$$

Далее, φ_0 может содержать множителем величину p_6; чтобы учесть эту возможность, положим $\varphi_0 = p_6^k \varphi_0'$, где φ_0' уже не содержит больше множителем p_6, и где, в частности, может быть, что $k = 0$, $\varphi_0' = \varphi_0$. Заменяя в дифференциальном уравнении φ_0 через $p_6^k \varphi_0'$, получим:

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0'}{\partial q_r} = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_6 p_6)\varphi_0'.$$

Обозначим через φ_0'' совокупность членов в φ_0', не содержащих p_6. Тогда, приравнивая в обеих частях уравнения члены, не зависящие от p_6, будем иметь:

$$\sum_{r=1}^{5} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0''}{\partial q_r} = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_5 p_5)\varphi_0''.$$

Если φ_0'' есть функция одних лишь величин $q_1, q_2, \ldots, q_6$, то мы ее обозначим через R. Тогда

$$\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial R}{\partial q_r} = \omega_r R \qquad (r = 1, 2, \ldots, 5)$$

или

$$\mu_r \omega_r = \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 5)$$

и поэтому

$$\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu_r \omega_r) = \frac{\partial}{\partial q_r}(\mu_s \omega_s) \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, 5).$$

Если же φ_0'' зависит также и от величины $p_1, \ldots, p_5$, то, принимая, что φ_0'' содержит, например, p_5 множителем, положим $\varphi_0'' = p_5^\lambda \varphi_0'''$, где φ_0''' уже не содержит более p_5 в качестве множителя. Уравнение переходит тогда в

$$\sum_{r=1}^{5} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0'''}{\partial q_r} = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_5 p_5)\varphi_0'''.$$

Обозначим через φ_0^{IV} совокупность членов в φ_0''' не содержащих p_5. Сравнивая тогда в обеих частях уравнения члены, не зависящие от p_5, будем иметь:

$$\sum_{r=1}^{5} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0^{IV}}{\partial q_r} = (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3 + \omega_4 p_4)\varphi_0^{IV}.$$

Продолжая аналогичным образом дальше, мы придем к заключению, что либо

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(\mu_2 \omega_2) = \frac{\partial}{\partial q_2}(\mu_1 \omega_1),$$

либо существует некоторая функция ψ, являющаяся полиномом относительно $q_1, \ldots, q_6, p_1, p_2$ и притом однородным как относительно $q_1, \ldots, q_6$, так и относительно p_1, p_2, не содержащим никаких множителей, являюшихся степенями от p_1 и p_2, и удовлетворяющая уравнению:

$$\frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} - \frac{p_2}{\mu_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} - (\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2)\psi.$$

Пусть

$$\psi = ap_1^l + bp_2^l + cp_1^{l-1}p_2 + \cdots;$$

сравнивая коэффициенты при p_1^{l+1} и p_2^{l+1} в обеих частях последнего уравнения, будем иметь:

$$\omega_1 = \frac{1}{\mu_1 a}\frac{\partial a}{\partial q_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{\mu_2 b}\frac{\partial b}{\partial q_2}.$$

Величины a, b, c суть полиномы относительно $q_1, \ldots, q_6$. Они могут содержать какой-нибудь полином Q общим множителем, так что

$$a = a'Q, \quad b = b'Q, \quad \ldots$$

Пусть

$$\psi' = a'p_1^l + b'p_2^l + c'p_1^{l-1}p_2 + \cdots,$$

следовательно,

$$\psi = Q\psi'.$$

Тогда

$$\frac{1}{\psi'}\left(\frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial\psi'}{\partial q_1} + \frac{p_2}{\mu_2}\frac{\partial\psi'}{\partial q_2}\right) = \frac{1}{\psi}\left(\frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{p_2}{\mu_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right) - \frac{1}{Q}\left(\frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial Q}{\partial q_1} + \frac{p_2}{\mu_2}\frac{\partial Q}{\partial q_2}\right) =$$
$$= \left(\omega_1 - \frac{1}{Q\mu_1}\frac{\partial Q}{\partial q_1}\right)p_1 + \left(\omega_2 - \frac{1}{Q\mu_2}\frac{\partial Q}{\partial q_2}\right)p_2 = \omega_1' p_1 + \omega_2' p_2,$$

где

$$\omega_1' = \frac{1}{\mu_1 a'}\frac{\partial a'}{\partial q_1}, \quad \omega_2' = \frac{1}{\mu_2 b'}\frac{\partial b'}{\partial q_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial\psi'}{\partial q_1} - \frac{p_2}{\mu_2}\frac{\partial\psi'}{\partial q_2} = (\omega_1' p_1 + \omega_2' p_2)\psi'.$$

Левая часть этого уравнения есть целая рациональная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, p_2$. Но если a' содержит q_1, то и ω_1' содержит в знаменателе если не a', то во всяком случае один множитель от a'. Поэтому ψ' должно содержать в качестве множителя либо a', либо один множитель от ω'. Но последнее несовместимо с предположением, что $a', b', \ldots$ не имеют общих множителей. Поэтому a' не может содержать q_1 и ω_1' равно нулю. Аналогично получается, что и ω_2' тоже равно нулю.

Таким образом,

$$\omega_1 = \frac{1}{Q\mu_1}\frac{\partial Q}{\partial q_1}, \quad \omega_2 = \frac{1}{Q\mu_2}\frac{\partial Q}{\partial q_2},$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(\mu_1\omega_1) = \frac{\partial}{\partial q_1}(\mu_2\omega_2).$$

Следовательно, второе наше допущение свелось к первому.

Аналогичным образом можно показать, что вообще

$$\frac{\partial}{\partial q_r}(\mu_s\omega_s) = \frac{\partial}{\partial q_s}(\mu_r\omega_r).$$

Поэтому мы можем написать:

$$\mu_r\omega_r = \frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial q_r},$$

где R некоторая рациональная функция от $q_1, q_2, \ldots, q_6$.

Следовательно,

$$\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_6 p_6 = \sum_{r=1}^{6}\frac{p_r}{\mu_r}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial q_r} = \sum_{r=1}^{6}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial q_r}\frac{dq_r}{dt}$$

или

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{dR}{dt},$$

и поэтому

$$\frac{\varphi}{R} = \text{const}.$$

Таким образом, φ *путем умножения на некоторую рациональную функцию от* $q_1, \ldots, q_6$, *а именно на функцию* $\frac{1}{R}$ *может быть преобразовано* в константу, чем теорема и доказывается.

Следовательно, если члены φ_k от G_1 и G_2 не содержат явно s, то G_1 и G_2 путем умножения на подходящую рациональную функцию от $q_1, q_2, \ldots, q_6$ могут быть преобразованы в интегралы. Поэтому, если нам удастся доказать, что φ_0 не содержит явно s, то мы получим теорему, что каждый алгебраический интеграл задачи трех тел складывается из интегралов, являющихся полиномами относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$, и рациональными функциями от $q_1, q_2, \ldots, q_6, s$.

7. *Доказательство того, что φ_0 не содержит s.* Предыдущее исследование предполагает, что функция φ_0 не содержит s. Мы хотим

сейчас показать, что не может существовать никакой вещественной функции φ_0, удовлетворяющей уравнению:

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_r} = (\omega_1 p_1 - \omega_2 p_2 + \cdots + \omega_6 p_6)\varphi_0$$

и содержащей s, что, следовательно, функция φ_0 нашей задачи не содержит s и что предыдуший результат действительно имеет место.

Допустим, что существует функция φ_0, содержащая s и удовлетворяющая вышенаписанному дифференциальному уравнению. Тогда, если в φ_0 подставить все восемь различных значений, которые может принимать s, то функция φ_0 примет ряд различных значений, которые мы обозначим соответственно через φ_0', φ_0'', ... Все эти значения удовлетворяют уравнениям вида:

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0'}{\partial q_r} = \omega' \varphi_0', \quad \sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi_0''}{\partial q_r} = \omega'' \varphi_0'', \quad \ldots,$$

где ω', ω'', ... означают значения ω, получающиеся подстановкой значений s, соответствующих значениям φ_0', φ_0'', ...

Пусть

$$\Phi = \varphi_0' \varphi_0'' \varphi_0''' \ldots$$

Тогда

$$\frac{1}{\Phi} \sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} = \sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \left(\frac{1}{\varphi_0'} \frac{\partial \varphi_0'}{\partial q_r} + \frac{1}{\varphi_0''} \frac{\partial \varphi_0''}{\partial q_r} + \cdots \right) = \omega' + \omega'' + \cdots = \Omega,$$

где Ω есть линейная функция от $p_1, p_2, \ldots, p_6$, коэффициенты которой суть рациональные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_6$.

Но функция Ω по самому способу ее образования рациональна относительно $q_1, q_2, \ldots, q_6$ и не содержит s. Далее, она, очевидно, является полиномом относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$. Поэтому к функции Φ могут быть приложены уже доказанные положения, согласно которым (если Φ умножить на некоторую рациональную функцию от $q_1, q_2, \ldots, q_6$) $\Omega = 0$, в силу чего функция Φ удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \Phi}{\partial q_r} = 0.$$

Можно указать сразу пять независимых решений этого уравнения с частными производными для Φ, содержащего шесть независимых переменных, а именно:

$$\frac{q_2 p_1}{\mu_1} - \frac{q_1 p_2}{\mu_2}, \ \ldots, \ \frac{q_6 p_1}{\mu_1} - \frac{q_1 p_6}{\mu_6}.$$

Следовательно, Φ есть функция одних лишь величин:

$$\frac{q_2p_1}{\mu_1}-\frac{q_1p_2}{\mu_2},\ \ldots,\ \frac{q_6p_1}{\mu_1}-\frac{q_1p_6}{\mu_6},\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_6.$$

Множители функции Φ отличаются друг от друга лишь тем, что для их образования взяты различные значения величины s. Допустим, что величины $q_1, q_2, \ldots, q_6$ связаны таким соотношением:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_6)=0,$$

что два значения величины s совпадают. Тогда два множителя функции Φ будут также совпадать. Следовательно, уравнение $\Phi=0$, рассматриваемое как уравнение относительно p_1, должно при этом условии иметь по меньшей мере два одинаковых корня и поэтому $\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_1}=0$. Аналогично получаем, что все величины $\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_2}, \ldots, \dfrac{\partial\Phi}{\partial p_6}$ обращаются одновременно в нуль. Но так как функция Φ однородна относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$, то уравнение

$$p_1\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial\Phi}{\partial p_2}+\cdots-p_6\frac{\partial\Phi}{\partial p_6}=0$$

равносильно уравнению $\Phi=0$ и, следовательно, последнее уравнение есть следствие уравнений:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p_1}=0,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_2}=0,\quad \ldots,\quad \frac{\partial\Phi}{\partial p_6}=0.$$

Если переменным, удовлетворяющим уравнению $\Phi=0$, придать бесконечно малые приращения, то последние должны быть связаны соотношением:

$$\sum_{r=1}^{6}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_r}\delta q_r+\frac{\partial\Phi}{\partial p_r}\delta p_r\right)=0.$$

Но если $q_1, q_2, \ldots, q_6; p_1, \ldots, p_6$ удовлетворяют уравнениям $\dfrac{\partial\Phi}{\partial p_r}=0$, то это соотношение переходит в следующее:

$$\sum_{r=1}^{6}\frac{\partial\Phi}{\partial q_r}\delta q_r=0.$$

Поэтому это соотношение между вариациями δq_r должно быть эквивалентно соотношению:

$$\sum_{r=1}^{6}\frac{\partial f}{\partial q_r}\delta q_r=0.$$

Следовательно, уравнения:

$$\frac{\partial f/\partial q_1}{\partial \Phi/\partial q_1} - \frac{\partial f/\partial q_2}{\partial \Phi/\partial q_2} - \cdots - \frac{\partial f/\partial q_6}{\partial \Phi/\partial q_6}$$

должны являться следствием уравнений $\dfrac{\partial \Phi}{\partial p_r} = 0$, и так как $\sum\limits_{r=1}^{6} \dfrac{p_r}{\mu_r} \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_r} = 0$, то для системы значений $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, p_2, \ldots, p_6$, удовлетворяющих этим уравнениям,

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial f}{\partial q_r} = 0.$$

Поэтому уравнения $f = 0$ и $\sum\limits_{r=1}^{6} \dfrac{p_r}{\mu_r} \dfrac{\partial f}{\partial q_r} = 0$ могут быть получены алгебраически из уравнений $\dfrac{\partial \Phi}{\partial q_r} = 0$. При этом алгебраическом исключении не имеют значения действительные значения величин $q_1, q_2, \ldots, q_6$. Мы можем поэтому во всех уравнениях заменить q_r через $q_r + p_r \dfrac{t}{\mu_r}$. Отсюда ясно, что уравнения:

$$f\left(q_1 + \frac{p_1}{\mu_1} t, \ldots, q_6 + \frac{p_6}{\mu_6} t\right) = 0,$$

$$\sum_{r=1}^{6} \frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial}{\partial q_r} f\left(q_1 + \frac{p_1}{\mu_1} t, \ldots, q_6 + \frac{p_6}{\mu_6} t\right) = 0$$

являются алгебраическим следствием уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \Phi(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) -$$
$$- \frac{t}{\mu_r} \frac{\partial}{\partial q_r} \Phi(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Следовательно, результат исключения t из уравнений:

$$f\left(q_1 + \frac{p_1}{\mu_1} t, \ldots, q_6 + \frac{p_6}{\mu_6} t\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} f\left(q_1 - \frac{p_1}{\mu_1} t, \ldots, q_6 + \frac{p_6}{\mu_6} t\right) = 0$$

должен являться алгебраической комбинацией уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial p_r} \Phi(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) -$$
$$- \frac{t}{\mu_r} \frac{\partial}{\partial q_r} \Phi(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) - 0 \qquad (r - 1, 2, \ldots, 6).$$

Такого рода алгебраической комбинацией является уравнение:

$$\Phi(q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6) = 0,$$

ибо оно получается из этих уравнений последовательным умножением их на $p_1, \ldots, p_6$ и сложением. Покажем, что это и есть то уравнение, которое получается в результате исключения t. Обозначим искомое уравнение через Ψ. Тогда уравнение:

$$\sum_{r=1}^{6}\left(\frac{\partial\Psi}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial\Psi}{\partial p_r}\delta p_r\right) = 0$$

должно являться комбинацией уравнений:

$$\sum_{r=1}^{6}\frac{\partial f}{\partial q_r}\left(\delta q_r + \frac{t}{\mu_r}\delta p_r\right) = 0$$

и

$$\sum_{r=1}^{6}\frac{1}{\mu_r}\frac{\partial f}{\partial q_r}\delta p_r + \sum_{r=1}^{6}\sum_{s=1}^{6}\frac{p_r}{\mu_r}\frac{\partial^2 f}{\partial q_r\partial q_s}\left(\delta q_s + \frac{t}{\mu_s}\delta p_s + \frac{p_s}{\mu_s}\delta t\right) = 0.$$

Так как последнее уравнение содержит δt, то оно, очевидно, не может войти в комбинацию; следовательно, имеем:

$$\frac{\partial\Psi/\partial q_1}{\partial f/\partial q_1} = \frac{\partial\Psi/\partial q_2}{\partial f/\partial q_2} = \cdots = \frac{\partial\Psi/\partial q_6}{\partial f/\partial q_6}; \quad \frac{\partial\Psi}{\partial p_r} = \frac{t}{\mu_r}\frac{\partial\Psi}{\partial q_r} \quad (r = 1, 2, \ldots, 6).$$

Совпадение этих уравнений с найденными уравнениями для Φ показывает, что уравнения $\Phi = 0$ и $\Psi = 0$ эквивалентны. Следовательно, уравнение $\Phi = 0$ есть результат исключения t из уравнений:

$$f\left(q_1 + \frac{p_1}{\mu_1}t, \ldots, q_6 + \frac{p_6}{\mu_6}t\right) = 0$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t}f\left(q_1 + \frac{p_1}{\mu_1}t, \ldots, q_6 + \frac{p_6}{\mu_6}t\right) = 0.$$

Легко указать все уравнения $f(q_1, q_2, \ldots, q_6) = 0$, являющиеся условием того, что уравнение для s имеет кратные корни. Этот результат даст нам возможность найти всевозможные полиномы Φ и тем самым, — путем разложения Φ на множители, — все возможные полиномы φ_0.

Восемь корней s являются восемью значениями, которые может принимать выражение $\pm r_1 \pm r_1 \pm r_3$, где r_1, r_2, r_3 означают взаимные расстояния наших трех тел. Поэтому совпадение двух корней s можно рассматривать как следствие каждого из уравнений:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0, \quad r_3 = 0, \quad r_2 = \perp r_3, \quad r_3 = \perp r_1, \quad r_1 = \perp r_2,$$
$$r_1 \pm r_2 \pm r_3 = 0.$$

Уравнение $r_1 - 0$ даст:

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 0,$$

и результат исключения t из уравнений:

$$\left(q_1 + \frac{p_1}{\mu_1} t\right)^2 + \left(q_2 + \frac{p_2}{\mu_2} t\right)^2 + \left(q_3 + \frac{p_3}{\mu_3} t\right)^2 = 0$$

и

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(q_1 - \frac{p_1}{\mu_1} t\right)^2 - \left(q_2 + \frac{p_2}{\mu_2} t\right)^2 + \left(q_3 + \frac{p_3}{\mu_3} t\right)^2 \right\} = 0$$

есть

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \left(\frac{p_1^2}{\mu_1^2} + \frac{p_2^2}{\mu_2^2} + \frac{p_3^2}{\mu_3^2}\right) = \left(\frac{q_1 p_1}{\mu_1} + \frac{q_2 p_2}{\mu_2} + \frac{q_3 p_3}{\mu_3}\right)^2.$$

Получаемое отсюда значение Φ есть, следовательно,

$$\Phi = \left(\frac{q_1 p_2}{\mu_2} - \frac{q_2 p_1}{\mu_1}\right)^2 + \left(\frac{q_2 p_3}{\mu_3} - \frac{q_3 p_2}{\mu_2}\right)^2 + \left(\frac{q_3 p_1}{\mu_1} - \frac{q_1 p_3}{\mu_3}\right)^2.$$

Это выражение не может быть разложено на действительные множители и поэтому в этом случае не существует действительного φ_0.

Аналогичный результат может быть получен и в случае $r_2 = 0$ и $r_3 = 0$. Рассмотрим теперь уравнение:

$$r_2 = \pm r_3,$$

которое может быть написано в виде:

$$q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) -$$
$$+ \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = q_4^2 + q_5^2 + q_6^2 -$$
$$- \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$$

или

$$2(q_1 q_4 + q_2 q_5 + q_3 q_6) + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) = 0.$$

Заменяя q_r через $q_r + \dfrac{p_r t}{\mu_r}$ и составляя дискриминант полученного таким образом уравнения относительно t, получим:

$$\begin{aligned}\Phi = &\left\{2(q_1q_4 + q_2q_5 + q_3q_6) + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)\right\}\times\\ &\times\left\{2\left(\frac{p_1p_4}{\mu_1\mu_4} + \frac{p_2p_5}{\mu_2\mu_5} + \frac{p_3p_6}{\mu_3\mu_6}\right) - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{p_1^2}{\mu_1^2} + \frac{p_2^2}{\mu_2^2} + \frac{p_3^2}{\mu_3^2}\right)\right\} -\\ &-\left\{\frac{q_1p_4}{\mu_4} - \frac{q_4p_1}{\mu_1} + \frac{q_2p_5}{\mu_5} + \frac{q_5p_2}{\mu_2} - \frac{q_3p_6}{\mu_6} + \frac{q_6p_3}{\mu_3} +\right.\\ &\left.+\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\left(\frac{q_1p_1}{\mu_1} - \frac{q_2p_2}{\mu_2} + \frac{q_3p_3}{\mu_3}\right)\right\}^2.\end{aligned}$$

Это выражение может быть разложено на полиномы, линейные относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$. Следовательно, и в этом случае не существует φ_0.

Аналогично можно показать, что и в случае уравнений $r_3 = \pm r_1$, $r_1 = \pm r_2$ не существует функции φ_0.

Наконец, уравнения:

$$r_1 \pm r_2 \pm r_3 = 0,$$

в рациональной форме принимают вид:

$$(r_3^2 - r_2^2 + r_1^2)^2 - 4r_3^2r_1^2 = 0.$$

При $r_1 = 0$ этот случай приводится к предыдущему; так как полином Φ в этом частном случае не разлагается на множителей, то то же самое будет иметь место и в общем случае.

Следовательно, *не существует вещественных полиномов φ_0, содержащих s.*

Резюмируя, можем сказать: Мы до сих пор доказали, что всякий не зависящий от t алгебраический интеграл дифференциальных уравнений задачи трех тел есть алгебраическая функция интегралов φ, каждый из которых может быть представлен в виде:

$$\varphi_0 + \varphi_2 + \varphi_4 + \cdots,$$

где φ_0 есть однородный полином некоторой k-й степени относительно переменных p и однородная алгебраическая функция некоторой l-й степени относительно переменных q; φ_2 есть однородный полином $(k-2)$-й степени относительно переменных p и однородная алгебраическая функция $(l-1)$-й степени относительно переменных q; φ_4 есть однородный полином $(k-4)$-й степени относительно p и функция $(l-2)$-й степени относительно q и т. д.

8. *Функция φ_0 зависит только от импульсов и от интегралов моментов количества движения.* Подставляя в уравнение:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \text{ или } \sum_{r=1}^{6} \left(\frac{p_r}{\mu_r} \frac{\partial \varphi}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} \frac{\partial \varphi}{\partial p_r} \right) = 0$$

вместо φ его значение $\varphi_0 + \varphi_2 - \varphi_4 + \ldots$ и приравнивая члены одного и того же порядка, получим:

$$0 = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial \varphi_0}{\partial q_r} \frac{p_r}{\mu_r},$$

$$0 - \sum_{r=1}^{6} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_r} \frac{p_r}{\mu_r} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial p_r} \frac{\partial U}{\partial q_r} \right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 = \sum_{r=1}^{6} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial q_r} \frac{p_r}{\mu_r} + \frac{\partial \varphi_{k-2}}{\partial p_r} \frac{\partial U}{\partial q_r} \right),$$

$$0 = \sum_{r-1}^{6} \frac{\partial \varphi_k}{\partial p_r} \frac{\partial U}{\partial q_r} \Bigg).$$

Первое из этих уравнений есть линейное уравнение с частными производными, определяющее φ_0; оно легко разрешается и даст:

$$\varphi_0 - f_0(P_2, P_3, \ldots, P_6, p_1, p_2, \ldots, p_6),$$

где

$$P_r = \frac{q_r p_1}{\mu_1} - \frac{q_1 p_r}{\mu_r} \qquad (r = 2, 3, \ldots, 6).$$

Пусть φ_2, выраженное в переменных $q_1, P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6$, имеет вид:

$$\varphi_2 = f_2(q_1, P_2, P_3, \ldots, P_6, p_1, p_2, \ldots, p_6).$$

Тогда

$$\frac{\partial f_2}{\partial q_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} + \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_r} \frac{\partial q_r}{\partial q_1} = \qquad \left(q_r = \frac{\mu_1 P_r}{p_1} + \frac{\mu_1 p_r q_1}{\mu_r p_1} \right)$$

$$= \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} + \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial \varphi_2}{\partial q_r} \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}$$

или

$$\frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial f_2}{\partial q_1} - \sum_{r=1}^{6}\frac{p_r}{\mu_r}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_r} = -\sum_{r=1}^{6}\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r}.$$

Интегрируя, находим:

$$f_2 = \chi(P_2, P_3, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6) - \int \frac{\mu_1}{p_1}\sum_{r=1}^{6}\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r}\,dq_1.$$

Отсюда следует, что $\int X\,dq_1$, где X функция от $q_1, P_2, \ldots, P_6$, определяемая уравнением:

$$X = \sum_{r=1}^{6}\frac{\partial \varphi_0}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r} = \left(\frac{\partial f_0}{\partial p_1} + \sum_{s=2}^{6}\frac{\partial f_0}{\partial P_s}\frac{q_s}{\mu_1}\right) + \sum_{r=2}^{6}\left(\frac{\partial f_0}{\partial p_r} - \frac{\partial f_0}{\partial P_r}\frac{q_1}{\mu_r}\right)\frac{\partial U}{\partial q_r} =$$
$$= \sum_{r=1}^{6}\frac{\partial f_0}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r} - \sum_{r=2}^{6}\frac{\partial f_0}{\partial P_r}\left(\frac{q_r}{\mu_1}\frac{\partial U}{\partial q_1} - \frac{q_1}{\mu_r}\frac{\partial U}{\partial q_r}\right),$$

не может содержать логарифмических членов.

Если V означает функцию U, выраженную в переменных q_1, $P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6$, то

$$\frac{\partial U}{\partial q_r} = \frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial V}{\partial P_r}\,(r > 1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial V}{\partial q_1} - \sum_{r=2}^{6}\frac{\partial V}{\partial P_r}\frac{p_r}{\mu_r}.$$

Нетрудно видеть, что члены в X, которые могут вызвать появление логарифмических членов в $\int X\,dq_1$, суть:

$$\sum_{r=2}^{6}\frac{\partial f_0}{\partial P_r}\left\{\frac{p_r V}{\mu_r p_1} + \frac{p_r q_1}{\mu_r p_1}\sum_{s=2}^{6}\frac{\partial V}{\partial P_s}\frac{p_s}{\mu_s} + \frac{q_1 p_1}{\mu_r \mu_1}\frac{\partial V}{\partial P_r}\right\}.$$

Поэтому члены, могущие быть логарифмическими в $\int X\,dq_1$ суть:

$$\sum_{r=2}^{6}\frac{p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial f_0}{\partial P_r}\int V\,dq_1 + \sum_{r=2}^{6}\sum_{s=2}^{6}\frac{\partial f_0}{\partial P_r}\frac{p_r p_s}{\mu_r \mu_s p_1}\frac{\partial}{\partial P_s}\int q_1 V\,dq_1 +$$
$$+ \sum_{r=2}^{6}\frac{\partial f_0}{\partial P_r}\frac{p_1}{\mu_r \mu_1}\frac{\partial}{\partial P_r}\int q_1 V\,dq_1.$$

Но V есть сумма трех членов, каждый из которых имеет вид $(A + Bq_1 + Cq_1^2)^{-\frac{1}{2}}$. Взяв эти члены в отдельности, для трансцендентной части последнего выражения получим:

$$\sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r}{\mu_r p_1} \frac{1}{\sqrt{-C}} \arcsin \frac{2Cq_1 + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$- \sum_{r=2}^{6} \sum_{s=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r p_s}{\mu_r \mu_s p_1} \frac{1}{2C\sqrt{-C}} \frac{\partial B}{\partial P_s} \arcsin \frac{2Cq_1 + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}} -$$

$$- \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_1}{\mu_r \mu_1} \frac{1}{2C\sqrt{-C}} \frac{\partial B}{\partial P_r} \arcsin \frac{2Cq_1 + B}{(B^2 - 4AC)^{\frac{1}{2}}}.$$

Поэтому для каждой из дробей $(A + Bq_1 + Cq_1^2)^{-\frac{1}{2}}$ должно иметь место соотношение:

$$C \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r}{\mu_r p_1} - \sum_{r=2}^{6} \sum_{s=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r p_s}{\mu_r \mu_s p_1} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial P_s} - \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_1}{\mu_r \mu_1} \frac{1}{2} \frac{\partial B}{\partial P_r} = 0.$$

Но для первой из этих дробей, а именно для $(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{-\frac{1}{2}}$ имеем:

$$A = \frac{\mu_1^2}{p_1^2}(P_2^2 + P_3^2), \quad \frac{1}{2}B = \frac{\mu_1^2 P_2 p_2}{\mu_2 p_1^2} + \frac{\mu_1^2 P_3 p_3}{\mu_3 p_1^2}, \quad C = 1 + \frac{\mu_1^2 p_2^2}{\mu_2^2 p_1^2} + \frac{\mu_1^2 p_3^2}{\mu_3^2 p_1^2}.$$

Поэтому первое из трех уравнений имеет вид:

$$\left(1 + \frac{\mu_1^2 p_2^2}{\mu_2^2 p_1^2} + \frac{\mu_1^2 p_3^2}{\mu_3^2 p_1^2}\right) \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r}{\mu_r p_1} - \sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r}{\mu_r p_1} \left(\frac{\mu_1^2 p_2^2}{\mu_2^2 p_1^2} + \frac{\mu_1^2 p_3^2}{\mu_3^2 p_1^2}\right) -$$

$$- \left(\frac{\partial f_0}{\partial P_2} \frac{\mu_1 p_2}{\mu_2^2 p_1} + \frac{\partial f_0}{\partial P_3} \frac{\mu_1 p_3}{\mu_3^2 p_1}\right) = 0$$

или

$$\sum_{r=2}^{6} \frac{\partial f_0}{\partial P_r} \frac{p_r}{\mu_r} \left(\frac{\partial f_0}{\partial P_2} \frac{\mu_1 p_2}{\mu_2^2} + \frac{\partial f_0}{\partial P_3} \frac{\mu_1 p_3}{\mu_3^2}\right) = 0,$$

или (так как $\mu_1 - \mu_2 - \mu_3$)

$$\sum_{r=4}^{6} p_r \frac{\partial f_0}{\partial P_r} = 0. \tag{7}$$

Решение этого уравнения показывает, что f_0 есть функция от

$$p_1, p_2, \ldots, p_6, P_2, P_3, (p_4q_5 - p_5q_4), (p_4q_6 - p_6q_4).$$

Так как все три выражения $(A - Bq_1 + Cq_1^2)$ суть линейные функции от величин $(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)$, $(q_1q_4 + q_2q_5 + q_3q_6)$, $(q_4^2 + q_5^2 + q_6^2)$, то мы можем для нашей цели заменить их этими величинами. Поэтому в качестве второго выражения $(A + Bq_1 + Cq_1^2)$ мы принимаем величину $(q_1q_4 + q_2q_5 + q_3q_6)$ или

$$q_1\left(\frac{\mu P_4}{p_1} + \frac{\mu P_4}{\mu' p_1}q_1\right) + \left(\frac{\mu P_2}{p_1} + \frac{p_2q_1}{p_1}\right)\left(\frac{\mu P_5}{p_1} + \frac{\mu p_5 q_1}{\mu' p_1}\right) + \\ + \left(\frac{\mu P_3}{p_1} + \frac{p_3q_1}{p_1}\right)\left(\frac{\mu P_6}{p_1} + \frac{\mu p_6 q_1}{\mu' p_1}\right).$$

Для нее

$$B = \frac{\mu P_4}{p_1} + \frac{\mu P_5 p_2}{p_1^2} + \frac{\mu^2 P_2 p_5}{\mu' p_1^2} + \frac{\mu P_6 p_3}{p_1^2} + \frac{\mu^2 P_3 p_6}{\mu' p_1^2},$$
$$C = \frac{\mu p_4}{\mu' p_1} + \frac{\mu p_2 p_5}{\mu' p_1^2} + \frac{\mu p_3 p_6}{\mu' p_1^2},$$

и соответствующим уравнением будет:

$$\frac{\partial f_0}{\partial P_2}(p_2p_4 - p_1p_5) + \frac{\partial f_0}{\partial P_3}(p_3p_4 - p_1p_6) + \frac{\partial f_0}{\partial P_4}\left(\frac{\mu p_4^2}{\mu'} - p_1^2\right) - \\ + \frac{\partial f_0}{\partial P_5}\left(\frac{\mu p_4 p_5}{\mu'} - p_1p_2\right) + \frac{\partial f_0}{\partial P_6}\left(\frac{\mu p_4 p_6}{\mu'} - p_1p_3\right) = 0. \tag{8}$$

В качестве третьего выражения для $(A + Bq_1 + Cq_1^2)$ мы можем принять величину $q_4^2 + q_5^2 + q_6^2$. Можно показать, что соответствующее уравнение совпадает с (7) и может быть поэтому отброшено. Нам нужно, таким образом, рассмотреть только уравнения (7) и (8). Упрощая (8) при помощи (7), мы можем этим уравнениям придать вид:

$$p_4\frac{\partial f_0}{\partial P_4} + p_5\frac{\partial f_0}{\partial P_5} + p_6\frac{\partial f_0}{\partial P_6} = 0,$$
$$(p_2p_4 - p_1p_5)\frac{\partial f_0}{\partial P_2} + (p_4p_3 - p_1p_6)\frac{\partial f_0}{\partial P_3} - p_1\left(p_1\frac{\partial f_0}{\partial P_4} + p_2\frac{\partial f_0}{\partial P_5} + p_3\frac{\partial f_0}{\partial P_6}\right) = 0.$$

Эти уравнения являются, очевидно, алгебраически независимыми и условия интегрируемости Якоби выполняются для них тождественно, так как коэффициенты при производных $\dfrac{\partial f_0}{\partial P}$ не содержат величины P. Оба уравнения образуют поэтому полную систему с пятью независимыми переменными P_2, P_3, P_4, P_5, P_6. Они имеют, следовательно, $5-2=3$ независимых интегралов и всякий другой интеграл будет функцией от этих трех интегралов и от величин $p_1, p_2, \ldots, p_6$.

Нетрудно убедится, что тремя независимыми решениями будут:

$$\begin{aligned}&P_2p_3 - P_3p_2 + P_5p_6 - P_6p_5,\\ &P_3p_1 \qquad\quad + P_6p_4 - P_4p_6,\\ &\qquad\quad - P_2p_1 + P_4p_5 - P_5p_4,\end{aligned}$$

или

$$\frac{P_1L}{\mu}, \quad \frac{p_1M}{\mu}, \quad \frac{p_1N}{\mu},$$

где

$$\begin{aligned}L &= q_2p_3 - q_3p_2 - q_5p_6 - q_6p_5,\\ M &= q_3p_1 - q_1p_3 - q_6p_4 - q_4p_6,\\ N &= q_1p_2 - q_2p_1 - q_4p_5 - q_5p_4.\end{aligned}$$

Три уравнения:

$$L = \text{const}, \quad M = \text{const}, \quad N = \text{const},$$

представляют собой три интеграла моментов количества движения системы. Таким образом, мы доказали, что φ_0 есть функция одних лишь величин $L, M, N, p_1, p_2, \ldots, p_6$.

9. *Доказательство того, что φ_0 есть функция от T, L, M и N.* Так как величина φ_0, рассматриваемая как функция от $q_1, q_2, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6$, есть целая и рациональная функция относительно величин $p_1, p_2, \ldots, p_6$, то она будет, очевидно, целой и рациональной относительно величин $L, M, N, p_1, p_2, \ldots, p_6$.

Полагая

$$\varphi_0 = G(L, M, N, p_1, \ldots, p_6),$$

будем иметь:

$$\frac{\varphi_0}{dt} = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial p_r}\frac{dp_r}{dt} = \sum_{r=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial p_r}\frac{\partial U}{\partial q_r}.$$

Уравнение для f_2 принимает вид:

$$f_2 = \chi(P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6) - \frac{\mu_1}{p_1}\sum_{r=1}^{6} \frac{\partial G}{\partial p_r}\int Y_r\, dq_1,$$

где Y_r означает величину $\dfrac{\partial U}{\partial q_r}$, выраженную через $q_1, P_2, \ldots, P_6$, $p_1, \ldots, p_6$. Поэтому имеем:

$$\frac{\mu_1}{p_1}\sum_{r=1}^{6}\frac{\partial G}{\partial p_r}\int Y_r\,dq_1 =$$

$$= \int \frac{\mu_1}{p_1}\left\{\frac{\partial G}{\partial p_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1} - \sum \frac{\partial V}{\partial P_r}\frac{p_r}{\mu_r}\right) + \frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial V}{\partial P_2}\frac{\partial G}{\partial p_2} + \ldots + \frac{p_1}{\mu_1}\frac{\partial V}{\partial P_6}\frac{\partial G}{\partial p_6}\right\}dq_1 =$$

$$= \frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\int\frac{\partial V}{\partial q_1}dq_1 - \sum_{r=2}^{6}\int\frac{\partial V}{\partial P_r}\left(\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)dq_1 =$$

$$= \frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}V + \sum_{r=2}^{6}\left(\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)\frac{\partial}{\partial P_r}\int V\,dq_1 =$$

$$= \frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\sum_A \frac{m_1 m_2}{(A + Bq_1 + Cq_1^2)^{\frac{1}{2}}} + \sum_{r=2}^{6}\left(\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)\times$$

$$\times\sum_A \frac{m_1 m_2\left(-2A\dfrac{\partial B}{\partial P_r} - q_1 B\dfrac{\partial B}{\partial P_r} + B\dfrac{\partial A}{\partial P_r} + 2Cq_1\dfrac{\partial A}{\partial P_r}\right)}{(B^2 - 4AC)(A + Bq_1 + Cq_1^2)^{\frac{1}{2}}},$$

где $\sum\limits_A$ означает суммирование по всем трем значениям выражения $A + Bq_1 + Cq_1^2$.

Так как $\chi(P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6)$ не может дать членов, содержащих $A + Bq_1 + Cq_1^2$ в знаменателе, то все члены, умножающиеся на $(A - Bq_1 + Cq_1^2)^{\frac{1}{2}}$ должны иметь тот же характер, что и φ_2, т. е. они, рассматриваемые как функции от $q_1, q_2, \ldots, q_6$, $p_1, \ldots, p_6$, должны быть целыми и рациональными относительно величин $p_1, \ldots, p_6$. Следовательно, выражение:

$$\frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} + 2\sum_{r=2}^{6}\left(\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)\frac{-A\dfrac{\partial B}{\partial P_r} - \dfrac{1}{2}q_1 B\dfrac{\partial B}{\partial P_r} + \dfrac{1}{2}B\dfrac{\partial A}{\partial P_r} - Cq_1\dfrac{\partial A}{\partial P_r}}{B^2 - 4AC},$$

рассматриваемое как функция от $q_1, \ldots, q_6, p_1, \ldots, p_6$, должно быть целым и рациональным относительно $p_1, \ldots, p_6$. Полагая сначала

$A + Bq_1 + Cq_1^2 = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2$, для этого выражения мы получим значение:

$$\frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} - \sum_{r=2}^{3}\left(\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right) \times$$
$$\times \frac{-p_r\{\mu(P_2^2+P_3^2)+q_1(P_2p_2-P_3p_3)\}+P_r\{\mu(P_2p_2+P_3p_3)+q_1(p_1^2+p_2^2-p_3^2)\}}{2\{p_1^2P_2^2+p_1^2P_3^2+(p_2P_3-p_3P_2)^2\}}$$

или (опуская один множитель μ)

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} - \sum_{r=2}^{3}\left(\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right) \times$$
$$\times \frac{-p_r\{p_1(q_2^2+q_3^2)-p_2q_1q_2-p_3q_1q_3\}+(q_rp_1-p_rq_1)(p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3)}{2p_1\{(q_2p_1-p_2q_1)^2+(q_3p_1-p_3q_1)^2+(p_2q_3-p_3q_2)^2\}}$$

или

$$\frac{1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} - \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial p_2} - \frac{\mu_1 p_2}{\mu_2 p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)(-p_2q_3^2) - p_2q_1^2 + p_1q_1q_2 + p_3q_2q_3}{2\{(q_2p_1-q_1p_2)^2+(q_3p_1-q_1p_3)^2+(q_3p_2-q_2p_3)^2\}} -$$
$$- \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial p_3} - \frac{\mu_1 p_3}{\mu_3 p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}\right)(-p_3q_2^2 - p_3q_1^2 + q_3q_1p_1 + q_3q_2p_2)}{2\{(q_2p_1-q_1p_2)^2+(q_3p_1-q_1p_3)^2+(q_3p_2-q_2p_3)^2\}}.$$

Последняя дробь представляет собой целую рациональную функцию от $p_1, p_2, \ldots, p_6$.Следовательно, числитель должен делиться нацело на знаменатель.

Но G есть полином относительно L, M, N и, следовательно, каждое из выражений:

$$\frac{\partial G}{\partial p_2} - \frac{\mu_1 p_2}{\mu_2 p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial G}{\partial p_3} - \frac{\mu_1 p_3}{\mu_3 p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}$$

суть целые рациональные функции от L, M, N, в которые q_1, q_2, q_3 входят лишь посредством L, M, N. Поэтому эти выражения либо совсем не содержат ни одной из величин q_1, q_2, q_3, либо они содержат члены, свободные от q_1, q_2, q_3. В обоих случаях знаменатель не может быть множителем числителя. Условие, следовательно, выполняется лишь в предположении, что

$$\frac{\partial G}{\partial p_2} - \frac{\mu_1 p_2}{\mu_2 p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial p_3} - \frac{\mu_1 p_3}{\mu_3 p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} = 0.$$

Давая теперь A, B, C вторую и третью системы значений, мы получим, как это и следовало ожидать из симметрии, что

$$\frac{\partial G}{\partial p_r} - \frac{\mu_1 p_r}{\mu_r p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} = 0 \qquad (r = 4,\, 5,\, 6).$$

Таким образом, функция G удовлетворяет этим пяти уравнениям, образующим полную систему из пяти независимых уравнений с шестью независимыми переменными, и имеющим поэтому только одно независимое решение. Это решение легко находится и имеет вид:

$$\sum_{s=1}^{6} \frac{p_s^2}{2\mu_s} \quad \text{или} \quad T.$$

Функция G зависит, следовательно, от $p_1, p_2, \ldots, p_6$ лишь посредством T; так как G есть полином относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$, то он должен быть также полиномом и относительно T.

Так как φ_0 однородна как относительно $q_1, q_2, \ldots, q_6$, так и относительно $p_1, p_2, \ldots, p_6$, и величины L, M, N линейны относительно $q_1, q_2, \ldots, q_6$, а T не содержит величин $q_1, \ldots, q_6$ и имеет второй порядок относительно $p_1, \ldots, p_6$, то функция T должна, очевидно, входить в φ_0, — если она вообще туда входит, — лишь в качестве множителя. Поэтому мы имеем право предположить, что

$$\varphi_0 = h(L,\, M,\, N)T^m,$$

где h есть целая рациональная и однородная функция ее аргументов.

10. *Доказательство теоремы Брунса для интегралов, не зависящих от времени.*

Уравнение, определяющее функцию f_2, имеет вид:

$$f_2 = \chi(P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6) - \frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1}U.$$

Но

$$\frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial p_1} = \frac{\mu_1}{p_1}\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p_1} = mh(L,\, M,\, N)T^{m-1},$$

и поэтому

$$f_2 = \chi(P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6) - mh(L,\, M,\, N)T^{m-1}U.$$

Отсюда имеем:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_2 + \varphi_4 + \ldots = h(L,\, M,\, N)(T^m - mT^{m-1}U) + \\ +\chi(P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6) + \varphi_4 + \varphi_6 + \ldots$$

Следовательно, интеграл φ складывается из двух других интегралов:

1. Из интеграла $h(L, M, N)(T-U)^m$, являющегося следствием классических интегралов, и

2. Из интеграла φ', где

$$\varphi' = \varphi'_0 + \varphi'_2 + \varphi'_4 - \ldots,$$

$$\varphi'_0 = \chi(P_2, \ldots, P_6, p_1, \ldots, p_6),$$

$$\varphi'_2 = \varphi_4 - \frac{m(m-1)}{2!}h(L, M, N)T^{m-2}U^2,$$

$$\varphi'_4 = \varphi_6 - \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}h(L, M, N)T^{m-3}U^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Интеграл φ', имея такой же характер, как и φ, отличается от последнего тем, что его старший член φ'_0 относительно переменных $p_1, \ldots, p_6$ имеет порядок на две единицы ниже, чем старший член в интеграле φ. Мы доказали, что интеграл φ может быть составлен из классических интегралов и интеграла φ'. Аналогичным способом и φ' может быть составлен из классических интегралов и некоторого интеграла φ'', имеющего такой же характер, как и φ, но порядок относительно переменных p на четыре единицы ниже, чем у φ. Продолжая, таким образом, дальше, мы придем к заключению, что φ может быть составлен из классических интегралов и из некоторого интеграла $\varphi^{(n)}$, имеющего относительно переменных p порядок, равный единице или нулю. В первом случае в равенстве

$$\varphi^{(n)} = \varphi_0^{(n)} = h(L, M, N)T^k$$

величина k должна, очевидно, равняться нулю и, следовательно, $\varphi^{(n)}$ составляется из классических интегралов. Напротив, во втором случае функция $\varphi^{(n)}$, будучи нулевого порядка относительно $p_1, \ldots, p_6$, зависит только от величины $q_1, \ldots, q_6$. Но мы доказали, что такие интегралы не могут существовать. Следовательно, φ всегда может быть составлен алгебраически из классических интегралов. Таким образом, теорема Брунса доказана: *Каждый, не зависящий от времени, алгебраический интеграл задачи трех тел есть алгебраическая комбинация классических интегралов.*

11. *Распространение теоремы Брунса на интегралы, зависящие также и от времени.* Перейдем теперь к рассмотрению таких алгебраических интегралов задачи трех тел, которые зависят также и от времени.

Для этой цели мы берем уравнения движения в виде системы восемнадцатого порядка (§ 155). Нам надо поэтому исследовать интегралы вида:

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9, t) = a,$$

где f — алгебраическая функция аргументов.

Функция f, вообще говоря, нерациональна. Приведя последнее уравнение к рациональному виду относительно переменной t, получим уравнение вида:

$$\begin{gathered} a^m - a^{m-1}\varphi_1(q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9, t) + \\ +a^{m-2}\varphi_2(q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9, t) + \cdots + \\ +\varphi_m(q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9, t) = 0, \end{gathered}$$

где функции φ являются рациональными относительно t и алгебраическими относительно остальных аргументов. Мы можем считать, что уравнение неприводимо относительно t, т. е. не может быть разложено на множители рациональные относительно t и более низких степеней относительно a. Ибо если она приводима, то она может быть заменена теми ее неприводимыми множителями, которые соответствуют первоначальному уравнению $f = a$.

Дифференцирование по t даст:

$$a^{m-1}\frac{d\varphi_1}{dt} + a^{m-2}\frac{d\varphi_2}{dt} + \cdots + \frac{d\varphi_m}{dt} - 0.$$

Все величины $\dfrac{d\varphi_r}{dt}$, рассматриваемые как функции от $q_1, q_2, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9, t$ рациональны относительно t. Следовательно, первоначальное уравнение является приводимым относительно t если последнее уравнение не удовлетворяется тождественно. Поэтому

$$\frac{d\varphi_r}{dt} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, m),$$

т. е. величины φ_r являются сами интегралами. Интеграл f складывается из интегралов φ, являющихся рациональными функциями относительно t и алгебраическими относительно $q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9$.

Разлагая такого рода интеграл на простые множители первого порядка относительно t, получим:

$$\frac{P(t-\varphi_1)^{m_1}(t-\varphi_2)^{m_2}\cdots(t-\varphi_k)^{m_k}}{(t-\psi_1)^{n_1}(t-\psi_2)^{n_2}\cdots(t-\psi_l)^{n_l}},$$

где $P, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_l$ суть алгебраические функции от $q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9$. Так как это выражение есть интеграл, то

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} + \frac{m_1}{t-\varphi_1}\left(1 - \frac{d\varphi_1}{dt}\right) + \cdots + \frac{m_k}{t-\varphi_k}\left(1 - \frac{d\varphi_k}{dt}\right) - \\ - \frac{n_1}{t-\psi_1}\left(1 - \frac{d\psi_1}{dt}\right) - \cdots - \frac{m_k}{t-\psi_l}\left(1 - \frac{d\psi_l}{dt}\right) = 0.$$

Если в этом уравнении заменить величины $\frac{dP}{dt}, \frac{d\varphi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\varphi_k}{dt}, \frac{d\psi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\psi_l}{dt}$ их значениями $(P, H), (\varphi_1, H), \ldots, (\psi_l, H)$, то это уравнение должно перейти в тождество. Последнее, однако, возможно только тогда, когда

$$\frac{dP}{dt}=0,\ 1-\frac{d\varphi_1}{dt}=0,\ \ldots,\ 1-\frac{d\varphi_k}{dt}=0,\ \ldots,\ 1-\frac{d\psi_1}{dt}=0,\ \ldots,\ 1-\frac{d\psi_l}{dt}=0,$$

т. е. когда все выражения:

$$P,\ t-\varphi_1,\ t-\varphi_2,\ \ldots,\ t-\varphi_k,\ t-\psi_1,\ t-\psi_2,\ \ldots,\ t-\psi_l$$

суть интегралы. Следовательно, всякий зависящий от t алгебраический интеграл задачи трех тел складывается:

1. Из алгебраических интегралов, не содержащих t.
2. Из интеграла вида:

$$t - \varphi = \text{const},$$

где φ есть алгебраическая функция от $q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9$.

Но, как известно,

$$t - \frac{m_1q_1 + m_2q_4 + m_3q_7}{p_1 + p_4 + p_7} = \text{const},$$

есть интеграл. Поэтому каждый, содержащий t, алгебраический интеграл может быть составлен:

1. Из алгебраических интегралов, не содержащих t.
2. Из интегралов вида:

$$\varphi - \frac{m_1q_1 + m_2q_4 + m_3q_7}{p_1 + p_4 + p_7} = \text{const},$$

где φ есть алгебраическая функция от $q_1, \ldots, q_9, p_1, \ldots, p_9$.

3. Из классического интеграла:

$$t - \frac{m_1q_1 + m_2q_4 + m_3q_7}{p_1 + p_4 + p_7}.$$

Но первый и второй интегралы являются алгебраическими и не содержат времени. Поэтому согласно доказанному раньше они являются алгебраическими комбинациями классических интегралов.

Таким образом, получаем окончательно: *всякий алгебраический интеграл задачи трех тел вне зависимости от того, содержит ли он явно время или нет, складывается из классических интегралов.*

Теорему Брунса обобщил Пенлеве[1], доказав, что всякий интеграл задачи n-тел, являющийся алгебраической функцией от скоростей и какой угодно функцией от координат, есть комбинация классических интегралов.

§ 165. Теорема Пуанкаре. Докажем теперь другую теорему о несуществовании определенного вида интегралов задачи трех тел, являющуюся в некотором отношении аналогом теоремы Брунса. Эта теорема открыта Пуанкаре[2] в 1889 г.

1. *Уравнения движения ограниченной задачи трех тел.* Для ограниченной задачи трех тел уравнения движения могут быть написаны в виде:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

где

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots,$$

$$H_0 = -\frac{1}{2p_1^2} - np_2,$$

а H_1, H_2, ... суть периодические функции от q_1, q_2 с периодом 2π.

Гессиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_1 \partial p_2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p_2^2} \end{vmatrix}$$

равен, очевидно, нулю. Так как это обстоятельство является препятствием при доказательстве теоремы Пуанкаре, то мы преобразуем уравнения движения таким образом, чтобы гессиан системы не равнялся больше нулю.

Положим, что $H^2 = K$ и пусть $H = h$ есть интеграл энергии. Тогда

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{1}{2h}\frac{\partial K}{\partial p_r}; \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{1}{2h}\frac{\partial K}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2).$$

Принимая $\dfrac{K}{2h}$ за новую функцию H, мы можем уравнения движения

[1] Bull. Astr., т. 15, стр. 81, 1898.

[2] Acta Math., т. 13, стр. 259, 1890.

ограниченной задачи трех тел привести к виду:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

где H для достаточно малых значений μ может быть разложена в ряд по степеням параметра μ:

$$H - H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \ldots ,$$

где

$$2hH_0 = \frac{1}{4p_1^4} + \frac{np_2}{p_1^2} + n^2 p_2^2.$$

Гессиан функции H_0 теперь не равен нулю, а H_1, H_2, ... означают, как и раньше, некоторые периодические функции от q_1 и q_2 с периодом 2π.

2. *Формулировка теоремы Пуанкаре.* Пусть Φ означает некоторую функцию от q_1, q_2, p_1, p_2, μ, которая однозначна и регулярна для всех действительных значений переменных q_1 и q_2, для всех значений μ, лежащих между определенными границами, и для всех значений p_1, p_2, принадлежащих некоторой сколь угодно малой области D; пусть, далее, Φ будет периодична относительно q_1, q_2 и имеет период, равный 2π. При этих условиях функция Φ может быть разложена в степенной ряд по степеням μ:

$$\Phi = \Phi_0 + \mu\Phi_1 - \mu^2\Phi_2 + \ldots ,$$

где Φ_0, Φ_1, Φ_2, ... суть однозначные аналитические функции от q_1, q_2, p_1, p_2 и периодические относительно q_1 и q_2. Теорема Пуанкаре гласит: *Не существует интегралов ограниченной задачи трех тел (за исключением якобиева и равносильных ему интегралов) типа:*

$$\Phi = \text{const},$$

где Φ функция указанного вида. Приводимое ниже доказательство остается справедливым для всякой динамической задачи с уравнениями движения того же типа, что и в ограниченной задаче трех тел.

Для того чтобы уравнение $\Phi = \text{const}$ являлось интегралом, необходимо и достаточно, чтобы скобки Пуассона (H, Φ) равнялись нулю, или в развернутом виде:

$$(H_0, \Phi_0) + \mu\{(H_1, \Phi_0) + (H_0, \Phi_1)\} - \mu^2\{(H_2, \Phi_0) + \\ +(H_1, \Phi_1) + (H_0, \Phi_2)\} + \cdots = 0,$$

откуда

$$(H_0, \Phi_0) = 0, \ldots (H_1, \Phi_0) - (H_0, \Phi_1) = 0.$$

3. *Доказательство того, что Φ_0 не является функцией от H_0.* Покажем сначала, что, не нарушая общности рассуждений, мы можем принять, что Φ_0 не является функцией от H_0. В самом деле, если предположить, что существует соотношение вида $\Phi_0 = \psi(H_0)$, то уравнение $H = H_0(p_1, p_2)$ после разрешения его относительно p_1 даст $p_1 = \vartheta(H_0, p_2)$, где ϑ есть однозначная функция обоих аргументов, если внутри области D величина $\dfrac{\partial H_0}{\partial p_1}$ отлична от нуля. Заменяя в функции $\Phi_0(q_1, q_2, p_1, p_2)$ величину p_1 ее значением ϑ, получим равенство вида:

$$\Phi_0(q_1, q_2, p_1, p_2) = \psi(q_1, q_2, H_0, p_2),$$

и так как Φ_0 однозначна, то и ψ есть однозначная функция от q_1, q_2, H_0, p_2. Но по предположению ψ зависит только от H_0; следовательно, ψ есть однозначная функция от H_0, коль скоро p_1 и p_2 остаются в области D и $\dfrac{\partial H_0}{\partial p_1}$ или еще более обще одна из производных $\dfrac{\partial H_0}{\partial p_1}$, $\dfrac{\partial H_0}{\partial p_2}$ внутри этой области не обращается в нуль. Последнее условие в общем случае, очевидно, выполняется. Так как ψ есть функция однозначная, то уравнение $\psi(H) = \text{const}$ есть однозначный интеграл уравнений движения. Поэтому и

$$\Phi - \psi(H) = \text{const}$$

есть также однозначный интеграл. Этот интеграл может быть разложен по степеням μ, и при этом он делится нацело на μ, так как $\Phi_0 - \psi(H_0) = 0$. Полагая поэтому

$$\Phi - \psi(H) = \mu\Phi'$$

находим, что $\Phi' = \text{const}$ есть однозначный аналитический интеграл. Если положим

$$\Phi' = \Phi'_0 + \mu\Phi'_1 + \mu^2\Phi'_2 + \ldots ,$$

то в общем случае Φ'_0 не будет функцией от H_0. Но если она все же является функцией от H_0, то, повторяя относительно нее все предыдущие рассуждения, мы придем к новому интегралу, у которого член, свободный от μ, не будет в общем случае функцией от H_0 и т. д. Очевидно, мы придем в конце концов к такому интегралу, который при $\mu = 0$ не приведется к функции от H_0 за исключением того случая, когда Φ есть функция от H, но в этом случае интегралы Φ и H не являются независимыми.

Таким образом, если существует не зависящий от H однозначный аналитический интеграл Φ, для которого Φ_0 есть функция от H_0, то из него может быть получен другой интеграл такого же характера, но который при $\mu_0 = 0$ не обращается в функцию от H_0. Поэтому мы можем принять заранее, что Φ_0 не есть функция от H_0.

4. *Доказательство того, что Φ_0 не содержит переменных q_1 и q_2.* Если функция Φ_0 содержит переменные q_1 и q_2, то мы можем ее, как периодическую функцию от этих переменных, записать в виде:

$$\Phi_0 - \sum_{m_1,\,m_2} A_{m_1,\,m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} - \sum_{m_1,\,m_2} A_{m_1,\,m_2} \zeta,$$

где m_1 и m_2 означают положительные или отрицательные целые числа, $i = \sqrt{\ 1}$, величины $A_{m_1,\,m_2}$ зависят от p_1, p_2, а ζ показательная функция, стоящая множителем при $A_{m_1,\,m_2}$. Так как H_0 не содержит q_1 и q_2, то имеем:

$$-(H_0, \Phi_0) = \frac{\partial H_0}{\partial p_1}\frac{\partial \Phi_0}{\partial q_1} + \frac{\partial H_0}{\partial p_2}\frac{\partial \Phi_0}{\partial q_2}.$$

Но

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial q_r} = \sum_{m_1,\,m_2} i m_r A_{m_1,\,m_2} \zeta;$$

отсюда для уравнения (H_0, Φ_0) получаем:

$$\sum_{m_1,\,m_2} A_{m_1,\,m_2} \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} \right) \zeta = 0.$$

Так как это уравнение выполняется тождественно, то

$$A_{m_1,\,m_2} \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} \right) = 0.$$

Отсюда либо

$$A_{m_1,\,m_2} = 0,$$

либо

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0.$$

Последнее уравнение выполняется, однако, лишь тогда, когда либо m_1 и m_2 равны нулю, либо равен нулю гессиан функции H_0, что по условию не имеет места. Следовательно, все коэффициенты $A_{m_1,\,m_2}$, за исключением A_0, равны нулю. Итак, Φ_0 не содержит переменных q_1, q_2.

5. *Доказательство того, что существование однозначного интеграла в общем случае несовместимо с результатом п. 3.* Рассмотрим теперь уравнение:

$$(H_1, \Phi_0) + (H_0, \Phi_1) = 0$$

или

$$\sum_{r=1}^{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_r}\frac{\partial H_1}{\partial q_r} - \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial H_0}{\partial p_r}\frac{\partial \Phi_1}{\partial q_r} = 0.$$

Так как функции H_1 и Φ_1 периодичны относительно q_1, q_2, то они допускают разложения:

$$H_1 = \sum_{m_1, m_2} B_{m_1, m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} = \sum_{m_1, m_2} B_{m_1, m_2} \zeta,$$

$$\Phi_1 = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2} \zeta,$$

где m_1 и m_2 — положительные или отрицательные целые числа, и коэффициенты B_{m_1, m_2}, C_{m_1, m_2} зависят от p_1 и p_2. Отсюда имеем:

$$\frac{\partial H_1}{\partial q_r} = i \sum_{m_1, m_2} B_{m_1, m_2} m_r \zeta, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_r} = i \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2} m_r \zeta,$$

и поэтому уравнение:

$$\sum_{r=1}^{2} \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_r} \frac{\partial H_1}{\partial q_r} - \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial H_0}{\partial p_r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_r} = 0$$

переходит в

$$\sum_{m_1, m_2} B_{m_1, m_2} \zeta \left(\sum_{r=1}^{2} m_r \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_r} \right) - \sum_{m_1, m_2} C_{m_1, m_2} \zeta \left(\sum_{r=1}^{2} m_r \frac{\partial H_0}{\partial p_r} \right) = 0$$

или (так как это уравнение выполняется тождественно) в

$$B_{m_1, m_2} \left(m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \right) = C_{m_1, m_2} \left(m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} \right).$$

Это уравнение выполняется при всех значениях p_1 и p_2; поэтому для значений p_1 и p_2, удовлетворяющих условию

$$m_1 \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0,$$

должно выполняться одно из равенств:

$$B_{m_1, m_2} = 0 \quad \text{или} \quad m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0.$$

Мы будем говорить, что коэффициент B_{m_1, m_2} делается вековым, если p_1 и p_2 принимают значения, при которых величина $m_1 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2}$ обращается в нуль.

Так как функция H задана, то и коэффициенты B_{m_1, m_2} также известны. В динамических системах, определяемых дифференциальными уравнениями рассматриваемого нами типа, коэффициенты B_{m_1, m_2} в общем случае не обращаются в нуль, когда они делаются вековыми. Мы будем сначала предполагать, что это условие действительно выполняется. Уравнение:

$$m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0$$

является тогда следствием уравнения $m_1 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$.

Пусть k_1 и k_2 означают два целых числа. Дадим величинам p_1 и p_2 значения, удовлетворяющие равенству:

$$\frac{1}{k_1} \frac{\partial H_0}{\partial p_1} = \frac{1}{k_2} \frac{\partial H_0}{\partial p_2}.$$

Тогда можно подобрать бесчисленное множество пар целых чисел m_1 и m_2, для которых $m_1 k_1 + m_2 k_2 = 0$. Для каждой такой пары чисел выполняется уравнение $m_1 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$; следовательно, выполняется и уравнение:

$$m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0.$$

Сравнение обоих уравнений показывает, что

$$\frac{\partial H_0/\partial p_1}{\partial \Phi_0/\partial p_1} = \frac{\partial H_0/\partial p_2}{\partial \Phi_0/\partial p_2}.$$

Итак, якобиан $\dfrac{\partial(H_0, \Phi_0)}{\partial(p_1, p_2)}$ обращается в нуль для всех значений p_1 и p_2, при которых отношение величин $\dfrac{\partial H_0}{\partial p_1}$ и $\dfrac{\partial H_0}{\partial p_2}$ рационально. Следовательно, во всякой сколь угодно малой области существует бесчисленное множество систем значений (p_1, p_2), при которых этот якобиан обращается в нуль. Но так как он является функцией непрерывной, то он обращается в нуль тождественно, т. е. Φ_0 есть функция от H_0. Но это противоречит результату, полученному в п. 3; поэтому исходное предположение, что уравнения движения допускают отличный от $H = h$ однозначный аналитический интеграл, ошибочно, если только ни один из коэффициентов B_{m_1,m_2} не обращается в нуль, когда он делается вековым.

6. *Освобождение от ограничений, наложенных на коэффициенты* B_{m_1, m_2}. Нам остается рассмотреть еще тот случай, когда по крайней мере один из коэффициентов B_{m_1, m_2} обращается в нуль, когда он

делается вековым. Мы будем говорить, что две пары индексов (m_1, m_2) и (m_1', m_2') принадлежат к одному и тому же *классу*, когда они связаны соотношением $\dfrac{m_1}{m_1'} = \dfrac{m_2}{m_2'}$; тогда и коэффициенты B_{m_1, m_2}, $B_{m_1', m_2'}$ тоже принадлежат к одному и тому же классу.

Покажем сначала, что результат, полученный в п. 5, о несуществовании однозначного интеграла остается справедливым и тогда, когда в каждом классе существует по крайней мере один коэффициент B_{m_1, m_2}, который не обращается в нуль, когда он делается вековым. Допустим, что коэффициент B_{m_1, m_2} обращается в нуль, но коэффициент $B_{m_1', m_2'}$ отличен от нуля. Для значений p_1 и p_2, для которых $m_1 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2 \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2}$ обращается в нуль, имеет место соотношение $m_1' \dfrac{\partial H_0}{\partial p_1} + m_2' \dfrac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0$. Следовательно,

$$B_{m_1, m_2} \left(m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \right) = 0, \quad B_{m_1', m_2'} \left(m_1 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} \right) = 0,$$

и поэтому если соотношение $m_1 \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial p_1} + m_2 \dfrac{\partial \Phi_0}{\partial p_2} = 0$ не может быть выведено из первого уравнения, то оно во всяком случае может быть выведено из второго. Дальнейший ход доказательства протекает так же, как и в п. 5.

Всякий класс индексов вполне определяется отношением $\dfrac{m_1}{m_2}$. Пусть λ — рациональное число, а C — класс индексов, для которого $\dfrac{m_1}{m_2} = \lambda$. Мы будем говорить, что класс принадлежит данной области или лежит в ней, если в этой области можно найти такую систему значаний p_1, p_2, для которой

$$\lambda \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0.$$

Докажем теперь, что теорема остается справедливой также и тогда, когда в сколь угодно малой части δ области D лежит бесчисленное множество классов, для которых не все коэффициенты B обращаются в нуль, когда они делаются вековыми.

В самом деле, пусть p_1, p_2 есть такая система значений, для которой

$$\lambda \frac{\partial H_0}{\partial p_1} + \lambda \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 0.$$

и допустим, что λ рационально, и для соответствующего ему класса не все коэффициенты обращаются в нуль, когда они делаются вековыми.

Тогда к этой системе значений p_1, p_2 можно применить все предыдущие выводы. Следовательно, для этой системы значений p_1, p_2 якобиан $\dfrac{\partial(H_0, \Phi_0)}{\partial(p_1, p_2)}$ равен нулю. Но согласно допущению такого рода системы значений существуют в бесчисленном количестве в каждой сколь угодно малой части области D. Поэтому якобиан обращается в нуль во всех точках области D, и Φ_0 есть функция от H_0. Следовательно, и в этом случае не существует однозначного аналитического интеграла, отличного от $H = \text{const}$.

7. *Доказательство теоремы Пуанкаре.* В четырех предыдущих разделах мы исследовали уравнения типа:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1, 2),$$

где

$$H = H_0 + \mu H_1 + \mu^2 H_2 + \dots,$$

функция H_0 не содержит переменных q_1, q_2 и ее гессиан относительно p_1 и p_2 отличен от нуля, а функции $H_1, H_2, \dots$ периодичны относительно q_1, q_2. Мы показали, что в этом случае, кроме интеграла энергии, не может существовать никакого другого интеграла, который был бы однозначен и регулярен для всех действительных значений q_1, q_2 при всех значениях μ, лежащих в определенном интервале, и для всех значений p_1, p_2, образующих некоторую область D. При этом предполагалось, что во всякой сколь угодно малой части области D существует бесчисленное множество дробей $\dfrac{m_1}{m_2}$, для которых не все соответствующие коэффициенты B_{m_1, m_2} обращаются в нуль, когда они делаются вековыми.

Этот результат может быть непосредственно приложен к ограниченной задаче трех тел. Ибо, как мы это видели в п. 1, уравнения движения в этой задаче принадлежат к рассмотренному здесь типу, а вычисление функции H_1 путем непосредственного разложения в ряд показывает, что и последнее условие также выполняется.

Таким образом, теорема Пуанкаре доказана. Теорема Пуанкаре устанавливает несуществование интегралов, однозначных относительно *кеплеровых переменных*, чем охватывается однозначность вблизи всех траекторий, имеющих общий «оскулирующий» эллипс. Но этим не исключается возможность существования интегралов, однозначных в каких-нибудь областях другого вида (*Levi–Civita*, Acta Math., т. 30, Стр. 305, 1905).

Пуанкаре распространил свою теорему и на общую задачу трех тел (Meth. Nouv. de la Mec. Cel., т. 1, стр. 253). Пенлеве также обобщил эту теорему. (Comptes Rendus, т. 130, стр. 1699, 1900).

Глава XV
Общая теория траекторий

§ 166. Введение. Мы переходим теперь к исследованию общего вида и расположения траекторий динамических систем. Для упрощения задачи мы будем главным образом заниматься исследованием движения одной материальной точки, движущейся на плоскости под действием консервативного поля сил. Однако многие получаемые здесь результаты могут быть непосредственно обобщены и на динамические системы более общего вида.

В § 104 мы уже указывали, что задача определения движения материальной точки, обладающей двумя степенями свободы и находящейся под действием консервативных сил, сводится к отысканию геодезических линий на некоторых поверхностях с наперед заданным линейным элементом. Отсюда следует, что в рамки нашего исследования должно было войти изучение свойств геодезических линий. Но, принимая во внимание, что большинство этих свойств не имеет для нашей цели никакого значения и что полная теория геодезических линий содержится во многих руководствах по дифференциальной геометрии, мы ограничиваемся здесь рассмотрением только тех свойств, которые представляют интерес для динамики.

§ 167. Периодические решения. За последние годы привлекают к себе особое внимание частные виды движения, при которых конфигурация системы повторяется через правильные промежутки времени и, следовательно, движение является чисто периодическим. Такие виды движения называются *периодическими решениями.* О периодических решениях говорят также и тогда, когда периодически повторяется не абсолютная, а относительная конфигурация системы. Так, например, в задаче трех тел решение называется периодическим, когда взаимные расстояния тел являются периодическими функциями времени независимо от того, будут ли эти тела через определенные промежутки времени занимать первоначальные положения.

Периодические траектории, описываемые сферическим маятником исследовал A. Emch, Proc. Nat. Ac. Sci., IV, стр. 218, 1918 и Tôhoku, Math. J., XV, стр. 146, 1919.

§ 168. Критерий для отыскания периодических траекторий. Покажем сейчас, что существование и положение периодических траекторий может быть установлено при помощи теоремы[1], аналогичной теореме алгебры, устанавливающей положение корней алгебраического уравнения по знакам некоторых выражений, получаемых из этих уравнений.

Для упрощения задачи мы будем рассматривать движение только одной материальной точки, движущейся на плоскости под действием консервативного поля сил. Теорема, которую мы получим, может быть, однако, легко распространена и на динамические системы более общего вида.

Пусть x и y означают прямоугольные координаты рассматриваемой точки, отнесенные к произвольной неподвижной системе координат, а $V(x, y)$ пусть будет ее потенциальной энергией. Принимая массу точки равной единице, напишем уравнение энергии:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x, y) = h,$$

где h — постоянная. Дифференциальные уравнения движения точки образуют систему четвертого порядка, и их общее решение содержит, следовательно, четыре произвольных постоянных. Одна из этих постоянных определяет начальный момент времени, и поэтому различных траекторий будет только ∞^3. Рассматривая совместно совокупность всех траекторий, отвечающих одинаковым значениям постоянной энергии, мы разобьем все эти траектории на ∞^1 семейств, содержащих каждое ∞^2 кривых. Такого рода семейство из ∞^2 траекторий может быть определено аналитически при помощи принципа наименьшего действия (§ 100). На основании последнего всякая траектория, проходящая через две заданные точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), обладает тем свойством, что для нее интеграл

$$\int \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

принимает стационарное значение по сравнению с другими кривыми, проходящими через эти точки[2]. Рассмотрим простой замкнутый контур C, лежащий в плоскости xy, и обозначим через C' другой простой замкнутый контур, очень мало отличающийся от контура C и заключающий его внутри себя. Пусть C' определяется уравнением:

$$\delta p = \varphi(\gamma),$$

[1] *Whittaker*, Monthly Notices R. A. S., т. 42, стр. 186, 1902; *A. Signorini*, Rend. d. Lincei, т. 21, стр. 36, 1912; Rend. di Palermo, т. 33, стр. 187, 1912; *L. Tonelli*, Rend. d. Lincei, т. 21, стр. 251, 352, 1912.

[2] Следуя Пенлеве (Journal de Math. (4), т. 10, 1894), семейство траекторий с одним и тем же значением постоянной энергии называют иногда *натуральным семейством*.

где величина δp всегда положительна и означает отрезок внешней нормали к контуру C, отсекаемый контуром C', а γ — угол наклона этой нормали относительно оси x. Тогда, если обозначим через I значение интеграла

$$\int \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

распространенного по контуру C, а через $I + \delta I$ — значение, которое получит этот интеграл, если его распространить на контур C' (приращение δ отвечает, следовательно, переходу от контура C к контуру C'), то будем иметь:

$$\delta I = \int \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}} \delta \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} + \\ + \int \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \delta \{(dx)^2 - (dy)^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Но

$$\delta \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \{h - V(x, y)\}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \delta y\right) = \\ = -\frac{1}{2} \{h - V(x, y)\}^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \cos\gamma + \frac{\partial V}{\partial y} \sin\gamma\right) \delta p$$

и

$$\delta \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}} = \delta p \, d\gamma = \frac{\delta p}{\rho} \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

где ρ — радиус кривизны кривой C в точке (x, y).

Поэтому

$$\delta I - \int \frac{\{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}}}{\{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}}} \left\{\frac{h - V(x, y)}{\rho} - \frac{1}{2} \cos\gamma \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{2} \sin\gamma \frac{\partial V}{\partial y}\right\} \delta p.$$

Это равенство показывает, что если во всех точках контура C величина

$$\frac{h - V}{\rho} - \frac{1}{2} \left(\cos\gamma \frac{\partial V}{\partial x} + \sin\gamma \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

принимает только отрицательные значения, то δI будет отрицательно, и, следовательно, интеграл I уменьшится, если за контур интегрирования принять вместо C какой-нибудь другой контур, объемлющий C и достаточно близко к нему расположенный.

Допустим, что существует другой простой замкнутый контур D, объемлющий контур C и обладающий тем свойством, что во всех его точках выражение

$$\frac{h-V}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\cos\gamma\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\gamma\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

принимает только положительные значения. Тогда аналогичным образом можно показать, что интеграл I уменьшится, если за контур интегрирования вместо D принять какой-нибудь другой контур, объемлемый контуром D и достаточно близко к нему расположенный.

Предполагая, что внутри кольцевой области, ограниченной контурами C и D, не содержится ни одной особой точки функции V, рассмотрим совокупность всевозможных простых замкнутых кривых, расположенных внутри этой области. Среди кривых рассматриваемой совокупности должна существовать по крайней мере одна кривая K такая, что, будучи принята за контур интегрирования, она даст наименьшее значение интегралу I по сравнению со всеми остальными кривыми совокупности. Эта кривая K не может, очевидно, ни полностью, ни частично совпадать с кривой C или D. Следовательно, все простые замкнутые кривые, расположенные достаточно близко от K, также принадлежат рассматриваемой совокупности. Поэтому контур K дает стационарное значение интегралу I и является, следовательно, траекторией динамической системы. Мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

Если кольцевая область в плоскости ограничена двумя замкнутыми кривыми и выражение

$$\frac{h-V(x,\,y)}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\cos\gamma\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\gamma\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

отрицательно во всех точках внутренней границы и положительно во всех точках внешней границы, то внутри этой области имеется периодическая траектория динамической системы, соответствующая значению h постоянной энергии. Величина

$$\frac{h-V(x,\,y)}{\rho} - \frac{1}{2}\left(\cos\gamma\frac{\partial V}{\partial x} + \sin\gamma\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

может быть непосредственно вычислена во всех точках кривых C и D, так как она зависит только от потенциальной энергии и вида этих кривых. Полученная теорема дает иногда возможность обнаружить существование периодических траекторий.

§ 169. Асимптотические решения. Иногда встречаются динамические системы, в которых движение по одной траектории асимптотически приближается к движению по другой траектории, т. е. первое движение с неограниченным возрастанием времени все больше и больше приближается ко второму, подобно тому как движение по кривой, имеющей в полярных координатах уравнение

$$r = a\frac{\vartheta}{\vartheta - 1},$$

с неограниченным возрастанием ϑ стремится к движению по окружности $r = a$. В частности, могут встречаться траектории, которые асимптотически приближаются к периодическим траекториям, так что движение, будучи вначале отличным от периодического, затем все более и более к нему приближается. Такого рода движения называются *асимптотическими решениями*[1].

Может, конечно, встретиться и другой вид асимптотических решений, когда движение, значительно отличаясь от периодического при $t \to -\infty$, асимптотически приближается к нему при $t \to -\infty$. В самом деле, если периодическая траектория неустойчива, то траектория точки, которая незначительно отклонена от периодического движения, будет, очевидно, принадлежать к асимптотическим решениям этого вида.

Как мы увидим в ближайшем параграфе, могут существовать решения, которые одновременно принадлежат к обоим видам асимптотических решений, т. е. они стремятся к периодическим решениям при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, но значительно от них отклоняются при промежуточных значениях времени. Такого рода решения мы будем называть *дважды-асимптотическими*[2].

§ 170. Траектории планет в теории относительности. Прекрасной иллюстрацией к теории периодических и асимптотических решений может служить движение планет в гравитационном поле, вызываемом действием одной единственной притягивающей массы, когда закон притяжения Ньютона заменен более точным и философски законченным законом притяжения, даваемым общей теорией относительности.

Выберем начало координат в центре Солнца и пусть положение планеты в плоскости движения определяется двумя координатами r и ϑ, которые могут быть рассматриваемы как обычные полярные координаты (точнее, расстояние точки от начала координат определяется не r, а некоторой функцией от r). Обозначим время через t и определим квадратичную дифференциальную форму ds^2 при помощи равенства:

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2\,d\vartheta^2,$$

[1] *Poincaré*, Méth. Nouv., т. 1, гл. VII; *Picard*, Traité d'Analyse, т. 3, гл. VII.
[2] *Poincaré*, Acta Math., т. 13, стр. 225; Méth. Nouv., т. III, гл. XXXIII.

где c — скорость света в пустоте, а α — постоянная, зависящая от массы Солнца. Пусть

$$T = \frac{1}{2}c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)t'^2 - \frac{1}{2}\frac{r'^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \frac{1}{2}r^2\vartheta'^2,$$

где штрихи означают дифференцирование по s. Тогда, как это доказывается в руководствах по теории относительности, уравнения, определяющие траекторию планеты, суть уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial r'}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} - 0,$$
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial \vartheta'}\right) - \frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0,$$
$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial T}{\partial t'}\right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0.$$

Последние два уравнения дают $\frac{\partial T}{\partial \vartheta'} = \text{const}$ и $\frac{\partial T}{\partial t'} = \text{const}$ или

$$r^2\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\beta}},$$
$$\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)\frac{dt}{ds} = -\frac{k^2}{c^2\sqrt{\beta}},$$

где k и β — постоянные. Подставляя эти уравнения в уравнение

$$ds^2 = c^2\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} - r^2 d\vartheta^2,$$

получим:

$$\frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} = \left\{-\beta r^4 + \frac{k^2 r^4}{c\left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)} - r^2\right\} d\vartheta^2.$$

Полагая $u = \frac{1}{r}$, получим окончательное уравнение траектории планеты в следующем виде:

$$\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 - \frac{k^2}{c^2} - (1 - \alpha u)(\beta + u^2).$$

Так как выражение, стоящее в правой части, есть полином третьей степени относительно u, то это уравнение может быть проинтегрировано при помощи эллиптических функций. Полагая

$$u = \frac{4}{\alpha}U + \frac{1}{3\alpha},$$

получим:

$$\left(\frac{dU}{d\vartheta}\right)^2 = 4U^3 - g_2U - g_3,$$

где

$$g_2 = \frac{1}{12} - \frac{\alpha^2\beta}{4}, \quad g_3 = \frac{1}{216} + \frac{\alpha^2\beta}{24} - \frac{\alpha^2k^2}{16c^2}.$$

Интегрируя, находим:

$$U = \wp(\vartheta + C),$$

где C — постоянная интегрирования. Таким образом, *уравнением траектории, выраженным в координатах r и ϑ*, будет:

$$\frac{\alpha}{4r} = \frac{1}{12} + \wp(\vartheta + C).$$

Среди траекторий, определяемых этим уравнением, мы рассмотрим следующие:

1. *Квази-эллиптические траектории*. Если g_2 и g_3 действительны и дискриминант $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ положителен, то все три корня e_1, e_2 и e_3 вещественны. Мы будем предполагать, что $e_1 > e_2 > e_3$. Тогда величина

$$\omega_1 = \int\limits_{e_1}^{\infty} \frac{dz}{(4z^3 - g_2z - g_3)^{\frac{1}{2}}}$$

будет действительной, а величина

$$\omega_2 = i\int\limits_{-e_2}^{\infty} \frac{dz}{(4z^3 - g_2z - g_3)^{\frac{1}{2}}}$$

чисто мнимой. При этих условиях для траектории, определяемой уравнением

$$\frac{\alpha}{4r} = \frac{1}{12} + \wp(\vartheta - \omega_3)$$

будем иметь:

$$\text{при } \vartheta = 0: \frac{\alpha}{4r} = \frac{1}{12} + e_3,\ \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) = 0,\ \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) < 0,$$

$$\text{при } \vartheta = \omega_1: \frac{\alpha}{4r} = \frac{1}{12} + e_2,\ \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r}\right) = 0,\ \frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right) > 0.$$

Следовательно, $\vartheta = 0$ отвечает перицентру, $\vartheta = \omega_1$ — апоцентру, если только величина $\frac{1}{12} + e_2$ положительна. Последнее условие, как это нетрудно видеть, эквивалентно условию $c^2\beta > k^2$. Для полученных таким образом траекторий радиус-вектор колеблется между постоянными конечными пределами $\dfrac{\alpha}{\frac{1}{3} + 4e_3}$ и $\dfrac{\alpha}{\frac{1}{3} + 4e_2}$, так что траектория планеты расположена между двумя концентрическими окружностями

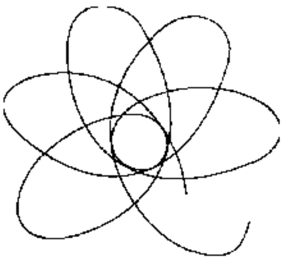

Рис. 4

с центром в Солнце (рис. 4). Движение планеты в общем сходно с эллиптическим движением по закону Ньютона и отличается от последнего тем, что здесь имеет место вращение линии апсид: между двумя последовательными перицентрами или апоцентрами угол ϑ возрастает не на 2π, как в случае движения по закону Ньютона, а на величину $2\omega_1$, отличную от 2π. Для нашей солнечной системы разность $2\omega_1 - 2\pi$ настолько незначительна, что она обнаруживается только у Меркурия.

Очевидно, что эти *«квази-эллиптические» траектории*, как мы их можем назвать, *будут периодическими, если величина* ω_1, *соизмерима с* π. Таким образом, мы получаем ∞^2 периодических траекторий, имеющих перицентры на линии $\vartheta = 0$, или, замечая, что вращение вокруг начала переводит траектории в траектории, *мы получаем* ∞^3 *периодических траекторий этого класса.*

2. *Траектории двояко-асимптотические к круговым.* Допустим теперь, что постоянные k и β (зависящие от начальных условий) подобраны таким образом, что дискриминант Δ равен нулю, так что два из корней e_1, e_2, e_3 равны между собой. Пусть кратный корень равен e, так что другой корень равен $-2e$. Если e положительно, то, полагая $3e = n^2$, легко найдем, что дифференциальное уравнение удовлетворяется при

$$\frac{\alpha}{4r} = \frac{1}{12} + \frac{n^2}{3} - \frac{n^3}{\operatorname{ch}^2 n\vartheta}.$$

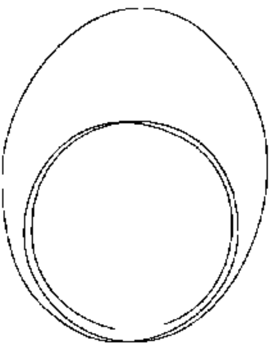

Рис. 5

Здесь имеется апоцентр при $\vartheta = 0$, если при этом получается положительное значение для r, т. е. если выполняется условие $8n^2 < 1$. Последнее условие, как легко видеть, эквивалентно условию $\alpha^2\beta > \frac{1}{4}$.

Когда ϑ стремится к $\pm\infty$, траектория асимптотически приближается к окружности:

$$\frac{\alpha}{4r} = \frac{1}{12} + \frac{n^2}{3},$$

расположенной внутри траектории (рис. 5). Когда n^2 изменяется между 0 и $\frac{1}{8}$, радиус асимптотической окружности изменяется между 3α и 2α.

3. *Круговые периодические траектории.* Если в квази-эллиптической траектории мы положим расстояние от перигелия равным расстоянию до афелия, то мы получим круговую траекторию. В этом случае $e_2 = e_3$, где e_2 и e_3 — меньшие корни кубического уравнения, дискриминант Δ равен нулю и кратный корень отрицателен, следовательно, $\frac{\alpha}{4r} < \frac{1}{12}$. *Радиус круговой траектории, являющейся предельным случаем квази-эллиптической траектории, должен быть больше, чем* 3α.

Тем не менее могут существовать и такие круговые траектории, для которых $r < 3\alpha$, а именно рассмотренные выше асимптотические окружности. Для них кратный корень кубического уравнения положителен. *Круговые траектории, для которых* $r < 3\alpha$, *неустойчивы*; *так как существуют траектории, стремящиеся к ним асимптотически.*

§ 171. Движение по инерции материальной точки на поверхности эллипсоида. В качестве второго примера, иллюстрирующего общую теорию траекторий, рассмотрим материальную точку, движущуюся по инерции на поверхности эллипсоида. Как мы видели в § 54, точка будет двигаться по геодезической линии и, следовательно, теория траекторий приводится к теории геодстик на эллипсоиде, а периодические решения суть те геодетики, которые являются замкнутыми кривыми. Для геодетик на эллипсоиде имеет место уравнение Иоахимсталя (Ioachimistal)

$$pd = \text{const},$$

где p — длина перпендикуляра, опущенного из центра эллипсоида на касательную плоскость в какой-нибудь точке геодетики, а d — диаметр, параллельный касательной к геодетике в этой точке. Это же самое уравнение остается справедливым и для линий кривизны эллипсоида. Поэтому каждой геодетике можно поставить в соответствие некоторую линию кривизны, а именно ту линию, для которой pd имеет то же значение, что и для геодетики. Про такое соответствие мы будем говорить, что геодетика «принадлежит» линии кривизны. Каждому значению pd отвечает только одна линия кривизны, но бесчисленное множество геодетик. Поэтому каждой линии кривизны принадлежит бесчисленное множество геодетик.

Каждая линия кривизны состоит из двух замкнутых кривых, являющихся линиями пересечения эллипсоида с софокусной поверхностью второго порядка. Обе эти части линии кривизны ограничивают на эллипсоиде некоторую кольцевую область, и все геодетики, принадлежащие этой линии кривизны, заключены в этом кольце и касаются поочередно то одной, то другой части линии кривизны. На прилагаемом схематическом чертеже (рис. 6) $ABCDEF$ и $PQRSTU$ изображают обе части линии кривизны, а $AJRKELPMCT$ — дугу принадлежащей ей геодетики. Она касается первой части линии кривизны в точках A, C, E и второй части в точках R, P, T.

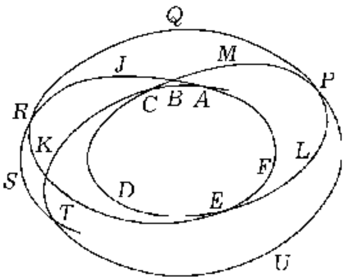

Рис. 6

Для того чтобы геодетика была замкнутой, необходимо, чтобы определенный параметр, зависящий в нашем случае от постоянной pd линии кривизны, был рациональным числом. Если этот параметр выражается иррациональным числом, то геодетика не замкнута. Если геодетика замкнута, то ∞^1 геодетик, принадлежащих той же самой линии кривизны, также будут замкнутыми. Если геодетика не замкнута, то и всякая другая геодетика, принадлежащая этой же линии кривизны, не может быть замкнутой[1].

Рассмотрим зависимость между геодетиками, принадлежащими одной и той же линии кривизны. Мы знаем (§ 144), что если

$$F(q_1, q_2, p_1, p_2) = \mathrm{const}$$

есть интеграл динамической системы, то бесконечно малое контактное преобразование, определяемое равенствами:

$$\delta q_1 = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_1}, \quad \delta q_2 = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial p_2}, \quad \delta p_1 = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_1}, \quad \delta p_2 = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial q_2},$$

где ε — малая постоянная, преобразовывает всякую траекторию в смежную кривую, являющуюся также траекторией. Применяя это положение к движению на эллипсоиде, легко найдем, что бесконечно малое преобразование, отвечающее интегралу

$$pd = \mathrm{const},$$

преобразовывает геодетику в другую геодетику, принадлежащую той же самой линии кривизны.

Итак, мы приходим к следующему результату: ∞^2 *траекторий материальной точки, движущейся по инерции на поверхности эллипсоида, могут быть разложены на* ∞^1 *групп, состоящих каждая из* ∞^1 *траекторий; траектории каждой группы либо все замкнуты, либо все разомкнуты; определенная непрерывная группа преобразований, тесно связанная с интегралом* $pd = \mathrm{const}$, *преобразовывает любую траекторию во все траектории, принадлежащие одной и той же группе.*

[1]Это совершенно очевидно для случая эллипсоида вращения. В этом случае обе части линии кривизны являются параллельными окружностями, и все принадлежащие этой линии кривизны геодетики могут быть получены из одной из них простым вращением вокруг оси симметрии.

§ 172. Обыкновенные и особые периодические решения. В предыдущем параграфе, рассматривая движения по инерции материальной точки на поверхности эллипсоида, мы указали на геодезические линии, которые могут быть разбиты на группы. Но, помимо этих геодетик, на эллипсоиде имеются еще три замкнутые геодетики, а именно три главные сечения эллипсоида. Эти геодетики носят совершенно иной характер. Они не принадлежат ни к одной группе, и вышеуказанное преобразование, преобразующее одни геодетики в другие, оставляет неизменными эти три геодетики, т. е. эти геодетики являются инвариантами преобразования. Аналогичным свойством обладают особые решения дифференциальных уравнений первого порядка. Если дифференциальное уравнение первого порядка допускает бесконечно малое преобразование, то это преобразование переводит все обыкновенные интегральные кривые одну в другую, но оставляет неизменными особые интегральные кривые. Вследствие этой аналогии мы будем говорить, что данное периодическое решение (динамической системы с двумя степенями свободы) является *обыкновенным*[1], если оно принадлежит к непрерывному семейству из ∞^1 периодических решений, для которых постоянная энергии имеет одно и то же значение и которые преобразуются одно в другое бесконечно малым преобразованием, соответствующим некоторому интегралу (ниже будет уточнено). Мы будем периодическое решение называть *особым*, если вблизи него не имеется периодических решений, соответствующих тому же самому значению постоянной энергии. Вышеуказанное бесконечно малое преобразование преобразует особое периодическое решение в самого себя.

Следует заметить, что мы добавляем здесь условие, что «постоянная энергии имеет одно и то же значение». Если постоянную энергии мы будем заменять, то обыкновенное периодическое решение динамической системы с двумя степенями свободы будет, вообще говоря, являться членом некоторого непрерывного семейства из ∞^2 периодических решений, для которых период изменяется непрерывно. Каждому значению этого периода отвечает подсемейство из ∞^1 периодических решений. Особое периодическое решение является членом семейства из ∞^1 периодических решений, для которых период изменяется непрерывно.

В задаче движения планет под действием одной притягивающей массы в общей теории относительности квази-эллиптические траектории являются обыкновенными периодическими решениями, а круговые траектории являются особыми периодическими решениями.

Имеется существенное различие в свойствах обыкновенных и особых периодических решений. Например асимптотические решения § **169** могут существовать только в связи с особыми периодическими решениями и не могут существовать в связи с обыкновенными

---

[1] *Whittaker*. Proc. R. S. Edinburgh, т. 37, стр. 95, 1916.

решениями. Это хорошо иллюстрируется на теории геодезических линий на поверхности второго порядка. Единственными асимптотическими решениями среди геодетик поверхностей второго порядка являются геодетики, описывающие спирали вокруг однополого гиперболоида, асимптотически приближаясь к главному эллиптическому сечению, которое является особым периодическим решением.

Введенные нами термины, обыкновенные и особые периодические решения естественно наводят на мысль, что первые решения встречаются часто, а последние как исключение. И это действительно имеет место до тех пор, пока мы ограничиваем себя рассмотрением *разрешимых* задач динамики. Поэтому нам покажется неожиданным тот факт, впервые обнаруженный Черри в 1927 г., что гамильтоновы системы с двумя степенями свободы не имеют в общем случае обыкновенных периодических решений: все периодические решения являются особыми. Объяснение этого кажущегося парадокса заключается в том, что гамильтоновы системы обычно *неразрешимы*, а периодические решения неразрешимых систем принадлежат к типу особых.

Этот парадокс может быть сопоставлен с аналогичным парадоксом в теории особых решений уравнений с частными производными. Если задано уравнение с частными производными первого порядка

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

то для нахождения особого решения надо исключить p и q из уравнений:

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

И действительно, если бы этот метод мы применили к тем частного вида уравнениям, которые приводятся в качестве примеров в учебниках, то мы пришли бы к уравнению $F(x, y, z) = 0$, которое и дало бы нам особое решение. Между тем имеется теорема Дарбу, согласно которой уравнения в частных производных первого порядка, вообще говоря, не имеют особых решений, и уравнение $F(x, y, z) = 0$ представляет в общем случае геометрическое место точек пересечения характеристик. Этот кажущийся парадокс объясняется тем, что те частного вида уравнения, которые приводятся в учебниках, составляются, обычно исходя из полного интеграла, представляющего собой семейство поверхностей путем исключения из него произвольных постоянных. Уравнения же, составленные таким образом, допускают особые решения, а именно огибающую поверхностей, представляющих полный интеграл.

Теорема Черри о периодических траекториях и теорема Дарбу об особых решениях уравнений с частными производными одинаково предостерегают против распространения свойств «разрешимых» систем на системы общего вида.

§ 173. Характеристические показатели. Устойчивость различных видов движения динамических систем может быть исследована при помощи некоторых постоянных, названных Пуанкаре *характеристическими показателями*[1].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — суть известные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, может быть, также и от t. В последнем случае мы будем предполагать, что они являются периодическими функциями t с периодом, равным T.

Допустим, что для этих уравнений известно периодическое решение, определяемое уравнениями:

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\varphi_i(t+T) = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для нахождения смежных решений положим:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ малы и определяются уравнениями в вариациях (§ 112):

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial X_i}{\partial x_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты этих линейных уравнений являются периодическими функциями от t. Согласно общей теории линейных дифференциальных уравнений каждая из величин ξ_i может быть представлена в виде:

$$\sum_{k=1}^{n} e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

где S_{ik} — периодические функции от t с периодом T, а α_k — постоянные. Эти постоянные и называются *характеристическими показателями* периодического решения.

Если вещественные части всех характеристических показателей равны нулю, то функции $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ могут быть, очевидно, представлены как суммы и произведения чисто периодических функций, что не будет иметь места, если хотя бы один характеристический показатель имеет действительную часть, отличную от нуля. Поэтому *условие устойчивости периодической траектории заключается в том, что*

[1] Acta Math., т. 13, стр. 1, 1890; Nouv. Méth. de la Mec. Cel., т. 1, 1892. Относительно общей задачи об устойчивости движения см. капитальное исследование *Ляпунова* «Общая задача об устойчивости движения», Харьков, 1893, ОНТИ, 1935.

действительные части всех характеристических показателей должны равняться нулю.

Составим уравнение, определяющее характеристические показатели заданного решения.

Обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ начальные значения величин ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_n$ для траектории, смежной с периодической, а через $\beta_1 + \psi_1$, $\beta_2 + \psi_2, \ldots, \beta_n + \psi_n$ — значения этих величин в конце периода. Так как величины $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ являются однозначными функциями от $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, обращающимися в нуль при $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, то, разлагая их в ряд Тейлора и пренебрегая членами порядка выше первого, будем иметь:

$$\psi_i = \frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_1}\beta_1 + \frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_2}\beta_2 + \cdots + \frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_n}\beta_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Если α_k — один из характеристических показателей, то одна из смежных траекторий определяется уравнениями вида:

$$\xi_1 = e^{\alpha_k t}S_{1k}, \quad \xi_2 = e^{\alpha_k t}S_{2k}, \ldots, \quad \xi_n = e^{\alpha_k t}S_{nk}$$

и для нее мы будем иметь:

$$\beta_i + \psi_i = e^{\alpha_k T}S_{ik}(0) = e^{\alpha_k t}S_i.$$

Следовательно, существует такая система значений $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, для которой выполняются уравнения:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_1}\beta_1 + \frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_2}\beta_2 + \cdots + \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_i} + 1 - e^{\alpha_k T}\right)\beta_i + \cdots + \frac{\partial\psi_i}{\partial\beta_n}\beta_n \; (i=1, 2, \ldots, n),$$

и поэтому α_k является одним из корней уравнения:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_1} + 1 - e^{\alpha T} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial\beta_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\beta_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\beta_2} + 1 - e^{\alpha T} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial\beta_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\beta_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\beta_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial\beta_n} + 1 - e^{\alpha T} \end{vmatrix} = 0,$$

рассматриваемого как уравнение относительно α. Таким образом, *характеристические показатели являются корнями этого детерминантного уравнения*[1].

§ 174. Характеристические показатели в случае, когда функции X_i не содержат явно t. Допустим, что функции $X_1, X_2, \ldots,$

[1] Ср. *H. F. Baker*, Proc. Camb. Phil. Soc., т. 20, стр. 181, 1920.

X_n не содержат явно t. Тогда, очевидно, что если

$$x_i = \varphi_i(t) \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

является решением дифференциальных уравнений, то и

$$x_i = \varphi_i(t + \varepsilon) \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

где ε — произвольная постоянная — будет также решением. Поэтому равенства

$$\xi_i = \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\varphi_i(t + \varepsilon) \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

определяют частное решение уравнений в вариациях. Но так как, очевидно, $\dfrac{\partial\varphi_i(t+\varepsilon)}{\partial\varepsilon}$ является периодической функцией от t, то коэффициент $e^{\alpha_k t}$ обращается в единицу. Следовательно, *если первоначальные дифференциальные уравнения не содержат явно t, то один из характеристических показателей всякого периодического решения равен нулю.*

§ 175. Характеристические показатели системы, допускающей однозначный интеграл. Допустим теперь, что система допускает интеграл вида:

$$F(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) = \mathrm{const},$$

где F — однозначная функция от $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$, не содержащая t. Тогда в обозначениях § 173 будем иметь:

$$F\{\varphi_i(0) + \beta_i + \psi_i\} = F\{\varphi_i(0) + \beta_i\},$$

где для краткости вместо $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пишется просто $F(x_i)$. Дифференцируя это равенство по β_i, получим:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta_i} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta_i} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}\frac{\partial\psi_n}{\partial\beta_i} = 0 \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n),$$

где в выражениях $\dfrac{\partial F}{\partial x_1},\, \dfrac{\partial F}{\partial x_2},\, \ldots,\, \dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ величины $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ следует заменить величинами $\varphi_1(0),\, \varphi_2(0),\, \ldots,\, \varphi_n(0)$. Из этих уравнений вытекает, что либо якобиан $\dfrac{\partial(\psi_1,\, \psi_2,\, \ldots,\, \psi_n)}{\partial(\beta_1,\, \beta_2,\, \ldots,\, \beta_n)}$ равен нулю, либо все величины $\dfrac{\partial F}{\partial x_1},\, \dfrac{\partial F}{\partial x_2},\, \ldots,\, \dfrac{\partial F}{\partial x_n}$ обращаются в нуль при $t = 0$.

Если имеет место последний случай, то для всех точек периодической траектории должны удовлетворяться уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0, \tag{1}$$

так как начальный момент времени может быть выбран произвольно. Этот случай действительно может иногда представиться. Он будет, например, иметь место для круговых периодических траекторий планеты, находящейся под действием одной притягивающей массы в общей теории относительности. В самом деле, из уравнений § 170, 3, полагая $\rho = \dfrac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}\dfrac{dr}{dt}$, легко находим зависимость между r и t в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\alpha\rho^2}{2r^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha c^2}{r^2} + \frac{\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2}{r^3}\frac{c^4}{k^2},$$
$$\frac{dr}{dt} = \rho\left(1-\frac{\alpha}{r}\right).$$

Эти уравнения допускают однозначный интеграл:

$$\frac{\rho^2}{c^4\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)} - \frac{1}{c^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)} + \frac{1}{k^2r^2} = \frac{\beta}{k^2}.$$

Написав этот интеграл в виде $F(\rho, r) = \text{const}$, легко находим, что для круговой траектории выполняются условия:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0,$$

т. е. условия (1).

Тем не менее случай, когда условия (1) выполняются для всех точек периодической траектории, встречается весьма редко и его следует рассматривать как исключение. Таким образом, мы должны предположить, что якобиан обращается в нуль. Но тогда, очевидно, детерминантное уравнение, определяющее характеристические показатели, удовлетворяется при $e^{\alpha T} = 1$, т. е. при $\alpha = 0$. Следовательно, *если дифференциальные уравнения допускают однозначный интеграл, то, за исключением некоторых особых случаев, один из характеристических показателей равен нулю.*

Другой способ доказательства этой теоремы в случае, когда дифференциальные уравнения имеют вид уравнений динамики, заключается в следующем.

Согласно § 144, если система допускает интеграл:

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n, t) = \text{const},$$

то уравнения в вариациях удовлетворяются значениями:

$$\delta q_r = \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial p_r}, \quad \delta p_r = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где ε — малая постоянная величина. Но эти значения δq_r и δp_r будут периодическими, если траектория, для которой берутся вариации, является периодической. Поэтому соответствующий характеристический показатель обращается в нуль, чем теорема и доказывается. Исключение будет тогда, когда контактное преобразование, соответствующее рассматриваемому интегралу, преобразует периодическую траекторию в самое себя. Мы снова приходим, таким образом, к особым периодическим траекториям.

Задача 1. Показать, что если дифференциальные уравнения не содержат явно времени и допускают p однозначных интегралов $F_1, F_2, \ldots, F_p$, не содержащих явно t, то либо $p+1$ характеристических показателей равны нулю, либо все детерминанты, содержащиеся в таблице

$$\left\|\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right\| \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

обращаются в нуль во всех точках рассматриваемой периодической траектории.

§ 176. Теория матриц. В следующем параграфе нам придется пользоваться теорией матриц. Поэтому является целесообразным изложить предварительно некоторые основные понятия, относящиеся к этому вопросу.

Рассмотрим квадратную таблицу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

образованную действительными или комплексными числами a_{pq}, которые мы будем называть *элементами*. Эта таблица называется *матрицей* и обозначается либо одной буквой A, либо символом (a_{pq}). Ее следует мыслить как выражение некоторой операции, а именно операции линейной подстановки:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned}$$

Однако основная идея теории матриц заключается в том, что их рассматривают как *числа* в самом общем смысле этого слова, так что матрицы складываются, умножаются и т. д. Две матрицы $A \equiv (a_{pq})$ и $B \equiv (b_{pq})$ называются равными, если элементы одной матрицы равны соответственно элементам другой, т. е. $a_{pq} = b_{pq}$ при $p, q = 1, 2, \ldots, n$.

Произведением BA двух матриц $B \equiv (b_{pq})$ и $A \equiv (a_{pq})$ называется матрица, у которой элемент p-й строки и q-й вертикали равен:

$$b_{p1}a_{1q} + b_{p2}a_{2q} + \cdots + b_{pn}a_{nq}.$$

Умножение матриц в общем случае не подчиняется закону коммутативности, так что BA и AB будут, вообще говоря, различными матрицами. Но это произведение удовлетворяет закону ассоциативности, т. е.

$$A(BC) = (AB)C.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,\ldots \\ 0\,1\,0\,0\,\ldots \\ 0\,0\,1\,0\,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

называется единичной и обозначается буквой E. Матрица B, удовлетворяющая условию $BA = E$, называется обратной A и обозначается символом A^{-1}. Матрица, получающаяся из A перестановкой колонок и строк, называется сопряженной с A и обозначается через A'.

Корни детерминантного уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0$$

называются *собственными значениями матрицы* $A \equiv (a_{pq})$. Одной из основных теорем теории матриц является теорема Сильвестера: *Если $r_1, r_2, \ldots, r_n$ суть собственные значения матрицы A, то собственными значениями матрицы $f(A)$, где $f(A)$ — некоторая функция от A, будут величины $f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n)$.* В частности, *собственные значения матрицы A^{-1} суть величины, обратные собственным значениям матрицы A.*

Если A и S суть две матрицы, то матрица SAS^{-1} будет иметь те же собственные значения, что и матрица A.

(Следует иметь в виду, что вышеназванные теоремы изложены в их общей формулировке без учета исключительных случаев.)

§ 177. Характеристические показатели гамильтоновых систем. Рассмотрим консервативную динамическую систему и допустим для простоты, что она имеет только две степени свободы. Уравнения движения имеют вид:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_1}{dt} = \quad \frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \quad \frac{\partial H}{\partial q_2}.$$

где H заданная функция от q_1, q_2, p_1, p_2. Допустим, что система допускает периодическое решение:

$$q_1 = Q_1(t), \quad q_2 = Q_2(t), \quad p_1 = P_1(t), \quad p_2 = P_2(t),$$

и пусть смежное решение определяется уравнениями:

$$q_1 = Q_1 + \xi_1, \quad q_2 = Q_2 + \xi_2, \quad p_1 = P_1 + \widetilde{\omega}_1, \quad p_2 = P_2 + \widetilde{\omega}_2,$$

Тогда, очевидно, $\xi_1, \xi_2, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$ удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} + \xi_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} + \widetilde{\omega}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} + \widetilde{\omega}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \tag{2}$$

и еще трем аналогичным уравнениям.

Пусть $\xi_1', \xi_2', \widetilde{\omega}_1', \widetilde{\omega}_2'$ представляют собой другое решение этих уравнений, так что имеем:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \zeta_1' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_1} + \zeta_2' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial q_2} + \widetilde{\omega}_1' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} + \widetilde{\omega}_2' \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \tag{3}$$

и еще три аналогичные уравнения.

Умножая уравнения (2) на $\widetilde{\omega}_1', \widetilde{\omega}_2', -\xi_1', -\xi_2'$, а уравнения (3) — на $-\widetilde{\omega}_1, -\widetilde{\omega}_2, \xi_1, \xi_2$ и складывая, получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\xi_1 \widetilde{\omega}_1' - \xi_2 \widetilde{\omega}_2' - \xi_1' \widetilde{\omega}_1 - \xi_2' \widetilde{\omega}_2\right) = 0,$$

откуда

$$\xi_1 \widetilde{\omega}_1' + \xi_2 \widetilde{\omega}_2' - \xi_1' \widetilde{\omega}_1 - \xi_2' \widetilde{\omega}_2 = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Пусть $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\widetilde{\omega}}_1, \bar{\widetilde{\omega}}_2$ представляют значения величин $\xi_1, \xi_2, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$ по истечении промежутка времени, равного периоду. Тогда величины $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\widetilde{\omega}}_1, \bar{\widetilde{\omega}}_2$ будут линейными функциями величин $\xi_1, \xi_2, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$. Пусть этими функциями будут:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_1 &= r_{11}\xi_1 + r_{12}\xi_2 + r_{13}\widetilde{\omega}_1 + r_{14}\widetilde{\omega}_2, \\
\bar{\xi}_2 &= r_{21}\xi_1 + r_{22}\xi_2 + r_{23}\widetilde{\omega}_1 + r_{24}\widetilde{\omega}_2, \\
\bar{\widetilde{\omega}}_1 &= r_{31}\xi_1 + r_{32}\xi_2 + r_{33}\widetilde{\omega}_1 + r_{34}\widetilde{\omega}_2, \\
\bar{\widetilde{\omega}}_2 &= r_{41}\xi_1 + r_{42}\xi_2 + r_{43}\widetilde{\omega}_1 + r_{44}\widetilde{\omega}_2.
\end{aligned}$$

Обозначим матрицу (r_{pq}) преобразования, определяемого этими уравнениями, через R. На основании (4) матрица R преобразует выражение $\xi_1\widetilde{\omega}_1' + \xi_2\widetilde{\omega}_2' - \xi_1'\widetilde{\omega}_1 - \xi_2'\widetilde{\omega}_2$ в самого себя и поэтому

$$\begin{gathered}\xi_1\widetilde{\omega}_1' + \xi_2\widetilde{\omega}_2' - \xi_1'\widetilde{\omega}_1 - \xi_2'\widetilde{\omega}_2 = \\ = (r_{11}\xi_1 + r_{12}\xi_2 + r_{13}\widetilde{\omega}_1 + r_{14}\widetilde{\omega}_2)(r_{31}\xi_1' + r_{32}\xi_2' + r_{33}\widetilde{\omega}_1' + r_{34}\widetilde{\omega}_2') + \\ + \text{три аналогичных произведения.}\end{gathered}$$

Сравнивая коэффициенты при $\xi_1\xi_1'$ и т. д. в обеих частях этого уравнения, мы получим ряд уравнений, которые все содержатся в одном матричном уравнении:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -r_{31}r_{12} - r_{41}r_{22} + r_{11}r_{32} + r_{21}r_{42} & -r_{31}r_{13} - r_{41}r_{23} + r_{11}r_{33} + r_{21}r_{43} & \cdots \\ -r_{32}r_{11} - r_{42}r_{21} + r_{12}r_{31} + r_{22}r_{41} & 0 & -r_{32}r_{13} - r_{42}r_{23} + r_{12}r_{33} + r_{22}r_{43} & \cdots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Матрица, стоящая в правой части, равна:

$$\begin{pmatrix} -r_{31} & -r_{41} & r_{11} & r_{21} \\ -r_{32} & -r_{42} & r_{12} & r_{22} \\ -r_{33} & -r_{43} & r_{13} & r_{23} \\ -r_{34} & -r_{44} & r_{14} & r_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} & r_{31} & r_{41} \\ r_{12} & r_{22} & r_{32} & r_{42} \\ r_{13} & r_{23} & r_{33} & r_{43} \\ r_{14} & r_{24} & r_{34} & r_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} \end{pmatrix}$$

Поэтому, обозначая матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

через S, получим $S = R'SR$, где R' означает матрицу, сопряженную с R. Отсюда $(R')^{-1} = SRS^{-1}$.

Это уравнение показывает, что матрица $(R')^{-1}$, а следовательно, и матрица R^{-1} имеет те же самые собственные значения, что и матрица R. Следовательно, *совокупность собственных значений матрицы R совпадает с совокупностью собственных значений обратной матрицы.*

Всегда существует линейная комбинация $\eta = \alpha\xi_1 + \beta\xi_2 + \gamma\widetilde{\omega}_1 + \delta\widetilde{\omega}_2$ величин $\xi_1, \xi_2, \widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2$, обладающая тем свойством, что величина $\overline{\eta}$, в которую переходит η по истечении промежутка времени, равного периоду, удовлетворяет соотношению:

$$\overline{\eta} = \lambda\eta. \tag{5}$$

Выписывая явно уравнения, выражающие это условие, мы сразу обнаружим, что величина λ должна быть одним из собственных значений матрицы R. Но мы знаем, что всякое решение уравнения (2) может быть представлено в виде:

$$\sum_k e^{\alpha_k t} S_k(t), \tag{6}$$

где α_k — характеристические показатели, а S_k — периодические функции от t с периодом T. Уравнение же (5) может быть удовлетворено лишь только тогда, когда η содержит только один характеристический показатель. Допустим, что

$$\eta = e^{\alpha_k t} S_k(t). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), получим:

$$\lambda = e^{\alpha_k T},$$

т. е. *собственными значениями матрицы* R будут величины $e^{\alpha_k T}$, где α_k — *характеристические показатели.*

Сопоставляя это с вышеполученным результатом, что собственные значения матрицы R совпадают с собственными значениями обратной матрицы, мы приходим к следующей теореме: *Если дифференциальные уравнения имеют вид уравнений Гамильтона, то характеристические показатели всякого периодического решения распадаются на пары, состоящие из характеристических показателей, равных по величине, но противоположных по знаку*[1].

Отсюда и из результата, полученного в § 174, вытекает, что *при движении материальной точки на плоскости под действием консервативных сил характеристические показатели всякого периодического решения суть* $0, 0, \alpha$ *и* $-\alpha$, *где* α *— некоторое число.*

Задача 1. Материальная точка движется по плоскости под действием консервативных сил. Пусть u_n, u_{n-1}, u_{n+2} означают соответственно нормальные отклонения точки от какой-нибудь периодической траектории при движении по смежной траектории после трех последовательных обращений. Показать, что частное $k = \dfrac{(u_{n+2} + u_n)}{u_{n+1}}$ есть величина постоянная, одинаковая для всех смежных траекторий. (Korteweg, Wiener Sitzungsber., т. 93, 1886.)

[1] Эта теорема принадлежит Пуанкаре (Méc. Cel, т. 1, стр. 193).

Число k называется *показателем устойчивости* периодической траектории. Если характеристические показатели периодической траектории суть 0, 0, α, и $-\alpha$, то число α, показатель устойчивости k и период T связаны соотношением:

$$k = 2\operatorname{ch}\alpha T.$$

Задача 2. Показать (предполагая, что вопрос устойчивости решается рассмотрением малых перемещений), что периодическая траектория будет устойчивой или неустойчивой в зависимости от того, будет ли показатель устойчивости по абсолютной величине меньше или больше двух.

Это, конечно, соответствует тому, что периодическая траектория будет устойчивой или неустойчивой в зависимости от того, будет ли α чисто мнимым числом или нет.

Задача 3. Исследовать предельный случай, когда α равен ± 2.

Показать, что смежная траектория определяется одним из уравнений:

$$u = K_1\{\varphi(s) + s\psi(s)\} + K_2\psi(s),$$
$$u = K_1\varphi(s) + K_2\psi(s),$$

где φ и ψ либо имеют период S (s — дуга периодической траектории, а S ее полная длина), либо связаны соотношениями:

$$\varphi(s+S) = -\varphi(s), \quad \psi(s+S) = -\psi(s),$$

и что периодическая траектория может быть как устойчивой, так и неустойчивой.

§ 178. Вывод асимптотических решений § 170 из теории характеристических показателей. Покажем сейчас, как можно получить траектории планет в общей теории относительности (§ 170), спиралеобразно приближающиеся к асимптотическим круговым траекториям, из рассмотрения характеристических показателей этих круговых траекторий.

Напишем уравнения движения (§ 170):

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{r'}{1-\frac{\alpha}{r}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\alpha c^2}{r^2}t'^2 + \frac{\alpha r'^2}{2r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2} - r\vartheta'^2 = 0, \tag{8}$$

$$\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)t' = -\frac{k}{c^2\sqrt{\beta}}, \tag{9}$$

$$r^2\vartheta' = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tag{10}$$

и исключим из них s и ϑ, будем иметь:

$$\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3\alpha}{2r^2\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\alpha c^2}{r^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 0. \tag{11}$$

Из (9) и (10) находим:

$$\frac{r^2}{1-\frac{\alpha}{r}}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{c^2}{k},$$

что после дифференцирования даст:

$$r^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2r\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{\alpha}{1-\frac{\alpha}{r}}\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} = 0. \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) являются уравнениями движения, если r и ϑ рассматривать как зависимые, а t — как независимую переменную. Если $r = r_0(t)$, $\vartheta = \vartheta_0(t)$ суть уравнения траектории, то, желая определить малые колебания около нее, мы должны будем положить:

$$r = r_0(t) + \xi, \quad \vartheta = \vartheta_0(t) - \eta$$

и пренебречь квадратами и произведением величин ξ и η. Характеристические показатели найдутся после разрешения дифференциальных уравнений в ξ и η.

В частности, если траектория является окружностью радиуса r_0, то

$$\frac{dr}{dt} = 0, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0,$$

и поэтому в силу (11)

$$r_0^3\dot{\vartheta}_0^2 = \frac{1}{2}\alpha c^2.$$

Уравнение для ξ после несложных преобразований принимает вид:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\alpha c^2}{2r_0^3}\left(1 - \frac{3\alpha}{r_0}\right)\xi = 0. \tag{13}$$

Отсюда, очевидно, следует, что *круговая траектория только тогда может быть устойчивой, когда ее радиус превышает* 3α. Этот результат был уже нами получен в § 170. Если радиус траектории меньше, чем 3α, то решение уравнения (13) имеет вид:

$$\xi = Ae^{t\left\{\frac{\alpha c^2}{2r_0^3}\left(\frac{3\alpha}{r_0}-1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}} + Be^{-t\left\{\frac{\alpha c^2}{2r_0^3}\left(\frac{3\alpha}{r_0}-1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{14}$$

Характеристические показатели суть $\pm\left\{\frac{\alpha c^2}{2r_0^3}\left(\frac{3\alpha}{r_0} - 1\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$. *Оба члена, стоящие в правой части уравнения* (14), *соответствуют двум типам асимптотических решений. Решения первого типа приближаются к круговой траектории по привой спирали, а решения второго* *типа по левой.* Из § 170 вытекает, что планета, отдаляясь от круговой траектории по правой спирали, отдалится на некоторое расстояние от притягивающего центра и, пройдя через афелий, начнет снова приближаться к круговой траектории по левой спирали. Разумеется, этот результат не может быть получен простым рассмотрением характеристических показателей.

§ 179. Характеристические показатели обыкновенных и особых периодических решений. Мы видели (§ 177), что характеристические показатели периодических решений динамической системы с двумя степенями свободы суть $0, 0, \alpha, -\alpha$, где α — некоторое число. В предыдущем параграфе мы показали, что для круговых траекторий планеты в обшей теории относительности, являющихся особыми периодическими траекториями, число α отлично от нуля. С другой стороны, для квази-эллиптических траекторий, являющихся обыкновенными периодическими траекториями, и для которых поэтому период остается постоянным для подсемейства из ∞^1 траекторий, число α равно нулю. Это является общим свойством гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Все *характеристические показатели обыкновенных периодических решений равны нулю; характеристические показатели особых периодических решений суть* $0, 0, \alpha$ *и* $-\alpha$, *где* α *отличное от нуля число, изменяющееся непрерывно на семействе особых решений.*

§ 180. Три лагранжевы материальные точки. Мы переходим теперь к рассмотрению периодических решений задачи трех тел.

Примем уравнения движения в приведенной форме § 160 и выясним сначала, могут ли существовать такие частные решения, при которых взаимные расстояния между телами остаются неизменными во все время движения.

Расстояния между телами равны соответственно:

$$q_1, \quad \left\{q_2^2 - \frac{2m_2 q_1 q_2}{m_1+m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2-p_3^2-p_4^2}{2p_3p_4}\sin q_3 \sin q_4\right) - \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}q_1^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

и

$$\left\{q_2^2 + \frac{2m_1 q_1 q_2}{m_1+m_2}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2-p_3^2-p_4^2}{2p_3p_4}\sin q_3 \sin q_4\right) + \frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2}q_1^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что для рассматриваемого частного решения должны оставаться постоянными величины:

$$q_1, \quad q_2 \quad \text{и} \quad \cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2-p_3^2-p_4^2}{2p_3p_4}\sin q_3 \sin q_4$$

и, следовательно, также величины U, $\dfrac{\partial U}{\partial q_1}$, $\dfrac{\partial U}{\partial q_2}$, где

$$U = \sum m_1 m_2 r_{12}^{-1}.$$

Уравнения:

$$0 = \dot{q}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{p_1}{\mu}, \quad 0 = \dot{q}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{p_2}{\mu},$$

показывают, что p_1 и p_2 должны быть постоянно равны нулю, а уравнения:

$$0 = \dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = \frac{p_3^2}{\mu q_1^3} + \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad 0 = \dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = \frac{p_4^3}{\mu' q_2^3} + \frac{\partial U}{\partial q_2},$$

что p_3 и p_4 должны быть постоянными.

Кроме того, уравнения:

$$0 = \dot{p}_3 = -\frac{\partial H}{\partial q_3}, \quad 0 = \dot{p}_4 = -\frac{\partial H}{\partial q_4}$$

показывают, что выражения:

$$\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2p_3 p_4} \sin q_3 \sin q_4\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial q_4}\left(\cos q_3 \cos q_4 - \frac{k^2 - p_3^2 - p_4^2}{2p_3 p_4} \sin q_3 \sin q_4\right)$$

равны нулю. Поэтому

$$\operatorname{tg} q_3 \operatorname{ctg} q_4 = \operatorname{ctg} q_3 \operatorname{tg} q_4 = \frac{p_3^2 + p_4^2 - k^2}{2p_3 p_4},$$

откуда

$$p_3^2 + p_4^2 - k^2 = \pm 2p_3 p_4$$

или

$$k^2 = (p_3 + p_4)^2.$$

Это уравнение показывает, что плоскости мгновенных движений тел μ и μ' совпадают с плоскостью, проходящей через оба тела и начало. Другими словами, тела μ и μ' движутся в одной плоскости. Вследствие этого *тела m_1, m_2, m_3 также движутся в одной плоскости.*

Если мы примем, что центр тяжести O находится в покое, то отсюда следует, что материальные точки m_1, m_2 и m_3, которые мы обозначим через P, Q и R, описывают окружности с центром в точке O. Но необходимо еще исследовать, является ли такое движение действительно возможным.

Очевидно, что для этого необходимо, чтобы результирующая двух сил, с которыми две материальные точки действуют на третью, была направлена по прямой, соединяющей эту третью точку с центром тяжести. Это условие будет выполнено, если все три точки не лежат на одной прямой. Если же все эти точки не лежат на одной прямой, то тогда будем иметь:

$$\frac{m_1}{PR^2}\sin PRO = \frac{m_2}{QR^2}\sin QRO$$

и еще два аналогичных условия.

Но так как O есть центр тяжести системы, то

$$\frac{m_1 \sin PRO}{m_2 \sin QRO} = \frac{\sin QPR}{\sin PQR} = \frac{QR}{PR}.$$

Это и предыдущее уравнения показывают, что $PR = QR$. Аналогично можно получить, что $PR = PQ$.

Следовательно, *материальные точки должны либо лежать на одной прямой, либо образовывать равносторонний треугольник.*

Рассмотрим сначала первый случай. Пусть a_1, a_2 и a_3 означают расстояния материальных точек от центра тяжести при определенном выборе положительного направления.

Не нарушая общности рассуждений, мы можем предположить, что $a_1 < a_2 < a_3$. Так как сила, действующая на P, должна соответствовать круговому движению вокруг O, то

$$n^2 a_1 = -m_2(a_2 - a_1)^{-2} - m_3(a_3 - a_1)^{-2},$$

где n — угловая скорость прямой PQR. Аналогично

$$n^2 a_2 = -m_3(a_3 - a_2)^{-2} - m_1(a_2 - a_1)^{-2},$$
$$n^2 a_3 = m_1(a_3 - a_1)^{-2} - m_2(a_3 - a_2)^{-2}.$$

Из этих уравнений непосредственно вытекает:

$$m_1 k^2\{(1+k)^3 - 1\} + m_2(1+k)^2(k^3 - 1) + m_3\{k^3 - (1+k)^3\} = 0,$$

где

$$k = \frac{a_3 - a_2}{a_2 - a_1}.$$

Мы получили уравнение пятой степени относительно k с вещественными коэффициентами. Левая часть этого уравнения принимает отрицательное значение при $k = 0$ и положительное значение при $k = +\infty$. Следовательно, оно имеет по меньшей мере один положительный действительный корень. Этот корень однозначно определяет действительные значения для отношений $a_1 : a_2 : a_3$. Если n задано, то все три расстояния a_1, a_2, a_3 могут быть полностью вычислены. Следовательно, *существует бесчисленное множество частных решений задачи трех тел, при которых тела все время остаются на одной прямой на постоянных расстояниях друг от друга. Эта прямая равномерно вращается; если ее угловая скорость задана* (*произвольно*), *то этим самым определяются взаимные расстояния между телами.*

Рассмотрим теперь случай, когда тела образуют равносторонний треугольник. Обозначим сторону треугольника через a, а его угловую скорость через n. Так как сила, действующая на m_3, должна соответствовать круговому движению вокруг точки O, то должно выполняться условие:

$$\frac{m_1}{a^2}\cos PRO + \frac{m_2}{a^2}\cos QRO = n^2 \cdot OR$$

Это условие приводится к следующему:

$$m_1 + m_2 + m_3 = n^2 a^3.$$

К этому же соотношению приводятся и условия движения для точек Q и R. Поэтому движение рассматриваемого вида возможно, если a и n связаны этим соотношением. Следовательно, существует *бесчисленное множество частных решений задачи трех тел, при котором тела образуют равносторонний треугольник постоянной величины, равномерно вращающийся в плоскости своего движения; величина треугольника определяется произвольно задаваемой угловой скоростью вращения.*

Полученные два частных вида движения называются соответственно *лагранжевыми коллинеарными и эквидистантными материальными точками*[1].

В течение более ста лет после открытия Лагранжа считали, что это открытие имеет только теоретический интерес. Но в 1906 г. была открыта новая малая планета 588 Achilles, обладающая тем же средним расстоянием, что и Юпитер. И действительно, можно показать, что Солнце, Юпитер и Ахиллес, по крайней мере приближенно, представляют собой пример лагранжевых эквидистантных точек. Немного времени спустя последовало открытие еще трех астероидов: 617 Патрокла, 624 Гектора и 659 Нестора, для которых справедливо то же самое[2]. Из этой группы Патрокл имеет долготу 60° , а остальные три — долготу 60° относительно Юпитера.

[1] *Lagrange, Oeuvres*, т. 6, стр. 229. Относительно литературы по вопросу о распространении этого результата на задачу n тел см. статью автора в «Encyklopädie» d. math. Wiss., т. 6. 2, 12, стр. 529: из указанных там исследований отметим следующие: *E. O. Lovett*, Annali di Mat (3), т. 11, стр. 1, 1904; *W. R. Longley*, Bull. Amer. Math. Soc., т. 13, стр. 324, 1907; *F. R. Moulton*, Annals of Math., т. 12, стр. 1, 1910.

[2] См. *F. I. Linders*, Arkiv för Mat., т. 4, № 20, 1908.

Задача 1. Показать, что существуют частные решения задачи трех тел, при которых тела остаются коллинеарными или эквидистантными, но расстояния между ними не остаются постоянными, а являются периодическими функциями времени.

Эти решения являются, очевидно, периодическими и содержат лагранжевы решения как предельный случай.

§ 181. Устойчивость лагранжевых точек; смежные периодические решения. Выше мы указывали, что вблизи устойчивого положения равновесия или стационарного состояния движения должно вообще существовать семейство периодических решений, а именно нормальные колебания около положения устойчивого равновесия или стационарного состояния движения. Мы приложим эту идею к лагранжеву частному решению ограниченной задачи трех тел и получим, таким образом, определенные системы периодических траекторий планетоидов.

Пусть S и J означают тела, имеющие конечные массы, которые мы обозначим через m_1 и m_2, O — центр тяжести этих тел, n — угловая скорость прямой SJ, а x и y — координаты планетоида P относительно системы координат, начало которой совпадает с O, а ось x с прямой SJ. Уравнения движения планетоида имеют вид (§ 162):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial K}{\partial u}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial K}{\partial v}, \quad \frac{du}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial x}, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial y},$$

где

$$K - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + n(uy - vx) - \frac{m_1}{SP} - \frac{m_2}{JP}.$$

Обозначим через a и b значения x и y в рассматриваемом относительном движении равновесия. Тогда для коллинеарного случая $b = 0$, а для эквидистантного случая:

$$a = \frac{1}{2}\frac{l(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}, \quad b = \frac{1}{2}\sqrt{3}l,$$

где l означает расстояние SJ, так что (§ 46):

$$m_1 - m_2 - n^2 l^3.$$

Нетрудно видеть, что в положении относительного равновесия u и v имеют соответственно значения $-nb$ и na.

Положим:

$$x = a + \xi, \quad y = b + \eta, \quad u = -nb + \vartheta, \quad v = na + \varphi,$$

где ξ, η, ϑ, φ предполагаются очень малыми. Тогда, отбрасывая один постоянный член, будем иметь:

$$K = \frac{1}{2}(\vartheta^2+\varphi^2) + n(\eta\vartheta-\xi\varphi) - n^2(a\xi+b\eta) - m_1\left\{\left(a+\frac{m_2 l}{m_1+m_2}-\xi\right)^2 - \right.$$

$$\left. +(b+\eta)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} - m_2\left\{\left(a+\frac{m_1 l}{m_1+m_2}+\xi\right)^2 + (b+\eta)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Разлагая это выражение и отбрасывая члены выше второго порядка малости, мы получим выражение для K, которое позволит нам составить уравнения колебаний около положения относительного равновесия. Рассмотрим случай колебаний около эквидистантной конфигурации. В этом случае имеем:

$$K = \frac{1}{2}(\vartheta^2+\varphi^2) + n(\eta\vartheta-\xi\varphi) - \frac{n^2}{8(m_1+m_2)}\{4(m_1+m_2)(\xi^2+\eta^2) -$$

$$-3m_1\left(\xi+\sqrt{3}\eta\right)^2 - 3m_2\left(\xi-\sqrt{3}\eta\right)^2\}.$$

Уравнениями движения будут:

$$\dot\xi = \frac{\partial K}{\partial\vartheta}, \quad \dot\eta = \frac{\partial K}{\partial\varphi}, \quad \dot\vartheta = -\frac{\partial K}{\partial\xi}, \quad \dot\varphi = -\frac{\partial K}{\partial\eta}.$$

Применяя к решению этих уравнений метод, изложенный в гл. **VII** для периода нормальных колебаний, мы найдем значение $\frac{2\pi}{\lambda}$, где λ корень уравнения:

$$\lambda^4 - n^2\lambda^2 - \left(\frac{27}{16}-k^2\right)n^4 = 0, \quad \text{где } k = \frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}.$$

Оба значения λ^2, определяемые этим уравнением, в случае если они вещественны, будут положительны, так как $\left(\frac{27}{16}-k^2\right) > 0$. Действительными эти значения будут тогда, когда $4\left(\frac{27}{16}-k^2\right) < 1$, т. е. тогда, когда $(m_1+m_2)^2 > 27m_1m_2$. Последнее же условие будет всегда выполняться, если масса одного из тел S, J достаточно велика по сравнению с массой другого. *Если это условие выполнено, то существуют два семейства периодических траекторий планетоида вблизи его эквидистантной конфигурации относительного равновесия.* Периоды в первом приближении суть $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ и $\frac{2\pi}{\lambda_2}$, где λ_1^2 и λ_2^2 — корни квадратного относительно λ^2 уравнения:

$$\lambda^4 - n^2\lambda^2 + \left(\frac{27}{16}-k^2\right)n^4 = 0.$$

Эти траектории изучены различными исследователями при помощи численного интегрирования.

Задача 1. Показать, что постоянная относительной энергии нормальных колебаний планетоидов около эквидистантной конфигурации для одного вида колебаний больше, а для другого вида меньше, чем для относительного равновесия. (Charlier.)

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что *коллинеарная конфигурация неустойчива. Тем не менее уравнение для периодов нормальных колебаний имеет всегда один действительный корень и потому вблизи положения относительного равновесия планетоида на прямой SJ существует семейство неустойчивых периодических траекторий.*

Эти траектории изучены при помощи численного интегрирования.

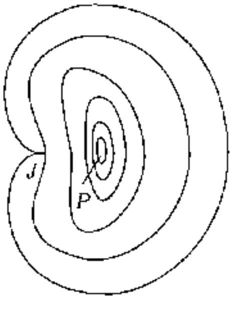

Рис. 7

Пусть S и J — тела конечной массы, а P — точка «либрации» за J, в которой планетоид может оставаться в относительном равновесии. Около этой точки имеется последовательность периодических траекторий (рис. 7), распространяющаяся до траектории «столкновения», открытой Бёрроу (Burrau), на которой планетоид сталкивается с J и отскакивает от него. За траекторией столкновения находятся траектории, делающие петли вокруг J, и, как это показал Стрёмгрен из Копенгагенской обсерватории со своими сотрудниками, после многочисленных изменений типа мы снова приходим к первоначальной простой траектории вокруг P, так что последовательность возвращается к самой себе, и мы получаем непрерывный полный замкнутый ряд периодических траекторий.

Относительно дальнейшей литературы о траекториях вблизи лагранжевых частных решений и об ограниченной задаче трех тел см. ст. автора в «Encyklopädie», стр. 530; далее *E. O. Lovett*, Astr. Nach., 159, стр. 281, 1902; *F. R. Moulton*, Proc. L. M. S. (2), т. 11, стр. 367, 1912; Math. Ann., т. 73, стр. 441, 1912; Proc. Inter. Cong. of Math., т. 2, стр. 182, Cambridge 1912; Periodic Orbits., Washington 1920.

[В этой книге дается обзор исследований самого Мультона, а также У. Д. Мак-Миллана (*W. D. Mc Millan*), Т. Бука (*T. Buck*), Д. Бухавана (*D. Buchanan*), У. Р. Лонглея (*W. R. Longley*) и Ф. Л. Гриффина (*F. L. Griffin*)]. *W. W. Heinrich*, Bull. Astron. (2), т. 2, стр. 425; Memoirs of the Royal Soc. of Sciences of Bohemia, Prague 1922; Publications de l'Institut astron. de l'Univ. Charles de Prague (2), №1, 1923; различные мемуары *E. Haerdtl*, G. Pavanini, L. A. H. Warren, J. Chazy, L. Amoroso, J. Fischer Petersen, P. Pedersen; *K. Bohlin*; Astron. Jakkt. a Stockholms Observatorium, т. 10, № 11, 1923; ряд работ Е. Стрёмгрена и его школы в «Publikationer fra Köbenhavns observatorium».

§ 182. Влияние членов высших порядков на устойчивость траекторий. В настоящей главе, изучая траектории вблизи некоторой заданной траектории или положения равновесия, мы их рассматривали только как приближенные решения уравнений смежной траектории, так как мы отбрасывали все члены, имеющие порядок выше первого относительно перемещений. Однако эти члены высших порядков могут оказать существенное влияние на характер движения, как это следует из следующего примера[1].

Рассмотрим систему:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \tag{15}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\lambda(x_1^2 - y_1^2) - \lambda(x_2^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}\alpha\left\{x_2(x_1^2 - y_1^2) - 2x_1y_1y_2\right\}.$$

Уравнения движения в первом приближении при пренебрежении членами выше первого порядка имеют вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda y_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = -\lambda x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = -2\lambda y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = 2\lambda x_2,$$

что дает:

$$\begin{aligned} x_1 &= A\sin(\lambda t + \varepsilon), & y_1 &= A\cos(\lambda t + \varepsilon), \\ x_2 &= B\sin(2\lambda t + \gamma), & y_2 &= -B\cos(2\lambda t + \gamma), \end{aligned}$$

где A, B, ε, γ — постоянные интегрирования. Следовательно, первое приближение, складывающееся из двух простых гармонических колебаний, устойчиво.

Но, как нетрудно видеть, уравнения (15) допускают решение:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{2}}{a(t+\varepsilon)}\sin(\lambda t + \gamma), & y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{a(t+\varepsilon)}\cos(\lambda t + \gamma), \\ x_2 &= \frac{1}{a(t+\varepsilon)}\sin(2\lambda t + \gamma), & y_2 &= \frac{-1}{a(t+\varepsilon)}\cos(2\lambda t + \gamma), \end{aligned}$$

где ε и γ произвольные постоянные. Эти уравнения представляют траектории, неограниченно приближающиеся к началу координат при $t \to \infty$ и при $t \to -\infty$ и имеющие бесконечные ветви, так как все координаты принимают бесконечные значения, когда t приближается к произвольному значению ε.

[1] *T. M. Cherry*, Trans. Camb. Phil. Soc., т. 23, стр. 199, 1925.

Мы должны поэтому заключить, что положение равновесия в начале координат неустойчиво, несмотря на то, что в первом приближении оно устойчиво.

Влияние членов высших порядков на устойчивость динамических систем рассматривали Леви–Чивита[1] и Чигала (A. R. Cigala)[2].

Этому же вопросу посвящен ряд мемуаров Кортевега (D. J. Korteweg)[3] и его ученика Бета (H. I. E. Beth)[4].

Рассматривая колебания около положения равновесия динамических систем с любым числом степеней свободы, Кортевег показал, что если s_1, s_2, ... означают частоты, отвечающие бесконечно малым главным колебаниям, т. е. когда выражение

$$p_1 s_1 + p_2 s_2 + \cdots,$$

где p_1, p_2, ... малые положительные или отрицательные целые числа, равно нулю или очень мало, то некоторые колебания высших порядков, имеющие обычно малую интенсивность по сравнению с главными колебаниями, могут достигнуть ненормально большой интенсивности. Наиболее важными будут те случаи, когда

$$|p_1| + |p_2| + \cdots \leqslant 4.$$

Эти случаи полностью исследовал Бет.

§ 183. Притягивающие и отталкивающие области силового поля. Докажем теперь одну теорему Адамара[5], выясняющую обший характер движения консервативной голономной системы. Примем для простоты, что система состоит из одной материальной точки массы 1, движущейся на гладкой поверхности под действием сил, имеющих потенциал V. Аналогичная теорема легко доказывается и для более сложных систем.

Пусть параметры u и v определяют положение точки на поверхности, элемент длины которой определяется формулой:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

где E, F, G суть заданные функции от u и v. Точка обладает кинетической энергией:

$$T = \frac{1}{2}\left(E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2\right),$$

[1] Annali di Mat., т. 5, стр. 221, 1901.

[2] Annali di Mat., т. 11, стр. 67, 1904.

[3] Verhand. d. K. Akad. v. Wetensch., т. 5, № 8, 1897; Archives Neerland (2), т. 1, стр. 229, 1897.

[4] Amsterdam Proc., т. 12, стр. 618, 735, 1910; т. 13, стр. 742, 1911; Archives Neerland (2), т. 15, стр. 246, 1910; (3a). стр. 185. 1912; Phil. Mag. (6), т. 26. стр. 268, 1913.

[5] Journ. de Math. (5), т. 3, стр. 331.

и уравнения движения имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot u}\right) - \frac{\partial T}{\partial u} = -\frac{\partial V}{\partial u}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot v}\right) - \frac{\partial T}{\partial v} = -\frac{\partial V}{\partial v}.$$

Эти уравнения могут быть приведены к виду:

$$\begin{aligned}(EG - F^2)\ddot u = -G\frac{\partial V}{\partial u} + F\frac{\partial V}{\partial v} + \dot u^2\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \\ - \dot u\dot v\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \dot v^2\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(EG - F^2)\ddot v = F\frac{\partial V}{\partial u} - E\frac{\partial V}{\partial v} + \dot u^2\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right) + \\ - \dot u\dot v\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \dot v^2\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right).\end{aligned}$$

Дифференцирование дает:

$$\dot V = \frac{\partial V}{\partial u}\dot u + \frac{\partial V}{\partial v}\dot v,$$

$$\ddot V = \frac{\partial V}{\partial u}\ddot u + \frac{\partial V}{\partial v}\ddot v + \frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\dot u^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v}\dot u\dot v + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\dot v^2.$$

Заменяя здесь $\ddot u$ и $\ddot v$ их значениями из предыдущих уравнений, будем иметь:

$$\ddot V = -(EG - F^2)^{-1}\left\{E\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial v} + G\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2\right\} + \Phi(\dot u, \dot v),$$

где

$$\begin{aligned}\Phi(\dot u, \dot v) = \Bigg[\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + (EG - F^2)^{-1}\Bigg\{\frac{\partial V}{\partial u}\left(F\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right) + \\ + \frac{\partial V}{\partial v}\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u} - E\frac{\partial F}{\partial u}\right)\Bigg\}\Bigg]\dot u^2 + \\ + \Bigg[2\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} + (EG - F^2)^{-1}\Bigg\{\frac{\partial V}{\partial u}\left(F\frac{\partial G}{\partial u} - G\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \\ + \frac{\partial V}{\partial v}\left(F\frac{\partial E}{\partial v} - E\frac{\partial G}{\partial u}\right)\Bigg\}\Bigg]\dot u\dot v + \\ + \Bigg[\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + (EG - F^2)^{-1}\Bigg\{\frac{\partial V}{\partial u}\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v} - G\frac{\partial F}{\partial v}\right) + \\ + \frac{\partial V}{\partial v}\left(F\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\Bigg\}\Bigg]\dot v^2.\end{aligned}$$

Величины, входящие в это уравнение, могут быть выражены через *инварианты* изгибания[1] поверхности. Основные инварианты изгибания поверхности с элементом длины

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

суть дифференциальные параметры:

$$\Delta(\varphi, \psi) = (EG-F^2)^{-1}\left\{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) + G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right\}.$$

$$\Delta_1(\varphi) = (EG-F^2)^{-1}\left\{E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right\},$$

$$\Delta_2(\varphi) = (EG-F^2)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left\{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left\{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}\left(-F\frac{\partial\varphi}{\partial u} + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right\}\right],$$

где φ и ψ произвольные функции от u и v.

При помощи этих обозначений последнее уравнение может быть записано в виде:

$$\ddot{V} = -\Delta_1(V) - \Phi(\dot{u}, \dot{v}).$$

Используя интеграл энергии

$$E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = 2(h-V)$$

и замечая, что выражение:

$$\frac{\Phi(\dot{u}, \dot{v})}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} - \frac{\Phi\left(\dfrac{\partial V}{\partial v}, -\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)}{E\left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - 2F\left(\dfrac{\partial V}{\partial v}\right)\left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right) + G\left(\dfrac{\partial V}{\partial u}\right)^2}$$

содержит величину $\dot{u}\dfrac{\partial V}{\partial u} + \dot{v}\dfrac{\partial V}{\partial v}$ в качестве множителя, мы можем написать:

$$\ddot{V} = -\Delta_1(V) + \frac{2(h-V)I_V}{\Delta_1(V)} + (\lambda\dot{u} + \mu\dot{v})\,\dot{V},$$

где λ и μ содержат в знаменателе только величину:

$$E\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)^2 - 2F\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right) + G\left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)^2$$

[1] Определение инвариантов изгибания дано в подстрочном примечании на стр. 126.

а I означает выражение:

$$\frac{\Phi\left(\frac{\partial V}{\partial v}, -\frac{\partial V}{\partial u}\right)}{(EG-F^2)}.$$

Нетрудно видеть, что I_V может быть представлено в виде:

$$I_V = \Delta_1(V)\Delta_2(V) - \frac{1}{2}\Delta\{V, \Delta_1(V)\}.$$

Рассмотрим на траектории точку, в которой V имеет минимум. Для нее $\dot{V} = 0$ и $\ddot{V}$ положительно. Так как Δ_1 положительно (ds^2 есть определенная положительная форма), то $I_V \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только тогда, когда $\Delta_1(V)$ равно нулю, т. е. для положения равновесия.

Когда точка описывает траекторию, функция V либо принимает бесчисленное множество чередующихся друг с другом максимумов и минимумов (общий случай), либо, начиная с определенной точки, изменяется в одном направлении (частный случай). Допустим сначала, что имеет место первый из этих случаев. Разложим поверхность на две такие области, что в одной из них $I_V > 0$, а в другой $I_V < 0$. Тогда из вышесказанного следует, что первая из этих областей содержит все точки траекторий, в которых V имеет минимум, т. е., вообше говоря, бесчисленное множество отрезков траекторий, каждый из которых имеет конечную длину. Напротив, во второй области, где $I_V < 0$, материальная точка не может оставаться постоянно. На этом основании обе эти области называются соответственно *притягивающей* и *отталкивающей* областями. В общем случае существуют одновременно обе эти области. Ибо нетрудно видеть, что все изолированные точки поверхности, в которых V имеет минимум, т. е. точки, в которых возможно устойчивое равновесие, лежат в притягивающей области, а все точки, в которых V имеет максимум, лежат в отталкивающей области.

Интересно сопоставить этот результат с аналогичным положением при движении точки с одной степенью свободы, например, при движении точки по заданной кривой под действием силы, зависящей только от положения. В этом случае точка либо описывает бесконечно большой путь в определенном направлении, либо колеблется около положения устойчивого равновесия. Притягивающая область при движении с двумя степенями свободы соответствует положению устойчивого равновесия при движении с одной степенью свободы.

Допустим теперь, что мы имеем дело со вторым случаем, т. е. что, начиная с некоторого момента времени, функция V изменяется в одном направлении. Мы будем предполагать, что поверхность нигде не простирается в бесконечность и не имеет особых точек, а функция V

правильна во всех точках поверхности. Так как функция V изменяется в одном направлении, то она необходимо стремится к некоторому определенному пределу, а $\dot{V}$ и $\ddot{V}$ стремятся к нулю.

Из равенства

$$\ddot{V} = \frac{-\Delta_1(V) + 2(h - V)I_V}{\Delta_1(V) + (\lambda\dot{u} + \mu\dot{v})\dot{V}}$$

мы видим, что λ и μ конечны, а последний член правой части бесконечно мал, когда $\Delta_1(V)$ не очень мало. Следовательно, либо существуют сколь угодно большие значения t, для которых $I_V > 0$ (и тогда отрезок траектории, лежащей в притягивающей области, превосходит по длине на любую заданную величину), либо же $\Delta_1(V)$ стремится к нулю. Последнее возможно только тогда, когда $\dfrac{\partial V}{\partial u}$ и $\dfrac{\partial V}{\partial v}$ обращаются в нуль. Поэтому, если на поверхности существует только конечное число положений равновесия (что в большинстве случаев действительно имеет место), то материальная точка приближается к одному из этих положений со скоростью, стремящейся к нулю. Такого рода положение равновесия будет неустойчивым, так как при обращении движения материальная точка, находясь в начальный момент вблизи положения равновесия и имея малую скорость, будет с течением времени отдаляться от этого положения, что находится в противоречии с определением устойчивости.

Таким образом, мы получаем окончательно теорему Адамара, которую мы сформулируем следующим образом: *Если материальная точка может свободно двигаться на поверхности, нигде не простирающейся в бесконечность и не имеющей нигде особых точек, и если потенциальная энергия есть функция правильная во всех точках поверхности и имеет на ней только конечное число максимумов и минимумов, то либо длина отрезка траектории, лежащего в притягивающей области, превышает всякое заданное число, либо траектория приближается асимптотически к положению неустойчивого равновесия.*

Задача 1. Показать, что если рассматривать все значения t от $-\infty$ до $+\infty$, то часть траектории материальной точки лежит в притягивающей области.

§ 184. Приложение интеграла энергии к задаче устойчивости. Во многих случаях характер заданного вида движения динамической системы может быть легко определен при помощи интеграла энергии. Рассмотрим в качестве примера одну материальную точку массы 1, движущуюся на плоскости под действием сил, имеющих потенциал $V(x, y)$. Тогда уравнением энергии будет:

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 - \dot{y}^2\right) = h - V(x, y).$$

Ветви кривой $V(x, y) = h$ разлагают плоскость на области, в которых $V(x, y) - h$ либо только положительно, либо только отрицательно. Но так как $\dot{x}^2 + \dot{y}^2$ существенно положительно, то траектория, для которой полная энергия равна h, может находиться только в области, где $V(x, y) < h$. Следовательно, если материальная точка находится в какой-нибудь момент времени внутри замкнутой ветви кривой $V(x, y) = h$, то она будет оставаться в ней постоянно. Иногда устойчивым называют такой вид движения, при котором движущаяся точка остается постоянно внутри некоторой ограниченной области. В этом смысле рассматриваемое движение точки можно назвать устойчивым.

Этим методом пользовались Гилль (Hill)[1], Болин (Bohlin)[2] и Дарвин (Darwin)[3], главным образом, в ограниченной задаче трех тел.

§ 185. Приложение интегральных инвариантов к вопросам устойчивости. Иной смысл придает понятию устойчивости Пуассон. По Пуассону система называется *устойчивой*, если она бесчисленное множество раз подходит сколь угодно близко к своему исходному положению, в то время как промежуточные отклонения от этого исходного положения могут достигать конечной величины.

Пуанкаре показал, что к исследованию устойчивости в смысле Пуассона может быть приложена теория интегральных инвариантов.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_r}{dt} = X_r(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

определяющую движение точки с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в пространстве n измерений.

Мы будем полагать, что эта система допускает интегральный инвариант:

$$\iint \ldots \int \delta x_1\, \delta x_2 \ldots \delta x_n.$$

Тогда, если траектории не имеют уходящих в бесконечность ветвей, можно показать[4], что для любой сколь угодно малой области R пространства существуют траектории, пересекающие эту область бесчисленное множество раз. В действительности вероятность того, что траектория, выходящая из R, не пересечет эту область бесчисленное множество раз, равна нулю, как бы мала ни была область R. Пуанкаре развил этот метод в различных направлениях и показал, что при некоторых условиях он может быть приложен к ограниченной задаче трех тел.

[1] Amer. J. Math., т. 1, стр. 75, 1878.

[2] Acta Math., т. 10, стр. 109, 1887.

[3] Acta Math., т. 21, стр. 99, 1897.

[4] *Poincaré*, Acta Math., т. 13, стр. 67, 1890; Nouv. Méth. d. Méc. Cel., т. 3, гл. 27.

§ 186. Геометрия динамики. Приведем здесь краткое содержание работы Синджа (Synge)[1], в которой динамические проблемы трактуются методами тензорного исчисления.

Движение динамической системы, конфигурация которой определяется N координатами $q_1, q_2, \ldots, q_N$, можно рассматривать как движение одной материальной точки в N-мерном пространстве («пространстве конфигурации»). Если кинетическая энергия системы задана квадратичной формой $T = \frac{1}{2} a_{mn} \dot{q}^m \dot{q}^n$ (где по повторяющемуся в произведении индексу подразумевается суммирование от 1 до N), то выражение:

$$ds^2 = 2T\,dt^2 = a_{mn}\,dq^m\,dq^n$$

является инвариантом, определяемым двумя смежными конфигурациями. Корень квадратный из этого количества может быть назван *расстоянием* между двумя конфигурациями, а само количество — *кинематическим линейным элементом.* В случае движения одной материальной точки единичной массы в пространстве или по поверхности определенный таким образом кинематический линейный элемент совпадает с обычным геометрическим линейным элементом.

Вектор с компонентами $\dot{q}^r$ называется *вектором скорости,* а вектор с компонентами f^r, где

$$f^r = \ddot{q}^r + \Gamma^r_{mn} \dot{q}^m \dot{q}^n$$

называется *вектором ускорения.* Легко видеть (стр. 61), что уравнения движения могут быть записаны в виде $f^r = Q^r$, т. е. ускорение равно силе. Так же как и в динамике точки, ускорение может быть разложено на компоненты по касательной и главной нормали, и эти компоненты соответственно равны: $v\dfrac{dv}{ds}$ и $v^2 k$, где v — величина вектора скорости ($v^2 = a_{mn}\dot{q}^m\dot{q}^n = 2T$), а k — первая кривизна. Это сразу приводит к обобщению теоремы Бонне (стр. 127).

Чисто геометрическое понятие об относительной кривизне двух кривых в пространстве Римана, введенное Липка (*Lipka*, Bull. Amer. Math. Soc., т. 29, стр. 345, 1923), дополнительно выясняет смысл принципа наименьшей кривизны и приводит к следующей теореме: *При движении консервативной системы с голономными или неголономными связями действительная траектория при движении со связями обладает относительно действительной траектории при движении без связей с тем же самым вектором скорости меньшей кривизной, чем всякая другая кривая, имеющая ту же самую касательную и удовлетворяющая условиям связей.*

[1] *I. L. Synge*, On the Geometry of Dynamics, Phil, trans., A, 226, стр. 31–106, 1926. Относительно основ тензорного анализа см. *Eisenhart*, Riemannian Geometry или *Levi Civita*, Lezioni di calcolo differenziale assoluto [имеются английский и немецкий переводы. (Прим ред.)].

Прилагая методы тензорного анализа к неголономным системам, можно получить для них соответствующие уравнения Лагранжа. Система из M уравнений связей накладывает условие, что вектор скорости должен быть перпендикулярен к некоторому M-мерному элементу. В этом элементе всегда возможно выбрать M взаимно ортогональных ортов. Если эти орты обозначить через $B^r_{(1)}, B^r_{(2)}, \ldots, B^r_{(M)}$, то уравнения движения будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^r}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^r} = Q^r - \left(B_{(1)m}Q^m + B_{(1)mn}Q^mQ^n\right)B^r_{(1)} - \\ - \left(B_{(2)m}Q^m + B_{(2)mn}Q^mQ^n\right)B^r_{(2)} - \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ - \left(B_{(M)m}Q^m - B_{(M)mn}Q^mQ^n\right)B^r_{(M)},\end{aligned}$$

где, например, $B_{(1)mn}$ есть ковариантная производная от $B_{(1)m}$:

$$B_{(1)mn} = \frac{\partial B_{(1)m}}{\partial q^n} - \Gamma^s_{mn}B_{(1)s}.$$

Этот метод имеет особенный интерес при приложении к вопросам устойчивости движения. Два движения: возмущенное и невозмущенное изображаются двумя смежными кривыми в пространстве. Если расстояние между соответственными конфигурациями в возмущенном и невозмущенном движениях остается все время очень малым, то мы будем говорить, что движение устойчиво в *кинетическом смысле*. Обозначим через η^r бесконечно малый вектор возмущения, соединяющий соответственные конфигурации в возмущенном и невозмущенном движениях. Можно показать, что η^r удовлетворяет уравнению:

$$\widehat{\widehat{\eta}}^r + G^s_{msn}\eta^s\dot q^m\dot q^n - Q^r_s\eta^s = 0,$$

где

$$G^r_{msn} = \frac{\partial \Gamma^r_{mn}}{\partial q_s} - \frac{\partial \Gamma^r_{ms}}{\partial q_n} + \Gamma^t_{mn}\Gamma^r_{st} - \Gamma^t_{ms}\Gamma^r_{nt}$$

есть смещенный тензор кривизны многообразия и

$$Q^r_s = \frac{\partial Q^r}{\partial q^s} + \Gamma^r_{sn}Q^n;$$

значок $\widehat{\ }$ означает *контравариантную производную по времени*, а именно:

$$\widehat{\eta}^r = \frac{d\eta^r}{dt} + \Gamma^r_{mn}\eta^m\frac{dq^n}{dt}, \quad \widehat{\widehat{\eta}}^r = \frac{d\widehat{\eta}^r}{dt} + \Gamma^r_{mn}\widehat{\eta}^m\frac{dq^n}{dt}$$

Величина вектора возмущения, определяемая равенством $\eta = (a_{mn}\eta^m\eta^n)^{\frac{1}{2}}$, удовлетворяет уравнению:

$$\ddot{\eta} + \eta \left(G_{mnst}\mu^m \dot{q}^n \mu^s \dot{q}^t - \widehat{\mu}^2 - Q_{mn}\mu^m \mu^n)\right) = 0,$$

где μ^r — орт вектора η^r, $\widehat{\mu}$ — величина вектора $\widehat{\mu}^r$, а Q_{mn} — ковариантная производная от Q_m.

Если соответствие между возмущенной и невозмущенной траекториями установить не при помощи соответственных конфигураций, а условием, чтобы вектор возмущения был перпендикулярен к невозмущенной траектории, и если этот вектор остается все время очень малым, то движение называется устойчивым в *кинематико-статическом смысле*. В этом случае также установлены дифференциальные уравнения для компонентов и величины вектора возмущения в случае консервативной системы.

Для системы с двумя степенями свободы получается:

$$\ddot{\beta} - \beta \left(v^2 K + V_{mn}\nu^m \nu^n + 3v^2 k^2\right) + 2k\delta h = 0,$$

где β — величина вектора возмущения (считаемая положительной с одной стороны невозмущенной траектории и отрицательной с другой стороны), K — гауссова кривизна поверхности, ν^r — орт нормали, k — первая кривизна траектории и δh — приращение полной энергии возмущенного движения по сравнению с невозмущенным.

Если иметь в виду только консервативные систему и при исследовании устойчивости рассматривать только возмущения, не изменяющие полной энергии, то геометрическая картина упрощается, если вместо кинематического линейного элемента ввести *линейный элемент действия*:

$$ds^2 = 2(h - V)\,T\,dt^2 = (h - V)a_{mn}\,dq^m\,dq^n = g_{mn}\,dq^m\,dq^n,$$

где h — полная энергия системы.

При таком выборе линейного элемента действительными траекториями движения согласно принципу наименьшего действия (стр. 337) будут являться геодезические линии (линии стационарной длины), и их уравнение имеет, следовательно, вид:

$$\frac{d^2 q^r}{ds^2} + \Gamma^r_{mn}\frac{dq^m}{ds}\frac{dq^n}{ds} = 0.$$

При исследовании вопросов устойчивости нам придется заниматься сравнением двух смежных геодезических линий. Если считать соответственными такие точки, которые находятся на одинаковом расстоянии (в смысле действия) от двух определенных точек, то вектор возмущения удовлетворяет уравнению:

$$\overline{\overline{\eta}}^r + G^r_{msn}\eta^s \frac{dq^m}{ds}\frac{dq^n}{ds} = 0,$$

где

$$\eta^r = \frac{d\eta^r}{ds} - \Gamma^r_{mn}\eta^m \frac{dq^n}{ds}, \quad \overline{\overline{\eta}}^r = \frac{d\eta^r}{ds} + \Gamma^r_{mn}\overline{\eta}^m \frac{dq^n}{ds}.$$

Символы Кристофеля (Christoffel) и тензор кривизны вычисляются, конечно, при помощи линейного элемента действия. Для величины вектора возмущения имеем:

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + \eta(G_{mnst}\mu^m \frac{dq^n}{ds}\mu^s \frac{dq^t}{ds} - \overline{\mu}^2).$$

В случае системы с двумя степенями свободы это даст:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + K\beta = 0,$$

где β — величина вектора возмущения, который, не нарушая общности, можно считать направленным по нормали (с учетом знака), а K гауссова кривизна многообразия, вычисленная при помощи линейного элемента действия.

§ 187. Связь с теорией преобразования поверхностей. Пуанкаре и Биркгоф (Birkhoff) изучали вопросы интегрируемости, устойчивости и классификации различных видов движения динамических систем с двумя степенями свободы методом, связанным с теорией преобразования поверхностей в самих себя. Полное описание этого метода можно найти в двух работах Биркгофа:

«Dynamical systems with two degrees of freedom» (Trans. Amer Math Soc., т. 18, стр. 199, 1917) и «Surface transformations and their dynamical applications» (Acta Math., т. 43, 1920).

Упражнения.

1. Показать, что при движении точки по эллипсу под действием двух центров, притягивающих по закону Ньютона, движение устойчиво. (Новиков.)

2. Точка массы 1 движется свободно на плоскости под действием нескольких притягивающих центров по закону Ньютона. Пусть $V(x, y)$ означает полную потенциальную энергию точки. Показать, что интеграл:

$$\frac{1}{2\pi}\iint \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln\{h - V(x, y)\}\right] dx\, dy,$$

распространенный на площадь, ограниченную периодической траекторией с постоянной энергией h (причем центры сил должны быть исключены из области интегрирования при помощи окружностей сколь угодно малых радиусов), равен уменьшенному на две единицы числу центров, заключенных внутри траектории. (Monthly Notices R. A. S., т. 62, стр. 186.)

3. Семейство плоских траекторий определяется дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x, y),$$

где x и y — текущие прямоугольные координаты точки на траектории. Пусть δn означает нормальное отклонение точки (x, y) от некоторой смежной траектории семейства. Показать, что δn удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2\delta n}{dt^2} + I\delta n = 0,$$

где

$$I = \left\{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \{\varphi(x, y)\}^2,$$

и переменная t определяется уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

(Sheepshanks Astron. Exam.)

4. Точка движется под действием отталкивающего центра. Показать, что траектории всегда имеют гиперболический характер и никогда не окружают центра сил. Показать далее, что асимптоты не проходят через центр сил, если работа, необходимая для приведения точки в ее положение из бесконечности, конечна и что если эта работа бесконечна, то асимптоты проходят через центр сил и продолжительность всего движения может быть конечной. (Schouten.)

5. Показать, что при движении точки на покоящейся гладкой поверхности под действием силы тяжести кривая, отделяющая притягивающую область от отталкивающей, складывается из контура, получающегося при проектировании поверхности на горизонтальную плоскость, и геометрического места точек, в которых направление асимптотических линий горизонтально.

6. Точка свободно движется в пространстве под действием двух ньютоновых центров притяжения. Показать, что когда постоянная энергии имеет отрицательное значение, точка описывает спираль вокруг линии центров, расположенную внутри трубки, образованной двумя эллипсоидами вращения и двумя гиперболоидами вращения с общими фокусами в центре сил. Показать далее, что когда постоянная энергии равна нулю или положительна, точка описывает спираль, расположенную внутри области, образованной одним эллипсоидом и двумя уходящими в бесконечность полостями гиперболоидов той же самой софокусной системы. (Bonacini.)

7. Показать, что для того чтобы семейство из ∞^2 кривых, определяемых дифференциальным уравнением

$$y'' = \varphi(x, y, y'),$$

представляло собой семейство траекторий динамической системы, определяемой уравнениями движения:

$$\dot{x} + \lambda(x, y)\dot{y} = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial x},$$

$$\dot{y} - \lambda(x, y)\dot{x} = \frac{\partial \mu(x, y)}{\partial y},$$

необходимо и достаточно, чтобы величина:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{3\varphi y'}{1 + y'^2}$$

была полной производной функции от x и y по x. (P. Frank и K. Ogura.)

8. Точка движется в плоскости под действием силы, зависящей только от положения. Ей сообщают в заданном положении всевозможные скорости в заданном направлении и получают, таким образом, семейство из ∞^1 траекторий. Показать, что геометрическое место фокусов соприкасающихся парабол есть окружность, проходящая через заданную точку. Показать далее, что если направление скорости изменять, то геометрическое место центров ∞^1 этих окружностей есть коническое сечение с фокусом в заданной точке, переходящее в двойную прямую, когда действуюшая сила консервативна.

9. Для того чтобы семейство из ∞^5 пространственных кривых, из которых через каждую точку в каждом направлении проходит ∞^1 кривых, представляло собой семейство траекторий в произвольном поле сил, зависящих только от положения, необходимо (но не достаточно), чтобы:

α) соприкасающиеся плоскости ∞^2 кривых, проходящих через данную точку, проходили через одну прямую;

β) центры соприкасающихся шаров ∞^1 кривых, проходящих через данную точку в данном направлении, лежали на одной прямой.

10. Показать, что ∞^2 кривых натурального семейства, ортогональных к произвольной поверхности, ортогональны к ∞^1 поверхностям, т. е. образуют конгруэнцию нормалей. (Эти поверхности суть поверхности равного действия.) (Hamilton.)

11. Показать, что свойством, указанным в задаче 10, обладают только натуральные системы.

12. Семейство из ∞^4 кривых тогда и только тогда является натуральным семейством траекторий, когда:

α) соприкасающиеся окружности в какой-нибудь точке p всех кривых, проходящих через эту точку, имеют еще одну общую точку P; вследствие этого три из этих соприкасающихся окружностей имеют касание третьего порядка;

β) эти три окружности взаимно ортогональны.

13. Единственные точечные преобразования, преобразующие всякое натуральное семейство в натуральное же, суть те, которые принадлежат конформной группе.

[Задачи 8, 9, 11, 12 и 13 заимствованы из мемуаров Каснера (*Kasner*, Trans. of the Amer. Math. Soc., 1906 1909). Относительно дальнейшей литературы в этом направлении см. *Kasner*, Differential Geometric Aspects of Dynamics (Princeton Colloquium Lectures).]

14. Два однократно-бесконечных семейства кривых, образующих ортогональную систему, являются траекториями в определенном консервативном поле сил. Пусть U означает действие материальной точки в положении (x, y) при ее движении по кривой первого семейства, а V действие при движении по кривой второго семейства. Показать, что U и V суть сопряженные функции от x и y и что семейства U-const и V-const совпадают с семейством траекторий. (P. G. Tait и K. Ogura.)

Глава XVI
Интегрирование при помощи рядов

§ 188. Необходимость в рядах, сходящихся для всех значений времени. Ряды Пуанкаре. Выше (§ 32) мы уже указывали, что дифференциальные уравнения движения динамических систем могут быть проинтегрированы при помощи рядов, расположенных по возрастающим степеням времени, отсчитываемого от некоторого определенного момента. Эти ряды сходятся в общем случае внутри некоторого конечного круга сходимости комплексной плоскости, вследствие чего они определяют значения координат только для ограниченного интервала времени. Можно, конечно, продолжить аналитически[1] эти ряды и для значений времени, выходящих за этот интервал. Но метод аналитического продолжения практически очень сложен и к тому же получаемые при этом ряды не дают представления ни об обшем характере движения, ни об его протекании в дальнейшем. Поэтому усилия многих исследователей были направлены к тому, чтобы получить такие ряды, которые сходились бы для всех значений времени. Пуанкаре[2] удалось достигнуть этой цели путем преобразования комплексной t-плоскости. Если предположить, что движение системы всюду правильно (т. е. не имеют места ни взаимные столкновения каких-либо тел системы, ни какие-нибудь другие разрывы непрерывности) и координаты всегда конечны, то рассматриваемая система не будет иметь никаких особенностей на вещественной оси комплексной t-плоскости. Вследствие этого расходимость степенных рядов по $(t - t_0)$ имеет своей причиной существование особых точек решения, расположенных в круге конечного радиуса, но вне вещественной оси. Допустим, что ближайшая к вещественной оси особая точка отстоит от нее на расстоянии h. Введем новую переменную τ при помощи уравнения:

$$t - t_0 = \frac{2h}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

Очевидно, что при таком преобразовании полоса ширины h, расположенная симметрично относительно вещественной оси, отображается во внутреннюю часть окружности $|\tau| = 1$ τ-плоскости. Поэтому координаты динамической системы, являющиеся внутри этого круга правильными функциями от τ, могут быть разложены в степенные ряды по переменной τ, сходящиеся внутри этого круга. Следовательно, эти ряды сходятся для всех действительных значений τ, лежащих в интервале

[1] См. *Уиттекер* и *Ватсон*, Современный анализ, § 5, 5.

[2] Acta Math., т. 4, стр. 211, 1884.

между -1 и $+1$, т. е. для всех действительных значений t между $-\infty$ и $+\infty$. Мы получили, таким образом, разложения, пригодные для всех значений t.

§ 189. Регуляризирование задачи трех тел. В предыдущем параграфе мы сделали допущение, что для всех действительных значений t не имеют места ни взаимные столкновения тел, ни какие-либо другие разрывы непрерывности в движении системы. Первым, обратившим внимание на значение столкновения для математической теории задачи трех тел, был Пенлеве[1]. Он показал, что координаты тел будут являться регулярными функциями времени для всех значений последнего, если начальные значения переменных связаны такими зависимостями, что исключается возможность столкновения двух какихлибо тел по истечении конечного промежутка времени. Такого рода зависимости для ограниченной задачи трех тел (где имеется одна такая зависимость) установил Леви Чивита[2] и для общей задачи Бискончини (Bisconcini)[3]. Однако эти зависимости выражаются аналитически очень сложными рядами и не могут быть применены непосредственно кроме случая, когда интервал времени между началом движения и моментом столкновения достаточно мал. Значительным шагом вперед явилось исследование Сундмена (Sundman)[4], показавшего, что особенности в дифференциальных уравнениях, соответствующие столкновению двух тел, не являются существенными и могут быть устранены при помощи преобразования независимой переменной. Другими словами: переменные, характеризующие движение, и независимая переменная могут быть выбраны таким образом, что дифференциальные уравнения будут регулярными также и тогда, когда имеет место столкновение двух из трех тел[5]. Таким образом, мы получаем вещественное продолжение движения за момент столкновения[6]. Координаты могут быть вычислены для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$, независимо от того, имеют ли место взаимные столкновения тел или нет, и для обоих

[1] Leçons sur la théorie anal. des éq. diff., стр. 583, Paris 1897.

[2] Annali di Mat. (3), т. 9, стр. 1, 1909; Comptes Rendus, т. 136, стр. 82, 221, 1903.

[3] Acta Math., т. 30, стр. 49, 1905; см. далее *H. Block*, Medd. fron Lunds Obs., серия II, № 6, 1909; Arkiv f. Math., Astr. och Fys., т. 5, § 9, 1909.

[4] Acta Math., т. 36, стр. 105, 1912. Основные результаты этого мемуара были опубликованы впервые в «Acta Societatis Scient. Fennicae» 1906 и 1909. Этим мемуаром и была, по-видимому, вдохновлена в значительной мере теория униформизации аналитических функций Пуанкаре. Acta Math., XXXI, стр. 1, 1907.

[5] Леви-Чивита устранил особенности в дифференциальных уравнениях ограниченной задачи трех тел при помощи элементарного преобразования. См. Acta Math., т. 30, стр. 306, 1906. В последующем мемуаре (Rend. d. Lincei, т. 24, стр. 61, 1915) он переносит свой метод на плоскую задачу трех тел. См. также Acta Math., т. 42, стр. 99, 1917.

[6] Переменные могут быть разложены по возрастающим степеням $(t_1 - t)^{\frac{1}{3}}$, где t_1 — момент столкновения; в точке столкновения траектории имеют угловые точки.

больших расстояний между телами существует положительная нижняя граница l. Исключение при этом представляет только тот случай, когда одновременно сталкиваются все три тела. Последнее возможно, однако, лишь при очень частных видах движения, когда все постоянные моментов количества движения одновременно равны нулю[1]. Исключая из рассмотрения последний случай, Сундмен ввел новое независимое переменное при помощи уравнения:

$$dt = (1 - e^{-\frac{r_0}{l}})(1 - e^{-\frac{r_1}{l}})(1 - e^{-\frac{r_2}{l}})\, dw,$$ [2]

где r_0, r_1, r_2 — три взаимные расстояния между телами, а l — уже упомянутая нижняя граница. Тогда координаты тел и время являются регулярными функциями от w внутри полосы w-плоскости, имеющей конечную ширину 2Ω и ограниченной двумя прямыми, параллельными действительной оси и расположенными по разные стороны от нее. Между действительными значениями переменных w и t существует такое однозначное и непрерывное соответствие, что w вместе с t изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

Далее, Сундмен применяет преобразование Пуанкаре:

$$w = \frac{2\Omega}{\pi} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau},$$

при помощи которого указанная полоса w-плоскости преобразуется в круг единичного радиуса в плоскости переменной τ. Этим самым координаты и время делаются регулярными функциями от τ внутри единичного круга τ-плоскости. *Поэтому они могут быть разложены при всех действительных значениях времени в сходящиеся ряды по τ, независимо от того, имеют ли место взаимные столкновения тел или нет.* При этом единственным исключением является случай одновременного столкновения всех трех тел.

§ 190. Тригонометрические ряды. Все ряды, рассмотренные в предыдущем параграфе, обладают тем недостатком, что они не дают никаких явных указаний о характере движения по истечении большого интервала времени и не проливают свет на число и вид различных возможных для системы движений. Кроме того действительное выполнение всех связанных с этими рядами вычислений сопряжено с большими трудностями. Вследствие этого мы переходим сейчас к рассмотрению рядов совершенно иного вида.

[1] Этот последний факт был известен Вейерштрассу. См. Acta Math., т. 35, стр. 55. В этом случае движение происходит в плоскости.

[2] Для ограниченной задачи трех тел Армелини (Comptes Rendus, т. 158, стр. 253, 1914) предложил более простое уравнение.

Рассмотрим задачу колебательного движения математического маятника (§ 44) и заменим эллиптическую функцию, входящую в ее решение, ее тригонометрическим разложением[1]. Будем иметь:

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \frac{2\pi}{K}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}(2s-1)}}{1-q^{2s-1}}\sin\frac{(2s-1)\pi\mu(t-t_0)}{2K},$$

где ϑ означает угол наклона маятника относительно вертикали ко времени t, K и t_0 — произвольные постоянные интегрирования, μ — определенная постояннная и $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$, где K' — дополнительный к K полный эллиптический интеграл. Это разложение, в котором каждый член есть тригонометрическая функция от t справедливо для всех значений времени. Если постоянная q не велика, то уже первые члены этого ряда достаточно точно представляют движение для всех значений t. Такого же характера тригонометрическое разложение может быть получено и для кругового движения маятника.

Если мы обратимся к небесной механике, то мы увидим, что там уже давно пользовались тригонометрическими рядами как наилучшим способом для выражения координат отдельных членов солнечной системы. Эти ряды имеют вид:

$$\sum a_{n_1,n_2,\ldots,n_k}\cos(n_1\vartheta_1 + n_2\vartheta_2 + \cdots + n_k\vartheta_k),$$

где суммирование распространяется на все положительные и отрицательные значения величин $n_1, n_2, \ldots, n_k$, ϑ_r имеет вид $\lambda_r t + \varepsilon_r$, и величины α, λ, ε суть постоянные. Делоне (Delaunay)[2] показал в 1860 г., что такого рода рядами могут быть представлены координаты Луны. Аналогичный результат получил Ньюком (Newcomb)[3] и для координат планет, а целый ряд последующих исследователей[4] применили этот метод к решению общей задачи трех тел. Этот метод может быть распространен и на другие динамические системы, для которых уравнения движения имеют вид, аналогичный с уравнениями движения задачи трех тел. В нижеследующих параграфах мы излагаем метод[5], приводящий к тригонометрическим рядам и пригодный для всех динамических систем.

[1] *Уиттекер* и *Ватсон*, Современный анализ. § 22, 6.

[2] Theorie du mouvement de la lune, Paris 1860.

[3] Smithsonian Contributions, 1874.

[4] Например, Линдстед (Lindstedt), Тиссеран (Tisserand) и Пуанкаре.

[5] *Whittaker*, Proc. Lond. Math. Soc., т. 34, стр. 206, 1902; Proc. R. S. E., т. 37, стр. 95, 1916.

§ 191. Исключение членов первого порядка в функции H. Рассмотрим динамическую систему, для которой в уравнениях движения:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

функция H не содержит явно времени.

Система из $2n$ совокупных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial q_r} = 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

определяет в общем случае одну или несколько систем значений $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$. Каждой такой системе значений соответствует либо положение равновесия, либо стационарное состояние движения. Мы будем исходить из какой-либо одной из этих систем значений $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ и покажем, как можно найти ряды, представляющие то движение системы, которое стремится в пределе к соответствующему этой системе значений положению равновесия или стационарному состоянию движения. Так, например, если рассматривать движение математического маятника около его положения равновесия, при котором маятник расположен вертикально вниз, то наша цель будет заключаться в нахождении тех рядов, которые отвечают колебательному движению маятника.

Если ввести новые переменные $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, определяемые уравнениями:

$$q_r = a_r + q'_r, \quad p_r = b_r + p'_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

то уравнения движения примут вид:

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r}, \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Для достаточно малых значений новых переменных функция H может быть разложена в ряд:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + \ldots,$$

где H_k означает совокупность членов k-го порядка относительно переменных.

Величина H_0 как постоянная может быть отброшена. Что же касается H_1, то так как дифференциальные уравнения должны удовлетворяться при $q'_1 = q'_2 = \cdots = q'_n = p'_1 = p'_2 = \cdots = p'_n = 0$, то оно обращается тождественно в нуль. Следовательно, разложение H начинается членом H_2, который (при опускании штрихов) может быть написан в виде:

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum(a_{rr}q_r^2 + 2a_{rs}q_rq_s) + \sum b_{rs}q_rp_s + \frac{1}{2}\sum(c_{rr}p_r^2 + 2c_{rs}p_rp_s),$$

где

$$a_{rs} = a_{sr}, \quad c_{rs} = c_{sr},$$

но b_{rs}, вообще говоря, отличен от b_{sr}. Если пренебречь членами $H_3, H_4, \ldots$ по сравнению с H_2, то мы придем к обычной задаче колебаний (гл. VII).

§ 192. Определение нормальных координат при помощи контактного преобразования. Преобразуем теперь систему при помощи контактного преобразования таким образом, чтобы H_2 приняла возможно более простой вид[1], а именно, чтобы новые переменные соответствовали нормальным координатам в задаче малых колебаний:

Рассмотрим систему из $2n$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} sy_r + \frac{\partial}{\partial x_r}H_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0,\\ -sx_r + \frac{\partial}{\partial y_r}H_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\left.\begin{aligned} -sy_r &= a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n + b_{r1}y_1 + \\ &\quad + b_{r2}y_2 + \cdots + b_{rn}y_n,\\ sx_r &= b_{1r}x_1 + b_{2r}x_2 + \cdots + b_{nr}x_n + c_{r1}y_1 + \\ &\quad + c_{r2} + \cdots + c_{rn}y_n \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Решая эти уравнения, мы получим для s детерминантное уравнение, которое мы обозначили в § 84 через $f(s) = 0$. Мы будем предполагать, что H_2 есть определенная положительная форма, и обозначим корни этого уравнения через $\pm is_1, \pm is_2, \ldots, \pm is_n$. Величины $s_1, s_2, \ldots, s_n$ действительны, и мы будем предполагать для простоты, что все они различны.

Каждому корню соответствует система значений для отношений величин $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Обозначая систему значений, соответствующую корню is_r, через ${}_rx_1, {}_rx_2, \ldots, {}_rx_n, {}_ry_1, {}_ry_2, \ldots, {}_ry_n$, а систему значений, соответствующую корню $-is_r$, через $-{}_rx_1, -{}_rx_2, \ldots, -{}_rx_n, -{}_ry_1, -{}_ry_2, \ldots, -{}_ry_n$, будем иметь:

$$-is_r\, {}_ry_p = a_{p1}\, {}_rx_1 + a_{p2}\, {}_rx_2 + \ldots + a_{pn}\, {}_rx_n + b_{p1}\, {}_ry_1 + \ldots + b_{pn}\, {}_ry_n,$$
$$is_r\, {}_rx_p = b_{p1}\, {}_rx_1 + b_{p2}\, {}_rx_2 + \ldots + b_{pn}\, {}_rx_n + c_{p1}\, {}_ry_1 + \ldots + c_{pn}\, {}_ry_n.$$

[1] В преобразовании этого параграфа использован метод, подсказанный автору Бромвичем и дающий преобразование более прямым путем, чем оригинально придуманный метод.

Умножая эти уравнения соответственно на ${}_k x_p$ и ${}_k y_p$, складывая и суммируя по p, мы получим уравнение:

$$is_r \sum_{p=1}^{n} ({}_r x_{p\,k} y_p - {}_k x_{p\,r} y_p) = H(r,\, k),$$

где

$$H(r,\, k) = a_{11\,r} x_{1\,k} x_1 - a_{12}({}_r x_{1\,k} x_2 + {}_k x_{1\,r} x_2) + \cdots$$
$$\cdots + b_{11}({}_r x_{1\,k} y_1 + {}_k x_{1\,r} y_1) + \cdots + c_{11\,r} y_{1\,k} y_1 + \cdots,$$

так что $H(r,k)$ симметрична относительно r и k.

Перестановка r и k даст:

$$is_k \sum_{p=1}^{n} ({}_k x_{p\,r} y_p - {}_r x_{p\,k} y_p) = H(r,\, k),$$

откуда

$$(s_r - s_k) \sum_{p=1}^{n} ({}_k x_{p\,r} y_p - {}_r x_{p\,k} y_p) = 0.$$

Поэтому, если $s_r + s_k \neq 0$, то

$$\sum_{p=1}^{n} ({}_r x_{p\,k} y_p - {}_k x_{p\,r} y_p) = 0$$

и, следовательно, $H(r,\, k) = 0$. Если $s_r + s_k = 0$, то

$${}_k x_p = {}_{-r} x_p, \quad {}_k y_p = {}_{-r} y_p$$

и поэтому

$$is_r \sum_{p=1}^{n} ({}_r x_{p\,-r} y_p - {}_{-r} x_{p\,r} y_p) = H(r,\, -r).$$

Если мы теперь определим новые переменные $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ при помощи уравнений:

$$\left.\begin{aligned} q_r &= {}_1 x_r q'_1 + {}_2 x_r q'_2 + \cdots + {}_n x_r q'_n + \\ &\quad + {}_{-1} x_r p'_1 - \cdots + {}_{-n} x_r p'_n \\ p_r &= {}_1 y_r q'_1 + {}_2 y_r q'_2 + \cdots + {}_n y_r q'_n + \\ &\quad + {}_{-1} y_r p'_1 + \cdots + {}_{-n} y_r p'_n \end{aligned}\right\} \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$$

и обозначим через δ и Δ два любых независимых типа вариаций, то коэффициент при $\delta q'_r \Delta p'_k$ в выражении $\sum\limits_{l=1}^{n} (\delta q_l \Delta p_l + \Delta q_l \delta p_l)$ будет равен $\sum\limits_{l=1}^{n} ({}_r x_{l\,-k} y_l - {}_{-k} x_{l\,r} y_l)$ и обратится поэтому в нуль, если r отличен от k. Поэтому выражение:

$$\sum_{l=1}^{n} (\delta q_l \Delta p_l + \Delta q_l \delta p_l)$$

содержит только члены вида $\delta q'_r \Delta p'_r - \Delta q'_r \delta p'_r$. Коэффициенты при этих членах равны:

$$\sum_{l=1}^{n} ({}_r x_l \quad {}_r y_l - \quad {}_r x_{l\,r} y_l)$$

Действительные значения величин ${}_r x_l$, ${}_r y_l$ еще точно не определены. Пока только определены их отношения. Эти значения могут быть определены таким образом, чтобы имело место соотношение:

$$\sum_{l-1}^{n} ({}_r x_{l\,-r} y_l - {}_{-r} x_{l\,r} y_l) = 1 \quad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда будем иметь:

$$\sum_{l=1}^{n} (\delta q_l \Delta p_l - \Delta q_l \delta p_l) = \sum_{r=1}^{n} (\delta q'_r \Delta p'_r - \Delta q'_r \delta p'_r),$$

и, следовательно, рассматриваемое преобразование к новым переменным $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ является контактным (§ 128). Величина H_2, выраженная в новых переменных, принимает вид:

$$H_2 = \sum_{r-1}^{n} H(r, \quad r) q'_r p'_r$$

или

$$H_2 = i \sum_{r=1}^{n} s_r q'_r p'_r.$$

Преобразуем теперь переменные $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n, p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$ при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$q''_r = \frac{\partial W}{\partial p''_r}, \quad p'_r = \frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$W = \sum_{r=1}^{n} \left(p''_r q'_r + \frac{1}{2} \frac{i p''^2_r}{s_r} - \frac{1}{4} i s_r q'^2_r \right),$$

тогда получим:

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} (p''^2_r + s_r^2 q''^2_r).$$

Так как все преобразования, которыми мы пользовались, — линейны, то величины H_3, H_4, ... будут опять однородными формами третьего, четвертого, ... порядков относительно новых переменных. Опуская снова штрихи, мы приходим окончательно к следующему результату: *Уравнения движения динамической системы приведены к виду*:

$$\frac{dq_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}, \quad \frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n),$$

где

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \cdots\,,$$

причем H_r есть форма r-го порядка и, в частности,

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(p_r^2 + s_r^2 q_r^2).$$

Если пренебречь величинами $H_3,\, H_4,\, \ldots$ по сравнению с H_2 и проинтегрировать полученные уравнения, то полученное решение будет, очевидно, совпадать с решением § 84.

§ 193. Преобразование H к тригонометрическому виду. Введем новые переменные $q_1',\, q_2',\, \ldots\,,\, q_n',\, p_1',\, p_2',\, \ldots\,,\, p_n'$ при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$p_r' = \frac{\partial W}{\partial q_r'}, \quad q_r = \frac{\partial W}{\partial p_r} \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n),$$

где

$$W = \sum_{r=1}^{n}\left[q_r' \arcsin\frac{p_r}{(2s_r q_r')^{\frac{1}{2}}} + \frac{p_r}{2s_r}\left\{2s_r q_r' - p_r^2\right\}^{\frac{1}{2}}\right],$$

так что

$$p_r = (2s_r q_r')^{\frac{1}{2}} \sin p_r', \quad q_r = (2q_r')^{\frac{1}{2}} s_r^{-\frac{1}{2}} \cos p_r' \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n).$$

Дифференциальные уравнения после преобразования переходят в следующие:

$$\frac{dq_r'}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r'}, \quad \frac{dp_r'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_r'} \qquad (r = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n),$$

где

$$H = s_1 q_1' + s_2 q_2' + \cdots + s_n q_n' + H_3 + H_4 + \cdots$$

и H_r означают совокупность членов, однородных как относительно величин q_r', так и относительно величин $\cos p_r'$ и $\sin p_r'$, причем порядок однородности относительно первых величин равен $\frac{1}{2}r$, а порядок однородности относительно последних величин равен r.

Так как произведения степеней величин $\cos p'_r$ и $\sin p'_r$ могут быть выражены как суммы синусов и косинусов углов вида $n_1p'_1+$ $+n_2p'_2+\cdots+n_np'_n$, где $n_1, n_2, \ldots, n_n$ суть целые числа или нули, то H_r может быть выражена как сумма членов, каждый из которых имеет вид:

$$q_1'^{m_1} q_2'^{m_2} \cdots q_n'^{m_n} \frac{\sin}{\cos} (n_1p'_1 + n_2p'_2 + \cdots - n_np'_n),$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \frac{1}{2}r, \qquad |n_r| \leqslant 2m_r$$

и, следовательно,

$$|n_1| + |n_2| + \cdots + |n_n \leqslant r.$$

Тогда для функции H мы получаем выражение:

$$H = \sum A^{m_1, m_2, \ldots, m_n}_{n_1, n_2, \ldots, n_n} q_1'^{m_1} q_2'^{m_2} \cdots q_n'^{m_n} \frac{\sin}{\cos} (n_1p'_1 + n_2p'_2 + \cdots + n_np'_n),$$

где для каждого члена:

$$|n_1| + |n_2| + \cdots + n_n| \leqslant 2(m_1 - m_2 + \cdots + m_n).$$

Очевидно, что полученный ряд абсолютно сходится для всех значений $p'_1, p'_2, \ldots, p'_n$, коль скоро абсолютные значения величин $q'_1, q'_2, \ldots,$ q'_n не превосходят некоторых определенных пределов.

Чтобы избежать излишней сложности, мы отбросим в выражении H все члены, содержашие:

$$\sin (n_1p'_1 + n_2p'_2 - \cdots + n_np'_n),$$

так как они могут быть исследованы тем же способом, что и члены, содержащие:

$$\cos (n_1p'_1 + n_2p'_2 + \cdots + n_np'_n),$$

наличие же их только усложняет, а не изменяет существенно дальнейших рассуждений.

§ 194. Другие виды движения, приводящие к аналогичным уравнениям. Мы показали, что последние полученные нами уравнения справедливы для таких видов движения, которые мало отклоняются от стационарного состояния движения или положения равновесия, как, например, при колебательном движении математического маятника или при исследованных в § 181 движениях в задаче трех тел. Но эти уравнения справедливы также и для движений совсем иного вида, в частности для движения планет вокруг Солнца или Луны вокруг Земли.

Рассмотрим, например, дифференциальные уравнения движения задачи трех тел, полученные в § 160, и преобразуем эти уравнения при помощи контактного преобразования, определяемого уравнениями:

$$p_r = \frac{\partial W}{\partial q_r}, \quad p'_r = -\frac{\partial W}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$W = q'_1 q_3 + q'_2 q_4 + \int^{q_1} \left\{ -\frac{\mu^2 m_1^2 m_2^2}{{q'}_3^2} + \frac{2\mu m_1 m_2}{q_1} - \frac{{q'}_1^2}{q_1^2} \right\}^{\frac{1}{2}} dq_1 + \\ + \int^{q_2} \left\{ -\frac{{\mu'}^2 m_1^2 m_3^2}{{q'}_4^2} + \frac{2\mu' m_1 m_3}{q_2} - \frac{{q'}_2^2}{q_2^2} \right\}^{\frac{1}{2}} dq_2.$$

Новые переменные могут быть истолкованы следующим образом: Допустим, что к моменту времени t на точку μ перестают действовать все приложенные к ней силы, за исключением силы, равной по величине $\dfrac{m_1 m_2}{q_1^2}$ и направленной к началу. Пусть a означает большую полуось эллипса, описываемого в это мгновение, а e — его эксцентриситет. Тогда

$$q'_1 = \left\{ m_1 m_2 \mu a (1 - e^2) \right\}^{\frac{1}{2}}, \ q'_3 = \left\{ m_1 m_2 \mu a \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если соответствующим образом выбрать нижние пределы интегралов, то $p'_1 + q_3$ будет истинной аномалией, а $-p'_3$ — средней аномалией точки μ в этом эллипсе. Переменные q'_2, q'_4, p'_2, p'_4 связаны аналогичным образом с точкой μ'.

Уравнения принимают вид:

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p'_r}, \quad \frac{dp'_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q'_r} \qquad (r = 1, 2, 3, 4),$$

Если массы точек m_2 и m_3 малы по сравнению с m_1 и эти точки описывают траектории типа траекторий планет вокруг m_1, то H, как это нетрудно показать, может быть представлена в новых переменных следующим образом:

$$H = a_{0000} + \sum a_{n_1 n_2 n_3 n_4} \cos\left(n_1 p'_1 + n_2 p'_2 + \cdots + n_4 p'_4\right).$$

При этом коэффициенты a зависят только от q'_1, q'_2, q'_3, q'_4, суммирование распространяется на нулевые положительные и отрицательные целые значения чисел n_1, n_2, n_3, n_4 и величина a_{0000} является наиболее важным членом ряда. Так как разложение H имеет такой же характер, как и в § 193, то отсюда следует, что *излагаемый ниже метод решения одинаково справедлив как для движений, рассмотренных в* § 181, *так и для движений типа движения планет.*

§ 195. Задача интегрирования. Для упрощения задачи мы будем в дальнейшем предполагать, что система обладает только двумя степенями свободы. Уравнения, которые нужно проинтегрировать, имеют вид:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}, \tag{1}$$

где функция H может быть разложена в бесконечный ряд, расположенный по степеням величин $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$ и по тригонометрическим функциям от углов, кратных p_1 и p_2. Каждый член этого ряда имеет вид:

$$q_1^{\frac{1}{2}m} q_2^{\frac{1}{2}n} \cos(ip_1 + jp_2),$$

где целые числа m и n могут принимать положительные или нулевые значения, а целые числа i и j могут принимать нулевые положительные и отрицательные значения. Кроме того, если $(m + n)$ назвать «порядком» члена, то член наинизшего порядка не содержит величин p_1 и p_2 и является линейной функцией от q_1 и q_2. Этот член имеет, следовательно, вид $s_1q_1 + s_2q_2$, где s_1 и s_2 постоянные. Далее, $m - |i|$ есть нуль или четное число и $n - |j|$ есть также нуль или четное число.

Таким образом, функция H может быть написана в виде:

$$H = s_1q_1 + s_2q_2 + H_3 + H_4 + H_5 + \ldots, \tag{2}$$

где H_r означает совокупность членов r-го порядка. В частности,

$$\begin{aligned} H_3 = {} & q_1^{\frac{3}{2}} (U_1 \cos p_1 + U_2 \cos 3p_1) + q_1 q_2^{\frac{1}{2}} \{U_3 \cos p_2 + U_4 \cos(2p_1 + p_2) + \\ & + U_5 \cos(2p_1 - p_2)\} + q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \{U_6 \cos p_1 + U_7 \cos(2p_2 + p_1) - \\ & + U_8 \cos(2p_2 - p_1)\} + q_2^{\frac{3}{2}} \{U_9 \cos p_2 + U_{10} \cos 3p_2\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} H_4 = {} & q_1^2 (X_1 + X_2 \cos 2p_1 + X_3 \cos 4p_1) + \\ & + q_1^{\frac{3}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} \{X_4 \cos(p_1 - p_2) + X_5 \cos(p_1 - p_2) + X_6 \cos(3p_1 + p_2) + \\ & + X_7 \cos(3p_1 - p_2)\} + q_1 q_2 \{X_8 + X_9 \cos 2p_1 + X_{10} \cos 2p_2 + \\ & + X_{11} \cos(2p_1 + 2p_2) + X_{12} \cos(2p_1 - 2p_2)\} + \\ & + q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{3}{2}} \{X_{13} \cos(p_1 + p_2) + X_{14} \cos(p_1 - p_2) + X_{15} \cos(p_1 + 3p_2) + \\ & + X_{16} \cos(p_1 - 3p_2)\} + q_2^2 \{X_{17} + X_{18} \cos 2p_2 + X_{19} \cos 4p_2\}, \end{aligned}$$

где $U_1, U_2, \ldots, U_{10}, X_1, X_2, \ldots, X_{19}$ постоянные.

Нам известен один интеграл уравнений (1), а именно интеграл энергии:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = \text{const},$$

и мы знаем (§ 121), что если нам удастся найти еще один интеграл, то систему можно будет полностью проинтегрировать.

В 1916 г. автор показал[1], что этот второй интеграл действительно может быть найден, но что *он не может быть выражен одинаковым аналитическим выражением для всех значений отношения* $\frac{s_1}{s_2}$. Здесь приходится различать три случая:

Случай 1. Отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть число иррациональное.

Случай 2. Отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть рациональное число $\frac{m}{n}$ (где m и n — целые числа и дробь $\frac{m}{n}$ несократима), и H_3 не содержит членов с $\cos(np_1 - mp_2)$.

Случай 3. Отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть рациональное число $\frac{m}{n}$, и H_3 содержит члены с $\cos(np_1 - mp_2)$.

Интеграл, который мы ищем (и который мы назовем *родственным* интегралом по причине, которая выяснится ниже), всегда существует, но его аналитическое выражение различно во всех трех случаях. Когда отношение $\frac{s_1}{s_2}$ изменяется непрерывно, вид этого интеграла изменяется непрерывно всякий раз, когда это отношение переходит от рациональных значений к иррациональным, или наоборот. Это обстоятельство лежит в основе известной теоремы Пуанкаре, что ряды, употребляемые в небесной механике, если они вообще сходятся, не могут сходиться равномерно для всех значений времени и не могут сходиться при всех значениях постоянных, заключенных в определенных пределах.

Мы переходим теперь к определению родственного интеграла в каждом из этих трех случаев в отдельности.

§ 196. Определение родственного интеграла в случае 1. Допустим, сначала, что функция Гамильтона разложена в ряд, как в § 195, и что отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть число иррациональное. Мы составим сейчас ряд, формально удовлетворяющий дифференциальным уравнениям, и если этот ряд будет сходиться, то он представит интеграл этих уравнений.

Если $\varphi(q_1, q_2, p_1, p_2)$ есть интеграл, то должно удовлетворяться уравнение:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} = 0, \tag{3}$$

которое можно записать в виде $(\varphi, H) = 0$.

[1] Proc. R. S. Edin., т. 37, стр. 95, 1916.

Попробуем удовлетворить этому уравнению формальным рядом, расположенным по степеням $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$, и тригонометрическим функциям от p_1 и p_2 (аналогичным ряду для H), у которого член наинизшего порядка есть $s_1 q_1 - s_2 q_2$. Имеем:

$$\varphi \equiv s_1 q_1 - s_2 q_2 + \varphi_3 - \varphi_4 + \varphi_5 + \cdots,$$

где φ_r означает член r-го порядка относительно $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$.

Подставляя в уравнение (3) и приравнивая нулю член наинизшего порядка, получим:

$$s_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_1} + s_2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial p_2} = s_1 \frac{\partial H_3}{\partial p_1} - s_2 \frac{\partial H_3}{\partial p_2}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что каждому члену вида $A\cos(mp_1 + np_2)$ в H_3 соответствует член вида $\frac{s_1 m - s_2 n}{s_1 m - s_2 n} A\cos(mp_1 + np_2)$ в φ_3. Следовательно, значение φ_3 может быть написано сразу. Определив таким образом φ_3, мы приравняем в (3) нулю член четвертого порядка относительно $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$. Это даст уравнение:

$$s_1 \frac{\partial \varphi_4}{\partial p_1} + s_2 \frac{\partial \varphi_4}{\partial p_2} = s_1 \frac{\partial H_4}{\partial p_1} - s_2 \frac{\partial H_4}{\partial p_2} + (\varphi_3, H_3).$$

Так как все величины, стоящие в правой части этого уравнения, известны, то мы можем определить отсюда φ_4[1] тем же способом, каким мы определяли φ_3 из предыдущего уравнения. Выполнив все указанные вычисления, мы получим интеграл в виде ряда:

$$\begin{aligned}
&\text{const} - \varphi \equiv s_1 q_1 - s_2 q_2 + q_1^{\frac{3}{2}} \left(U_1 \cos p_1 + U_2 \cos 3p_1\right) + \\
&+ q_1 q_2^{\frac{1}{2}} \left\{ -U_3 \cos p_2 + \frac{2s_1 - s_2}{2s_1 + s_2} U_4 \cos(2p_1 + p_2) + \right.\\
&\left. + \frac{2s_1 + s_2}{2s_1 - s_2} U_5 \cos(2p_1 - p_2) \right\} + q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \left\{ U_6 \cos p_1 \frac{s_1 \quad 2s_2}{s_1 - 2s_2} U_7 \cos(2p_2 + p_1) + \right.\\
&\left. + \frac{s_1 + 2s_2}{s_1 - 2s_2} U_8 \cos(2p_2 - p_1) \right\} + q_2^{\frac{3}{2}} \left\{ -U_9 \cos p_2 - U_{10} \cos 3p_2 \right\} + \\
&+ q_1^2 \left[\left\{ \frac{1}{2s_1 + s_2} U_3 U_4 + \frac{1}{2s_1 - s_2} U_3 U_5 + X_2 \right\} \cos 2p_1 + \right.
\end{aligned}$$

[1]Уравнение для φ_4 не допускает решения желаемой формы, если в правой части коэффициенты при q_1^2, $q_1 q_2$, q_2^2 не равны нулю, так как члены такого вида в φ_4 уничтожаются оператором $s_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + s_2 \frac{\partial}{\partial p_2}$. Но не трудно видеть, что эти члены отсутствуют в выражениях $s_1 \frac{\partial H_4}{\partial p_1} - s_2 \frac{\partial H_4}{\partial p_2}$ и (φ_3, H_3). То же самое относится и к уравнениям для $\varphi_6, \varphi_8, \ldots$ Общее исследование этих критических членов см. у Черри (*T. M. Cherry*, Proc. Camb. Phil. Soc., т. 22, стр. 325, 510, 1924).

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\frac{s_2}{(2s_1+s_2)(2s_1-s_2)}U_4U_5+X_3\right\}\cos 4p_1\Bigg]+\\
&+q_1^{\frac{3}{2}}q_2^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\cos(p_1+p_2)}{s_1+s_2}\left\{\frac{-2s_1}{s_1+2s_2}U_3U_7-\frac{6s_1s_2}{(2s_1-s_2)(s_1-2s_2)}U_5U_8+\right.\right.\\
&\qquad+U_3U_6+\frac{s_2}{2s_1-s_2}U_4U_6-U_1U_3+\frac{4s_2}{2s_1+s_2}U_1U_4+\\
&\qquad\left.+\frac{6s_2}{2s_1-s_2}U_2U_5+(s_1-s_2)X_4\right\}+\\
&\qquad+\frac{\cos(p_1-p_2)}{s_1-s_2}\left\{\frac{-6s_1s_2U_4U_7}{(2s_1+s_2)(s_1+2s_2)}+\frac{2s_1}{s_1-2s_2}U_3U_8-U_3U_6+\right.\\
&\qquad+\frac{s_2}{2s_1-s_2}U_5U_6-U_1U_3-\frac{4s_2}{2s_1-s_2}U_1U_5-\frac{6s_2}{2s_1-s_2}U_2U_4+\\
&\qquad+(s_1+s_2)X_5\}+\frac{\cos(3p_1+p_2)}{2s_1+s_2}\left\{\frac{10s_1s_2}{(2s_1-s_2)(s_1+2s_2)}U_5U_7+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{s_2}{2s_1+s_2}U_4U_6-3U_2U_3+\frac{2s_2}{2s_1+s_2}U_1U_4+(3s_1-s_2)X_6\right\}+\\
&\qquad+\frac{\cos(3p_1-p_2)}{3s_1-s_2}\left\{\frac{10s_1s_2}{(2s_1+s_2)(s_1-2s_2)}U_4U_8+\frac{s_2}{2s_1-s_2}U_5U_6-\right.\\
&\qquad\left.\left.-3U_2U_3-\frac{2s_2}{2s_1-s_2}U_1U_5+(3s_1+s_2)X_7\right\}\right]+\\
&-q_1q_2\left[\cos 2p_1\left\{\frac{-2}{2s_1+s_2}U_4U_9-\frac{2}{2s_1-s_2}U_5U_9+\right.\right.\\
&\qquad+\frac{8s_2}{(s_1+2s_2)(s_1-2s_2)}U_7U_8-\frac{2}{2s_1+s_2}U_3U_4-\\
&\qquad\left.-\frac{2}{2s_1-s_2}U_3U_5+X_9\right\}+\\
&\qquad+\cos 2p_2\left\{\frac{2}{s_1+2s_2}U_6U_7-\frac{2}{s_1-2s_2}U_6U_8+\frac{2}{s_1+2s_2}U_1U_7+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{2}{s_1-2s_2}U_1U_8+\frac{8s_1}{(2s_1-s_2)(2s_1+s_2)}U_4U_5-X_{10}\right\}+\\
&\qquad+\frac{\cos(2p_1+2p_2)}{2s_1+2s_2}\left\{\frac{-2s_1}{2s_1+s_2}U_4U_9+\frac{6s_1}{2s_1-s_2}U_5U_{10}+\right.\\
&\qquad+\frac{4s_2}{s_1+2s_2}U_6U_7+\frac{2s_2}{s_1+2s_2}U_1U_7+\frac{6s_2}{s_1-2s_2}U_2U_8-
\end{aligned}
$$

$$-\frac{4s_1}{2s_1+s_2}U_3U_4+(2s_1-2s_2)X_{11}\Bigg\}+$$

$$+\frac{\cos(2p_1-2p_2)}{2s_1-2s_2}\Bigg\{\frac{2s_1}{2s_1-s_2}U_5U_9-\frac{6s_1}{2s_1+s_2}U_4U_{10}+$$

$$+\frac{4s_2}{s_1-2s_2}U_6U_8-\frac{2s_2}{s_1-2s_2}U_1U_8-\frac{6s_2}{s_1+2s_2}U_2U_7-$$

$$-\frac{4s_1}{2s_1-s_2}U_3U_5+(2s_1+2s_2)X_{12}\Bigg\}\Bigg]+$$

$$+q_1^{\frac{1}{2}}q_2^{\frac{3}{2}}\Bigg[\frac{\cos(p_1+p_2)}{s_1+s_2}\Bigg\{U_6U_9-\frac{4s_1}{s_1+2s_2}U_7U_9+$$

$$+\frac{6s_1}{s_1-2s_2}U_8U_{10}-U_3U_6-\frac{s_1}{s_1+2s_2}U_3U_7+\frac{2s_2}{2s_1-s_2}U_4U_6+$$

$$+\frac{6s_1s_2}{(2s_1-s_2)(s_1-2s_2)}U_5U_8+(s_1-s_2)X_{13}\Bigg\}+$$

$$+\frac{\cos(p_1-p_2)}{s_1-s_2}\Bigg\{-U_6U_9-\frac{6s_1}{s_1+2s_2}U_7U_{10}+\frac{4s_1}{s_1-2s_2}U_8U_9-$$

$$-U_3U_6-\frac{6s_1}{s_1+2s_2}U_7U_{10}+\frac{4s_1}{s_1-2s_2}U_8U_9-U_3U_6-\frac{s_1}{s_1-2s_2}U_3U_8$$

$$-\frac{6s_1s_2}{(s_1-2s_2)(2s_1+s_2)}U_4U_7-\frac{2s_2}{2s_1-s_2}U_5U_6+(s_1+s_2)X_{14}\Bigg\}$$

$$+\frac{\cos(p_1+3p_2)}{s_1+3s_2}\Bigg\{3U_6U_{10}-\frac{2s_1}{s_1-2s_2}U_7U_9-$$

$$\frac{s_1}{s_1+2s_2}U_3U_7+\frac{10s_1s_2}{(s_1-2s_2)(2s_1+s_2)}U_4U_8+(s_1-3s_2)X_{15}\Bigg\}+$$

$$\frac{\cos(p_1-3p_2)}{s_1-3s_2}\Bigg\{-3U_6U_{10}+\frac{2s_1}{s_1-2s_2}U_8U_9-$$

$$\frac{s_1}{s_1-2s_2}U_3U_8-\frac{10s_1s_2}{(s_1+2s_2)(2s_1-s_2)}U_5U_7+(s_1+3s_2)X_{16}\Bigg\}+$$

$$+q_2^2\Bigg\{\frac{1}{s_1+2s_2}U_6U_7-\frac{1}{s_1-2s_2}U_6U_8-X_{18}\Bigg\}\cos 2p_2+$$

$$+\Bigg\{\frac{s_1}{(s_1-2s_2)(s_1+2s_2)}U_7U_8-X_{19}\Bigg\}\cos 4p_2\Bigg]+\text{члены}$$

пятого и высших порядков относительно $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$; (4)

где члены высших порядков могут быть получены таким же способом, как и φ_3 и φ_4.

Заметим, что вместо $s_1q_1 - s_2q_2$ за член наинизшего порядка можно было бы принять q_1 или q_2 или же их любую линейную комбинацию. Получающийся таким образом интеграл будет простой линейной комбинацией из интеграла (4) и интеграла энергии, у которого член наинизшего порядка равен $s_1q_1 - s_2q_2$.

Далее, к функции φ_4 можно добавить член вида $\alpha q_1^2 + \beta q_1q_2 + \gamma q_2^2$, где α, β и γ — произвольные постоянные. В самом деле, этот член обращается в нуль оператором $s_1\dfrac{\partial}{\partial p_1} + s_2\dfrac{\partial}{\partial p_2}$, и поэтому φ_4 удовлетворяет соответственному уравнению, независимо от того, входит ли в него этот член или нет. Введение такого члена в φ_4 изменит также и выражения для φ_5, φ_6 и т. д., но все это сводится лишь к тому, что к функции φ добавится некоторая квадратичная функция от известных уже интегралов, а именно самого интеграла (4) и интеграла энергии.

Аналогично к функции φ_6 можно добавить член вида $\alpha q_1^3 + \beta q_1^2q_2 + \gamma q_1q_2^2 + \delta q_2^3$, и это сведется к тому, что к интегралу (4) добавится кубичная функция от него самого и интеграла энергии. От этого мы, очевидно, ничего не выиграем, и поэтому мы можем опустить эти произвольные члены в выражениях для φ_4, φ_6, φ_8, ...

§ 197. Пример нахождения родственного интеграла в случае 1. В качестве примера рассмотрим движение материальной точки массы 1 в консервативном поле сил с потенциальной энергией (в прямоугольных координатах x и y):

$$-\frac{1+3x}{3(1+2x+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

или, (разлагая в ряд)

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{8}{3}x^3 - xy^2 + 5x^4 - \frac{5}{8}y^4 + \text{члены пятого и высших порядков},$$

так что начало координат является положением равновесия. Исследуем движение вблизи этого положения равновесия.

Если ввести новые переменные при помощи контактного преобразования:

$$\dot{x} = 2^{\frac{3}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}\sin p_1, \quad x = 2^{\frac{1}{4}}q_1^{\frac{1}{2}}\cos p_1,$$
$$\dot{y} = 2^{\frac{1}{2}}q_2^{\frac{1}{2}}\sin p_2, \quad y = 2^{\frac{1}{2}}q_2^{\frac{1}{2}}\cos p_2,$$

то функция Гамильтона примет вид:

$$H = 2^{\frac{1}{2}} q_1 \sin^2 p_1 +$$

$$+ q_2 \sin^2 p_2 - \frac{1 + 3 \cdot 2^{\frac{1}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} \cos p_1}{3(1 + 2^{\frac{5}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} \cos p_1 + 2^{\frac{1}{2}} q_1 \cos^2 p_1 + 2q_2 \cos^2 p_2)^{\frac{3}{2}}}$$

или, разлагая в ряд:

$$H - 2^{\frac{1}{2}} + q_2 + 2^{\frac{7}{4}} q_1^{\frac{3}{2}} \left(- \cos p_1 - \frac{1}{3} \cos^3 p_1\right) +$$

$$+ 2^{-\frac{3}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \{-2 \cos p_1 - \cos(p_1 + 2p_2) - \cos(p_1 - 2p_2)\} + \cdots \qquad (1)$$

Подставляя это выражение в формулу (4) предыдущего параграфа, мы получим родственный интеграл в виде:

$$\text{const} = \varphi \equiv 2^{\frac{1}{2}} q_1 - q_2 + 2^{\frac{7}{4}} q_1^{\frac{3}{2}} \left(- \cos p_1 - \frac{1}{3} \cos 3p_1\right) +$$

$$+ 2^{-\frac{3}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \{-2 \cos p_1 + (1 - \sqrt{2})^2 \cos(p_1 + 2p_2) +$$

$$+ (1 + \sqrt{2})^2 \cos(p_1 - 2p_2)\} + \cdots \qquad (2)$$

Но легко убедиться простым дифференцированием, что рассматриваемая динамическая система допускает интеграл:

$$\text{const} = (q_2^{\frac{1}{2}} \sin p_2 + 2^{\frac{1}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} \sin p_2 \cos p_1 - 2^{\frac{3}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} \sin p_1 \cos p_2)^2 -$$

$$- \frac{1 + 2^{\frac{1}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} \cos p_1}{(1 + 2^{\frac{5}{4}} q_1^{\frac{1}{2}} \cos p_1 + 2^{\frac{1}{2}} q_1 \cos^2 p_1 + 2q_2 \cos^2 p_2)^{\frac{1}{2}}},$$

который может быть представлен в виде:

$$\text{const} = q_2 + 2^{-\frac{1}{4}} (1 - \sqrt{2}) q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \cos(p_1 + 2p_2) -$$

$$- 2^{\frac{1}{4}} (1 + \sqrt{2}) q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \cos(p_1 - 2p_2) + \cdots \qquad (3)$$

Очевидно, что ряд (2) может быть получен из ряда (1), выражающего интеграл энергии, путем вычитания из него удвоенного ряда (3). Это показывает, что для рассматриваемой частной системы ряд (2) совпадает с разложением, получаемым из известного интеграла при помощи простых алгебраических и тригонометрических выкладок, при которых не нарушается сходимость. Таким образом, для частной динамической системы мы установили сходимость ряда (2) при достаточно малых значениях величин $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$.

§ 198. Вопрос о сходимости. Для частных динамических систем, подобных той, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе, может быть доказана сходимость ряда (4) § 196 при достаточно малых значениях величин $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$, если только отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть число иррациональное. Однако сходимость этого ряда для самого общего случая до сих пор еще не доказана. Поэтому рассуждения § 196 при современном состоянии этого вопроса следует рассматривать как метод составления формальных рядов, сходимость которых должна быть исследована для каждой отдельной динамической системы, к которой прилагается этот метод. Для всех такого рода частных систем, исследованных до сих пор, эти ряды сходятся, и поэтому возникает уверенность, что эти ряды сходятся и в общем случае. Эта уверенность усиливается следующими рассуждениями.

Так как отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть число иррациональное, то ни один из знаменателей $(s_1 + s_2)$, $(s_1 - s_2)$, $(2s_1 + s_2)$, $(2s_1 - s_2)$, $(s_1 + 2s_2)$, $(3s_1 + s_2)$, ... не обращается в нуль и, следовательно, ни один член рассматриваемого ряда не обращается в бесконечность. Этот ряд есть степенной ряд относительно $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$, и он получается из абсолютно сходящегося степенного ряда относительно $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$, выражающего функцию H при помощи простых алгебраических и тригонометрических операций, за исключением операции введения делителей типа $ms_1 + ns_2$, где m и n — положительные и отрицательные целые числа. Мы можем поэтому ожидать, что этот ряд будет сходиться при достаточно малых значениях величин $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$, если только малость указанных делителей не послужит причиной для расходимости. Значения чисел m и n могут быть действительно выбраны таким образом, чтобы делитель $ms_1 + ns_2$ делался сколь угодно малым. Но тогда величины m и $|n|$ будут очень велики, и так как они не превосходят порядка соответствующего им члена, то соответствующий делитель войдет в член очень высокого порядка, и он будет погашаться высокими степенями малых величин $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$. И действительно, много лет назад Брунс[1] показал, что такое положение вещей совместимо с абсолютной сходимостью рядов. Он рассмотрел ряд:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1^m q_2^n}{m - nA},$$

[1] Astr. Nach., т. 109 стр. 215, 1884; См. также *W. J. MacMillan*, Proc. Nat. Ac. Soc., т. 1, стр. 437, 1915 и Bull. Am. M. S., т. 22, стр. 26, 1915.

где q_1 и q_2 — правильные дроби, а A — иррациональное алгебраическое число, т. е. число, удовлетворяющее неприводимому алгебраическому уравнению:

$$A^s + G_1 A^{s-1} + G_2 A^{s-2} + \cdots + G_n,$$

коэффициенты которого G суть целые числа. Если мы умножим числитель и знаменатель какого-нибудь члена ряда Брунса на

$$(m - nA')(m - nA'') \ldots ,$$

где A', A'', ... суть остальные корни алгебраического уравнения, то мы получим в знаменателе полином относительно m и n, коэффициенты которого являются целыми числами. Так как этот полином не может равняться нулю, то он равен по меньшей мере единице. В то же время числитель является полиномом относительно m и $n(s-1)$-го порядка. Отсюда сразу вытекает сходимость ряда Брунса.

Ряд (4) § 196 значительно сложнее ряда Брунса. Поэтому, хотя так далеко идущая аналогия и благоприятствует сходимости ряда (4), все же наша уверенность в этой сходимости должна основываться, главным образом, на несомненной сходимости ряда (4) для частных динамических систем, для которых эта сходимость может быть непосредственно проверена.

§ 199. Использование родственного интеграла для полной интеграции. Для случая 1, при котором отношение $\frac{s_1}{s_2}$ есть число иррациональное, нам известны два интеграла уравнений движения, а именно интеграл энергии ($H = \text{const}$) и родственный интеграл, выражаемый уравнением (4) § 196. Но мы знаем (§ 121), что если для системы с двумя степенями свободы, кроме интеграла энергии, известен еще один интеграл, то система может быть полностью проинтегрирована, т. е. координаты q_1, q_2 и импульсы p_1, p_2 могут быть выражены через время и четыре произвольных постоянных. Мы хотим сейчас выполнить это вычисление в нашем случае.

Если мы интеграл энергии сложим с интегралом (4) § 196 и полученный ряд разделим на $2s_1$, то получим:

$$\begin{aligned}
l_1 = q_1 &+ q_1^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{s_1} U_1 \cos p_1 + \frac{1}{s_1} U_2 \cos 3p_1 \right\} + \\
&+ q_1 q_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{2s_1 + s_2} U_4 \cos(2p_1 + p_2) + \frac{2}{2s_1 + s_2} U_5 \cos(2p_1 - p_2) \right\} + \\
&+ q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \left\{ \frac{1}{s_1} U_6 \cos p_1 + \frac{1}{s_1 + 2s_2} U_7 \cos(2p_2 + p_1) + \right. \\
&\left. + \frac{1}{s_1 - 2s_2} U_8 \cos(2p_2 - p_1) \right\} + \\
&+ \text{члены четвертого и высшего порядков,}
\end{aligned}$$

где l_1 — произвольная постоянная.

Аналогично, вычитая родственный интеграл из интеграла энергии и деля результат на s_2, мы получим:

$$l_2 = q_2 + q_1 q_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_3 \cos p_2 + \frac{1}{2s_1 + s_2} U_4 \cos(2p_1 + p_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2s_1 - s_2} U_5 \cos(2p_1 - p_2) \right\} +$$

$$+ q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \left\{ \frac{2}{s_1 + 2s_2} U_7 \cos(2p_2 + p_1) - \frac{2}{s_1 - 2s_2} U_8 \cos(2p_2 - p_1) \right\} +$$

$$+ q^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_9 \cos p_2 + \frac{1}{s_2} U_{10} \cos 3p_2 \right\} +$$

$$+ \text{члены четвертого и высшего порядков,}$$

где l_2 — вторая произвольная постоянная.

Из этих уравнений удобно выразить q_1 и q_2 через l_1, l_2, p_1, p_2 при помощи последовательных приближений.

Применяя этот метод, мы получим в первом приближении $q_1 = l_1$, $q_2 = l_2$ и во втором приближении:

$$q_1 = l_1 + l_1^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_1 \cos p_1 + \frac{1}{s_2} U_2 \cos 3p_1 \right\} -$$

$$- l_1 l_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{2s_1 + s_2} U_4 \cos(2p_1 + p_2) + \frac{2}{2s_1 - s_2} U_5 \cos(2p_1 - p_2) \right\} -$$

$$- l_1^{\frac{1}{2}} l_2 \left\{ \frac{1}{s_1} U_6 \cos p_1 + \frac{1}{s_1 + 2s_2} U_7 \cos(2p_2 + p_1) - \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s_1 - 2s_2} U_8 \cos(2p_2 - p_1) \right\} +$$

$$+ \text{члены четвертого и высшего порядков относительно } \sqrt{l_1} \text{ и } \sqrt{l_2},$$

$$q_2 = l_2 - l_1 l_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_3 \cos p_2 + \frac{1}{2s_1 + s_2} U_4 \cos(2p_1 + p_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2s_1 - s_2} U_5 \cos(2p_1 - p_2) \right\} - l_1^{\frac{1}{2}} l_2 \left\{ \frac{2}{s_1 + 2s_2} U_7 \cos(2p_2 + p_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{s_1 - 2s_2} U_8 \cos(2p_2 - p_1) \right\} - l_2^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_9 \cos p_2 + \frac{1}{s_2} U_{10} \cos 3p_2 \right\} +$$

$$+ \text{члены четвертого и высшего порядков относительно } \sqrt{l_1} \text{ и } \sqrt{l_2}.$$

Мы знаем (§ 121), что найденные таким образом выражения для q_1 и q_2 должны быть частными производными по p_1 и p_2 от некоторой функции переменных l_1, l_2, p_1, p_2. И действительно, мы имеем, очевидно,

$$q_1 = \frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial W}{\partial p_2},$$

где

$$\begin{aligned}
W = {} & l_1 p_1 + l_2 p_2 - l_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{s_1} U_1 \cos p_1 + \frac{1}{3s_1} U_2 \sin 3p_1 \right) \\
& - l_1 l_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_3 \sin p_2 - \frac{1}{2s_1 + s_2} U_4 \sin(2p_1 + p_2) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2s_1 - s_2} U_5 \sin(2p_1 - p_2) \right\} - \\
& - l_1^{\frac{1}{2}} l_2 \left\{ \frac{1}{s_1} U_6 \sin p_1 - \frac{1}{2s_2 + s_1} U_7 \sin(2p_2 + p_1) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2s_2 - s_1} U_8 \sin(2p_2 - p_1) \right\} - l_2^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_9 \sin p_2 + \frac{1}{3s_2} U_{10} \sin 3p_2 \right\} + \\
& + \text{члены четвертого и высшего порядков относительно } \sqrt{l_1} \text{ и } \sqrt{l_2}.
\end{aligned}$$

Члены, в которых p_1 и p_2 содержатся не как аргументы тригонометрических функций, имеют вид:

$p_1(l_1 +$члены четвертого и высшего порядков относительно $\sqrt{l_1}$ и $\sqrt{l_2})$,

$+p_2(l_2 +$члены четвертого и высшего порядков относительно $\sqrt{l_1}$ и $\sqrt{l_2})$.

Обозначим соответственно коэффициенты при p_1 и p_2 в этих выражениях через α_1 и α_2, выразим из этих рядов l_1 и l_2 через α_1 и α_2. Подставив эти значения l_1 и l_2 в ряд для W, получим:

$$\begin{aligned}
W = {} & \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 - \alpha_1^{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{s_1} U_1 \cos p_1 + \frac{1}{3s_1} U_2 \sin 3p_1 \right) - \\
& - \alpha_1 \alpha_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_3 \sin p_2 + \frac{1}{2s_1 + s_2} U_4 \sin(2p_1 + p_2) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2s_1 - s_2} U_5 \sin(2p_1 - p_2) \right\} - \\
& - \alpha_1^{\frac{1}{2}} \alpha_2 \left\{ \frac{1}{s_1} U_6 \sin p_1 + \frac{1}{2s_2 + s_1} U_7 \sin(2p_2 + p_1) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{2s_2 - s_1} U_8 \sin(2p_2 - p_1) \right\} - \alpha_2^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{1}{s_2} U_9 \sin p_2 + \frac{1}{3s_2} U_{10} \sin 3p_2 \right\} + \text{члены} \\
& + \text{четвертого и высшего порядков относительно } \sqrt{\alpha_1} \text{ и } \sqrt{\alpha_2}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

где уже p_1 и p_2 входят только в член $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ и в аргументы тригонометрических функций.

Уравнения:

$$q_1 = \frac{\partial W}{\partial p_1}, \quad q_2 = \frac{\partial W}{\partial p_2}, \quad \beta_1 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}$$

определяют контактное преобразование переменных q_1, q_2, p_1, p_2 в переменные α_1, α_2, β_1, β_2.

Уравнения движения в новых переменных имеют вид:

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_1}, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \beta_2}, \quad \frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}.$$

Так как l_1 и l_2 постоянные, то эти уравнения допускают два интеграла $\alpha_1 = \mathrm{const}$ и $\alpha_2 = \mathrm{const}$, и поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \beta_1} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial \beta_2} = 0.$$

Следовательно, если функцию H выразить в переменных α_1, α_2, β_1, β_2, то она будет содержать только[1] α_1 и α_2, и уравнения:

$$\frac{d\beta_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_2}.$$

дают:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= -\frac{\partial H(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} t + \varepsilon_1, \\ \beta_2 &= -\frac{\partial H(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} t + \varepsilon_2, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где ε_1 и ε_2 — произвольные постоянные.

Таким образом, полное решение динамической системы выражается уравнениями:

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = q_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial p_2} = q_2,$$
$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = -\frac{\partial H(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} t - \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = -\frac{\partial H(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} t + \varepsilon_2,$$

где W определяется равенством (1), и постоянные интегрирования суть α_1, α_2, ε_1 и ε_2. Обращаясь к виду функции W, мы видим, что эти уравнения дают нам возможность выразить q_1 и q_2 чисто тригонометрическими рядами, у которых аргументы тригонометрических функций имеют вид:

$$m\beta_1 - n\beta_2,$$

[1] Заметим, что $H = s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 + \frac{1}{2}A\alpha_1^2 + H\alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}B\alpha_2^2 + \cdots$, в ней отсутствуют члены порядка $\alpha^{\frac{1}{2}}$.

где m и n суть целые числа (положительные, отрицательные или нули), а β_1 и β_2 — линейные функции от времени, определяемые уравнениями (2). *Мы выразили, таким образом, координаты через время при помощи рядов, в которые время входит лишь только в аргументы тригонометрических функций. Члены этих рядов имеют вид:*

$$a_{mn}\cos(m\beta_1 + n\beta_2),$$

где m и n суть целые числа (положительные, отрицательные или нули), a_{mn} — функции только от двух постоянных интегрирования α_1 и α_2, а углы β_1 и β_2 определяются равенствами:

$$\beta_1 = \mu_1 t + \varepsilon_1, \quad \beta_2 = \mu_2 t + \varepsilon_2$$

где μ_1 и μ_2 суть некоторые функции от α_1 и α_2, а ε_1 и ε_2 остальные две произвольные постоянные.

§ 200. Основное свойство родственного интеграла. Периодические решения динамической системы получатся, очевидно, тогда, когда α_1 и α_2 подобраны таким образом, что μ_1 соизмеримо с μ_2. В этом случае период будет равняться $\dfrac{2\pi}{\nu}$, где ν — наибольшее число, при котором $\dfrac{\mu_1}{\nu}$ и $\dfrac{\mu_2}{\nu}$ суть целые числа.

Допустим, что α_1 и α_2 действительно выбраны таким образом. Тогда, если заставить ε_1 непрерывно изменяться, мы получим семейство периодических решений, обладающих одинаковым периодом (так как последний не зависит от ε_1). Постоянная энергия зависит только от α_1 и α_2, и поэтому она также имеет одинаковое значение для всех этих решений. Следовательно, рассматриваемое семейство принадлежит к типу обыкновенных периодических решений (§ 172).

Может сразу показаться, что, изменяя вместе с ε_1 также и постоянную ε_2, мы получим семейство из ∞^2 траекторий. Но легко видеть, что преобразование, определяемое изменением ε_2, складывается из преобразования, определяемого изменением ε_1, и преобразования, сводящегося к добавлению к t некоторой малой постоянной величины. Последнее же преобразование преобразует каждую траекторию в самое себя (каждая точка перемещается в направлении касательной траектории) и может быть поэтому отброшено. Следовательно, преобразования ε_1 и ε_2 не являются независимыми друг от друга[1].

Рассмотрим такое бесконечно малое преобразование, которое преобразует каждую траекторию системы в смежную *точно таким же образом, как каждое обыкновенное периодическое решение преобразуется в смежное периодическое решение того же самого семейства, т. е. обладающее тем же периодом и тем же самым значением постоянной энергии.* В наших обозначениях такое преобразование соответствует бесконечно малому изменению величины ε_1. Такое преобразование

[1] Единственным исключением является тот случай, когда все траектории системы периодичны.

мы будем называть родственным (adelphic)[1] преобразованием. Родственное преобразование преобразует всякое решение динамической системы, независимо от того, является ли оно периодическим или нет, в ∞^1 других решений, стоящих в определенной тесной связи с ним, заключающейся в том, что все они получаются из него при изменении одной лишь величины ε_1.

Обращаясь теперь к формулам предыдущего параграфа, мы видим, что если мы будем изменять только величину ε_1, не изменяя остальных постоянных интегрирования, то это не изменит значений l_1 и l_2 (так как они зависят только от α_1 и α_2) и, следовательно, также значений постоянных родственного интеграла и интеграла энергии. Это показывает, что все траектории, отличающиеся друг от друга только значениями постоянной ε_1, имеют те же самые значения постоянной родственного интеграла и постоянной энергии. Следовательно, бесконечно малое преобразование, соответствующее (§ 144) родственному интегралу, преобразует эти траектории одну в другую, т. е. *родственным интегралом является тот интеграл, который соответствует родственному преобразованию.* В этом заключается основное свойство родственного интеграла.

Так как заданная динамическая система с двумя степенями свободы может иметь только одно независимое родственное преобразование, то она может допускать только один независимый родственный интеграл. Всякий другой родственный интеграл может быть получен той или иной комбинацией данного родственного интеграла с интегралом энергии[2].

В частности, во всех известных разрешимых задачах динамики с двумя степенями свободы второй интеграл, дающий возможность разрешить задачу, является родственным интегралом. Так, например, если траекториями являются геодезические линии на эллипсоиде, то родственным интегралом будет уравнение $pd = \text{const}$. В задаче с двумя центрами притяжения родственным интегралом является интеграл Эйлера. Если разрешимость задачи обусловливается существованием циклической координаты, например q_2, то родственным интегралом будет интеграл $p_2 = \text{const}$.

§ 201. Определение родственного интеграла в случае 2. Мы переходим теперь к рассмотрению «случая 2», т. е. мы предполагаем, что отношение $\dfrac{s_1}{s_2}$ есть некоторое рациональное число (например, рав-

[1] От греческого ἀδελφικός (братский) вследствие того, что эти траектории стоят в определенной тесной зависимости друг от друга и так как интеграл, соответствующий преобразованию, теснее связан с интегралом энергии, чем всякий другой интеграл системы.

[2] Интегралу энергии соответствует такое бесконечно малое преобразование, которое преобразует всякую траекторию в самое себя. Каждая точка траектории перемещается в направлении касательной.

ное $\frac{m}{n}$), но H_3 не содержит члена с $\cos(np_1 - mp_2)$. При таком предположении некоторые члены ряда (4) § 196, содержащие в знаменателе множитель $ns_1 - ms_2$, обращаются в нуль, так как $\frac{s_1}{s_2} = \frac{m}{n}$. Следовательно, в случае 2 ряд (4) не может сходиться, если числители членов с нулевыми знаменателями также не обращаются в нуль. Мы здесь наталкиваемся на основной источник главных затруднений в небесной механике, и если нам удастся устранить это затруднение здесь и получить родственный интеграл в случаях 2 и 3, то этим самым мы устраним затруднение во всем предмете.

Допустим для определенности, что $s_1 = 2$ и $s_2 = 1$, так что $\frac{s_1}{s_2}$ принимает рациональное значение 2 и знаменатель $s_1 - 2s_2$, который очень часто встречается в ряде (4) § 196, равен нулю.

В этом случае мы получим для φ_3 уравнение:

$$2\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_2}2 = \frac{\partial H_3}{\partial p_1} - \frac{\partial H_3}{\partial p_2},$$

и уравнения для каждой из функций $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$ имеют вид:

$$2\frac{\partial\varphi_r}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi_r}{\partial p_2} - \text{известной сумме членов вида}$$

$$q_1^{\frac{1}{2}m} q_2^{\frac{1}{2}n} \sin(kp_1 - lp_2).$$

При интегрировании уравнений для $\varphi_3, \varphi_4, \ldots$ в § 196 мы использовали только частные интегралы, соответствующие почленно известным функциям в правых частях этих уравнений, так что, например, в качестве интеграла уравнения:

$$s_1\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_1} + s_2\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_2} = q_1^{\frac{3}{2}} \sin p_1$$

мы приняли бы функцию:

$$\varphi_3 = -\frac{q_1^{\frac{3}{2}}}{s_1}\cos p_1$$

Мы это делали потому, что дополнительная функция или произвольная часть решения дифференциального уравнения есть функция от $s_2p_1 - s_1p_2$ и она не содержит членов типа, свойственного для φ_3. Но если $s_1 = 2$, $s_2 = 1$, то эта произвольная часть решения дифференциального уравнения содержит члены типа, свойственного для φ_3, и эти члены должны быть приняты в расчет. Так что теперь мы должны будем принять в качестве интеграла уравнения

$$2\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_1}+\frac{\partial\varphi_3}{\partial p_2}=q_1^{\frac{3}{2}}\sin p_1$$

функцию:

$$\varphi_3=-\frac{1}{2}q_1^{\frac{3}{2}}\cos p_1+\alpha q_1^{\frac{1}{2}}q_2\cos(p_1-2p_2),$$

где α — произвольная постоянная. *Таким образом, в функциях φ_3, φ_4, $\varphi_5,\ldots$ мы получаем члены с произвольными коэффициентами. Эти коэффициенты должны быть выбраны таким образом, чтобы впоследствии определяемая часть функции φ не содержала членов с нулевыми знаменателями.* Этот метод даст нам возможность найти родственный интеграл в случае 2, свободный от членов с нулевыми знаменателями.

§ 202. Пример нахождения родственного интеграла в случае 2. Поясним метод, указанный в предыдущем параграфе, на следующем примере.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую функцией:

$$H=2q_1\sin^2 p_1+q_2\sin^2 p_2+\frac{1}{2(1+2q_1^{\frac{1}{2}}\cos p_1+q_1\cos^2 p_1+2q_2\cos^2 p_2)^2}-$$

$$-\frac{1+q_1^{\frac{1}{2}}\cos p_1}{(1+2q_1^{\frac{1}{2}}\cos p_1+q_1\cos^2 p_1+2q_2\cos^2 p_2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3}$$

Разлагая эту функцию по возрастающим степеням $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$, мы получим:

$$\begin{aligned}H&=2q_1-q_2+q_1^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{9}{2}\cos p_1-\frac{3}{2}\cos 3p_1\right)-\\&-q_1^2\left(\frac{75}{16}+\frac{25}{4}\cos 2p_1+\frac{25}{16}\cos 4p_1\right)+\\&+q_1q_2\left\{-3-3\cos 2p_1-3\cos 2p_2-\frac{3}{2}\cos(2p_1+2p_2)-\right.\\&\left.-\frac{3}{2}\cos(2p_1-2p_2)\right\}+q_2^2\left\{-\frac{9}{16}-\frac{3}{4}\cos 2p_2-\frac{3}{16}\cos 4p_2\right\}+\\&+\text{члены пятого и высшего порядков относительно }\sqrt{q_1}\text{ и }\sqrt{q_2},\end{aligned}$$

и, следовательно, в этом случае $s_1=2$, $s_2=1$.

Рассуждая так же, как и в конце § 196, мы можем предположить, что член наинизшего порядка в родственном интеграле равен просто q_2. В таком случае полагаем:

$$\varphi = q_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \cdots;$$

уравнением для определения φ_3 будет:

$$2\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_2} = 0,$$

из которого согласно § 201 находим:

$$\varphi_3 = \alpha q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \cos(p_1 - 2p_2),$$

где α — произвольная постоянная.

Для φ_4 мы получаем уравнение:

$$2\frac{\partial\varphi_4}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi_4}{\partial p_2} = q_1 q_2 \left\{\left(6 + \frac{9\alpha}{2}\right)\sin 2p_2 + \left(3 + \frac{9\alpha}{4}\right)\sin(2p_1 + 2p_2) - \right.$$
$$\left. - \left(3 + \frac{9\alpha}{4}\right)\sin(2p_1 - 2p_2)\right\} - q_2^2\left(\frac{3}{2}\sin 2p_2 + \frac{3}{2}\sin 4p_2\right),$$

интеграл которого есть:

$$\varphi_4 = q_1 q_2 \left\{-\left(3 + \frac{9\alpha}{4}\right)\cos 2p_2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3\alpha}{8}\right)\cos(2p_1 + 2p_2) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{3}{2} + \frac{9\alpha}{8}\right)\cos(2p_1 - 2p_2)\right\} + q_2^2\left(-\frac{3}{4}\cos 2p_2 - \frac{3}{16}\cos 4p_2\right).$$

Уравнение, определяющее φ_5, имеет вид:

$$2\frac{\partial\varphi_5}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi_5}{\partial p_2} = \frac{\partial H_5}{\partial p_2} + (\varphi_3,\ H_4) + (\varphi_4,\ H_3),$$

где, как и раньше, $(\varphi_3,\ H_4)$ означает выражение:

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\frac{\partial H_4}{\partial p_1} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\frac{\partial H_4}{\partial p_2} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_1}\frac{\partial H_4}{\partial q_1} - \frac{\partial\varphi_3}{\partial p_2}\frac{\partial H_4}{\partial q_2}.$$

Подберем теперь α таким образом, чтобы уничтожить в правой части этого уравнения коэффициент при $\sin(p_1 - 2p_2)$. Этот коэффициент равен:

$$\left(\text{из } \frac{\partial H_5}{\partial p_2}\right) \qquad \frac{39}{2} q_1^{\frac{3}{2}} q_2 \sin(p_1 - 2p_2),$$

$$(\text{из } (\varphi_4, H_3)) \qquad -\frac{45}{2}\left(1 + \frac{3\alpha}{4}\right) q_1^{\frac{3}{2}} q_2 \sin(p_1 - 2p_2),$$

$$(\text{из } (\varphi_3, H_4)) \qquad +\frac{123}{8}\alpha q_1^{\frac{3}{2}} q_2 \sin(p_1 - 2p_2).$$

Поэтому α должно удовлетворять уравнению:

$$\frac{39}{2} - \frac{45}{2}\left(1 + \frac{3\alpha}{4}\right) + \frac{123}{8}\alpha = 0,$$

из которого находим:

$$\alpha = \quad 2.$$

После подстановки этого значения α в φ_3 и φ_4 наш интеграл примет вид:

$$\begin{aligned}
\text{const} &= q_2 - 2q_1^{\frac{1}{2}} q_2 \cos(p_1 - 2p_2) + \\
&+ q_1 q_2 \left\{\frac{3}{2}\cos 2p_2 + \frac{1}{4}\cos(2p_1 + 2p_2) - \frac{3}{4}\cos(2p_1 - 2p_2)\right\} + \\
&+ q_2^2 \left(-\frac{3}{4}\cos 2p_2 - \frac{3}{16}\cos 4p_2\right) - \\
&+ \text{члены пятого и высшего порядков относительно } \sqrt{q_1} \text{ и } \sqrt{q_2}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Легко убедиться простым дифференцированием, что рассматриваемая динамическая система допускает интеграл:

$$\begin{aligned}
\text{const} = \frac{1}{2}\Bigg\{ &\sqrt{2q_2}\sin p_2 + \\
&+ q_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{2q_2}\cos p_1 \sin p_2 - 2\sqrt{2q_1 q_2}\sin p_1 \cos p_2 \Bigg\}^2 - \\
&- \frac{1 + q_1^{\frac{1}{2}}\cos p_1}{\left(1 + 2q_1^{\frac{1}{2}}\cos p_1 + q_1\cos^2 p_1 + 2q_2\cos^2 p_2\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Этот интеграл является родственным, в чем можно убедиться, находя полное решение или, проще, замечая, что интеграл (5) представляет собой однозначную функцию от $\sqrt{q_1}$, $\sqrt{q_2}$, p_1, p_2, не имеющую особых точек внутри некоторой области, и поэтому соответствующее этому интегралу бесконечно малое преобразование, будучи однозначным и свободным от особых точек, преобразует замкнутые траектории в замкнутые.

Но, разлагая интеграл (5) *по возрастающим степеням величин* $\sqrt{q_1}$ *и* $\sqrt{q_2}$, *мы получим ряд* (4). Это показывает, *что для рассматриваемой динамической системы метод предыдущего параграфа приводит к ряду, сходящемуся при всех значениях* p_1 *и* p_2, *до тех пор пока* $|q_1|$ *и* $|q_2|$ *не превосходят некоторых определенных значений, и что этот ряд представляет родственный интеграл динамической системы.*

§ 203. Определение родственного интеграла в случае 3. Метод устранения уничтожающихся делителей из родственного интеграла, изложенный в двух предыдущих параграфах, не приводит к цели, когда среди членов третьего порядка функции H содержится член с $\cos(s_2p_1 - s_1p_2)$. Этот член вводит уничтожающийся делитель в φ_3, и произвольные члены, которыми мы пользовались для устранения уничтожающихся делителей, не могут быть выбраны таким образом, чтобы устранить уничтожающийся делитель из φ_3.

В этом случае мы должны будем воспользоваться другим методом (совместно с методом § 201), который заключается в следующем. Допустим, что интеграл системы дифференциальных уравнений в переменных q_1, q_2, p_1, p_2 имеет вид:

$$f(q_1, q_2, p_1, p_2) + \frac{g(q_1, q_2, p_1, p_2)}{\mu} = \gamma,$$

где γ — *произвольная* постоянная, а μ — *определенная* постоянная, образованная из величин, входящих в дифференциальное уравнение. Интеграл в этом виде теряет смысл, когда μ стремится к нулю. Но мы можем из него получить интеграл, который будет иметь смысл и тогда, когда $\mu \to 0$, если мы предположим сначала, что μ отлично от нуля, умножим обе части этого интеграла на μ и затем в полученном равенстве

$$\mu f(q_1, q_2, p_1, p_2) + g(q_1, q_2, p_1, p_2) = \mu\gamma$$

будем приближать μ к нулю. Таким образом получится:

$$g(q_1, q_2, p_1, p_2) = c,$$

где c означает $\lim\limits_{\mu\to 0}(\mu\gamma)$. Это и есть искомая форма интеграла.

Наш случай не так прост, ибо обращающаяся в нуль величина входит не только в (-1)-й степени, а в виде бесконечного ряда, содержащего все отрицательные степени.

Мы можем, однако, воспользоваться следующим приемом. При помощи метода § 201 мы можем исключить все отрицательные степени уничтожающейся величины, за исключением (-1)-й, а (-1)-ю степень мы можем исключить методом настоящего параграфа.

§ 204. Пример нахождения родственного интеграла в случае 3. Покажем сейчас на частном примере, как при помощи только что указанного метода можно получить родственный интеграл, свободный от уничтожающихся делителей в случае 3.

Рассмотрим динамическую систему, определяемую функцией Гамильтона:

$$H = q_1 - 2q_2 + q_1^{\frac{3}{2}} U_1 \cos p_1 + q_1 q_2^{\frac{1}{2}} U_4 \cos(2p_1 + p_2).$$

Если функция Гамильтона есть

$$H = s_1 q_1 + s_2 q_2 - q_1^{\frac{3}{2}} U_1 \cos p_1 + q_1 q_2^{\frac{1}{2}} U_4 \cos(2p_1 + p_2),$$

где s_1 и s_2 произвольны, то родственным интегралом, получаемым методом § 196, будет:

$$\begin{gathered}
\text{const} = s_1 q_1 - s_2 q_2 - q_1^{\frac{3}{2}} U_1 \cos p_1 + \frac{2s_1 - s_2}{2s_1 + s_2} q_1 q_2^{\frac{1}{2}} U_4 \cos(2p_1 + p_2) + \\
+ \frac{s_2}{2s_1 + s_2} U_1 U_4 q_1^{\frac{3}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{4\cos(p_1 + p_2)}{s_1 + s_2} + \frac{2\cos(3p_1 + p_2)}{3s_1 + s_2} \right\} + \\
+ U_1^2 U_4 q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} \frac{s_2}{2s_1 + s_2} \left\{ -\frac{3}{3s_1 + s_2} \frac{\cos(4p_1 + p_2)}{4s_1 + s_2} - \right. \\
\left. - \frac{6}{3s_1 + s_2} \frac{\cos(2p_1 + p_2)}{2s_1 + s_2} - \frac{6}{s_1 - s_2} \frac{\cos p_2}{s_2} \right\} + \\
+ U_1 U_4^2 q_1^{\frac{3}{2}} q_2 \frac{s_2}{2s_1 + s_2} \left\{ \frac{2(9s_1 + s_2)}{(s_1 + s_2)(3s_1 + s_2)} \frac{\cos p_1}{s_1} - \frac{4}{s_1 + s_2} \frac{\cos(3p_1 + 2p_2)}{3s_1 + 2s_2} \right\} + \\
+ U_1 U_4^2 q_1^{\frac{5}{2}} \frac{s_2}{2s_1 + s_2} \cdot \frac{5s_1 + s_2}{(3s_1 + s_2)(s_1 + s_2)} \cdot \frac{\cos p_1}{s_1} + \\
+ \text{члены шестого и высшего порядков относительно } \sqrt{q_1} \text{ и } \sqrt{q_2}. \qquad (6)
\end{gathered}$$

В нашем случае $s_1 = 1$, $s_2 = -2$ и, следовательно, знаменатель $2s_1 + s_2$ обращается в нуль. Этот знаменатель появляется в четвертом члене вышенаписанного выражения и встречается во всех дальнейших членах, причем он входит в квадрате в коэффициент при члене $q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} \cos(2p_1 - p_2)$ пятого порядка. Мы должны будем изменить ряд (6) таким образом, чтобы получить интеграл, не содержащий уничтожающихся знаменателей.

В первую очередь мы применим метод § 203. Наинизший член, содержащий уничтожающийся знаменатель, есть:

$$\frac{2s_1 - s_2}{2s_1 + s_2} q_1 q_2^{\frac{1}{2}} U_4 \cos(2p_1 + p_2),$$

и поэтому мы должны попытаться найти интеграл, у которого наинизший член (отбрасывая несущественные множители $2s_1 - s_2$ и U_4) равен:

$$q_1 q_2^{\frac{1}{2}} \cos(2p_1 + p_2).$$

Полагая поэтому, что интеграл имеет вид:

$$\mathrm{const} = \varphi \equiv q_1 q_2^{\frac{1}{2}} \cos(2p_1 + p_2) + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6 + \cdots,$$

где φ_r, означает член r-го порядка относительно $\sqrt{q_1}$ и $\sqrt{q_2}$; подставим его в уравнение $(\varphi, H) = 0$ и приравняем нулю члены четвертого порядка. Тогда для определения φ_4 мы получим уравнение:

$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial p_1} - 2\frac{\partial\varphi_4}{\partial p_2} = q_1^{\frac{3}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} U_1\{2\sin(p_1 + p_2) + \cos(3p_1 + p_2)\}.$$

Интегралом этого уравнения будет:

$$\varphi_4 = q_1^{\frac{3}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} U_1\{2\cos(p_1 + p_2) - \cos(3p_1 + p_2)\}.$$

К нему может быть, однако, добавлен член вида:

$$\alpha q_1^2 + \beta q_1 q_2 + \gamma q_2^2, \tag{7}$$

где α, β и γ — произвольные постоянные, так как этот член удовлетворяет дифференциальному уравнению и имеет вид, свойственный функции φ_4. Необходимо заметить, что этот член не является излишним, как в общем случае, исследованном в § 196. В общем случае добавление такого члена к φ_4 эквивалентно добавлению произвольной квадратичной функции от интеграла энергии и родственного интеграла. В рассматриваемом сейчас случае родственный интеграл начинается нелинейными членами, и поэтому квадратичная функция от него не может дать членов вида (7). Выберем произвольные постоянные в (7) таким образом, чтобы освободиться от членов с уничтожающимися знаменателями в членах высшего порядка функции φ. Приняв

$$\varphi_4 = q_1^{\frac{3}{2}} q_2^{\frac{1}{2}} U_1\{2\cos(p_1 + p_2) - \cos(3p_1 + p_2)\} + \alpha q_1^2$$

и подставив в уравнение:

$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial p_1} - 2\frac{\partial\varphi_5}{\partial p_2} = (\varphi_4, H_3), \tag{8}$$

определяющее φ_5, находим, что члены правой части, содержащие $\sin(2p_1 + p_2)$(вводящие при интегрировании нулевые знаменатели), суть:

$$-3q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} U_1^2 \sin(2p_1 + p_2) - 4\alpha q_1^2 q_2^{\frac{1}{2}} U_4 \sin(2p_1 - p_2),$$

и они все обращаются в нуль, если

$$\alpha = -\frac{3}{4}\frac{U_1^2}{U_4}.$$

Таким образом, повторным применением метода § 201 мы сумеем исключить члены с уничтожающимися знаменателями и получить свободный от них родственный интеграл.

§ 205. Завершение интеграции динамических систем в случаях 2 и 3. Преодолев в § 201–204 затруднения, вызванные наличием членов с уничтожающимися делителями в родственных интегралах в случаях 2 и 3, мы можем использовать эти интегралы для завершения интеграции динамической системы так же, как мы это сделали в § 199 для случая 1. Мы получим, таким образом, разложения для координат, как функций от времени во всех случаях. Но эти разложения будут совершенно различными в зависимости от того, какому из этих трех случаев соответствует данная динамическая система. Этим результатом объясняется теорема Пуанкаре, что ряды Небесной Механики не могут сходиться равномерно при всех значениях постоянных, лежащих в некоторых пределах. Ряды, которыми занимался Пуанкаре, принадлежат к типу, отнесенному нами к случаю 1, и мы видели, что если s_1 и s_2 изменять непрерывно, эти ряды должны быть заменены рядами, соответствующими случаям 2 или 3 всякий раз, когда отношение $\frac{s_1}{s_2}$ переходит от иррациональных значений к рациональным. Выгодность решения при помощи родственных интегралов заключается в том, что вид родственного интеграла, соответствующий каждому из трех случаев, может быть легко определен. Таким образом, затруднения устраняются, если для получения выражений координат как функции от времени воспользоваться родственными интегралами.

Относительно дальнейших исследований по вопросу об общем решении уравнений динамики следует указать на важные мемуары Черри, опубликованные в 1924–1927 гг. в «Proc. Camb. Phil. Soc.», «Trans. Camb. Phil. Soc.» и «Proc. Lond. Math. Soc.», а также работы Б. Б. Бекера и Э. Б. Росса (E. B. Ross) в «Proc. Edin. Math. Soc.», т. 39–41, 1921–1923.

Упражнения.

1. Пусть φ означает некоторую функцию переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ динамической системы, обладающей интегралом энергии:

$$H(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = \text{const},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ суть значения величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ при $t = t_0$, а $\{t, g\}$ — значение скобки Пуассона (f, g), если в ней величины $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$ заменить соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Показать, что

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) = \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) + \\ +(t - t_0)\{\varphi, H\} + \frac{(t - t_0)}{2!}\{\{\varphi, H\}, H\} + \cdots$$

2. Показать, что динамическая система с уравнениями движения:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{l^4k^2}{2q^2} - \frac{l^3k^2}{q},$$

допускает семейство решений, которые при пренебрежении членами порядка высшего чем $\alpha^{\frac{3}{2}}$ могут быть представлены в виде:

$$q = l + \frac{3\alpha}{kl} + \left(\frac{2\alpha}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\beta - \frac{3\alpha}{2kl} \cos 2\beta,$$

где

$$\beta = -\left(k + \frac{a\alpha}{2b^2}\right) t + \varepsilon,$$

а α и ε — произвольные постоянные.

Алфавитный указатель

Предметный указатель