

В

ДЛЯ ВУЗОВ

К. С. Колесников

ДИНАМИКА РАКЕТ

·Машиностроение·



К.С. Колесников

ДИНАМИКА РАКЕТ

*2-е издание,
исправленное и дополненное*

*Допущено Министерством образования
Российской Федерации в качестве
учебника для студентов высших
учебных заведений, обучающихся
по специальностям "Ракетостроение" и
"Космические летательные аппараты и
разгонные блоки" направления
подготовки дипломированных
специалистов "Ракетостроение и
космонавтика"*



МОСКВА
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
2003

УДК 629.7.015.4
ББК 39.62
К 60

Рецензент – кафедра "Космические системы и ракетостроение"
Московского авиационного института (государственного технического университета)

Колесников К.С.

К 60 Динамика ракет: Учебник для вузов. 2-е изд., исправл. и доп.
– М.: Машиностроение, 2003. 520 с.: ил.
ISBN 5-217-03149-2

Изложены основные проблемы и пути обеспечения устойчивости жидкостной ракеты.

В первой части представлены методы исследования и проведен анализ динамических свойств упругой жидкостной ракеты как объекта регулирования. Рассмотрены поперечные колебания ракеты как замкнутой системы.

Вторая часть посвящена исследованию продольных колебаний замкнутой системы, состоящей из упругого корпуса с жидкостью в баках, системы подачи топлива и жидкостного ракетного двигателя.

Второе издание (1-е изд. в 1980 г.) переработано и дополнено новым материалом.

ISBN 5-217-03149-2

ББК 39.62

© К.С. Колесников, 2003
© Издательство "Машиностроение", 2003

ПРЕДИСЛОВИЕ

Жидкостная ракета представляет собой сложную управляемую механико-гидравлическую систему, в которой могут возникать упругие колебания корпуса, жидкости в баках и трубопроводах, колебания отдельных агрегатов. Упругие колебания взаимодействуют с колебаниями жидкости, с системой управления полетом и с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД), на работу которого, в частности, непосредственное влияние оказывают колебания жидкости в трубопроводах. В связи с высокими требованиями к надежности и точности полета при наличии источников энергии большой мощности особую важность приобретают вопросы устойчивости движения ракеты.

Задачи динамики жидкостных ракет и самолетов как упругих систем послужили основой для развития нового раздела механики – аэрогидроупругости.

Возмущенное движение жидкостной ракеты как системы с распределенными параметрами характеризуется системой дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка. Их анализ очень сложен, и поэтому в данном учебнике значительное внимание уделено методам построения адекватной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и определения коэффициентов этих уравнений. Для этого проведены решения ряда дополнительных задач, связанных с определением частот и форм упругих колебаний корпуса, сил и моментов, действующих на ракету при колебаниях жидкости в баках, динамических характеристик системы топливоподачи ЖРД, динамических характеристик системы управления.

Динамические характеристики ракеты и отдельных ее частей представлены в виде передаточных функций и амплитудно-фазовых частотных характеристик.

Учебник состоит из двух частей. В первой части изложены методы исследования и проведен анализ динамических свойств упругой жидкостной ракеты как объекта регулирования. Здесь рассмотрены поперечные колебания ракеты как замкнутой системы.

Вторая часть посвящена исследованию продольных колебаний замкнутой системы, состоящей из упругого корпуса с жидкостью в баках, системы подачи топлива и жидкостного ракетного двигателя.

Автор стремился сложные явления расчленить по возможности на простые составные части, более доступные студенческой аудитории. В связи с этим в книге основное внимание уделено раскрытию физической картины явлений, их математическому описанию и анализу. Такое построение книги преследует цель дать будущему инженеру основы динамики ракет, которые необходимы при анализе сложных динамических систем с помощью ЭВМ.

Анализ динамических характеристик проведен на основе линеаризованных уравнений, что, вообще говоря, не исчерпывает всех особенностей некоторых задач, а дает лишь первое приближение их решения. В ряде случаев это оказывается достаточным.

Для изучения книги читатель должен обладать знаниями в объеме вузовской программы высшей математики, физики, теоретической механики и теории колебаний, сопротивления материалов, основ теории автоматического регулирования, основ ракетной техники и аэрогидродинамики.

Автор считает своим приятным долгом выразить благодарность А.И. Ганичеву, В.Г. Кинелеву, В.И. Кожевникову, А.А. Пожалоистину и Ю.А. Цурикову за ценные замечания, сделанные ими при ознакомлении с рукописью первого издания книги.

Материал первого издания (1980 г.) был подготовлен автором во время его работы в ОКБ-1, которое возглавлял С.П. Королев, апробирован в учебном процессе МВТУ им. Н.Э. Баумана, получил положительную оценку в вузах, отраслевых НИИ и КБ.

Во втором издании заново написаны главы VI и XII, доработана глава XIII, исправлены ошибки и внесены некоторые уточнения. Автор искренне благодарен за помощь в этой работе доцентам МГТУ им. Н.Э. Баумана М.М. Ильину, А.И. Ганичеву, А.Н. Темнову, Ю.С. Саратову.

Отдельные материалы учебника носят вспомогательный характер. Они находятся на следующих страницах: 24 – 29 (разд. 2.1, 2.2); 30 – 31 (разд. 2.3); 38 – 42 (разд. 2.5, 2.6); 69 (разд. 3.5); 94 – 111 (разд. 3.10 – 3.13); 163 – 172 (разд. 5.3 – 5.5); 213 (разд. 7.3); 224 – 226 (разд. 8.1); 228 – 243 (разд. 8.2); 262 – 264 (разд. 8.9); 280 – 289 (разд. 9.3); 292 (разд. 9.5); 311 – 312 (разд. 10.3); 330 – 338 (разд. 11.4, 11.5); 353 – 360 (разд. 11.10, 11.11); 378 – 383 (разд. 12.4); 384 – 385 (разд. 12.5); 394 – 395 (разд. 12.7); 400, 406, 407 (разд. 12.8); 409 – 410 (разд. 13.1); 414 (разд. 13.3); 415 – 425 (разд. 13.4, 13.5); 427 (разд. 13.6); 429 – 435 (разд. 13.7); 448 – 450 (разд. 13.12); 470 – 476 (разд. 14.2); 493 – 494 (разд. 15.1); 501 – 504 (разд. 15.3, 15.4); 508 – 509 (разд. 15.6).

Автор будет признателен читателям за критические замечания и пожелания по содержанию книги, которые следует присылать по адресу: 107076, Москва, Стромынский пер., 4, издательство "Машиностроение".

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ ЖИДКОСТНАЯ РАКЕТА КАК ОБЪЕКТ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава I УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА

1.1. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАКЕТУ В ПОЛЕТЕ

Силы, действующие на ракету в полете, можно разделить на аэродинамические, силы тяжести и тягу двигателей.

Для жесткого корпуса ракеты систему распределенных по поверхности корпуса аэродинамических сил в случае плоского движения приводят к равнодействующей, которую для удобства представляют в виде двух составляющих: подъемной силы Y_a и силы лобового сопротивления X_a , приложенных в центре давления F (рис. 1.1).

При малых углах атаки α подъемная сила пропорциональна углу атаки. Влияние формы и размеров корпуса на подъемную силу учитывается некоторым характерным размером S – площадью миделя и безразмерным коэффициентом подъемной силы $c_{Y_a}^\alpha$. В отличие от подъемной силы Y_a сила лобового сопротивления X_a при малых углах атаки почти не зависит от величины угла атаки. Поэтому

$$\begin{aligned} Y_a &= q S c_{Y_a}^\alpha \alpha; \\ X_a &= q S c_{X_a}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

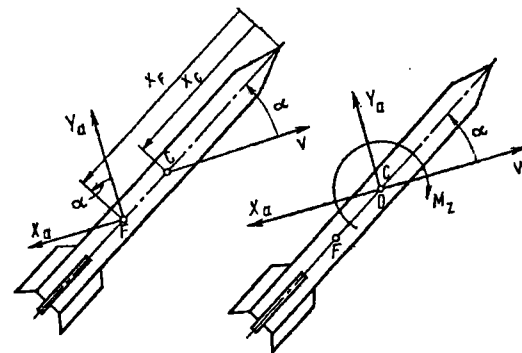


Рис. 1.1

где $q = \rho v^2/2$ – скоростной напор; v – скорость полета; ρ – плотность воздуха; $c_{Y_a}^{(\alpha)} = (\partial c_{Y_a}/\partial \alpha)_{\alpha=0}$ – коэффициент подъемной силы; c_{X_a} – коэффициент лобового сопротивления. Угол атаки α здесь выражен в радианах.

Коэффициенты $c_{Y_a}^{(\alpha)}$ и c_{X_a} , характеризующие внешнюю конфигурацию объекта, зависят от числа Маха M и угла α , так что

$$c_{Y_a}^{(\alpha)} = c_{Y_a}^{(\alpha)}(M, \alpha); \quad c_{X_a} = c_{X_a}(M, \alpha).$$

При изучении движения ракеты нужно определять момент M_Z аэродинамических сил Y_a и X_a относительно поперечной оси Z , проходящей через точку C – центр масс ракеты:

$$M_Z = Y_a(x_F - x_C)\cos \alpha + X_a(x_F - x_C)\sin \alpha.$$

Для малых углов атаки $\cos \alpha \approx 1$, $\sin \alpha \approx \alpha$ и тогда

$$M_Z = qSlm_Z^{(\alpha)}\alpha, \quad (1.2)$$

где $m_Z^{(\alpha)} = \frac{x_F - x_C}{l}(c_{Y_a}^{(\alpha)} + c_{X_a})$ – коэффициент момента аэродинамических сил; l – длина корпуса ракеты.

Момент M_Z зависит, следовательно, как от аэродинамических характеристик, так и от распределения масс ракеты, которое изменяется по мере выгорания топлива. Взаимное расположение центра давления и центра масс важно для стабилизации ракеты в полете. Если знак M_Z (или $m_Z^{(\alpha)}$) противоположен знаку α , то момент M_Z стремится уменьшить угол атаки. В соответствии с этим различаются:

- а) аэродинамически устойчивая ракета, когда $x_F > x_C$, $m_Z^{(\alpha)} > 0$;
- б) аэродинамически неустойчивая ракета, когда $x_F < x_C$, $m_Z^{(\alpha)} < 0$;
- в) аэродинамически нейтральная ракета, когда $x_F = x_C$, $m_Z^{(\alpha)} = 0$.

Если центр давления находится впереди центра массы ($m_Z^{(\alpha)} < 0$), то при отклонении оси ракеты от направления полета аэродинамические силы создадут момент, отклоняющий ось ракеты на еще больший угол.

Для обеспечения аэродинамической устойчивости или уменьшения аэродинамической неустойчивости ракета снабжается хвостовым оперением. Неоперенная ракета обычно бывает аэродинамически

неустойчивой. Запас аэродинамической устойчивости определяется величиной

$$(x_F - x_C)/l.$$

Кроме момента M_Z , который при $m_Z^{(\alpha)} > 0$ называется стабилизирующим моментом, при вращении корпуса ракеты относительно поперечной

оси, проходящей через точку C , с угловой скоростью $\dot{\theta}$ возникает демпфирующий момент. Этот момент складывается из аэродинамического демпфирующего момента, обусловленного появлением дополнительных углов атаки

$$\Delta \alpha = \dot{\theta}(x - x_C)/v,$$

и момента от кориолисовых сил (рис. 1.2) (координата x для произвольного поперечного сечения отсчитывается от вершины корпуса).

Аэродинамический демпфирующий момент всегда направлен в сторону, противоположную вращению корпуса ракеты:

$$M_{Z_d}' = \int_0^l (x - x_C) \frac{\partial Y_a'}{\partial x} dx = qSl^2 m_Z^{\dot{\theta}} \frac{\dot{\theta}}{v}, \quad (1.3)$$

где $m_Z^{\dot{\theta}}$ – вращательная производная от коэффициента аэродинамического демпфирующего момента.

Момент от кориолисовых сил возникает при повороте потока жидкости, движущейся в баках и трубопроводах ракеты, и потока газов, движущихся по камере и соплу двигателя. Этот момент можно определить, если принять, что указанные потоки вращаются совместно с корпусом ракеты.

Величина и направление кориолисова ускорения определяются векторным произведением

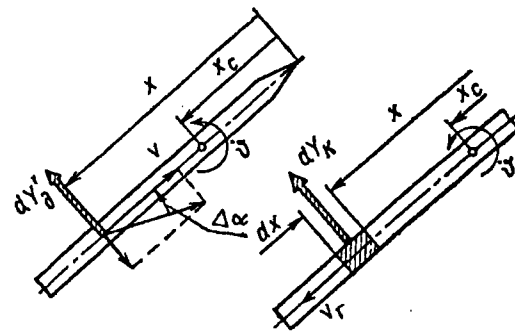


Рис. 1.2

$$\bar{a}_K = 2\dot{\theta} \times \bar{v}_r,$$

где \bar{v}_r — относительная скорость движущегося в ракете потока. Если, например, масса элемента, движущегося по трубопроводу потока жидкости, равна $\rho S_T dx$, где S_T — площадь проходного сечения трубопровода, ρ — плотность жидкости, то при $\sin(\dot{\theta} \wedge \bar{v}_r) = 1$ кориолисова сила будет равна

$$dY_K = 2\rho S_T \dot{\theta} v_r dx$$

и направлена в сторону, противоположную ускорению.

При установившемся режиме работы двигателя секундный расход массы m_j через любое поперечное сечение потока площадью S_{Π} между поверхностью жидкости в j -м баке и срезом сопла постоянен:

$$\rho_j S_{\Pi j} v_{rj} = m_j = \text{const.}$$

Поэтому величину момента для всей системы M_{ZK} можно определить суммированием элементарных моментов по всем потокам:

$$M_{ZK} = 2\dot{\theta} \sum_{(j)} m_j \int_{x_{0j}}^{l_a} (x - x_C) dx, \quad (1.4)$$

где x_{0j} — расстояние от вершины ракеты до поверхности жидкости в j -м баке; l_a — расстояние от вершины ракеты до среза сопла двигателя.

При $x > x_C$ момент направлен против вращения корпуса и является поэтому демпфирующим; при $x < x_C$ — в сторону вращения корпуса.

При полете ракеты в плотных слоях атмосферы момент от кориолисовых сил M_{ZK} значительно меньше демпфирующего момента $M'_{Z\kappa}$ от аэродинамических сил. За пределами атмосферы момент кориолисовых сил становится преобладающим. Таким образом,

$$M_{Z\kappa} = M'_{Z\kappa} + M_{ZK}. \quad (1.5)$$

Поперечной демпфирующей силой

$$Y_K = \int_0^l \frac{\partial Y_K}{\partial x} dx + 2\dot{\theta} \sum_{(j)} m_j (l_a - x_{0j})$$

вследствие ее малости в расчетах обычно пренебрегают.

В качестве основных управляющих органов в жидкостных ракетах применяются поворотные двигатели и газовые рули. Иногда в качестве дополнительных органов используются воздушные рули, эффективность которых существенна лишь при больших скоростных напорах.

Газодинамические силы, действующие на поверхности рулей, приводятся к подъемной силе $Y_{г.р}$ и силе лобового сопротивления $X_{г.р}$, приложенным к оси вращения руля, и шарнирному моменту $M_{г.ш}$.

Эти величины могут быть определены по обычным формулам:

$$Y_{г.р} = q_r S_{г.р} c_{Y_r}^{(6)} \delta_{г.р}; \quad X_{г.р} = q_r S_{г.р} c_{X_r}; \quad M_{г.ш} = q_r S_{г.р} l_{г.р} m_{г.р}^{(6)} \delta_{г.р},$$

где q_r — скоростной напор обдувающего руль газового потока; $S_{г.р}$, $l_{г.р}$ — характерная площадь и длина газового руля; $\delta_{г.р}$ — угол поворота газового руля.

Углы поворота газовых рулей на активном участке траектории изменяются в пределах $|\delta_{г.р}| < |\delta_{\max}|$, поэтому коэффициенты $c_{Y_r}^{(6)}$, c_{X_r} , $m_{г.р}^{(6)}$ зависят не только от формы руля и расположения оси его вращения, но и от угла $\delta_{г.р}$. Лобовое сопротивление газовых рулей приводит к некоторой потере тяги.

В случае воздушных рулей, по аналогии с предыдущим

$$Y_{в.р} = q S_{в.р} c_{Y_v}^{(6)} \delta_{в.р}; \quad X_{в.р} = q S_{в.р} c_{X_v}; \quad M_{в.ш} = q S_{в.р} l_{в.р} m_{в.р}^{(6)} \delta_{в.р};$$

$$q = \rho v^2 / 2.$$

Здесь $\delta_{в.р}$ — угол поворота воздушного руля относительно корпуса; v — скорость полета.

Кроме шарнирных моментов при отклонениях газовых и воздушных рулей возникают демпфирующие моменты, пропорциональные угловой скорости $\dot{\theta}$. Однако шарнирные и демпфирующие моменты несоизмеримо малы по сравнению с моментом силы $Y_{г.р}$ (или $Y_{в.р}$) относительно центра масс ракеты, поэтому в уравнениях движения ракеты обычно не учитываются. Величина шарнирного момента руля имеет значение только для расчета работы рулевых машин.

Если органами управления являются поворотные двигатели, то

$$Y_p = P \sin \delta; \quad X_p = P(1 - \cos \delta);$$

при малых углах поворота

$$Y_p \approx P \delta; \quad X_p \approx P \delta^2 / 2 \approx 0.$$

Независимо от типа органов управления будем в дальнейшем полагать, что при малых углах поворота δ сила лобового сопротивления рулей X_p не зависит от угла δ , а поперечная управляющая сила Y_p пропорциональна углу δ .

В общем виде

$$Y_p = R_{Y_p}^{(0)} \delta, \quad (1.6)$$

где $R_{Y_p}^{(0)}$ — градиент управляющей силы рулей.

Тяга ракетного двигателя при постоянном секундном расходе топлива зависит от высоты полета. Эту зависимость можно представить следующей формулой:

$$P = P_0 + S_a(p_0 - p_H),$$

где P_0 — тяга двигателя у поверхности Земли; S_a — площадь среза сопла; p_0, p_H — статическое давление воздуха у поверхности Земли и на высоте H . По мере набора высоты тяга плавно возрастает соответственно падению атмосферного давления.

В зависимости от характера запуска двигателя тяга может нарастать быстрее или медленнее, непрерывно или ступенями. Точно так же и при выключении двигателя тяга исчезает не мгновенно, а наблюдается, как говорят, явление послепосты. После отсечки двигателя вследствие догорания остатков топлива все еще продолжает создаваться небольшая тяга. Однако как время выхода двигателя на режим, так и, в особенности, период послепосты составляют небольшую долю от общего времени работы двигателя.

Ускорение ракете сообщается силой

$$P_z = P - X_p,$$

которая называется эффективной тягой двигателя.

Вес ракеты $G = mg$ во время полета изменяется как вследствие изменения массы m ракеты, так и вследствие изменения ускорения свободного падения g .

1.2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Определим системы координат, с которыми придется встречаться в дальнейшем. Все системы координат будем принимать прямоугольными и правыми.

Стартовая (земная) система координат $O_0X_cY_cZ_c$ (рис. 1.3), оси которой неподвижны относительно Земли, используется для расчета траекторий ракеты. Начало координат совпадает с точкой старта, ось Y_c направлена вертикально вверх, ось X_c — по касательной к дуге большого круга, соединяющего старт с целью.

Связанная с корпусом ракеты система координат $OXYZ$, начало которой совмещается с центром масс ракеты — точкой C , удобна для анализа возмущенного движения и определения перегрузок. Координатные оси X, Y, Z направлены по главным центральным осям инерции ракеты, причем ось X направлена по оси ракеты, называемой ее продольной осью. Координатная ось Y расположена так, чтобы в положении на старте плоскость OXY совпадала с плоскостью $O_0X_cY_c$, а ось Z — с осью Z_c .

Скоростная (или естественная) система координат $OX_aY_aZ_a$ так же, как и связанная, является подвижной. Начало координат поместим в центре масс ракеты, ось X_a направим по касательной к траектории, ось Y_a — по нормали к траектории (от центра кривизны), ось Z_a — по бинормали. Так как ось X_a совпадает с направлением вектора скорости \vec{v} , то в скоростной системе координат определяются компоненты $X_aY_aZ_a$ аэродинамической силы, действующей на корпус.

Определим угловые координаты. Угол θ между продольной осью ракеты и горизонтальной плоскостью в точке старта называется углом тангажа. Угол θ между вектором скорости и горизонтальной плоскостью в точке старта обычно называют углом наклона траектории к стартовому горизонту.

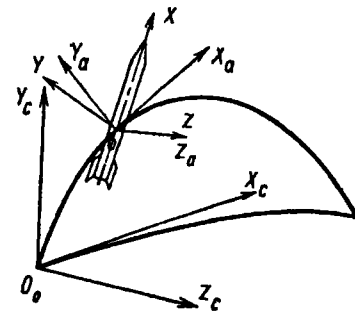


Рис. 1.3

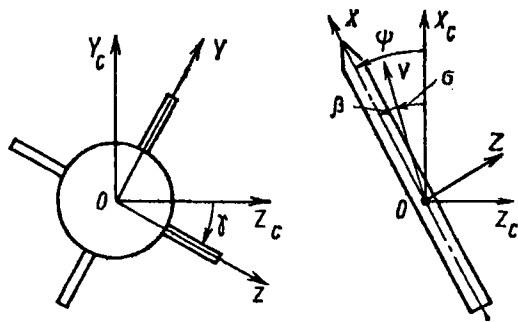


Рис. 1.4

Угол ψ между продольной осью X и плоскостью OX_cY_c называется углом рыскания (рис. 1.4); угол γ между поперечной осью Z и плоскостью OX_cY_c — углом крена. Угол крена определяет поворот корпуса ракеты относительно ее продольной оси.

В дальнейшем будем всегда полагать, что ра-

кета обладает, по крайней мере, двумя плоскостями симметрии, совпадающими с плоскостями OXY и OXZ .

Углом атаки α называется угол между проекцией вектора скорости ракеты на вертикальную плоскость симметрии OXY и продольной осью X . Углом скольжения β называется угол между вектором скорости и вертикальной плоскостью симметрии OXY .

1.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Во время работы двигателей масса ракеты уменьшается, так что ракета является телом переменного состава. При выводе уравнений движения применим принцип затвердевания. Руководствуясь этим принципом, уравнения движения ракеты в произвольный момент времени будем записывать как уравнения движения твердого тела постоянного состава (для того же момента времени), включив в число внешних сил реактивные и кориолисовы силы.

Согласно законам механики при составлении уравнения динамики тела во всякой неинерциальной системе координат, т.е. при составлении дифференциальных уравнений относительного движения, к внешним силам, действующим на твердое тело, необходимо добавлять переносную и кориолисову силы инерции, возникающие из-за ускоренного движения выбранной системы отсчета. Для подсчета этих сил инерции надо установить закон движения выбранной системы отсчета по отношению к какой-либо инерциальной системе, что можно выполнить лишь приближенно в силу приближенного выбора инерциальной системы.

Одним из приближений для инерциальной системы отсчета служит система координат с началом в центре Земли и осями, направленными на неподвижные звезды. Такой выбор инерциальной системы равно-

силен пренебрежению ускорением центра Земли в его орбитальном движении, но с сохранением влияния собственного вращения Земли. Это дает возможность с достаточной точностью рассчитать движение спутника вокруг Земли.

Для анализа динамики возмущенного движения ракеты будем пренебрегать силами инерции, обусловленными движением Земли, и стартовую систему координат будем считать и н е р ц и а л ь н о й.

Уравнения движения центра масс ракеты и вращения вокруг центра масс в инерциальной системе отсчета в векторной форме имеют вид

$$m(d\bar{v}/dt) = \bar{R}; \quad d\bar{K}_c/dt = \bar{L}_c, \quad (1.7)$$

где m — масса твердого тела ракеты; \bar{v} — вектор скорости центра масс; \bar{K}_c — кинетический момент твердого тела относительно центра масс; \bar{R} — главный вектор внешних сил, приложенных к телу; \bar{L}_c — главный момент внешних сил, приложенных к телу, относительно центра масс.

Спроектируем векторные уравнения (1.7) на оси подвижных систем координат. Обозначим через Ω вектор угловой скорости скоростной системы координат $OX_aY_aZ_a$ относительно неподвижной системы $O_0X_cY_cZ_c$.

Применив формулу Бура

$$d\bar{v}/dt = d\bar{v}/dt + \bar{\Omega} \times \bar{v},$$

где $d\bar{v}/dt$ — производная по времени от \bar{v} в подвижной (скоростной) системе координат $OX_aY_aZ_a$, спроектируем первое уравнение (1.7) на оси скоростной системы $OX_aY_aZ_a$. Получим

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dv_{x_a}}{dt} + \Omega_{y_a} v_{z_a} - \Omega_{z_a} v_{y_a} \right) &= R_{x_a}; \\ m \left(\frac{dv_{y_a}}{dt} + \Omega_{z_a} v_{x_a} - \Omega_{x_a} v_{z_a} \right) &= R_{y_a}; \\ m \left(\frac{dv_{z_a}}{dt} + \Omega_{x_a} v_{y_a} - \Omega_{y_a} v_{x_a} \right) &= R_{z_a}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь $v_{x_a}, v_{y_a}, v_{z_a}$ — проекция вектора скорости центра масс на

подвижные оси; $\Omega_{x_a}, \Omega_{y_a}, \Omega_{z_a}$ — проекции вектора $\bar{\Omega}$ на те же оси координат.

Второе уравнение (1.7) вращательного движения запишем в форме уравнения Эйлера, приняв за подвижную систему координат связанную с корпусом систему $OXYZ$. Имеем

$$\begin{aligned} I_1(d\omega_1/dt) - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= L_X; \\ I_2(d\omega_2/dt) - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= L_Y; \\ I_3(d\omega_3/dt) - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= L_Z. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь I_1, I_2, I_3 — главные центральные моменты инерции твердого тела относительно осей X, Y, Z ; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора $\bar{\omega}$ угловой скорости связанной системы координат $OXYZ$ относительно неподвижной $O_0X_cY_cZ_c$ на оси X, Y, Z .

Программный полет предусматривает движение баллистической ракеты в вертикальной плоскости $O_0X_cY_c$, с которой совпадает вертикальная плоскость симметрии ракеты OXY . Таким образом, в программном движении обычно $\psi = \beta = \gamma = 0$. Движение ракеты в вертикальной плоскости будем называть движением в плоскости тангажа.

По некоторым причинам действительное движение будет всегда отличаться от программного, так что кроме продольного движения может одновременно существовать и боковое движение с координатами ψ и β , которое называется движением в плоскости рыскания или движением рыскания. Движение с координатой γ называется вращением относительно продольной оси ракеты или движением крена.

Наличие плоскостей симметрии ракеты и малые движения рыскания и крена дают возможность разделить общее движение, описываемое уравнениями (1.8) и (1.9), на продольное, движение в плоскости рыскания и вращение относительно продольной оси.

Пусть стабилизация ракеты осуществляется отдельно по тангажу, рысканию и крену. Тогда уравнения, описывающие работу системы управления в плоскостях тангажа, рыскания и крена, будут независимыми. В этом случае уравнения движения управляемой ракеты в плоскости тангажа можно получить и проанализировать независимо от уравнений движения в плоскости рыскания. Однако исследование движения рыскания и движения крена можно провести лишь после того, как будут определены параметры продольного движения.

На рис. 1.5 показаны силы, действующие на ракету, причем аэродинамический момент M_Z показан с учетом его знака. Полагая, что в уравнениях (1.8) и (1.9) $v_{x_a} = v, v_{y_a} = v_{z_a} = 0, \Omega_{x_a} = \Omega_{y_a} = \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \dot{\theta}, \Omega_{z_a} = \dot{\theta}$, получим уравнения движения ракеты в вертикальной плоскости в скоростной системе координат:

$$\begin{aligned} m\dot{v} &= (P - X_p)\cos\alpha - X_a - G\sin\theta - Y_p\sin\alpha + X_b; \\ m v \dot{\theta} &= (P - X_p)\sin\alpha + Y_a - G\cos\theta + Y_p\cos\alpha + Y_b; \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$I_Z \ddot{\theta} = -M_Z - M_{Za} - Y_p(x_p - x_c) + M_{Zb}.$$

Здесь X_b, Y_b, M_{Zb} — возмущающие силы и момент, которые будем считать заданными.

Для обеспечения управления и устойчивости движения в системе стабилизации ракеты используются сигналы от чувствительных элементов, пропорциональные ускорениям в направлении продольной и поперечной осей ракеты. Эти сигналы определяются из уравнений движения в связанной системе координат.

Проекция скорости на оси X и Y связанной системы координат будут $v_X = v \cos \alpha, v_Y = -v \sin \alpha$. Для этой системы координат в уравнениях (1.8) и (1.9) нужно принять, что $v_Z = 0, \Omega_Y = \Omega_X = \omega_2 = \omega_1 = 0, \omega_3 = \Omega_Z = \dot{\theta}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} m(\dot{v}_X - \dot{\theta} v_Y) &= (P - X_p) - X_a \cos \alpha + Y_a \sin \alpha - G \sin \theta + X'_b; \\ m(\dot{v}_Y + \dot{\theta} v_X) &= Y_a \cos \alpha + X_a \sin \alpha - G \cos \theta + Y_p + Y'_b; \end{aligned} \quad (1.11)$$

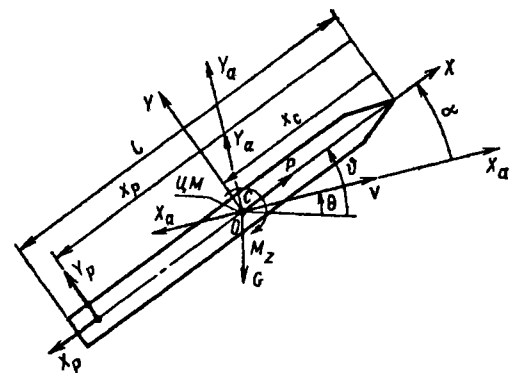


Рис. 1.5

$$I_Z \ddot{\theta} = -M_Z - M_{Z_d} - Y_p(x_p - x_c) + M'_{Z_b}; \quad \operatorname{tg} \alpha = -v_Y/v_X.$$

Здесь X'_b ; Y'_b , M'_{Z_b} — некоторые возмущающие силы и момент.

Чтобы найти решения уравнений (1.10) или (1.11), нужно знать закон изменения по времени управляющих сил $Y_p(t) = R_{Y_p}^{(0)} \delta$. Закон задается системой управления и зависит от типа и структуры этой системы. Уравнение системы управления можно представить в виде

$$\delta(t) = \delta(\dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dots, v_Y). \quad (1.12)$$

1.4. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Как было упомянуто выше, действительное движение всегда будет отличаться от программного. Причины, вызывающие отклонение движения от программного, будем называть в о з м у щ е н и я м и. Эти возмущения могут быть как постоянными, так и случайными.

Искажение внешней геометрии корпуса, несоосность двигателя с корпусом, отклонение от расчетных значений тяги двигателя и стартового веса, изменение эффективности органов управления ракеты и другие возмущения действуют постоянно и для данной ракеты — систематически. Эти возмущения могут быть учтены в уравнениях (1.10) членами X_b , Y_b и M_{Z_b} .

Так как возмущения X_b , Y_b , M_{Z_b} для разных экземпляров ракет того же типа могут быть различными, то действительные траектории на управляемом участке будут образовывать как бы трубку траекторий, в которой будет находиться программная траектория.

Движение ракеты в трубке траекторий будем называть н о м и н а л ь н ы м движением. По характеристикам возмущений можно установить размеры трубки траекторий, которые являются исходными для расчета рассеивания.

Кратковременные возмущения, такие как порывы ветра, кратковременные изменения тяги двигателя, помехи и ложные сигналы в системе управления, обычно случайны и их невозможно учесть в уравнениях движения, хотя они и оказывают влияние на движение ракеты.

Под воздействием этих кратковременных возмущений изменяются параметры движения, поэтому величину любого из них можно представить состоящей из номинального значения и некоторого малого отклонения:

$$\begin{aligned} v_b &= v_n + v; & \dot{\theta}_b &= \dot{\theta}_n + \dot{\theta}; & \theta_b &= \theta_n + \theta; \\ \alpha_b &= \alpha_n + \alpha; & \delta_b &= \delta_n + \delta. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) справедливы для произвольных функций v_b , $\dot{\theta}_b$, θ_b , δ_b ; в частности, они справедливы и для функций номинального движения v_n , $\dot{\theta}_n$, θ_n , δ_n .

Значения переменных из равенств (1.13) подставим в уравнения (1.10) и из полученного результата вычтем уравнения (1.10), соответствующие параметрам номинального движения. Примем, что $\cos \alpha_n \approx 1$, $\sin \alpha_n \approx \alpha_n$. Полагая отклонения v , $\dot{\theta}$, θ , α и δ малыми и оставляя только члены первого порядка, получим следующие уравнения в скоростной системе координат относительно отклонений:

$$\begin{aligned} m \dot{v} &= -P_z \alpha_n \alpha - \rho v_n S c_{X_A} v - G \cos \theta_n \theta - R_{Y_p}^{(0)} (\alpha_n \delta + \delta_n \alpha); \\ m v_n \dot{\theta} &= P_z \alpha + G \sin \theta_n \theta + \frac{\rho v_n^2}{2} S c_{Y_A}^{(a)} \alpha + \rho v_n S c_{Y_A}^{(a)} \alpha_n v + R_{Y_p}^{(0)} (\delta - \delta_n \alpha_n \alpha); \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} I_Z \ddot{\theta} &= -\frac{\rho v_n^2}{2} S l m_Z^{(a)} \alpha - \rho v_n S l m_Z^{(a)} \alpha_n v - \frac{\rho v_n}{2} S l^2 m_Z^{(b)} \dot{\theta} - \\ &- R_{Y_p}^{(0)} (x_p - x_c) \delta - \frac{\rho}{2} S l^2 m_Z^{(b)} \dot{\theta}_n v - 2 \sum_{(i)}^I m_j \int_{x_{0j}} (x - x_c) dx \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Здесь неизвестными являются отклонения параметров движения v , θ , $\dot{\theta}$, α , δ . Функции v_n , θ_n , $\dot{\theta}_n$, α_n и δ_n , характеризующие номинальное движение, считаются известными, их можно определить из решений уравнений (1.10) и уравнения (1.12). Заменив $\alpha = \dot{\theta} - \theta$, уравнения (1.14) запишем в виде

$$\dot{v} + c_{vv} v + c_{v\theta} \theta + c_{v\dot{\theta}} \dot{\theta} + c_{v\delta} \delta = 0;$$

$$\dot{\theta} + c_{\theta\theta} \theta + c_{\theta\dot{\theta}} \dot{\theta} + c_{\theta v} v + c_{\theta\delta} \delta = 0; \quad (1.15)$$

$$\ddot{\theta} + c_{\theta\ddot{\theta}} \ddot{\theta} + c_{\theta\dot{\theta}} \dot{\theta} + c_{\theta\theta} \theta + c_{\theta v} v + c_{\theta\delta} \delta = 0.$$

Здесь введены следующие обозначения коэффициентов:
в первом уравнении –

$$c_{vv} = \frac{1}{m} \rho v_n S c_{x_a}; \quad c_{v\theta} = \frac{1}{m} (G \cos \theta_n - P_s \alpha_n - R_{Y_p}^{(b)} \delta_n);$$

$$c_{v\psi} = \frac{1}{m} (P_s \alpha_n + R_{Y_p}^{(b)} \delta_n); \quad c_{v\delta} = \frac{1}{m} R_{Y_p}^{(b)} \alpha_n;$$

во втором и третьем уравнениях –

$$c_{\theta v} = \frac{1}{m v_n} \left(P_s - G \sin \theta_n + \frac{\rho v_n^2}{2} S c_{Y_a}^{(a)} - R_{Y_p}^{(b)} \delta_n \alpha_n \right);$$

$$c_{\theta\theta} = \frac{1}{m v_n} \left(-P_s - \frac{\rho v_n^2}{2} S c_{Y_a}^{(a)} + R_{Y_p}^{(b)} \delta_n \alpha_n \right);$$

$$c_{\theta\psi} = -\frac{1}{m v_n} \rho v_n S c_{Y_a}^{(a)} \alpha_n; \quad c_{\theta\delta} = -\frac{1}{m v_n} R_{Y_p}^{(b)};$$

$$c_{\psi\psi} = \frac{1}{I} \left[\frac{\rho v_n^2}{2} S l^2 m_Z^{(b)} + 2 \sum_0^l m_j \int_{x_{0j}}^{l_a} (x - x_C) dx \right];$$

$$c_{\psi\theta} = \frac{1}{I} \frac{\rho v_n^2}{2} S l m_Z^{(a)} = -c_{\theta\psi}, \quad c_{\psi v} = \frac{1}{I} \left(\rho v_n S l m_Z^{(a)} \alpha_n + \frac{\rho}{2} S l^2 m_Z^{(b)} \dot{\theta}_n \right);$$

$$c_{\psi\delta} = \frac{1}{I} R_{Y_p}^{(b)} (x_p - x_C); \quad I = I_Z.$$

В отличие от уравнений (1.10) уравнения (1.15) называются уравнениями возмущенного движения или уравнения-

ми для отклонений. Это линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. Коэффициенты уравнений определяются через характеристики ракеты $m, I, P_s, R_{Y_p}^{(b)}, x_p, x_C$; параметры невозмущенного движения $v_n, \dot{\theta}_n, \alpha_n, \delta_n$, плотность воздуха и аэродинамические коэффициенты могут быть вычислены. Так как номинальное движение мало отличается от программного, то в формулах (1.16) и (1.17) вместо номинальных значений можно принять программные значения $v_{пр}, \theta_{пр}, \alpha_{пр}, \dot{\theta}_{пр}$, известные из расчета программного движения.

Теперь найдем уравнения возмущенного движения ракеты в скоростной системе координат в плоскости рыскания.

Невозмущенное движение ракеты происходит в плоскости тангажа, поэтому в плоскости рыскания все параметры номинального движения и внешние силы тождественно равны нулю. Возмущения в плоскости рыскания будем считать малыми и определять их будем через угол рыскания ψ , угол скольжения β , угол поворота траектории σ по отношению к плоскости невозмущенного движения и угол поворота управляющих органов δ .

Ввиду малости возмущений и наличия плоскостей симметрии ракеты возмущенное движение в плоскости рыскания не будет зависеть от возмущений в плоскости тангажа.

С появлением угла скольжения возникает боковая аэродинамическая сила $Z_a = q S c_{Z_a}^{(b)} \beta$ и аэродинамический момент $M_Y = q S l m_Y^{(b)} \beta$. При этом вследствие осевой симметрии корпуса ракеты при $\alpha_n = 0$ производная $c_{Z_a}^{(b)} = c_{Y_a}^{(a)}$, а $m_Y^{(b)} = m_Z^{(a)}$.

При вращении корпуса ракеты с угловой скоростью $\dot{\psi}$ возникает демпфирующий момент в плоскости рыскания. На основании уравнений (1.3) и (1.4)

$$M_{Y\psi} = \frac{\rho v^2}{2} S l^2 m_Y^{(b)} \frac{\dot{\psi}}{v} + 2 \dot{\psi} \sum_0^l m_j \int_{x_{0j}}^{l_a} (x - x_C) dx.$$

Уравнения возмущенного движения в плоскости рыскания можно получить из уравнений (1.14), заменив в них отклонения θ, ψ, α отклонениями σ, ψ, β соответственно и приняв $G = 0, \beta_n = \psi_n = \delta_n = 0$. В этом случае второе и третье уравнения не будут связаны с первым уравнением. Итак, уравнения возмущенного движения в скоростной системе координат будут иметь такой вид:

$$\dot{\sigma} + c_{\sigma\sigma}\sigma + c_{\sigma\psi}\psi + c_{\sigma\delta}\delta = 0;$$

$$\ddot{\psi} + c_{\psi\psi}\dot{\psi} + c_{\psi\sigma}\dot{\sigma} + c_{\psi\sigma}\sigma + c_{\psi\delta}\delta = 0, \quad (1.18)$$

$$\beta = \psi - \sigma,$$

где

$$c_{\sigma\psi} = -c_{\sigma\sigma} = \frac{1}{m v_H} \left(P_z + \frac{\rho v_H^2}{2} S c_{Za}^{(0)} \right); \quad c_{\sigma\delta} = -\frac{1}{m v_H} R_{Zp}^{(0)};$$

$$c_{\psi\psi} = \frac{1}{I} \left[\frac{\rho v_H^2}{2} S l^2 m_Y^{(0)} + 2 \sum_{(j)} m_j \int_{x_{0j}}^{l_a} (x - x_C) dx \right]; \quad (1.19)$$

$$c_{\psi\sigma} = -c_{\psi\sigma} = \frac{1}{I} \frac{\rho v_H^2}{2} S l m_Y^{(0)}; \quad c_{\psi\delta} = \frac{1}{I} R_{Zp}^{(0)} (x_p - x_C);$$

$$I = I_Y = I_Z.$$

При принятых ранее допущениях малое отклонение γ в плоскости крена будет зависеть только от возмущений углов поворота управляющих органов. Момент управляющих сил рулей относительно продольной оси ракеты

$$M_{Xp} = M_{Xp}^{(0)} \delta_X,$$

где δ_X — обобщенный угол поворота управляющего органа относительно продольной оси X ; $M_{Xp}^{(0)}$ — градиент управляющего момента.

Уравнение возмущенного движения относительно продольной оси будет

$$\ddot{\gamma} + c_{\gamma\gamma}\dot{\gamma} + c_{\gamma\delta}\delta_X = 0; \quad c_{\gamma\delta} = \frac{1}{I_X} M_{Xp}^{(0)}; \quad (1.20)$$

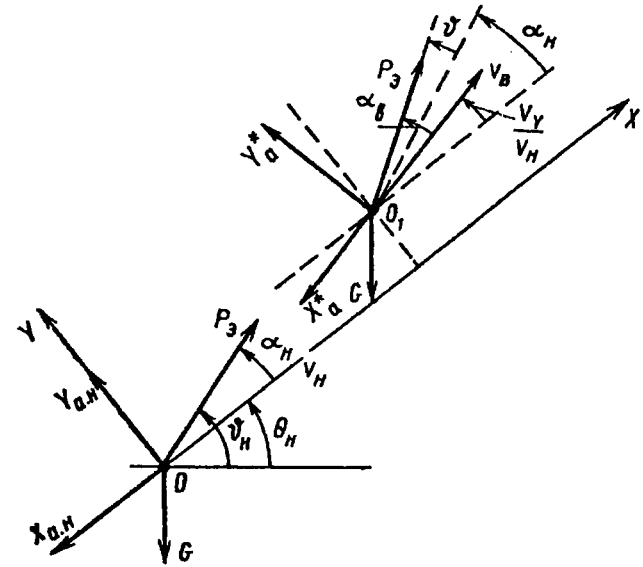


Рис. 1.6

Здесь через $I_X c_{\gamma\gamma} \dot{\gamma}$ обозначен демфирующий момент относительно продольной оси, который может возникать, например, при наличии на корпусе ракеты оперения.

Для изучения кратковременных возмущений на небольшом интервале времени будем в дальнейшем принимать траекторию невозмущенного движения центра масс ракеты прямолинейной. Составим уравнения возмущенного движения для плоскости тангажа в неподвижной системе координат OXY . Такие уравнения более удобны при изучении возмущенного движения ракеты с учетом колебаний жидкости и упругих колебаний корпуса.

Ось X неподвижной системы координат направим по касательной к траектории невозмущенного движения, ось Y — перпендикулярно ей (рис. 1.6).

Невозмущенное (номинальное) движение в плоскости тангажа в неподвижной системе координат характеризуется следующими уравнениями:

$$\left\{ \begin{aligned} m\dot{v}_{XH} &= P_3 \cos \alpha_H - X_{aH} - G \sin \theta_H - V_{pH} \sin \alpha_H; \quad v_{XH} = v_H; \\ \dot{v}_{YH} &= 0; \quad Y_{aH} + P_3 \sin \alpha_H - G \cos \theta_H + Y_{pH} \cos \alpha_H = 0; \\ \dot{\theta}_H &= 0; \quad M_{ZH} + Y_{pH}(x_p - x_C) = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.21)$$

Обозначим малые отклонения проекций скорости центра масс на неподвижные оси координат через v_X и v_Y , малое отклонение угла тангажа — через ϑ , а угла поворота управляющего органа — через δ . В результате возмущений вектор скорости отклонится на угол v_Y/v_H , так что новое значение угла атаки

$$\alpha_s = \alpha_H + \alpha; \quad \alpha = \vartheta - v_Y/v_H. \quad (1.22)$$

Плоское движение в неподвижной системе координат OXY определяется теперь следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_X &= P_3 \cos(\alpha_H + \vartheta) - G \sin \theta_H - X_a^* \cos(v_Y/v_H) - \\ &\quad - Y_a^* \sin(v_Y/v_H) - Y_p^* \sin(\alpha_H + \vartheta); \\ m\dot{v}_Y &= P_3 \sin(\alpha_H + \vartheta) - G \cos \theta_H - X_a^* \sin(v_Y/v_H) + \\ &\quad + Y_a^* \cos(v_Y/v_H) + Y_p^* \cos(\alpha_H + \vartheta); \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$I\ddot{\theta} = -M_{ZH}^* - M_Z^* - Y_p^*(x_p - x_C).$$

Выразив возмущенные силы и моменты X_a , Y_a , Y_p , M_{ZH} , M_Z через величины, описанные равенствами (1.13), и произведя вычитание (1.21) из (1.23), получим уравнения движения ракеты в неподвижной системе координат относительно отклонения v_X , v_Y , ϑ и δ :

$$\begin{aligned} \dot{v}_X + c_{v_X v_X} v_X + c_{v_X v_Y} v_Y + c_{v_X \vartheta} \vartheta + c_{v_X \delta} \delta &= 0; \\ \dot{v}_Y + c_{v_Y v_Y} v_Y + c_{v_Y v_X} v_X + c_{v_Y \vartheta} \vartheta + c_{v_Y \delta} \delta &= 0; \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\ddot{\theta} + c_{\theta \theta} \dot{\theta} + c_{\theta \delta} \delta + c_{\vartheta v_X} v_X + c_{\vartheta v_Y} v_Y + c_{\vartheta \delta} \delta = 0.$$

В первом уравнении коэффициенты

$$\begin{aligned} c_{v_X v_X} &= \frac{1}{m} \rho v_H S c_{Xa}; \quad c_{v_X v_Y} = \frac{1}{m} \frac{\rho v_H}{2} S c_{Ya}^{(a)} \alpha_H; \\ c_{v_X \vartheta} &= \frac{1}{m} (P_3 \alpha_H + R_{Yp}^{(b)} \delta_H); \quad c_{v_X \delta} = \frac{1}{m} R_{Yp}^{(b)} \alpha_H. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Во втором и третьем уравнениях

$$\begin{aligned} c_{v_Y v_Y} &= \frac{1}{m} \frac{\rho v_H}{2} S (c_{Ya}^{(a)} + c_{Xa}); \quad c_{v_Y v_X} = -\frac{1}{m} \rho v_H S c_{Ya}^{(a)} \alpha_H; \\ c_{v_Y \vartheta} &= -\frac{1}{m} \left(P_3 + \frac{\rho v_H^2}{2} S c_{Ya}^{(a)} - R_{Yp}^{(b)} \delta_H \alpha_H \right); \\ c_{v_Y \delta} &= -\frac{1}{m} R_{Yp}^{(b)}; \quad c_{\vartheta v_Y} = -\frac{1}{I v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S l m_Z^{(a)}; \\ c_{\vartheta v_X} &= \frac{1}{I v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S l \left(m_Z^{(a)} \alpha_H + \frac{l m_Z^{(b)} \dot{\theta}_H}{\dot{\theta}_H} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Остальные коэффициенты $c_{\theta \theta}$, $c_{\theta \delta}$ и $c_{\delta \delta}$ вычисляются по формулам (1.17).

Глава II

ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

2.1. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Устойчивости движения ракеты придается большое значение. Для обеспечения устойчивости движения ракета снабжается автоматом стабилизации. Автомат стабилизации должен обладать такими свойствами, чтобы случайно возникающие малые отклонения параметров движения ракеты через некоторое время были сведены к нулю или к очень малым допустимым величинам.

Классическим является определение устойчивости по Ляпунову.

Любая система линейных дифференциальных уравнений, в том числе и линеаризованных уравнений возмущенного движения, например (1.15), может быть приведена к нормальному виду:

$$dy_s/dt = Y_s(t, y_1, \dots, y_n) \quad (s = 1, 2, \dots, n),$$

где y_s – отклонения координат.

Определение устойчивости по Ляпунову формулируется следующим образом.

Невозмущенное движение устойчиво, если для всякого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно подобрать другое положительное число $\eta(\varepsilon)$, такое, что для всех возмущенных движений $y_s = y_s(t)$, для которых в начальный момент времени $t = t_0$ выполняются неравенства $|y_s(t_0)| \leq \eta_s$, при всех $t > t_0$ будут выполняться неравенства $|y_s(t)| < \varepsilon_s$.

Если невозмущенное движение устойчиво и если число η_s можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам $|y_s(t_0)| \leq \eta_s$, будут выполняться условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_s(t) = 0,$$

то невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым.

Можно ли судить об устойчивости реальной системы по линеаризованным уравнениям? Ответ на этот вопрос дают следующие три теоремы Ляпунова.

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то действительная система будет такой же устойчивой, как и линеаризованная, т.е. никакие добавки в виде членов второй и высшей степеней переменных и их производных не могут в этом случае нарушить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то действительная система будет неустойчива, т.е. никакие добавки в виде членов второй и высших степеней переменных и их производных не могут придать системе устойчивость.

3. При наличии нулевых и чисто мнимых корней по линеаризованным уравнениям нельзя сделать заключение об устойчивости или неустойчивости действительной системы. Отброшенные члены второй и высших степеней переменных и их производных в некоторых случаях могут коренным образом изменить вид динамической характеристики системы.

Сформулированное определение асимптотической устойчивости относится к системам с неограниченным временем движения, т.е. $0 < t < \infty$. Поскольку время движения ракеты ограничено, следует говорить о так называемой устойчивости на конечном интервале времени ($t_0 < t \leq t_1$), в котором совершается процесс движения.

Если для всякого положительного числа ε , как бы мало оно ни было, можно подобрать такое другое положительное число $\eta(\varepsilon)$, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени выполняются условия $|y_s(t_0)| \leq \eta_s$ и в любой момент между t_0 и t_1 ($t_0 < t \leq t_1$) будут выполняться условия $|y_s(t)| < \varepsilon_s$, то движение будет устойчивым на конечном интервале времени. Устойчивость на конечном интервале времени называют также *технической устойчивостью*.

В некоторых случаях требования к системе стабилизации из условий технической устойчивости могут быть более мягкими, чем требования из условий асимптотической устойчивости. Это обстоятельство имеет немаловажное значение и его в некоторых случаях целесообразно использовать, поскольку время движения ракеты на активном участке траектории невелико.

2.2. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Пусть мы имеем систему однородных линейных дифференциальных уравнений n -го порядка с постоянными коэффициентами. Решение такой системы можно искать в виде $x = C_x e^{pt}$, где x – любая координата. Для нетривиального решения определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных C_x , должен быть равен нулю. Раскрыв

его, получим характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений в виде

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0. \quad (2.1)$$

Определив все корни $p_k (k = 1, 2, \dots, n)$ характеристического уравнения (2.1), найдем, что любая координата будет изменяться по закону

$$x = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t}, \quad (2.2)$$

где C_k — произвольная постоянная.

Если все корни характеристического уравнения p_k вещественные числа, то все C_k также вещественные числа и x — сумма экспоненциальных функций. Если все p_k отрицательные, то при $t \rightarrow \infty x \rightarrow 0$; если хотя бы одно из значений p_k положительно, то $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни $p_{k, k+1} = \alpha_k \pm i\omega_k$. Каждую пару слагаемых в выражении (2.2), соответствующую корням p_k и p_{k+1} , на основании тождества Эйлера можно представить в виде

$$e^{\alpha_k t} (A_k \sin \omega_k t + B_k \cos \omega_k t),$$

где A_k, B_k — вещественные числа.

Решение (2.2) стремится к нулю, если все вещественные части α_k комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения отрицательны. Наличие пары мнимых корней характеристического уравнения (остальные корни, например, отрицательны) свидетельствует о том, что система будет совершать неограниченно долго колебания с постоянной амплитудой, зависящей от начальных условий.

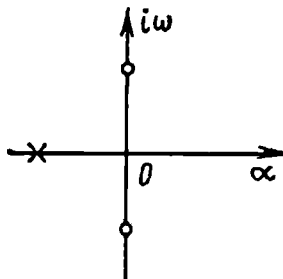


Рис. 2.1

Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости движения в линейном приближении состоит в том, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения были отрицательны, а все комплексно-сопряженные корни имели отрицательную вещественную часть.

На рис. 2.1, на комплексной плоскости Z для примера нанесены точки, соответствующие корням характеристического уравнения. Система устойчива, если все веществен-

ные корни и все вещественные части комплексно-сопряженных корней лежат слева от мнимой оси. Если часть корней (хотя бы один) находится на мнимой оси, то обычно говорят, что система находится на границе устойчивости.

Для оценки устойчивости нет нужды вычислять корни характеристического уравнения, тем более, что для уравнения высокой степени это не так просто сделать. Надо выяснить лишь, все ли они расположены слева от мнимой оси. Для такой оценки разработано несколько критериев устойчивости. Рассмотрим вначале алгебраический критерий Раута-Гурвица. Его можно сформулировать следующим образом.

Для того, чтобы все корни характеристического уравнения

$$L(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.3)$$

с положительными коэффициентами имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы предпоследний определитель Гурвица Δ_{n-1} и все его диагональные миноры были положительны.

Построение определителей проиллюстрируем на примере характеристического уравнения пятой степени:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0.$$

В случае характеристического уравнения третьей степени условие устойчивости выражается неравенством

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

В 1936 г. А.В. Михайлов предложил критерий, основанный на анализе графика функции $L(i\omega)$, построенного на комплексной плоскости $Z = U + iV$, при изменении параметра ω в интервале $0 \leq \omega \leq +\infty$. Функция $L(i\omega)$ образуется из характеристического полинома $L(p)$ подстановкой в него чисто мнимого значения $p = i\omega$. График функции $L(i\omega)$ называется кривой Михайлова (рис. 2.2). Критерий Михайлова формулируется следующим образом.

Для устойчивости линейной системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы вектор $L(i\omega)$ при $0 \leq \omega \leq +\infty$ совершил поворот против

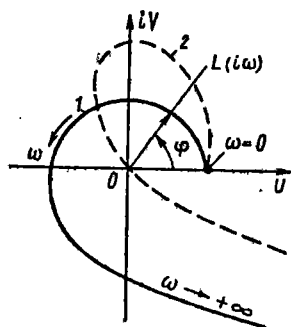


Рис. 2.2

часовой стрелки на угол $\varphi = n(\pi/2)$ или, чтобы кривая Михайлова проходила поочередно n квадрантов против часовой стрелки вокруг начала координат.

На рис. 2.2 изображена кривая Михайлова для характеристического уравнения четвертого порядка (кривая 1), чему соответствует устойчивая система. Если кривая Михайлова проходит через начало координат (кривая 2), что соответствует наличию пары чисто мнимых корней в характеристическом уравнении, то система находится на границе устойчивости.

В практике проектирования для обеспечения устойчивости требуется подобрать некоторые параметры системы, полагая остальные известными. Для решения подобных задач обычно используют метод D -разбиения, т.е. разбиения пространства коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n характеристического уравнения на области, соответствующие одному и тому же числу корней, расположенных слева от мнимой оси. Так как переход через кривую D -разбиения в пространстве коэффициентов соответствует переходу корней через мнимую ось в плоскости корней, то эта мнимая ось есть изображение границы D -разбиения. Поэтому универсальный способ построения границы D -разбиения заключается в замене в характеристическом полиноме p на $i\omega$ и построении границы при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Как в случае критерия Михайлова, так и в случае D -разбиения вспомогательный параметр ω имеет вполне определенный физический смысл — он представляет собой частоту

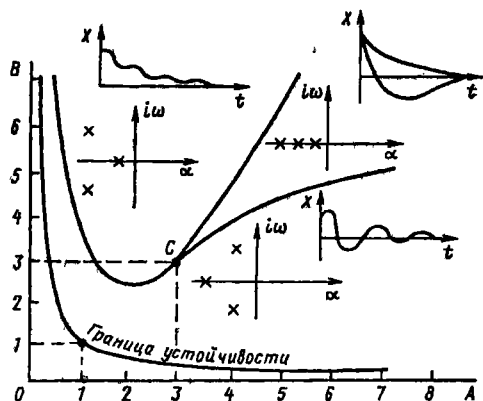


Рис. 2.3

собственных гармонических колебаний системы на границе устойчивости в данной ее точке.

Примером D -разбиения можно назвать диаграмму Вышнеградского для характеристического уравнения 3-й степени

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Путем введения новой переменной

$$u = \sqrt[3]{a_0/a_3} p$$

характеристическое уравнение можно привести к нормированному виду:

$$u^3 + Au^2 + Bu + 1 = 0.$$

Из условия устойчивости

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

получаем границу устойчивости в виде уравнения гиперболы

$$AB = 1 \text{ при } A > 0, B > 0.$$

В плоскости параметров A и B гипербола Вышнеградского изображена на рис. 2.3. Она дает исчерпывающий ответ о влиянии коэффициентов A и B на устойчивость движения.

2.3. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

Коэффициенты уравнений возмущенного движения (1.15), (1.18), (1.20), (1.24) определяются через массовые и геометрические характеристики ракеты, плотность воздуха и кинематические параметры невозмущенного движения, т.е. являются известными функциями времени. Несмотря на то что перечисленные системы уравнений линейны относительно возмущений, их анализ затруднен наличием переменных коэффициентов. Решать такие уравнения обычно можно методами численного интегрирования на электронных вычислительных машинах (ЭВМ) или используя моделирующие устройства.

Для предварительного анализа при проектировании ракеты и ее системы управления обычно используется так называемый прием

"замораживания" коэффициентов уравнений, при помощи которого можно получить хотя и грубые, но более общие и обозримые результаты.

Сущность приема "замораживания" коэффициентов заключается в следующем. Пусть, например, коэффициенты системы уравнений возмущенного движения (1.15) $c_{vv}(t), \dots, c_{\delta\delta}(t)$ определены для некоторой траектории невозмущенного движения. На этой траектории выбирают несколько характерных точек и вместо системы уравнений (1.15) с переменными коэффициентами рассматривают совокупность аналогичных систем с постоянными коэффициентами $c_{vv}(t_k), \dots, c_{\delta\delta}(t_k)$, представляющими собой значения коэффициентов уравнений (1.15) в фиксированные моменты времени t_k . Другими словами, время полета разбивают на небольшие промежутки, включающие точки t_k , и в этих промежутках коэффициенты уравнений считают постоянными.

Прием "замораживания" коэффициентов позволяет применять широко известные в инженерной практике методы решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, методы оценки устойчивости решений, частотные методы теории автоматического регулирования. Вместе с тем исследования при помощи приема "замораживания" коэффициентов следует рассматривать как предварительные, носящие в основном качественный характер. Они должны быть дополнены исследованиями систем уравнений при помощи других методов, в частности, при помощи моделирующих устройств и ЭВМ. В этих исследованиях обычно учитываются специфические особенности систем, например, нелинейности систем управления, вследствие чего представляется возможным уточнить результаты, полученные на основании линейных уравнений.

Рассмотрим свободное возмущенное движение ракеты (без системы управления) в плоскости тангажа, которое описывается уравнениями (1.15) при $\delta = 0$. Для упрощения примем, что невозмущенное движение представляет собой прямолинейный установившийся полет и что коэффициенты уравнений постоянны. Характеристическое уравнение для системы (1.15) при $\delta = 0$ будет

$$p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0. \quad (2.4)$$

Коэффициенты a_1, a_2, a_3 и a_4 — вещественные, поэтому корни уравнения (2.4) могут быть вещественными и комплексно-сопряженными.

Как показывают расчеты статически устойчивой ракеты, характеристическое уравнение имеет две пары комплексных сопряженных корней, причем вещественная и мнимая части одной пары корней по абсолютной величине во много раз превышают вещественные и мнимые части другой пары корней. Это значит, что свободное возмущенное движение можно

представить в виде суммы двух движений — короткопериодического, соответствующего паре больших по модулю комплексных корней, и длиннопериодического, соответствующего паре малых по модулю комплексных корней.

Например, для гипотетической статически устойчивой ракеты в некоторый момент времени t_k корни уравнений (2.4) имеют следующие значения:

$$p_{1,2} = -0,684 \pm i \cdot 1,387; \quad p_{3,4} = -0,0066 \pm i \cdot 0,0623;$$

периоды колебаний соответственно равны $\tau_1 = 4,54$ с, $\tau_2 = 100,83$ с. Для отклонений $v, \theta, \dot{\theta}$ получим выражение вида $x = A_0 + A_1 e^{-0,684t} \cos(1,387t + \alpha_1) + A_2 e^{-0,0066t} \cos(0,0623t + \alpha_2)$ ($x = v, \theta, \dot{\theta}$), причем для отклонения v всегда $|A_1| < |A_2|$. Следовательно, изменение v определяется главным образом медленно затухающим слагаемым и является длиннопериодическим.

В выражениях для углов $\dot{\theta}$ и θ как медленно затухающие, так и быстро затухающие слагаемые имеют существенное значение. Изменение угла атаки $\alpha = \dot{\theta} - \theta$ определяется, в основном, быстро затухающим слагаемым и относится к короткопериодическому движению.

Такой характер изменения параметров возмущенного движения во времени не зависит от типа ракеты. Ракета может быстро изменять угол атаки, вращаясь относительно центра масс. В то же время скорость полета ракеты изменяется по величине сравнительно медленно, так как очень малы продольные ускорения \dot{v} , обусловленные изменением сил вследствие изменения угла атаки.

Таким образом, возмущенное движение ракеты условно можно считать состоящим из двух этапов. Первый этап — короткопериодический. Это этап поперечных движений ракеты и быстрого изменения угла атаки [второе и третье уравнения системы (1.15)]. В конце этого этапа момент аэродинамических сил относительно поперечной оси будет практически уравновешен моментом управляющих сил, а угловая скорость $\dot{\theta}$ будет близка к нулю. Второй этап движения — длиннопериодический, медленно затухающий [первое уравнение системы (1.15)]. Это этап медленного изменения скорости v .

Управление полетом в основном заключается в изменении направления вектора силы тяги двигателей P_z . Эта сила направлена по продольной оси ракеты и, следовательно, направление ее определяется углом тангажа. Так как угол атаки и угол тангажа изменяются практически только на короткопериодическом этапе возмущенного движения, то именно этот этап и является определяющим при проектировании системы

стабилизации углового движения. Вместе с тем при анализе систем регулирования скорости v определяющим этапом будет длиннопериодический.

В малом влиянии скорости v на отклонения δ и θ нетрудно убедиться, если сравнить значения коэффициентов связей второго и третьего уравнений (1.15). Так, во втором уравнении

$$|c_{\theta v}/c_{\theta\theta}| < |2\alpha_n/v_n|,$$

а в третьем

$$|c_{\theta v}/c_{\theta\theta}| \approx |2\alpha_n/v_n|.$$

Только в начале полета, когда скорость v_n мала, а угол атаки значителен, связь уравнений может быть существенной.

Таким образом, для короткопериодического этапа возмущенного движения во втором и третьем уравнениях системы (1.15) принимают $v = 0$. Тогда

$$\dot{\theta} + c_{\theta\theta}\theta + c_{\theta\delta}\delta = 0; \quad \ddot{\delta} + c_{\delta\delta}\ddot{\delta} + c_{\delta\theta}\dot{\theta} + c_{\delta\theta}\theta + c_{\delta\delta}\delta = 0. \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) обычно называют уравнениями возмущенного движения в плоскости тангажа. Из анализа формул (1.17) следует, что значения коэффициентов практически не изменятся, если малые величины δ_n и α_n положить равными нулю, т.е. считать, что невозмущенное движение происходит с углом атаки $\alpha_n = 0$. При таком предположении уравнения (2.5) будут отличаться от уравнений возмущенного движения в плоскости рыскания (1.18) всего лишь на величину одного коэффициента. Формула для $c_{\theta\theta}$ содержит проекцию веса ракеты на нормаль к траектории $G \sin \theta_n$, тогда как на движение рыскания вес влияния не оказывает, поэтому коэффициент $c_{\theta\theta}$ от него не зависит.

Уравнения короткопериодического возмущенного движения в плоскости тангажа в неподвижной системе координат получим из выражения (1.24) при $v_X = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{v}_Y + c_{v_Y v_Y} v_Y + c_{v_Y \delta} \delta + c_{v_Y \theta} \theta &= 0; \\ \ddot{\delta} + c_{\delta\delta} \ddot{\delta} + c_{\delta\theta} \dot{\theta} + c_{\delta v_Y} v_Y + c_{\delta\delta} \delta &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Уравнения короткопериодического возмущенного движения в плоскости рыскания в скоростной системе координат на основании выражения (1.18) примут такой вид:

$$\dot{\delta} + c_{\delta\delta} \delta + c_{\delta\psi} \psi + c_{\delta\theta} \theta = 0; \quad \ddot{\psi} + c_{\psi\psi} \ddot{\psi} + c_{\psi\delta} \delta + c_{\psi\theta} \theta + c_{\psi\psi} \psi + c_{\psi\delta} \delta = 0. \quad (2.7)$$

При сделанных допущениях уравнения (2.6) тождественны уравнениям (2.5), в чем нетрудно убедиться из сравнения их коэффициентов.

Положим, что уравнение системы управления (1.12) допускает линеаризацию. Проведя ее, получим уравнение системы управления относительно вариаций

$$\delta = F(\theta, \dot{\theta}, \dots, v_Y, \dots). \quad (2.8)$$

Каждое из уравнений (2.5), (2.6), (2.7) образуют совместно с уравнением (2.8) однородную линейную систему дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение твердой ракеты как замкнутой системы автоматического регулирования.

2.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

При исследовании динамики летательных аппаратов как объектов автоматического регулирования широко используют передаточные функции и частотные характеристики, которые характеризуют свойства объекта регулирования в области комплексного переменного p и частотной области. При этом оперируют не обобщенными координатами $q_n(t)$, являющимися функциями времени, а так называемым и з о б р а ж е н и е м этих функций по Лапласу $q_n(p)$, которое определяется следующим образом:

$$L[q_n(t)] = \int_0^\infty q_n(t) e^{-pt} dt = q_n(p),$$

где $L[q_n(t)]$ — оператор преобразования Лапласа, а p — комплексная величина, параметр этого преобразования.

Существует следующая связь между изображением производной и изображением самой функции:

$$L\left[\frac{d^n q_m(t)}{dt^n}\right] = p^n q_m(p) - p^{n-1} q_m(0) - \dots - p^{n-k-1} q_m^{(k)}(0) - \dots - q_m^{(n-1)}(0),$$

где $q_m(0)$ и $q_m^{(k)}(0)$ — значения функции и ее производных при $t = 0$.

Используя изображения функций по Лапласу, дифференциальные уравнения возмущенного движения ракеты с замороженными коэффициентами при нулевых начальных условиях можно заменить алгебраическими уравнениями для изображений

$$Q(p)x_1(p) = R(p)x_2(p),$$

где $Q(p)$, $R(p)$ — полиномы от p ; $x_1(p)$ — может быть изображением любой из интересующих нас величин: θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, v и т.д.; $x_2(p) = \delta(p)$. В дальнейшем $x_2(p)$ будем называть входной величиной, а $x_1(p)$ — выходной.

Отношение изображений при нулевых начальных условиях выходной величины к входной носит название передаточной функции:

$$W_{x_1}(p) = \frac{x_1(p)}{x_2(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Нетрудно видеть, что передаточная функция разомкнутой цепи, состоящей из последовательно соединенных звеньев, равна произведению передаточных функций звеньев:

$$W(p) = W_1(p)W_2(p)W_3(p)\dots$$

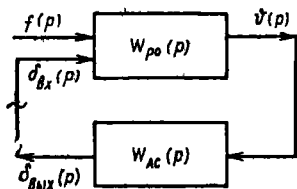


Рис. 2.4

Обратимся теперь к замкнутой одноконтурной системе, состоящей из ракеты — регулируемого объекта (РО) и автомата стабилизации (АС) (рис. 2.4). На схеме $f(p)$ — изображение внешнего воздействия на ракету. Разомкнем систему, как показано на рисунке. Тогда из определения передаточной функции следует, что

$$\dot{\theta}(p) = [\delta_{вх}(p) + f(p)]W_{PO}(p); \quad \delta_{вых}(p) = \dot{\theta}(p)W_{AC}(p).$$

Исключив из этих уравнений $\delta_{вх}(p) = -\delta_{вых}(p)$, получим передаточную функцию замкнутой системы по возмущающему воздействию

$$W_f(p) = \frac{\dot{\theta}(p)}{f(p)} = \frac{W_{PO}(p)}{1 + W(p)}, \quad (2.9)$$

где $W(p) = W_{PO}(p)W_{AC}(p)$ — передаточная функция разомкнутой цепи.

Характеристическое уравнение замкнутой системы может быть представлено в виде

$$L_{зам}(p) = 1 + W(p) = 0. \quad (2.10)$$

Рассмотрим уравнения возмущенного движения ракеты в плоскости тангажа (2.5) и в плоскости рыскания (2.7).

Запишем уравнения (2.5) для изображений

$$(p + c_{\theta\theta})\theta(p) + c_{\theta\dot{\theta}}\dot{\theta}(p) + c_{\theta\delta}\delta(p) = 0; \quad (2.11)$$

$$(p^2 + c_{\dot{\theta}\dot{\theta}}p + c_{\dot{\theta}\theta})\dot{\theta}(p) + c_{\dot{\theta}\theta}\theta(p) + c_{\dot{\theta}\delta}\delta(p) = 0.$$

Исключив $\theta(p)$, найдем передаточную функцию

$$W_{\theta}(p) = \frac{\dot{\theta}(p)}{\delta(p)} = \frac{-c_{\theta\delta}(p + c_{\theta\theta}) + c_{\theta\dot{\theta}}c_{\theta\theta}}{p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3}, \quad (2.12)$$

в которой

$$a_1 = c_{\theta\theta} + c_{\dot{\theta}\dot{\theta}}; \quad a_2 = c_{\theta\theta}c_{\dot{\theta}\dot{\theta}} + c_{\dot{\theta}\theta}; \quad (2.13)$$

$$a_3 = c_{\dot{\theta}\dot{\theta}}(c_{\theta\theta} + c_{\dot{\theta}\theta}) = -\frac{c_{\dot{\theta}\dot{\theta}}}{mV_H} G \sin \theta_H.$$

Исключив из уравнения (2.11) $\dot{\theta}(p)$, найдем передаточную функцию

$$W_{\theta}(p) = \frac{\theta(p)}{\delta(p)} = \frac{-c_{\theta\delta}(p^2 + c_{\dot{\theta}\dot{\theta}}p + c_{\dot{\theta}\theta}) + c_{\theta\dot{\theta}}c_{\dot{\theta}\theta}}{p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3}. \quad (2.14)$$

Знаменатель передаточной функции является характеристическим полиномом систем уравнений (2.5) и (2.6):

$$L(p) = p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3. \quad (2.15)$$

Для системы уравнений (2.7), выражающих возмущенное движение в плоскости рыскания, коэффициент $a_3 = 0$, так что

$$L(p) = p(p^2 + a_1 p + a_2). \quad (2.16)$$

Корнями этого полинома будут

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2}(c_{\sigma\sigma} + c_{\psi\dot{\psi}}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(c_{\sigma\sigma} - c_{\psi\dot{\psi}})^2 - 4c_{\psi\psi}}; \quad p_3 = 0.$$

При упрощении уравнений (1.15) степень характеристического уравнения понизилась на единицу, поэтому вместо пары комплексно-сопряженных корней, характеризующих длиннопериодическое движение, появился один нулевой корень. Благодаря нулевому корню отклонения σ и ψ в возмущенном движении, описываемом уравнениями (2.7) при $\delta = 0$, не затухают.

В зависимости от знака коэффициента $c_{\psi\psi}$ корни p_1 и p_2 могут быть или вещественными или комплексно-сопряженными с отрицательными вещественными частями.

Если ракета аэродинамически устойчива ($c_{\psi\psi} > 0$) и если еще $(c_{\sigma\sigma} - c_{\psi\dot{\psi}})^2 < 4c_{\psi\psi}$, то

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega; \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(c_{\sigma\sigma} + c_{\psi\dot{\psi}}); \quad \omega = \sqrt{C_{\psi\psi} - \varepsilon^2}, \quad (2.17)$$

где ω — частота собственных угловых колебаний аэродинамически устойчивой ракеты в потоке воздуха. Если же $(c_{\sigma\sigma} - c_{\psi\dot{\psi}})^2 > 4c_{\psi\psi}$, то корни p_1 и p_2 будут вещественными:

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - c_{\psi\psi}}$$

и переходный процесс будет аperiodически затухающим.

Если ракета аэродинамически неустойчива ($c_{\psi\psi} < 0$), то корни p_1 , p_2 будут вещественными, причем

$$p_1 > 0; \quad p_2 < 0; \quad |p_2| > |p_1|. \quad (2.18)$$

Величины p_1 , p_2 являются, кроме того, корнями знаменателя передаточных функций, найденных из уравнений (2.7):

$$W_\sigma(p) = \dot{\sigma}(p)/\delta(p); \quad W_\psi(p) = \dot{\psi}(p)/\delta(p).$$

Поэтому для статически устойчивой ракеты переходный процесс для скоростей $\dot{\sigma}$ и $\dot{\psi}$ является колебательным и затухающим, а для статически неустойчивой ракеты переходный процесс характеризуется неустойчивостью аperiodического характера.

Когда $c_{\psi\psi} = 0$, то $p_1 = -c_{\sigma\sigma}$, $p_2 = -c_{\psi\dot{\psi}}$ и отклонения скоростей $\dot{\sigma}$ и $\dot{\psi}$ затухают. Когда $(c_{\sigma\sigma} - c_{\psi\dot{\psi}})^2 - 4c_{\psi\psi} = 0$, корни p_1 , p_2 будут вещественными, отрицательными и равными, а отклонения скоростей $\dot{\sigma}$ и $\dot{\psi}$ также затухающими.

Рассмотрим теперь свойства характеристического полинома (2.15). Если $c_{\delta\delta} = 0$, то

$$p_1 = -c_{\theta\theta}; \quad p_2 = -c_{\dot{\theta}\dot{\theta}}; \quad p_3 = 0. \quad (2.19)$$

При заданных начальных условиях переходный процесс для координат θ и $\dot{\theta}$ незатухающий, а для скоростей $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ он затухает аperiodически.

Когда центр давления аэродинамических сил не совпадает с центром масс ракеты ($c_{\delta\delta} \neq 0$), при анализе коэффициентов полинома (2.15) возникают два основных варианта:

а) если $c_{\delta\delta} > 0$, то $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 < 0$ и полином (2.15) будет иметь один действительный положительный корень и пару комплексно-сопряженных корней с отрицательной вещественной частью:

$$p_{1,2} = \varepsilon \pm i\omega (\varepsilon < 0); \quad p_3 > 0; \quad (2.20)$$

б) если $c_{\delta\delta} < 0$, то $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $a_3 > 0$ и все три корня полинома (2.15) вещественные, причем два из них положительные, а один отрицательный:

$$p_1 > 0; \quad p_2 > 0; \quad p_3 < 0. \quad (2.21)$$

Таким образом, свободное движение в плоскости тангажа при $c_{\delta\delta} \neq 0$ неустойчиво.

2.5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Для решения задачи устойчивости и оценки качества переходных процессов ракет как объектов автоматического регулирования широко используются их частотные характеристики.

Пусть задано движение органа управления ракеты, имеющее гармонический характер. Например,

$$\delta(t) = \delta_0 \sin t.$$

Через некоторое время (после того, как затухнут собственные колебания) ракета будет совершать вынужденные колебания с частотой ω . Колебания корпуса ракеты вызывают на входе системы стабилизации сигнал

$$\beta(t) = \beta_0 \sin(\omega t + \varphi).$$

При фиксированной величине δ_0 амплитуда колебаний β_0 и сдвиг по фазе φ являются функциями частоты ω . Функцию

$$A(\omega) = \beta_0(\omega)/\delta_0$$

называют амплитудно-частотной характеристикой, а $\varphi(\omega)$ — фазочастотной характеристикой ракеты. Функции $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ определяют амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) или просто частотную характеристику.

Одним из преимуществ методов, основанных на использовании частотных характеристик, является то, что частотные характеристики могут быть определены из эксперимента с макетом изделия, когда его свойства выразить достоверно дифференциальными уравнениями еще не удается.

Если известна передаточная функция ракеты $W(p)$, то, подставляя $p = i\omega$, получим выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}.$$

В ряде случаев частотные характеристики представляются в виде годографа на комплексной плоскости $Z = U + iV$, причем

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)};$$

$$U(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega); \quad V(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega).$$

Любая точка годографа функции $W(i\omega)$ характеризует комплексное передаточное число, в котором $A(\omega)$ — модуль комплексного числа, $\varphi(\omega)$ — аргумент комплексного числа.

Устойчивость или неустойчивость разомкнутой цепи не дают основания делать заключение об устойчивости замкнутой системы, состоящей из тех же звеньев, так как характеристическое уравнение разомкнутой цепи $Q(p)$ отличается от характеристического уравнения замкнутой системы

$$Q(p) + R(p) = 0.$$

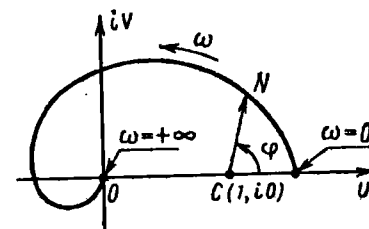


Рис. 2.5

Устойчивой разомкнутой цепи может соответствовать неустойчивая замкнутая система и наоборот.

При дальнейшем изложении мы будем в основном пользоваться частотным критерием Найквиста, который дает возможность оценить устойчивость замкнутой системы по годографу — амплитудно-фазовой характеристике соответствующей разомкнутой цепи.

При составлении уравнений возмущенного движения за положительное было принято такое направление управляющей силы, которое вызывает уменьшение отклонения углов ϑ , ψ , γ . В этом случае в формулировках критерия Найквиста используются положительная вещественная полуось (рис. 2.5) и точка C на этой полуоси с координатами $(1, i0)$. Сформулируем критерий Найквиста для случая, когда степени характеристического полинома замкнутой системы и разомкнутой цепи одинаковы.

Для устойчивости замкнутой линейной системы необходимо и достаточно, чтобы при движении точки N вдоль годографа разомкнутой цепи при $0 \leq \omega \leq +\infty$ вектор CN совершал поворот на угол $\varphi = m\pi$ (против часовой стрелки). Здесь m — число корней с положительными вещественными частями в характеристическом уравнении разомкнутой цепи. Например, годограф радиуса-вектора CN свидетельствует об устойчивости замкнутой системы, если характеристическое уравнение разомкнутой цепи имеет один корень с положительной вещественной частью, т.е. если $m = 1$. Наоборот, система неустойчива, если $m \neq 1$.

2.6. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

Кроме обеспечения устойчивости движения автомат стабилизации должен обеспечить необходимое качество стабилизации (регулирования), которое можно характеризовать быстротой затухания переходного процесса, его колебательностью или монотонностью, максимальным

отклонением, частотой колебаний и т.п. Качество переходного процесса определяется корнями характеристического полинома знаменателя и корнями операторного полинома числителя передаточной функции замкнутой системы. Характер переходного процесса зависит также от начальных условий.

Для систем третьего порядка представление о качестве переходного процесса можно составить на основании диаграммы Вышнеградского (см. рис. 2.3). На диаграмме область устойчивости разделена на три части в зависимости от характера корней характеристического уравнения. В точке С все три корня вещественные и равны между собой.

В теории автоматического регулирования используется понятие степени устойчивости. Степенью устойчивости называется наименьшее из абсолютных значений вещественных частей всех корней характеристического уравнения системы. В том случае, когда ближайшей к мнимой оси является пара комплексно-сопряженных корней, степень устойчивости называется колебательной. Если ближайшим к мнимой оси является вещественный корень, то степень устойчивости называют аperiодической. Степень устойчивости может служить приближенной оценкой быстроты затухания переходного процесса.

Для определения степени устойчивости используется смещенное характеристическое уравнение, которое образуется из заданного (2.3) заменой переменной p на $\lambda = p + h$. Смещенное характеристическое уравнение будет иметь вид

$$L(\lambda) = a_0 \lambda^4 + A_1 \lambda^3 + A_2 \lambda^2 + \dots + A_n = 0, \quad (2.22)$$

причем коэффициенты A_1, A_2, \dots, A_n зависят от a_0, a_1, \dots, a_n и величины смещения h .

На комплексной плоскости корней смещение означает смещение мнимой оси влево на величину $h > 0$ (рис. 2.6). Легко видеть, что, если подобрать величину h такой, чтобы для уравнения (2.22) один корень оказался нулевым или пара корней – чисто мнимыми, а остальные имели отрицательные вещественные части, то величина смещения h будет равна степени устойчивости.

Степень устойчивости удобно определять используя кривую Михайлова. Кривая Михайлова, построенная по исходному характеристическому уравнению ($h = 0$), изображена на рис. 2.7. Зададим различные смещения h_1, h_2 и построим кривые Михайлова по уравнению (2.22). Кривая h_1 характеризует устойчивую, h_2 – неустойчивую систему. Граница устойчивости будет при $h_1 < h < h_2$. Степень устойчивости для исходной системы, таким образом, будет равна h .

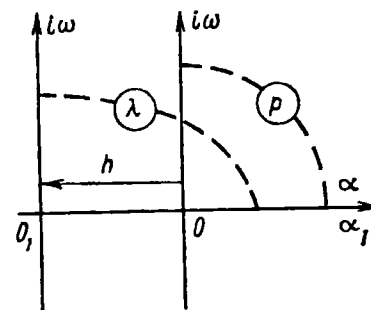


Рис. 2.6

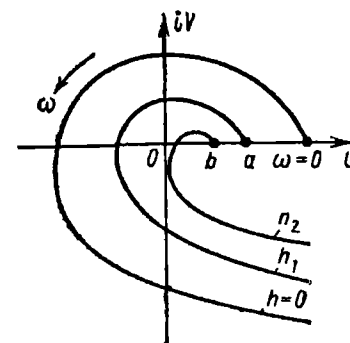


Рис. 2.7

Оценку поведения замкнутой системы на внешнее воздействие удобно давать с помощью частотных характеристик системы. Внешние воздействия обычно схематизируют простыми типовыми функциями времени – единичной функцией $f_1(t)$, единичным импульсом $f_1(t)$ (рис. 2.8), произведением единичной функции на синусоиду или экспоненту. В теории автоматического регулирования показывается, что изменение по времени какой-либо величины x замкнутой системы под действием возмущения $f(t)$, приложенного в какой-либо точке системы, может быть найдено через вещественную частотную характеристику замкнутой системы $U_f(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$. В случае воздействия единичной функции

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U_f(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega;$$

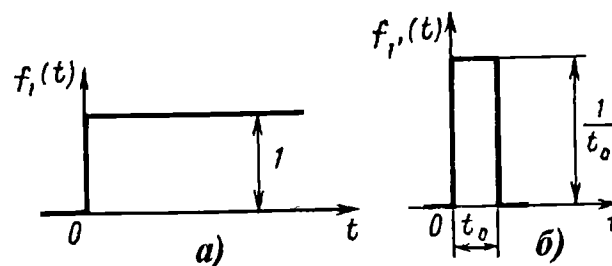


Рис. 2.8

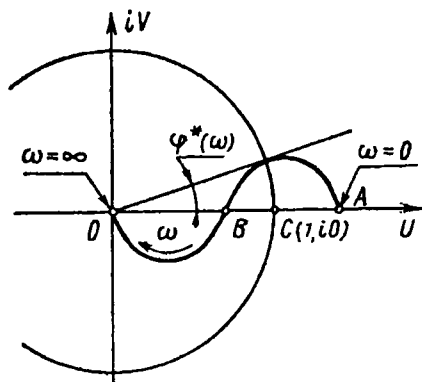


Рис. 2.9

в случае воздействия единичного импульса

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U_f(\omega) \cos \omega t d\omega.$$

При рассмотрении устойчивости замкнутых систем с помощью частотного критерия используются такие условные понятия, как запас устойчивости по фазе, запас устойчивости по амплитуде или, что то же самое, запас устойчивости по коэффициенту усиления.

Эти понятия поясним с помощью рис. 2.9, на котором изображена амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи.

Характеристическое уравнение разомкнутой цепи имеет один положительный корень, так что согласно критерию Найквиста соответствующая замкнутая система устойчива. Запас устойчивости по фазе характеризуется углом опережения $\varphi(\omega)$ при $A(\omega) = 1$, запас устойчивости по амплитуде — отношением длины отрезка BC (так же, как и длины отрезка AC) к длине отрезка OC, равного единице. Чем больше отрезок BC (или AC), тем больше запас устойчивости по амплитуде. Запас устойчивости дает возможность судить о допустимых пределах изменения параметров системы без нарушения ее устойчивости. В некоторой мере он может характеризовать и качество переходного процесса.

2.7. СТРУКТУРА АВТОМАТА СТАБИЛИЗАЦИИ

В функции системы управления ракетой входят: 1) наведение ракеты на цель путем вырабатывания и ввода управляющих сигналов; 2) предотвращение случайного отклонения ракеты от заданной траектории. Поэтому система управления делится на две части — систему наведения, которую для баллистических ракет называют также системой управления, и систему стабилизации.

Идеальная расчетная траектория баллистической ракеты — это плоская кривая, лежащая в вертикальной плоскости — плоскости тангажа. Чтобы обеспечить полет ракеты по заданной траектории, нужно управлять поворотом вектора силы тяги двигателей ракеты в плоскости тангажа, иначе говоря, управлять поворотом корпуса.

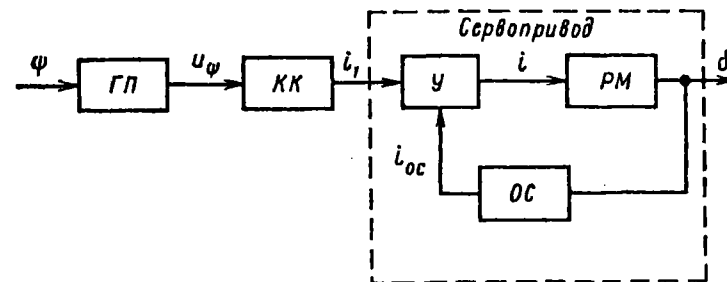


Рис. 2.10

В зависимости от программы и условий полета к автомату стабилизации предъявляются различные требования. На активном участке полета главным является требование точности. Здесь, как правило, применяется непрерывное управление. На пассивных участках полета используются законы управления, оптимальные по расходу рабочего тела или быстродействию. В обоих случаях закон управления имеет релейный характер.

Исходными уравнениями для решения задачи управления служат уравнения (1.10).

Система стабилизации предназначена для обеспечения устойчивого углового движения корпуса ракеты и сведения к минимуму отклонения центра масс ракеты от расчетной траектории. Эти задачи решаются при помощи установленных на борту ракеты автоматов угловой стабилизации относительно центра масс и автоматов стабилизации центра масс. Автоматы стабилизации центра масс относительно расчетной траектории можно устанавливать для стабилизации как в плоскости тангажа, так и в плоскости рыскания. Угловая стабилизация обычно осуществляется раздельно в каждой из трех плоскостей — тангажа, рыскания и крена.

Исходными уравнениями для решения задач стабилизации служат уравнения возмущенного движения (1.15), (1.18), (1.20), (1.24).

Схема автомата стабилизации ракеты аналогична схеме самолетного автопилота. В автомат входят чувствительные элементы для измерения сигналов рассогласования (свободные гироскопы, датчики угловых скоростей, датчики ускорений и т.д.), счетно-решающие устройства (или корректирующий контур) и усилители, предназначенные для изменения фазы сигнала рассогласования и усиления его, и исполнительные органы (рулевые машины) для привода рулей или управляющих двигателей.

На рис. 2.10 представлена типичная структурная схема одного из каналов — канала угловой стабилизации в плоскости рыскания. Часть

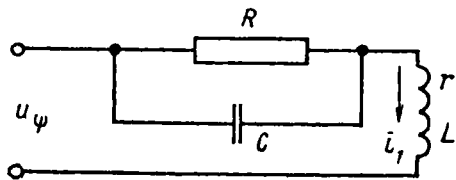


Рис. 2.11

автомата стабилизации, состоящую из усилителя (У), рулевой машины (РМ), охваченных обратной связью (ОС), идущей от штока рулевой машины к усилителю, обычно называют сервоприводом. Один и тот же сервопривод может служить исполнительным органом одновременно для двух каналов

стабилизации, например канала угловой стабилизации относительно центра масс в плоскости рыскания и канала боковой стабилизации центра масс в той же плоскости.

В качестве корректирующего контура (КК) можно использовать дифференцирующие RC контуры первого или второго порядка с индукционной L и омической r нагрузками (обмотки усилителя). На рис. 2.11 показан дифференцирующий контур первого порядка, в котором вырабатывается опережение по фазе для сигнала рассогласования.

Имеются различные схемы автоматов стабилизации: без внутренней обратной связи и с внутренней жесткой или гибкой обратной связью; работающих в непрерывном режиме и работающих в релейном режиме; самонастраивающиеся автоматы стабилизации.

Для ракет, динамические свойства которых значительно сложнее, чем свойства твердого тела, обеспечить устойчивость движения с помощью автоматов стабилизации перечисленных схем не всегда удастся. В таких случаях в качестве счетно-решающих устройств используются бортовые цифровые вычислительные машины, которые обладают логикой и широкими возможностями корректировать сигналы рассогласования.

В задачи книги не входит описание свойств и преимуществ различных схем автоматов стабилизации. Однако автомат стабилизации является частью замкнутой системы, без которой методически нельзя провести анализ динамических свойств ракеты, и поэтому в дальнейшем свойства АС будут выражаться или дифференциальными уравнениями, или амплитудно-фазовыми характеристиками.

Линеаризованное уравнение канала угловой стабилизации для изображений, например, в плоскости рыскания можно представить в общем виде:

$$Q_{AC}(p)\delta(p) = R_{AC}(p)\psi(p), \quad (2.23)$$

где $\delta(p)$, $\psi(p)$ — изображения выходной и входной величин; полиномы

$Q_{AC}(p)$ и $R_{AC}(p)$ определяются на основании системы уравнений автомата стабилизации.

Передаточная функция автомата угловой стабилизации на основании уравнения (2.23) будет иметь вид

$$W_{AC}(p) = W_{\delta\psi}(p) = \frac{\delta(p)}{\psi(p)} = \frac{R_{AC}(p)}{Q_{AC}(p)}.$$

Обычно автомат стабилизации проектируют так, чтобы его собственное движение было устойчивым. Другими словами, характеристический полином автомата угловой стабилизации $Q_{AC}(p)$ не имеет корней с положительной вещественной частью.

Амплитудно-фазовую частотную характеристику автомата стабилизации по любому каналу можно представить как

$$W_{AC}(i\omega) = \frac{R_{AC}(i\omega)}{Q_{AC}(i\omega)} = U_{AC}(\omega) + iV_{AC}(\omega) = A_{AC}(\omega)e^{i\varphi_{AC}(\omega)}. \quad (2.24)$$

Эту характеристику получают расчетом и экспериментально.

Автомат стабилизации имеет звенья с ярко выраженными нелинейными свойствами. К ним относятся прежде всего рулевая машина и усилитель. Нелинейность характеристики магнитного усилителя (с насыщением) обусловлена ферромагнитными свойствами сердечника, рулевой машины — нелинейной зависимостью скорости истечения жидкости от перепада давления и ограниченностью мощности привода. Кроме того, в механических соединениях рулевой машины с органами управления могут быть люфты. Поэтому окончательное заключение о свойствах автомата стабилизации делается по его амплитудно-фазовым характеристикам, полученным экспериментально при различных амплитудах входного сигнала.

2.8. ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ

На активном участке полета для стабилизации ракеты требуются значительные по величине управляющие силы и моменты. Стабилизация может осуществляться с помощью воздушных и газовых рулей, вспомогательных двигателей, поворотных сопел, дефлекторов, поворотом маршевых двигателей и т.п. На пассивном участке полета для стабилизации углового положения летательного аппарата требуются меньшие по величине силы и моменты. Для их создания используются микрореактивные двигатели, двигатели-маховики, гироскопические исполнительные органы, моментные магнитопроводы.

Несмотря на разнообразие средств стабилизации, управляющие силы в проекциях на оси, связанной с корпусом системы координат, могут быть записаны одинаково:

$$Y_p = R_{Yp}^{(0)} \delta; \quad Z_p = R_{Zp}^{(0)} \delta.$$

Выбор наиболее эффективных органов управления является одной из важных задач проектирования системы управления. От эффективности органов управления зависят величины отклонений параметров движения — линейных и угловых координат, скоростей, ускорений, зависит качество регулирования. На эти отклонения накладывается ряд ограничений, связанных с необходимостью обеспечения заданной точности траектории, и ограничения поперечных перегрузок. В связи с этим эффективность органов управления необходимо определять на основе анализа решений системы дифференциальных уравнений возмущенного движения замкнутой системы. Отклонения параметров движения в этих уравнениях должны отсчитываться не от номинальных, а от программных значений; правая часть уравнений должна содержать возмущающие силы и моменты. Таким образом, вместо уравнений (1.15) и (1.18) будем иметь следующие:

в плоскости тангажа —

$$\dot{\theta} + c_{\theta\theta}\theta + c_{\theta\dot{\theta}}\dot{\theta} + c_{\theta v}v + c_{\theta\delta}\delta = Y_\theta;$$

$$\ddot{\theta} + c_{\theta\ddot{\theta}}\ddot{\theta} + c_{\theta\dot{\theta}}\dot{\theta} + c_{\theta\theta}\theta + c_{\theta v}v + c_{\theta\delta}\delta = M_{Z_\theta}; \quad (2.25)$$

$$\delta = \delta(\dot{\theta}, \ddot{\theta});$$

в плоскости рыскания —

$$\dot{\sigma} + c_{\sigma\sigma}\sigma + c_{\sigma\psi}\psi + c_{\sigma\delta}\delta = Z_\sigma;$$

$$\ddot{\psi} + c_{\psi\ddot{\psi}}\ddot{\psi} + c_{\psi\dot{\psi}}\dot{\psi} + c_{\psi\sigma}\sigma + c_{\psi\delta}\delta = M_{Y_\psi}; \quad (2.26)$$

$$\delta = \delta(\psi, \dot{\psi}).$$

Уравнения автомата стабилизации здесь представлены в виде

$$\delta = \delta(\dot{\theta}, \ddot{\theta}); \quad \delta = \delta(\psi, \dot{\psi}).$$

Эффективность органов управления зависит от градиента управляющей силы $R_p^{(0)}$, геометрических и массовых характеристик ракеты. Например, для плоскости тангажа она характеризуется коэффициентами

$$R_{Yp}^{(0)}(x_p - x_c)/I_Z \text{ и } R_{Yp}^{(0)}/m.$$

Момент, создаваемый органами управления, условно можно разделить на три части:

$$M_{упр} = M_{пр} + M_\pi + M_{стб}.$$

Здесь $M_{пр}$ — программный управляющий момент, необходимый для ведения ракеты по программной траектории; если $\dot{\theta}_{пр}$ и $\ddot{\theta}_{пр}$ малы, то $M_{пр}$ также невелик; M_π — момент для парирования постоянно действующих возмущений от ветра, несоосности камеры двигателя, аэродинамической несимметрии и т.д. Этот момент может быть значительным. $M_{стб}$ — момент, развиваемый органами управления в процессе стабилизации, определяемый с учетом обеспечения требуемых качеств по быстродействию, точности, колебательности переходных процессов.

В любой момент времени полета максимальный момент, который может быть создан системой управления, должен быть больше потребного момента управления:

$$(M_{упр})_{\max} > (|M_{пр}| + |M_\pi| + |M_{стб}|)_{\max}.$$

Например, для плоскости тангажа

$$R_{Yp}^{(0)}(x_p - x_c)\delta_{\max} > (|M_{пр}| + |M_\pi| + |M_{стб}|)_{\max}.$$

Так как правая часть неравенства может быть известна из анализа возможных траекторий, условий полета, величин возмущений и т.д., а угол δ_{\max} определяется конструкцией устройств, ограничивающих поворот органов управления, то из последнего неравенства можно определить минимальный градиент управляющей силы:

$$R_{Yp}^{(6)} > \frac{(|M_{np}| + |M_{\pi}| + |M_{стб}|)_{\max}}{\delta_{\max}(x_p - x_c)}.$$

Это неравенство должно выполняться в любой момент полета.

Величину $R_{Yp}^{(6)}$, определяемую из равенства

$$R_{Yp}^{(6)} = \frac{(|M_{np}| + |M_{\pi}| + |M_{стб}|)_{\max}}{\delta_{\max}(x_p - x_c)},$$

принимая в качестве начального значения и вычисляем коэффициенты $c_{\theta\delta}$ и $c_{\dot{\theta}\delta}$. Дальнейший анализ заключается в решении уравнений (2.25) при заданных возмущениях Y_B и M_{ZB} . Из решения уравнений находим интересующие нас параметры движения θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$, $\dot{\delta}$, ..., δ и сравниваем с их максимально допустимыми величинами. В случае необходимости эффективность органов управления увеличивают и расчет повторяют снова.

Таким образом, эффективность органов управления должна быть такой, чтобы система управления могла парировать все возмущения и вести ракету по траектории с заданной точностью, а система стабилизации могла обеспечить устойчивость движения ракеты относительно центра масс и стабилизацию центра масс относительно заданной траектории.

2.9. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАКЕТЫ КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА И ТРЕБОВАНИЯ К АВТОМАТУ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Ракета совместно с автоматом стабилизации образует замкнутую систему автоматического регулирования (рис. 2.12). Главной частью замкнутой системы является ракета — объект регулирования (РО). Автомат стабилизации (АС) должен обеспечивать устойчивость движения ракеты, поэтому его свойства зависят от динамических свойств объекта регулирования. Рассмотрим в этой связи частотные характеристики абсолютно твердой ракеты и требования, которые предъявляются к характеристикам автомата стабилизации для обеспечения устойчивости замкнутой системы.

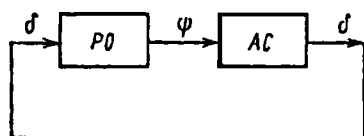


Рис. 2.12

Проанализируем уравнения возмущенного движения в плоскости рыскания. Вместо уравнения (2.7) рас-

смотрим уравнения движения, полученные в неподвижной системе координат. В силу симметрии ракеты они будут такими же, как уравнения (2.6) для плоскости тангажа:

$$\dot{v}_Z + c_{v_Z v_Z} v_Z + c_{v_Z \psi} \dot{\psi} + c_{v_Z \delta} \delta = 0; \quad (2.27)$$

$$\ddot{\psi} + c_{\psi \dot{\psi}} \dot{\psi} + c_{\psi \psi} \psi + c_{\psi v_Z} v_Z + c_{\psi \delta} \delta = 0,$$

где

$$c_{v_Z v_Z} = \frac{1}{m v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S (c_{Z_{\pi}}^{(p)} + c_{X_{\pi}});$$

$$c_{v_Z \psi} = -\frac{1}{m} \left(P_{\pi} + \frac{\rho v_H^2}{2} S c_{Z_{\pi}}^{(p)} \right); \quad c_{v_Z \delta} = -\frac{1}{m} R_{Zp}^{(6)};$$

$$c_{\psi \dot{\psi}} = \frac{1}{I} \left[\frac{\rho v_H^2}{2} S l^2 m_Y^{(\dot{\psi})} + 2 \sum_{(j)} m_j \int_{x_{oj}}^{l_{\pi}} (x - x_c) dx \right]; \quad (2.28)$$

$$c_{\psi \psi} = \frac{1}{I} \frac{\rho v_H^2}{2} S l m_Y^{(p)}; \quad c_{\psi v_Z} = -\frac{c_{\psi \dot{\psi}}}{v_H}; \quad c_{\psi \delta} = \frac{1}{I} R_{Zp}^{(6)} (x_p - x_c).$$

Боковое движение центра масс относительно номинальной траектории более медленное, чем угловое движение относительно центра масс. Поэтому при исследовании углового движения в первом приближении можно пренебречь смещениями центра масс, а при исследовании бокового движения центра масс пренебречь угловым ускорением $\ddot{\psi}$ и угловой скоростью $\dot{\psi}$. Тогда вместо уравнений (2.27) получим две упрощенные независимые системы уравнений:

уравнение углового движения относительно центра масс

$$\ddot{\psi} + c_{\psi \psi} \psi + c_{\psi \delta} \delta = 0 \quad (2.29)$$

и уравнения бокового движения центра масс

$$\begin{aligned} v_z + c_{vzv_z} v_z + c_{vz\psi} \psi + c_{vz\delta} \delta &= 0; \\ c_{\psi\psi} \psi + c_{\psi v_z} v_z + c_{\psi\delta} \delta &= 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Передаточная функция по углу рыскания на основании упрощенного уравнения (2.29) будет

$$W_\psi(p) = \frac{\psi(p)}{\delta(p)} = \frac{-c_{\psi\delta}}{p^2 + pc_{\psi\psi} + c_{\psi\psi}}. \quad (2.31)$$

Положив $p = i\omega$, получим выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики:

$$W_\psi(i\omega) = \frac{-c_{\psi\delta}}{c_{\psi\psi} + i\omega c_{\psi\psi} - \omega^2} = U(\omega) + iV(\omega). \quad (2.32)$$

Знак коэффициента $c_{\psi\psi}$ определяется знаком коэффициента $m_Y^{(B)}$. Для аэродинамически устойчивой ракеты $c_{\psi\psi} > 0$, для аэродинамически неустойчивой $c_{\psi\psi} < 0$, для аэродинамически нейтральной $c_{\psi\psi} = 0$.

Для определения свойств, какими должен обладать автомат стабилизации, чтобы угловое движение относительно центра масс замкнутой системы было устойчивым, проведем анализ свойств частотной характеристики $W_\psi(i\omega)$ регулируемого объекта, описанной уравнением (2.32). Для простоты пренебрежем демпфированием, т.е. примем $c_{\psi\psi} = 0$. Рассмотрим три разных случая.

1. Аэродинамически неустойчивая ракета, $c_{\psi\psi} < 0$.

Частотная характеристика $W_\psi(i\omega)$ на плоскости $Z = U(\omega) + iV(\omega)$ показана на рис. 2.13. Это отрезок положительной вещественной полуоси $[0, |c_{\psi\delta}/c_{\psi\psi}|]$, причем, как следует из сравнения коэффициентов $c_{\psi\delta}$ и $c_{\psi\psi}$, на неко-

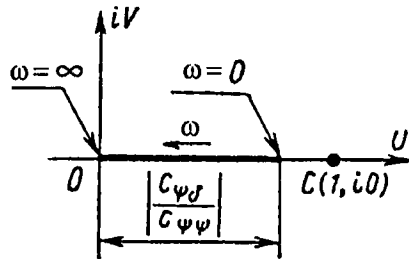


Рис. 2.13

торых участках траектории может быть $c_{\psi\delta}/c_{\psi\psi} < 1$, а на других участках $c_{\psi\delta}/c_{\psi\psi} > 1$.

Знаменатель передаточной функции $W_\psi(p)$ имеет один положительный корень $p = \sqrt{-c_{\psi\psi}}$, поэтому согласно критерию Найквиста для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика всей разомкнутой цепи

$$W(i\omega) = W_\psi(i\omega) W_{AC}(i\omega) = A_0(\omega) A_{AC}(\omega) e^{i[\varphi_0(\omega) + \varphi_{AC}(\omega)]} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$$

делала один положительный полупереход оси U правее точки $C(1, i0)$. С учетом запаздывания автомата стабилизации на больших частотах такая характеристика представлена на рис. 2.9.

Для обеспечения устойчивости движения амплитудно-фазовые характеристики автомата стабилизации должны обладать следующими свойствами.

Во-первых, на малых частотах, в том числе обязательно и при $\omega = 0$, автомат стабилизации должен усиливать сигнал, т.е. обладать коэффициентом усиления $k > 1$. Это необходимо для того, чтобы точка A на оси U была расположена правее точки $C(1, i0)$.

Во-вторых, автомат стабилизации на малых частотах должен вырабатывать опережение по фазе, чтобы фаза разомкнутой цепи

$$\varphi(\omega) = \varphi_0(\omega) + \varphi_{AC}(\omega)$$

на малых частотах была положительной. Это опережение по фазе обеспечивается дифференцирующим контуром.

В-третьих, для того чтобы частотная характеристика $W(i\omega)$ делала один положительный полупереход оси U правее точки $C(1, i0)$, необходимо опережение по фазе в диапазоне частот $[0, \omega_0]$. Здесь ω_0 — частота, при которой опережение по фазе автомата стабилизации переходит в запаздывание, т.е. $\varphi_{AC}(\omega_0) = 0$. Чем больше коэффициент усиления k , тем до больших частот должно осуществляться опережение по фазе, чтобы точка B на оси U всегда была расположена левее точки C .

Следовательно, коэффициент усиления k должен быть не менее некоторой определенной величины (обозначим ее k_{\min}), чтобы точка A (при $\omega = 0$) на оси U была правее точки C , и не более k_{\max} , чтобы точка B (при $\omega = \omega_0$) была левее точки C . Другими словами, коэффициент усиления должен быть ограничен сверху и снизу:

$$k_{\min} \leq k \leq k_{\max}. \quad (2.33)$$

Если точка B будет совпадать с точкой C , то замкнутая система будет находиться на границе устойчивости, и даже малые возмущения будут вызывать в системе незатухающие колебания.

Так как $\varphi_{AC}(\omega_0) = 0$, то $\delta = k(\omega_0)\psi$ и для этого случая

$$W(i\omega) = -k(\omega_0)c_{\psi\delta}/(c_{\psi\psi} - \omega^2). \quad (2.34)$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$1 + W(i\omega) = 0.$$

Из этого выражения можно найти частоту собственных колебаний замкнутой системы

$$\omega_{\text{зам}} = \sqrt{k(\omega_0)c_{\psi\delta} + c_{\psi\psi}}.$$

Для устойчивости замкнутой системы точка B должна располагаться левее точки C , поэтому автомат стабилизации должен обеспечивать опережение по фазе до частот

$$\omega_0 > \sqrt{k(\omega_0)c_{\psi\delta} + c_{\psi\psi}}. \quad (2.35)$$

Для того, чтобы замкнутая система имела запас устойчивости по амплитуде, необходимо, как это видно из соотношений (2.33) и (2.34) для статически неустойчивой ракеты ($c_{\psi\psi} < 0$), чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |W(i\omega)| > 1 \rightarrow k_{\min}(\omega) &> \left| \frac{c_{\psi\psi}}{c_{\psi\delta}} \right| \text{ при } \omega = 0; \\ |W(i\omega)| < 1 \rightarrow k_{\max}(\omega_0) &< \left| \frac{\omega_0^2 - c_{\psi\psi}}{c_{\psi\delta}} \right| \text{ при } \omega = \omega_0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Для того, чтобы замкнутая система имела запас устойчивости по фазе, необходимо, чтобы автомат стабилизации по каналу ψ имел опережение по фазе в диапазоне частот $[0, \omega_0]$.

2. Аэродинамически устойчивая ракета, $c_{\psi\psi} > 0$.

Частотная характеристика регулируемого объекта показана на рис. 2.14. Годограф расположен на вещественной оси комплексной плоскости Z . Там же пунктиром показан годограф с учетом коэффициента демпфирования $c_{\psi\psi}$. При $c_{\psi\psi} = 0$ знаменатель комплексного

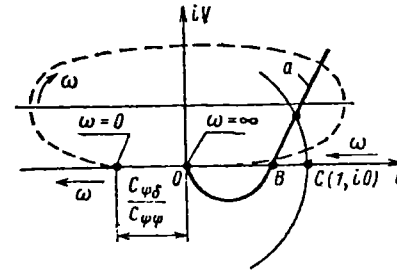


Рис. 2.14

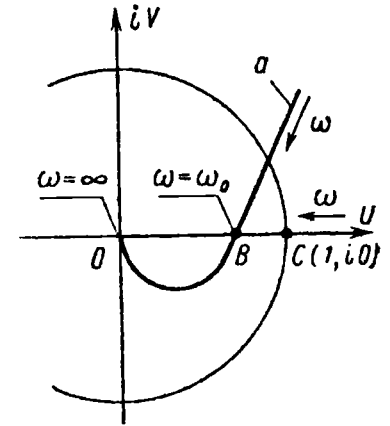


Рис. 2.15

передаточного числа в выражении (2.31) имеет два чисто мнимых корня, а регулируемый объект находится на границе устойчивости; при $c_{\psi\psi} > 0$ объект устойчив, но с малым запасом устойчивости по фазе. Присоединение к регулируемому объекту автомата стабилизации, обладающего запаздыванием на больших частотах, приводит к тому, что годограф пересекает вещественную ось в точке B (на рис. 2.14 часть годографа разомкнутой цепи изображена кривой a).

Для того, чтобы замкнутая система имела запас устойчивости по фазе, необходимо, чтобы автомат стабилизации обладал опережением по фазе до частот ω_0 , определяемых неравенством (2.35). Величина ω_0 является важной характеристикой автомата стабилизации. Как будет показано дальше, эта величина используется при оценке устойчивости движения ракеты с учетом колебаний жидкости в баках.

Замкнутая система будет иметь запас устойчивости по амплитуде, если коэффициент усиления автомата стабилизации будет ограничен сверху, т.е.

$$k_{\max}(\omega_0) < (\omega_0^2 - c_{\psi\psi})/c_{\psi\delta}.$$

Ограничение коэффициента усиления снизу в рассматриваемом примере не имеет места.

3. Аэродинамически нейтральная ракета, $c_{\psi\psi} = 0$.

Частотная характеристика объекта регулирования при $c_{\psi\psi} = 0$ совпадает с положительной вещественной полуосью (рис. 2.15), знаменатель комплексного передаточного числа в выражении (2.31) имеет два нулевых корня.

Если на малых частотах пренебречь динамическими свойствами автомата стабилизации и принять

$$\delta = k\psi,$$

то уравнение замкнутой системы в операторной форме будет иметь вид

$$p^2\psi + kc_{\psi\delta}\psi = 0.$$

При наличии возмущений замкнутая система будет совершать незатухающие колебания с собственной частотой

$$\omega = \sqrt{kc_{\psi\delta}}.$$

Эти колебания свидетельствуют о том, что замкнутая система находится на границе устойчивости:

$$W(i\omega) = kc_{\psi\delta}/\omega^2 = 1.$$

Годограф разомкнутой цепи на рис. 2.15 изображен кривой a .

Вследствие запаздывания, обусловленного автоматом стабилизации, на больших частотах появляется отрицательное пересечение вещественной оси – точка B . Для того чтобы замкнутая система обладала запасом устойчивости по амплитуде, необходимо, чтобы автомат стабилизации обеспечивал опережение по фазе в диапазоне частот $(0, \omega_0)$, где

$$\omega_0 > \sqrt{k(\omega_0)c_{\psi\delta}}.$$

Следовательно, коэффициент усиления здесь должен быть ограничен только сверху, т.е.

$$k_{\max}(\omega_0) < \omega_0^2/c_{\psi\delta}.$$

Присоединение к аэродинамически нейтральной ракете автомата стабилизации, обладающего указанными свойствами, приводит к тому,

что замкнутая система становится колебательным звеном с демпфированием.

Величина коэффициента $c_{\psi\psi}$ зависит от скоростного напора q , момента инерции ракеты, взаимного расположения центра масс и центра давления, которые во время полета изменяются. Поэтому даже для одной и той же ракеты в разные моменты времени могут иметь место ситуации, когда $c_{\psi\psi} > 0$, $c_{\psi\psi} < 0$, $c_{\psi\psi} = 0$. Во всех этих случаях автомат стабилизации должен обеспечить устойчивость движения.

Подводя итог, можно сформулировать два следующих основных требования к автомату угловой стабилизации: 1) автомат стабилизации должен обеспечивать опережение по фазе в диапазоне частот $(0, \omega_0)$; 2) коэффициент усиления автомата стабилизации должен быть ограничен и сверху и снизу.

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики автомата стабилизации, отвечающие перечисленным требованиям, показаны на рис. 2.16. Увеличение коэффициента $k(\omega) = A_{AC}(\omega)$ по сравнению со статическим в некотором диапазоне частот обусловлено наличием в цепи АС дифференцирующего контура.

Чтобы решить, каким должен быть диапазон частот $(0, \omega_0)$ и какие ограничения должны быть наложены на коэффициент усиления $k_{\max}(\omega_0)$, k_{\min} , надо провести анализ частотных характеристик регулируемого объекта и всей разомкнутой цепи для всех возможных моментов времени полета.

Хорошую информацию для выбора коэффициентов усиления автомата стабилизации можно получить с помощью D -разбиения. Рассмотрим в этой связи уравнения замкнутой системы, состоящие из уравнений объекта регулирования (2.27) и уравнения автомата стабилизации. Уравнения объекта запишем без учета демпфирующих сил:

$$\ddot{z} + c_{vz\psi}\dot{\psi} + c_{vz\delta}\delta = 0; \quad \ddot{\psi} + c_{\psi\psi}\dot{\psi} + c_{\psi\delta}\delta = 0. \quad (2.37)$$

Уравнение автомата стабилизации (2.23) можно представить в виде

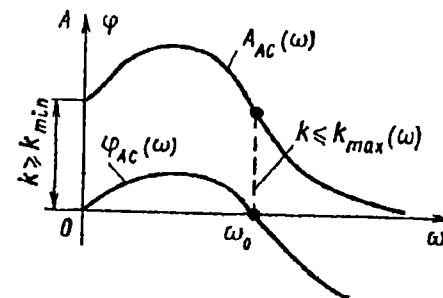


Рис. 2.16

$$T_2^2 \ddot{\delta} + T_1 \dot{\delta} + \delta = k_{\psi} \psi + k_{\dot{\psi}} \dot{\psi}, \quad (2.38)$$

где T_1, T_2 — постоянные времени; $k_{\psi}, k_{\dot{\psi}}$ — коэффициенты усиления АС.

Характеристическое уравнение системы (2.37) и (2.38) будет

$$(a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) = 0, \quad (2.39)$$

где

$$a_0 = T_2^2; \quad a_1 = T_1; \quad a_2 = 1 + T_2^2 c_{\psi\psi};$$

$$(2.40)$$

$$a_3 = k_{\dot{\psi}} c_{\psi\delta} + T_1 c_{\psi\psi}; \quad a_4 = k_{\psi} c_{\psi\delta} + c_{\psi\psi}.$$

Применим критерий Раута — Гурвица. Замкнутая система (2.37) и (2.38) будет устойчивой, если все коэффициенты уравнения (2.39) и определитель Δ_3 положительны, т.е.

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0.$$

Коэффициент $c_{\psi\delta} > 0$. Поэтому нетрудно подобрать значения $k_{\dot{\psi}}$ и k_{ψ} , чтобы для аэродинамически неустойчивой ракеты ($c_{\psi\psi} < 0$) коэффициенты (2.40) были положительными.

Определим границы области устойчивости. Определяющими являются условия для Δ_3 и a_4 . Условие $a_4 = 0$ выражает границу аperiodической устойчивости.

Найдем уравнение границы устойчивости, определяемое равенством $\Delta_3 = 0$. Подставляя в это равенство значения коэффициентов (2.40), получим

$$c_1 k_{\dot{\psi}}^2 + c_2 k_{\dot{\psi}} + c_3 k_{\psi} + c_4 = 0. \quad (2.41)$$

Уравнение (2.41) есть уравнение параболы в координатах $k_{\dot{\psi}}$ и k_{ψ} ; парабола проходит через начало координат, ось параболы параллельна координатной оси Ok_{ψ} (рис. 2.17). Для совокупности значений $k_{\dot{\psi}}, k_{\psi}$,

лежащих в области, которая ограничена параболой и осью абсцисс, $\Delta_3 = 0$.

Неравенство $a_4 < 0$ определяет область аperiodической неустойчивости системы. Границу аperiodической устойчивости найдем из равенства

$$a_4 = k_{\psi} c_{\psi\delta} + c_{\psi\psi} = 0$$

или

$$k_{\psi} = -c_{\psi\psi}/c_{\psi\delta}. \quad (2.42)$$

Следовательно, область устойчивости заключена между параболой (2.41) и прямой (2.42). Для статически неустойчивой ракеты ($c_{\psi\psi} < 0$) эта область показана на рис. 2.17. Для того, чтобы движение ракеты было устойчивым, необходимо условие

$$k_{\psi} > |c_{\psi\psi}/c_{\psi\delta}|.$$

Это условие совпадает с первым условием (2.36), которое было получено из анализа системы частотным методом.

Вершина параболы A_0 находится в точке с координатами

$$A_0 \left(\frac{T_1(1 - T_2^2 c_{\psi\psi})}{2T_2^2 c_{\psi\delta}}, \frac{(1 - T_2^2 c_{\psi\psi})^2}{4T_2^2 c_{\psi\delta}} \right).$$

Обычно $1 > T_2^2 c_{\psi\psi}$. Поэтому ордината вершины параболы практически не зависит от степени аэродинамической неустойчивости, а определяется эффективностью органов управления ($c_{\psi\delta}$) и параметром автомата стабилизации T_2^2 .

Можно условно считать, что абсцисса вершины параболы определяет ширину области устойчивости. Она пропорциональна T_1 и обратно пропорциональна произведению $T_2^2 c_{\psi\delta}$.

На основе рассмотрения семейства частотных характеристик (см. рис. 2.13, 2.14) и области устойчивости (см. рис. 2.17) можно установить

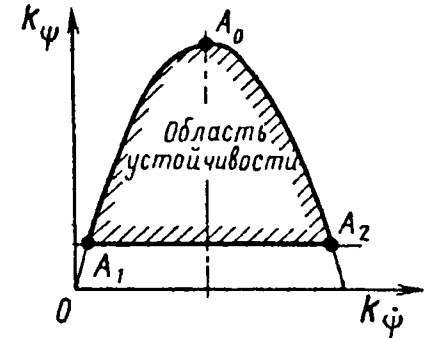


Рис. 2.17

более конкретный диапазон частот ($0, \omega_0$) и верхнюю и нижнюю границы для коэффициента усиления автомата стабилизации. Однако выбрать эти величины окончательно и назначить запасы устойчивости по коэффициенту усиления (по амплитуде) и по фазе на основании таких характеристик еще нельзя. Выбор запасов устойчивости – задача более сложная. Здесь нужно принимать во внимание возможные разбросы параметров ракеты, отклонения параметров и характеристик автомата стабилизации, зависимость характеристик от температуры, вибраций и других факторов. Величины этих параметров можно определить на основе опыта эксплуатации ракет и систем их стабилизации.

2.10. ТРЕБОВАНИЯ К АВТОМАТУ БОКОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ЦЕНТРА МАСС

Рассмотрим теперь динамические свойства автономной системы стабилизации бокового движения центра масс относительно заданной траектории. Уравнения бокового движения центра масс (2.30) запишем с правыми частями:

$$\dot{v}_Z + c_{v_z v_z} v_Z + c_{v_z \psi} \psi + c_{v_z \delta} \delta = Z_B / m; \quad (2.43)$$

$$c_{\psi v_z} v_Z + c_{\psi \psi} \psi + c_{\psi \delta} \delta = M_{Y_B} / I.$$

Здесь Z_B и M_{Y_B} – длительно действующие возмущения, обусловленные ветром, несовпадением вектора силы тяги двигателей с продольной осью корпуса и т.д.

Система стабилизации центра масс должна компенсировать действие

возмущений. Пусть, например, сила Z_B и момент M_{Y_B} возникли в результате действия на ракету ветра. Тогда автомат угловой стабилизации повернет рули на некоторый угол δ , чтобы уравновесить возмущающий момент и держать корпус ракеты параллельно плоскости стрельбы ($\psi = 0$). Кроме поперечной аэродинамической силы, на корпус ракеты будет действовать еще и поперечная управляющая сила Z_p , причем в случае аэродинамически устойчивой ракеты ($c_{\psi \psi} > 0$) силы Z_B и Z_p будут направлены в разные стороны (рис. 2.18, а), а в случае аэродинамически неустойчивой

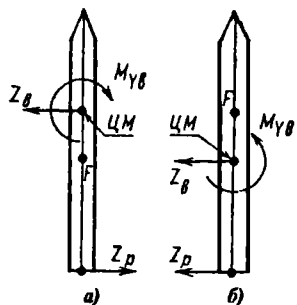


Рис. 2.18

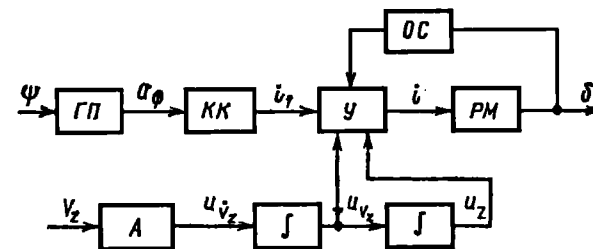


Рис. 2.19

ракеты эти силы будут направлены в одну сторону (рис. 2.18, б). Под действием сил Z_B и Z_p центр масс ракеты будет перемещаться в боковом направлении.

Чтобы компенсировать действие сил Z_B и Z_p , автомат стабилизации центра масс должен повернуть корпус ракеты (вектор силы тяги двигателей) так, чтобы сумма проекций на ось Z сил Z_B , Z_p и P_z была равна нулю или, точнее, чтобы скорость v_Z центра масс была равна нулю. Для аэродинамически неустойчивой ракеты угол поворота должен быть больше, чем для аэродинамически устойчивой.

Таким образом, система угловой стабилизации стремится держать ось ракеты в плоскости стрельбы, а система стабилизации центра масс должна выводить эту ось из плоскости стрельбы.

Одним из возможных законов формирования сигнала в канале стабилизации центра масс будет

$$\delta = k\psi - k_1 v_Z - k_2 z, \quad (2.44)$$

где z – координата смещения центра масс. Так как стабилизация центра масс и угловая стабилизация осуществляются одними и теми же исполнительными органами, то одна из возможных структурных блок-схем автомата стабилизации в плоскости рыскания будет иметь вид, показанный на рис. 2.19. Здесь ГП – гироскоп; КК – корректирующий контур; У – усилитель; РМ – рулевая машина; ОС – обратная связь; А – акселерометр; u_ψ , u_z , u_{v_z} , u_{v_z} – напряжения, пропорциональные соответствующим отклонениям; i_1 , i – сила тока.

Определим некоторые требования к выбору коэффициентов усиления k_1 и k_2 , для чего из уравнений (2.43) и (2.44) установим зависимость между координатой z смещения центра масс и возмущающей силой Z_B . Приняв $v_Z = pz$, $M_{Y_B} = 0$, получим

$$p^2(c_{\psi\psi} + kc_{\psi\delta}) + p[c_{v_z v_z}(c_{\psi\psi} + kc_{\psi\delta}) - c_{\psi v_z}(c_{v_z \psi} + kc_{v_z \delta}) + \\ + k_1(c_{v_z \psi}c_{\psi\delta} - c_{\psi\psi}c_{v_z \delta})] + k_2(c_{v_z \psi}c_{\psi\delta} - c_{\psi\psi}c_{v_z \delta})z = Z_a(c_{\psi\psi} + kc_{\psi\delta})/m.$$

При соответствующем выборе коэффициентов k_1 и k_2 можно обеспечить хорошее качество переходного процесса. Чем больше коэффициент k_2 , тем меньше статическое смещение центра масс, т.е.

$$z = \frac{Z_a}{m} \frac{c_{\psi\psi} + kc_{\psi\delta}}{k_2(c_{v_z \psi}c_{\psi\delta} - c_{\psi\psi}c_{v_z \delta})},$$

и тем больше частота собственных колебаний центра масс

$$\omega = \sqrt{\frac{k_2(c_{v_z \psi}c_{\psi\delta} - c_{\psi\psi}c_{v_z \delta})}{c_{\psi\psi} + kc_{\psi\delta}}}.$$

Но с увеличением коэффициента k_2 может несколько уменьшиться запас устойчивости по каналу ψ .

Как видно из уравнения смещения центра масс, коэффициент k_1 определяет затухание системы. Чем больше k_1 , тем быстрее затухают колебания центра масс.

Выбирать значения коэффициентов усиления k_1 и k_2 канала стабилизации центра масс можно следующим образом: задаваясь возмущениями Z_a и M_{YB} , решить уравнения (2.43) и (2.44) для разных фиксированных моментов времени полета и найти зависимости v_z и z от коэффициентов k_1 и k_2 , причем если значения k_1 и k_2 будут большими, то в уравнении моментов следует учитывать и ψ . Руководствуясь требованиями к точности полета, на основании полученных зависимостей можно выбрать приемлемые значения коэффициентов k_1 и k_2 .

Анализ уравнений с постоянными коэффициентами дает лишь качественное представление о том, как будет осуществляться стабилизация центра масс. В реальных условиях коэффициенты уравнений и возмущающие силы во время полета изменяются и получить представление о максимальной скорости v_z и максимальной накопленной ошибке в отклонении координаты z можно из решения уравнений с переменными коэффициентами на ЭВМ или на электронной моделирующей установке. Только после этого можно сделать окончательный выбор коэффициентов k_1 и k_2 .

Структура уравнений возмущенного движения в плоскости тангажа (2.6) такая же, как и в плоскости рыскания (2.27), поэтому требования к автоматам угловой стабилизации и стабилизации центра масс

практически такие же, как и к автоматам стабилизации движения в плоскости рыскания.

Более простым является уравнение (1.20) возмущенного движения относительно продольной оси

$$\ddot{\gamma} + c_{\gamma\dot{\gamma}}\dot{\gamma} + c_{\gamma\delta}\delta = 0. \quad (2.45)$$

Коэффициент $c_{\gamma\dot{\gamma}}$ обусловлен аэродинамическими силами; коэффициент $c_{\gamma\delta}$ — управляющими силами, которые при наличии воздушных рулей будут зависеть и от скоростного напора.

Комплексное передаточное число по углу крена

$$K_{\gamma}(i\omega) = -c_{\gamma\delta}/(i\omega c_{\gamma\dot{\gamma}} - \omega^2).$$

Структура уравнения (2.45) аналогична структуре уравнения моментов в плоскости рыскания при $c_{\psi\psi} = 0$. Поэтому и требования к автомату стабилизации по каналу крена аналогичны требованиям к каналу угловой стабилизации при $c_{\psi\psi} = 0$. Частота собственных колебаний ракеты с автоматом стабилизации относительно продольной оси

$$\omega = \sqrt{k(\omega_0)c_{\gamma\delta}},$$

где $k(\omega_0)$ — коэффициент усиления автомата стабилизации; $c_{\gamma\delta} = M_{Xp}^{(0)}/I_X$.

Динамическая схема жидкостной ракеты в виде абсолютно твердого тела является схемой первого приближения. На основании этой схемы можно произвести расчет траектории полета и сформулировать основные требования к системе управления и стабилизации. В некоторых случаях такая схема является достаточной. Однако с увеличением удлинения ракеты допущение о жестком корпусе становится все более условным. При поперечных возмущениях длинный корпус перемещается не как твердое тело, а как гибкий стержень. Учет упругости корпуса позволяет выявить дополнительные динамические свойства, которые существенны, например, для угловой стабилизации ракеты. Кроме того, содержащиеся в баках ракеты значительные массы жидкого топлива могут перемещаться относительно стенок и создавать дополнительные силы.

Прежде чем перейти к динамике ракеты с учетом колебаний жидкости, рассмотрим сначала динамические свойства бака с жидкостью как составной части ракеты.

Глава III

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В БАКАХ

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Ракета с жидкостным ракетным двигателем (ЖРД) содержит большие массы жидкого топлива в баках. При возмущенном полете ракеты колебания стенок баков вызывают колебания жидкого топлива, которые, в свою очередь, воздействуют на стенки баков. В дополнение к степеням свободы ракеты как твердого тела появляются дополнительные степени свободы, характеризующие колебания жидкости. Поэтому при действии одних и тех же внешних сил движение ракеты, содержащей жидкое топливо, может коренным образом отличаться от движения аналогичной ракеты как твердого тела. Чтобы понять, как влияют колебания жидкости в баках на движение ракеты, познакомимся вначале с колебаниями жидкости в одном баке.

Изучение колебания жидкости в баках является одной из задач классической гидродинамики, где для описания движения жидкости используются или переменные Лагранжа, или переменные Эйлера.

Переменные Эйлера характеризуют состояние частиц жидкости, находящихся в разные моменты времени t в заданной точке пространства с координатами x, y, z . Иначе говоря, различные векторные и скалярные элементы движения рассматриваются как функции координат точки пространства и времени, т.е. как функции четырех аргументов: x, y, z, t . Мы будем пользоваться переменными Эйлера.

При изучении колебаний жидкости примем следующие допущения:

- 1) жидкость в баке идеальная и несжимаемая;
- 2) перемещения и скорости всех частиц жидкости и стенок бака в возмущенном движении суть малые величины в том смысле, что произведениями и квадратами их можно пренебречь по сравнению со значениями любой из этих величин;
- 3) движение жидкости в баке является потенциальным и происходит в потенциальном поле массовых сил (гравитационных или инерционных), связанных с невозмущенным полетом;
- 4) суммарный вектор ускорения поля массовых сил невозмущенного движения g^* во все время движения совпадает с осью бака или составляет с этой осью малый угол.

В невозмущенном движении свободная поверхность жидкости расположена перпендикулярно вектору g^* .

3.2. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА

Движение жидкости в любой точке объема должно удовлетворять условиям неразрывности.

На рис. 3.1 показан элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz . Пусть скорости жидкости в направлении главных координатных осей на площадках $x = 0, y = 0, z = 0$ будут v_x, v_y, v_z . Тогда на площадках, расположенных на расстояниях dx, dy, dz , скорости жидкости будут

$$v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx; \quad v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} dy; \quad v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz.$$

В случае несжимаемости объема жидкости, втекающей в параллелепипед и вытекающей из него, должны быть равны. Из этого условия получаем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

которое должно удовлетворяться в любой точке жидкого объема.

Свойство безвихревого (потенциального) движения жидкости характеризуется некоторой потенциальной функцией Φ , называемой потенциалом абсолютных скоростей; скорости жидкости в направлении

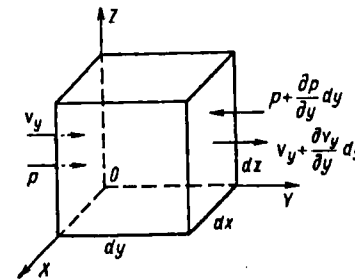


Рис. 3.1

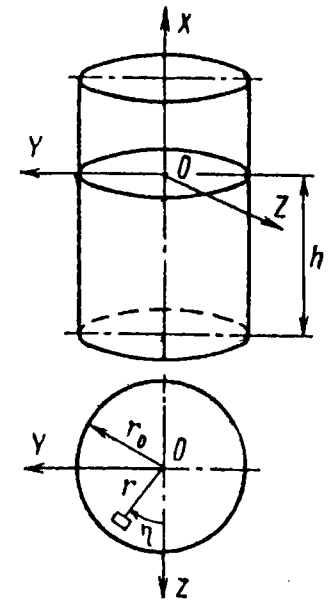


Рис. 3.2

координатных осей определяются по формулам

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Подставляя зависимости (3.2) в выражение (3.1), получим для функции Φ уравнение Лапласа

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.3)$$

Если бак цилиндрический, то решение задачи о колебаниях жидкости удобно проводить не в прямоугольных, а в цилиндрических координатах. Располагая ось X вдоль оси бака и вводя вместо переменных y и z переменные r и η (рис. 3.2):

$$y = r \sin \eta; \quad z = r \cos \eta, \quad (3.4)$$

получим из уравнения (3.3) уравнение Лапласа в цилиндрических координатах

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0. \quad (3.5)$$

Решение уравнения Лапласа должно удовлетворять краевым и начальным условиям.

3.3. ДАВЛЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Обратимся к рис. 3.1. Предположим, что движение жидкости происходит только в направлении оси Y . Обозначим давление жидкости на левой грани параллелепипеда через p , тогда на правой грани оно будет $p + \frac{\partial p}{\partial y} dy$.

Уравнение движения выделенного элемента жидкости

$$\rho dx dy dz \frac{dv_y}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

или

$$\rho \frac{dv_y}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y},$$

получим

$$\rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v_y^2 \right) = - \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Интеграл этого уравнения запишем без индекса Y , так как направление движения (линии тока) выбрано произвольным:

$$\frac{p}{\rho} = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \right) + \Gamma,$$

где Γ – константа интегрирования, сохраняющая постоянное значение на данной линии тока. Если давление газа над жидкостью p_0 , то $\Gamma = p_0$.

К полученному надо добавить давление, обусловленное ускорением свободного падения g^* . Если ось OX бака направлена вертикально вверх (см. рис. 3.2), то это давление равно $-g^* x$.

Таким образом, давление p в любой точке объема, занятого жидкостью, при малых скоростях колебаний можно определить из следующего равенства:

$$\frac{p - p_0}{\rho} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - g^* x. \quad (3.6)$$

3.4. КРАЕВЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

На смоченной поверхности S^* краевые (граничные) условия могут быть выражены исходя из равенства скоростей жидкости и стенки бака:

$$\partial \Phi / \partial n = v_n^*,$$

где v_n^* – скорость граничной поверхности в направлении нормали к этой поверхности.

Пусть уравнение возмущенной свободной поверхности в момент времени t имеет вид

$$\chi = \chi(\psi, z, t).$$

Из уравнения (3.6) и условия, что на свободной поверхности $p = p_0$, заключаем, что

$$(\partial\Phi/\partial t)_{x=\chi} + g^*\chi = 0.$$

Кроме того, имеем

$$\chi = \int_0^t (\partial\Phi/\partial x)_{x=\chi} dt.$$

Так как колебания жидкости приняты малыми, то значения производных $\partial\Phi/\partial t$ и $\partial\Phi/\partial x$ можно брать на невозмущенной свободной поверхности, т.е. при $x = 0$ (вместо $x = \chi$). Тогда краевое условие на свободной поверхности получим в виде

$$\int_0^t (\partial\Phi/\partial x)_{x=0} dt = -\frac{1}{g^*} (\partial\Phi/\partial t)_{x=0}. \quad (3.7)$$

Функция Φ должна удовлетворять еще начальным условиям. Эти условия могут быть выражены, в частности, через возмущения свободной поверхности в начальный момент времени.

Из начальных условий определяются произвольные постоянные общего решения однородного дифференциального уравнения $\Delta\Phi = 0$.

Для установившихся вынужденных колебаний начальные условия не имеют значения.

В дальнейшем будем оценивать устойчивость движения системы с помощью частотных методов, которые основаны на анализе динамических свойств системы при установившихся гармонических воздействиях.

Таким образом, задача о возмущенном движении жидкости в баке сводится к определению потенциальной функции $\Phi(x, r, \eta, t)$, удовлетворяющей уравнению Лапласа и краевым условиям. Если функция Φ найдена, то найдено движение жидкости, а давление в любой точке объема жидкости подсчитывают по формуле (3.6). Теперь перейдем к определению функции Φ .

3.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА АБСОЛЮТНЫХ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ

Введем две прямоугольные системы координат – абсолютную XYZ и подвижную (неинерциальную), связанную с цилиндром $X_1Y_1Z_1$ (рис. 3.3). Перемещение связанной системы координат относительно абсолютной будет определять возмущенное движение бака.

Расположим начало связанной системы координат в центре невозмущенной свободной поверхности, ось X_1 направим по оси бака вверх. Положение абсолютной системы координат XYZ выберем таким, чтобы системы $X_1Y_1Z_1$ и XYZ совпадали при отсутствии смещения бака.

Задачу об определении потенциальной функции Φ рассмотрим применительно к случаю плоского движения бака. В качестве обобщенных координат выберем такие, которые логичны для бака, находящегося в составе корпуса ракеты. Зафиксируем на продольной оси бака на расстоянии L ниже невозмущенной свободной поверхности некоторую точку C (полус), и возмущенное движение бака определим поступательным перемещением на $y_C(t)$ вдоль оси Y и углом поворота $\vartheta(t)$ оси бака.

Потенциал абсолютных скоростей Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0; \quad (3.8)$$

граничным условиям на стенках бака

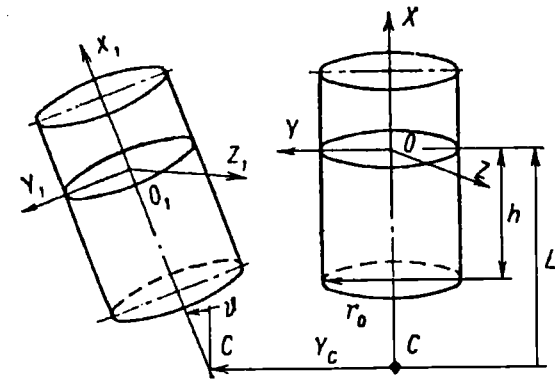


Рис. 3.3

$$\partial\Phi/\partial r = v_r^* = [\psi_c + \dot{b}(L+x)]\sin\eta \text{ при } r = r_0; \quad (3.9)$$

$$\partial\Phi/\partial x = v_x^* = -\dot{b}r\sin\eta \text{ при } x = -h; \quad (3.10)$$

и условию постоянства давления на свободной поверхности

$$\int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial x} dt = -\frac{1}{g^*} \frac{\partial\Phi}{\partial t} \text{ при } x = 0. \quad (3.11)$$

Чтобы легче отыскать потенциал Φ , представим его в виде суммы двух функций:

$$\Phi(x, r, \eta, t) = \psi(x, r, \eta, t) + \varphi(x, r, \eta, t). \quad (3.12)$$

Выберем выражение для функций ψ и φ таким образом, чтобы граничные условия (3.9) и (3.10) удовлетворялись с помощью функции ψ , а условие (3.11) – с помощью суммы функций ψ и φ .

В структуру функции ψ целесообразно включить выражение (3.9), определяющее радиальную скорость переносного движения. Тогда

$$\psi(x, r, \eta, t) = F(x, r, \eta)\dot{b} + r\sin\eta [\psi_c + \dot{b}(L+x)]. \quad (3.13)$$

Функция $\psi(x, r, \eta, t)$ будет отвечать условиям (3.9) и (3.10), если

$$\partial F/\partial r = 0 \quad \text{при } r = r_0; \quad (3.14)$$

$$\partial F/\partial x = -2r\sin\eta \quad \text{при } x = -h. \quad (3.15)$$

Граничными условиями для функции $\varphi(x, r, \eta, t)$ на смачиваемых стенках будут

$$\partial\varphi/\partial r = 0 \text{ при } r = r_0; \quad (3.16)$$

$$\partial\varphi/\partial x = 0 \text{ при } x = -h. \quad (3.17)$$

Сумма функций $\psi + \varphi$ должна удовлетворять граничному условию на свободной поверхности (3.11):

$$\int_0^t \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial x} dt = -\frac{1}{g^*} \frac{\partial(\psi + \varphi)}{\partial t} \text{ при } x = 0. \quad (3.18)$$

Найдем сначала функцию $F(x, r, \eta)$, которая должна удовлетворять уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19)$$

и граничным условиям (3.14) и (3.15).

Уравнение (3.19) решим методом Фурье (методом разделения переменных). Функцию $F(x, r, \eta)$ представим в виде произведения трех функций:

$$F(x, r, \eta) = X(x)H(\eta)R(r). \quad (3.20)$$

Подставляя выражение функции $F(x, r, \eta)$ в уравнение Лапласа и разделяя переменные, получим следующие уравнения для определения функций $H(\eta)$, $R(r)$ и $X(x)$:

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + m^2 H = 0; \quad (3.21)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k_n^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0; \quad (3.22)$$

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2} - k_n^2 X_n = 0, \quad (3.23)$$

где k_n, m – некоторые неопределенные параметры.

Нахождение нетривиальных решений уравнений типа (3.21)–(3.22), удовлетворяющих однородным граничным условиям, называется задачей Штурма – Лиувилля или задачей о собственных значениях. Эта задача имеет нетривиальное решение не при всех значениях k_n и m . Те значения k_n, m , при которых существует нетривиальное решение, называются собственными значениями (числами) этой задачи, а само нетривиальное решение называется собственной функцией, соответствующей данному собственному значению. Совокупность всех собственных значений называется спектром данной задачи.

Решение уравнения (3.21) имеет вид

$$H(\eta) = \sin(m\eta + \eta_0).$$

В силу периодичности функции $H(\eta)$, характеризующей волны в окружном направлении, число m должно быть целым ($m = 1, 2, 3, \dots$), причем для определения функции $F(x, r, \eta)$ достаточно рассмотреть наиболее простую форму, когда $m = 1$, а $\eta_0 = 0$. Эта форма – одна волна в окружном направлении с наибольшими отклонениями в плоскости OXY – вызывается движением бака в этой плоскости [см. граничные условия (3.9), (3.10)].

Следовательно, в дальнейшем будем полагать, что

$$H(\eta) = \sin \eta. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.22) для определения функции $R(r)$ является линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами – уравнением Бесселя. Решение уравнения (3.22) при $m = 1$ можно представить в виде

$$R_n(r) = A_1 J_1(k_n r) + A_2 Y_1(k_n r),$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные; $J_1(k_n r)$, $Y_1(k_n r)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка ($m = 1$). Функция $Y_1(k_n r)$ при $r = 0$ обращается в бесконечность. Поэтому следует положить $A_2 = 0$, так как в противном случае смещение жидкости при $r = 0$ будет бесконечно большим.

Из граничного условия (3.14) будем иметь

$$\frac{dR(r)}{dr} = 0 \text{ или } \frac{dJ_1(k_n r)}{d(k_n r)} = 0 \text{ при } r = r_0.$$

Корни этого уравнения:

$$\zeta_1 = k_1 r_0 = 1,8412; \quad \zeta_2 = k_2 r_0 = 5,3315;$$

$$\zeta_3 = k_3 r_0 = 8,5363; \quad \zeta_4 = k_4 r_0 = 11,7060; \dots$$

Функции $R_n(r) = J_1\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), являющиеся решением

уравнения (3.22), удобно пронормировать, приняв, например, их значения равными единице при $r = r_0$.

Получим

$$R_n(r) = J_1\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) / J_1(\zeta_n). \quad (3.25)$$

Общее решение уравнения (3.23) при вещественных значениях k_n выражается через гиперболические функции

$$X_n(x) = C_1 \operatorname{ch} k_n x + C_2 \operatorname{sh} k_n x, \quad (3.26)$$

причем произвольные постоянные C_1 и C_2 должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия на свободной поверхности и на дне бака.

Для того чтобы удовлетворить условию (3.15), разложим переменную r в обобщенный ряд Фурье по функциям Бесселя.

Положим

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} B_n R_n(r),$$

где B_n – коэффициенты разложения, для определения которых умножим левую и правую части равенства на произведение $r R_n(r)$ и проинтегрируем по радиусу.

Из условий ортогональности имеем

$$\int_0^{r_0} R_n(r) R_m(r) r dr = 0 \quad (n \neq m).$$

Выполнив интегрирование с учетом свойств функций Бесселя, получим

$$N_n = \int_0^{r_0} R_n^2(r) r dr = \frac{r_0^2 (\zeta_n^2 - 1)}{2 \zeta_n^2}; \quad D_n = \int_0^{r_0} R_n(r) r^2 dr = \frac{r_0^3}{\zeta_n^2};$$

$$B_n = \frac{D_n}{N_n} = \frac{2 r_0}{\zeta_n^2 - 1}.$$

Таким образом,

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} B_n R_n(r) = 2r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2 - 1} R_n(r). \quad (3.27)$$

С учетом формулы (3.27) и выражений (3.20) и (3.24) граничное условие (3.15) тождественно равенству

$$dX_n/dx = -4r_0/(\zeta_n^2 - 1) \text{ при } x = -h. \quad (3.28)$$

Таким образом, для определения двух произвольных постоянных C_1 и C_2 в решении (3.26) имеется пока только одно условие (3.28), относящееся к дну бака. Второе условие на свободной поверхности задано для суммы двух функций $\Phi = \psi + \varphi$ [см. (3.18)], одна из которых – функция φ – еще не найдена. Поэтому при назначении граничного условия для функции ψ при $x = 0$ можно допустить некоторый произвол, который следует потом устранить на основании выражения (3.18) при определении функции φ .

Пусть, например, для функции ψ при $x = 0$ краевое условие будет таким же, как при $x = -h$, т.е.

$$(\partial\psi/\partial x)_{x=0} = -\dot{\theta} r \sin \eta. \quad (3.29)$$

Нетрудно видеть, что условие (3.29) соответствует случаю, когда свободная поверхность жидкости фиксирована – как бы прикрыта крышкой, жестко соединенной с баком. Потенциал ψ для этого случая носит название п о т е н ц и а л а Ж у к о в с к о г о. Другие возможные варианты краевых условий при $x = 0$ рассмотрим позже, в разд. 3.10.

Из условия (3.29) с учетом выражения (3.13) будем иметь

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x=0} = -2r \sin \eta; \quad \left(\frac{\partial X_n}{\partial x} \right)_{x=0} = -\frac{4r_0}{\zeta_n^2 - 1}. \quad (3.30)$$

С учетом краевых условий (3.28) и (3.30) решение (3.24) будет

$$X_n = c_{\psi n} X_{\psi n}, \quad (3.31)$$

где $c_{\psi n} = 2r_0/(\zeta_n^2 - 1)$;

$$X_{\psi n} = -(2r_0/\zeta_n) \operatorname{sh} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \left(\frac{h}{2} + x \right) \right] / \operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right). \quad (3.32)$$

Объединяя результаты решений, получим следующее выражение для функции $\psi(x, r, \eta, t)$:

$$\psi = \sin \eta \left\{ 2r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{(\zeta_n^2 - 1)} X_{\psi n} + r(L + x) \right\} \dot{\theta} + r y_C. \quad (3.33)$$

Функция ψ (потенциал Жуковского) является решением уравнения Лапласа и удовлетворяет краевым условиям на стенках бака.

Перейдем теперь к определению функции $\varphi(x, r, \eta, t)$. Эта функция должна быть решением уравнения Лапласа, удовлетворять нулевым граничным условиям на стенках и дне бака (3.16)–(3.17) и совместно с функцией $\psi(x, r, \eta, t)$ удовлетворять условию постоянства давления на свободной поверхности (3.18).

Представим функцию φ в виде

$$\varphi(x, r, \eta, t) = H(\eta) \sum_{n=1}^{\infty} c_{\varphi n} X_{\varphi n}(x) R_n(r) \dot{\lambda}_n(t),$$

где $c_{\varphi n}$ – постоянный коэффициент; $\dot{\lambda}_n(t)$ – неопределенный пока параметр времени.

Разделение переменных приводит к уравнениям (3.21)–(3.23). Условия выбора функции $H(\eta)$ и $R_n(r)$ здесь такие же, как и для функции ψ . Поэтому

$$H(\eta) = \sin \eta; \quad R_n(r) = J_1 \left(\zeta_n \frac{r}{r_0} \right) / J_1(\zeta_n).$$

Функция $X_{\varphi n}$ должна быть решением уравнения (3.23) и поэтому может быть образована из линейной комбинации гиперболических функций аргумента $\zeta_n x/r_0$. На основании равенства (3.17) эта функция должна удовлетворять условию на дне бака

$$dX_{\varphi n}/dx = 0 \text{ при } x = -h. \quad (3.34)$$

Уравнению (3.23) и условию (3.34) удовлетворяет функция

$$X_{\varphi_n}(x) = \operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h+x}{r_0} \right) / \operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right).$$

Для придания параметру $\lambda_n(t)$ наиболее простого физического смысла выберем коэффициент c_{φ_n} таким, чтобы в функциях ψ и φ он был общим множителем.

Положим

$$c_{\varphi_n} = 2r_0/(\zeta_n^2 - 1).$$

Тогда получим

$$\varphi = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{\zeta_n^2 - 1} X_{\varphi_n} \dot{\lambda}_n(t). \quad (3.35)$$

Теперь воспользуемся условием постоянства давления на свободной поверхности и найдем неизвестный до сих пор параметр $\lambda_n(t)$. После подстановки выражений (3.33) и (3.35) в равенство (3.18) получим следующее уравнение для $\lambda_n(t)$:

$$\ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -L_n \ddot{\vartheta} - \dot{y}_C + g^* \vartheta. \quad (3.36)$$

Здесь приняты обозначения

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g^* \zeta_n}{r_0} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}; \quad (3.37)$$

$$L_n = L \left[1 - \frac{2r_0}{\zeta_n L} \frac{\operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) - 1}{\operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} \right] = L \left[1 - \frac{2r_0}{\zeta_n L} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right]. \quad (3.38)$$

Уравнение (3.36) есть уравнение вынужденных колебаний.

Установим физический смысл параметра $\lambda_n(t)$, для чего найдем отклонение свободной поверхности:

$$\chi = \int_0^t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{x=0} dt = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{(\zeta_n^2 - 1)} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) \lambda_n(t) - \dot{\vartheta} \right].$$

Это уравнение свободной поверхности в абсолютной системе координат. С учетом формулы (3.27) его можно представить как

$$\chi = -r \dot{\vartheta} \sin \eta + \chi_\lambda, \quad (3.39)$$

где

$$\chi_\lambda = 2 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta_n R_n(r)}{(\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) \lambda_n(t). \quad (3.40)$$

С точностью до малых величин первого порядка $-r \dot{\vartheta} \sin \eta$ есть уравнение плоскости "верхней крышки" (плоскости $O_1 Z_1 Y_1$). Поэтому в уравнении (3.39) χ_λ с той же точностью представляет собой отклонение свободной поверхности в подвижной (связанной) системе координат. На рис. 3.4 это отклонение показано для $r = r_0$.

Форма свободной поверхности в диаметральной плоскости бака представлена в виде ряда Фурье по функции Бесселя $J_1(\zeta_n r/r_0)$; в окружном направлении она изменяется по закону синуса. Для первых трех тонов колебаний форма свободной поверхности при $\eta = \pi/2$ показана на рис. 3.5. Каждому члену ряда соответствует свой параметр $\lambda_n(t)$, который является, таким образом, обобщенной координатой для волновых движений свободной поверхности.

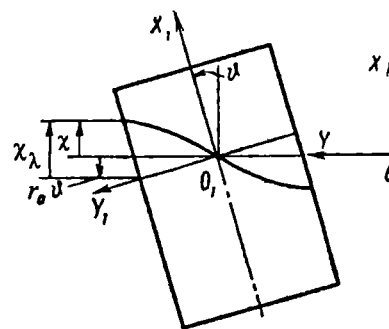


Рис. 3.4

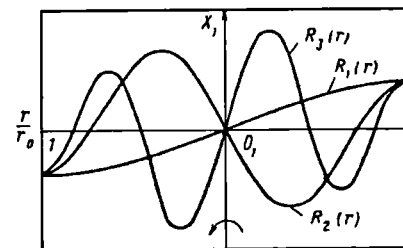


Рис. 3.5

Из выражения (3.40) можно определить масштаб для $\lambda_n(t)$, который будет зависеть от номера n или, иначе говоря, от номера тона колебаний. Отсчитываемое от плоскости $O_1 Y_1 Z_1$, перпендикулярной оси цилиндра $O_1 X_1$, смещение

$$\chi_{\lambda_n}(r_0, \pi/2, t) = \frac{2\zeta_n}{\zeta_n^2 - 1} \operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right) \lambda_n(t).$$

Если $h/r_0 \geq 1$, то $\operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right) \approx 1$. В этом случае для первого тона колебаний

$$\chi_{\lambda_1}(r_0, \pi/2, t) = 1,54 \lambda_1(t);$$

для второго тона

$$\chi_{\lambda_2}(r_0, \pi/2, t) = 0,39 \lambda_2(t).$$

В движении, потенциал которого представлен функцией Φ , участвуют все частицы жидкости. Однако скорость частиц очень быстро уменьшается по мере удаления от свободной поверхности в глубь бака.

Уравнение (3.36) показывает, что собственные колебания свободной поверхности жидкости всегда гармонические. Квадрат частоты этих колебаний пропорционален ускорению g^* , корню производной функции Бесселя соответствующего номера и обратно пропорционален радиусу бака. При глубине заполнения бака более радиуса частота собственных колебаний жидкости практически не зависит от этой глубины. Если $h/r_0 < 1$, то частота колебаний уменьшается с уменьшением глубины. С повышением номера тона колебаний частота увеличивается.

Вынужденные колебания свободной поверхности возбуждаются движениями стенок бака [см. уравнение (3.36)].

3.6. ГЛАВНЫЙ ВЕКТОР И ГЛАВНЫЙ МОМЕНТ ГИДРОСТАТИЧЕСКИХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ

Если потенциал Φ известен, то по формуле (3.6) можно найти давление p в любой точке объема жидкости, а затем перейти к интегральным величинам — главному вектору и главному моменту относительно поперечной оси, проходящей через точку C (см. рис. 3.3), которые необходимо определить для составления уравнений движения ракеты.

На основании уравнений (3.6) и (3.12) имеем

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - g^* x. \quad (3.41)$$

Потенциалы скоростей определены в уравнениях (3.33) и (3.35):

$$\psi = \sin \eta \left\{ 2r_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{\zeta_n^2 - 1} X_{\eta_n} + r(L + x) \right\} \dot{\eta} + r y \dot{c};$$

$$\Phi = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{\zeta_n^2 - 1} X_{\eta_n} \dot{\lambda}_n.$$

Суммировать элементарные силы и моменты нужно по всей смачиваемой поверхности. С точностью до величин первого порядка малости для боковой поверхности координата x (рис. 3.6) изменяется в пределах от $x = x_0^* = -h - r_0 \sin \eta$ до $x = \chi(r_0, \eta, t)$; для дна бака $x^* = -h - r \sin \eta$.

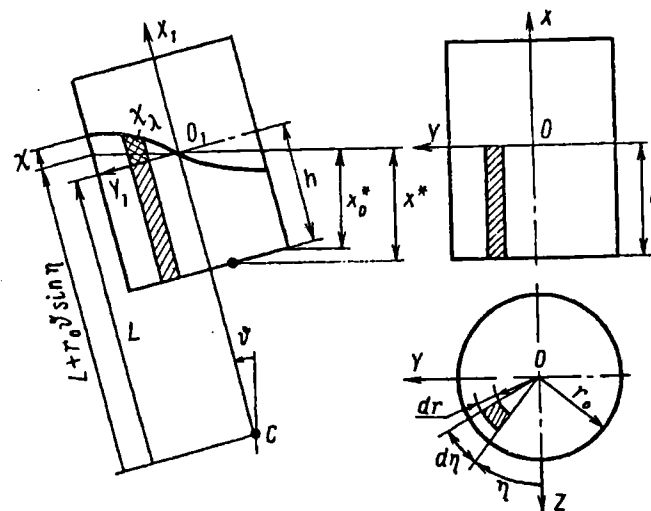


Рис. 3.6

Силу $F_Y^{(0)}$ и момент сил будем вычислять удерживая только величины первого порядка малости. Так как давления $\rho\partial\psi/\partial t$, $\rho\partial\phi/\partial t$ пропорциональны малым ускорениям \ddot{b} , \ddot{y}_C , $\ddot{\lambda}_n$ и значения χ , x_0^* и x^* также содержат малые первого порядка, то для функций $\partial\psi/\partial t$ и $\partial\phi/\partial t$ можно положить $\chi = 0$, $x_0^* = x^* = -h$.

Элементарной площадкой на боковой поверхности бака является $r_0 d\eta dx$; на дне бака элементарной площадкой будет $r dr d\eta$. Проекция на ось Y элементарной силы, действующей на боковую поверхность бака, равна

$$p_{r=r_0} r_0 \sin \eta d\eta dx.$$

Проекция на ту же ось элементарной силы, действующей на дно бака, равна (см. рис. 3.6)

$$p_{x=x} \cdot \ddot{b} r dr d\eta.$$

Проекция на ось Y всех сил давления жидкости на стенки бака

$$F_Y^{(0)} = \int_0^{2\pi} \int_{x_0^*}^x p_{r=r_0} r_0 \sin \eta d\eta dx + \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} p_{x=x} \cdot \ddot{b} r dr d\eta. \quad (3.42)$$

В соответствии со структурой формулы (3.41) суммарную силу $F_Y^{(0)}$ представим в виде суммы трех сил:

$$F_Y^{(0)} = F_\Psi + F_\Phi + F_g.$$

Силу и момент от гидростатического давления $\rho g^* x$ можно определить по формуле (3.42), если верхний предел для x считать равным нулю, а нижний $x = x_0^*$ и $x = x^*$.

Принимая во внимание, что проекции на ось Y сил давления $\rho\partial\phi/\partial t$ и $\rho\partial\psi/\partial t$, действующих на дно бака, величины второго порядка малости, получим

$$F_\Psi = -\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{-h} (\partial\psi/\partial t)_{r=r_0} r_0 \sin \eta d\eta dx;$$

$$F_\Phi = -\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{-h} (\partial\phi/\partial t)_{r=r_0} r_0 \sin \eta d\eta dx;$$

$$F_g = -\rho \int_0^{2\pi} \int_{x_0^*}^0 g^* x r_0 \sin \eta d\eta dx + \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (g^* x)_{x=x} \cdot \ddot{b} r dr d\eta.$$

Выполнив интегрирование и учитывая равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2 - 1} = \frac{1}{2},$$

найдем

$$F_\Psi = -\pi r_0^2 h \rho \left[\left(L - \frac{h}{2} \right) \ddot{b} + \ddot{y}_C \right] = -m \left[\left(L - \frac{h}{2} \right) \ddot{b} + \ddot{y}_C \right];$$

$$F_\Phi = -\pi r_0^3 \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)} \ddot{\lambda}_n = -\sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n; \quad (3.43)$$

$$F_g = \pi r_0^2 h \rho g^* \ddot{b} - \pi r_0^2 h \rho g^* \ddot{b} = 0;$$

$$F_Y^{(0)} = -m \left[\left(L - \frac{h}{2} \right) \ddot{b} + \ddot{y}_C \right] - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n.$$

где

$$m = \pi r_0^2 h \rho; \quad m_n = \pi r_0^3 \rho \frac{2 \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)}. \quad (3.44)$$

В формулах (3.44) m — масса всей жидкости; m_n — приведенная масса

колеблющейся жидкости, соответствующая обобщенной координате λ_n .

Теперь вычислим момент сил давления относительно поперечной оси, проходящей через точку C и параллельной OZ :

$$M_C^{(0)} = \int_0^{2\pi} \int_{x_0^*}^x p_{r=r_0} (L + r_0 \vartheta \sin \eta + x) r_0 \sin \eta d\eta dx + \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} p_{x=x^*} r^2 \sin \eta d\eta dr, \quad (3.45)$$

где $(L + r_0 \vartheta \sin \eta + x)$ – расстояние от элементарной площадки на боковой поверхности бака до оси вращения (см. рис. 3.6).

Для удобства вычислений примем

$$M_C^{(0)} = M_\Psi + M_\Phi + M_g,$$

$$M_\Psi = M_{1\Psi} + M_{2\Psi}; \quad M_\Phi = M_{1\Phi} + M_{2\Phi}; \quad M_g = M_{1g} + M_{2g},$$

причем индекс 1 будет соответствовать моменту сил, действующих на боковую поверхность, а индекс 2 – моменту сил, приложенных к дну бака.

На том же основании, что и при вычислении силы $F_Y^{(0)}$, при вычислении моментов M_Ψ и M_Φ в выражении (3.45) будем принимать $\chi = 0$; $x_0^* = x^* = -h$, расстояние от оси вращения до элементарной площадки на боковой поверхности равным $(L + x)$. Момент M_g от гидростатических сил будем определять на основании формулы (3.45), положив только $\chi = 0$. Получим

$$M_{1\Psi} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 (\partial \Psi / \partial t)_{r=r_0} (L + x) r_0 \sin \eta d\eta dx,$$

$$M_{2\Psi} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (\partial \Psi / \partial t)_{x=-h} r^2 \sin \eta d\eta dr;$$

$$M_{1\Phi} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_{-h}^0 (\partial \Phi / \partial t)_{r=r_0} (L + x) r_0 \sin \eta d\eta dx;$$

$$M_{2\Phi} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (\partial \Phi / \partial t)_{x=-h} r^2 \sin \eta d\eta dr;$$

$$M_{1g} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_{x_0^*}^x g^* x (L + r_0 \vartheta \sin \eta + x) r_0 \sin \eta d\eta dx;$$

$$M_{2g} = -\rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (g^* x)_{x=x^*} r^2 \sin \eta d\eta dr.$$

Проинтегрировав и приняв во внимание равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 - 1)} = \frac{1}{8},$$

получим

$$M_\Psi = - \left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n' \right) \vartheta - \left[m(L - h/2) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n \right] y_C,$$

$$M_\Phi = - \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n' \tilde{\lambda}_n; \quad (3.46)$$

$$M_g = m g^* (L - h/2) \vartheta + g^* \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n,$$

где $I_0 = \pi r_0^2 h \rho (L^2 - Lh + h^2/3 + r_0^2/4)$;

$$I'_n = \pi r_0^4 \rho \left[-\frac{8h - 2L}{\zeta_n^2(\zeta_n^2 - 1)} + \frac{12r_0}{\zeta_n^3(\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right]; \quad (3.47)$$

$$l_n = \frac{r_0}{\zeta_n \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}; \quad L'_n = L - \frac{r_0}{\zeta_n} \frac{\operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) - 2}{\operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}.$$

В первой формуле (3.47) I_0 — момент инерции массы всей жидкости относительно оси, проходящей через точку C и параллельной OZ , если считать жидкость "затвердевшей" и свободную поверхность, совпадающей с плоскостью $O_1 Y_1 Z_1$.

Произведем некоторые преобразования. Рассмотрим третье уравнение (3.36), в котором положим $\omega_n^2 = g/l_n$:

$$\ddot{\lambda}_n + (g^*/l_n)\lambda_n + L_n \ddot{\vartheta} = -\ddot{y}_C + g^* \vartheta.$$

Умножим левую и правую части этого уравнения на произведение $m_n l_n$ и произведем суммирование. Получим

$$g^* \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n - \ddot{y}_C \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n = \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n \left(\ddot{\lambda}_n + \frac{g^*}{l_n} \lambda_n + L_n \ddot{\vartheta} \right). \quad (3.48)$$

Слагаемые, стоящие в левой части равенства, содержатся в выражениях для M_ψ и M_g (3.46). Заменим их в (3.46) правой частью равенства (3.48). После некоторых преобразований получим

$$M_\psi = -m(L - h/2)\ddot{y}_C - \left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta}; \quad (3.49)$$

$$M_g = -\sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n + g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n; \quad M_g = mg^*(L - h/2)\vartheta,$$

$$\text{где} \quad I_n = \pi r_0^5 \rho \left[-\frac{h}{r_0} \frac{8}{\zeta_n^2(\zeta_n^2 - 1)} + \frac{16}{\zeta_n^3(\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right]; \quad (3.50)$$

L_n соответствует значению (3.38). Объединив все три выражения, получим

$$M_C^{(0)} = -\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta} - m(L - h/2)\ddot{y}_C - \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n + g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n + mg^*(L - h/2)\vartheta. \quad (3.51)$$

Составим теперь уравнения движения бака.

3.7. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

Полагаем, что действующие на бак внешние силы приводятся к поперечной силе F_Y , направленной параллельно оси Y , и к паре сил с моментом M_C относительно оси, проходящей через точку C и параллельной OZ (см. рис. 3.3).

Кроме силы F_Y и момента M_C на стенки бака со стороны жидкости действуют сила F_Y^0 и момент M_C^0 , которые по отношению к стенкам бака являются также внешними. Направления F_Y^0 и M_C^0 совпадают с направлениями F_Y и M_C .

Для того чтобы отчетливее уяснить движение жидкости, примем пока массу стенок бака равной нулю. Получим

$$F_Y + F_Y^0 = 0; \quad M_C + M_C^0 = 0.$$

Подставляя сюда значение F_Y^0 из соотношения (3.43), а значение M_C^0 из равенства (3.51) и добавляя уравнение (3.36) для координаты λ_n колебаний жидкости, получим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения в плоскости OXY :

$$m\ddot{y}_C + m(L - h/2)\ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n = F_Y;$$

$$\begin{aligned} & \left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\theta} - mg^*(L - h/2)\dot{\theta} + m(L - h/2)\ddot{y}_C + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n - g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n = M_C; \\ & \ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -L_n \ddot{\theta} - \ddot{y}_C + g^* \dot{\theta}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Проанализируем полученные результаты. Если бак полностью залить жидкостью, то все координаты $\lambda_n = 0$ и уравнения (3.52) будут обыкновенными уравнениями плоского движения твердого тела с массой m и эквивалентным моментом инерции

$$I = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \quad (I_n < 0), \quad (3.53)$$

который отличается от момента инерции I_0 затвердевающей жидкости. Это различие объясняется тем, что частицы жидкости могут перемещаться относительно стенок бака, и поэтому траектории их движения в абсолютной системе координат не совпадают с траекториями движения частиц затвердевшей жидкости.

Движение твердого тела с полостями, целиком заполненными жидкостью, было впервые подробно исследовано Н.Е. Жуковским. В 1885 г. Н.Е. Жуковский показал, что прямолинейное движение такого тела ничем не отличается от прямолинейного движения абсолютно твердого тела, масса которого равна сумме масс тела и жидкости.

Вращательное движение твердого тела с полостями, целиком заполненными жидкостью, эквивалентно вращательному движению абсолютно твердого тела с некоторым приведенным или эквивалентным моментом инерции. Эквивалентный момент инерции всегда меньше момента инерции тела с затвердевшей жидкостью [см. уравнение (3.53)]. Это отличие зависит от формы полостей и от расположения этих полостей с жидкостью относительно оси вращения. Например, если бак имеет форму сферы, а ось вращения проходит через центр сферы, то при отсутствии трения жидкость не будет участвовать во вращении. Момент инерции будет равен моменту инерции оболочки сферы. Если емкость имеет форму куба и ось вращения проходит через его центр, то нетрудно представить, что значительная часть жидкости, расположенной в центре, не будет увлекаться стенками. Эквивалентный момент инерции будет равен моменту инерции стенок куба и небольшой части момента инерции как бы "затвердевшей" жидкости.

Если жидкость имеет свободную поверхность, то поверхность деформируется – на ней возникают волны. Форма волны в радиальном направлении характеризуется функцией Бесселя (3.40). Каждому члену ряда соответствует своя обобщенная координата $\lambda_n(t)$ и своя частота собственных колебаний ω_n .

Причиной колебаний является движение стенок бака. Обобщенная координата колебаний λ_n определяется из третьего уравнения (3.52).

Как видно из равенства (3.43), в результате колебаний жидкости возникает дополнительная поперечная сила

$$F_{Y\lambda} = - \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n.$$

В случае собственных колебаний каждый член ряда изменяется по гармоническому закону с частотой ω_n . Силу $F_{Y\lambda}$ можно понимать как сумму произведений приведенных масс жидкости m_n на обобщенные ускорения $\ddot{\lambda}_n$. Приведенная масса жидкости, участвующая в колебаниях с обобщенным ускорением $\ddot{\lambda}_n$, уменьшается с увеличением номера n тона колебаний (3.44). Для первого тона колебаний масса численно равна массе такого объема цилиндра, высота которого $\sim 0,45 r_0$; для второго тона колебаний масса в 30 раз меньше.

На основании равенства (3.51) можно заключить, что момент от колебаний жидкости состоит из динамического момента, пропорционального обобщенному ускорению $\ddot{\lambda}_n$, и статического момента, пропорционального обобщенной координате λ_n :

$$M_{C\lambda} = - \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n + g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n.$$

С физической точки зрения статический момент возникает в результате отклонения свободной поверхности и его можно считать моментом, возникающим от поперечного смещения центра масс жидкости по отношению к оси бака. Динамический момент равен поперечной силе $F_{Y\lambda}$, умноженной на расстояние L_n от центра вращения до этой силы. Как уже отмечалось на основании формулы (3.35), наибольшую скорость колебаний имеет жидкость, расположенная в верхних слоях. По мере удаления от поверхности в глубину эта скорость быстро уменьшается. Поэтому приведенная масса m_n колеблющейся жидкости располагается недалеко от невозмущенной свободной поверхности:

$$x_n = L_n - L = -\frac{2r_0}{\zeta_n} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right). \quad (3.54)$$

При $h/r_0 \geq 1$ для первого тона колебаний приведенная масса расположена на глубине около радиуса; с повышением номера n тона колебаний эта масса приближается к свободной поверхности.

Как и сила $F_{Y\lambda}$, момент $M_{C\lambda}$ сильно уменьшается с увеличением номера n тона колебаний.

3.8. МЕХАНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКЕ

Так как уравнения колебаний свободной поверхности аналогичны уравнениям колебаний математических маятников с кинематическим возбуждением, то при анализе динамики ракет естественно возникает вопрос о замене колеблющейся жидкости системой математических маятников.

Для решения задачи сравним плоское движение систем – заданной и искомой. Дифференциальные уравнения движения заданной системы представлены в виде (3.52).

Искомую механическую систему представим в виде твердого тела (стержня) с n математическими маятниками. Точки подвеса математических маятников расположены на одной прямой, которая является одной из главных центральных осей инерции твердого тела с закрепленными на этой оси массами маятников (рис. 3.7). Эту прямую будем считать продольной осью стержня, а положение масс маятников на этой оси – невозмущенным.

Обозначим через m^* массу твердого тела с n маятниками, m_n^* – массу n -го маятника, I^* – момент инерции твердого тела с закрепленными в невозмущенном положении массами маятников относительно поперечной оси Z_1 , проходящей через точку C , которую будем принимать за центр масс системы, L_n^* – расстояние от точки C до массы n -го маятника, l_n – длину n -го маятника.

На заданную и искомую системы действуют в направлении осей Y одинаковые поперечные силы F_Y и относительно осей Z_1 – моменты M_C .

Найдем параметры искомой системы, при которых дифференциальные уравнения ее движения будут такими же, как (3.52). За обобщенные координаты примем $y_C(t)$ – линейное отклонение в направлении координатной оси Y точки C стержня; ϑ – угол поворота оси стержня; $y_n^*(t)$ – линейное отклонение массы n -го маятника от оси стержня.

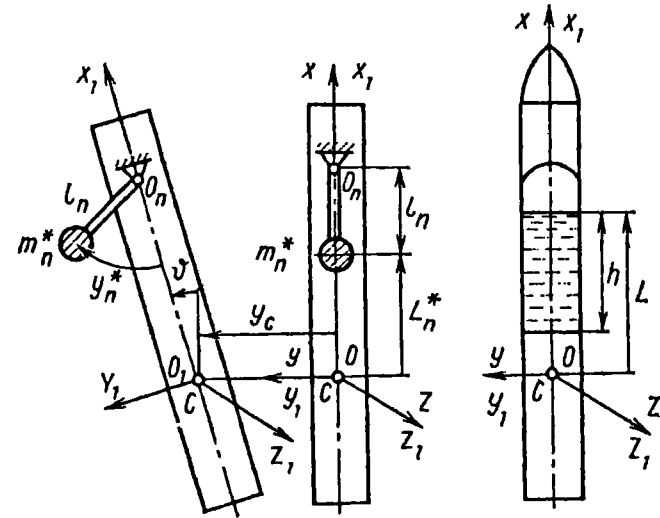


Рис. 3.7

Для составления дифференциальных уравнений движения маятниковой системы применим теорему об изменении количества движения и теорему об изменении кинетического момента.

Проекции на оси Y количества движения системы

$$Q_Y = m^* [y_C + \vartheta (L - h/2)] + \sum_{n=1}^n m_n^* y_n^*;$$

кинетический момент системы относительно оси Z_1

$$K_{Z_1} = I^* \dot{\vartheta} + m^* y_C (L - h/2) + \sum_{n=1}^n m_n^* y_n^* L_n^*;$$

момент внешних сил относительно оси Z_1

$$L_{Z_1} = M_C + m^* g^* (L - h/2) \vartheta + \sum_{n=1}^n m_n^* g^* y_n^*.$$

На основании теорем имеем

$$dQ_Y/dt = F_Y; \quad dK_{Z_1}/dt = L_{Z_1}$$

или

$$m^* \ddot{y}_C + m^* (L - h/2) \ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n^* \ddot{y}_n^* = F_Y; \quad (3.55)$$

$$I^* \ddot{\vartheta} - m^* g^* \left(L - \frac{h}{2} \right) \ddot{\vartheta} + m^* \left(L - \frac{h}{2} \right) \ddot{y}_C + \sum_{n=1}^{\infty} m_n^* L_n^* \ddot{y}_n^* - g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n^* y_n^* = M_C.$$

Кинетический момент маятника относительно оси его подвеса

$$K_{O_n} = m_n^* (\dot{y}_C + L_n^* \dot{\vartheta} + \dot{y}_n^*) l_n.$$

Применяя теорему об изменении кинетического момента, получим

$$m_n^* l_n (\dot{y}_C + L_n^* \dot{\vartheta} + \dot{y}_n^*) = -m_n^* g^* (y_n^* - l_n \vartheta)$$

или

$$\ddot{y}_n^* + \frac{g^*}{l_n} y_n^* = -L_n^* \ddot{\vartheta} - \ddot{y}_C + g^* \vartheta. \quad (3.56)$$

Из сопоставления выражений (3.52), (3.55) и (3.56) заключаем, что параметры маятниковой системы должны быть равны следующим значениям:

$$l_n = \frac{r_0}{\zeta_n \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}; \quad L_n^* = L_n = L \left[1 - \frac{2r_0}{\zeta_n L} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right]; \quad (3.57)$$

$$m_n^* = m_n = \pi r_0^3 \rho \frac{2}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right);$$

$$y_n^* = \lambda_n; \quad m^* = m = \pi r_0^2 h \rho; \quad I^* = I = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Таким образом, бак, частично заполненный жидкостью, в плоском движении динамически эквивалентен твердому телу с присоединенными маятниками. Момент инерции твердого тела с закрепленными в невозмущенном положении маятниками должен быть равен эквивалентному моменту инерции жидкости.

Длина маятников, их масса и расположение относительно центра вращения C определяются выражениями (3.57).

Каждый тон колебаний жидкости имитируется колебаниями математического маятника. Масса маятника равна приведенной массе колеблющейся жидкости, она уменьшается с увеличением номера n тона колебаний. С возрастанием номера n тона частота собственных колебаний жидкости увеличивается, поэтому длина маятника уменьшается.

Линейное отклонение маятника от оси подвеса равно обобщенной координате колебаний жидкости $y_n^* = \lambda_n$.

Вместо математических маятников механическим аналогом колебаний жидкости могут быть колебания грузов, подвешенных на невесомых пружинах. В этом случае каждому тону колебаний жидкости соответствуют колебания груза с массой m_n , который двумя пружинами с жесткостью $k_n/2$ прикреплен к стенкам бака на расстоянии x_n (3.54) от свободной поверхности (рис. 3.8).

Вязкое трение, при помощи которого учитываются демпфирующие свойства колебаний реальной жидкости, вводится в механическую модель установкой двух демпферов с коэффициентом вязкости трения $h_n/2$ между массой m_n и стенкой бака.

Жесткость пружин подбирается из условия равенства частот собственных колебаний:

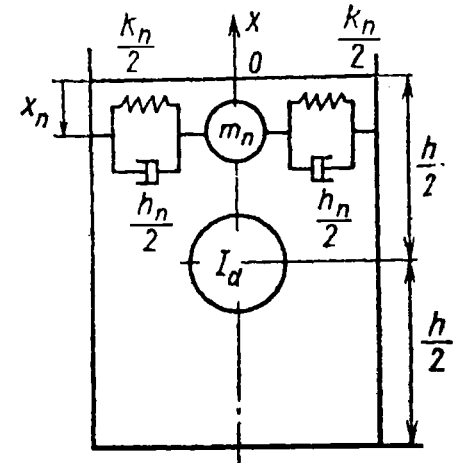


Рис. 3.8

$$\omega_n^2 = \frac{g^* \zeta_n}{r_0} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) = \frac{k_n}{m_n}.$$

Так как во вращательном движении принимает участие не вся жидкость, а часть ее находится в состоянии покоя, то в механическую модель следует ввести без трения некоторую массу с моментом инерции I_d , не участвующую во вращении, и расположить ее в центре масс жидкости. Тогда

$$I = I_0 - I_d = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

3.9. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим три задачи.

1. Определить частоту собственных колебаний системы, состоящей из бака с жидкостью, учитывая только первый тон колебаний свободной поверхности жидкости. Цилиндрический бак, частично заполненный тяжелой идеальной жидкостью, совершает свободное движение без трения в прямых горизонтальных направляющих (рис. 3.9).

Применим к решению задачи уравнения (3.52). В соответствии с условием, положив $\dot{\vartheta} = 0$, $F_Y = 0$, $M_C = 0$, получим первую парциальную систему (3.52):

$$m \ddot{y}_C + m_1 \ddot{\lambda}_1 = 0; \quad \ddot{\lambda}_1 + \omega_1^2 \lambda_1 = -\ddot{y}_C,$$

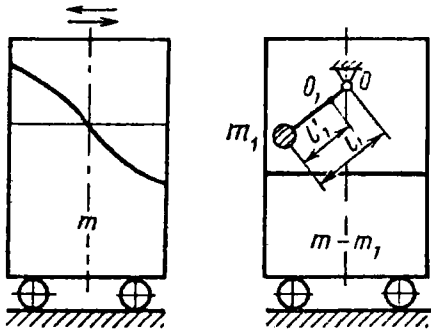


Рис. 3.9

где m — масса цилиндра с жидкостью. Частота колебаний ω_1 и масса m_1 определяются по формулам (3.37) и (3.44) при $n = 1$.

Исключив \ddot{y}_C , найдем

$$\ddot{\lambda}_1 (1 - m_1/m) + \omega_1^2 \lambda_1 = 0.$$

Искомая частота собственных колебаний парциальной системы

$$\omega_1^* = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - m_1/m}} \quad (3.58)$$

всегда больше частоты собственных колебаний жидкости в неподвижном баке. Если $m > m_1$, то $\omega_1^* \approx \omega_1$ и жидкость совершает колебания как бы в неподвижном баке.

Полученную выше формулу удобно интерпретировать при помощи маятниковой модели. При собственных колебаниях центр масс системы остается неподвижным. Когда бак отклоняется вправо, маятник отклоняется влево и наоборот. Маятник совершает колебания относительно неподвижной точки O_1 , расстояние от которой до массы маятника

$$l_1' = l_1 (1 - m_1/m).$$

Теперь частоту колебаний системы можно определить как частоту собственных колебаний маятника длиной l_1' :

$$\omega_1^* = \sqrt{\frac{g^*}{l_1'}} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - m_1/m}}.$$

2. Определить внешнюю силу $F_Y = F_0 \sin pt$, которую нужно приложить к баку, частично заполненному жидкостью, чтобы вызвать его поперечные прямолинейные колебания с постоянным по амплитуде ускорением.

На основании уравнений (3.52) уравнения движения бака с жидкостью при $n = 1$ будут иметь вид

$$m \ddot{y}_C + m_1 \ddot{\lambda}_1 = F_0 \sin pt; \quad \ddot{\lambda}_1 + \omega_1^2 \lambda_1 = -\ddot{y}_C. \quad (3.59)$$

Применив обозначение (3.52) предыдущей задачи, получим частное решение уравнений (3.59) относительно \ddot{y}_C в виде

$$\ddot{y}_C = \frac{F_0}{m(1 - m_1/m)} \frac{\omega_1^2 - p^2}{\omega_1^{*2} - p^2} \sin pt.$$

Так как по условию $\ddot{y}_C = a^{(0)} \sin pt$, то найдем, что

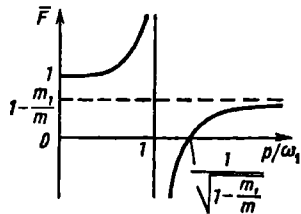


Рис. 3.10

$$F_0 = a^{(0)} m (1 - m_1/m) \frac{\omega_1^{*2} - p^2}{\omega_1^2 - p^2}.$$

График безразмерной силы $\bar{F} = F_0/(a^{(0)}m)$ в зависимости от соотношения частот p/ω_1 приведен на рис. 3.10. Если частота вынужденных колебаний равна частоте собственных колебаний жидкости в неподвижном баке, то сила должна быть бесконечно большой. Когда частота колебаний внешней силы совпадает с частотой собственных колебаний системы $p = \omega_1^*$, то эта сила равна нулю. Этот вывод сделан на основании уравнений для малых колебаний без учета сил трения и нелинейных эффектов. В реальной системе сила всегда будет равна конечной величине.

3. Определить частоту собственных колебаний системы, представляющей собой корпус ракеты с двумя одинаковыми цилиндрическими баками, частично заполненными идеальной жидкостью, принимая во внимание только первый тон колебаний жидкости. Считаем ракету твердым телом, шарнирно подвешенным в точке C (рис. 3.11) и совершающим плоские колебания. Точка C лежит на продольной оси ракеты и совпадает с центром масс твердого тела с жидкостью, когда свободные поверхности в обоих баках перпендикулярны продольной оси.

Решение задачи проведем при помощи маятниковой модели.

Выражения кинетической и потенциальной энергии системы можно

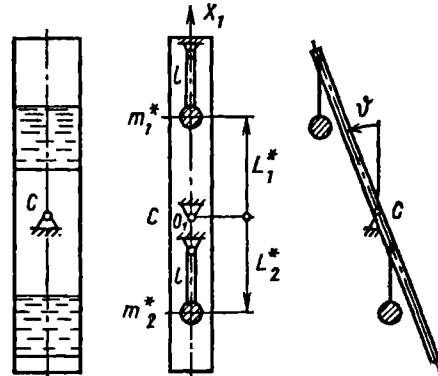


Рис. 3.11

представить в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[I \dot{\theta}^2 + \sum_{j=1}^2 m_j^* (2L_j^* \dot{\theta} \dot{\lambda}_j + \dot{\lambda}_j^2) \right];$$

$$U = g^* \sum_{j=1}^2 m_j^* \left(\frac{\lambda_j^2}{2l} - \lambda_j \theta \right).$$

Здесь I – момент инерции (относительно точки C) стержня с закрепленными на продольной оси маятниками; θ – угол поворота стержня; λ_j – линейное отклонение массы маятника m_j^* от продольной оси стержня.

Подставляя выражения кинетической и потенциальной энергий системы в уравнения Лагранжа второго рода, получим

$$I \ddot{\theta} + \sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^* \ddot{\lambda}_j - g^* \sum_{j=1}^2 m_j^* \lambda_j = 0;$$

$$\ddot{\lambda}_j + (g^*/l) \lambda_j = -L_j^* \ddot{\theta} + g^* \theta. \quad (3.60)$$

Приняв

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t, \quad \lambda_j = \lambda_{0j} \cos \omega t$$

и подставив эти выражения в уравнения (3.60), получим следующее уравнение для частот системы:

$$\omega^4 \left(I - \sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^{*2} \right) - \omega^2 \left(I \frac{g^*}{l} + 2g^* \sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^* \right) - g^{*2} \sum_{j=1}^2 m_j^* = 0. \quad (3.61)$$

Обозначив

$$a_0 = I - \sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^{*2}; \quad a_2 = I \frac{g^*}{l} + 2g^* \sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^*; \quad a_4 = g^{*2} \sum_{j=1}^2 m_j^*,$$

перепишем уравнение (3.61) в виде

$$a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2 - a_4 = 0.$$

Обозначим частоты системы через ω_2 и ω_3 . Найдем

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{a_2}{2a_0} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4a_0 a_4}{a_2^2}} \right). \quad (3.62)$$

Произведение $a_0 a_4 > 0$, поэтому при $a_2 > 0$ частота $\omega_2^2 > 0$, а $\omega_3^2 < 0$. Система имеет только одну частоту собственных колебаний ω_2 . Приняв $\omega_3 = iu$, найдем

$$\cos \omega_3 t = \cos iut = \text{ch} ut.$$

Движение по закону $\text{ch} ut$ будет неколебательным, т.е. отклонения системы непрерывно будут возрастать. Положение равновесия системы в вертикальной плоскости неустойчиво.

Сравним частоту ω_2 с частотой собственных колебаний маятника $\omega_j = \sqrt{g^*/l_j}$ для случая, когда $\sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^* = 0$.

Из формулы (3.61) имеем

$$\frac{\omega_2^2}{\omega_j^2} > 1 / \left(1 - \frac{1}{I} \sum_{j=1}^2 m_j^* L_j^{*2} \right).$$

Частота собственных колебаний системы при угловых движениях тем больше частоты собственных колебаний маятников, чем большую долю составляют моменты инерции маятников в суммарном моменте инерции I .

3.10. ДРУГИЕ ФОРМЫ ПОТЕНЦИАЛА АБСОЛЮТНЫХ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ

Представление потенциальной функции $\Phi = \psi + \phi$ выражением

$$\Phi = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{(\zeta_n^2 - 1)} (X_{\Psi_n} \dot{\Phi} + X_{\Phi_n} \dot{\lambda}_n) + r \sin \eta [(L+x) \dot{\Phi} + \dot{\psi}_C], \quad (3.63)$$

$$\text{где } X_{\Psi_n} = -\frac{2r_0}{\zeta_n} \frac{\text{sh} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \left(\frac{h}{2} + x \right) \right]}{\text{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right)},$$

не является единственным. Это объясняется некоторой произвольностью выбора граничных условий для функции ψ (или X_{Ψ_n}) на свободной поверхности. Можно подобрать множество комбинаций из гиперболических функций для X_{Ψ_n} , которые будут решением уравнения (3.23) и удовлетворять условию на дне бака. Изменяя содержание функции ψ , мы изменяем содержание функции ϕ .

Вместо X_{Ψ_n} в формуле (3.63) можно, например, принять выражения

$$X_{(2)n} = \frac{2r_0^2}{\zeta_n^2 - 1} \frac{2 \text{ch} \left(\zeta_n \frac{x}{r_0} \right) - \text{ch} \left(\zeta_n \frac{h+x}{r_0} \right)}{\zeta_n \text{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} \quad (3.64)$$

или

$$X_{(3)n} = -\frac{4r_0^2}{\zeta_n^2 - 1} \frac{\text{sh} \left(\zeta_n \frac{x}{r_0} \right)}{\zeta_n \text{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)}, \quad (3.65)$$

которые также являются решением уравнения (3.23) и удовлетворяют граничному условию (3.28) на дне бака.

На свободной поверхности будем иметь:
в случае (3.64)

$$dX_{(2)n}/dx = -2r_0/(\zeta_n^2 - 1) \quad \text{при } x = 0;$$

в случае (3.65)

$$dX_{(3)n}/dx = -4r_0/[(\zeta_n^2 - 1) \text{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)] \quad \text{при } x = 0.$$

Из условия на свободной поверхности (3.18) найдем уравнения для обобщенной координаты λ_n . В случае (3.64) получим

$$\ddot{\lambda}_{(2)n} + \omega_n^2 \lambda_{(2)n} = -L_{(2)n} \ddot{\vartheta} - \ddot{y}_C, \quad (3.66)$$

где

$$L_{(2)n} = L - \frac{r_0}{\zeta_n} \frac{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{x}{r_0}\right) - 2}{\operatorname{sh}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)}.$$

В случае (3.65) получим

$$\ddot{\lambda}_{(3)n} + \omega_n^2 \lambda_{(3)n} = L \ddot{\vartheta} - \ddot{y}_C - g^* \ddot{\vartheta} \left[1 - \frac{2}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)} \right]. \quad (3.67)$$

Из сравнения уравнений (3.36), (3.66) и (3.67) видно, что обобщенные координаты λ_n , $\lambda_{(2)n}$, $\lambda_{(3)n}$ во всех трех случаях имеют разный смысл.

Установим количественные различия между ними. Для этого путем замены переменных получим из уравнения (3.36) уравнения (3.66) и (3.67). Так как во всех трех уравнениях коэффициент при \ddot{y}_C одинаков, то λ_n , $\lambda_{(2)n}$, $\lambda_{(3)n}$ связаны между собой только через угол ϑ . Положим $\lambda_n = \lambda_{(2)n} + a_2 \vartheta$; $\lambda_n = \lambda_{(3)n} + a_3 \vartheta$. Подставляя поочередно эти соотношения в уравнение (3.36) и сравнивая полученные коэффициенты с коэффициентами при одинаковых переменных в уравнениях (3.66) и (3.67), придем к выводу, что

$$a_2 = r_0 \left/ \left[\zeta_n \operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right) \right] \right. = l_n;$$

$$a_3 = \frac{2r_0}{\zeta_n \operatorname{th}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)} \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)} \right] = 2l_n \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)} \right].$$

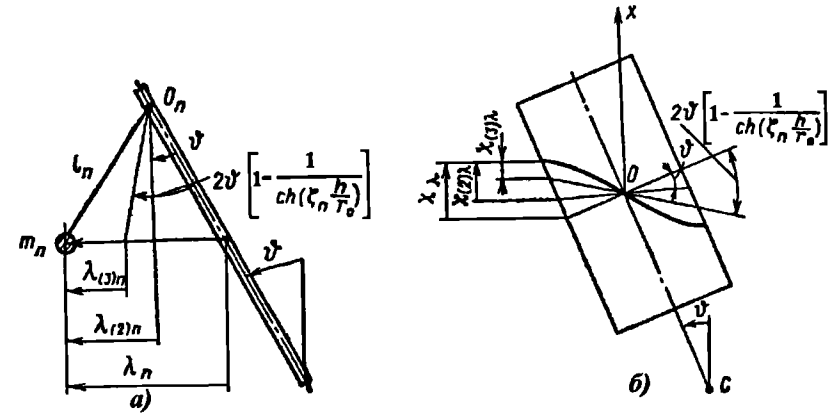


Рис. 3.12

Следовательно,

$$\lambda_n = \lambda_{(2)n} + l_n \vartheta \quad (3.68)$$

или

$$\lambda_n = \lambda_{(3)n} + 2l_n \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)} \right] \vartheta. \quad (3.69)$$

Применительно к аналогии с маятниками смысл координат $\lambda_{(2)n}$ и $\lambda_{(3)n}$ ясен из рис. 3.12, а. В случае (3.68) обобщенная координата $\lambda_{(2)n}$ отсчитывается от вертикальной плоскости, проходящей через точку O_n . В случае (3.69) координата $\lambda_{(3)n}$ отсчитывается от плоскости, наклоненной к оси стержня на угол

$$2 \left[1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\zeta_n \frac{h}{r_0}\right)} \right] \vartheta,$$

тогда как обобщенная координата λ_n отсчитывается от оси стержня.

Отсчеты смещений свободной поверхности жидкости, пропорциональные $\lambda_{(2)n}$ и $\lambda_{(3)n}$, показаны на рис. 3.12, б.

Сравним структуры дифференциальных уравнений движения. Уравнения, соответствующие обобщенной координате $\lambda_{(2)n}$, найдем из уравнений (3.52), заменив в них λ_n согласно равенству (3.68).

Приняв $L - h/2 = 0$, получим

$$m\ddot{y}_C + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_{(2)n} + \ddot{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n = F_Y;$$

$$\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n l_n \right) \ddot{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_{(2)n} - g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_{(2)n} - g^* \ddot{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n = M_C; \quad (3.70)$$

$$\ddot{\lambda}_{(2)n} + \omega_n^2 \lambda_{(2)n} = -(L_n + l_n) \ddot{\theta} - \ddot{y}_C.$$

Если во втором уравнении переменную $\lambda_{(2)n}$ заменить ее значением, найденным из третьего уравнения, получим

$$m\ddot{y}_C + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_{(2)n} + \ddot{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n = F_Y;$$

$$\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{(2)n} \right) \ddot{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_{(2)n} \ddot{\lambda}_{(2)n} + \ddot{y}_C \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n - \ddot{\theta} g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n = M_C; \quad (3.71)$$

$$\ddot{\lambda}_{(2)n} + \omega_n^2 \lambda_{(2)n} = -L_{(2)n} \ddot{\theta} - \ddot{y}_C,$$

где

$$L_{(2)n} = L_n + l_n = L \left(1 - \frac{r_0}{L \zeta_n} \frac{\operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) - 2}{\operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} \right),$$

$$I_{(2)n} = I_n + m_n l_n (2L_n + l_n) =$$

$$= \pi r_0^5 \rho \left[-\frac{1}{r_0} \frac{8h - 4L}{(\zeta_n^2 - 1) \zeta_n^2} + \frac{2}{\zeta_n^3 (\zeta_n^2 - 1)} \frac{5 \operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) - 4}{\operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right)} \right].$$

Одному и тому же потенциалу соответствуют различные по структуре дифференциальные уравнения, например (3.70) и (3.71). Но эти различия чисто внешние, и возникают они вследствие линейного преобразования уравнений.

Уравнения (3.70) и (3.71) получены из (3.52) при условии $L - h/2 = 0$, т.е. когда точка C совпадает с центром масс невозмущенной жидкости.

Если положение точки C^* (центра приведения сил) выбрать из другого условия, а именно

$$m(L - h/2) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n = 0, \quad (3.72)$$

то вместо уравнения (3.71) получим уравнения такой же структуры, что и в работе [16]:

$$m\ddot{y}_{C^*} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_{(2)n} = F_Y;$$

$$\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_{(2)n}^* \right) \ddot{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_{(2)n}^* \ddot{\lambda}_{(2)n} = M_{C^*}; \quad (3.73)$$

$$\ddot{\lambda}_{(2)n} + \omega_n^2 \lambda_{(2)n} = -L_{(2)n}^* \ddot{\theta} - \ddot{y}_{C^*}.$$

Здесь $L_{(2)n}^* = L_{nC^*} + l_n$; L_{nC^*} — расстояние от точки C^* до массы маятника.

Центр приведения (точка C^*), определяемый равенством (3.72), называется метacentром системы. Выясним его физический смысл.

Пусть стержень с маятниками, находящийся в поле массовых сил интенсивностью \bar{g}^* , может вращаться вокруг оси, проходящей через

точку C^* (рис. 3.13). При отклонении стержня на угол ϑ от направления вектора \vec{g}^* массы m_n сместятся от оси стержня на расстояния $l_n \sin \vartheta$.

Суммарный восстанавливающий момент массовых сил относительно оси, проходящей через точку C^* , будет

$$\left[m(x_C - x_{C^*}) - \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n \right] g^* \sin \vartheta = 0.$$

Метацентр системы в этом случае совпадает с положением оси, относительно которой тело с жидкостью находится в положении безразличного равновесия.

Определим взаимное положение точек C и C^* на примере жидкости, заполняющей цилиндрический бак (см. рис. 3.3). Из уравнения (3.72) найдем

$$L = \frac{h}{2} - \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n.$$

Подставив сюда значения m_n из (3.44) и l_n из (3.57), получим

$$L = \frac{h}{2} - \frac{\pi r_0^4 \rho}{4m} = \frac{h}{2} - \frac{r_0^2}{4h}.$$

Метацентр C^* расположен выше центра масс C . Величина $\pi r_0^4 \rho / 4$ численно равна экваториальному моменту инерции свободной поверхности жидкости с плотностью ρ относительно оси Z_1 . Обозначим этот момент через Ω . Тогда $L = h/2 - \Omega/m$. Если положение точек C и C^* определить координатами x_C и x_{C^*} , то с учетом направления оси X_1 будем иметь

$$x_C = -h/2; \quad x_{C^*} = -h/2 + \Omega/m.$$

Полученную для x_{C^*} формулу можно записать в более общем виде:

$$x_{C^*} = x_C + \Omega/m.$$

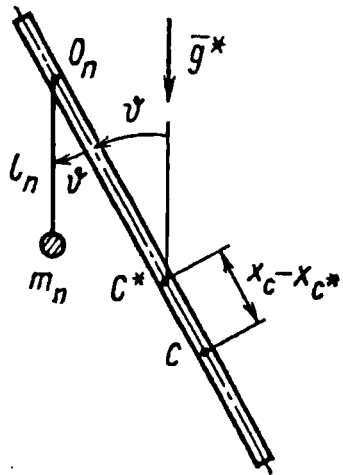


Рис. 3.13

Уравнения движения, соответствующие потенциалу Φ_3 , можно вывести несколькими приемами, самый простой из которых заключается в подстановке выражения (3.69) в уравнения (3.52).

3.11. ПОТЕНЦИАЛ АБСОЛЮТНЫХ СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ В БАКЕ, ОБРАЗОВАННОМ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ КРУГОВЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Для определения потенциала Φ здесь имеется дополнительное граничное условие на внутренней стенке бака (рис. 3.14):

$$(\partial \Phi / \partial r)_{r=\beta r_0} = v_r^*,$$

где βr_0 — радиус внутреннего цилиндра.

Рассмотрим особенности определения потенциальной функции Φ , вносимые внутренней границей.

Решение уравнения (3.23) выражается через функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка

$$R_n(r) = A_1 J_1(k_n r) + A_2 Y_1(k_n r).$$

Пользуясь двумя граничными условиями

$$dR/dr = 0 \quad \text{при} \quad r = r_0 \quad \text{и} \quad r = \beta r_0,$$

получим систему уравнения для определения произвольных постоянных A_1 и A_2 :

$$A_1 J_1'(\zeta_n) + A_2 Y_1'(\zeta_n) = 0;$$

$$A_1 J_1'(\beta \zeta_n) + A_2 Y_1'(\beta \zeta_n) = 0.$$

Здесь, как и в разд. 3.4, $\zeta_n = k_n r_0$. Коэффициенты A_1 и A_2 отличны от нуля, если

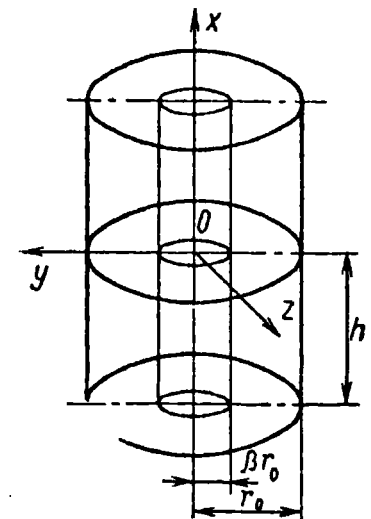


Рис. 3.14

$$J_1'(\zeta_n) Y_1'(\beta \zeta_n) - J_1'(\beta \zeta_n) Y_1'(\zeta_n) = 0. \quad (3.74)$$

Это уравнение дает бесконечный спектр собственных значений. Обозначим

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{J_1'(\zeta_n)}{Y_1'(\zeta_n)} = -\frac{J_1'(\beta \zeta_n)}{Y_1'(\beta \zeta_n)} = \nu_n.$$

Тогда

$$R_n(r) = \left[J_1\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) + \nu_n Y_1\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) \right] A_1.$$

Выбрав постоянную A_1 таким образом, чтобы на внешней стенке бака значение функции Бесселя было $R_n(r_0) = 1$, получим

$$R_n\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) = a_n \left[J_1\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) + \nu_n Y_1\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) \right], \quad (3.75)$$

где

$$a_n = 1/[J_1(\zeta_n) + \nu_n Y_1(\zeta_n)].$$

При $\beta = 0$ из уравнения (3.75) можно получить для $R_n(r)$ выражение в виде (3.26).

Вид функции R_n для $n = 1, 2$ и $\beta = 0; 0,1; 0,2; 0,3$ показан на рис. 3.15 и 3.16. Различия между функциями R_n , являющимися формами колебаний свободной поверхности в радиальном направлении, для одного и того же тона колебаний n относительно невелики и проявляются главным образом около внутренней границы.

Разложение переменного радиуса r в ряд Фурье по функциям (3.75) вместо (3.27) даст

$$r = 2r_0 \sum_{n=1}^{\infty} d_n R_n\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right); \quad d_n = \frac{1 - \beta R_n(\beta)}{(\zeta_n^2 - 1) - (\beta^2 \zeta_n^2 - 1) R_n^2 \beta}. \quad (3.76)$$

На основании результатов, полученных в разд. 3.4, а также с учетом выражений (3.75) и (3.76), получим

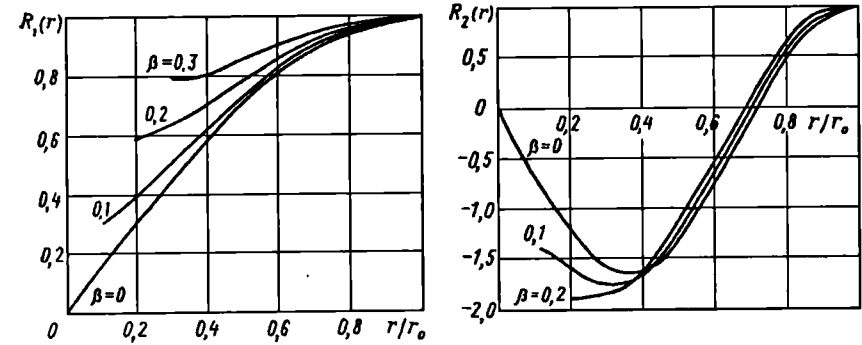


Рис. 3.15

Рис. 3.16

$$\psi = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} d_n R_n\left(\zeta_n \frac{r}{r_0}\right) (X_{\psi_n} \dot{\vartheta} + X_{\varphi_n} \dot{\lambda}_n) + r \sin \eta [(L + x) \dot{\vartheta} + y \dot{C}].$$

Уравнение для определения обобщенной координаты $\lambda_n(t)$ можно получить из выражения (3.18); при этом оно примет тот же вид, что и (3.36):

$$\ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n = -L_n \ddot{\vartheta} - \dot{y}_C + g^* \dot{\vartheta}.$$

Формулы для частоты ω_n собственных колебаний и коэффициента L_n также сохраняют свой прежний вид (3.37) и (3.38). Причем в этих формулах значения собственных чисел ζ_n отвечают решению уравнения (3.74).

Структура выражений для потенциалов ψ и φ идентична выражениям (3.33) и (3.35). Поэтому уравнения движения бака с жидкостью будут аналогичны уравнениям (3.52).

3.12. МЕТОД ЛАГРАНЖА ПРИ ВЫВОДЕ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

Зная скорость в любой точке объема, занимаемого жидкостью, определим кинетическую и потенциальную энергии всей массы жидкости и, применив уравнения Лагранжа второго рода, получим уравнения движения бака с жидкостью в обобщенных координатах $y_C, \vartheta, \lambda_n$.

Так как скорости любой частицы жидкости в направлении координатных осей X, Y, Z

$$v_x = \partial\Phi/\partial x; \quad v_y = \partial\Phi/\partial y; \quad v_z = \partial\Phi/\partial z,$$

то кинетическая энергия всей массы жидкости

$$T = \frac{1}{2} \rho \iiint_V \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV,$$

где V – объем, занимаемый жидкостью.

Преобразуем подынтегральное выражение и приведем к виду, удобному для применения формулы Гаусса – Остроградского. Получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \iiint_V \left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dV = \\ &= \frac{1}{2} \rho \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right] dV. \end{aligned}$$

На основании теоремы Гаусса – Остроградского интеграл по объему заменяется интегралом по поверхности. Получим

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_S \left[\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cos(n, x) + \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial y} \cos(n, y) + \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} \cos(n, z) \right] dS.$$

Здесь S – поверхность жидкости, ограничивающая объем V ; n – внешняя нормаль к поверхности жидкости.

Поверхность жидкости можно разделить на три части – боковую, поверхность дна и свободную поверхность. Для боковой поверхности (см. рис. 3.6)

$$\cos(n, y) = \sin \eta; \quad \cos(n, z) = \cos \eta; \quad dS = r_0 d\eta dx; \quad \cos(n, x) = 0;$$

для поверхности дна

$$\cos(n, x) = -1; \quad \cos(n, y) = \cos(n, z) = 0; \quad dS = r dr d\eta;$$

для свободной поверхности

$$\cos(n, x) = 1; \quad \cos(n, y) = \cos(n, z) = 0; \quad dS = r dr d\eta.$$

Так как

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \cos \eta - \frac{\partial\Phi}{r \partial \eta} \sin \eta;$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \sin \eta + \frac{\partial\Phi}{r \partial \eta} \cos \eta,$$

то, произведя преобразования, получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \left[\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right]_{x=0} r dr d\eta - \int_0^{r_0} \left[\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right]_{x=-h} r dr d\eta + \\ &\quad + \int_{-h}^0 \left[\Phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right]_{r=r_0} r d\eta dx. \end{aligned}$$

Выражение для потенциальной функции Φ имеет вид

$$\Phi = 2r_0 \sin \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_n(r)}{(\zeta_n^2 - 1)} (X_{\psi_n} \dot{\psi} + X_{\varphi_n} \dot{\varphi}_n) + r \sin \eta [(L + x) \dot{\psi} + \dot{y}_C].$$

На основании свойства функций Бесселя имеем

$$\int_0^{r_0} \left[\frac{J_1 \left(\zeta \frac{r}{r_0} \right)}{(\zeta_n^2 - 1) J_1(\zeta_n)} \right]^2 r dr = \frac{r_0^2}{2\zeta_n^2(\zeta_n^2 - 1)};$$

$$\int_0^{r_0} \left\{ \frac{d}{dr} \left[\frac{J_1 \left(\zeta \frac{r}{r_0} \right)}{(\zeta_n^2 - 1) J_1(\zeta_n)} \right] \right\}^2 r dr = \frac{1}{2(\zeta_n^2 - 1)}.$$

Выполнив интегрирование по x (значения определенных интегралов приведены для справок в конце главы) и сгруппировав все коэффициенты при одноименных переменных, с учетом обозначений (3.38), (3.44) и (3.47) получим

$$T = \frac{1}{2} \left[\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \dot{\vartheta}^2 + m \dot{y}_C^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \dot{\lambda}_n^2 + \right. \\ \left. + 2m \left(L - \frac{h}{2} \right) \dot{y}_C \dot{\vartheta} + 2\dot{\vartheta} \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \dot{\lambda}_n + 2\dot{y}_C \sum_{n=1}^{\infty} m_n \dot{\lambda}_n \right]; \quad (3.77)$$

$$I_n = \pi r_0^5 \rho \left[-\frac{h}{r_0} \frac{8}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 - 1)} + \frac{16}{\zeta_n^3 (\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \right].$$

Теперь составим выражение потенциальной энергии массы жидкости. Значение потенциальной энергии, соответствующее невозмущенному состоянию жидкости, когда $y_C = \vartheta = 0$ и все координаты $\lambda_n = 0$, примем равным нулю.

Потенциальная энергия возрастает, если частицы жидкости отклоняются в направлении оси X , и уменьшается, если они отклоняются в противоположном направлении.

Рассмотрим столбик жидкости с поперечным сечением $r d\eta dr$. Расстояние от столбика до плоскости OXZ равно $r \sin \eta$ (см. рис. 3.6).

При невозмущенном состоянии жидкости высота столбика равна h , а расстояние до центра столбика от плоскости OYZ равно $h/2$. При возмущенном состоянии жидкости высота столбика равна $h + \chi_\lambda$, а расстояние от плоскости $O_1 Y_1 Z_1$ до центра столбика равно $h/2 - \chi_\lambda/2$.

Отклонение центра массы столбика жидкости в абсолютной системе координат в направлении оси X складывается из отклонения, вызванного поворотом цилиндра на угол ϑ :

$$-(L - h/2)(1 - \cos \vartheta) - r \sin \eta \sin \vartheta,$$

и дополнительного отклонения от увеличения высоты столбика, равного $\chi_\lambda/2$. Полное смещение

$$\Delta = \chi_\lambda/2 - (L - h/2)(1 - \cos \vartheta) - r \sin \eta \sin \vartheta.$$

Потенциальная энергия элементарного столбика жидкости в возмущенном состоянии

$$dU = (h + \chi_\lambda) \Delta g^* \rho r d\eta dr.$$

Суммируя по всему объему, найдем

$$U = g^* \rho \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (h + \chi_\lambda) \left[\frac{\chi_\lambda}{2} - \left(L - \frac{h}{2} \right) (1 - \cos \vartheta) - r \sin \eta \sin \vartheta \right] r d\eta dr.$$

Принимая во внимание, что

$$(1 - \cos \vartheta) \approx \vartheta^2/2; \quad \sin \vartheta \approx \vartheta;$$

$$\int_0^{r_0} R_n(r) r^2 dr = r_0^3 / \zeta_n^2; \quad \int_0^{r_0} R_n(r) r dr = r_0^2 / \zeta_n^2$$

и учитывая свойства функций Бесселя, получим выражение потенциальной энергии всей массы жидкости:

$$U = - \left(L - \frac{h}{2} \right) m g^* \frac{\vartheta^2}{2} - g^* \vartheta \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 m_n \lambda_n^2.$$

Кинетическая и потенциальная энергии жидкости выражены, таким образом, через обобщенные координаты системы $y_C, \vartheta, \lambda_n$ и их скорости. В выражения для T и U не включены кинетическая и потенциальная энергии бака. При решении задач динамики кроме массы m и момента инерции I_0 жидкости следует, конечно, учитывать массу и момент инерции стенок бака.

Если на бак действуют внешние силы, приводящие в точке C к поперечной силе F_Y и паре сил с моментом M_C , то они будут обобщенными силами системы, соответствующими координатам y_C и ϑ .

Применяя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q_q \quad (q = y_C; \vartheta; \lambda_n),$$

в которых в обобщенную силу Q_q не включена сила тяжести, составим уравнения возмущенного движения жидкости:

$$m \ddot{y}_C + m(L - h/2) \ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \ddot{\lambda}_n = F_Y;$$

$$\left(I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right) \ddot{\vartheta} - mg^*(L - h/2) \ddot{\vartheta} + m(L - h/2) \ddot{y}_C + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} m_n L_n \ddot{\lambda}_n - g^* \sum_{n=1}^{\infty} m_n \lambda_n = M_C;$$

$$\ddot{\lambda}_n + \omega_n^2 \lambda_n + L_n \ddot{\vartheta} + \ddot{y}_C - g^* \ddot{\vartheta} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Как и следовало ожидать, полученные уравнения аналогичны уравнениям (3.52).

3.13. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Выражение кинетической энергии жидкости (см. разд. 3.12)

$$T = \frac{1}{2} \rho \int \int \left[\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(n, x) + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n, y) + \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n, z) \right] dS$$

справедливо для бака любой формы. Если удастся в аналитической форме найти потенциальную функцию Φ и проинтегрировать выражение для T , то параметры маятников и коэффициенты уравнений возмущенного движения станут известны. Однако в аналитическом виде задачу о колебаниях жидкости удастся решить только для весьма немногих форм баков. Например, для баков сферических, тороидальных и конических получить решение методом Фурье не удастся.

Для решения задачи о колебаниях жидкости в баке сложной формы широко применяются вариационные методы, для использования которых требуются ЭВМ.

Бак, частично заполненный идеальной жидкостью, представляет собой консервативную систему, к которой применим принцип Гамильтона — Остроградского. Интеграл действия по Гамильтону

$$J = \int_0^t L dt,$$

где $L = T - U$ — функция Лагранжа. Здесь T , U — кинетическая и потенциальная энергии жидкости. Согласно принципу Гамильтона для действительных движений интеграл действия принимает стационарное значение, т.е. вариация $\delta J = 0$.

Интеграл действия по Гамильтону J на постоянный множитель $\pi\rho/(2\omega)$ отличается от функционала

$$F(\Phi) = g^* \int_V (\nabla \Phi)^2 dV - \omega^2 \int_{S_0} \Phi^2 dS, \quad (3.78)$$

где ω — частота собственных колебаний; V , S_0 — объем жидкости в невозмущенном состоянии и площадь ее свободной поверхности;

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} - \text{оператор Гамильтона.}$$

Здесь $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы.

Таким образом, задача о собственных колебаниях жидкости в объеме V сводится к вариационной задаче для функционала (3.78). Для решения этой задачи удобно воспользоваться методом Ритца. Идея метода заключается в следующем.

Выбираем систему координатных функций φ_n , полную в объеме V , и приближенное решение задачи ищем в виде конечной суммы

$$\Phi = \sum_{n=1}^k a_n \varphi_n.$$

Если эту сумму подставить в функционал (3.78), то он превратится в функцию k переменных:

$$F(a_1, \dots, a_k) = g^* \sum_{n,m=1}^k p_{nm} a_n a_m - \omega^2 \sum_{n,m=1}^k q_{nm} a_n a_m.$$

Из условия экстремума функции $F(a_1, \dots, a_k)$ получаем k однородных уравнений для определения неизвестных a_1, \dots, a_k :

$$g^* \sum_{m=1}^k p_{nm} a_m - \omega^2 \sum_{m=1}^k q_{nm} a_m = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, k). \quad (3.79)$$

Для того, чтобы однородная система имела решение, отличное от нуля, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю:

$$|g^* p_{nm} - \omega^2 q_{nm}|_{n,m=1}^k = 0.$$

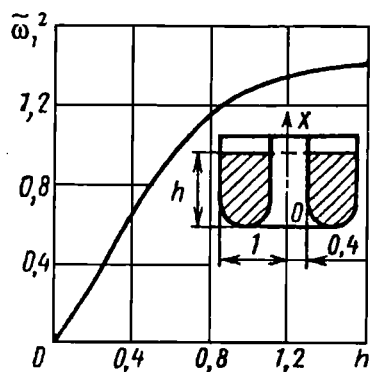


Рис. 3.17

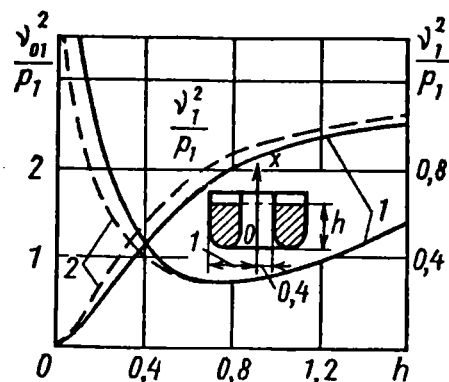


Рис. 3.18

Из решения этого уравнения можно определить первые k частот собственных колебаний жидкости. Каждой собственной частоте соответствует решение системы (3.79), которое дает нам n -ю форму собственных колебаний жидкости. И собственная частота, и собственная форма определяются при этом приближенно. При $k \rightarrow \infty$ решение будет стремиться к точному.

Воспользуемся результатами численных решений, полученных при помощи вариационного метода [16]. Параметры маятниковой системы в этой работе выражены через некоторые безразмерные величины $\tilde{\omega}_n$, v_{0n} и p_n следующим образом:

$$\omega_n^2 = \tilde{\omega}_n^2 \frac{g^*}{r_0}; \quad m_n = \rho r_0^3 \frac{v_n^2}{p_n};$$

$$l_{(2)n}^* = r_0 \sqrt{\frac{v_{0,n}^2}{p_n} \frac{p_n}{v_n^2}} = r_0 \frac{v_{0n}}{v_n}.$$

Здесь ρ — плотность жидкости; r_0 — характерный размер бака; $l_{(2)n}^*$ — расстояние до точки подвеса маятника от некоторой характерной точки O полости (рис. 3.17).

На рис. 3.17 и 3.18 показаны графически зависимости собственных частот и приведенных масс жидкости от глубины заполнения h для полости между двумя соосными круговыми баками с тороидальным дном

(кривые 1). В расчете принято: радиус внешнего бака $r_0 = 1$, радиус внутреннего бака $r_0\beta = 0,4$, радиус кривизны дна в диаметральной плоскости $R = 0,3$. Кривые 2 на рис. 3.18 соответствуют коэффициентам, рассчитанным для соосных баков с плоским дном. Из графиков видно, как быстро уменьшается влияние тороидального дна по мере увеличения глубины жидкости.

На рис. 3.19 приведены результаты расчетов для сферического бака. Кривые 1 соответствуют значениям, полученным вариационным методом с использованием сферических функций Лежандра, кривые 2 — значениям, полученным вариационным методом с использованием функций Бесселя; кривые 3 соответствуют значениям, полученным для бака эквивалентного цилиндрического с плоским дном.

3.14. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКЕ

Экспериментальное изучение колебаний жидкости целесообразно как для проверки исходных предпосылок, принимаемых при аналитических решениях, так и для определения значений коэффициентов дифференциальных уравнений возмущенного движения, когда это невозможно сделать теоретическим путем из-за сложности формы бака или по каким-либо другим причинам.

В уравнениях возмущенного движения имеются четыре коэффициента, связанных с колебаниями жидкости: ω_n — частота собственных колебаний жидкости в баке (маятника); L_n^* — расстояние от некоторой характерной точки — центра приведения — до оси подвеса маятника; m_n — приведенная масса колеблющейся жидкости (масса маятника); $I = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^*$ — момент инерции жидкости.

Эти коэффициенты можно определять с помощью экспериментов различными способами: измерением сил и моментов, действующих на бак со стороны жидкости; по соотношениям между амплитудами колебаний жидкости и стенок бака; измерением частот парциальных

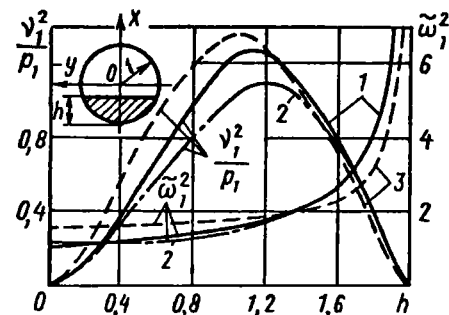


Рис. 3.19

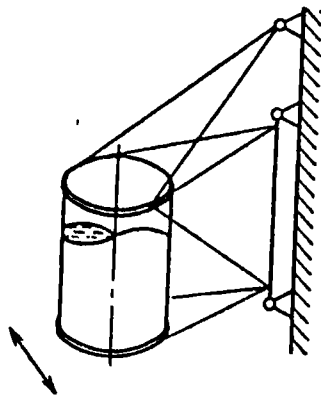


Рис. 3.20

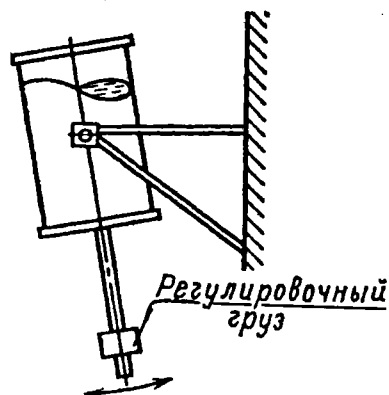


Рис. 3.21

систем, соответствующих поступательному и вращательному движениям полости. Для упрощения обработки получаемых данных эксперимент целесообразно проводить так, чтобы в каждом случае приходилось рассматривать колебания только одной парциальной системы: 1) колебания бака при $\vartheta \approx 0$ и 2) колебания бака при $y_C \approx 0$.

Практическая реализация колебания бака при $\vartheta \approx 0$ осуществляется при помощи экспериментальной установки, схема которой показана на рис. 3.20. Бак в вертикальном положении закреплен на достаточно жесткой и легкой раме, которая, в свою очередь, шарнирно в двух точках присоединена к неподвижному основанию. Можно считать, что при малых углах вращения рамы бак совершает прямолинейные перемещения.

Вращательные колебания бака ($y_C = 0$) можно воспроизвести при помощи установки, изображенной на рис. 3.21.

Для получения соотношений между коэффициентами воспользуемся, например, дифференциальными уравнениями (3.73).

Учитывая только первый тон колебаний жидкости, при $\vartheta \approx 0$ и $y_C \approx 0$ будем соответственно иметь

$$m\ddot{y}_C + m_1\ddot{\lambda}_{(2)1} = F_T; \quad \ddot{\lambda}_{(2)1} + \omega_\lambda^2\lambda_{(2)1} + \ddot{y}_C = 0; \quad (3.80)$$

$$I\ddot{\vartheta} + m_1L_{(2)1}^*\ddot{\lambda}_{(2)1} = M_{C*}; \quad \ddot{\lambda}_{(2)1} + \omega_\lambda^2\lambda_{(2)1} + L_{(2)1}^*\ddot{\vartheta} = 0. \quad (3.81)$$

Здесь m — масса бака с жидкостью; I — момент инерции бака с присоединенной жидкостью.

Каждая из парциальных систем (3.80) и (3.81) имеет по одной нетривиальной частоте собственных колебаний. Обозначим эти частоты через ω_1^* для первой системы и ω_2^* — для второй. Для собственных колебаний из уравнений (3.80) и (3.81) можно получить следующие соотношения:

$$m_1/m = 1 - (\omega_\lambda/\omega_1^*)^2; \quad (3.82)$$

$$m_1L_{(2)1}^{*2}/I = 1 - (\omega_\lambda/\omega_2^*)^2. \quad (3.83)$$

Частоты парциальных систем ω_1^* , ω_2^* определяются из эксперимента по записи свободных колебаний бака с жидкостью. Частота собственных колебаний жидкости ω_λ определяется по записи свободных затухающих колебаний жидкости в неподвижном баке.

Таким образом, правые части равенств (3.82) и (3.83) можно определить из данных эксперимента. Если момент инерции I известен, то из этих равенств можно определить коэффициенты m_1 и $L_{(2)1}^*$. Момент инерции I можно определить экспериментально, если в установку (см. рис. 3.21) ввести дополнительно угловую жесткость.

Как и всякая реальная система, жидкость не является идеальной, при движении появляются силы трения. Поэтому и при резонансе амплитуда колебаний жидкости остается конечной величиной. В наличии сил трения в жидкости можно убедиться, наблюдая затухание ее собственных колебаний.

На рис. 3.22 точками показаны амплитуды гидродинамического давления жидкости p на стенку цилиндрического кругового бака при $\eta = \pi/2$ в зависимости от безразмерной частоты вынужденных колебаний $\gamma = p/\omega_\lambda$. Здесь же показано изменение фазы φ этого давления по отношению к движению бака. Эксперимент проводился на кинематическом стенде, причем баку ($r_0 = 15$ см) задавалось плоскопараллельное движение по гармоническому закону с амплитудой $\bar{y}_C = y_C/r_0 = 0,133 \cdot 10^{-2}$. Датчик для измерения давления был расположен от свободной поверхности жидкости на глубине $\bar{x}_1 = x_1/r_0 = 0,233$.

На том же рис. 3.22 построена теоретическая резонансная кривая для значения относительного коэффициента затухания $\xi = \epsilon_\lambda/\omega_\lambda = 0,0135$. Из рисунка видно, что, ограничившись линейной постановкой задачи, в практических расчетах вместо уравнения (3.36) для первого тона

колебаний можно использовать следующее уравнение:

$$\ddot{\lambda}_1 + 2\varepsilon_\lambda \dot{\lambda}_1 + \omega_\lambda^2 \lambda_1 = -L_1 \ddot{\vartheta} - \dot{\gamma}_C + \dot{g}^* \vartheta. \quad (3.84)$$

Экспериментальные исследования показывают, что наиболее существенным является резонанс, соответствующий основному тону колебаний жидкости.

Давление жидкости на стенки p при втором резонансе значительно меньше, чем при первом. Это объясняется тем, что согласно выражению (3.44) для второго тона приведенная масса колеблющейся жидкости составляет всего лишь 3 % от массы первого тона, поэтому в некоторых практических расчетах колебания высших тонов жидкости можно не учитывать.

Значение коэффициента затухания ε_λ в уравнении (3.84) можно определить на основе анализа собственных колебаний жидкости в неподвижном баке. Для этого нужно возбудить колебания первого тона свободной поверхности жидкости и построить график изменения амплитуды колебаний жидкости по времени.

При малых коэффициентах затухания связь между логарифмическим декрементом колебаний жидкости δ и значением коэффициента затухания ε_λ выражается формулой

$$\varepsilon_\lambda / \omega_\lambda = \delta / 2\pi.$$

На рис. 3.23 для цилиндрического бака со сферическим дном (радиус сферы равен радиусу цилиндра) показана полученная экспериментальным путем для первого тона колебаний зависимость логарифмического декремента δ от относительной глубины жидкости h/r_0 . Принято, что

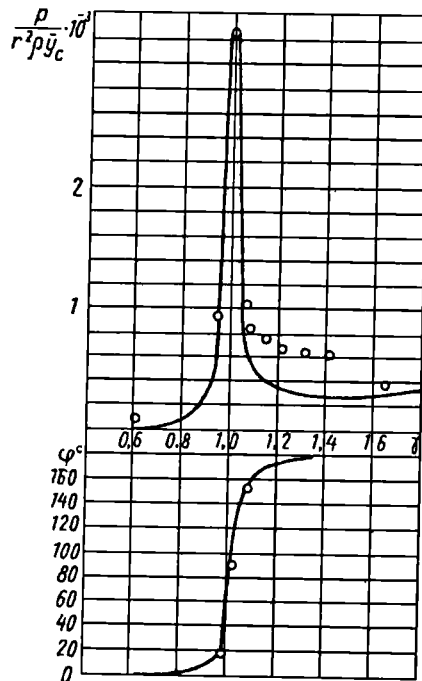


Рис. 3.22

$$\delta = c_2 \frac{1,84\pi}{\sqrt{Re}}; Re = \frac{\omega_0 r_0^2}{\nu_0}; \omega_0 = \sqrt{\frac{1,84g^*}{r_0}},$$

где ν_0 — коэффициент кинематической вязкости жидкости; Re — число Рейнольдса.

Когда высота столба жидкости меньше радиуса бака, логарифмический декремент колебаний увеличивается с уменьшением высоты столба.

При оценке экспериментально полученных значений логарифмических декрементов δ следует иметь в виду, что коэффициент затухания ε_λ зависит от материала бака и качества отделки смачиваемой поверхности. Эта зависимость особенно существенна для баков малых поперечных размеров. Поверхностное натяжение увеличивает коэффициент затухания при малых радиусах бака, при больших радиусах его влияние незначительно.

Экспериментальное изучение колебаний жидкости обычно проводят на физических моделях, изготовленных в малом масштабе. Формы полостей и их расположение относительно центра масс геометрически подобны исходной системе. Результаты экспериментов, полученные на моделях, можно перенести на натурные системы при условии выполнения подобия:

1) по числу Фруда

$$Fr = v_0^2 / (g^* r_0);$$

2) по числу Струхала

$$Sh = \omega r_0 / \nu_0;$$

3) по числу Рейнольдса

$$Re = v_0 r_0 / \nu_0;$$

4) по числу Бонда

$$B = \rho g^* r_0^2 / a.$$

Здесь ν_0 , r_0 , ω — характерная скорость, линейный размер и частота колебаний; ν_0 — коэф-

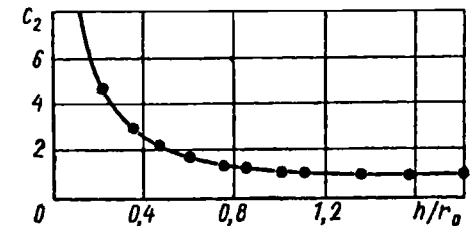


Рис. 3.23

коэффициент кинематической вязкости жидкости; a – коэффициент поверхностного натяжения.

При достаточно больших размерах модели влияние поверхностного натяжения на колебания жидкости незначительно, поэтому число Бонда при моделировании обычно не учитывается. Из чисел Fr , Re , Sh можно составить новые безразмерные комбинации, исключив из них ν_0 :

$$Fr(Sh)^2 = \omega^2 r_0 / g^*; \quad FrSh/Re = \omega \nu_0 / (g^* r_0).$$

Вводя масштабы моделирования (отношение соответствующих параметров модели к натуре) k_r , k_g , k_ω , k_ν , можно получить следующие соотношения:

$$k_\omega = \sqrt{k_g/k_{r_0}}; \quad k_\nu = k_g^{1/2} k_{r_0}^{3/2}.$$

Первое соотношение дает масштаб пересчета частот колебаний, полученных на модели, на натурные условия. Второе соотношение определяет выбор вязкости моделирующей жидкости, необходимой для выполнения подобия по числу Re . Однако на практике в большинстве случаев полное подобие по числам Re обеспечить невозможно.

Невыполнение подобия по числам Re и B обычно приводит лишь к увеличению коэффициента затухания в уравнениях для колебания жидкости.

Колебания свободной поверхности жидкости можно считать линейными только при небольших амплитудах. Результаты экспериментальных исследований показывают, что если амплитуда колебаний свободной поверхности будет более $0,1 r_0$, то колебания жидкости нельзя считать линейными.

На рис. 3.24 показана экспериментальная зависимость (кривая 1) полуразмаха волны $\bar{\chi}_0 = \chi_0/r_0$ от амплитуды вынужденных колебаний при резонансах первого тона. Из графика видно, что отношение $\bar{\chi}_0/\bar{y}_c$ с увеличением \bar{y}_c уменьшается. С увеличением амплитуды колебаний увеличивается коэффициент затухания колебаний жидкости. Волна сохраняет упорядоченный вид, пока ее полуразмах не достигнет $\approx (0,6 \dots 0,65) r_0$. При дальнейшем увеличении амплитуды вынужденных колебаний волна начинает разрушаться. В гидродинамике такая предельная волна называется волной Стокса (для линейных колебаний – прямая 2, для нелинейных – кривая 3). При более высоких тонах колебаний волны на поверхности жидкости разрушаются при значительно меньших амплитудах, чем амплитуды первого тона.

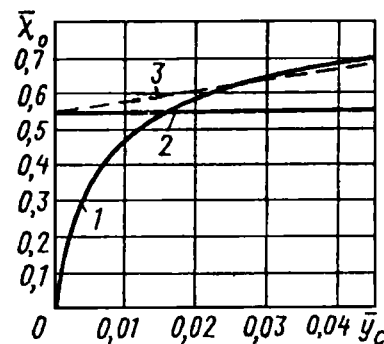


Рис. 3.24

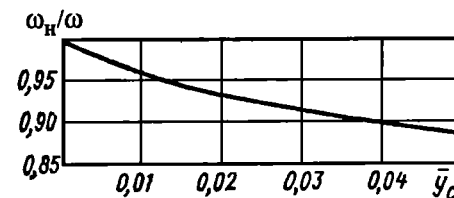


Рис. 3.25

Результаты экспериментов показывают, что при некоторых амплитудах плоские колебания жидкости становятся неустойчивыми. Волна может повернуться в плоскость, перпендикулярную движению бака, и даже начать вращаться в направлении по окружности.

Исследования нелинейных колебаний жидкости показывают, что с увеличением амплитуды уменьшается резонансная частота колебаний ω_H , что показано на рис. 3.25.

Таким образом, если амплитуда колебаний жидкости $\chi_{\max} \leq 0,1 r_0$, то колебания жидкости можно считать линейными. При $\chi_{\max} > 0,1 r_0$ следует учитывать нелинейные эффекты.

Формулы для некоторых определенных интегралов

1. $\int_{-h}^0 \text{sh} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \left(\frac{h}{2} + x \right) \right] dx = 0.$
2. $\int_{-h}^0 \text{ch} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} (h + x) \right] dx = \frac{r_0}{\zeta_n} \text{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right).$
3. $\int_{-h}^0 \text{sh}^2 \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \left(\frac{h}{2} + x \right) \right] dx = \frac{r_0}{\zeta_n} \text{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) \text{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) - \frac{h}{2}.$
4. $\int_{-h}^0 \text{ch}^2 \left[\frac{\zeta_n}{r_0} (h + x) \right] dx = \frac{r_0}{2\zeta_n} \text{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) \text{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) + \frac{h}{2}.$

$$5. \int_{-h}^0 \operatorname{sh} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \left(\frac{h}{2} + x \right) \right] (L + x) dx = \frac{r_0 h}{\zeta_n} \operatorname{ch} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) - \frac{2r_0^2}{\zeta_n^2} \operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right).$$

$$6. \int_{-h}^0 \operatorname{ch} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} (h + x) \right] (L + x) dx = \frac{r_0}{\zeta_n} L \operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) - \frac{r_0^2}{\zeta_n^2} \left(\operatorname{ch} \zeta_n \frac{h}{r_0} - 1 \right).$$

$$7. \int_{-h}^0 \operatorname{ch} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} (h + x) \right] \operatorname{sh} \left[\frac{\zeta_n}{r_0} \left(\frac{h}{2} + x \right) \right] dx = \\ = \frac{r_0}{2\zeta_n} \operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{r_0} \right) \operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right) - \frac{h}{2} \operatorname{sh} \left(\zeta_n \frac{h}{2r_0} \right).$$

Глава IV

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖЕСТКОЙ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКАХ

4.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В гл. II были рассмотрены динамические свойства абсолютно твердой ракеты и установлены основные требования, предъявляемые к автомату стабилизации. Однако представление жидкостной ракеты в виде твердого тела является, конечно, упрощенным. Наличие жидкого топлива в баках, как было показано в гл. III, приводит к появлению дополнительных сил, влияние которых на динамические свойства ракеты в диапазоне частот собственных колебаний жидкости может быть значительным. Учтем поэтому в уравнениях движения ракеты силы, возникающие от колебаний жидкости в баках.

В небольшом интервале времени траекторию невозмущенного движения ракеты принимаем прямолинейной, совпадающей с неподвижной координатной осью X .

Суммарный вектор ускорения поля массовых сил для жидкости в баке представим в виде

$$\bar{g}^* = \bar{g} - \bar{a},$$

где \bar{g} – вектор ускорения свободного падения; \bar{a} – вектор ускорения бака.

Главный вектор внешних сил, действующий на ракету, обозначим через \bar{R} , причем

$$\bar{R} = \bar{R}^* + \bar{G}.$$

Здесь \bar{R}^* – главный вектор внешних сил (без веса ракеты); G – вес (сила тяжести) ракеты.

Вектор ускорения ракеты $\bar{a} = \bar{R}/m$, где m – масса ракеты, поэтому

$$\bar{g}^* = -\bar{R}^*/m.$$

Так как квазистатическое положение свободной поверхности жидкости в баке перпендикулярно вектору \bar{g}^* , то при невозмущенном прямолинейном движении ракеты свободная поверхность располагается перпендикулярно вектору \bar{R}^* . Для ракеты, находящейся в активном полете, ускорение поля массовых сил для жидкости в баке равно ускорению ракеты, возникающему от действия внешних сил, в число которых не включается вес ракеты. Поэтому, если ракета, например, движется поступательно под действием только веса, то $\bar{g}^* = 0$, положение свободной поверхности будет неопределенным; неопределенными будут и силы взаимодействия жидкости с баком.

Направление вектора \bar{R}^* , вообще говоря, не совпадает с продольной осью ракеты. Однако это несовпадение невелико, поэтому в дальнейшем невозмущенную свободную поверхность жидкого топлива в баках будем считать перпендикулярной к продольной оси ракеты, а направление вектора \bar{g}^* — совпадающим с направлением невозмущенного движения ракеты.

Для описания движения ракеты с учетом колебаний жидкости в баках примем маятниковую модель, состоящую из абсолютно жесткого прямого стержня и k математических маятников (для каждого бака своя система маятников). Точки подвеса маятников расположим на продольной оси стержня, которую будем считать главной центральной осью инерции твердого тела (системы), состоящего из стержня с закрепленными на нем массами маятников.

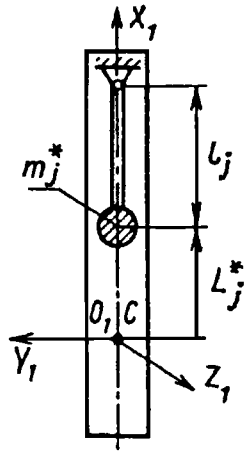


Рис. 4.1

Начало связанной системы координат $O_1 X_1 Y_1 Z_1$ совместим с точкой C стержня (рис. 4.1). Точка C совпадает с центром масс системы, когда массы m_j^* всех маятников находятся на продольной оси стержня. Обозначим через l_j, m_j^* — длину и массу j -го маятника, а через L_j^* — координату x_1 массы j -го маятника, когда эта масса находится на продольной оси стержня.

В каждом баке обычно учитывают только первый тон колебаний жидкости, в некоторых случаях следует учитывать и высшие тоны колебаний.

В частном случае для кругового цилиндрического бака с плоским дном параметры

маятниковой системы следует определять по формулам

$$l_j = \frac{r_{0j}}{\zeta_n \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h_j}{r_{0j}} \right)}; \quad m_j^* = \pi r_{0j}^3 \rho_j \frac{2 \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h_j}{r_{0j}} \right)}{\zeta_n (\zeta_n^2 - 1)};$$

$$L_j^* = L_j \left[1 - \frac{2 r_{0j}}{\zeta_n L_j} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h_j}{2 r_{0j}} \right) \right]; \quad I = I_0 + \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} I_{nj};$$

$$I_{nj} = \pi r_{0j}^5 \rho_j \left[-\frac{h_j}{r_{0j}} \frac{8}{\zeta_n^2 (\zeta_n^2 - 1)} + \frac{16}{\zeta_n^3 (\zeta_n^2 - 1)} \operatorname{th} \left(\zeta_n \frac{h_j}{2 r_{0j}} \right) \right],$$
(4.1)

где h_j, r_{0j} и ρ_j — глубина заполнения, радиус и плотность жидкости в j -м баке; I_0 — момент инерции относительно поперечной оси, проходящей через центр масс физической системы с жидкостью, если считать жидкость "затвердевшей" в положении, когда ее свободная поверхность перпендикулярна продольной оси бака; L_j — расстояние от центра масс физической системы до свободной поверхности жидкости в j -м баке. В соответствии с принятой в гл. III системой отсчета $L_j > 0$, если свободная поверхность находится выше центра масс, и $L_j < 0$, если свободная поверхность находится ниже центра масс.

4.2. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть к стержню маятниковой системы в плоскости OXY будет приложена совокупность следующих сил (рис. 4.2):

эффективная тяга двигателей P_3 , направленная по продольной оси стержня X_1 ;

управляющая сила рулей Y_p , направление которой всегда параллельно поперечной оси стержня Y_1 (здесь $Y_p = R_Y^{\delta} \delta$, где δ — угол поворота управляющего органа);

подъемная аэродинамическая сила Y_a , сила лобового сопротивления X_a и момент M_Z этих сил относительно центра масс системы (точки C); сила тяжести $G = mg$;

момент демпфирующих сил M_{Zd} относительно точки C .

Рассмотрим плоское движение маятниковой системы в неподвижной системе координат OXY (ось X направлена вертикально вверх). За

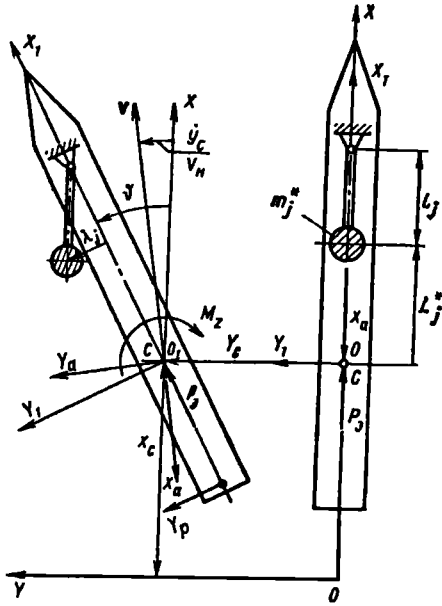


Рис. 4.2

внешние силы: P_3 , X_a , G и стержень движется в направлении координатной оси X с ускорением

$$\ddot{x}_c = \frac{P_3 - X_a - G}{m} = \frac{P_3 - X_a}{m} - g,$$

где m — масса стержня с маятниками; $g = g_0$ — ускорение свободного падения.

Если на небольшом интервале времени массу m и силы P_3 и X_a считать неизменяющимися, то ускорение \ddot{x}_c будет постоянным.

Такое движение будем называть **н е в о з м у щ е н н ы м**.

Координаты x , y любой точки продольной оси стержня и координаты x_j , y_j массы j -го маятника в системе координат OXY будут

обобщенные координаты примем: $x_C(t)$, $y_C(t)$ — координаты точки C ; $\vartheta(t)$ — угол между осями X и X_1 , $\lambda_j(t)$ — отклонение массы m_j^* в направлении оси Y_1 связанной системы координат $O_1X_1Y_1$.

Без ограничения общности будем считать $x_C(t)$ конечной величиной, а $y_C(t)$, $\vartheta(t)$, $\lambda_j(t)$ — малыми возмущениями.

Если все возмущения тождественно равны нулю

$$y_C = 0; \vartheta = 0;$$

$$\lambda_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

то угол поворота управляющего органа $\delta_n = 0$ и угол атаки $\alpha_n = 0$. В этом случае на стержень действуют только три

$$x = x_C + x_1(1 - \vartheta^2/2); \quad y = y_C + x_1\vartheta;$$

$$x_j = x_C + L_j^*(1 - \vartheta^2/2) + \lambda_j^2/(2l_j) - \lambda_j\vartheta;$$

$$y_j = y_C + L_j^*\vartheta + \lambda_j.$$

Дифференцируя по времени, найдем

$$\dot{x} = \dot{x}_C - x_1\dot{\vartheta}; \quad \dot{y} = \dot{y}_C + x_1\dot{\vartheta};$$

$$\dot{x}_j = \dot{x}_C - L_j^*\dot{\vartheta} + \lambda_j\dot{\lambda}_j/l_j - \lambda_j\dot{\vartheta} - \dot{\lambda}_j\vartheta;$$

$$\dot{y}_j = \dot{y}_C + L_j^*\dot{\vartheta} + \dot{\lambda}_j.$$

Формулы для кинетической и потенциальной энергий системы имеют вид

$$T = \frac{1}{2} \left[\int_{-b}^a m(x_1)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dx_1 + \sum_{j=1}^k m_j^*(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2) \right];$$

$$U = g \int_{-b}^a m(x_1)x dx_1 + g \sum_{j=1}^k m_j^* x_j,$$

где a , $(-b)$ — значения координат x_1 концов стержня; $m(x_1)$ — погонная масса.

Подставляя сюда выражения координат и скоростей всех точек системы и удерживая только величины второго порядка малости, получим

$$2T = m\dot{x}_C^2 + m\dot{y}_C^2 + I\dot{\vartheta}^2 + \sum_{j=1}^k m_j^* \left[\dot{\lambda}_j^2 + 2\dot{y}_C\dot{\lambda}_j + 2L_j^*\dot{\vartheta}\dot{\lambda}_j + 2\dot{x}_C \left(\frac{\lambda_j\dot{\lambda}_j}{l_j} - \lambda_j\dot{\vartheta} \right) \right]; \quad (4.2)$$

$$U = mgx_C + g \sum_{j=1}^k m_j^* \left(\frac{\lambda_j^2}{2l_j} - \lambda_j\vartheta \right).$$

Обозначим проекции аэродинамических сил X_a и Y_a на неподвижные оси координат через F_X и F_Y . Тогда обобщенным координатам $x_C, y_C, \vartheta, \lambda_j$ будут соответствовать обобщенные силы

$$Q_X = P_3 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) + F_X - R_{Yp}^{(0)} \delta \vartheta; \quad Q_Y = P_3 \vartheta + R_{Yp}^{(0)} \delta + F_Y;$$

$$Q_\vartheta = -R_{Yp}^{(0)} (x_p - x_C) \delta - M_Z - M_{Z\pi}; \quad Q_{\lambda_j} = 0. \quad (4.3)$$

Подставим выражения (4.2) и (4.3) в уравнения Лагранжа второго рода. Уравнение, соответствующее обобщенной координате x_C , будет иметь вид

$$m \ddot{x}_C + mg + \sum_{j=1}^k m_j \left(\frac{\lambda_j \ddot{\lambda}_j}{l_j} + \frac{\dot{\lambda}_j^2}{l_j} - \ddot{\lambda}_j \vartheta - 2 \dot{\lambda}_j \dot{\vartheta} - \lambda_j \ddot{\vartheta} \right) = P_3 \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) + F_X - R_{Yp}^{(0)} \delta \vartheta.$$

Отбрасывая малые величины второго порядка, получим

$$m \ddot{x}_C + mg = P_3 + F_X.$$

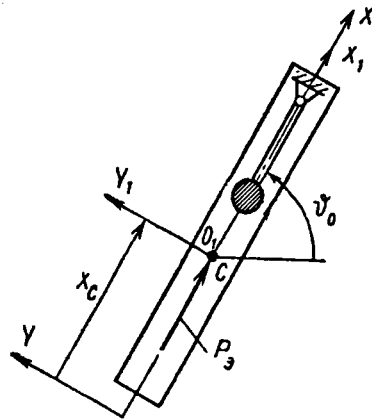


Рис. 4.3

С точностью до величин первого порядка малости малые возмущения λ_j и ϑ не влияют на движение центра масс в направлении оси X . При неизменяющихся величинах m, P_3 и F_X это движение происходит с постоянным ускорением. Постоянной остается и величина

$$g^* = \ddot{x}_C + g = (P_3 - X_a)/m. \quad (4.4)$$

Сделанный вывод справедлив и в более общем случае, когда направление продольной оси стержня X_1 при невозмущенном движении составляет с горизонтом некоторый угол $\vartheta_0 \neq \pi/2$ (рис. 4.3). Совместив направление оси

X неподвижной системы координат с направлением связанной оси X_1 при невозмущенном движении, найдем, что

$$g^* = \ddot{x}_C + g \sin \vartheta_0 = (P_3 - X_a)/m.$$

Таким образом, при малых отклонениях координат ϑ и λ_j величина ускорения g^* не изменяется.

Теперь найдем уравнения движения для обобщенных координат $y_C, \vartheta, \lambda_j$ с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода. Удерживая величины только первого порядка малости и пользуясь обозначениями (4.4), получим следующие уравнения возмущенного движения:

$$\begin{aligned} m \ddot{y}_C + \sum_{j=1}^k m_j^* \ddot{\lambda}_j - P_3 \vartheta &= R_{Yp}^{(0)} \delta + F_Y; \\ I \ddot{\vartheta} + \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^* \ddot{\lambda}_j - g^* \sum_{j=1}^k m_j^* \lambda_j &= -R_{Yp}^{(0)} l_p \delta - M_Z - M_{Z\pi}; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\ddot{\lambda}_j + \frac{g^*}{l_j} \lambda_j + L_j^* \ddot{\vartheta} + \ddot{y}_C - g^* \vartheta = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

где

$$l_p = x_p - x_C; \quad m = \int_{-b}^a m(x_1) dx_1 + \sum_{j=1}^k m_j^*;$$

$$I = \int_{-b}^a m(x_1) x_1^2 dx_1 + \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^{*2};$$

$$\int_{-b}^a m(x_1) x_1 dx_1 + \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^* = 0 \quad (-b \leq x_1 \leq a).$$

Если по каким-либо причинам необходимо учитывать несколько тонов колебаний жидкости, то в уравнениях (4.5) следует учитывать соответствующее число маятников, т.е. принять

$$\sum_{j=1}^k m_j^* \lambda_j = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{n_0} m_{jn}^* \lambda_{jn}; \quad \sum_{j=1}^k m_j^* \ddot{\lambda}_j = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{n_0} m_{jn}^* \ddot{\lambda}_{jn},$$

$$\sum_{j=1}^k m_j^* L_j^* \ddot{\lambda}_j = \sum_{j=1}^k \sum_{n=1}^{n_0} m_{jn}^* L_{jn}^* \ddot{\lambda}_{jn},$$

где n_0 – подлежащее учету число тонов колебаний жидкости. Уравнение для λ_{jn} будет иметь вид

$$\ddot{\lambda}_{jn} + (g^*/l_{jn}) \lambda_{jn} + L_{jn}^* \ddot{\vartheta} + \ddot{y}_C - g^* \vartheta = 0$$

($j = 1, 2, \dots, k; n = 1, 2, \dots, n_0$).

Рассмотрим теперь частоты собственных колебаний.

4.3. ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим упрощенную динамическую систему, когда аэродинамическими силами можно пренебречь. Это даст возможность определить частоты собственных колебаний ракеты, обуславливаемые колебанием жидкости в баках. Положив в уравнениях (4.5) $F_Y = M_Z = M_{Zd} = 0$, получим уравнения возмущенного движения ракеты в безвоздушном пространстве.

Для простоты анализ уравнений (4.5) будем проводить для частного случая, когда все маятники имеют одинаковую длину $l_j = l^*$ и одинаковый коэффициент затухания $\varepsilon_j = \varepsilon_\lambda$, уравнение для λ_j примем в форме (3.84). Равенство длин маятников означает, что частота рассматриваемого тона собственных колебаний жидкости во всех баках одинакова; плотность жидкости в разных баках может быть различной.

Введем безразмерные параметры маятниковой системы

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k m_j^*; \quad \mu_2 = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^{*2}; \\ \mu_3 &= \frac{1}{m \rho_0} \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^*, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $\rho_0 = \sqrt{I/m}$.

Безразмерные параметры μ_1, μ_2, μ_3 имеют следующий физический смысл: μ_1 представляет собой отношение суммы масс всех маятников к массе всей системы (стержня с маятниками); μ_2 – отношение суммы

моментов инерции масс всех маятников относительно поперечной оси стержня, проходящей через точку C , к моменту инерции стержня с закрепленными на нем маятниками относительно той же оси; μ_3 – отношение суммы статических моментов маятников относительно поперечной оси стержня, проходящей через точку C , к произведению массы системы на ее радиус инерции ρ_0 , соответствующий закрепленным маятникам.

Согласно формулам (4.6) пределы изменения параметров будут

$$0 < \mu_1 < 1; \quad 0 < \mu_2 < 1; \quad -1 < \mu_3 < 1; \quad \mu_3^2 \leq \mu_1 \mu_2; \quad 0 < \rho_0 < \infty.$$

Исключив координаты y_C и λ_j , приведем уравнения (4.5) к виду

$$Q(p) \vartheta = R(p) \delta. \quad (4.7)$$

Здесь

$$Q(p) = p^4(a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4) f^{k-2}(p);$$

$$R(p) = -\frac{R_{Yp}^{(6)} l_p}{I} f^{k-1}(p) \left\{ p^2 \left[(1 - \mu_1) - \frac{\mu_3}{l_p} \right] + 2\varepsilon_\lambda p + \omega_\lambda^2 \left(1 + \frac{\mu_1 \bar{l}^*}{\bar{l}_p} \right) \right\} p^2, \quad (4.8)$$

$$f(p) = p^2 + 2\varepsilon_\lambda p + \omega_\lambda^2.$$

При этом приняты следующие обозначения:

$$a_0 = (1 - \mu_1)(1 - \mu_2) - \mu_3^2; \quad a_1 = 2\varepsilon_\lambda(2 - \mu_1 - \mu_2);$$

$$a_2 = \omega_\lambda^2(2 - \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \bar{l}^*) + 4\varepsilon_\lambda^2; \quad a_3 = 2\varepsilon_\lambda \omega_\lambda^2(2 + \mu_3 \bar{l}^*); \quad (4.9)$$

$$a_4 = \omega_\lambda^4(1 + \mu_3 \bar{l}^*);$$

$$\bar{l}^* = l^*/\rho_0; \quad \bar{l}_p = l_p/\rho_0; \quad \omega_\lambda^2 = g^*/l^*.$$

Известно, что всякий многочлен четной положительной степени с действительными коэффициентами можно представить в виде произведе-

ния многочленов второй степени с действительными коэффициентами. Поэтому многочлен $Q(p)$ представим в виде

$$Q(p) = a_0 p^4 (p^2 + 2p\varepsilon_1 + \omega_1^2)(p^2 + 2p\varepsilon_2 + \omega_2^2) f^{k-2}(p). \quad (4.10)$$

Здесь ω_1, ω_2 — частоты собственных колебаний системы без учета затухания; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — соответствующие им значения коэффициентов затухания.

Вычислим ω_1 и ω_2 для случая, когда $\varepsilon_\lambda = 0$. Уравнение частот получим из равенства $Q(p) = 0$ путем подстановки $p = i\omega$. Многочлен $f(p)$ рассматривать не будем, так как из равенства $f(i\omega) = 0$ определяются собственные частоты колебаний жидкости в неподвижном баке. Будем иметь

$$\omega(a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4) = 0. \quad (4.11)$$

При одинаковой длине маятников наибольшая степень уравнения (4.11) равна восьми и при $k \geq 2$ не зависит от числа маятников.

Значение корня $\omega_1^2 = 0$ в уравнении (4.11) соответствует такому движению системы, когда все $\lambda_j = 0$ и $\dot{\vartheta} = 0$ или $\vartheta = \dot{\vartheta}_0 t + \vartheta_0$, где $\dot{\vartheta}_0 = \text{const}$, $\vartheta_0 = \text{const}$. Поэтому движение с частотой $\omega_1^2 = 0$ неустойчиво.

Малому углу ϑ соответствует малое поперечное ускорение центра масс:

$$m\ddot{y}_C = P\vartheta.$$

Поперечное смещение y_C центра масс $y_C = y_0 + y_0$ может быть сколь угодно большим, и в этом смысле движение системы с нулевой частотой ω_1^2 неустойчиво. При наличии системы стабилизации должно быть $\dot{\vartheta}_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Рассмотрим второй сомножитель уравнения (4.11)

$$a_0\omega^4 - a_2\omega^2 + a_4 = 0. \quad (4.12)$$

При малых значениях $\bar{l}^* = l^*/\rho_0$ (большая длина стержня по сравнению с длиной маятника) дискриминант уравнения (4.12)

$$D = a_2^2 - 4a_0a_4$$

является положительным и система имеет две частоты собственных колебаний:

$$\omega_1^2 = \frac{a_2 + \sqrt{D}}{2a_0}; \quad \omega_2^2 = \frac{a_2 - \sqrt{D}}{2a_0}. \quad (4.13)$$

Случай, когда маятники на стержне расположены так, что сумма их статических моментов относительно точки C равна нулю ($\mu_3 = 0$), представляет особый интерес. Для ракеты с двумя баками это значит, что

$$m_1^* L_1^* + m_2^* L_2^* = 0 \quad (L_2^* < 0).$$

В этом случае уравнение (4.12) можно представить в виде

$$[(\omega^2(1 - \mu_1) - \omega_1^2)[\omega^2(1 - \mu_2) - \omega_2^2] = 0,$$

откуда частоты системы

$$\omega_1^* = \omega_1/\sqrt{1 - \mu_1}; \quad \omega_2^* = \omega_2/\sqrt{1 - \mu_2}. \quad (4.14)$$

И первая, и вторая частоты системы, обусловленные колебаниями жидкости в баках, больше частоты собственных колебаний жидкости в неподвижном баке, причем эта разница тем больше, чем больше коэффициенты μ_1 и μ_2 . Любопытно отметить, что формула для ω_1^* совпадает с формулой (3.58), полученной при решении задачи о собственных поступательных колебаниях цилиндрического бака с жидкостью ($\vartheta = 0$). Частота системы совпадает с парциальной частотой. Формула для ω_2^* несколько отличается от формулы, полученной в разд. 3.9 для случая, когда $y_C = 0$. Вместо знака "больше" формула (4.14) содержит знак равенства. Это отличие является следствием того, что в первом уравнении (4.5) содержится слагаемое $P_3\vartheta$, которое представляет собой проекцию на ось Y силы P_3 . Аналогичное слагаемое в уравнениях (3.52) отсутствует.

Для ракеты малого удлинения длина l^* маятника сравнительно большая, а радиус инерции ρ_0 мал, так что у них $\bar{l}^* = l^*/\rho_0$ значительно больше, чем у ракет большого удлинения. С увеличением \bar{l}^* при $\mu_3 > 0$ уравнение (4.12) сохраняет свои прежние свойства. С увеличением μ_3 увеличивается лишь разница между частотами ω_1 и ω_2 .

При больших значениях \bar{l}^* и $\mu_3 < 0$ дискриминант D уравнения (4.12) может стать отрицательным и тогда система будет обладать принципиально другими свойствами.

Рассмотрим характеристическое уравнение, полученное приравнянием к нулю второго сомножителя многочлена $Q(p)$ при $\varepsilon_\lambda = 0$. Будем иметь

$$a_0 p^4 + a_2 p^2 + a_4 = 0. \quad (4.15)$$

Когда дискриминант уравнения (4.15) равен нулю, корни уравнения кратные.

При $D < 0$ корни $p_{1,2}^2$ биквадратного уравнения (4.15) комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.

Для p получим следующие значения:

$$p_{1,2} = -\varepsilon \pm i\omega; \quad p_{3,4} = +\varepsilon \pm i\omega, \quad (4.16)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{b/(2a_0)}; \quad \omega = \sqrt{c/(2a_0)}; \quad D = -bc; \quad (4.17)$$

$$b = 2\sqrt{a_0 a_4} - a_2; \quad c = 2\sqrt{a_0 a_4} + a_2.$$

Особенностью решений (4.16) является наличие у двух комплексно-сопряженных корней положительной вещественной части, что свидетельствует о том, что собственные колебания, будут нарастающими.

Таким образом, случай, когда $B = 0$ (равенство собственных частот), соответствует границе области устойчивости системы.

Так как $\mu_3^2 \leq \mu_1 \mu_2$, то возможно, что $D < 0$, если $a_4 > 0$. Это значит, что решение (4.16) может существовать, если величина параметра $\mu_3 \bar{l}^*$ находится в пределах

$$-1 < \mu_3 \bar{l}^* < 0.$$

Условие $b > 0$ может быть выполнено, когда

$$\mu_3 \bar{l}^* \approx -(\mu_1 + \mu_2); \quad \mu_1 \mu_2 > \mu_3^2.$$

Коэффициент нарастания колебаний будет тем больше, чем больше величины $(\mu_1 \mu_2 - \mu_3^2)$ и $(\mu_1 + \mu_2)$.

В дальнейшем, если не оговорено особо, будет рассматриваться случай, когда дискриминант $D > 0$.

Отметим случай, когда к стержню подвешен только один маятник ($k = 1$). Это значит, что физическая система имеет свободную поверхность только в одном баке. Уравнение собственных колебаний получим из (4.5), положив $F_Y = 0$, $M_Z = 0$, $M_{Zd} = 0$, $\delta = 0$. Так как $P_j/m = g^*$, то, выразив из первого и второго уравнения (4.5)

$$y_C - g^* \vartheta = -\mu_1 \ddot{y}_j;$$

$$\ddot{\vartheta} = -\frac{m_j^* L_j^*}{I} \ddot{y}_j + \frac{g^* m_j^*}{I} y_j$$

и подставив их в третье уравнение, получим

$$\ddot{y}_j (1 - \mu_1 - \mu_2) + \lambda_j \frac{g^*}{l^*} (1 + \mu_3 \bar{l}^*) = 0.$$

Эта система имеет одну ненулевую частоту собственных колебаний

$$\omega^2 = \frac{g^*}{l^*} \frac{1 + \mu_3 \bar{l}^*}{1 - \mu_1 - \mu_2}.$$

4.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ РЕГУЛИРУЕМОГО ОБЪЕКТА И ЕЕ СВОЙСТВА

Дифференциальные уравнения (4.5), записанные для изображений, можно переписать в виде

$$\vartheta(p)/\delta(p) = W(p) = W(p) = R(p)/Q(p),$$

предварительно исключив из них переменные y_C и λ_j . Здесь изображение отклонения $\vartheta(p)$ – выходная координата, изображение $\delta(p)$ – входная координата. Степени многочленов $R(p)$, $Q(p)$ зависят от числа баков.

Для простоты предположим, что частоты и коэффициенты затухания собственных колебаний жидкости во всех баках одинаковы, так что

$$f_j(p) = f(p) = p^2 + 2\varepsilon_j p + \varepsilon_j^2 \quad (j = 1, 2, \dots, k), \quad (4.18)$$

Аэродинамические силы учитывать не будем. Это несколько упрощает задачу и дает возможность более наглядно выявить особенности динамических свойств ракеты, обусловленные колебаниями жидкости в баках. Многочлены $Q(p)$, $R(p)$ в этом случае выражаются формулами (4.8).

Преобразуем многочлен $R(p)$ из уравнения (4.8). Введем обозначения

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_\lambda}{1 - \mu_1 - \mu_3/\bar{l}_p}; \quad \omega_3^2 = \omega_\lambda^2 \frac{1 + \mu_1 \bar{l}^*/\bar{l}_p}{1 - \mu_1 - \mu_3/\bar{l}_p};$$

$$N_1 = \frac{R_{yp}^{(0)} l_p}{I} \left(1 - \mu_1 - \frac{\mu_3}{\bar{l}_p} \right). \quad (4.19)$$

Запишем многочлен $R(p)$ с учетом этих обозначений в виде

$$R(p) = -N_1 p^2 (p^2 + 2\varepsilon_\lambda p + \omega_\lambda^2)^{k-1} (p^2 + 2\varepsilon_3 p + \omega_3^2).$$

Многочлен $Q(p)$ представим в форме равенства (4.10):

$$Q(p) = a_0 p^4 (p^2 + 2\varepsilon_1 p + \omega_1^2) (p^2 + 2\varepsilon_2 p + \omega_2^2) (p^2 + 2\varepsilon_\lambda p + \omega_\lambda^2)^{k-2}.$$

Тогда передаточную функцию системы можно выразить в виде произведения трех передаточных функций

$$W(p) = R(p)/Q(p) = N W_0(p) W_1(p) W_2(p), \quad (4.20)$$

где

$$W_0(p) = -R_{yp}^{(0)} l_p / (p^2 I);$$

$$W_1(p) = \frac{p^2 + 2\varepsilon_3 p + \omega_3^2}{p^2 + 2\varepsilon_1 p + \omega_1^2}; \quad W_2(p) = \frac{p^2 + 2\varepsilon_\lambda p + \omega_\lambda^2}{p^2 + 2\varepsilon_2 p + \omega_2^2};$$

$$N = \frac{1 - \mu_1 - \mu_3/\bar{l}_p}{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) - \mu_3^2} - \text{постоянное число.}$$

$W_0(p)$ есть передаточная функция абсолютно твердого тела, т.е. стержня с закрепленными маятниками, $W_1(p)$ и $W_2(p)$ можно считать передаточными функциями "присоединенных" колебательных звеньев (маятников).

При $\varepsilon_{1,2,3\lambda} = 0$ значения частот собственных колебаний ω_1 , ω_2 являются полюсами передаточной функции, а величины ω_λ , ω_3 — нулями передаточной функции. Частоты ω_1 , ω_2 , ω_3 , ω_λ в дальнейшем будем называть характерными частотами системы.

Проанализируем свойства амплитудно-фазовых частотных характеристик $W_0(i\omega)$, $W_1(i\omega)$, $W_2(i\omega)$.

Величина $W_0(i\omega)$ представляет собой действительное число, обратно пропорциональное ω^2 .

Для рассмотрения амплитудно-фазовой частотной характеристики $W_2(i\omega)$ введем обозначения

$$\gamma = \omega/\omega_\lambda; \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2/\omega_\lambda; \quad \bar{\varepsilon}_\lambda = \varepsilon_\lambda/\omega_\lambda; \quad \bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2/\omega_\lambda,$$

где ω_λ , ε_λ — частота собственных колебаний и коэффициент затухания первого тона колебаний жидкости в баке.

Получим

$$W_2(i\omega) = \frac{1 + i \cdot 2\gamma \bar{\varepsilon}_\lambda - \gamma^2}{\bar{\omega}_2^2 + i \cdot 2\gamma \bar{\varepsilon}_2 - \gamma^2}. \quad (4.21)$$

Выражение $W_2(i\omega)$ можно представить и в другой записи:

$$W_2(i\omega) = U(\gamma) + iV(\gamma) = \frac{A_2^{(0)}(\gamma)}{A_{20}(\gamma)} \exp i[\varphi_2^{(0)}(\gamma) - \varphi_{20}(\gamma)] = A_2(\gamma) e^{i\varphi_2(\gamma)},$$

где $A_2^{(0)}(\gamma)$, $\varphi_2^{(0)}(\gamma)$ — модуль и аргумент комплексного передаточного числа в числителе выражения (4.21), а $A_{20}(\gamma)$, $\varphi_{20}(\gamma)$ — модуль и аргумент комплексного передаточного числа в знаменателе того же выражения. Соответственно

$$A_2^{(0)}(\gamma) = \sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\bar{\varepsilon}_\lambda \gamma)^2}; \quad A_{20}(\gamma) = \sqrt{(\bar{\omega}_2^2 - \gamma^2)^2 + (2\bar{\varepsilon}_2 \gamma)^2};$$

$$\varphi_2^{(0)}(\gamma) = \operatorname{arctg} \frac{2\bar{\epsilon}_1 \gamma}{1 - \gamma^2}; \quad \varphi_{20}(\gamma) = \operatorname{arctg} \frac{2\bar{\epsilon}_2 \gamma}{\bar{\omega}_2^2 - \gamma^2};$$

$$A_2(\gamma) = \frac{A_2^{(0)}(\gamma)}{A_{20}(\gamma)}; \quad \varphi_2(\gamma) = \varphi_2^{(0)}(\gamma) - \varphi_{20}(\gamma).$$

Вещественная и мнимая части комплексного передаточного числа $W_2(i\omega)$ будут

$$U(\gamma) = A_2(\gamma) \cos \varphi_2(\gamma); \quad V(\gamma) = A_2(\gamma) \sin \varphi_2(\gamma).$$

Модуль $A_2(\gamma)$ и аргумент $\varphi_2(\gamma)$ комплексного передаточного числа являются функциями частоты γ . Графическое изображение зависимости $A_2(\gamma)$ называется амплитудно-частотной характеристикой (или резонансной кривой), а графическое изображение зависимости $\varphi_2(\gamma)$ называется фазочастотной характеристикой.

Для дальнейшего уточнения соотношения между характерными частотами $\omega_\lambda, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Ограничимся рассмотрением случая, когда для уравнения (4.12) дискриминант $D > 0$.

При $\bar{\epsilon}_\lambda = 0$ на основании выражений (4.13) и (4.14) имеем

$$\omega_\lambda < \omega_2^* < \omega_1^*.$$

Для малых $\bar{\epsilon}_\lambda$ это неравенство обычно допускает обобщение, при котором вместо парциальных частот ω_1^* и ω_2^* можно взять частоты системы ω_1 и ω_2 . Тогда получим

$$\omega_\lambda < \omega_2 < \omega_1.$$

Из сравнения формул (4.14) и (4.19) можно заключить, что возможны случаи, когда $\omega_3 > \omega_1$ и $\omega_3 < \omega_1$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать два неравенства, которые в безразмерном виде можно записать так:

$$1 < \bar{\omega}_2 < \bar{\omega}_3 < \bar{\omega}_1 \quad (4.22)$$

или

$$1 < \bar{\omega}_2 < \bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_3. \quad (4.23)$$

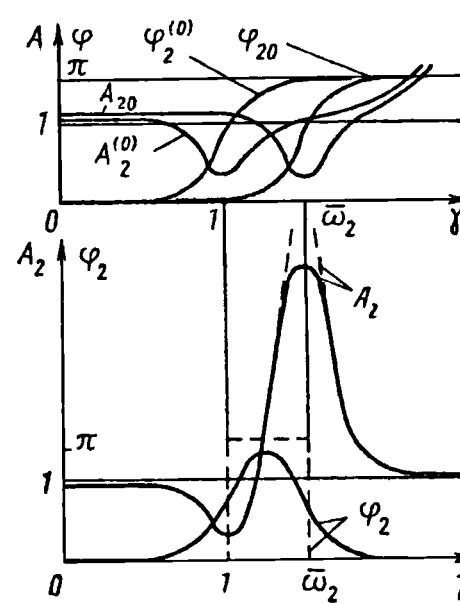


Рис. 4.4

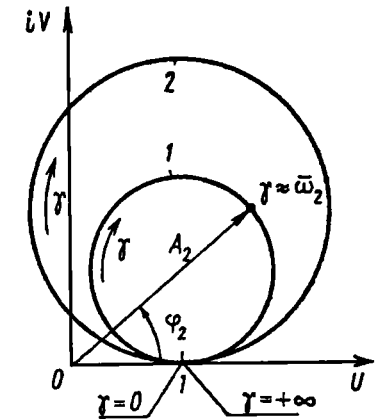


Рис. 4.5

Здесь

$$\bar{\omega}_3 = \omega_3 / \omega_\lambda.$$

Неравенство (4.22) встречается гораздо чаще, чем неравенство (4.23).

Графики функций $A_2^{(0)}(\gamma)$ и $\varphi_2^{(0)}(\gamma)$, $A_{20}(\gamma)$ и $\varphi_{20}(\gamma)$ приведены на рис. 4.4; там же представлены и частотные характеристики $A_2(\gamma)$ и $\varphi_2(\gamma)$. Пунктирными линиями показаны характеристики для случая, когда коэффициент затухания колебаний жидкости не учитывается ($\epsilon_\lambda = 0$).

Амплитудно-частотная характеристика $A_2(\gamma)$ имеет максимум и минимум. Минимум соответствует нулю, а максимум — полюсу передаточной функции. Чем больше $\bar{\omega}_2$ отличается от единицы, тем больше максимум характеристики. Кроме того, величины максимальных значений характеристик обратно пропорциональны коэффициенту затухания колебаний жидкости $\bar{\epsilon}_\lambda$ ($\bar{\epsilon}_2$).

Фазочастотная характеристика $\varphi_2(\gamma)$ имеет один максимум в области положительных значений φ_2 . При наличии затухания колебаний величина максимума меньше π , причем этот максимум расположен примерно на середине между максимумом и минимумом амплитудно-частотной характеристики. Чем меньше коэффициент затухания собственных колебаний жидкости, тем больше фазовый пик, который, в свою очередь, тем больше, чем больше разница между частотами ω_2 и ω_λ .

Годограф комплексного передаточного числа $W_2(i\omega)$ на комплексной плоскости $Z = U + iV$ показан на рис. 4.5. Для сравнения приведены два годографа, построенные для разных значений $\bar{\omega}_2$, причем для кривой 2 частота $\bar{\omega}_2$ больше, чем для кривой 1.

Комплексное передаточное число $W_1(i\omega)$ имеет такую же структуру, что и $W_2(i\omega)$ и выражается формулой

$$W_1 = \frac{\bar{\omega}_3^2 + i \cdot 2\bar{e}_3\gamma - \gamma^2}{\bar{\omega}_1^2 + i \cdot 2\bar{e}_1\gamma - \gamma^2} = \frac{A_1^{(0)}(\gamma)}{A_{10}(\gamma)} \exp i[\varphi_1^{(0)}(\gamma) - \varphi_0(\gamma)] = A_1(\gamma) e^{i\varphi_1(\gamma)}, \quad (4.24)$$

где

$$\bar{\omega}_3 = \omega_3/\omega_\lambda; \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1/\omega_\lambda; \quad \bar{e}_3 = e_3/\omega_\lambda; \quad \bar{e}_1 = e_1/\omega_\lambda.$$

Когда соотношение частот системы подчинено неравенству (4.22), амплитудная и фазовая частотные характеристики $A_1(\gamma)$, $\varphi_1(\gamma)$ имеют такой же вид и обладают теми же свойствами, что и функции, показанные на рис. 4.4. Минимум и максимум амплитудно-частотной характеристики имеют место соответственно при $\gamma = \bar{\omega}_3$ и $\gamma = \bar{\omega}_1$.

На рис. 4.6 показаны графики $A_1(\gamma)$ и $\varphi_1(\gamma)$ для случая, когда выполняется соотношение (4.23). Здесь с возрастанием частоты γ на амплитудно-частотной характеристике сначала получается максимум, а потом минимум. В отличие от рис. 4.4 фазочастотная характеристика $\varphi_1(\gamma)$ имеет не максимум в области $\varphi_1 > 0$, а минимум в области отрицательных значений $\varphi_1(\gamma)$. Это имеет принципиальное значение для оценки устойчивости движения. Вид фазочастотной характеристики $\varphi_1(\gamma)$ обусловлен взаимным расположением нулей и полюсов передаточной функции. Если выполняется неравенство (4.22), то функция $\varphi_1(\gamma)$ имеет положительное значение; если же выполняется неравенство (4.23), функция $\varphi_1(\gamma)$ будет отрицательной (см. рис. 4.6).

Годограф комплексного передаточного числа $W_1(i\omega)$ на комплексной плоскости $Z = U + iV$ показан на рис. 4.7. Кривые приведены для случая, когда $\bar{\omega}_3 > \bar{\omega}_1$, причем отношение $\bar{\omega}_3/\bar{\omega}_1$ для кривой 2 больше, чем для кривой 1.

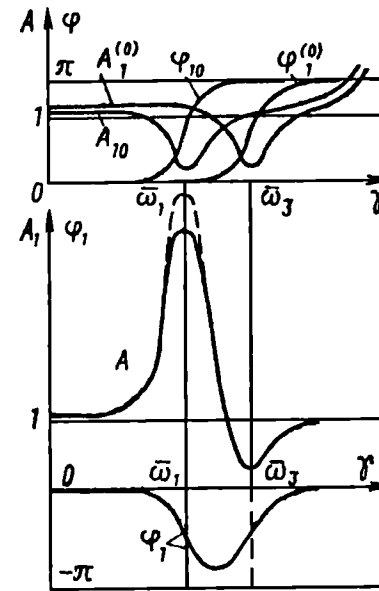


Рис. 4.6

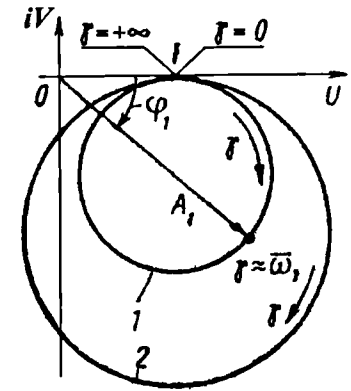


Рис. 4.7

Амплитудно-фазовые частотные характеристики $W_1(i\omega)$, $W_2(i\omega)$ в основном сходны с частотными характеристиками простых колебательных звеньев.

Так же как и у простых колебательных звеньев, амплитудно-фазовые частотные характеристики претерпевают значительные изменения в небольшой зоне собственных частот.

Однако частотные характеристики $W_1(i\omega)$ и $W_2(i\omega)$ обладают особенностями, которые отличают их от простых колебательных звеньев. Эти характеристики в координатах U, iV образуют кривые, близкие к окружностям, которые касаются оси OU в точке $U = 1$. Основная особенность заключается в том, что за пределами небольшой зоны собственных частот как на малых, так и на больших частотах, модуль комплексного числа близок к единице, а аргумент близок к нулю.

Рассмотрим теперь суммарную амплитудно-фазовую частотную характеристику $W_1(i\omega)W_2(i\omega)$. Она соответствует той части передаточной функции (4.20), которая отличает передаточную функцию жесткой ракеты с полостями, частично заполненными жидкостью, от передаточной функции абсолютно твердой ракеты.

Так как $W_1(i\omega)W_2(i\omega) = A_1(\gamma)A_2(\gamma)e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$, то указанные характеристики легко изобразить графически, если для каждого значения γ перемно-

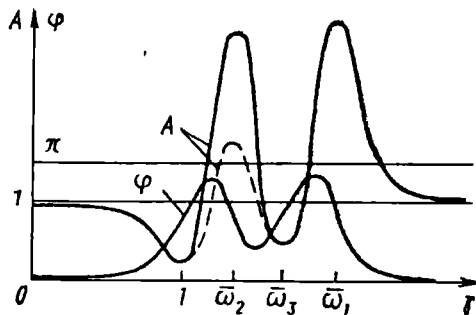


Рис. 4.8

заны возможные варианты характеристик.

Амплитудно-фазовые характеристики имеют по два максимума, которые расположены в зонах собственных частот $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ системы. В зависимости от соотношения характерных частот $\omega_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ большую величину может иметь как первый максимум, так и второй. Например, применительно к рис. 4.8 величина первого максимума амплитуды возрастает с увеличением интервала $(1, \bar{\omega}_2)$ и убывает с уменьшением интервала $(\bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3)$. Высота второго максимума амплитуды будет тем больше, чем больше $\bar{\omega}_1$ по сравнению с $\bar{\omega}_3$.

Между фазочастотными характеристиками, приведенными на рис. 4.8 и 4.9, есть принципиальное различие. Оно заключается в том, что наряду с положительными значениями во втором случае в промежутке $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3)$ фазочастотная характеристика $\varphi(\gamma)$ принимает отрицательные значения.

Оценим величину диапазона частот, в котором модуль произведения $W_1(i\omega)W_2(i\omega)$ заметно отличается от единицы. Для оценки примем следующие значения параметров системы:

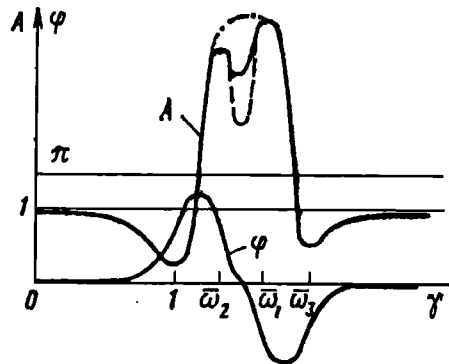


Рис. 4.9

жить модули $A(\gamma) = A_1(\gamma)A_2(\gamma)$ и сложить аргументы $\varphi(\gamma) = \varphi_1(\gamma) + \varphi_2(\gamma)$, как это сделано на рис. 4.4 и 4.6. Вид функций $A(\gamma)$ и $\varphi(\gamma)$ показан на рис. 4.8 и 4.9.

На рис. 4.8 представлены частотные характеристики для соотношения характерных частот (4.22), а на рис. 4.9 — для соотношения частот (4.23). Пунктирными линиями пока-

$$\mu_1 = 0,2; \mu_2 = 0,1;$$

$$\mu_3 = -0,05;$$

$$\bar{l}^* = l^*/\rho_0 = 0,05; \bar{l}_p = l_p/\rho_0 = 1,5.$$

Тогда

$$\bar{\omega}_3^2 = \frac{1 + \mu_1 \bar{l}^*/\bar{l}_p}{1 - \mu_1 - \mu_3/\bar{l}_p} \approx 1,21.$$

Положим

$$\bar{\omega}_1^2 \approx \frac{1}{1 - \mu_1} = 1,25; \quad \bar{\omega}_2^2 \approx \frac{1}{1 - \mu_2} = 1,11.$$

Соотношения характерных частот удовлетворяют неравенству (4.22). Разность между крайними значениями

$$\bar{\omega}_1 - 1 = 0,12.$$

Учитывая, что при $\gamma \leq 0,95$ и $\gamma \geq 1,05\bar{\omega}_1$ изменение частотных характеристик практически отсутствует [см. формулы (4.21), (4.24) при $\varepsilon_\lambda \approx 0$], получим зону частот, в которой влияние колебаний жидкости может быть значительным. Эта зона находится в промежутке

$$0,95 \leq \gamma \leq 1,18.$$

Если принять $\omega_\lambda = 10$ 1/с, то в рассмотренном примере динамические характеристики жесткой ракеты с учетом колебаний жидкости будут отличаться от характеристики абсолютно твердой ракеты в небольшой зоне частот:

$$9,5 \text{ 1/с} \leq \omega \leq 11,8 \text{ 1/с}.$$

Вне указанной зоны частот, например при $\gamma = 0$, на основании формул (4.21) и (4.24) получим

$$A_1(0)A_2(0) = \frac{\bar{\omega}_3^2}{\bar{\omega}_1^2 \bar{\omega}_2^2} \frac{1}{1} \approx \frac{(1 + \mu_1 \bar{l}^*/\bar{l}_p)(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)}{1 - \mu_1 - \mu_3/\bar{l}_p}.$$

Так как

$$\mu_1 \bar{l}^* / \bar{l}_p < 1; \mu_3^2 < 1,$$

то

$$A_1(0)A_2(0) \approx 1/N.$$

На основании проведенной оценки можно сделать вывод, что если собственные частоты колебаний жидкости в разных баках ракеты значительно различаются между собой, то влияние колебаний жидкости на амплитудно-фазовые характеристики ракеты можно оценивать, учитывая эти колебания каждый раз только в одном баке.

С учетом аэродинамических сил передаточную функцию $W'(p)$ можно представить, как и в случае (4.20), в виде произведения трех передаточных функций

$$W'(p) = \frac{R'(p)}{Q'(p)} = N' W_0'(p) W_1'(p) W_2'(p),$$

где

$$W_0'(p) = -R_{Yp}^{(0)} l_p \frac{p + b'}{a_0' p^3 + a_1' p^2 + a_2' p + a_3'};$$

$$W_1'(p) = \frac{p^2 + 2\epsilon_3' p + \omega_3'^2}{p^2 + 2\epsilon_1' p + \omega_1'^2}; \quad W_2'(p) = \frac{p^2 + 2\epsilon_2' p + \omega_2'^2}{p^2 + 2\epsilon_2' p + \omega_2'^2}.$$

Когда частота собственных колебаний абсолютно твердой ракеты в набегающем потоке воздуха значительно меньше частоты собственных колебаний жидкости в баках, связь между этими колебаниями будет слабой. В этом случае передаточная функция $W_0'(p)$ будет мало отличаться от передаточной функции абсолютно твердой ракеты $W_0(p)$ (2.12), передаточные функции $W_1'(p)$ и $W_2'(p)$ будут соответствовать передаточным функциям $W_1(p)$ и $W_2(p)$ из выражения (4.20).

4.5. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К АВТОМАТУ УГЛОВОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Характеристический многочлен $Q'(p)$ уравнений возмущенного движения ракеты с учетом колебаний жидкости в баках имеет такое же число корней с положительной вещественной частью, как и характерис-

тический многочлен (2.15) уравнений абсолютно твердой ракеты. При учете колебаний жидкости добавляются лишь комплексно-сопряженные корни с отрицательной вещественной частью.

В разд. 4.4 было показано, что при учете колебаний жидкости в баках значительно изменяется амплитудно-фазовая частотная характеристика регулируемого объекта в небольшом диапазоне частот, близком к частотам собственных колебаний жидкости. Вне этого диапазона амплитудно-фазовая характеристика при учете колебаний жидкости практически не отличается от амплитудно-фазовой характеристики абсолютно твердой ракеты.

Вид логарифмической амплитудно-частотной характеристики ракеты (регулируемого объекта) с учетом колебаний жидкости $L_{p0}(\omega)$ приведен на рис. 4.10, а.

Если соотношение между характерными частотами отвечает неравенству (4.22)

$$1 < \bar{\omega}_2 < \bar{\omega}_3 < \bar{\omega}_1,$$

то фазочастотная характеристика регулируемого объекта будет иметь вид, приведенный на рис. 4.10, б. Изменение фазочастотной характеристики, обусловленное колебаниями жидкости в баках, по сравнению с характеристикой абсолютно твердой ракеты происходит в сторону опережения по фазе ($\varphi_{p0} > 0$).

На рис. 4.10, в показана фазочастотная характеристика регулируемого объекта в случае неравенства (4.23)

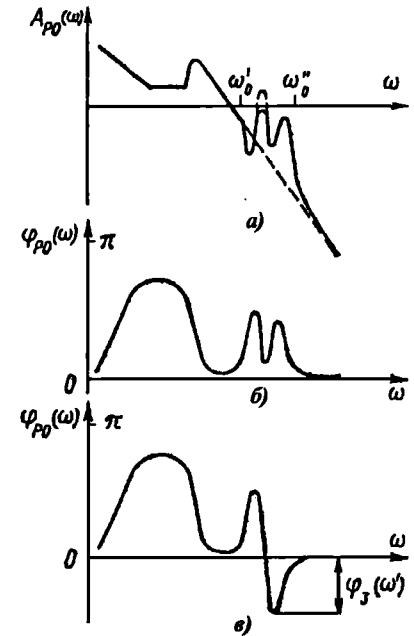


Рис. 4.10

$$1 < \bar{\omega}_2 < \bar{\omega}_1 < \bar{\omega}_3.$$

Изменение характеристики, обусловленное колебаниями жидкости, происходит не только в сторону опережения, но, что очень важно, и в сторону запаздывания.

Представим комплексное передаточное число разомкнутой цепи, состоящей из регулируемого объекта и автомата стабилизации (АС), в виде

$$W(i\omega) = A_{PO}(\omega)A_{AC}(\omega)\exp i[\varphi_{PO}(\omega) + \varphi_{AC}(\omega)] = A(\omega)\exp i\varphi(\omega);$$

$$A(\omega) = A_{PO}(\omega)A_{AC}(\omega); \quad \varphi(\omega) = \varphi_{PO}(\omega) + \varphi_{AC}(\omega).$$

В диапазоне частот собственных колебаний жидкости модуль комплексного передаточного числа разомкнутой цепи может быть больше единицы: $A(\omega) > 1$.

Сформулируем требование к фазочастотной характеристике автомата стабилизации, обеспечивающей устойчивость замкнутой системы.

В главе II (разд. 9) было показано, что для обеспечения устойчивости абсолютно твердой ракеты необходимо, чтобы фазочастотная характеристика автомата стабилизации имела опережение по фазе в диапазоне частот $(0, \omega_0)$. Частоту ω_0 нужно выбирать так, чтобы

$$A(\omega) = A_{PO}(\omega)A_{AC}(\omega) < 1 \text{ при } \omega = \omega_0. \quad (4.25)$$

Характеристический полином разомкнутой цепи при учете колебаний жидкости имеет столько же корней с положительной вещественной частью, сколько их имеет характеристический полином для уравнений абсолютно твердой ракеты, поэтому и требования к фазочастотной характеристике автомата стабилизации аналогичны. Из этого, однако, совершенно не следует, что автомат стабилизации, спроектированный для абсолютно твердой ракеты, может обеспечить устойчивость движения ракеты при колебаниях жидкости в баках. Если для устойчивости абсолютно твердой ракеты нужно, чтобы автомат стабилизации обеспечивал опережение по фазе, например, до частоты ω'_0 (см. рис. 4.10, а), то для устойчивости ракеты с колеблющейся жидкостью опережение по фазе у автомата стабилизации должно быть до частоты ω''_0 .

Когда фазочастотная характеристика регулируемого объекта имеет вид, приведенный на рис. 4.10, б, то опережения автомата стабилизации

по фазе в диапазоне частот $(0, \omega''_0)$ достаточно для того, чтобы суммарная фазовая характеристика $\varphi(\omega)$ не пересекала ось $\varphi = 0$ в отрицательном направлении при $A(\omega) \geq 1$ [$L(\omega) \geq 0$]. В этом случае замкнутая система будет устойчивой.

Частота ω''_0 больше частоты собственных колебаний жидкости в баках, которая, как известно, обратно пропорциональна корню квадратному из диаметра бака. Для ракет, диаметры баков которых сравнительно невелики, обычно $\omega''_0 > \omega'_0$. Поэтому при оценке устойчивости ракеты с учетом колебаний жидкости в баках к автомату стабилизации предъявляются дополнительные требования, кроме тех, которые предъявляются к автомату стабилизации абсолютно твердой ракеты. Эти требования относятся к расширению диапазона частот от $[0, \omega'_0]$ до $[0, \omega''_0]$, на котором должно быть обеспечено опережение по фазе.

Если же фазочастотная характеристика $\varphi_{PO}(\omega)$ имеет запаздывание φ_3 , как показано на рис. 4.10, в, то условие опережения по фазе до частоты ω''_0 необходимо, но недостаточно. Нужно выполнить дополнительное условие, заключающееся в том, чтобы на частотах, предшествующих ω''_0 , опережение по фазе, создаваемое автоматом стабилизации, было более $\varphi_3(\omega')$, т.е. $\varphi_{AC}(\omega') > \varphi_3(\omega')$. В этом случае фазовая характеристика разомкнутой цепи будет пересекать ось $\varphi = 0$ в отрицательном направлении при выполнении условия (4.25) и замкнутая система будет устойчива.

4.6. АМПЛИТУДНАЯ И ФАЗОВАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ

В разд. 4.5 рассмотрен способ стабилизации ракеты путем некоторого изменения фазочастотной характеристики автомата стабилизации в небольшом диапазоне частот, где $A(\omega) = A_{PO}(\omega)A_{AC}(\omega) > 1$ вследствие большого коэффициента динамичности регулируемого объекта. К амплитудно-частотной характеристике АС в этом диапазоне частот дополнительных требований не предъявлялось, так как характеристический полином дифференциальных уравнений ракеты с учетом колебаний жидкости не имел дополнительных корней с положительной вещественной частью. Обеспечение устойчивости ракеты путем выбора фазочастотной характеристики автомата стабилизации принято называть фазовой стабилизацией.

В некоторых случаях обеспечить устойчивость движения ракеты при помощи фазовой стабилизации невозможно. Тогда применяют амплитудную стабилизацию, смысл которой заключается в уменьшении модуля амплитудно-фазовой характеристики АС в некотором диапазоне

частот до такой величины, чтобы $A_{PO}(\omega)A_{AC}(\omega) < 1$ при условии, что разомкнутая цепь в этом диапазоне частот не имеет корней с положительной вещественной частью. Амплитудно-фазовая характеристика при этом не охватит точку $C(1, i0)$, и замкнутая система будет устойчива.

Уменьшить $A_{AC}(\omega)$, что равносильно уменьшению динамического коэффициента усиления автомата стабилизации, сравнительно сложно на больших частотах. На малых частотах, которые характерны для низших тонов колебаний жидкости, уменьшить k_{AC} практически невозможно. Иногда приходится прибегать к установке узкополосных фильтров, которые в небольшом диапазоне частот практически не пропускают сигналов.

Понятия фазовая стабилизация так же, как и амплитудная, являются условными, поскольку изменение фазочастотной характеристики может сопровождаться изменением амплитудно-частотной характеристики и наоборот. Они основаны на разделении средств, с помощью которых достигается изменение частотной характеристики АС путем введения запаздывания (опережения) или путем изменения динамического коэффициента усиления.

4.7. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ С ИДЕАЛЬНЫМ РЕГУЛЯТОРОМ

На стадии проектирования целесообразно применять D -разбиение и в упрощенной постановке выявить зависимость границ областей устойчивости от каких-либо параметров, которые можно изменять, добиваясь устойчивости системы. Пример такого D -разбиения представлен на рис. 2.17 для абсолютно твердой ракеты.

Рассмотрим движение ракеты в безвоздушном пространстве. Уравнения возмущенного движения ракеты с учетом колебаний жидкости в баках имеют вид

$$m\ddot{y}_C + \sum_{j=1}^k m_j^* \ddot{\lambda}_j - P_3 \ddot{\vartheta} = R_{Yp}^{(6)} \delta;$$

$$I \ddot{\vartheta} = \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^* \ddot{\lambda}_j - g^* \sum_{j=1}^k m_j^* \lambda_j = -R_{Yp}^{(6)} l_p \delta; \quad (4.26)$$

$$\ddot{\lambda}_j + \frac{g^*}{l^*} \lambda_j + L_j^* \ddot{\vartheta} + \ddot{y}_C - g^* \vartheta = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k).$$

Здесь положено, что частота собственных колебаний всех маятников одинакова: $\omega_\lambda^2 = g^*/l^*$. В этих уравнениях все обозначения соответствуют принятым в разд. 4.2.

Для простоты примем, что на малых частотах автомат стабилизации является идеальным, т.е. его дифференциальное уравнение не содержит производных $\dot{\delta}$, $\dot{\vartheta}$, Угол поворота δ управляющего органа в этом случае можно определить из уравнения

$$\delta = k_0 \vartheta + k_1 \dot{\vartheta} + k_2 \ddot{y}_C / g^*, \quad (4.27)$$

где k_0, k_1, k_2 — коэффициенты усиления автомата стабилизации.

Уравнения (4.26), (4.27) образуют систему линейных однородных дифференциальных уравнений замкнутой динамической системы, состоящей из регулируемого объекта и автомата стабилизации.

Положим

$$y_C = Y e^{pt}; \quad \vartheta = A e^{pt}; \quad \lambda_j = B_j e^{pt}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы (4.26), (4.27) будет иметь вид

$$p^2(p^2 + \omega_\lambda^2)^{k-2}(a_0 p^6 + a_1 p^5 + a_2 p^4 + a_3 p^3 + a_4 p^2 + a_5 p + a_6) = 0. \quad (4.28)$$

Корни этого уравнения $p^2 = 0$ соответствуют такому возмущенному движению, когда $\ddot{\vartheta} = 0$; $\lambda_j = 0$, а $y_C = (y_C)_0 + t(v_C)_0$. Это установившееся поступательное движение стержня с закрепленными маятниками с постоянной скоростью $(v_C)_0$. Оно возможно потому, что автомат стабилизации не реагирует на скорость y_C . Возникающее рассогласование по смещению (по скорости) $y_C(\dot{y}_C)$ должно устраняться автоматом стабилизации центра масс. Здесь мы определим только те условия, при которых замкнутая система будет устойчива по координатам ϑ и λ_j .

Обозначим, как и ранее,

$$\mu_1 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^k m_j^*; \quad \mu_2 = \frac{1}{I} \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^{*2}; \quad \mu_3 = \frac{1}{m \rho_0} \sum_{j=1}^k m_j^* L_j^*; \quad (4.29)$$

$$l_p / \rho_0 = \bar{l}_p; \quad \rho_0 = \sqrt{I/m}; \quad \bar{\rho} = \rho_0 / l^*.$$

Кроме того, положим $R_{Yp}^{(6)} = \sigma P_3$, где σ — некоторый коэффициент, меньший единицы.

Тогда коэффициенты третьего множителя характеристического уравнения (4.28) можно выразить следующими формулами:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \bar{\rho}^2 \left\{ \left(\frac{k_2}{\sigma} \right) (\bar{l}_p \mu_3 + \mu_2 - 1) + [(1 - \mu_1)(1 - \mu_2) - \mu_3^2] \right\}; \\
 a_1 &= \omega_\lambda^2 \left(\frac{k_1}{\sigma} \right) \bar{\rho} [-\mu_3 + \bar{l}_p (1 - \mu_1)]; \\
 a_2 &= \omega_\lambda^2 \bar{\rho} \left[\mu_3 + 2\bar{\rho} - \bar{\rho} \mu_1 - \bar{\rho} \mu_2 + \frac{k_2}{\sigma} (\bar{l}_p - \bar{l}_p \mu_1 - 2\mu_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\rho} \mu_2 + \bar{\rho} \bar{l}_p \mu_3 - 2\bar{\rho}) + \frac{k_0}{\sigma} (\bar{l}_p - \bar{l}_p \mu_1 - \mu_3) \right]; \\
 a_3 &= \omega_\lambda^4 \frac{k_1}{\sigma} (\mu_1 + 2\bar{l}_p \bar{\rho} - \bar{\rho} \bar{l}_p \mu_1 - \bar{\rho} \mu_3); \\
 a_4 &= \omega_\lambda^4 \left[\bar{\rho}^2 + \mu_3 \bar{\rho} + \frac{k_2}{\sigma} (\mu_1 + 2\bar{l}_p \bar{\rho} - 2\bar{\rho} \mu_3 - \bar{l}_p \bar{\rho} \mu_1 - \bar{\rho}^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{k_0}{\sigma} (\mu_1 + 2\bar{l}_p \bar{\rho} - \bar{\rho} \mu_3 - \bar{l}_p \bar{\rho} \mu_1) \right]; \\
 a_5 &= \omega_\lambda^6 \frac{k_1}{\sigma} (\bar{l}_p \bar{\rho} + \mu_1); \\
 a_6 &= \omega_\lambda^6 (\bar{l}_p \bar{\rho} + \mu_1) \left(\frac{k_2}{\sigma} + \frac{k_0}{\sigma} \right).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Будем считать, что

$$k_0 > 0; \quad k_1 > 0; \quad k_2 > 0; \quad \sigma > 0; \quad \bar{l}_p > 0;$$

$$0 < \mu_1 < 1; \quad 0 < \mu_2 < 1; \quad -1 < \mu_3 < 1, \quad 0 < \bar{\rho} < \infty.$$

Для оценки устойчивости движения и определения границ областей устойчивости воспользуемся алгебраическим критерием устойчивости Раута – Гурвица.

Определитель Гурвица для третьего сомножителя из уравнения (4.28) имеет вид

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & a_6 & a_5 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.31}$$

Диагональные миноры отмечены пунктирными чертами.

Найдем границы областей устойчивости. Они будут определяться уравнениями

$$a_0 = 0; \quad \Delta_5 = 0.$$

Ю.А. Пуриков показал, что, пользуясь методом исключения Эйлера, определитель Гурвица можно привести к произведению сравнительно простых многочленов. Например, диагональный минор Δ_5 можно представить в виде

$$\Delta_5 = C \psi_0 \psi_1 \psi_2 \psi_3,$$

где C – положительная константа;

$$\psi_0 = \bar{l}_p \bar{\rho} + \mu_1; \quad \psi_1 = \mu_1 \mu_2 - \mu_3^2;$$

$$\psi_2 = \frac{k_2}{\sigma} (\mu_1 + \bar{\rho} \mu_3 + \bar{l}_p \bar{\rho} \mu_1) + \mu_1^2 - \mu_1 - \bar{\rho} \mu_3; \tag{4.32}$$

$$\psi_3 = -\bar{l}_p^2 \bar{\rho} \mu_3 + \bar{l}_p (\bar{\rho} \mu_1 - \bar{\rho} \mu_2 - \mu_3) - (\mu_1 \mu_2 - \mu_1 - \bar{\rho} \mu_3 - \mu_3^2).$$

Условия $\psi_0 > 0$ и $\psi_1 > 0$ выполняются всегда, поэтому границы областей устойчивости определяются равенством нулю какой-либо из величин ψ_2 , ψ_3 , a_0 . На основании равенств (4.32) и с учетом обозначений (4.29) и (4.30) эти условия можно представить в виде

$$\frac{k_2}{\sigma} \left[\bar{\rho} \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j + (1 + \bar{\rho} \bar{l}_p) \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \right] + \left(\sum_{j=1}^k \bar{m}_j - 1 \right) \sum_{j=1}^k \bar{m}_j - \bar{\rho} \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j = 0; \quad (4.33)$$

$$\left(\sum_{j=1}^k \bar{m}_j + \bar{\rho} \bar{l}_p \right) \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j^2 + \left(\bar{l}_p^2 \rho + \bar{l}_p - \bar{\rho} - \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j \right) \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j - (\bar{l}_p \bar{\rho} + 1) \sum_{j=1}^k \bar{m}_j = 0; \quad (4.34)$$

$$\frac{k_2}{\sigma} \left(\sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j^2 + \bar{l}_p \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j - 1 \right) + \left(\sum_{j=1}^k \bar{m}_j - 1 \right) \sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j^2 - \left(\sum_{j=1}^k \bar{m}_j \bar{L}_j \right)^2 - \sum_{j=1}^k \bar{m}_j + 1 = 0. \quad (4.35)$$

Здесь $\bar{L}_j = L_j^* / \rho_0$, $\bar{m}_j = m_j^* / m$. Условие $a_3 > 0$ будет выполнено, если $a_1 > 0$. Условие $a_5 > 0$ вытекает из принятого ранее условия $k_1 > 0$.

Если в третьем множителе характеристического уравнения (4.28) положить $p = i\omega$ и построить вещественную и мнимую части функции Михайлова, то из условия перемежаемости корней вещественной и мнимой частей функции следует, что должно выполняться неравенство

$$\mu_1 (\bar{l}_p \bar{\rho} + 1) + \mu_3 \bar{\rho} > 0,$$

которое следует учитывать, если $\mu_3 < 0$.

В области устойчивости должно быть: $a_6 > 0$; $\psi_2 > 0$; $\psi_3 > 0$ или $a_6 > 0$; $\psi_2 < 0$; $\psi_3 < 0$.

Границы областей устойчивости, определяемые условиями (4.33) – (4.35), будем рассматривать как поверхности в k -мерном пространстве

координат \bar{L}_j , характеризующих расположение масс маятников по отношению центра масс ракеты. Величины $\bar{\rho}$, \bar{m}_j , \bar{l}_p будем считать фиксированными. Важно отметить, что в уравнениях этих поверхностей не входят коэффициенты k_0 и k_1 . Эти поверхности зависят от параметра k_2 , т.е. от коэффициента усиления при y_c в уравнении автомата стабилизации (4.27).

Из детального рассмотрения уравнений (4.33) – (4.36) видно, что одна поверхность, определяемая уравнением (4.34), не остается неподвижной в пространстве \bar{L}_j . Поверхность, определяемая уравнением (4.33), представляет семейство плоскостей с параметром k_2 . Уравнение (4.35) определяет семейство поверхностей второго порядка с тем же параметром k_2 . Изменяя его, можно значительно деформировать области устойчивости системы.

Рассмотрим более подробно случай, когда ракета имеет два бака. В этом случае пространство \bar{L}_j вырождается в плоскость, а границы областей устойчивости представляют собой плоские кривые. Границы областей устойчивости I и II в координатах \bar{L}_1 и \bar{L}_2 при $k_0 = 2$ и $k_2 = 2$ показаны на рис. 4.11.

Условие (4.33) дает следующее уравнение для прямой I:

$$\bar{L}_2 = -\frac{\bar{m}_1}{\bar{m}_2} \bar{L}_1 - \left[\left(\frac{\bar{m}_1}{\bar{\rho} \bar{m}_2} + \frac{1}{\bar{\rho}} \right) - \frac{(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)^2}{\bar{\rho} \bar{m}_2} \right].$$

Условие (4.34) дает уравнение для эллипса 2 с координатами центра O_2

$$\bar{L}_1 = \bar{L}_2 = \frac{\bar{\rho} - \bar{l}_p - \bar{l}_p^2 \bar{\rho}}{2 \bar{\rho} \bar{l}_p}.$$

Большая ось этого эллипса имеет угловой коэффициент наклона

$$k_{(2)}^* = -\frac{1}{2 \bar{m}_1 \bar{m}_2} \left[\bar{\rho} \bar{l}_p (\bar{m}_2 - \bar{m}_1) + \sqrt{\bar{\rho}^2 \bar{l}_p^2 (\bar{m}_2 - \bar{m}_1)^2 + 4 \bar{m}_1^2 \bar{m}_2^2} \right].$$

Условие (4.35) дает уравнение для эллипса 3 с центром в начале координат и с угловым коэффициентом большой оси

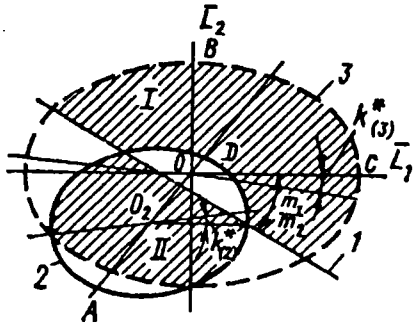


Рис. 4.11

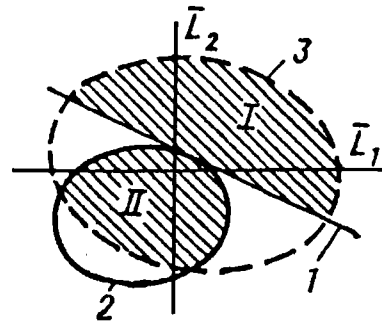


Рис. 4.12

$$k_{(3)}^* = \frac{1}{2\bar{m}_1\bar{m}_2} \left[(\bar{m}_2 - \bar{m}_1) - \sqrt{(\bar{m}_1 - \bar{m}_2)^2 + 4\bar{m}_1^2\bar{m}_2^2} \right].$$

В частном случае, когда относительные массы маятников одинаковы, т.е. когда $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \bar{m}_0$, выражения для угловых коэффициентов упрощаются:

$$\bar{L}_2 = -\bar{L}_1 - \frac{2(1 - 2\bar{m}_0)}{\bar{\rho}}; \quad k_{(2)}^* = 1; \quad k_{(3)}^* = -1.$$

Угол наклона прямой I оказывается равным $-\pi/4$, оба эллипса разворачиваются также на угол $-\pi/4$, причем квадраты полуосей эллипсов будут: для эллипса 2

$$a^2 = \frac{(\bar{l}_p + \bar{l}_p^2 \rho + \bar{\rho})^2}{2\bar{\rho}\bar{l}_p(\bar{\rho}\bar{l}_p + 2m_0)}; \quad b^2 = \frac{(\bar{l}_p + \bar{l}_p^2 \rho + \bar{\rho})^2}{2\bar{\rho}^2\bar{l}_p^2};$$

для эллипса 3

$$a^2 = 1/\bar{m}_0; \quad b^2 = (1 - 2\bar{m}_0)/\bar{m}_0.$$

Для случая, когда

$$k_2/\sigma - 1 - \bar{m}_1 - \bar{m}_2 < 0,$$

кривые в координатах \bar{L}_1, \bar{L}_2 приведены на рис. 4.12, где I и II — области устойчивости. Напомним, что L_1^* — расстояние от центра масс системы до массы m_1^* первого (верхнего) маятника; L_2^* — расстояние от центра масс системы до массы m_2^* второго (нижнего) маятника; если масса m_2^* расположена ниже центра масс, то $L_2^* < 0$. Когда расположение маятников на стержне таково, что точка с координатами $(L_1^*/\rho_0, L_2^*/\rho_0)$ находится в области I или II , то замкнутая система [(4.26), (4.27)] будет устойчивой.

Если точка с названными координатами будет находиться вне областей I или II , то устойчивости движения можно добиваться или изменением величины коэффициента усиления АС (k_2), или более глубоким изменением динамических характеристик АС, или даже некоторой перекомпоновкой ракеты.

Для построения областей устойчивости можно выбирать плоскость любых интересующих нас параметров замкнутой системы и испытывать различные уравнения АС, в том числе такие, которые содержат члены, выражающие запаздывание и реакцию АС на другие параметры движения, например,

$$T_2^2 \ddot{\delta} + T_1 \dot{\delta} + \delta = k_0 \dot{\delta} + k_1 \ddot{\delta} + k_2 \dot{z} + k_3 \ddot{z}.$$

Оценку устойчивости движения стержня с маятниками при аналитическом задании свойств автомата стабилизации можно произвести способом, разработанным Б.И. Рабиновичем. Этот способ основан на исследовании геометрических свойств годографов комплексных передаточных чисел разомкнутой цепи $W(i\omega)$, состоящей из регулируемого объекта $W_{PO}(i\omega)$ и автомата стабилизации $W_{AC}(i\omega)$, и использовании частотного критерия Найквиста.

В отличие от разд. 4.4, где передаточная функция регулируемого объекта (ракеты) с учетом колебаний жидкости представлена в виде произведения передаточных функций, здесь передаточная функция разомкнутой цепи в окрестности корней характеристического уравнения регулируемого объекта раскладывается на сумму простых дробей:

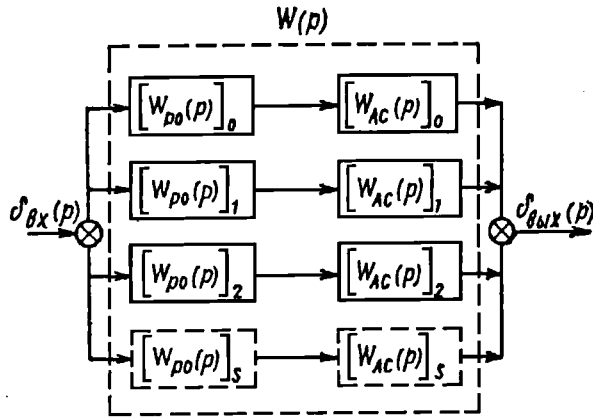


Рис. 4.13

$$W(p) = \sum_{s=0}^{s_0} \frac{2a_s p - \beta_s \Omega_s}{p^2 + 2\epsilon_s p + \Omega_s^2}, \quad (4.36)$$

где ϵ_s, Ω_s – коэффициент затухания и частота собственных колебаний s -го осциллятора; a_s и β_s – некоторые коэффициенты. Осциллятором обычно называют систему (звено), собственные колебания которой описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

В соответствии с этим разложением структурную блок-схему замкнутой системы можно составить из параллельных цепочек, каждая из которых состоит из двух передаточных функций: передаточной функции регулируемого объекта $[W_{po}(p)]_s$ и передаточной функции автомата стабилизации $[W_{AC}(p)]_s$ ($s = 0, 1, 2, \dots, s_0$). Такая структурная блок-схема показана на рис. 4.13.

На комплексной плоскости примем, как и раньше, характерную точку $C(1, i0)$. Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы для s -й цепочки будет

$$W_s(p) + 1 = 0.$$

С учетом (4.36) получим

$$p^2 + 2(\epsilon_s - a_s)p + \Omega_s^2 + \beta_s \Omega_s = 0 \quad (s = 0, 1, 2, \dots, s_0).$$

Корни этого уравнения

$$p_{1,2} = -\epsilon_s \left(1 - \frac{a_s}{\epsilon_s} \right) \pm i\Omega_s \sqrt{1 + \frac{\beta_s}{\Omega_s} - \frac{(\epsilon_s - a_s)^2}{\Omega_s^2}}.$$

Если устойчивость каждой цепочки блок-схемы можно рассматривать независимо, то условия устойчивости замкнутой системы будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_s/\epsilon_s &< 1 \text{ при } \epsilon_s > 0; \\ a_s/\epsilon_s &> 1 \text{ при } \epsilon_s < 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$(s = 0, 1, 2, \dots, s_0).$$

При заданном регулируемом объекте величину a_s/ϵ_s можно изменять только путем изменения свойств автомата стабилизации, поэтому условия (4.37) можно рассматривать как некоторые требования к фазочастотным и амплитудно-частотным характеристикам автомата стабилизации. Если эти требования можно обеспечить путем выбора фазочастотной характеристики $\varphi_{AC}(\omega)$ для всех $s = 0, 1, 2, \dots, s_0$, то фазовая стабилизация осуществима.

4.8. СТРУКТУРНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕГУЛИРУЕМОГО ОБЪЕКТА

Обеспечение устойчивости движения в разд. 4.5 и 4.6 рассмотрено в простейших случаях. За основу брался автомат стабилизации, предназначенный для абсолютно твердой ракеты, и к его характеристикам предъявлялись некоторые дополнительные требования. Если требования к фазочастотной характеристике автомата стабилизации $\varphi_{AC}(\omega)$, сформулированные из условий устойчивости ракеты, можно реализовать, то фазовая стабилизация осуществима. В этом случае регулируемый объект принято называть структурно устойчивым.

Однако динамические свойства регулируемого объекта могут быть довольно сложными. Например, как показано в разд. 4.3, при некоторых соотношениях параметров дискриминант уравнения (4.15) становится отрицательным и кроме обычных положительных корней, обусловленных динамикой абсолютно твердой ракеты, в характеристическом

уравнении регулируемого объекта появляются дополнительно два комплексно-сопряженных корня с положительной вещественной частью. Возникает собственная динамическая неустойчивость регулируемого объекта, обусловленная подвижностью жидкости в баках и имеющая колебательный характер. Для обеспечения устойчивости движения обычного опережения по фазе здесь недостаточно, к фазовой характеристике автомата стабилизации в таком случае предъявляются принципиально другие требования.

При наличии близких характерных частот, обусловленных колебаниями жидкости, к фазовой характеристике автомата стабилизации могут предъявляться противоположные требования: на одной частоте может требоваться опережение по фазе, а на другой близкой частоте — запаздывание.

По мере расхода топлива и возрастания ускорения ракеты изменяются коэффициенты дифференциальных уравнений движения, изменяются их соотношения. Может оказаться, что требования к характеристикам автомата стабилизации во время полета будут коренным образом изменяться и поэтому их нельзя удовлетворить.

Регулируемый объект принято называть структурно неустойчивым, если требования к фазочастотной характеристике $\varphi_{AC}(\omega)$, сформулированные из условий устойчивости ракеты, реализовать нельзя и, следовательно, фазовая стабилизация невозможна. Чтобы обеспечить устойчивость движения ракеты, необходимо в таких случаях изменять ее динамические свойства конструктивными способами.

4.9. КОНСТРУКТИВНЫЕ СПОСОБЫ УЛУЧШЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

В разд. 4.5 было показано, что обеспечить устойчивость движения ракеты с жидким топливом в баках средствами фазовой стабилизации иногда бывает затруднительно. В таких случаях применяется амплитудная стабилизация, при которой в некотором диапазоне частот должно выполняться условие (4.25):

$$A(\omega) = A_{PO}(\omega)A_{AC}(\omega) < 1.$$

Если $\omega_\lambda > \omega_0$, где ω_0 — частота, при которой запаздывание автомата стабилизации по фазе равно нулю, то условие (4.25) должно выполняться на частотах $\omega \geq \omega_\lambda$. Иными словами, при $\omega_\lambda > \omega_0$ необходимо, чтобы в диапазоне собственных частот жидкости модуль комплексного передаточного числа всей разомкнутой цепи $A(\omega)$ был меньше единицы. При этом на фазочастотную характеристику при $\omega > \omega_0$ никаких ограничений не накладывается.

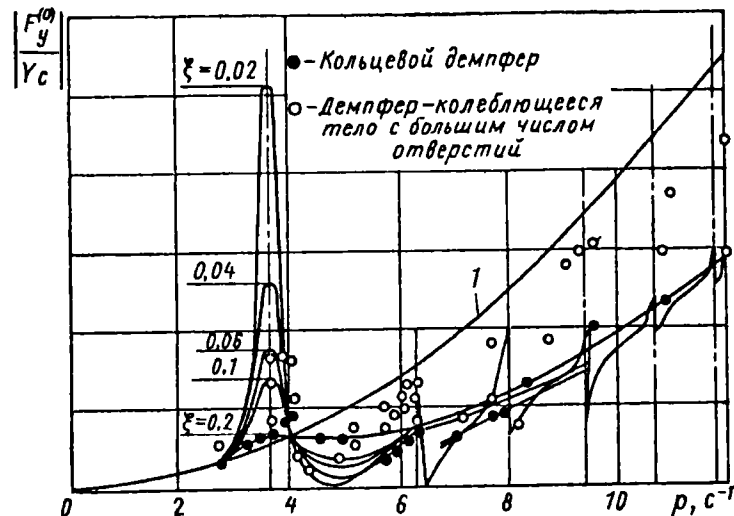


Рис. 4.14

Рассмотрим конструктивные способы, при помощи которых можно уменьшить значения $A_{PO}(\omega)$ в диапазоне частот собственных колебаний жидкости. Эти способы могут быть предложены на основании решения гидродинамических уравнений и экспериментальных исследований и касаются главным образом изменения конструкции топливных баков.

Все конструктивные изменения, направленные на обеспечение устойчивости ракеты с учетом колебаний жидкости в баках, преследуют три цели: 1) увеличение рассеяния энергии колеблющейся жидкости; 2) изменение частоты собственных колебаний жидкости; 3) уменьшение приведенной массы для ослабления суммарного динамического эффекта от колебаний жидкости. Обычно уменьшение приведенной массы сопровождается повышением частоты собственных колебаний жидкости.

Увеличение рассеяния энергии колеблющейся жидкости можно достигнуть при помощи различных устройств, которые в виде поплавков помещают на свободную поверхность жидкости. Чаще всего эти поплавки имеют вид колец (торов). Они разбивают свободную поверхность на малые участки, чем увеличивают рассеяние энергии колебаний. Рассеяние энергии происходит вследствие движения жидкости относительно стенок плавающих поплавков.

Для примера на рис. 4.14 приведены расчетные и экспериментальные зависимости амплитуды поперечной силы $F_y^{(0)}$, возникающей при

вынужденных поперечных колебаниях цилиндрического бака с амплитудой y_C и различными частотами. Экспериментальные значения показаны точками для двух различных плавающих на поверхности демпферов — кольцевого и в виде тела с большим числом отверстий. Расчетные кривые (сплошные линии) получены при разных значениях относительного коэффициента затухания $\xi = \varepsilon_\lambda / \omega_\lambda$. Там же для сравнения показан график силы (кривая 1), которая возникла бы, если считать жидкость затвердевшей:

$$|F_Y^{(0)} / y_C| = p^2 m.$$

Как видно, при значениях коэффициента относительного затухания $\xi \approx 0,2$ на резонансной частоте первого тона амплитуда силы ограничивается величиной, немного превышающей силу от затвердевшей жидкости. Таким образом, при использовании эффективных плавающих демпферов амплитудно-частотные характеристики жидкостной ракеты будут мало отличаться от частотных характеристик абсолютно твердой ракеты.

Величина приведенной массы колеблющейся жидкости и ее расположение зависят от геометрии бака и уровня заполнения жидкостью. Из формул (3.57) и (3.37) для приведенной массы и собственной частоты жидкости следует, что с уменьшением радиуса бака уменьшается масса и одновременно увеличивается частота собственных колебаний жидкости.

С уменьшением приведенной массы колеблющейся жидкости уменьшается динамическое воздействие жидкости на корпус ракеты и при прочих равных условиях диаметр "окружности" амплитудно-фазовой частотной характеристики будет меньше. Создаются более благоприятные условия для амплитудной стабилизации.

Увеличение частоты собственных колебаний жидкости и связанное с этим изменение частоты системы может затруднить фазовую стабилизацию. Поэтому в результате изменения геометрии баков оптимальные результаты достигаются не всегда.

Геометрию бака можно изменять несколькими способами: 1) один бак большого диаметра заменить несколькими баками меньшего диаметра; 2) внутри бака большого диаметра установить цилиндрические перегородки — сделать "бак в баке"; 3) разделить бак на отдельные отсеки радиальными или радиальными и цилиндрическими перегородками (секторный бак).

Если, например, цилиндрический бак с радиусом r_0' заменить четырьмя цилиндрическими баками с радиусами r_0'' с той же общей площадью поперечного сечения ($r_0'' = r_0' / 2$), то приведенная масса

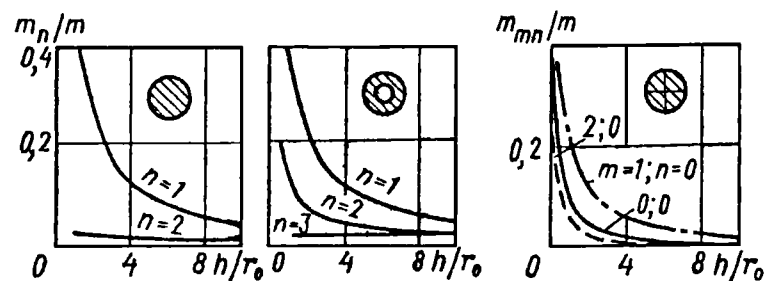


Рис. 4.15

колеблющейся жидкости в четырех баках будет в два раза меньше, чем в одном баке с радиусом r_0' . Частота собственных колебаний жидкости при этом увеличивается в 1,41 раза.

Если разделить бак круговой цилиндрической перегородкой, то наименьшее влияние колебаний жидкости будет в том случае, когда приведенные массы в кольцевом и в круговом (внутреннем) баках примерно равны, а фазы их вынужденных колебаний противоположны. В этом случае динамические воздействия жидкости на кольцевой и круговой цилиндрические баки взаимно уравновешиваются. При отношении диаметра внутреннего и внешнего цилиндров $\beta = 0,77$ приведенные массы приблизительно равны, однако значения частот собственных колебаний жидкости в баках таковы, что фазы вынужденных колебаний приведенных масс жидкости не очень благоприятны. Взаимное уравновешивание не достигается. При отношении диаметров $\beta = 0,5$ фазы вынужденных колебаний благоприятны, но приведенные массы колеблющейся жидкости находятся в соотношении 1:5.

Гораздо выгоднее разделить бак радиальными перегородками. На рис. 4.15 показаны для сравнения графики приведенных масс колеблющейся жидкости для трех форм цилиндрических баков. Бак с круговым поперечным сечением наиболее невыгоден. Здесь приведенная масса для первого тона колебаний составляет $1,43 r_0^3$, что приблизительно соответствует массе жидкости в цилиндрическом баке высотой $0,5 r_0$. При концентрической перегородке диаметром, равным половине диаметра бака ($\beta = 0,5$), приведенная масса равна $\approx 0,96 r_0^3$ при заполнении только внешнего бака и $1,14 r_0^3$, если заполнены оба бака. При радиальных перегородках (четырёхсекторный бак) приведенная масса первого тона колебаний жидкости составляет только $0,46 r_0^3$. Если приведенные массы

первого тона колебаний во всех четырех секторах сложить и сравнить с приведенной массой m_n первого тона колебаний в цилиндрическом баке с круговым поперечным сечением, то эта сумма составила бы меньше половины массы m_n .

В случае четырехсекторного бака приведенная масса, соответствующая второй частоте собственных колебаний жидкости, составляет почти половину приведенной массы первого тона колебаний и должна учитываться при анализе устойчивости движения.

Для увеличения рассеяния энергии колеблющейся жидкости баки чаще всего разделяют не сплошными перегородками, а перфорированными, т.е. с большим количеством отверстий. Вследствие перепада давления между отдельными секторами бака, возникающего при колебаниях, жидкость перетекает через перфорированные перегородки, вследствие чего происходит рассеяние кинетической энергии жидкости.

При установке перфорированных перегородок собственная частота и приведенная масса колеблющейся жидкости изменяются. Однако главный эффект от перфорированных перегородок заключается в значительном увеличении коэффициента затухания собственных колебаний жидкости.

Иногда стабилизацию жидкого топлива в баках при помощи автомата стабилизации трудно обеспечить только на небольшом отрезке времени. В таких случаях облегчить стабилизацию конструктивными средствами можно сравнительно просто. Для этого нужно установить в баке перегородку с отверстиями – промежуточное перфорированное дно – перпендикулярно продольной оси бака. С приближением свободной поверхности жидкого топлива к промежуточному дну приведенная масса и собственная частота жидкости быстро уменьшаются, а рассеяние энергии колебаний жидкости возрастает. На небольшом отрезке времени эффект от колебаний свободной поверхности жидкости практически можно свести к нулю.

4.10. АВТОКОЛЕБАНИЯ РАКЕТЫ

В разд. 4.5 были сформулированы дополнительные требования к автомату стабилизации, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы. Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи, показанная на рис. 4.16, а, соответствует устойчивой замкнутой системе. Такой вид имеет характеристика для статически устойчивой ракеты.

Так как характеристический многочлен $Q(p)$ статически устойчивой ракеты имеет один положительный корень, то точка A ($\omega = 0$) расположена правее точки $C(1, i0)$, а точка B ($\omega = \omega_0$) – левее точки C . Частотная

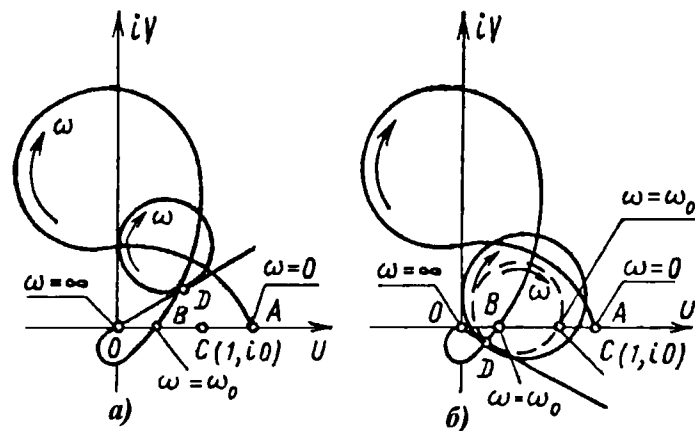


Рис. 4.16

характеристика полуохватывает точку C в положительном направлении; замкнутая система устойчива.

Точка D на частотной характеристике находится в интервале частот, в котором проявляются динамические свойства колеблющейся жидкости. В этом интервале находится частота собственных колебаний жидкости в баках. Вместо двух колец, как это показано на рис. 4.5, здесь (чтобы не затемнять рисунок) изображено только одно кольцо частотной характеристики, соответствующее соотношению частот (4.22). На частоте собственных колебаний жидкости при таком соотношении частот опережение по фазе φ не уменьшается.

На рис. 4.16, б приведена амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи, соответствующая неустойчивой замкнутой системе. Частотная характеристика пересекает вещественную ось в отрицательном направлении правее точки $C(1, i0)$. Это объясняется тем, что здесь не выполнено дополнительное требование, предъявляемое к автомату стабилизации. Автомат стабилизации должен обеспечить опережение по фазе до более высоких частот, чем частота собственных колебаний жидкости. Данная частотная характеристика этому требованию не отвечает, так как частота в точке D больше, чем частота в точке B ($\omega = \omega_0$).

Пусть рассматриваемая нами система (см. рис. 4.16, б) неустойчива. Анализ устойчивости проведен на основании линейных дифференциальных уравнений. Он позволяет сделать вывод лишь о затухании или возрастании со временем случайно возникших колебаний. Реальная динамическая система значительно сложнее расчетной схемы.

Главное различие заключается в том, что уравнения автомата стабилизации и колебаний жидкости являются нелинейными. Канал автомата угловой стабилизации в плоскости тангажа отрабатывает командный сигнал по управлению поворотом вектора силы тяги. Этот сигнал изменяется по времени, поэтому, строго говоря, линеаризация характеристик автомата стабилизации должна производиться в различных рабочих точках.

Динамические характеристики автомата стабилизации в значительной степени зависят также от условий эксплуатации: температуры, вибраций, напряжения источников питания и др. Потенциометрические датчики, с которых снимается ступенчатый сигнал, различные сглаживающие фильтры усложняют свойства автомата стабилизации и затрудняют описание их дифференциальными уравнениями и линеаризацию этих уравнений.

Кроме того, свойства автомата стабилизации изменяются от изделий к изделию из-за конструктивных и технологических разбросов параметров. По этой причине частотные характеристики автомата стабилизации, даже при фиксированной амплитуде входного сигнала, представляются не одной кривой, а целой полосой, в которой может находиться действительная характеристика.

Перечисленных причин достаточно, чтобы система, имеющая небольшой запас устойчивости, в реальных условиях оказалась неустойчивой. Поэтому необходимо обеспечивать достаточно большие запасы устойчивости.

Случайно возникшие в системе колебания начнут возрастать, существенными становятся отброшенные при линеаризации нелинейные члены, и анализировать дальнейшее движение системы можно только с учетом этих нелинейных членов.

Как было указано, одним из основных нелинейных звеньев в автомате стабилизации является рулевая машина, скоростная характеристика которой показана на рис. 4.17. Это типичная характеристика с насыщением. Если командный ток $i < i_0$, то характеристика линейна, коэффициент усиления по скорости, определяемый углом наклона характеристики, равен k .

В рассматриваемом случае при коэффициенте усиления k линеаризованная система неустойчива.

При возрастании амплитуды колебаний наступит момент, когда ток $i > i_0$ и рулевая машина будет работать в нелинейном режиме. Если при $i > i_0$ характеристику рулевой машины линеаризовать, то эквивалентный (средний за период колебаний) коэффициент усиления рулевой машины k_n будет меньше k .

Чем больше амплитуда колебаний, тем сильнее неравенство $i < i_0$ и тем эквивалентный коэффициент усиления рулевой машины меньше k .

С увеличением амплитуды колебаний увеличивается эквивалентный коэффициент затухания собственных колебаний жидкости в баках. Это значит, что с увеличением амплитуд колебаний модуль комплексного передаточного числа разомкнутой цепи будет уменьшаться до тех пор, пока частотная характеристика не пройдет через точку $C(1, i0)$ — пунктирная кривая. Дальней-

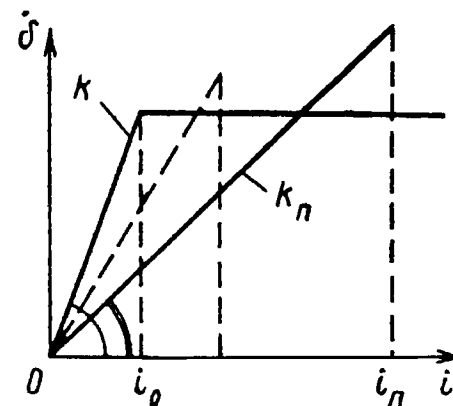


Рис. 4.17

шее возрастание амплитуды колебаний прекратится, в системе установятся стационарные периодические колебания с частотой ω_n и амплитудой i_n , которые называются автоколебаниями. Частота периодических колебаний ω_n находится в интервале частот точки D и поэтому мало отличается от частоты собственных колебаний жидкости ω_λ .

Можно убедиться в том, что автоколебания с амплитудой i_n при малых возмущениях являются устойчивыми. В самом деле, если воздействовать на систему так, чтобы амплитуда колебаний стала больше i_n , то рассеяние энергии колебаний жидкости увеличится, а коэффициент усиления рулевой машины уменьшится. Уменьшится модуль комплексного передаточного числа, и частотная характеристика в окрестности частоты ω_λ не будет пересекать вещественную ось правее точки $C(1, i0)$. Система станет устойчивой, амплитуда колебаний будет уменьшаться, а модель комплексного передаточного числа будет возрастать до тех пор, пока кольцо частотной характеристики не пройдет через точку $C(1, i0)$, соответствующую периодическим колебаниям.

При автоколебаниях все звенья колебательной системы совершают колебания с одной и той же частотой ω_n . Амплитуды колебаний звеньев (обобщенных координат) — командного тока, органов управления, корпуса ракеты, жидкости в баках — различны, и их можно определить только с учетом нелинейных свойств системы. Обычно это делается на моделирующих устройствах. Амплитуды колебаний корпуса бывают невелики, однако вопрос о том, можно ли допускать автоколебания, следует решать, учитывая прочность корпуса ракеты.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ РАКЕТЫ

5.1. СХЕМАТИЗАЦИЯ СВОЙСТВ УПРУГОГО КОРПУСА РАКЕТЫ

Задача о движении ракеты как упругого тела под действием внешних сил в общей постановке является довольно сложной. В зависимости от целей исследования делаются те или иные упрощающие предположения, которые позволяют перейти от реального объекта к расчетной модели, пригодной для анализа только определенных явлений.

Для изучения характеристик упругой ракеты как объекта регулирования корпус ракеты обычно заменяют прямым неоднородным упругим стержнем (стержневая или балочная модель).

Колебания жидкости относительно стенок баков в расчет принимать не будем, т.е. будем считать жидкость как бы "затвердевшей". Это здесь означает только то, что ее свободная поверхность не имеет колебаний. "Затвердевшая" жидкость не увеличивает изгибную жесткость корпуса. Модель "затвердевшей" жидкости можно представить в виде пакета тонких абсолютно гибких и гладких стержней, заполняющих целиком бак от свободной поверхности до его дна. Модель "затвердевшей" жидкости может быть принята только тогда, когда рассматриваемые частоты упругих колебаний корпуса значительно отличаются от учитываемых частот собственных колебаний жидкости в баках.

Расчетная модель в виде прямого неоднородного упругого стержня, удовлетворительно описывающая деформации упругого корпуса ракеты в целом под действием внешних сил, как правило, неприемлема для анализа местных деформаций и напряжений в конструкции. Точность представления расчетной моделью тех или иных характеристик действительного объекта и пределы применимости данной расчетной модели определяются сравнением результатов расчета с результатами испытаний натурного объекта.

Принципиальные особенности, вносимые упругим корпусом в динамические характеристики ракеты как объекта регулирования, рассмотрим вначале на простейшей балочной модели. В дальнейшем, в гл. VII и VIII, эта модель будет усложнена, она будет учитывать подвижность жидкости в баках и упругую подвеску двигателей.

5.2. УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОГО НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

Обозначим через $EJ(x)$ — изгибную жесткость; $m(x)$ — погонную массу; l — длину стержня. Пренебрегая смещениями в направлении продольной оси и полагая, что колебания происходят в плоскости симметрии стержня, составим уравнение поперечного движения элемента стержня длиной dx в неподвижной системе координат XOY (рис. 5.1). Получим

$$m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = - \frac{\partial Q}{\partial x} + q(x, t),$$

где $q(x, t)$ — интенсивность внешней поперечной распределенной силы, действующей на стержень в плоскости XOY ; $y = y(x, t)$ — смещение в направлении OY , перпендикулярном недеформированной оси стержня; Q — поперечная сила в сечении, абсцисса которого x .

Пренебрегая инерцией вращения элемента стержня, составим равенство моментов сил, действующих на выделенный элемент. Удерживая только члены первого порядка малости, получим

$$(\partial M / \partial x) dx = Q dx. \quad (5.1)$$

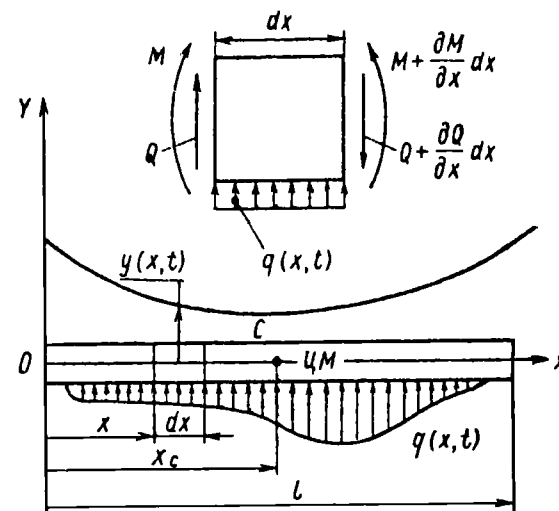


Рис. 5.1

Здесь M – изгибающий момент в поперечном сечении, абсцисса которого равна x .

Применим гипотезу Фогта, согласно которой напряжение σ зависит не только от деформации ϵ , но и от скорости деформации $\partial\epsilon/\partial t$, т.е.

$$\sigma = E[\epsilon + h(\partial\epsilon/\partial t)].$$

Здесь h – коэффициент трения, который будем считать постоянным. Изгибающий момент

$$M = [1 + h(\partial/\partial t)]EJ(x)(\partial^2 y/\partial x^2). \quad (5.2)$$

Исключив из уравнений поперечную силу Q и изгибающий момент M , получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$\left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t). \quad (5.3)$$

Гипотеза Фогта, вообще говоря, опытом не подтверждается, но удобна для качественного анализа поведения системы.

Рассеяние энергии при упругих колебаниях конструкций происходит главным образом в силу трения между соприкасающимися частями узлов конструкции. Такое трение принято называть **к о н с т р у к ц и о н н ы м**. Для учета конструкционного трения в дифференциальных уравнениях Е.С. Сорокиным предложена гипотеза, согласно которой внутреннее трение при упругих гармонических колебаниях пропорционально упругой восстанавливающей силе, но сдвинуто по фазе относительно этой силы на угол $\pi/2$. Если пользоваться комплексным представлением простого гармонического колебательного движения, то вместо уравнения (5.2) изгибающий момент можно выразить следующей формулой:

$$M = \left(1 + i \frac{\Psi}{2\pi}\right) EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (5.4)$$

где Ψ – коэффициент поглощения энергии при колебаниях, равный отношению поглощенной за один цикл энергии ΔW к полной энергии системы W . При гармонических колебаниях коэффициент поглощения равен удвоенному значению декремента свободных колебаний δ , так что

$$\Psi = \Delta W/W = 2\delta.$$

Формула (5.4) оказывается достаточно точной, когда Ψ является малой величиной. Область применения этой формулы должна быть, по-видимому, ограничена вынужденными колебаниями от гармонической силы.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с учетом гипотезы Сорокина вместо (5.3) будет иметь вид

$$\left(1 + i \frac{\Psi}{2\pi}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = P(x) e^{ip't}, \quad (5.5)$$

где $P(x)$ – погонная нагрузка.

5.3. СОБСТВЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОГО СТЕРЖНЯ

Общее решение уравнения (5.3) при $q(x, t) = 0$ можно представить в виде

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t), \quad (5.6)$$

где $f_n(x)$, $q_n(t)$ – суть частные решения уравнения (5.3), которые можно определить методом Фурье. Подставив (5.6) в (5.3) и разделив переменные, получим

$$\frac{[EJ(x)f_n'']''}{m(x)f_n} = -\frac{\ddot{q}_n}{q_n + h\dot{q}_n} = \omega_n^2 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

или

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (5.7)$$

$$[EJ(x)f_n'']'' - \omega_n^2 m(x)f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (5.8)$$

где

$$\frac{d}{dx}(\dots) = (\dots)', \quad 2\xi_n = h\omega_n.$$

На каждом конце свободного стержня изгибающий момент M и поперечная сила Q равны нулю. Поэтому на основании равенств (5.1),

(5.2) и (5.6) функции $f_n(x)$ должны удовлетворять следующим краевым (граничным) условиям:

$$f_n''(0); [EJ(x)f_n''(x)]'_{x=0} = 0; \quad (5.9)$$

$$f_n''(l) = 0; [EJ(x)f_n''(x)]'_{x=l} = 0. \quad (5.10)$$

Условия (5.10) можно представить в другом виде. Приняв во внимание (5.9) и (5.10), получим

$$\int_0^l [EJ(x)f_n''(x)]'' dx = 0; \int_0^l [EJ(x)f_n''(x)]'' (x - x_C) dx = 0, \quad (5.11)$$

где x_C — координата центра масс стержня.

Из уравнения (5.8) с учетом равенств (5.11) найдем

$$\int_0^l m(x)f_n dx = 0; \int_0^l m(x)f_n(x - x_C) dx = 0. \quad (5.12)$$

Равенства (5.12) соответствуют двум краевым условиям (5.10). Физический смысл этих равенств заключается в том, что равнодействующая всех сил инерции и момент этих сил при колебаниях по формам $f_n(x)$ равны нулю.

Уравнение (5.8) представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение изгиба стержня под действием распределенной нагрузки $\omega_n^2 m(x)f_n$, равной силам инерции масс стержня. Отыскание нетривиальных решений уравнения (5.8), удовлетворяющих краевым условиям (5.9) и (5.10), есть классическая задача Штурма — Лиувилля по определению собственных функций и собственных чисел.

Уравнение (5.7) показывает, что собственные колебания стержня при наличии трения всегда затухающие.

Если коэффициенты уравнения (5.8) постоянны, т.е.

$$EJ(x) = EJ_0 = \text{const}; \quad m(x) = m_0 = \text{const},$$

то, как известно, общим решением уравнения (5.8) при краевых условиях (5.9) и (5.10) будет

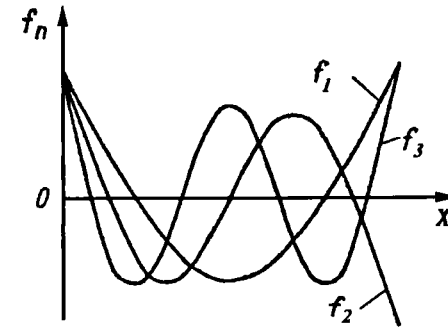


Рис. 5.2

$$f_n = C[(\sin \alpha_n x + \text{sh } \alpha_n x)A_n + (\cos \alpha_n x + \text{ch } \alpha_n x)],$$

$$\alpha_n = \frac{\lambda_n}{l}, \quad A_n = \frac{\text{ch } \alpha_n l - \cos \alpha_n l}{\sin \alpha_n l - \text{sh } \alpha_n l},$$

причем собственные числа λ_n являются невырожденными корнями уравнения $\cos \alpha_n l \text{ch } \alpha_n l - 1 = 0$;

$$\lambda_1 = 4,73; \quad \lambda_2 = 7,85; \quad \lambda_3 = 11,0; \dots$$

Формы собственных колебаний первых трех тонов однородного стержня показаны на рис. 5.2.

Частоты собственных колебаний вычисляются по формуле

$$\omega_n = \alpha_n^2 \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} = \left(\frac{\lambda_n}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}} = \lambda_n^2 \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0 l^4}}. \quad (5.13)$$

Приведем теперь свойства частот и форм собственных колебаний.

5.4. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ЧАСТОТ И ФОРМ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Частное решение уравнения (5.3) с учетом уравнений (5.7), (5.8) можно представить в виде

$$y_n(x, t) = f_n(x) e^{-i\omega_n t} \cos \omega_n t. \quad (5.14)$$

Решение задачи в форме (5.14) предполагает, что любые две произвольные точки стержня (x_1, x_2) могут двигаться либо в фазе, если знаки $f_n(x_1)$ и $f_n(x_2)$ одинаковы, либо в противофазе, если знаки $f(x_1)$ и $f(x_2)$ разные. Другими словами, каждое частное решение вида (5.14) выражает стоячую волну колебаний, т.е. точки стержня, в которых $f_n(x) = 0$, являются узлами формы колебаний, а точки, в которых $f'_n(x) = 0$, пучностями.

Частоты и формы собственных колебаний определяются из дифференциальных уравнений (5.8) и граничных условий (5.9), (5.10):

$$[EJ(x)f_n'']'' - \omega_n^2 m(x)f_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (5.15)$$

$$f_n'' = 0; \quad [EJ(x)f_n'']' = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l. \quad (5.16)$$

Нетрудно установить, что среди множества собственных частот есть нулевые. Действительно, при $\omega_n = 0$ уравнение (5.15) имеет вид

$$[EJ(x)f_n'']'' = 0. \quad (5.17)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что линейно независимые функции $f_{-1} = 1$ и $f_0 = x - x_C$, где x_C — координата центра масс стержня, удовлетворяют уравнению (5.15) и граничным условиям (5.16). В дальнейшем будем считать, что функциям f_{-1} и f_0 соответствуют нулевые собственные частоты $\omega_{-1} = 0$ и $\omega_0 = 0$.

Функции f_{-1} и f_0 соответствуют параллельному перемещению стержня и его повороту вокруг центра масс как жесткого тела. Собственные частоты $\omega_n (n \geq 1)$ присущи упругим колебаниям стержня по формам $f_n = f_n(x)$.

Формы собственных колебаний, соответствующие различным собственным частотам, ортогональны на отрезке $[0, l]$ с весовой функцией $m(x)$, т.е.

$$\int_0^l m(x) f_m(x) f_n(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq m, \quad n, m = -1, 0, 1, 2, \dots$$

Условия ортогональности различных форм колебаний эквивалентны следующему утверждению: работа сил инерции, возникающих при

колебаниях стержня по n -му тону, на перемещениях, соответствующих колебаниям по m -му тону, равна нулю. Или колебания стержня по какому-либо тону не могут вызвать упругие колебания других тонов.

Физический смысл ортогональности упругих форм колебаний f_n с формами колебаний f_{-1} и f_0 , соответствующих движению стержня как твердого тела, заключается в том, что сумма сил инерции, действующих на стержень при колебаниях, и их момент равны нулю.

Таким образом, условия ортогональности упругих форм собственных колебаний f_n с f_{-1} и f_0 соответствуют теоремам теоретической механики о сохранении количества движения и момента количества движения в механической системе, на которую не действуют внешние силы. Из этих соображений, в частности, следует вывод, что собственные упругие колебания стержня не вызывают изменения положения его центра масс.

Когда форма собственных колебаний n -го тона известна, то соответствующая ей собственная частота определяется по формуле Рэлея

$$\omega_n^2 = k_n / m_n, \quad (5.18)$$

где k_n — коэффициент приведенной жесткости; m_n — коэффициент приведенной массы. Эти коэффициенты можно определить, если уравнение (5.15) проинтегрировать по длине стержня, помножив его предварительно на функцию f_n . Получим

$$m_n = \int_0^l m(x) f_n^2 dx; \quad (5.19)$$

$$k_n = \int_0^l [EJ(x)f_n'']'' f_n dx = \int_0^l EJ(x) (f_n'')^2 dx.$$

Множество функций

$$\{f_n(x)\} \quad (n = -1, 0, 1, 2, \dots)$$

образует так называемую полную систему ортогональных координатных функций. Любую непрерывную функцию $F(x)$ на отрезке $[0, l]$ можно представить бесконечным рядом

$$F(x) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n f_n(x), \quad (5.20)$$

сходящимся в среднем.

Коэффициент a_n можно определить, умножая равенство (5.20) на $m(x)f_n(x)$; интегрируя по x в пределах от 0 до l с учетом условий ортогональности, получим

$$a_n = \frac{1}{m_n} \int_0^l F(x) m(x) f_n(x) dx. \quad (5.21)$$

Методы определения форм собственных колебаний будут рассмотрены в гл. VI.

5.5. ВЫНУЖДЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СВОБОДНОГО СТЕРЖНЯ

Предположим, что в уравнении (5.3) интенсивность внешней распределенной силы $q(x, t)$ можно представить в виде произведения

$$q(x, t) = q(t)P(x).$$

Вынужденные колебания стержня $y(x, t)$ представим в виде разложения в ряд по формам собственных колебаний:

$$y(x, t) = y_C(t) + \vartheta(t)(x - x_C) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t), \quad (5.22)$$

где $y_C(t)$ — перемещение центра масс ($f_{-1} = 1$); $\vartheta(t)$ — угол поворота стержня как жесткого тела [$f_0 = (x - x_C)$]; $q_n(t)$ — обобщенная координата, соответствующая форме упругих колебаний $f_n(x)$.

Подставим в уравнение (5.3) вместо $y(x, t)$ его выражение в виде (5.22). Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (q_n + h \dot{q}_n) [EJ(x) f_n''] + m(x) [\ddot{y}_C + \ddot{\vartheta}(x - x_C) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ddot{q}_n] = q(t)P(x). \quad (5.23)$$

Проинтегрируем это уравнение по x в пределах от 0 до l . Затем умножим уравнение (5.23) на $(x - x_C)$ и вновь проинтегрируем по x в тех же пределах. Наконец, умножим уравнение (5.23) на функцию $f_n(x)$, где n — любое фиксированное натуральное число, и проинтегрируем по x в пределах от 0 до l . После интегрирования получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения обобщенных координат $y_C, \vartheta(t), q_n(t)$:

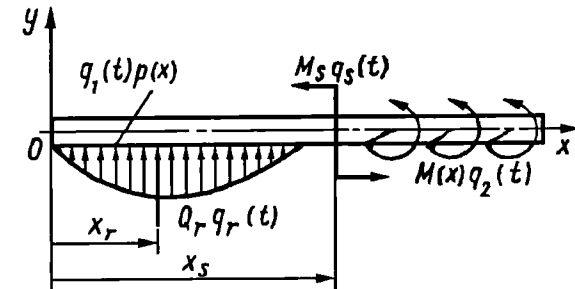


Рис. 5.3

$$m \ddot{y}_C = Q_y; \quad I \ddot{\vartheta} = Q_\vartheta; \quad (5.24)$$

$$m_n (\ddot{q}_n + 2\epsilon_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n) = Q_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где обобщенные силы Q_y, Q_ϑ, Q_n вычисляются из выражений

$$Q_y = q(t) \int_0^l P(x) dx; \quad Q_\vartheta = q(t) \int_0^l P(x)(x - x_C) dx;$$

$$Q_n = q(t) \int_0^l P(x) f_n dx.$$

Первые два уравнения представляют собой уравнения движения центра масс и вращения вокруг поперечной оси, проходящей через центр масс абсолютно твердого стержня. Из последней группы уравнений при заданных внешних силах $q(t)P(x)$ можно найти обобщенные координаты $q_n(t)$ поперечных колебаний стержня.

Когда на стержень действует система поперечных сил, как показано на рис. 5.3, правую часть уравнения (5.23) можно представить в виде

$$q(x, t) = q_1(t)P(x) + q_r(t)Q_r \delta(x - x_r) + M(x)f_n'(x) + q_s(t)M_s[\delta'(x - x_s)],$$

где $\delta(x - x_r)$ — дельта-функция Дирака, обладающая следующими свойствами:

$$\int_0^x \varphi(x) \delta(x - x_j) dx = \begin{cases} \varphi(x_j) & x \geq l; \\ 0 & x < x_j; \end{cases}$$

$$\int_0^x \varphi(x) \delta'(x - x_j) dx = \begin{cases} -\varphi'(x_j) & x \geq l; \\ 0 & x < x_j; \end{cases}$$

x_j – координата точки приложения сосредоточенной силы.

Вычислив интеграл $\int_0^l q(x, t) f_n(x) dx$, получим обобщенную силу

$$Q_n(t) = q_1(t) \int_0^l P(x) f_n(x) dx + q_r(t) Q_r(x_r) f_n(x_r) + q_2(t) \int_0^l M(x) f_n'(x) dx + q_s(t) M_s f_n'(x_s). \quad (5.25)$$

Достоинство изложенного способа определения вынужденных колебаний стержня заключается в наглядности решения и простоте его интерпретации. Вынужденные колебания системы с распределенными параметрами представляются в виде бесконечной суммы колебаний простых осцилляторов.

5.6. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА УПРУГУЮ РАКЕТУ

Определение аэродинамических сил, действующих на упругую ракету в ее возмущенном движении, представляет сложную математическую задачу, методы решения которой зависят от режима обтекания. В качестве первого приближения для расчета аэродинамических сил в нестационарном потоке обычно используют гипотезу стационарности. Согласно этой гипотезе аэродинамические силы, возникающие в любой момент времени на каждом участке корпуса длиной dx при неустановившемся движении, определяются так же, как и в стационарном потоке – пропорционально местному углу атаки.

Поперечную аэродинамическую погонную силу здесь удобно представить в следующей форме:

$$Y_a(x) = \frac{\rho v^2}{2} S c_{Y_a}^{(\alpha)}(x) \alpha(x), \quad (5.26)$$

где $c_{Y_a}^{(\alpha)}(x)$ – коэффициент погонной поперечной силы; $\alpha(x)$ – местный угол атаки. Так как при поперечном движении корпуса со скоростью $\partial y(x, t)/\partial t$ вектор скорости v поворачивается на угол $(1/v) \partial y(x, t)/\partial t$, то местный угол атаки $\alpha(x)$, обусловленный поперечными колебаниями корпуса (рис. 5.4), будет

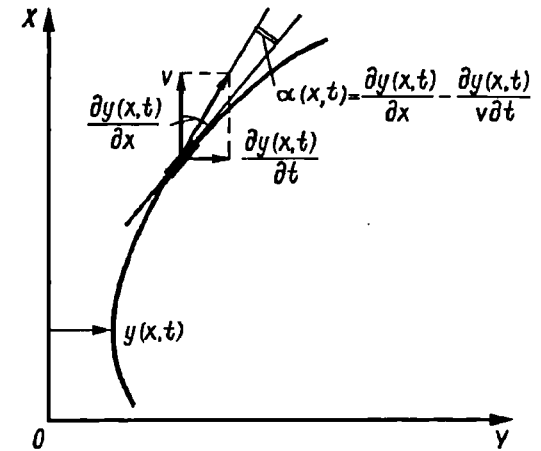


Рис. 5.4

$$\alpha(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}. \quad (5.27)$$

Найдем возмущения (отклонения) аэродинамической поперечной силы, возникающие при упругих колебаниях корпуса. Эта сила пропорциональна углу атаки, поэтому ее отклонение с учетом формулы (5.27) представим в виде

$$\Delta Y_a(x) = \frac{\rho v^2}{2} S c_{Y_a}^{(\alpha)}(x) \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]. \quad (5.28)$$

Отклонение поперечной (боковой) аэродинамической силы в плоскости рыскания аналогично будет

$$\Delta Z_a(x) = \frac{\rho v^2}{2} S c_{Z_a}^{(\beta)}(x) \left[\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right]. \quad (5.29)$$

Погонные аэродинамические силы $\Delta Y_a(x)$ и $\Delta Z_a(x)$ учтем при выводе дифференциальных уравнений возмущенного движения ракеты с учетом поперечных колебаний корпуса.

5.7. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ РАКЕТЫ

Составим дифференциальные уравнения возмущенного движения упругой ракеты для плоскости рыскания. В силу симметрии конструкции дифференциальные уравнения в плоскости тангажа будут такими же, как и в плоскости рыскания. Уравнения будем составлять сразу для отклонений.

Отклонение любой точки упругой оси корпуса ракеты в неподвижной системе координат XOZ (рис. 5.5) в направлении координатной оси Z представим в виде ряда из форм собственных колебаний:

$$z(x, t) = z_c(t) + \psi(t)(x - x_c) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t), \quad (5.30)$$

где $z_c(t)$ — отклонение центра масс ракеты; $\psi(t)$ — угол поворота ракеты как твердого тела; $f_n(x)$ — формы собственных колебаний корпуса; $q_n(t)$ — обобщенная координата, соответствующая функции $f_n(x)$; x_c — абсцисса центра масс ракеты, отсчитываемая от торца корпуса.

Величины $q_n(t)$, $\psi(t)$ будем считать малыми, на отклонение $z_c(t)$ ограничений накладывать не будем, однако примем, что $z_c(t) \ll v$, где v — скорость движения центра масс ракеты.

В невозмущенном движении направление продольной оси корпуса ракеты и направление вектора скорости v совпадают с направлением координатной оси X так, что $z(x, t) = 0$.

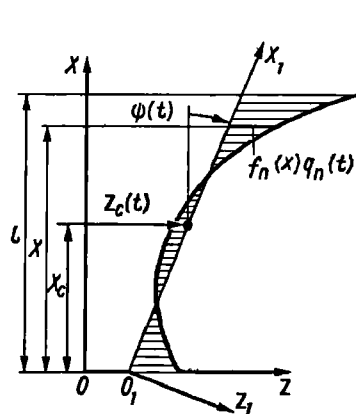


Рис. 5.5

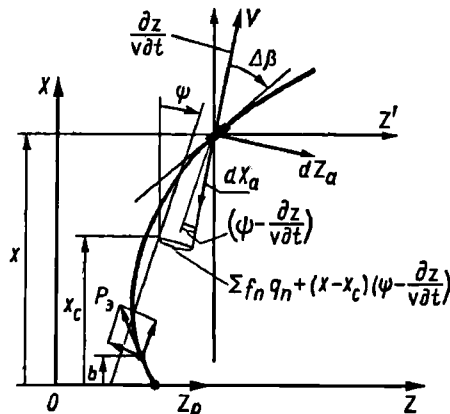


Рис. 5.6

Для составления уравнений воспользуемся системой (5.24). Найдем выражения для обобщенных сил, соответствующих обобщенным координатам z_c , ψ , q_n . Тягу двигателя будем считать направленной по касательной к изогнутой оси корпуса в точке приложения тяги (тяга двигателя — следящая сила). Поперечная аэродинамическая сила $\Delta Z_a(x)$ направлена перпендикулярно скорости возмущенного движения v в плоскости OXZ ; погонная сила лобового сопротивления $X_a(x)$, которую будем считать не зависящей от угла скольжения, направлена в сторону, противоположную направлению вектора v . Внешние силы, действующие на ракету, показаны на рис. 5.6.

Составляющие обобщенных аэродинамических сил, соответствующие обобщенным координатам z_c , ψ , q_n , можно получить, пользуясь схемой рис. 5.6 и выражением (5.25). Они будут равны

$$Q'_z = \int_0^l \left[\Delta Z_a(x) - X_a(x) \frac{\partial z(x, t)}{v \partial t} \right] dx;$$

$$Q'_\psi = \int_0^l \left\{ \Delta Z_a(x)(x - x_c) + X_a(x) \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n + (x - x_c) \left(\psi - \frac{\partial z(x, t)}{v \partial t} \right) \right] \right\} dx;$$

$$Q'_{q_n} = \int_0^l \left[\Delta Z_a(x) - X_a(x) \frac{\partial z(x, t)}{v \partial t} \right] f_n(x) dx. \quad (5.31)$$

Так как отклонение любой точки оси корпуса состоит из отклонения корпуса как жесткого тела и отклонений, обусловленных упругими колебаниями, то соответственно этому и обобщенные аэродинамические силы можно разделить на две группы: 1) силы и моменты, пропорциональные углу рыскания ψ и скоростям $\dot{\psi}$ и \dot{z}_c , такие же, как и в случае жесткого корпуса ракеты; 2) силы и моменты, пропорциональные обобщенным координатам q_n и скоростям \dot{q}_n и обусловленные упругими поперечными колебаниями корпуса.

Слагаемые, составляющие обобщенную силу Q'_n , представляют собой работу распределенных аэродинамических сил на возможных перемещениях $f_n(x)$.

Составляющие обобщенных сил от управляющей силы Z_p будут

$$Q'_z = Z_p; Q'_\psi = Z_p(x_p - x_c); Q'_n = Z_p f_n(x_p). \quad (5.32)$$

Здесь $f_n(x_p)$ — значение формы собственных колебаний корпуса в точке, к которой приложена поперечная управляющая сила рулей Z_p . Величина $(x_p - x_c)$ есть расстояние от точки приложения поперечной управляющей силы до центра масс ракеты.

Отметим, что производная $f'_n(x)$ вычисляется в связанной системе координат $O_1 X_1 Z_1$, ось которой X_1 направлена от хвостовой части к вершине ракеты. Производная $\partial z / \partial x$ берется в абсолютной системе координат $O X Z$, направление оси X которой совпадает с направлением невозмущенного движения (см. рис. 5.5). Между этими производными имеет место следующее соотношение:

$$\partial z(x, t) / \partial x = \psi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) q_n.$$

В обобщенную силу Q_ψ включим также момент от кориолисовых сил инерции топлива и газов. Влиянием упругих поперечных колебаний на величину кориолисовых сил пренебрежем. Тогда момент кориолисовых сил инерции относительно центра масс ракеты будет пропорционален угловой скорости $\dot{\psi}$ и подсчитывается по формуле (1.4). Этот момент объединим с аэродинамическим демпфирующим моментом, так что суммарный демпфирующий момент будет выражаться формулой

$$M_{Y_n} = -\dot{\psi} \left[\frac{\rho v_z}{2} S l^2 m_Y^{(\dot{\psi})} - 2 \sum_j m_j \int_0^{l_n} (x - x_c) dx \right]. \quad (5.33)$$

Кроме обобщенных сил Q' и Q'' , следует добавить обобщение силы Q''' от следящей силы P_z

$$\left. \begin{aligned} Q'''_z &= P_z \psi + P_z \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_{np}) q_n; \\ Q'''_\psi &= -P_z \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_{np}) - \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_{np}) (x_{np} - x_c) \right] q_n; \\ Q'''_{q_n} &= P_z \left[\sum_{m=1}^{\infty} f'_m(x_{np}) f_n(x_{np}) \right] q_m. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Подставив в правые части уравнений (5.24) выражения обобщенных сил, получим

$$\begin{aligned} m \ddot{z}_c &= Q'_z + Q''_z + Q'''_z; \quad I \ddot{\psi} = Q'_\psi + Q''_\psi + Q'''_\psi + M_{Y_n}; \\ m_n (\ddot{q}_n + 2 \varepsilon_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n) &= Q'_n + Q''_n + Q'''_n. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Объединим в этих уравнениях коэффициенты при одноименных обобщенных координатах и положим $\dot{z}_c = v_z$; $Z_p = R_{Zp}^{(0)} \delta$. Принимая во внимание равенства (5.29) — (5.35), получим уравнения возмущенного движения ракеты с учетом упругих поперечных колебаний корпуса в виде

$$\dot{v}_z + c_{v_z v_z} v_z + c_{v_z \psi} \dot{\psi} + c_{v_z \dot{\psi}} \dot{\psi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{v_z q_n} q_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{v_z \dot{q}_n} \dot{q}_n + c_{v_z \delta} \delta = 0;$$

$$\ddot{\psi} + c_{\psi \dot{\psi}} \dot{\psi} + c_{\psi \psi} \psi + c_{\psi v_z} v_z + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\psi q_n} q_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{\psi \dot{q}_n} \dot{q}_n + c_{\psi \delta} \delta = 0;$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n + c_{q_n \dot{q}_n} \dot{q}_n + c_{q_n q_n} q_n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{q_n q_m} q_m + \sum_{m=1}^{\infty} c_{q_n \dot{q}_m} \dot{q}_m + \\ + c_{q_n v_z} v_z + c_{q_n \psi} \psi + c_{q_n \dot{\psi}} \dot{\psi} + c_{q_n \delta} \delta = 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Для коэффициентов приняты следующие обозначения:
в первом уравнении

$$c_{v_z v_z} = \frac{1}{m v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S (c_{Z_*^{(B)}} + c_{X_*}); \quad c_{v_z \psi} = -\frac{1}{m} \left(P_3 + \frac{\rho v_H^2}{2} S c_{Z_*^{(B)}} \right);$$

$$c_{v_z \dot{\psi}} = \frac{1}{m v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l [c_{Z_*^{(B)}}(x) + c_{X_*}(x)] (x - x_D) dx;$$

$$c_{v_z q_n} = -\frac{1}{m} \left[\frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l c_{Z_*^{(B)}}(x) f'_n dx + P_3 f'_n(x_{np}) \right];$$

$$c_{v_z q_n} = \frac{1}{m v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l c_{Z_*^{(B)}}(x) f_n dx; \quad c_{v_z \delta} = -\frac{1}{m} R_{Zp}^{(B)};$$

во втором уравнении

$$c_{\psi \dot{\psi}} = \frac{1}{I} \left[\frac{\rho v_H^2}{2} S l^2 m_Y^{(\psi)} - 2 \sum_{(j)} m_{Cj} \int_{x_{0j}}^{l_n} (x - x_D) dx \right];$$

$$c_{\psi \psi} = \frac{1}{I} \frac{\rho v_H^2}{2} S (c_{Z_*^{(B)}} + c_{X_*}) (x_F - x_D);$$

$$c_{\psi v_z} = -\frac{1}{I v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l [c_{Z_*^{(B)}}(x) + c_{X_*}(x)] (x - x_D) dx;$$

$$c_{\psi q_n} = \frac{1}{I} \left\{ -\frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l [c_{Z_*^{(B)}}(x) f'_n (x - x_D) + c_{X_*}(x) f_n] dx + \right. \\ \left. + P_3 [f_n(x_{np}) - f'_n(x_{np}) (x_{np} - x_D)] \right\};$$

$$c_{\psi q_n} = \frac{1}{I v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l (c_{Z_*^{(B)}}(x) + c_{X_*}(x)) f_n (x - x_D) dx;$$

$$c_{\psi \delta} = -\frac{1}{I} R_{Zp}^{(B)} (x_p - x_D);$$

в третьем уравнении

$$c_{q_n q_n} = 2 \varepsilon_n + \frac{1}{m_n v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l (c_{Z_*^{(B)}}(x) + c_{X_*}(x)) f_n^2 dx;$$

$$c_{q_n q_n} = \omega_n^{(0)^2} - \frac{1}{m_n} \left[\frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l c_{Z_*^{(B)}}(x) f'_n f_n dx - P_3 f'_n(x_{np}) f_n(x_{np}) \right];$$

$$c_{q_n q_m} = -\frac{1}{m_n} \left[\frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l c_{Z_*^{(B)}}(x) f'_m f_n dx - P_3 f'_m(x_{np}) f_n(x_{np}) \right];$$

$$c_{q_n q_m} = \frac{1}{m_n v_H} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l [c_{Z_*^{(B)}}(x) + c_{X_*}(x)] f_m f_n dx;$$

$$c_{q_n \psi} = -\frac{1}{m_n} \frac{\rho v_H^2}{2} S \int_0^l c_{Z_*^{(B)}}(x) f_n dx;$$

$$c_{q_n v_z} = \frac{1}{m_n v_n} \frac{\rho v_n^2}{2} S \int_0^l [c_{Z_n^{(0)}}(x) + c_{X_n}(x)] f_n dx;$$

$$c_{q_n \dot{\psi}} = \frac{1}{m_n v_n} \frac{\rho v_n^2}{2} S \int_0^l c_{Z_n^{(0)}}(x) f_n (x - x_D) dx;$$

$$c_{q_n \delta} = -\frac{1}{m_n} R_{Z_p^{(0)}} f_n(x_p); \quad m_n = \int_0^l m(x) f_n^2 dx.$$

Здесь $\omega_n^{(0)}$ – частота собственных колебаний корпуса. Когда поворот корпуса ракеты осуществляется не поперечной силой $R_{Z_p^{(0)}} \delta$, а управляющим моментом $M_{Y_p^{(0)}} \delta$, обусловленным управлением рассогласования сил тяги двигателей, то

$$c_{v_z \delta} = 0; \quad c_{\psi \delta} = -\frac{1}{I} M_{Y_p^{(0)}}; \quad c_{q_n \delta} = -\frac{1}{m_n} M_{Y_p^{(0)}} f'_n(x_p),$$

где $f'_n(x_p)$ – угол наклона касательной к форме собственных колебаний в точке $x = x_p$.

В отличие от уравнений для абсолютно твердой ракеты (2.6) в первые два уравнения (5.36), кроме сил и моментов, обусловленных движением жесткого корпуса, входят силы и моменты, зависящие от упругих поперечных колебаний корпуса. Каждый тон колебаний корпуса вызывает появление поперечной составляющей силы P_z и момента этой силы относительно центра масс ракеты. Возникают также аэродинамические силы и моменты.

Аэродинамические силы оказывают влияние на величину частоты собственных колебаний корпуса и обычно вызывают затухание упругих колебаний. Эти силы создают также некоторые дополнительные связи между движением ракеты как твердого тела и упругими колебаниями корпуса. Однако эти связи, как правило, несущественны.

При предварительном анализе уравнений возмущенного движения обычно принимают, что: 1) аэродинамические силы не зависят от упругих поперечных колебаний корпуса; 2) аэродинамические силы, обусловленные движением жесткого корпуса, не вызывают упругих поперечных

колебаний; 3) поворот вектора силы тяги вследствие упругих колебаний корпуса не оказывает влияния на движение ракеты как твердого тела. При учете этих допущений оказываются равными нулю все коэффициенты связей между координатами v_z и ψ , с одной стороны, и q_n ($n = 1; 2; \dots$) – с другой, а также между координатами q_n и q_m ($n \neq m$), так что уравнения (5.36) распадаются на две группы независимых уравнений: уравнения возмущенного движения ракеты как твердого тела

$$\dot{v}_z + c_{v_z v_z} v_z + c_{v_z \psi} \dot{\psi} + c_{v_z \delta} \delta = 0; \quad (5.37)$$

$$\ddot{\psi} + c_{\psi \dot{\psi}} \dot{\psi} + c_{\psi \psi} \psi + c_{\psi v_z} v_z + c_{\psi \delta} \delta = 0;$$

уравнения для обобщенных координат, выражающих упругие поперечные колебания корпуса,

$$\ddot{q}_n + c_{q_n \dot{q}_n} \dot{q}_n + c_{q_n q_n} q_n + c_{q_n \delta} \delta = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.38)$$

Уравнения (5.37) отличаются от полученных ранее уравнений для абсолютно твердой ракеты (2.6) только тем, что в первом уравнении (5.37) содержится член $c_{v_z \dot{\psi}} \dot{\psi}$, который учитывает составляющую аэродинамической силы, обусловленную вращением корпуса с угловой скоростью $\dot{\psi}$. Эта сила, вообще говоря, мала и потому при выводе уравнений (2.6) не учитывалась.

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФОРМ И ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ И ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Формы и частоты свободных упругих колебаний корпуса ракеты являются основными параметрами при анализе динамических свойств упругих ракет как объектов автоматического регулирования. Как указано в гл. V, в силу относительной протяженности корпусов они при расчетах низших (балочных) частот аппроксимируются прямыми стержнями с переменным распределением по длине масс и жесткостей. Жидкое топливо в баках считается как бы отвердевшим, или "замороженным", и его масса приплюсовывается к массе корпуса в соответствующих сечениях.

Известно, что аналитические методы определения форм и частот приводят к цели только в тех случаях, когда стержень однороден: $EJ(x) = \text{const}$, $m(x) = \text{const}$ или когда распределения масс и жесткостей соответствуют простейшим аналитическим зависимостям. В случае же стержня с достаточно произвольным распределением приходится использовать различные приближенные методы.

Методы, используемые для определения форм и частот неоднородного стержня, можно разделить на две группы.

К первой можно отнести методы, при применении которых исходные эпюры распределения по длине масс и жесткостей не корректируются, но сама процедура определения частот и особенно форм является в достаточной мере приближенной. К этой группе можно отнести энергетические методы Рэлея и Ритца, метод последовательных приближений, метод Бубнова – Галеркина.

Ко второй группе относятся методы, при применении которых корректируются исходные эпюры распределения масс и жесткостей, но последующая процедура определения частот и форм является точной. К этой группе относится, в частности, метод начальных параметров, основная идея которого состоит в замене исходных эпюр распределения по длине масс и жесткостей ступенчатыми или, что то же самое, в замене исходного неоднородного стержня стержнем, состоящим из отдельных однородных участков.

Методы первой группы являлись основными для определения форм и частот колебаний неоднородных стержней в докомпьютерную эпоху, поскольку требовали для своей реализации относительно меньшего объема вычислений, однако с развитием вычислительной техники использование их в значительной степени сократилось в силу основного недостатка, присущего этим методам – достаточно низкой сходимости получаемых форм к истинным.

В свою очередь, метод начальных параметров получил широкое применение в динамике ракет, поскольку задаваемые эпюры распределения масс и жесткостей ракеты практически по всей длине являются ступенчатыми и требуют коррекции, как правило, только в ее головной части.

Воспользуемся методом начальных параметров в матричной форме. Разобьем стержень на k участков, причем так, что для каждого i -го участка изгибную жесткость EJ_i и погонную массу (массу единицы длины) m_i можно осреднить и считать постоянными:

$$m_i = \frac{1}{l_i} \int_{l_i}^{l_i} m(x) dx = \text{const}; \quad EJ_i = \frac{1}{l_i} \int_{l_i}^{l_i} EJ(x) dx = \text{const}.$$

Дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний для любого i -го участка будет иметь постоянные коэффициенты

$$EJ_i f_i^{IV}(x) - \omega^2 m_i f_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ (0 \leq x \leq l_i)$$

или

$$f_i^{IV}(x) - b_i^4 f_i(x) = 0; \quad b_i^4 = \frac{m_i}{EJ_i} \omega^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.1)$$

Решение системы (6.1) должно удовлетворять граничным условиям и условиям сопряжения участков стержня. Как известно, данная задача разрешима только для тех значений ω , которые являются частотами свободных колебаний неоднородного стержня.

Решение каждого дифференциального уравнения (6.1) может быть представлено либо в виде комбинации тригонометрических и гиперболических функций, либо выражено через балочные функции Крылова:

$$f_i(x) = C_{1i}S(b_i x) + C_{2i}T(b_i x) + C_{3i}U(b_i x) + C_{4i}V(b_i x), \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} S(b_i x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} b_i x + \cos b_i x); \quad T(b_i x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} b_i x + \sin b_i x); \\ U(b_i x) &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} b_i x - \cos b_i x); \quad V(b_i x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} b_i x - \sin b_i x). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Функции Крылова обладают свойствами, делающими их удобными для решения задач поперечных колебаний стержней:

$$1. \quad S(0) = 1; \quad T(0) = U(0) = V(0) = 0, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad S'(b_i x) &= b_i V(b_i x); \quad V'(b_i x) = b_i U(b_i x); \\ U'(b_i x) &= b_i T(b_i x); \quad T'(b_i x) = b_i S(b_i x). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Введем вектор формы

$$\bar{u}_i(x) = \begin{pmatrix} u_{1i}(x) \\ u_{2i}(x) \\ u_{3i}(x) \\ u_{4i}(x) \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

компонентами которого являются:

$u_{1i}(x) = f_i(x)$ — форма перемещений,

$u_{2i}(x) = f'_i(x)$ — форма производной от формы (форма угла поворота),

$u_{3i}(x) = EJ_i f''_i(x)$ — форма изгибающего момента,

$u_{4i}(x) = EJ_i f'''_i(x)$ — форма поперечной силы.

Если на стыках между участками изменяются только погонная масса и жесткость, условия сопряжения векторов формы имеют вид

$$\bar{u}_i(l_i) = \bar{u}_{i+1}(0) \quad (6.7)$$

или

$$\begin{aligned} u_{1i}(l_i) &= u_{1(i+1)}(0); \quad u_{2i}(l_i) = u_{2(i+1)}(0); \quad u_{3i}(l_i) = u_{3(i+1)}(0); \\ u_{4i}(l_i) &= u_{4(i+1)}(0). \end{aligned}$$

Исходя из свойств функций Крылова (6.4), (6.5), можно связать между собой векторы формы в любой точке участка с вектором формы в его начале

$$\bar{u}_i(x) = A_i(x) \bar{u}_i(0), \quad (6.8)$$

где кососимметричная матрица $A_i(x)$ имеет вид

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} S(b_i x) & \frac{T(b_i x)}{b_i} & \frac{U(b_i x)}{EJ_i b_i^2} & \frac{V(b_i x)}{EJ_i b_i^3} \\ b_i V(b_i x) & S(b_i x) & \frac{T(b_i x)}{EJ_i b_i} & \frac{U(b_i x)}{EJ_i b_i^2} \\ EJ_i b_i^2 U(b_i x) & EJ_i b_i V(b_i x) & S(b_i x) & \frac{T(b_i x)}{b_i} \\ EJ_i b_i^3 T(b_i x) & EJ_i b_i^2 U(b_i x) & b_i V(b_i x) & S(b_i x) \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Если $x_i = l_i$, то матрицу $A_i(l_i)$ называют матрицей перехода через i -й участок.

Для следующего $(i+1)$ участка получим

$$\bar{u}_{i+1}(x) = A_{i+1}(x) \bar{u}_{i+1}(0).$$

Поскольку в соответствии с условием (6.7) $\bar{u}_{i+1}(0) = \bar{u}_i(l_i) = A_i(l_i) \bar{u}_i(0)$, то

$$\bar{u}_{i+1}(x) = A_{i+1}(x) A_i(l_i) \bar{u}_i(0).$$

Решение для любого i -го участка можно, рассуждая аналогично, выразить через вектор формы на входе в 1-й участок:

$$\bar{u}_i(x) = A_i(x) \left[\prod_{j=1}^{i-1} A_j(l_j) \right] \bar{u}_1(0). \quad (6.10)$$

Для конца стержня, т.е. при $x = l = \sum_{i=1}^k l_i$ будем иметь

$$\bar{u}(l) = P \bar{u}_1(0), \quad (6.11)$$

где матрица

$$P = \prod_{i=1}^k A_i(l_i). \quad (6.12)$$

Соотношение (6.11) в скалярной форме имеет вид

$$u_r(l) = \sum_{s=1}^4 b_{rs} u_s(0) \quad (r = 1, 2, 3, 4), \quad (6.13)$$

где b_{rs} — коэффициенты матрицы P , зависящие от частоты колебаний ω .

Принятые до сих пор начальные параметры $u_s(0)$ были произвольными. Подчиним их граничным условиям, которые для свободного стержня будут следующими:

$$u_3(0) = 0; \quad u_4(0) = 0; \quad u_3(l) = 0; \quad u_4(l) = 0. \quad (6.14)$$

С учетом граничных условий соотношения (6.13) представим в виде

$$\begin{aligned} u_1(l) &= b_{11} u_1(0) + b_{12} u_2(0); \\ u_2(l) &= b_{21} u_1(0) + b_{22} u_2(0); \\ 0 &= b_{31} u_1(0) + b_{32} u_2(0); \\ 0 &= b_{41} u_1(0) + b_{42} u_2(0). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Согласно двум последним уравнениям системы (6.15) нетривиальное решение соответствует равенству нулю определителя

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} = 0. \quad (6.16)$$

Так как коэффициенты b_{rs} зависят от частоты ω [см. уравнение (6.1), матрицу (6.9)], то и величина определителя $D(\omega)$ также является функцией ω . Корни функции $D(\omega)$ будут собственными частотами. Для каждой собственной частоты ω_n , например, из третьего уравнения (6.15) находим

$$u_2(0) = - [b_{31}(\omega_n)/b_{41}(\omega_n)] u_1(0). \quad (6.17)$$

Теперь форма собственных колебаний на основании соотношения (6.10) и граничных условий (6.14) может быть представлена в виде

$$f_n(x) = b_{11}(x) u_1(0) + b_{12}(x) u_2(0)$$

или с учетом соотношения (6.17) и положив $u_1(0) = 1$, получим

$$f_n(x) = b_{11}(x) [b_{31}(\omega_n)/b_{41}(\omega_n)] b_{12}(x), \quad (6.18)$$

где $b_{11}(x)$, $b_{12}(x)$ — коэффициенты матрицы

$$P(\omega_n, x) = A_i(\omega_n, x) \prod_{j=1}^{i-1} A_j(\omega_n, l_j). \quad (6.19)$$

Коэффициенты $b_{11}(x)$ и $b_{12}(x)$ должны вычисляться для каждого участка стержня, собственные формы колебаний $f_n(x)$ строятся по уравнению (6.18) от начала стержня (корпуса ракеты) ($x_1 = 0$) по участкам до конца ($x_k = l_k$).

Формы угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} u_2(x) &= b_{21}(x) - \frac{b_{31}(\omega_n)}{b_{32}(\omega_n)} b_{22}(x); \\ u_3(x) &= b_{31}(x) - \frac{b_{31}(\omega_n)}{b_{32}(\omega_n)} b_{32}(x); \\ u_4(x) &= b_{41}(x) - \frac{b_{31}(\omega_n)}{b_{32}(\omega_n)} b_{42}(x). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Таким образом, определение форм и частот свободных колебаний корпуса ракеты может быть проведено следующим путем:

1) корпус ракеты делим на k участков, для каждого i -го участка определяем погонную массу m_i и изгибную жесткость EJ_i ;

2) задавая последовательно значения ω с каким-либо начальным шагом и используя метод половинного деления шага, находим значения ω_n , при которых $D(\omega)$ (6.16) обращается в нуль – собственные частоты колебаний;

3) для каждого из найденных значений ω_n находим коэффициенты $b_{31}(\omega_n)$, $b_{32}(\omega_n)$ матрицы P и коэффициенты $b_{11}(x)$, $b_{12}(x)$ матриц $P(\omega_n, x)$;

4) по уравнению (6.18) строим собственные формы колебаний;

5) при необходимости определяем другие коэффициенты матриц $P(\omega_n, x)$ и строим формы угла поворота, изгибающего момента и поперечной силы.

6.2. ВЛИЯНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ СДВИГА И ИНЕРЦИИ ВРАЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ КОРПУСА

Для определения форм и частот колебаний корпусов ракет малого удлинения, а также в случае необходимости исследования высших тонов колебаний необходимо учитывать напряжения сдвига и инерцию вращения поперечных сечений корпуса.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний i -го участка с учетом напряжений сдвига и инерции вращения сечений можно представить в виде

$$EJ_i \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} - \left(I_{0i} + m_i \frac{EJ_i}{kGF_i} \right) \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^2 \partial t^2} + m_i \frac{I_{0i}}{kGF_i} \frac{\partial^4 y_i}{\partial t^4} = 0, \quad (6.21)$$

где I_{0i} – момент инерции массы участка стержня единичной длины относительно поперечной оси, проходящей через его центр масс; G – модуль упругости второго рода; F_i – площадь поперечного сечения; k – коэффициент поперечного сечения, учитывающий неравномерность распределения по сечению оболочки корпуса касательных напряжений.

Для тонкостенной оболочки

$$k = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu}, \quad (6.22)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

При вычислении I_{0i} учитывается только погонная масса оболочки ракеты m_{1i} , т.е. $I_{0i} = J_i m_{1i} / F_i$.

Преобразуем уравнение (6.21) и запишем в виде

$$EJ_i \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^4} + m_i \frac{\partial^2 y_i}{\partial t^2} - \rho_{0i}^2 (d \cdot m_i + m_{1i}) \frac{\partial^4 y_i}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{J_i m_i m_{1i}}{kGF_i^2} \frac{\partial^4 y_i}{\partial t^4} = 0, \quad (6.23)$$

где $\rho_{0i} = \sqrt{J_i / F_i}$ – радиус инерции сечения; $d = E/kG$. Отметим, что при $\nu = 1/3$ согласно уравнению (6.22) $d = 5$.

Представив y_i в виде

$$y_i = f_i(x) \sin \omega t, \quad (6.24)$$

где ω – собственная частота колебаний, получим из уравнения (6.23) уравнение для собственной формы колебаний

$$f_i^{IV}(x) + \gamma_i^2 \frac{z_{0i}^4}{l_i^2} (d + c_i) f_i''(x) - (1 - d c_i \gamma_i^4 z_{0i}^4) f_i(x) = 0, \quad (6.25)$$

где

$$z_{0i}^4 = b_i^4 l_i^4 = \frac{m_i \omega^2 l_i^4}{EJ_i}, \quad c_i = \frac{m_{1i}}{m_i}, \quad \gamma_i = \frac{\rho_{0i}}{l_i}.$$

Представив, как и раньше в равенстве (6.8),

$$u_i(x) = A_i(x) \bar{u}_i(0),$$

получим, после довольно громоздких преобразований, элементы кососимметричной матрицы $A_i(x)$:

$$a_{11} = a_{44} = n_{1i} \operatorname{ch} k_{2i} \xi + n_{2i} \cos k_{1i} \xi;$$

$$a_{12} = a_{34} = l_i n_{0i} (k_{2i} \operatorname{sh} k_{2i} \xi + k_{1i} \sin k_{1i} \xi);$$

$$a_{13} = a_{24} = \frac{l_i^2}{EJ_i} (\operatorname{ch} k_{2i} \xi - \cos k_{1i} \xi);$$

$$\begin{aligned}
a_{21} = a_{43} &= \frac{z_{0i}^4 n_{0i}}{l_i} \left(\frac{\operatorname{sh} k_{2i} \xi}{k_{2i}} - \frac{\sin k_{1i} \xi}{k_{1i}} \right); \\
a_{22} = a_{33} &= n_{2i} \operatorname{ch} k_{2i} \xi + n_{1i} \cos k_{1i} \xi; \\
a_{31} = a_{42} &= \frac{E J_i z_{0i}^4 n_{0i}}{l_i^2} (\operatorname{ch} k_{2i} \xi - \cos k_{1i} \xi); \\
a_{14} &= \frac{l_i^3}{E J_i z_{0i}^4} (n_{1i} k_{2i} \operatorname{sh} k_{2i} \xi - n_{2i} k_{1i} \sin k_{1i} \xi); \\
a_{23} &= \frac{l_i}{E J_i} \left(\frac{n_{2i} \operatorname{sh} k_{2i} \xi}{k_{2i}} + \frac{n_{1i} \sin k_{1i} \xi}{k_{1i}} \right); \\
a_{32} &= \frac{E J_i}{l_i} (n_{2i} k_{2i} \operatorname{sh} k_{2i} \xi + n_{1i} k_{1i} \sin k_{1i} \xi); \\
a_{41} &= \frac{E J_i}{l_i^3} \left(\frac{n_{1i} \operatorname{sh} k_{2i} \xi}{k_{2i}} + \frac{n_{2i} \sin k_{1i} \xi}{k_{1i}} \right).
\end{aligned}
\tag{6.26}$$

Здесь $\xi = x/l_i$ — безразмерная координата,

$$\begin{aligned}
n_{1i} &= \frac{k_{1i}^2 - \gamma_i^2 z_{0i}^2 d}{k_{1i}^2 + k_{2i}^2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma_i^2 z_{0i}^2 (d - c_i)}{\sqrt{4 + \gamma_i^4 z_{0i}^4 (d - c_i)^2}} \right); \\
n_{2i} &= \frac{k_{2i}^2 + \gamma_i^2 z_{0i}^2 d}{k_{1i}^2 + k_{2i}^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma_i^2 z_{0i}^2 (d - c_i)}{\sqrt{4 + \gamma_i^4 z_{0i}^4 (d - c_i)^2}} \right);
\end{aligned}$$

$$n_{0i} = \frac{1}{k_{1i}^2 + k_{2i}^2} = \frac{1}{z_{0i}^2 \sqrt{4 + \gamma_i^4 z_{0i}^4 (d - c_i)^2}};$$

$$k_{1i} = \frac{z_{0i}}{\sqrt{2}} \sqrt{\gamma_i^2 z_{0i}^2 (d + c_i) + \sqrt{4 + \gamma_i^4 z_{0i}^4 (d - c_i)^2}};$$

$$k_{2i} = \frac{z_{0i}}{\sqrt{2}} \sqrt{-\gamma_i^2 z_{0i}^2 (d + c_i) + \sqrt{4 + \gamma_i^4 z_{0i}^4 (d - c_i)^2}}.$$

Дальнейшая процедура определения собственных частот и форм колебаний полностью совпадает с рассмотренной выше в разд. 6.1.

Следует отметить, что если положить радиусы инерции сечения ρ_{0i} равными нулю, то элементы матрицы (6.26), полученные с учетом напряжений сдвига и инерции вращения, трансформируются в элементы матрицы (6.9), что позволяет создать универсальную программу вычисления собственных частот и форм колебаний как с учетом, так и без учета напряжений сдвига и инерции вращения сечений.

Результаты расчетов собственных частот для гипотетического двухступенчатого корпуса длиной 29 м с диаметрами ступеней 3 и 2,2 м соответственно, распределение по длине которого погонной массы и изгибной жесткости дано на рис. 6.1, представлены в табл. 6.1, где $\tilde{\omega}_n$ и ω_n — собственные частоты колебаний, определенные без учета и с учетом напряжений сдвига и инерции вращения сечений; $\delta_n = 100 (\tilde{\omega}_n - \omega_n)/\omega_n$ — ошибка.

Таблица 6.1

n-тон колебаний	1	2	3
$\tilde{\omega}_n$ (рад/с)	20,439	59,278	102,076
ω_n (рад/с)	19,517	52,493	80,229
δ_n (%)	4,72	12,92	27,23

Приведенные результаты показывают, что для рассмотренного корпуса неучет напряжений сдвига и инерции вращения сечений при

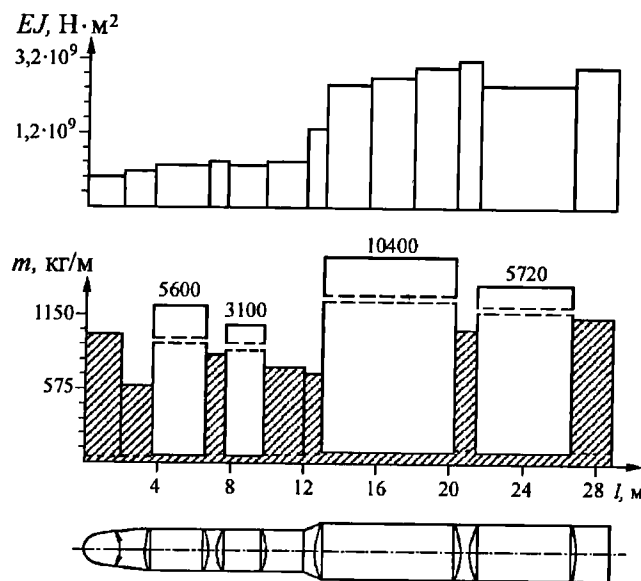


Рис. 6.1

определении собственных частот колебаний недопустим уже для первого тона колебаний, не говоря о последующих.

На рис. 6.2 приведены две первые собственные формы колебаний для рассмотренного корпуса, причем пунктирными линиями даны формы, определенные без учета напряжений сдвига и инерции вращения

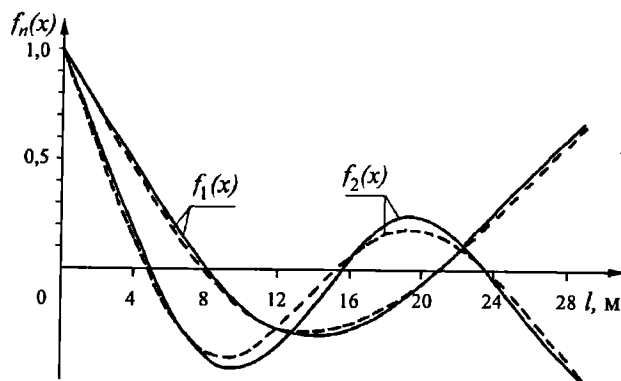


Рис. 6.2

сечений. Видно, что влияние напряжений сдвига и инерции вращения сечений на собственные формы колебаний относительно невелико.

6.3. ФОРМЫ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В разд. 5.5 изложен метод, согласно которому внешние силы и вынужденные колебания разлагают в ряд по собственным функциям. Поэтому сначала решают задачу о свободных колебаниях – находят собственные функции и собственные частоты. Метод наиболее удобен, когда величины частот свободных колебаний корпуса ракеты значительно различаются между собой и анализ устойчивости можно проводить для каждого тона колебаний.

Рассмотрим другой метод, когда вынужденные колебания определяют в виде функции $\Phi(x, p)e^{ipt}$ без разложения в ряд по собственным формам.

Для простоты примем, что стержень имеет постоянное поперечное сечение, внешняя поперечная сила приложена на конце стержня ($x = l$) и изменяется по гармоническому закону с частотой p : $P(t) = P_0 e^{ipt}$.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня с учетом вязкого трения имеет вид

$$\left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) EJ_0 \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (6.27)$$

Функция $y(x, t)$ должна удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=0} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0; \quad -\left(1 + h \frac{\partial}{\partial t}\right) EJ_0 \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = P(t).$$

Решение уравнения (6.27) будем искать в виде

$$y(x, t) = \Phi(x) e^{ipt}. \quad (6.28)$$

Подставляя формулу (6.28) в уравнение (6.27), получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $\Phi(x)$

$$(1 + ihp)c_0^2 \Phi^{IV} - p^2 \Phi = 0, \quad (6.29)$$

где $c_0^2 = EJ_0/m_0$.

Воспользуемся подстановкой $\Phi(x) = e^{rx}$. Из характеристического уравнения

$$(1 + ihp)c_0^2 r^4 - p^2 = 0,$$

в котором p — частота колебаний внешней силы, найдем четыре корня для r :

$$r_m = \sqrt[4]{\rho e^{i\varphi_m}} \quad (m = 1, 2, 3, 4),$$

где

$$\rho = p^2 / (c_0^2 \sqrt{1 + h^2 p^2}); \quad \varphi_m = (\varphi + 2\pi m)/4;$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -hp; \quad -\pi/2 < \varphi < 0.$$

Общий интеграл уравнения (6.29) будет состоять из суммы четырех частных решений:

$$\Phi(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + C_4 e^{r_4 x}. \quad (6.30)$$

Краевые условия для функции $\Phi(x)$ будут

$$\Phi''(0)=0; \quad \Phi'''(0)=0; \quad -(1+ihp)\Phi'''(l)=P_0/(EJ_0); \quad \Phi''(l)=0. \quad (6.31)$$

Приняв эти условия к решению (6.30), найдем произвольные постоянные C_1, \dots, C_4 . Функция $\Phi(x)$ является комплексной, зависящей от частоты внешней силы:

$$\Phi(x, p) = U(x, p) + iV(x, p).$$

Запаздывание по фазе между движением стержня и внешней силой заключено в функции $\Phi(x)$, а не в функциях времени $q_n(t)$, как это было в уравнениях (5.22).

Найдем решение дифференциального уравнения (6.29) для случая $h = 0$. Обозначим $p^2/c_0^2 = \alpha^4$. Тогда общий интеграл уравнения (6.29) будет иметь вид

$$\Phi(x) = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x.$$

С учетом краевых условий (6.31) получим

$$\Phi(x) = C_1 (\sin \alpha x + \operatorname{sh} \alpha x) + C_2 (\cos \alpha x + \operatorname{ch} \alpha x);$$

$$C_1 = \frac{P_0}{2D\alpha^3 EJ_0} (\operatorname{ch} \alpha l - \cos \alpha l);$$

$$C_2 = \frac{P_0}{2D\alpha^3 EJ_0} (\sin \alpha l - \operatorname{sh} \alpha l);$$

$$D = \cos \alpha l \operatorname{ch} \alpha l - 1 \neq 0.$$

При некоторых значениях p величина D может быть равной нулю. Это значит, что частота колебаний внешней силы совпадает с одной из частот собственных колебаний стержня, т.е. система будет находиться в резонансном режиме.

Можно говорить о форме вынужденных колебаний $\Phi_1(x, p)$, которая от функции $\Phi(x, p)$ будет отличаться только масштабом, зависящим от силы P_0 .

На рис. 6.3 показаны такие формы колебаний для трех различных значений частоты:

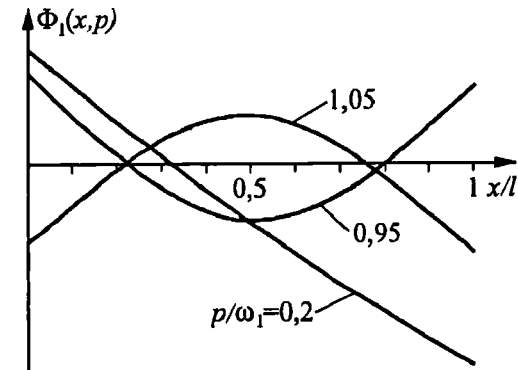


Рис. 6.3

$$p/\omega_1 = 0,2; \quad p/\omega_1 = 9,5; \quad p/\omega_1 = 1,05.$$

Здесь $\omega_1 = \left(\frac{4,73}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0}}$ — частота первого тона собственных

колебаний стержня.

При $p/\omega_1 = 0,2$ упругие колебания незначительны, стержень перемещается в основном как твердое тело. Когда $p/\omega_1 = 0,95$ или $1,05$, форма вынужденных колебаний близка к форме собственных колебаний первого тона. Для первого тона вынужденные колебания с частотой $p/\omega_1 = 0,95$ совершаются до резонанса, а с частотой $p/\omega_1 = 1,05$ — после резонанса.

В отличие от формы собственных колебаний $f_n(x)$ форма вынужденных колебаний $\Phi_1(x, p)$ несамоуравновешена, и поэтому использование ее для анализа динамических свойств ракеты иногда вносит некоторые неудобства. Для устранения этих неудобств выделим из $\Phi_1(x, p)$ линейную функцию, характеризующую движение стержня как твердого тела. Для этого положим

$$y(x, t) = \Phi(x, p)e^{ipt} = [y_C(p) + \vartheta(p)(x - x_C) + y(x, p)]e^{ipt}, \quad (6.32)$$

где x_C — координата центра масс стержня; $y_C(p)$ и $\vartheta(p)$ — амплитуда колебаний центра масс и угол поворота стержня как твердого тела при вынужденных колебаниях с частотой p .

Выберем $y_C(p)$ и $\vartheta(p)$ такими, чтобы два первых слагаемых выражали вынужденные колебания стержня как твердого тела под действием внешней гармонической силы $P_0 e^{ipt}$. Тогда получим

$$\begin{aligned} -p^2 y_C(p) \int_0^l m_0 dx &= P_0; \\ -p^2 \vartheta(p) \int_0^l m_0 (x - x_C)^2 dx &= -p^2 \vartheta(p) I = P_0(l - x_C). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Интегрируя дифференциальное уравнение

$$EJ_0 \Phi^{IV}(x) - p^2 m_0 \Phi(x) = 0$$

при краевых условиях (6.31), полагая в них $h = 0$, находим

$$-p^2 \int_0^l m_0 \Phi(x) dx = P_0; \quad -p^2 \int_0^l m_0 \Phi(x)(x - x_C) dx = P_0(l - x_C). \quad (6.34)$$

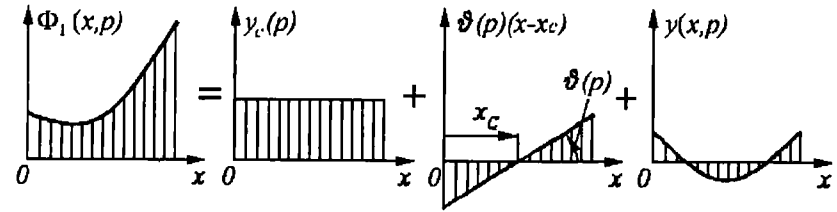


Рис. 6.4

На основании равенств (6.32) — (6.34) получим

$$-p^2 \int_0^l y(x, p) m_0 dx = 0; \quad -p^2 \int_0^l m_0 y(x, p)(x - x_C) dx = 0.$$

Равнодействующая сил инерции и момент сил инерции при поперечных колебаниях по форме $y(x, p)$ равны нулю, т.е. колебания по этой форме самоуравновешены. Разделение функции $\Phi_1(x, p)$ на три функции (6.32) схематически показано на рис. 6.4.

Сравним теперь два различных представления вынужденных колебаний [см. выражения (5.22) и (6.32)]. В обоих случаях вынужденные поперечные колебания представляются в виде суммы трех колебаний — колебаний центра масс, колебаний относительно центра масс и изгибных самоуравновешенных колебаний. В этом заключается сходство решений. Различие между ними в том, что в выражении (5.22) упругие колебания представлены в виде бесконечного ряда по собственным функциям, а в формуле (6.32) они характеризуются одной функцией $y(x, p)$, зависящей от координаты и частоты внешней силы.

В дальнейшем нас будут интересовать величины упругих перемещений в местах установки чувствительных элементов системы стабилизации, например, угол наклона касательной в месте установки гироскопа, угловая скорость и др.

Угол наклона касательной в месте установки гироскопа равен

$$y'(x_r, t) = \Phi'(x_r, p)e^{ipt} = [\vartheta(p) + y'(x_r, p)]e^{ipt}.$$

Комплексное передаточное число для углов поворота поперечных сечений вследствие упругих колебаний будет иметь вид

$$\Phi'(x, p)/P_0 = U(p) + iV(p) = A(p)e^{i\varphi(p)}.$$

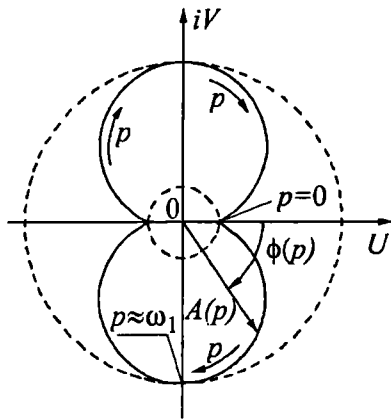


Рис. 6.5

Годограф этого комплексного числа при изменении частоты p и $h \neq 0$ показан на комплексной плоскости $Z = U + iV$ (рис. 6.5).

При собственных частотах модуль комплексного числа достигает максимального значения.

Изложим теперь порядок определения формы вынужденных колебаний неоднородного стержня. Для любого i -го участка стержня будем иметь дифференциальные уравнения с постоянными коэффициен-

тами, подобные уравнениям (6.1):

$$\Phi_i^{IV}(x) - \alpha_i^4 \Phi_i(x) = 0; \quad \alpha_i^4 = \frac{m_i}{EJ_i} p^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (6.35)$$

Принципиальное отличие уравнений (6.1) от (6.35) заключается в том, что в уравнениях (6.1) коэффициенты b_i зависят от искомой частоты собственных колебаний ω_n , а в уравнениях (6.35) коэффициенты α_i зависят от частоты вынужденных колебаний p и потому являются известными.

Решение уравнения для i -го участка стержня будет

$$\Phi_i(x) = C_{1i} \sin \alpha_i x_i + C_{2i} \cos \alpha_i x_i + C_{3i} \operatorname{sh} \alpha_i x_i + C_{4i} \operatorname{ch} \alpha_i x_i. \quad (6.36)$$

Произвольные постоянные последующего участка определяются через постоянные предыдущего участка на основании равенств:

$$\Phi_i(l_i) = \Phi_{i+1}(0); \quad \Phi'_i(l_i) = \Phi'_{i+1}(0); \quad (6.37)$$

$$[EJ\Phi''(l)]_i = [EJ\Phi''(0)]_{i+1}; \quad [EJ\Phi'''(l)]_i = [EJ\Phi'''(0)]_{i+1}.$$

Для расчета форм вынужденных колебаний можно воспользоваться уравнениями (6.7) – (6.12), в которых надо заменить ω_n на p и b_i на α_i . Уравнения (6.15) с учетом граничных условий $u_3(0) = 0$; $u_4(0) = 0$; $u_3(l) = 0$; $u_4(l) = P_0$ представим в виде

$$u_1(l) = b_{11}u_1(0) + b_{12}u_2(0);$$

$$u_2(l) = b_{21}u_1(0) + b_{22}u_2(0);$$

(6.38)

$$0 = b_{31}u_1(0) + b_{32}u_2(0);$$

$$P_0 = b_{41}u_1(0) + b_{42}u_2(0).$$

Из последних двух уравнений находим

$$u_1(0) = -P_0 \frac{b_{32}}{D}; \quad u_2(0) = P_0 \frac{b_{31}}{D}, \quad (6.39)$$

где $D = b_{31}b_{42} - b_{32}b_{41}$.

Форма вынужденных колебаний на основании выражения (6.10) и с учетом соотношений (6.39) будет

$$\frac{\Phi(x)}{P_0} = -\frac{b_{32}}{D} b_{11}(x) + \frac{b_{31}}{D} b_{12}(x).$$

Отметим особенности определения форм вынужденных колебаний в случае, когда внешняя сила приложена не на конце стержня, а в некотором сечении x_p . Эти особенности появляются лишь в условиях сопряжения участков стержня в месте приложения силы P_0 .

Сечение $x = x_p$ включают в самостоятельный участок бесконечно малой длины, массой которого можно пренебречь, а его изгибную жесткость считать бесконечно большой. Тогда для сопряжения участков, расположенных слева и справа от сечения x_p , последнее равенство (6.37) заменяется следующим:

$$[EJ\Phi'''(l)]_i + P_0 = [EJ\Phi'''(l)]_{i+1}. \quad (6.40)$$

На правом конце последнего i -го участка краевые условия будут

$$\Phi''(l_k) = 0; \quad \Phi'''(l_k) = 0.$$

Таким же способом можно решать задачу о вынужденных поперечных колебаниях, когда в некоторых сечениях к стержню упруго подвешены сосредоточенные массы, в том числе имитирующие часть колеблющейся жидкости.

Таким образом, преимущество изложенного метода заключается в том, что вынужденные колебания характеризуются лишь одной функцией $\Phi(x, p)$, что важно при анализе устойчивости движения, когда частоты некоторых форм колебаний корпуса близки между собой. Метод наиболее целесообразно применять также на заключительных этапах исследований, когда ракета как объект регулирования уже спроектирована, построена и требуется провести проверочное исследование устойчивости и получить количественные оценки.

Глава VII

ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ КОРПУСА НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ

7.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Упругие свойства корпуса влияют на устойчивость движения управляемых ракет особенно сильно, когда ракета имеет большое удлинение. Важное значение этот вопрос приобретает для ракет-ускорителей, при помощи которых запускаются и разгоняются до больших скоростей космические летательные аппараты. На активном участке полета ракета проходит через плотные слои атмосферы, где особенно существенны аэродинамические силы, действующие на корпус ракеты.

В случае, когда корпус ракеты нежесткий, возникают задачи, основными из которых являются: стабилизация упругих поперечных колебаний корпуса ракеты, учет влияния упругой проводки органов управления и упругой подвески двигателей на устойчивость ракеты, компенсация навигационных погрешностей, вызываемых поворотом вектора силы тяги. На рис. 7.1 показана трехступенчатая ракета в деформированном состоянии.

Для осуществления полета ракеты по расчетной траектории программный механизм (счетно-решающее устройство) системы управления задает по времени поворот вектора силы тяги. Автомат угловой стабилизации определяет ошибки в угловом положении ракеты и вырабатывает противодействующие управляющие сигналы. При наличии упругих поперечных колебаний корпуса ошибка ϑ_1 , которую измерит автомат стабилизации, состоит из двух частей:

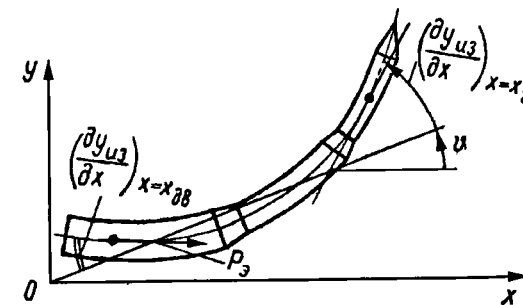


Рис. 7.1

$$\vartheta_1 = \vartheta + (\partial y_{\text{ж}} / \partial x)_{x=x_1},$$

где ϑ – отклонение угла тангажа; $(\partial y_{\text{ж}} / \partial x)_{x=x_1}$ – угол между касательной к изогнутой оси корпуса в месте установки измерительного прибора – гироскопа и осью корпуса, когда ракета представляет собой абсолютно твердое тело.

Эту ошибку автомат стабилизации будет сводить к нулю, причем отклонение органов управления ракетой будет зависеть от угла ϑ_1 , который отличается от угла ϑ на величину $(\partial y_{\text{ж}} / \partial x)_{x=x_1}$.

Взаимодействие упругих поперечных колебаний корпуса с набегающим потоком воздуха иногда называют аэроупругими колебаниями. Частота этих колебаний обычно близка к частоте собственных колебаний корпуса. Колебания вызывают нежелательные поперечные инерционные нагрузки на корпус, в особенности, если они достигают больших амплитуд. Задача стабилизации поперечных колебаний заключается в том, чтобы возникшие колебания были всегда затухающими или, по крайней мере, совершались с небольшими амплитудами, допускаемыми прочностью корпуса.

При медленном повороте ракеты во время полета по программной траектории происходит изгиб корпуса и, как следствие, поворот вектора силы тяги. При наличии поперечных упругих колебаний вектор силы тяги будет повернут на дополнительный угол $(\partial y_{\text{ж}} / \partial x)_{x=x_{\text{ж}}}$ между касательной к изогнутой оси корпуса в месте крепления двигателя и осью корпуса, когда ракета представляет собой абсолютно твердое тело. Если счетно-решающее устройство "не учитывает" изгиба корпуса в сечении $x = x_{\text{ж}}$, то автомат стабилизации "не может устранить" ошибки в направлении вектора силы тяги, вследствие чего возникают навигационные погрешности.

В этой главе рассмотрим только один вопрос – влияние упругих поперечных колебаний корпуса ракеты на устойчивость замкнутой системы, состоящей из корпуса и автомата стабилизации.

Как и в случае, когда ракета представляет собой абсолютно твердое тело или когда она имеет жесткий корпус с жидким заполнителем, будут рассматриваться лишь малые возмущения параметров движения. Это позволяет относительно возмущений получить линейную систему дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от параметров невозмущенного движения.

Небольшие повороты вектора тяги, вызванные поперечными колебаниями корпуса, с точностью до величины первого порядка малости не изменяют ускорения ракеты в продольном направлении. Как

по величине, так и по направлению это ускорение остается таким же, как и при невозмущенном движении. По этой причине при малых возмущениях поперечное движение можно рассматривать независимо от продольного.

В небольшом промежутке времени траекторию управляемой баллистической ракеты можно считать плоской кривой, мало отличающейся от прямой линии. Поэтому невозмущенное движение ракеты в небольшом промежутке времени будем считать прямолинейным. Так как нас будет интересовать лишь возмущенное движение ракеты, то для изучения его можно принять неподвижную прямоугольную систему координат, продольная ось X которой совпадает с направлением продольной оси ракеты в невозмущенном движении. Поперечная ось Y лежит в плоскости запуска, ось Z направлена так, чтобы система $OXYZ$ была правой. Таким образом, мы будем рассматривать лишь поперечное движение в неподвижной прямоугольной системе координат, имея в виду, что сумма проекций на ось X всех внешних сил, действующих на ракету, всегда уравнивается силами инерции.

Для изучения упругих поперечных колебаний корпус ракеты схематизируют прямым неоднородным стержнем, имеющим две плоскости симметрии. Такая схема значительно упрощает теоретическое исследование, однако применима только для корпуса ракет с большим удлинением. В случае малого удлинения корпуса главную роль могут играть местные колебания элементов конструкции, например, колебания двигателя на упругих элементах подвески, колебания различных приборов, в том числе и чувствительных элементов с упругими элементами конструкции, на которых они установлены.

Что касается возможных колебаний свободной поверхности жидкости в баках, то во многих случаях удастся использовать то обстоятельство, что частота собственных колебаний жидкости значительно ниже частоты упругих колебаний корпуса. На этом основании при анализе упругих колебаний корпуса колебания жидкости в подобных случаях обычно не учитываются.

Если частоты собственных колебаний жидкости и корпуса близки, то связь между колебаниями жидкости и упругими колебаниями корпуса существенна и ее следует учитывать.

7.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ УПРУГОЙ РАКЕТЫ И ЕЕ СВОЙСТВА

Угол поворота корпуса в месте установки чувствительного элемента автомата стабилизации (гироскопа) в плоскости рыскания равен

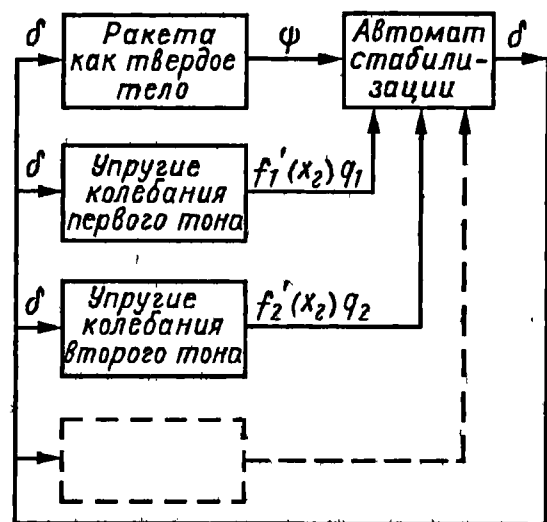


Рис. 7.2

$$\left. \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_r} = \psi + \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x_r) q_n, \quad (7.1)$$

где $f'_n(x_r)$ — значение производной, вычисленное в связанной системе координат $O_1X_1Z_1$ от функции $f_n(x)$ в точке установки гироскопа $x = x_r$.

Этот угол отличается от угла поворота жесткого корпуса и, что очень важно, зависит от места расположения гироскопа по длине корпуса ракеты.

Структурная блок-схема замкнутой системы, соответствующая уравнениям первого приближения (5.35), (5.36) и равенству (7.1), показана на рис. 7.2. Объект регулирования (ракета) представлен на схеме несколькими параллельными блоками. Основным является блок, характеризующий динамику ракеты как твердого тела, выходная координата этого блока — угол ψ . Дополнительными являются блоки, характеризующие динамику упругих колебаний корпуса. Таких блоков может быть несколько и количество их зависит от свойств автомата стабилизации (АС). Выходной координатой каждого дополнительного блока служит возникающий вследствие упругих колебаний угол поворота

того сечения корпуса, в котором установлен чувствительный элемент автомата стабилизации.

Обозначим комплексное передаточное число ракеты как твердого тела через

$$W_0(i\omega) = \frac{\Psi(i\omega)}{\delta(i\omega)} = A_0(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)}, \quad (7.2)$$

а комплексное передаточное число блока упругих колебаний n -го тона через

$$W_n(i\omega) = \frac{f'_n(x_r) q_n(i\omega)}{\delta(i\omega)} = A_n(\omega) e^{i\varphi_n(\omega)}. \quad (7.3)$$

Как и в гл. II, комплексное передаточное число автомата угловой стабилизации представим в виде

$$W_{AC}(i\omega) = A_{AC}(\omega) e^{i\varphi_{AC}(\omega)}. \quad (7.4)$$

Сигнал рассогласования, поступающий в автомат стабилизации, пропорционален углу

$$\begin{aligned} \psi(i\omega) + \sum_{n=1}^{n_0} f'_n(x_r) q_n(i\omega) &= \left[W_0(i\omega) + \sum_{n=1}^{n_0} W_n(i\omega) \right] \delta = \\ &= \left[A_0(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)} + \sum_{n=1}^{n_0} A_n(\omega) e^{i\varphi_n(\omega)} \right] \delta, \end{aligned}$$

где n_0 — число тонов упругих колебаний корпуса, сигналы от которых пропускает автомат стабилизации. На комплексной плоскости $Z = U(\omega) + iV(\omega)$ сигнал рассогласования можно представить суммой векторов.

Если разомкнуть систему на выходе из автомата стабилизации, то комплексное передаточное число разомкнутой цепи

$$\begin{aligned} W(i\omega) = \frac{\delta_{\text{вых}}(i\omega)}{\delta_{\text{вх}}(i\omega)} &= \left[W_0(i\omega) + \sum_{n=1}^{n_0} W_n(i\omega) \right] W_{AC}(i\omega) = \\ &= \left[A_0(\omega) e^{i\varphi_0(\omega)} + \sum_{n=1}^{n_0} A_n(\omega) e^{i\varphi_n(\omega)} \right] A_{AC}(\omega) e^{i\varphi_{AC}(\omega)} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Знаменатель передаточной функции упругой ракеты имеет столько же положительных или комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью, сколько их имеет знаменатель передаточной функции абсолютно твердой ракеты.

Чтобы убедиться в этом, представим передаточные функции объекта регулирования в виде

$$W_0(p) = R_0(p)/Q_0(p); \quad W_n(p) = R_n(p)/Q_n(p).$$

Тогда знаменатель передаточной функции объекта регулирования будет выражаться произведением полиномов:

$$Q(p) = Q_0(p) \prod_{n=1}^{n_0} Q_n(p).$$

Из уравнений (5.36) находим

$$Q_n(p) = p^2 + c_{q_n q_n} p + c_{q_n q_n}; \quad c_{q_n q_n} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Корни всех полиномов $Q_n(p)$ – комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью. Следовательно, полином $Q_0(p)$ имеет такое же число положительных или комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью, как и знаменатель передаточной функции ракеты как твердого тела $Q_0(p)$.

Несмотря на упрощения, которые позволили перейти от уравнений (5.34) к более простым уравнениям (5.35) и (5.36), структурная блок-схема, показанная на рис. 7.2, все же сравнительно сложна для предварительного анализа. Схему можно еще больше упростить на основании анализа комплексного передаточного числа $W(i\omega)$ (7.5).

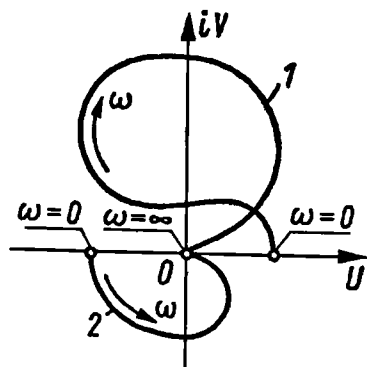


Рис. 7.3

Рассмотрим векторы $W_0(i\omega)$ и $W_n(i\omega)$. Годограф вектора $W_0(i\omega)$, построенный по уравнениям (5.37) для $0 \leq \omega < \infty$, показан на рис. 7.3. Кривая 1 соответствует статически устойчивой ракете, кривая 2 – статически неустойчивой. С возрастанием частоты модуль комплексного числа $A_0(\omega)$ быстро уменьшается (для статически устойчивой ракеты, начиная с $\omega > \sqrt{c_{q_0 q_0}}$).

Комплексное передаточное число $W_n(i\omega)$ получим из уравнения (5.38):

$$\begin{aligned} W_n(i\omega) &= \frac{f'_n(x_r) q_n(i\omega)}{\delta(i\omega)} = \frac{-c_{q_n \delta} f'_n(x_r)}{c_{q_n q_n} + i\omega c_{q_n q_n} - \omega^2} = \\ &= \frac{R_{Zp}^{(0)} f'_n(x_p) f'_n(x_r)}{m_n (c_{q_n q_n} + i\omega c_{q_n q_n} - \omega^2)} = U_n(\omega) + iV_n(\omega) = A_n(\omega) e^{i\varphi_n(\omega)}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Аргумент комплексного числа при $\omega = 0$ зависит от знака произведения двух чисел – значения формы собственных колебаний корпуса в месте расположения управляющего органа (рулей) $f'_n(x_p)$ и значения угла наклона касательной к форме собственных колебаний корпуса в месте установки гироскопа $f'_n(x_r)$. Когда $f'_n(x_p) f'_n(x_r) > 0$, аргумент комплексного числа $\varphi_n(0) = 0$; когда $f'_n(x_p) f'_n(x_r) < 0$, аргумент комплексного числа $\varphi_n(0) = \pi$.

Если поворот ракеты в плоскости OXZ производится не поперечной силой $R_{Zp}^{(0)} \delta$, а моментом $M_{Yp}^{(0)} \delta$, то аргумент комплексного числа $\varphi_n(0)$ определится знаком произведения двух чисел $f'_n(x_p) f'_n(x_r)$. Знак произведения этих чисел играет важную роль при оценке устойчивости движения ракеты с упругим корпусом.

Годограф вектора $W_n(i\omega)$ для $0 \leq \omega \leq \infty$ показан на рис. 7.4. Модуль комплексного числа $A_n(\omega)$ имеет большие значения лишь при частотах, близких к частотам собственных колебаний корпуса; во всем остальном диапазоне частот он мал. Аргумент комплексного числа $\varphi_n(\omega)$ в случае $f'_n(x_p) f'_n(x_r) > 0$ изменяется от 0 до $-\pi$, в случае $f'_n(x_p) f'_n(x_r) < 0$ изменяется от π до 0.

Если проследить за изменением модулей векторов $A_0(\omega)$, $A_n(\omega)$, находящихся в квадратных скобках выражения комплексного передаточного числа разомкнутой цепи (7.5), то можно получить следующую картину.

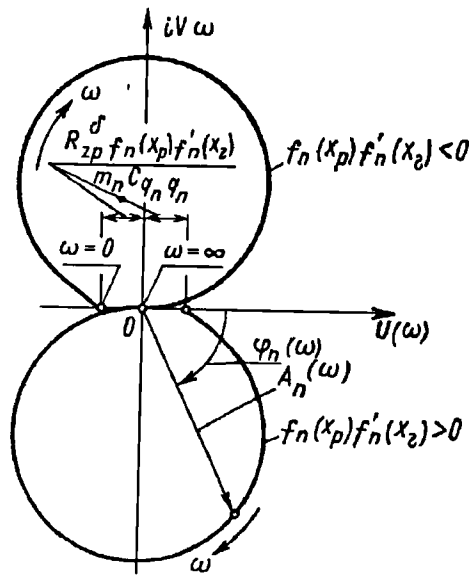


Рис. 7.4

При малых частотах (до частот, несколько превышающих $\omega = \sqrt{c_{\text{жж}}}$) модуль вектора $A_0(\omega)$ имеет большую величину, а модули $A_n(\omega)$ всех остальных векторов очень малы, так что сумма всех векторов, находящихся в квадратных скобках (7.5), практически равна вектору $A_0(\omega)e^{i\varphi_0(\omega)}$ независимо от значения аргументов остальных векторов. Это равенство является следствием того, что на малых частотах, значительно меньших ω_1 , упругие колебания корпуса незначительны и частотная характеристика ракеты с учетом упругих колебаний корпуса такая же, что и ракеты, принимаемой как твердое тело.

При возрастании частоты модуль вектора $A_0(\omega)$ уменьшается и становится тем меньше, чем больше частота ω . Все модули векторов $A_n(\omega)$ остаются малыми до тех пор, пока частота ω не приблизится к ω_1 — частоте первого тона собственных упругих колебаний корпуса. В небольшом интервале частот, включающем частоту ω_1 , модуль вектора $A_1(\omega)$ будет большим, а модули всех остальных векторов — малыми. Сумма всех векторов в этом интервале частот практически будет равна вектору $A_1(\omega)e^{i\varphi_1(\omega)}$. Амплитудно-частотная характеристика ракеты с упругим корпусом в этом интервале частот определяется частотной характеристикой первого тона упругих колебаний корпуса.

Если продвигаться дальше по оси частот, то в следующем интервале, включающем частоту собственных колебаний второго тона ω_2^* , сумма всех векторов будет мало отличаться от вектора $A_2(\omega)e^{i\varphi_2(\omega)}$ и т.д.

* В дальнейшем для краткости вместо выражения "в интервале частот, включающем собственную частоту ω_n^* ", мы будем иногда говорить "на собственной частоте ω_n^* ", понимая, конечно, условность такого выражения.

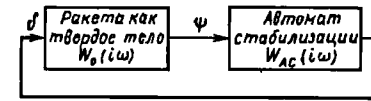


Рис. 7.5

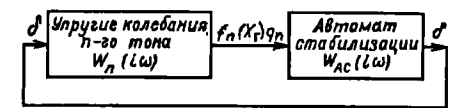


Рис. 7.6

Так как рассеяние энергии упругих колебаний невелико, то интервалы частот, в которых модули векторов $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ становятся большими, достаточно узки.

Из приведенных рассуждений следует, что на малых частотах в автомат стабилизации поступает сигнал, в основном, только от угловых движений жесткого корпуса ракеты; на частоте ω_1 преобладающим является сигнал от упругих колебаний первого тона корпуса; на частоте ω_2 — от упругих колебаний второго тона корпуса и т.д. Значит, в структурной схеме, приведенной на рис. 7.2, на малых частотах можно пренебречь всеми блоками, выражающими динамику упругих колебаний, на частоте ω_1 можно пренебречь всеми блоками регулируемого объекта за исключением блока упругих колебаний первого тона и т.д.

Таким образом, структурную блок-схему (см. рис. 7.2) можно представить в виде отдельных простых одноконтурных схем — схемы для ракеты как твердого тела (рис. 7.5) и n_0 однотипных схем для упругих колебаний корпуса (рис. 7.6).

Отметим, что отождествление суммы векторов в определенном интервале частот с одним вектором справедливо только тогда, когда частоты собственных упругих колебаний корпуса не близки к частоте первого тона ω_1 значительно больше частот, на которых модуль $A_0(\omega)$ является большим. Только при этих условиях модуль суммы всех векторов, стоящих в квадратных скобках выражения (7.5), в промежутках между интервалом низких частот и частотами собственных колебаний ω_1, ω_2 и т.д. будет настолько мал, что, будучи умножен на модуль $A_{AC}(\omega)$, дает произведение, величина которого $A(\omega) < 1$. Только в этих частных случаях полную замкнутую схему (см. рис. 7.2) для анализа устойчивости можно разделить на простые схемы, показанные на рис. 7.5 и 7.6. Для одноступенчатых ракет и многоступенчатых ракет с поперечным делением ступеней эти условия обычно выполняются. В том случае, когда среди частот собственных колебаний корпуса есть близкие между собой, в качестве одной из упрощенных схем нужно рассматривать схему, в которой объект регулирования представлен двумя или более параллельными блоками с близкими частотами собственных колебаний.

Теперь можно просто ответить на вопрос о том, сколько тонов упругих колебаний корпуса следует учитывать при анализе устойчи-

ности движения ракеты. Нужно учитывать все тоны, для которых произведение

$$A_n(\omega_n)A_{AC}(\omega_n) \geq 1. \quad (7.7)$$

7.3. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Здесь мы ограничимся упрощенным анализом устойчивости движения ракеты с упругим корпусом. При анализе каждый тон упругих колебаний будем рассматривать отдельно. Так же, как и во всех предыдущих случаях, анализ устойчивости основан на линеаризованных уравнениях, поэтому полученные выводы будут носить лишь качественный характер. Такое исследование приводит к хорошо обозримым результатам и всегда целесообразно, в особенности на стадии предварительной проработки, когда необходимо определять требования к автомату стабилизации. Количественные зависимости — коэффициенты запаса по амплитуде и по фазе, амплитуды колебаний и т.д. — можно получить только на основании анализа более полной системы уравнений объекта регулирования и автомата стабилизации. Учету динамических свойств АС следует уделять особое внимание, поскольку с повышением частоты колебаний его свойства все более и более отклоняются от тех, которые выражены линейными дифференциальными уравнениями. Для выявления количественных зависимостей нужно учитывать и переменность коэффициентов дифференциальных уравнений объекта регулирования.

В разд. 7.2 было показано, что в первом приближении исследование устойчивости движения ракеты с упругим корпусом можно проводить по двум отдельным замкнутым схемам. В одной схеме регулируемый объект представляется как твердое тело (см. рис. 7.5), в другой — динамические свойства регулируемого объекта обуславливаются упругими колебаниями n -го тона корпуса (см. рис. 7.6).

Первая замкнутая система (для ракеты как твердого тела) является основной. Только при непрерывной ее устойчивости ракета может совершать полет по траектории, достаточно близкой к программной. Анализ устойчивости этой системы проведен в гл. II и здесь мы останавливаться на нем не будем. Замкнутые системы, содержащие блоки с упругими колебаниями корпуса, являются дополнительными. Они также должны быть устойчивыми.

Формула для комплексного передаточного числа $W_n(i\omega)$ (7.6) одинакова для любого тона колебаний корпуса, поэтому достаточно провести исследование устойчивости для произвольного n -го тона колебаний. Будем полагать, что выполняется условие (7.7).

Как и в гл. II, будем считать, что характеристическое уравнение автомата стабилизации не имеет корней с положительной вещественной частью, т.е. автомат стабилизации устойчив. Регулируемым объектом в данном случае является обычное колебательное звено с вязким трением, и его характеристическое уравнение имеет комплексно-сопряженные корни с отрицательной вещественной частью.

Рассмотрим отдельно фазочастотную характеристику разомкнутой цепи для системы рис. 7.6. Так как при перемножении векторов их аргументы складываются (7.5), то фазочастотная характеристика разомкнутой цепи будет представлена уравнением

$$\varphi(\omega) = \varphi_n(\omega) + \varphi_{AC}(\omega) \quad 0 \leq \omega \leq \infty. \quad (7.8)$$

Фазочастотная характеристика автомата стабилизации показана кривой 1 на рис. 7.7. Для обеспечения устойчивости ракеты как твердого тела на малых частотах (до частоты ω_0) фазовая характеристика положительна. При $\omega > \omega_0$ фазовая характеристика отрицательна. Сигнал, обрабатываемый автоматом стабилизации при $\omega > \omega_0$, имеет запаздывание по фазе, которое обычно увеличивается с возрастанием частоты.

Вид фазочастотной характеристики регулируемого объекта можно легко представить на основании рис. 7.4. Так как коэффициент затухания изгибных колебаний мал, то почти все изменение фазы происходит в малом интервале частот, включающем частоту собственных колебаний корпуса ω_n . Пределы изменения фазы при $0 \leq \omega \leq \infty$ следующие:

$$0 \geq \varphi_n(\omega) \geq -\pi \quad \text{для } f_n(x_p)f'_n(x_r) > 0;$$

$$\pi \geq \varphi_n(\omega) \geq 0 \quad \text{для } f_n(x_p)f'_n(x_r) < 0.$$

К фазовой характеристике автомата стабилизации, приведенной на рис. 7.7, добавим согласно равенству (7.8) предельные значения фазы

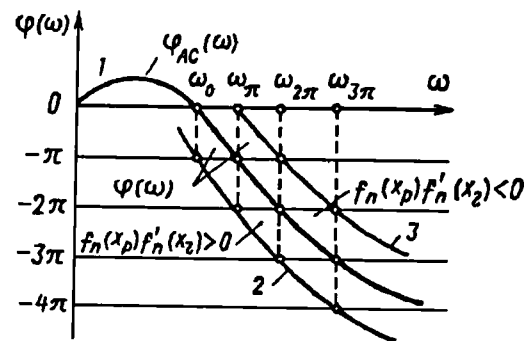


Рис. 7.7

регулируемого объекта (кривые 2 и 3). Если $f_n(x_p)f'_n(x_r) > 0$, то добавляем $\varphi_n(\omega) = -\pi$, и если $f_n(x_p)f'_n(x_r) < 0$, то добавляем $\varphi_n(\omega) = \pi$. Возможная фазочастотная характеристика разомкнутой цепи $\varphi(\omega)$ будет находиться между кривой 1 и этими предельными значениями.

На основании частотного критерия Найквиста замкнутая система (см. рис. 7.6) будет устойчивой, если при $A_n(\omega)A_{AC}(\omega) > 1$ амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи или совершенно не будет пересекать вещественную ось U , или число отрицательных пересечений будет равно числу положительных пересечений. Поэтому, если, например, при $f_n(x_p)f'_n(x_r) < 0$ частота собственных колебаний такова, что $\omega_0 < \omega_n < \omega_\pi$ или $\omega_{2\pi} < \omega_n < \omega_{3\pi}$, то замкнутая система неустойчива. Если же $\omega_\pi < \omega_n < \omega_{2\pi}$ или $\omega_{3\pi} < \omega_n < \omega_{4\pi}$, то замкнутая система устойчива. Здесь ω_π , $\omega_{2\pi}$ и т.д. — частоты, на которых запаздывание по фазе автомата стабилизации соответственно равно π , 2π , ...

Аналогичные рассуждения возможны в отношении фазовой характеристики $f_n(x_p)f'_n(x_r) > 0$. Если $\omega_0 < \omega_n < \omega_\pi$ или $\omega_{2\pi} < \omega_n < \omega_{3\pi}$, то замкнутая система устойчива; если $\omega_\pi < \omega_n < \omega_{2\pi}$ или $\omega_{3\pi} < \omega_n < \omega_{4\pi}$, то замкнутая система неустойчива.

Полученные условия устойчивости удобно представить в виде диаграммы областей устойчивости в координатах параметров регулируемого объекта (рис. 7.8). Такая диаграмма удобна тем, что применима к любому тону упругих колебаний, для которого выполняется условие (7.7). При построении диаграммы принято, что $\omega_1 > \omega_0$, так как это неравенство положено в основу разделения схемы, представленной на рис. 7.2, на две схемы — рис. 7.5 и 7.6.

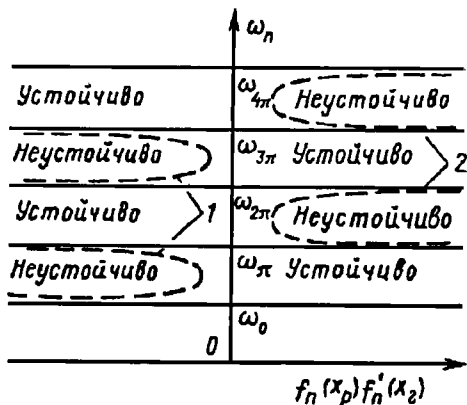


Рис. 7.8

Области неустойчивости с учетом рассеяния энергии при упругих колебаниях на рис. 7.8 ограничены кривыми 1 и 2.

При помощи диаграммы областей устойчивости можно сформулировать требования к фазочастотной характеристике автомата стабилизации, выбрать место расположения гироскопа по длине корпуса.

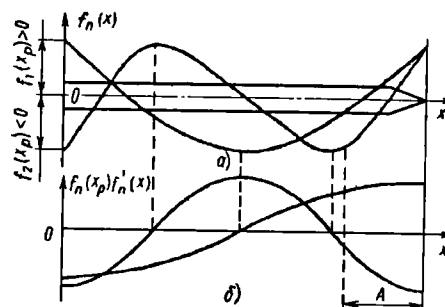


Рис. 7.9

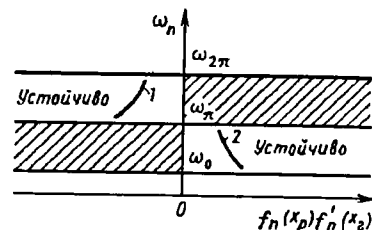


Рис. 7.10

Рассмотрим пример. Требуется выбрать место установки гироскопа по длине корпуса ракеты и сформулировать требования к фазовой характеристике автомата стабилизации при условии, что неравенство (7.7) выполняется для первых двух тонов изгибных колебаний. Дополнительно известно, что органы управления расположены на торцовом шпангоуте хвостового отсека и что $\omega_1 < \omega_\pi$.

На рис. 7.9, а построены формы собственных колебаний и функции $f_n(x_p)f'_n(x_r)$ для первых двух тонов.

На основании условия $\omega_1 < \omega_\pi$ на рис. 7.8 выбираем области устойчивости. Эти области показаны на рис. 7.10.

Для того чтобы параметры объекта регулирования были расположены в области устойчивости, необходимо, чтобы выполнялись следующие условия:

1) для первого тона колебаний корпуса $f_n(x_p)f'_n(x_r) > 0$, для второго тона $f_n(x_p)f'_n(x_r) < 0$;

2) $\omega_0 < \omega_1 < \omega_\pi$, $\omega_\pi < \omega_2 < \omega_{2\pi}$.

Второе условие определяет требования к фазочастотной характеристике автомата стабилизации, первое условие накладывает требования на выбор места установки гироскопа. В рассматриваемом примере зона возможной установки гироскопа (зона А) находится в передней части корпуса ракеты (см. рис. 7.9, б). Принимая во внимание приближенность расчета форм собственных колебаний и, особенно, их производных, зону возможной установки гироскопа следует отодвинуть на некоторое расстояние от узла функции $f_n(x_p)f'_n(x_r)$.

На диаграмме областей устойчивости целесообразно нанести изменение параметров регулируемого объекта по времени полета. На рис. 7.10 это изменение параметров показано кривыми 1 и 2.

Путем изменения фазочастотной характеристики автомата стабилизации и выбором места установки гироскопа не всегда удастся добиться стабилизации упругих колебаний корпуса. Так, невозможно обеспечить стабилизацию одновременно четырех или даже трех тонов упругих колебаний или, если частоты собственных колебаний соседних тонов перекрываются, например, когда частота второго тона колебаний в конце активного участка полета больше частоты третьего тона в начале полета $\omega_{2\max} > \omega_{3\min}$.

В этих случаях обычно применяют амплитудную стабилизацию упругих колебаний, т.е. добиваются уменьшения модуля амплитудно-фазовой характеристики до величины $A_n(\omega_n)A_{AC}(\omega_n) < 1$.

Уменьшить величину $A_n(\omega_n)A_{AC}(\omega_n)$ можно двумя способами: 1) уменьшением динамического коэффициента усиления автомата стабилизации; 2) увеличением рассеяния энергии при упругих колебаниях. Второй способ трудно реализуем, первый сравнительно несложно осуществить на больших частотах. На малых частотах, которые характерны для низших тонов колебаний больших ракет, уменьшить k_{AC} практически невозможно. При необходимости возможна установка узкополосных фильтров.

Если применяется амплитудная стабилизация упругих колебаний, то, чтобы быть уверенным в невыполнении условия (7.7), следует возможно надежнее знать декремент упругих колебаний корпуса ракеты.

7.4. МЕТОДЫ ГАШЕНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

Ставится задача обеспечить такие свойства замкнутой системы, состоящей из упругого корпуса и системы стабилизации, чтобы возникшие колебания всегда затухали.

В разд. 7.3 был рассмотрен вопрос о гашении упругих колебаний при помощи того же автомата стабилизации, который стабилизирует угловое движение ракеты как твердого тела.

Однако способ гашения упругих колебаний при помощи автомата угловой стабилизации не является единственным. На упругие колебания можно воздействовать, вызывая их интенсивное затухание при помощи специальной следящей системы. Для этого применяются датчики, расположение которых зависит от формы упругих колебаний корпуса ракеты и в значительной мере определяет эффективность системы.

Рассмотрим для примера упругие гармонические колебания корпуса по форме первого тона (рис. 7.11, а). Все точки, расположенные выше оси X , имеют сдвиг по фазе на 180° по отношению к точкам, расположенным ниже этой оси. Для каждой точки изогнутой оси стержня можно

построить временную диаграмму, описывающую поперечное движение этой точки.

Выберем на упругой оси корпуса произвольную точку s . Изменение по времени отклонения $y_1(s, t)$ в этой точке показано на рис. 7.11, б; на рис. 7.11, в, г показаны соответственно изменения скорости $\dot{y}_1(s, t)$ и ускорения $\ddot{y}_1(s, t)$. Для гармонических колебаний сдвиг по фазе между ускорением, скоростью и отклонением составляет 90° . Также временные диаграммы можно получить, разместив датчики ускорения, скорости и отклонения в выбранной точке.

Наиболее очевидный способ гашения упругих колебаний корпуса заключается в компенсации их другими колебаниями, имеющими ту же частоту и амплитуду, но противоположными по фазе.

Эффект гашения колебаний таким способом можно практически осуществить несколькими путями. Например, противодействующее колебание можно вызвать, если в качестве чувствительного элемента системы стабилизации использовать акселерометр, сигнал от которого вводится в исполнительный сервомеханизм, управляющий рулями или вектором силы тяги. Если в качестве датчика использовать измеритель скорости, то для получения аналогичного результата сдвиг по фазе должен быть на 90° (или 270°).

Рассмотрим эффект гашения колебаний более подробно. Уравнение для обобщенной координаты q_n , характеризующей упругие колебания корпуса, имеет вид

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = a_n\delta(t).$$

В качестве чувствительных элементов системы стабилизации можно применять одновременно датчики ускорения, скорости и отклонения, сигналы которых используются как сигналы отрицательной обратной связи с определенными коэффициентами усиления k_a , k_v , k . Подставив выражения для этих сигналов в уравнение для q_n , получим дифференциальное уравнение замкнутой системы

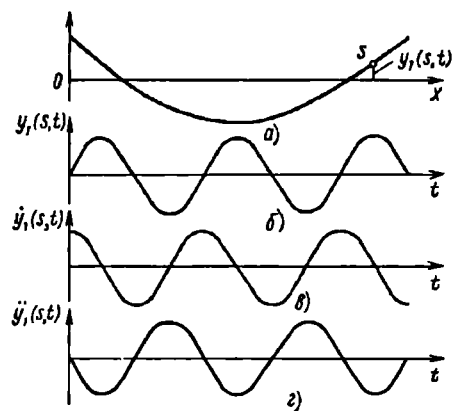


Рис. 7.11

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -k_{q_n} \ddot{q}_n - k_{\dot{q}_n} \dot{q}_n - k_{q_n} q_n.$$

Группируя коэффициенты при одинаковых переменных, получим

$$(1 + k_{q_n}) \ddot{q}_n + (2\xi_n \omega_n + k_{\dot{q}_n}) \dot{q}_n + (\omega_n^2 + k_{q_n}) q_n = 0. \quad (7.9)$$

Уравнение (7.9) можно записать в виде

$$\ddot{q}_n + 2\xi'_n \omega'_n \dot{q}_n + (\omega'_n)^2 q_n = 0, \quad (7.10)$$

где

$$2\xi'_n \omega'_n = \frac{2\xi_n \omega_n + k_{\dot{q}_n}}{1 + k_{q_n}}; \quad (\omega'_n)^2 = \frac{\omega_n^2 + k_{q_n}}{1 + k_{q_n}}. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.10) совпадает с уравнением собственных упругих колебаний корпуса

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0.$$

Однако коэффициенты этого уравнения отличаются от коэффициентов уравнения (7.10). Соотношение между этими коэффициентами определяется формулами (7.11). Частоту собственных колебаний системы ω'_n (7.11) можно увеличить или уменьшить по сравнению с частотой собственных колебаний корпуса ω_n .

Вновь образованная динамическая система имеет и новый относительный коэффициент затухания ξ'_n (7.11), который можно увеличить до критической или сверхкритической величины. Возможность увеличения затухания системы путем добавления сигналов обратной связи дает большие преимущества.

Если при амплитудной стабилизации подавление колебаний осуществляется установкой датчика в местах наименьших сигналов или при помощи фильтров (пассивный метод), то при активном методе датчики помещают в тех местах, где можно получить максимальные сигналы, которые затем используют для уменьшения колебаний, вызвавших эти сигналы. Если датчики выдают сигналы колебаний всех тонов, то место расположения датчиков имеет еще большее значение. Правильно выбрать место расположения датчика можно на основании уравнения (7.9) с учетом форм собственных колебаний корпуса и места расположения управляющих органов на корпусе ракеты.

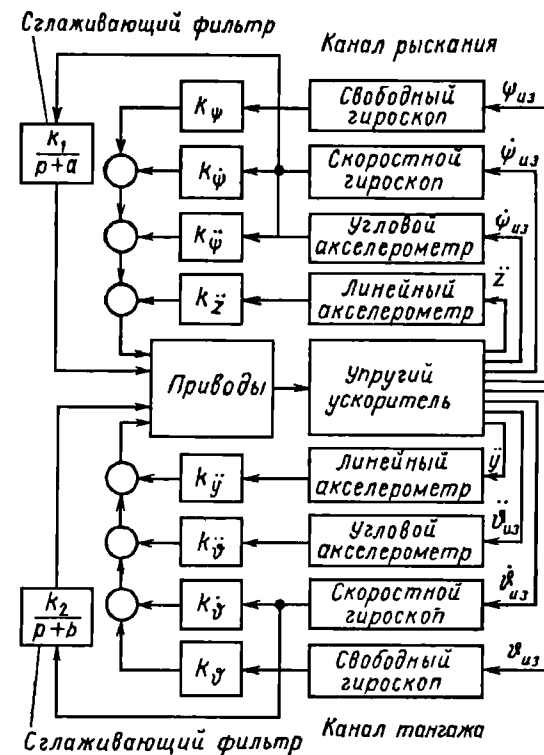


Рис. 7.12

Для выработки сигналов обратной связи можно использовать датчики не только линейных величин y_n , y_n , y_n . С таким же успехом можно применить и датчики угловых величин $\frac{\partial^3 y_n}{\partial x \partial t^2}$; $\frac{\partial^2 y_n}{\partial x \partial t}$; $\frac{\partial y_n}{\partial x}$, так как

$$\ddot{\psi}_{из} = \frac{\partial^3 y_n}{\partial x \partial t^2} = f'_n \ddot{q}_n; \quad \dot{\psi}_{из} = \frac{\partial^2 y_n}{\partial x \partial t} = f'_n \dot{q}_n; \quad \psi_{из} = \frac{\partial y_n}{\partial x} = f'_n q_n.$$

На рис. 7.12 показана структурная блок-схема стабилизации упругих поперечных колебаний большой ракеты — ускорителя, в которой наряду с линейными сигналами используются и угловые.

Активный метод может предусматривать установку дополнительных органов управления. На корпус ракеты устанавливают управляющий реактивный двигатель (верньерный) с небольшой тягой. В том же сечении, где закреплен верньерный двигатель, устанавливают скоростной гироскоп (или датчик угловой скорости – ДУС), измеряющий угловую скорость ракеты. Подвижное сопло верньерного двигателя (или вектор тяги, действующий по нормали к оси ракеты) управляется по сигналу скоростного гироскопа, пропорциональному угловой скорости ракеты. Таким образом, в контур стабилизации вводится дополнительная обратная связь в виде верньерного двигателя и скоростного гироскопа, при помощи которой создается поперечная сила, пропорциональная угловой скорости поперечных колебаний корпуса ракеты.

Надлежащим выбором места установки скоростного гироскопа можно достичь того, что поперечная сила будет гасить упругие колебания. Гашение этих колебаний будет тем эффективнее, чем больше коэффициент

$$R_B f_n(x_B) f'_n(x_B) / m_n,$$

где R_B – сила тяги верньерного двигателя; $f_n(x_B)$, $f'_n(x_B)$ – значения формы собственных колебаний и угла наклона касательной к ней в месте установки верньерного двигателя и скоростного гироскопа; m_n – приведенная масса корпуса при колебаниях по форме n -го тона.

Применительно к уравнению (7.10) здесь увеличивается только относительный коэффициент затухания.

Описанный способ активного подавления упругих колебаний основан на определенных фазовых соотношениях, реализация которых связана со значительными трудностями. Однако в системах стабилизации иногда целесообразно использовать как активные, так и пассивные методы.

7.5. УПРУГИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ

В разд. 7.3 было показано, что обеспечить устойчивость одновременно нескольких тонов упругих колебаний корпуса затруднительно. Во всяком случае, запасы устойчивости для некоторых тонов колебаний могут быть очень небольшими, поэтому даже при малом отклонении параметров системы от номинальных значений возможно возникновение неустойчивого движения.

Пусть в случае неустойчивости амплитудно-фазовая характеристика имеет вид, показанный на рис. 7.13 кривой 1. При возрастании амплитуд колебаний будут проявляться нелинейные свойства системы. Будет уменьшаться эквивалентный коэффициент усиления рулевой машины,

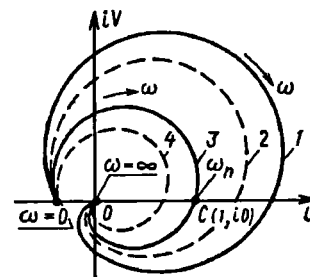


Рис. 7.13

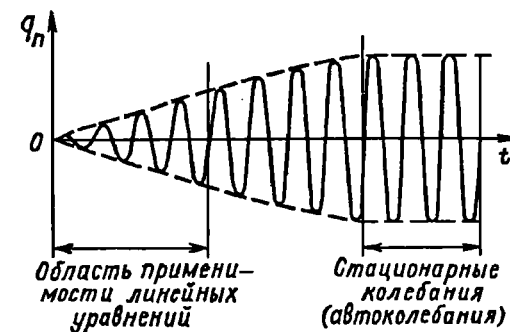


Рис. 7.14

чему соответствует амплитудно-фазовая характеристика, изображенная кривой 2.

Пусть амплитуде командного тона i_n (см. рис. 4.17) соответствует годограф разомкнутой цепи, показанный на рис. 7.13 кривой 3. Годограф проходит через точку $C(1, i0)$, и это показывает, что система находится на границе устойчивости.

Можно убедиться в том, что колебания с амплитудой i_n являются устойчивыми периодическими колебаниями, которые называются автоколебаниями. В самом деле, если в колеблющейся системе вызвать небольшое увеличение амплитуды колебаний, то при $i > i_n$ эквивалентный коэффициент усиления рулевой машины уменьшится и годограф разомкнутой цепи будет представлен кривой 4. Этот годограф соответствует устойчивой системе, колебания которой будут затухать до тех пор, пока амплитуда командного тона не станет равной i_n . Годограф снова будет проходить через точку $C(1, i0)$; система возвращается к исходному невозмущенному движению.

Если в системе, колеблющейся с амплитудой i_n , вызвать небольшое уменьшение амплитуды колебаний, то годографом станет кривая 2, которой соответствует неустойчивое движение. Амплитуды колебаний будут возрастать до тех пор, пока снова не достигнут величины i_n , которой соответствует годограф, показанный кривой 3; система вновь возвращается к исходному движению.

Следовательно, колебательное движение, характеризуемое на комплексной плоскости точкой $C(1, i0)$, является устойчивым. Это и есть режим автоколебаний. Частота автоколебаний практически мало отличается от частоты собственных упругих колебаний корпуса ракеты.

Протекание процесса колебаний во времени показано на рис. 7.14.

Автоколебания происходят в замкнутой системе, состоящей из корпуса ракеты и автомата стабилизации. Источником энергии в данном случае является автомат стабилизации. Все звенья динамической системы совершают колебания с одной и той же частотой ω_n , но с разными амплитудами. Амплитуде командного тона i_n соответствует амплитуда колебаний управляющего органа δ_n .

Частоту и амплитуды автоколебаний определяют только из решения нелинейных уравнений замкнутой системы. Получить решение можно методом гармонической линеаризации, на ЭВМ или при помощи моделирующих установок, в схему с которыми включается натурный автомат стабилизации. В последнем случае свойства такого автомата стабилизации учитываются наиболее полно.

Если амплитуды автоколебаний невелики, так что линейное уравнение (5.38) можно считать справедливым, то амплитуду упругих колебаний корпуса можно вычислить из этого уравнения, положив в нем $\delta = \delta_n \sin \omega_n t$. Получим

$$\ddot{q}_n + c_{q_n q_n} \dot{q}_n + c_{q_n q_n} q_n = a_n \delta_n \sin \omega_n t.$$

Естественно, точность определения амплитуды $q_n^{(0)}$ в значительной мере зависит от точности определения ω_n .

При упругих автоколебаниях канал автомата угловой стабилизации загружается сигналами, которые по отношению к сигналам стабилизации ракеты как твердого тела можно рассматривать как помеху. Так как характеристики автомата стабилизации нелинейны, то эта помеха может увеличивать постоянные времени и снижать коэффициент усиления автомата стабилизации, что приведет к нарушению устойчивости по другим степеням свободы.

Упругие автоколебания вызывают поперечные инерционные нагрузки на корпус и поэтому вредны. Но если амплитуды и частоты автоколебаний невелики, то инерционные нагрузки будут малыми и, следовательно, не опасными для прочности корпуса. Такие автоколебания можно допустить и это будет разумнее, чем, преодолевая огромные трудности, обеспечивать сложными средствами устойчивость упругих колебаний. Однако такое решение нужно принимать в каждом случае отдельно, руководствуясь соотношениями прочности конструкции и точности полета.

Глава VIII

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЮЩИХ СИЛ И УПРУГОСТИ ПОДВЕСКИ ПОВОРОТНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

8.1. ВЛИЯНИЕ ОСЕВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

В гл. V и VI формы и частоты собственных колебаний ракеты определялись по схеме неоднородного стержня. Здесь мы проведем дальнейшую детализацию расчетной схемы. Примем в качестве схемы для изучения поперечных колебаний корпуса ракеты прямой неоднородный упругий стержень со следящей сжимающей силой на конце. Упругий стержень со следящей силой представляет собой неконсервативную систему. В результате воздействия сжимающей силы динамические характеристики стержня (частоты и формы собственных колебаний) могут несколько изменяться. При силе P , превышающей некоторое критическое значение, может возникнуть динамическая неустойчивость.

На рис. 8.1 показан неоднородный стержень в изогнутом состоянии, нагруженный осевой следящей силой P ; там же показан вырезанный в сечении x элемент стержня длиной dx с действующими на него силами. Сила трения принята пропорциональной первой степени скорости. Здесь $m(x)$, $h(x)$ – погонные масса и коэффициент вязкого трения; $q(x, t)$ – внешняя распределенная сила; N – нормальная сила в поперечном сечении; g – ускорение, характеризующее интенсивность массовых сил в направлении оси x .

На движение центра масс стержня не будем налагать никаких ограничений, величины $\partial y / \partial x$, $\partial^2 y / \partial x^2$ будем считать малыми.

Применяя принцип Даламбера, составим уравнения равновесия для показанного на рис. 8.1 элемента стержня длиной dx . Спроектируем силы на неподвижные оси координат X , Y и возьмем сумму моментов всех сил относительно центра массы элемента. Учитывая величины первого порядка малости, получим

$$-\frac{\partial N(x)}{\partial x} dx + m(x) g^* dx = 0;$$

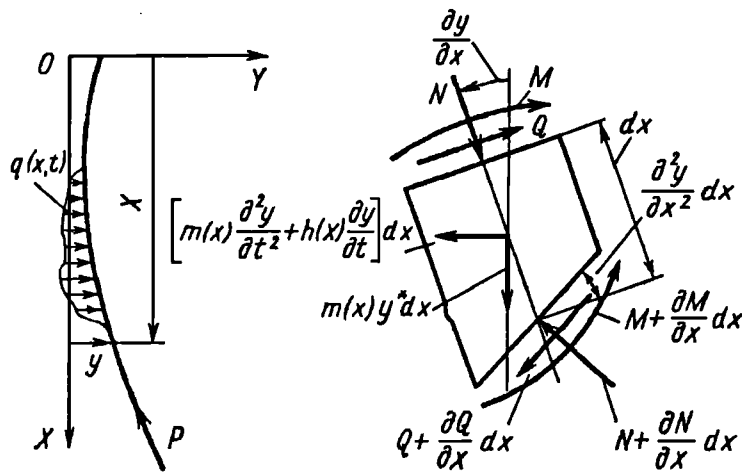


Рис. 8.1

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} dx - \frac{\partial N(x)}{\partial x} dx \frac{\partial y}{\partial x} - N(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx - \left[m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial y}{\partial t} \right] dx + q(x, t) dx = 0; \quad (8.1)$$

$$(\partial M / \partial x) dx + Q dx = 0.$$

Принимая во внимание, что

$$EJ(x) (\partial^2 y / \partial x^2) = M,$$

из второго и третьего уравнений (8.1) найдем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q(x, t). \quad (8.2)$$

Краевыми условиями для нормальной силы будут

$$N(0) = 0; \quad N(l) = P. \quad (8.3)$$

Следовательно,

$$N(x) = g^* \int_0^x m(x) dx; \quad g^* = P/m; \quad m = \int_0^l m(x) dx. \quad (8.4)$$

Отсюда, в частности, видно, что величина ускорения g^* , характеризующая интенсивность массовых сил, не изменяется при малых изгибных колебаниях стержня.

Уравнение (8.2), выражающее поперечные колебания стержня, не зависит от первого уравнения (8.1), которое характеризует продольное движение. Другими словами, малые поперечные колебания стержня можно рассматривать независимо от продольного движения, полагая, что на стержень в направлении оси X действует ускорение массовых сил $g^* = P/m$. Проекция силы P на ось X уравновешивается силами инерции стержня, т.е. $P = mg^*$.

При $h(x)/m(x) = 2\varepsilon = \text{const}$ и $q(x, t) = 0$ возможно разделение переменных, и общее решение уравнения (8.2) можно представить в виде

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) q_n(t), \quad (8.5)$$

где $\varphi_n(x) q_n(t)$ являются частными решениями уравнения (8.2).

Подставляя (8.5) в (8.2) и разделяя переменные, получим

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0 \quad (\varepsilon_n = \xi_n \omega_n); \quad (8.6)$$

$$[EJ(x) \varphi_n'']' + [N(x) \varphi_n']' - \omega_n^2 m(x) \varphi_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (8.7)$$

Функции $\varphi_n(x)$ должны удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\varphi_n''(0) = 0, \quad [EJ(x) \varphi_n''(x)]'_{x=0} = 0; \quad (8.8)$$

$$\varphi_n''(l) = 0, \quad [EJ(x) \varphi_n''(x)]'_{x=l} = 0. \quad (8.9)$$

Функции $\varphi_n(x)$, являющиеся решениями уравнения (8.7) и удовлетворяющие краевым условиям (8.9), неортогональны. В самом деле, зафиксировав в уравнении (8.7) индекс n , умножим это уравнение на функцию $\varphi_m(x)$,

причем $n \neq m$, и проинтегрируем его по x в пределах от 0 до l . Запишем уравнение (8.7) для индекса m , умножим его на функцию $\varphi_n(x)$ и также проинтегрируем по x на отрезке $[0, l]$. Вычитая из первого равенства второе, получим

$$(\omega_n^2 - \omega_m^2) \int_0^l m(x) \varphi_n \varphi_m dx = P[\varphi_n'(l) \varphi_m(l) - \varphi_m'(l) \varphi_n(l)]$$

$$(m, n = 1, 2, \dots; n \neq m).$$

Силы инерции, возникающие при колебаниях по формам $\varphi_n(x)$, несамоуравновешены. В этом можно убедиться, если проинтегрировать уравнения (8.7) по x на отрезке $[0, l]$. Принимая во внимание условия (8.3), (8.8) и (8.9), найдем

$$\omega_n^2 \int_0^l m(x) \varphi_n(x) dx = P \varphi_n'(l).$$

Силы инерции уравниваются составляющей силы P (ее проекцией на ось Y).

Рассмотрим уравнение (8.7) для однородного стержня. Приведем его к виду

$$v_n^{IV} + \beta(\xi v_n')' - \delta_n^2 v_n = 0, \quad (8.10)$$

где

$$\beta = \frac{Pl^2}{EJ_0}; \quad \delta_n^2 = \omega_n^2 \frac{m_0 l^4}{EJ_0}; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad v_n = \frac{\varphi_n}{l}.$$

Приведем результаты решения уравнения (8.10), выполненного В.И. Феодосьевым:

$$v_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \xi^k.$$

Из краевых условий следует, что

$$C_2 = C_3 = 0; \quad \sum_{k=3}^{\infty} C_k k(k-1)(k-2) = 0; \quad (8.11)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} C_k k(k-1) = 0.$$

Для определения коэффициентов ряда справедлива рекуррентная формула

$$C_k = \frac{\Phi(\delta_n, \beta)}{k(k-1)(k-2)(k-3)},$$

$$\text{где } \Phi(\delta_n, \beta) = \delta_n^2 C_{k-4} - \beta C_{k-3}(k-3)^2.$$

Коэффициенты C_0 и C_1 остаются неопределенными. Они входят линейно в выражения (8.11), которые можно переписать в виде

$$A_0 C_0 + A_1 C_1 = 0; \quad B_0 C_0 + B_1 C_1 = 0.$$

Условие существования ненулевых решений дает

$$A_0 B_1 - A_1 B_0 = 0.$$

На рис. 8.2 показана зависимость формы и безразмерной частоты собственных колебаний первого и второго тонов от величины параметра β , полученная расчетом на ЭВМ. Безразмерная частота колебаний δ связана с размерной частотой собственных колебаний соотношением

$$\omega_n = \delta_n \sqrt{\frac{EJ_0}{m_0 l^4}}.$$

При $\beta = 0$ для первого тона колебаний $\delta_1 = 4,73^2 = 22,37$; для второго тона $\delta_2 = 7,85^2 = 61,62$. Критическое состояние наступает при $\beta_{кр} = 109,69$, что соответствует критической силе, превышающей Эйлерову критическую силу

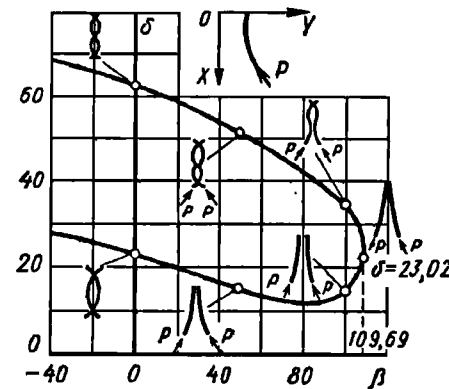


Рис. 8.2

$P_{кр} = \pi^2 EJ_0 / l^2$ для стержня, шарнирно опертого и подверженного сжатию осевой сосредоточенной силой, примерно в 11 раз, а шарнирно опертого и нагруженного собственным весом стержня – примерно в 18,6 раз.

Дальнейшее увеличение силы P приводит к тому, что уравнение для вычисления собственных частот имеет комплексный корень. Возникает неустойчивое колебательное движение.

Заметим, что для ракет коэффициент β обычно не превышает нескольких единиц, поэтому явление неустойчивости, возникающее при $\beta_{кр} = 109,69$, представляет лишь теоретический интерес.

По аналогии с выражением (6.46) из функции $\varphi_n(x)$ можно выделить линейную функцию x так, чтобы оставшаяся часть $f_n(x)$ была самоуравновешенной формой, характеризующей изгибные колебания:

$$\varphi_n(x) = y_{C_n} + \bar{\varphi}_n(x - x_C) + f_n(x);$$

$$\int_0^l m(x) f_n(x) dx = 0;$$

$$\int_0^l \bar{m}(x) f_n(x) (x - x_C) dx = 0.$$

Чтобы последние два равенства были справедливы, числа y_{C_n} и $\bar{\varphi}_n$ нужно определять из следующих уравнений:

$$-\omega_n^2 y_{C_n} m = P \varphi_n'(l) = P[\bar{\varphi}_n' + f_n'(l)];$$

$$-\omega_n^2 \bar{\varphi}_n I = P[f_n'(l)(l - x_C) - f_n(l)].$$

На рис. 8.3 приведено сравнение графиков функций $f_n(x)$ собственных колебаний первого и второго тонов однородного стержня при разных значениях параметра β .

При малых значениях параметра β функции $f_n(x)$ первых тонов колебаний стержня, находящегося под воздействием следящей силы, мало отличаются от форм собственных колебаний без следящей силы ($\beta = 0$). Расчеты показывают, что частоты собственных колебаний можно считать уменьшающимися пропорционально β . Поэтому в качестве грубого приближения для первых двух тонов колебаний можно рекомендовать

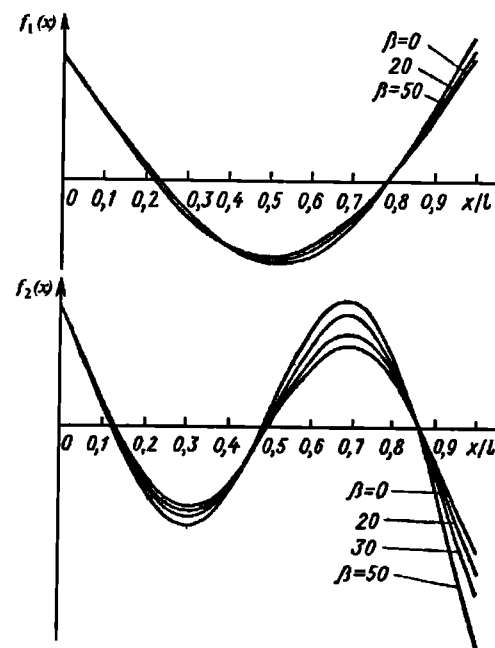


Рис. 8.3

использовать формы собственных колебаний стержня без следящей силы, а влияние следящей силы на собственную частоту при $\beta \leq 20$ можно оценить линейной добавкой

$$\omega_n = (1 - \mu_n^{(0)} \beta) \omega_n^{(0)}; \quad \beta = Pl^2 / (EJ_0) \quad 0 \leq \beta \leq 20. \quad (8.12)$$

Здесь $\omega_n^{(0)}$ – частота собственных колебаний, вычисленная при $P = 0$; соответственно $\mu_1^{(0)} \approx 0,007$, $\mu_2^{(0)} \approx 0,01$. Величину $l^2 / (EJ_0)$, входящую в параметр β , можно приближенно вычислять, разбивая стержень на k участков с постоянными массой m_i и изгибной жесткостью EJ_i . Тогда получим

$$\frac{l^2}{EJ_0} = \left(\sum_{i=1}^k \frac{l_i}{\sqrt{EJ_i}} \right)^2.$$

Применение форм собственных колебаний стержня, не нагруженного следящей силой, к решению задачи о колебаниях стержня, нагруженного следящей силой, будет рассмотрено в следующем разделе.

8.2. ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ОСЕВОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИЛЫ НА ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА БУБНОВА – ГАЛЕРКИНА

Как уже было отмечено в разд. 8.1, функции $\varphi_n(x)$, характеризующие поперечные колебания стержня с осевой следящей силой, неортогональны и поэтому их определение является достаточно трудоемкой задачей.

В этом разделе мы изложим приближенный метод Бубнова – Галеркина для решения задачи о вынужденных поперечных колебаниях неоднородного стержня с учетом следящей силы.

Вынужденные поперечные движения $y(x, t)$, определяемые уравнением (8.2), представим в виде ряда

$$y(x, t) = y_C(t) + \vartheta(t)(x - x_C) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)q(t), \quad (8.13)$$

где $y_C(t)$ и $\vartheta(t)$ – обобщенные координаты стержня как твердого тела; $q_n(t)$ – обобщенная координата, соответствующая функции $f_n(x)$; x_C – координата центра масс стержня; x – координата произвольного поперечного сечения стержня.

В качестве функций $f_n(x)$ используются формы собственных колебаний стержня со свободными концами без следящей силы ($P = 0$). Таким образом, функции $f_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению (5.8) и крайевым условиям (5.9) и (5.10). В уравнении (5.8) ω_n – частота собственных колебаний n -го тона стержня со свободными концами при $P = 0$.

Заметим, что все краевые условия (8.8) и (8.9) удовлетворяются каждой из функций, входящих в ряд (8.13), что является необходимым условием применения метода Бубнова – Галеркина. При помощи этого метода мы от уравнения (8.2) переходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, при решении которых обычно используется конечное число членов ряда (8.13).

При подстановке ряда (8.13) в уравнение (8.2) неизбежно будет иметь место некоторая ошибка, поскольку выражение (8.13) не является решением уравнения (8.2). В соответствии с методом Бубнова – Галеркина эту ошибку следует умножить на каждую из аппроксимирующих функций из ряда (8.13), проинтегрировать по x в пределах от 0 до l и значение интеграла приравнять нулю. В результате получим

следующую систему уравнений:

$$\int_0^l \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial y}{\partial t} - q(x, t) \right\} a_k(x) dx = 0, \quad (8.14)$$

где h – коэффициент трения; $k = -1, 0, n$, причем $a_{-1}(x) = 1$; $a_0(x) = x - x_C$; $a_n(x) = f_n(x)$; $n = 1, 2, \dots, n^0$.

В выражения, стоящие в фигурных скобках, вместо $y(x, t)$ следует подставить конечное число членов ряда (8.13).

Чтобы облегчить получение окончательных уравнений, выпишем некоторые промежуточные результаты интегрирования:

$$\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] dx = 0; \quad \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] (x - x_C) dx = 0.$$

Интегрируя по частям и учитывая краевые условия (5.9) и (5.10), находим

$$\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] f_n(x) dx = q_n(t) \int_0^l EJ(x) (f_n'')^2 dx.$$

Будем учитывать силы вязкого трения, возникающие только при упругих колебаниях стержня; кроме того, примем $h(x)/m(x) = 2\epsilon$. Получим

$$\int_0^l h(x) \frac{\partial y}{\partial t} dx = \int_0^l h(x) \frac{\partial y}{\partial t} (x - x_C) dx = 0;$$

$$\int_0^l h(x) \frac{\partial y}{\partial t} f_n(x) dx = \dot{q}_n \int_0^l h(x) f_n^2 dx = \dot{q}_n h_n;$$

$$\int_0^l m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} (x - x_c) dx = \ddot{\vartheta} \int_0^l m(x) (x - x_c)^2 dx = \ddot{\vartheta} I;$$

$$\int_0^l m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = \ddot{y}_c \int_0^l m(x) dx = \ddot{y}_c m;$$

$$\int_0^l m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} f_n(x) dx = \ddot{q}_n \int_0^l m(x) f_n^2 dx = \ddot{q}_n m_n.$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание равенства (8.3) и (8.4), найдем

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] dx = P \left[\ddot{\vartheta} + \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(l) q_n \right],$$

$$\int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] (x - x_c) dx = P \sum_{n=1}^{n^{(0)}} q_n [f'_n(l) (l - x_c) - f_n(l)],$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] f_n(x) dx &= P f_n(l) \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(l) q_n - \\ &- \frac{P}{m} \int_0^l f'_n(x) \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(x) q_n \int_0^x m(x) dx^2. \end{aligned}$$

Объединяя все промежуточные результаты интегрирования и вводя обозначения, получим следующие $(n^{(0)} + 2)$ обыкновенных дифференциальных уравнения для обобщенных координат y_c, ϑ, q_n :

$$m \ddot{y}_c + P \ddot{\vartheta} + P \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(l) q_n = \int_0^l q(x, t) dx;$$

$$I \ddot{\vartheta} + P \sum_{n=1}^{n^{(0)}} A_n q_n = \int_0^l q(x, t) (x - x_c) dx; \quad (8.15)$$

$$m_n \ddot{q}_n + h_n \dot{q}_n + k_n q_n + P \sum_{m=1}^{n^{(0)}} B_{nm} q_m = \int_0^l q(x, t) f_n(x) dx \quad (n, m=1, 2, \dots, n^{(0)}).$$

Здесь $A_n = f'_n(l) (l - x_c) - f_n(l)$;

$$B_{nm} = f_n(l) f'_m(l) - \frac{1}{m} \int_0^l f'_n(x) f'_m(x) \int_0^x m(x) dx^2; \quad n \neq m; \quad (8.16)$$

$$m_n = \int_0^l m(x) f_n^2 dx - \text{приведенная масса};$$

$$h_n = \int_0^l h(x) f_n^2 dx - \text{коэффициент приведенного трения};$$

$$k_n = \int_0^l EJ(x) (f_n'')^2 dx + P f'_n(l) f_n(l) - \frac{P}{m} \int_0^l (f_n')^2(x) \int_0^x m(x) dx^2 \quad (8.17)$$

— приведенная жесткость.

Формулы для коэффициентов приведенной массы такие же, как и в случае стержня, не нагруженного осевой следящей силой. Формулы для коэффициентов приведенной жесткости оказываются различными. В случае стержня, нагруженного осевой следящей силой, коэффициент приведенной жесткости k_n зависит дополнительно от работы составляющей силы $P f'_n(l)$ на перемещении $f_n(l)$ и работы (со знаком минус) осевых сжимающих сил на перемещениях, вызванных поперечными прогибами:

$$\frac{P}{m} \int_0^l (f_n')^2(x) \int_0^x m(x) dx^2 = \int_0^l N(x) (f_n')^2 dx.$$

Как показывают расчеты, работа сжимающих сил по величине больше, чем работа поперечной составляющей, поэтому частота собственных поперечных колебаний стержня при нагружении осевой следящей силой ниже собственной частоты колебаний стержня, не нагруженного следящей силой.

Правые части уравнений (8.15) представляют собой обобщенные силы, действующие на стержень. Сила P не входит в обобщенные силы, а является в данном случае частью системы стержня со следящей силой.

Уравнения упругих колебаний в (8.15) не зависят от первого и второго уравнений и образуют систему из $n^{(0)}$ уравнений. Эту систему более компактно можно представить одним матричным уравнением

$$[\ddot{q}_k] + [H_{jk}][\dot{q}_k] + [G_{jk}][q_k] = [F_k], \quad (8.18)$$

$$\text{где } [q_k] = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n^{(0)} \end{pmatrix}; \quad F_k = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ f_n^{(0)} \end{pmatrix},$$

$[H_{jk}]$ и $[G_{jk}]$ — квадратные матрицы порядка $n^{(0)}$. Выражения для элементов матриц $[H_{jk}]$, $[G_{jk}]$ и $[F_k]$ имеют вид

$$H_{jk} = \frac{h_j}{m_j} \delta_{jk} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n^{(0)});$$

$$G_{jk} = \frac{k_j}{m_j} \delta_{jk} + \frac{P}{m} \left[f_j(l) f_k'(l) - \frac{1}{m} \int_0^l f_j'(x) f_k'(x) \int_0^x m(x) dx^2 \right]$$

$$(j, k = 1, 2, \dots, n^{(0)});$$

$$F_k = \frac{1}{m_k} \int_0^l q(x, t) f_k(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots, n^{(0)}).$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера ($\delta_{jk} = 1$ при $j = k$; $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$).

Разрешив систему (8.18) и подставив результаты решения в первое и второе уравнения (8.15), найдем поперечное ускорение центра масс стержня y_C и угловое ускорение $\ddot{\theta}$.

При помощи метода Бубнова — Галеркина можно проанализировать частоты собственных колебаний системы, состоящей из стержня со следящей силой. Характеристическое уравнение для определения частот собственных колебаний будет иметь вид

$$\det \{ [G_{jk}] - \omega^2 [E] \} = 0, \quad (8.19)$$

где E — единичная матрица.

Детальный анализ уравнения (8.19) показывает, что при $q(x, t) = 0$ для всех значений $P \neq 0$ существуют две формы собственных колебаний системы с нулевой частотой. Одной из таких форм соответствует поступательное движение под действием силы P стержня как твердого тела, наклоненного к оси X . Другой форме соответствует вращательное движение стержня как твердого тела с постоянной начальной угловой скоростью. Так что система неустойчива независимо от того, устойчивы или неустойчивы упругие колебания стержня. В дальнейшем применительно к управляемым ракетам будем полагать, что устойчивость движения стержня как твердого тела всегда обеспечивается автоматом стабилизации, поэтому главное внимание будет уделено устойчивости упругих колебаний стержня.

На рис. 8.4 показаны результаты решения уравнения (8.19) для нескольких членов ряда $f_n(x)$ $n^{(0)} = 1; 2; 3; 4; 5$, причем по оси ординат отложена величина $\omega = \omega_n / \omega_1^{(0)}$, где $\omega_1^{(0)}$ — собственная частота колебаний первого тона при $\beta = 0$. Если принять значение $n^{(0)} = 1$, то основная и единственная частота собственных колебаний обращается в нуль при $\beta = Pl^2/(EJ_0) = 81,4$. При $n^{(0)} \geq 2$ первый корень, соответствующий неустойчивости, появляется в результате слияния первой и второй характеристических частот.

Из рис. 8.4 следует, что формы собственных колебаний, отвечающие уравнениям (5.8) — (5.10), дают хорошие результаты при определении

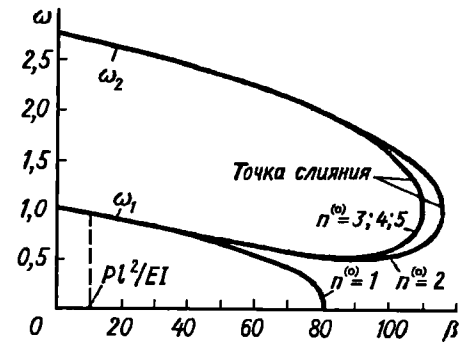


Рис. 8.4

частот первого и второго тона собственных колебаний стержня, нагруженного следящей силой. Для значений параметра $\beta \leq 20$ достаточно взять всего лишь один или два члена ряда. Эти результаты хорошо согласуются с выводами предыдущего параграфа.

Метод Бубнова – Галеркина без предварительного обоснования был применен при выводе уравнений в гл. V.

8.3. УРАВНЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА РАКЕТЫ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ПОДВЕСКИ ПОВОРОТНОГО ДВИГАТЕЛЯ

Если управление и стабилизация осуществляются поворотом основных двигателей, то инерционные характеристики этих двигателей будут оказывать влияние на динамические свойства ракеты. Чтобы выявить динамические свойства ракеты, найдем уравнения поперечных колебаний упругого корпуса ракеты с поворотным двигателем. Положим, что двигатель закреплен на заднем срезе ракеты и является жестким телом. Корпус ракеты имитируется в данном случае упругим неоднородным стержнем длиной l , на правом конце которого шарнирно подвешено и фиксировано пружиной твердое тело (двигатель). Схема показана на рис. 8.5, где $m_{дв}$ – масса поворотного двигателя; $l_{дв}$ – расстояние от центра масс двигателя до его оси вращения (ось вращения расположена впереди центра масс); $I_{дв}$ – момент инерции двигателя относительно оси вращения; $k_{дв}$ – коэффициент угловой жесткости крепления двигателя к корпусу при застопоренной рулевой машине; P_y – сила тяги управляющего поворотного двигателя; P – полная сила тяги двигателей; δ – угол поворота двигателя относительно касательной к изогнутой оси корпуса

в точке подвеса; l – длина ракеты без двигателя; $h_{дв}$ – коэффициент вязкого трения в подвеске двигателя.

Уравнение поперечных колебаний стержня, нагруженного следящей силой, имеет вид

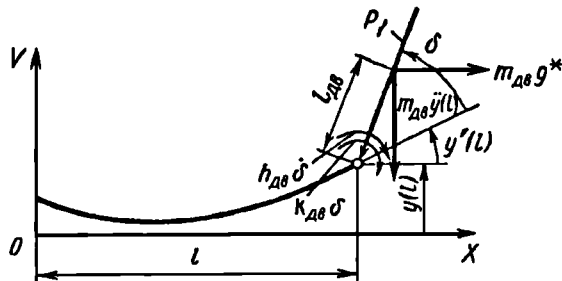


Рис. 8.5

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q(x, t).$$

В рассматриваемом случае к правому концу упругого стержня присоединено твердое тело. Силы инерции, возникающие от движения твердого тела совместно со стержнем при $\delta = 0$, включим в уравнение движения стержня. Воспользуемся для этого дельта-функцией Дирака Δ (см. стр. 171). Получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \\ & - I_{дв} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=l} \Delta'(x-l) + m_{дв} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + l_{дв} \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \right) \Big|_{x=l} \Delta(x-l) - \\ & - m_{дв} l_{дв} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=l} \Delta'(x-l) + h(x) \frac{\partial y}{\partial t} = q_{\Sigma}(x, t). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Силы, обусловленные отклонением твердого тела на угол δ , а также составляющую $P_y \delta$, будем считать внешними силами, которые в уравнении (8.20) включены в $q_{\Sigma}(x, t)$.

Применив дельта-функцию Дирака, получим

$$\begin{aligned} q_{\Sigma}(x, t) = & q(x, t) - P_y \delta \Delta(x-l) - m_{дв} l_{дв} \ddot{\delta} \Delta(x-l) + \\ & + I_{дв} \ddot{\delta} \Delta'(x-l) + m_{дв} l_{дв} g^* \delta \Delta'(x-l), \end{aligned} \quad (8.21)$$

где $q(x, t)$ – погонная аэродинамическая сила; g^* – ускорение, характеризующее интенсивность массовых сил в направлении оси X. Силы Кориолиса здесь не учитываем.

К уравнению (8.20) применим метод Бубнова – Галеркина. Представим решение в виде ряда

$$y(x, t) = y_c(t) - \vartheta(t)(x - x_c) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t),$$

где $y_c(t)$, $\vartheta(t)$ – обобщенные координаты жесткого стержня; $q_n(t)$ –

обобщенная координата упругих колебаний; $f_n(x)$ — форма собственных колебаний стержня со свободными концами при отсутствии силы тяги; x_C — координата центра масс стержня без твердого тела (без двигателя).

Выполнив преобразования, необходимые для получения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по методу Бубнова — Галеркина, получим

$$\begin{aligned} m^* \ddot{y}_C + P \dot{\theta} + c_{y\delta} \dot{\theta} + P \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(l) q_n + \sum_{n=1}^{n^{(0)}} c_{yq_n} \dot{q}_n + \\ + P_Y \dot{\delta} + m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} \ddot{\delta} = \int_0^l q(x, t) dx; \\ I^* \ddot{\theta} + A_{\theta y} \ddot{y}_C + P \sum_{n=1}^{n^{(0)}} A_{\theta q_n} q_n + \sum_{n=1}^{n^{(0)}} A_{\theta \dot{q}_n} \dot{q}_n + \\ + A_{\theta \delta} \dot{\delta} + A_{\theta \ddot{\delta}} \ddot{\delta} = \int_0^l q(x, t) (x - x_C) dx; \end{aligned} \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} m_n^* \ddot{q}_n + h_n \dot{q}_n + k_n q_n + P \sum_{m=1}^{n^{(0)}} B_{q_n q_m} q_m + \sum_{m=1}^{n^{(0)}} B_{q_n \dot{q}_m} \dot{q}_m + \\ + B_{q_n y} \ddot{y}_C + B_{q_n \dot{\theta}} \dot{\theta} + B_{q_n \delta} \dot{\delta} + B_{q_n \ddot{\delta}} \ddot{\delta} = \int_0^l q(x, t) f_n dx \end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, \dots, n^{(0)}),$$

где $m^* = m_{\text{дв}} + \int_0^l m(x) dx$ — масса стержня и твердого тела;

$$I^* = \int_0^l m(x) (x - x_C)^2 dx + I_{\text{дв}} + m_{\text{дв}} (l - x_C)^2 + 2m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} (l - x_C)$$

— момент инерции стержня и твердого тела относительно поперечной оси, проходящей через центр масс стержня;

$$m_n^* = \int_0^l m(x) f_n^2 dx + m_{\text{дв}} f_n^2(l) + 2m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} f'_n(l) f_n(l) + I_{\text{дв}} (f'_n)^2(l)$$

— приведенная масса стержня и твердого тела.

Коэффициенты h_n и k_n определяются по формулам (8.17), а $A_{\theta q_n} = A_n$, $B_{q_n q_m} = B_{nm}$ — по формуле (8.16). Для остальных коэффициентов уравнений (8.22) приняты следующие обозначения:

$$c_{y\delta} = m_{\text{дв}} (l - x_C + l_{\text{дв}}); \quad c_{yq_n} = m_{\text{дв}} [f_n(l) + l_{\text{дв}} f'_n(l)];$$

$$A_{\theta y} = m_{\text{дв}} (l - x_C + l_{\text{дв}});$$

$$A_{\theta q_n} = I_{\text{дв}} f'_n(l) + m_{\text{дв}} [(l - x_C + l_{\text{дв}}) f_n(l) + (l - x_C) l_{\text{дв}} f'_n(l)],$$

$$A_{\theta \delta} = P_Y (l - x_C) + m_{\text{дв}} g^* l_{\text{дв}}; \quad A_{\theta \dot{\delta}} = I_{\text{дв}} + m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} (l - x_C);$$

$$B_{q_n q_m} = m_{\text{дв}} [f_m(l) f'_n(l) + l_{\text{дв}} f'_m(l) f'_n(l) + l_{\text{дв}} f'_m(l) f_n(l)] + I_{\text{дв}} f'_m(l) f'_n(l);$$

$$B_{q_n y} = m_{\text{дв}} [f_n(l) + l_{\text{дв}} f'_n(l)];$$

$$B_{q_n \dot{\theta}} = I_{\text{дв}} f'_n(l) + m_{\text{дв}} [(l - x_C + l_{\text{дв}}) f_n(l) + (l - x_C) l_{\text{дв}} f'_n(l)];$$

$$B_{q_n \delta} = P_Y f_n(l) + m_{\text{дв}} g^* l_{\text{дв}} f'_n(l);$$

$$B_{q_n \ddot{\delta}} = I_{\text{дв}} f'_n(l) + m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} f_n(l),$$

где $f_n(l)$, $f'_n(l)$ — значения формы собственных колебаний и ее производной

в точке подвеса двигателя; $(l - x_C)$ – расстояние между точкой подвеса двигателя и центром масс стержня.

Составим уравнение угловых колебаний двигателя относительно оси вращения. Момент трения, возникающий при отклонениях двигателя, примем пропорциональным угловой скорости $\dot{\delta}$, коэффициент пропорциональности обозначим через $h_{дв}$.

При составлении уравнения (в подвижной системе отсчета) необходимо учитывать силы инерции переносного движения двигателя вместе с осью вращения – $m_{дв}g^*$ и $-m_{дв}\ddot{y}(l)$. Эти силы приложены к центру масс двигателя и показаны на рис. 8.5. Считая угловые колебания малыми, получим

$$I_{дв} \left(\ddot{\delta} + \frac{\partial^3 y}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=l} \right) + m_{дв} l_{дв} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Big|_{x=l} + m_{дв} g^* l_{дв} \left(\delta + \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} \right) + h_{дв} \dot{\delta} + k_{дв} \delta = 0 \quad (8.23)$$

или

$$I_{дв} \ddot{\delta} + m_{дв} l_{дв} \ddot{y}_C + [I_{дв} + m_{дв} l_{дв} (l - x_C)] \ddot{\delta} + \sum_{n=1}^{n^{(0)}} [I_{дв} f'_n(l) + m_{дв} l_{дв} f_n(l)] \ddot{q}_n + m_{дв} g^* l_{дв} \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(l) q_n + m_{дв} g^* l_{дв} \dot{\delta} + (m_{дв} l_{дв} g^* + k_{дв}) \delta + h_{дв} \dot{\delta} = 0. \quad (8.24)$$

Рассмотрим теперь собственные колебания системы.

8.4. СОБСТВЕННЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОРПУСА РАКЕТЫ С ПОВОРОТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Полагая, что частоты собственных колебаний упругого корпуса достаточно "разнесены", рассмотрим систему с двумя степенями свободы – упругие колебания корпуса по форме n -го тона и поворот двигателя. Для упрощения анализа примем $h_n = h_{дв} = 0$. На основании уравнений (8.22) и (8.24) получим

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n + \frac{c_n}{m_n^*} (\ddot{\delta} + \omega_{n\delta}^2 \delta) = 0; \quad (8.25)$$

$$\ddot{\delta} + \omega_{дв}^2 \delta + \frac{c_n}{I_{дв}} (\ddot{q}_n + \omega_{\delta n}^2 q_n) = 0.$$

Здесь ω_n – парциальная частота упругих колебаний корпуса ракеты с жестко закрепленным двигателем; $\omega_{дв}$ – парциальная частота угловых колебаний двигателя при неподвижном корпусе; m_n^* – приведенная масса ракеты:

$$\omega_n^2 = k_n / m_n^*; \quad \omega_{дв}^2 = (k_{дв} + m_{дв} l_{дв} g^*) / I_{дв};$$

$$c_n = I_{дв} f'_n(l) + m_{дв} l_{дв} f_n(l); \quad (8.26)$$

$$\omega_{n\delta}^2 = \frac{P_Y f_n(l) + m_{дв} l_{дв} g^* f'_n(l)}{c_n}; \quad \omega_{\delta n}^2 = \frac{m_{дв} l_{дв} g^* f'_n(l)}{c_n}.$$

Если двигатель совершает гармонические колебания с частотой $\omega_{n\delta}$, то на основании первого уравнения (8.25) можно сделать вывод, что колебания не будут оказывать влияния на упругие колебания n -го тона корпуса. Такой вывод означает, что поперечная составляющая вектора силы тяги уравновешивается силами инерции двигателя. Это свойство имеет важное значение для оценки устойчивости и управляемости ракеты.

В литературе $\omega_{n\delta}$ называется частотой нулевой реакции двигателя. На основании уравнений (8.26) каждому тону упругих колебаний корпуса соответствует своя частота $\omega_{n\delta}$, зависящая от значения формы и ее производной в точке подвеса двигателя $f_n(l)$, $f'_n(l)$.

Из второго уравнения (8.25) следует, что если упругие колебания корпуса будут совершаться с частотой $\omega_{\delta n}$, то они не будут вызывать колебаний двигателя. Однако $\omega_{\delta n} \ll \omega_{n\delta}$, ω_n , $\omega_{дв}$, вследствие чего это свойство системы не имеет практического значения.

Полагая колебания корпуса гармоническими, получим из уравнений (8.25) уравнение для определения частот собственных колебаний в виде

$$(\omega_n^2 - \omega^2)(\omega_{дв}^2 - \omega^2) - \frac{c_n^2}{m_n I_{дв}} (\omega_{дв}^2 - \omega^2)(\omega_{нδ}^2 - \omega^2) = 0. \quad (8.27)$$

Если управление ракетой производится поворотом основных двигателей (сила P_Y большая), то $\omega_{нδ} \gg \omega_{дв}$. Поэтому в первом приближении в уравнении (8.27) положим $\omega_{дв} = 0$. Получим

$$(1 - b_n^2)\omega^4 - (\omega_n^2 + \omega_{дв}^2 - b_n^2\omega_{нδ}^2)\omega^2 + \omega_n^2\omega_{дв}^2 = 0,$$

где $b_n^2 = c_n^2/(m_n I_{дв})$ — коэффициент инерционной связи между двумя парциальными системами.

Из этого уравнения можно определить две собственные частоты системы. Кратные частоты будут определять границу устойчивости. Условие кратности частот можно найти из равенства

$$\omega_n^2 + \omega_{дв}^2 - b_n^2\omega_{нδ}^2 - 2\omega_n\omega_{дв}\sqrt{1 - b_n^2} = 0.$$

Это равенство можно преобразовать и получить уравнение границы устойчивости в виде

$$\omega_{дв}/\omega_n = \sqrt{1 - b_n^2} \pm b_n \sqrt{\omega_{нδ}^2/\omega_n^2 - 1}. \quad (8.28)$$

Границы областей устойчивости показаны на рис. 8.6. Границы построены по уравнению (8.28) в координатах $\omega_{дв}/\omega_n - b_n$ для различных значений $e_n^2 = \omega_{нδ}^2/\omega_n^2$. Большим частотам нулевой реакции двигателя соответствуют большие значения коэффициентов e_n . Каждому значению e_n соответствуют две границы неустойчивости — верхняя и нижняя. Между ними находится область неустойчивости. С увеличением коэффициента e_n область неустойчивости расширяется. При $e_n = 1$ область неустойчивости сжимается в линию, при $e_n < 1$ система всегда устойчива.

С повышением номера тона возрастает частота упругих колебаний корпуса, так что отношение $\omega_{дв}/\omega_n$ уменьшается. Для низких тонов колебаний это отношение может быть $\omega_{дв}/\omega_n > 1$, для высоких тонов $\omega_{дв}/\omega_n < 1$. При $e_n > 1$ для всех тонов колебаний корпуса отношения $\omega_{дв}/\omega_n$ должны быть такими, чтобы они располагались в областях устойчивости (см. рис. 8.6).

Соотношения между парциальными частотами, отвечающие условиям устойчивости, можно выразить и по-другому. Предположим, что частоты

упругих колебаний суть заданные числа. Тогда условия устойчивости будут $\omega_{нδ} < \omega_n$. Если $\omega_{нδ} > \omega_n$, то должно быть $\omega_{нδ} < \omega_{дв}$.

Таким образом, система, имеющая две степени свободы — один тон упругих колебаний корпуса и поворот двигателя, — будет устойчивой, если частота нулевой реакции двигателя меньше хотя бы одной из парциальных частот ω_n или $\omega_{дв}$.

Рассмотрим некоторые особенности динамических свойств системы с рулевой машиной.

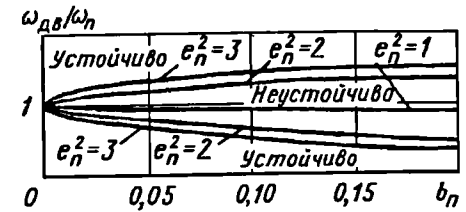


Рис. 8.6

8.5. УРАВНЕНИЯ ОРГАНОВ УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ УПРУГОСТИ ИХ ПРИВОДОВ

На рис. 8.7 показана схема привода поворотного двигателя, которую наиболее часто применяют для управления ракетами.

Из-за недостаточной жесткости проводки гидропривода и его креплений к корпусу частота собственных колебаний системы оказывается достаточно низкой и ее, как показывают данные летных испытаний, необходимо учитывать при исследовании устойчивости упругих летательных аппаратов. Упругость проводки будем схематизировать пружиной с жесткостью k_1 , а упругость крепления гидропривода к корпусу — пружиной с жесткостью k_2 .

Момент, развиваемый гидроприводом вокруг оси двигателя, может быть представлен в следующем виде:

$$M_{гп} = r k_1 (y_{шт} + y_{ц} - r\delta), \quad (8.29)$$

где $y_{шт}$ — перемещение штока относительно цилиндра гидропривода; $y_{ц}$ — перемещение цилиндра гидропривода относительно корпуса ракеты.

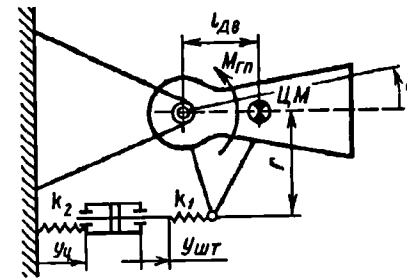


Рис. 8.7

Из равенства сил, развиваемых пружинами с жесткостями k_1 и k_2 , следует, что

$$k_2 y_{\text{ц}} = k_1 (r\delta - y_{\text{шт}} - y_{\text{ц}}).$$

Отсюда

$$y_{\text{ц}} = \frac{k_1}{k_1 + k_2} (r\delta - y_{\text{шт}}).$$

Уравнение (8.29) теперь приведем к виду

$$M_{\text{ш}} = r k (y_{\text{шт}} - r\delta), \quad (8.30)$$

где $k = k_1 k_2 / (k_1 + k_2)$ – суммарная жесткость двух последовательно соединенных пружин.

Уравнение собственных колебаний поворотного двигателя при неподвижном корпусе ракеты и запертом гидроприводе ($y_{\text{шт}} = 0$) будет иметь вид

$$I_{\text{дв}} \ddot{\delta} + k r^2 \delta = 0,$$

а частота собственных колебаний подвешенного двигателя равна

$$\omega_{\text{дв}} = \sqrt{k r^2 / I_{\text{дв}}},$$

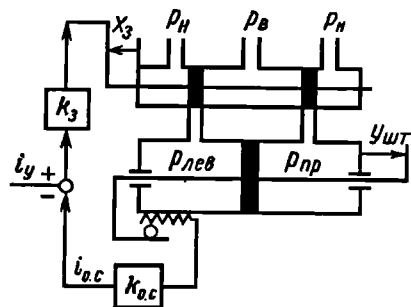


Рис. 8.8

где $I_{\text{дв}}$ – момент инерции двигателя относительно оси вращения.

Чтобы получить уравнение движения поворотного двигателя при $y_{\text{шт}} \neq 0$, рассмотрим уравнение движения гидропривода, общая схема которого представлена на рис. 8.8. Полости силового цилиндра через распределительное устройство (золотник) связаны с источником высокого $p_в$ и низкого $p_н$ давлений. Перемещение золот-

ника из равновесного положения вызывает перепад давлений в полостях силового цилиндра и приводит к перемещению штока $y_{\text{шт}}$ гидропривода. Линеаризованные уравнения гидропривода могут быть записаны в следующей форме:

$$b_3 \Delta p + b_2 \Delta p + b_1 y_{\text{шт}} = b_0 x_3, \quad (8.31)$$

где $\Delta p = p_{\text{лев}} - p_{\text{пр}}$ – перепад давлений; x_3 – перемещение золотника. Величина Δp связана с нагрузкой, действующей на шток гидропривода, следующим соотношением:

$$\Delta p F_{\text{п}} = k_1 (y_{\text{шт}} + y_{\text{ц}} - r\delta) = k (y_{\text{шт}} - r\delta),$$

где $F_{\text{п}}$ – рабочая площадь поршня гидропривода.

Вообще говоря, величины Δp , $y_{\text{шт}}$, x_3 следует рассматривать как некоторые малые возмущения установившихся значений Δp_0 , $y_{0\text{шт}}$, x_{03} .

Установим физический смысл коэффициентов b_i , входящих в уравнение (8.31). При установившемся движении штока без нагрузки ($\Delta p = 0$)

$$y_{0\text{шт}} = (b_0/b_1) x_{03}. \quad (8.32)$$

Для каждого гидропривода известна так называемая статическая скоростная характеристика, т.е. зависимость $y_{0\text{шт}}(x_{03})$, которая в общем случае нелинейна (рис. 8.9).

Из соотношения (8.32) следует, что

$$b_0/b_1 = \partial y_{0\text{шт}} / \partial x_3 |_{x_{03}} = \text{tg } \alpha.$$

Нагрузка, действующая на гидропривод, как правило, приводит к изменению скорости движения штока, что обычно характеризуется зависимостями, подобными тем, которые показаны на рис. 8.10 – так называемыми нагрузочными характеристиками гидропривода. Из уравнения (8.31) следует, что в установившемся движении с постоянной нагрузкой

$$y_{0\text{шт}} = (b_0/b_1) x_{03} - (b_2/b_1) \Delta p_0.$$

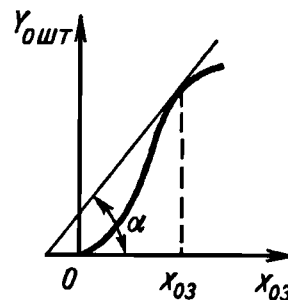


Рис. 8.9

На основании графиков, изображенных на рис. 8.10, легко найти, что

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{\partial \dot{y}_{0\text{шт}}(x_{03}, \Delta p_0)}{\partial \Delta p} \bigg|_{x_{03}, \Delta p_0}.$$

Коэффициент b_3 характеризует скорость установления давления в полостях цилиндра при перемещении золотника. Этот коэффициент зависит от сжимаемости рабочей жидкости и упругости собственно гидроцилиндра, соединительных трубопроводов, уплотнений.

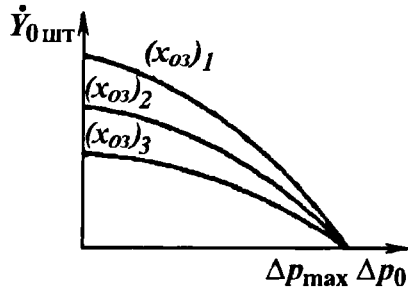


Рис. 8.10

Перемещение золотника x_3 в электрогидравлическом приводе определяется электрическими сигналами системы управления и обратной связью. Общая схема замкнутого электрогидравлического привода показана на рис. 8.8. В предположении, что сам золотник является идеальным элементом и что сигнал обратной связи фиксирует перемещение штока относительно гидроцилиндра, имеем

$$x_3 = k_3(i_y - i_{o.c}) = k_3(i_y - k_{o.c}y_{\text{шт}}),$$

где i_y — ток, характеризующий сигнал управления; $i_{o.c}$ — ток, характеризующий сигнал обратной связи; k_3 и $k_{o.c}$ — коэффициенты усиления прямой цепи и обратной связи соответственно.

Исключив из уравнения (8.31) x_3 , получим

$$b_3 \Delta \dot{p} + b_2 \Delta p + b_1 \dot{y}_{\text{шт}} + b_0 k_3 k_{o.c} y_{\text{шт}} = b_0 k_3 i_y. \quad (8.33)$$

Уравнения малых колебаний двигателя при движении ракеты получим из (8.23), положив $k_{\text{дв}} \delta = -M_{\text{гц}} = -rk(y_{\text{шт}} - r\delta)$.

Уравнения, выражающие динамические свойства сервопривода, состоящего из поворотного двигателя и замкнутого электрогидравлического привода, теперь можно представить в виде

$$I_{\text{дв}} \left(\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{\partial^2 y(l)}{\partial x \partial t^2} \right) + m_{\text{дв}} \frac{\partial^2 y(l)}{\partial t^2} l_{\text{дв}} + m_{\text{дв}} g^* l_{\text{дв}} \left(\delta + \frac{\partial y(l)}{\partial x} \right) + h_{\text{дв}} \frac{d\delta}{dt} - rk(y_{\text{шт}} - r\delta) = 0; \quad (8.34)$$

$$k(y_{\text{шт}} - r\delta) = \Delta p F_{\text{ц}};$$

$$b_3 \frac{d\Delta p}{dt} + b_2 \Delta p + b_1 \frac{dy_{\text{шт}}}{dt} + b_0 k_3 k_{o.c} y_{\text{шт}} = b_0 k_3 i_y.$$

Колебания сервопривода при неподвижном корпусе ракеты представляются следующей системой уравнений:

$$I_{\text{дв}} \ddot{\delta} + r^2 k \delta = rk y_{\text{шт}}; \quad k(y_{\text{шт}} - r\delta) = \Delta p F_{\text{ц}}; \quad (8.35)$$

$$b_3 \Delta \dot{p} + b_2 \Delta p + b_1 \dot{y}_{\text{шт}} + b_0 k_3 k_{o.c} y_{\text{шт}} = b_0 k_3 i_y.$$

Вынужденные движения сервопривода происходят как под действием управляющего тока i_y , вырабатываемого корректирующим контуром автомата стабилизации, так и вследствие поперечных движений корпуса (возбуждение через точку подвеса).

8.6. ВЛИЯНИЕ УПРУГОЙ ПОДВЕСКИ ПОВОРОТНОГО ДВИГАТЕЛЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Если к уравнениям (8.34) добавить уравнения поперечных движений корпуса (8.22) и уравнения автомата стабилизации (без сервопривода), то получим уравнения возмущенного движения ракеты как замкнутой динамической системы. В уравнении (8.34) при этом надо положить

$$y(l) = y_c(t) + \left[\vartheta(t)(x - x_c) + \sum_{n=1}^n f_n(x) q_n(t) \right] \bigg|_{x=l}.$$

Линеаризованное уравнение автомата стабилизации без сервопривода представим в виде

$$i_y = W'_{\text{AC}}(p) y'(x_r), \quad (8.36)$$

где $W'_{AC}(p)$ – передаточная функция;

$$y'(x_r) = \dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(x_r) q_n(t).$$

Уравнения (8.22), (8.34) и (8.36) выражают в первом приближении динамические свойства замкнутой системы.

Для упрощения анализа будем считать жидкость несжимаемой, корпус гидропривода жестким, скорость штока не зависящей от нагрузки. Примем поэтому в уравнениях (8.34) $b_3 = 0$, $b_2 = 0$, а также $h_{дв} = 0$. Будем учитывать только один тон упругих колебаний корпуса.

Уравнения (8.34) для изображений можно представить теперь в виде

$$[(I_{дв} p^2 + m_{дв} g^* l_{дв} r^2 k)(p + k_c)] \delta(p) + \{ [m_{дв} f'_n(l) l_{дв} + I_{дв} f'_n(l)] p^2 + m_{дв} l_{дв} f'_n(l) \} (p + k_c) q_n(p) = r k_3 k (b_0/b_1) i_y(p), \quad (8.37)$$

где $k_c = k_3 k_{o.c} b_0/b_1$.

Приняв

$$\omega_{дв}^2 = \frac{r^2 k + m_{дв} g^* l_{дв}}{I_{дв}}; \quad \omega_{дн}^2 = \frac{m_{дв} g^* l_{дв} f'_n(l)}{c_n},$$

где $c_n = I_{дв} f'_n(l) + m_{дв} l_{дв} f'_n(l)$,

и добавляя к уравнению (8.37) первое уравнение (8.25) для обобщенной координаты q_n и для автомата стабилизации – уравнение (8.36), получим уравнения замкнутой системы для изображений:

$$(p^2 + \omega_{дв}^2) \delta(p) + \frac{c_n}{I_{дв}} (p^2 + \omega_{дн}^2) q_n(p) = \frac{r k_3 k b_0}{I_{дв} b_1 (p + k_c)} i_y(p);$$

$$\frac{c_n}{m_n^*} (p^2 + \omega_{дн}^2) \delta(p) + (p^2 + \omega_n^2) q_n(p) = 0; \quad (8.38)$$

$$i_y(p) = W'_{AC}(p) f'_n(x_r) q_n(p).$$

Из первых двух уравнений находим

$$q_n = \Delta_{q_n} / \Delta; \quad \Delta_{q_n} = - \frac{c_n}{m_n^*} \frac{k k_3 k b_0}{I_{дв} b_1} \frac{p^2 + \omega_{дн}^2}{p + k_c} i_y;$$

$$\Delta = (p^2 + \omega_n^2)(p^2 + \omega_{дв}^2) - \frac{c_n^2}{m_n^* I_{дв}} (p^2 + \omega_{дн}^2)(p^2 + \omega_{дн}^2).$$

Определим передаточную функцию основной части разомкнутой цепи системы (8.38), состоящей из одного тона упругих колебаний корпуса и сервопривода:

$$W_{PO}^*(p) = \frac{f'_n(x_r) q_n(p)}{i_y(p)} = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Числитель передаточной функции

$$R(p) = - \frac{I_{дв} f'_n(l) + m_{дв} l_{дв} f'_n(l)}{m_n^*} \frac{r k_3 k b_0}{I_{дв} b_1} f'_n(x_r) (p^2 + \omega_{дн}^2).$$

Знаменатель $Q(p)$ представим в виде двух сомножителей:

$$Q(p) = (p + k_c) [(p^2 + \omega_n^2)(p^2 + \omega_{дв}^2) - b_n^2 (p^2 + \omega_{дн}^2)(p^2 + \omega_{дн}^2)].$$

Так как $k_c > 0$, то корень первого сомножителя отрицательный. Второй сомножитель является характеристическим полиномом системы (8.25); его свойства были рассмотрены ранее.

Пусть второй сомножитель $Q(p)$ относительно p^2 имеет два различных вещественных отрицательных корня (система имеет две различные собственные частоты ω_1 и ω_2):

$$Q(p) = (p + k_c)(1 - b_n^2)(p^2 + \omega_1^2)(p^2 + \omega_2^2).$$

Полагая $p = i\omega$, получим выражение амплитудно-фазовой характеристики регулируемого объекта в виде

$$W_{PO}^*(i\omega) = -f_n(l)f'(x_r) \frac{N_n}{k_c + i\omega} \frac{\omega_{nd}^2 - \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)(\omega_2^2 - \omega^2)}, \quad (8.39)$$

где

$$N_n = \left(I_{дв} \frac{f'_n(l)}{f_n(l)} + m_{дв} l_{дв} \right) \frac{r k_3 k b_0}{m_{дв} I_{дв} b_1 (1 - b_n^2)}.$$

Для стержня со свободными концами отношение $f_n(l)/f'_n(l) > 0$ при любом тоне колебания. Поэтому всегда вещественное число $N_n > 0$.

В зависимости от знака произведения двух чисел $f_n(l)$ и $f'_n(x_r)$ годограф комплексного передаточного числа $W_{PO}^*(i\omega)$ на комплексной плоскости $Z = U + iV$ может брать начало (при $\omega = 0$) или с положительной полуоси U , если это произведение отрицательное, или с отрицательной полуоси U , если это произведение положительное. В первом случае фазовый угол $\varphi_{PO}(0) = 0$, во втором случае $\varphi_{PO}(0) = \pi$.

Функция $N_n / (k_c + i\omega)$ есть комплексное передаточное число сервопривода. Объединим сервопривод с автоматом стабилизации как два последовательно расположенных звена

$$W_{AC}(i\omega) = W_{AC}'(i\omega) \frac{N_n}{k_c + i\omega} = A_{AC}(\omega) e^{i\varphi_{AC}(\omega)}.$$

Оставшуюся часть уравнения (8.39) будем считать комплексным передаточным числом регулируемого объекта, которое имеет вид

$$W_{PO}(i\gamma) = f_n(l)f'_n(x_r) W_{PO}''(i\gamma), \quad (8.40)$$

где $\gamma = \omega/\omega_1$;

$$W_{PO}''(i\gamma) = - \frac{(\omega_{nd}/\omega_1)^2 - \gamma^2}{\omega_1^2 [(\omega_2/\omega_1)^2 - \gamma^2] (1 - \gamma^2)} = A_{PO}''(\gamma) e^{i\varphi_{PO}''(\gamma)},$$

а ω_1, ω_2 — собственные частоты упругого корпуса с упруго подвешенным поворотным двигателем; условимся считать, что $\omega_1 > \omega_2$.

В разд. 8.4 было показано, что собственные частоты ω_1 и ω_2 системы будут вещественными и различными, если выполняется соотношение $\omega_{nd} < \omega_n$.

Когда $\omega_{nd} > \omega_n$, то должно быть $\omega_{nd} < \omega_{дв}$.

Предположим, что парциальные частоты ω_n и $\omega_{дв}$ не близки между собой и частоты системы мало отличаются от парциальных. Не нарушая общности, примем $\omega_1 > \omega_2$. Тогда между частотой нулевой реакции двигателя и частотами системы возможны два соотношения:

$$\omega_{nd} < \omega_2 < \omega_1 \quad (8.41)$$

и

$$\omega_2 < \omega_{nd} < \omega_1. \quad (8.42)$$

Рассмотрим теперь свойства комплексного передаточного числа (8.40). Частотные характеристики функции $W_{PO}''(i\gamma)$ для соотношения (8.41) приведены на рис. 8.11, а для соотношения (8.42) — на рис. 8.12. В первом случае фазочастотная характеристика $\varphi_{PO}''(\gamma)$ начинается со значения $\varphi_{PO}''(0) = \pi$, на частоте ω_{nd} она возрастает до 2π , а на собственных частотах ω_2 и ω_1 происходит убывание фазовой характеристики до нуля. Во втором случае запаздывание чередуется с опережением, вследствие чего фазочастотная характеристика находится в пределах между π и нулем.

Из-за трения, перетекания жидкости в гидроцилиндре и сжимаемости жидкости частоты системы ω_1 и ω_2 несколько изменяются, и, что самое важное, модуль комплексного передаточного числа $A_{PO}''(\gamma)$ на собственных частотах будет иметь конечное значение.

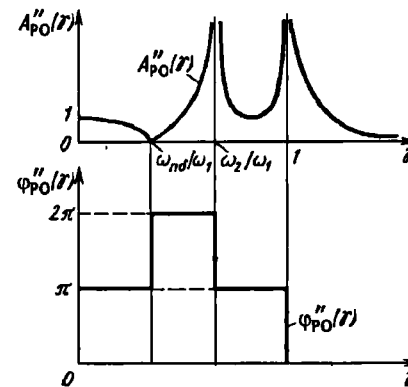


Рис. 8.11

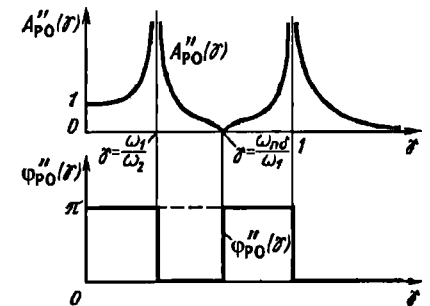


Рис. 8.12

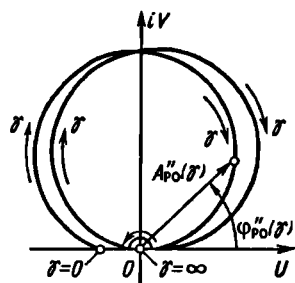


Рис. 8.13

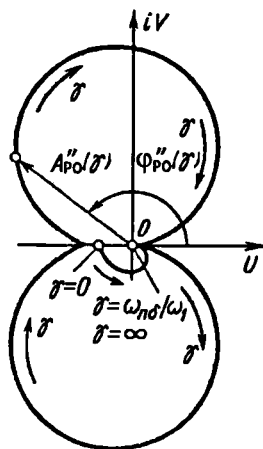


Рис. 8.14

Амплитудно-фазовые характеристики $W_{PO}''(i\gamma)$ $0 \leq \gamma \leq \infty$ с учетом рассеяния энергии при колебаниях изображены на комплексной плоскости $Z = U + iV$ на рис. 8.13 и 8.14; рис. 8.13 соответствует неравенству (8.42), рис. 8.14 – неравенству (8.41).

График функции $W_{PO}''(i\gamma)$ с точностью до постоянного множителя в уравнении (8.40) выражает амплитудно-фазовую частотную характеристику регулируемого объекта, состоящего из упругого корпуса и упруго подвешенного поворотного двигателя.

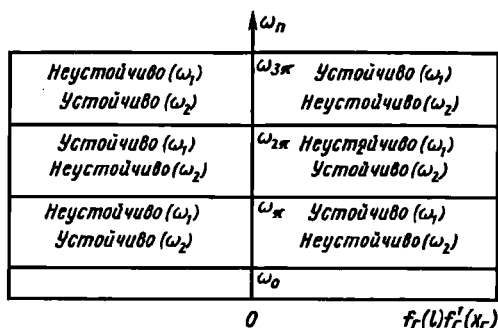


Рис. 8.15

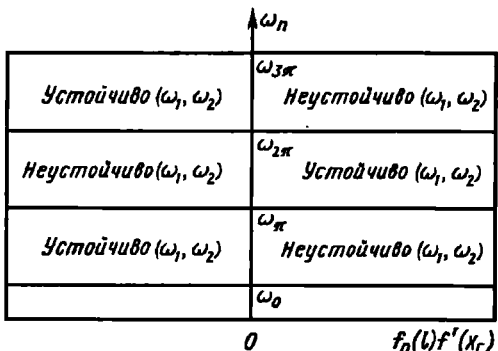


Рис. 8.16

Постоянный множитель из уравнения (8.40) изменит масштаб годографа; если произведение $f_n(l)f'_r(x_r) < 0$, то изменятся и знаки у вещественной U и мнимой V частей комплексного передаточного числа.

На основании графика функции $W_{PO}''(i\gamma)$ можно сформулировать требования к фазочастотной характеристике автомата стабилизации $W_{AC}(i\omega)$ так же, как это сделано в гл. VI. Воспользуемся частотным критерием Найквиста, для чего рассмотрим фазочастотную характеристику всей разомкнутой цепи

$$\Phi_{PO}(\gamma) + \Phi_{AC}(\gamma) = \Phi(\gamma).$$

Положим, что фазочастотная характеристика автомата стабилизации имеет вид, показанный на рис. 2.16. Фазочастотные характеристики регулируемого объекта для различных соотношений характерных частот приведены на рис. 8.11 и 8.12.

Если выполняется неравенство (8.41) и $f_n(l)f'_r(x_r) > 0$, то система будет устойчивой, когда соотношения между характерными частотами следующие:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_{\pi}; \quad \omega_{2\pi} < \omega_1 < \omega_{3\pi}; \quad \omega_{\pi} < \omega_2 < \omega_{2\pi}. \quad (8.43)$$

Если $f_n(l)f'_r(x_r) < 0$, то система будет устойчивой, когда

$$\omega_0 < \omega_2 < \omega_{\pi}; \quad \omega_{\pi} < \omega_1 < \omega_{2\pi}; \quad \omega_{2\pi} < \omega_2 < \omega_{3\pi}. \quad (8.44)$$

Области устойчивости, соответствующие неравенству (8.41) и соотношениям (8.43) и (8.44) в координатах $f_n(l)f'_r(x_r) - \omega_n$, показаны на рис. 8.15. Там же показаны и области неустойчивости, соответствующие частотам ω_1 и ω_2 . Для обеспечения устойчивости движения частоты системы ω_1 и ω_2 должны располагаться между различными характерными частотами автомата стабилизации.

На рис. 8.16 области устойчивости соответствуют неравенству (8.42). В отличие от соотношения (8.41) здесь частоты системы ω_1 и ω_2 могут располагаться между одними и теми же характерными частотами автомата стабилизации. Например, система будет устойчивой при $f_n(l)f'_r(x_r) < 0$, если $\omega_{\pi} < \omega_2 < \omega_{2\pi}$, $\omega_{\pi} < \omega_1 < \omega_{2\pi}$.

Выше всюду рассматривалась линеаризованная система уравнений с дополнительными упрощениями и поэтому полученные результаты имеют лишь качественный характер. В действительности свойства реальной системы могут значительно отличаться от свойств системы

линеаризованной, и в каждом конкретном случае нужны более полные исследования.

8.7. МЕТОДЫ СТАБИЛИЗАЦИИ СЕРВОПРИВОДА

Если сервопривод как замкнутая система оказывается неустойчивым или на его амплитудно-частотной характеристике в рабочем диапазоне частот имеется большой резонансный пик, то необходимо применять специальные меры по улучшению его динамических характеристик. Необходимо отметить, что частота собственных колебаний сервопривода — величина, трудно определяемая. Величины подвижной массы и особенно массы жидкости имеют существенные разбросы от экземпляра к экземпляру одного и того же типа конструкции. Жесткость может изменяться также по времени полета главным образом из-за изменения жесткости мест крепления сервопривода. Даже при экспериментальном изучении разброс величины собственной частоты может достигать до 3 Гц. Все это усложняет стабилизацию сервопривода.

Для стабилизации сервопривода используется несколько методов. Можно применять электрические корректирующие контуры, типичная АЧХ которых схематично показана на рис. 8.17. Они располагаются перед сервоприводом. Наибольшее подавление амплитудной характеристики АС будет происходить на частоте ω_ϕ . Такие фильтры требуют весьма тщательной настройки.

В некоторых случаях динамические характеристики сервопривода можно улучшить механическими средствами. Уменьшением люфтов или увеличением жесткости можно повысить частоту собственных колебаний, увеличением трения можно снизить коэффициент динамичности при резонансе.

Однако наибольших результатов можно достичь посредством коррекции амплитудно-частотных характеристик сервопривода. Особенно перспективным в этом отношении следует считать создание и применение специальных гидромеханических устройств (демпферов), включаемых в контур сервопривода. Они обладают определенной гибкостью свойств и позволяют сформировать требуемые ФЧХ сервопривода.

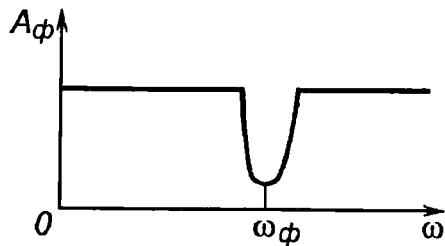


Рис. 8.17

8.8. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ УПРУГОЙ РАКЕТЫ

Сформулированные в гл. II определения передаточных функций $W_{AC}(p)$ и $W_{PO}(p)$ базируются на некоторой идеализированной одноконтурной блок-схеме замкнутой системы "летательный аппарат — автомат стабилизации". В действительности рассматриваемая система является более сложной, характеризуется наличием нескольких каналов передачи информации о движении летательного аппарата и нескольких обратных связей. Более детальная блок-схема замкнутой системы "летательный аппарат — автомат стабилизации" приведена на рис. 8.18. Для такой системы понятия $W_{AC}(p)$ и $W_{PO}(p)$ нуждаются в некоторых уточнениях, которые обсуждаются ниже.

Чувствительные элементы системы стабилизации, обычно используемые на летательных аппаратах, бывают двух типов: одни измеряют угловое положение ракеты (угловые скорости и ускорения), другие — линейные ускорения. Конструкции этих чувствительных элементов могут быть различными.

Для измерения углового положения используют гировертикаль либо гиростабилизированную платформу. Угловая скорость может быть получена либо дифференцированием сигнала угла, либо непосредственным измерением с помощью датчика угловых скоростей (ДУС), устанавливаемого на корпусе.

Обозначим сигнал датчика, измеряющего угловое положение, через $\beta_y(t)$, величина которого зависит от места расположения датчика на корпусе. В общем случае величину $\beta_y(t)$ для датчика углов, например в плоскости тангажа, можно представить в виде

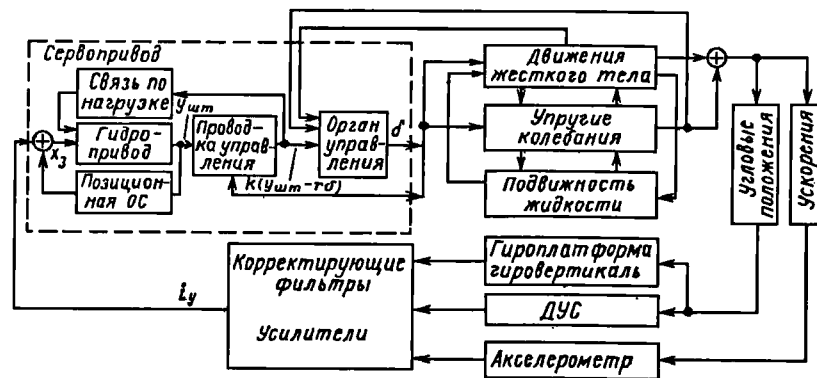


Рис. 8.18

$$\beta_y(t) = \dot{\theta} + \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(x_r) q_n(t) = \sum_{n=1}^{n^{(0)}} f'_n(x_r) q_n(t), \quad (8.45)$$

где x_r — координата гироскопического датчика углового положения;
 $f'_1(x_r) q_{-1}(t) = 0$; $f'_0(x_r) q_0(t) = \dot{\theta}$.

Введем в рассмотрение вектор-столбец размерности $(n^{(0)} + 2)$ следующего вида:

$$\{f'(x_r)\} = \begin{pmatrix} f'_1(x_r) \\ f'_0(x_r) \\ f'_1(x_r) \\ f'_2(x_r) \\ \vdots \\ f'_{n^{(0)}}(x_r) \end{pmatrix}. \quad (8.46)$$

Тогда выражение для $\beta_y(t)$ можно представить в следующей компактной форме:

$$\beta_y(t) = \{f'(x_r)\}^T q(t),$$

где $\{f'(x_r)\}^T$ — транспонированный вектор $\{f'(x_r)\}$. Формула для $\beta_y(t)$, записанная в изображениях, имеет вид

$$\beta_y(p) = \{f'(x_r)\}^T q(p).$$

Входной сигнал датчика угловых скоростей $\beta_{y.c}(t)$, расположенного в точке с координатой $x_{дус}$, будет

$$\beta_{y.c}(t) = \sum_{n=0}^{n^{(0)}} \dot{q}_n(t) \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \bigg|_{x_{дус}}.$$

Используя введенные обозначения, получим для изображения следующее соотношение:

$$\beta_{y.c}(p) = \{f'(x_{дус})\}^T p q(p).$$

Рассмотрим теперь выражение входного сигнала для датчика линейных ускорений (акселерометра), обычно называемого датчиком п е р е г р у з к и. В первом приближении датчик перегрузки можно представить в виде некоторой массы на пружине. При движении летательного аппарата на массу датчика действуют силы инерции, которые вызывают перемещение ее вдоль измерительной оси. По этим перемещениям можно судить об ускорениях аппарата.

Пусть датчик перегрузки установлен на корпусе ракеты. При поперечных колебаниях ракеты кроме поперечного ускорения он будет воспринимать также составляющую вектора g^* , направленную вдоль измерительной оси датчика. Поэтому входной сигнал датчика линейных ускорений $\beta_{л.у}(t)$ можно записать так:

$$\beta_{л.у}(t) = \sum_{n=1}^{n^{(0)}} \dot{q}_n(t) f_n(x_{длу}) + g^* \sum_{n=1}^{n^{(0)}} q_n(t) \frac{\partial f_n(x)}{\partial x} \bigg|_{x_{длу}},$$

где $x_{длу}$ — координата расположения датчика линейных ускорений на корпусе.

Переходя к изображениям, получим

$$\beta_{л.у}(p) = [\{f(x_{длу})\}^T p^2 + g^* \{f'(x_{длу})\}^T] q(p).$$

Как следует из приведенных соотношений, входные сигналы датчиков системы стабилизации $\beta_y(t)$, $\beta_{y.c}(t)$, $\beta_{л.у}(t)$ могут быть однозначно определены, если известна зависимость от времени вектора $q(t)$.

Из уравнений возмущенного движения объекта можно получить передаточные функции

$$\frac{q(p)}{\delta(p)} = \left\{ \frac{q_{-1}(p)}{\delta(p)}, \frac{q_0(p)}{\delta(p)}, \frac{q_1(p)}{\delta(p)}, \dots \right\}, \quad (8.47)$$

где $\delta(p)$ — выходной сигнал системы стабилизации.

Определим передаточные функции объекта по угловому положению $W_y(p)$, угловой скорости $W_{y.c}(p)$ и линейному ускорению $W_{л.у}(p)$ следующим образом:

$$W_y(p) = \frac{\beta_y(p)}{\delta(p)} = \{f'(x_r)\}^T \frac{q(p)}{\delta(p)};$$

$$W_{y,c}(p) = \frac{\beta_{y,c}(p)}{\delta(p)} = \{f(x_{дус})\}^T \frac{p q(p)}{\delta(p)}; \quad (8.48)$$

$$W_{\lambda,y}(p) = \frac{\beta_{\lambda,y}(p)}{\delta(p)} = \{f(x_{длу})\}^T \frac{p^2 q(p)}{\delta(p)} - g^* \{f(x_{длу})\}^T \frac{q(p)}{\delta(p)}.$$

Таким образом, под термином передаточной функции объекта регулирования будем понимать некоторую совокупность передаточных функций типа (8.48).

Под выходным сигналом системы стабилизации обычно понимают отклонение управляющего органа $\delta(t)$ или смещение штока гидравлического привода $y_{шт} = \delta_k r$. Однако величины $\delta(t)$ и $\delta_k = \delta_k(t)$ зависят не только от входных сигналов системы стабилизации $\beta(t)$, но и от движения самого летательного аппарата. Это объясняется наличием обратных связей между отклонением управляющего органа и движением собственно летательного аппарата, а также влиянием нагрузки на перемещение штока гидравлического привода. Поэтому передаточная функция автомата стабилизации может зависеть от характеристик летательного аппарата.

При определении передаточной функции автомата стабилизации широко используют экспериментальные данные, которые зависят от схемы проведения эксперимента. Рассмотрим наиболее характерные способы определения передаточной функции автомата стабилизации, когда органом управления является поворотный двигатель. В этом случае передаточную функцию автомата стабилизации целесообразно определить так, чтобы она не зависела от характеристик летательного аппарата:

$$W_{AC}(p) = \frac{1}{r} \frac{y_{шт}(p)}{\beta(p)} = \frac{\delta_k(p)}{\beta(p)}, \quad (8.49)$$

где $\beta(p)$ – изображение одного из входных сигналов датчиков системы стабилизации.

Соотношение (8.49) можно представить в следующей форме:

$$W_{AC}(p) = \frac{1}{r} \frac{y_{шт}(p)}{i_y(p)} \frac{i_y(p)}{\beta(p)}. \quad (8.50)$$

1. Пренебрегаем влиянием нагрузки на перемещение штока привода. Вычислив из третьего уравнения (8.34) $y_{шт}(p)/i_y(p)$ при условии $b_3 = b_2 =$

$= 0$, получим передаточную функцию автомата стабилизации без учета нагрузки:

$$W_{AC}(p) = \frac{1}{r} \frac{b_0 k_3}{b_1 p + b_0^*} \frac{i_y(p)}{\beta(p)},$$

где $b_0^* = b_0 k_3 k_{oc}$.

Если, кроме того, пренебречь податливостью проводки управления и креплений гидропривода к корпусу, т.е. считать, что $c_{\delta\delta} = kr^2 \rightarrow \infty$, то $\delta = \delta_k$. В этом случае движение поворотного двигателя определяется исключительно сигналами системы стабилизации $\beta(t)$. Такая аппроксимация свойств системы стабилизации правомерна только тогда, когда частота собственных колебаний поворотного двигателя много больше частот рассматриваемых колебаний летательного аппарата.

Частотную характеристику автомата стабилизации $W_{AC}(j\omega)$ можно определить экспериментально в такой постановке по схеме, приведенной на рис. 8.19, а.

2. Учитываем влияние нагрузки на перемещение штока гидропривода. Нагрузку на гидропривод будем схематизировать пружиной с жесткостью k . Схема, по которой экспериментально определяется частотная характеристика автомата стабилизации в рассматриваемом случае, приведена на рис. 8.18, б.

Передаточная функция автомата стабилизации определяется соотношением (8.50). Нагрузка, действующая на шток гидропривода, как это следует из схемы,

$$\Delta p F_{\pi} = k y_{шт} = k r \delta_k.$$

Подставив это соотношение в третье равенство (8.34), получим уравнение

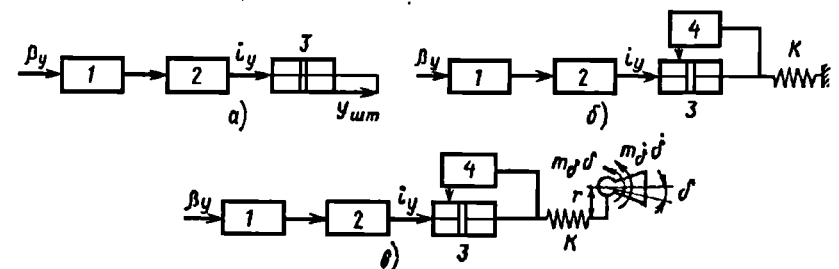


Рис. 8.19

движения штока привода

$$\left[\frac{(b_3 p + b_2) k}{F_{\pi}} + (b_1 p + b_0^*) \right] \delta_x(p) = \frac{b_0}{r} k_3 i_y(p).$$

После некоторых преобразований найдем

$$\frac{\delta_x(p)}{i_y(p)} = \frac{b_0 k_3}{r(b_1 p + b_0^*)} \frac{c_{\delta\delta}^*(p)}{c_{\delta\delta} + c_{\delta\delta}^*(p)}, \quad (8.51)$$

где

$$c_{\delta\delta} = k r^2; \quad c_{\delta\delta}^*(p) = \frac{b_1 p + b_0^*}{b_3 p + b_2} F_{\pi} r^2. \quad (8.52)$$

Передаточную функцию автомата стабилизации с учетом пружинной нагрузки, действующей на шток гидропривода, согласно равенству (7.50) и с учетом выражения $W_{AC}(p)$ представим в виде

$$W_{AC}^{(1)}(p) = \frac{\delta_x(p)}{i_y(p)} \frac{i_y(p)}{\beta(p)} = W_{AC}(p) \frac{c_{\delta\delta}^*(p)}{c_{\delta\delta} + c_{\delta\delta}^*(p)}. \quad (8.53)$$

Как указывалось, $c_{\delta\delta}$ есть эквивалентная жесткость проводки управления и крепления привода к корпусу, приведенная к углу поворота органа управления. Покажем, что величина $c_{\delta\delta}^*(p)$ есть динамическая жесткость электрогидравлического привода.

Пусть к штоку привода при отсутствии входного сигнала ($i_y = 0$) приложена сила $\Phi(t)$, под действием которой шток перемещается на величину $y_{шт}$. Тогда динамическую жесткость можно определить из выражения

$$\Phi(p)/y_{шт}(p) = c_{\delta\delta}^*(p)/r^2.$$

Учитывая, что $\Phi(p) = -\Delta p(p) F_{\pi}$, из второго и третьего уравнений (8.35) найдем соотношение, аналогичное (8.52):

$$\frac{c_{\delta\delta}^*(p)}{r^2} = \frac{b_1 p + b_0^*}{b_3 p + b_2} F_{\pi}. \quad (8.54)$$

Исследуем более подробно выражение для $c_{\delta\delta}^*(p)$. Пусть сила $\Phi(t) = \Phi_0$, т.е. является постоянной. Установившееся значение $\Phi/y_{шт}$ при $t \rightarrow \infty$ определяет величину статической жесткости привода $(c_{\delta\delta}^*)_{ст}$. Используя методы операционного исчисления, можно показать, что

$$(c_{\delta\delta}^*)_{ст} = (b_0^*/b_2) F_{\pi} r^2.$$

Экспериментальное измерение статической жесткости привода дает возможность определить соотношение коэффициентов b_0/b_2 , входящих в уравнение гидропривода.

Представим выражение для $c_{\delta\delta}^*(p)$ в следующей форме:

$$c_{\delta\delta}^*(p) = \frac{b_0}{b_2} F_{\pi} r^2 \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}, \quad (8.55)$$

где T_1 и T_2 — постоянные времени, равные

$$T_1 = b_1/b_0^*; \quad T_2 = b_3/b_2.$$

Если внешняя сила изменяется по гармоническому закону $\Phi(t) = \Phi_0 \sin \omega t$, то при установившихся колебаниях штока $y_{шт} = y_{0шт} \sin(\omega t + \theta)$. Назовем отношение $\Phi_0 r^2 / y_{0шт} = A(\omega)$ амплитудно-частотной, а $\theta(\omega)$ — фазочастотной характеристикой электрогидравлического привода. Легко видеть, что

$$A(\omega) = \frac{b_0}{b_2} F_{\pi} r^2 \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}; \quad \theta(\omega) = \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega.$$

Если $T_1 > T_2$, то $\theta(\omega) > 0$ и внешняя сила опережает по фазе перемещения штока, а при $T_1 < T_2$, $\theta(\omega) < 0$ внешняя сила отстает по фазе относительно перемещения штока. Физически это означает, что при $\theta(\omega) > 0$ привод работает как демпфер и рассеивает подводимую к нему энергию, а при $\theta(\omega) < 0$ привод сам является источником энергии.

3. Принимаем угол отклонения поворотного двигателя (управляемого стабилизатора) за сигнал выхода системы стабилизации. Взаимодействием отклонений поворотного двигателя с движением аппарата при этом пренебрегаем. Схема для экспериментального определения частотных характеристик автомата стабилизации в рассматриваемом случае показана на рис. 8.19, в. Для имитации нагрузки, действующей

на поворотный двигатель, вокруг оси двигателя прикладывается внешний момент $(-m_\delta \delta - m_\delta \dot{\delta})$.

Уравнения движения рассматриваемой системы в изображениях имеют вид

$$(a_{\delta\delta} p^2 + m_\delta p + m_\delta + c_{\delta\delta}) \delta(p) = c_{\delta\delta} \delta_x(p);$$

$$c_{\delta\delta} [\delta(p) - \delta_x(p)] = \Delta p(p) F_{\pi} r; \quad (8.56)$$

$$(b_3 p + b^2) \Delta p(p) - (b_1 p + b_0^*) r \delta_x(p) = b_0 k_3 i_y(p),$$

где $a_{\delta\delta} = I_{\text{дв}}$, $c_{\delta\delta} = k r^2$.

Исключив из уравнений (8.56) $\delta_x(p)$ и $\Delta p(p)$, получим уравнение движения поворотного двигателя

$$(a_{\delta\delta} p^2 + m_\delta p + m_\delta + \tilde{c}_{\delta\delta}) \delta(p) = \frac{k_3 b_0 \tilde{c}_{\delta\delta} i_y(p)}{r(b_1 p + b_0^*)}, \quad (8.57)$$

где $\tilde{c}_{\delta\delta} = \frac{c_{\delta\delta}^* c_{\delta\delta}}{c_{\delta\delta}^* + c_{\delta\delta}}$.

Определим $W_{\text{AC}}^{(2)}(p)$ — передаточную функцию автомата стабилизации с учетом динамических характеристик поворотного двигателя и внешней нагрузки на шток привода следующим образом:

$$W_{\text{AC}}^{(2)}(p) = \frac{\delta(p)}{\beta(p)} = \frac{\delta(p)}{i_y(p)} \frac{i_y(p)}{\beta(p)}.$$

Из уравнения (8.57) следует, что

$$W_{\text{AC}}^{(2)}(p) = - \frac{i_y(p)}{\beta(p)} \frac{k_3 b_0}{r(b_1 p + b_0^*)} \frac{c_{\delta\delta}^*}{c_{\delta\delta} + c_{\delta\delta}^*} \frac{c_{\delta\delta}}{a_{\delta\delta} p^2 + m_\delta p + m_\delta + \tilde{c}_{\delta\delta}}. \quad (8.58)$$

Передаточная функция $W_{\text{AC}}^{(2)}(p)$ связана с $W_{\text{AC}}(p)$ и $W_{\text{AC}}^{(1)}(p)$ соотношениями

$$W_{\text{AC}}^{(2)}(p) = W_{\text{AC}}(p) \frac{c_{\delta\delta}^*}{c_{\delta\delta} + c_{\delta\delta}^*} \frac{c_{\delta\delta}}{a_{\delta\delta} p^2 + m_\delta p + m_\delta + \tilde{c}_{\delta\delta}}; \quad (8.59)$$

$$W_{\text{AC}}^{(2)}(p) = W_{\text{AC}}^{(1)}(p) \frac{c_{\delta\delta}}{a_{\delta\delta} p^2 + m_\delta p + m_\delta + \tilde{c}_{\delta\delta}}.$$

Таким образом, в соответствии с различными способами определения передаточных функций автомата стабилизации можно назвать четыре типа передаточных функций, характеризующих упругую ракету как объект регулирования.

1. Передаточные функции $W_y(p)$, $W_{y.c}(p)$, $W_{\text{л.у}}(p)$ определяют в предположении абсолютно жесткого крепления органа управления к штоку привода ($c_{\delta\delta} = \infty$) и отсутствия влияния нагрузки на перемещение штока привода ($c_{\delta\delta}^* = \infty$).

2. Передаточные функции $\bar{W}_y(p)$, $\bar{W}_{y.c}(p)$, $\bar{W}_{\text{л.у}}(p)$, для которых входным сигналом является $\delta_x(p)$, определяют с учетом динамики органа управления и пренебрегая влиянием нагрузки на перемещение штока привода.

3. Передаточные функции $\tilde{W}_y(p)$, $\tilde{W}_{y.c}(p)$, $\tilde{W}_{\text{л.у}}(p)$, для которых входным сигналом является $\delta_k(p)$, определяют с учетом динамики поворотного двигателя и влияния нагрузки на перемещение штока привода.

4. Передаточные функции $W_y^*(p)$, $W_{y.c}^*(p)$, $W_{\text{л.у}}^*(p)$, для которых входным сигналом является $\delta(p)$, а свойства автомата стабилизации определяются передаточной функцией $W_{\text{AC}}^{(2)}(p)$.

8.9. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИЛ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ, ФОРМ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА РАКЕТЫ

До сих пор мы не ставили вопрос о величине силы внутреннего трения. Более того, если частота вынужденных колебаний корпуса значительно отличается от его частоты собственных колебаний, то силы трения в корпусе принимать в расчет вообще нет необходимости. Силы трения существенны при резонансе, без них нельзя определить амплитуду колебаний и поэтому нельзя надежно применять амплитудную стабилизацию упругих колебаний и определять нагрузки.

В обширной литературе, посвященной исследованиям внутреннего трения в стержнях, имеются рекомендации различных способов учета трения. Предлагаются формулы, выражающие зависимость сил внутреннего трения от величины деформации, ее скорости, от характера и способа нагружения стержня. Некоторые из этих формул в линейных задачах о колебаниях однородных стержней приводят к удовлетворительным результатам.

Значительно сложнее обстоит дело с неоднородными стержнями и, тем более, с машиностроительными конструкциями, для которых не имеется сколь-нибудь строгих и вместе с тем достаточно простых и надежных методов учета сил внутреннего трения.

Существует три основных варианта учета сил трения, основанных на различных гипотезах.

Первый вариант основан на гипотезе Фогта, согласно которой сила внутреннего трения пропорциональна скорости деформации. В уравнении поперечных колебаний сила внутреннего трения представляется выражением

$$F_h = h \frac{\partial^3}{\partial t \partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right].$$

Уравнение для обобщенной координаты имеет вид

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = a_n q(t),$$

причем относительный коэффициент затухания упругих колебаний

$$\xi_n = h \omega_n / 2$$

пропорционален частоте собственных колебаний корпуса ракеты.

Гипотеза Фогта удобна для решения уравнений, но плохо подтверждается опытными данными.

Согласно второму варианту сила трения предполагается пропорциональной скорости перемещения и называется силой вязкого трения. В уравнении поперечных колебаний эта сила представляется величиной $h(x) \partial y / \partial t$. Уравнение для обобщенной координаты имеет тот же вид, что и в первом варианте:

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = a_n q(t),$$

но в нем величина относительного коэффициента затухания ξ_n обратно пропорциональна частоте собственных колебаний корпуса ракеты:

$$\xi_n = \frac{e_n}{\omega_n}, \quad e_n = \frac{1}{2m_n} \int_0^l h(x) f_n^2 dx.$$

Третий вариант основан на гипотезе Е.С. Сорокина, согласно которой сила трения при гармонических колебаниях не зависит от скорости, но сдвинута по фазе относительно упругой силы на угол $\pi/2$. Гипотеза Сорокина неплохо подтверждается опытными данными.

В уравнении поперечных колебаний (5.5) сила трения по гипотезе Сорокина представлена слагаемым

$$i \frac{\Psi}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right].$$

Коэффициент относительного затухания ξ_n и коэффициент поглощения энергии при колебаниях ψ , равный отношению поглощенной за один цикл энергии ΔW к полной энергии системы W , для корпуса ракеты обычно расчетным путем определить не удастся. Эти коэффициенты являются интегральными величинами, и их значения проще всего определять непосредственно опытным путем. Особенно это относится к корпусам ракет, в которых конструкционное трение является преобладающим.

Для обеспечения стабилизации и для расчета нагрузок необходимо достоверно знать также формы и особенно частоты собственных упругих колебаний ракеты. Поскольку расчетные схемы для их определения обычно не учитывают многих особенностей конструкции (наличие упруго подвешенных грузов, изменение местной жесткости и др.), то результаты расчета целесообразно подтверждать экспериментально.

Таким образом, уже на стадии проектирования проводятся экспериментальные исследования по определению сил трения, форм и частот собственных колебаний корпуса ракеты. При необходимости организуются экспериментальные исследования взаимного влияния колебаний жидкости в баках и упругих колебаний корпуса.

Эксперименты проводятся на конструктивно подобных моделях, выполняемых в масштабах 1:5, 1:10, или на натурных образцах.

Так как все причины, вызывающие рассеяние энергии, смоделировать практически невозможно, то величина коэффициента трения, полученная для модели, может применяться при исследовании колебаний ракеты лишь как ориентировочная.

Испытуемая модель подвешивается на мягких шнурах (тросах) в вертикальном положении (рис. 8.20). Длина тросов подбирается так, чтобы частоты вертикальных или маятниковых колебаний модели как

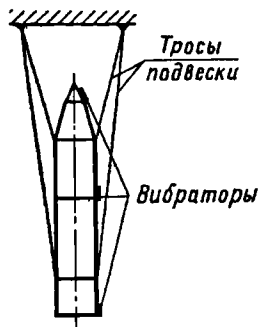


Рис. 8.20

твердого тела были значительно ниже частоты первого тона упругих поперечных колебаний. Подвеска корпуса в горизонтальном положении может не дать правильных результатов вследствие того, что не будут соблюдаться условия работы конструкции при сжатии, что особенно важно для стыков. Для регистрации колебаний по длине корпуса устанавливается система датчиков перемещений, скоростей или ускорений, на сжатых и растянутых волокнах наклеиваются тензодатчики.

Существует два метода экспериментального определения сил трения. Первый основан на изучении затухания собственных колебаний корпуса ракеты, второй — на изучении вынуж-

денных колебаний. Интересующие нас коэффициенты трения можно определить путем обработки результатов эксперимента, учитывая допущения о характере сил трения. Частота собственных колебаний определяется по резонансной кривой, форма собственных колебаний — непосредственным построением по показаниям датчиков, расположенных по длине корпуса.

Вынужденные гармонические колебания корпуса вызываются вибраторами или электрогидравлическими силовозбудителями. Для получения резонансной кривой эксперимент проводится при различных отношениях частоты вращения вибратора к частоте собственных упругих колебаний корпуса.

Если на корпус ракеты (от вибратора) действует сосредоточенная поперечная внешняя сила $P_0 e^{ip't}$, то правые части уравнения обобщенной координаты соответственно имеют вид

$$a_n e^{ip't}; \quad a_n = \frac{P_0 f_n(x_p)}{m_n},$$

где $f_n(x_p)$ — значение формы собственных колебаний корпуса в точке приложения внешней силы.

Амплитуда вынужденных гармонических колебаний

$$q_n^{(0)} = \frac{P_0 f_n(x_p)}{m_n \omega_n^2 \sqrt{(1 - \gamma_n^2)^2 + 4\xi_n^2 \gamma_n^2}}; \quad \gamma_n = \frac{p}{\omega_n}.$$

При резонансе для малых значений коэффициента относительного затухания ξ_n

$$(q_n^{(0)})_{\max} \approx \frac{P_0 f_n(x_p)}{m_n 2\xi_n \omega_n^2}; \quad \xi_n \approx \frac{P_0 f_n(x_p)}{2(q_n^{(0)})_{\max} \omega_n^2 m_n}. \quad (8.60)$$

Определив экспериментально максимальную амплитуду, можем вычислить искомый коэффициент ξ_n .

По литературным данным, для ракеты $\xi_n \approx 0,02$.

Если трение считать конструкционным, то амплитуда вынужденных гармонических колебаний на основании уравнения (5.5) равна

$$q_n^{(0)} = \frac{P_0 f_n(x_p)}{m_n \omega_n^2 \sqrt{(1 - \gamma_n^2)^2 + [\psi/(2\pi)]^2}}.$$

При резонансе для малых значений коэффициента ψ

$$(q_n^{(0)})_{\max} = \frac{P_0 f_n(x_p)}{m_n \omega_n^2 [\psi/(2\pi)]}; \quad \frac{\psi}{2\pi} = \frac{P_0 f_n(x_p)}{m_n \omega_n^2 (q_n^{(0)})_{\max}}. \quad (8.61)$$

В зависимости от принятой гипотезы из анализа экспериментальных данных можно определить или коэффициент относительного затухания ξ , или коэффициент поглощения ψ . Если принять гипотезу Фогта или гипотезу вязкого трения, то по формуле (8.60) найдем коэффициент относительного затухания ξ_n . Если принять гипотезу Сорокина, то по формуле (8.61) найдем коэффициент поглощения ψ .

Зависимость силы трения в корпусе ракеты от характера колебаний (частоты и амплитуды) в действительности сложнее, чем это предполагается гипотезами Фогта, Сорокина или гипотезой вязкого трения. Об этом, в частности, свидетельствует большой разброс экспериментальных данных по определению коэффициентов затухания, а также зависимость этих коэффициентов от частоты и амплитуды колебаний.

Для анализа задачи об устойчивости поперечных упругих колебаний в первом приближении достаточно знать амплитуды вынужденных колебаний корпуса в резонансном режиме колебаний. Эти амплитуды можно определить путем расчета, пользуясь любой из гипотез о силах трения, если известны коэффициенты ξ_n и ψ .

Если коэффициенты ξ_n и ψ определяются экспериментально резонансным методом, то из одного и того же эксперимента на основании формул (8.60) и (8.61) получим соотношение

$$\xi_n = \psi / (4\pi).$$

Следовательно, амплитуды вынужденных упругих колебаний, вычисленные для $\gamma_n = 1$, не будут зависеть от выбора гипотезы, если принять $\xi_n = \psi / (4\pi)$. В этом смысле для резонансных колебаний выбор гипотезы о силе трения не имеет значения. Первостепенное значение имеют сами величины коэффициентов ξ_n или ψ .

Глава IX

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УПРУГОЙ РАКЕТЫ С БАКАМИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННЫМИ ЖИДКОСТЬЮ

9.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Влияние упругих свойств корпуса и колебаний жидкости в баках на динамические характеристики ракеты как объекта регулирования до сих пор рассматривалось отдельно. Раздельное рассмотрение выгодно тем, что позволяет четко выяснить физические причины изменения динамических характеристик и получить сравнительно простые уравнения для их определения. Качественные и в некоторых случаях количественные зависимости дают правильное представление о динамических свойствах объекта только в том случае, когда частоты собственных колебаний ракеты, обусловленные подвижностью жидкости в баках и упругими свойствами корпуса, не являются близкими.

Термин "близость собственных частот" количественно не определен и его надо рассматривать в связи с точностью анализа, которая, в свою очередь, зависит от точности исходных данных. Некоторое представление об этом можно сделать из рассмотрения амплитудно-частотных характеристик ракеты с учетом колебаний жидкости в баках и упругих колебаний корпуса.

Одной из важнейших характеристик летательных аппаратов как объектов регулирования является спектр собственных частот колебаний (частоты управляемых движений аппарата как жесткого тела вокруг центра масс, частоты колебаний топлива в баках, частоты колебаний конструкции). От соотношения этих частот зависит степень трудности обеспечения устойчивости соответствующих видов движения, а следовательно, и степень сложности системы стабилизации.

По мере роста размеров ракет-носителей наблюдается сближение собственных частот упругих колебаний с частотами колебаний топлива в баках и частотами колебаний ракет вокруг центра масс.

Для примера на рис. 9.1 представлен спектр собственных частот колебаний для трех ступеней ракеты-носителя "Сатурн-5": *a* – первой ступени; *b* – второй ступени; *в* – третьей ступени. На рисунке обозначено: I – частота колебаний ракеты с системой управления по тангажу и рысканию; II – частота колебаний ракеты с системой управления по

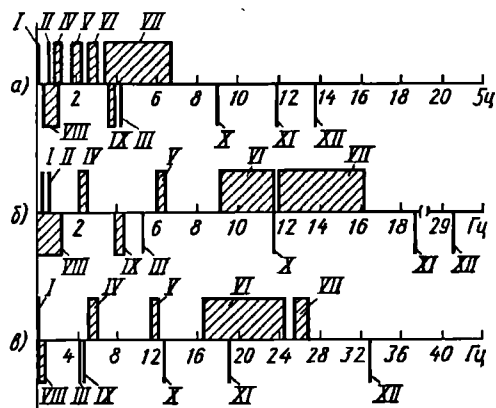


Рис. 9.1

крену; III – частота системы управления вектором тяги; IV, V, VI, VII – частоты первого, второго, третьего и четвертого тонов изгибных колебаний корпуса; VIII – частота колебаний жидкого топлива в баках; IX – частота нулевой эффективности поворотного двигателя; X, XI, XII – частоты первого, второго и третьего тонов крутильных колебаний корпуса.

Наибольший интерес представляет спектр частот собственных колебаний первой ступени. В диапазоне частот от 0 до 4 Гц расположены частоты четырех первых форм изгибных колебаний корпуса. Диапазон частот первого тона изгибных колебаний пересекается с частотами колебаний жидкости, что имеет принципиальное значение при компоновке системы стабилизации. Собственные частоты четвертого тона колебаний по времени полета изменяются почти в два раза. Эта особенность характерна и для высших форм колебаний последующих ступеней ракеты.

Следует обратить внимание на то, что имеет место довольно низкая (4 Гц) частота собственных колебаний системы привод – поворотный двигатель, свидетельствующая о том, что в этом диапазоне частот необходимо учитывать динамические характеристики органа управления (поворотного двигателя).

Динамическая модель может быть представлена в виде прямого неоднородного упругого стержня, на котором подвешены математические маятники (или укреплены грузы на пружинах) и физический маятник – ЖРД (рис. 9.2).

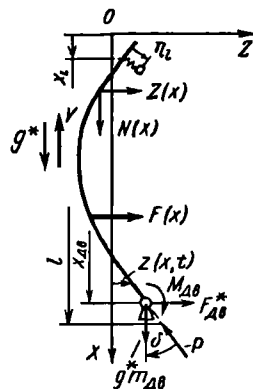


Рис. 9.2

Стержень с маятниками совершает движение в поле массовых сил с интенсивностью \bar{g}^* и подвержен действию системы внешних сил – аэродинамических и реактивных.

9.2. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ РАКЕТЫ С УЧЕТОМ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАКАХ

Невозмущенным движением будем считать прямолинейный полет ракеты со скоростью v в поле массовых сил с интенсивностью \bar{g}^* . Вектор \bar{g}^* направлен против движения ракеты, а его величина

$$g^* = (P_z - X_a)/m,$$

где эффективная тяга $P_z = P - X_p$; X_a – сила аэродинамического сопротивления; m – масса ракеты.

При составлении уравнений возмущенного движения стержня кроме сил инерции и упругих сил конструкции будем учитывать следующие силы:

силы воздействия на корпус от колебаний жидкости в баках и от движения поворотного двигателя;

силы Кориолиса, при вычислении которых считаем, что массовый расход через произвольное поперечное сечение ракеты равен $\mu(x)$ и определяется выработкой топлива из баков ракеты; тогда действующая в каждом сечении ракеты погонная сила Кориолиса

$$F_K(x) = -2\mu(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x \partial t};$$

реактивные силы: тяга двигателя P ; сила P является следящей, т.е. при упругих деформациях ракеты все время направлена вдоль упругой оси корпуса; при отклонении поворотного двигателя на угол δ возникает поперечная составляющая этой силы $P\delta$;

силы конструкционного демпфирования; аэродинамические поперечные силы, действующие на упругий корпус ракеты $Z_a(x)$;

возмущающие силы $F_b(x)$ от действия ветра, от технологических погрешностей в установке двигателя и т.п.

Используем полученное в гл. VIII уравнение движения упругого неоднородного стержня под действием следящей силы (8.2):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \right] +$$

$$+ m(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} = q(x, t). \quad (9.1)$$

Здесь $m(x)$ – погонная масса корпуса, включая "затвердевшую" жидкость и массу поворотного двигателя; $N(x)$ – погонная сжимающая сила в поперечном сечении корпуса;

$$N(x) = g^* \int_0^x m(x) dx + \int_0^x X_a(x) dx,$$

где $X_a(x)$ – погонная сила аэродинамического сопротивления.

В распределенные внешние для стержня силы $q(x, t)$ включим: аэродинамические силы (5.29)

$$\Delta Z_a(x) = -\frac{\rho v^2}{2} C_{Z_a}^{(0)}(x) \left[\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right];$$

силы Кориолиса

$$-2\mu(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x \partial t};$$

силы от колебаний математических маятников или грузов на пружинах. Так как они сосредоточенные, то введем их с помощью δ -функции Дирака. Для i -го маятника распределенная поперечная сила будет равна

$$-\left[m_i \delta(x - x_i) \ddot{\lambda}_i - \frac{d}{dx} \delta(x - x_i) g^* m_i \lambda_i \right].$$

Здесь m_i, x_i – масса и координата i -го маятника.

К распределенным внешним нагрузкам относятся также силы и моменты от поворотного двигателя, которые запишем с помощью δ -функции Дирака так:

$$\delta(x - x_{дв}) F_{дв}; \quad -\frac{d}{dx} \delta(x - x_{дв}) M_{дв},$$

где $F_{дв}, M_{дв}$ – сосредоточенные сила и момент, передаваемые на корпус от поворотного двигателя; а также возмущающие силы $F_B(x, t)$.

Таким образом, внешняя сила может быть представлена в следующем виде:

$$q(x, t) = -\frac{\rho v^2}{2} C_{Z_a}^{(0)}(x) \left[\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right] - 2\mu(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x \partial t} -$$

$$- \sum_{i=1}^{i^{(0)}} \left[m_i \delta(x - x_i) \ddot{\lambda}_i - \frac{d}{dx} \delta(x - x_i) g^* m_i \lambda_i \right] + \delta(x - x_{дв}) F_{дв} -$$

$$- \frac{d}{dx} \delta(x - x_{дв}) M_{дв} + F_B(x, t). \quad (9.2)$$

Здесь $i^{(0)}$ – число учитываемых тонов колебаний жидкости во всех баках, имеющих свободную поверхность жидкости.

Подставив выражение $q(x, t)$ в уравнение (9.1), получим

$$L(z, x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EJ(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[N(x) \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \right] +$$

$$+ m(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} + \frac{\rho v^2}{2} C_{Z_a}^{(0)}(x) \left[\frac{\partial z(x, t)}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right] +$$

$$+ 2\mu(x) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x \partial t} + \sum_{i=1}^{i^{(0)}} \left[m_i \delta(x - x_i) \ddot{\lambda}_i - \frac{d}{dx} \delta(x - x_i) g^* m_i \lambda_i \right] -$$

$$- \delta(x - x_{дв}) F_{дв} + \frac{d}{dx} \delta(x - x_{дв}) M_{дв} - F_B(x, t) = 0. \quad (9.3)$$

Это дифференциальное уравнение должно быть дополнено уравнениями колебаний жидкости в баках (маятников) для обобщенных координат λ_i и уравнениями относительного движения поворотного двигателя, из которых должны быть определены силы $F_{дв}$ и момент $M_{дв}$.

Уравнения колебаний жидкости в баках без учета диссипативных сил аналогичны (3.56). Они могут быть представлены в виде

$$m_i \ddot{\lambda}_i + m_i \frac{g^*}{l_i} \lambda_i + m_i \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} \bigg|_{x_i} + g^* m_i \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \bigg|_{x_i} = 0 \quad (9.4)$$

$$(i = 1, 2, \dots, i^{(0)}).$$

Уравнения движения поворотного двигателя относительно оси вращения получены в гл. VIII. Воспользуемся уравнением (8.34) и добавим в него силы Кориолиса. Получим

$$I_{\text{дв}} \left[\ddot{\delta} + \frac{\partial^3 z(x, t)}{\partial x \partial t^2} \bigg|_{x_{\text{дв}}} \right] + k r (\delta - y_{\text{шт}}) + h_{\text{дв}} \dot{\delta} + m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial t^2} \bigg|_{x_{\text{дв}}} + m_{\text{дв}} g^* l_{\text{дв}} \left[\delta + \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \bigg|_{x_{\text{дв}}} \right] + \mu_{\text{дв}} (l'_{\text{дв}})^2 \left[\ddot{\delta} + \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x \partial t} \bigg|_{x_{\text{дв}}} \right] = 0, \quad (9.5)$$

где $l'_{\text{дв}}$ — длина двигателя; $\mu_{\text{дв}}$ — массовый расход через сопло двигателя.

Запишем теперь в явном виде выражения для сосредоточенной силы $F_{\text{дв}}$ и момента $M_{\text{дв}}$, передаваемых на корпус от поворотного двигателя. Так как силы и моменты, зависящие от переносного движения корпуса, уже учтены в уравнении (9.3), то величины $F_{\text{дв}}$ и $M_{\text{дв}}$ должны определяться из уравнений относительного движения поворотного двигателя. Получим

$$F_{\text{дв}} = m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} \ddot{\delta} + P_y \delta + 2 \mu_{\text{дв}} l'_{\text{дв}} \dot{\delta}; \quad (9.6)$$

$$M_{\text{дв}} = k_{\text{дв}} \delta = I_{\text{дв}} \ddot{\delta} + g^* m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} \delta + \mu_{\text{дв}} (l'_{\text{дв}})^2 \dot{\delta},$$

где P_y — тяга двигателей, используемых для управления. Таким образом, система уравнений (9.3) — (9.6) определяет возмущенное движение упругой ракеты с учетом колебаний жидкости в баках и динамики поворотного двигателя.

Упругие колебания корпуса $z(x, t)$ с учетом следящего характера тяги должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad \text{при } x = 0, x = l. \quad (9.7)$$

Функция $z(x, t)$ должна также удовлетворять условиям сопряжения в местах скачков изгибной жесткости

$$EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \bigg|_{x^*-0} = EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \bigg|_{x^*+0}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] \bigg|_{x^*-0} = \frac{\partial}{\partial x} \left[EJ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] \bigg|_{x^*+0}. \quad (9.8)$$

Воспользуемся теперь методом Бубнова — Галеркина для сведения дифференциального уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Полагаем, что $z(x, t)$ можно представить в виде

$$z(x, t) = \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} f_n(x) q_n(t). \quad (9.9)$$

В качестве функций $f_n(x)$ примем формы собственных колебаний ракеты без учета колебаний жидкости, динамики поворотного двигателя и сжимающих сил. Полагаем, что обобщенным координатам q_{-1} и q_0 соответствуют движения ракеты как жесткого тела $f_{-1}(x) = 1$ и $f_0(x) = x_C - x$. Такая система координатных функций является полной; каждая из этих функций удовлетворяет граничным условиям (9.7) и условиям сопряжения (9.8).

Подставив (9.9) в уравнения (9.3) — (9.5) и выполнив стандартные преобразования вида

$$\int_0^l L \left[x, t \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} f_n(x) q_n(t) \right] f_n dx = 0 \quad (n = -1, 0, 1, \dots, n^{(0)}),$$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений возмущенного движения упругой ракеты в следующей форме:

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} [a_{mn}\ddot{q}_n + (d_{mn} + d_{mn}^* + e_{mn})\dot{q}_n + (b_{mn} + c_{mn} + g_{mn})q_n] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i^{(0)}} (a_{ni}\ddot{\lambda}_i + g_{ni}^*\lambda_i) + a_{n\delta}\ddot{\delta} + g_{n\delta}\dot{\delta} + e_{n\delta}\delta = F_n \quad (9.10)$$

$$(m, n = -1, 0, 1, 2, \dots, n^{(0)});$$

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} (a_{ni}\ddot{q}_n + g_{ni}q_n) + a_i\ddot{\lambda}_i + g_i\lambda_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, i^{(0)}); \quad (9.11)$$

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} (a_{\delta n}\ddot{q}_n + e_{\delta n}\dot{q}_n + g_{\delta n}q_n) + a_{\delta\delta}\ddot{\delta} + (d_{\delta\delta}^* + e_{\delta\delta})\dot{\delta} + (c_{\delta\delta} + g_{\delta\delta})\delta =$$

$$= c_{\delta\delta}(y_{\text{шт}}/r), \quad (9.12)$$

где

$$a_{mn} = \int_0^l m(x)f_m(x)f_n(x)dx;$$

$$a_{ni} = f_n(x_i)m_i; \quad a_i = m_i; \quad a_{\delta n} = a_{n\delta} = -m_{\text{дв}}l_{\text{дв}}f_n(x_{\text{дв}}) - I_{\text{дв}} \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_{\text{дв}}};$$

$$a_{\delta\delta} = I_{\text{дв}}; \quad c_{mn} = \int_0^l EJ \frac{d^2 f_m(x)}{dx^2} \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} dx; \quad c_{\delta\delta} = kr^2;$$

$$b_{mn} = \frac{\rho v^2}{2} \int_0^l C_{Za}^B(x) \frac{df_m(x)}{dx} f_n(x) dx; \quad (9.13)$$

$$d_{mn} = \frac{\rho v}{2} \int_0^l C_{Za}^B(x) f_m(x) f_n(x) dx; \quad d_{mn}^* = b_3 c_{mn};$$

$$e_{mn} = 2 \int_0^l \mu(x) \frac{df_m}{dx} f_n dx;$$

$$e_{n\delta} = -2l'_{\text{дв}} \mu_{\text{дв}} f_n(x_{\text{дв}}) - \mu_{\text{дв}} (l'_{\text{дв}})^2 \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_{\text{дв}}};$$

$$e_{\delta\delta} = \mu_{\text{дв}} (l'_{\text{дв}})^2; \quad e_{\delta n} = -\mu_{\text{дв}} (l'_{\text{дв}})^2 \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_{\text{дв}}};$$

$$g_{mn} = - \int_0^l N(x) \frac{df_m(x)}{dx} \frac{df_n(x)}{dx} dx + P f_m(l) \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_l;$$

$$g_{n\delta} = -P_y f_n(x_{\text{дв}}) - g^* m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_{\text{дв}}};$$

$$g_{\delta n} = -g^* m_{\text{дв}} l_{\text{дв}} \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_{\text{дв}}}; \quad g_{\delta\delta} = g^* m_{\text{дв}} l_{\text{дв}}; \quad (9.14)$$

$$g_{ni} = g^* m_i \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_i}; \quad g_i = m_i \omega_i^2.$$

В последней формуле ω_i – частота собственных колебаний i -го тона жидкости в баке.

Уравнения (9.10) соответствуют поперечным колебаниям упругого корпуса, (9.11) – колебаниям жидкости в баках, (9.12) – уравнение движения поворотного двигателя. Коэффициенты уравнений характеризуют взаимодействие между различными обобщенными координатами, обусловленное силами различной физической природы. Так, коэффициенты a_{mn} , a_{ni} , $a_{n\delta}$ характеризуют взаимодействие инерционных сил, c_{mn} –

сил упругости, d_{mn} – аэродинамического демпфирования, d_{nm}^* – конструкционного демпфирования, b_{mn} – сил аэродинамической жесткости; e_{mn} – сил Кориолиса, g_{mn} – сил, вызываемых ускорением g^* .

Уравнения возмущенного движения (9.10) – (9.12) получены при замене колебаний жидкости в баках колебаниями маятников. Это вносит некоторую погрешность при определении коэффициентов инерционного взаимодействия a_{mn} и особенно коэффициента a_{00} , равного моменту инерции "затвердевшей" ракеты относительно центра тяжести. Чем длиннее ракета, тем эта погрешность меньше. В расчетах величину a_{00} следует считать равной моменту инерции ракеты с учетом движения жидкости относительно стенок баков, т.е. $a_{00} = I$. Для цилиндрического бака выражение для I дается в гл. IV; для других форм баков значения I можно найти в работе [16].

При выводе уравнений пренебрегали также диссипативными силами при колебаниях жидкости. Приближенно эти силы можно учесть, если в уравнение (9.11) добавить слагаемое $d_i \dot{\lambda}_i$, которое и будет характеризовать рассеяние энергии при колебаниях жидкости. С учетом сделанного замечания уравнение (9.11) можно представить в виде

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} (a_{ni} \ddot{q}_n + g_{ni} q_n) + a_i \ddot{\lambda}_i + d_i \dot{\lambda}_i + g_i \lambda_i = 0. \quad (9.15)$$

При выводе уравнений возмущенного движения в качестве точки приведения использовался центр массы тела, что выразилось в том, что функция $f_0(x)$ бралась в виде $f_0(x) = x_C - x$. Вообще говоря, в качестве точки приведения можно выбрать любую другую точку. Если в качестве такой точки принять метациентр системы $x_{\text{мц}}$, то функция $f_0(x)$ задается в виде $f_0(x) = x_{\text{мц}} - x$. Коэффициенты уравнений возмущенного движения по-прежнему будут определяться формулами (9.13), (9.14). Более того, если в качестве точки приведения взять метациентр, то изменяются только коэффициенты, содержащие индекс "0". Так, например, a_{00} – момент инерции твердого тела с жидкостью относительно метациентра равен

$$a_{00} = J + m(x_{\text{мц}} - x_C)^2. \quad (9.16)$$

Уравнения возмущенного движения можно несколько упростить, если использовать в качестве точки проведения метациентр системы и ввести некоторые преобразования для координат λ_i , характеризующих волновые колебания жидкости в баках.

До сих пор величины λ_i отсчитывались от оси ракеты, что эквивалентно отсчету волновых колебаний жидкости от плоскости, перпендикуляр-

ной оси бака. Будем теперь отсчитывать волновые колебания жидкости от плоскости, перпендикулярной направлению вектора g^* . Это равносильно тому, что перемещения подвижной массы m_i будут отсчитываться от прямой, параллельной вектору g^* и проходящей через точку подвеса маятника (см. рис. 3.12). Новые координаты $r_i = \lambda_{(2)n}$ связаны с $\lambda_i = \lambda_n$ следующим соотношением:

$$r_i = \lambda_i + l_i \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \Big|_{x_i} = \lambda_i + l_i \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} \frac{df_n(x)}{dx} \Big|_{x_i} q_n(t). \quad (9.17)$$

В качестве обоснования выбора новой системы отсчета можно привести следующие соображения. Пусть ракета совершает медленное поперечное движение. Поместим на свободной поверхности жидкости плавающую крышку, которая препятствует возникновению волновых колебаний. При медленных движениях ракеты крышка в каждый момент будет находиться в положении, перпендикулярном вектору g^* . Естественно, отклонения свободной поверхности, возникающие при волновых колебаниях, следует отсчитывать от плоскости, совпадающей в каждый момент времени с плавающей крышкой. Таким образом удастся разделить движения жидкости, связанные с изменением ориентации вектора g^* относительно оси бака и волновыми колебаниями жидкости, возникающими при возмущенном движении ракеты.

Используя значение коэффициента g_{ni} , соотношение (9.17) можно переписать в виде

$$\lambda_i = r_i - \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} \frac{g_{ni}}{g_i} q_n. \quad (9.18)$$

Подставив выражение (9.18) в уравнение (9.10), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} \left[\left(a_{mn} - \sum_{i=-1}^{n^{(0)}} a_{ni} \frac{g_{ni}}{g_i} \right) \ddot{q}_n + (d_{mn} + d_{mn}^* + e_{mn}) \dot{q}_n + \right. \\ & \left. + \left(b_{mn} + c_{mn} + g_{mn} - \sum_{i=-1}^{n^{(0)}} g_{ni} \frac{g_{ni}}{g_i} \right) q_n \right] + \sum_{i=1}^{i^{(0)}} (a_{ni} \ddot{r}_i + g_{ni} r_i + \\ & + a_{n\delta} \ddot{\delta} + e_{n\delta} \dot{\delta} + g_{n\delta} \delta) = F_n \quad (m, n = -1, 0, 1, \dots, n^{(0)}). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Заменим в уравнении (9.11) величину λ_i соотношением (9.18):

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} \left(a_{ni} - a_i \frac{g_{ni}}{g_i} \right) \ddot{q}_n + a_i \ddot{r}_i + g_i r_i = 0.$$

Уравнения возмущенного движения упругой ракеты с учетом колебаний жидкости в баках представим теперь в виде

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} [\bar{a}_{mn} \ddot{q}_n + (d_{mn} + d_{mn}^* + e_{mn}) \dot{q}_n + (b_{mn} + c_{mn} + \bar{g}_{mn}) q_n] + \sum_{i=1}^{i^{(0)}} (\bar{a}_{ni} \ddot{r}_i + g_{ni} r_i) + a_{n\delta} \ddot{\delta} + e_{n\delta} \dot{\delta} + g_{n\delta} \delta = F_n \quad (9.20)$$

$$(m = -1, 0, 1, \dots, n^{(0)}).$$

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} \bar{a}_{ni} \ddot{q}_n + a_{ni} \ddot{r}_i + g_i r_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (9.21)$$

$$\sum_{n=-1}^{n^{(0)}} (a_{\delta n} \ddot{q}_n + e_{\delta n} \dot{q}_n + g_{\delta n} q_n) + a_{\delta\delta} \ddot{\delta} + (d_{\delta\delta}^* + e_{\delta\delta}) \dot{\delta} + (c_{\delta\delta} + g_{\delta\delta}) \delta = c_{\delta\delta} y_{шт} / r. \quad (9.22)$$

Здесь дополнительно к обозначениям уравнений (9.13), (9.14) введены следующие обозначения:

$$\bar{g}_{mn} = g_{mn} - \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} g_{ni} \frac{g_{ni}}{g_i};$$

$$\bar{a}_{mn} = \bar{a}_{nm} = a_{mn} - \sum_{n=-1}^{n^{(0)}} \left(\frac{a_{mi} g_{in} + a_{in} a_{ni}}{g_i} - \frac{a_i g_{mi} g_{in}}{g_i^2} \right); \quad (9.23)$$

$$\bar{a}_{mi} = a_{mi} - a_i \frac{g_{mi}}{g_i}; \quad \bar{a}_{in} = a_{in} - a_i \frac{g_{in}}{g_i};$$

$$d_{mi} = -d_i \frac{g_{mi}}{g_i}; \quad d_{in} = -d_i \frac{g_{in}}{g_i}.$$

Таким образом, уравнения возмущенного движения упругой ракеты с учетом колебаний жидкости в баках представлены в двух различных формах. Первая, когда в качестве точки приведения используется центр массы системы и перемещения λ_i подвижных масс жидкости m_i отсчитываются от оси ракеты, представлена системой дифференциальных уравнений (9.10) – (9.12). Вторая, когда точкой приведения является метацентр, а смещения r_i подвижных масс жидкости отсчитываются от прямой, параллельной вектору g^* , представлена системой дифференциальных уравнений (9.20) – (9.22).

Эти системы уравнений равноценны, однако при анализе различных частных случаев каждая из них может давать некоторые преимущества.

Представим теперь уравнения возмущенного движения упругой ракеты в матричной форме. Воспользуемся уравнениями движения (9.10) – (9.12). Аналогичные выкладки можно проделать и для уравнений (9.20) – (9.22).

Введем в рассмотрение вектор-столбец обобщенных координат $q(t)$ размерностью $(n^{(0)} + i^{(0)} + 3)$ вида

$$q(t) = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n^{(0)}} \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{i^{(0)}} \\ \delta \end{pmatrix}.$$

Из коэффициентов уравнений образуем матрицы коэффициентов:

A – инерции;

C – жесткости конструкции;

G – коэффициентов g_{mn} , g_{ni} и т.д., зависящих от реактивных и инерционных сил, обусловленных продольным ускорением;

B – аэродинамической жесткости;

D – аэродинамического демпфирования;

D* – конструкционного демпфирования;

E – демпфирования, обусловленного силами Кориолиса;

F – возмущающих сил;

R – градиентов управляющих сил.

Теперь уравнения возмущенного движения упругой ракеты могут быть представлены в следующей матричной форме:

$$A\ddot{q} + (D + D^* + E)\dot{q} + (C + G + B)q = F + R\delta, \quad (9.24)$$

где $\delta = y_{шт}/r$.

9.3. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ УПРУГОЙ РАКЕТЫ ПАКЕТНОЙ СХЕМЫ

До сих пор корпус ракеты для анализа динамики представлялся в виде одного упругого стержня. Такая аппроксимация применяется для одноступенчатых ракет и многоступенчатых ракет-носителей с поперечным делением ступеней. Ракеты-носители пакетной схемы обычно имеют продольное деление ступеней.

Динамическая модель ракеты-носителя пакетной схемы может быть представлена в виде пакета упруго связанных неоднородных стержней (рис. 9.3). В сечении A тяга от боковых блоков передается на центральный и поэтому здесь боковые блоки соединяются с центральным

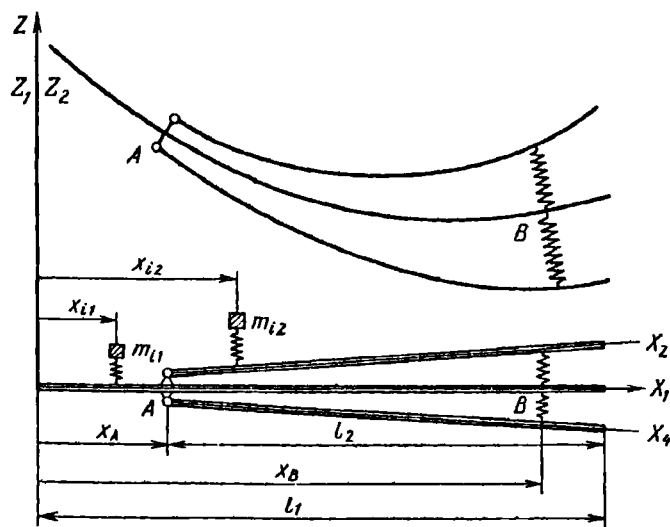


Рис. 9.3

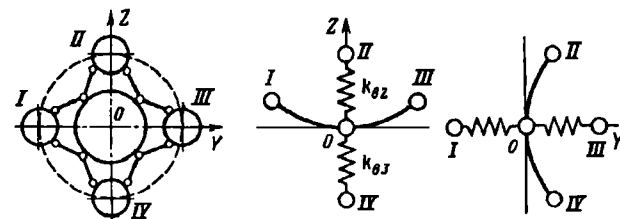


Рис. 9.4

жесткими сферическими шарнирами. В сечении B соединение блоков и в радиальном, и в окружном направлениях, как правило, является упругим.

На рис. 9.4 показана одна из возможных схем соединения блоков в сечении B . При колебаниях в плоскости OXZ жесткость связей для блоков II и IV будет одинаковой (k_{B2}), жесткость связей для блоков I и III будет также одинаковой (k_{B3}), однако $k_{B2} \neq k_{B3}$.

На центральном и боковых стержнях укреплены грузы на пружинах, которые имитируют колебания жидкости в баках, и физические маятники – поворотные ЖРД.

Для составления уравнений возмущенного движения стержней воспользуемся уравнением (9.3). Для центрального стержня в плоскости рыскания будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[E J_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_1} \left[N_1(x_1) \frac{\partial z_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right] + m_1(x_1) \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial t^2} + \\ & + h_1(x_1) \frac{\partial z_1(x_1, t)}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} C_{Za}^{(0)}(x_1) \left(\frac{\partial z_1(x_1, t)}{\partial x_1} - \frac{\partial z_1(x_1, t)}{v \partial t} \right) + \\ & + 2\mu_1(x_1) \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1 \partial t} + \sum_{i=1}^{i^{(0)}} \left[m_i \delta(x_1 - x_i) \ddot{\lambda}_i - \frac{d}{dx_i} \delta(x_1 - x_i) g^* m_i \lambda_i \right] - \\ & - \delta(x_1 - x_{m1}) F_{m1} + \frac{d}{dx_1} \delta(x_1 - x_{m1}) M_{m1} + \delta(x_1 - x_{A1}) (2F_{A2} + 2F_{A3}) + \\ & + \delta(x_1 - x_{B1}) (2F_{B2} + 2F_{B3}) - F_{B1}(x_1, t) = 0. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Здесь сжимающая сила в поперечном сечении равна

$$N_1(x_1) = g^* \int_0^{x_1} m_1(x_1) dx_1 + \int_0^{x_1} X_{1a}(x_1) dx_1 - \delta(x_1 - x_{A1}) 4P_A;$$

$4P_A$ – суммарная продольная сила от боковых стержней; $P_A = P_3 - m_2(t)g$, где P_3 – эффективная тяга двигателей бокового блока; $m_2(t)$ – масса бокового блока; $(2F_{A2} + 2F_{A3})$, $(2F_{B2} + 2F_{B3})$ – сосредоточенные поперечные силы реакций от боковых стержней; $i^{(0)}$ – число учитываемых тонов колебаний жидкости в баках центрального блока.

Уравнение возмущенного движения бокового стержня в плоскости рыскания будет почти аналогичным:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_2} \left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[N_2(x_2) \frac{\partial z_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right] + m_2(x_2) \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial t^2} + \\ & + h_2(x_2) \frac{\partial z_2(x_2, t)}{\partial z} + \rho \frac{v^2}{2} C_{Z_{2a}}^B(x_2) \left(\frac{\partial z_2}{\partial x_2} - \frac{\partial z_2(x_2, t)}{v \partial t} \right) + \\ & + 2\mu_2(x_2) \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2 \partial t} + \sum_{j=1}^{j_0} \left[m_{j0}(x_2 - x_j) \ddot{\lambda}_{j2} - \frac{d}{dx_2} \delta(x_2 - x_j) g^* m_j \lambda_{j2} \right] - \\ & - \delta(x_2 - x_{дв2}) F_{дв2} + \frac{d}{dx_2} \delta(x_2 - x_{дв2}) M_{дв2} - \\ & - \delta(x_2 - x_{A2}) F_{A2} - \delta(x_2 - x_{B2}) F_{B2} - F_{B2}(x_2, t) = 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

Здесь j_0 – число учитываемых тонов колебаний жидкости в боковом блоке.

Сжимающая сила в поперечном сечении бокового блока

$$N_2(x_2) = P_A + g^* \int_{x_{A2}}^{x_2} m_2(x_2) dx_2 + \int_{x_{A2}}^{x_2} x_{2a}(x_2) dx_2.$$

Уравнения для стержней II и IV одинаковы, для стержней I и III будут отличаться от (9.26) величинами λ_{j3} , $F_{дв3}$, $M_{дв3}$, F_{A3} , F_{B3} .

Изгибные колебания пакета стержней $z_1(x_1, t)$, $z_2(x_2, t)$, $z_3(x_3, t)$ должны удовлетворять граничным условиям на концах, условиям сопряжения пакета стержней и условиям сопряжения в местах скачков изгибной жидкости.

Граничные условия на концах стержней с учетом следящего характера тяги имеют вид

$$EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = l_1;$$

$$EJ \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} = 0 \quad \text{при } x_2 = x_{A2}, x_2 = l_2; \quad (9.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] = \begin{cases} F_{A2} & \text{при } x_2 = x_{A2} \\ 0 & \text{при } x_2 = l_2. \end{cases}$$

Условия сопряжения пакета стержней могут быть представлены в виде

$$z_1(x_1, t)|_{x_1=x_{A1}} = z_2(x_2, t)|_{x_2=x_{A2}};$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] \Big|_{x_1=x_{A1}+0} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] \Big|_{x_1=x_{A1}-0} = \\ & = 2F_{A2} + 2F_{A3}; \end{aligned} \quad (9.28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] \Big|_{x_1=x_{B1}+0} - \frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] \Big|_{x_1=x_{B1}-0} = \\ & = 2F_{B2} + F_{B3}. \end{aligned}$$

Силы реакций могут быть определены из уравнений

$$F_{B2} = k_{B2}[z_2(x_{B2}, t) - z_1(x_{B1}, t)];$$

$$F_{B3} = k_{B3}[z_3(x_{B3}, t) - z_1(x_{B1}, t)];$$

(9.29)

$$F_{A2} + F_{B2} = \int_{x_{A2}}^{l_2} m_2(x_2) \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial t^2} dx_2 + \int_{x_{A2}}^{l_2} F_{B2}(x_2, t) dx_2 + F_{дв2};$$

$$F_{A3} + F_{B3} = \int_{x_{A3}}^{l_3} m_3(x_3) \frac{\partial^2 z_3(x_3, t)}{\partial t^2} dx_3 + \int_{x_{A3}}^{l_3} F_{B3}(x_3, t) dx_3 + F_{дв3}.$$

Условия сопряжения в местах скачков изгибной жесткости стержней (в сечениях x^*) аналогичны условиям (9.8). Например, для центрального стержня

$$EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \bigg|_{x_1^*-0} = EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \bigg|_{x_1^*+0};$$

(9.30)

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] \bigg|_{x_1^*-0} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left[EJ_1 \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1^2} \right] \bigg|_{x_1^*+0}.$$

Для бокового стержня, кроме того, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] \bigg|_{x_{B2}+0} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] \bigg|_{x_{B2}-0} = F_{B2}. \quad (9.31)$$

Дифференциальные уравнения возмущенного движения стержней должны быть дополнены уравнениями колебаний жидкости в баках и уравнениями движения поворотных двигателей. Здесь будет три группы уравнений колебаний жидкости – для центрального блока, для бокового

блока II (IV) и для бокового блока III (I). Уравнения аналогичны уравнениям (9.4):

$$m_i \ddot{z}_i + m_i \frac{g^*}{l_i} z_i + m_i \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial z^2} \bigg|_{x_i} + g^* m_i \frac{\partial z_1(x_1, t)}{\partial x_1} \bigg|_{x_i} = 0$$

($i = 1, 2, \dots, i^{(0)}$);

$$m_j \ddot{z}_j + m_j \frac{g^*}{l_j} z_j + m_j \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial t^2} \bigg|_{x_j} + g^* m_j \frac{\partial z_2(x_2, t)}{\partial x_2} \bigg|_{x_j} = 0; \quad (9.32)$$

$$m_j \ddot{z}_j + m_j \frac{g^*}{l_j} z_j + m_j \frac{\partial^2 z_3(x_3, t)}{\partial t^2} \bigg|_{x_j} + g^* m_j \frac{\partial z_3(x_3, t)}{\partial x_3} \bigg|_{x_j} = 0$$

($j = 1, 2, \dots, j^{(0)}$).

Полагаем, что двигатели и жесткости их крепления к корпусу одинаковы для центрального и всех боковых блоков. Тогда уравнения движения поворотных двигателей для различных блоков будут отличаться только различными движениями блоков. Воспользуемся уравнением (9.5). Будем иметь для центрального блока

$$I_{дв} \left[\ddot{\delta}_1 + \frac{\partial^3 z_1(x_1, t)}{\partial x_1 \partial t^2} \bigg|_{x_{дв1}} \right] + k r (\delta_1 - y_{шт}) + h_{дв} \dot{\delta}_1 + m_{дв} l_{дв} \frac{\partial^2 z_1(x_{дв1}, t)}{\partial t^2} +$$

(9.33)

$$+ m_{дв} g^* l_{дв} \left[\delta_1 + \frac{\partial z_1(x_1, t)}{\partial x_1} \bigg|_{x_{дв1}} \right] + \mu_d (l'_{дв})^2 \left[\delta_1 + \frac{\partial^2 z_1(x_1, t)}{\partial x_1 \partial t} \bigg|_{x_{дв1}} \right] = 0.$$

Для боковых блоков II (IV) и III (I) уравнения можно получить из (9.33) заменой индекса 1 на индекс 2 и 3 соответственно.

В уравнениях (9.25) и (9.26) в $m_1(x)$ и $m_2(x)$ включена и масса двигателей. Поэтому сосредоточенные силы $F_{дв}$ и моменты $M_{дв}$,

передаваемые на корпус, определяются из уравнений относительного движения поворотного двигателя. Получим для центрального блока

$$\begin{aligned} F_{дв1} &= m_{дв} l_{дв} \ddot{\delta}_1 + P_{y1} \delta_1 + 2\mu_d l'_{дв} \dot{\delta}_1, \\ M_{дв1} &= k_{дв1} \delta = I_{дв} \ddot{\delta}_1 + g^* m_{дв} l_{дв} \delta_1 + \mu_d (l'_{дв})^2 \dot{\delta}_1. \end{aligned} \quad (9.34)$$

Для боковых блоков II (IV) и III (I) уравнения будут такими же, как (9.34), но индекс 1 в них должен быть заменен на 2 и 3 соответственно.

Уравнения возмущенного движения упругой ракеты пакетной схемы с учетом колебаний жидкости в баках и динамики поворотных двигателей в плоскости рыскания представляются, таким образом, системой (9.25) – (9.34).

Для ракеты-носителя пакетной схемы существенными оказываются изгибно-крутильные колебания вокруг продольной оси X . Центральный блок в этой схеме будет совершать крутильные колебания, а боковые блоки – крутильные колебания вокруг собственных продольных осей и изгибные колебания в окружном направлении.

Уравнение крутильных колебаний центрального блока можно представить в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} \left(GJ_{x_1} \frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right) + I_{x_1}(x_1) \frac{\partial^2 \theta_1(x_1, t)}{\partial t^2} - \delta'(x_1 - x_{A1}) M_{A1} - \\ - \delta'(x_1 - x_{B1}) M_{B1} - \delta'(x_1 - x_{дв1}) M_{дв1} = 0, \end{aligned} \quad (9.35)$$

где GJ_{x_1} – крутильная жесткость центрального блока; I_{x_1} – погонный момент инерции центрального блока относительно продольной оси X_1 ; M_{A1} , M_{B1} – моменты сил реакций связи в сечениях A и B ; $M_{дв1}$ – момент от двигателей центрального блока; $\theta_1(x_1, t)$ – угол поворота поперечного сечения центрального блока.

Условия связи всех боковых блоков с центральным одинаковые как в сечении A , так и в сечении B , поэтому уравнения крутильных и изгибных колебаний боковых блоков будут также одинаковыми. Полагаем, что в сечении A связь выполнена в виде сферического шарнира, силами трения в котором можно пренебречь. Тогда уравнение крутильных колебаний бокового блока будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x_2} \left[GJ_{x_2} \frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right] + I_{x_2}(x_2) \frac{\partial^2 \theta_2(x_2, t)}{\partial t^2} - \\ - \delta(x_2 - x_{B2}) M_{B2} - \delta(x_2 - x_{дв2}) M_{дв2} = 0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Уравнение изгибных колебаний бокового блока с учетом следящего характера тяги двигателей и колебаний жидкости в баках будет таким же, как и уравнение (9.26).

Функции $\theta_1(x_1, t)$, $\theta_2(x_2, t)$, $z_2(x_2, t)$ должны удовлетворять граничным условиям на концах стержней, условиям сопряжения пакета стержней и условиям сопряжения в местах скачков крутильной и изгибной жесткостей.

Граничные условия на концах стержней можно представить в виде

$$\begin{aligned} GJ_{x_1} \frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} &= 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = l_1; \\ GJ_{x_2} \frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} &= 0 \quad \text{при } x_2 = x_{A2}, x_2 = l_2; \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] &= \begin{cases} F'_{A2} & \text{при } x_2 = x_{A2} \\ 0 & \text{при } x_2 = l_2. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.37)$$

Условия сопряжения стержней в сечениях A и B можно представить в виде

$$\begin{aligned} r_A \theta_1(x_{A1}, t) &= z_2(x_{A2}, t); \\ \left[GJ_{x_1} \frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_{A1}+0} - \left[GJ_{x_1} \frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_{A1}-0} &= M_{A1}; \\ \left[GJ_{x_1} \frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_{B1}+0} - \left[GJ_{x_1} \frac{\partial \theta_1(x_1, t)}{\partial x_1} \right]_{x_1=x_{B1}-0} &= M_{B1}; \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] \Big|_{x_2=x_{B2}+0} - \frac{\partial}{\partial x_2} \left[EJ_2 \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial x_2^2} \right] \Big|_{x_2=x_{B2}-0} = F'_{B2};$$

$$\left[GJ_{x_2} \frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_2=x_{B2}+0} - \left[GJ_{x_2} \frac{\partial \theta_2(x_2, t)}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_2=x_{B2}-0} = M_{B2}.$$

Силы реакций связей могут быть определены из уравнений

$$\begin{aligned} M_{дв1} &= 4r_A F'_{A2}; \\ F'_{B2} &= k'_{B2}[z_2(x_{B2}, t) - r_{B2}\theta_1(x_{B1}, t)]; \\ M_{B1} &= 4(M_{B2} + r_{A2}F'_{B2}); \quad M_{B2} = k''_{B2}\theta_2(x_{B2}, t); \\ F'_{A2} + F'_{B2} &= \int_{x_{A2}}^{l_2} m_2(x_2) \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial t^2} dx_2, \end{aligned} \quad (9.39)$$

где k'_{B2} – жесткость связи в сечении B по отношению к линейному перемещению бокового блока в окружном направлении; k''_{B2} – угловая жесткость связи в сечении B по отношению к вращению бокового блока; r_{A1}, r_{B2} – расстояния между продольными осями центрального и боковых блоков в сечениях A и B .

Уравнения колебаний жидкости в баках бокового блока аналогичны уравнению (9.33):

$$m_j \ddot{\lambda}_{j2} + m_j \frac{g^*}{l_j} \lambda_{j2} + m_j \frac{\partial^2 z_2(x_2, t)}{\partial t^2} \Big|_{x_j} + g^* m_j \frac{\partial z_2(x_2, t)}{\partial x_2} \Big|_{x_j} = 0. \quad (9.40)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений, характеризующих изгибно-крутильные колебания пакета упруго связанных стержней, представляется уравнениями (9.26) и (9.36) – (9.40).

Если в крутильных колебаниях жидкость практически не участвует, то при изгибных колебаниях боковых блоков часть жидкости в баках совершает волновые колебания, которые могут быть существенными при движении всей системы вокруг продольной оси.

9.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАКЕТЫ И ИХ СВОЙСТВА

Рассмотрим передаточную функцию упругой ракеты по угловому положению с учетом колебаний жидкости в баках $W_y(p)$, которая согласно (8.48) может быть представлена в виде

$$W_y(p) = \left\{ \frac{\partial f(x_r)}{\partial x} \right\}^T \frac{q(p)}{\delta(p)}.$$

Воспользуемся уравнением возмущенного движения ракеты (9.24), положив в нем вектор-столбец $F = 0$:

$$[Ap^2 + (D + D^* + \bar{D} + E)p + C + G + B]q(p) = R\delta(p). \quad (9.41)$$

В уравнение добавлена матрица \bar{D} – коэффициентов демпфирования, обусловленных диссипацией энергии при колебаниях жидкости. Это матрица коэффициентов

$$d_{in} = -d_i(g_{in}/g_i) \quad (i = 1, 2, \dots, i^{(0)}; \quad n = -1, 0, 1, \dots, n^{(0)}).$$

Разрешив систему алгебраических уравнений (9.41), получим

$$\frac{q_n(p)}{\delta(p)} = \frac{c_{\delta\delta} \Delta_{\delta n}(p)}{\Delta(p)}. \quad (9.42)$$

Здесь $\Delta(p)$ – определитель вида

$$\Delta(p) = |Ap^2 + (D + D^* + \bar{D} + E)p + C + G + B|;$$

$\Delta_{\delta n}(p)$ – алгебраическое дополнение, получаемое из определителя $\Delta(p)$ вычерчиванием строки, соответствующей $\delta(p)$ и столбца, соответствующего $q_n(p)$.

Подставив решение (9.42) в выражение передаточной функции $W_y(p)$, найдем

$$\bar{W}_y(p) = \frac{C_{\delta\delta} \sum_{n=1}^{n^{(0)}} \delta_{\delta n}(p) \frac{\partial f_n(x_r)}{\partial x}}{\Delta(p)}. \quad (9.43)$$

Знаменатель этой функции есть полином от p порядка $s_1 = 2(n^{(0)} + i^{(0)} + 3)$, а числитель – полином от p порядка $s_2 = 2(n^{(0)} + i^{(0)} + 2)$, т.е.

$$\bar{W}_y(p) = k \sum_{s=0}^{s_2} b_s p^s / \sum_{s=0}^{s_1} a_s p^s.$$

Если известны корни полинома $\Delta(p)$, которые называются полюсами передаточной функции, то этот полином можно разложить на множители:

$$\sum_{s=0}^{s_1} a_s p^s = (A_0 p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4) \prod_{n=1}^{n^{(0)}} (p^2 + 2\varepsilon_{*n} p + \omega_{*n}^2) \prod_{i=1}^{i^{(0)}} (p^2 + 2\varepsilon_{*i} p + \omega_{*i}^2). \quad (9.44)$$

Первый множитель определяет корни уравнения, соответствующего движению ракеты как твердого тела; множители $(p^2 + 2\varepsilon_{*n} p + \omega_{*n}^2)$ определяют корни, порождаемые упругими колебаниями корпуса ракеты; $(p^2 + 2\varepsilon_{*i} p + \omega_{*i}^2)$ – корни, порождаемые колебаниями жидкости в баках, а $(p^2 + 2\varepsilon_{*i} p + \omega_{*i}^2)$ – корни, соответствующие колебаниям поворотного двигателя.

Корни числителя соответствуют нулям передаточной функции и по аналогии с выражением (9.44)

$$\sum_{s=0}^{s_2} b_s p^s = (B_0 p^2 + B_1 p + B_2) \prod_{n=1}^{n^{(0)}} (p^2 + 2\varepsilon_{0n} p + \omega_{0n}^2) \prod_{i=1}^{i^{(0)}} (p^2 + 2\varepsilon_{0i} p + \omega_{0i}^2). \quad (9.45)$$

Передаточную функцию ракеты (с учетом динамики поворотного двигателя) $\bar{W}_y(p)$ можно теперь представить в виде произведения четырех сомножителей:

$$\bar{W}_y(p) = W_{y,r}(p) W_{y,y}(p) W_{y,z}(p) W_{y,\delta}(p), \quad (9.46)$$

где

$$W_{y,r}(p) = \frac{B_0 p^2 + B_1 p + B_2}{A_0 p^2 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4} \quad (9.47)$$

– передаточная функция, обусловленная движением ракеты как твердого тела;

$$W_{y,y}(p) = k_{y,y} \prod_{n=1}^{n^{(0)}} \frac{p^2 + 2\varepsilon_{0n} p + \omega_{0n}^2}{p^2 + 2\varepsilon_{*n} p + \omega_{*n}^2} \quad (9.48)$$

– передаточная функция, обусловленная упругими свойствами корпуса ракеты;

$$W_{y,z}(p) = k_{y,z} \prod_{i=1}^{i^{(0)}} \frac{p^2 + 2\varepsilon_{0i} p + \omega_{0i}^2}{p^2 + 2\varepsilon_{*i} p + \omega_{*i}^2} \quad (9.49)$$

– передаточная функция, порождаемая колебаниями жидкости в баках;

$$W_{y,\delta}(p) = k_{y,\delta} \frac{p^2 + 2\varepsilon_{0\delta} p + \omega_{0\delta}^2}{p^2 + 2\varepsilon_{* \delta} p + \omega_{* \delta}^2} \quad (9.50)$$

– передаточная функция, порождаемая колебаниями поворотного двигателя.

Посмотрим, как изменится структура передаточной функции ракеты, если частота собственных колебаний поворотного двигателя много больше частот рассматриваемых колебаний ракеты. В этом случае можно положить $c_{\delta\delta} = \infty$. Тогда

$$\lim_{c_{\delta\delta} \rightarrow \infty} \frac{c_{\delta\delta}}{\Delta(p)} = \frac{1}{\Delta'(p)},$$

где $\Delta'(p)$ есть минор, полученный из $\Delta(p)$ вычерчиванием строки и столбца, соответствующих координате δ . Разложение $\Delta'(p)$ на множители имеет вид (9.44), если в нем опустить последний сомножитель, обусловленный колебаниями двигателя, однако значения коэффициентов A_s , ω_{*n} , ε_{*n} , ω_{*i} , ε_{*i} будут уже иными, поскольку они определяются корнями уравнения $\Delta'(p) = 0$.

Так как передаточная функция

$$W_y(p) = \lim_{s \rightarrow -\infty} W_y(p),$$

то структуру передаточной функции ракеты теперь можно представить в следующем виде:

$$W_y(p) = W_{y,t}(p) W_{y,y}(p) W_{y,z}(p) (p^2 + \varepsilon_{0\delta} p + \omega_{0\delta}^2). \quad (9.51)$$

Следует подчеркнуть, что нули передаточной функции $W_y(p)$ равны нулям передаточной функции $\bar{W}_y(p)$.

Используя приведенный метод, можно получить структуру передаточных функций $\bar{W}_{y,c}(p)$, $\bar{W}_{y,u}(p)$ или $W_y^*(p)$ и $\bar{W}_y(p)$.

9.5. МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

Предварительный анализ устойчивости движения ракеты как сложной динамической системы в зависимости от изменения каких-либо параметров, например, коэффициента усиления автомата стабилизации, наряду с частотным методом удобно проводить методом корневого годографа.

Основные положения метода корневого годографа можно пояснить следующим образом. Пусть мы имеем характеристическое уравнение замкнутой системы "объект регулирования – автомат стабилизации":

$$1 + W_{AC}(p)[W_0(p)] = 0, \quad (9.52)$$

причем

$$W_{AC}(p) = k_{AC} \Phi_{AC}(p),$$

где k_{AC} , $\Phi_{AC}(p)$ – коэффициент усиления и передаточная функция автомата стабилизации.

Представим передаточную функцию разомкнутой цепи "объект регулирования – автомат стабилизации" в виде

$$\Phi_{AC}(p)[W_0(p)] = - \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p - p_{0i})}{a_n \prod_{i=1}^n (p - p_{*i})}. \quad (9.53)$$

Здесь p_{*i} и p_{0i} являются полюсами и нулями передаточной функции разомкнутой цепи. Коэффициенты при старших членах полиномов числителя (порядка m) и знаменателя (порядка n) есть b_m и a_n . Порядок знаменателя в физически реализуемых системах больше порядка числителя, т.е. $n > m$. Если $-b_m/a_n > 0$, то корневой годограф называется нечетным, а при $-b_m/a_n < 0$ – четным.

Корни характеристического уравнения замкнутой системы $1 -$

$$-k_{AC} \frac{b_m \prod_{i=1}^m (p - p_{0i})}{a_n \prod_{i=1}^n (p - p_{*i})} = 0$$

зависят от величины коэффициента k_{AC} . При изменении коэффициента k_{AC} в пределах $0 \leq k_{AC} \leq \infty$ они образуют некоторые траектории (годографы) на комплексной плоскости Z , причем корневые траектории начинаются в полюсах p_{*i} и оканчиваются в нулях p_{0i} передаточ-

ной функции разомкнутой цепи либо уходят в бесконечность.

Рассмотрим произвольную точку A комплексной плоскости Z и проведем радиусы-векторы из нулей и полюсов передаточной функции разомкнутой цепи в эту точку (рис. 9.5). Углы β_i и α_i этих векторов с действительной осью будем называть фазовыми углами. Чтобы точка A принадлежала корневой траектории, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\sum_{(m)} \beta_i - \sum_{(n)} \alpha_i = \pm \pi \pm 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

– для нечетного корневого годографа и

$$\sum_{(m)} \beta_i - \sum_{(n)} \alpha_i = \pm 2\pi k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

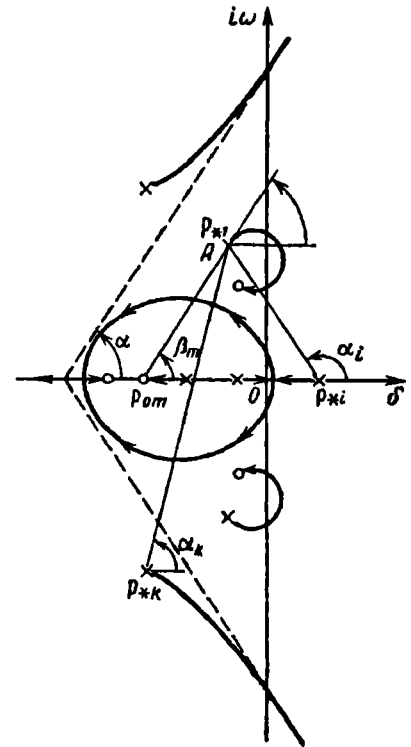


Рис. 9.5

– для четного корневого годографа.

Угол выхода корней траектории из произвольного полюса, например p_{*1} , для нечетного корневого годографа

$$\alpha_1 = -\sum_{i=2}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \pm \pi \pm 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots); \quad (9.54)$$

для четного корневого годографа

$$\alpha_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i + \sum_{i=1}^m \beta_i \pm 2\pi k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

В этих формулах под α_i и β_i следует понимать фазовые углы векторов, проведенных из всех полюсов и нулей передаточной функции разомкнутой цепи в первый полюс.

Аналогичные соотношения имеют место для углов входа корневой траектории в нуль передаточной функции:

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=2}^m \beta_i \pm \pi \pm 2\pi k \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i - \sum_{i=2}^m \beta_i \pm 2\pi k \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

При $k_{AC} \rightarrow \infty$ ($n - m$) корневых траекторий уходят в бесконечность.

Асимптоты этих траекторий расположены под углом

$$\alpha = \frac{\pm \pi}{n - m} \pm \frac{2\pi k}{n - m} \quad (k = 1, 2, \dots);$$

$$\alpha = \frac{2\pi}{n - m} + \frac{2\pi k}{n - m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

для нечетного и четного годографов соответственно.

Нули и полюсы передаточной функции разомкнутой цепи могут быть как действительными, так и комплексно-сопряженными. Корневые траектории на действительной оси для нечетного годографа располагаются на тех участках, где справа находится нечетное количество нулей и полюсов (см. рис. 9.5). При слиянии двух корней они становятся

комплексно-сопряженными, и корневая траектория пересекает действительную ось под прямым углом. Для четного корневого годографа траектории расположены на тех участках действительной оси, где справа либо расположено четное количество нулей и полюсов, либо они вообще отсутствуют.

Рассмотрим ряд приближенных методов определения корневых траекторий. Пусть нуль и полюс передаточной функции, которые характеризуются координатами $v_0, i\omega_0$ и $v_*, i\omega_*$, расположены близко друг к другу по сравнению с расстоянием до других нулей и полюсов (рис. 9.6). Траектория, замыкающая рассматриваемые нуль и полюс, расположена в ограниченной области плоскости Z , поэтому вклад остальных нулей и полюсов в фазовый угол γ и коэффициент усиления k можно считать неизменным для всех точек рассматриваемой траектории.

Для произвольной точки корневой траектории нечетного годографа имеем

$$\beta + \gamma - \alpha = \pm \pi \pm 2\pi k,$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\omega - \omega_0}{v - v_0}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega + \omega_*}{v - v_*}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}(\beta + \gamma - \alpha) = 0$, то $\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma = 0$. Подставив в это соотношение значения $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \beta$, получим следующее уравнение корневой траектории:

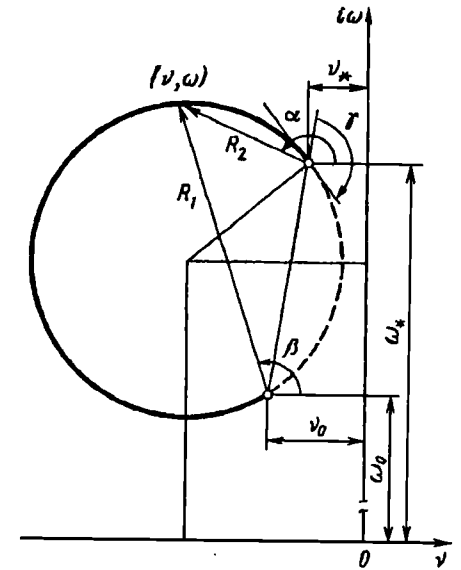


Рис. 9.6

$$\left[\omega - \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \omega_* + \frac{v_* - v_0}{\operatorname{tg} \gamma} \right) \right]^2 + \left[v - \frac{1}{2} \left(v_0 - v_* + \frac{\omega_0 - \omega_*}{\operatorname{tg} \gamma} \right) \right]^2 = \frac{1}{4 \sin^2 \gamma} [(\omega_0 - \omega_*)^2 + (v_0 - v_*)^2]. \quad (9.55)$$

Эта траектория является частью окружности радиусом

$$R = \frac{1}{2 \sin \gamma} [(\omega_0 - \omega_*)^2 + (v_0 - v_*)^2]^{1/2} \quad (9.56)$$

с центром в точке O , координаты которой

$$\frac{1}{2} \left(v_0 + v_* + \frac{\omega_0 - \omega_*}{\operatorname{tg} \gamma} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \omega_* + \frac{v_* - v_0}{\operatorname{tg} \gamma} \right).$$

На рис. 9.6 приведены некоторые геометрические соотношения, определяющие расположение окружности и ее параметры. Часть окружности между нулем и полюсом является траекторией нечетного годографа, а другая часть, показанная пунктиром, — траекторией четного годографа.

Каждой точке траектории соответствует определенный коэффициент усиления автомата стабилизации. Действительно, на корневой траектории должно выполняться соотношение

$$k_{AC} k \left| \frac{b_m}{a_n} \right| \frac{R_1}{R_2} = 1.$$

Здесь R_1 и R_2 — расстояния от рассматриваемой точки траектории до нуля и полюса, которые данная траектория соединяет; $k|b_m/a_n|$ — динамический коэффициент усиления объекта регулирования без учета вклада, вносимого рассматриваемым нулем и полюсом;

$$k_{AC} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1}{k} \left| \frac{a_n}{b_m} \right|. \quad (9.57)$$

Практический интерес представляют также приближенные формулы, позволяющие определить изменения корней замкнутой системы в

зависимости от k_{AC} . Эти формулы могут быть получены из следующих простых соображений.

Из характеристического уравнения и уравнения (9.53) следует, что

$$k_{AC} = \frac{a_n}{b_m} \frac{\prod_{i=1}^n (p - p_{*i})}{\prod_{i=1}^m (p - p_{0i})}.$$

Вычислим производную dk_{AC}/dp в одном из полюсов передаточной функции $p = p_{*k}$.

Будем иметь

$$\left. \frac{dk_{AC}}{dp} \right|_{p_{*k}} = \frac{a_n}{b_m} \frac{\prod_{i=1}^{n-n_k} (p_{*k} - p_{*i})}{\prod_{i=1}^m (p_{*k} - p_{0i})}. \quad (9.58)$$

Символ $\prod_{i=1}^{n-n_k}$ показывает, что в произведении опущен сомножитель, соответствующий $i = k$. Взяв величину, обратную величине, определяемой формулой (9.58), найдем

$$\left. \frac{dp}{dk_{AC}} \right|_{p_{*k}} = \frac{b_m}{b_n} \frac{\prod_{i=1}^m (p_{*k} - p_{0i})}{\prod_{i=1}^{n-n_k} (p_{*k} - p_{*i})}. \quad (9.59)$$

Величина dp/dk_{AC} на комплексной плоскости Z может быть представлена вектором, выходящим из полюса и совпадающим с касательной к корневой траектории.

Для корней замкнутой системы, которые лежат на траектории, выходящей из k -го полюса, имеем

$$v = v_{*k} + k_{AC} \operatorname{Re} \left(\frac{dp}{dk_{AC}} \right) \Big|_{p_{*k}} ; \quad \omega = \omega_{*k} + k_{AC} \operatorname{Im} \left(\frac{dp}{dk_{AC}} \right) \Big|_{p_{*k}} . \quad (9.60)$$

Следует отметить, что формулы (9.60) имеют приемлемую для практических расчетов точность только при сравнительно небольших значениях k_{AC} , в то время как формула (9.55) может быть использована во всем диапазоне k_{AC} , представляющем практический интерес. При некоторых предположениях о динамических свойствах объекта регулирования формулы (9.60) могут быть упрощены.

Пусть k -й полюс передаточной функции разомкнутой системы является слабо демпфированным, тогда для приближенного определения величины $dp/dk_{AC} \Big|_{p_{*k}}$ по формуле (9.59) можно использовать значение $p_{*k} \approx i\omega_{*k}$:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dk_{AC}} \Big|_{p_{*k}} &\approx \frac{dp}{dk_{AC}} \Big|_{i\omega_{*k}} = \frac{b_m}{a_n} \frac{\prod_{i=1}^m (i\omega_{*k} - p_{0i})}{\prod_{i=1}^{n-n_k} (i\omega_{*k} - p_{*i})} \frac{v_{*k}}{v_{*k}} = \\ &= \Phi(i\omega_{*k}) W_0(i\omega_{*k}) v_{*k}. \end{aligned}$$

Правая часть этого выражения пропорциональна частотной характеристике разомкнутой системы, т.е.

$$\Phi(i\omega) W_0(i\omega) = A_{AC}(\omega) A_0(\omega) \exp i[\varphi_{AC}(\omega) + \varphi_0(\omega)], \quad (9.61)$$

где $A_{AC}(\omega)$, $A_0(\omega)$ – амплитудно-частотные характеристики; $\varphi_{AC}(\omega)$, $\varphi_0(\omega)$ – фазочастотные характеристики автомата стабилизации и объекта регулирования соответственно.

Учитывая соотношение (9.61), формулам (9.60) можно придать следующий вид:

$$\begin{aligned} v &= v_{*k} \{1 + k_{AC} A_{AC}(\omega_{*k}) A_0(\omega_{*k}) \cos[\varphi_{AC}(\omega_{*k}) + \varphi_0(\omega_{*k})]\}; \\ \omega &= \omega_{*k} + v_{*k} k_{AC} A_{AC}(\omega_{*k}) A_0(\omega_{*k}) \sin[\varphi_{AC}(\omega_{*k}) + \varphi_0(\omega_{*k})]. \end{aligned} \quad (9.62)$$

Из первой формулы (9.62) определим критическое значение $(k_{AC})_{кр}$, при котором корневая траектория, выходящая из k -го полюса, окажется на мнимой оси ($v = 0$):

$$(k_{AC})_{кр} = - \frac{1}{A_{AC}(\omega_{*k}) A_0(\omega_{*k}) \cos[\varphi_{AC}(\omega_{*k}) + \varphi_0(\omega_{AC})]}. \quad (9.63)$$

Рассмотрим частный вид формулы (9.59) для случая, когда все нули и полюсы передаточной функции объекта регулирования расположены на мнимой оси плоскости Z . При этих условиях

$$\frac{dp}{dk_{AC}} \Big|_{i\omega_{*k}} = \frac{b_m}{a_n} \Phi(i\omega_{*k}) \frac{\omega_{0k}^2 - \omega_{*k}^2}{2i\omega_{*k}} \frac{\prod_{i=1}^{-m_k} (\omega_{0i}^2 - \omega_{*k}^2)}{\prod_{i=1}^{-n_k} (\omega_{*i}^2 - \omega_{*k}^2)}.$$

В этой формуле в произведениях опущены члены, соответствующие k -му нулю и полюсу. Используя понятия частотной характеристики автомата стабилизации, получаем

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dk_{AC}} \Big|_{i\omega_{*k}} &= \frac{b_m}{a_n} A_{AC}(\omega_{*k}) \frac{\omega_{0k}^2 - \omega_{*k}^2}{2i\omega_{*k}} \frac{\prod_{i=1}^{-m_k} (\omega_{0i}^2 - \omega_{*k}^2)}{\prod_{i=1}^{-n_k} (\omega_{*i}^2 - \omega_{*k}^2)} \times \\ &\times \exp i \left[\varphi_{AC}(\omega_{*k}) - \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned} \quad (9.64)$$

Из анализа полученного выражения можно установить, что угол выхода корневой траектории из k -го полюса $\alpha_k = \varphi_{AC}(\omega_{*k}) - \frac{\pi}{2}$, если множитель перед экспонентой в выражении (9.64) положительный, и $\alpha_k = \frac{\pi}{2} + \varphi_{AC}(\omega_{*k})$, если названный множитель отрицательный.

9.6. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

Анализ устойчивости движения такой сложной замкнутой системы, как "упругая ракета – автомат стабилизации", довольно сложен. Этот анализ начинает проводиться еще на ранней стадии проектирования ракеты и ее автомата стабилизации. При выборе схемы и параметров автомата стабилизации должны быть, хотя бы грубо, известны основные динамические характеристики ракеты: масса, моменты инерции и

изменение их по времени полета, частоты собственных упругих колебаний корпуса и колебаний жидкости в баках и др. В начале приходится ограничиваться анализом парциальных частот собственных колебаний.

После выбора схемы автомата стабилизации и основных его параметров для анализа устойчивости движения используется более полная информация о динамических свойствах объекта регулирования. Здесь уже используются частоты системы, изменение динамических характеристик по времени полета, и на их основе более точно формулируются требования к автомату стабилизации.

После создания аппаратного макета автомата стабилизации исследование устойчивости движения проводится с помощью цифро-аналоговых комплексов.

Задача обеспечения устойчивости движения с помощью автоматической системы стабилизации диктует определенные требования к свойствам передаточной функции упругого летательного аппарата и к точности определения параметров этих функций. Поэтому покажем, как с помощью метода корневого годографа можно провести приближенный анализ свойств передаточной функции и сделать некоторые выводы об устойчивости движения замкнутой системы.

Основная трудность заключается в разложении на множители знаменателя (9.44) и числителя (9.45) передаточной функции.

Характеристическое уравнение замкнутой системы "объект – автомат стабилизации" может быть представлено в виде

$$1 + k_{AC} \Phi_{AC}(p) \bar{W}_y(p) = 0,$$

где $\bar{W}_y(p)$ определяется из выражений (9.46) – (9.50). Полагаем, что нули и полюсы передаточной функции известны.

Рассмотрим вначале свойства передаточной функции $W_{y,j}(p)$, обусловленной колебаниями жидкости (9.49). Нули ω_{0i} и полюсы ω_{*i} расположены обычно близко друг от друга. Будем считать, что они расположены далеко от остальных нулей и полюсов передаточной функции системы.

Если в баках отсутствуют специальные устройства, демпфирующие колебания жидкости, то нули и полюсы передаточной функции (9.49) являются слабо демпфированными и на комплексной плоскости Z расположены практически на мнимой оси. С точки зрения устойчивости замкнутой системы следует различать два случая распределения нулей и полюсов передаточной функции с учетом колебаний жидкости. Первый случай (рис. 9.7, а) характеризуется перемежаемостью нулей

и полюсов, обусловленных колебаниями жидкости, т.е.

$$\omega_{01} < \omega_{*1} < \omega_{02} < \omega_{*2} < \dots (9.65)$$

Угол выхода корневой траектории из полюса α_i (см. рис. 9.5) может быть вычислен по формуле (9.54). Принимая во внимание, что для точек, лежащих на мнимой оси, сумма фазовых углов от нулей и полюсов передаточной функции автомата стабилизации равна значению фазочастотной характеристики $\Phi_{AC}(\omega)$, имеем

$$\alpha_k = \pi/2 + \Phi_{AC}(\omega_{*k}).$$

Для выхода корневой траектории из полюса, обусловленного колебаниями жидкости, в левую полуплоскость достаточно, чтобы

$$0 < \Phi_{AC}(\omega) < \pi,$$

т.е. фазочастотная характеристика автомата стабилизации должна иметь опережение на частотах колебаний жидкости. Поскольку это требование к фазочастотной характеристике автомата стабилизации не противоречит требованиям, необходимым для обеспечения устойчивости движения ракеты как твердого тела, то объект регулирования, имеющий распределение нулей и полюсов, аналогичное равенству (9.65), как было уже отмечено в разд. 4.8, называется **структурно устойчивым**.

Второй случай (рис. 9.7, б) характеризуется нарушением чередования нулей и полюсов передаточной функции ракеты, обусловленных колебаниями жидкости, например:

$$\omega_{01} < \omega_{*1} < \omega_{*2} < \omega_{02} < \omega_{03} < \omega_{*3} < \dots$$

Угол выхода корневой траектории из полюса ω_{*2} :

$$\alpha_2 = -\pi/2 + \Phi_{AC}(\omega_{*2}).$$

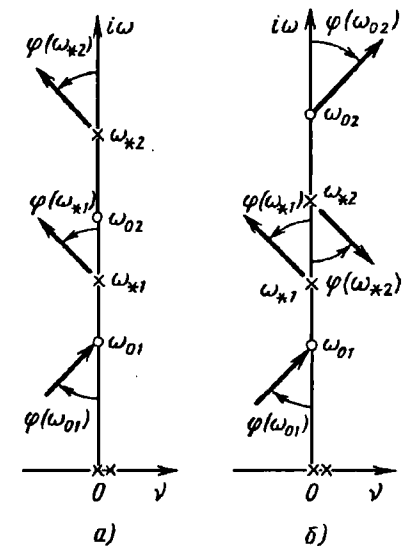


Рис. 9.7

При фазовом опережении автомата стабилизации $\varphi_{AC}(\omega) > 0$ корневая траектория из полюса ω_{*2} выходит в правую полуплоскость, т.е. замкнутая система теряет устойчивость при сколь угодно малом коэффициенте усиления k_{AC} . Устойчивость системы может быть обеспечена только в случае, если $\varphi_{AC}(\omega_{*2}) < 0$. Однако это требование противоречит условиям устойчивости движения ракеты как твердого тела и устойчивости колебания жидкости в баках, для которых нуль предшествует полюсу.

Поэтому объект регулирования, у передаточной функции которого имеется нарушение чередования нулей и полюсов, называется **структурно неустойчивым**.

Одним из возможных путей достижения устойчивости при значительных величинах коэффициента усиления k_{AC} является установка демпферов колебаний жидкости в баках. При значительном демпфировании колебаний жидкости приближенно можно считать, что величины ε_{0i} и ε_{*i} возрастают одинаково. Это приводит к смещению нуля и полюса, обусловленному колебаниями жидкости, с мнимой оси в левую полуплоскость (рис. 9.8).

Корневая траектория, соединяющая нуль и полюс, близка к окружности, параметры которой в общем случае определяются по уравнениям (9.55) и (9.56). В рассматриваемом случае легко установить, что при $v(\omega_*) = \varphi_{AC}(\omega_*)$ уравнение корневой траектории имеет вид

$$\left[\omega - \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_*) \right]^2 + \left[v - \frac{1}{2} \frac{(\omega_0 - \omega_*)}{\operatorname{tg} \varphi_{AC}(\omega_*)} \right]^2 = \frac{(\omega_0 - \omega_*)^2}{4 \sin^2 \varphi_{AC}(\omega_*)}.$$

Обратимся теперь к той части передаточной функции, которая обусловлена упругими колебаниями корпуса (9.48). Это выражение имеет такую же структуру, как и при рассмотрении устойчивости колебаний жидкости в баке. Однако нуль и полюс передаточной функции, соответствующие упругим колебаниям корпуса, обычно сильно разнесены друг относительно друга.

На рис. 9.9 показаны углы выхода корневой траектории из полюсов передаточной функции упругих колебаний и связь этих углов с фазочастотной характеристикой автомата стабилизации. Корневая траектория движется в левую полуплоскость, что гарантирует устойчивость в отношении упругих колебаний при умеренных значениях k_{AC} , если $f'_n(x_r)f_n(x_{дв}) < 0$ и $\varphi_{AC}(\omega_{*1}) > 0$ (рис. 9.9, а) или если $f'_n(x_r)f_n(x_{дв}) > 0$ и $\varphi_{AC}(\omega_{*1}) < 0$ (рис. 9.9, б).

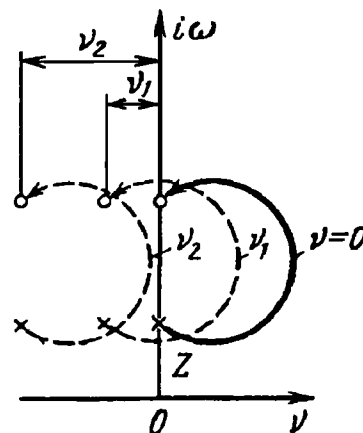


Рис. 9.8

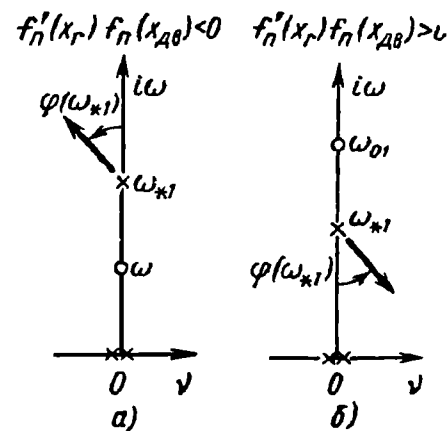


Рис. 9.9

Для первого тона упругих колебаний корпуса неравенство $f'_n(x_r) \times f_n(x_{дв}) > 0$ выполняется, если датчик углового положения расположен в носовой части, а орган управления – в хвостовой части корпуса. Поэтому устойчивость по отношению к упругим колебаниям первого тона корпуса будет гарантирована, если при расположении датчика угла в носовой части фазочастотная характеристика автомата стабилизации имеет запаздывание $[0 > \varphi_{AC}(\omega_{*1}) > -180^\circ]$ на частоте упругих колебаний, а при расположении датчика в хвостовой части корпуса – опережение $[0 < \varphi_{AC}(\omega_{*1}) < 180^\circ]$ на этой частоте.

Сформулированные условия иногда называют **условиями фазовой стабилизации** упругих колебаний. Эти условия не должны противоречить условиям стабилизации движения ракеты как твердого тела вокруг центра массы и колебаний жидкости в баках, которые требуют наличия опережения по фазе у характеристики автомата стабилизации в определенном диапазоне частот $[0 - \omega_0]$. Если частоты первого тона упругих колебаний корпуса значительно выше частот, характеризующих движение ракеты как твердого тела, и частот колебаний жидкости в баках, то на частотах упругих колебаний корпуса $\varphi_{AC}(\omega)$ обычно имеет место запаздывание, и поэтому датчик угла целесообразно устанавливать в носовой части корпуса.

Если частоты первого тона упругих колебаний близки к частотам колебаний жидкости в баках, то при расположении датчика угла в носовой части корпуса функция $\varphi_{AC}(\omega)$ должна менять знак в узком диапазоне частот, который изменяется во времени. Это представляет

известные технические трудности. Устойчивость по отношению к упругим колебаниям в этом случае можно обеспечить установкой датчика угла в хвостовой части корпуса и фазовым опережением $\varphi_{AC}(\omega) > 0$ на частотах упругих колебаний. Легко видеть, что условия фазовой стабилизации по отношению к упругим колебаниям корпуса и колебаниям жидкости в баках в этом случае будут совпадать.

Другим распространенным способом достижения устойчивости по отношению к упругим колебаниям является метод амплитудной стабилизации, особенно часто применяемый для обеспечения устойчивости по отношению к высшим формам упругих колебаний. Сущность этого способа заключается в уменьшении величины амплитудно-частотной характеристики как объекта, так и автомата стабилизации на частотах упругих колебаний.

Условия амплитудной стабилизации будут выполнены, если

$$k_{AC} < \frac{1}{A_0(\omega_{*l})A_{AC}(\omega_{*l})}.$$

Для уменьшения величины $A_0(\omega_{*l})$ на частотах упругих колебаний датчик угла целесообразно устанавливать в месте пучности формы упругих колебаний. При $f'_n(x_r) = 0$ происходит взаимная компенсация нуля и полюса упругих колебаний, что приводит к резкому уменьшению величины $A_0(\omega_{*l})$. Так как формы упругих колебаний корпуса ракеты изменяются при уменьшении количества топлива и изменении веса полезной нагрузки, то полная компенсация нуля и полюса не обес-

печивается. Однако нуль и полюс располагаются близко друг к другу (рис. 9.10). Любое показанное на этом рисунке взаимное расположение нулей и полюсов вероятно, и может встретиться ситуация, аналогичная структурной неустойчивости колебаний жидкости. Устойчивость упругих колебаний в этом случае может быть гарантирована, т.е. соответствующая корневая траектория будет находиться целиком в левой полуплоскости только при определенной величине демпфирования упругих колебаний. Поэтому обеспечение устойчивости упругих колебаний амплитудными методами предъявляет повышенные требования к точности определения коэффициентов демпфирования корпуса ракеты.

$$f'_n(x_r)f_n(x_{D0})=0 \quad f'_n(x_r)f_n(x_{D0})<0 \quad f'_n(x_r)f_n(x_{D0})>0$$

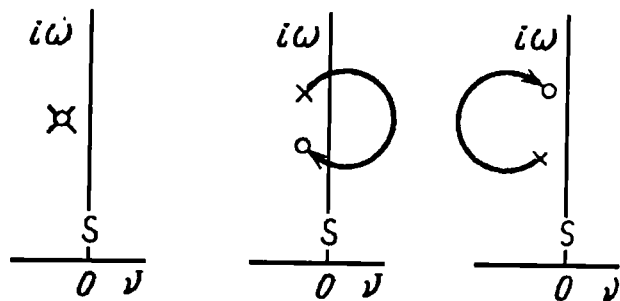


Рис. 9.10

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАКЕТЫ С ЖИДКОСТНЫМ РАКЕТНЫМ ДВИГАТЕЛЕМ

Глава X

ЗАМКНУТАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА

10.1. МЕХАНИЗМ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ РАКЕТЫ С ЖРД

Возмущения, действующие на ракету в полете, могут вызывать не только поперечные колебания, но и продольные. Продольные упругие колебания корпуса ракеты (колебания растяжения – сжатия) сопровождаются продольными и радиальными колебаниями жидкости в баках. Наибольший интерес представляют низкочастотные (до 50 Гц) колебания, которые могут существенно взаимодействовать с колебаниями жидкого топлива в трубопроводах и колебаниями давления в камере сгорания жидкостного ракетного двигателя (ЖРД). Поэтому в инженерной практике под продольными колебаниями ракеты с ЖРД обычно понимают низкочастотные колебания в замкнутой гидроупругой системе, состоящей из упругого корпуса с жидким топливом в баках, топливных магистралей и ЖРД. Устойчивость движения такой системы обычно принято называть *устойчивостью ракеты с ЖРД* по отношению к продольным упругим колебаниям. Корпус ракеты, топливные магистрали и ЖРД являются тремя главными составными частями замкнутой колебательной системы, которые схематически показаны на рис. 10.1. Пользуясь этой схемой, можно пояснить механизм возникновения низкочастотных продольных колебаний ракеты.

Предположим, что возникли пульсации тяги двигателя. Эти возмущения вызывают продольные колебания корпуса ракеты, в результате чего возникают колебания давления топлива в топливных магистралях. Колебания давления, в свою очередь, изменяют подачу топлива в камеру сгорания и, следовательно, являются причиной изменения тяги. Изменения тяги могут усиливать колебания корпуса и

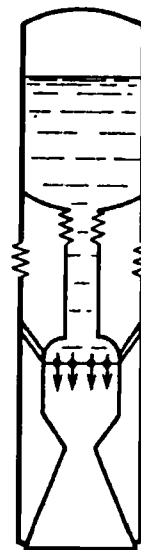


Рис. 10.1

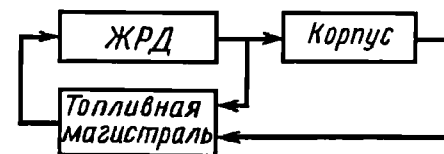


Рис. 10.2

колебания давления топлива в магистралях и, таким образом, первоначальные малые возмущения могут привести к нарастанию по амплитуде колебаний во всей замкнутой системе.

Динамические процессы в звеньях реальной ракеты с ЖРД выражаются нелинейными дифференциальными уравнениями, из которых наиболее сложными являются дифференциальные уравнения для анализа динамических процессов в двигателе. Нелинейными являются также зависимости давления на дне бака от амплитуды колебаний дна, силы гидравлического сопротивления от скорости потока жидкости и др.

С увеличением амплитуды колебаний заметнее проявляются нелинейные свойства системы, и нарастающие колебания переходят обычно в стационарный автоколебательный процесс.

В отношении продольных колебаний ракета с ЖРД является типичной автоколебательной системой. Простейшая блок-схема ракеты с однокомпонентным ЖРД показана на рис. 10.2. Колебательной системой является корпус ракеты, источником энергии служит жидкостный ракетный двигатель, обратную связь осуществляет топливная магистраль. Кроме *внешней* обратной связи между корпусом и двигателем, которая замыкает систему, существует *внутренняя* обратная связь между двигателем и топливной магистралью. Эта связь осуществляется посредством воздействия давления в камере сгорания на скорость подачи топлива из топливной магистрали через форсунки.

Автоколебания в замкнутой системе, показанной на рис. 10.2, обычно называют *продольными автоколебаниями* ракеты.

Колебания подачи топлива в камеру сгорания происходят с такой же частотой, с какой совершаются продольные колебания корпуса и топлива в трубопроводе; с этой же частотой изменяется и тяга двигателя. В автоколебательном процессе во всех звеньях замкнутой системы происходят колебания с частотой, которая называется *частотой автоколебаний*.

При таком мощном источнике энергии, как ЖРД, автоколебания могут привести к возникновению больших динамических нагрузок в конструкции ракеты-носителя, могущих вызвать повреждения оборудования и приборов. Возможно также разрушение конструкции ракеты еще до установления стационарного автоколебательного процесса.

Продольные автоколебания ракеты с ЖРД возникают не всегда. Все зависит от свойств колебательной системы, определяемых соотношением ее параметров. Соответствующим изменением этих параметров можно добиться того, что номинальный режим работы системы будет устойчивым и случайно возникающие колебания будут затухать. Именно такими свойствами и должна обладать ракета с ЖРД.

Расчет параметров системы, вывод и анализ уравнений, математическое описание взаимодействия отдельных элементов колебательной системы, анализ свойств замкнутой динамической системы являются основной задачей II-й части книги.

10.2. АВТОКОЛЕБАНИЯ В ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМАХ РАКЕТЫ

В автоколебательной системе, состоящей из корпуса ракеты, топливных магистралей и ЖРД, можно выделить отдельные замкнутые системы, в которых могут возникать автоколебания. К таким системам, например, относится система питания двигателя со шнекоцентробежным насосом. При работе насоса в его всасывающей части может возникать кавитация (образование парогазовой смеси), которая вызывает изменение скорости потока жидкости в расходной магистрали, а изменение давления жидкости при выходе из расходной магистрали оказывает влияние на образование парогазовой смеси. Таким образом, образуется замкнутая система, в которой возможно возникновение автоколебаний (рис. 10.3).

Топливная магистраль совместно с двигателем также образует замкнутую систему, в которой возможны автоколебания (рис. 10.4). Колебания давления в топливной магистрали вызывают изменение подачи топлива в двигатель, а возникшее вследствие этого изменение давления в камере сгорания способствует изменению скорости потока

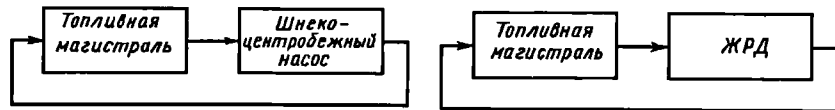


Рис. 10.3

Рис. 10.4

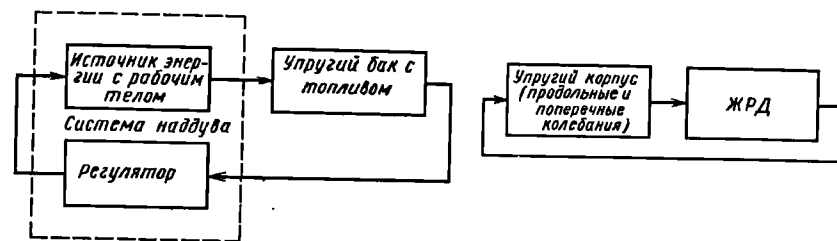


Рис. 10.5

Рис. 10.6

жидкости и, как следствие, – колебаниям давления в топливной магистрали. Автоколебания могут возникать в двигателе и его системах регулирования.

Упругий бак с топливом совместно с системой наддува газом образует замкнутую колебательную систему (рис. 10.5). При возникновении продольных колебаний бака с жидкостью объем газовой подушки над жидкостью и давление в ней изменяются. Регулятор давления получает сигнал об этом изменении давления и воздействует на источник энергии с рабочим телом (например, баллон со сжатым газом). В этой замкнутой системе также могут возникать автоколебания.

При рассмотрении продольных колебаний корпуса ракеты совместно с ЖРД и топливными магистралями принято, что корпус совершает продольные колебания растяжения – сжатия. Но одновременно с колебаниями растяжения – сжатия могут возникать и изгибные колебания корпуса.

При изгибных колебаниях вектор тяги будет отклоняться на некоторый угол, как и хвостовой отсек корпуса, вследствие чего составляющая тяги в направлении невозмущенной продольной оси ракеты будет испытывать малые возмущения с частотой, в два раза большей частоты изгибных колебаний корпуса. Если при этом частота собственных продольных колебаний корпуса будет в два раза больше частоты изгибных колебаний, то возникнут благоприятные условия для возбуждения совместных продольно-поперечных колебаний ракеты (рис. 10.6).

Если двигатели и их топливные магистрали расположены не на оси ракеты, то при изгибных колебаниях корпуса топливные магистрали у одних двигателей будут удлиняться, а у других – укорачиваться. Изменение длины топливных магистралей вызывает изменение подачи топлива в камеру сгорания и изменение давления в этой камере. Здесь взаимосвязь поперечных и продольных колебаний корпуса будет еще более сильной.

10.3. ЗАМКНУТАЯ КОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА РАКЕТЫ С ЖРД

Рассмотрим колебательную систему, состоящую из трех основных частей: корпуса ракеты, ЖРД и топливных магистралей. Опуская некоторые детали, можно считать, что и корпус, и топливные магистрали представляют собой гидроупругие колебательные системы.

Корпус ракеты можно представить как упругую тонкостенную осесимметричную конструкцию удлиненной формы. Продольные колебания ракеты характеризуются прежде всего колебаниями растяжения – сжатия корпуса. В этих колебаниях участвует и жидкое топливо в баках. Так как колебания корпуса и топлива в баках совместные, то при изучении низкочастотных продольных колебаний корпуса необходимо учитывать и колебания жидкости в баках.

Вес (сила тяжести) жидкого топлива передается на корпус через упругое дно бака, поэтому жидкость по отношению к стенкам корпуса можно рассматривать как груз, подвешенный на пружине. Жидкость перемещается относительно стенок корпуса в осевом направлении не только из-за растяжения дна бака, но и дополнительно из-за изменения диаметра обечайки бака, вызываемого гидродинамическим давлением. Упругую оболочку бака совместно с жидкостью для изучения можно выделить из общей колебательной системы.

Двигатель крепится к корпусу при помощи рамы и в первом приближении для расчета форм и частот собственных колебаний включается в механическую колебательную систему корпуса как упруго подвешенная масса. Перемещениям дна баков и двигателя относительно корпуса ракеты при рассмотрении продольных колебаний придается особое значение, так как от колебаний дна и двигателя зависит изменение давления жидкости в топливной магистрали и воздействие тяги на продольные колебания корпуса.

Динамическими характеристиками корпуса являются формы и частоты собственных колебаний. Расчет форм и частот собственных колебаний корпуса с учетом особенностей его конструкции составляет одну из главных задач в изучении продольных колебаний ракеты. Расчет форм и частот следует производить для разных уровней заполнения топливных баков.

Тонкостенная оболочка корпуса ракеты имеет набор стрингеров и шпангоутов. Формы и частоты собственных колебаний корпуса можно достаточно точно рассчитать на ЭВМ, и в этом отношении корпус ракеты является самым простым звеном замкнутой колебательной системы. Вначале решается задача об определении форм и частот собственных осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью. Результаты этого решения затем используются для определения форм и частот собственных колебаний растяжения – сжатия корпуса.

С точки зрения динамических процессов жидкостный ракетный двигатель является самой сложной частью замкнутой системы. Под ЖРД будем понимать двигательную установку, состоящую из двигателя, турбонасосного агрегата (ТНА), жидкостного генератора газов (ЖГГ) и магистралей высокого давления. ЖРД имеет довольно сложную систему управления и регулирования: в нем происходят гидродинамические, химические, тепловые, газодинамические и вибрационные процессы. Однако для анализа продольных колебаний ракеты, частоты которых не превышают 50 Гц, динамические процессы в двигателе можно представить в виде сравнительно простой модели.

Под топливной магистралью будем понимать магистраль (трубопровод) низкого давления или расходную магистраль. Она соединяет бак с насосом и обычно состоит из сравнительно длинных прямолинейных участков трубы небольшой жесткости, поворотов и разветвлений, сильфонов, расходных шайб и т.п. Топливная магистраль крепится к корпусу ракеты в местах поворотов и разветвлений; через крепления вес столба жидкости над местом крепления передается на корпус.

На входе в шнековый насос возникают кавитационные явления – разрывы сплошности жидкости и образование парогазовой среды. Парогаз делает более податливым столб жидкости в магистрали и, следовательно, снижает частоты собственных колебаний.

Расходная магистраль образует самостоятельную колебательную систему, анализ которой можно провести отдельно. Изменение давления топлива в расходной магистрали вызывается колебаниями дна бака и корпуса, перемещениями двигателя и турбонасосного агрегата относительно потока жидкости, колебаниями давления в камере сгорания. Насосы магистралей горючего и окислителя обычно установлены на одном валу и приводятся во вращение турбиной. В зависимости от способа питания жидкостного генератора газов взаимосвязи между магистралями могут проявляться по-разному.

Если ЖГГ работает на основных компонентах топлива (рис. 10.7), то возмущения динамических параметров потока в какой-либо магистрали вызывают не только изменение момента сопротивления на валу ТНА, но и изменение подачи компонентов в ЖГГ, т.е. изменение количества выработанного газа и, следовательно, изменение скорости вращения и крутящего момента на валу турбины.

На рис. 10.8 приведена динамическая схема первой ступени американской ракеты-носителя "Титан-2" [27]. На схеме показаны упругий корпус с двумя баками окислителя О и горючего Г, система питания и двигателя. Здесь 7 – узел крепления ТНА; 6 – насосы подачи топлива; 1, 2 – начальные участки расходных магистралей окислителя и горючего; 3 – выходные участки расходных магистралей; 5 – напорная магистраль; 4 –

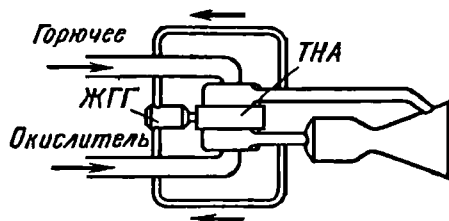


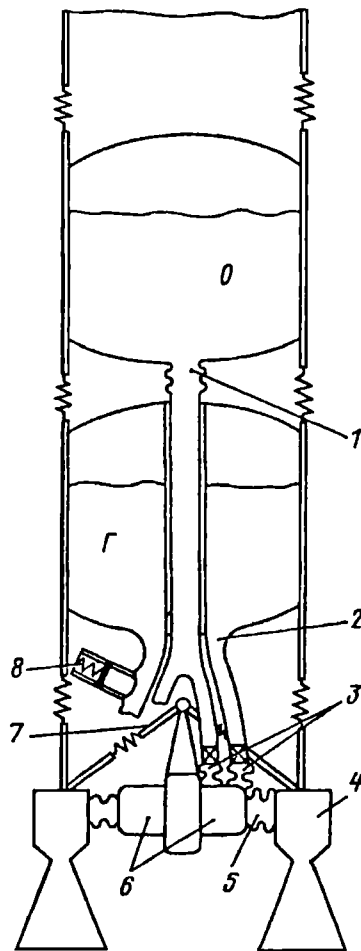
Рис. 10.7

Рис. 10.8

ЖРД. Для того чтобы снизить частоты собственных колебаний жидкости в топливных магистралях и обеспечить устойчивость замкнутой системы, на топливных магистралях установлены гидравлические демпферы. Такой демпфер 8, схематично показанный на расходной магистрали горючего, является колебательным звеном, которое изменяет динамические характеристики топливной магистрали. В работе [27] отмечено, что при помощи этих демпферов удалось устранить продольные автоколебания ракеты "Титан-2".

10.4. УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Чтобы получить приближенное представление о динамической схеме ракеты с ЖРД, рассмотрим упрощенную математическую модель ракеты с однокомпонентным ЖРД. Уравнения движения составим для отклонений (возмущений) переменных величин от их значений в установившемся номинальном режиме. Под номинальным режимом будем понимать полет ракеты без колебаний по прямолинейной (или близкой к прямолинейной) траектории. В небольшой промежуток времени, который, однако, значительно больше рассматриваемого периода собственных продольных колебаний ра-



кеты, подача топлива в камеру сгорания, тяга двигателя, ускорение всех элементов конструкции ракеты в номинальном режиме принимаются постоянными.

Полагаем, что форма $f_n(x)$ собственных упругих колебаний n -го тона корпуса с жидким топливом в баках известна. Тогда уравнение колебаний для обобщенной координаты $q_n(t)$ будет иметь такую же структуру, как и уравнение колебаний механической системы с одной степенью свободы.

Положительным будем считать перемещение корпуса в направлении от вершины к хвостовой части ракеты. Обобщенная сила, действующая на корпус ракеты в направлении ее продольной оси, будет равна $[P_n(t) - P(t)]f_{nd}$, где f_{nd} — коэффициент формы упругих колебаний двигателя совместно с ТНА; $P(t)$ — отклонение тяги двигателя от номинальной величины; $P_n(t)$ — отклонение силы, приложенной к корпусу насоса и обусловленной отклонением давления жидкости на входе в насос.

Уравнение вынужденных колебаний для обобщенной координаты $q_n(t)$ будет иметь вид

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2q_n = \frac{1}{m_n}[P_n(t) - P(t)]f_{nd}. \quad (10.1)$$

Здесь m_n — приведенная масса ракеты; ξ_n — относительный коэффициент затухания собственных колебаний; ω_n — частота собственных колебаний.

При колебаниях корпуса изменяется давление жидкости на дне бака. Отклонение этого давления p_6 (при выходе жидкости из бака в расходную магистраль) в первом приближении можно принять пропорциональным ускорению дна бака:

$$p_6 = -\rho_0 H \kappa f_{n6} \ddot{q}_n, \quad (10.2)$$

где ρ_0 — плотность жидкости; H — высота столба жидкости в баке; f_{n6} — коэффициент формы упругих колебаний дна бака; κ — некоторый коэффициент, зависящий от соотношения диаметров бака и расходной магистрали, от формы дна.

Без учета сжимаемости жидкости, сопротивления и упругости стенок расходной магистрали, перепад давлений на концах трубы расходует на разгон жидкости. Поэтому соотношение между отклонением давления p_6 на выходе из бака и отклонением давления p_{1n} на входе в насос определяется соотношением

$$p_{1н}(t) = p_6 - \rho_0 l \dot{v}_1(t), \quad (10.3)$$

где l – длина расходной магистрали; $\dot{v}_1(t)$ – ускорение жидкости в расходной магистрали.

Отклонение скорости жидкости $v_1(t)$ в расходной магистрали определим из уравнения неразрывности потока перед парогазовой смесью:

$$v_1(t) = v_n(t) + v_{м}(t) + f_{нм} \dot{q}_n(t), \quad (10.4)$$

где $v_n(t)$ – отклонение скорости жидкости, проходящей через насос; $v_{нг}(t)$ – отклонение скорости жидкости, обусловленное изменением объема парогазовой смеси; $f_{нм} \dot{q}_n(t)$ – отклонение скорости жидкости в трубопроводе, вызванное перемещениями насоса.

Объем парогазовой смеси в жидкости на входе в шнековый насос будем оценивать, пользуясь линеаризованным законом для идеального газа. Обозначив отклонение этого объема через $k_{м}^*$, а упругую постоянную через $V_{мг}$, будем иметь

$$V_{мг} = -k_{м}^* p_{1н}.$$

Отклонение скорости жидкости, обуславливаемое изменением объема парогазовой смеси:

$$v_{мг} = \frac{1}{F_{т}} \frac{dV_{мг}}{dt} = -k_{м}^* p_{1н} \left(k_{м} = \frac{k_{м}^*}{F_{т}} \right). \quad (10.5)$$

Здесь $F_{т}$ – площадь проходного сечения трубопровода перед насосом.

ЖРД представим состоящим из ТНА, напорной магистрали и камеры сгорания с соплом. Если пренебречь изменением скорости вращения вала насоса, то отклонение давления $p_{2н}$ на выходе из насоса можно определить по формуле

$$p_{2н}(t) = \left(1 + \frac{\partial H_n}{\partial p} \right) p_{1н}(t) + \left(\frac{\partial H_n}{\partial v} \right) v_n(t), \quad (10.6)$$

где H_n – напор жидкости на выходе из насоса.

Величины частных производных в уравнении (10.6) можно получить из рассмотрения расходной и напорной характеристик насоса. Эти

величины равны тангенсам углов наклона касательных к указанным характеристикам в рабочей точке.

С учетом только инерции столба жидкости и гидравлического сопротивления, включая сопротивление форсунок, пропорциональное квадрату скорости, уравнение движения жидкости по напорной магистрали можно представить в виде

$$\rho_0 l \dot{v}_x(t) + \xi_{ф} v_x^* \rho_0 v_x(t) = p_{2н}(t) - p_x(t), \quad (10.7)$$

где $v_x(t)$ – отклонение скорости топлива на выходе в камеру сгорания двигателя, отнесенное к площади проходного сечения $F_{т}$ расходной магистрали ($v_x = v_n$); $p_x(t)$ – отклонение давления в камере сгорания; $\xi_{ф}$ – коэффициент сопротивления напорной магистрали и форсуночной головки; v_x^* – скорость топлива на входе в камеру сгорания в установившемся номинальном режиме.

Для низких частот малых возмущений уравнение для определения отклонения давления $p_x(t)$ в камере сгорания однокомпонентного ЖРД с открытой схемой питания можно принять как уравнение простого аperiodического звена

$$T_k \frac{dp_x(t)}{dt} + p_x(t) = k F_{т} \rho_0 v_x(t). \quad (10.8)$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности между отклонением секундного поступления массы топлива в камеру и отклонением давления; T_k – время релаксации в камере, характеризующее быстроту установления давления $p_x(t)$ при скачкообразном изменении входной величины $v_x(t)$. За время T_k выходная величина достигает значения $p_x(t) = 0,63 k F_{т} \rho_0$.

Если жидкостный ракетный двигатель имеет закрытую схему питания, то при исследовании продольных автоколебаний его динамические свойства можно выразить суммарной характеристикой.

Отклонение силы P_n , вызывающей колебания корпуса, пропорционально $F_{т}$; соотношение между отклонением давления $p_x(t)$ в камере сгорания и отклонением тяги $P(t)$ двигателя выразим через коэффициент $k_{т}$. Будем иметь

$$P(t) = k_{т} p_x(t); \quad P_n(t) = F_{т} p_{1н}(t). \quad (10.9)$$

Уравнения (10.1) – (10.9) выражают упрощенную математическую модель колебательной системы.

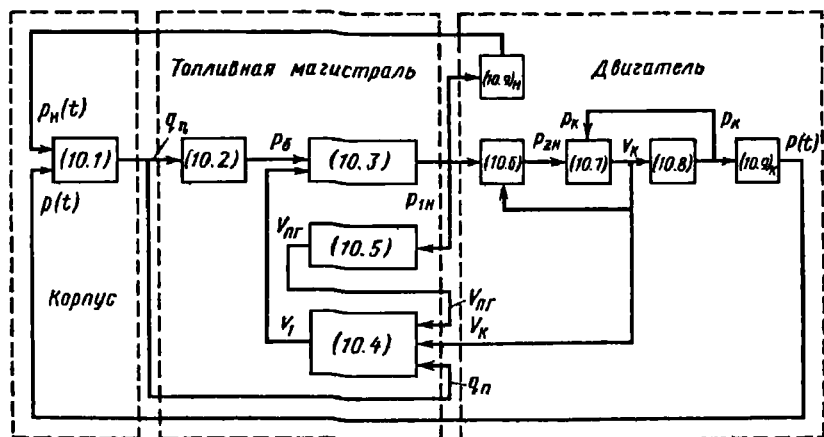


Рис. 10.9

Блок-схема, показывающая взаимодействие между различными звеньями модели ракеты с ЖРД на однокомпонентном топливе, с указанием описывающих их уравнений, приведена на рис. 10.9.

Из анализа линеаризованных уравнений (10.1)–(10.9) можно сделать заключение лишь об устойчивости системы, т.е. установить, будут ли случайно возникшие малые колебания затухать. Амплитуды же и частоты автоколебаний можно определить только из нелинейных уравнений. Тем не менее анализ линеаризованных уравнений может дать достаточно полную информацию о влиянии различных параметров и их комбинаций на устойчивость системы. Более полная математическая модель, методы определения ее параметров и анализ устойчивости замкнутой системы будут рассмотрены ниже.

10.5. СОСТАВНЫЕ ЧАСТИ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ РАКЕТЫ С ЖРД

Как было указано, динамическая система ракеты с ЖРД состоит из взаимосвязанных разнородных звеньев. При колебаниях системы в этих звеньях имеют место отклонения давления, скоростей и ускорений по отношению к значениям в установившемся движении и происходят взаимные перемещения звеньев. Анализ динамических свойств такой системы будем проводить в следующем порядке:

1. Разделим динамическую систему на отдельные звенья, элементы которых сравнительно однородны по протекающим в них процессам.

Таковыми звеньями являются: корпус ракеты с жидкостью в баках, топливные магистрали с упругими элементами и сжимаемой жидкостью. Для каждого звена составим дифференциальные уравнения возмущенного движения с учетом краевых (граничных) условий, возникающих при разделении системы на отдельные звенья.

2. Найдем решения уравнений и проведем анализ собственных и вынужденных колебаний каждого звена в отдельности методами теории колебаний и частотными методами, получившими широкое распространение в теории автоматического регулирования.

Прежде всего решим задачу об определении частот и приведенных масс собственных осесимметричных колебаний упругих баков с жидкостью. После этого найдем формы и частоты собственных колебаний корпуса.

Затем решаем уравнения и определяем динамические характеристики топливных магистралей с учетом кавитационных явлений на входах в шнековые насосы.

Анализ динамических свойств ЖРД проводится специалистами по двигателям. Они находят частотные характеристики ЖРД, которые используем при исследовании замкнутой системы.

3. Наконец, составляем структурную блок-схему замкнутой системы, на основании принятых при разделении системы на звенья краевых условий производим "стыковку" (соединение) звеньев, исследуем устойчивость движения всей системы. Исследование проводим при помощи передаточных функций и амплитудно-фазовых частотных характеристик; при этом, как правило, используется ЭВМ. Анализ позволяет выявить влияние различных параметров системы на устойчивость и рассмотреть способы достижения устойчивости.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАКОВ С ЖИДКИМ ТОПЛИВОМ

11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как уже было отмечено, продольные колебания корпуса ракеты сопровождаются колебаниями жидкого топлива в баках. При этом давление жидкости изменяется, вследствие чего возникают дополнительные деформации бака.

Упругая оболочка бака совершает колебания вместе с жидкостью, так что жидкость и оболочка образуют единую колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы.

При изучении колебаний упругого бака с жидкостью жидкость будем считать идеальной и несжимаемой.

Установившееся движение жидкости будем полагать безвихревым и, следовательно, потенциальным. Тогда движение жидкости в любой точке объема должно удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (11.1)$$

где φ — потенциал скоростей жидкости.

Дифференциальные уравнения колебаний оболочки можно представить в виде

$$\begin{aligned} L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + \rho_0 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= X; \\ L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + \rho_0 h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= Y; \\ L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= Z. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Здесь L_{11}, L_{12}, \dots — некоторые дифференциальные операторы; u, v, w — проекции вектора полного перемещения оболочки на оси координат XYZ соответственно; ρ_0 — плотность материала оболочки; h — толщина

оболочки; X, Y, Z — проекции вектора внешних распределенных сил, действующих на оболочку на оси X, Y, Z .

Внешними для оболочки являются сила давления жидкости на смачиваемую поверхность S , давление газов на несмачиваемой поверхности Σ , осевые сжимающие или растягивающие силы, действующие на обечайку бака со стороны смежных отсеков корпуса. Осевые силы и давление наддува газов будем считать известными величинами. Давление жидкости на смачиваемую поверхность p_S определяется по формуле

$$\frac{p_S - p_0}{\rho} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U \right)_S, \quad (11.3)$$

где p_0 — давление газов на свободной поверхности; ρ — плотность жидкости; U — потенциал массовых сил.

Решения уравнений (11.1), (11.2) должны удовлетворять граничным (краевым) и начальным условиям. Для оболочки граничные условия задаются в виде геометрических или силовых условий на некоторых контурах (линиях). Например, на некотором контуре l может быть задано соотношение между перемещениями, которые в общем виде представим так:

$$Q_l(u, v, w) = 0, \quad (11.4)$$

где Q_l — некоторая функция. На другом контуре граничные условия могут быть иными.

Так как оболочка бака непроницаема, то на границе смачиваемой поверхности S нормальная составляющая скорости жидкости должна быть равна нормальной составляющей скорости перемещения оболочки:

$$\partial \varphi / \partial n|_S = \partial w_n / \partial t, \quad (11.5)$$

где w_n — перемещение оболочки по нормали к поверхности. Условие (11.5) является условием совместности колебаний оболочки и жидкости.

На свободной поверхности Σ давление жидкости равно давлению газов, поэтому

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + U \right)_\Sigma = 0. \quad (11.6)$$

В дальнейшем будем производить оценку устойчивости движения системы при помощи частотных методов, которые основаны на анализе

динамических свойств системы при установившихся гармонических воздействиях. При этом движения, задаваемые начальными условиями, интереса не представляют и определять их мы не будем.

Таким образом, задача о колебаниях жидкости в упругом баке сводится к отысканию решения системы уравнений (11.2), удовлетворяющих граничным условиям (11.4) на заданных линиях, и решения уравнения (11.1), удовлетворяющего граничному условию (11.6) на свободной поверхности. Оба решения, кроме того, должны удовлетворять условиям (11.3) и (11.5) на смачиваемой поверхности.

Решение задачи о колебаниях жидкости в упругом баке важно: 1) для определения форм и частот собственных продольных колебаний корпуса ракеты; 2) для определения возмущения давления при выходе жидкости из бака.

Введем следующие допущения:

1. Будем считать, что ракета имеет форму прямого осесимметричного удлиненного тела, так что в поперечном сечении распределение масс и жесткостей в любом радиальном направлении одинаково.

2. Положим, что ракета совершает прямолинейный полет и вектор действующих на ракету внешних сил направлен по продольной оси ракеты. Тогда невозмущенное зеркало жидкости будет располагаться перпендикулярно продольной оси ракеты, и давление жидкости на стенки баков будет обладать свойством осевой симметрии. Если в полете возникнут колебания тяги, то упругий бак с жидкостью будет совершать вынужденные колебания. Из большого разнообразия форм колебаний при исследовании продольных колебаний системы можно рассматривать только осесимметричные формы колебаний.

3. Продольное ускорение ракеты на небольшом участке траектории можно считать постоянным. Под давлением осевых сил давления наддува и гидростатического давления бак с жидкостью находится в состоянии "статического" равновесия. Примем, что колебания бака с жидкостью происходят относительно этого состояния равновесия.

4. Колебания корпуса ракеты, так же как и колебания бака с жидкостью, будем считать малыми и произведениями малых перемещений и скоростей будем пренебрегать при сравнении с величинами самих перемещений и скоростей.

5. При продольных колебаниях, вообще говоря, изменяются и поперечные размеры корпуса. Изменение радиуса бака, вызванное растяжением или сжатием обечайки в осевом направлении, оказывает некоторое влияние на колебания жидкости в баке. Однако этим влиянием мы пренебрежем. Будем считать, что радиус бака изменяется только от изменения давления жидкости. Это допущение дает возможность отдельно изучать осесимметричные колебания жидкости в упругом баке и найти для них простую механическую модель.

6. Колебания свободной поверхности жидкости учитывать не будем. Расчеты показывают, что в большинстве случаев эти колебания оказывают незначительное влияние на частоты упругих колебаний бака с жидкостью.

7. Оболочку бака полагаем тонкостенной и безмоментной.

11.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАКА С ЖИДКОСТЬЮ МЕТОДОМ РЭЛЕА

Если в расчетах можно ограничиться учетом только одного основного тона осесимметричных колебаний бака с жидкостью, то частоту собственных колебаний можно сравнительно просто определять приближенно методом Рэлея. Чем точнее принята форма колебаний системы подходит к истинной, тем точнее будет полученное значение частоты собственных колебаний. Задаваться формой собственных колебаний нужно в соответствии с граничными условиями. В частности, за форму колебаний основного тона можно принять функцию перемещений при статической нагрузке.

В системах с распределенными параметрами потенциальную энергию обычно выражают через коэффициент приведенной жесткости $k_{пр}$:

$$\Pi = \frac{1}{2} k_{пр} q^2(t),$$

а кинетическую энергию – через коэффициент приведенной массы $m_{пр}$:

$$T = \frac{1}{2} m_{пр} \dot{q}^2(t) = \frac{1}{2} m_{пр} \omega^2 q^2(t),$$

где $q(t)$ – безразмерная обобщенная координата.

Из равенства $T_{max} = \Pi_{max}$ получим формулу для определения частоты собственных колебаний системы:

$$\omega^2 = k_{пр} / m_{пр}. \quad (11.7)$$

Определение частоты основного тона произведем для бака, обечайка которого выполнена в виде кругового цилиндра, а дно – в виде части сферы. Кроме допущений, сформулированных в предыдущем разделе, будем считать, что кинетическая энергия движения жидкости в радиальном направлении мала по сравнению с кинетической энергией ее движения вдоль оси цилиндра и скорость частиц жидкости в направлении оси цилиндра не зависит от радиуса.

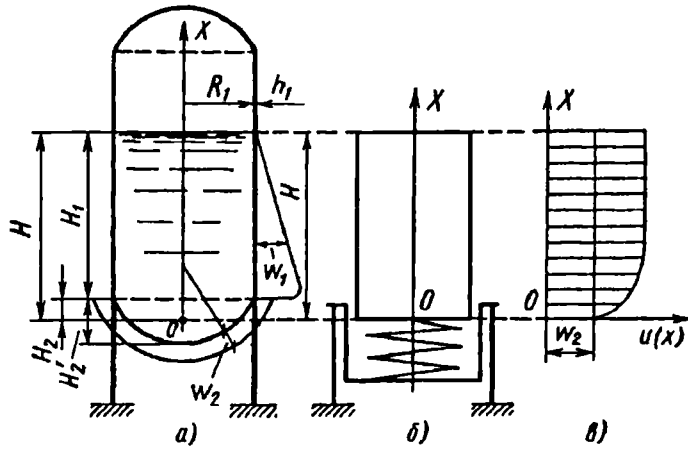


Рис. 11.1

Геометрия бака и схема его крепления показаны на рис. 11.1, а; там же показаны статические перемещения обечайки и дна бака в направлении радиуса, вызванные гидростатическим давлением.

Обозначим через R_1, h_1 — радиус и толщины обечайки бака; R_2, h_2 — радиус и толщину сферической оболочки (дна бака); H_1 — высоту смоченной части обечайки бака; H_2' — высоту сегмента сферического дна; H — приведенную высоту столба жидкости в баке, γ — удельный вес жидкости.

Вычислим потенциальную энергию обечайки и дна бака, соответствующую деформациям от гидростатического давления.

Под воздействием гидростатического давления обечайка бака находится в одноосном напряженном состоянии. Удельная потенциальная энергия Π_{1e} и окружная деформация ϵ_t определяются как

$$\Pi_{1e} = \frac{1}{2} E \epsilon_t^2; \quad \epsilon_t = \frac{\gamma(H - x)R_1}{Eh_1},$$

где E — модуль упругости первого рода.

Полную потенциальную энергию обечайки получим интегрированием величины Π_{1e} по объему обечайки. Полагая $R_1 = \text{const}$, $h_1 = \text{const}$, получим

$$\Pi_1 = \iiint_V \Pi_{1e} dV = 2\pi R_1 h_1 \int_{H_2}^H \Pi_{1e} dx = \frac{\pi \gamma^2 R_1^3 H_1^3}{3 E h_1}. \quad (11.8)$$

Если высота H_2' сегмента сферического дна мала по сравнению с радиусом бака, то для упрощения можно принять, что давление жидкости на любом участке сферы одинаково и равно гидростатическому давлению на глубине H . Для сферической оболочки, находящейся под действием постоянного давления γH , удельная потенциальная энергия

$$\Pi_{2e} = \frac{E \epsilon_2^2}{1 - \mu}; \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_2}{R_2} = \frac{\gamma H R_2}{2 E h_2} (1 - \mu),$$

где μ — коэффициент Пуассона.

Объем части сферической оболочки

$$V_2 = h_2 2\pi R_2 H_2'.$$

Полная потенциальная энергия при деформации дна бака

$$\Pi_2 = \Pi_{2e} V_2 = \frac{\pi R_2^3 \gamma^2 H^2 H_2'}{2 E h_2} (1 - \mu). \quad (11.9)$$

Объем жидкости, находящейся в сегменте сферического дна, заменим равным объемом цилиндрического столба жидкости с радиусом R_1 . Тогда приведенная высота цилиндрического столба жидкости с радиусом R_1 с учетом жидкости на дне бака будет

$$H = H_1 + H_2.$$

Для восприятия радиальных сжимающих сил в месте соединения дна с обечайкой бака устанавливается шпангоут (силовое кольцо). Вес столба жидкости уравнивается меридиональными силами T_2 по контуру дна (рис. 11.2)

$$\pi R_1^2 H \gamma = 2\pi R_1 T_1 = 2\pi R_1 T_2 \sin \theta_0.$$

Сила T_2 , спроектированная на плоскость кольца, дает радиальную нагрузку на кольцо:

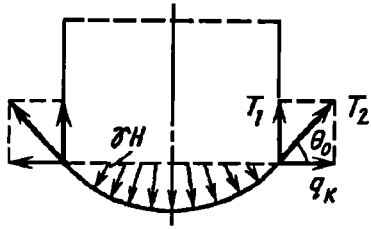


Рис. 11.2

Сжимающая сила в поперечном сечении кольца

$$q_k = T_2 \cos \theta_0 = \frac{R_1 H \gamma}{2 \sin \theta_0} \cos \theta_0.$$

$$S_k = q_k R_1.$$

Потенциальная энергия деформации кольца

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} \frac{S_k^2}{E F_k} 2\pi R_1 = \frac{\pi R_1^5 \gamma^2 H^2}{4 E F_k} \operatorname{ctg}^2 \theta_0, \quad (11.10)$$

где F_k – площадь поперечного сечения кольца.

Таким образом, полная потенциальная энергия деформации

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3. \quad (11.11)$$

Приведенный коэффициент жесткости $k_{пр}$ численно равен удвоенному значению потенциальной энергии системы при $q(t) = 1$. Поэтому при $q(t) = 1$

$$k_{пр} = 2\Pi_{\max}.$$

Теперь вычислим максимальное значение кинетической энергии системы. Будем учитывать только кинетическую энергию колебаний жидкости с частотой ω_1 в направлении продольной оси бака.

Перемещение любого слоя жидкости с координатой x в направлении оси цилиндра можно представить состоящим из двух частей: 1) перемещения на величину w_2 вместе с дном и 2) перемещения, вызываемого изменением толщины нижележащих слоев жидкости вследствие увеличения диаметра обечайки.

Так как вторая часть перемещения жидкости будет такой же, как и у сжимаемого столба под действием веса, то вместо несжимаемой жидкости и податливой обечайки при определении осевых перемещений можно рассматривать некоторый эквивалентный сжимаемый столб жидкости с модулем упругости при растяжении – сжатии $E_{пр}$ и абсолютно жесткую обечайку. Для определения $E_{пр}$ рассмотрим тонкий слой, состоящий из жидкости и обечайки. Толщину слоя в недеформированном состоянии примем за единицу. Увеличение радиуса обечайки от гидростатического давления будет

$$w_1 = \gamma(H - x)R_1^2/(Eh_1).$$

Вследствие увеличения радиуса толщина слоя жидкости уменьшится на величину

$$\Delta_1 = \frac{2\pi R_1 w_1}{\pi R_1^2} = \frac{2\gamma(H - x)R_1}{Eh_1}.$$

Если считать теперь слой жидкости сжимаемым, то под действием осевой сжимающей силы, равной $\gamma(H - x)\pi R_1^2$, толщина уменьшится на величину

$$\Delta_2 = \frac{\gamma(H - x)\pi R_1^2}{E_{пр} \pi R_1^2} = \frac{\gamma(H - x)}{E_{пр}}.$$

Так как уменьшение толщины слоя жидкости вследствие увеличения диаметра обечайки от давления $\gamma(H - x)$ должно быть равно уменьшению толщины того же слоя вследствие сжимаемости ($\Delta_1 = \Delta_2$), то

$$E_{пр} = E \frac{h_1}{2R_1}, \quad (11.12)$$

где E – модуль упругости материала обечайки бака.

На рис. 11.1, б приведена модель сжимаемого столба жидкости; пружина имитирует упругость дна. Полное перемещение произвольного слоя жидкости

$$u(x) = w_2 + \int_0^x \frac{\gamma(H - x)dx}{E_{пр}} = w_2 + \frac{\gamma x(H - x/2)}{E_{пр}}, \quad (11.13)$$

причем

$$w_2 = \frac{\gamma H R_2^2}{2 E h_2} (1 - \mu). \quad (11.14)$$

График функции $u(x)$, представляющий форму колебаний жидкости, показан на рис. 11.1, в.

Максимальное значение кинетической энергии продольных колебаний столба жидкости при $q(t) = 1$ будет

$$T'_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^H \frac{\pi R_1^2 \gamma}{g} \omega_1^2 u^2(x) dx = \frac{1}{2} m_{\text{пр}} \omega_1^2, \quad (11.15)$$

где

$$m_{\text{пр}} = \frac{\pi R_1^2 \gamma H}{g} \left(w_2^2 + \frac{2w_2 \gamma H^2}{3E_{\text{пр}}} + \frac{2\gamma^2 H^4}{15E_{\text{пр}}^2} \right).$$

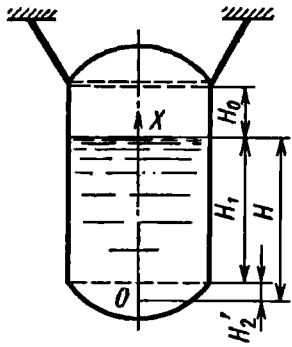


Рис. 11.3

Если бак подвесной и подвешен за верхний силовой шпангоут (рис. 11.3), то под воздействием гидростатического давления напряженное состояние обечайки будет двухосным. Напряжения σ_1 в направлении оси обечайки и σ_t в окружном направлении будут

$$\sigma_1 = \frac{\gamma H R_1}{2h_1}; \quad \sigma_t = \frac{\gamma(H-x)R_1}{h_1}.$$

Потенциальная энергия обечайки в этом случае может быть вычислена по формуле

$$\Pi_1 = \frac{h_1}{2} \iint_S (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_t \epsilon_t) dS + \frac{h_1}{2} \iint_{S_0} \frac{\sigma_1^2}{E} dS_0,$$

где S – смоченная поверхность обечайки; S_0 – несмоченная поверхность обечайки. Так как

$$\epsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu \sigma_t); \quad \epsilon_t = \frac{1}{E}(\sigma_t - \mu \sigma_1), \text{ то}$$

$$\Pi_1 = \frac{h_1}{2E} \int_{H_2}^H (\sigma_1^2 + \sigma_t^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_t) 2\pi R_1 dx + \frac{\pi \gamma^2 H^2 H_0 R_1^3}{4E h_1}. \quad (11.16)$$

Вследствие растяжения обечайки в осевом направлении возникает дополнительное перемещение всего столба жидкости на величину

$$\Delta H = \int_0^H \epsilon_1 dx + \frac{\sigma_1}{E} H_0 = \frac{\gamma H^2 R_1}{2E h_1} (1 - \mu) + \frac{\gamma H H_0 R_1}{2E h_1}.$$

Если рассматривать, как и ранее, сжимаемый столб жидкости, то приведенный модуль сжатия $E_{\text{пр}}(x)$ здесь будет зависеть от координаты x . Вычислим его:

$$w_1 = \epsilon_t R_1; \quad \Delta_1 = \frac{2\pi R_1 w_1}{\pi R_1^2} = \frac{2\gamma R_1}{E h_1} \left[(H-x) - \mu \frac{H}{2} \right];$$

$$\Delta_2 = \frac{\gamma(H-x)}{E_{\text{пр}}(x)}; \quad \Delta_1 = \Delta_2;$$

$$E_{\text{пр}}(x) = \frac{E h_1}{R_1} \frac{(H-x)}{2(H-x) - \mu H}.$$

Полное перемещение произвольного слоя жидкости

$$\begin{aligned} u(x) &= w_2 + \Delta H + \int_0^x \frac{\gamma(H-x)}{E_{\text{пр}}(x)} dx = \\ &= w_2 + \Delta H + \frac{\gamma}{E_{\text{пр}}} \left[Hx \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) - \frac{x^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Здесь w_2 определяется по формуле (11.14), а $E_{\text{пр}}$ – по формуле (11.12). Таким образом, если бак подвесной, то в формулу (11.11) значение Π_1 нужно подставить из (11.16), а при определении кинетической энергии функцию $u(x)$ взять в виде (11.17).

Частота собственных колебаний будет по-прежнему определяться по формуле (11.7).

11.3. ВЫНУЖДЕННЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАКА С ЖИДКОСТЬЮ НА ОСНОВЕ ПРИБЛИЖЕННОЙ МОДЕЛИ

Пусть силовое кольцо, к которому присоединено дно бака, совершает вместе с корпусом ракеты малые колебания в направлении продольной оси по закону

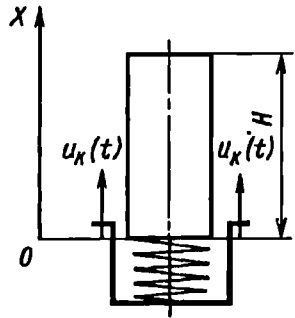


Рис. 11.4

Перемещение произвольного слоя жидкости в направлении оси представим в виде

$$u(x, t) = u_k(t) + f(x)q(t), \quad (11.18)$$

где $f(x)$, $q(t)$ – координатная функция и обобщенная координата перемещения произвольного слоя жидкости относительно силового кольца. Функцию $f(x)$ выбираем в соответствии с уравнениями (11.13) и (11.14). Имеем

$$f(x) = 1 + \alpha \left(\frac{x}{H} - \frac{x^2}{2H_2} \right); \quad \alpha = \frac{4HR_1h_2}{(1 - \mu)R_2^2h_1}, \quad (11.19)$$

где x – расстояние от нижнего сечения столба жидкости до произвольного сечения в положении статического равновесия; перемещение, обусловленное деформацией дна бака (на рис. 11.14 – деформацией пружины), принято равным единице, т.е. $f(0) = 1$.

Для подвешенного бака функция $f(x)$ может быть найдена из уравнения (11.17).

Чтобы получить уравнение вынужденных колебаний, составим выражения кинетической и потенциальной энергий системы и применим уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = P_n; \quad L = T - \Pi.$$

$$u_k(t) = u_0 e^{i\omega t},$$

где u_0 , ω – амплитуда и частота вынужденных колебаний кольца заданы. Если частота ω будет меньше частоты собственных колебаний основного тона ω_1 , то обычно бывает достаточно учесть только основной тон колебаний бака с жидкостью.

Как и в разд. 2, упругий бак с несжимаемой жидкостью заменим сжимаемым столбом жидкости с модулем упругости $E_{пр}$ (11.12). Схема показана на рис. 11.4; здесь пружина имитирует упругость дна бака.

Кинетическая энергия столба жидкости

$$T = \frac{1}{2} \pi R_1^2 \frac{\gamma}{g} \int_0^H [\dot{u}_k + f(x)\dot{q}]^2 dx = \frac{1}{2} m \dot{u}_k^2 + \\ + \pi R_1^2 \frac{\gamma}{g} \dot{u}_k \dot{q} \int_0^H f(x) dx + \frac{1}{2} m_{пр} \dot{q}^2,$$

где m – величина массы жидкости в баке; $m_{пр}$ – приведенная масса жидкости

$$m_{пр} = \pi R_1^2 \frac{\gamma}{g} \int_0^H f^2(x) dx.$$

Потенциальная энергия системы может быть вычислена по методике, изложенной в разд. 11.2. Выразим ее через коэффициент приведенной жесткости

$$\Pi = 0,5 k_{пр} q^2.$$

Обобщенная сила P_n в рассматриваемой задаче равна нулю.

Подставив выражения для T и Π в уравнение Лагранжа, получим

$$m_{пр} \ddot{q} + k_{пр} q = -\dot{u}_k \pi R_1^2 \frac{\gamma}{g} \int_0^H f(x) dx$$

или

$$\ddot{q} + \omega_1^2 q = -b \dot{u}_k, \quad b = \frac{\int_0^H f(x) dx}{\int_0^H f^2(x) dx}. \quad (11.20)$$

Будем рассматривать только установившиеся колебания, которые выражаются частным решением уравнения (11.20):

$$q = \frac{b\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} u_0 e^{i\omega t} \quad (\omega_1 \neq \omega).$$

Вынужденные колебания любого слоя жидкости согласно (11.18) можно представить в виде

$$u(x, t) = \left[1 + f(x) \frac{b\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \right] u_0 e^{i\omega t}.$$

Вынужденные колебания нижнего сечения столба жидкости (дна бака) выражаются уравнением

$$u(t) = \left(1 + \frac{b\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \right) u_0 e^{i\omega t}. \quad (11.21)$$

Вынужденные колебания дна бака относительно силового кольца

$$u_{\text{отн}}(t) = \frac{b\omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} u_0 e^{i\omega t}.$$

Приближенная модель, в которой статическая форма прогиба принята в качестве формы колебаний, позволяет с удовлетворительной точностью учитывать первый тон колебаний. При необходимости учета более высоких тонов надо определять потенциал скорости жидкости в упругом баке. Рассмотрим вначале две частные задачи.

11.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ С ЖЕСТКИМ ДНОМ

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах для осесимметричных колебаний имеет вид

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0. \quad (11.22)$$

Рассмотрим сначала колебания упругого цилиндрического бака кругового поперечного сечения с упругой стенкой и жестким дном. В дальнейшем дно бака также будем считать упругим. Схема бака приведена на рис. 11.5.

Запишем граничные условия на стенке и на дне бака:

$$\partial \varphi_1 / \partial r = \partial w_1 / \partial t \quad \text{при } r = R_1; \quad (11.23)$$

$$\partial \varphi_1 / \partial x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad (11.24)$$

где $w_1 = w_1(x, t)$ — радиальное перемещение цилиндрической стенки бака.

На свободной поверхности давление жидкости равно давлению газов. Поэтому для отклонения давления на основании уравнения (11.6) граничное условие в линейной постановке можно записать как

$$(\partial \varphi_1 / \partial t)_{x=H} = 0. \quad (11.25)$$

Уравнение (11.22) решим методом Фурье. Потенциал скоростей представим в виде следующего ряда:

$$\varphi_1 = \sum_{(s)} D_s X_s(x) R_s(r) i \omega_s e^{i \omega_s t}.$$

Подставив это выражение в уравнение (11.22) и разделив переменные, получим следующие уравнения для определения функций $X_s(x)$ и $R_s(r)$:

$$\frac{d^2 X_s(x)}{dx^2} + k_s^2 X_s(x) = 0; \quad (11.26)$$

$$\frac{d^2 R_s(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_s(r)}{dr} - k_s^2 R_s(r) = 0, \quad (11.27)$$

где k_s — некоторый, пока неопределенный, параметр.

Для того чтобы удовлетворить граничному условию (11.23), представим функцию w_1 в виде

$$w_1 = \sum_{(s)} G_s X_s(x) e^{i \omega_s t},$$

причем функция $X_s(x)$ должна удовлетворять уравнению (11.26). Здесь G_s — неопределенный коэффициент.

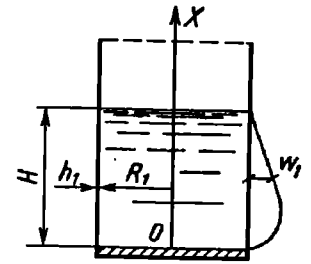


Рис. 11.5

Для определения функции $R_s(r)$ имеем линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка (11.27) – уравнение Бесселя. Так как функция $R_s(r)$ при $r = 0$ должна быть ограничена, то решение уравнения (11.27) должно состоять из функций Бесселя первого рода нулевого порядка.

Если коэффициент k_s в уравнениях (11.26) и (11.27) является мнимым числом, то функция $R_s(r)$ будет функцией Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$R_s(r) = J_0(k_s r).$$

Здесь k_s – модуль мнимого числа.

Если в уравнениях (11.26) и (11.27) k_s является вещественным числом, то функции $R_s(r)$ будут модифицированными функциями Бесселя первого рода нулевого порядка:

$$R_s(r) = I_0(k_s r).$$

Модифицированные функции Бесселя определяются из соотношения

$$I_0(k_s r) = J_0(ik_s r),$$

где k_s – вещественное положительное число.

При мнимых значениях k_s решение уравнения (11.26) выражается через гиперболические функции $\text{sh } k_s x$ и $\text{ch } k_s x$, а при вещественных значениях k_s – через тригонометрические функции $\sin k_s x$ и $\cos k_s x$, причем

$$\sin ik_s x = i \text{sh } k_s x; \quad \cos ik_s x = \text{ch } k_s x.$$

Из выражения для потенциала скоростей ϕ_1 и равенств (11.24) и (11.25) находим

$$\left[\frac{dX_s(x)}{dx} \right]_{x=0} = 0; \quad [X_s(x)]_{x=H} = 0. \quad (11.28)$$

Так как равенства (11.28) могут быть выполнены одновременно только при вещественных значениях k_s , то решение уравнения (11.26), удовлетворяющее граничным условиям (11.28), будет иметь вид

$$X_s(x) = \cos k_s x,$$

где

$$k_s = (2s - 1)\pi/(2H) \quad (s = 1, 2, \dots).$$

При вещественных значениях k_s решение уравнения (11.27) можно представить в виде

$$R_s(r) = I_0[v_s(r/R_1)], \quad (11.29)$$

где

$$v_s = k_s R_1 = (2s - 1)\pi R_1/(2H) \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (11.30)$$

Таким образом, для потенциала скоростей жидкости ϕ_1 и функции w получим следующие выражения:

$$\phi_1 = \sum_{s=1}^{\infty} D_s I_0\left(v_s \frac{r}{R_1}\right) \cos\left(v_s \frac{x}{R_1}\right) i\omega_s e^{i\omega_s t}, \quad (11.31)$$

$$w_1 = \sum_{s=1}^{\infty} G_s \cos\left(v_s \frac{x}{R_1}\right) e^{i\omega_s t}.$$

Для определения коэффициента D_s , G_s и частот собственных колебаний ω_s нужно рассмотреть связь между радиальными колебаниями цилиндрической стенки бака и радиальными колебаниями жидкости.

Рассмотрим часть кольца, вырезанного из цилиндрической стенки бака (рис. 11.6).

При осесимметричных колебаниях диаметр кольца увеличивается или уменьшается, в кольце возникают напряжения растяжения или сжатия. Ширину кольца примем равной единице. При увеличении радиуса кольца на величину w_1 в кольце возникает растягивающая сила, равная $Eh_1(w_1/R_1)$. На внутреннюю стенку кольца действует давление

$$P_{r=R_1} = -\rho(\partial\phi_1/\partial t)_{r=R_1}. \quad (11.32)$$

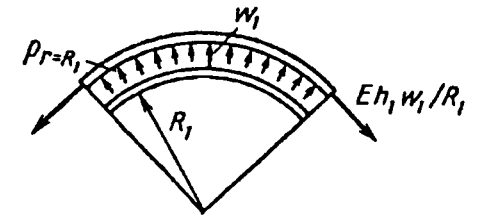


Рис. 11.6

Уравнение радиальных колебаний кольца можно представить в виде

$$\rho_0 h_1 R_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = R_1 p_{r=R_1} - E h_1 \frac{w_1}{R_1}.$$

Разделив все члены этого уравнения на $\rho_0 h_1 R_1$, получим

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} + \Omega_k^2 w_1 = \frac{1}{\rho_0 h_1} p_{r=R_1}. \quad (11.33)$$

Здесь ρ_0 – плотность материала стенки бака; $\Omega_k = \frac{1}{R_1} \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ – частота собственных радиальных колебаний кольца с радиусом R_1 . Подставив в уравнение (11.33) значение $p_{r=R_1}$ из равенства (11.32) и заменив функции w_1 и \dot{w}_1 их выражениями из (11.31), получим

$$G_s (\Omega_k^2 - \omega_s^2) = D_s \frac{\rho}{h_1 \rho_0} I_0(v_s) \omega_s^2 \quad (s = 1, 2, \dots). \quad (11.34)$$

Из граничного условия (11.23) находим

$$D_s \left[\frac{d}{dr} I_0 \left(v_s \frac{r}{R_1} \right) \right]_{r=R_1} = G_s.$$

Так как

$$\frac{d}{dr} I_0(k_s r) = k_s I_1(k_s r),$$

то

$$D_s = R_1 G_s / [v_s I_1(v_s)]. \quad (11.35)$$

Подставив выражение для коэффициента D_s в уравнение (11.34), получим формулу для определения частоты собственных осесимметричных колебаний упругого цилиндрического бака с жидкостью:

$$\omega_s^2 = \Omega_k^2 \left/ \left[1 + \frac{\rho R_1}{\rho_0 h_1} \frac{I_0(v_s)}{v_s I_1(v_s)} \right] \right. \quad (11.36)$$

Здесь v_s – вещественные числа, определяемые по формуле (11.30). Если не учитывать массу стенки бака, то частота собственных колебаний бака

$$\omega_s^2 = \frac{E h_1 v_s I_1(v_s)}{\rho R_1^3 I_0(v_s)}. \quad (11.37)$$

Рассмотрим теперь колебания жидкости в цилиндрическом баке с жесткой стенкой и упругим дном.

11.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ С ЖЕСТКОЙ ОБЕЧАЙКОЙ И УПРУГИМ ДНОМ

Поперечное сечение бака примем в виде круга с радиусом R_1 , дно бака – в виде пологой сферической оболочки с радиусом R_2 и толщиной h_2 . Схема бака приведена на рис. 11.7. Прогиб дна бака в направлении радиуса сферы обозначим через $w_2 = w_2(r, t)$.

Так как глубина сферической оболочки мала по сравнению с ее радиусом, то метрику пологой оболочки заменим метрикой плоскости, т.е. будем считать днище круглой пластиной, а высоту столба жидкости – равной

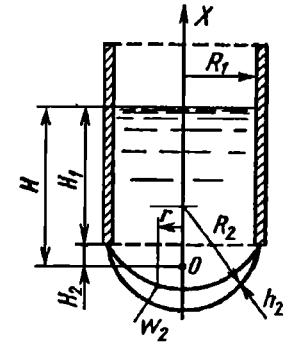


Рис. 11.7

$$H = H_1 + H_2.$$

Потенциал скоростей ϕ_2 должен удовлетворять уравнению Лапласа (11.22) и граничным условиям:

$$\partial \phi_2 / \partial r = 0 \quad \text{при} \quad r = R_1; \quad (11.38)$$

$$\partial \phi_2 / \partial x = \partial \omega_2 / \partial t \quad \text{при} \quad x = 0; \quad (11.39)$$

$$\partial \varphi^2 / \partial t = 0 \text{ при } x = H. \quad (11.40)$$

Форма собственных осесимметричных колебаний i -го тона круглой пластинки может быть представлена в виде

$$f_i(r) = C_1 J_0\left(\mu_i \frac{r}{R_1}\right) + C_2 I_0\left(\mu_i \frac{r}{R_1}\right), \quad (11.41)$$

где

$$\mu_i^4 = \frac{R_1^4}{D} E h_2 \left(\rho_0 \frac{\omega_i^2}{E} - \frac{1}{R_1^2} \right); \quad D = \frac{E h_2^3}{12(1 - \mu^2)};$$

E, ρ_0 – модуль упругости и плотность материала оболочки; ω_i – частота собственных колебаний сухой оболочки. Край оболочки считаем защемленным, поэтому функция $f_i(r)$ должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$f_i(r) = 0; \quad f'_i = 0 \text{ при } r = R_1.$$

Подставив в эти условия функцию $f_i(r)$, получим характеристическое уравнение для определения коэффициента μ_i :

$$J_0(\mu_i) I_1(\mu_i) + I_0(\mu_i) J_1(\mu_i) = 0$$

и соотношение между коэффициентами C_1 и C_2

$$C_2 = -C_1 \frac{J_0(\mu_i)}{I_0(\mu_i)}.$$

Представим перемещение дна бака в направлении радиуса сферы в виде

$$w_2(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(r) q_i(t),$$

где $q_i(t)$ – обобщенная координата. Тогда, приняв в выражении (11.41) коэффициент $C_1 = 1$, получим

$$w_2(r, t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \left[J_0\left(\mu_i \frac{r}{R_1}\right) - \theta_i I_0\left(\mu_i \frac{r}{R_1}\right) \right]. \quad (11.42)$$

Здесь

$$\theta_i = J_0(\mu_i) / I_0(\mu_i).$$

Чтобы удовлетворить уравнению Лапласа (11.22) и граничному условию (11.40), потенциал скоростей частиц жидкости представим в виде произведения функций Бесселя, гиперболических и функций времени:

$$\varphi_2 = \sum \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\lambda_j \frac{H}{R_1}\right)} q_j(t) J_0\left(\lambda_j \frac{r}{R_1}\right) \operatorname{sh}\left(\lambda_j \frac{x - H}{R_1}\right) + A(t) \frac{x - H}{R_1}, \quad (11.43)$$

где $q_j(t)$, $A(t)$ – некоторые функции времени.

Подставив выражение (11.43) в граничное условие (11.38), получим уравнения для определения λ_j :

$$\left[\frac{d}{dr} J_0\left(\lambda_j \frac{r}{R_1}\right) \right]_{r=R_1} = -\frac{\lambda_j}{R_1} J_1(\lambda_j) = 0.$$

Решив это уравнение, найдем, что $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 3,8317$; $\lambda_2 = 7,0156$; $\lambda_3 = 10,1735$. Функции $q_j(t)$ и $A(t)$ подберем таким образом, чтобы удовлетворялось граничное условие (11.39). Подставив выражения (11.42) и (11.43) в условие (11.39), получим

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{R_1} q_j(t) J_0\left(\lambda_j \frac{r}{R_1}\right) + \frac{A(t)}{R_1} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t) \left[J_0\left(\mu_i \frac{r}{R_1}\right) - \theta_i I_0\left(\mu_i \frac{r}{R_1}\right) \right]. \quad (11.44)$$

Из равенства (11.44) функции $q_j(t)$ и $A(t)$ можно выразить через функции $q_i(t)$. Для этого один раз обе части этого равенства надо умножить на $r dr$ и проинтегрировать по r в пределах от 0 до R_j ; другой раз умножить на $r J_0[\lambda_j(r/R_1)]$ и проинтегрировать по r в тех же пределах.

Окончательно выражение для потенциала скоростей φ_2 можно записать в виде

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t) \left[\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} J_0 \left(\lambda_j \frac{r}{R_1} \right) \operatorname{sh} \left(\lambda_j \frac{x-H}{R_1} \right) + a_i (x-H) \right], \quad (11.45)$$

где коэффициенты a_i и b_{ij} выражаются через значения функций Бесселя при $r = R_1$, корни этих функций μ_i и λ_j .

Так же, как это сделано в разд. 4, здесь можно определить частоту собственных колебаний жидкости в баке с упругим дном.

Приступим теперь к решению задачи о колебаниях жидкости в упругом цилиндрическом баке, т.е. в баке с упругими стенками и упругим дном. Для решения используем результаты, полученные в разд. 11.4 и 11.5.

11.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА СКОРОСТЕЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ БАКЕ

Рассмотрим упругий цилиндрический бак кругового поперечного сечения с радиусом R_1 ; дно бака выполнено в виде пологой сферической оболочки, радиус кривизны которой равен R_2 . Потенциал скоростей жидкости φ должен удовлетворять уравнению Лапласа и граничным условиям:

$$\partial \varphi / \partial r = \partial w_1 / \partial t \text{ при } r = R_1; \quad (11.46)$$

$$\partial \varphi / \partial x = \partial w_2 / \partial t \text{ при } x = 0; \quad (11.47)$$

$$\partial \varphi / \partial t = 0 \text{ при } x = H. \quad (11.48)$$

Здесь w_1, w_2 — нормальные прогибы обечайки и дна бака соответственно; H — приведенная высота столба жидкости в баке.

Потенциал скоростей представим в виде суммы двух функций

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

каждая из которых является решением уравнения Лапласа. Кроме того, функция φ_1 удовлетворяет граничным условиям (11.23) — (11.25), а функция φ_2 — граничным условиям (11.38) — (11.40). При таком выборе функций φ_1 и φ_2 потенциал скоростей будет удовлетворять всем условиям (11.46) — (11.48).

Функции φ_1 и φ_2 определены в разд. 11.4 и 11.5. На основании выражений (11.31), (11.35) и (11.45) получим

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{D_s}{G_s} I_0 \left(v_s \frac{r}{R_1} \right) \cos \left(v_s \frac{x}{R_1} \right) w_s(t), \\ \varphi_2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \dot{q}_i(t) \left[\sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} J_0 \left(\lambda_j \frac{r}{R_1} \right) \operatorname{sh} \left(\lambda_j \frac{x-H}{R_1} \right) + a_i (x-H) \right]. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Здесь в выражении для φ_1 по сравнению с (11.31) принято

$$w_s(t) = G_s e^{i\omega_s t}.$$

Через потенциал скоростей жидкости можно выразить давление жидкости и ее кинетическую энергию.

11.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ СИСТЕМЫ

Кинетическая энергия колеблющейся жидкости

$$T = \frac{1}{\rho} \rho \iiint_V v^2 dV,$$

где V — объем жидкости.

По формуле Грина интеграл по объему можно преобразовать в интеграл по поверхности. Для безвихревого движения несжимаемой жидкости получим

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

или

$$T = \frac{1}{2} \rho \iint_S \left[\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos(n, x) + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cos(n, r) \right] dS,$$

где S — поверхность жидкости, ограничивающая объем V ; n — внешняя нормаль к поверхности жидкости.

Для боковой поверхности цилиндрического бака

$$\cos(n, x) = 0; \quad \cos(n, r) = 1; \quad dS = 2\pi R_1 dx;$$

для дна бака

$$\cos(n, x) = -1; \quad \cos(n, r) = 0; \quad dS = 2\pi r dr.$$

На свободной поверхности $\varphi_{x=H} = 0$, поэтому

$$T = \frac{1}{2} 2\pi\rho \left[\int_0^H \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=R_1} R_1 dx - \int_0^{R_1} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=0} r dr \right]. \quad (11.50)$$

Потенциал скоростей жидкости

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

причем функции φ_1 и φ_2 определяются по формулам (11.49).

Окончательное выражение для определения кинетической энергии колеблющейся жидкости представим в виде

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_{s=1}^{\infty} a_{w,w} \dot{w}_s^2 + \sum_{i=1}^{\infty} q_{q,q} \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{q,q_k} \dot{q}_i \dot{q}_k + \right. \\ \left. + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{w,q_s} \dot{w}_s \dot{q}_s \right). \quad (11.51)$$

В потенциальную энергию деформации бака входят потенциальная энергия деформации цилиндрической обечайки, сферического дна и силового кольца.

Влияние давления наддува и гидростатического давления в баке учитывать не будем. Это значительно упростит формулы, однако величина потенциальной энергии при этом получится несколько заниженной.

Определим потенциальную энергию цилиндрической обечайки бака, которую будем считать безмоментной тонкостенной. Для несуществующего бака будем учитывать только напряжения по окружности, возникающие вследствие динамического давления жидкости. Осевые напряжения будут учтены при расчете продольных колебаний всего корпуса ракеты.

Потенциальная энергия деформации обечайки

$$\Pi_1 = 2\pi R_1 h_1 E \int_0^H \epsilon_r^2 dx / 2,$$

где E — модуль упругости первого рода; ϵ_r — деформация оболочки по окружности; H — высота заполнения жидкостью. Деформация ϵ_r связана с радиальным перемещением $w_1(x, t)$ соотношением

$$\epsilon_r = w_1(x, t) / R_1.$$

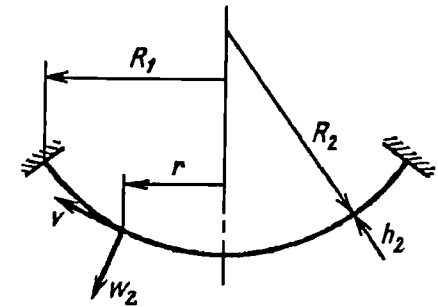


Рис. 11.8

При этом на основании выражения (11.31) можно принять, что

$$w_1(x, t) = \sum_{s=1}^{\infty} w_s(t) \cos\left(v_s \frac{x}{R_1}\right).$$

Подставляя величину ϵ_r в формулу для Π_1 и интегрируя, получим

$$\Pi_1 = \frac{\pi H h_1 E}{2 R_1} \sum_{s=1}^{\infty} w_s^2(t).$$

Дно бака — безмоментная тонкостенная полая сферическая оболочка находится в двухосном напряженном состоянии. Схема оболочки приведена на рис. 11.8. Зависимости деформаций от перемещения полой оболочки имеют вид

$$\epsilon_r = \frac{v}{r} - \frac{w_2}{R_2}; \quad \epsilon_r = \frac{dv}{dr} - \frac{w_2}{R_2},$$

где w_2, v — перемещения оболочки в радиальном и меридиональном направлениях; ϵ_r, ϵ_r — деформация оболочки в направлениях по окружности и в меридиональном.

Величину потенциальной энергии деформации оболочки можно вычислить из выражения

$$\Pi_2 = \frac{\pi E h_2}{1 - \mu^2} \int_0^{R_1} (\epsilon_r^2 + \epsilon_r^2 + 2\mu \epsilon_r \epsilon_r) r dr. \quad (11.52)$$

Радиальное перемещение оболочки можно определить по формуле (11.42):

$$w_2 = \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \left[J_0 \left(\mu_i \frac{r}{R_1} \right) - \theta_i I_0 \left(\mu_i \frac{r}{R_1} \right) \right].$$

Меридиональное и радиальное перемещения связаны соотношением

$$v = -\frac{R_2 D}{E h_2} (1 + \mu) \frac{d}{dr} (\nabla^2 w_2),$$

$$\text{где } D = \frac{E h_2^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

Подставив сюда выражение для w_2 , найдем

$$v = -\frac{R_2 h_2^2}{12(1 - \mu)} \sum_{i=1}^{\infty} q_i(t) \left(\frac{\mu_i}{R_1} \right)^3 \left[J_1 \left(\mu_i \frac{r}{R_1} \right) - \theta_i I_0 \left(\mu_i \frac{r}{R_1} \right) \right].$$

После интегрирования правой части равенства (11.52) представим выражение потенциальной энергии в виде

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} b_{q_i q_i} q_i^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{q_i q_k} q_i q_k.$$

Потенциальная энергия деформации растяжения – сжатия кольца определяется по формуле (11.10):

$$\Pi_3 = \frac{1}{2} \frac{S_k^2}{E F_k} 2\pi R_1,$$

где $S_k = q_k R_1$ – сила в поперечном сечении кольца; q_k – погонная нагрузка, действующая на кольцо в радиальном направлении. Нагрузку можно выразить через меридиональную силу T_2 , действующую на внешней границе дна бака (см. рис. 11.2):

$$|q_k| = \left| \frac{T_1}{\sin \theta_0} \right| \cos \theta_0.$$

Силу T_1 определим из условия равновесия дна бака:

$$2\pi R_1 T_1 = 2\pi \int_0^{R_1} p_{x=0} r dr,$$

где $p_{x=0}$ – отклонение давления жидкости на дно бака.

Теперь формулу для вычисления потенциальной энергии деформации кольца представим в виде

$$\Pi_3 = \frac{\pi R_1}{E F_k} \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \left(\int_0^{R_1} p_{x=0} r dr \right)^2.$$

Отклонение давления жидкости на дно бака

$$p_{x=0} = -\rho \left[\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial t} \right]_{x=0}.$$

После интегрирования выражения для Π_3 получим

$$\Pi_3 = \frac{\pi R_1 \rho^2}{E F_k} \operatorname{ctg}^2 \theta_0 \left(\sum_{s=1}^{\infty} \ddot{w}_s \frac{R_1^3}{v_s^2} - \frac{R_1^2 H}{2} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \ddot{q}_i \right)^2.$$

Полная потенциальная энергия деформации бака

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} & \left(\sum_{s=1}^{\infty} b_{w_s w_s} w_s^2 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{w_s w_k} w_s w_k + \sum_{i=1}^{\infty} b_{q_i q_i} q_i^2 + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{q_i q_k} q_i q_k + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} b_{w_s q_i} w_s q_i \right). \end{aligned} \quad (11.53)$$

11.8. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ БАКОВ С ЖИДКОСТЬЮ

Выражения кинетической и потенциальной энергий системы можно записать в матричной форме:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{Z}}' M \dot{\bar{Z}}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \bar{Z}' K \bar{Z}, \quad (11.54)$$

где M – матрица инерции системы; K – матрица жесткости системы;

\bar{Z} , $\dot{\bar{Z}}$ – векторы-столбцы обобщенных координат и обобщенных скоростей, характеризующих совместные перемещения жидкости и

упругих стенок бака; \bar{Z}' , $\dot{\bar{Z}}'$ – соответствующие векторы строки.

Исходя из выражений (11.50) и (11.53) и ограничивая в них число обобщенных координат $w_s(w_k)$ ($s = 1, 2, \dots, m^{(0)}$) q_i , (q_k) ($i = 1, 2, \dots, n^{(0)}$), получим векторы обобщенных координат и обобщенных скоростей:

$$\bar{Z} = \begin{pmatrix} w \\ q \end{pmatrix}; \quad \dot{\bar{Z}} = \begin{pmatrix} \dot{w} \\ \dot{q} \end{pmatrix},$$

$$\text{где } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m^{(0)} \end{pmatrix}; \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Матрица инерции системы может быть представлена в виде

$$M = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11} – диагональная матрица, элементы которой на диагоналях $a_{w,w}$ ($s = 1, 2, \dots, m^{(0)}$);

$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_{w_1 q_1} & a_{w_1 q_2} & \dots & a_{w_1 q_n^{(0)}} \\ a_{w_2 q_1} & a_{w_2 q_2} & \dots & a_{w_2 q_n^{(0)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{w_s q_1} & a_{w_s q_2} & \dots & a_{w_s q_n^{(0)}} \end{pmatrix};$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{w_1 q_1} & a_{w_2 q_1} & \dots & a_{w_s q_1} \\ a_{w_1 q_2} & a_{w_2 q_2} & \dots & a_{w_s q_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{w_1 q_n^{(0)}} & a_{w_2 q_n^{(0)}} & \dots & a_{w_s q_n^{(0)}} \end{pmatrix};$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_{q_1 q_1} & a_{q_1 q_2} & \dots & a_{q_1 q_n^{(0)}} \\ a_{q_2 q_1} & a_{q_2 q_2} & \dots & a_{q_2 q_n^{(0)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q_n^{(0)} q_1} & a_{q_n^{(0)} q_2} & \dots & a_{q_n^{(0)} q_n^{(0)}} \end{pmatrix}.$$

Матрица жесткости системы имеет вид

$$K = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$B_{11} = \begin{pmatrix} b_{w_1 w_1} & b_{w_1 w_2} & \dots & b_{w_1 w_s} \\ b_{w_2 w_1} & b_{w_2 w_2} & \dots & b_{w_2 w_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{w_s w_1} & b_{w_s w_2} & \dots & b_{w_s w_s} \end{pmatrix}.$$

Матрицы B_{12}, B_{21}, B_{22} можно получить соответственно из матриц A_{12}, A_{21}, A_{22} путем замены в них элементов a_{w,q_i} элементами b_{w,q_i} .

Для составления уравнений движения системы применим уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = 0, \text{ где } L = T - \Pi.$$

Уравнение движения системы в матричной форме имеет следующий вид:

$$M\ddot{\bar{Z}} + K\bar{Z} = 0. \quad (11.55)$$

Считая колебания гармоническими с частотой ω_s , получим из уравнения (11.55) характеристическое уравнение для определения квадратов частот собственных колебаний системы:

$$|M^{-1}K - \omega_s^2 E| = 0, \quad (11.56)$$

где E — единичная матрица; M^{-1} — матрица, обратная по отношению к матрице M .

Определение частот и форм собственных колебаний жидкости в упругом баке сводится к нахождению собственных значений и собственных векторов матрицы $M^{-1}K$. Соответствующие вычисления проводятся на ЭВМ. В дальнейшем будем считать, что корни уравнения (11.56) простые.

Каждой частоте ω_s собственных колебаний соответствует свой вектор, компоненты которого суть формы собственных колебаний системы. Связь между обобщенными координатами \bar{Z} и нормальными координатами $\bar{\eta}$ в матричной форме можно выразить как

$$\bar{Z} = R\bar{\eta}, \quad (11.57)$$

где $R = [\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 \dots \bar{\beta}_s \dots \bar{\beta}_{n^{(0)}+m^{(0)}}]$ — матрица распределения амплитуд;

$$\bar{\beta}_s = \begin{pmatrix} v_{w_1}^1(\omega_s) \\ \vdots \\ v_{w_m^{(0)}}(\omega_s) \\ v_{q_1}(\omega_s) \\ \vdots \\ v_{q_n^{(0)}}(\omega_s) \end{pmatrix}; \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_s \\ \vdots \\ \eta_{n^{(0)}+m^{(0)}} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\bar{\beta}_s$ — собственный нормированный вектор-столбец уравнения (11.56); $\bar{\eta}$ — вектор нормальных координат системы, причем s -я компонента этого вектора может быть представлена в виде

$$\eta_s = A_s(\omega_s) \lambda_s(t), \quad (11.58)$$

где $A_s(\omega_s)$ — некоторая константа, зависящая от частоты собственных колебаний ω_s ; $\lambda_s(t)$ — функция времени s -го тона колебаний.

Подставим выражение (11.57) в равенства (11.54). Используя условия ортогональности собственных векторов

$$\bar{\beta}_k' M \bar{\beta}_s = 0; \quad \bar{\beta}_k' K \bar{\beta}_s = 0,$$

где $\bar{\beta}_k'$ — вектор-строка, получаемый транспонированием вектора-столбца $\bar{\beta}_k$, найдем выражения для кинетической и потенциальной энергий в нормальных координатах:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n^{(0)}+m^{(0)}} A_s^2 \bar{\beta}_s' M \bar{\beta}_s \dot{\lambda}_s^2; \quad (11.59)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n^{(0)}+m^{(0)}} A_s^2 \bar{\beta}_s' K \bar{\beta}_s \lambda_s^2. \quad (11.60)$$

Формулы (11.59), (11.60) удобны для составления дифференциальных уравнений движения упругого бака с жидкостью.

11.9. ВЫНУЖДЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

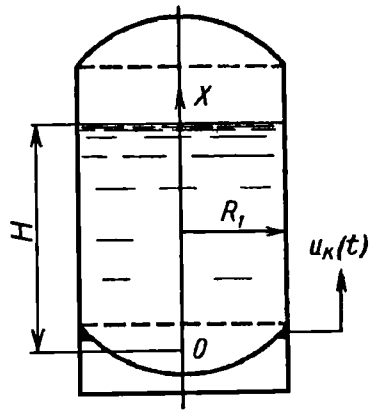


Рис. 11.9

Вынужденные колебания жидкости в баке возникают вследствие продольных колебаний корпуса ракеты. Примем колебания силового кольца в направлении продольной оси бака, происходящими по закону

$$u_k(t) = u_0 e^{i\omega_n t},$$

где ω_n — частота n -го тона собственных колебаний корпуса.

Абсолютное движение жидкости можно представить состоящим из двух частей: переносного движения вместе с силовым кольцом и относительного движения, т.е. движения относительно подвижной системы

координат, связанной с силовым кольцом. Схема бака показана на рис. 11.9.

Потенциал скоростей жидкости в переносном движении представим в виде

$$\varphi_t = \dot{u}_k(t)(x - H).$$

Потенциал скоростей жидкости в относительном движении с учетом выражений (11.49), (11.57), (11.58) представим следующим образом:

$$\varphi_r = \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s R_s(r) X_s(x) \dot{\lambda}_s(t); \quad s^{(0)} = n^{(0)} + m^{(0)}.$$

Потенциал абсолютных скоростей жидкости теперь можно представить в виде

$$\Phi = \dot{u}_k(t)(x - H) + \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s R_s(r) X_s(x) \dot{\lambda}_s(t). \quad (11.61)$$

Подставив выражение (11.61) в формулу (11.50) и учитывая, что $\lambda_s(t)$ является обобщенной координатой нормальных колебаний жидкости в упругом баке, получим выражение кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s^2 B_s \dot{\lambda}_s^2 + \dot{u}_k \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s C_s \dot{\lambda}_s + \frac{m \dot{u}_k^2}{2}, \quad (11.62)$$

где

$$m = \pi R_1^2 H \rho;$$

$$B_s = 2\pi R_1 \rho \int_0^H R_s(R_1) R'_s(R_1) X_s^2(x) dx - \quad (11.63)$$

$$- 2\pi \rho \int_0^{R_1} R_s^2(r) X_s(0) X'_s(0) r dr;$$

$$C_s = \pi R_1 \rho \int_0^H (x - H) R'_s(R_1) X_s(x) dx +$$

$$+ \pi H \rho \int_0^{R_1} R_s(r) X'_s(0) r dr - \pi \rho \int_0^{R_1} R_s(r) X_s(0) r dr.$$

Потенциальная энергия деформации бака в нормальных координатах может быть представлена так:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s^2 k_s^* \lambda_s^2. \quad (11.64)$$

Здесь $A_s^2 k_s^*$ — коэффициент приведенной жесткости бака для s -го тона колебаний.

Составим уравнения относительного движения системы. Применив уравнения Лагранжа второго рода, получим

$$A_s^2 B_s \ddot{\lambda}_s + A_s^2 k_s^* \lambda_s = -A_s C_s \ddot{u}_k \quad (s = 1, 2, \dots, s^{(0)}). \quad (11.65)$$

Если применить обозначения матричного способа преобразования к нормальным координатам (см. разд. 11.8), то для кинетической энергии жидкости можно получить следующую формулу:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s^2 \bar{\beta}_s' M \bar{\beta}_s \dot{\lambda}_s^2 + \dot{u}_x \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s^2 (\bar{\beta}_s' \bar{F}) \dot{\lambda}_s + \frac{m \dot{u}_x^2}{2}. \quad (11.66)$$

Уравнения относительного движения системы с учетом выражений (11.60) и (11.66) будут иметь вид

$$A_s^2 \bar{\beta}_s' M \bar{\beta}_s \ddot{\lambda}_s + A_s^2 \bar{\beta}_s' k \beta_s \lambda_s = -A_s^2 (\bar{\beta}_s' \bar{F}) \ddot{u}_x. \quad (11.67)$$

Здесь \bar{F} — некоторый вектор, компоненты которого могут быть вычислены из выражения для потенциала абсолютных скоростей частиц жидкости

$$\Phi = \dot{u}_x (x - H) + \varphi_1 + \varphi_2.$$

Уравнения (11.65) и (11.67) различаются лишь обозначениями коэффициентов. Это уравнения вынужденных колебаний. При колебаниях силового кольца относительное движение жидкости в упругом баке представляет собой вынужденные колебания. Зная частоту и амплитуду колебаний кольца, по уравнениям (11.65) и (11.67) можно найти функцию времени $\lambda_s(t)$.

Проекция на ось X динамической силы, передающейся через силовое кольцо на корпус, может быть вычислена как сумма давлений жидкости на дно бака:

$$N(t) = 2\pi \rho \int_0^{R_1} (\partial \Phi / \partial t)_{x=0} r dr.$$

С учетом выражения (11.61) найдем

$$N(t) = -\pi R_1^2 H \rho \ddot{u}_x + 2\pi \rho \sum_{s=1}^{s^{(0)}} A_s \ddot{\lambda}_s \int_0^{R_1} R_s(r) X_s(0) r dr. \quad (11.68)$$

11.10. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРУГОГО БАКА С ЖИДКОСТЬЮ

Осевая динамическая сила, возникающая при вынужденных продольных колебаниях бака с жидкостью, силовым кольцом бака передается на корпус.

Так как для любого тона уравнение (11.67), характеризующее вынужденные колебания жидкости в баке, имеет такую же структуру, как и уравнение для вынужденных колебаний простейшей механической системы — сосредоточенной массы на пружине, то для определения осевой динамической силы и введения ее в алгоритм расчета форм и частот собственных колебаний корпуса ракеты колебания жидкости можно заменить колебаниями сосредоточенных масс на пружинах. При такой замене величину массы и жесткость пружины следует подбирать так, чтобы осевая динамическая сила от колебаний жидкости была равна динамической силе от колебаний механической системы при любой амплитуде и частоте колебаний корпуса.

Рассмотрим механическую систему, схема которой приведена на рис. 11.10. Сосредоточенная масса m_s на невесомой пружине с жесткостью k_s подвешена к жесткому дну бака, которое вместе с силовым кольцом совершает колебания вдоль оси бака по закону $u_k(t)$. Перемещение массы m_s относительно силового кольца обозначим через $\lambda_s(t)$. Каждому s -му тону колебаний жидкости соответствует своя масса m_s на пружине. Так как скорость массы m_s равна $\dot{u}_x + \dot{\lambda}_s$, то кинетическая энергия динамической модели

$$T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\bar{s}} m_s \dot{\lambda}_s^2 + \dot{u}_x \sum_{s=1}^{\bar{s}} m_s \dot{\lambda}_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{\bar{s}} m_s \dot{u}_x^2. \quad (11.69)$$

Уравнение вынужденных колебаний сосредоточенной массы можно представить в виде

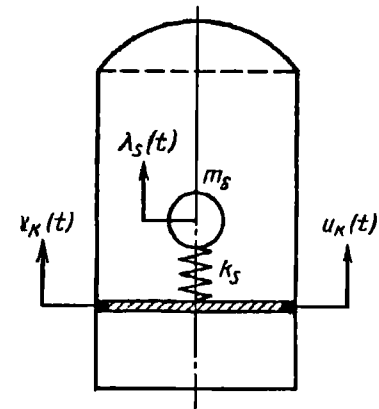


Рис. 11.10

$$m_s \ddot{\lambda}_s + k_s \lambda_s = -m_s \ddot{u}_x \quad (11.70)$$

или

$$\ddot{\lambda}_s + \omega_s^2 \lambda_s = -\ddot{u}_x. \quad (11.71)$$

Из условия тождественности уравнений (11.65) и (11.70) находим

$$m_s = A_s^2 B_s; \quad m_s = A_s C_s; \quad k_s = k_s^* A_s^2 = \omega_s^2 m_s$$

или

$$C_s = A_s B_s; \quad A_s = C_s / B_s.$$

Следовательно, жесткость пружины и сосредоточенная масса механической системы для s -го тона колебаний должны быть

$$k_s = \omega_s^2 m_s; \quad m_s = C_s^2 / B_s. \quad (11.72)$$

Здесь C_s и B_s — коэффициенты, определяемые по формулам (11.63), а ω_s — частота собственных колебаний s -го тона для упругого бака с жесткостью.

При таком выборе величин m_s и k_s частота собственных колебаний сосредоточенной массы на пружине будет равна частоте s -го тона собственных колебаний жидкости в упругом баке, и функция λ_s , найденная из решения уравнения (11.71), будет такой же, как и функция λ_s в уравнении (11.65).

Из сравнения выражений (11.62) и (11.69) получаем, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} m_s = m = \pi R_1^2 H \rho. \quad (11.73)$$

При выбранной нормировке собственного вектора $\bar{\beta}_s$ сумма всех сосредоточенных масс, подвешенных на пружинах, равна массе жидкости в баке. Если учитывать ограниченное число $s^{(0)}$ тонов колебаний жидкости в баке, то при $s > s^{(0)}$ нужно положить все $k_s = \infty$.

Убедимся теперь в том, что осевая динамическая сила N , передающаяся на корпус от колебаний жидкости, равна осевой силе, возникающей при колебаниях механической системы.

Так как $\Phi_{x=H} = 0$, то и $X_s(H) = 0$ и

$$\int_0^H X'_s(x) dx = -X_s(0).$$

С учетом этого равенства выражение для коэффициента C_s представим в виде

$$C_s = -2\pi\rho \int_0^{R_1} R(r) X_s(0) r dr.$$

Проекция на ось X динамической силы от колебаний жидкости может быть вычислена по формуле (11.68). Запишем эту формулу через коэффициент C_s :

$$N(t) = -\pi R_1^2 H \rho \ddot{u}_x - \sum_{s=1}^{\infty} A_s C_s \ddot{\lambda}_s.$$

Принимая во внимание соотношение (11.73), а также равенство $m_s = A_s C_s$, получим

$$N(t) = -\sum_{s=1}^{\infty} m_s (\ddot{u}_x + \ddot{\lambda}_s). \quad (11.74)$$

Это и есть суммарная динамическая сила, передаваемая от сосредоточенных масс m_s на дно бака.

Расчеты показывают, что величина массы m_s быстро уменьшается с повышением номера тона колебаний. Например, для бака с размерами: $R_2 = 2,25$ м, $R_1 = 1,5$ м, $H = 9$ м, $h_1 = 2,5$ мм, $h_2 = 3$ мм; $\mu = 0,3$; $\rho/\rho_0 = 0,364$; величины масс механической системы, вычисленные при $n^{(0)} = 4$ и $m^{(0)} = 3$, будут $m_1 = 0,808m$; $m_2 = 0,06084m$; $m_3 = 0,027m$; $m_4 = 0,0119m$. Здесь m — масса всей жидкости в баке. Отношение m_s/m зависит от уровня заполнения бака H/R_1 .

Установим теперь связь между λ_j — перемещением массы m_j механического аналога и перемещением центра упругого днища $\lambda_{j \text{ дн}}$.

Для этого запишем выражение потенциала скорости (11.49) через нормальные координаты η_j .

Подставим в равенство (11.57) выражения для Z , R , η . Тогда

$$\begin{pmatrix} v_{w_1}(\omega_1) & \dots & v_{w_1}(\omega_{m^{(0)}+n^{(0)}}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{w_m^{(0)}}(\omega_1) & \dots & v_{w_m^{(0)}}(\omega_{m^{(0)}+n^{(0)}}) \\ v_{q_1}(\omega_1) & \dots & v_{q_1}(\omega_{m^{(0)}+n^{(0)}}) \\ \vdots & & \vdots \\ v_{q_n^{(0)}}(\omega_1) & \dots & v_{q_n^{(0)}}(\omega_{m^{(0)}+n^{(0)}}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{m^{(0)}} \\ \eta_{m^{(0)}+1} \\ \vdots \\ \eta_{m^{(0)}+n^{(0)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_{m^{(0)}} \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n^{(0)}} \end{pmatrix}. \quad (11.75)$$

Воспользуемся правилом умножения матрицы на столбец и сравним левые и правые части полученного равенства, будем иметь

$$w_l = \sum_{j=1}^{m^{(0)}+n^{(0)}} v_{w_l}(\omega_j) \eta_j \quad l = 1, \dots, m^{(0)}; \quad (11.76)$$

$$q_l = \sum_{j=1}^{m^{(0)}+n^{(0)}} v_{q_l}(\omega_j) \eta_j \quad j = 1, \dots, n^{(0)}.$$

Значения обобщенных координат w_l и q_l , выраженные через нормальные координаты η_j , подставим в выражение для потенциала скорости $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ (11.49) и получим

$$\begin{aligned} \Phi = & \sum_{j=1}^{m^{(0)}+n^{(0)}} A_j \lambda_j \left\{ \sum_{l=1}^{m^{(0)}} \frac{D_l}{G_l} I_0 \left(v_l \frac{r}{R_1} \right) \cos \left(v_l \frac{x}{R_1} \right) v_{w_l}(\omega_j) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{n^{(0)}} v_{q_l}(\omega_j) \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_{il} J_0 \left(\lambda_l \frac{r}{R_1} \right) \operatorname{sh} \left(\lambda_l \frac{x-H}{R_1} \right) + a_l (x-H) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.77)$$

Здесь принято $\eta_j = A_j \lambda_j$, где A_j – нормировочная константа; λ_j – скалярная функция времени (временной множитель); $v_{w_l}(\omega_j)$ и $v_{q_l}(\omega_j)$ – коэффициенты формы нормального колебания j -го тона или, как об этом говорится в разд. 11.8, компоненты собственного вектора матрицы $M^{-1}K$. Они определяются численно на ЭВМ.

Все остальные параметры D_l , G_l , v_l , λ_l , b_{il} , a_l определены выше в разд. 11.5 и 11.6.

Уравнение для определения λ_j имеет вид, подобный уравнению (11.71):

$$\ddot{\lambda}_j + \omega_j^2 \lambda_j = -\ddot{u}_x. \quad (11.78)$$

Здесь u_x – перемещение опорного кольца шпангоута:

$$u_x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_x) q_n(t), \quad (11.79)$$

где $f_n(x_x)$ – форма колебания корпуса по n -му тону в месте расположения опорного кольца.

Решение для вынужденных колебаний уравнения (11.78) с учетом уравнения (11.79) только для n -го тона корпуса имеет такой вид:

$$\lambda_{j(n)} = \frac{\omega_n^2 f_n(x_x)}{\omega_j^2 - \omega_n^2} q_n(t) \quad (11.80)$$

или

$$\lambda_{j(n)} = k_{g(n)} q_n, \quad k_{g(n)} = \frac{\omega_n^2 f_n(x_x)}{\omega_j^2 - \omega_n^2}. \quad (11.81)$$

С учетом формул (11.81) выражение для $\Phi_{(n)}$ (11.77) (для n -го тона колебаний корпуса) будет

$$\begin{aligned} \Phi_n = & \sum_{j=1}^{m^{(0)}+n^{(0)}} A_j k_{g(n)} q_n \left\{ \sum_{l=1}^{m^{(0)}} \frac{D_l}{G_l} I_0 \left(v_l \frac{r}{R_1} \right) \cos \left(v_l \frac{x}{R_1} \right) v_{w_l}(\omega_j) + \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^{n^{(0)}} v_{q_l}(\omega_j) \left[\sum_{i=1}^{\infty} b_{il} J_0 \left(\lambda_l \frac{r}{R_1} \right) \operatorname{sh} \left(\lambda_l \frac{x-H}{R_1} \right) + a_l (x-H) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (11.82)$$

Так как скорость центра днища

$$v_x = -\partial \Phi / \partial x \quad \text{при } x = 0, r = 0,$$

то перемещение центра днища j -го тона $\lambda_{j \text{ дн}}$ для n -го тона колебаний корпуса

$$\lambda_{j(n) \text{ дн}} = - \int \frac{\partial \Phi_{j(n)}}{\partial x} dt. \quad (11.83)$$

Подставим в формулу (11.83) выражение (11.82), тогда

$$\lambda_{j(n) \text{ дн}} = -A_j k_{g(n)} q_n \sum_{i=1}^{n^{(0)}} v_{q_i}(\omega_j) \left[\sum_{i=1}^n b_{ij} \frac{\lambda_i}{R_1} \operatorname{ch} \frac{\lambda_i H}{R_1} + a_i \right]. \quad (11.84)$$

Разделим $\lambda_{j(n) \text{ дн}}$ в (11.84) на $\lambda_{j(n)}$ в (11.81), получим

$$\lambda_{j(n) \text{ дн}} = -A_j \lambda_{j(n)} \sum_{i=1}^{n^{(0)}} v_{q_i}(\omega_j) \left[\sum_{i=1}^n b_{ij} \frac{\lambda_i}{R_1} \operatorname{ch} \frac{\lambda_i H}{R_1} + a_i \right]. \quad (11.85)$$

Пример определения перемещения центра днища $\lambda_{\text{дн}}$ по известному перемещению массы механического аналога λ на основе приближенной модели продольных колебаний бака, рассмотренной в разд. 10.2.

В этом случае расчет $\lambda_{\text{дн}}$ упрощается, поскольку не требуется определять коэффициенты $v_{q_i}(\omega_j)$. Формы колебаний днища и стенок заданы. Механический аналог приближенно представляет собой в этом случае один осциллятор, масса которого равна физической массе m жидкости в баке, а собственная частота ω_1 определяется по формуле (11.7).

Уравнение для определения перемещения λ_1 массы осциллятора имеет вид (11.71)

$$\ddot{\lambda} + \omega^2 \lambda = -\ddot{u}_x.$$

Так как $u_x = u_0 e^{i\omega t}$, то $\lambda = \frac{\omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)} u_0 e^{i\omega t}$.

На основании уравнения (11.21) перемещение центра днища

$$\lambda_{\text{дн}} = \frac{b \omega^2}{(\omega_1^2 - \omega^2)} u_0 e^{i\omega t}.$$

Отсюда

$$\frac{\lambda_{\text{дн}}}{\lambda} = b = \frac{\int_0^H f(x) dx}{\int_0^H f^2(x) dx}.$$

С учетом формулы (11.19) получим

$$\frac{\lambda_{\text{дн}}}{\lambda} = \frac{1 + \alpha/3}{1 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{2}{15}\alpha^2}.$$

Здесь α определяется по формуле (11.19).

11.11. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ И ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ БАКОВ С ЖИДКОСТЬЮ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ РИТЦА

Для баков сложной геометрической формы (конического, цилиндрического со сферическим дном, торового и других) определение собственных форм и частот колебаний может быть проведено методом Ритца в варианте, предложенном Стодолой. Этот метод заключается в следующем:

1. Задается выражение потенциала скоростей (или перемещений) жидкости в виде

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \varphi_n(x, r) \cos m \nu, \quad (11.86)$$

где m – число волн по окружности ($m = 0$ в случае осесимметричных колебаний).

2. Задаются выражения для функций, аппроксимирующие перемещение срединной поверхности оболочки в направлениях нормали w , меридиана u и окружности v в виде

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) w_n(s) \cos m v; \\
u &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) u_n(s) \cos m v; \\
v &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) v_n(s) \cos m v.
\end{aligned}
\quad (11.87)$$

Используется условие непроницаемости оболочки, связывающее функцию w с функцией Φ :

$$w = (\partial \Phi / \partial \bar{n}). \quad (11.88)$$

Оригинальность метода заключается в выборе функции $\varphi_n(x, r)$. В качестве функций $\varphi_n(x, r)$ берутся решения уравнения Лапласа для простой области, охватывающей область исследуемого бака. Например, такой областью может быть круговой цилиндр радиуса R и длиной L ; в начале расчета принимается $L = 3H$, где H – высота столба жидкости в баке (рис. 11.11):

$$\varphi_n(x, r) = \frac{L}{\pi r} \sin \frac{n\pi x}{L} I_n \left(\frac{n\pi r}{L} \right) \quad (n = 1, 2, \dots, n^{(0)}). \quad (11.89)$$

Здесь $n^{(0)}$ – число членов ряда, которым ограничиваются при конкретных вычислениях в выражении (11.86). В дальнейшем величина L варьируется.

После этого составляются выражения кинетической T и потенциальной Π энергий исследуемого бака с жидкостью, составляются дифференциальные уравнения относительно неизвестных функций A_n , B_n , C_n и затем – уравнение для определения собственных частот. Степень приближения будет зависеть от числа членов ряда $n^{(0)}$ и выбранных аппроксимирующих функций Φ , w , u , v .

Решается частотное уравнение на ЭВМ, причем в процессе численного расчета величина $L = \pi \lambda$ выбирается из условия получения минимальных величин собственных частот системы. Варьирование параметром λ для получения ω_{\min} означает подбор таких размеров области определения функций Φ , w , u , v , при которых эти функции наилучшим образом выражают движение исследуемого упругого бака с жидкостью при ограниченном числе членов ряда $n^{(0)}$.

Приведем некоторые результаты численных расчетов баков с жидкостью по методу Ритца – Стодолы.

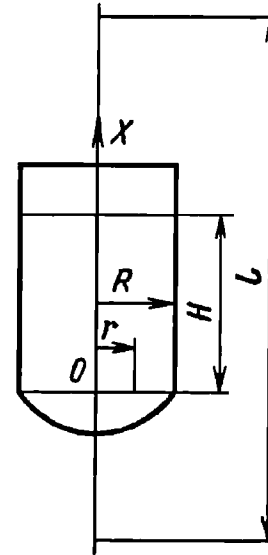


Рис. 11.11

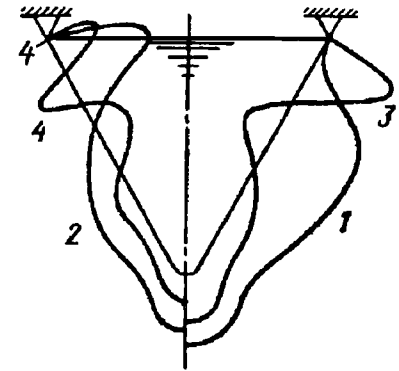


Рис. 11.12

На рис. 11.12 показаны формы нормальных перемещений для четырех тонов осесимметричных колебаний конического бака, шарнирно закрепленного по верхнему краю. Расчет при $n^{(0)} = 10$ дает следующие значения квадратов безразмерных частот ω_i^2 : 1,61; 4,29; 7,10; 10,2. Квадрат размерной частоты

$$\omega_i^2 = \bar{\omega}_i^2 \frac{Eh}{\rho R^3},$$

где R – радиус кругового опорного кольца; E , h – модуль Юнга и толщина стенки бака; ρ – плотность жидкости.

На рис. 11.13 изображены формы нормальных перемещений полностью заполненного жидкостью тора на подвеске малой жесткости. Форма w_1 первого тона симметрична, w_2 – второго тона антисимметрична относительно горизонтальной плоскости.

Расчет проведен при $n^{(0)} = 10$ и задании потенциала скорости в виде

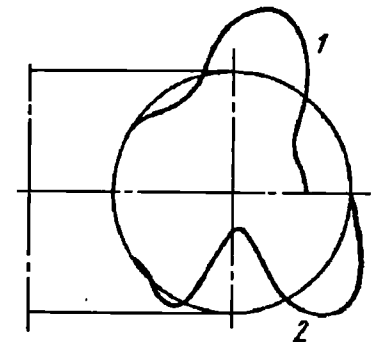


Рис. 11.13

$$\varphi_n = J_n(\lambda_n r) e^{\pm i \lambda_n x} \cos n v.$$

Для тора с внутренним радиусом $0,2R$ (R – внешний радиус тора) получено $\lambda_1 = 0,682$; $\lambda_2 = 0,510$. Размерная частота собственных колебаний

$$\omega_i^2 = 2Eh/(\rho R^3 \lambda_i).$$

Модифицированный метод Ритца дает во многих случаях хорошие результаты.

Глава XII

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОРПУСА РАКЕТЫ

12.1. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

При продольных колебаниях в поперечных сечениях корпуса возникают напряжения растяжения и сжатия. Простейшей схемой жидкостной ракеты (которую будем считать осесимметричной) при определении форм и частот продольных колебаний может служить прямой неоднородный стержень. Схему неоднородного стержня для приближенного расчета можно принять только в том случае, когда перемещение жидкого топлива относительно стенок бака при продольных колебаниях мало и его можно не учитывать.

У большинства жидкостных ракет и, в первую очередь, у крупных ракет-носителей с насосной системой подачи топлива стенки баков сравнительно тонкие. При продольных колебаниях прогибы дна и раздутие обечайек баков значительны, вследствие чего значительны и перемещения жидкости относительно стенок баков в направлении оси ракеты. Схема неоднородного упругого стержня для таких ракет может оказаться настолько грубой, что не даст правильного представления о формах и частотах собственных колебаний корпуса, в особенности при высоком уровне топлива в баках. Расчет упругих продольных колебаний корпусов таких ракет нужно проводить с учетом деформаций дна и радиальных деформаций обечайек баков.

Одну из возможных динамических схем можно представить в виде пружинно-массовой модели.

На рис. 12.1 в качестве примера приведены пружинно-массовая модель двухступенчатой ракеты "Титан-2" и форма первого тона свободных колебаний. Сосредоточенными массами являются: m_1 – масса полезного груза; m_2 – проставки, дна и 0,5 обечайки бака окислителя; m_3 – окислителя; m_4 – дна и 0,5 обечайки бака окислителя; m_5 – межбакового отсека; m_6 – дна и 0,5 обечайки бака горючего; m_7 – горючего; m_8 – дна и 0,5 обечайки бака горючего; m_9 – задней юбки двигателя второй ступени; m_{10} – двигателя второй ступени; m_{11} – передней обечайки первой ступени; m_{12} – дна и 0,5 обечайки бака окислителя; m_{13} – окислителя; m_{14} – дна и 0,5 обечайки бака окислителя и 0,5 межбакового отсека; m_{15} – дна, 0,5 обечайки бака горючего и 0,5 межбакового отсека; m_{16} – горючего; m_{17} – конуса и 0,5 обечайки бака горючего; m_{18} – ТНА; m_{19} –

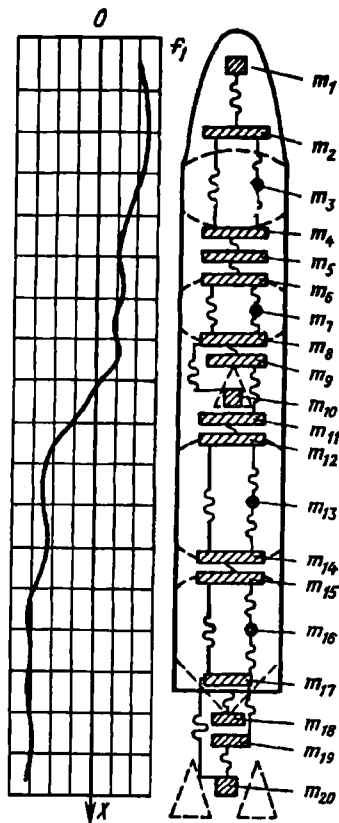


Рис. 12.1

масс осциллятора при колебаниях относительно жесткого дна будет характеризовать перемещение центра упругого дна бака относительно силового шпангоута. Такой выбор точки приведения упрощает сопряжение колебаний дна бака с колебаниями топлива в трубах.

Так как двигатель и турбонасосный агрегат (ТНА) подвешиваются к корпусу на раме, представляющей собой упругую конструкцию, то при продольных колебаниях перемещения двигателя и ТНА относительно корпуса можно заменить перемещением сосредоточенной массы на пружине.

ТНА, подвешенный на раме отдельно от двигателя, при продольных колебаниях корпуса ракеты можно рассматривать так же, как сосредото-

нижней юбки двигателя первой ступени; m_{20} — двигателя первой ступени.

Пружинно-массовая модель дает удовлетворительные результаты при расчете форм и частот свободных колебаний низших тонов.

Для более полного учета колебаний жидкости в баках и распределения массы и жесткости по длине можно рекомендовать схему прямого неоднородного стержня с упруго подвешенными грузами (механическими осцилляторами). Колебания каждого осциллятора являются механическим аналогом соответствующего тона осесимметричных колебаний жидкости в упругом баке. Сумма масс всех осцилляторов равна массе жидкости в баке, частота свободных колебаний одного осциллятора равна частоте свободных колебаний соответствующего тона жидкости в упругом баке.

За точку приведения принимается центр упругого дна бака, поэтому перемещение

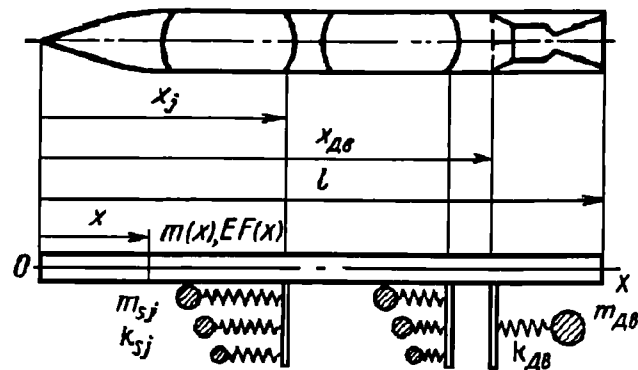


Рис. 12.2

ченную массу на пружине. В обоих случаях к массе ТНА следует прибавлять массу столба жидкости, заключенную в трубопроводах (между ТНА и свободной поверхностью в баках).

В практических расчетах форм и частот низших тонов колебаний корпуса достаточно учитывать лишь несколько первых тонов колебаний жидкости в баке, поэтому число осцилляторов может быть небольшим (2–3). Пружины остальных осцилляторов можно считать жесткими, а подвешенные на них сосредоточенные массы — присоединенными к массе силового шпангоута бака.

Таким образом, масса всей ракеты

$$m = \int_0^l m(x) dx + \sum_{(j,s)} m_{sj},$$

где m_{sj} — масса s -го осциллятора в j -м сечении корпуса.

Схема ракеты с двумя топливными баками показана на рис. 12.2; здесь двигатель представлен осциллятором с массой $m_{дв}$ и пружиной с жесткостью $k_{дв}$.

В настоящей главе изложены способы расчета свободных и вынужденных продольных колебаний ракеты по схеме неоднородного стержня с упругоподвешенными сосредоточенными массами.

12.2. УРАВНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ

Пусть ось X совпадает с продольной осью стержня. Обозначим через $m(x)$ массу единицы длины стержня, $EF(x)$ – жесткость стержня при растяжении – сжатии, $q(x, t)$ – внешнюю распределенную нагрузку, $u(x, t)$ – перемещение произвольного поперечного сечения стержня в направлении оси X .

На рис. 12.3 показан элемент стержня длиной dx . Левая и правая части стержня действуют на выделенный элемент силами N и $N + \frac{\partial N}{\partial x} dx$.

Пользуясь принципом Даламбера, составим уравнение равновесия элемента стержня:

$$\frac{\partial N}{\partial x} dx + \left[q(x, t) - m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] dx = 0.$$

Примем гипотезу Фогта, согласно которой напряжения зависят не только от деформации $\partial u / \partial x$, но и от скорости деформации $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

Тогда нормальная (осевая) сила в поперечном сечении

$$N = EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x},$$

где $b(x)$ – параметр демпфирования; принимаем $b(x)/[EF(x)] = 2\xi' = \text{const}$.

Дифференциальное уравнение вынужденных продольных колебаний стержня будет иметь вид

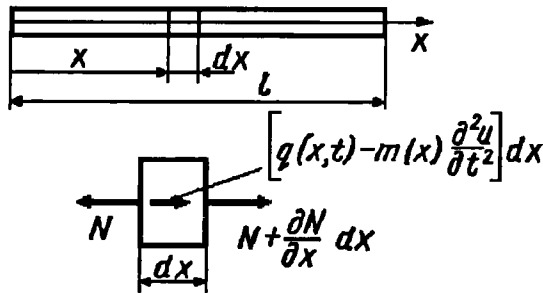


Рис. 12.3

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right] + q(x, t). \quad (12.1)$$

Рассмотрим сначала случай, когда $q(x, t) = 0$. Общее решение уравнения (12.1) можно представить в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t), \quad (12.2)$$

где $f_n(x)q_n(t)$ – суть частные решения уравнения (12.1), которые можно найти методом Фурье. Подставив частные решения (12.2) в уравнение (12.1) и разделив переменные, получим

$$\frac{[EF(x)f_n']'}{m(x)f_n} = \frac{\ddot{q}_n}{q_n + 2\xi_n' \dot{q}_n} = -\omega_n^2$$

или

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n' \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = 0; \quad (12.3)$$

$$[EF(x)f_n']' = -\omega_n^2 m(x) f_n, \quad (12.4)$$

где $\xi_n' = \xi' \omega_n$.

Произвольные постоянные интегрирования уравнения (12.3) должны определяться из начальных условий, произвольные постоянные интегрирования уравнения (12.4) – из краевых (граничных) условий.

На каждом конце свободного стержня сила N равна нулю. Поэтому функции $f_n(x)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$f_n'(0) = 0, \quad f_n'(l) = 0. \quad (12.5)$$

Уравнение (12.4) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение растяжения стержня под действием распределенной нагрузки $\omega_n^2 m(x) f_n(x)$. Уравнение (12.3) показывает, что свободные колебания стержня при наличии демпфирования всегда затухающие.

Если для учета трения принять гипотезу Е.С. Сорокина, то нормальную силу можно выразить так:

$$N = \left(1 + i \frac{\Psi}{2\pi} \right) EF(x) \frac{\partial u}{\partial x},$$

где Ψ – коэффициент поглощения энергии при колебаниях, равный отношению поглощенной за один цикл энергии ΔW к полной энергии системы W .

При гармонических колебаниях коэффициент поглощения равен удвоенному значению декремента свободных колебаний δ , так что

$$\Psi = \Delta W / W = 2\delta.$$

Дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня с учетом гипотезы Сорокина вместо (12.1) будет иметь вид

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + i \frac{\Psi}{2\pi} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + P(x) e^{ip't}.$$

Все собственные формы колебаний $f_n(x)$ ортогональны между собой с весовой функцией $m(x)$.

Если стержень является однородным, т.е. $m(x) = m_0 = \text{const}$, $EF(x) = EF_0 = \text{const}$, то уравнение (12.4) упрощается, оно будет иметь постоянные коэффициенты

$$f_n'' + \alpha_n^2 f_n = 0; \quad \alpha_n^2 = \omega_n^2 m_0 / (EF_0). \quad (12.6)$$

Когда параметр α_n будет найден, частоту собственных колебаний ω_n можно вычислить по формуле

$$\omega_n = \alpha_n \sqrt{EF_0 / m_0} = \alpha_n a, \quad (12.7)$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения упругой волны (скорость распространения звука) в материале, ρ – плотность материала стержня.

Решение уравнения (12.6), как известно, имеет вид

$$f_n(x) = C_1 \cos \alpha_n x + C_2 \sin \alpha_n x.$$

В случае незакрепленного стержня

$$\alpha_n = \pi n / l \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ или } \alpha_n = 0.$$

Частота собственных колебаний при $\alpha_n \neq 0$

$$\omega_n = (n\pi/l)a. \quad (12.8)$$

Если нормировать функцию $f_n(x)$ так, чтобы $f_n(0) = 1$, то $C_1 = 1$ и форма колебаний, соответствующая значению $\alpha_n \neq 0$, будет

$$f_n(x) = \cos \alpha_n x.$$

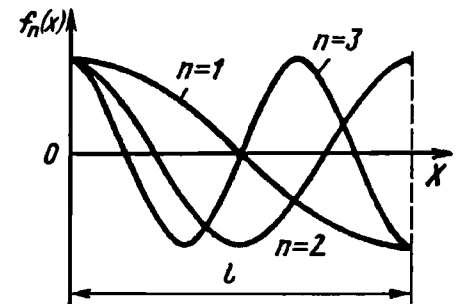


Рис. 12.4

Первые три формы собственных колебаний стержня показаны на рис. 12.4. Условно будем считать, что положительному значению $f_n(x)$ соответствует перемещение сечения стержня вправо, отрицательному – перемещение влево. В узловых сечениях перемещения отсутствуют, в них происходят максимальные сжатие или растяжение материала.

Значению $\alpha_n = 0$ соответствуют собственная частота колебаний $\omega_n = 0$ и собственная форма, нормированное значение которой равно единице. Это присуще движению стержня как твердого тела.

Таким образом, для незакрепленного стержня система собственных функций полна и, как следует из предыдущего, представляет собой множество $\{f_n(x) = \cos \alpha_n x\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Перемещение произвольного сечения незакрепленного стержня вдоль продольной оси можно представить в виде

$$u(x, t) = u_c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t). \quad (12.9)$$

Здесь $u_c(t)$ – перемещение центра масс стержня или перемещение стержня как жесткого тела; $f_n(x) q_n(t)$ – перемещение относительно центра масс, вызываемое растяжением или сжатием стержня.

12.3. КОЛЕБАНИЯ ДВИГАТЕЛЯ КАК МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Двигатель как механическая система, обладающая массой и упругостью, колеблется вместе с корпусом и, следовательно, оказывает влияние на форму и частоту собственных колебаний корпуса. Анализ механических колебаний двигателя имеет важное значение как при расчете форм и частот собственных колебаний корпуса, так и при

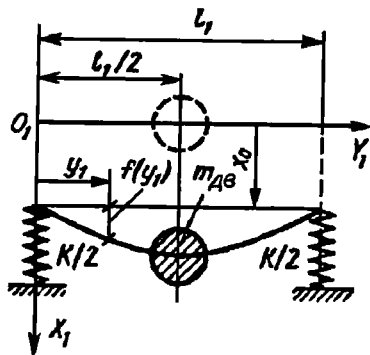


Рис. 12.5

рама двигателя выполнена из упругих стержней (балок), причем двигатель подвешен на раме симметрично относительно опор. Вследствие упругости оболочки корпуса ракеты опоры рамы, закрепленные на корпусе, являются упругими с общим коэффициентом жесткости k . Схема упругой системы для определения частоты собственных колебаний приведена на рис. 12.5. Статическое перемещение двигателя состоит из двух частей: статической просадки опор x_0 и статического изгиба рамы с упругой линией $f(y_1)$. Масштаб статического перемещения η выбирается так, чтобы суммарное перемещение массы двигателя было равно единице, т.е.

$$\eta[f(l_1/2) + x_0] = 1.$$

При выбранном масштабе коэффициент приведенной жесткости численно равен удвоенному значению потенциальной энергии системы:

$$k_{дв} = \eta^2 k x_0^2 + \eta^2 \int_0^l EJ(y_1)[f''^2(y_1)]dy_1.$$

Частоту собственных колебаний упруго подвешенного двигателя вычислим по формуле

$$\omega_{дв}^2 = k_{дв}/m_{дв}.$$

При продольных колебаниях корпуса могут наблюдаться колебания растяжения – сжатия двигателя как упругого тела. Они будут значитель-

ными, если собственные частоты таких колебаний будут близки к частотам колебаний корпуса ракеты. Анализ этих колебаний представляет интерес для оценки прочности двигателя и более точного определения приведенной силы тяги. Выбор схемы для определения форм и частот колебаний растяжения – сжатия двигателя зависит от конструкции двигателя и способа его крепления к раме, а также от целей расчета.

Колебания двигателя могут вызываться перемещением точки подвеса. Амплитуда вынужденных колебаний двигателя при $q_n(t) = 1$:

Амплитуда вынужденных колебаний двигателя при $q_n(t) = 1$:

$$f_{н.дв} = f_n(x_{дв}) \frac{1}{1 - (\omega_n/\omega_{дв})^2} \quad (\omega_n \neq \omega_{дв}),$$

где $f_n(x_{дв})$, ω_n – амплитуда и частота колебаний точки подвеса двигателя; $\omega_{дв}$ – частота собственных колебаний двигателя.

При анализе устойчивости замкнутой системы ракеты с ЖРД важное значение имеет не только величина, но и знак коэффициента $f_{н.дв}$. Если частота собственных колебаний двигателя значительно выше частоты колебаний корпуса ракеты, т.е. $\omega_{дв} \gg \omega_n$, то при расчете продольных колебаний корпуса ракеты упругость подвески двигателя можно не учитывать, а массу двигателя и рамы полагать сосредоточенной в поперечном сечении корпуса с координатой $x_{дв}$.

Для первого тона собственных колебаний корпуса соотношение частот $\omega_{дв} \gg \omega_n$ обычно выполняется. Однако для более высоких тонов частоты $\omega_{дв}$ и ω_n могут быть близкими, и тогда при изучении продольных колебаний упругость подвески двигателя учитывать нужно.

12.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ И ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА РАКЕТЫ

Для определения форм и частот собственных продольных колебаний корпуса ракеты принимается схема прямого неоднородного стержня с упругоподвешенными сосредоточенными массами (см. рис. 12.2).

Воспользуемся методом начальных параметров в матричной форме. Разобьем стержень на k участков, причем так, что для каждого i -го участка жесткость на растяжение – сжатие EF_i и погонную массу (массу единицы длины) m_i можно осреднить и считать постоянными:

$$m_i = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} m(x) dx = \text{const}; \quad EF_i = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} EF(x) dx = \text{const}.$$

Дифференциальное уравнение свободных продольных колебаний для

любого i -го участка будет иметь постоянные коэффициенты

$$EF_i f_i''(x) = \omega^2 m_i f_i(x) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \\ (0 \leq x \leq l_i)$$

или

$$f_i''(x) + \alpha_i^2 f_i(x) = 0; \quad \alpha_i^2 = \frac{m_i}{EF_i} \omega^2 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (12.10)$$

Решение системы (12.10) должно удовлетворять граничным условиям и условиям сопряжения участков стержня. Данная задача разрешима только для тех значений ω , которые являются частотами свободных колебаний неоднородного стержня.

Решение каждого дифференциального уравнения (12.10) имеет вид

$$f_i(x) = C_{1i} \cos \alpha_i x + C_{2i} \sin \alpha_i x. \quad (12.11)$$

Введем вектор формы

$$\bar{u}_i(x) = \begin{pmatrix} u_{1i}(x) \\ u_{2i}(x) \end{pmatrix}, \quad (12.12)$$

компонентами которого являются $u_{1i}(x) = f_i(x)$ — форма перемещений, $u_{2i}(x) = EF_i f_i'(x)$ — форма продольной силы.

Исходя из решения (12.11), свяжем между собой векторы формы в любой точке участка и в его начале

$$\bar{u}_i(x) = A_i(x) \bar{u}_i(0), \quad (12.13)$$

где кососимметричная матрица $A_i(x)$ имеет вид

$$A_i(x) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i x & \frac{\sin \alpha_i x}{EF_i \alpha_i} \\ -EF_i \alpha_i \sin \alpha_i x & \cos \alpha_i x \end{bmatrix}. \quad (12.14)$$

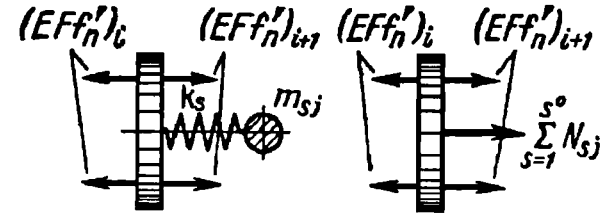


Рис. 12.6

Если $x_i = l_i$, то матрицу $A_i(l_i)$ называют матрицей перехода через i -й участок.

Если на стыке между участками изменяются только погонная масса и жесткость (простой стык), условие сопряжения векторов имеет вид

$$\bar{u}_{i+1}(0) = \bar{u}_i(l_i)$$

или

$$\bar{u}_{i+1}(0) = B_i \bar{u}_i(l_i), \quad (12.15)$$

где B_i — матрица перехода через стык, представляющая собой для простого стыка единичную матрицу,

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (12.16)$$

Если же между i -м и $(i+1)$ -м участками имеется сечение с упруго-подвешенными сосредоточенными массами, то при переходе от i -го к $(i+1)$ -му участку будет наблюдаться скачок нормальной (осевой) силы, равный сумме реакций пружин осцилляторов (рис. 12.6). Условия сопряжения таких участков

$$f_{i+1}(0) = f_i(l_i); \quad (12.17)$$

$$[EF(0)f(0)]_{i+1} = EF_i f_i'(l_i) - \sum_{s=1}^{s^0} N_{sj},$$

где N_{sj} — форма нормальной силы, приложенной к поперечному сечению через пружину s -го осциллятора; s^0 — число осцилляторов;

$$N_{sj} = k_{sj}[f_{sj} - f_i(l_i)], \quad (12.18)$$

где k_{sj} — жесткость пружины осциллятора; f_{sj} — значение коэффициента формы колебаний массы m_{sj} ; $f_i(l_i)$ — форма в конце участка, предшествующего стыку.

Так как все сосредоточенные массы перемещаются с частотой колебаний корпуса ω , величину f_{sj} определим по формуле

$$f_{sj} = f_i(l_i) \frac{\omega_{sj}^2}{\omega_{sj}^2 - \omega^2}. \quad (12.19)$$

Тогда в соответствии с уравнениями (12.17) и (12.18)

$$[EF(0)f'(0)]_{i+1} = EF_i(l_i)f'(l_i) - \sum_{s=1}^{s_0} k_{sj} \frac{\omega^2}{\omega_{sj}^2 - \omega^2} f_i(l_i). \quad (12.20)$$

Следовательно, матрица перехода через стык будет иметь вид

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sum_{s=1}^{s_0} k_{sj} \frac{\omega^2}{\omega_{sj}^2 - \omega^2} & 1 \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

и будет являться функцией собственной частоты колебаний ракеты.

Поскольку

$$\bar{u}_{i+1}(0) = \mathbf{B}_i \bar{u}_i(l_i),$$

где матрица \mathbf{B}_i определяется, в зависимости от типа стыка, по формулам (12.16) или (12.21), то $\bar{u}_{i+1}(x) = \mathbf{A}_{i+1}(x) \mathbf{B}_i \mathbf{A}_i(l_i) \bar{u}_i(0)$.

Очевидно, что решение для любого i -го участка можно, рассуждая аналогично, выразить через вектор на входе в 1-й участок:

$$\bar{u}_i(x) = \mathbf{A}_i(x) \left[\prod_{r=1}^{i-1} \mathbf{B}_r \mathbf{A}_r(l_r) \right] \bar{u}_1(0). \quad (12.22)$$

Для конца стержня, т.е. при $x = l = \sum_{i=1}^k l_i$ будем иметь

$$\bar{u}(l) = \mathbf{P} \bar{u}_1(0), \quad (12.23)$$

где матрица

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}_k(l_k) \prod_{r=1}^{k-1} \mathbf{B}_r \mathbf{A}_r(l_r) \quad (12.24)$$

может быть представлена в виде

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \quad (12.25)$$

с коэффициентами, зависящими от частоты.

Запишем граничные условия (корпус ракеты представляет собой свободный на концах стержень):

$$u_2(0) = 0; \quad u_2(l) = 0. \quad (12.26)$$

С учетом условий (12.26) соотношения (12.23) будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_1(l) &= d_{11} u_1(0), \\ 0 &= d_{21} u_1(0). \end{aligned} \quad (12.27)$$

В соответствии со вторым уравнением системы (12.27) нетривиальное решение соответствует равенству нулю коэффициента d_{21} :

$$d_{21} = 0. \quad (12.28)$$

Частоты ω , при которых выполняется условие (12.28), будут являться собственными частотами системы ω_n .

Для каждой собственной частоты ω_n на основании уравнения (12.22) и условий (12.26) собственная форма колебаний может быть представлена в виде

$$f_n(x) = d_{11}(x) u_1(0),$$

или, пронормировав $u_1(0) = 1$,

$$f_n(x) = d_{11}(x), \quad (12.29)$$

где $d_{11}(x)$ – элемент матрицы

$$P(\omega_n, x) = A_l(\omega_n, x) \prod_{r=1}^{l-1} B_r(\omega_n) A_r(\omega_n, l_r). \quad (12.30)$$

Коэффициент $d_{11}(x)$ должен вычисляться для каждого участка, собственные формы строятся по выражению (12.29) от начала корпуса ракеты ($x_1 = 0$) по участкам до конца ($x_k = l_k$).

Форма нормальной (осевой) силы определяется уравнением

$$u_2(x) = d_{21}(x). \quad (12.31)$$

Значения коэффициентов форм колебаний масс m_{sj} , подвешенных в j -м сечении, определяются в соответствии с формулой (12.19)

$$f_{nsj} = f_n(l_i) \frac{1}{1 - (\omega_n/\omega_{sj})^2}, \quad (12.32)$$

где $f_n(l_i)$ – форма n -го тона колебаний на конце участка, предшествующего j -му стыку с осцилляторами.

Порядок использования метода начальных параметров при определении форм и частот свободных продольных колебаний корпуса ракеты следующий:

1. Корпус ракеты делим на k участков, для каждого i -го участка определяем погонную массу m_i и жесткость на растяжение – сжатие EF_i .

2. Задавая последовательно значения ω с каким-либо начальным шагом и используя метод половинного деления шага, находим значения ω_n , при которых d_{21} (12.28) обращается в нуль – собственные частоты колебаний.

3. Для каждого из найденных значений ω_n находим коэффициенты $d_{11}(x)$, $d_{21}(x)$ матриц $P(\omega_n, x)$.

4. По уравнению (12.29) строим собственные формы колебаний.

5. При необходимости по формулам (12.31) и (12.32) строим формы нормальной (осевой) силы и определяем коэффициенты форм подвешенных осцилляторов.

В качестве иллюстрации рассмотрим простейший пример – продольные колебания системы, состоящей из свободного прямого однородного стержня с одной упругой подвешенной сосредоточенной массой на правом конце (рис. 12.7).

Значение коэффициента формы собственных колебаний массы m_s определим по формуле (12.32):

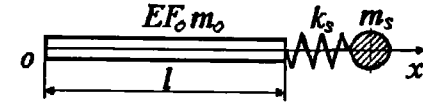


Рис. 12.7

$$f_{ns} = f_n(l_i) \frac{1}{1 - (\omega_n/\omega_s)^2} \quad (\omega_n \neq \omega_s),$$

где ω_n – собственная частота колебаний системы; ω_s – собственная частота колебаний массы m_s при неподвижной точке подвеса пружины; $f_n(l)$ – значение формы колебаний на правом конце стержня.

Удлинение пружины равно разности перемещений

$$f_{ns} - f_n(l) = f_n(l) \frac{1}{(\omega_s/\omega_n)^2 - 1} \quad (\omega_s \neq \omega_n).$$

Граничное условие на правом конце стержня можно представить в виде

$$EF_0 f'_n(l) = k_s f_n(l) \frac{1}{(\omega_s/\omega_n)^2 - 1},$$

где k_s – коэффициент жесткости пружины.

С учетом граничного условия $f'_n(0) = 0$ находим

$$f_n = D \cos \alpha_n x.$$

Подставляя это выражение в граничное условие на правом конце стержня, получаем следующее трансцендентное уравнение частот собственных колебаний системы:

$$-EF_0 \alpha_n \sin \alpha_n l = k_s \frac{1}{(\omega_s/\omega_n)^2 - 1} \cos \alpha_n l.$$

Так как $\omega_n^2 = \alpha_n^2 a^2$, $a^2 = EF_0/m_0$, то уравнение частот можно представить в виде

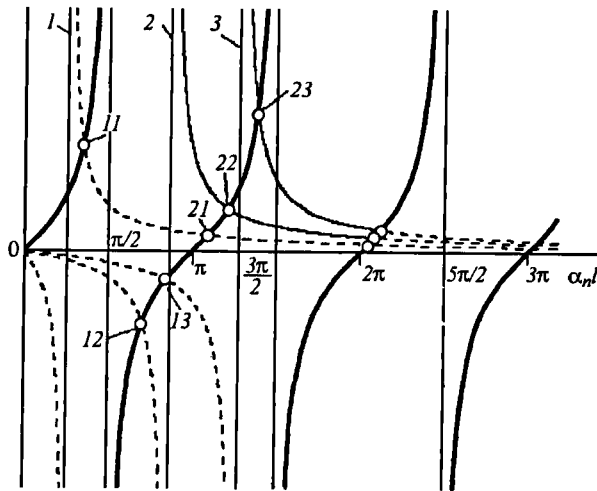


Рис. 12.8

$$\operatorname{tg} \alpha_n l = - \frac{k_s}{m_0} \frac{\alpha_n}{\omega_s^2 - a^2 \alpha_n^2}.$$

Корни уравнения частот можно определить на ЭВМ или при помощи обыкновенных тригонометрических таблиц. Для наглядности на рис. 12.8 показано определение корней при помощи графиков функций. Здесь сплошными линиями изображен график функции, находящейся в левой части уравнения частот, пунктирными линиями – функции в правой части уравнения. Точки пересечения линий дают значения корней уравнения. Если коэффициент жесткости пружины k_s равен нулю (стержень без сосредоточенной массы), то все пунктирные линии совпадают с осью абсцисс и корнями уравнения будут

$$\alpha_n l = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

При $k_s \neq 0$ графики функций для правой части уравнения представлены на рис. 12.8 для трех различных соотношений:

$$0 < \omega_s < \frac{\pi a}{2l}; \quad \frac{\pi a}{2l} < \omega_s < \frac{\pi a}{l}; \quad \frac{\pi a}{l} < \omega_s < \frac{3\pi a}{2l}.$$

Первый корень уравнения, соответствующий ненулевой частоте

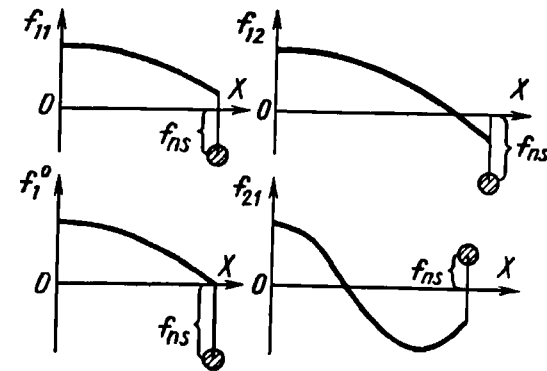


Рис. 12.9

системы, определяется соответственно точками пересечения 11; 12; 13; второй корень – точками 21; 22; 23. Собственные формы колебаний системы, соответствующие частотам, определяемым точками пересечения 11; 12 и 21, показаны на рис. 12.9.

Для незакрепленного стержня номер тона колебаний всегда соответствует числу узловых сечений стержня (см. рис. 12.4). В системе, состоящей из стержня с упругоподвешенными массами, это правило также выполняется, хотя сам стержень сечений может не иметь.

Некоторые особенности возникают тогда, когда

$$\omega_s = n\pi a / (2l) \quad (n = 1, 3, \dots),$$

и объясняются они тем, что числа $n\pi/2$ являются собственными числами системы. Собственная форма колебаний первого тона f_1^0 показана на рис. 12.9. Для стержня она соответствует собственной форме его колебаний при закрепленном правом конце. Здесь мы имеем случай, когда обе парциальные колебательные системы имеют как бы одну общую неподвижную точку и совершают относительно нее колебания с одинаковой частотой самостоятельно. Значение коэффициента формы f_{ns} упругих колебаний сосредоточенной массы в этом случае невозможно подсчитать по формуле (12.32). Его можно определить из условия, что центр масс системы при собственных колебаниях не перемещается:

$$m_0 \int f_n^0 dx + f_{ns} m_s = 0.$$

Так как $f_n^0 = \cos \frac{n\pi}{2l} x$, то

$$f_{ns} = -\frac{m_0 l}{m_s} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \quad (n = 1, 3, 5, \dots).$$

Аналогичные особенности в расчете могут возникнуть и для неоднородного стержня с упругоподвешенными сосредоточенными массами, если частота системы окажется равной одной из парциальных частот упругоподвешенных сосредоточенных масс (обозначим соответственно $\omega_{s,j}$ и $m_{s,j}$). В этом случае в элементе b_{21} матрицы перехода через стык B_i (12.21) под знаком суммы исключаем слагаемое с индексом s_j^* , для которого $\omega = \omega_{s,j}$. Значение коэффициента формы колебаний $f_{s,j}$ для сосредоточенной массы $m_{s,j}$ определяем из условия, что центр масс системы при свободных колебаниях не перемещается:

$$\int_0^l m(x) f(x) dx + \sum_{(s,j)} m_{s,j} f_{s,j} + m_{s^*,j} f_{s^*,j} = 0,$$

после чего элемент матрицы b_{21} представляем в виде

$$b_{21} = - \left(\sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq s^*)}}^{s_0} k_{s,j} \frac{\omega^2}{\omega_{s,j}^2 - \omega^2} + \omega^2 m_{s^*,j} f_{s^*,j} \right).$$

Дальнейшие вычисления выполняются в том же порядке.

Одним из наиболее простых и универсальных методов численного решения краевой задачи является сведение ее к системе конечно-разностных уравнений. Метод конечных разностей широко используется для численного решения краевых задач на ЭВМ, так как приводит к простому алгоритму расчета, а необходимая точность достигается увеличением числа участков, на которые делится основной отрезок интегрирования.

Чтобы перейти от дифференциального уравнения (12.4) к системе конечно-разностных уравнений, нужно отрезок интегрирования l разбить на k равных частей длиной $h = l/k$. Абсциссы точек деления стержня обозначим через x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$).

Проинтегрируем уравнение (12.4) по x в пределах от $x_a = x_{i-0,5}$ до $x_b = x_{i+0,5}$ при $i > 0$:

$$\int_{x_a}^{x_b} [EF(x) f_n'] dx = -\omega_n^2 \int_{x_a}^{x_b} m(x) f_n dx.$$

Интеграл в правой части равенства вычислим приближенно и представим это равенство в виде

$$EF(x) f_n' |_{x_b} - EF(x) f_n' |_{x_a} = -\omega_n^2 h m(x_i) f_{ni}, \quad (12.33)$$

где $m(x_i)$ и f_{ni} — величина распределенной массы и значение собственной формы колебаний стержня в точке с абсциссой x_i .

Значения производных $f_n'(x)$ в точках, абсциссы которых $x_{i+0,5}$ и $x_{i-0,5}$, заменим их конечно-разностными выражениями:

$$f_n'(x) |_{x_{i+0,5}} = \frac{f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)}{h};$$

$$f_n'(x) |_{x_{i-0,5}} = \frac{f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})}{h}.$$

Подставив эти выражения в равенство (12.33), найдем

$$\begin{aligned} EF(x_{i+0,5}) [f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i)] - EF(x_{i-0,5}) [f_n(x_i) - f_n(x_{i-1})] = \\ = -\omega_n^2 h^2 m(x_i) f_n(x_i). \end{aligned}$$

После преобразования получим

$$\begin{aligned} f_n(x_{i+1}) = f_n(x_i) \left[1 + \frac{EF(x_{i-0,5})}{EF(x_{i+0,5})} - \frac{\omega_n^2 h^2 m(x_i)}{EF(x_{i+0,5})} \right] - \\ - \frac{EF(x_{i-0,5})}{EF(x_{i+0,5})} f_n(x_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, k-1). \end{aligned} \quad (12.34)$$

Задавшись величиной ω_n^2 , по уравнению (12.34) можно вычислить коэффициент собственной формы колебаний для любой точки деления

x_{i+1} по значениям коэффициентов в предыдущих двух точках x_i и x_{i-1} . Расчет следует вести от точки деления x_0 до точки x_k .

Значения коэффициентов формы в первых двух точках деления получаем из граничного условия при $x = x_0$ и выбранного масштаба для функции $f_n(x)$. Выбираем масштаб для $f_n(x)$ таким, чтобы $f_n(x_0) = 1$, и из первого граничного условия (12.5)

$$f'_n(x_0) = [f_n(x_1) - f_n(x_0)]/h = 0$$

находим $f_n(x_1) = 1$.

Дальнейшее решение сводится к вариации параметра ω_n^2 , чтобы было удовлетворено второе граничное условие (12.5) в точке x_k :

$$f'_n(x_k) = [f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})]/h = 0. \quad (12.35)$$

Для этого нужно вычислить значения $\varphi(\omega_n) = f_n(x_k) - f_n(x_{k-1})$ и $\varphi(\omega + \Delta\omega)$ и, наблюдая за знаком произведения $\varphi(\omega_n) \cdot \varphi(\omega_n + \Delta\omega_n)$, подбирать ω_n в такой же последовательности, как это было рекомендовано в методе начальных параметров.

Последовательность решения уравнения (12.4) путем перехода к уравнениям с постоянными коэффициентами и применения метода начальных параметров по существу одинакова с расчетом по методу конечных разностей. В обоих методах нужно задаваться начальным параметром — частотой и отыскивать такое его значение, при котором удовлетворялось бы граничное условие на правом конце стержня. При применении метода начальных параметров число участков может быть небольшим — оно определяется свойствами функций $m(x)$ и $EF(x)$. Однако в процессе расчета надо вычислять функции $\sin \alpha_{ni} l_i$ и $\cos \alpha_{ni} l_i$. Расчет методом конечных разностей проще, но число участков обычно большое.

Если жесткость $EF(x)$ или погонная масса $m(x)$ стержня в некоторых сечениях с абсциссами $x_i, x_{i+0,5}, x_{i+1,5}$ изменяется ступенчато, то в расчете методом конечных разностей значения $EF(x)$ и $m(x)$ в этих сечениях надо считать равными полусуммам соответствующих ординат.

Рассмотрим теперь особенности определения форм и частот собственных колебаний методом конечных разностей, вносимые наличием упругоподвешенных сосредоточенных масс.

Пусть, например, сосредоточенные массы m_j подвешены в j -м сечении между i -й и $(i+1)$ -й точками деления стержня, подобно тому, как это показано на рис. 12.6. Значения функции f_{ni} в i -й и всех предыдущих точках деления стержня вычислены по уравнению (12.34). Применив принцип Даламбера, составим уравнение равновесия участка стержня,

расположенного между i -й и $(i+1)$ -й точками деления. Получим

$$EF_i f'_{ni} + \sum_{(j)} N_{sj} = EF_{i+1} f'_{n(i+1)} + m_i h \omega_n^2 f_{ni}.$$

Заменяв в этом уравнении производные конечными разностями

$$f'_{ni} = \frac{f_{n(i+1)} - f_{n(i-1)}}{2h}; \quad f'_{n(i+1)} = \frac{f_{n(i+2)} - f_{ni}}{2h}, \quad (12.36)$$

получим

$$EF_i \frac{f_{n(i+1)} - f_{n(i-1)}}{2h} + \sum_{(j)} N_{sj} = EF_{i+1} \frac{f_{n(i+2)} - f_{ni}}{2h} + m_i h \omega_n^2 f_{ni}.$$

Значение функции $f_{n(i+2)}$ вычислим по уравнению (12.34), считая $f_{n(i+1)}$ известным:

$$f_{n(i+2)} = f_{n(i+1)} \left[1 + \frac{EF(x_{i+0,5})}{EF(x_{i+3/2})} - \frac{\omega_n^2 h^2 m_{i+1}}{EF(x_{i+3/2})} \right] - \frac{EF(x_{i+0,5})}{EF(x_{i+3/2})} f_{ni}.$$

Исключив из последних двух уравнений $f_{n(i+2)}$, найдем

$$f_{n(i+1)} = (a/b) f_{ni} + c f_{n(i-1)} + d \sum_{(j)} N_{sj}, \quad (12.37)$$

где

$$a = 1 + \frac{EF_{i+0,5}}{EF_{i+3/2}} - \frac{2h^2 \omega_n^2 m_{i+1}}{EF_{i+1}};$$

$$b = 1 - \frac{EF_{i+0,5}}{EF_{i+3/2}} - \frac{h^2 \omega_n^2 m_{i+1}}{EF_{i+3/2}};$$

$$c = -\frac{1}{b} \frac{EF_i}{EF_{i+1}}; \quad d = \frac{1}{b} \frac{2h}{EF_{i+1}}.$$

Величина формы осевой силы N_{sj} вычисляется по формуле

$$N_{sj} = -\omega_n^2 m_{sj} f_{nsj},$$

где

$$f_{nsj} = f_{nj} \frac{1}{1 - (\omega_n / \omega_{sj})^2}. \quad (12.38)$$

Так как шаг интегрирования при расчете берется обычно небольшим, то вместо коэффициента f_{nj} можно принять коэффициент f_{ni} . Тогда получим

$$N_{sj} = -\frac{\omega_n^2 m_{sj} f_{ni}}{1 - (\omega_n / \omega_{sj})^2} \quad (\omega_n \neq \omega_{sj}). \quad (12.39)$$

Рекомендуется такая последовательность расчетов. Задаемся частотой колебаний системы ω_n и выбираем масштаб формы собственных колебаний так, чтобы на левом конце стержня $f_{n0} = 1$. Из граничного условия на левом конце стержня находим $f_{n1} = 1$, а по уравнению (12.34) вычисляем коэффициент f_{ni} последовательно для всех точек деления, предшествующих первому j -му сечению с упругоподвешенными сосредоточенными массами. Переход от i -й к $(i+1)$ -й точке деления, между которыми находится j -е сечение с сосредоточенными массами, совершаем по формулам (12.37) и (12.39). И так до тех пор, пока не дойдем до правого конца стержня. Дальнейшее решение сводится к нахождению такого значения ω_n , при котором удовлетворяется граничное условие на правом конце стержня (12.35).

Для полученного значения частоты собственных колебаний ω_n находим значения коэффициентов формы свободных колебаний во всех точках деления. Значения коэффициента формы f_{nsj} для s -й сосредоточенной массы определяем по формуле (12.38), в которой полагаем $f_{nj} = f_{ni}$.

Для примера приведем результат определения форм и частот собственных колебаний корпуса одноступенчатой ракеты. Расчетной схемой служит прямой неоднородный стержень с тремя упругоподвешенными массами (рис. 12.10). Сосредоточенные массы m_A, m_B, m_D

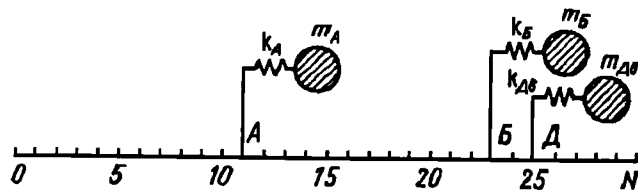


Рис. 12.10

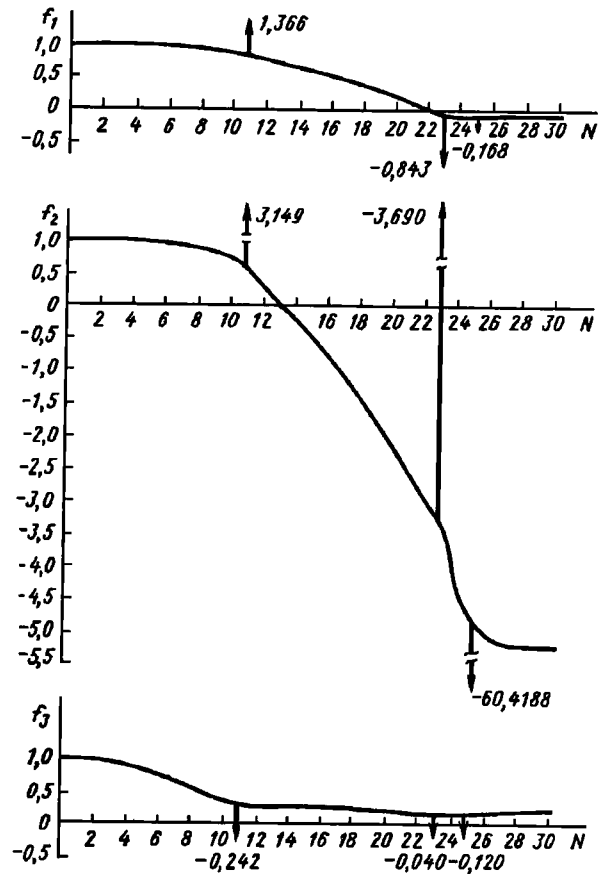


Рис. 12.11

равны соответственно массам жидкости в баках А и Б и массе двигателя.

Графики собственных форм колебаний для первых трех тонов показаны на рис. 12.11. Собственные частоты колебаний системы в c^{-1} следующие: $\omega_1 = 103,37$; $\omega_2 = 151,27$; $\omega_3 = 257$. При расчете принято $\omega_A^2 = 30000 c^{-2}$, $\omega_B^2 = 12000 c^{-2}$, $\omega_D^2 = 25000 c^{-2}$. Здесь можно наглядно проследить и число узловых сечений, и коэффициенты форм упругоподвешенных масс.

12.5. ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ КОЛЕБАНИЙ ДАВЛЕНИЯ ГАЗОВ В БАКАХ

Продольные колебания корпуса сопровождаются изменением объема бака и, следовательно, изменением объема газовой подушки, что приводит к изменению давления газов на свободную поверхность жидкости и верхнее дно бака.

Если массу газа в баке в данный момент времени считать постоянной, то при расчете форм и частот свободных колебаний корпуса газовую подушку можно заменить невесомой пружиной, один конец которой прикреплен к верхнему дну бака, а другой — к эквивалентной массе m_{sj} (рис. 12.12). Коэффициент жесткости такой пружины можно вычислить из выражения

$$k_V = F_B^2 (\partial p / \partial V)_{V=V_0},$$

где F_B — площадь "эффективной" поверхности дна бака (для цилиндрического бака $F_B = \pi R_1^2$); p , V — давление и объем газовой подушки в баке; V_0 — номинальная величина объема газовой подушки. Для n -го тона колебаний корпуса форма силы пружины

$$N_{sja}^* = k_V [f_{nsj} - f_n(x_{ja})],$$

где f_{nsj} — коэффициент формы упругих колебаний сосредоточенной массы m_{sj} ; $f_n(x_{ja})$ — коэффициент форм колебаний верхнего дна бака.

Пружина с коэффициентом жесткости k_V несколько повышает частоту свободных колебаний массы m_{sj} , так что

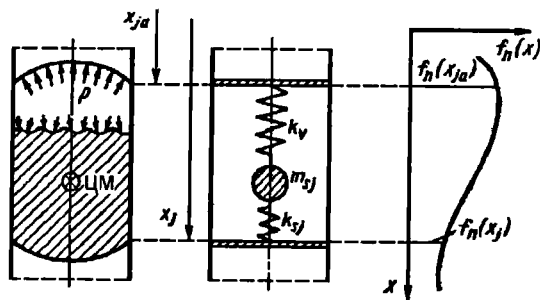


Рис. 12.12

$$\omega_{sj}^{*2} = (k_{sj} + k_V) / m_{sj}.$$

Так как коэффициент жесткости k_V не зависит от номера тона колебаний, а коэффициент жесткости k_{sj} с увеличением номера тона возрастает, то влияние пружины, прикрепленной к верхнему дну бака, на частоту свободных колебаний массы m_{sj} уменьшается с увеличением номера тона. Значение коэффициента жесткости k_V значительно при малом V_0 и большой F_B .

Пружину с коэффициентом жесткости k_V при расчете собственных форм и частот колебаний корпуса ракеты учесть нетрудно. Для этого нужно пользоваться условием сопряжения (12.17) и при переходе через сечение с абсциссой $x = x_{ja}$, соответствующее верхнему дну бака.

Найдем коэффициент f_{nsj} формы упругих колебаний сосредоточенной массы m_{sj} . Силы в верхней и нижней пружинах при $q_n(t) = 1$ вычислим по формулам:

$$N_{sja}^* = k_V [f_{nsj} - f_n(x_{ja})];$$

$$N_{sj}^* = k_{sj} [f_{nsj} - f_n(x_j)].$$

Из условия равновесия сосредоточенной массы m_{sj}

$$-m_{sj} \omega_n^2 f_{nsj} = -k_V [f_{nsj} - f_n(x_{ja})] - k_{sj} [f_{nsj} - f_n(x_j)]$$

получим

$$f_{nsj} = f_n(x_j) \frac{\omega_{sj}^2}{\omega_{sj}^{*2} - \omega_n^2} + f_n(x_{ja}) \frac{\omega_{sj}^2}{\omega_{sj}^{*2} - \omega_n^2},$$

где

$$\omega_{sj}^2 = k_{sj} / m_{sj}; \quad \omega_{sj}^{*2} = k_V / m_{sj}.$$

12.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОРПУСА РАКЕТЫ

Продольные колебания ракеты с ЖРД – это колебания замкнутой системы, основными физическими звеньями которой являются корпус ракеты, двигатель и топливоподающие магистрали. Если из замкнутой системы выделить одно звено, в данном случае корпус ракеты, то можно рассмотреть его вынужденные колебания под действием отклонения тяги двигателя.

Рассмотрим вынужденные колебания корпуса ракеты, схемой которой является неоднородный стержень с упругоподвешенными сосредоточенными массами различной величины (см. рис. 12.2). Уравнение вынужденных продольных колебаний корпуса ракеты можно представить в виде

$$m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right] = q(t)P(x) + \sum_{(j,s)} N_{sj} \delta(x - x_j), \quad (12.39)$$

где $\delta(x - x_j)$ – функция Дирака, обладающая следующим свойством:

$$\int_0^l \varphi(x) \delta(x - x_j) dx = \varphi(x_j).$$

Сосредоточенная сила N_{sj} , передаваемая стержню через пружину, численно равна силе инерции массы m_{sj} :

$$N_{sj} = -\frac{m_{sj} d^2 u_{sj}}{dt^2},$$

где u_{sj} – перемещение массы m_{sj} .

Перемещение стержня $u(x, t)$ при вынужденных колебаниях представим в виде разложения в ряд по формам собственных колебаний:

$$u(x, t) = u_c(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t). \quad (12.40)$$

Здесь $u_c(t)$ – перемещение центра масс системы; $q_n(t)$ – обобщенная координата упругих колебаний; $f_n(x)$ – собственная форма колебаний n -го тона стержня с упругоподвешенными сосредоточенными массами

$$f_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & 0 \leq x \leq l, \\ f_{nsj} x = x_j & (s = 1, 2, \dots, s^{(0)}). \end{cases} \quad (12.41)$$

При $x = x_j$ функция $f_n(x)$ будет многозначной со значениями $f_n(x_j), f_{nsj}$ ($s = 1, 2, \dots, s^{(0)}$). Для всех остальных x эта функция будет иметь одно значение – $f_n(x)$.

Введем функцию

$$m^*(x) = m(x) + \sum_{(j,s)} m_{sj} \delta(x - x_j) \quad (12.42)$$

и следующее правило интегрирования функций:

$$\int_0^l f_n(x) m^*(x) dx = \int_0^l f_n(x) m(x) dx + \sum_{(j,s)} m_{sj} f_{nsj}. \quad (12.43)$$

Теперь с учетом зависимостей (12.40) – (12.43) уравнение (12.39) можно представить в таком виде:

$$m^*(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + b(x) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} \right] = q(t)P(x). \quad (12.44)$$

При $b(x)/[EF(x)] = 2\xi'$ и $q(t)P(x) = 0$ переменные в уравнении (12.40) можно разделить и получить уравнение для определения собственных форм и частот колебаний:

$$[EF(x) f'_n(x)]' = -\omega_n^2 m^*(x) f_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (12.45)$$

Функции $f_n(x)$, удовлетворяющие уравнению (12.45) и граничным условиям

$$f'_n(0) = 0; f'_n(l) = 0,$$

ортогональны с весовой функцией $m^*(x)$.

Условие ортогональности можно представить в виде

$$\int_0^l m(x) f_n(x) f_m(x) dx + \sum_{(j,s)} m_{sj} f_{nsj} f_{msj} = 0.$$

Методика определения функций $f_n(x)$ и частот ω_n была изложена в разд. 12.4; будем считать их известными и перейдем к рассмотрению задачи о вынужденных колебаниях. Подставив в уравнение (12.44) вместо $u(x, t)$ его выражение из уравнения (12.40), получим

$$m^*(x) \left(\ddot{u}_C + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \ddot{q}_n \right) - \left[b(x) \sum_{n=1}^{\infty} f'_n \dot{q}_n \right]' - \left[EF(x) \sum_{n=1}^{\infty} f_n q_n \right]' = q(t) P(x). \quad (12.46)$$

Проинтегрируем уравнение (12.46) по x на отрезке $0 - l$. Затем умножим уравнение (12.46) на $f_n(x)$, где n – произвольное фиксированное число, и проинтегрируем его по x на отрезке $0 - l$. С учетом равенств (12.41) – (12.43) и принимая во внимание, что

$$\int_0^l m^*(x) f_n(x) dx = 0,$$

получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения обобщенных координат $u_C(t)$ и $q_n(t)$:

$$\ddot{u}_C = q(t) \frac{1}{m} \int_0^l P(x) dx; \quad (12.47)$$

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = q(t) \frac{P_n}{m_n},$$

где

$$m = \int_0^l m^*(x) dx = \int_0^l m(x) dx + \sum_{(j, \delta)} m_{sj};$$

$$m_n = \int_0^l m^*(x) f_n^2 dx = \int_0^l m(x) f_n^2 dx + \sum_{(j, \delta)} m_{sj} f_{nj}^2;$$

$$P_n = \int_0^l P(x) f_n dx.$$

Несмотря на сложность колебательной системы, такая простая структура уравнений (12.47) достигается потому, что собственные формы и частоты колебаний определены для корпуса с учетом колебаний жидкости в упругих баках как единой колебательной системы.

Вынужденные продольные колебания ракеты могут происходить под воздействием внешних сил – отклонения тяги двигателя и отклонения аэродинамической силы лобового сопротивления. Отклонение тяги двигателя оказывает значительно большее влияние на продольные колебания корпуса ракеты, чем отклонение силы лобового сопротивления. Поэтому в практических расчетах отклонение силы лобового сопротивления обычно не учитывают. Когда расходную магистраль выделяют в отдельное звено, отклонение давления жидкости перед входом в насос также будет создавать внешнюю силу по отношению к корпусу. На корпус ракеты эта сила передается через подвеску насоса (двигателя).

Для первого уравнения (12.47) внешняя сила

$$q(t) \int_0^l P(x) dx = -P(t) + P_{1н}(t).$$

Для второго уравнения приведенная сила

$$P_n(t) = [-P(t) + P_{1н}(t)] f_{nдр},$$

где $P(t)$ – отклонение силы двигателя; $P_{1н}(t)$ – отклонение силы давления жидкости перед входом в насос.

Знак минус перед силой $P(t)$ обозначает, что за положительное перемещение принято перемещение корпуса от вершины к хвостовой части ракеты, т.е. против направления силы тяги.

12.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Определение вынужденных колебаний путем представления их в виде ряда по собственным функциям обладает наглядностью и просто интерпретируется. Вынужденные колебания системы представляются в виде суммы колебаний простых осцилляторов. Метод наиболее удобен, когда частоты собственных колебаний корпуса ракеты значительно различаются между собой и анализ устойчивости можно производить для каждого тона колебаний отдельно.

Можно применять и другой метод. Внешнюю гармоническую силу включить в граничные условия и вынужденные колебания определять в виде функции $\Phi(x, \omega)e^{i\omega t}$ без разложения в ряд по собственным функциям. Здесь всего лишь одна функция $\Phi(x, \omega)$ характеризует вынужденные колебания. Метод дает точное решение, выражаемое одной функцией, что имеет преимущество при анализе устойчивости движения, когда частоты некоторых тонов колебаний корпуса близки между собой.

Функцию $\Phi(x, \omega)$ можно назвать формой вынужденных колебаний. Определение функции $\Phi(x, \omega)$ и анализ ее свойств целесообразно произвести сначала для схемы неоднородного стержня.

Положим, что на правый конец стержня ($x = l$) вдоль его оси действует внешняя сосредоточенная сила $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$, а внешняя распределенная сила $q(x, t) = 0$.

Частное решение уравнения (12.1) представим в виде

$$u(x, t) = \Phi(x, \omega) e^{i\omega t} = \Phi e^{i\omega t}. \quad (12.48)$$

Подставив уравнение (12.48) в уравнение (12.1) и положив в нем $q(x, t) = 0$, получим

$$-\omega^2 m(x) \Phi = \frac{\partial}{\partial x} [EF(x) \Phi' + b(x) i \omega \Phi'].$$

Для интегрирования этого уравнения можно применить метод конечных разностей. Проинтегрировав уравнение по x в пределах от $x_{i-0,5}$ до $x_{i+0,5}$ и заменив производные конечно-разностными соотношениями

$$\Phi' \big|_{x_{i+0,5}} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{h}; \quad \Phi' \big|_{x_{i-0,5}} = \frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{h},$$

где h — длина участка интегрирования, найдем

$$-\omega^2 h^2 m(x_i) \Phi_i = (EF_{i+0,5} + i\omega b_{i+0,5})(\Phi_{i+1} - \Phi_i) - (EF_{i-0,5} + i\omega b_{i-0,5})(\Phi_i - \Phi_{i-1}).$$

Разрешив это равенство относительно Φ_{i+1} , получим

$$\Phi_{i+1} = (a_i^* + i d_i^*) \Phi_i - (a_i + i d_i) \Phi_{i-1}, \quad (12.49)$$

где

$$a_i^* = 1 + a_i - r_i;$$

$$d_i^* = d_i + p_i;$$

$$a_i = \frac{1}{A_{i+0,5}^2} (c_{i-0,5}^2 c_{i+0,5}^2 + 4\omega^2 \xi_{i-0,5} \xi_{i+0,5});$$

$$d_i = \frac{2\omega}{A_{i+0,5}^2} (c_{i+0,5}^2 \xi_{i-0,5} - c_{i-0,5}^2 \xi_{i+0,5});$$

$$r_i = \frac{\omega^2 h^2 c_{i+0,5}^2}{A_{i+0,5}^2}, \quad p_i = \frac{2h^2 \omega^3 \xi_{i+0,5}}{A_{i+0,5}^2};$$

$$A_{i+0,5}^2 = c_{i+0,5}^4 + 4\omega^2 \xi_{i+0,5}^2;$$

$$c_{i+0,5}^2 = \frac{EF_{i+0,5}}{m_i}, \quad c_{i-0,5}^2 = \frac{EF_{i-0,5}}{m_i};$$

$$\xi_{i+0,5} = \frac{b_{i+0,5}}{2m_i}, \quad \xi_{i-0,5} = \frac{b_{i-0,5}}{2m_i}.$$

В уравнении (12.49) Φ_{i+1} , Φ_i , Φ_{i-1} представляют собой комплексные числа, поэтому это уравнение можно представить в виде

$$\Phi_{i+1} = U_{i+1} + iV_{i+1}, \quad (12.50)$$

где

$$\begin{aligned} U_{i+1} &= a_1^* U_i - d_i^* V_i - a_i U_{i-1} + d_i V_{i-1}; \\ V_{i+1} &= a_1^* V_i + d_i^* U_i + a_i V_{i-1} - d_i U_{i-1}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Так как левый конец стержня свободный, а к правому приложена внешняя сила $P_0 e^{i\omega t}$, то граничные условия для функции $\Phi(x, \omega)$ будут следующими:

$$\Phi'(0, \omega) = 0; \quad \Phi'(x_k, \omega) [EF(x_k) + ib(x_k)] = P_0,$$

где x_k — абсцисса правого конца стержня.

Заменив производные в этих равенствах конечными разностями и разделив второе равенство на m_k , где m_k — значение функции $m(x)$ в сечении с абсциссой x_k , представим граничные условия в виде

$$\Phi_1 - \Phi_0 = 0; \quad \Phi_k - \Phi_{k-1} (c_k^2 + i \cdot 2\omega e_k) = P_0 h / m_k, \quad (12.52)$$

где $c_k^2 = EF(x_k)/m_k$, а $e_k = b(x_k)/(2m_k)$.

Определять комплексные числа Φ_{i+1} по формулам (12.50) будем в масштабе $A_m e^{i\varphi_m}$, который потом найдем из условия заданной силы P_0 на правом конце. На левом конце стержня примем $U_0 = 1$, $V_0 = 0$. Тогда из первого равенства (12.52) найдем $U_1 = 1$, $V_1 = 0$. Далее по формулам (12.51) вычислим U и V для каждого сечения стержня, включая сечение на правом конце. Второе равенство (12.52) используем для определения масштаба. Левую часть второго равенства (12.52) представим в виде

$$[U_k - U_{k-1} + i(V_k - V_{k-1})] (c_k^2 + i \cdot 2\omega e_k) = U_{\Phi_k} + iV_{\Phi_k}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} U_{\Phi_k} &= (U_k - U_{k-1})c_k^2 - 2\omega e_k(V_k - V_{k-1}); \\ V_{\Phi_k} &= 2\omega e_k(U_k - U_{k-1}) + c_k^2(V_k - V_{k-1}). \end{aligned} \quad (12.53)$$

Масштаб комплексных чисел Φ_i представим в виде

$$A_m e^{i\varphi_m} = U_m + iV_m.$$

Так как все числа U_i , V_i , включая U_{Φ_k} и V_{Φ_k} , вычислены в масштабе $A_m e^{i\varphi_m}$, то второе равенство теперь запишем так:

$$(U_m + iV_m)(U_{\Phi_k} + iV_{\Phi_k}) = P_0 h / m_k.$$

Разделив вещественную и мнимые части, получим

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{D} \frac{P_0 h}{m_k} U_{\Phi_k}; \\ V_m &= -\frac{1}{D} \frac{P_0 h}{m_k} V_{\Phi_k}; \end{aligned} \quad (12.54)$$

$$D = U_{\Phi_k}^2 + V_{\Phi_k}^2; \quad A_m = \sqrt{U_m^2 + V_m^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_m = V_m / U_m.$$

Из равенств (12.50) и (12.51) можно определить действительную и мнимую части комплексного числа для любого сечения стержня:

$$\Phi_i = U_i + iV_i = A_{\Phi_i} e^{i\varphi_{\Phi_i}},$$

которое в масштабе $A_m e^{i\varphi_m}$ характеризует вынужденные колебания i -го сечения стержня.

Форма вынужденных колебаний для неоднородного стержня может быть представлена совокупностью векторов (комплексных коэффициентов формы) для всех сечений стержня. Для произвольного i -го сечения стержня комплексный коэффициент формы

$$\Phi = A(x_i, \omega) e^{i\varphi(x_i, \omega)}, \quad (12.55)$$

где

$$A(x_i, \omega) = A_{\Phi_i} A_m; \quad \varphi(x_i, \omega) = \varphi_{\Phi_i} + \varphi_m. \quad (12.56)$$

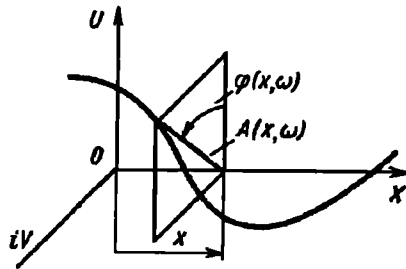


Рис. 12.13

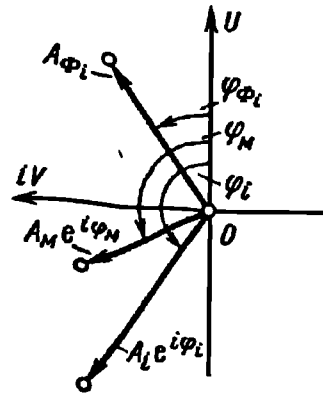


Рис. 12.14

Независимо от того, изменяется ли внешняя сила как $P_0 \cos \omega t$ или как $P_0 \sin \omega t$, при переходе к тригонометрической форме записи в выражении (12.55) нужно сохранять вещественную и мнимую части.

Форма вынужденных колебаний $\Phi(x, \omega)$ в координатах x, U, iV является пространственной кривой. Чтобы представить эту кривую, нужно в каждом сечении $i = 0, 1, 2, \dots, k$ от оси стержня в плоскости, параллельной плоскости $Z = U + iV$, построить вектор $\Phi(x_i, \omega)$ и концы всех векторов соединить кривой (рис. 12.13). Получается как бы спиралевидная кривая с переменным радиусом. Чем выше частота вынужденных колебаний, тем на больший угол повернется вектор $\Phi(x_i, \omega)$ вокруг оси X при движении начала вектора вдоль этой оси ($0 \leq i \leq k$). По числу полуоборотов вектора $\Phi(x_i, \omega)$ вокруг оси X можно сделать заключение о том, к частоте какого тона свободных колебаний ω_n наиболее близка частота внешней силы ω . Чем ближе эти частоты, тем больше амплитуда формы вынужденных колебаний.

Для исследования колебаний какого-либо i -го сечения стержня достаточно знать сдвиг фаз в пределах $0 \leq \varphi(x_i, \omega) \leq 2\pi$.

Взаимное расположение вектора A_Φ , вектора $A_\omega e^{i\varphi_\omega}$, характеризующего масштаб, и вектора $A_e e^{i\varphi_e}$, представляющего собой коэффициент формы вынужденных колебаний, показано на рис. 12.14.

Для функции $\Phi(x, \omega)$ в случае однородного стержня можно получить аналитическое выражение. Если левый конец стержня свободен, а к правому приложена внешняя сила

$$P(t) = P_0 e^{i\omega t}, \text{ то при } b(x) = 0$$

$$\Phi(x, \omega) = - \frac{P_0}{\alpha E F_0 \sin \alpha l} \cos \alpha x \quad (\alpha = \frac{n\pi}{l}, n = 1, 2, \dots),$$

где

$$\alpha = \omega \sqrt{m_0 l (E F_0)}.$$

Графики функций $\Phi(x, \omega)$ при разных значениях α для одного стержня приведены на рис. 12.15. Это плоские кривые, при построении которых принято, что $P_0(E F_0) = 1$. Кривая 1 соответствует $\alpha_1 = 0,1\pi/l$; кривая 2 — $\alpha_2 = 0,9\pi/l$, кривая 3 — $\alpha_3 = 1,9\pi/l$.

При $\alpha \ll \pi/l$ форма колебаний по длине стержня изменяется мало. Стержень совершает гармонические колебания почти как твердое тело. Колебания растяжения — сжатия, которые характеризуются перемещениями сечений стержня друг относительно друга, почти отсутствуют, так как частота изменения внешней силы значительно меньше частоты первого тона свободных колебаний стержня. При $\alpha_2 = 0,9\pi/l$ и $\alpha_3 = 1,9\pi/l$ форма вынужденных колебаний близка к форме свободных колебаний первого и второго тонов соответственно. Объясняется это тем, что частота внешней силы близка к частоте свободных колебаний первого и второго тонов (для первого тона $\alpha = \pi/l$, для второго тона $\alpha = 2\pi/l$).

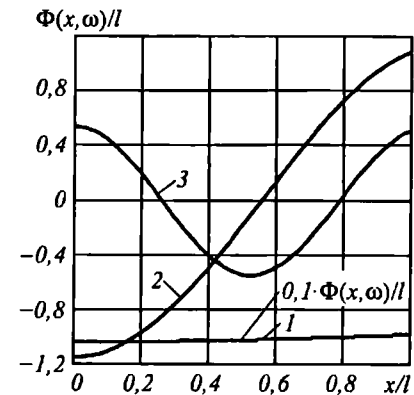


Рис. 12.15

12.8. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРПУСА РАКЕТЫ

Решим сначала две вспомогательные задачи: 1) найдем правило перехода через j -е сечение, которому передается сосредоточенная сила от упругоподвешенных масс, имитирующих жидкость; 2) найдем правило перехода через сечение с абсциссой $x_j = x_{дв}$, к которому упруго подвешен двигатель.

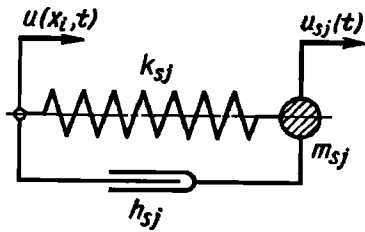


Рис. 12.16

Начнем с первой задачи. Пусть j -е сечение расположено между сечениями i и $i+1$. Полагая перемещения близких сечений x_i и x_j одинаковыми, т.е. $u(x_j, t) = u(x_i, t)$, определим перемещение $u_{sj}(t)$ массы m_{sj} в неподвижной системе координат (рис. 12.16). Это задача о вынужденных колебаниях массы m_{sj} , вызываемых гармоническим перемещением точки подвеса:

$$u(x_j, t) = u(x_i, t) = \Phi(x_i, \omega) e^{i\omega t} = \Phi_i e^{i\omega t}.$$

Положим $u_{sj}(t) = \Phi_{sj}(\omega) e^{i\omega t} = \Phi_{sj} e^{i\omega t}$.
Тогда

$$\Phi_{sj} = \Phi_i \frac{\omega_{sj}^2 + i \cdot 2e_{sj}\omega}{\omega_{sj}^2 - \omega^2 + i \cdot 2e_{sj}\omega}, \quad (12.57)$$

где

$$\omega_{sj}^2 = k_{sj}/m_{sj}; \quad e_{sj} = h_{sj}/(2m_{sj}).$$

Комплексный коэффициент формы Φ_{sj} , выражающий вынужденные колебания масс m_{sj} , на основании выражения (12.57) представим окончательно в виде

$$\Phi_{sj} = U_{sj} + iV_{sj}. \quad (12.58)$$

В сечении стержня, абсцисса которого равна x_j , от каждой массы m_{sj} стержню передается сосредоточенная сила $N_{sj}(\omega)$, которая может быть определена по формуле

$$N_{sj}(t) = -m_{sj} \frac{d^2 u_{sj}}{dt^2}$$

или

$$N_{sj}(\omega) = N_{sj} = m_{sj} \omega^2 \Phi_{sj}. \quad (12.59)$$

Рассмотрим теперь равновесие участка, расположенного между i -м и $(i+1)$ -м сечениями стержня. С левой стороны стержня на выделенный участок воздействует растягивающая сила

$$N_i = \Phi'(x_i)(EF_i + ib_i). \quad (12.60)$$

Справа действует растягивающая сила

$$N_{i+1} = \Phi'(x_{i+1})(EF_{i+1} + ib_{i+1}). \quad (12.61)$$

На выделенный участок стержня действуют также силы N_{sj} от упругоподвешенных сосредоточенных масс, число которых $s^{(0)}$. Силами трения, возникающими внутри участка, для простоты будем пренебрегать.

Условие равновесия рассматриваемого участка стержня в любой момент времени будет иметь вид

$$N_i = N_{i+1} + \sum_{(s)} N_{sj} + m_i h \omega^2 \Phi_i. \quad (12.62)$$

Согласно уравнениям (12.36)

$$\Phi'_i = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2h}; \quad \Phi'_{i+1} = \frac{\Phi_{i+2} - \Phi_i}{2h}. \quad (12.63)$$

На основании равенства (12.49) получим

$$\Phi_{i+2} = (a_{i+1}^* + id_{i+1}^*)\Phi_{i+1} - (a_{i+1} + id_{i+1})\Phi_i. \quad (12.64)$$

На основании равенств (12.58) – (12.64) получим формулу для определения комплексного коэффициента формы вынужденных колебаний $(i+1)$ -го сечения стержня:

$$\Phi_{i+1} = U_{i+1} + iV_{i+1}; \quad (12.65)$$

$$U_{i+1} = \frac{1}{a_i'^2 + b_i'^2} \left[a_i'' U_i - b_i'' V_i + e_{i-1}' U_{i-1} - d_{i-1}' V_{i-1} + 2h\omega^2 \sum_{(s)} \frac{m_{sj}}{m_i} (a_i' U_{sj} - b_i' V_{sj}) \right];$$

$$V_{i+1} = \frac{1}{a_i'^2 + b_i'^2} \left[a_i'' V_i + b_i'' U_i + e_{i-1}' V_{i-1} + d_{i-1}' U_{i-1} + \right. \\ \left. + 2h\omega^2 \sum_{sj} \frac{m_{sj}}{m_i} (a_i' V_{sj} - b_i' U_{sj}) \right].$$

Здесь

$$a_i'' = -a_i' (c_i^2 + c_i^2 a_i - 2\varepsilon_i \omega d_i) + b_i' (2\varepsilon_i \omega_i + 2\varepsilon_i \omega_i a_i + c_i^2 d_i);$$

$$b_i'' = -b_i' (c_i^2 + c_i^2 a_i - 2\varepsilon_i \omega d_i) - a_i' (2\varepsilon_i \omega_i + 2\varepsilon_i \omega_i a_i + c_i^2 d_i);$$

$$e_{i-1}' = c_i^2 a_i' + 2\varepsilon_i \omega b_i', \quad d_{i-1}' = -c_i^2 b_i' + 2\varepsilon_i \omega a_i';$$

$$a_i' = c_i^2 - \frac{m_{i+1}}{m_i} c_{i+1}^2 a_{i+1}^* + \frac{m_{i+1}}{m_i} 2\varepsilon_{i+1} \omega d_{i+1}^*;$$

$$b_i' = 2\varepsilon_i \omega - \frac{m_{i+1}}{m_i} c_{i+1}^2 d_{i+1}^* - \frac{m_{i+1}}{m_i} 2\varepsilon_{i+1} \omega a_{i+1}^*;$$

$$c_i^2 = \frac{EF_i}{m_i}; \quad c_{i+1}^2 = \frac{EF_{i+1}}{m_{i+1}}; \quad \varepsilon_i = \frac{b_i}{2m_i}; \quad \varepsilon_{i+1} = \frac{b_{i+1}}{2m_{i+1}}.$$

Так как величины $U_i, V_i, U_{i-1}, V_{i-1}, U_{sj}, V_{sj}$ известны, то по уравнениям (12.65) можно вычислить комплексный коэффициент формы Φ_{i+1} .

Теперь рассмотрим вторую задачу – найдем правило перехода через сечение с абсциссой $x_j = x_{дв}$, к которому упруго подвешен двигатель. Пусть $x_i < x_j < x_{i+1}$, где x_i – абсцисса сечения корпуса, предшествующего сечению x_j . Будем считать, что на сосредоточенную массу $m_{дв}$ действует внешняя сила $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$, представляющая собой отклонение силы тяги двигателя (рис. 12.17).

Сначала найдем вынужденные колебания массы $m_{дв}$:

$$u_{дв} = \Phi_{дв}(\omega) = \Phi_{дв} e^{i\omega t},$$

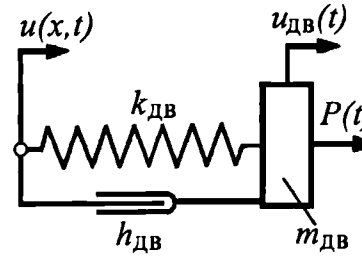


Рис. 12.17

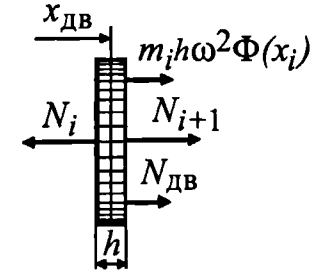


Рис. 12.18

вызванные внешней силой $P(t)$, и

$$u(x_i, t) = \Phi_i e^{i\omega t},$$

вызванные перемещением точки подвеса.

Применив второй закон Ньютона, получим

$$-m_{дв} \omega^2 \Phi_{дв} = (k_{дв} + i\omega h_{дв})(\Phi_i - \Phi_{дв}) + P_0.$$

Из этого уравнения найдем

$$\Phi_{дв} = \frac{P_0}{m_{дв}(\omega_{дв}^2 - \omega^2 + i \cdot 2\varepsilon_{дв} \omega)} + \Phi_i \frac{\omega_{дв}^2 + i \cdot 2\varepsilon_{дв} \omega}{\omega_{дв}^2 - \omega^2 + i \cdot 2\varepsilon_{дв} \omega}. \quad (12.66)$$

Сила двигателя, передаваемая на стержень,

$$N_{дв} = (k_{дв} + i\omega h_{дв})(\Phi_{дв} - \Phi_i).$$

Подставив сюда выражение из уравнения (12.66), получим

$$N_{дв} = (P_0 + m_{дв} \omega^2 \Phi_i) \frac{\omega_{дв}^2 + i \cdot 2\varepsilon_{дв} \omega}{\omega_{дв}^2 - \omega^2 + i \cdot 2\varepsilon_{дв} \omega} \quad (12.67)$$

или

$$N_{дв} = (P_0 + m_{дв} \omega^2 \Phi_i)(U_{дв}' + iV_{дв}'). \quad (12.68)$$

Рассмотрим равновесие участка, расположенного между i -м и $(i+1)$ -м сечениями стержня. Силы, действующие на этот участок, показаны на рис. 12.18. Из условия равновесия участка стержня найдем

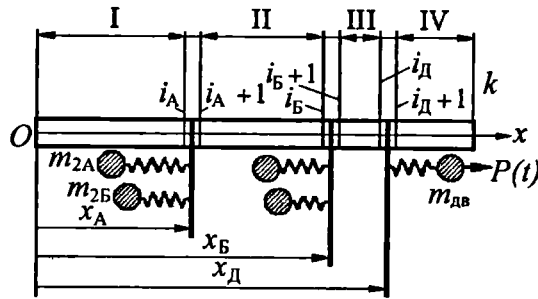


Рис. 12.19

$$N_{i+1} = N_i - N_{дв} - m_i h \omega^2 \Phi_i. \quad (12.69)$$

Перейдем к изложению алгоритма расчета формы вынужденных колебаний корпуса ракеты. Применим метод конечных разностей.

Всю длину корпуса разбиваем на k участков одинаковой длины $h = l/k$. Номерам поперечных сечений, непосредственно предшествующих j -му сечению с упругоподвешенными сосредоточенными массами, будем в дальнейшем приписывать индекс j , т.е. обозначать их через i_j . Для схемы, соответствующей корпусу ракеты с двумя последовательно расположенными баками, обозначения характерных номеров сечений показаны на рис. 12.19. Там же римскими цифрами указаны четыре участка стержня, в пределах которых можно применять метод конечных разностей в "чистом виде".

Алгоритм расчета следующий:

1. Зная величины $EF(x)$, $m(x)$, $b(x)$ в каждом сечении стержня, вычисляем коэффициенты a_i , d_i , a_i^* , d_i^* уравнения (12.49) для всех сечений.

2. По формулам (12.51) вычислим действительные и мнимые части комплексных чисел для всех сечений до номера i_A включительно, принимая $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = 1$, и неизвестный пока масштаб $A_{i_A} e^{i\varphi_{i_A}}$.

3. На основании равенств (12.65) переходим от сечения i_A к сечению $i_A + 1$, заменяя в этих равенствах индексы i, j индексами i_A, A .

4. Рассчитываем формы вынужденных колебаний для участка II при $i_A + 1 < i \leq i_B$ по формулам (12.51). Масштаб комплексных чисел при этом не изменяется.

5. Переходим от сечения i_B к сечению $i_B + 1$ так же, как от сечения i_A к сечению $i_A + 1$.

6. Вычисляем комплексные числа для участка III при $i_B + 1 < i \leq i_D$ точно так же, как вычисляются комплексные числа для участка II. Масштаб чисел остается прежним, т.е. $A_{i_A} e^{i\varphi_{i_A}}$.

7. Вычисляем комплексные числа для сечений участка IV при $i_D + 1 < i \leq k$, начиная с правого (свободного) конца стержня. Получим для этого соответствующие формулы. Равенство, предшествующее уравнению (12.49), решим относительно Φ_{i-1} . Получим

$$\Phi_{i-1} = (r_i^* + i p_i^*) \Phi_i - (r_i' + i p_i') \Phi_{i+1} \quad (12.70)$$

$$(i = k - 1, \dots, i_D + 2, i_D + 1, i_D),$$

где

$$r_i^* = \frac{1}{D_i'} [c_{i-0,5}^2 (c_{i-0,5}^2 - \omega^2 h^2 + c_{i+0,5}^2) + 4\omega^2 e_{i-0,5} (e_{i-0,5} + e_{i+0,5})];$$

$$p_i^* = \frac{2\omega}{D_i'} [c_{i-0,5}^2 (e_{i-0,5} + e_{i+0,5}) - e_{i-0,5} (c_{i-0,5}^2 - \omega^2 h^2 + c_{i+0,5}^2)];$$

$$r_i' = \frac{1}{D_i'} (c_{i-0,5}^2 c_{i+0,5}^2 + 4\omega^2 e_{i+0,5} e_{i-0,5});$$

$$p_i' = \frac{1}{D_i'} (e_{i+0,5} c_{i-0,5}^2 - e_{i-0,5} c_{i+0,5}^2);$$

$$D_i' = c_{i-0,5}^4 + 4\omega^2 e_{i-0,5}^2;$$

$$c_{i+0,5}^2 = \frac{EF_{i+0,5}}{m_i}, \quad c_{i-0,5}^2 = \frac{EF_{i-0,5}}{m_i};$$

$$e_{i+0,5} = \frac{b_{i+0,5}}{2m_i}, \quad e_{i-0,5} = \frac{b_{i-0,5}}{2m_i}.$$

Примем на правом свободном конце стержня коэффициент формы $\Phi_k = 1$. Из граничного условия на этом конце найдем $\Phi_{k-1} = 1$. Дальнейший расчет производится по уравнению (12.70). Сначала находим U_{k-2} , V_{k-2} , затем все остальные числа до U_{i_d+1} , V_{i_d+1} включительно.

Так как комплексные числа для участка IV вычисляются независимо от вычислений для остальных участков, то для этого участка должен быть введен свой масштаб.

8. Два неизвестных масштаба $A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}}$ и $A_{IV_{\text{м}}} e^{i\varphi_{IV_{\text{м}}}}$ определяем из условий сопряжения участков III и IV. Силовое условие сопряжения согласно формуле (12.69) представим в виде

$$N_{i_d+1} = N_{i_d} - N_{\text{дв}} - m_i h \omega^2 \Phi_{i_d}. \quad (12.71)$$

Геометрическое условие сопряжения должно выражать совместимость перемещений и может быть представлено следующей приближенной формулой:

$$\Phi_{i_d+1} = \Phi_{i_d} + h \Phi'_{i_d}.$$

Применив соотношение конечных разностей

$$\Phi'_{i_d} = \frac{\Phi_{i_d+1} - \Phi_{i_d-1}}{2h},$$

получаем

$$\Phi_{i_d+1} = 2\Phi_{i_d} - \Phi_{i_d-1}.$$

С учетом принятых масштабов геометрическое условие сопряжения будет иметь вид

$$A_{IV_{\text{м}}} e^{i\varphi_{IV_{\text{м}}}} \Phi_{i_d+1} = A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} (2\Phi_{i_d} - \Phi_{i_d-1}). \quad (12.72)$$

Из этого условия один масштабный коэффициент выразим через другой. Заменяя комплексные числа Φ_{i_d+1} , Φ_{i_d} , Φ_{i_d-1} их вещественными и мнимыми составляющими, находим

$$A_{IV_{\text{м}}} e^{i\varphi_{IV_{\text{м}}}} = A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} (U'_{\text{м}} + iV'_{\text{м}}), \quad (12.73)$$

где

$$U'_{\text{м}} = \frac{1}{D'} [U_{i_d+1}(2U_{i_d} - U_{i_d-1}) + V_{i_d+1}(2V_{i_d} - V_{i_d-1})];$$

$$V'_{\text{м}} = \frac{1}{D'} [-V_{i_d+1}(2U_{i_d} - U_{i_d-1}) - U_{i_d+1}(2V_{i_d} - V_{i_d-1})]; \quad (12.74)$$

$$D' = U_{i_d+1}^2 + V_{i_d+1}^2.$$

Силовое условие (12.71) используем для определения последнего неизвестного – масштаба $A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}}$. Силы N_{i_d} и N_{i_d+1} , входящие в равенство (12.71), выражаем через силы инерции части стержня, расположенной с одной стороны от сечения. Получаем

$$N_{i_d+1} = h\omega^2 A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} (U'_{\text{м}} + iV'_{\text{м}}) \sum_{i=i_d+1}^{i=k-1} m_i \Phi_i; \quad (12.75)$$

$$N_{i_d} = -\omega^2 A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} \left(h \sum_{i=0}^{i_d-1} m_i \Phi_i + \sum_{\substack{j \in \text{А, Б}}} m_{sj} \Phi_{sj} \right).$$

На основании формулы (12.68) сила $N_{\text{дв}}$ с учетом масштаба определяется из следующего выражения:

$$N_{\text{дв}} = (P_0 + m_{\text{дв}} \omega^2 \Phi_{i_d} A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}}) (U'_{\text{д}} + iV'_{\text{д}}). \quad (12.76)$$

Подставляя в силовое условие (12.71) вместо N_{i_d+1} , N_{i_d} , $N_{\text{дв}}$ их выражения в виде (12.74), (12.75) и учитывая масштаб для Φ_{i_d} , получаем

$$\begin{aligned}
& h\omega^2 A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} (U'_{\text{м}} + iV'_{\text{м}}) \sum_{i=i_{\text{д}}+1}^{i=k-1} m_i \Phi_i = \\
& = -\omega^2 A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} \left(h \sum_{i=0}^{i_{\text{д}}-1} m_i \Phi_i + \sum_{\substack{j \\ j=A, B}} m_{sj} \Phi_{sj} \right) - \\
& - (P_0 + m_{\text{дв}} \omega^2 \Phi_{I_{\text{д}}} A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}}) (U'_{\text{д}} + iV'_{\text{д}}).
\end{aligned}$$

Заменив все комплексные числа их вещественными и мнимыми составляющими и решив это равенство относительного искомого масштаба, находим

$$A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} = (U_{I_{\text{м}}} + iV_{I_{\text{м}}}) P_0, \quad (12.77)$$

где

$$\begin{aligned}
U_{I_{\text{м}}} &= -\frac{a_{\text{м}} U'_{\text{д}} + b_{\text{м}} V'_{\text{д}}}{a_{\text{м}}^2 + b_{\text{м}}^2}; \\
V_{I_{\text{м}}} &= -\frac{a_{\text{м}} V'_{\text{д}} - b_{\text{м}} U'_{\text{д}}}{a_{\text{м}}^2 + b_{\text{м}}^2};
\end{aligned} \quad (12.78)$$

$$\begin{aligned}
a_{\text{м}} &= h \left(\sum_{i=0}^{i=i_{\text{д}}} m_i U_i + U'_{\text{м}} \sum_{i=i_{\text{д}}+1}^{i=k-1} m_i U_i - V'_{\text{м}} \sum_{i=i_{\text{д}}+1}^{i=k-1} m_i V_i \right) + \\
& + \sum_{\substack{j \\ j=A, B}} m_{sj} U_{sj} + m_{\text{дв}} (U_{I_{\text{д}}} U'_{\text{д}} - V_{I_{\text{д}}} V'_{\text{д}}); \\
b_{\text{м}} &= h \left(\sum_{i=0}^{i=i_{\text{д}}} m_i V_i + V'_{\text{м}} \sum_{i=i_{\text{д}}+1}^{i=k-1} m_i U_i + U'_{\text{м}} \sum_{i=i_{\text{д}}+1}^{i=k-1} m_i V_i \right) + \\
& + \sum_{\substack{j \\ j=A, B}} m_{sj} V_{sj} + m_{\text{дв}} (U_{I_{\text{д}}} U'_{\text{д}} + V_{I_{\text{д}}} V'_{\text{д}}).
\end{aligned}$$

Все величины, входящие в формулы для коэффициентов (12.78), известны, и масштаб $A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}}$ можно считать определенным.

9. Получаем форму вынужденных колебаний с учетом масштабов. Для участков стержня I, II, III ($0 \leq i < i_{\text{д}}$) будем иметь

$$\Phi(x_i, \omega) A_{I_{\text{м}}} e^{i\varphi_{I_{\text{м}}}} = P_0 [(U_i U_{I_{\text{м}}} - V_i V_{I_{\text{м}}}) + i(U_i V_{I_{\text{м}}} + U_{I_{\text{м}}} V_i)].$$

Величины U_i, V_i вычисляются по формулам (12.51), величины $U_{I_{\text{м}}}, V_{I_{\text{м}}}$ — по формулам (12.78).

Для участка IV при $i_{\text{д}} + 1 \leq i \leq k$ с учетом выражения (12.72) находим

$$\begin{aligned}
\Phi(x_i, \omega) A_{IV_{\text{м}}} e^{i\varphi_{IV_{\text{м}}}} &= P_0 \{ [(U_i U_{I_{\text{м}}} - V_i V_{I_{\text{м}}}) U'_{\text{м}} - V'_{\text{м}} (U_i V_{I_{\text{м}}} + U_{I_{\text{м}}} V_i)] + \\
& + i [V'_{\text{м}} (U_i U_{I_{\text{м}}} - V_i V_{I_{\text{м}}}) + U'_{\text{м}} (U_i V_{I_{\text{м}}} + U_{I_{\text{м}}} V_i)] \}.
\end{aligned}$$

Величины U_i, V_i для участка IV вычисляются по формулам (12.70), величины $U'_{\text{м}}, V'_{\text{м}}$ — по формулам (12.74), величины $U_{I_{\text{м}}}, V_{I_{\text{м}}}$ — по формулам (12.74). Форма вынужденных колебаний зависит от частоты внешней силы, а масштаб формы пропорционален внешней силе P_0 .

В заключение рассмотрим вкратце, сколько тонов собственных колебаний жидкости в упругом баке нужно учитывать при расчете форм вынужденных колебаний корпуса. Такой вопрос возникает и при расчете форм и частот свободных колебаний корпуса.

Соотношение между коэффициентами форм вынужденных колебаний для точки подвеса $\Phi(x_j, \omega)$ и упругоподвешенной массы $\Phi_{sj}(\omega)$ при $h_{sj} = 0$ определяем из формулы

$$\Phi_{sj}(\omega) = \Phi(x_j, \omega) \omega_{sj}^2 / (\omega_{sj}^2 - \omega^2),$$

где ω_{sj} — частота собственных колебаний упругоподвешенной массы m_{sj} ; ω — частота вынужденных колебаний. Если масса m_{sj} закреплена на корпусе жестко, то амплитуда ее колебаний равна $\Phi(x_j, \omega)$, а сила инерции равна $m_{sj} \omega^2 \Phi(x_j, \omega)$. Разность между силами инерции упругоподвешенной и закрепленной массы равна $\alpha_{sj} m_{sj} \omega^2 \Phi(x_j, \omega)$, где

$$\alpha_{sj} = \omega^2 / (\omega_{sj}^2 - \omega^2).$$

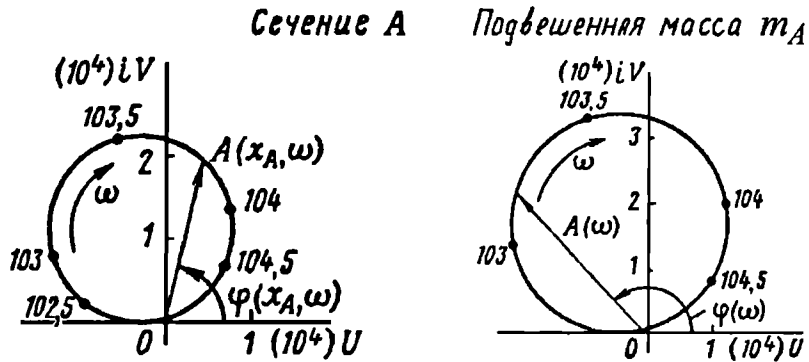


Рис. 12.20

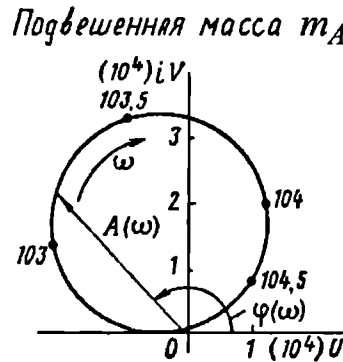


Рис. 12.21

Разность сил инерции можно считать ошибкой, которая появляется в расчете осевых сил $N(x)$, если масса m_{sj} жестко закреплена. Эта разность велика, если частота вынужденных колебаний близка к частоте собственных колебаний массы. Чтобы ошибки в расчете были незначительны, сосредоточенные массы нужно закреплять, начиная с такого номера $s^{(0)}$, когда $\omega_{sj} \gg \omega$. Например, если $\omega/\omega_{sj} = 1,5; 2$, то коэффициент $\alpha_{sj} m_{sj}$, характеризующий разность сил инерции, будет равен $(1,8; 1,33)m_{sj}$. С увеличением номера s величина массы m_{sj} быстро уменьшается, поэтому размер ошибки уменьшается не только вследствие уменьшения коэффициента α_{sj} , зависящего от соотношения частот, но и вследствие уменьшения величины массы m_{sj} . Более точную оценку можно получить из сравнения форм вынужденных колебаний (форм и частот свободных колебаний) корпуса, определенных при упругоподвешенных и закрепленных массах m_{sj} .

В качестве примера приведем результаты численного расчета амплитудно-фазовых характеристик одноступенчатой ракеты, динамическая схема которой показана на рис. 12.10.

В численном расчете приняты: логарифмический декремент колебаний для механических осцилляторов $\delta = 0,1$, т.е. $\epsilon_{sj} = 0,1\omega_{sj} / (2\pi)$, внешняя сила $P(t) = 1 \cdot e^{i\omega t}$ приложена к сечению корпуса $N = 30$, $\omega_A^2 = 30000 \text{ 1/c}^2$, $\omega_B^2 = 12000 \text{ 1/c}^2$, $\omega_m^2 = 25000 \text{ 1/c}^2$.

Годограф вектора $\Phi(x_A, \omega)$ на рис. 12.20 представляет амплитудно-фазовую характеристику в небольшой окрестности частот свободных колебаний ω_n корпуса. Амплитуда вынужденных колебаний $A(x_A, \omega)$ с увеличением ω быстро возрастает и быстро убывает, а сдвиг фаз

$\varphi(x_A, \omega)$ изменяется на величину π . За пределами этой окрестности амплитуда вынужденных колебаний мала. На амплитудно-фазовой характеристике указаны значения частот вынужденных колебаний $\omega \text{ 1/c}$.

На рис. 12.21 показана амплитудно-фазовая характеристика сосредоточенной массы m_A .

Амплитудно-фазовые характеристики, подобные изображенным на рис. 12.20 и 12.21, могут быть рассчитаны и построены для любого поперечного сечения стержня и для любой упругоподвешенной массы. Они дают полное представление о вынужденных колебаниях любого поперечного сечения стержня.

КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ТОПЛИВНЫХ МАГИСТРАЛЯХ

13.1. СТРУКТУРА ТОПЛИВНЫХ МАГИСТРАЛЕЙ

Компоненты топлива подаются из баков к насосам двигателей по топливным расходным магистралям – трубопроводам специальной конструкции и сравнительно большой длины. Для обеспечения заданного давления топлива перед насосами при приемлемой величине давления наддува в баках гидравлическое сопротивление в расходных магистралях должно быть незначительным, а отсюда и небольшой должна быть скорость потока жидкости. Трубопроводы низкого давления, будучи большого диаметра при малой толщине стенок, обладают, как и узлы их крепления, незначительной жесткостью. Основная доля потерь давления в расходных магистралях приходится на местные сопротивления – повороты, стыки, разветвления, пироклапаны и т.д.

Для компенсации изменения при работе длины трубопроводов, устранения влияния технологических и температурных перекосов и вибраций в разных местах расходной магистрали устанавливаются сильфоны, обладающие малой (по сравнению с трубой) осевой и угловой жесткостью. Известно также применение системы сильфонов специальной конструкции для обеспечения постоянства объема трубопровода при поворотах двигателя.

Важным фактором, определяющим значительную податливость столба жидкости в расходной магистрали, является наличие парогазовой смеси, возникающей вследствие кавитации на тех участках, где локальное статическое давление меньше давления насыщенных паров жидкости и равновесного давления растворенных в жидкости газов. Кавитация особенно развита в струйных эжекторах и на входе в шнековые насосы, которые устанавливаются для повышения давления на входе в центробежные насосы. Наличие парогазовой смеси на входе в насос снижает частоту собственных колебаний столба жидкости в расходной магистрали.

Для обеспечения устойчивости установившегося режима работы замкнутой системы ракеты с ЖРД конструкторы иногда сознательно стремятся понизить частоту собственных колебаний столба жидкости,

искусственно уменьшая объемную жесткость расходной магистрали. В дальнейшем этот вопрос будет рассмотрен подробно. Здесь же упомянем лишь применяемые для этого известные способы: снижение радиальной жесткости трубы, введение в жидкость пузырьков нерастворяющегося газа, подключение в некоторых сечениях, например на входе в насос, гидравлических аккумуляторов (гидравлических демпферов).

При анализе динамических свойств топливных магистралей важное значение имеет учет граничных условий, которые выражают связь между колебаниями давления и скорости потока. Характер этой связи можно установить из рассмотрения гидродинамических свойств агрегатов и устройств, с которыми соединен трубопровод. Ими могут быть баки, шайбы, дроссели, ресиверы, коллекторы, участки труб с другими параметрами, наконец, сам ЖРД.

На рис. 13.1 приведена схема топливных магистралей ракеты "Тор – Аджена" с одним маршевым двигателем 8. Магистрали горючего и окислителя имеют одинаковую структуру; бак горючего 1 расположен в верхней, а бак окислителя 3 – в нижней части ракеты. Расходная магистраль горючего состоит из длинной трубы низкого давления 4, которая через колено и участок трубы, расположенный в поперечной плоскости, соединена с насосом для горючего 7. Труба низкого давления проходит через бак окислителя в тоннельной трубе 5. На схеме показаны также: расходная магистраль окислителя (короткая) 11, насос для окислителя 10, турбина 9, ЖГГ 12. Обе магистрали снабжены сильфонами 6, установленными вблизи ТНА, и воронкогасителями 2 на выходе из баков.

Топливная система ракеты "Титан-2" с двумя маршевыми двигателями показана на рис. 10.8. Подача горючего из баков производится по двум сравнительно коротким, одинаковым по длине расходным магистралям 2, на которых установлены гидравлические демпферы 8. Расходная магистраль окислителя перед ТНА разделяется на две ветви, конструктивные параметры которых отличаются от параметров магистрали до ее

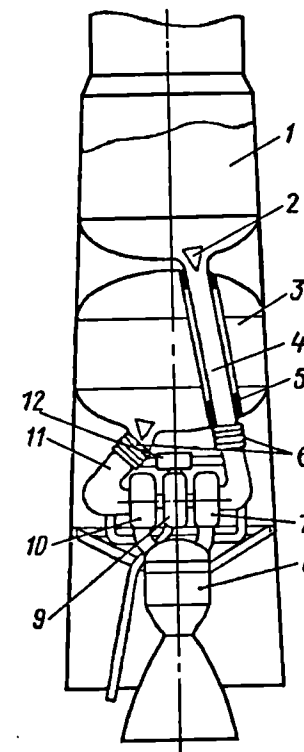


Рис. 13.1

разветвления. Между узлом разветвления (коллектором) и ТНА установлен сифон и нагрузки на коллектор от давления жидкости передаются затем непосредственно на корпус ракеты.

Приведенные примеры показывают сложность конструкции расходных магистралей жидкостных ракет. Для удобства дальнейшего исследования расчленим расходные магистрали на следующие типовые элементы, обладающие специфическими свойствами:

относительно длинные прямые участки трубопровода с постоянными диаметром и толщиной стенки;

сифоны;

элементы трубопровода, в которых поток жидкости претерпевает на коротком участке такие изменения, как поворот, разветвление, изменение диаметра;

гидравлические аккумуляторы (гидравлические демпферы продольных колебаний);

локальные участки магистрали с кавитирующим топливом;

элементы, обладающие сосредоточенным гидравлическим сопротивлением.

13.2. ДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ТОПЛИВНОЙ МАГИСТРАЛИ С КОРПУСОМ

При возникновении продольных колебаний (растяжения – сжатия) корпуса будут возбуждаться и колебания топливной магистрали. Эти колебания будут вызываться теми частями корпуса, к которым крепится топливная магистраль (дно бака, турбонасосный агрегат, отдельные части корпуса). В зависимости от расположения и конфигурации топливной магистрали ее колебания будут оказывать различное воздействие на поток жидкости в ней.

Если ось трубы на всем протяжении совпадает или параллельна продольной оси (рис. 13.2), то при отсутствии трения колебания трубы не увлекают за собой жидкость. Дифференциальное уравнение движения жидкости относительно трубы в этом случае будет таким же, как если бы труба не колебалась, а двигалась с постоянным ускорением g^* . Колебания потока жидкости в трубе (колебания давления и скорости) в подобном случае будут вызываться изменением условий на его концах: при колебаниях дна бака возникают колебания давления жидкости на входе в трубу, а колебания насоса относительно потока вызывают изменение давления и скорости при выходе жидкости из трубы.

Иная картина будет наблюдаться, если есть участки, где ось трубы не параллельна оси ракеты, как, например, на рис. 13.3. Здесь колебания трубы будут увлекать жидкость, и поэтому дифференциальное уравнение

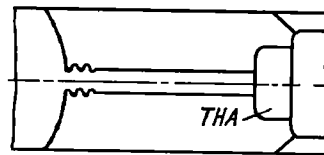


Рис. 13.2

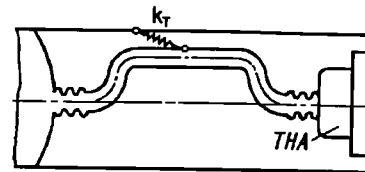


Рис. 13.3

движения жидкости относительно трубы должно содержать силы инерции переносного движения (вместе с трубой). Колебания потока жидкости в трубе будут вызываться также и изменениями условий на его концах.

На рис. 13.3 крепление трубы к корпусу схематизировано пружиной с жесткостью k_T , поэтому колебания трубы будут отличаться от колебаний корпуса. Упругоподвешенная труба образует колебательную систему с одной степенью свободы, если трубу считать жестким телом. Если сечение корпуса, к которому прикреплена труба, совершает колебания по закону $\Phi_k e^{i\omega t}$, то, как известно, труба будет совершать вынужденные колебания по закону

$$\Phi_T(t) = \frac{\Phi_k e^{i\omega t}}{1 - (\omega/\omega_T)^2},$$

где $\omega_T^2 = k_T/m_T$; m_T – масса трубы с находящейся в ней жидкостью.

Сила инерции переносного движения жидкости, обусловленная колебаниями трубы, в рассматриваемом случае будет пропорциональна ускорению $\Phi_T \omega^2 e^{i\omega t}$. Таким образом, выделяя из ракеты для изучения колебаний топливную магистраль в качестве отдельной гидроупругой системы, мы должны действовать к топливной магистрали будут внешними. Так как в потоке жидкости давление и скорость взаимосвязаны, то действие корпуса на топливную магистраль может быть выражено через изменение давления жидкости при выходе из бака (при входе в трубу), через изменение давления или скорости при входе жидкости в насос, через изменение скоростей характерных участков магистрали, содержащих местные сопротивления.

За невозмущенное примем движение потока жидкости относительно трубы с постоянной скоростью v_0 ; труба при этом вместе с корпусом движется прямолинейно с постоянным ускорением g^* в направлении продольной оси ракеты, давление жидкости в каждой точке постоянно

по времени, но переменное по длине трубы (различные высоты столбов жидкости).

Рассмотрим динамические характеристики каждого из элементов топливной магистрали в отдельности с учетом возможного воздействия на них со стороны корпуса. Начнем с длинной прямой трубы.

13.3. УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ДЛИННОЙ ПРЯМОЙ ТРУБЕ

В случае длинной трубы (с диаметром, малым по сравнению с длиной) детальный анализ сложных явлений, происходящих на концах трубы, можно опускать и считать, что динамические процессы на этих участках описываются теми же уравнениями, что и процессы в самой трубе. Внутреннее трение в жидкости учитывать не будем.

При малой вязкости скорость жидкости постоянна по всему сечению и быстро падает лишь при узком пограничном слое у стенки. Если, кроме того, условиться рассматривать лишь низкие частоты колебаний (такие, длина волны которых велика по сравнению с диаметром трубы), то можно считать, что в каждом поперечном сечении потока жидкости все величины (скорость, давление и т.п.) постоянны, а поток жидкости в трубе одномерный.

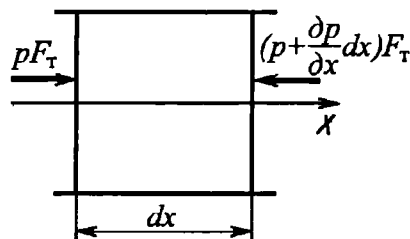


Рис. 13.4

Получим линеаризованное динамическое уравнение возмущенного движения потока жидкости в трубе, ось которой совпадает (или параллельна) с осью ракеты. Мысленно выделим в трубе часть потока длиной dx (рис. 13.4). В поперечном сечении возникает отклонение давления $(\partial p / \partial x) dx$.

На основании второго закона Ньютона получим

$$F_T \rho_0 dx \frac{dv}{dt} = -F_T \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Так как

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x},$$

окончательно будет

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (13.1)$$

где ρ_0 , v_0 – плотность и скорость жидкости в невозмущенном потоке (считаем их постоянными по длине трубы); $v = v(x, t)$; $p = p(x, t)$ – малые возмущения скорости и давления жидкости.

Динамическое уравнение (13.1) должно быть дополнено уравнением неразрывности жидкости, учитывающим изменение ее массы в выделенном объеме. Это уравнение можно получить, если рассмотреть втекание и вытекание жидкости в выделенный объем трубы. В единицу времени слева (условно) втекает масса жидкости, равная $F_T(v_0 + v)(\rho_0 + \rho)$, справа вытекает $F_T \left(v_0 + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \left(\rho_0 + \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right)$. Изменение массы жидкости

в выделенном объеме будет равно разности между количествами втекающей и вытекающей жидкости. Ограничиваясь учетом только бесконечно малых первого порядка и принимая площадь трубы неизменной, получим следующее линеаризованное уравнение неразрывности жидкости:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (13.2)$$

Введем безразмерные величины

$$M = \frac{v_0}{a_0}; \quad \tau = \frac{a_0}{l} t; \quad \xi = \frac{x}{l}; \quad v(\xi, \tau) = \frac{v}{a_0}; \quad p(\xi, \tau) = \frac{p}{a_0^2 \rho_0}, \quad (13.3)$$

где l – длина трубы; a_0 – скорость звука в невозмущенном потоке.

Уравнения (13.1) и (13.2) в безразмерном виде будут

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \tau} + M \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial p(\xi, \tau)}{\partial \xi} &= 0; \\ \frac{\partial p(\xi, \tau)}{\partial \tau} + M \frac{\partial p(\xi, \tau)}{\partial \xi} + \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \xi} &= 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Приведем эти уравнения к одному уравнению второго порядка относительно переменной $v(\xi, \tau)$:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 v(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - 2M \frac{\partial^2 v(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{\partial^2 v(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0. \quad (13.5)$$

Зная возмущение скорости $v(\xi, \tau)$, из первого уравнения (13.4) найдем возмущение давления

$$\bar{p}(\xi, \tau) = -Mv(\xi, \tau) - \int \frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \tau} d\xi. \quad (13.6)$$

Решения уравнения (13.4) или уравнения (13.5) должны удовлетворять краевым (граничным) и начальным условиям. В простейшем случае граничные условия могут сводиться к линейным однородным соотношениям между переменными $\bar{p}(\xi, \tau)$ и $v(\xi, \tau)$.

Поместим начало координат $\xi = 0$ в левом конце трубы, тогда для правого конца координата $\xi = 1$. Граничные условия можно представить в виде

$$b_{11}v(\xi, \tau) + b_{12}\bar{p}(\xi, \tau) = 0 \text{ при } \xi = 0;$$

$$b_{21}v(\xi, \tau) + b_{22}\bar{p}(\xi, \tau) = 0 \text{ при } \xi = 1.$$

Здесь b_{11}, b_{12}, \dots — некоторые дифференциальные операторы первого порядка.

Начальные условия должны задавать распределение скоростей и давлений по длине трубы. Однако в дальнейшем нас будут интересовать только стационарные колебания жидкости, для которых начальные условия значения не имеют.

В простейших случаях граничные условия будут следующими:

для открытого конца трубы $\bar{p}(\xi, \tau) = 0$;

для закрытого конца трубы $v(\xi, \tau) = 0$.

Открытый и закрытый концы трубы следует понимать в акустическом смысле. Давление на открытом конце трубы сохраняется постоянным и равным p_0 , т.е. возмущение давления $\bar{p} = 0$. На закрытом конце трубы скорость постоянная ($v_0 = \text{const}$), т.е. возмущение скорости $v = 0$. В частном случае конец трубы может быть гидравлически закрыт, тогда $v_0 = 0, v = 0$.

При входе в трубу и при выходе из трубы почти всегда происходит рассеяние энергии, что имеет принципиальное значение для анализа резонансных режимов и устойчивости движения.

На основании уравнения (13.6) можно установить, что в любом поперечном сечении потока жидкости соотношение между возмущением давления и возмущением скорости при колебаниях выражается через комплексное число. Поэтому для граничного сечения отношение

$\bar{p}(\xi, \tau)/v(\xi, \tau)$ можно представить в виде

$$\bar{p}(\xi, \tau)/v(\xi, \tau) = Z = M\tilde{\psi} + i\alpha. \quad (13.7)$$

Комплексное число Z (комплексное сопротивление) обычно называют граничным импедансом. По аналогии с электролинией можно считать, что вещественная часть этого числа характеризует "активное", а мнимая — "реактивное" сопротивление. В равенстве (13.7) $M\tilde{\psi}$ — коэффициент активного сопротивления, отнесенный к скорости потока, а α — коэффициент реактивного сопротивления. Иногда вместо комплексного сопротивления рассматривают обратную величину — комплексную проводимость Z^* . Тогда вместо соотношения (13.7) будем иметь

$$v(\xi, \tau)/\bar{p}(\xi, \tau) = Z^*.$$

Реактивное сопротивление или реактивная проводимость возникают, например, вследствие наличия на концах потока жидкости сосредоточенной упругости, обусловленной наличием сильфонов, или некоторых объемов парогазовой смеси во всасывающей части насоса. Получим решения уравнения (13.5) при разных граничных условиях.

13.4. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОЙ ТРУБЕ

Уравнение (13.5) решим методом Фурье. Функции $v(\xi, \tau)$ и $\bar{p}(\xi, \tau)$ представим в виде

$$v(\xi, \tau) = v(\xi)e^{ist}; \quad \bar{p}(\xi, \tau) = \bar{p}(\xi)e^{ist}, \quad (13.8)$$

где s — безразмерная частота колебаний.

Подставив выражения функций $v(\xi, \tau)$ и $\bar{p}(\xi, \tau)$ в уравнения (13.5) и (13.6) и выделив множитель e^{ist} , получим следующие уравнения для определения функций $v(\xi)$ и $\bar{p}(\xi)$:

$$(1 - M^2) \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} - is2M \frac{dv(\xi)}{d\xi} + s^2 v(\xi) = 0; \quad (13.9)$$

$$\bar{p}(\xi) = -Mv(\xi) - is \int v(\xi) d\xi. \quad (13.10)$$

Полагая

$$\varphi(\xi) = C e^{k\xi}, \quad (13.11)$$

из (13.9) находим

$$(1 - M^2)k^2 - is2Mk + s^2 = 0. \quad (13.12)$$

Разрешив это уравнение относительно k , получим

$$k_1 = \frac{is}{1 - M}; \quad k_2 = -\frac{is}{1 + M}. \quad (13.13)$$

Учитывая дополнительно соотношение (13.10), получим уравнения форм колебаний скорости $\varphi(\xi)$ и давление $p(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = C_1 e^{k_1 \xi} + C_2 e^{k_2 \xi}, \quad (13.14)$$

$$p(\xi) = C_2 e^{k_2 \xi} - C_1 e^{k_1 \xi}.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 могут быть определены из граничных условий.

На основании (13.14) скорость и давление на концах трубы можно вычислить по формулам

$$\varphi(0) = C_1 + C_2; \quad \varphi(1) = C_1 e^{k_1} + C_2 e^{k_2};$$

$$p(0) = C_2 - C_1; \quad p(1) = C_2 e^{k_2} - C_1 e^{k_1}.$$

Из этих формул получим соотношения между параметрами потока $\varphi(1)$, $p(1)$ в конце трубы и параметрами потока $\varphi(0)$, $p(0)$ в начале трубы:

$$\varphi(1) = \varphi(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} + e^{k_1}) + p(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} - e^{k_1}); \quad (13.15)$$

$$p(1) = \varphi(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} - e^{k_1}) + p(0) \frac{1}{2} (e^{k_2} + e^{k_1}).$$

Соотношения типа (13.15) по аналогии с электросхемами обычно называют уравнениями четырех полюсов. Эти уравнения удобны для определения давлений и скоростей потока на концах трубы,

когда нас не интересуют эти величины в промежуточных сечениях. Если известны любые две величины (два граничных условия), то из уравнений можно определить два неизвестных на концах трубы. Например, задавшись гармоническим воздействием на поток на одном из концов трубы, можно определить гармонические колебания потока на другом ее конце и получить выражение амплитудно-фазовой частотной характеристики.

Применим уравнение (13.15) для определения частот собственных колебаний потока жидкости в трубе. Рассмотрим несколько возможных граничных условий.

1. $p(0) = 0$, $\varphi(1) = 0$ — труба открыта с одного конца ($\xi = 0$) и закрыта с другого ($\xi = 1$).

Подставив эти условия в уравнения (13.15) и учитывая, что $e^{k_2} \neq 0$, получим характеристическое уравнение в виде

$$e^{k_1 - k_2} = -1. \quad (13.16)$$

Частота собственных колебаний, вообще говоря, является комплексным числом, поэтому положим

$$s = i\nu + \Omega, \quad (13.17)$$

где ν и Ω — вещественные числа.

С учетом выражений (13.13), (13.17) получим

$$k_1 - k_2 = -\frac{2\nu}{1 - M^2} + i\frac{2\Omega}{1 - M^2}.$$

Запишем уравнение (13.16) в тригонометрической форме, приравняв нулю отдельно вещественную и мнимую его части:

$$\exp\left(\frac{-2\nu}{1 - M^2}\right) \cos \frac{2\Omega}{1 - M^2} = -1; \quad \exp\left(\frac{-2\nu}{1 - M^2}\right) \sin \frac{2\Omega}{1 - M^2} = 0.$$

Поскольку $\exp\left(\frac{-2\nu}{1 - M^2}\right) > 0$, оба равенства будут выполняться одновременно, если

$$\nu = 0 \text{ и } \frac{2\Omega_n}{1 - M^2} = (2n - 1)\pi \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Собственные колебания потока идеальной жидкости в трубе являются гармоническими; безразмерные частоты этих колебаний вычисляются по формуле

$$s_n = \Omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2} (1 - M^2) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13.18)$$

размерная частота – по формуле

$$\omega_n = s_n \frac{a_0}{l} = \frac{(2n-1)\pi(1-M^2)a_0}{2l}.$$

Если $\varphi_0 = 0$ ($M = 0$), то вместо потока будет иметь место неподвижный столб жидкости, частота собственных колебаний которого выражается такой же формулой, как и частота собственных колебаний прямого однородного стержня.

Когда колебания возникают в потоке жидкости ($M \neq 0$), частота собственных колебаний потока меньше, чем неподвижного столба жидкости. Отличие будет тем больше, чем больше число M . Как известно, в сверхзвуковом потоке ($M > 1$) скорость движения частиц больше, чем скорость распространения упругой волны, поэтому при $M \geq 1$ собственные колебания существовать не могут.

Скорость движения топлива по трубам от баков к насосам в жидкостных ракетах невелика, так что число Маха $M \ll 1$. Для таких потоков множитель $(1 - M^2)$ практически не отличается от единицы, поэтому при малых M можно считать $M^2 \approx 0$.

2. $p(0) = 0$, $p(1) = 0$ – труба открыта с обоих концов.

Проделав аналогичные выкладки, получим

$$v = 0; \quad \frac{2\Omega}{1 - M^2} = 2\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Или, принимая во внимание только нетривиальные значения частот собственных колебаний, найдем

$$s_n = n(1 - M^2)\pi; \quad \omega_n = s_n(a_0/l) = n(1 - M^2)\pi(a_0/l). \quad (13.19)$$

Собственные колебания потока жидкости в трубе с открытыми концами можно сравнить с собственными колебаниями прямого упругого незакрепленного стержня. Нулевой частоте соответствует движение потока жидкости без колебаний, что имеет место при переходе потока на новую стационарную скорость течения при том же давлении.

3. $p(0) = -M\tilde{\psi}_1\varphi(0)$, $p(1) = M\tilde{\psi}_2\varphi(1)$ – труба имеет на концах решетки – гидравлические сопротивления.

Здесь $\tilde{\psi}_1$ – коэффициент сопротивления, отнесенный к скорости потока при входе в трубу; $\tilde{\psi}_2$ – то же при выходе из трубы (рис. 13.5).

Подставив эти условия в уравнения (13.15), получим характеристическое уравнение

$$(1 + \tilde{\psi}_1 M)(1 + \tilde{\psi}_2 M) \exp(k_1 - k_2) = (1 - \tilde{\psi}_1 M)(1 - \tilde{\psi}_2 M).$$

Разрешив его, найдем нетривиальные значения частот собственных колебаний

$$s_n = (1 - M^2)n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (13.20)$$

и безразмерный коэффициент затухания колебаний

$$v = \frac{1 - M^2}{2} \ln \frac{(1 + \tilde{\psi}_1 M)(1 + \tilde{\psi}_2 M)}{(1 - \tilde{\psi}_1 M)(1 - \tilde{\psi}_2 M)}. \quad (13.21)$$

Частота собственных колебаний потока жидкости в трубе с сосредоточенными сопротивлениями на концах такая же, как и в трубе с обоими открытыми концами без сопротивлений (13.19).

Так как $is = -v + i\Omega$, то собственные колебания потока жидкости в трубе с сопротивлениями на ее концах являются затухающими.

4. $p(0) = 0$, $\varphi(1) = Z_2^* p(1)$ – один конец трубы открыт, на другом конце

имеется комплексная проводимость $Z_2^* = 1/(\tilde{\psi}_2 M) + i\alpha_2^*$. Такое граничное условие, например, будет иметь место, если гидравлическая решетка упруго закреплена по отношению к потоку жидкости (рис. 13.6). Сосредоточенная упругость на конце трубы возникает из-за наличия парагаза или упругого сильфона.

Так как $\psi(1) = \frac{1}{\tilde{\psi}_2 M} \tilde{p}(1) + is \frac{F_T a_0 \rho_0}{kl} \tilde{p}(1)$, где k – коэффициент жесткости

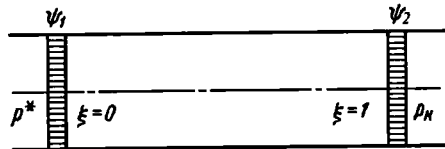


Рис. 13.5

пружины, а F_T, l – площадь проходного сечения и длина трубы, то для схемы, показанной на рис. 13.6, коэффициент $\alpha_2^* = s \frac{F_T a_0 \rho_0}{kl}$. Если вместо гидравлической решетки будет невесомый поршень, то $\tilde{\psi}_2 = \infty$ и $Z_2^* = is \frac{F_T a_0 \rho_0}{kl}$, если $\tilde{\psi}_2 \neq \infty$, а

$k = \infty$, то $Z_2^* = 1/(\tilde{\psi}_2 M)$.

Подставив выражения граничных условий в соотношения (13.15), получим следующее характеристическое уравнение:

$$\frac{1 + e^{k_1 - k_2}}{1 - e^{k_1 - k_2}} = Z_2^*.$$

Приняв s в виде (13.17) и положив $M^2 \approx 0$, приведем характеристическое уравнение к виду

$$\text{cth}(\nu - i\Omega) = Z_2^*.$$

Применяя это уравнение отдельно для действительных и мнимых частей, получим

$$\frac{\text{sh } \nu \text{ ch } \nu}{\text{sh}^2 \nu + \sin^2 \Omega} = \frac{1}{\tilde{\psi}_2 M}; \quad \frac{\cos \Omega \sin \Omega}{\text{sh}^2 \nu + \sin^2 \Omega} = \Omega \alpha_2^*. \quad (13.22)$$

Численным решением трансцендентных уравнений (13.22) можно определить безразмерные коэффициенты затухания и частоты собственных колебаний Ω_n .

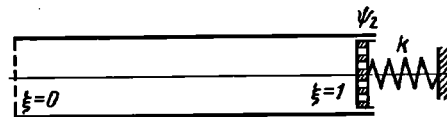


Рис. 13.6

Рассмотрим частный случай, когда $\tilde{\psi}_2 = \infty$ (невесомый поршень). Тогда из первого уравнения (13.22) следует, что $\nu = 0$ (затухание отсутствует). Из второго уравнения получаем

$$\text{tg } \Omega = 1/(\Omega \alpha_2^*).$$

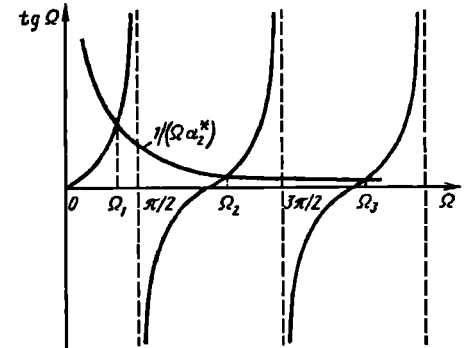


Рис. 13.7

Решение последнего уравнения графическим способом схематически показано на рис. 13.7. Точки пересечения тангенсоид $\text{tg } \Omega$ гиперболой $1/(\Omega \alpha_2^*)$ дают значения корней этого уравнения. Чем больше α_2^* (т.е. чем меньше коэффициент жесткости пружины k), тем ниже частоты собственных колебаний столба жидкости. Это имеет важное значение для анализа динамических свойств топливных магистралей, так как частота собственных колебаний первого тона столба жидкости, один конец которого опирается на "пружину", оказывается ниже частоты первого тона колебаний столба жидкости "без пружины".

Когда $\alpha_2^* = 0$ (т.е. $k = \infty$), то

$$\Omega_n = s_n = (2n - 1)\pi/2.$$

Этот результат уже был получен в уравнении (13.18) для собственных колебаний столба жидкости в трубе с одним открытым концом.

13.5. СТОЯЧИЕ И БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ

Формы собственных колебаний скорости $\psi(\xi)$ и давления $\tilde{p}(\xi)$ определяются из уравнений (13.14). Так как для трубы, закрытой с одного конца, $C_1 = C_2$, то на основании (13.14)

$$\psi_n(\xi) = C_1 (e^{k_1 \xi} + e^{k_2 \xi});$$

$$\tilde{p}_n(\xi) = C_1 (e^{k_2 \xi} - e^{k_1 \xi}).$$

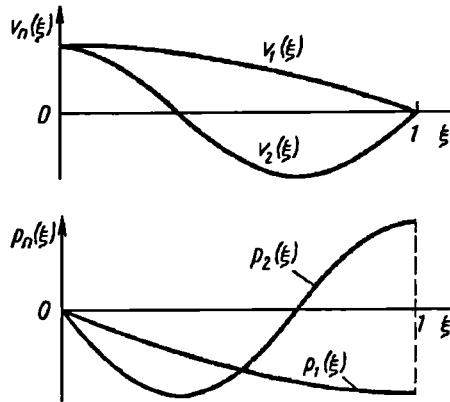


Рис. 13.8

Графики функций $v_n(\xi)$ и $p_n(\xi)$ для первых двух тонов собственных колебаний приведены на рис. 13.8. Форма собственных колебаний скорости $v_n(\xi)$ при $M = 0$ имеет такой же вид, как и форма собственных колебаний упругого стержня с одним закрепленным концом.

Формы собственных колебаний $v_n(\xi)$ и $p_n(\xi)$ характеризуются стоячими волнами, поскольку распределение амплитуд колебаний скорости и давления по длине в любой

момент времени остается одним и тем же.

Кроме стоячих волн иногда рассматривают бегущие волны, которые в нашей задаче характеризуют движение по трубе акустических импульсов $\tilde{u}_1(\xi, \tau)$ и $\tilde{u}_2(\xi, \tau)$:

$$\tilde{u}_1(\xi, \tau) = \frac{v(\xi, \tau) + \tilde{p}(\xi, \tau)}{2}; \quad \tilde{u}_2(\xi, \tau) = \frac{v(\xi, \tau) - \tilde{p}(\xi, \tau)}{2}. \quad (13.23)$$

Определим из этих равенств v и \tilde{p} и подставим их в уравнения (13.4). Затем, взяв сумму и разность полученных уравнений, выведем вместо (13.4) два следующих уравнения:

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + (1 + M) \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tau} + (1 - M) \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \xi} = 0.$$

Каждое из этих уравнений интегрируется отдельно. Применив метод Даламбера, решение первого уравнения представим в виде

$$\tilde{u}_1(\xi, \tau) = F_1[\xi - (1 + M)\tau],$$

где F_1 — произвольная дифференцируемая функция.

При соотношениях моментов времени τ и координат ξ , которые удовлетворяют условию

$$\xi - (1 + M)\tau = \xi_1 = \text{const},$$

величина $\tilde{u}_1(\xi, \tau)$ будет равна $F_1(\xi_1)$ и ее можно наглядно представить мгновенной фотографией волны. Рассмотрим движение "гребня" этой волны. Если в момент $\tau = 0$ гребень имел координату ξ_1 , то соответствующее ему сечение (в котором F_1 достигает максимума) будет перемещаться по закону

$$\xi = \xi_1 + (1 + M)\tau.$$

Рассуждая аналогично, для функции $\tilde{u}_2(\xi, \tau)$ найдем, что

$$\tilde{u}_2(\xi, \tau) = F_2[\xi - (M - 1)\tau], \quad \xi = \xi_2 + (M - 1)\tau.$$

Следовательно, найденные решения для $\tilde{u}_1(\xi, \tau)$ и $\tilde{u}_2(\xi, \tau)$ описывают движение волны \tilde{u}_1 и волны \tilde{u}_2 без изменения их формы в положительном направлении оси ξ со скоростями $(1 + M)$ и $(M - 1)$ соответственно. Это означает, что волна распространяется только в положительном направлении со скоростью $(1 + M)$, а волна \tilde{u}_2 — только в отрицательном направлении (против потока) со скоростью $(1 - M)$. Акустические импульсы движутся по потоку со скоростью звука плюс скорость потока, а против потока — со скоростью звука минус скорость потока. По этой

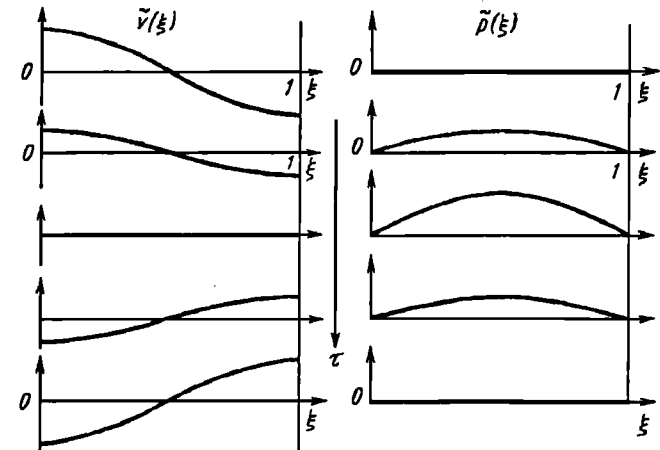


Рис. 13.9

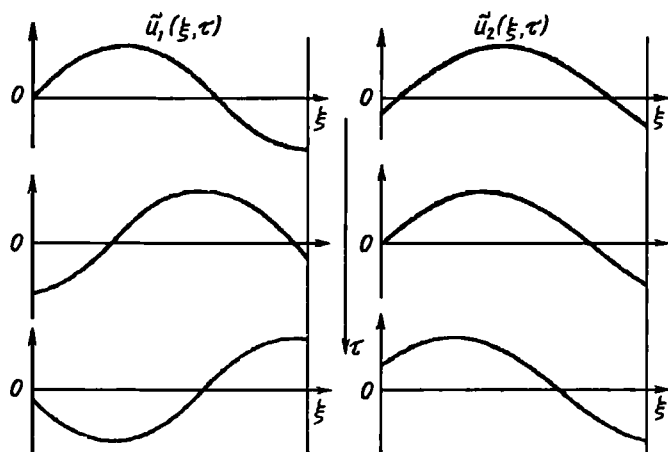


Рис. 13.10

причине \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 называются бегущими волнами. При движении вдоль оси ξ амплитуда (высота гребня) бегущих волн остается постоянной. Для иллюстрации сказанного на рис. 13.9 и 13.10 показаны стоячие (\tilde{v} , \tilde{p}) и бегущие (\tilde{u}_1 , \tilde{u}_2) волны в разные моменты времени τ .

Условия для функций \tilde{u}_1 и \tilde{u}_2 следующие. Для открытого конца трубы $\tilde{p} = 0$; на основании равенств (13.23) имеем $\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2 = 0$ или $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$. Для закрытого конца трубы $\tilde{v} = 0$. Из равенств (13.23) получим $\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = 0$ или $\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_2$.

Бегущая волна от открытого конца трубы "отражается" для движения в обратном направлении с тем же знаком ($\tilde{u}_1 = \tilde{u}_2$), от закрытого конца – с обратным знаком ($\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_2$). Если на конце трубы имеется активное сопротивление с коэффициентом $M \tilde{\psi}_2$, то на этом конце $\tilde{p}_2 = \tilde{\psi}_2 M \tilde{v}_2$. Из равенств (13.23) найдем

$$\tilde{u}_2 = \frac{1 - \tilde{\psi}_2 M}{1 + \tilde{\psi}_2 M} \tilde{u}_1 \quad \text{при} \quad \tilde{p}_2 = \tilde{\psi}_2 M \tilde{v}_2. \quad (13.24)$$

При наличии сопротивления закон отражения волн выражается формулой (13.24). Из формулы видно, что при $\tilde{\psi}_2 M < 1$ волна отражается как от открытого конца трубы, а при $\tilde{\psi}_2 M > 1$ – как от закрытого конца. Интенсивность отраженной волны при $\tilde{\psi}_2 < 1$ уменьшается (затухание увеличивается) с увеличением $\tilde{\psi}_2 M$. Когда $\tilde{\psi}_2 M = 1$, акустическая волна не отражается и система не имеет собственной частоты. В дальнейшем будем всегда считать, что $\tilde{\psi}_2 M < 1$.

13.6. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ОДНОРОДНОЙ ТРУБЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В гл. XII задача о вынужденных колебаниях корпуса ракеты решена двумя способами. По одному способу вынужденные колебания представляются в виде ряда по собственным функциям, по второму способу вынужденные колебания определяются без представления их в виде ряда. Вид решения, полученного по второму способу, удобнее для сопряжения колебаний корпуса ракеты с колебаниями потока жидкости в топливной магистрали. Поэтому вынужденные колебания жидкости в трубе будем определять по второму способу.

Вынужденные колебания жидкости в топливных магистралях могут возникнуть по следующим причинам: возмущение давления при входе жидкости в трубу вследствие колебаний дна бака, возмущение давления в камере двигателя, возмущение скорости жидкости на выходе из трубы вследствие перемещения насоса по отношению к потоку жидкости. Для сопряжения с корпусом и двигателем мы должны знать колебания скорости и давления жидкости на выходе из трубы в зависимости от возмущений, которые вызывают эти колебания.

Для определения вынужденных колебаний применим уравнения четырехполосника (13.15). Влиянием малых чисел M на распределение скорости и давления по длине трубы при вынужденных колебаниях пренебрежем, но влияние чисел M на границах трубы, где имеются гидравлические сопротивления, будем учитывать. Полагая в уравнениях (13.15) $M = 0$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{v}(1) &= \tilde{v}(0) \operatorname{ch} k + \tilde{p}(0) \operatorname{sh} k; \\ \tilde{p}(1) &= \tilde{v}(0) \operatorname{sh} k + \tilde{p}(0) \operatorname{ch} k, \end{aligned} \quad (13.25)$$

где

$$k = k_2 = -is.$$

Определим вынужденные колебания давления и скорости на выходе из трубы, вызванные изменением давления \bar{p}^* перед входом в трубу. Примем, что на входе в трубу и на выходе из трубы имеются комплексные сопротивления Z_1 и Z_2 соответственно. Тогда

$$\bar{p}(0) = \bar{p}^* - Z_1 \bar{v}(0); \quad (13.26)$$

$$\bar{v}(1) = Z_2^* \bar{p}(1), \quad (13.27)$$

где \bar{p}^* – возмущение давления перед входом в трубу; $\bar{p}(0)$, $\bar{v}(0)$, $\bar{p}(1)$, $\bar{v}(1)$ – возмущения давления и скорости потока в начале (после сопротивления) и в конце трубы (перед сопротивлением); Z_2^* – комплексная проводимость на выходе из трубы. Подставив величины $\bar{v}(1)$ из уравнения (13.27) и $\bar{v}(0)$ из уравнения (13.26) в уравнения (13.25) и исключив $\bar{v}(0)$, после несложных преобразований получим следующее выражение комплексного передаточного числа (или частотной характеристики):

$$W[\bar{p}_2, \bar{p}^*] = \frac{\bar{p}_2}{\bar{p}^*} = \frac{1}{(1 + Z_1 Z_2^*) \cos s + i(Z_1 + Z_2^*) \sin s}, \quad (13.28)$$

где $\bar{p}_2 = \bar{p}(1)$ – давление перед сопротивлением. Это комплексное передаточное число выражает зависящее от частоты s отношение вынужденных колебаний давления \bar{p}_2 в конце трубы к колебаниям давления \bar{p}^* перед входом в трубу.

Каждому значению частоты s (при вынужденных колебаниях s имеет вещественное значение) соответствует комплексное передаточное число. Совокупность комплексных чисел W при изменении частоты s в промежутке $0 \leq s \leq +\infty$ на комплексной плоскости Z образует годограф вектора W – амплитудно-фазовую частотную характеристику, которая дает полное представление о вынужденных гармонических колебаниях давления на выходном конце трубы.

Рассмотрим свойства амплитудно-фазовых характеристик в некоторых конкретных случаях. Пусть $Z_2 = 0$, $Z_1 = \tilde{\psi}_1 M$. Амплитудно-фазовая характеристика показана на рис. 13.11. Максимальное значение модуля вектора W , равное $1/(\tilde{\psi}_1 M)$, соответствует частотам s , которые равны частотам собственных колебаний потока жидкости в

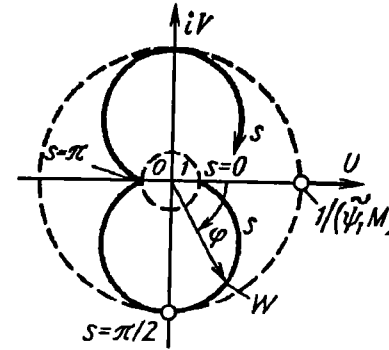


Рис. 13.11

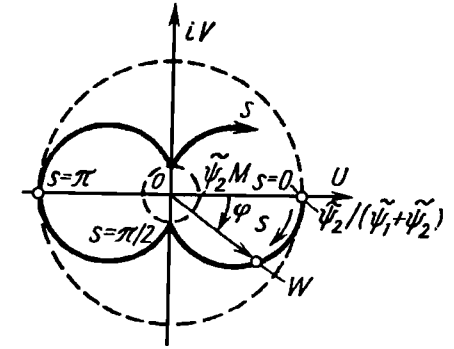


Рис. 13.12

трубе с одним открытым концом (13.18). С увеличением сопротивления $\tilde{\psi}_1 M$ максимальные значения модуля вектора W уменьшаются. Когда $s = s_1$, фазовое запаздывание $|\varphi| = \pi/2$, а если $s = s_2$, то $|\varphi| = 3\pi/2$.

Пусть теперь $Z_2^* = 1/(\tilde{\psi}_2 M)$, $Z_1 = \tilde{\psi}_1 M$. Амплитудно-фазовая характеристика $W[\bar{p}_2, \bar{p}^*]$ для этого случая показана на рис. 13.12. Максимальные значения модуля вектора $\tilde{\psi}_2/(\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2)$ соответствуют $s = 0, \pi, 2\pi, \dots$, т.е. частотам собственных колебаний столба жидкости в трубе, оба конца которой открыты.

Фазовое запаздывание при резонансе на частоте собственных колебаний первого тона $|\varphi| = \pi$, на частоте собственных колебаний второго тона $\varphi = 0$.

Для получения комплексного передаточного числа $W[\bar{v}_2, \bar{p}^*]$ воспользуемся уравнением (13.27). Будем иметь

$$W[\bar{v}_2, \bar{p}^*] = \frac{Z_2^*}{(1 + Z_1 Z_2^*) \cos s + i(Z_1 + Z_2^*) \sin s}. \quad (13.29)$$

Амплитудно-фазовая характеристика $W[\bar{v}_2, \bar{p}^*]$ для потока жидкости в трубе, открытой с обоих концов и имеющей на концах сопротивление и проводимость, соответственно равные $Z_1 = \tilde{\psi}_1 M$, $Z_2^* = 1/(\tilde{\psi}_2 M)$,

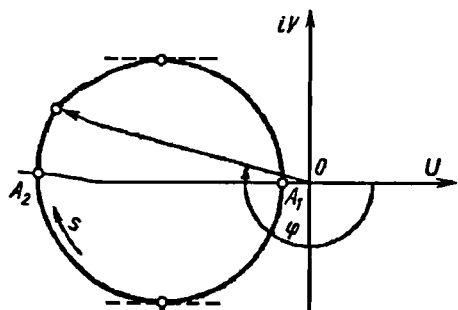


Рис. 13.13

имеет вид, показанный на рис. 13.12, и отличается от нее только масштабом.

Если на правом конце имеется упруго закрепленная гидравлическая решетка, то резонансные колебания будут возникать на частотах $\Omega_1, \Omega_2, \dots$, показанных на рис. 13.7.

Вынужденные колебания жидкости в трубе могут возникать также вследствие механических колебаний насоса относительно потока жидкости.

При механических колебаниях насоса в направлении оси ракеты граница потока при выходе из трубы совершает вынужденные колебания, поэтому граничные условия при $\xi = 1$ можно представить в виде

$$v(1) = v_n + Z_2^* \bar{p}(1), \quad (13.30)$$

где v_n — безразмерная скорость движения насоса. Подставляя выражение $v(1)$ из (13.30) в уравнения (13.25) и принимая на левом конце трубы $\bar{p}(0) = Z_1 v(0)$, получим комплексное передаточное число, выражающее зависимость давления на выходе из трубы от скорости движения насоса, в виде

$$W[\bar{p}_2, v_n] = \frac{Z_1 \cos s - i \sin s}{(1 - Z_1 Z_2^*) \cos s + i(Z_2^* - Z_1) \sin s}, \quad (13.31)$$

Амплитудно-фазовая характеристика $W[\bar{p}_2, v_n]$ при $Z_2^* = 0$ и $Z_1 = \tilde{\psi}_1 M$ показана на рис. 13.13 и представляет собой накладывающиеся одна на другую кривые.

Резонансные колебания возникают на частотах s_2 , которые равны частотам собственных колебаний столба жидкости в трубе с одним закрытым концом. Максимальная амплитуда вынужденных колебаний, отнесенная к амплитуде скорости механических колебаний насоса v_n :

$$(A_{\bar{p}_2 v_n})_{\max} = \frac{1}{\tilde{\psi}_1 M}; \quad s_2 = \frac{n_2 \pi}{2} \quad (n_2 = 1, 3, 5, \dots).$$

При этом запаздывание по фазе $\phi_{\bar{p}_2 v_n} = \pi$.

13.7. КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ПРЯМОЙ ТРУБЕ

Задача о колебаниях потока идеальной сжимаемой жидкости в длинной прямой трубе решена в разд. 13.2 и 13.3 в предположении, что стенки трубы жесткие. При жестких стенках форма поперечного сечения трубы для определения частот и форм колебаний жидкости не имеет значения, важно только то, чтобы она не изменялась по длине трубы. Такой вывод справедлив, конечно, и для однородных прямых стержней.

Результаты решения одномерной задачи можно распространить и на движение потока жидкости в упругой трубе. Впервые это было сделано Н.Е. Жуковским. Его идея заключается в том, что движение потока сжимаемой жидкости в длинной упругой трубе можно заменить движением сжимаемого потока (той же плотности, но с меньшим модулем сжатия) в жесткой трубе. При такой замене эквивалентный модуль сжатия жидкости будет меньше модуля сжатия жидкости вследствие упругости стенок трубы. Для трубы круглого поперечного сечения с постоянной толщиной стенки эквивалентный модуль сжатия жидкости можно найти довольно просто. Если считать трубу состоящей из ряда колец, нагруженных внутренним давлением, то модуль упругости столба жидкости E_1 , обусловливаемый упругостью стенок трубы, определяется по формуле (11.12)

$$E_1 = Eh/(2r_0),$$

где E — модуль упругости материала трубы; h, r_0 — толщина стенки и радиус трубы.

Эквивалентный модуль сжатия жидкости E_3 с учетом упругости стенок трубы может быть определен по формуле

$$E_3 = \frac{E_1 E_{\text{ж}}}{E_1 + E_{\text{ж}}} = E_{\text{ж}} \frac{1}{1 + (E_{\text{ж}}/E)(2r_0/h)},$$

где $E_{\text{ж}}$ — модуль сжатия жидкости.

Подставляя в эту формулу выражения для модулей сжатия в виде

$$E_{\text{ж}} = a_0^2 \rho_0 \quad \text{и} \quad E_s = a_s^2 \rho_0,$$

где a_s – эквивалентная скорость звука, получим

$$a_s = \frac{a_0}{\sqrt{1 + k_s^2}}; \quad k_s^2 = \frac{2\rho_0 a_0^2 r_0}{hE}. \quad (13.32)$$

Так как эквивалентный модуль сжатия жидкости меньше модуля сжатия той же жидкости, то и эквивалентная скорость звука будет меньше скорости звука в жидкости, т.е. $a_s < a_0$.

Для снижения частот собственных колебаний жидкости в трубах иногда вместо труб круглого поперечного сечения применяют трубы с поперечным сечением в виде эллипса. При изменении давления жидкости изменяется соотношение между размерами полуосей эллипса, вследствие чего площадь эллиптического поперечного сечения трубы изменяется больше, чем круглого поперечного сечения. Эквивалентный модуль сжатия жидкости и, следовательно, эквивалентная скорость звука в жидкости в упругой трубе эллиптического поперечного сечения меньше, чем в трубе круглого поперечного сечения при одинаковых толщине стенок и площади поперечного сечения, соответствующих невозмущенному давлению.

Эквивалентную скорость звука в жидкости в упругой трубе с поперечным сечением в виде эллипса можно определить по формуле

$$a_s = a_0 / \sqrt{1 + k_s^2},$$

где

$$k_s^2 = \frac{2\rho_0 a_0^2 r_0 (1 - \mu^2)}{hE} \left[1 + 3 \frac{(a - b)^2}{h^2} \right].$$

Здесь a, b – длины полуосей эллипса; μ – коэффициент Пуассона; h – толщина стенки трубы; r_0 – радиус круга, площадь которого равна площади эллипса.

Размерная частота собственных колебаний пропорциональна скорости звука, поэтому частота собственных колебаний потока сжимаемой жидкости в упругой трубе при прочих равных условиях будет меньше, чем в жесткой трубе.

С увеличением отношения радиуса трубы к ее длине, точнее – к длине упругой волны, энергия радиальных колебаний жидкости возрастает, поэтому одномерная постановка задачи может оказаться очень грубой. Приведем решение задачи с учетом радиальных колебаний жидкости в трубе.

Будем рассматривать малые осесимметричные колебания жидкости и стенок трубы, полагая трубу тонкостенной безмоментной цилиндрической оболочкой круглого поперечного сечения. Обозначим через $w(t)$ малое радиальное смещение стенки трубы, ρ_T , E – плотность и модуль упругости материала, h , r_T – толщину стенки и радиус трубы $p(x, r, t)$ – возмущение давления жидкости в трубе относительно давления p_0 невозмущенного режима. Силы, действующие на элементарный участок трубы, показаны на рис. 13.14. Применив второй закон Ньютона, получим дифференциальное уравнение движения трубы относительно радиального смещения $w(t)$ без учета изгибной жесткости

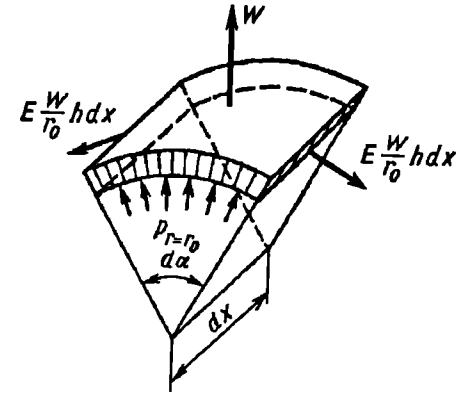


Рис. 13.14

$$\rho_T h r_T \frac{d^2 w}{dt^2} = r_T p(r_T) - \frac{E h}{r_T} w.$$

Разделим на $\rho_T h$, введем обозначение $\frac{E}{\rho_T r_T^2} = \omega_{об}^2$, где $\omega_{об}$ – парциальная

(т.е. без жидкости) частота радиальных колебаний обечайки трубы, и приведем уравнение радиальных осесимметричных колебаний трубы к виду

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + \omega_{об}^2 w = \frac{p(r_T)}{\rho_T h}. \quad (13.33)$$

Потенциал возмущений скорости идеальной сжимаемой жидкости $\varphi = \varphi(x, r, t)$ может быть определен из уравнения, которое при малой скорости потока ($v_0 \ll a_0$) в цилиндрических координатах имеет такой вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (13.34)$$

причем давление в любой точке жидкости выражается формулой

$$p(x, r, t) = -\rho_0 \partial \varphi / \partial t. \quad (13.35)$$

Если труба открыта с одного конца (допустим, слева) и закрыта с другого, то граничными условиями для функции φ будут следующие:

$$\partial \varphi / \partial t|_{x=0} = 0, \quad \partial \varphi / \partial x|_{x=l} = 0. \quad (13.36)$$

Для трубы, открытой с обоих концов:

$$\partial \varphi / \partial t|_{x=0} = \partial \varphi / \partial t|_{x=l} = 0. \quad (13.37)$$

Кроме того, на стенках трубы должно выполняться кинематическое условие сопряжения

$$\partial \varphi / \partial r|_{r=r_0} = dw/dt. \quad (13.38)$$

Таким образом, задача заключается в том, чтобы найти решение уравнения (13.34), удовлетворяющее граничным условиям (13.36) или (13.37), и найти решение уравнения (13.33), правая часть которого определяется через потенциал согласно формуле (13.35). При этом решения уравнений (13.33) и (13.34) должны дополнительно удовлетворять условию (13.38).

Решение уравнения (13.34) представим в виде

$$\varphi(x, r, t) = \sum_n H_n X_n(x) R_n(r) \exp(i \omega_n t), \quad (13.39)$$

где H_n – произвольная константа, ω_n – частоты собственных колебаний системы упругая труба – жидкость, $X_n(x)$, $R_n(r)$ – функции формы колебаний.

Радиальные колебания трубы также должны совершаться с частотами ω_n , поэтому функцию $w(t)$ представим в виде

$$w(t) = i \sum_n \frac{X_n(x)}{\omega_n} \exp(i \omega_n t). \quad (13.40)$$

Подставив выражение потенциала скоростей (13.39) в уравнение (13.34) и разделив переменные:

$$\frac{R_n'' + (1/r) R_n' + (\omega_n/a_0)^2 R_n}{R_n} = - \frac{X_n''}{X_n} = \text{const} = v_n^2,$$

получим следующие два уравнения для определения функций $X_n(x)$ и $R_n(r)$:

$$X_n'' + v_n^2 X_n = 0; \quad (13.41)$$

$$R_n'' + R_n'/r - \mu_n^2 R_n = 0, \quad (13.42)$$

где $\mu_n^2 = v_n^2 - (\omega_n/a_0)^2$, $X'' = d^2 X/dx^2$, $R' = dR/dr$, $R'' = d^2 R/dr^2$.

При любых граничных условиях нетривиальное решение уравнения (3.41) существует, если только $v_n^2 > 0$. Оно имеет вид

$$X_n = C_n \cos \alpha_n x/l + D_n \sin \alpha_n x/l,$$

где $\alpha_n = v_n l$ – безразмерные собственные числа продольных форм. Условию (13.36) удовлетворяют значения

$$\alpha_n = (2n - 1)\pi/2, \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (13.43)$$

условию (13.37) – значения

$$\alpha_n = n\pi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (13.44)$$

которые, как видно, совпадают с безразмерными частотами собственных колебаний сжимаемой жидкости в трубе с жесткими стенками.

Для технических приложений задачи наибольший интерес представляет спектр низших частот, отвечающий условию $\omega_n/a_0 < v_n$. В этом случае уравнение (13.42) является модифицированным уравнением Бесселя нулевого порядка и его общее решение имеет вид

$$R_n = A_n I_0(\mu_n r) + B_n K_0(\mu_n r).$$

Решаемая задача является осесимметричной, и решение должно быть ограниченным при $r = 0$. Следовательно, $B_n = 0$. Примем $A_n = 1,0$, тогда радиальные формы будут иметь вид $R_n = I_0(\mu_n r)$, где $I_0(\mu_n r)$ — модифицированная функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка.

Из условий сопряжения (13.38) находим постоянную ($r = r_T$)

$$H_n = R_n'(\mu_n r_T) = dI_0(\mu_n r)/dr = \mu_n I_1(\mu_n r_T), \quad (13.45)$$

Из дифференциального уравнения (13.33) следует соотношение

$$\frac{\omega_n^2 \rho_0}{\rho_T h} R_n(\mu_n r_T) + H_n(\omega_{об}^2 - \omega_n^2) = 0. \quad (13.46)$$

Введем безразмерные параметры $\lambda = r_T/l$, $\chi = \rho_T/\rho_0$, $\tilde{h} = h/r_T$, $z_{об} = \omega_{об} l/a_0 = \lambda a_T/a_0$ ($a_T^2 = E/\rho_T$) и $\beta_n = \mu_n r_T$ — собственные значения радиальных форм.

Из уравнения (13.46) с учетом равенства (13.42) следует характеристическое уравнение задачи:

$$f(\beta_n) = (\alpha_n^2 - (\lambda \beta_n)^2)[I_0(\beta_n) + \chi \tilde{h} \beta_n I_1(\beta_n)] - \chi \tilde{h} \beta_n I_1(\beta_n) z_{об}^2 = 0, \quad (13.47)$$

а безразмерные собственные частоты определяются по формуле

$$\Omega_n = \sqrt{\alpha_n^2 - (\lambda \beta_n)^2}. \quad (13.48)$$

Собственные числа β_n являются корнями уравнения (13.47) и их можно определить численным методом. Величины λ , χ , \tilde{h} , $z_{об}$ характеризуют параметры системы и в каждом конкретном случае известны, собственные числа α_n определяются в зависимости от граничных условий. Каждому значению α_n будет соответствовать только одно собственное число β_n . После того как оно будет определено из уравнения (13.47), можно по формуле (13.48) вычислить частоту собственных колебаний Ω_n .

Размерные ω_n и безразмерные Ω_n частоты связаны соотношением $\omega_n = \Omega_n a_0/l$. Заменив в этой формуле частоту Ω_n в соответствии с формулой (13.48), получим

$$\omega_n = \alpha_n \frac{a_0}{l} \sqrt{1 - (\lambda \beta_n / \alpha_n)^2}.$$

Назовем эквивалентной скоростью звука, соответствующей n -му тону колебаний, величину

$$a_{3n} = a_0 \sqrt{1 - k_n^2}, \quad (13.49)$$

где $k_n = \lambda \beta_n / \alpha_n$.

Тогда собственные частоты сжимаемой жидкости в упругой трубе можно вычислять по обычной формуле

$$\omega_n = \alpha_n (a_{3n}/l)$$

с той лишь разницей, что вместо скорости звука a_0 в невозмущенной жидкости нужно брать эквивалентную скорость $a_{3n} < a_0$. Эта скорость в отличие от скорости, определенной Н.Е. Жуковским [см. формулу (13.32)], зависит от номера тона колебаний.

В заключение приведем численный пример, из которого можно установить, какие количественные уточнения в эквивалентную скорость звука вносит формула (13.49) по сравнению с формулой (13.32). Возьмем трубу длиной $l = 20 \cdot 2r$ ($\lambda = 40$) с параметрами $\chi = 2,8$; $\tilde{h} = 0,05$; $a_T/a_0 = 3,586$. Тогда на основании формулы (13.32) $k = 1,11$; $a_3 = 0,69a_0$. Для трубы, закрытой с одного конца, собственные числа α_n определяются по формуле (13.43). При $n = 1; 5; 10; 20$ будем иметь соответственно $k_1^2 = 0,526$; $k_5^2 = 0,53$; $k_{10}^2 = 0,54$; $k_{20}^2 = 0,586$. Тогда $a_{31} = 0,69a_0$, $a_{35} = 0,68a_0$, $a_{310} = 0,65a_0$, $a_{320} = 0,55a_0$. Отличие от скорости, вычисленной по формуле Н.Е. Жуковского, составляет: для 1-го тона — 0 %, 5-го — 0,3 %, 10-го — 1,5 %, 20-го — 6,2 %.

Из сравнения приведенных численных расчетов видно, что даже для сравнительно короткой трубы эквивалентная скорость звука a_{3n} , вычисленная с учетом радиальных колебаний жидкости до десятого тона собственных колебаний включительно, практически не отличается от эквивалентной скорости, вычисленной по формуле Н.Е. Жуковского. Отсюда можно сделать вывод, что вполне допустимо рассматривать одномерные колебания жидкости в трубах, соединяющих баки с насосами. Но вместо скорости распространения звука a_0 в невозмущенном потоке в жесткой трубе нужно брать эквивалентную скорость звука a_3 , вычисленную по формуле Н.Е. Жуковского (13.32).

13.8. ВЛИЯНИЕ СИЛЬФОНОВ НА КОЛЕБАНИЯ ПОТОКА ЖИДКОСТИ

Для компенсации изменения длины трубопроводов и несоосности фланцев дна бака и насоса на одном или на обоих концах трубопроводов между баком и насосом устанавливаются сильфоны – гофрированные короткие участки трубы с очень малыми осевой и угловой жесткостями (рис. 13.15). Вследствие малой жесткости сильфон выполняет функцию компенсатора. Длина сильфона мала по сравнению с длиной трубы, поэтому волновыми процессами внутри сильфона пренебрежем, а давление в любой точке объема жидкости в сильфоне будем считать в заданный момент времени одинаковым. В схеме с трубой сильфон будем

считать сосредоточенным упругим звеном (сосредоточенной упругостью).

Изменение объема жидкости в сильфоне зависит от изменения l_c длины сильфона и изменения давления p_c внутри сильфона. В общем случае эта зависимость может быть нелинейной.

Пусть невозмущенному движению потока жидкости через сильфон соответствует

давление жидкости p_{c0} , длина сильфона l_{c0} , объем сильфона V_{c0} . При продольных колебаниях корпуса ракеты и жидкости в трубах давление p_c , длина сильфона l_c и объем сильфона V_c претерпевают малые изменения. Ограничиваясь учетом только главных линейных частей приращения названных величин, будем иметь

$$p_c = p_{c0} + dp_c; \quad l_c = l_{c0} + dl_c; \quad V_c = V_{c0} + dV_c.$$

Приращение объема можно определить по формуле

$$dV_c = (\partial V_c / \partial l_c) dl_c + (\partial V_c / \partial p_c) dp_c, \quad (13.50)$$

где производные $\partial V_c / \partial l_c$ и $\partial V_c / \partial p_c$ нужно вычислять при $p_c = p_{c0}$, $l = l_{c0}$.

Приращение объема сильфона происходит по двум причинам: 1) вследствие изменения геометрии сильфона от перемещения одного торца сильфона по отношению к другому; приращение объема по этой причине возрастает с увеличением отношения среднего диаметра

сильфона к диаметру трубы; 2) вследствие изменения давления при неизменном расстоянии между торцами.

Введем два параметра, характеризующие геометрические и упругие свойства сильфона:

$$\lambda_c = \frac{1}{F_T} \frac{\partial V_c}{\partial l_c} - 1; \quad r = \frac{1}{F_T} \frac{\partial V_c}{\partial p_c}; \quad f = r \frac{a_0^2 p_0}{l}, \quad (13.51)$$

где r , f – размерный и безразмерный коэффициенты проводимости сильфона; λ_c – безразмерная геометрическая характеристика сильфона.

Безразмерные коэффициенты f и λ_c удобны при учете влияния сильфона на граничные условия для потока жидкости в трубе. Покажем это применительно к рис. 13.15.

Продифференцируем равенство (13.50) по времени и разделим все члены равенства на площадь сечения трубы F_T :

$$\frac{1}{F_T} \frac{dV_c}{dt} = \frac{1}{F_T} \left(\frac{\partial V_c}{\partial l_c} \right) \frac{dl_c}{dt} + \frac{1}{F_T} \left(\frac{\partial V_c}{\partial p_c} \right) \frac{dp_c}{dt}.$$

Обозначив

$$\frac{1}{F_T} \frac{dV_c}{dt} = v_1; \quad \frac{dl_c}{dt} = v_c,$$

где v_1 – отклонение скорости жидкости при входе в сильфон; v_c – скорость перемещения правого торца сильфона (левый торец неподвижен), с учетом формул (13.51) получим

$$v_1 = (1 + \lambda_c) v_c + r \frac{dp_c}{dt}. \quad (13.52)$$

Полагая в этом уравнении величины v_1 , v_c , p_c изменяющимися по гармоническому закону с частотой s , получим следующую безразмерную зависимость отклонения скорости жидкости при выходе из трубы от скорости перемещения торца сильфона и от отклонения давления жидкости в сильфоне:

$$v_1 = (1 + \lambda_c) v_c + i s f p_c. \quad (13.53)$$

Скорость выхода жидкости из трубы представлена в виде трех составляющих: v_c – скорости перемещения торца сильфона (поток должен

заполнять внутреннюю часть сифона, имеющую диаметр трубы); $\lambda_c v_c$ – скорости, необходимой для заполнения изменения объема гофрированной A части сифона, обусловленного изменением расстояния между торцами; $is\bar{p}_c$ – скорости, необходимой для заполнения изменения объема части A сифона, обусловленного отклонением давления в сифоне. Равенство (13.53) справедливо, когда $v_c > 0$, $\bar{p}_c < 0$. При $v_c < 0$ и $\bar{p}_c < 0$ величина v_1 будет отрицательной, поэтому жидкость из сифона будет вытесняться в трубу.

Величину $is\bar{p}$ в уравнении (13.53) можно считать мнимой частью комплексной проводимости Z_2 .

Уравнение (13.52) будем в дальнейшем применять для учета влияния упругих свойств сифонов на динамику потока жидкости в расходных магистралях.

13.9. ВЛИЯНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ УЗЛОВ КРЕПЛЕНИЯ ТОПЛИВНЫХ МАГИСТРАЛЕЙ

Распространенным элементом конструкции расходных магистралей является узел, в котором поток жидкости претерпевает значительные изменения – поворот направления, изменение площади поперечного сечения, разделение на несколько ветвей (рис. 13.16). В этих условиях возникают дополнительные силы давления, под действием которых происходят упругие деформации трубопроводов и узлов крепления. При движении потока жидкости по криволинейному участку трубы возникает перераспределение давления и скорости в поперечном сечении. Однако, как показывает точный гидродинамический расчет, для случая движения идеальной жидкости в трубе, изогнутой под прямым углом, волновое сопротивление для акустической волны отличается от ρa_0 незначительно (меньше 0,5 %), так что этим отличием можно пренебречь. Возникает

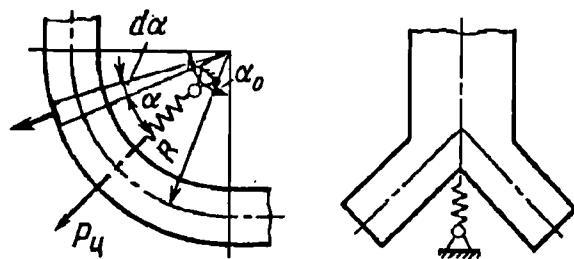


Рис. 13.16

также изменение величины центробежной силы жидкости. Это изменение на участке криволинейной трубы длиной ds , обусловленное изменением скорости потока, равно $2F_T \rho_0 (v_0/R) v ds$, где R – радиус закругления оси трубы. Если отклонение скорости на криволинейном участке принять равным v (среднее значение по сечению трубопровода), то изменение центробежной силы, действующей на весь криволинейный участок, можно определить довольно просто:

$$P_{ц} = 2 \frac{F_T \rho_0 v_0}{R} v \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} R \cos \alpha d\alpha = 4 F_T \rho_0 v_0 v \sin \frac{\alpha_0}{2},$$

угол α_0 – угол раствора криволинейного участка трубы.

Узел крепления трубы к корпусу обладает упругостью и поэтому при колебаниях силы $P_{ц}$ труба будет совершать колебания относительно корпуса. Колебания трубы будут возбуждаться также и колебаниями корпуса. Поэтому в динамическом уравнении для потока жидкости, движущегося по трубе, содержащей криволинейные участки, необходимо учесть силы инерции от переносного движения трубы. При этом уравнение (13.1) принимает вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} + j_{\xi} + v_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0,$$

где j_{ξ} – проекция на ось трубы вектора ускорения трубы относительно невозмущенного движения.

Кроме изменения давления, в результате колебаний трубы относительно корпуса изменяется объем расходной магистрали (главным образом за счет изменения объема сифонов), что необходимо учитывать при анализе колебаний потока жидкости.

Характерным для топливных магистралей является наличие коллектора для подачи топлива из одной расходной магистрали к нескольким двигателям. Схема коллектора показана на рис. 13.17. Расходная магистраль (площадь поперечного сечения до коллектора F_T) разветвляется на N ветвей, вес столба жидкости (от коллектора до свободной поверхности жидкости в баке) и сила, обусловленная измене-

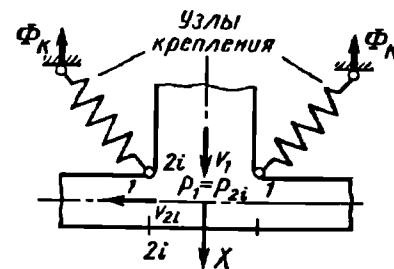


Рис. 13.17

нием направления потока, воспринимаются узлом крепления и передаются на корпус ракеты. Этот же узел крепления воспринимает дополнительные силы динамического давления, обусловленные колебаниями потока жидкости.

Составим уравнение расхода жидкости через коллектор. Примем коллектор жестким, а заполняющую его объем жидкость — несжимаемой. Тогда

$$v_1 = \frac{1}{F_T} \sum_{i=1}^N v_{2i} F_i + v_1(p_1) + v_1(\Phi_K).$$

Здесь v_1 — отклонение скорости жидкости в граничном сечении потока $l-l$; v_{2i} — отклонение скорости потока на выходе из коллектора в i -ю ветвь; F_i — площадь поперечного сечения i -й ветки; $v_1(p_1)$, $v_1(\Phi_K)$ — отклонение скорости потока в сечении $l-l$, вызванное перемещением коллектора под действием отклонения давления p_1 и колебания того сечения корпуса, к которому подвешен коллектор; $p_1 = p_{2i}$ — отклонение давления в коллекторе; Φ_K — перемещение сечения корпуса при колебаниях.

Величины $v_1(p_1)$ и $v_1(\Phi_K)$ определим с помощью уравнения движения коллектора как механической системы

$$m_K \ddot{x}_K = -k_K(x_K + \Phi_K) + F_T p_1, \quad (13.54)$$

где x_K — перемещение коллектора в направлении оси X , отсчитываемое от невозмущенного положения; k_K — коэффициент жесткости в направлении оси X узла крепления коллектора; m_K — масса коллектора и столба жидкости.

Так как граничное сечение $l-l$ находится в неизменном положении по отношению к невозмущенному положению трубы, то

$$v_1(p) = \dot{x}_K(p); \quad v_1(\Phi_K) = \dot{x}_K(\Phi_K).$$

Полагаем, что отклонение давления и колебания корпуса происходят по гармоническому закону с частотой ω :

$$p_1(t) = p_1 e^{i\omega t}; \quad \Phi_K(t) = \Phi_K e^{i\omega t}.$$

Тогда из уравнения (13.54) получим следующие выражения комплексных передаточных чисел:

$$W[v_1, p_1] = i\omega \frac{F_T}{m_K(\omega_K^2 - \omega^2)}; \quad (13.55)$$

$$W[v_1, \Phi_K] = -i\omega \frac{1}{1 - (\omega/\omega_K)^2},$$

в которых ω_K — частота собственных колебаний коллектора с жидкостью, $\omega_K^2 = k_K/m_K$.

Уравнение расхода жидкости через коллектор представим теперь в виде

$$v_1 = \sum_{i=1}^N W_i[v_1, v_{2i}] v_{2i} + W[v_1, p_1] p_1 + W[v_1, \Phi_K] \Phi_K, \quad (13.56)$$

где

$$W_i[v_1, v_{2i}] = F_i/F_T.$$

Уравнение (13.56) выражает связь скорости потока на выходе из расходной магистрали в коллектор со скоростями потока на входе в отдельные ветви и перемещением коллектора, обусловленным колебаниями корпуса ракеты и давления жидкости в коллекторе.

13.10. ВЛИЯНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Рассмотрим дополнительно характерные участки топливных магистралей с гидравлическим сопротивлением, гидравлические аккумуляторы.

Сосредоточенное гидравлическое сопротивление на рис. 13.18, а схематически изображено в виде решетки. Решетка обычно связана с каким-либо агрегатом (в том числе с трубой) и может совершать относительно потока колебания со скоростью v_p . Перепад давлений на решетке можно выразить формулой

$$p_{1в} - p_{2в} = \xi \rho_0 v_{в}^2 / 2,$$

где $p_{1в}$ — возмущенное давление

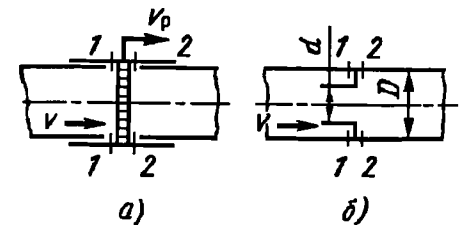


Рис. 13.18

жидкости перед решеткой; $p_{2в}$ – возмущенное давление жидкости после решетки; ξ – коэффициент сопротивления решетки; $v_{в}$ – возмущенная скорость потока жидкости через решетку; ρ_0 – плотность жидкости (полагаем постоянной). Произведя линеаризацию, получим

$$p_2 = p_1 - \psi M(v - v_p), \quad (13.57)$$

где

$$\psi = \xi \rho_0 a_0; \quad M = v_0/a_0;$$

p_1 – отклонение давления перед решеткой; p_2 – отклонение давления после решетки; v_0 – скорость невозмущенного потока; v – отклонение скорости потока; v_p – скорость колебаний решетки по отношению к невозмущенному потоку, при этом положительное направление v_p и v принято одинаковым.

Если вдоль потока колебания совершает гладкая труба постоянного диаметра, то эти колебания не будут вызывать возмущения потока.

Установленная в трубе (рис. 13.18, б) расходная шайба оказывает реактивное сопротивление движению потока. При движении через расходную шайбу в потоке создаются искривленные линии тока и возникают скорости, отличающиеся от скорости движения плоской волны в трубе без перегородок. В плоскости отверстия шайбы наибольшие скорости возникают у его краев. В дополнение к кинетической энергии плоской волны потока здесь создается добавочная кинетическая энергия, которая сообщается некоторой приведенной массе $m_{пр.ш}$, движущейся со средней скоростью в отверстии шайбы. На основании второго закона Ньютона

$$m_{пр.ш} \frac{dv_{ш}}{dt} = F_d(p_1 - p_2). \quad (13.58)$$

Здесь $v_{ш}$ – среднее отклонение скорости жидкости в отверстии шайбы; $F_d = \pi d^2/4$. Так как

$$v_{ш} = v(D/d)^2,$$

где v – отклонение средней скорости плоской волны потока перед шайбой (или после шайбы), то, заменив в (13.58) скорость $v_{ш}$ ее выражением через D/d , получим для гармонических колебаний с частотой ω

$$p_2 = p_1 - i\omega \alpha_{ш} v. \quad (13.59)$$

При этом коэффициент

$$\alpha_{ш} = \frac{m_{пр.ш}}{F_d} (D/d)^2.$$

Величину приведенной массы можно вычислить по формуле

$$m_{пр.ш} = \rho F_d^2 / df(d/D),$$

где функция Фока

$$f\left(\frac{d}{D}\right) = \frac{1}{1 - 1,47d/D + 0,47d^3/D^3}.$$

Если отношение d/D стремится к единице, то величина функции Фока будет стремиться к бесконечности, а величина приведенной массы – к нулю (в трубе без шайбы сосредоточенное реактивное сопротивление отсутствует).

Перепад давлений возникает также при выходе жидкости из бака в расходную магистраль. Здесь кроме активного сопротивления (воронкогаситель и др.) возникает еще и реактивное сопротивление, обуславливаемое разгоном некоторой приведенной массы жидкости. Отклонение перепада давлений при выходе жидкости из бака можно представить в виде

$$p_1 = p_6 - Z_6 v_1, \quad \text{где } Z_6 = \psi_6 M + i\omega \alpha_6. \quad (13.60)$$

Коэффициент α_6 , характеризующий реактивное сопротивление при выходе жидкости из бака, можно вычислить на основании формул

$$\alpha_6 = \frac{m_{пр.б}}{F_r}; \quad m_{пр.б} = \frac{\rho_0 F_r^2}{4r_0 f(r_0/R_1)};$$

$$f\left(\frac{r_0}{R_1}\right) = \frac{1}{1 - 1,47r_0/R_1 + 0,47r_0^3/R_1^3}.$$

Здесь p_1 – отклонение давления на входе в трубу; p_6 – отклонение давления на дне бака; r_0 – радиус трубы; R_1 – радиус бака. В выражении

для Z_6 величина $\psi_6 M$ представляет собой коэффициент активного сопротивления при выходе жидкости из бака.

13.11. ВЛИЯНИЕ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ АККУМУЛЯТОРОВ

На рис. 13.19 приведены схемы некоторых гидравлических аккумуляторов (гидравлических демпферов), применяемых для уменьшения частоты собственных колебаний жидкости в расходной магистрали. Схема 13.19, *а* применяется на магистрали горючего, схема 13.19, *б* – на магистрали окислителя ракеты "Титан-2", схема 13.19, *в* – на магистрали окислителя первой ступени одной из моделей ракеты "Сатурн-5".

Рассмотрим гидродинамические свойства аккумулятора с жесткими стенками, приняв количество и температуру газа в аккумуляторе постоянными, а жидкость несжимаемой. В объеме части трубы между сечениями 1–1 и 2–2 жидкость будем считать также несжимаемой.

Если в сечении 1–1 давление увеличится на величину p по сравнению со стационарным значением, то объем газа уменьшится и жидкость из трубы пойдет в аккумулятор. Отнесенная к площади поперечного сечения трубы F_T средняя скорость потока жидкости, идущей в аккумулятор,

$$v_{ак} = i\omega \frac{k_{ак}}{F_T} p_{ак}, \quad (13.61)$$

где $p_{ак}$ – отклонение давления газа в аккумуляторе; $k_{ак}$ – коэффициент пропорциональности между отклонениями объема и давления газа в аккумуляторе (коэффициент проводимости аккумулятора); ω – частота колебания.

Для схемы рис. 13.19, *а*

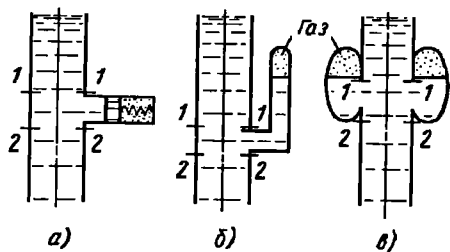


Рис. 13.19

$$v_{ак} = i\omega \frac{F_n^2}{k' F_T} p_n,$$

где F_n – площадь поршня; p_n – давление жидкости на поршень; k' – коэффициент пропорциональности между отклонением силы, действующей на поршень, и перемещением поршня.

Для разгона жидкости, поступающей в аккумулятор (рис. 13.19, *б*), требуется некоторый перепад давлений, так

что

$$F_{ак}(p_T - p_{ак}) = i\omega m_{пр}^* v_{ак}, \quad (13.62)$$

где p_T – отклонение давления жидкости в трубе перед аккумулятором; $F_{ак}$ – площадь "трубы" аккумулятора; $m_{пр}^*$ – приведенная масса жидкости. Заменяя в уравнении (13.61) величину $p_{ак}$ ее выражением из (13.62), получим

$$v_{ак} = i\omega \alpha_{ак}^* p_T, \quad (13.63)$$

где

$$\alpha_{ак}^* = \frac{k_{ак}/F_T}{1 - \omega^2 m_{пр}^* k_{ак}/(F_T F_{ак})}. \quad (13.64)$$

В формуле (13.64) произведение $m_{пр}^* k_{ак}/(F_T F_{ак})$ представляет собой величину, обратную квадрату частоты собственных колебаний $\omega_{ак}^2$ некоторого осциллятора, состоящего из приведенной массы жидкости и упругого элемента аккумулятора. В зависимости от соотношения частоты ω вынужденных колебаний жидкости в трубе и частоты $\omega_{ак}$ собственных колебаний аккумулятора коэффициент $\alpha_{ак}^*$, характеризующий реактивную проводимость аккумулятора, может быть положительным или отрицательным. При $\omega/\omega_{ак} \rightarrow 1$ коэффициент $\alpha_{ак}^* \rightarrow \infty$, т.е. в месте расположения гидравлического аккумулятора труба оказывается в акустическом смысле "открытой". Уравнение (13.63) и формулу (13.64) можно применять и к схеме рис. 13.19, *а*, положив в них $k_{ак} = F_T^2/k'$.

Если стенки гидравлического аккумулятора считать упругими, то при повышении давления объем жидкости в аккумуляторе увеличится не только за счет сжатия газа, но и за счет увеличения объема аккумулятора. Отнесенная к площади поперечного сечения трубы средняя скорость потока жидкости, поступающей в аккумулятор, $v_{ак}$ будет состоять из двух частей: одна часть обуславливается изменением объема газа, другая – изменением объема аккумулятора. Тогда вместо уравнения (13.61) получим

$$v_{ак} = i\omega \left(\frac{k_{ак}}{F_{\tau}} + \frac{k_{упр}}{F_{\tau}} \right) p_{ак}, \quad (13.65)$$

где коэффициент, характеризующий упругость стенок аккумулятора:

$$k_{упр} = (\partial V_{ак} / \partial p)_{p=p_0}.$$

Здесь $V_{ак}$ — объем всего аккумулятора, а p_0 — невозмущенное давление жидкости в аккумуляторе.

Заменяя в (13.65) отклонение давления $p_{ак}$ его выражением из (13.62), получим уравнение (13.63), в котором

$$\alpha_{ак}^* = \frac{(k_{ак} + k_{упр}) / F_{\tau}}{1 - \omega^2 m_{пр}^* (k_{ак} + k_{упр}) / (F_{\tau} F_{ак})}. \quad (13.66)$$

Коэффициент $m_{пр}^*$, входящий в формулы (13.64) и (13.66), зависит от конфигурации аккумулятора, массы жидкости в нем и площади поперечного сечения трубы, и в этих формулах для каждого аккумулятора он должен иметь свое значение.

Отклонение средней скорости жидкости v_1 в сечении 1-1 связано с отклонением средней скорости v_2 в сечении 2-2 уравнением неразрывности, которое при наличии гидравлического аккумулятора имеет вид

$$v_1 = v_2 + v_{ак}. \quad (13.67)$$

В первом приближении можно считать, что среднее давление жидкости в сечении 1-1 равно среднему давлению в сечении 2-2. В более точном приближении можно учесть перепад давлений, обусловленный изменением скорости той массы жидкости, которая поступает в аккумулятор.

13.12. КАВИТАЦИОННЫЕ ЯВЛЕНИЯ В НАСОСАХ ЖРД

Кавитация есть явление нарушения сплошности капельной жидкости, сопровождающееся образованием в ней полостей, заполненных паром, выделившимся из жидкости газом или их смесью.

Кавитационные образования (каверны) возникают в тех участках потока, где давление в жидкости становится меньше некоторого критического значения $p_{кр}$. Если давление снижается вследствие

возрастания местных скоростей потока жидкости, то кавитация называется гидродинамической.

Для характеристики степени развития кавитации используется параметр K , называемый числом кавитации.

Выражение для K получается из уравнения Бернулли, устанавливающего взаимосвязь между давлением и скоростью установившегося потока идеальной несжимаемой жидкости на бесконечности и в некотором сечении на обтекаемом теле, где давление и скорость равны соответственно p_1 и v_1 :

$$p_{\infty} + \frac{\rho v_{\infty}^2}{2} = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2},$$

или

$$\frac{p_{\infty} - p_1}{\rho v_{\infty}^2 / 2} = \left(\frac{v_1}{v_{\infty}} \right)^2 - 1,$$

где p_{∞} , v_{∞} — давление и скорость в невозмущенном набегающем потоке.

По мере увеличения скорости течения v_1 давление p_1 уменьшается и достигает значения $p_{кр}$. Поэтому

$$K = \frac{p_{\infty} - p_{кр}}{\rho v_{\infty}^2 / 2}.$$

Для жидкости, свободной от примесей, $p_{кр}$ равняется давлению ее насыщенных паров $p_{п}$.

Дальнейшее увеличение v_{∞} или уменьшение p_{∞} приведет к падению давления до критического значения и в других точках поверхности тела, вследствие чего зона кавитации увеличится в своих размерах. Число K , при котором возникает кавитация, называется начальным ($K_{нач}$).

Число кавитации, устанавливающее взаимосвязь между параметрами потока, определяющими возникновение и развитие кавитации, является критериальным параметром подобия при моделировании гидравлических процессов, связанных с кавитацией. Формы гидродинамической кавитации весьма разнообразны. В насосах ЖРД наблюдаются две формы гидродинамической кавитации: вихревая и струйная.

При вихревой кавитации каверны возникают в центре вихрей, где образуются области минимального давления жидкости. Каверны могут перемещаться вместе с потоком жидкости или оставаться неподвижными, как бы присоединенными к поверхности обтекаемого

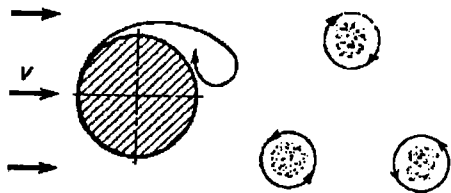


Рис. 13.20



Рис. 13.21

тела. Примером вихревой кавитации может служить кавитация в центральных частях обтекания цилиндра потоком жидкости (рис. 13.20).

Вихревая кавитация в зонах отрыва потока может являться предварительной стадией образования следующей формы кавитации — струйной, которую иногда называют пленочной. Для струйной кавитации характерным является существование ярко выраженной границы раздела фаз пар — жидкость (рис. 13.21).

Как показывают экспериментальные исследования, в насосах ЖРД кавитация имеет вихревую природу. Она может возникать в концевых вихрях, сходящихся с лопастей осевых насосов, в областях отрыва потока на лопастях как осевых, так и центробежных насосов, в потоке через радиальный зазор между лопастями и корпусом осевого насоса.

Кавитация в процессе развития проходит как бы три стадии: начальную, частичную и развитую (суперкавитацию).

В последовательно расположенных шнековом и центробежных насосах ЖРД кавитационное течение возникает в большей степени в межлопаточных каналах шнекового насоса.

Рассмотрим основные структурные составляющие этого течения.

На рис. 13.22 изображено сечение межлопаточного канала шнекового насоса. При большой величине давления на входе в шнековый насос обтекание лопастей насоса потоком вязкой несжимаемой жидкости с относительной скоростью w_1 при положительных углах атаки α сопровождается отрывом пограничного слоя с острой входной кромки на всасывающей стороне лопасти и образованием зоны отрыва. Вследствие турбулентного перемешивания с ядром потока высота зоны отрыва при продвижении по потоку постепенно уменьшается и при достаточно длинном межлопаточном канале полностью исчезает до выхода из него.

При снижении давления на входе в насос первые кавитационные образования возникают в центрах микровихрей, существующих в зоне отрыва пограничного слоя. Это характеризует начальную стадию кавитации.

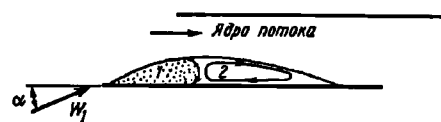


Рис. 13.22

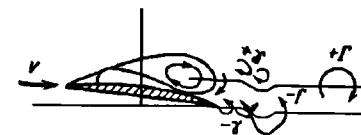


Рис. 13.23

Дальнейшее уменьшение входного давления приводит к слиянию отдельных кавитационных образований в единую каверну 1. Возникает струйное кавитационное течение. Каверна 1, которую часто называют профилей, начинается от входной кромки лопасти насоса и в некотором сечении замыкается с образованием вихря. Наряду с каверной существует и зона отрыва потока (след) 2, которая начинается в месте каверны. Каверна, замыкающаяся в пределах лопасти, определяет частичную стадию развития кавитации.

Для частичной кавитации свойственны две формы существования: квазистационарная и нестационарная. В случае квазистационарной формы течения размеры каверны при постоянных входных давлении и скорости потока практически не изменяются.

Нестационарная кавитация появляется при более низких входных давлениях и характеризуется периодическими колебаниями размеров каверны и следа. В некоторых случаях этот процесс сопровождается отрывом всего кавитационного образования и последующим уносом его вниз по потоку. Исследования явления нестационарной кавитации на изолированных гидропрофилях показали, что в этом случае за профилем существует течение типа вихревой дорожки Кармана (рис. 13.23), которая представляет собой систему свободных вихрей равной, но противоположной по направлению циркуляции Γ , расположенных как бы в шахматном порядке. Верхнюю цепочку вихрей составляют оторвавшиеся части кавитационного образования, ядра которых заполнены паром и газом, а нижнюю — вихри, возникающие около задней кромки профиля после отрыва каверны в процессе роста нового кавитационного образования. Кроме этой существует другая, более высокочастотная вихревая дорожка с циркуляцией $+\gamma$ и $-\gamma$, возникающая вследствие обтекания профиля с каверной, аналогичная вихревым дорожкам, образующимся за цилиндрическими телами. Вихри, составляющие эту цепочку, являются причиной возникновения обратной струйки, которая постепенно заполняет каверну и в момент касания ее верхней границы вызывает отрыв всей или значительной части каверны.

Кавитационное течение в межлопаточных каналах шнекового насоса, характеризующееся распространением каверны на всю длину лопасти и за ее пределы, называют обычно развитой или суперкавитацией.

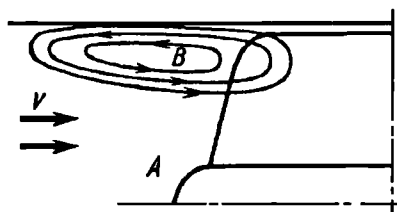


Рис. 13.24

Одной из наиболее характерных особенностей работы лопастных насосов на режимах, пониженных по сравнению с расчетным значением расходов, является возникновение на их входе обратных течений жидкости (обратных токов). Обратные токи условно можно представить как кольцевой вихрь, охватывающий все лопасти колеса насоса и делящий поток на

активный А и вихревой В (рис. 13.24). С уменьшением расхода область, занятая кольцевым вихрем, увеличивается. В режиме нулевого расхода кольцевой вихрь занимает все входное сечение. Обратные токи выносятся в подводящий трубопровод концевые вихри, сходящиеся с лопастей шнека.

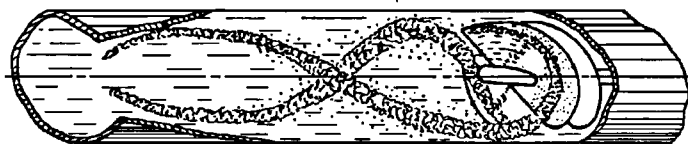


Рис. 13.25

Эти вихри являются областями развития кавитации в зоне обратных токов. Длина области обратных течений и, следовательно, кавитационной зоны в ней может быть весьма значительной и распространяться вверх по потоку на расстояние, равное нескольким диаметрам трубы (рис. 13.25).

13.13. ВЛИЯНИЕ КАВИТАЦИИ НА НАПОР НАСОСА

Основной результат развития кавитации в проточной части насоса заключается в снижении создаваемого им напора. Вследствие сложного характера течения среды в межлопаточных каналах как шнекового, так и центробежного насосов, механизм влияния кавитации на создаваемый им напор в настоящее время еще далеко не полностью исследован.

Снижение напора насоса условно можно объяснить двумя причинами: уменьшением теоретического напора и уменьшением гидравлического коэффициента полезного действия насоса.

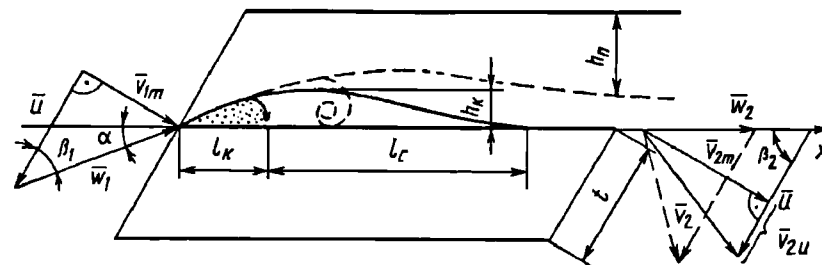


Рис. 13.26

Влияние кавитации на теоретический напор шнекового насоса удобно рассмотреть на примере плоской прямой решетки пластин, получаемой путем развертки цилиндрического сечения шнека постоянного шага t на плоскость (рис. 13.26).

Если абсолютная скорость потока перед решеткой имеет лишь осевую составляющую \bar{v}_{1m} , то теоретический напор такой решетки H_t определяется следующим образом:

$$H_t = \bar{u} \bar{v}_{2u} / g,$$

где \bar{u} – переносная скорость, создаваемая вращением вала насоса; $\bar{v}_{2u} = \bar{u} - \bar{v}_{2m} \operatorname{ctg} \beta_2$ – окружная составляющая абсолютной скорости на выходе из решетки; β_2 – угол выхода потока.

При некотором давлении в потоке перед решеткой на тыльной стороне профиля возникает каверна длиной l_k и высотой h_k , а также след длиной l_{cl} , образующийся при обтекании каверны потоком жидкости. Существование на лопаточном профиле каверны не оказывает влияния на теоретический напор решетки до тех пор, пока след заканчивается в пределах длины профиля. Начало падения H_t совпадает с моментом выхода следа за пределы решетки. Если рассматривать след как застойную зону, то его распространение за пределы решетки вызывает уменьшение ширины основного потока h_n и, как следствие, увеличение его относительной скорости \bar{w}_2 . Угол выхода потока остается неизменным, т.е. $\beta_2 = \operatorname{const}$. Увеличивается осевая \bar{v}_{2m} и уменьшается окружная \bar{v}_{2u} составляющие абсолютной скорости на выходе из решетки, теоретический напор H_t падает.

На рис. 13.27 схематично показаны зависимости теоретического напора H_t шнекового насоса от давления p_1 на входе в него. В случае

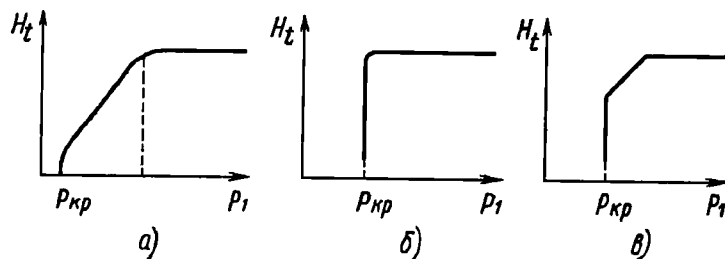


Рис. 13.27

решетки малой густоты каверна и след по мере уменьшения давления p_1 постепенно распространяются за пределы профиля. При некотором предельном значении $p_1 = p_{кр}$ за пределы профиля выходит не только след, но и каверна, давление за решеткой падает до давления p_n насыщенных паров жидкости при данной температуре. Дальнейшее понижение давления в системе становится невозможным (рис. 13.27, а). При большой густоте решетки уменьшение p_1 приводит к тому, что в некоторый момент постепенный рост каверны и следа вдоль профиля переходит в скачкообразное увеличение их размеров, сопровождающееся выходом каверны за пределы решетки (рис. 13.27, б). Для решеток средней густоты характер кавитационной характеристики определяется последовательным развитием этих двух процессов (рис. 13.27, в).

Визуальные наблюдения процесса развития кавитации в проточной части центробежного колеса позволили установить картину ее влияния на создаваемый насосом напор H в зависимости от величины кавитационного запаса напора Δh , определяемого как

$$\Delta h = \frac{(p_1^* - p_n)}{\gamma}, \quad \text{где } p_1^* = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

Характер зависимости H от кавитационного запаса Δh показан на рис. 13.28. При больших кавитационных запасах Δh (больших величинах p_1 , зона А) кавитация в проточной части насоса отсутствует. Заостренные входные кромки лопаток обтекаются потоком со срывом пограничного слоя и образованием на тыловой стороне застойной зоны. Кавитация в центре вихрей, заполняющих эту

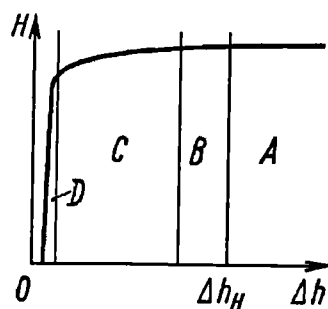


Рис. 13.28

зону, возникает при $\Delta h = \Delta h_n$ (начало зоны В). Область кавитации располагается в средней части межлопаточного канала на некотором удалении от входной кромки. Наличие этой кавитации практически не сказывается на величине напора H , поскольку расположенные в зоне отрыва вихри вызывают лишь незначительное изменение в характере течения основного потока.

Дальнейшее снижение кавитационного запаса – зона С обуславливает возникновение в проточной части центробежного насоса явления нестационарной кавитации, приводящей к некоторому уменьшению создаваемого им напора.

По мере снижения величины кавитационного запаса интенсивность нестационарной кавитации падает, и при некотором значении Δh отрыв каверны прекращается и на лопасти образуется неподвижная относительно нее каверна с вихревым замыканием – зона D. Дальнейшее уменьшение Δh вызывает увеличение длины каверны, что сопровождается сильным изменением кинематики потока на выходе из рабочего колеса и, как следствие, значительным падением напора насоса.

13.14. ВЛИЯНИЕ КАВИТАЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НАСОСА

Существование в проточных каналах насоса кавитационных явлений приводит к изменению создаваемого им напора и обуславливает различие в колебаниях расхода жидкости на входе в насос и выходе из него.

Для получения количественных соотношений составим уравнения баланса энергии и массы жидкости в объеме, ограниченном сечениями 1_n-1_n и 2_n-2_n (рис. 13.29). Первое из этих уравнений имеет вид

$$\frac{p_{1n}^*}{\gamma_1} + \frac{v_{1n}^{*2}}{2g} + H^* = \frac{p_{2n}^*}{\gamma} + \frac{v_{2n}^{*2}}{2g}, \quad (13.68)$$

где H^* – напор насоса; p_{1n}^* , v_{1n}^* , p_{2n}^* , v_{2n}^* – давления и скорости жидкости в сечениях 1_n-1_n и 2_n-2_n соответственно.

Принимая $\gamma_{1n} = \gamma_{2n} = \gamma_0 = \text{const}$, после линейризации уравнения (13.68) получим

$$p_{1n} + \rho_0 v_{1n0} v_{1n} + \gamma_0 H = p_{2n} + \rho_0 v_{2n0} v_{2n}, \quad (13.69)$$

где v_{1n0} , v_{2n0} – скорости в установившемся режиме; p_{1n} , p_{2n} , v_{1n} , v_{2n} , H – отклонения давлений, скоростей, напора насоса.

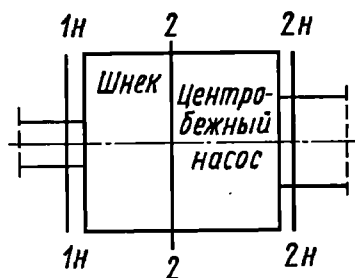


Рис. 13.29

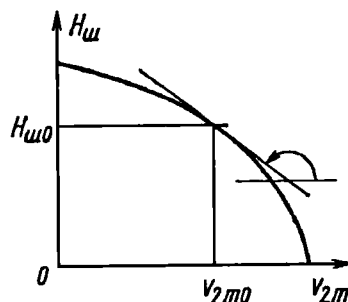


Рис. 13.30

Отклонение напора насоса представим в виде суммы отклонения напоров шнекового $H_{ш.н}$ и центробежного $H_{ц.н}$ насосов:

$$H = H_{ш.н} + H_{ц.н}. \quad (13.70)$$

Отклонение напора $H_{ш.н}$ зависит от отклонения расхода, т.е. от отклонения скорости v_{2m} на выходе из насоса и давления $p_{1н}$ перед входом в насос. Если пренебречь изменением скорости вращения вала насоса и инерционными свойствами заполняющей его среды, то при постоянном давлении $p_{1н}$ зависимость отклонения напора шнекового насоса от отклонения скорости v_{2m} может быть определена с помощью напорной характеристики (рис. 13.30). Будем иметь

$$H_{ш.н} = k_{шv} v_{2m}, \quad k_{шv} = \partial H_{ш.н} / \partial v_{2m} |_{v_{2m0}}. \quad (13.71)$$

Здесь $k_{шv}$ — тангенс угла наклона касательной к напорной характеристике шнекового насоса, которая определяется экспериментальным или расчетным путем; v_{2m} — отклонение осевой составляющей абсолютной скорости на выходе из шнека в сечении 2_н–2_н.

Экспериментальные исследования показывают, что отклонение напора шнекового насоса при постоянном расходе от изменения входного давления $p_{1н}$ при частичной кавитации приближенно может быть выражено уравнением аperiodического звена с запаздыванием:

$$T_1 \frac{dH_{ш.н}}{dt} + H_{ш.н} = k_{шp} p_{1н} (t - \tau_3), \quad (13.72)$$

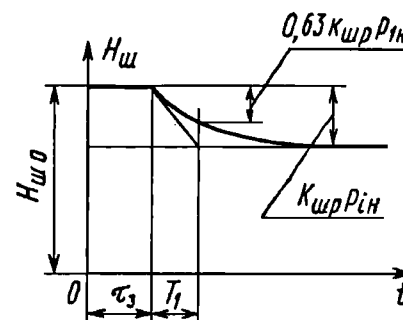


Рис. 13.31

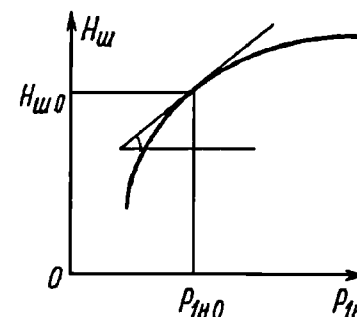


Рис. 13.32

где T_1 — постоянная времени; τ_3 — время запаздывания, обусловленное конечной скоростью протекания процессов вихреобразования и массопереноса в следе (рис. 13.31); $k_{шp} = (\partial H_{ш.н} / \partial p_{1н}) |_{p_{1н0}}$ — тангенс угла наклона касательной к кавитационной характеристике насоса, определяемой экспериментально (рис. 13.32).

При одновременном изменении давления перед входом в насос и расхода жидкости на его выходе по гармоническому закону выражение для определения создаваемого шнековым насосом напора на основании уравнений (13.71) и (13.72) будет иметь следующий вид:

$$H_{ш} = k_{шv} v_{2m} + \frac{k_{шv} e^{-i\omega\tau_3}}{1 + i\omega T_1} p_{1н}. \quad (13.73)$$

Наличие перед центробежным насосом шнекового насоса приводит к тому, что центробежный насос вплоть до режима кавитационного срыва работает при практическом отсутствии кавитации в его проточных каналах. В силу этого выражение для $H_{ц.н}$ будет иметь такой вид:

$$H_{ц.н} = k_{цg} G_{2н} = k_{цg} F_{2н} v_{2н}, \quad (13.74)$$

где $k_{цg} = (\partial H_{ц.н} / \partial G_{2н}) |_{G_{2н0}}$ — тангенс угла наклона касательной к напорной характеристике центробежного насоса, которая определяется экспериментальным или расчетным путем; $F_{2н}$ — площадь проходного сечения напорного трубопровода; $v_{2н}$ — отклонение скорости жидкости в сечении

$2_H - 2_H^*$

Уравнение баланса массы в объеме, ограниченном этими сечениями, запишем в следующей форме:

$$dQ^*/dt = \rho_0(F_{1H}v_{1H}^* - F_{2H}v_{2H}^*). \quad (13.75)$$

Здесь Q^* – масса среды, заполняющей выделенный объем; F_{1H} – площадь проходного сечения расходного трубопровода. Считаем, что в сечениях $1_H - 1_H$ и $2_H - 2_H$ скорости имеют лишь осевые составляющие.

Из уравнения (13.75) получим уравнение для отклонений

$$dQ/dt = \rho_0(F_{1H}v_{1H} - F_{2H}v_{2H}). \quad (13.76)$$

Будем приближенно считать, что отклонение массы среды Q пропорционально отклонению объема жидкости $V_{ж}$ между сечениями $1_H - 1_H$ и $2_H - 2_H$, т.е. $Q = \rho_0 V_{ж}$. Так как $V_{ж} = -V_{пг}$, где $V_{пг}$ – отклонение объема пара газа, которое принимаем пропорциональным отклонению давления, то отклонение Q можно представить в следующей форме:

$$Q = -\rho_0 \delta_{эф} p_{1H}; \quad \delta_{эф} = \partial V_{пг} / \partial p_{1H} |_{p_{1H0}}. \quad (13.77)$$

где $\delta_{эф}$ – эффективная податливость среды в объеме проточной части насоса. С увеличением давления p_{1H} объем пара газа $V_{пг}$ уменьшается, поэтому $\delta_{эф} < 0$.

Отсутствие кавитации в объеме проточной части центробежного насоса приводит к тому, что

$$F_{ш} v_{2ш} = F_{2H} v_{2H}. \quad (13.78)$$

Отклонение скорости на выходе из насоса v_{2H} связано с изменением давления p_{2H} через импеданс сечения $Z_{2H}(\omega)$, зависящий от характеристик напорных трубопроводов, ЖГГ, камеры сгорания, причем $p_{2H} = Z_{2H}(\omega) v_{2H}$. Из системы уравнений (13.69) – (13.74) и (13.76) – (13.78) найдем выражения для импеданса $Z_{1H}[p_{1H}, v_{1H}]$ на входе в насос и передаточной функции $W[p_{2H}, p_{1H}]$ насоса. Будем иметь

$$Z_{1H}[p_{1H}, v_{1H}] =$$

$$= \frac{F_{1H}(Z_{2H} + \rho_0 v_{2H0}) - \rho_0 v_{1H0} F_{2H} - F_{1H} F_{2H} \gamma_0 \left(k_{цГ} + \frac{k_{шv}}{F_{ш}} \right)}{F_{2H} - i\omega \delta_{эф} \left[\gamma_0 F_{2H} \left(\frac{k_{шv}}{F_{ш}} + k_{цГ} \right) + Z_{2H} + \rho_0 v_{2H0} \right] + \frac{\gamma_0 F_{2H} k_{шp} e^{-i\omega \tau_1}}{1 + i\omega T_1}}. \quad (13.79)$$

$$W[p_{2H}, p_{1H}] =$$

$$= \frac{1 - \frac{i\omega \rho_0 v_{1H0} \delta_{эф}}{F_{1H}} + \frac{\gamma_0 k_{шp} e^{-i\omega \tau_1}}{1 + i\omega T_1}}{1 + \frac{F_{1H} \rho_0 v_{2H0} \gamma_0 F_{1H} F_{2H} \left(k_{цГ} + \frac{k_{шv}}{F_{ш}} \right) - \rho_0 v_{1H0} F_{2H}}{F_{1H} Z_{2H}}}. \quad (13.80)$$

Знание входного импеданса насоса $Z_{1H}[p_{1H}, v_{1H}]$ необходимо для определения динамических характеристик топливных магистралей. Наличие в проточной части шнекового насоса кавитационных образований приводит к тому, что даже в случае, когда импеданс нагрузки Z_{2H} является действительной величиной, входной импеданс насоса Z_{1H} становится величиной комплексной.

Насос в топливной магистрали можно рассматривать как источник энергии – усилительное апериодическое звено с запаздыванием (13.72). Будучи подсоединен к расходной магистрали он образует с последней замкнутую систему, которая в некотором диапазоне частот может быть неустойчивой. Этот диапазон частот зависит от соотношения периода собственных колебаний потока жидкости в магистрали и времени запаздывания τ_3 .

Поскольку ТНА в большинстве конструкций образует единый агрегат с камерой сгорания и другими устройствами ЖРД, то динамические свойства ЖРД обычно выражают передаточными функциями вида $W[p_k, p_{1H}]$, где p_k, p_{1H} – отклонения давлений в камере сгорания и перед насосом. В таком случае передаточная функция $W[p_{2H}, p_{1H}]$ входит в состав передаточной функции $W[p_k, p_{1H}]$. Однако, если передаточная функция $W[p_k, p_{1H}]$ получена без учета кавитации в насосе, то выражения (13.79) и (13.80) можно использовать как бы для введения поправок в функцию $W[p_k, p_{1H}]$. Эти поправки несколько изменяют динамический коэффициент усиления ЖРД, а главное – изменяют сдвиг по фазе между отклонениями

давлений p_k и $p_{1н}$. Эти поправки изменяют также выражение импеданса $Z_{1н}[p_{1н}, v_{1н}]$ на выходе из трубы, что окажет существенное влияние на снижение частоты собственных колебаний потока жидкости в трубе.

13.15. ВЛИЯНИЕ КАВИТАЦИИ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОПЛИВНОЙ МАГИСТРАЛИ

Основные особенности, вносимые в динамику топливной магистрали кавитацией в шнековом насосе, состоят в уменьшении собственных частот колебаний жидкости в топливной магистрали, изменении фазовых соотношений между колебаниями давления и скорости жидкости в различных ее сечениях, в возможности возникновения неустойчивости в системе "топливная магистраль – шнекоцентробежный насос".

Количественная оценка этих особенностей связана с определением эффективной податливости среды в объеме проточной части шнекового насоса δ_3 и времени запаздывания τ_3 , входящих в выражения (13.79), (13.80).

Влияние кавитации на динамические характеристики топливной магистрали удобно проиллюстрировать на примере тех режимов работы насоса, при которых кавитационный след находится в пределах его проточных каналов. Тогда $k_{шр} = 0$ и формула для входной проводимости насоса

$$Z_{1н}^* = \frac{1}{\tilde{\psi}_2 M} + i\alpha_2^* \quad (13.81)$$

согласно выражению (13.79) будет иметь следующие выражения для $\tilde{\psi}_2$ и α_2^* :

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{F_{1н}(Z_{2н} + \rho_0 v_{2н0}) - \rho_0 v_{1н0} F_{2н} - F_{1н} F_{2н} \gamma_0 (k_{цГ} + k_{шв}/F_{1н})}{\rho_0 v_{1н0} F_{2н}}; \quad (13.82)$$

$$\alpha_2^* = -\frac{\omega \delta_3 a_0 \rho_0 [Z_{2н} + \rho_0 v_{2н0} - \gamma_0 F_{2н} (k_{шв}/F_{1н} + k_{цГ})]}{F_{1н}(Z_{2н} + \rho_0 v_{2н0}) - \rho_0 v_{1н0} F_{2н} - F_{1н} F_{2н} \gamma_0 (k_{цГ} + k_{шв}/F_{1н})};$$

$$M = v_{1н0}/a_0.$$

Анализ влияния граничного условия с комплексной проводимостью вида $Z_{1н}^*$ на собственные частоты колебаний жидкости в топливной магистрали проведен в примере 4 разд. 13.4.

На рис. 13.33 представлена построенная с использованием уравнения (13.28) амплитудно-фазовая частотная характеристика некоторой топливной магистрали, граничное условие на входе в которую эквивалентно акустически открытому концу, а на выходе может быть записано в виде формулы (13.27)

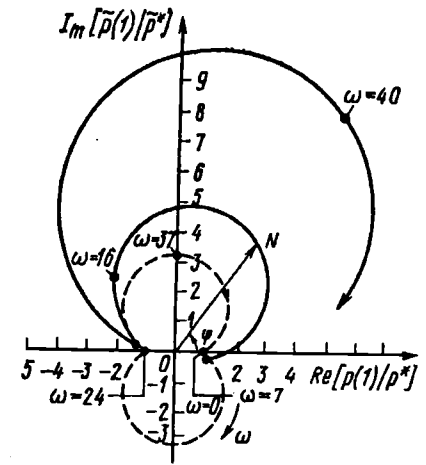


Рис. 13.33

$$\varphi(1) = Z_{1н}^* \tilde{p}(1),$$

где $Z_{1н}^*$ – входная проводимость кавитирующего шнекоцентробежного насоса, определяемая из выражений (13.81), (13.82).

Начало кривой при $\omega = 0$ находится в точке с координатами (1; 0). В рассматриваемом примере при увеличении частоты от 0 до 7 Гц вектор ON вращается по часовой стрелке, при дальнейшем увеличении ω (до 24 Гц) меняет направление своего вращения на обратное, а затем с увеличением ω вновь начинает вращаться по часовой стрелке.

На рисунке пунктиром для сравнения показана амплитудно-фазовая частотная характеристика этой же системы в случае бескавитационной работы шнекоцентробежного насоса. Из сравнения амплитудно-фазовых характеристик видно, какое большое влияние на динамику топливной магистрали оказывает кавитация в шнекоцентробежном насосе.

13.16. ФОРМИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ БЛОК-СХЕМ ТОПЛИВНЫХ МАГИСТРАЛЕЙ

Для изображения динамической блок-схемы уравнения четырехполосника (13.25) представим в виде

$$\bar{p}_2 = \bar{v}_2 \operatorname{th} k + p_1 \frac{1}{\operatorname{ch} k}; \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_2 \operatorname{ch} k - \bar{p}_2 \operatorname{sh} k, \quad (13.83)$$

где \bar{p}_1, \bar{v}_1 — отклонения давления и скорости на входе в трубу; \bar{p}_2, \bar{v}_2 — отклонения давления и скорости на выходе из трубы.

Расходная магистраль обычно имеет сложную структуру, поэтому сопрягать ее элементы в общую блок-схему удобно по размерным отклонениям параметров потока

$$p = a_0^2 \rho_0 \bar{p}; \quad v = a_0 \bar{v}$$

и размерной частоте колебаний

$$\omega = s(a_0/l).$$

Для размерных отклонений параметров потока уравнения (13.83) запишем через передаточные функции:

$$\begin{aligned} p_2 &= W[p_2, p_1]p_1 + W[p_2, v_2]v_2; \\ v_1 &= W[v_1, p_2]p_2 + W[v_1, v_2]v_2, \end{aligned} \quad (13.84)$$

где

$$W[p_2, p_1] = \frac{1}{\operatorname{ch}(\omega l/a_0)}; \quad W[p_2, v_2] = -ia_0 \rho_0 \operatorname{tg}(\omega l/a_0);$$

$$W[v_1, p_2] = i \frac{1}{a_0 \rho_0} \sin(\omega l/a_0); \quad W[v_1, v_2] = \operatorname{ch} \omega \frac{l}{a_0}.$$

Динамическая блок-схема четырехполосника, выражающего зависимость между параметрами потока на входе в трубу и на выходе из нее, на основании уравнений (13.84) имеет вид, показанный на рис. 13.34.

Гидродинамические свойства сиффона, встроенного в магистраль, при условии, что давление жидкости в любой точке объема сиффона одинаково, выражаются уравнением (13.52). При размерных отклонениях параметров будем иметь

$$p_2 = p_1; \quad v_1 = W[v_1, p_2]p_2 + W[v_1, \Phi_c]\Phi_c, \quad (13.85)$$

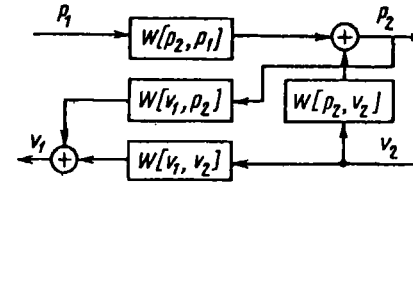


Рис. 13.34

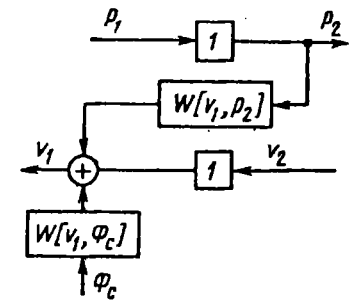


Рис. 13.35

где $W[v_1, p_2] = i\omega r$; $W(v_1, \Phi_c) = i\omega(1 + \lambda_c)$;

v_1 — отклонение скорости потока на входе в сиффон; p_1, p_2 — отклонение давления жидкости на входе в сиффон и выходе из него; Φ_c — амплитуда колебаний выходного сечения сиффона. Динамическая блок-схема сиффона показана на рис. 13.35.

Соотношение между параметрами потока, проходящего через сосредоточенное гидравлическое сопротивление типа решетки (см. рис. 13.18, а), определяется по уравнению (13.57), которое представим в таком виде:

$$p_2 = p_1 + W[p_2, v_1]v_1 + W[p_2, \Phi_p]\Phi_p \quad (v_1 = v_2), \quad (13.86)$$

где

$$W[p_2, v_1] = -\psi M; \quad W[p_2, \Phi_p] = i\omega \psi M;$$

Φ_p — амплитуда колебаний решетки по отношению к потоку. Динамическая блок-схема, соответствующая уравнению (13.86), приведена на рис. 13.36, а.

Динамическую блок-схему расходной шайбы можно построить по уравнениям

$$p_2 = p_1 + W[p_2, v_1]v_1; \quad v_1 = v_2, \quad (13.87)$$

где

$$W[p_2, v_1] = -i\omega \alpha_m;$$

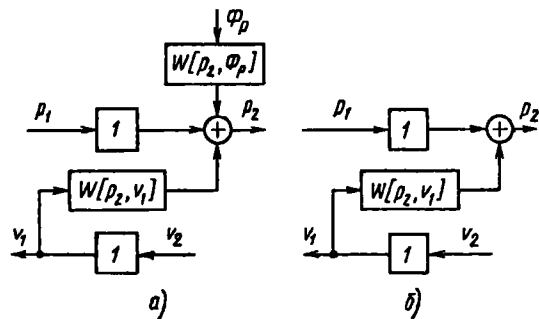


Рис. 13.36

p_1, p_2, v_1, v_2 — отклонение среднего давления и средней скорости до шайбы и после шайбы (см. рис. 13.35). Такова же блок-схема и для определения перепада давления при выходе жидкости из бака, но передаточная функция [см. уравнение (13.60)] будет другой, а именно:

$$W[p_2, v_1] = -(\psi_0 M + i\omega \alpha_0).$$

Здесь p_2 — отклонение давления жидкости после воронкогасителя.

На основании уравнений (13.65) и (13.67) соотношение между отклонениями давления p_1, p_2 и отклонениями скорости потока v_1, v_2 в трубе перед гидравлическим аккумулятором и после него можно представить в виде

$$p_2 = p_1; \quad v_1 = v_2 + v_{ак}, \quad (13.88)$$

где

$$v_{ак} = W[v_{ак}, p_2]p_2 = i\omega \alpha_{ак}^* p_2.$$

Динамическая блок-схема для гидравлического аккумулятора показана на рис. 13.37.

Из блок-схем отдельных элементов, показанных на рис. 13.34, 13.37, нетрудно составить динамическую блок-схему всей расходной магистра-

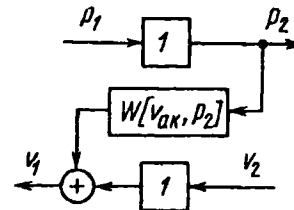


Рис. 13.37

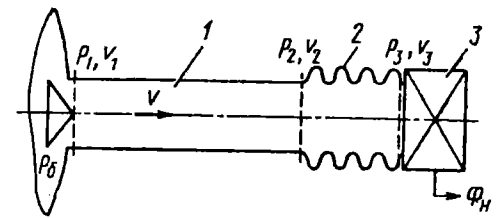


Рис. 13.38

ли. Схему удобно составлять, начиная с элемента магистрали, который является входным. Тогда выходные параметры этого элемента будут входными для последующего элемента и так далее вплоть до нагрузочного агрегата. Для магистрали, состоящей из трубы 1, сифона 2 и нагрузочного агрегата 3 (рис. 13.38), динамическая блок-схема представлена на рис. 13.39.

Нагрузочным агрегатом для расходной магистрали является ЖРД. Для двигателя соотношение между отклонениями давлениями и скорости потока перед насосом должно быть вполне определенным и может быть выражено через комплексный импеданс или комплексную проводимость двигателя. В общем случае это соотношение можно представить в виде

$$v_{1н} = W[v_{1н}, p_{1н}]p_{1н}, \quad (13.89)$$

где $p_{1н}, v_{1н}$ — отклонение давления и скорости потока на входе в насос; $W[v_{1н}, p_{1н}]$ — комплексная проводимость двигателя. Отклонение давления $p_{1н}$ определяется динамическими свойствами расходной магистрали. Чтобы определить это отклонение, нужно знать комплексный импеданс двигателя. После того как определено отклонение давления перед

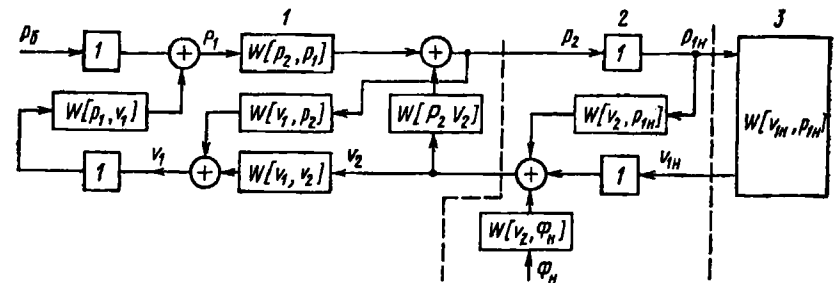


Рис. 13.39

насосом, по уравнению (13.89) можно определить отклонение скорости потока v_{1H} на входе в насос, а по отклонению скорости поступления топлива в двигатель найти отклонение давления в камере сгорания.

Рассмотренные примеры дают представление о методике составления динамических блок-схем топливных магистралей: магистраль разбивают на отдельные типичные элементы, динамические свойства которых выражаются уравнениями четырехполюсника, и затем соединяют блок-схемы последовательно расположенных четырехполюсников.

13.17. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ТОПЛИВНЫХ МАГИСТРАЛЯХ

На активном участке траектории топливо в расходных магистрالياх подвергается воздействию различных возмущений. Некоторые возмущения носят периодический характер и вызывают вынужденные колебания жидкости. К числу наиболее важных периодических возмущений следует отнести колебания давления жидкости на дне бака, колебания узлов крепления топливных магистралей, обусловленные продольными колебаниями корпуса ракеты, колебания давления в камере сгорания. Колебания прямой трубы по потоку жидкости оказывают воздействие на поток через трение о стенки. Однако ввиду малости эффект можно не учитывать. Вынужденные колебания жидкости, например, в простейшей расходной магистрали, схема которой приведена на рис. 13.38, могут возникать под воздействием колебаний давления жидкости на дне бака p_6 , колебаний нагрузочного агрегата вдоль потока Φ_H .

В линейной системе результирующий эффект от вынужденных колебаний определяется как геометрическая сумма вынужденных колебаний, вызванных разными внешними воздействиями. Если вынужденные колебания давления перед насосом от какого-либо внешнего воздействия, например колебания давления p_6 , представить на комплексной плоскости в виде вектора

$$p_{1H} = W^*[p_{1H}, p_6]p_6,$$

то суммарное колебание давления перед насосом при продольных колебаниях ракеты будет определяться суммой векторов

$$p_{1H} = W^*[p_{1H}, p_6]p_6 + W^*[p_{1H}, \Phi_H]\Phi_H.$$

Годографы векторов (амплитудно-фазовые характеристики) простых трубопроводов с сопротивлениями или сосредоточенной упру-

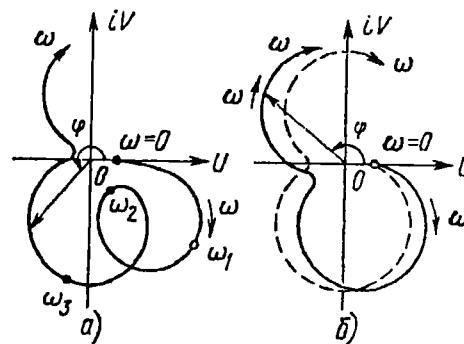


Рис. 13.40

На рис. 13.40 приведены для примера амплитудно-фазовые частотные характеристики расходной магистрали $W[p_{1H}, p_6]$, которые выражают зависящие от частоты колебаний отношения отклонения давления перед насосом к отклонению давления на дне бака. Различие в характеристиках в основном определяется разными свойствами комплексных проводимостей двигателей $W[v_{1H}, p_{1H}]$, присоединенных к расходным магистралям. На частотах $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_3$ проводимость двигателя небольшая, поэтому отклонение давления p_{1H} большое; на частоте $\omega = \omega_2$ проводимость двигателя большая и потому отклонение давления p_{1H} малое (см. рис. 13.40, а). Амплитудно-фазовая характеристика, показанная на рис. 13.40, б, этих особенностей не имеет.

На рис. 13.41 приведены амплитудно-фазовые характеристики $W[p_{1H}, \Phi_H]$ той же магистрали. Возмущения вызываются колебаниями (перемещениями) насоса. Резонансные колебания возникают на тех же частотах, когда возмущением служит отклонение давления p_6 . Характеристики начинаются с отрицательной вещественной полуоси. Перемещение насоса вдоль по потоку ($\Phi_H > 0$) при $\omega = 0$ уменьшает давление перед насосом ($p_{1H} < 0$).

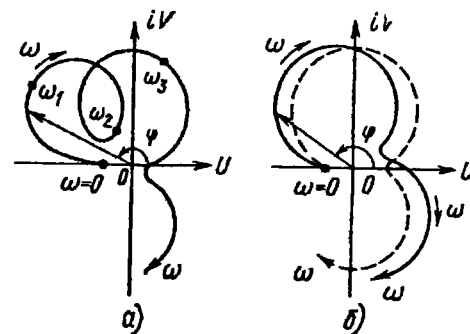


Рис. 13.41

Для экспериментального изучения динамических характеристик топливной магистрали пользуются натурной системой питания двигателя или ее моделью. Для примера на рис. 13.42 показана установленная на стенде модель системы питания двигателя ракеты "Титан-2". Для возбуждения вынужденных колебаний на каждой магистрали перед насосом установлен пульсатор. Амплитуда возбуждения регулируется изменением радиуса его кривошипа. Напорные магистрали спроектированы так, чтобы они могли имитировать сопротивление и инерцию потока жидкости, идущей от насосов к камере сгорания. Напорная магистраль горючего имитирует, кроме того, охлаждающий тракт камеры сгорания. Необходимо подчеркнуть, что для получения достоверных результатов надо как можно полнее имитировать свойства двигателя как нагрузочного агрегата.

Изменением давления наддува в баках можно устанавливать разные кавитационные запасы насосов и определять резонансные частоты и формы колебаний жидкости в магистралях, соответствующие этим кавитационным запасам. Кавитацию жидкости на входе в насос можно через прозрачную вставку зафиксировать на киноленту. На этой экспериментальной установке можно получить значения передаточных функций для разных частот колебаний и сопоставить эти данные с результатами расчетов.

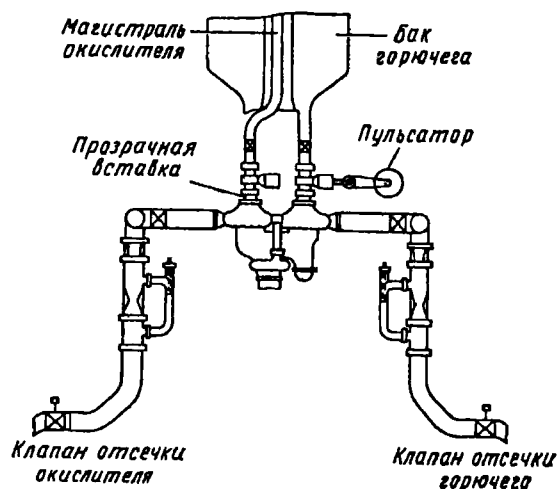


Рис. 13.42

14.1. ЖРД КАК СОСТАВНАЯ ЧАСТЬ ЗАМКНУТОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Жидкостный ракетный двигатель является самым сложным звеном замкнутой колебательной системы, образуемой ракетой с ЖРД. Динамические процессы в ЖРД уже давно являются предметом теоретических и экспериментальных исследований.

Обычно принято различать низкочастотную (от нуля до 50 Гц) и высокочастотную (от 200 Гц до нескольких килогерц) динамику ЖРД. Подобное деление является условным, но практически целесообразным, так как в каждом из этих диапазонов частот при исследовании возможны свои упрощения и методы решения. Влияние низкочастотной и высокочастотной динамики ЖРД на ракету и двигатель также неодинаково.

При низкочастотных колебаниях длина волны значительно превосходит размеры камеры сгорания, поэтому можно считать, что изменение давления в разных частях камеры происходит практически одновременно. Низкочастотные колебания появляются в результате взаимодействия колебания давления в камере сгорания с подачей топлива в камеру или с процессом горения.

При высокочастотных колебаниях длина волны соизмерима с размерами камеры сгорания, поэтому изменение давления в разных частях камеры происходит в соответствии с распространением волны давления по объему камеры. Высокочастотные колебания поэтому часто называют акустическими. Они обусловлены подачей топлива в камеру сгорания и процессом сгорания. В высокочастотных колебаниях участвуют стенки камеры сгорания и головки двигателя.

В продольных колебаниях ракеты важную роль играет низкочастотная динамика ЖРД, высокочастотная динамика практически с ними не взаимосвязана.

Последние достижения в области низкочастотной динамики ЖРД отражены в работе [4]. Здесь же в основном изложим физическую сущность явлений и приведем результаты, необходимые при исследовании устойчивости замкнутой системы.

В колебаниях, которые возникают в ракете, роль двигателя может быть различной. Если рабочий процесс двигателя неустойчив и колебания давления в камере сгорания возникают независимо от продольных колебаний корпуса ракеты, то двигатель служит источником вынужденных колебаний корпуса ракеты и ее отдельных агрегатов. Если рабочий процесс двигателя устойчив, то двигатель является источником энергии (усилителем) в замкнутой системе, состоящей из корпуса ракеты, топливных магистралей и двигателя. Вынужденные колебания подачи топлива в камеру сгорания вызывают колебания давления в камере и колебания тяги двигателя. Динамические свойства двигателя как источника энергии можно выразить комплексными передаточными числами:

$$p_k = W[p_k, p_{1н.о}]p_{1н.о} + W[p_k, p_{1н.г}]p_{1н.г},$$

где p_k — отклонение давления газов в камере сгорания двигателя от стационарного значения; $p_{1н.о}$, $p_{1н.г}$ — отклонение давления окислителя и горючего перед входом в насосы.

Колебания давления в камере сгорания вызывают, кроме того, колебания донного давления $p_{дн}$ (давления на кормовую часть корпуса ракеты), которое связано с отклонением давления в камере сгорания через комплексное передаточное число

$$p_{дн} = W[p_{дн}, p_k]p_k.$$

Для топливных магистралей двигатель является нагрузочным агрегатом и его динамические характеристики оказывают влияние на динамику топливных магистралей. Динамические свойства двигателя как нагрузочного агрегата можно выразить также через комплексные передаточные числа, которые имеют значения комплексных проводимостей. Для двухкомпонентного двигателя будем иметь

$$v_{н.о} = W[v_{н.о}, p_{1н.о}]p_{1н.о} + W[v_{н.о}, p_{1н.г}]p_{1н.г};$$

$$v_{н.г} = W[v_{н.г}, p_{1н.г}]p_{1н.г} + W[v_{н.г}, p_{1н.о}]p_{1н.о},$$

где $v_{н.о}$, $v_{н.г}$ — отклонение скорости потока окислителя и горючего на входе в насосы. Комплексные передаточные числа $W[v_{н.о}, p_{1н.г}]$ и $W[v_{н.г}, p_{1н.о}]$ характеризуют взаимосвязь динамических процессов в топливных магистралах, которая осуществляется через камеру сгорания и ТНА.

Двигательная установка простейшего типа, состоящая только из основных агрегатов, может устойчиво работать с допустимыми отклонениями параметров лишь в узком диапазоне режимов и внешних возмущений. Поэтому для поддержания режима работы в дополнение к основным агрегатам и постоянным элементам настройки в ЖРД вводятся автоматические регуляторы. Задачей регуляторов является поддержание заданного режима работы двигателя. Если, например, необходимо обеспечить постоянное давление в камере сгорания, то при отклонении действительного давления от заданного регулятор должен автоматически воздействовать на подачу топлива и изменить количество или соотношение топливных компонентов, поступающих в газогенератор и камеру сгорания. Динамические свойства регулятора можно выразить комплексным передаточным числом

$$\delta = W[\delta, p_k]p_k.$$

Здесь δ — малое перемещение регулирующего органа регулятора.

Двигатель может также иметь регулятор для изменения режима работы в соответствии с программой полета. Такой регулятор обычно называют регулятором управления двигателем (РУД); входная величина в регулятор может зависеть от параметров полета ракеты, времени полета и пр.

Примем рабочий процесс двигателя устойчивым и проанализируем его динамические характеристики при малых отклонениях параметров рабочего процесса от некоторого установившегося (стационарного) режима.

14.2. ОСНОВНЫЕ ЗВЕНЬЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СХЕМЫ ЖРД

По способу подачи горючего в камеру сгорания ЖРД подразделяются на две основные группы — двигатели с турбонасосной системой подачи и двигатели с вытеснительной системой подачи. При вытеснительной системе подачи топливные компоненты вытесняются из баков в камеру сгорания под давлением газа, превышающим давление в камере сгорания. При турбонасосной системе компоненты топлива подаются из баков к насосам под небольшим давлением, обеспечивающим работу насосов без кавитации жидкости. Повышение давления и дальнейшая подача топлива в камеру сгорания обеспечиваются ТНА, в который входят насосы и газовая турбина, используемая для привода насосов.

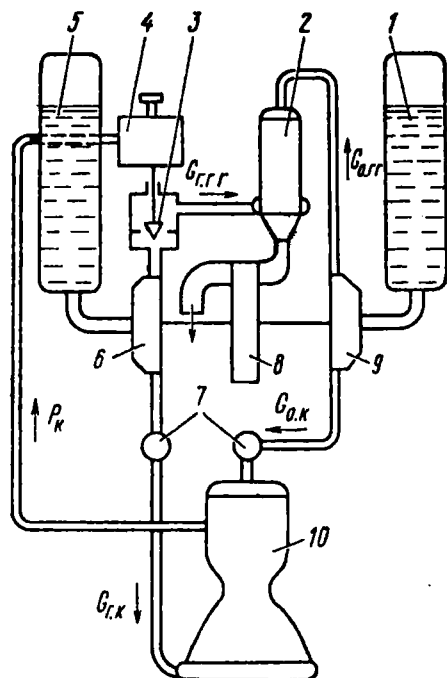


Рис. 14.1

На рис. 14.1 и 14.2 показаны принципиальные схемы ЖРД с ТНА, работающим на продуктах сгорания основных компонентов. Схемы различаются только количеством и назначением регуляторов.

На рис. 14.1: 1 – бак окислителя, 2 – двухкомпонентный газогенератор; 3 – регулирующий орган регулятора; 4 – регулятор P_K ; 5 – бак горючего; 6 – насос горючего; 7 – главные клапаны; 8 – турбина ТНА; 9 – насос окислителя; 10 – камера сгорания, $G_{O.G.}$, $G_{F.G.}$ – отклонения подачи окислителя и горючего в газогенератор.

В схеме рис. 14.2: 1 – бак горючего; 2 – регулятор; 3 – регулирующий орган регулятора; 4 – датчик регулятора подачи горючего в газогенератор (ГГ); 5 – двухкомпонентный ГГ; 6 – датчик регулятора подачи окислителя в ГГ; 7 – регулятор соотношения окислителя и горючего для ГГ; 8 – регулирующий орган этого регулятора; 9 – бак окислителя; 10 – насос окислителя; 11 – турбина ТНА; 12 – главные клапаны; 13, 16 – датчик подачи окислителя и горючего в камеру сгорания; 14 – камера сгорания; 15 – регулятор соотношения компонентов топлива для камеры

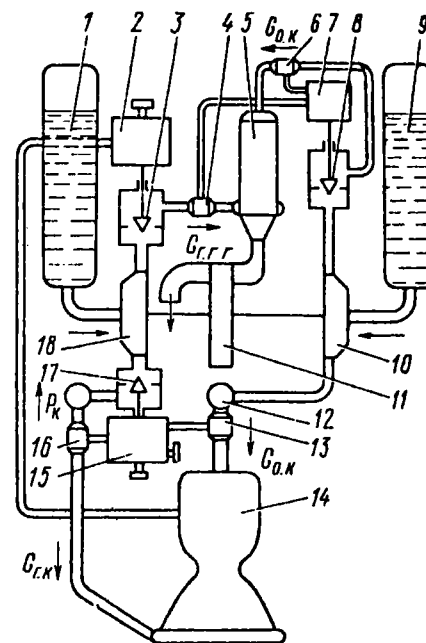


Рис. 14.2

сгорания; 17 – регулирующий орган этого регулятора; 18 – насос горючего. Таким образом, в этой схеме кроме регулятора давления в камере сгорания 2 имеется еще два регулятора: регулятор 15 с регулирующим органом 17, датчиками 13 и 16 и регулятор 7 с регулирующим органом 8 и датчиками 4 и 6.

В системах питания с ТНА процесс горения в газогенераторах, работающих на основных компонентах топлива, осуществляется при значительном избытке или недостатке окислителя, вследствие чего большая часть химической энергии газа, расходуемого для привода насосов ТНА, не реализуется. Для последующего использования этой энергии можно дожигать газ в камере дожигания или непосредственно в камере сгорания двигателя. ЖРД, в которых дожигание этого газа производится в камере сгорания, называются двигателями с замкнутой системой питания или двигателями с дожиганием генераторного газа.

В камеру сгорания ЖРД с замкнутой системой питания подаются жидкий окислитель и горючее, а также газ, поступающий из турбины с

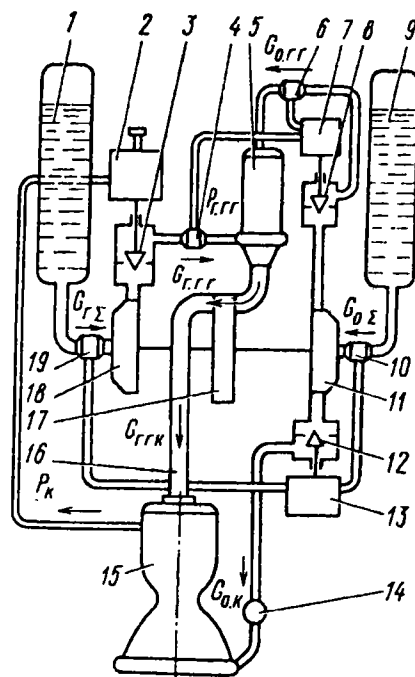


Рис. 14.3

избытком или недостатком окислителя. Возможна схема, при которой все горючее (или весь окислитель) проходит через турбину. В этом случае в камеру сгорания поступает жидкий окислитель (или жидкое горючее) и газ с недостатком (или избытком) окислителя. Наконец, возможна также схема, когда весь объем как окислителя, так и горючего до поступления в камеру сгорания проходит через соответствующие газогенераторы и турбины. В этом случае в камеру сгорания вводятся и дожигаются в ней газы двух составов — один с избытком горючего, другой с избытком окислителя. Смешение и дожигание в камере сгорания газа с жидким топливом называется **гетерогенным** процессом, а смешение и дожигание газа с газом — **гомогенным**.

Как указывалось выше, процесс горения в газогенераторе протекает при значительном избытке одного из компонентов топлива и сводится практически к высокотемпературной газификации этого компонента. Второй компонент топлива (присадочный) вводится лишь в количестве, необходимом для обеспечения заданной температуры газификации.

На рис. 14.3 приведена принципиальная схема ЖРД с замкнутой системой питания с двухкомпонентным ЖГГ, работающим на основных компонентах. Как видно, в газогенераторе газифицируется не все горючее; смешение и дожигание в камере сгорания гетерогенное. В схему включены три регулятора. Здесь поз. 1–9 имеют те же значения, что и на рис. 14.2; 10, 19 — датчики отклонения суммарной подачи окислителя $G_{O\Sigma}$ и горючего $G_{Г\Sigma}$; 11, 18 — насосы окислителя и горючего; 12 — регулирующий орган регулятора соотношения компонентов топлива; 13 — главный клапан магистрали окислителя; 14 — камера сгорания; 15 — патрубком подвода генераторного газа в камеру сгорания; 17 — турбонасосный агрегат (ТНА).

Принципиальные схемы регулирования и управления двигателем в значительной мере зависят от схемы питания двигателя и определяются назначением ракеты.

Обычно двигательная установка имеет несколько систем автоматического регулирования. В качестве регулируемых величин для ЖРД принимают какие-либо параметры, характеризующие тягу двигателя. Обычно используются системы автоматического регулирования давления в камере сгорания и регулирования соотношения компонентов топлива, причем последняя система очень часто предусматривается для жидкостного газогенератора. Это объясняется тем, что в области номинального режима камеры сгорания основные термодинамические характеристики продуктов сгорания (температура T_k , газовая постоянная R_k) изменяются очень мало. В ЖГГ, работающем при избытке одного из компонентов, наблюдается обратная картина. Поэтому требования, предъявляемые в точности величины коэффициента соотношения компонентов в ЖГГ более жестки, так как незначительное изменение этого коэффициента может вызвать резкое изменение режима работы ТНА и даже прогар стенок ЖГГ.

Важным параметром надежной работы ЖРД является также величина давления на входе в насосы, поэтому на двигательных установках предусматривается система регулирования этого давления.

Дальность полета ракеты в основном зависит от отношения веса ракеты в конце активного участка к стартовому весу. Поэтому естественно стремление конструктора уменьшить в баках количество топлива, которое остается вследствие работы двигателя на нерасчетном соотношении компонентов. Для уменьшения остатков топлива предусматривается система регулирования уровней компонентов в баках.

Одна из возможных принципиальных схем автоматического регулирования давления в камере сгорания приведена на рис. 14.4. Показаны основные взаимосвязи между звеньями ЖРД и ЖГГ; регулирование давления в камере сгорания осуществляется путем

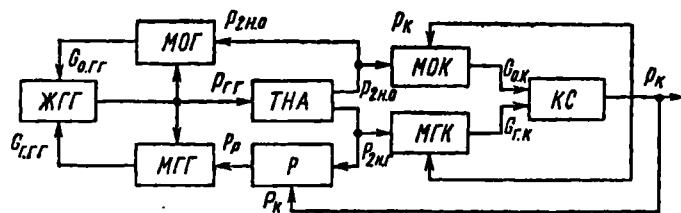


Рис. 14.4

изменения режима работы турбины через изменение коэффициента соотношения компонентов в ЖГГ. На схеме: КС – камера сгорания; МОК, МГК – магистраль окислителя и магистраль горючего камеры сгорания; МОГ, МГГ – магистраль окислителя и магистраль горючего газогенератора; p_k – отклонение давления в камере сгорания; $G_{o,k}$, $G_{г,k}$ – отклонения подачи окислителя и горючего в камеру сгорания; $G_{o,гг}$, $G_{г,гг}$ – отклонения подачи окислителя и горючего в ЖГГ; P – регулятор p_k ; p_p – отклонение давления на выходе из регулятора; $p_{гг}$ – отклонение давления газа на выходе из газогенератора (на входе в турбину), $p_{2н,о}$, $p_{2н,г}$ – отклонения давления на выходе из насоса окислителя и из насоса горючего.

Схема регулирования коэффициента соотношения топливных компонентов (к) в ЖГГ приведена на рис. 14.5. Регулятор (P_k) установлен на магистрали горючего и предназначен для сведения к минимуму отклонения коэффициента к. Здесь p_k – отклонение давления на выходе из регулятора соотношения компонентов.

На рис. 14.6 показана одна из упрощенных схем регулирования уровня топливных компонентов в баках. Регулирование пропорционального опорожнения баков осуществляется следующим образом: регулятор (P_H) определяет отклонения уровней окислителя и горючего

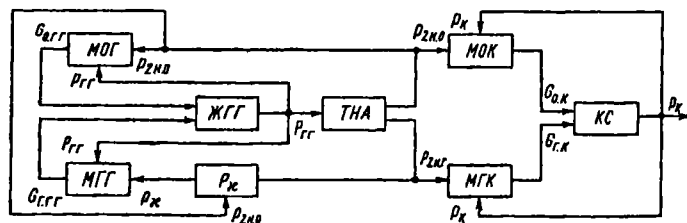


Рис. 14.5

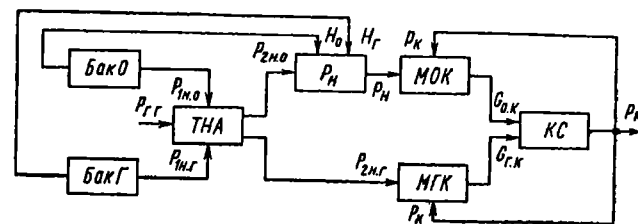


Рис. 14.6

H_o и H_g в баках и в зависимости от этого отклонения изменяет расход одного из компонентов. На схеме p_H – отклонение давления на выходе из регулятора уровня топливных компонентов в баках.

На рис. 14.7 приведена одна из возможных схем регулирования двигателя. В схему включены регулятор соотношения топливных компонентов в ЖГГ (P_k), регулятор уровня H топливных компонентов в баках (P_H), система управления (СУ) и регулятор поддержания кажущейся скорости ракеты (РКС). Датчик, изменяющий кажущуюся скорость ракеты v_x , посылает сигнал о величине скорости в счетно-решающее устройство, где вычисляется отклонение скорости от программной. Сигнал рассогласования направляется в РКС, который изменяет давление в камере сгорания (а значит, и тягу двигателя). На рис. 14.7 показана также система наддува баков при помощи жидкостных

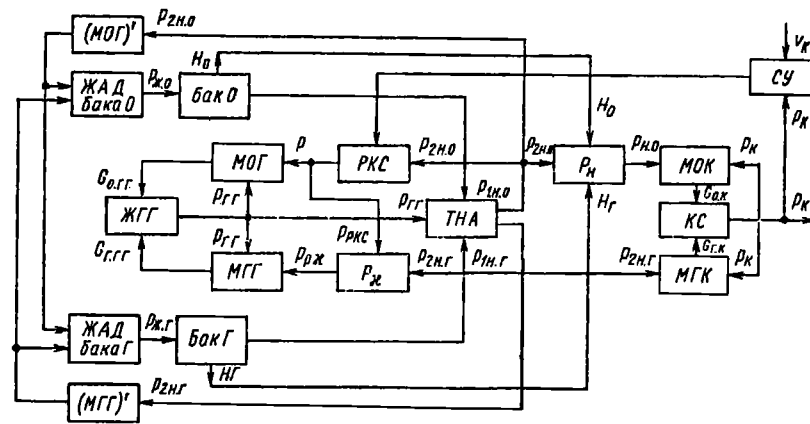


Рис. 14.7

аккумуляторов давления (ЖАД); здесь (МОГ)' и (МГГ)' – магистрали окислителя и горючего, идущие к газогенераторам ЖАД.

Для ЖРД характерно большое количество динамических звеньев, взаимосвязь которых определяется принципиальной схемой двигателя. Основными являются следующие звенья: камера сгорания двигателя, газогенератор, топливные насосы, турбина, напорные магистрали для камеры сгорания, магистрали для газогенератора, регуляторы.

14.3. УРАВНЕНИЕ КАМЕРЫ СГОРАНИЯ

В рабочий процесс камеры сгорания двигателя входят распыление, смешение и испарение топлива, горение и истечение продуктов сгорания из сопла.

В камере двигателя всегда имеет место некоторая неравномерность процесса горения. Возможны также колебания температуры, скорости, состава газов и других параметров. В камере сгорания всегда имеется сильная турбулентность, являющаяся одной из причин шума, производимого работающим двигателем. Процесс горения с малой амплитудой колебаний называют практически равномерным, с большой амплитудой – неравномерным, хотя этим терминам нельзя дать точного определения.

Низкочастотными колебаниями будем называть такие, период которых несоизмеримо больше времени распространения волны давления по камере. Для анализа низкочастотных колебаний рабочий процесс в камере сгорания идеализируют. Идеализация заключается в замене процесса постепенного превращения топлива в продукты сгорания (распыление, нагрев, испарение, диффузия, турбулентное смешение многообразные химические реакции) скачкообразным процессом, при котором частица топлива не выделяет заметного количества энергии и не увеличивается в объеме до некоторого момента времени, после

которого оно мгновенно превращается в конечные продукты реакции (рис. 14.8). Время τ_0 , одинаковое в данном случае для всех частиц топлива, называется временем превращения (временем запаздывания горения). Так как время распространения волны давления по камере несоизмеримо меньше периода низкочастотных колебаний, то вол-

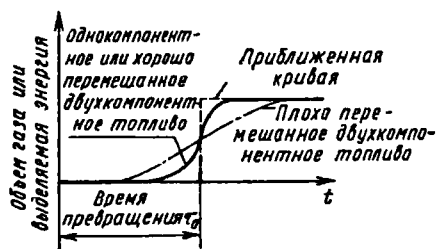


Рис. 14.8

новые процессы в камере можно во внимание не принимать и считать, что давление и температура во всех точках камеры изменяются во времени по одинаковому закону.

Процесс накопления газообразных продуктов в камере сгорания можно выразить дифференциальным уравнением

$$V_k(d\gamma_k/dt) = G_k(t - \tau_0) - G_e, \quad (14.1)$$

где V_k – объем камеры; γ_k – средний удельный вес газообразных продуктов в камере; G_k – отклонение секундной подачи топлива в камеру; G_e – отклонение секундного расхода газа из камеры.

Продукты сгорания в камере будем считать идеальным газом, для которого уравнение состояния можно представить в виде

$$p = \gamma_k R T, \quad (14.2)$$

где p – давление; R – удельная газовая постоянная; T – температура.

При постоянном соотношении компонентов топлива в камере температура и удельная газовая постоянная газообразных продуктов сгорания будут постоянными, поэтому после линеаризации уравнения (14.2) при $RT = R_k^* T_k^* = \text{const}$ получим

$$\frac{d\gamma_k}{dt} = \frac{1}{R_k^* T_k^*} \frac{dp_k}{dt}. \quad (14.3)$$

Здесь величины R_k^* , T_k^* определены для постоянного соотношения компонентов ($k = \text{const}$), соответствующего установившемуся режиму работы двигателя.

Отклонение секундного расхода газа из камеры при постоянных T_k^* и R_k^* можно считать пропорциональным отклонению давления в камере p_k , т.е.

$$G_e = \left(\frac{\partial G_e}{\partial p_k} \right)^* p_k = \left(\frac{\partial G_k}{\partial p_k} \right)^* p_k = \left(\frac{G_k}{p_k} \right)^* p_k. \quad (14.4)$$

В выражении (14.4) учтено, что $G_e^* = G_k^*$.

Отклонение секундной подачи топлива в камеру складывается из отклонений подачи окислителя $G_{o.k}$ и подачи горючего $G_{г.к}$:

$$G_k = G_{o.k} + G_{r.k}. \quad (14.5)$$

Заменяя в уравнении (14.1) величины γ_k , G_e , G_k их выражениями из (14.3) – (14.5), получим

$$\tau_k \frac{dp_k}{dt} + p_k = k_{o.k} G_{o.k}(t - \tau_0) + k_{r.k} G_{r.k}(t - \tau_0), \quad (14.6)$$

$$\text{где } \tau_k = \frac{V_k p_k^*}{R_k^* T_k^* G_k^*}; \quad k_{o.k} = k_{r.k} = \frac{p_k^*}{G_k^*};$$

$$G_k^* = G_{o.k}^* + G_{r.k}^*.$$

Здесь τ_k есть постоянная времени (время релаксации) камеры сгорания; $k_{o.k}$, $k_{r.k}$ – коэффициенты усиления камеры сгорания по расходу окислителя и горючего.

Зная отклонения подачи окислителя и горючего в камеру, можно из уравнения (14.6) определить отклонение давления в камере. Уравнение (14.6) получено в предположении, что величины R_k^* и T_k^* постоянны. При этом предположении камера сгорания будет обладать такими же динамическими свойствами, как и в случае однокомпонентного топлива. Изменение давления в такой камере можно выразить через суммарное отклонение подачи топлива в камеру.

Динамические характеристики камеры сгорания выразим через комплексные передаточные числа. Так как отклонения подачи компонентов топлива в камеру предполагаются происходящими по гармоническому закону с частотой ω , то с учетом времени превращения τ_0 будем иметь

$$G_{o.k}(t - \tau_0) = G_{o.k}(t) e^{-i\omega\tau_0} = G_{o.k} e^{i\omega(t-\tau_0)};$$

$$G_{r.k}(t - \tau_0) = G_{r.k} e^{i\omega(t-\tau_0)}.$$

Приняв, кроме того, что

$$p_k(t) = p_k e^{i\omega t},$$

из уравнения (14.6) получим

$$p_k = W[p_k, G_{o.k}] G_{o.k} + W[p_k, G_{r.k}] G_{r.k}; \quad (14.7)$$

где

$$W[p_k, G_{o.k}] = W[p_k, G_{r.k}] = \frac{(p_k^*/G_k^*) e^{-i\omega\tau_0}}{1 + i\omega\tau_k}. \quad (14.8)$$

Отклонение коэффициента k приводит к изменению температуры газа в камере, что, в свою очередь, влияет на величину давления в камере и на секундный расход газа из камеры. Поэтому в общем случае комплексные передаточные числа $W[p_k, G_{o.k}]$ и $W[p_k, G_{r.k}]$ будут различны. Таким образом, камера сгорания является типичным аperiodическим звеном с запаздыванием.

14.4. ДИНАМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ ЖРД

Структура динамической схемы двигателя зависит от способа подачи топливных компонентов в камеру сгорания и от схемы регулирования двигателя. Составим динамическую схему ЖРД с турбонасосной подачей топливных компонентов, принципиальная схема которого показана на рис. 14.1. Газогенератор работает на основных компонентах, на линии горючего газогенератора находится регулятор коэффициента соотношения топливных компонентов; схема регулирования показана на рис. 14.5.

Динамические процессы двигателя описываются дифференциальным или алгебраическим уравнением, связывающим входную и выходную координаты звена – величины, характеризующие физические процессы в двигателе. Полную систему уравнений, выражающих динамические свойства ЖРД, можно найти, например, в трудах [4, 14, 29]. Здесь мы динамические свойства отдельных звеньев выразим комплексными передаточными числами.

На рис. 14.9 приведена структурная схема рассматриваемого двигателя, показаны: 1, 3 – магистрали окислителя и горючего камеры сгорания; 2 – камеры сгорания; 4 – регулятор коэффициента соотношения компонентов топлива газогенератора; 5, 7 – магистрали горючего и окислителя газогенератора 6.

Отклонения подачи окислителя $G_{o.k}$ и горючего $G_{r.k}$ в камеру сгорания зависят от входных координат – отклонения давлений на выходе из насосов $p_{2н.о.}$, $p_{2н.г.}$ и отклонения давления в камере сгорания p_k . Отклонение подачи окислителя $G_{o.гт.}$ и горючего $G_{r.гт.}$ в газогенератор зависит от отклонения давления на выходе из насоса окислителя $p_{2н.о.}$, отклонения давления p_k на выходе из регулятора R_k и отклонения давления в газогенераторе $p_{гт.}$. От суммарного отклонения подачи окислителя ($G_{o.k} + G_{o.гт.}$) зависит отклонение давления на выходе из

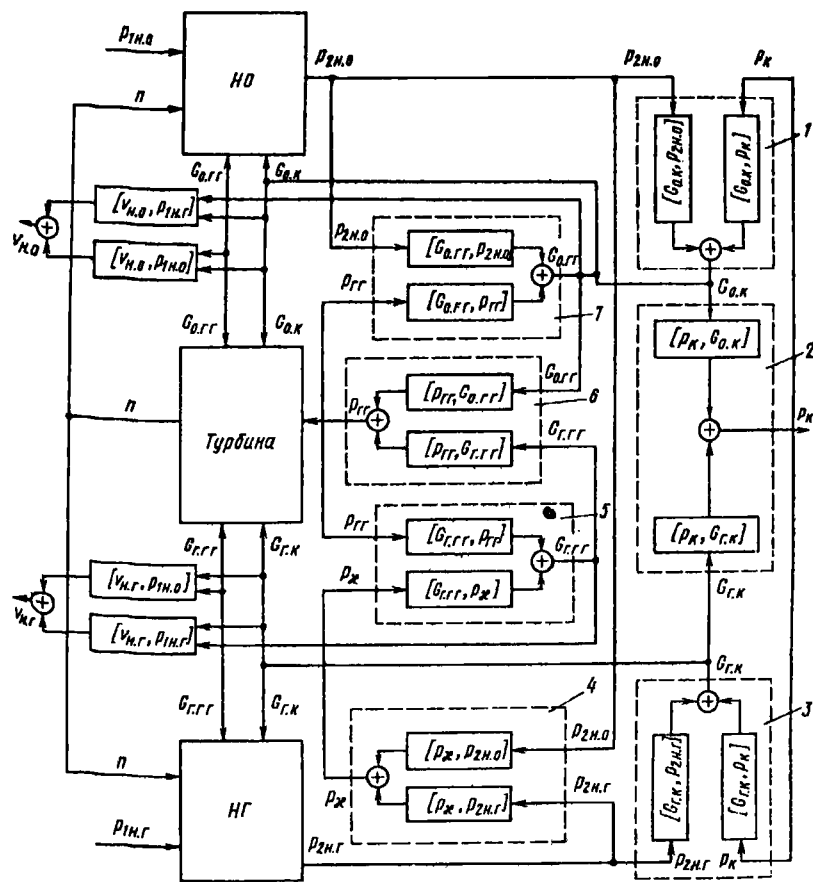


Рис. 14.9

насоса окислителя $p_{2н.о}$, а от суммарного отклонения подачи горючего ($G_{г.к} + G_{г.г.}$) зависит отклонение давления на выходе из насоса горючего $p_{2н.г}$; от этих же отклонений подачи компонентов зависит и отклонение скорости вращения n вала ТНА.

Входными координатами для двигателя являются $p_{1н.о}$, $p_{1н.г}$ — отклонения давления на входе в насосы для окислителя и горючего. Выходной координатой двигателя как источника энергии является отклонение давления в камере сгорания p_k .

Двигатель является, кроме того, нагрузочным агрегатом для расходных топливных магистралей. Выходными координатами двигателя как нагрузочного агрегата будут $v_{н.о}$ и $v_{н.г}$ — отклонения скоростей топливных компонентов на входе в насосы окислителя и горючего. Эти отклонения пропорциональны отклонениям подачи окислителя ($G_{о.к} + G_{о.г.}$) и горючего ($G_{г.к} + G_{г.г.}$). Отклонение скорости давления $v_{н.о}$ обуславливается не только отклонением давления $p_{1н.о}$, но через камеру сгорания и газогенератор также и отклонением давления $p_{1н.г}$. Отклонение скорости $v_{н.г}$ зависит от отклонения давления $p_{1н.г}$ и $p_{1н.о}$. Взаимосвязь двигателя с расходными магистральми окислителя и горючего показана на рис. 14.10.

Следует отметить, что структурные схемы ЖРД с замкнутой системой питания имеют большее число внутренних связей между звеньями по сравнению со структурными схемами ЖРД с открытой системой питания. В ЖРД с замкнутой системой питания весь расход одного из компонентов осуществляется через турбину, поэтому турбина в таком двигателе имеет значительно большую мощность, чем в двигателе с открытой системой питания, в силу чего постоянная времени ТНА для двигателя с замкнутой системой питания меньше, чем для двигателя с открытой системой. Так как в двигателе с замкнутой системой питания газ турбины поступает в камеру сгорания, то объем газогенератора и давления газа в нем значительно больше, чем в газогенераторе двигателя с открытой системой питания.

На основании структурной схемы (см. рис. 14.9) можно получить уравнение для определения отклонения давления в камере сгорания (отклонения тяги двигателя):

$$p_k = W[p_k, p_{1н.о}]p_{1н.о} + W[p_k, p_{1н.г}]p_{1н.г},$$

и уравнения для определения отклонений скоростей топливных компонентов на входах в насосы окислителя и горючего:

$$v_{н.о} = W[v_{н.о}, p_{1н.о}]p_{1н.о} + W[v_{н.о}, p_{1н.г}]p_{1н.г};$$

$$v_{н.г} = W[v_{н.г}, p_{1н.г}]p_{1н.г} + W[v_{н.г}, p_{1н.о}]p_{1н.о}.$$

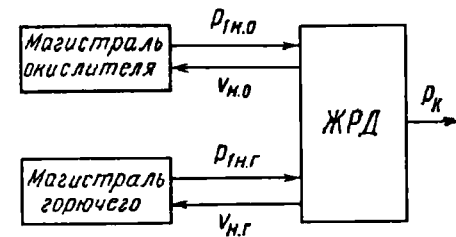


Рис. 14.10

14.5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЖРД

Годографы комплексных передаточных чисел (амплитудно-фазовые характеристики) можно получить расчетом на ЭВМ или снять экспериментальным путем. На рис. 14.11 показан примерный вид амплитудно-фазовой характеристики $W[p_k, p_{1н.о}]$ двигателя с открытой системой питания (кривая 1) и двигателя с замкнутой системой питания – с дожиганием (кривая 2). При отклонении расхода через насос окислителя амплитудно-фазовая характеристика двигателя с открытой системой питания имеет сходство с амплитудно-фазовой характеристикой апериодического звена с запаздыванием. Двигатель с замкнутой системой питания проявляет колебательные свойства и его амплитудно-фазовая характеристика (кривая 2) имеет сходство с амплитудно-фазовой характеристикой колебательного звена с запаздыванием.

Основной причиной колебательных свойств двигателя с замкнутой системой питания является уменьшение фильтрующего влияния ТНА, поскольку колебания давления в газогенераторе здесь непосредственно вызывают колебания поступления топлива в камеру сгорания двигателя, а в двигателе с открытой системой питания – только через изменение скорости вращения турбины.

На рис. 14.12 показан примерный вид амплитудно-фазовой характеристики $W[p_k, p_{1н.г}]$ двигателя с открытой системой питания (кривая 1) и двигателя с замкнутой системой питания (кривая 2). Вид годографов примерно такой же, как и на рис. 14.11, однако коэффициенты усиления для двигателя с замкнутой системой питания больше, чем для двигателя с открытой системой питания.

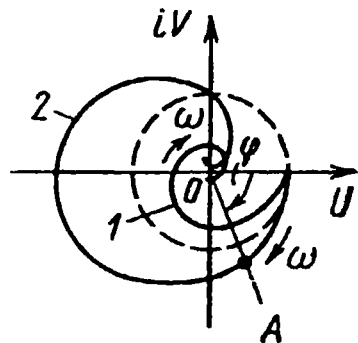


Рис. 14.11

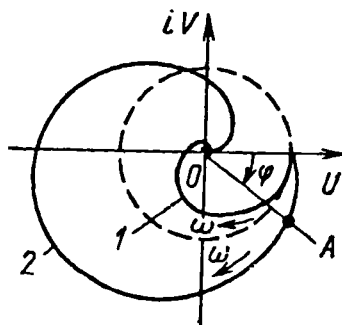


Рис. 14.12

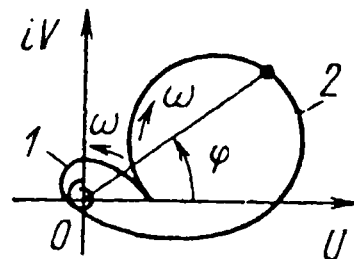


Рис. 14.13

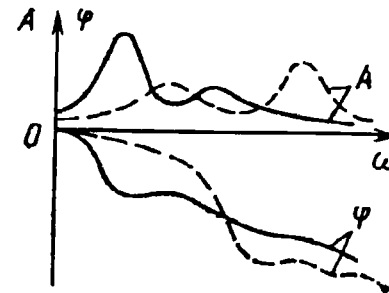


Рис. 14.14

Примерный вид амплитудно-фазовой характеристики $W[v_{н.о}, p_{1н.о}]$, характеризующей динамические свойства двигателя как нагрузочного агрегата, показан на рис. 14.13 (кривая 1 – для двигателя с открытой системой питания, 2 – для двигателя с закрытой системой питания).

Частотные характеристики двигателя с замкнутой системой питания имеют ярко выраженный колебательный характер.

Частотные характеристики двигателя как источника энергии и как нагрузочного агрегата для расходных магистралей полностью характеризуют его динамические свойства, необходимые при анализе устойчивости замкнутой системы.

Вид амплитудно-частотных характеристик двигателя может значительно изменяться в зависимости от изменения динамических свойств камеры сгорания, ТНА, газогенератора и регуляторов. Например, путем подбора динамических свойств регуляторов можно сильно изменить амплитудно-фазовые характеристики двигателя и повлиять таким образом на устойчивость замкнутой системы, состоящей из ракеты, расходных магистралей и двигателя. На рис. 14.14 представлены амплитудно-частотные $A(ω)$ и фазочастотные $φ(ω)$ характеристики $p_k/p_{1н.г}$ одного и того же двигателя с разными регуляторами.

15.1. ДИНАМИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

В зависимости от структуры расходных магистралей и количества двигателей динамические схемы замкнутых систем различны.

Укрупненная блок-схема обычной ракеты с двухкомпонентным ЖРД, составленная из физических звеньев, приведена на рис. 15.1. Здесь 1 – ЖРД, 2 – корпус ракеты, 3 – магистраль горючего, 4 – магистраль окислителя.

Уравнения возмущенного движения корпуса ракеты в направлении продольной оси в гл. X представлены в двух вариантах. В первом варианте вынужденные продольные колебания корпуса представляются в виде ряда, составленного из собственных функций:

$$u(x, t) = u_C(t) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) q_n(t), \quad (15.1)$$

где u_C – колебания центра масс ракеты; $f_n(x)$ – форма собственных колебаний корпуса; $q_n(t)$ – обобщенная координата.

Наибольшую опасность представляют колебания с частотами, близкими к собственным. В таких случаях колебания центра масс значительно меньше упругих колебаний и мы их не будем принимать во внимание.

Пусть ракета имеет один двигатель и возмущения давления жидкости в одной расходной магистрали значительно больше, чем в другой. Тогда уравнения вынужденных колебаний корпуса можно представить в виде

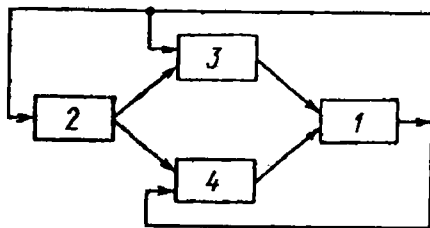


Рис. 15.1

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{m_n} [-k_{т.дв} f_{н.дв} p_x(t) + F_{т.дв} f_{м.дв} p_{1н}(t)], \quad (15.2)$$

где m_n – приведенная масса ракеты; F_T – площадь поперечного сечения трубопровода низкого давления.

Знак минус перед отклонением давления p_x в камере сгорания поставлен потому, что в уравнениях (15.2) за положительное принято перемещение корпуса в направлении от вершины ракеты к хвостовому отсеку.

При установившихся гармонических колебаниях с частотой ω

$$p_x(t) = p_x e^{i\omega t}; \quad p_{1н}(t) = p_{1н} e^{i\omega t}; \quad q_n(t) = q_n e^{i\omega t},$$

и решение уравнения (15.2) можно выразить через комплексные передаточные числа:

$$q_n = W[q_n, p_x] p_x + W[q_n, p_{1н}] p_{1н}, \quad (15.3)$$

где

$$W[q_n, p_x] = -\frac{k_{т.дв} f_{н.дв}}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2 + i2\xi_n \omega_n \omega)}; \quad (15.4)$$

$$W[q_n, p_{1н}] = \frac{F_{т.дв} f_{м.дв}}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2 + i2\xi_n \omega_n \omega)}.$$

Во втором варианте вынужденные продольные колебания корпуса выражаются комплексной функцией

$$u(x, t) = \Phi(x, \omega) e^{i\omega t} = -A_x(x, \omega) e^{i\varphi_x(x, \omega)} k_{т.дв} p_x e^{i\omega t} + A_{1н}(x, \omega) e^{i\varphi_{1н}(x, \omega)} F_{т.дв} p_{1н} e^{i\omega t}. \quad (15.5)$$

Применив комплексные передаточные числа, представим выражение для комплексной функции в виде

$$\Phi = W[\Phi, p_x] p_x + W[\Phi, p_{1н}] p_{1н}. \quad (15.6)$$

Здесь

$$W[\Phi, p_x] = -A_x(x, \omega) k_{т.дв} e^{i\varphi_x(x, \omega)}; \quad (15.7)$$

$$W[\Phi, p_{1н}] = A_{1н}(x, \omega) F_{т.дв} e^{i\varphi_{1н}(x, \omega)}.$$

В первом варианте, когда вынужденные колебания корпуса выражаются в виде ряда (15.1), корпус ракеты в динамической схеме представляется некоторым числом параллельных блоков с комплексными передаточными числами (15.4). Во втором варианте для каждого внешнего воздействия p_k, p_{1n} корпус в динамической схеме изображается одним блоком (15.6).

Отклонение давления на входе в насос p_{1n} зависит от структуры расходной магистрали и свойства насоса. Будем считать, что структура расходной магистрали соответствует схеме, показанной на рис. 13.38, а ее динамическая схема – приведенной на рис. 13.39. Продольные колебания корпуса воздействуют на поток жидкости в магистрали через отклонение давления жидкости на выходе из бака и через перемещения двигателя вместе с насосом относительно потока. Если расходная магистраль имеет коллектор, то корпус ракеты воздействует на поток жидкости в магистрали также и через перемещение коллектора.

Пренебрегая колебанием давления газов и образованием волн на свободной поверхности жидкости в баке, в первом приближении можно принять, что отклонение давления в баке равно силе инерции столба жидкости:

$$p_6 = -\rho_0 H \kappa \frac{d^2 u_6(t)}{dt^2}.$$

Здесь ρ_0, H – плотность и высота столба жидкости в баке; $u_6(t)$ – перемещение дна бака (в месте соединения с трубой) при продольных колебаниях корпуса; κ – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от формы колебаний дна.

При гармонических колебаниях с частотой ω

$$p_6 = \rho_0 H \kappa \omega^2 \sum_{n,j} f_{nsj} q_n, \quad (15.8)$$

где f_{nsj} – коэффициент формы колебаний дна бака (11.85), зависящий от формы колебаний массы механического осциллятора m_{sj} при n -м тоне колебаний корпуса. Индекс "j" соответствует номеру бака ($j = A, B$), индекс "s" показывает номер механического осциллятора, соответствующего колебаниям жидкости в упругом баке.

Когда вынужденные продольные колебания корпуса выражаются комплексной функцией (15.5), то отклонение давления жидкости на выходе из бака можно представить в виде

$$p_6 = \rho_0 H \kappa \omega^2 \sum_j \Phi_{sj}, \quad (15.9)$$

где Φ_{sj} – значение комплексной функции для дна бака, зависящее от массы механического осциллятора m_{sj} .

Если частоты ω_{sj} собственных колебаний механических осцилляторов не близки между собой, то при определении отклонения давления жидкости p_6 на частотах, близких к ω_{sj} , можно учитывать только один s -й тон колебаний жидкости в упругом баке (s -й механический осциллятор).

Отклонение скорости на выходе из трубы, обусловленное перемещениями двигателя и дна бака,

$$v_2 = i\omega(1 + \lambda_c)\Phi_{дв} - \lambda_c i\omega \sum_j \Phi_{sj},$$

где $\Phi_{дв}$ – значение комплексной функции для двигателя (насоса), λ_c – геометрическая характеристика сильфона. Или

$$v_2 = W[v_2, \Phi_{дв}] \Phi_{дв} + \sum_j W[v_2, \Phi_{sj}] \Phi_{sj}, \quad (15.10)$$

где $W[v_2, \Phi_{дв}] = i\omega(1 + \lambda_c)$; $W[v_2, \Phi_{sj}] = -i\omega\lambda_c$.

Когда вынужденные колебания корпуса выражаются в виде суммы колебаний по собственным функциям, тогда при учете только одного тона колебаний корпуса получаем

$$v_2 = W[v_2, q_n] q_n, \quad (15.11)$$

где $W[v_2, q_n] = i\omega[(1 + \lambda_c)f_{nnp} - \lambda_c \sum_{(s)} f_{nsj}]$.

Отклонение скорости v_2 , обусловленное изменением объема сильфона и парогазовой смеси вследствие отклонения давления $p_2 = p_{1n}$, можно определить из уравнения

$$v_2 = i\omega(k_{пг} + r)p_{1n}, \quad (15.12)$$

где $k_{пг}, r$ – коэффициенты проводимости парогазовой смеси и сильфона.

Динамическая схема замкнутой системы с учетом одного тона колебаний корпуса и расходной магистрали только для одного компонента приведена на рис. 15.2. Динамические свойства двигателя как силового агрегата выражены комплексным передаточным числом $W[p_k, p_{1n}]$, как нагрузочного агрегата – комплексным передаточным числом $W[v_n, p_{1n}]$. Эти комплексные передаточные числа должны учитывать и кавитационные явления в шнекоцентробежном насосе.

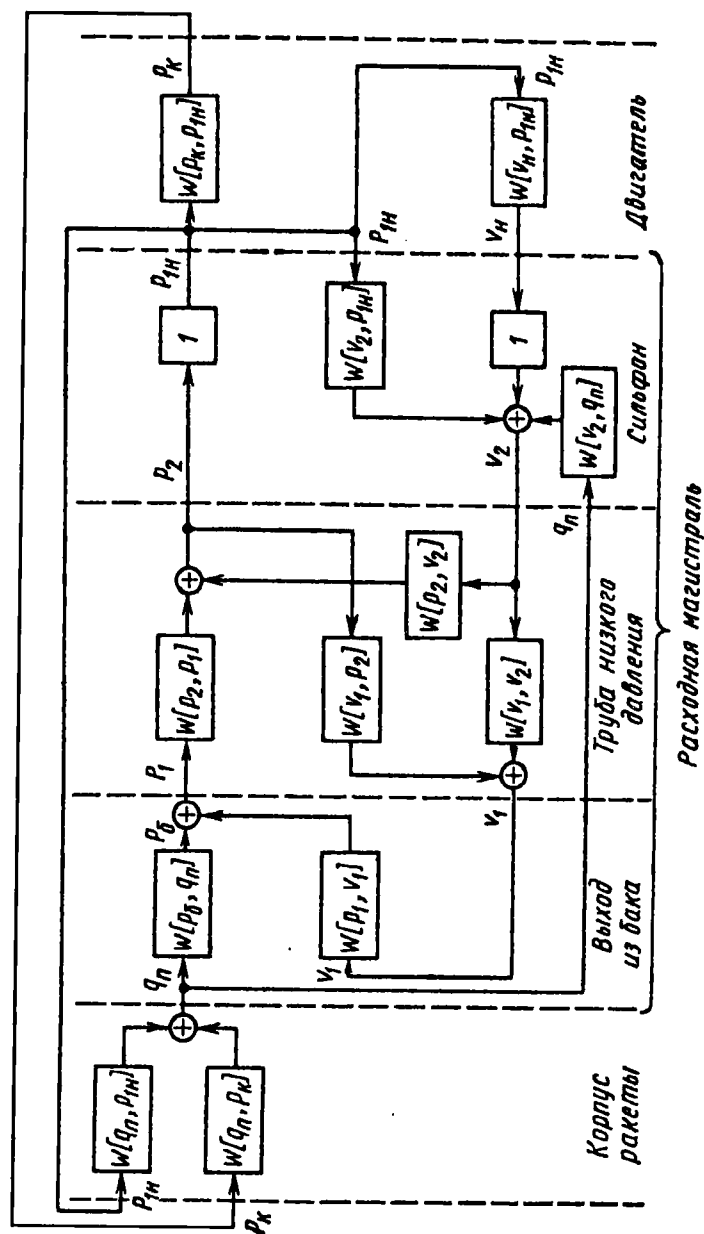


Рис. 15.2

Динамическая схема с двумя расходными магистралями приведена на рис. 15.3. Расходные магистрали не показаны, показаны только входные и выходные координаты для них.

Вследствие колебания жидкости в упругих баках частоты собственных колебаний корпуса двух или более тонов могут быть иногда близкими. В этих случаях при анализе устойчивости движения следует учитывать одновременно несколько тонов упругих колебаний корпуса ракеты. Воздействие отклонений давлений в камере P_K и на входе в насосы $P_{1H.0}$, $P_{1H.г}$ на каждый тон колебаний корпуса оценивается отдельно, отклонения давлений жидкости на выходе из баков окислителя и горючего $P_{6.0}$, $P_{6.г}$ и отклонения скоростей потоков $v_{2.0}$, $v_{2.г}$ должны суммироваться от каждого тона колебаний корпуса. Для двух тонов колебаний с обобщенными координатами q_n и q_m схема взаимодействия корпуса с расходными магистралями показана на рис. 15.4.

При наличии близких частот собственных колебаний корпуса целесообразно пользоваться комплексной функцией $\Phi(x, \omega)$, которая учитывает как бы все тоны колебаний (15.5). В этом случае отдельно определяют колебания характерных сечений – дна баков, коллекторов, двигателя от воздействия отклонений $P_K, P_{1H.0}, P_{1H.г}$. Колебания дна баков окислителя и горючего определяются через значения комплексных функций $\Phi_{30}, \Phi_{3г}$ для масс механических осцилляторов:

$$\Phi_{6.0} = \sum_s \Phi_{30}; \quad \Phi_{6.г} = \sum_s \Phi_{3г}.$$

Отклонение скоростей $v_{2.0}$ и $v_{2.г}$ согласно (15.10) равно сумме отклонений, обусловленных колебаниями двигателя и дна баков. Схема взаимодействия корпуса с расходными магистралями показана на рис. 15.5. Отклонение давления жидкости на выходе из бака связано с колебаниями дна бака масштабным коэффициентом

$$L_j = \rho_{0j} H_j x_j \omega^2 \quad (j = 0, г).$$

При некоторых условиях может возникнуть связь продольных колебаний ракеты с поперечными колебаниями. Такая связь может возникнуть как вследствие наличия значительных асимметрично расположенных масс в корпусе ракеты, так и вследствие того, что чувствительные элементы системы угловой стабилизации могут реагировать на продольные колебания корпуса. Если продольные колебания сопровождаются пульсацией тяги двигателя, то при определенных соотношениях частот может возникнуть параметрическое возбуждение поперечных колебаний корпуса, т.е. поперечные колебания будут взаимосвязаны с продольными.

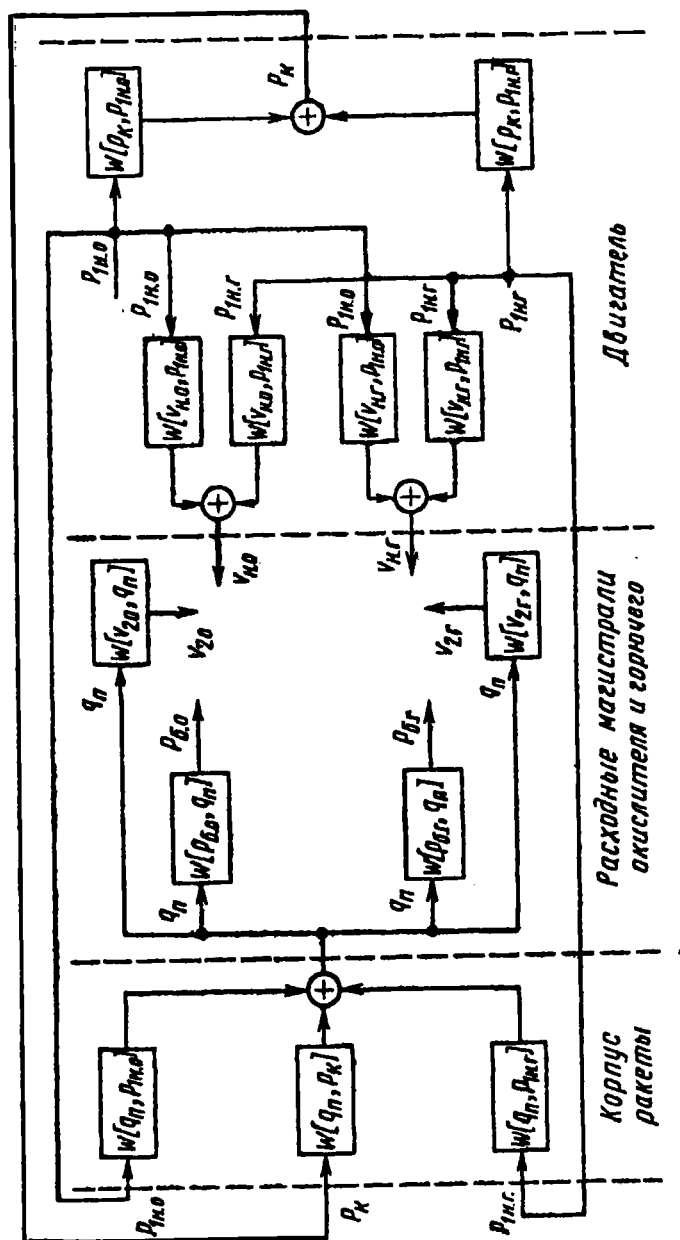


Рис. 15.3

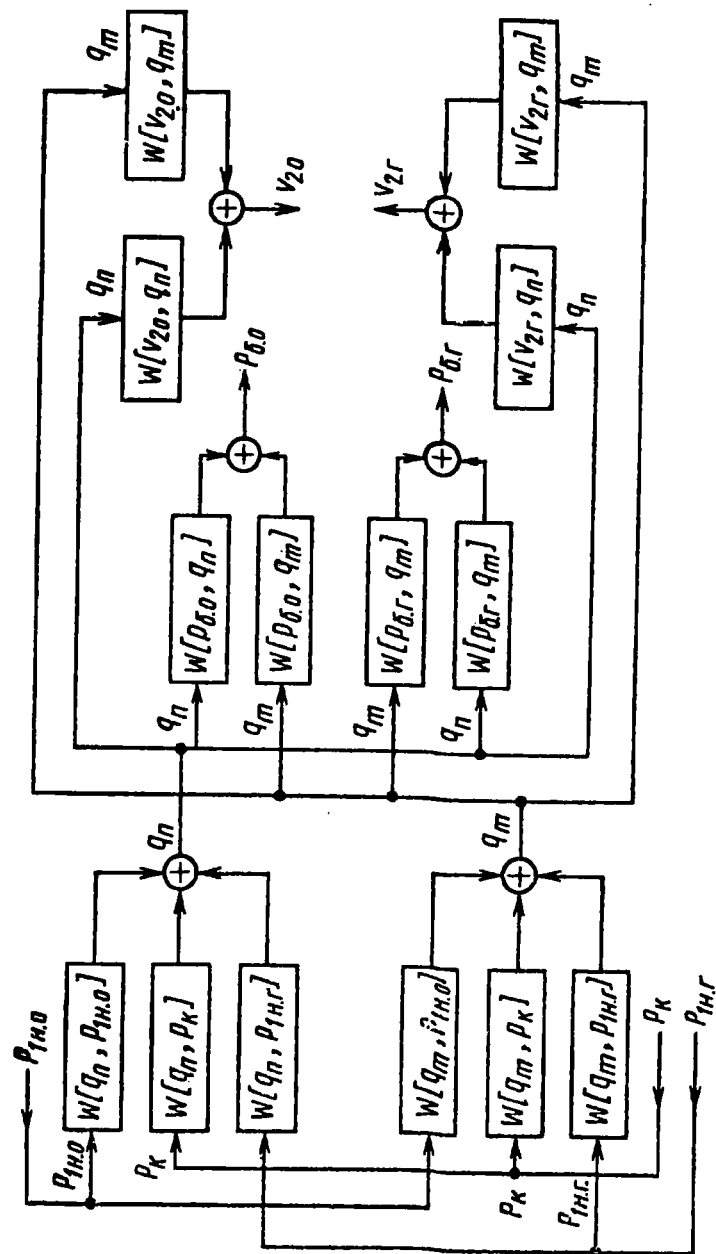


Рис. 15.4

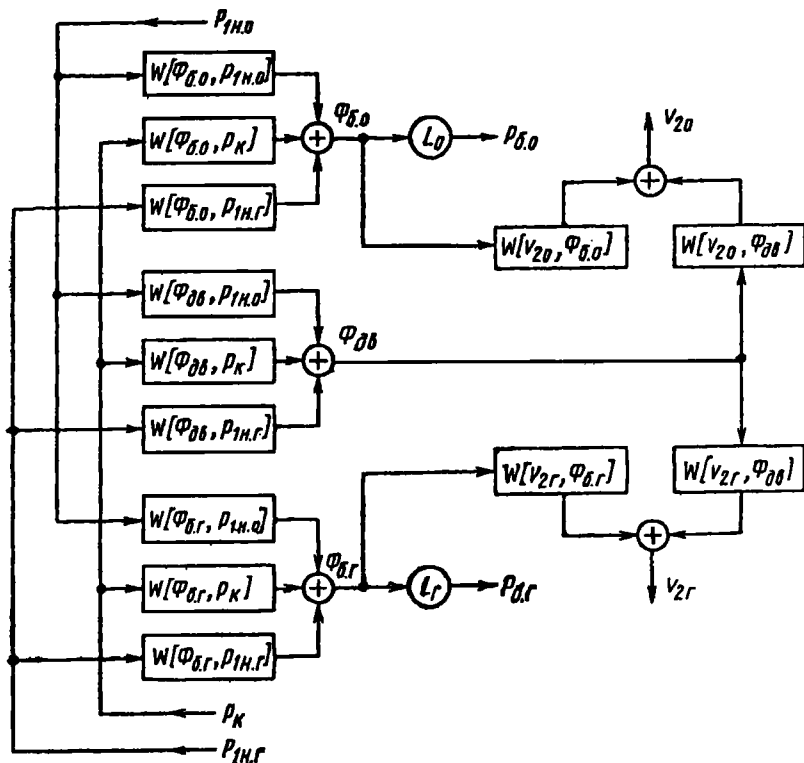


Рис. 15.5

Кроме замкнутых схем, включающих все остальные звенья динамической системы, в ракете существует ряд частных, но не менее важных, замкнутых динамических схем, в которых может возникнуть неустойчивость номинального режима работы, могут возникать автоколебания. Такой замкнутой системой, в частности, является система, состоящая из расходной магистрали и шнекоцентробежного насоса (рис. 15.6). Расходная магистраль является колебательным звеном, насос — источником энергии. Насос и нагрузка (двигатель) формируют обратную связь по давлению и скорости. Если насос работает в кавитационном режиме, то передача возмущений происходит с запаздыванием. При некоторых частотах возможна потеря устойчивости. Если прямая связь расходной магистрали с насосом осуществляется по давлению, то об-

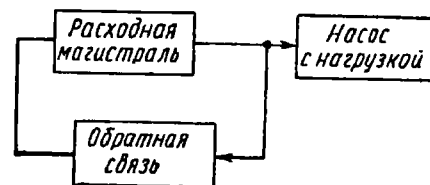
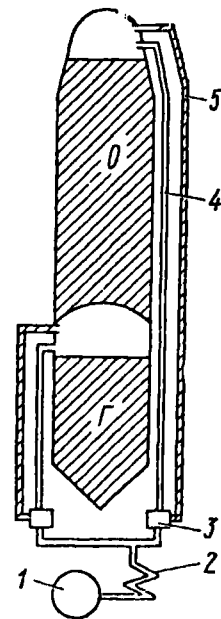


Рис. 15.6

Рис. 15.7 →



ратная связь — по скорости потока жидкости. Она может быть выражена с учетом проводимости на входе в насос $1/Z_1[p_1, v_1]$ [см. формулу (13.79)].

Система наддува топливных баков при наличии обратной связи между давлением газа в баке и регулятором образует самостоятельную динамическую систему. Эта система, вообще говоря, связана с продольными колебаниями корпуса, так как при колебаниях корпуса изменяется объем и, следовательно, давление газа в баке.

На рис. 15.7 приведена схема системы наддува баков ракеты "Атлас". Система наддува состоит из баллона со сжатым гелием 1, теплообменника 2, регуляторов 3, которые регулируют расход гелия в каждый топливный бак при работе двигателей в соответствии с измеренным давлением в газовой подушке, трубы наддува 4 и магистрали замера давления газа в баке 5. Магистраль 5 представляет собой трубку малого диаметра, в которой расход газа при установившихся условиях почти всегда равен нулю. Эта магистраль осуществляет

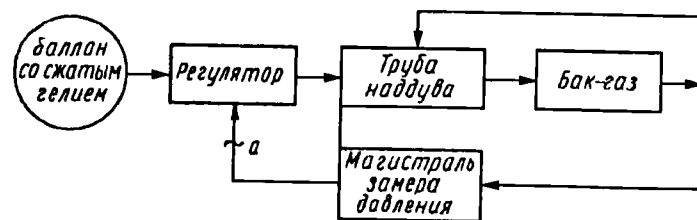


Рис. 15.8

обратную связь по давлению между газовой подушкой в баке и регулятором расхода гелия.

На рис. 15.8 показана блок-схема системы наддува одного из баков ракеты "Атлас", составленная из физических звеньев. Основным колебательным звеном системы наддува является звено бак – газ. При колебаниях подаваемого в бак газа изменяется давление газа на свободную поверхность жидкости.

15.2. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ D-РАЗБИЕНИЯ

Как уже указывалось, в замкнутой системе, состоящей из корпуса ракеты, расходных магистралей и ЖРД, может возникать неустойчивость. Несмотря на то, что многие параметры системы являются функциями времени, они очень мало меняются за время многих периодов рассматриваемых колебаний. Анализ устойчивости поэтому можно производить, полагая в определенный момент времени параметры системы постоянными величинами.

Рассмотрим динамическую схему (рис. 15.2), приняв некоторые упрощающие предположения, которые будем пояснять по ходу изложения.

Уравнения для обобщенной координаты n -го тона колебаний корпуса запишем в виде

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{1}{m_n} [F_{\tau} p_{1n}(t) - k_{\tau, \text{дв}} p_{\kappa}(t)] f_{n, \text{дв}}. \quad (15.13)$$

Для двигателя как источника энергии примем

$$p_{\kappa} = k_{\text{дв}} p_{1n}. \quad (15.14)$$

Для двигателя как нагрузочного агрегата интересующее нас соотношение получим из уравнений перепада давлений

$$p_{2n} - p_{\kappa} = \xi_{\text{дв}} \rho_0 v_n^* v_n; \quad p_{2n} = k_n p_{1n}.$$

Заменив в этом уравнении величину p_{κ} ее выражением из формулы (15.14), получим формулу для определения отклонения скорости жидкости через насос

$$v_n = Z_{\text{дв}}^* p_{1n}, \quad (15.15)$$

где коэффициент проводимости двигателя

$$Z_{\text{дв}}^* = (k_n - k_{\text{дв}}) / (\xi_{\text{дв}} \rho_0 v_n^*).$$

Отклонение давления жидкости на выходе из бака

$$p_6 = -h \ddot{q}_n, \quad (15.16)$$

$$\text{где } h = \rho_0 H \kappa \sum_{(j)} f_{n, j}.$$

Отклонение давления p_1 на входе в трубу несколько меньше отклонения давления p_6 вследствие потерь на преодоление местного сопротивления и разгон некоторой массы жидкости:

$$p_1 = p_6 - \xi_6^* v_1 - \alpha_6 v_1, \quad (15.17)$$

$$\text{где } \xi_6^* = \xi_6 \rho_0 v_1^*.$$

В первом приближении примем трубопровод жестким, а жидкость – несжимаемой. Будем считать, что между трубопроводом низкого давления и входом в насос имеется сосредоточенная упругость в виде сиффона и парогазовой смеси.

Так как жидкость несжимаема, то $v_1 = v_2$ и

$$p_1 - p_2 = \rho_0 l \dot{v}_2, \quad (15.18)$$

где l – длина трубопровода.

Отклонение скорости жидкости в трубопроводе, обусловленное изменением объема сосредоточенной упругости вследствие отклонения давления $p_2 = p_{1n}$, определим на основании уравнения (13.52):

$$v_{2\text{упр}} = k_{\text{упр}} p_{1n}, \quad \text{где } k_{\text{упр}} = k_{\text{ш}} + r. \quad (15.19)$$

Отклонение скорости жидкости в трубопроводе, обусловленное перемещением двигателя относительно потока жидкости, определим с учетом зависимости (15.11):

$$v_{2q_n} = k_{q_n} \dot{q}_n, \quad (15.20)$$

$$\text{где } k_{q_n} = (1 + \lambda_c) f_{n, \text{дв}} - \lambda_c \sum_{(j)} f_{n, j}.$$

Чтобы система уравнений, описывающих движение жидкости в расходной магистрали, была полной, нужно добавить еще соотношение, связывающее отклонение скоростей потока жидкостей в сечениях до и после сосредоточенной упругости:

$$v_2 = v_{2\text{упр}} + v_{2q_n} + v_n. \quad (15.21)$$

Исключив из уравнений (15.13) – (15.21) все переменные кроме $p_{1н}$ и q_n , получим уравнения замкнутой системы

$$\ddot{q}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = -k^* p_{1н}; \quad (15.22)$$

$$\ddot{p}_{1н} + 2\xi_\tau \omega_\tau \dot{p}_{1н} + \omega_\tau^2 p_{1н} = -(a\dot{q}_n + b\dot{q}_n),$$

$$\text{где } \omega_\tau^2 = \frac{1 + \xi_6^* Z_{\text{дв}}^*}{k_{\text{упр}}(\alpha_6 + \rho_0 l)}; \quad \xi_\tau = \frac{e_\tau}{\omega_\tau};$$

$$2e_\tau = \frac{Z_{\text{дв}}^*}{k_{\text{упр}}} + \frac{\xi_6^*}{\alpha_6 + \rho_0 l};$$

$$a = \frac{k_{q_n}}{k_{\text{упр}}} + \frac{h}{k_{\text{упр}}(\alpha_6 + \rho_0 l)}; \quad (15.23)$$

$$b = \frac{\xi_6^* k_{q_n}}{k_{\text{упр}}(\alpha_6 + \rho_0 l)};$$

$$k^* = \frac{1}{m_n}(k_{\text{дв}} k_{\tau, \text{дв}} - F_\tau) f_{n, \text{дв}}.$$

Таким образом, исследуемая система сводится к двум гармоническим осцилляторам, один из которых (корпус ракеты) имеет частоту собственных колебаний ω_n , а другой (расходный трубопровод с двигателем как нагрузочным агрегатом) – частоту ω_τ . Структурная схема замкнутой системы показана на рис. 15.9.

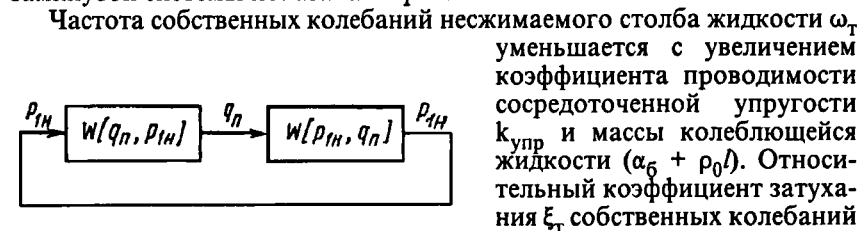


Рис. 15.9

жидкости в трубопроводе зависит от коэффициента проводимости двигателя $Z_{\text{дв}}^*$ и коэффициента активного сопротивления ξ_6^* на выходе из бака.

Максимальное значение динамического коэффициента усиления первого осциллятора будет при частоте $\omega \approx \omega_n$, а второго – при частоте $\omega \approx \omega_\tau$. В случае выполнения равенства $\omega_n \approx \omega_\tau$ на частоте $\omega \approx \omega_n \approx \omega_\tau$ коэффициент усиления системы достигает максимального значения, и при этом возникают наиболее благоприятные условия для потери устойчивости. При прочих равных условиях коэффициент усиления тем больше, чем больше коэффициент форм собственных колебаний двигателя и дна бака.

Из уравнений (15.22) и равенств (15.23) видно, что, если коэффициент формы собственных колебаний двигателя $f_{n, \text{дв}} = 0$ (внешняя сила приложена к корпусу в узловом сечении), цепь на рис. 15.9 как бы разрывается и замкнутая система перестает существовать.

Когда коэффициент формы собственных колебаний дна бака $f_{n, \text{б}}$ равен нулю, т.е. $\sum_{\omega} f_{nsj} = 0$, то $p_6 = 0$, но система остается замкнутой. Колебания

корпуса воздействуют на поток жидкости в трубопроводе через перемещение двигателя относительно потока ($f_{n, \text{дв}} \neq 0$). Возможность потери устойчивости увеличивается, если $f_{n, \text{дв}} \sum_{\omega} f_{nsj} > 0$, и уменьшается, если $f_{n, \text{дв}} \sum_{\omega} f_{nsj} < 0$, по сравнению со случаем, когда $\sum_{\omega} f_{nsj} = 0$.

На границе устойчивости система совершает гармонические колебания. Примем $q_n(t) = q_n e^{i\omega t}$ и $p_{1н}(t) = p_{1н} e^{i\omega t}$ и подставим эти выражения в уравнение (15.22). После исключения переменных q_n и $p_{1н}$ и разделения действительных мнимых частей найдем связь между параметрами системы и частотой колебаний ω на границе устойчивости:

$$\left. \begin{aligned} 4\omega^2 \xi_n \omega_n \omega_\tau - (\omega_n^2 - \omega^2)(\omega_\tau^2 - \omega^2) &= k a \omega^2; \\ \xi_n \omega_n (\omega_\tau^2 - \omega^2) + \xi_\tau \omega_\tau (\omega_n^2 - \omega^2) &= b k^* / 2. \end{aligned} \right\} \quad (15.24)$$

Из этих двух уравнений можно исключить частоту колебаний ω и найти соотношение между параметрами системы на границе устойчивости – применить метод D -разбиений. Например, зная величины коэффициентов ξ_τ и ω_τ , которые практически не изменяются в процессе полета, и коэффициентов k , a , b , ω_n в разные моменты времени полета t , можно вычислить для двух моментов времени величины $\xi_n^{(0)}$ на границе устойчивости и сравнить их с действительными значениями коэффициентов ξ_n . В этом случае критерий для оценки устойчивости системы

достаточно прост: если $\xi_n^{(0)} < \xi_n$, то система устойчива, если $\xi_n^{(0)} > \xi_n$, то неустойчива.

Оценку устойчивости более сложных систем, чем описанные уравнениями (15.22), целесообразно производить какими-либо методами, в частности, частотными методами теории автоматического регулирования.

15.3. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Рассмотрим динамическую систему, изображенную на рис. 15.2. Объединив расходную магистраль с двигателем как нагрузочным агрегатом в одно звено с передаточной функцией $W[p_{1H}, q_n]$, получим структуру динамической системы, показанную на рис. 15.10. Предположим, что звено, имеющее передаточную функцию $W[p_{1H}, q_n]$, будет устойчивым. Двухконтурную систему (рис. 15.10) преобразуем в одноконтурную, устойчивость которой можно оценивать при помощи критерия Найквиста. Структурная схема одноконтурной системы показана на рис. 15.11.

Здесь

$$W^*[q_n, p_{1H}] = W[q_n, p_{1H}] + W[q_n, p_K]W[p_K, p_{1H}]. \quad (15.25)$$

Представим уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи в виде

$$W(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) = W[p_{1H}, q_n]W^*[q_n, p_{1H}] = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}. \quad (15.26)$$

С учетом равенства (15.25) это уравнение можно представить в виде

$$W(i\omega) = [A_{qP_K}A_{P_KP_n}e^{i(\varphi_{qP_K} + \varphi_{P_KP_n})} + A_{qP_n}e^{i\varphi_{qP_n}}]A_{P_nq}e^{i\varphi_{P_nq}}, \quad (15.27)$$

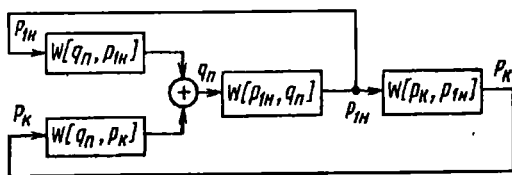


Рис. 15.10

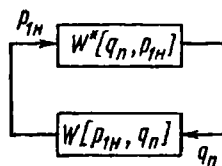


Рис. 15.11

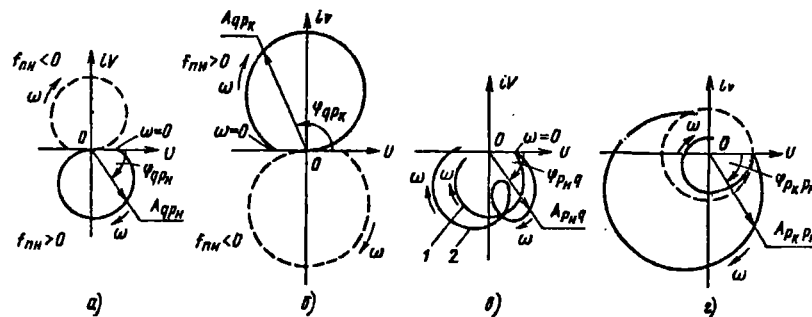


Рис. 15.12

где векторы комплексных передаточных чисел отдельных звеньев имеют значения:

$$A_{qP_n}e^{i\varphi_{qP_n}} = W[q_n, p_{1H}]; \quad A_{qP_K}e^{i\varphi_{qP_K}} = W[q_n, p_K]; \quad (15.28)$$

$$A_{P_KP_n}e^{i\varphi_{P_KP_n}} = W[p_K, p_{1H}]; \quad A_{P_nq}e^{i\varphi_{P_nq}} = W[p_{1H}, q_n].$$

Здесь и дальше динамические коэффициенты усиления A_{qP_n} , A_{qP_K} , ... и фазовые характеристики φ_{qP_n} , φ_{qP_K} , ... являются функциями частоты ω .

Формулы для комплексных передаточных чисел, характеризующие динамические свойства корпуса ракеты, получим на основании уравнения (15.13):

$$A_{qP_n}e^{i\varphi_{qP_n}} = \frac{F_T f_{nДВ}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\omega\xi_n\omega_n};$$

$$A_{qP_K}e^{i\varphi_{qP_K}} = \frac{-k_{г.дв} f_{нДВ}}{\omega_n^2 - \omega^2 + i2\omega\xi_n\omega_n}.$$

Вид амплитудно-фазовых характеристик корпуса ракеты приведен на рис. 15.12, а, б. Это характеристики обычных колебательных звеньев с демпфированием, пунктиром показаны характеристики для случая, когда коэффициент формы собственных колебаний двигателя $f_{нДВ} < 0$. На рис. 15.12, в, г приведены возможные амплитудно-фазовые характеристики расходной магистрали и двигателя. В зависимости от структуры

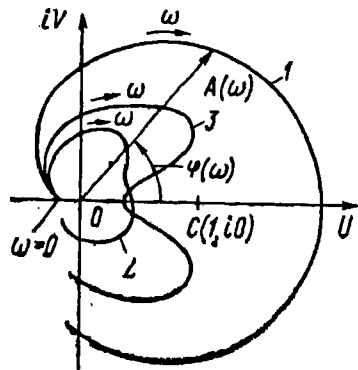


Рис. 15.13

расходной магистрали и ее параметров, а также от структурной схемы и параметров двигателя вид этих характеристик может изменяться в значительной степени.

Произведя сложение и умножение векторов в интересующем нас диапазоне частот согласно уравнению (15.27) и воспроизведя полученные результаты графически, получим диаграмму Найквиста (рис. 15.13). Кривая 1 соответствует системе, в которой частота собственных колебаний корпуса ракеты близка к частоте собственных колебаний жидкости в расходной магистрали. Оба звена

этой системы (см. рис. 15.11) устойчивы, и поскольку кривая 1 пересекает вещественную ось U один раз правее точки $C(1, i0)$, то эта замкнутая система неустойчива.

Кривая 2 соответствует системе, в которой частота собственных колебаний жидкости в расходной магистрали значительно ниже частоты собственных колебаний корпуса. Максимальный динамический коэффициент усиления разомкнутой цепи меньше единицы, амплитудно-фазовая характеристика не может пересечь вещественную ось правее точки $C(1, i0)$, и замкнутая система устойчива.

Кривая 3 характеризует динамические свойства разомкнутой цепи, когда частота собственных колебаний корпуса и жидкости в расходной магистрали близки между собой, однако подбором динамических характеристик регуляторов двигателя в диапазоне этих частот удалось значительно уменьшить коэффициент усиления двигателя и таким образом обеспечить устойчивость замкнутой системы.

Уравнение амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой цепи наиболее просто, когда можно пренебречь вектором $A_{qP_k} e^{i\varphi_{P_k}}$ по сравнению с произведением векторов $A_{qP_k} A_{P_k P_n} e^{i(\varphi_{P_k} + \varphi_{P_n})}$. При такой разомкнутой цепи для амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик имеются уравнения

$$A(\omega) = A_{qP_k} A_{P_k P_n} A_{P_n q};$$

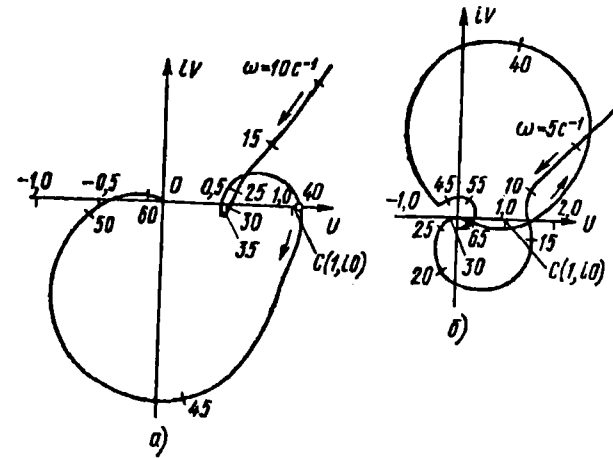


Рис. 15.14

$$\varphi(\omega) = \varphi_{qP_k} + \varphi_{P_k P_n} + \varphi_{P_n q}.$$

Как видно из рис. 15.13, при некоторой частоте $\omega = \omega_n$ будет выполняться равенство

$$\varphi(\omega_n) = \varphi_{qP_k} + \varphi_{P_k P_n} + \varphi_{P_n q} = 0.$$

Замкнутая система будет неустойчивой, если

$$A(\omega_n) = A_{qP_k} A_{P_k P_n} A_{P_n q} > 1.$$

Наилучшие условия для такой ситуации имеются тогда, когда частота собственных колебаний жидкости в расходной магистрали совпадает с частотой собственных колебаний корпуса. Из анализа зависимостей коэффициентов A_{qP_k} , $A_{P_k P_n}$, $A_{P_n q}$ от параметров системы можно сделать определенные выводы о влиянии на устойчивость системы таких параметров, как ξ_n , ξ_r , $f_{n\text{дв}}^2$, $f_{n\text{дв}} \sum_{(i)} f_{n\text{дв}}$ и пр. Эти выводы были сформулированы в предыдущем разделе.

На рис. 15.14 приведены амплитудно-частотные характеристики разомкнутой цепи системы наддува баков ракеты "Атлас" для момента запуска ракеты (место размыкания системы показано точкой a на

рис. 15.8). Кивая на рис. 15.14, а представляет собой амплитудно-фазовую характеристику наддува бака горючего при отключенной системе наддува бака окислителя. С изменением частоты от 0 до $+\infty$ при частоте $\omega = 40$ 1/с, которая равна частоте первого тона собственных колебаний ракеты, кривая пересекает вещественную ось один раз правее точки $C(1, i0)$ в направлении по часовой стрелке. Так как все звенья разомкнутой цепи (см. рис. 15.8) устойчивы, то система наддува бака горючего будет неустойчива.

Кривая на рис. 15.14, б представляет собой частотную характеристику разомкнутой цепи системы наддува бака окислителя; предполагается, что система наддува бака горючего в это время не работает. При изменении частоты от 0 до $+\infty$ кривая пересекает вещественную ось правее точки $C(1, i0)$ два раза в противоположных направлениях, поэтому будет устойчивой.

Из совместного анализа устойчивости обеих систем наддува установлено, что в первые секунды после запуска система неустойчива, граница устойчивости достигается на пятой секунде полета, после чего устойчивость системы увеличивается. Это объясняется увеличением объема газовой подушки и соответственно уменьшением коэффициента усиления отклонения давления p_6 газа в баке.

15.4. ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОМ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

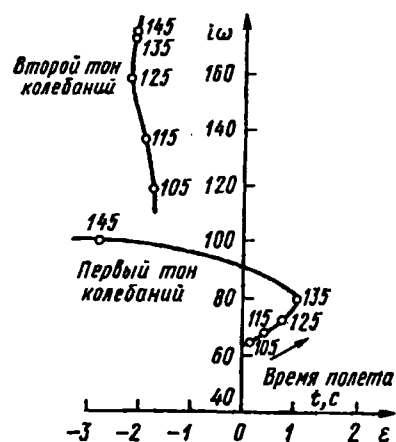


Рис. 15.15

Оценку устойчивости системы можно провести путем определения траектории корней $z = \varepsilon + i\omega$ характеристического уравнения замкнутой системы. На рис. 15.15, например, приведены результаты вычисления корней характеристического уравнения для ракеты "Титан-2". График показывает изменение корней, соответствующих первому и второму тонам колебаний ракеты в функции времени полета. Неустойчивость ракеты на частоте первого тона колебаний ее корпуса теоретически предполагалась приблизительно между 105 и 140 с полета. Такие же примерно данные были получе-

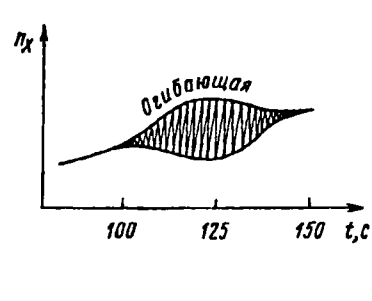


Рис. 15.16

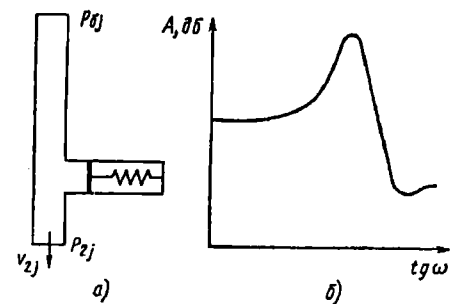


Рис. 15.17

ны при телеметрических измерениях во время первых летных испытаний ракеты "Титан-2". На рис. 15.16 показан график осевой перегрузки n_x , полученный при летных испытаниях. Колебания начались в момент времени $t \approx 100$ с, достигли максимума в момент времени $t \approx 120$ с и прекратились к концу полета. Колебания имеют почти синусоидальный характер с частотой, изменяющейся во времени полета от 10 до 15 Гц.

Для придания системе устойчивости на трубопровод низкого давления перед входом в насос был установлен пружинно-гидравлический демпфер. Схема трубопровода с демпфером показана на рис. 15.17, а; амплитудно-частотная характеристика трубопровода с демпфером при условии, что жидкость несжимаема, приведена на рис. 15.17, б. Демпфер уменьшает колебания на входе в насос и как бы разрывает цепь между топливной магистралью и двигателем. Жесткость пружины демпфера подбирают так, чтобы наименьший модуль амплитудно-фазовой характеристики трубопровода с демпфером был при частоте, равной частоте собственных колебаний корпуса. Для длинного трубопровода расчет жесткости пружины демпфера следует производить с учетом сжимаемости жидкости и сосредоточенной упругости на конце трубопровода.

На рис. 15.18 приведены результаты определения траектории корней $z = \varepsilon + i\omega$ характеристического уравнения для первых двух тонов колебаний ракеты "Атлас". Корни вычислены для двух значений относительного коэффициента затухания корпуса: $\xi = 0,01$ и $\xi = 0,02$. Как видно, для очень малых коэффициентов затухания каждый тон колебаний в разные моменты времени может стать неустойчивым.

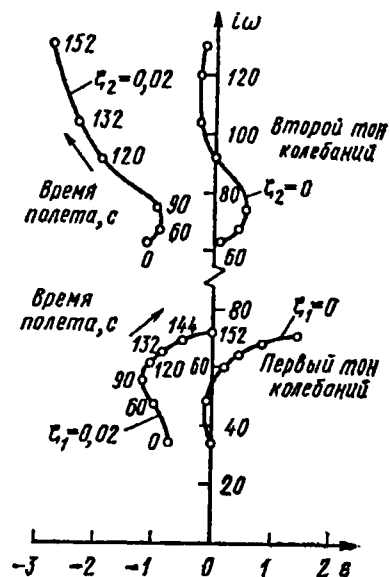


Рис. 15.18

тогда, когда замкнутая система (корпус ракеты, топливные магистрали, двигатель) устойчива. Эти пульсации возникают от процессов, происходящих в двигателе. Таким образом, возникновение пульсаций есть свойство, присущее рабочему процессу ЖРД.

Пульсации тяги P двигателя можно характеризовать функцией спектральной плотности $S_P(\omega)$ и дисперсией отклонения тяги двигателя:

$$\sigma_P^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_P(\omega) d\omega.$$

На активном участке полета ракета как замкнутая система испытывает воздействие пульсаций тяги двигателя, которые относительно замкнутой системы являются внешними. Пульсации вызывают вынужденные продольные упругие колебания корпуса и колебания давления в топливных магистралях. Сам двигатель во время полета испытывает влияние обратной связи, обусловленной колебаниями корпуса ракеты и жидкости в топливных магистралях. В зависимости

Для промежутка времени перед разделением ступеней ракеты относительный коэффициент затухания для первых двух тонов колебаний определялся во время продольных динамических испытаний и составил $\xi = 0,01 \dots 0,03$.

Во время полета на ракете "Атлас" в последние несколько секунд перед разделением ступеней возникает продольная неустойчивость по первому тону колебаний корпуса, но амплитуда колебаний не достигает существенной величины.

15.5. РОЛЬ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Согласно данным стендовых испытаний при работе ЖРД пульсации тяги наблюдаются даже

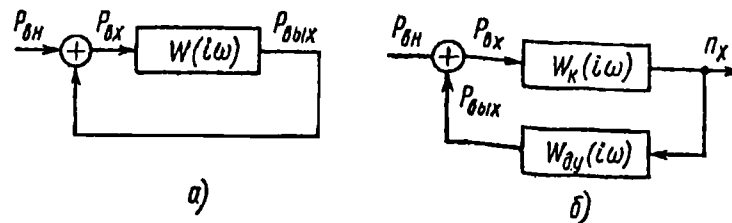


Рис. 15.19

от коэффициента усиления и фазовых соотношений обратная связь может иметь большое значение, и, как было показано, в замкнутой системе может возникнуть неустойчивость.

На рис. 15.19 показана схема внешнего воздействия на замкнутую систему. Здесь $W(i\omega)$ — амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой цепи, состоящей из корпуса ракеты, топливных магистралей и двигателя; $P_{вн}$ — внешнее воздействие на замкнутую систему флуктуаций тяги двигателя, не зависящих от колебаний корпуса и давления в топливных магистралях (например, при стендовых испытаниях); $P_{вых}$ — флуктуации тяги двигателя, находящегося в замкнутой системе (на выходе из звена); $P_{вх}$ — флуктуации тяги, действующие на корпус ракеты в полете (на входе в звено). Соотношения между флуктуациями выражаются известными формулами:

$$P_{вх} = P_{вн} + P_{вых}; \quad P_{вых} = P_{вх} W(i\omega).$$

Считая флуктуации тяги стационарными, получим соотношение между флуктуацией спектральной плотности $S_{вх}(\omega)$ тяги, действующей на корпус, и флуктуацией $S_{вн}(\omega)$ тяги при стендовых испытаниях:

$$S_{вх}(\omega) = S_{вн}(\omega) \frac{1}{|1 - W(i\omega)|^2}.$$

Определим в некотором поперечном сечении x отклонение продольной перегрузки ракеты n_x , вызванное воздействием флуктуации тяги на замкнутую систему. Представив

$$W(i\omega) = W_x(i\omega) W_{дy}(i\omega),$$

где $W_k(i\omega)$, $W_{д.у}(i\omega)$ – амплитудно-фазовые характеристики корпуса ракеты и двигательной установки (двигателя и топливных магистралей), получим структурную схему системы, показанную на рис. 15.19, б. Здесь двигательная установка выполняет роль обратной связи относительно корпуса ракеты.

Так как спектральная плотность случайного процесса на выходе линейной системы равна спектральной плотности внешнего воздействия на ее входе, умноженной на квадрат модуля частотной характеристики этой системы, то спектральная плотность отклонения продольной перегрузки

$$S_n(\omega) = S_{вх}(\omega) |W_k(i\omega)|^2.$$

Принимая во внимание соотношение между $S_{вх}(\omega)$ и $S_{вн}(\omega)$, получим выражение для дисперсии отклонения продольной перегрузки:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_{вн}(\omega) \frac{|W_k(i\omega)|^2}{|1 - W(i\omega)|^2} d\omega.$$

Полоса пропускания, определяемая частотной характеристикой корпуса ракеты, невелика, поэтому в пределах этой полосы можно считать, что функция $S_{вн} = \text{const}$. Тогда

$$\sigma_n^2 \approx S_{вн} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|W_k(i\omega)|^2}{|1 - W(i\omega)|^2} d\omega.$$

Если бы корпус не имел обратной связи, то дисперсия отклонения продольной перегрузки была бы

$$\sigma_n^2 \approx S_{вн} \int_{-\infty}^{\infty} |W_k(i\omega)|^2 d\omega.$$

В диапазоне частот, близких к частоте собственных колебаний корпуса, величина $|1 - W(i\omega)|$ может оказаться меньше единицы, и дисперсия отклонения продольной перегрузки корпуса при обратной связи будет больше, чем без обратной связи. При гармоническом внешнем воздействии $P_{вн}$ отношение отклонений продольных перегрузок будет равно

$$\frac{(n_x) \text{ при обратной связи}}{(n_x) \text{ без обратной связи}} = \frac{P_{вх}}{P_{вн}} = \frac{1}{1 - W(i\omega)}.$$

Обратная связь вызывает увеличение отклонений продольной перегрузки; она как бы уменьшает коэффициент демпфирования корпуса.

Таким образом, в диапазоне частот собственных колебаний корпуса на активном участке полета, даже в случае устойчивости, могут возникнуть большие колебания продольной перегрузки и медленно затухать переходные процессы, возникающие, например, при запуске двигателя.

15.6. МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ

Для того чтобы динамическая система была практически устойчивой, нужно, прежде всего, чтобы в процессе полета частоты собственных продольных колебаний корпуса не совпадали с частотами собственных колебаний жидкости в расходных магистралах. Как корпус ракеты, так и жидкость в расходных магистралах обладают целым спектром частот собственных колебаний. Частоты собственных колебаний жидкости в расходной магистрали зависят от длины магистрали и упругости ее стенок, сжимаемости жидкости и наличия парогазовой смеси (сосредоточенной упругости) перед входом в насос. Эти частоты в процессе полета остаются постоянными, если не изменяются параметры сосредоточенной упругости. Частоты собственных колебаний корпуса изменяются в процессе полета, плавно возрастая по мере расхода топлива из баков. Наиболее важно при этом, чтобы не совпадали частоты собственных колебаний низшего тона корпуса и жидкости в магистралах. Так как магистраль для одного из компонентов топлива обычно значительно длиннее, чем для другого, то наиболее вероятно, что с низшей частотой собственных колебаний корпуса может совпадать частота собственных колебаний жидкости в длинной расходной магистрали.

Если в процессе полета в какой-либо момент времени эти частоты становятся близкими, то динамические свойства расходной магистрали следует изменить так, чтобы частота собственных колебаний жидкости в магистрали уменьшилась или, наоборот, увеличилась. Увеличить частоту собственных колебаний жидкости в магистрали можно, главным образом, уменьшением коэффициента проводимости сосредоточенной упругости $k_{упр}$. Для этого нужно увеличить давление наддува в баке и таким образом улучшить кавитационные характеристики насоса. Увеличение жесткости сильфона также приводит к уменьшению коэффициента $k_{упр}$, но в значительно меньшей степени, чем уменьшение или полное устранение объема парогазовой смеси.

Уменьшить частоту собственных колебаний жидкости в расходной магистрали можно несколькими способами. Можно установить на расходную магистраль (преимущественно на входе в насос) гидравлический аккумулятор (демпфер продольных колебаний). Гидравлический аккумулятор снижает частоту колебаний и в этом отношении обладает свойствами сосредоточенной упругости. Некоторые схемы гидравлических аккумуляторов представлены на рис. 12.19. Способ снижения частоты гидравлическим аккумулятором легко осуществим и надежен, но осложняет компоновку и приводит к увеличению веса конструкции ракеты.

Значительного уменьшения частоты собственных колебаний жидкости можно добиться, если заменить трубу круглого поперечного сечения трубой некруглого поперечного сечения. В гл. XIII, например, было показано, что в трубе с поперечным сечением в виде эллипса приведенная скорость звука и, следовательно, частота собственных колебаний жидкости меньше, чем в круглой трубе. Частота колебаний уменьшится еще более, если труба будет иметь крупные продольные гофры. Применение трубы некруглого поперечного сечения незначительно увеличивает массу конструкции ракеты. Расчет на прочность и технология изготовления таких труб сложнее, чем труб кругового поперечного сечения.

В качестве одного из способов уменьшения частоты собственных колебаний потока жидкости в магистрали можно применять вдувание в поток незначительного количества нерастворимого газа. Однородное распределение газа по потоку в криогенных и некриогенных жидкостях осуществляется при помощи струйного инжектора. Если пренебречь поверхностным натяжением жидкости (что справедливо при достаточно большом диаметре пузырьков газа) и не учитывать явления массообмена между газом и жидкостью, то эквивалентная скорость звука a_3 газожидкостной смеси может быть определена по формуле

$$a_3^2 = \frac{E_2 E_{\text{пр.ж}}}{[\beta E_{\text{пр.ж}} + (1 - \beta) E_2][\beta \rho_2 + (1 - \beta) \rho_{\text{ж}}]},$$

где E_2 — модуль упругости газа; $E_{\text{пр.ж}}$ — приведенный модуль упругости жидкости (с учетом упругости стенок трубы); β — объемное отношение газа и жидкости; ρ_2 , $\rho_{\text{ж}}$ — плотности газа и жидкости.

Расчеты показывают, что даже небольшое количество нерастворенного газа в потоке жидкости обеспечивает значительное уменьшение приведенной скорости звука и, следовательно, снижение частоты собственных колебаний.

При уменьшении наддува бака кавитационные характеристики насоса ухудшаются, образуется или значительно увеличивается объем парогазовой смеси, от чего частота собственных колебаний жидкости в магистрали уменьшится. Но этот способ наименее приемлем, так как с ухудшением кавитационных характеристик коэффициент полезного действия насоса уменьшается. Кроме того, возникает опасность появления неустойчивости и автоколебаний в системе, состоящей из насоса и расходной магистрали.

Из данных анализа следует, что устойчивость движения системы можно повысить увеличением коэффициента сопротивления магистрали. Одним из средств в этом направлении является увеличение перепада давлений на форсунках двигателя.

Для обеспечения устойчивости динамической системы можно использовать также регуляторы двигателя. Это в особенности относится к схемам, в которых двигатель имеет замкнутую систему питания. Рабочий процесс двигателя с такой системой питания на низких частотах обладает колебательными свойствами. Путем подбора характеристик регуляторов можно изменить диапазон частот, в котором двигатель имеет максимальный коэффициент усиления, и добиться значительного изменения фазочастотной характеристики двигателя в необходимом направлении.

15.7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Вследствие сложности ракеты как динамической системы в процессе ее проектирования и лётно-конструкторской отработки в дополнение к теоретическим расчетам проводятся экспериментальные исследования. Экспериментально отрабатываются ТНА, двигатели, топливные магистрали и др. При обработке исследуются и динамические характеристики. Экспериментальное получение динамических характеристик корпуса ракеты (частот и форм собственных колебаний, коэффициентов демпфирования) может производиться как на конструктивно подобных моделях, так и на натурных образцах.

Рассмотрим, как проводилось исследование динамических характеристик ракетно-космической системы "Сатурн-5" — "Аполлон". Система состоит из четырех ступеней S-1, S-2, S-3, S-4 и лунного экспедиционного отсека (ЛЭО), соединенных между собой последовательно. В исследовательском центре им. Лэнгли NASA для исследования продольных колебаний ракеты "Сатурн-5" была разработана динамическая схема и физическая динамически подобная модель системы в масштабе 1:10.

Силовая конструкция физической динамически подобной модели системы в основных чертах является точной геометрически подобной копией натурной конструкции. Длина модели ≈ 11 м, диаметр первой ступени ≈ 1 м. Элементы конструкции, расположенные выше переходного конуса ЛЭО, геометрически подобны прототипу, но отличны в отношении конструкции и использованных материалов. Модель лунного экспедиционного отсека имеет подобие только по массе, положению центра масс, инерционности и подвеске. Для имитации горючего на ступени S-1 и жидкости кислорода на всех ступенях применялась вода. Для имитации жидкого водорода на ступенях S-2 и S-4 использовались маленькие пенопластовые шарики плотностью $\approx 60 \text{ кг/м}^3$. Наддув всех баков осуществлялся азотом до давления $0,7 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

При испытаниях физическую модель подвешивали при помощи специально спроектированной системы, состоящей из четырех симметрично расположенных тросов, закрепленных сверху на жесткой опорной ферме. Длина и диаметр тросов были выбраны такими, чтобы частота колебаний модели ракеты как твердого тела была ниже, чем частота первого тона ее упругих колебаний. Возбуждение физической модели производилось через диаметр и цапфы центрального двигателя. Динамометр использовался в качестве чувствительного элемента в сервосистеме с электродинамическим вибратором для поддержания заданной величины возбуждения.

В табл. 15.1 приведены частоты ω в 1/с собственных колебаний ракеты "Сатурн-5", вычисленные для одномерной (стержневой) и двухмерной (оболочечной) математических моделей, а также полученные экспериментальным путем на динамически подобной физической модели в масштабе 1:10. Расчетные и экспериментальные данные соответствуют моменту старта ракеты и моменту полного выгорания топлива в ступени S-1.

Таблица 15.1

Тоны колебаний	Старт		Полное выгорание топлива			
	Экспериментальные данные физической модели	Расчетные данные математической модели		Экспериментальные данные физической модели	Расчетные данные математической модели	
		одномерной	двухмерной		одномерной	двухмерной
Первый	30,9	37,5	31,4	51,1	54,4	56,1
Второй	40,2	39,3	40,7	69,5	71,1	72,0
Третий	56,4	56,4	59,1	—	74,1	75,8
Четвертый	71,3	71,1	74,0			

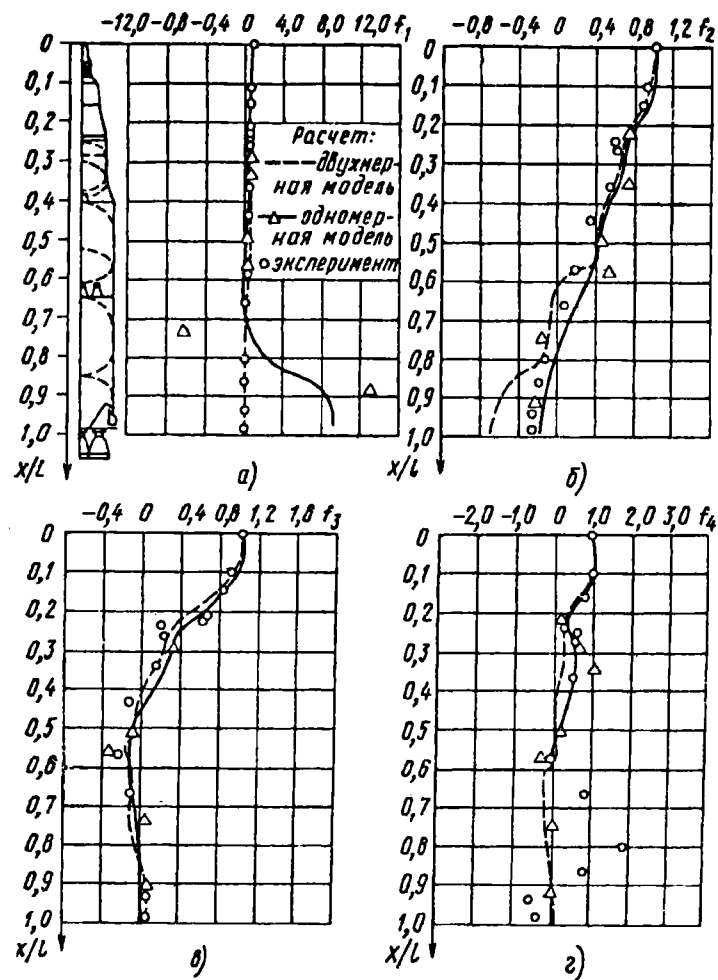


Рис. 15.20

На рис 15.20 приведены для сравнения формы f_n собственных колебаний первых четырех тонов, соответствующие моменту старта ракеты. Треугольные значки показывают значения форм собственных колебаний центра масс жидкости в баках. Экспериментальные данные представлены светлыми кружками, показывающими значения форм

собственных колебаний отдельных точек продольной оси корпуса ракеты.

В основном было получено хорошее совпадение экспериментальных и расчетных данных по одномерной математической модели. Исключением явился первый тон колебаний в условиях старта, когда движение массы жидкости в баке окислителя первой ступени происходило в противофазе с корпусом. Расчеты двухмерной математической модели дают для этого случая хорошее совпадение с экспериментом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абгарян К.А., Рапопорт И.М. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1969. 378 с.
2. Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1990. 463 с.
3. Аппазов Р.Ф., Лавров С.С., Мишин В.П. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М.: Наука, 1966. 270 с.
4. Бюшгенс Г.С., Студнев Р.В. Динамика пространственного движения самолета. М.: Машиностроение, 1967. 340 с.
5. Гликман Б.Ф. Автоматическое регулирование жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1974. 396 с.
6. Глушко В.П. Развитие ракетостроения и космонавтики в СССР. Издательство АПН, 1973. 56 с.
7. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами / Под ред. Хитрика М.С., Федорова С.М. М.: Машиностроение, 1972. 230 с.
8. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Собр. соч., т. 2, вып. 1. М.—Л.: ГНТИ, 1931. 136 с.
9. Ишлинский А.Ю. Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
10. Колесников К.С. Жидкостная ракета как объект регулирования. М.: Машиностроение, 1969. 298 с.
11. Колесников К.С. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем. М.: Машиностроение, 1971. 260 с.
12. Колесников К.С., Сухов В.Н. Упругий летательный аппарат как объект автоматического управления. М.: Машиностроение, 1974. 267 с.
13. Колесников К.С., Самойлов Е.А., Рыбак С.А. Динамика топливных систем ЖРД. М.: Машиностроение, 1975. 171 с.
14. Краснов Н.Ф. Аэродинамика. М.: Высшая школа, 1976. Ч. I, 383 с., ч. II, 368 с.
15. Кудрявцев В.М. и др. Основы теории и расчета жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1975. 656 с.
16. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Госфизиздат, 1961. 824 с.
17. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. М.: Машиностроение, 1968. 532 с.
18. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. М.: Машиностроение, 1971. 463 с.
19. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
20. Мойсеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
21. Нариманов Г.С., Докучаев Л.В., Луковский И.А. Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
22. Натанзон М.С. Продольные автоколебания жидкостной ракеты. М.: Машиностроение, 1977. 205 с.
23. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // ПММ, 1956, с. XX, вып. 1. С. 3...20.
24. Петров Б.Н. и др. Современные методы проектирования систем автоматического управления. М.: Машиностроение, 1967. 703 с.

25. Пилипенко В.В., Задонцев В.А., Натанзон М.С. Кавитационные автоколебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение, 1977. 352 с.
26. Пожалостин А.А. Определение параметров механического аналога для осесимметричных колебаний упругого цилиндрического сосуда с жидкостью // Инж. журнал МТТ, 1966, № 5. С. 157...159.
27. Попов Е.П. Динамика систем автоматического регулирования. М.: Гостехиздат, 1954. 798 с.
28. Раушенбах Б.В. Вибрационное горение. М.: Физматгиз, 1961. 222 с.
29. Роуз. Анализ продольной устойчивости ракет на жидком топливе // ВРТ, 1967, № 8. С. 3...25.
30. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1972. 449 с.
31. Сиярев Г.Б., Добровольский М.В. Жидкостные ракетные двигатели. М.: Оборонгиз, 1957. 580 с.
32. Феодосьев В.И., Сиярев Г.Б. Введение в ракетную технику. М.: Оборонгиз, 1960. 506 с.
33. Феодосьев В.И. Основы техники ракетного полета. М.: Наука, 1979. 494 с.
34. Челомей В.Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // ДАН СССР, 1956, т. 110, № 3. С. 345...347.
35. Abramson H.N., Silverman S. Dynamic behaviour of liquids in moving containers. NASA SP-106, Washington, D.C., 1966. P. 105...143.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
 ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. Жидкостная ракета как объект регулирования	
Глава I. Уравнения движения ракеты как твердого тела	5
1.1. Силы, действующие на ракету в полете	5
1.2. Системы координат	11
1.3. Уравнения движения ракеты	12
1.4. Уравнения возмущенного движения	16
 Глава II. Динамические характеристики ракеты как твердого тела	24
и обеспечение устойчивости движения	
2.1. Понятие об устойчивости движения	24
2.2. Методы оценки устойчивости движения	25
2.3. Анализ уравнений возмущенного движения ракеты	29
2.4. Передаточные функции и их свойства	33
2.5. Частотные характеристики и частотный критерий устойчивости	37
2.6. Приближенные оценки качества переходного процесса	39
2.7. Структура автомата стабилизации	42
2.8. Эффективность органов управления	45
2.9. Частотные характеристики ракеты как твердого тела и требования к автомату угловой стабилизации	48
2.10. Требования к автомату боковой стабилизации центра масс	58
 Глава III. Колебание жидкости в баках	62
3.1. Постановка задачи	62
3.2. Уравнение Лапласа	63
3.3. Давление жидкости	64
3.4. Краевые и начальные условия	65
3.5. Определение потенциала абсолютных скоростей жидкости в цилиндрическом баке	67
3.6. Главный вектор и главный момент гидростатических и гидродинамических сил	76
3.7. Уравнения возмущенного движения бака с жидкостью	83
3.8. Механическая модель колебаний жидкости в баке	86
3.9. Динамические свойства бака с жидкостью	90
3.10. Другие формы потенциала абсолютных скоростей жидкости	94
3.11. Потенциал абсолютных скоростей жидкости в баке, образованном двумя коаксиальными круговыми цилиндрами	101
3.12. Метод Лагранжа при выводе уравнений возмущенного движения бака с жидкостью	103

3.13. Решение задачи о колебаниях жидкости вариационным методом	108
3.14. Экспериментальное изучение колебаний жидкости в баке	111
Глава IV. Уравнения движения и динамические характеристики жесткой ракеты с учетом колебаний жидкости в баках	119
4.1. Динамическая модель	119
4.2. Уравнения возмущенного движения	121
4.3. Частоты собственных колебаний системы	126
4.4. Передаточная функция регулируемого объекта и ее свойства	131
4.5. Дополнительные требования к автомату угловой стабилизации	140
4.6. Амплитудная и фазовая стабилизация	143
4.7. Устойчивость замкнутой системы с идеальным регулятором	144
4.8. Структурная неустойчивость регулируемого объекта	153
4.9. Конструктивные способы улучшения устойчивости	154
4.10. Автоколебания ракеты	158
Глава V. Уравнения движения упругой ракеты	162
5.1. Схематизация свойств упругого корпуса ракеты	162
5.2. Уравнения поперечных колебаний прямого неоднородного стержня	163
5.3. Собственные поперечные колебания свободного стержня	165
5.4. Общие свойства частот и форм собственных колебаний	167
5.5. Вынужденные поперечные колебания свободного стержня	170
5.6. Аэродинамические силы, действующие на упругую ракету	172
5.7. Уравнения возмущенного движения упругой ракеты	174
Глава VI. Методы определения форм и частот поперечных колебаний	182
6.1. Определение форм и частот свободных колебаний	182
6.2. Влияние напряжений сдвига и инерции вращения поперечных сечений корпуса	188
6.3. Формы вынужденных колебаний	193
Глава VII. Влияние упругих свойств корпуса на устойчивость движения ракеты	201
7.1. Предварительные замечания	201
7.2. Передаточная функция упругой ракеты и ее свойства	203
7.3. Условия устойчивости движения	210
7.4. Методы гашения упругих колебаний	214
7.5. Упругие поперечные автоколебания	218
Глава VIII. Влияние сжимающих сил и упругости подвески поворотного двигателя на устойчивость движения	221
8.1. Влияние осевой следящей силы на поперечные колебания упругого стержня	221
8.2. Приближенный учет влияния осевой следящей силы на поперечные колебания стержня с помощью метода Бубнова – Галеркина	228

8.3. Уравнения поперечных колебаний корпуса ракеты с учетом упругости подвески поворотного двигателя	234
8.4. Собственные поперечные колебания корпуса ракеты с поворотным двигателем	238
8.5. Уравнения органов управления с учетом упругости их приводов	241
8.6. Влияние упругой подвески поворотного двигателя на устойчивость движения	245
8.7. Методы стабилизации сервопривода	252
8.8. Передаточные функции упругой ракеты	253
8.9. Экспериментальное определение сил внутреннего трения, форм и частот собственных колебаний корпуса ракеты	261

Глава IX. Уравнения движения и динамические характеристики упругой ракеты с баками, частично заполненными жидкостью

9.1. Динамическая модель	267
9.2. Уравнения возмущенного движения упругой ракеты с учетом колебаний жидкости в баках	269
9.3. Уравнения возмущенного движения упругой ракеты пакетной схемы	280
9.4. Передаточные функции ракеты и их свойства	289
9.5. Метод корневого годографа	292
9.6. Анализ устойчивости движения	299

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. Продольные колебания ракеты с жидкостным ракетным двигателем

Глава X. Замкнутая колебательная система

10.1. Механизм возникновения продольных автоколебаний ракеты с ЖРД ...	306
10.2. Автоколебания в замкнутых системах ракеты	308
10.3. Замкнутая колебательная система ракеты с ЖРД	310
10.4. Упрощенная математическая модель	312
10.5. Составные части задачи о продольных колебаниях ракеты с ЖРД	316

Глава XI. Осесимметричные колебания баков с жидким топливом

11.1. Постановка задачи	318
11.2. Определение основной частоты собственных колебаний бака с жидкостью методом Рэлея	321
11.3. Вынужденные продольные колебания бака с жидкостью на основе приближенной модели	327
11.4. Определение потенциала скорости жидкости в упругом цилиндрическом баке с жестким дном	330
11.5. Определение потенциала скоростей жидкости в цилиндрическом баке с жесткой обечайкой и упругим дном	335
11.6. Определение потенциала скоростей жидкости в упругом цилиндрическом баке	338
11.7. Определение полной механической энергии системы	339

11.8. Применение метода Ритца для определения осесимметричных колебаний упругих баков с жидкостью	344
11.9. Вынужденные осесимметричные колебания бака с жидкостью	348
11.10. Динамическая модель упругого бака с жидкостью	351
11.11. Определение форм и частот собственных колебаний упругих баков с жидкостью модифицированным методом Ритца	357
Глава XII. Продольные колебания корпуса ракеты	361
12.1. Динамическая модель	361
12.2. Уравнение продольных колебаний неоднородного стержня	364
12.3. Колебания двигателя как механической системы	367
12.4. Определение форм и частот свободных колебаний корпуса ракеты	369
12.5. Возмущения от колебаний давления газов в баках	384
12.6. Вынужденные колебания корпуса ракеты	386
12.7. Определение форм вынужденных колебаний	390
12.8. Алгоритм расчета форм вынужденных колебаний корпуса ракеты	395
Глава XIII. Колебания жидкости в топливных магистралях	408
13.1. Структура топливных магистралей	408
13.2. Динамическое взаимодействие топливной магистрали с корпусом	410
13.3. Уравнения возмущенного движения сжимаемой жидкости в длинной прямой трубе	412
13.4. Собственные колебания жидкости в однородной трубе	415
13.5. Стоячие и бегущие волны	421
13.6. Вынужденные колебания жидкости в однородной трубе и частотные характеристики	425
13.7. Колебания жидкости в упругой прямой трубе	429
13.8. Влияние сильфонов на колебания потока жидкости	436
13.9. Влияние упругих перемещений узлов крепления топливных магистралей	438
13.10. Влияние гидравлических сопротивлений	441
13.11. Влияние гидравлических аккумуляторов	444
13.12. Кавитационные явления в насосах ЖРД	446
13.13. Влияние кавитации на напор насоса	450
13.14. Влияние кавитации на динамические характеристики насоса	453
13.15. Влияние кавитации на динамические характеристики топливной магистрали	458
13.16. Формирование динамических блок-схем топливных магистралей	459
13.17. Вынужденные колебания жидкости в топливных магистралях	464
13.18. Экспериментальное изучение динамических характеристик	466
Глава XIV. Динамические свойства ЖРД	467
14.1. ЖРД как составная часть замкнутой колебательной системы	467
14.2. Основные звенья динамической схемы ЖРД	469
14.3. Уравнение камеры сгорания	476

14.4. Динамические схемы ЖРД	479
14.5. Частотные характеристики ЖРД	482

Глава XV. Динамические схемы и устойчивость

15.1. Динамические схемы	484
15.2. Оценка устойчивости методом D-разбиения	494
15.3. Оценка устойчивости методом частотных характеристик	498
15.4. Оценка устойчивости методом корневого годографа	502
15.5. Роль обратных связей	504
15.6. Методы обеспечения устойчивости	507
15.7. Экспериментальное исследование динамических характеристик	509

Список литературы

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ
КОЛЕСНИКОВ Константин Сергеевич
ДИНАМИКА РАКЕТ

Редактор *И.А. Жилинская*
Художественный редактор *Т.Н. Галицына*
Технические редакторы *Т.И. Андреева, С.А. Жиркина*
Корректоры *Л.Е. Сонюшкина, Л.И. Сажина, Т.Р. Колганова*

Лицензия ИД № 05672 от 22.08.01 г.

Сдано в набор 04.11.02 Подписано в печать 08.08.03.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 31,85. Усл. кр.-отт. 31,85.
Тираж 500 экз. Заказ 8611

Формат 60×88/16.
Печать офсетная.
Уч.-изд. л. 27,07.

ФГУП "Издательство "Машиностроение",
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Отпечатано в ГУП ППП "Типография "Наука" РАН,
121099, Москва, Шубинский пер., 6



«МАШИНОСТРОЕНИЕ»