

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

Н. В. Баничук, С. Ю. Иванова,
А. В. Шаранюк

ДИНАМИКА
КОНСТРУКЦИЙ.
АНАЛИЗ
И ОПТИМИЗАЦИЯ

Ответственный редактор
профессор, доктор технических наук
В. П. МАЛКОВ



МОСКВА
«НАУКА»
1989

УДК 539.3

Рецензенты:

профессор, доктор физико-математических наук

В. А. ТРОИЦКИЙ

доктор физико-математических наук

Г. Н. ЧЕРНЫШЕВ

Б $\frac{2004030000-203}{055(02)-89}$ 656-89, кн. 2

ISBN 5-02-006566-8

© Издательство «Наука», 1989

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателей книга посвящена теории и методам оптимального проектирования конструкций. Работы в этой области привлекают в настоящее время значительный интерес ученых, инженеров и конструкторов в связи с решением важных проблем создания перспективных образцов современной техники, проектированием ответственных узлов машин и уникальных сооружений. На основе оптимального проектирования достигается снижение веса и материалоемкости конструкций, улучшение механических характеристик изделий.

Быстро развивающаяся теория оптимального проектирования вбирает в себя основные представления и методы из различных разделов механики, прикладной и вычислительной математики. Во многом она базируется на методах математического моделирования, методах линейного и нелинейного программирования, теории оптимизации систем с распределенными параметрами, многокритериальной оптимизации, классического вариационного исчисления, эффективных численных методов анализа и оптимизации механических систем, таких, как методы конечных элементов и градиентные методы. Но основой теории оптимального проектирования безусловно является механика деформируемого твердого тела и в особенности такие ее разделы, как теория упругости и пластичности, теория ползучести и вязкоупругости, теории прочности, механика тонкостенных конструкций и стержневых систем и др. Именно в рамках указанных дисциплин с использованием данных о характерных механических эффектах, свойственных применяемым моделям, получены наиболее важные результаты в оптимальном проектировании.

Вместе с тем теория оптимального проектирования сама привела к возникновению ряда новых научных направлений и методов. Укажем только такие новые направления исследований, как оптимизационное моделирование, математическая технология проектирования, анализ чувствительности при проектировании.

Методам анализа чувствительности, основанным на введении сопряженных переменных и построении соотношений для вариаций функционалов, зависящих от вариаций переменных проектирования, в данной книге отводится центральное место. Обсуждаются и вопросы применимости математических методов оптимизации и идентификации к рассматриваемым моделям конструкций.

Как это видно из названия книги, ее содержание сфокусировано на динамических задачах оптимизации, относящихся к числу наиболее сложных проблем в оптимальном проектировании.

В первой главе книги излагаются основные соотношения, характеризующие динамическое поведение конструкций. Существенное внимание уделено вариационным принципам. Наряду с классическим принципом Гамильтона стационарности интеграла действия и экстремальными принципами Рэля для свободных колебаний обсуждаются расширенные вариационные принципы динамики Ху — Вашицу, Челлинджера — Рейснера, а также вариационные принципы, использующие свертки по времени, экстремальные принципы для свободных тел, совершающих вынужденные гармонические колебания и пошаговые вариационные принципы. Подробно рассмотрены вопросы моделирования динамики упругого тела с использованием собственных форм и частот свободных колебаний. Значительное внимание уделено применению метода возмущений для анализа свободных колебаний.

Во второй главе рассмотрены характерные постановки динамических задач оптимального проектирования. Исследуются основные соотношения задач оптимизации динамических характеристик конструкций, совершающих неустановившиеся движения. Приводятся формулировки задач оптимизации для конструкций, совершающих свободные колебания. Значительное внимание уделено изложению постановок проблем многоцелевого оптимального проектирования и многокритериальной оптимизации.

Основам анализа чувствительности при проектировании посвящена третья глава книги. Здесь приводятся как задачи оптимизации с переменными проектирования, входящими в коэффициенты определяющих уравнений, так и задачи оптимизации с варьируемыми границами области, за-

нимаемой конструкцией. Обсуждаются методы получения соотношений, связывающих вариации функционалов с вариациями переменных проектирования и основанных на введении сопряженных переменных и сопряженных систем уравнений. При этом рассмотрены как континуальные так и дискретные модели. Отдельно в третьей главе описаны так называемые прямые методы анализа чувствительности, не связанные с введением сопряженных систем. Данные методы находят применение при проектировании конструкций совершающих свободные колебания, а также в случае проведения анализа чувствительности нестационарных динамических процессов в конструкциях. Обсуждается использование техники модальных разложений при проведении анализа чувствительности. Кроме того, в этой главе рассмотрены необходимые условия оптимальности и соотношения анализа чувствительности для эволюционных систем общего вида, а также необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума.

В четвертой главе обсуждаются результаты оптимального проектирования конструкций, совершающих свободные колебания. Здесь рассмотрены как задачи оптимизации частот собственных колебаний для конструкций заданного веса, так и задачи предельного снижения веса при ограничениях на спектр частот. Последовательно излагаются найденные оптимальные решения для стержней при продольных и крутильных колебаниях, балок, совершающих изгибные колебания, криволинейных стержней и пологих оболочек при поперечных колебаниях, осесимметрично колеблющихся цилиндрических оболочек. Представлены результаты оптимизации в задачах проектирования прямоугольных пластин. Трактуются также оптимальные проекты пластинок в случае кратных частот. Излагаются некоторые вопросы многоцелевой оптимизации и оптимизации панелей, колеблющихся в идеальной жидкости.

Содержание пятой главы, как и предыдущей четвертой, полностью посвящено динамическим проблемам оптимального проектирования, для которых возможно исключение времени и приведение к некоторым стационарным краевым задачам. Однако в отличие от четвертой главы здесь обсуждаются проблемы проектирования конструкций с существенно иным механизмом поведения и при других предположе-

ниях относительно внешних воздействий. Рассмотрен широкий класс задач оптимального проектирования конструкций, совершающих вынужденные гармонические колебания. Приведены результаты оптимизации толщины и внутренней структуры материала для стержней, балок и пластинок. Одна из важных проблем, изложенных в данной главе, заключается в оптимизации характеристик динамической устойчивости. Здесь при проектировании конструкций крыльев из условий максимума критической скорости флаттера используются модели балок, работающих на изгиб и кручение (крылья большого удлинения) и модели изгибаемых пластин (крылья малого удлинения).

Существенно нестационарные проблемы оптимального проектирования освещаются в шестой главе. С применением методов анализа чувствительности и последовательной оптимизации рассмотрены задачи оптимального проектирования балок, рассчитываемых на динамические воздействия. Другой подход, изложенный в этой главе и примененный к задачам импульсного нагружения, основан на применении преобразования Лапласа и параметрической оптимизации. Обсуждаются также проблемы оптимального проектирования упругих цилиндрических оболочек и пластинок при нестационарных нагрузках. В конце главы приводится задача проектирования полой оболочки, допускающая строгую декомпозицию и вследствие этого представляющая известный методологический интерес.

Авторы признательны *В. В. Болотину, В. И. Бирюку, А. Ю. Ишлинскому, В. В. Кобелеву, А. Д. Ларичеву, Е. В. Макееву, В. П. Малкову, И. Ф. Образцову, В. М. Фролову, Г. Н. Чернышеву* за советы и замечания, высказанные при обсуждении отдельных вопросов; *А. Г. Мишиной и М. В. Селищевой* за большую помощь при оформлении рукописи книги.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

1.1.

ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ДИНАМИКЕ КОНСТРУКЦИЙ

Для описания поведения деформируемых тел, находящихся под действием динамических нагрузок, применяются основные представления механики сплошной среды. В качестве основных переменных величин, характеризующих состояние, т. е. переменных состояния, выступают перемещения, деформации, напряжения. При этом в качестве независимых аргументов указанных величин могут припиматься как лагранжевы, так и эйлеровы координаты. Если ограничиться рассмотрением малых перемещений и малых деформаций среды, то различия между лагранжевым и эйлеровым представлениями стираются. В геометрически линейной теории не делается различия между положениями области, занимаемой материалом тела, в начальный и текущий момент времени. Обычно считается, что пространственные координаты x_i определяют положение точек недеформированного континуума, а время t отсчитывается от некоторого фиксированного момента t_0 начала действия внешних сил. Движение среды может быть полностью охарактеризовано компонентами вектора перемещений $u_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, и скоростей $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, тензорами деформаций $\varepsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$, $i, j = 1, 2, 3$, и напряжений $\sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3, t)$, $i, j = 1, 2, 3$. Сами векторы перемещений и скоростей, тензоры деформаций и напряжений будут обозначаться через \mathbf{u} , \mathbf{v} , ε , σ . Ниже используется как символическая векторная (безындексная) запись основных соотношений, так и покоординатная скалярная запись уравнений. Материал тела предполагается идеально упругим. Тело занимает область Ω . Граница области Ω обозначается через Γ . На части границы Γ_u заданы перемещения точек тела, а на части границы Γ_σ — силовые условия, причем предполагается, что $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$. Уравнения динамики идеально упругого тела, краевые и начальные условия могут быть записаны в виде

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q}^0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad \varepsilon = 1/2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*], \quad (1.2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \quad \varepsilon, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{q}^s, \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^s, \quad x \in \Gamma_u, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^0, \quad (1.5)$$

где C — тензор упругих модулей; ∇ — оператор Гамильтона; \mathbf{n} — вектор внешней нормали к поверхности тела. Через $\mathbf{q}^s(x, t)$ и $\mathbf{q}^v(x, t)$ обозначены заданные объемные и поверхностные усилия, а через $\mathbf{u}^s(x, t)$ — заданные перемещения границы тела. Точкой и двумя точками, расположенными между символами, обозначены соответственно скалярное и двойное скалярное произведения, а $*$ — операция транспонирования тензора. Искомыми величинами в (1.1)–(1.5) являются $\mathbf{u}(x, t)$, $\mathbf{v}(x, t)$, $\boldsymbol{\varepsilon}(x, t)$, $\boldsymbol{\sigma}(x, t)$. Поле перемещений и поле скоростей перемещений в момент $t=0$ считаются известными. Начальные перемещения и скорости задаются при помощи вектор-функций $\mathbf{u}^0(x)$ и $\mathbf{v}^0(x)$.

Рассматриваемая задача динамики упругого тела (1.1)–(1.5) заключается в интегрировании системы гиперболических уравнений при граничных и начальных условиях. Наряду с соотношениями (1.1)–(1.5) при решении задач динамики упругих тел применяются и другие формулировки. Так, из уравнений (1.1)–(1.5) могут быть исключены деформации и скорости. При этом уравнения записываются относительно переменных \mathbf{u} , \mathbf{v} , $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q}^v, \quad (1.6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \cdot \cdot \cdot 1/2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*], \quad (1.7)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{q}^s, \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^s, \quad x \in \Gamma_u, \quad (1.8)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{v}^0. \quad (1.9)$$

Уравнения задачи (1.6)–(1.9) содержат только первые производные по пространственным переменным и вторые производные по времени. Другая форма уравнений задачи (1.1)–(1.5) получается при одновременном исключении из основных соотношений напряжений и деформаций:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{q}^v, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{v}, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{q}^s(x), \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^s(x), \quad x \in \Gamma_u, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^0. \quad (1.13)$$

Наконец, исключение из уравнений (1.1)–(1.5) деформаций, напряжений и скоростей позволяет записать соотношение задачи только относительно перемещений:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \nabla \cdot [\mathbf{C} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u})] + \mathbf{q}^v, \quad (1.14)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{q}^s(x), \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^s(x), \quad x \in \Gamma_u, \quad (1.15)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, 0) = \mathbf{v}^0(x). \quad (1.16)$$

Уравнения динамики (1.14) содержат производные второго порядка как по t , так и по пространственным переменным.

Обозначая через C_{ijkl} компоненты тензора модулей упругости, а через q_i^v и q_i^s ($i, j, k, l = 1, 2, 3$) — компоненты объемных и поверхностных усилий, можно записать уравнения (1.10) в скалярном виде:

$$\frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} - u_{l,k})_{,j} + q_i^v = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Нижний индекс после запятой означает дифференцирование по соответствующей пространственной координате. Здесь и далее не делается отличия между адиабатическими и изотермическими модулями (см. [68, 84]). Для изотропного материала $C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$, где λ, μ — коэффициенты Ламе. В этом случае скалярные соотношения динамики могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ji} + q_i^v &= \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\sigma_{ij} n_j = q^s(x, t), \quad x \in \Gamma_\sigma; \quad u_i = u_i^s(x, t), \quad x \in \Gamma_u,$$

$$u_i(x, 0) = u_i^0(x), \quad \partial u_i(x, 0) / \partial t = v_i^0(x).$$

Выше были рассмотрены некоторые способы представления основных соотношений динамики упругого тела. Эти представления далеко не исчерпывают всего многообразия форм записи определяющих уравнений. Так, дополнительные предположения о характере неоднородности среды, степени анизотропии, поведении действующих нагрузок позволяют придать этим уравнениям специальные формы (см., например, [35, 56, 57, 67, 68, 84]).

При описании поведения тонкостенных конструкций, таких, например, как панели, пластинки, оболочки, и сложных составных конструкций более удобной во многих случаях оказывается операторная форма записи. В качестве основной переменной, характеризующей поведение конструкции, рассматривается обобщенный вектор перемещений $\mathbf{u}(x, t)$. Размерность этого вектора существенно зависит от специфики конструкции и в отличие от рассмотренных выше векторов перемещений упругих тел может быть больше трех. Общая запись уравнений движения идеально упругой конструкции дается в следующей операторной форме [35]:

$$M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + C \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (1.18)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0, \quad \partial \mathbf{u} / \partial t(x, 0) = \mathbf{v}^0, \quad (1.19)$$

где M — инерционный оператор; C — жесткостной оператор; $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x, t)$ — заданная функция; $\mathbf{u}^0(x)$, $\mathbf{v}^0(x)$ — заданные вектор-

функции, характеризующие начальное распределение перемещений и скоростей.

Граничные условия, рассматривавшиеся независимо в приведенных выше постановках задач динамики упругого тела, включены в операторное представление (1.18). Конкретные виды операторов M и C для различных типов элементов конструкций приведены в [35]. Заметим, что для большинства рассматриваемых в приложениях задач динамики конструкций инерционный и жесткостный операторы являются самосопряженными и положительно определенными, т. е.

$$(Mu^1, u^2) = (u^1, Mu^2), \quad (Cu^1, u^2) = (u^1, Cu^2), \quad (1.20)$$

$$(Mu^1, u^1) \geq \gamma_1^2 (u^1, u^1), \quad (Cu^1, u^1) \geq \gamma_2^2 (u^1, u^1) \quad (1.21)$$

для любых u^1 и u^2 из области определения операторов. Через γ_1^2, γ_2^2 обозначены некоторые положительные константы. Известны примеры упругих систем, для которых не выполнены условия положительной определенности (1.21). Так, например, для упругой пластинки переменной толщины со свободным краем будет нарушаться условие $(Cu^1, u^1) \geq \gamma_2^2 (u^1, u^1)$, если при подходе к краю функция распределения толщины достаточно быстро убывает. Однако подобные случаи практического интереса не представляют. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении реальных моделей условия (1.21) будем предполагать выполненными.

Для описания динамики не вполне упругих конструкций для учета диссипации механической энергии в уравнения движения вводится дополнительный член $D(\partial u/\partial t)$. Операторное уравнение записывается в виде

$$M \partial^2 u/\partial t^2 + D \partial u/\partial t + Cu = q, \quad (1.22)$$

где D — диссипативный оператор. При построении модели вязкоупругого поведения конструкции существенно изучение механизма диссипации энергии. Учет диссипации энергии на основе уравнения (1.22) с линейным оператором D в ряде случаев оказывается ограничительным. Так, для адекватного описания конструкционного трения используются модели, отличные от (1.22).

Отметим некоторые модели вязкоупругого поведения конструкции. Наиболее простые и широко применяемые в расчетах способы задания оператора D состоят в определении диссипативного оператора прямо пропорциональным жесткостному:

$$D = \mu C \quad (1.23)$$

или инерционному оператору

$$D = \nu M. \quad (1.24)$$

Здесь μ и ν — коэффициенты внутреннего и внешнего трения. Первый способ соответствует модели параллельного соединения вязкого и упругого механизмов (модель Фойхта), а второй — линейной модели внешнего трения.

1.2. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ТЕЛ

1.2.1. Одним из наиболее общих вариационных принципов, применяемых в динамике упругих тел, является принцип виртуальной работы.

Рассмотрим поведение упругого тела, к которому приложены зависящие от времени нагрузки. В произвольный момент времени $t \in [0, t_f]$ распределение перемещений в точке тела описывается векторным полем $\mathbf{u}(x, t)$. Наряду с полем $\mathbf{u}(x, t)$ рассмотрим проварьированное поле перемещений $\mathbf{u}(x, t) + \delta\mathbf{u}(x, t)$, где $\delta\mathbf{u}(x, t)$ — произвольные совместимые с геометрическими связями перемещения, называемые виртуальными перемещениями. На части поверхности Γ_u , где заданы перемещения, имеем $\delta\mathbf{u} = 0$. Выражение для работы внешних сил δA_e на виртуальных перемещениях $\delta\mathbf{u}$ имеет вид

$$\delta A_e = \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{q}^s \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma. \quad (2.1)$$

Преобразуем выражение (2.1), предполагая выполненными уравнения равновесия на Γ_σ и динамические уравнения равновесия в области Ω , в которых учитываются даламберовы силы инерции:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q}^v = 0 \text{ в } \Omega, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}^s = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma.$$

Используя формулу Гаусса — Остроградского

$$\int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u}) d\Omega \quad (2.3)$$

и тождество

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u}) = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.4)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \delta A_e &= \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} [(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}] d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left(\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon} \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из сопоставления выражений (2.1), (2.5) приходим к принципу виртуальной работы

$$\int_{\Omega} \left(\mathbf{q}^v - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = 0. \quad (2.6)$$

Принцип виртуальной работы, выраженный формулой (2.6), может быть сформулирован следующим образом. Суммарная виртуальная работа внутренних и внешних сил, включая силы инерции, на любых бесконечно малых виртуальных перемещениях, удовлетворяющих геометрическим ограничениям, равна нулю, если выполнены динамические условия равновесия (2.2).

Верно и обратное утверждение. Упругое тело динамически уравновешено, если сумма работ внешних и внутренних сил, включая силы инерции, равна нулю на любых виртуальных перемещениях, совместимых с геометрическими ограничениями.

Последнее утверждение доказывается выкладками, аналогичными проведенным выше. С использованием формулы Гаусса — Остроградского (2.3) и тождества (2.4) равенство (2.6) приводится к виду

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{q}^v - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{q}^s - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0. \quad (2.7)$$

Учитывая произвольность вариаций $\delta \mathbf{u}$ в области Ω и на Γ_{σ} , приходим к уравнениям (2.2).

Известна и другая формулировка принципа виртуальной работы [236]. Наложим на виртуальные перемещения условия обращения в нуль в начальный $t=0$ и конечный $t=t_f$ моменты времени, т. е. $\delta \mathbf{u}(x, 0) = 0$, $\delta \mathbf{u}(x, t_f) = 0$. Интегрируя выражение, записанное в левой части уравнения (2.6), в заданных пределах от $t=0$ до $t=t_f$, и произведя стандартные преобразования, приходим к

$$\int_0^{t_f} \left\{ \delta T - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \right\} dt = 0, \quad \text{где}$$

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega, \quad (\delta \mathbf{u})_{\Gamma_{\sigma}} = (\delta \mathbf{u})_{t=0} = (\delta \mathbf{u})_{t=t_f} = 0. \quad (2.8)$$

1.2.2. Принцип Гамильтона. Предположим, что объемные и поверхностные силы \mathbf{q}^v и \mathbf{q}^s не варьируются при вариациях перемещений. В этом случае внешние силы обладают потенциалом

$$P_f = - \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \text{const.} \quad (2.9)$$

Обозначая через Π_e потенциальную энергию упругих деформаций

$$\Pi_e = \int_{\Omega} \Phi \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega, \quad (2.10)$$

а через J интеграл действия

$$J = \int_0^{t_f} (T - \Pi_e - \Pi_f) \, dt, \quad (2.11)$$

запишем принцип Гамильтона

$$\delta J = 0. \quad (2.12)$$

Принцип Гамильтона часто используется как основа при построении уравнений динамики упругой среды.

Представим интеграл действия в виде

$$J = \int_0^{t_f} \left(\int_{\Omega} L^v \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} L^s \, d\Gamma \right) dt. \quad (2.13)$$

При построении уравнений динамики используются необходимые условия стационарности интеграла действия [35]. Для идеально упругого трехмерного тела, подверженного малым деформациям,

$$L^v = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} C_{jklm} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} + q_j^v u_j, \quad (2.14)$$

$$L^s = q_j^s u_j,$$

условия стационарности приводят к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{jklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} \right) - \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + q_j^v = 0 \quad \text{в } \Omega_x, \quad (2.15)$$

$$C_{jklm} \frac{\partial u_l}{\partial x_m} n_k = q_j^s \quad \text{на } \Gamma_{\sigma}. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) и граничные условия (2.16), дополненные граничными условиями на Γ_u : $u_j = u_j^s$ и начальными условиями $u_j(x, 0) = 0$, $\partial u_j(x, 0)/\partial t = 0$, составляют краевую задачу динамики упругого тела в перемещениях.

Принцип Гамильтона широко применяется при построении динамических моделей сложных топкостенных конструкций. Здесь при переходе от трехмерных моделей к двумерным используются дополнительные гипотезы, и плотности лагранжианов L^v и L^s могут зависеть как от перемещений, деформаций, так и от вторых производных перемещений, т. е. предполагается зависимость от величин u_i , $\partial u_i/\partial t$, $\partial u_i/\partial x_j$, $\partial^2 u_i/\partial x_j \partial t$, $\partial^2 u_i/\partial x_j \partial x_k$. Пусть дву-

мерная область Ω ограничена контуром Γ . Необходимые условия стационарности интеграла действия в Ω и на Γ записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^v}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial u_j / \partial x_\alpha)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial u_j / \partial t)} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial^2 u_j / \partial x_\alpha \partial x_\beta)} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial t} \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial^2 u_j / \partial x_\alpha \partial t)} \right) = 0 \quad \text{в } \Omega, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial L^v}{\partial (\partial u_j / \partial x_\alpha)} - \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial^2 u_j / \partial x_\alpha \partial x_\beta)} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L^v}{\partial (\partial^2 u_j / \partial x_\alpha \partial t)} \right) \right] n_\alpha + \\ + \frac{\partial L^s}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left[\frac{\partial L^v}{\partial (\partial^2 u_j / \partial x_\alpha \partial x_\beta)} n_\beta + \frac{\partial L^s}{\partial (\partial u_j / \partial x_\alpha)} \right] v_{1\alpha} \right\} = 0 \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\left[\frac{\partial L^v}{\partial (\partial^2 u_j / \partial x_\alpha \partial x_\beta)} n_\beta + \frac{\partial L^s}{\partial (\partial u_j / \partial x_\alpha)} \right] v_{n\alpha} = 0 \quad \text{на } \Gamma,$$

где n_α — компоненты вектора внешней нормали к Γ , а $v_{n\alpha}$ и $v_{1\alpha}$ — направляющие косинусы нормали и касательной к Γ .

1.3.

РАСШИРЕННЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ

В исследованиях по динамике конструкций и в особенности в работах, основанных на конечноэлементном анализе, наряду с принципом Гамильтона применение находят и другие модифицированные вариационные принципы. Формулировка модифицированных вариационных принципов связана с расширением числа независимо варьируемых функций, построением расширенных функционалов, смягчением дополнительных требований. Ниже, ограничиваясь краткими пояснениями, приведем вариационные принципы Ху — Вашицу, Челлинджера — Рейсснера и принцип стационарности дополнительной энергии.

Примем расширенные выражения T_G , P_G для функционалов кинетической и потенциальной энергии системы, включая в эти выражения соотношения между скоростями и перемещениями $\mathbf{v} = \partial \mathbf{u} / \partial t$, деформациями и перемещениями $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \mathbf{u})^*$ и граничное условие для перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}^0$ на Γ_u :

$$T_G = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{p} \cdot \left(\mathbf{v} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right] d\Omega, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \Pi_e + \Pi_f - \int_{\Omega} \sigma \cdot \left[\varepsilon - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^* - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \right] d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma_u} \psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) d\Gamma = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon - \mathbf{q}^v \cdot \mathbf{u} - \sigma \cdot \left[\varepsilon - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u})^* - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} \right] \right) d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{q}^s \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \psi \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^0) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь вектор-функции \mathbf{p} и ψ — множители Лагранжа, введенные для учета дополнительных соотношений. Роль множителя Лагранжа играет и фигурирующий в (3.2) тензор σ . Предполагая независимое варьирование величин \mathbf{p} , \mathbf{v} , σ , ε , \mathbf{u} , ψ при дополнительном условии, наложенном на значения перемещений в начальный и конечный моменты времени

$$\delta \mathbf{u}(0) = 0, \quad \delta \mathbf{u}(t_f) = 0, \quad (3.3)$$

можно установить расширенный вариационный принцип

$$\delta T_G = \delta \int_0^{t_f} (T_G - \Pi_G) dt = 0, \quad (3.4)$$

называемый вариационным принципом Ху — Вашицу.

Нетрудно заметить, что из условия (3.4) стационарности функционала T_G при независимом варьировании величин \mathbf{p} , \mathbf{v} , σ , ε , \mathbf{u} , ψ получается полная система уравнений и граничных условий динамики упругого тела. Получаемые соотношения имеют смысл необходимых условий экстремума. Так, осуществляя варьирование по переменной ε и учитывая симметричность тензоров ε и σ ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$), из условия стационарности расширенного функционала (3.4) приходим к закону Гука

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \varepsilon \quad (3.5)$$

в области Ω . Варьирование по \mathbf{u} в (3.4) дает с учетом (3.3) соотношения

$$\partial \mathbf{p} / \partial t = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{q}^v \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{n} \cdot \sigma = \mathbf{q}^s \quad \text{на } \Gamma_\sigma, \quad (3.6)$$

$$\psi = \mathbf{n} \sigma \quad \text{на } \Gamma_u. \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) определяет механический смысл множителя Лагранжа ψ . Вектор ψ представляет собой усилие, возникающее в точках границы тела Γ_u . Варьирование тензора σ и вектора ψ в (3.4) приводит к кинематическим условиям

$$\varepsilon = 1/2 [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*] \quad \text{в } \Omega, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 \quad \text{на } \Gamma_u. \quad (3.8)$$

Наконец, соотношение

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega, \quad (3.9)$$

получающееся при варьировании в (3.4) по v , определяет смысл множителя p как импульса скорости.

Наряду с основным расширенным принципом Ху — Вашицу используются следующие две его модификации. Первая модификация принципа возникает, если вместо множителя Лагранжа ψ в (3.2) подставляется его выражение согласно формуле (3.7). Тогда для Π_C имеем выражение

$$\Pi_C = \Pi_c + \Pi_f - \int_{\Omega} \sigma \cdot \left(\varepsilon - \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^*] \right) d\Omega - \int_{\Gamma_u} n \cdot \sigma \cdot (u - u^0) d\Gamma. \quad (3.10)$$

Интегрирование по частям в (3.10) приводит ко второй известной модификации расширенного вариационного принципа Ху — Вашицу с функционалом Π_C , определяемым следующей формулой:

$$\begin{aligned} \Pi_C = & \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \varepsilon \cdot C \cdot \varepsilon - \sigma \cdot \varepsilon - (\nabla \cdot \sigma + q^v) \cdot u \right] d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_{\sigma}} (n \cdot \sigma - q^s) \cdot u d\Gamma + \int_{\Gamma_u} n \cdot \sigma \cdot u^0 d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для указанных модификаций расширенного принципа варьируемыми величинами являются u , ε , σ , p , v . Варьирование осуществляется при дополнительных условиях (3.3).

Расширенный вариационный принцип Ху — Вашицу при варьировании по ε и v позволяет получить в качестве необходимых условий экстремума соотношения (3.5) и (3.9). Если воспользоваться этими соотношениями и исключить переменные v и ε из принципа Ху — Вашицу, то получим известный вариационный принцип Челлинджера — Рейссера

$$\begin{aligned} \delta \int_0^{t_f} \left\{ \int_{\Omega} \left(p \cdot \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2\rho} p \cdot p \right) d\Omega - \Pi_R \right\} dt = 0, \\ \Pi_R = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sigma \cdot (\nabla u) - \frac{1}{2} \sigma \cdot C^{-1} \cdot \sigma - q^v \cdot u \right] d\Omega - \\ - \int_{\Gamma_{\sigma}} q^s \cdot u d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \psi \cdot (u - u^0) d\Gamma. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Варьирование в (3.12) осуществляется по независимым переменным p , σ , u , ψ при дополнительном условии (3.3).

Отметим также форму вариационного принципа Челлинджера — Рейссера, получаемую при помощи исключения множителя Лагранжа ψ из (3.12) с использованием (3.7) и применения в (3.12) операций интегрирования по частям как по

времени, так и по пространственным переменным:

$$\delta \int_0^{t_f} \left\{ - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} \right) d\Omega + \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \right. \\ \left. + (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}^v) \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}^s) \cdot \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^0 d\Gamma \right\} dt = 0, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^{-1} = I, \quad I_{ijkl} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl}).$$

Варьирование в (3.13) осуществляется по независимым переменным \mathbf{p} , $\boldsymbol{\sigma}$, \mathbf{u} при дополнительных условиях

$$\delta \mathbf{p}(0) = 0, \quad \delta \mathbf{p}(t_f) = 0, \quad (3.14)$$

наложенных на вектор-функцию \mathbf{p} в начальный и конечный моменты времени.

Из принципа Челлинджера — Рейссера может быть получен принцип стационарности дополнительной энергии [236]. Для этого в вариационном принципе (3.13) следует учесть необходимые условия экстремума по \mathbf{u} , которые имеют вид (3.6). Исключая из рассмотрений вектор перемещений \mathbf{u} , будем иметь

$$\delta \int_0^{t_f} \left\{ - \int_{\Omega} \frac{1}{2\rho} \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^0 d\Gamma \right\} = 0. \quad (3.15)$$

Варьирование в принципе стационарности дополнительной энергии (3.15) осуществляется по переменным \mathbf{p} и $\boldsymbol{\sigma}$. В качестве дополнительных соотношений, учитываемых при варьировании, рассматриваются условия динамического равновесия (3.6) и условия (3.14), наложенные на импульсы в начальный и конечный моменты времени.

1.4.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДИНАМИКИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ СВЕРТКИ ПО ВРЕМЕНИ

Особенностью вариационного принципа Гамильтона и родственных ему расширенных вариационных принципов нестационарной динамики, изложенных в предыдущих параграфах, является частичный учет начальных данных. Допустимые функции состояния согласно рассмотренным принципам должны удовлетворять в начальный момент времени ($t=0$) либо условиям на перемещения, либо условиям на скорости. При этом одно из начальных условий выпадает из непосредственных рассмотрений, и для его косвенного учета ставятся дополнительные условия

в конечный момент времени ($t = t_1$). Указанную особенность можно, однако, устранить при формулировке краевых задач и вариационных принципов на основе использования сверток по времени. Соответствующий подход предложен и обоснован в работе [157], где показано, что краевые задачи и вариационные принципы «в свертках» естественным образом включают полную систему начальных условий. Ниже в данном параграфе при изложении материала воспользуемся результатом указанной работы.

Введем сначала понятие свертки двух функций. Пусть функции $\alpha(x, t)$ и $\beta(x, t)$ заданы при $t \in [0, \infty)$, $x \in \Omega$, т. е. при $(x, t) \in \Omega \times [0, \infty)$. Здесь Ω — замкнутое множество изменения пространственных переменных с границей Γ . Свертка функций $\alpha(x, t)$ и $\beta(x, t)$ определяется следующим образом [157, 236]:

$$[\alpha * \beta](x, t) = \int_0^t \alpha(x, t - \xi) \beta(x, \xi) d\xi. \quad (4.1)$$

Так, определенная операция свертки функций, как нетрудно заметить, обладает свойствами коммутативности, дистрибутивности, ассоциативности и обращения в нуль одной из функций ($\alpha = 0$ или $\beta = 0$), если $\alpha * \beta = 0$.

Приведем основные соотношения задачи динамики идеально упругого тела при малых деформациях. Примем в качестве основных переменных состояния вектор перемещений $u(x, t)$ и тензоры деформации и напряжений $\varepsilon(x, t)$, $\sigma(x, t)$. Предполагая, что упругое тело занимает область Ω с границей $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$, запишем уравнения, граничные и начальные условия для переменных $u(x, t)$, $\varepsilon(x, t)$, $\sigma(x, t)$:

$$\nabla \cdot \sigma + q^v = \rho \partial^2 u / \partial t^2, \quad \sigma = \sigma^*, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (4.2)$$

$$\varepsilon = 1/2 [\nabla u + (\nabla u)^*], \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (4.3)$$

$$\sigma = C \cdot \varepsilon, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty), \quad (4.4)$$

$$u = u^s, \quad (x, t) \in \Gamma_u \times [0, \infty), \quad (4.5)$$

$$n \cdot \sigma = q^s, \quad (x, t) \in \Gamma_\sigma \times [0, \infty), \quad (4.6)$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad \partial u / \partial t(x, 0) = v^0(x), \quad x \in \Omega. \quad (4.7)$$

Здесь u^s , q^s , u^0 , v^0 — заданные функции.

Введем в рассмотрение функции

$$g(t) = t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (4.8)$$

$$f(x, t) = [g * q^v](x, t) + \rho(x)[t v^0(x) + u^0(x)]. \quad (4.9)$$

Используя введенные величины, можно сформулировать следующие основные утверждения.

Утверждение 1. Если вектор-функция u дважды непрерывно дифференцируема по времени, а тензор σ непрерывно диф-

ференцируем по пространственным переменным и симметричен ($\sigma = \sigma^*$), то переменные \mathbf{u} и σ удовлетворяют уравнениям движения (4.2) и начальным условиям (4.7) тогда и только тогда, когда выполняется уравнение

$$\mathbf{g} * \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho \mathbf{u}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty). \quad (4.10)$$

Справедливость данного утверждения устанавливается непосредственно. Действительно, если \mathbf{u} и σ удовлетворяют соотношениям (4.2), (4.7), то

$$\begin{aligned} [\mathbf{g} * (\nabla \cdot \sigma + \mathbf{q}^0)](\mathbf{x}, t) &= \rho(\mathbf{x}) \int_0^t (t - \zeta) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{x}, \zeta) d\zeta = \\ &= \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u} - \rho(\mathbf{x}) [t \mathbf{v}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^0(\mathbf{x})], \end{aligned}$$

откуда получаем (4.10). Далее, принимая выполненным соотношение (4.10) и проводя выкладки в обратном порядке, устанавливаем справедливость обратного утверждения, что \mathbf{u} и σ удовлетворяют уравнению (4.2) и начальным условиям (4.7)

Для дальнейших рассмотрений полезно ввести следующее определение. Набор функций $S = [\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma]$ назовем допустимым состоянием, если вектор \mathbf{u} непрерывно дифференцируем по пространственным переменным и дважды непрерывно дифференцируем по t , тензор σ — непрерывно дифференцируем по пространственным переменным, тензор ε — непрерывен и, кроме того, тензоры ε и σ симметричны.

Утверждение 2. Допустимое состояние $S = [\mathbf{u}, \varepsilon, \sigma]$ является решением задачи динамики упругого тела (4.2) — (4.7) тогда и только тогда, когда удовлетворяются уравнения (4.3), (4.4), (4.10) и граничные условия (4.5), (4.6). Данное утверждение устанавливает эквивалентность задач (4.2) — (4.7) и (4.3) — (4.6), (4.10) и является непосредственным следствием утверждения 1.

Если при помощи закона Гука (4.4) и связи между деформациями и перемещениями (4.3) исключить из (4.3) — (4.6), (4.10) σ и ε , то получим соотношения для задачи динамики в перемещениях

$$\mathbf{g} * \nabla \cdot [\mathbf{C} \cdot (\nabla \mathbf{u})] + \mathbf{f} = \rho \mathbf{u}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty), \quad (4.11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, \infty), \quad (4.12)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{C} \cdot \nabla \mathbf{u}) = \mathbf{q}^*, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_\sigma \times [0, \infty). \quad (4.13)$$

Введем функции $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g}/\rho$ и $\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}/\rho$ и запишем уравнение (4.10) и соотношение между перемещениями и напряжениями в виде

$$\tilde{\mathbf{g}} * \nabla \sigma + \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{u}, \quad 1/2 \mathbf{C} \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^*] = \sigma.$$

Исключая затем перемещения, можно сформулировать краевую задачу в напряжениях:

$$\nabla [\tilde{\mathbf{g}} * \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{f}}] = \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, \infty), \quad (4.14)$$

$$\tilde{\mathbf{g}} * \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{u}^s - \tilde{\mathbf{f}}, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_u \times [0, \infty), \quad (4.15)$$

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})_{\Gamma_\sigma} = \mathbf{q}^s, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Gamma_\sigma \times [0, \infty). \quad (4.16)$$

Задача (4.14)–(4.16) сформулирована в предположении, что тензор $\boldsymbol{\sigma}$ является симметричным и дважды непрерывно дифференцируемым.

Сформулируем теперь установленные в [156, 157] вариационные принципы. Обозначим через K множество всех допустимых состояний, так что $S = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}] \in K$, и определим на множестве K следующую величину:

$$\begin{aligned} J_1(S) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{g} * \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{u} \cdot * \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \\ & - \int_{\Omega} [\mathbf{g} * \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} [(\tilde{\mathbf{g}} * \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \tilde{\mathbf{f}}) \cdot * \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \\ & + \int_{\Gamma_u} [\mathbf{g} * \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot * \mathbf{u}^s] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_\sigma} [\mathbf{g} * (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}^s) \cdot * \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Заметим, что J_1 зависит как от S , так и от значения времени t . Для любого фиксированного момента времени $t \in [0, \infty)$ величина $J_1(S)$ является функционалом, сопоставляющим каждому допустимому состоянию S числовое значение $J_1(S)$.

Вариационный принцип динамики утверждает, что условие стационарности

$$\delta J_1(S) = 0, \quad S \in K \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.18)$$

выполняется тогда и только тогда, когда S является решением задачи (4.2)–(4.7).

Сформулируем другой вариационный принцип. Пусть K представляет собой множество допустимых состояний, которые удовлетворяют соотношениям между деформациями и перемещениями. Для $S = [\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}] \in K$ и $t \in [0, \infty)$ определим величину $J_2(S)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} J_2(S) = & \int_{\Omega} [\mathbf{g} * \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{g} * \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{u} \cdot * \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} [\tilde{\mathbf{f}} \cdot * \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \\ & - \int_{\Gamma_u} [\mathbf{g} * \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}^s)] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma_\sigma} [\mathbf{g} * \mathbf{q}^s \cdot * \mathbf{u}] (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так же как и определенная в (4.17) величина J_1 , переменная зависит не только от S , но и от времени t и при любом фиксированном $t \in [0, \infty)$ сопоставляет каждому допустимому состоянию S числовое значение $J_2(S)$, т. е. J_2 является функционалом от S .

Условие стационарности

$$\delta J_2(S) = 0, \quad S \in K \quad (0 \leq t < \infty) \quad (4.20)$$

выполняется тогда и только тогда, когда S является решением задачи динамики упругого тела (4.2) — (4.7).

Определим теперь кинематически допустимые перемещения как допустимые перемещения, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям (4.5). На множестве K всех кинематически допустимых полей перемещений рассмотрим функционал J_3 , получающийся из J_2 в результате исключения ε и σ при помощи соотношений (4.3), (4.4):

$$\begin{aligned} J_3(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\mathbf{g} * (\nabla \mathbf{u}) \cdot \cdot * \mathbf{C} \cdot \cdot (\nabla \mathbf{u})](\mathbf{x}, t) \, dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) [\mathbf{u} \cdot * \mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \, dx - \int_{\Omega} [\mathbf{f} \cdot * \mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \, dx - \\ & - \int_{\Gamma_{\sigma}} [\mathbf{g} * \mathbf{q}^s \cdot * \mathbf{u}](\mathbf{x}, t) \, dx. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Рассматривая $J_3(\mathbf{u})$ как функционал от \mathbf{u} , для любого фиксированного момента времени $t \in [0, \infty)$ сформулируем вариационный принцип для кинематически допустимого поля перемещений.

Условие стационарности

$$\delta J_3(\mathbf{u}) = 0, \quad \mathbf{u} \in K, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (4.22)$$

выполняется тогда и только тогда, когда кинематически допустимое распределение перемещений \mathbf{u} является решением задачи динамики упругого тела (4.2) — (4.7).

Рассмотрим множество допустимых напряжений, составленное из симметричных, дважды непрерывно дифференцируемых по пространственным переменным тензоров σ . На этом множестве для каждого фиксированного момента времени t определим функционал

$$\begin{aligned} J_4(\sigma) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\tilde{\mathbf{g}} * \nabla \cdot \sigma \cdot * \nabla \cdot \sigma](\mathbf{x}, t) \, dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma \cdot \cdot * \mathbf{C}^{-1} \cdot \cdot \sigma](\mathbf{x}, t) \, dx - \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{f} \cdot \cdot * \sigma](\mathbf{x}, t) \, dx + \\ & + \int_{\Gamma_u} [(\tilde{\mathbf{f}} - \mathbf{u}^s) \cdot * \mathbf{n} \cdot \sigma](\mathbf{x}, t) \, dx + \int_{\Gamma_{\sigma}} [\tilde{\mathbf{g}} * (\mathbf{q}^s - \mathbf{n} \cdot \sigma) * \nabla \cdot \sigma](\mathbf{x}, t) \, dx. \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\text{Согласно вариационному принципу, установленному в [157],} \\ \delta J_4(\sigma) = 0, \quad \sigma \in K, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (4.24)$$

тогда и только тогда, когда σ является распределением напряжений, соответствующих решению задачи динамики упругого тела (4.2) — (4.7).

Наряду с приведенными формулировками известны также (см. [95, 156, 157]) и другие формы вариационных принципов динамики в свертках, применяемые в специальных случаях, когда на всей границе тела заданы перемещения ($\Gamma = \Gamma_u$) или усилия ($\Gamma = \Gamma_\sigma$).

Заметим также, что методы, основанные на использовании вариационных принципов в свертках и сведении задач динамики упругих тел к решению систем интегральных уравнений, находят применение при моделировании напряженно-деформированного состояния упругих стержней и оболочек (см. работы [40, 41]).

1.5. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ТЕЛ

Предположим, что упругое тело совершает колебания при отсутствии воздействий объемных и поверхностных сил. Будем полагать $\mathbf{q}^v = 0$, $\mathbf{q}^s = 0$ в уравнениях (1.6) — (1.8), а начальные условия (1.9) исключим из рассмотрений. Считаем также, что $\mathbf{u}^* = 0$. Рассмотрим малые колебания упругого тела вида

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= \boldsymbol{\varphi}(x) \exp(i\omega t), \\ \boldsymbol{\sigma}(x, t) &= \mathbf{S}(x) \exp(i\omega t), \\ \mathbf{e}(x, t) &= \mathbf{e}(x) \exp(i\omega t), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где параметр ω — собственная частота, $\boldsymbol{\varphi}(x)$ — соответствующая форма свободных колебаний. Подстановка (5.1) в (1.6) — (1.8) приводит к следующим соотношениям:

$$\omega^2 \rho \boldsymbol{\varphi} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \cdot \mathbf{e}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{e} = 1/2 [\nabla \boldsymbol{\varphi} + (\nabla \boldsymbol{\varphi})^*], \quad (5.4)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (5.5)$$

Величины ω^2 , при которых существуют нетривиальные решения $\boldsymbol{\varphi}(x) \neq 0$, $\boldsymbol{\sigma}(x) \neq 0$, $\mathbf{e}(x) \neq 0$ задачи (5.2) — (5.5), называются собственными значениями, а соответствующие $\boldsymbol{\varphi}(x)$, $\boldsymbol{\sigma}(x)$, $\mathbf{e}(x)$ — собственными функциями. Функции $\boldsymbol{\varphi}(x)$ и величины ω представляют собой собственные формы колебаний и соответствующие собственные частоты. Пусть $\delta \boldsymbol{\varphi}$ — вектор виртуальных сме-

щений, определенных в области Ω и на границе Γ , так что $\delta\varphi = 0$ на Γ_u .

Используя уравнения (5.2) и граничные условия (5.5), составим соотношение

$$\int_{\Omega} \delta\varphi \cdot [\nabla \cdot \mathbf{S} + \omega^2 \rho \varphi] d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \delta\varphi \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} d\Gamma = 0. \quad (5.6)$$

Интегрирование по частям в (5.6) с учетом граничных условий (5.5) и условия обращения виртуальных перемещений в нуль на Γ_u приводят к принципу виртуальной работы для тел, совершающих свободные колебания:

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \delta\mathbf{e} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \varphi \cdot \delta\varphi d\Omega = 0. \quad (5.7)$$

Если поля амплитудных функций φ , \mathbf{e} , \mathbf{S} удовлетворяют (5.2), (5.4), (5.5), то сумма работ внутренних сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях, совместимых с геометрическими ограничениями ($\varphi = 0$ на Γ_σ), равна нулю. При получении соотношения (5.7) нигде не использовалось предположение об идеальной упругости тела или какое-либо другое реологическое соотношение между напряжениями и деформациями. Поэтому принцип виртуальной работы может применяться при рассмотрении колебаний тел, не являющихся упругими.

Если дополнительно предположить, что тело, совершающее свободные колебания, абсолютно упруго, т. е. удовлетворяется закон Гука (5.3), то

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot (\nabla \varphi), \quad (5.8)$$

и приходим к принципу стационарности разности амплитудных значений энергии упругих деформаций и кинетической энергии

$$\delta\{P_\varphi(\varphi) - \omega^2 T_\varphi(\varphi)\} = \delta P_\varphi(\varphi) - \omega^2 \delta T_\varphi(\varphi) = 0. \quad (5.9)$$

Выражения для потенциальной и кинетической энергии даются формулами

$$\begin{aligned} P_\varphi(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \varphi) d\Omega, \\ T_\varphi(\varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \varphi \cdot \varphi d\Omega. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Согласно принципу (5.9), среди всех допустимых полей смещений $\varphi(x)$, подчиненных кинематическим условиям из (5.5), действительные поля перемещений удовлетворяют условию стационарности.

При построении моделей динамики тел, совершающих малые свободные колебания, применяется условие стационарности рас-

ширенного функционала

$$\delta \left\{ \Pi_e - \omega^2 T_\varphi + \int_{\Omega} \left(\mathbf{e} - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^* - \frac{1}{2} \nabla \varphi \right) \cdot \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\chi} \, d\Gamma \right\} = 0, \quad (5.11)$$

где

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} \, d\Omega.$$

В (5.11) варьируемыми предполагаются величины φ , $\boldsymbol{\chi}$, \mathbf{S} , \mathbf{e} . Условия стационарности приводят к соотношениям (5.2)–(5.5) и равенству $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ на Γ_u .

Если применить к (5.11) уравнения (5.2), граничное условие для напряжений на Γ_σ , закон Гука (5.3) и равенство $\boldsymbol{\chi} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ на Γ_u , то соотношение (5.11) трансформируется в принципе стационарности «дополнительной энергии» [236]:

$$\begin{aligned} \delta \{ \Pi_S - \omega^2 T_\varphi \} &= \delta \Pi_S - \omega^2 \delta T_\varphi = \bar{0}, \\ \Pi_S &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{S} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В принципе стационарности (5.12) варьируемыми величинами являются φ и \mathbf{S} . При варьировании величины $\Pi_S - \omega^2 T_\varphi$ по φ и \mathbf{S} предполагается, что они удовлетворяют уравнениям (5.2) и граничным условиям (5.5) на Γ_σ . Необходимые условия экстремума приводят к равенствам $\mathbf{e} = 1/2 [(\nabla \varphi)^* + \nabla \varphi]$ и $\varphi = 0$ на Γ_u .

Важным аспектом вариационной теории свободных колебаний является свойство эквивалентности принципа (5.9) и принципа стационарности рэлеевского соотношения

$$\delta(\omega^2) = \delta(\Pi_\varphi / T_\varphi) = 0. \quad (5.13)$$

К установлению свойства эквивалентности приводят следующие выкладки:

$$\delta(\omega^2) = \frac{\delta \Pi_\varphi}{T_\varphi} - \frac{\Pi_\varphi \delta T_\varphi}{T_\varphi^2} = \frac{1}{T_\varphi} (\delta \Pi_\varphi - \omega^2 \delta T_\varphi) = 0.$$

Здесь предполагается, что вариации $\delta(\omega^2)$, $\delta \Pi_\varphi$, δT_φ обусловлены вариацией функции φ . Заметим, что условия стационарности рэлеевских соотношений хорошо изучены и широко используются при построении расчетных моделей.

Часто используется при решении задач теории малых колебаний и другой вариационный принцип, согласно которому для действительных форм колебаний выполняется условие стационарности потенциальной энергии упругих деформаций

$$\delta \Pi_\varphi(\varphi) = 0, \quad T_\varphi(\varphi) = 1 \quad (5.14)$$

при дополнительном условии, наложенном на величину кинетической энергии. Эквивалентность данного принципа принципу стационарности отношения Рэля может быть непосредственно установлена на основе составления расширенного функционала Лагранжа $\Pi_{\varphi}(\varphi) - \lambda(T_{\varphi}(\varphi) - 1)$ и выполнения операции варьирования

$$\delta(\Pi_{\varphi} - \lambda(T_{\varphi} - 1)) = \delta\Pi_{\varphi} - \lambda\delta T_{\varphi} = 0.$$

Через λ обозначен постоянный множитель Лагранжа.

Семейство условий стационарности (5.9), (5.13), (5.14) можно дополнить еще одним принципом, заключающимся в обращении в нуль вариации кинетической энергии при выполнении условия постоянства потенциальной энергии

$$\delta T_{\varphi}(\varphi) = 0, \quad \Pi_{\varphi}(\varphi) = 1. \quad (5.15)$$

Наряду с отмеченными условиями стационарности в теории собственных колебаний широко используются минимальные вариационные принципы [1, 4]. Наиболее широкое применение в прикладных задачах нашел вариационный принцип Рэля.

Прежде чем формулировать вариационные принципы, упомянем здесь (см. также разд. 1.6) некоторые свойства задачи о свободных колебаниях. Как известно, задача о свободных колебаниях идеально упругого тела описывается самосопряженным и положительно определенным оператором. Спектр собственных частот является дискретным, и все частоты действительные. Собственные формы колебаний попарно ортогональны по кинетической энергии и по потенциальной энергии

$$[\varphi^j, \varphi^k]_T = \int_{\Omega} \rho \varphi^j \cdot \varphi^k d\Omega = 0, \quad j \neq k, \quad (5.16)$$

$$[\varphi^j, \varphi^k]_{\Pi} = \int_{\Omega} \nabla \varphi^j \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \varphi^k) d\Omega = 0, \quad j \neq k. \quad (5.17)$$

Собственные формы образуют полный базис в пространстве функций, дифференцируемых по всем переменным, интегрируемых с квадратом и удовлетворяющих всем граничным условиям. Любой элемент из этого пространства может быть представлен в виде ряда по собственным формам колебаний

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi^k(x). \quad (5.18)$$

Ряд (5.18) сходится по энергии.

Пусть собственные частоты $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3$ и соответствующие им формы колебаний $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ занумерованы в порядке возрастания частот, и через Φ_k обозначено множество всевозможных φ , удовлетворяющих граничным условиям и ортогональных к первым $k - 1$ формам:

$$\Phi_k: [\varphi, \varphi^j]_T = \int_{\Omega} \rho \varphi \cdot \varphi^j d\Omega = 0, \quad j = 1, \quad k - 1. \quad (5.19)$$

Согласно принципу Рэлея, действительная k -я форма свободных колебаний реализует минимум отношения Π_φ/T_φ на классе функций, ортогональных к низшим формам φ^j ($j = 1, \dots, k-1$) и удовлетворяющих граничным условиям. Величина этого минимума равна квадрату k -й частоты собственных колебаний:

$$\omega_k^2 = \min_{\varphi \in \Phi_k} (\Pi_\varphi(\varphi)/T_\varphi(\varphi)). \quad (5.20)$$

При отыскании фундаментальной частоты отношение Рэлея минимизируется на всем множестве дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям.

При применении принципа Рэлея для отыскания k -й собственной частоты и собственной формы требуется информация о низших частотах и собственных формах. В связи с этим укажем также другой вариационный принцип (принцип Куранта), не требующий знания низших форм колебаний. Пусть $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^{k-1}$ — произвольные линейно независимые элементы рассматриваемого пространства, а Ψ_k — пространство функций, удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\Psi_k : [\varphi, \psi^j]_T = \int_{\Omega} \rho \varphi \cdot \psi^j d\Omega, \quad j = 1, 2, \dots, k-1. \quad (5.21)$$

Тогда k -я собственная форма колебаний и собственная частота могут быть найдены из решения задачи

$$\omega_k^2 = \max_{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^{k-1}} \min_{\varphi \in \Psi_k} (\Pi_\varphi(\varphi)/T_\varphi(\varphi)). \quad (5.22)$$

Заметим, что при отыскании фундаментальной частоты собственных колебаний полностью незакрепленных тел можно пользоваться перечисленными выше стационарными и минимальными принципами. Однако в этом случае не требуется заранее удовлетворять никаким граничным условиям. Условия на свободной поверхности являются естественными, т. е. условиями трансверсальности для минимизируемого функционала. Вместо этого искомую форму колебаний следует подчинить дополнительным условиям

$$\int_{\Omega} \varphi d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \mathbf{r} \times \varphi d\Omega = 0,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор, определяющий положение точки области Ω .

1.6.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Свойства существенных форм и собственных частот свободных колебаний существенно используются в задачах анализа и оптимизации механических систем. В ряды по собственным формам свободных колебаний разлагаются решения многих задач дина-

мики и статикки конструкций. Собственные частоты определяют жесткостные свойства деформируемых тел. Частотный спектр во многом характеризует реакцию упругого тела на заданные внешние воздействия. Особенно важны для анализа динамики упругого тела определяемые собственными частотами условия возникновения резонансных явлений. Распределение собственных частот, их кратность и плотность характеризуют качество проектируемых конструкций. Наконец, обработка данных о спектре собственных частот и формах свободных колебаний лежит в основе многих методов идентификации.

Исследование собственных частот и форм свободных колебаний сводится при континуальном описании конструкции к рассмотрению однородных краевых задач на собственные значения для уравнений в частных производных, а при использовании дискретных моделей конструкций — к решению спектральных задач линейной алгебры. В свою очередь, многие общие результаты, полученные для задач на собственные значения, имеют содержательную трактовку в теории упругих колебаний.

Ниже приведем вкратце некоторые основные сведения о свойствах свободных колебаний. Знание этих свойств полезно при постановке задач анализа и проектирования и при интерпретации получаемых результатов. С целью сокращения записей и придания рассматриваемым соотношениям большей простоты будем пользоваться операторной формой записи уравнений динамики. Пусть свободные колебания описываются уравнением $M(\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) + C\mathbf{u} = 0$ с симметричными положительно определенными операторами M и C при некоторых граничных условиях на Γ . Разделение временной и пространственной переменных и представление решения в виде суммы произведений синусов или косинусов аргумента ωt на неизвестные функции пространственных координат (амплитудные функции перемещений или других переменных состояния) приводит к краевой задаче на собственные значения для уравнения

$$C\varphi = \lambda M\varphi, \quad (6.1)$$

где под собственным значением λ понимается квадрат частоты: $\lambda = \omega^2$.

Предположим, что имеется s собственных форм $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^s$, соответствующих собственному значению λ . Тогда их любая линейная комбинация $a_1\varphi^1 + a_2\varphi^2 + \dots + a_s\varphi^s$ (a_i — постоянные) является собственной формой, соответствующей этому собственному значению. Это утверждение проверяется непосредственно:

$$C \left(\sum_{i=1}^s a_i \varphi^i \right) = \sum_{i=1}^s a_i C \varphi^i = \sum_{i=1}^s a_i \lambda M \varphi^i = \lambda M \left(\sum_{i=1}^s a_i \varphi^i \right).$$

Из самосопряженности и положительной определенности операторов C и M следует положительность собственных значений λ . Действительно, пусть λ и φ — собственное число и собственная

функция уравнения (6.1). Умножим левую и правую части этого уравнения скалярно на φ и затем получающиеся выражения проинтегрируем по области Ω . Будем иметь

$$\lambda = (C\varphi, \varphi) / (M\varphi, \varphi). \quad (6.2)$$

С использованием аксиом скалярного произведения и свойства самосопряженности операторов C и M запишем

$$\begin{aligned} (C\varphi, \varphi) &= \overline{(\varphi, C\varphi)}, & (C\varphi, \varphi) &= (\varphi, C\varphi), \\ (M\varphi, \varphi) &= \overline{(\varphi, M\varphi)}, & (M\varphi, \varphi) &= (\varphi, M\varphi). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Из (6.3) следует, что $(\varphi, C\varphi) = \overline{(\varphi, C\varphi)}$, $(\varphi, M\varphi) = \overline{(\varphi, M\varphi)}$, т. е. сами величины и их комплексно сопряженные значения равны между собой. Последнее и означает действительность этих величин. Учитывая также положительную определенность операторов, приходим к выводу, что $\lambda > 0$.

Собственные формы колебаний φ^1 и φ^2 , отвечающие различным собственным значениям $\lambda_1 = \omega_1^2$, $\lambda_2 = \omega_2^2$ ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ортогональны относительно инерционного оператора M . Чтобы доказать данное утверждение, следует домножить скалярно левые и правые части уравнений

$$C\varphi^1 = \lambda_1 M\varphi^1, \quad C\varphi^2 = \lambda_2 M\varphi^2 \quad (6.4)$$

соответственно на φ^2 и φ^1 и получающиеся произведения проинтегрировать по Ω . Следствием этих уравнений является соотношение

$$(\lambda_1 - \lambda_2) (M\varphi^1, \varphi^2) = (C\varphi^1, \varphi^2) - (C\varphi^2, \varphi^1) = 0. \quad (6.5)$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то

$$(M\varphi^1, \varphi^2) = 0. \quad (6.6)$$

Если одному собственному числу λ отвечает несколько собственных форм колебаний, то их можно ортогонализировать, применяя к собственным формам процедуру ортогонализации (см., например, [66, 81]). Применяется также нормирование собственных форм. Поэтому в дальнейшем считается, что совокупность всех собственных форм образует ортонормированную систему.

Собственные формы свободных колебаний также ортогональны и относительно оператора жесткости C . Действительно, предположим, что φ^1 , φ^2 — собственные формы, отвечающие собственным числам λ_1 , λ_2 , и домножим обе части уравнения $C\varphi^1 = \lambda_1 M\varphi^1$ скалярно на собственную функцию φ^2 . С учетом (6.6) будем иметь

$$(C\varphi^1, \varphi^2) = \lambda_1 (M\varphi^1, \varphi^2) = 0. \quad (6.7)$$

Рассмотрим упругое тело, связывающее свободные колебания, и отметим некоторые свойства, относящиеся к наложению или снятию механических связей. Наложение механической связи может выражаться в задании дополнительных краевых условий,

отвечающих более жесткой системе крепления границ тела, задании односторонних условий типа неравенств (контактных условий), описывающих способ подкрепления тела другими упругими или жесткими телами. Отдельно могут рассматриваться точечные односторонние и двусторонние связи, соответствующие заданию ограничений на функцию перемещений. Снятие механических связей происходит при «отлипании» контактирующих упругих поверхностей, разрушениях упругого тела, приводящих к появлению трещин и полостей, отколах и расслоениях в элементах конструкции из структурно-неоднородных материалов. Действие связей описывается соотношениями типа равенств и неравенств, определенных как в граничных, так и во внутренних точках области Ω , занимаемой упругим телом.

С математической точки зрения введение связей означает задание дополнительных условий, налагаемых на класс допустимых функций, которые составляют область определения функционалов. Таким образом, введение дополнительной связи должно сужать класс допустимых функций и тем самым приводить к увеличению минимального значения или уменьшению максимального величины рассматриваемого функционала. Наоборот, снятие связей означает расширение допустимого множества функций, на котором разыскиваются минимумы или максимумы соответствующих функционалов. При этом, очевидно, происходит «опускание» минимумов и «поднятие» максимумов. Подобные соображения лежат в основе многих фундаментальных теорем сравнения, доказываемых в вариационном исчислении.

Сформулируем здесь некоторые основные утверждения.

Если на механическую систему наложить дополнительные связи, то основной тон и все собственные тона (обертопы) системы могут измениться лишь в сторону повышения. Обратное, если освободить систему от ряда связей, ограничивающих ее колебания, то как основной тон, так и все обертопы системы могут измениться лишь в сторону понижения.

Приведем теперь некоторые утверждения общего характера, связанные с разбиением области Ω на подобласти и сопоставлением собственных частот колебаний целого тела и частот колебаний его отдельных частей. Заметим, что вопросы представления конструкций как объединения некоторого числа подконструкций и вопросы декомпозиции спектра собственных значений оказываются важными в теории оптимального проектирования сложных механических систем.

Пусть механическая система, занимающая область Ω , состоит из несвязанных между собой упругих тел, занимающих области $\Omega_1, \Omega_2, \dots$. Подобласти $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ не имеют пересечений, но могут иметь общие граничные точки. Тогда совокупность собственных значений и собственных форм колебаний для всей механической системы состоит из совокупности всех собственных значений и собственных форм для составляющих ее тел [66, 151]. Здесь предполагается, что каждая из собственных форм колебаний,

определенная для одной из областей Ω_i , полагается в других областях Ω_j ($j = 1, 2, \dots; j \neq i$) равной нулю.

Для того чтобы пояснить сформулированное утверждение, достаточно заметить следующее. Собственные формы колебаний, каждая из которых определена для одной из областей Ω_i ($i = 1, 2, \dots$) и равна нулю для всех остальных областей Ω_j , а также все линейные комбинации, составленные из доопределенных таким способом собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, являются одновременно собственными функциями для области Ω . Справедливо и обратное. Собственная форма колебаний для области Ω является собственной формой по крайней мере для одной из подобластей Ω_i . Другими словами, сказанное выше означает только то, что если упругие тела не контактируют друг с другом, то колебания этих тел происходят независимо.

Сформулируем и другое общее свойство колеблющихся тел [66]. Для этого зададим в области Ω , занимаемой упругим телом, конечное число подобластей Ω_i , не имеющих между собой общих внутренних точек. Будем считать, что границы упругого тела жестко закреплены, т. е. вектор перемещений обращается в нуль на границе области ($\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega$). При рассмотрении собственных колебаний упругих тел, занимающих подобласти Ω_i , будем также считать, что $\mathbf{u} = 0$ при $\mathbf{x} \in \partial\Omega_i$. Обозначим через $A(\lambda)$, $A_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots$) количества собственных частот свободных колебаний соответственно для области Ω и подобластей Ω_i , не превышающих величины λ . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$A(\lambda) \geq \sum_{i=1}^s A_i(\lambda). \quad (6.8)$$

Применяется и другая формулировка отмеченного свойства. Сопоставляются частоты колебаний жестко закрепленного упругого тела ($\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega$) и системы невзаимодействующих упругих тел с жестко закрепленными границами ($\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{x} \in \partial\Omega_i$). При этом величина n -й собственной частоты для тела, занимающего область Ω , не превосходит n -го члена суммарной последовательности всех собственных частот, отвечающих телам с границами $\partial\Omega_i$ и расположенных в порядке возрастания их величин. Заметим, что каждое собственное значение кратности r повторяется r раз.

В заключение приведем строгие утверждения в терминах функционального анализа, справедливые как для конечномерных, так и для бесконечномерных (коптингуальных) систем.

Пусть \mathcal{H}_b — гильбертово пространство с нормой $[\varphi, \varphi]^{1/2}$. Через (φ, φ) обозначим ограниченный квадратичный функционал на \mathcal{H}_b . Дополнительно введем подпространство \mathcal{H} , основного гильбертова пространства \mathcal{H}_b . Обозначим через

$$\lambda_1^b \leq \lambda_2^b \leq \lambda_3^b \leq \dots \quad (6.9)$$

стационарные значения рэлеевского отношения $[\mathbf{u}, \mathbf{u}]/(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ на \mathcal{H}_b , а через

$$\lambda_1^s \leq \lambda_2^s \leq \lambda_3^s \leq \dots \quad (6.10)$$

— стационарные значения этого отношения на элементах подпространства \mathcal{H}_s .

Согласно первой теореме сравнения, стационарные значения (6.9) рэлеевского отношения на гильбертовом пространстве \mathcal{H}_b не превосходят соответствующих стационарных значений (6.10) указанного отношения на элементах подпространства \mathcal{H}_s , т. е.

$$\lambda_i^b \leq \lambda_i^s, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.11)$$

Определим теперь в гильбертовом пространстве \mathcal{H}_b r линейных функционалов J_1, J_2, \dots, J_r . Примем в качестве подпространства \mathcal{H}_s множество элементов пространства \mathcal{H}_b , для которых удовлетворяются условия $J_1(\varphi) = 0, \dots, J_r(\varphi) = 0$, т. е.

$$\mathcal{H}_s = \{\varphi \in \mathcal{H}_b: J_1(\varphi) = J_2(\varphi) = \dots = J_r(\varphi) = 0\}.$$

Согласно второй теореме сравнения, для стационарных значений (6.9) и (6.10) рэлеевских функционалов на \mathcal{H}_b и \mathcal{H}_s выполняются следующие двусторонние оценки:

$$\lambda_i^b \leq \lambda_i^s \leq \lambda_{r+i}^b, \quad i = 1, 2, \quad (6.12)$$

1.7.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Одним из наиболее мощных средств, оказавшихся очень эффективными при проведении широкого круга исследований, являются методы возмущений или методы малого параметра. Их применение позволяет получить приближенное аналитическое представление для решений сложных линейных и нелинейных задач для дискретных и распределенных систем, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы возмущений широко используются как для получения асимптотик и анализа сингулярностей, так и для определения аналитических решений тестовых задач. Следует отметить, что эти методы могут служить основой для различных вычислительных алгоритмов. По существу, на теории возмущений основываются все методы последовательных приближений [51].

Рассмотрим задачу на собственные значения, возникающую, например, при расчете свободных колебаний упругой конструкции:

$$C\varphi^i = \lambda_i M\varphi^i. \quad (7.1)$$

Собственные функции φ^i , φ^j , отвечающие различным собственным значениям λ_i , λ_j , считаются ортонормированными:

$$(\varphi^i, M\varphi^j) = \delta_{ij}. \quad (7.2)$$

Здесь δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$), а круглыми скобками обозначается скалярное произведение векторов φ^i и $M\varphi^j$. Линейные дифференциальные операторы C , M включают граничные условия и предполагаются самосопряженными. Считается, что бесконечная последовательность собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ образует дискретный спектр задачи (7.1), (7.2). В случае алгебраических задач с квадратными матрицами M и C размера $n \times n$ имеется конечный спектр собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Объединим рассмотрение континуального и дискретного случая, обозначая через r количество собственных значений задачи. При этом s -кратное собственное значение считается s раз. Для первого и второго случаев имеем соответственно $r = \infty$ и $r = n$.

Операторы C и M , входящие в уравнение (7.1), заданы в виде

$$C = C^0 + \varepsilon C^1, \quad M = M^0 + \varepsilon M^1, \quad (7.3)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; C^0 , M^0 — невозмущенные операторы; εC^1 и εM^1 — вносимые возмущения. В соответствии с представлением (7.3) при $\varepsilon = 0$ имеем невозмущенную задачу на собственные значения (задача нулевого приближения)

$$C^0 \varphi_0^i = \lambda_i^0 M^0 \varphi_0^i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (7.4)$$

и условия ортонормированности

$$(\varphi_0^i, M^0 \varphi_0^j) = \delta_{ij}. \quad (7.5)$$

1° Сначала рассмотрим случай, когда невозмущенная задача (7.4), (7.5) имеет только простые собственные значения, и, предполагая известными величины нулевого приближения φ_0^i, λ_i^0 , $i = 1, \dots, r$, построим приближенное решение возмущенной задачи. Решение возмущенной задачи (7.1), (7.2) для λ_i, φ^i может разыскиваться в виде бесконечных рядов по степеням малого параметра ε . Учитывая при этом, что практический интерес, как правило, представляет отыскание одного-двух членов разложения, представим искомые величины в виде

$$\lambda_i = \lambda_i^0 + \varepsilon \lambda_i^1 + \varepsilon^2 \lambda_i^2, \quad (7.6)$$

$$\varphi^i = \varphi_0^i + \varepsilon \varphi_1^i + \varepsilon^2 \varphi_2^i. \quad (7.7)$$

Нижний индекс собственного вектора и верхний индекс у собственного значения означают номер приближения. Пусть M^0, C^0, M^1, C^1 — самосопряженные операторы. Для определения поправок в первом, втором приближениях или, другими словами, для последовательного построения решения возмущенной задачи (7.1), (7.2) с точностью до членов порядка $\varepsilon, \varepsilon^2$ получим соотношения, которым удовлетворяют величины λ_i^1, φ_1^i и λ_i^2, φ_2^i .

С этой целью подставим (7.3), (7.6), (7.7) в (7.1), (7.2) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате придем к уравнениям, определяющим величины первого приближения λ_i^1, φ_1 :

$$C^0 \varphi_1^i + C^1 \varphi_0^i = \lambda_i^0 M^0 \varphi_1^i + \lambda_i^0 M^1 \varphi_0^i + \lambda_i^1 M^0 \varphi_0^i, \quad (7.8)$$

$$(\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^j) + (\varphi_0^j, M^0 \varphi_0^i) + (\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^j) = 0, \quad (7.9)$$

и величины второго приближения:

$$C^0 \varphi_2^i + C^1 \varphi_1^i = \lambda_i^0 M^0 \varphi_2^i + \lambda_i^1 M^1 \varphi_0^i + \lambda_i^1 M^0 \varphi_1^i + \lambda_i^2 M^0 \varphi_0^i + \lambda_i^0 M^1 \varphi_1^i, \quad (7.10)$$

$$(\varphi_2^j, M^0 \varphi_0^i) + (\varphi_2^i, M^0 \varphi_0^j) + (\varphi_1^j, M^1 \varphi_0^i) + (\varphi_1^i, M^1 \varphi_0^j) + (\varphi_1^i, M^0 \varphi_1^j) = 0. \quad (7.11)$$

Получаемые при этом уравнения для величин нулевого приближения, очевидно, совпадают с (7.3), (7.4).

Домножим обе части уравнения (7.8) скалярно на вектор φ_0^i и учтем равенство

$$(C^0 \varphi_1^i, \varphi_0^i) = (\varphi_1^i, C^0 \varphi_0^i) = \lambda_i^0 (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^i).$$

В результате придем к выражению для поправки к собственному значению в первом приближении

$$\lambda_i^1 = (\varphi_0^i, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i). \quad (7.12)$$

Для определения поправки φ_1^i к собственному вектору φ_0^i искомый вектор φ_1^i представляем в виде разложения по собственным векторам φ_0^j невозмущенной задачи:

$$\varphi_1^i = \sum_{j=1}^r \alpha_j^i \varphi_0^j, \quad \alpha_j^i = (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^j). \quad (7.13)$$

Далее левую и правую часть уравнения (7.8) домножим скалярно на φ_0^j ($i \neq j$). Будем иметь

$$(\varphi_0^j, C^0 \varphi_1^i) + (\varphi_0^j, C^1 \varphi_0^i) = \lambda_i^0 (\varphi_0^j, M^0 \varphi_1^i) + \lambda_i^0 (\varphi_0^j, M^1 \varphi_0^i) + \lambda_i^1 (\varphi_0^j, M^0 \varphi_0^i). \quad (7.14)$$

Принимая во внимание условие ортогональности

$$(M^0 \varphi_0^i, \varphi_0^j) = 0$$

и равенство

$$(\varphi_0^j, C^0 \varphi_1^i) = \lambda_j^0 (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^j),$$

на основании соотношения (7.14) получим ($i \neq j$)

$$\alpha_j^i = (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^j) = \frac{1}{\lambda_i^0 - \lambda_j^0} (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i). \quad (7.15)$$

Соотношения (7.9) при $i \neq j$ записываются в виде $\alpha_i^j + \alpha_j^i = -(\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^j)$ и тождественно удовлетворяются при подстановке в них выражений (7.15) для α_i^j и α_j^i .

Коэффициент α_i^i определяется из условия нормировки (7.9) с $i = j$:

$$\alpha_i^i = (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^i) = -\frac{1}{2} (\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^i). \quad (7.16)$$

С учетом (7.15), (7.16) для поправки к собственному вектору в первом приближении имеем следующее выражение:

$$\varphi_1^i = -\frac{1}{2} (\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^i) \varphi_0^i + \sum_{j=1, j \neq i}^r \frac{\varphi_0^j}{\lambda_i^0 - \lambda_j^0} (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i). \quad (7.17)$$

Определим поправки второго приближения. С этой целью умножим обе части уравнения (7.10) скалярно на φ_0^i и выполним преобразования с учетом (7.5), (7.16) и равенства $(C^0 \varphi_2^i, \varphi_0^i) = \lambda_0^i (\varphi_2^i, M_0 \varphi_0^i)$. Имеем

$$\lambda_i^2 = (\varphi_0^i, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_1^i) + \lambda_1^i (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^i). \quad (7.18)$$

Подставляя далее в формулу (7.18) выражения для λ_1^i и φ_1^i согласно (7.12), (7.17) и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\lambda_i^2 = -(\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^i) (\varphi_0^i, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i) + \sum_{j=1, j \neq i}^r \frac{1}{\lambda_i^0 - \lambda_j^0} (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i)^2. \quad (7.19)$$

Представим возмущение к собственному вектору во втором приближении в виде ряда по собственным векторам невозмущенной задачи:

$$\varphi_2^i = \sum_{k=1}^r \kappa_k^i \varphi_0^k. \quad (7.20)$$

Выражение для κ_j^i при $i \neq j$ получается при помощи подстановки (7.20) в уравнение (7.10) и умножения обеих частей полученного соотношения на φ_0^j . С учетом равенства

$$(\varphi_2^i, C^0 \varphi_0^j) = \lambda_j^0 (\varphi_2^i, M^0 \varphi_0^j) \quad (7.21)$$

и формул (7.12), (7.16) будем иметь

$$\begin{aligned} \kappa_j^i = & \frac{1}{\lambda_i^0 - \lambda_j^0} \left[(\varphi_0^i, (C^1 - \lambda_0^i M^1) \varphi_0^i) \left(\varphi_0^j, \frac{(C^1 - \lambda_0^j M^1)}{\lambda_0^j - \lambda_0^i} \varphi_0^i \right) - \right. \\ & - \frac{1}{2} (\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^i) (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_0^i M^1) \varphi_0^i) + \\ & \left. + \sum_{k=1, k \neq i}^r \left(\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_0^i M^1) \varphi_0^k \frac{(\varphi_0^i, (C^1 - \lambda_0^i M^1) \varphi_0^k)}{\lambda_0^i - \lambda_0^k} \right) \right]. \quad (7.22) \end{aligned}$$

Выражение для коэффициента κ_i^i находится из условия нормировки (7.11) с $j = i$ и имеет вид

$$\kappa_i^i = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \alpha_j^i (\alpha_j^i + 2(\varphi_0^j, M^1 \varphi_0^i)). \quad (7.23)$$

2° Рассмотрим случай, когда среди собственных значений невозмущенной задачи (7.4), (7.5) имеется кратное собственное значение. Без ограничения общности предположим, что s -кратным является первое собственное значение λ^0 и ему соответствуют собственные векторы $\varphi_0^1, \varphi_0^2, \dots, \varphi_0^s$. Очевидно, что собственным вектором задачи (7.4), (7.5), отвечающим собственному значению λ^0 , также является любая линейная комбинация указанных векторов. Предполагается, что при реализации возмущения операторов (7.3) кратное собственное значение λ^0 невозмущенной задачи (7.4), (7.5) расщепляется и вместо него в возмущенной задаче (7.1), (7.2) появляется s различных собственных значений $\lambda^1, \lambda^2, \dots, \lambda^s$. Предполагается, что при уменьшении параметра ε величины λ^i ($i = 1, 2, \dots, s$) стремятся к значению λ^0 .

В подпространстве собственных векторов невозмущенной задачи (7.4), (7.5), отвечающих собственному значению λ^0 , выберем s ортогональных векторов, являющихся линейными комбинациями собственных векторов $\varphi_0^1, \varphi_0^2, \dots, \varphi_0^s$ с некоторыми нефиксированными множителями β_j^i :

$$\psi^i = \sum_{j=1}^s \beta_j^i \varphi_0^j, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (7.24)$$

Собственные значения и собственные векторы возмущенной задачи (7.1), (7.2) с $i \leq s$ представим в виде

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda^0 + \varepsilon \lambda_i^1 + \varepsilon^2 \lambda_i^2 + \\ \varphi^i &= \psi^i + \varepsilon \varphi_1^i + \varepsilon^2 \varphi_2^i + \end{aligned} \quad (7.25)$$

При $i > s$ соответствующие рассмотрения аналогичны тем, которые делались выше в случае некратных собственных значений. Используя выражения (7.24), (7.25) и уравнения для величин первого приближения (7.8), будем иметь

$$C^0 \varphi_1^i + \sum_{j=1}^s \beta_j^i C^1 \varphi_0^j = \lambda_i^1 \sum_{j=1}^s \beta_j^i M^0 \varphi_0^j + \lambda^0 \sum_{j=1}^s \beta_j^i M^1 \varphi_0^j + \lambda^0 M^0 \varphi_1^i. \quad (7.26)$$

Умножая скалярно обе части уравнения (7.26) на φ_0^k с $k \neq s$ и учитывая равенства $(\varphi_1^i, C^0 \varphi_0^k) = \lambda_k^0 (\varphi_1^i, M^0 \varphi_0^k)$, $\lambda_i^0 = \lambda_k^0$, приходим к соотношениям

$$\sum_{j=1}^s [(\varphi_0^k, (C^1 - \lambda^0 M^1) \varphi_0^j) - \lambda_i^1 \delta_{jk}] \beta_j^i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, s. \quad (7.27)$$

Для отыскания нетривиального решения системы уравнений (7.27) потребуем обращения в нуль определителя системы

$$\det ([(\varphi_0^k, (C^1 - \lambda^0 M^1) \varphi_0^i) - \lambda_i^1 \delta_{jk}]) = 0. \quad (7.28)$$

Определяемые из решения уравнения (7.28) величины λ_i^1 являются поправками к величине невозмущенной кратной частоты λ^0 . Если определяемые величины оказываются некратными, то из системы (7.27) однозначно находятся значения коэффициентов β_j^i . Если же среди корней уравнения (7.28) есть кратные, то имеется известный произвол в выборе β_j^i .

Определим поправку к собственному вектору в первом приближении φ_1^i . Для удобства проведения соответствующих рассмотрений введем единое обозначение для векторов невозмущенной задачи. Обозначим через $\varphi_0^i (i = 1, 2, \dots, r)$ полный набор собственных векторов невозмущенной задачи, положив $\varphi_0^i = \psi^i$ при $i = 1, 2, \dots, s (s \leq r)$.

Представим искомые векторы $\varphi_1^i (i = 1, 2, \dots, s)$ в виде разложений по собственным векторам $\varphi_0^i (i = 1, 2, \dots, r)$ невозмущенной задачи:

$$\varphi_1^i = \sum_{j=1}^s \alpha_j^i \varphi_0^j + \sum_{j=s+1}^r \alpha_j^i \varphi_0^j. \quad (7.29)$$

Величины $\alpha_j^i (j = s+1, \dots, r)$, входящие во вторую сумму в (7.29), определяются тем же способом, что и в случае некратных собственных значений, и находятся при помощи формулы (7.15) при $i \neq j$. Для определения α_j^i при $j = 1, 2, \dots, s$, как и в случае некратных собственных значений, применимы формулы (7.16). Отыскание величин α_j^i с $j = 1, 2, \dots, s$ и $i \neq j$ оказывается невозможным на основе уравнений первого приближения (7.8), (7.9), и в этом случае требуется воспользоваться уравнениями (7.10) для возмущений второго порядка.

Умножим обе части уравнения (7.10) скалярно на φ_0^j и преобразуем получающееся соотношение, используя формулы (7.5) и равенства $(\varphi_2^i, C^0 \varphi_0^j) = \lambda_j^0 (\varphi_2^i, M^0 \varphi_0^j)$. Будем иметь

$$\begin{aligned} (\lambda_i^0 - \lambda_j^0) (\varphi_2^i, M^0 \varphi_0^j) &= (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_1^i) - \\ &- \lambda_i^2 \delta_{ij} - \lambda_i^1 (\varphi_0^j, M^1 \varphi_0^i + M^0 \varphi_1^i). \end{aligned} \quad (7.30)$$

При $i \leq s$ и $j \leq s$ член, фигурирующий в левой части равенства (7.30), обращается в нуль, так как $\lambda_i = \lambda_j$, и приходим к выражению для λ_i^2 :

$$\lambda_i^2 \delta_{ij} = (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_1^i) - \lambda_i^1 (\varphi_0^j, M^1 \varphi_0^i + M^0 \varphi_1^i). \quad (7.31)$$

На основании (7.29), (7.31) и соотношения

$$(\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i) = \lambda_i^1 \delta_{ji} \quad (7.32)$$

получим окончательную формулу для поправки к кратному собственному значению во втором приближении

$$\lambda_i^2 = \sum_{k=s+1}^r \frac{1}{\lambda_i^0 - \lambda_k^0} (\varphi_0^k, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i)^2 - \lambda_i^1 (\varphi_0^i, M^1 \varphi_0^i). \quad (7.33)$$

Справедливость вспомогательного соотношения (7.32) устанавливается при помощи подстановки в (7.32) $\varphi_0^j = \psi^j$ и выполнения элементарных преобразований.

Коэффициенты разложения поправки к кратному собственному вектору первого приближения находятся на основе соотношений (7.31), (7.29), (7.32). При $i \leq s$, $j \leq s$, $i \neq j$ и $\lambda_i^1 = \lambda_j^1$ выражение для α_j^i примет вид

$$\alpha_j^i = \sum_{k=s+1}^r \frac{(\varphi_0^k, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^i)}{(\lambda_i^1 - \lambda_j^1)(\lambda_i^0 - \lambda_k^0)} (\varphi_0^j, (C^1 - \lambda_i^0 M^1) \varphi_0^k) - \frac{\lambda_i^1 (\varphi_0^j, M^1 \varphi_0^i)}{\lambda_i^1 - \lambda_j^1}. \quad (7.34)$$

1.8.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ УПРУГИХ ТЕЛ, СОВЕРШАЮЩИХ ВЫНУЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Исследование поведения упругих тел при вынужденных гармонических колебаниях основывается на представлении перемещений $u(x, t)$, деформаций $\varepsilon(x, t)$, напряжений $\sigma(x, t)$ и внешних воздействий $q^v(x, t)$, $q^s(x, t)$, $u^s(x, t)$ в виде

$$u = \varphi(x) \exp(i\omega t), \quad \varepsilon = e(x) \exp(i\omega t), \quad \sigma = S(x) \exp(i\omega t), \quad (8.1)$$

$$q^v = Q^v(x) \exp(i\omega t), \quad q^s = Q^s(x) \exp(i\omega t), \quad u^s = \varphi^s(x) \exp(i\omega t)$$

и исключения начальных условий динамической задачи из рассмотрений. Здесь ω — частота вынужденных гармонических колебаний. Подстановка (8.1) в соотношения (1.6) — (1.8) приводит к краевой задаче

$$\nabla \cdot S + Q^v + \rho \omega^2 \varphi = 0, \quad (8.2)$$

$$S = C \cdot e, \quad e = 1/2 [(\nabla \varphi)^* + \nabla \varphi], \quad (8.3)$$

$$n \cdot S = Q^s, \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad \varphi = \varphi^s, \quad x \in \Gamma_u. \quad (8.4)$$

Для получения принципа стационарности домножим выражение, записанное в левой части уравнения (8.1), на кинематически допустимую вариацию амплитудной функции смещений $\delta\varphi$ ($\delta\varphi = 0$ на Γ_u). Затем проинтегрируем произведение по области

Ω , занимаемой телом. Имеем

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{Q}^v + \rho \omega^2 \boldsymbol{\varphi}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Omega = 0. \quad (8.5)$$

Применяя к первому интегралу в (8.5) условия $\delta \boldsymbol{\varphi} = 0$ при $x \in \Gamma_u$ формулу Гаусса — Остроградского (2.3) и тождества (2.4), в которых предварительно \mathbf{u} , $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ заменены на $\boldsymbol{\varphi}$, \mathbf{S} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, приходим к

$$-\int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{Q}^v + \rho \omega^2 \boldsymbol{\varphi}) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Gamma = 0. \quad (8.6)$$

Дальнейшее преобразование вариационного уравнения (8.6) становится возможным, если использовать зависимость \mathbf{S} от $\boldsymbol{\varepsilon}$, даваемую законом Гука (8.3):

$$\delta \left(\Pi_{\boldsymbol{\varphi}} - \omega^2 T_{\boldsymbol{\varphi}} - \int_{\Omega} \mathbf{Q}^v \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{Q}^s \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) = 0, \quad (8.7)$$

$$\Pi_{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{e} d\Omega, \quad T_{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Omega,$$

Принципу стационарности (8.7) в статическом случае, т. е. при $\omega = 0$, соответствует принцип минимума потенциальной энергии.

Пусть теперь варьируется амплитудная функция напряжений. При этом учитывается, что $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{S} = 0$ на Γ_{σ} , а на Γ_u величина $\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{S}$ произвольна. Кроме того, используется соотношение

$$\nabla \cdot \delta \mathbf{S} + \delta \mathbf{Q}^v + \rho \omega^2 \delta \boldsymbol{\varphi} = 0, \quad (8.8)$$

связывающее вариацию $\delta \mathbf{S}$ с вариацией $\delta \boldsymbol{\varphi}$. Это соотношение получается непосредственно при варьировании уравнения (8.2).

Умножим далее выражение, записанное в левой части уравнения в вариациях (8.8), на амплитудную функцию смещений $\boldsymbol{\varphi}(x)$ и проинтегрируем полученное произведение по области Ω . Имеем

$$\int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{S} d\Omega - \omega^2 \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\varphi} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{Q}^v \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Omega - \int_{\Gamma_u} (\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{S}) \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Gamma = 0.$$

Введя обозначения

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{S} d\Omega, \quad \delta T = \int_{\Omega} \rho \boldsymbol{\varphi} \delta \boldsymbol{\varphi} d\Omega$$

и предположив, что $\delta \boldsymbol{\varphi} = 0$ на Γ_u , а $\delta(\mathbf{Q}^v \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi} \cdot \delta \mathbf{Q}^v$, приходим к принципу стационарности

$$\delta \left(\Pi - \omega^2 T - \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{Q}^v d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{n} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\varphi} d\Gamma \right) = 0. \quad (8.9)$$

Таким образом, среди различных напряженных состояний, удовлетворяющих уравнениям движения и граничным условиям на Γ , действительное напряженное состояние доставляет стационарное значение величине, записанной в (8.9) в скобках. Принципу стационарности (8.9) в статическом случае ($\omega = 0$) отвечает принцип минимума дополнительной работы.

В теории вынужденных гармонических колебаний упругих тел, так же как и в теории свободных колебаний, наряду с вариационными уравнениями или принципами стационарности могут быть сформулированы и минимальные принципы. Обсудим принцип минимальности, приведенный в [11]. Воспользуемся операторной записью уравнений динамики, аналогичной (1.18). Однако здесь мы не будем включать граничные условия в операторное уравнение динамики и рассмотрим их отдельно. Начальные условия (1.5), как уже отмечалось в данном параграфе, не входят в постановку задачи о вынужденных гармонических колебаниях.

Решение задачи о гармонических колебаниях с применением представлений перемещений $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и внешних воздействий $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}) \exp(i\omega t), \quad \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad (8.10)$$

сводится к определению амплитудной функции $\varphi(\mathbf{x})$ из решения следующей краевой задачи:

$$C\varphi - \omega^2 M\varphi = \mathbf{Q}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8.11)$$

$$B_j \varphi = 0, \quad j = 1, \quad k, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (8.12)$$

Здесь t — время; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — пространственная переменная, принимающая значения из области Ω ; Γ — граница области Ω ; $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = (Q_1(\mathbf{x}), \dots, Q_m(\mathbf{x}))$ — амплитудная вектор-функция внешних воздействий; C и M — матричные дифференциальные операторы; B_j — линейные дифференциальные операторы граничных условий.

Считается, что операторы M и C симметричны и положительно определены на классе функций, удовлетворяющих граничным условиям (8.12). При этих предположениях, как известно [66, 81], однородная краевая задача на собственные значения для уравнения

$$C\psi - \lambda M\psi = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (8.13)$$

с граничными условиями (8.12) имеет дискретный положительный спектр

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots,$$

а система собственных функций $\{\psi^i\}_{i=1}^{\infty}$ полна в энергетических пространствах, порожденных операторами C и M . Пусть система

собственных функций $\{\psi^i\}_{i=1}^\infty$ ортонормирована следующим образом:

$$(M\psi^i, \psi^j) = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, а круглыми скобками здесь и далее обозначается операция скалярного произведения вектор-функций. Предположим также, что частота вынужденных гармонических колебаний удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_i < \omega^2 < \lambda_{i+1} \quad (\lambda_i < \lambda_{i+1}). \quad (8.14)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

Краевая задача (8.11), (8.12) отыскания $\varphi(x)$ при значении частоты вынужденных колебаний ω , удовлетворяющей неравенствам (8.14), и задача минимизации функционала

$$J(\varphi) = (C\varphi, \varphi) - \omega^2(M\varphi, \varphi) - 2(Q, \varphi) \quad (8.15)$$

при условиях (8.12) и

$$(M\varphi, \psi^i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (8.16)$$

эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$(Q, \psi^i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (8.17)$$

означающие ортогональность правой части уравнения (8.11) к первым l собственным функциям краевой задачи (8.12), (8.13).

Приведем доказательство изложенного утверждения. Предварительно для обоснования вариационного принципа (8.15), (8.16) отметим свойство положительной определенности оператора $C - \omega^2 M$ на функциях, удовлетворяющих условию (8.16) при выполнении соотношений (8.14). С этой целью рассмотрим множество функций φ , на которых разыскивается минимум функционала (8.15). С учетом полноты системы $\{\psi^i\}_{i=1}^\infty$ и условий ортогональности (8.16) функции φ могут быть представлены в виде

$$\varphi = \sum_{i=l+1}^{\infty} \gamma_i \psi^i, \quad (8.18)$$

где γ_i — коэффициенты разложения φ в базисе $\{\psi^i\}_{i=l+1}^\infty$.

Положительная определенность оператора $C - \omega^2 M$ на функциях (8.18) устанавливается на основе следующих оценок:

$$(C\varphi - \omega^2 M\varphi, \varphi) = \sum_{i=l+1}^{\infty} (\lambda_i - \omega^2) \gamma_i^2 \geq \varepsilon^2 (M\varphi, \varphi),$$

где $\varepsilon^2 = \lambda_{l+1} - \omega^2 > 0$.

Необходимость выполнения условий (8.17) доказывается при помощи домножения левой и правой частей уравнения (8.11) на функции ψ^i ($i = 1, 2, \dots, l$) и выполнения элементарных опера-

ций с учетом свойств операторов C и M и условий (8.16), (8.17):

$$(Q, \psi^i) = (C\varphi - \omega^2 M\varphi, \psi^i) = (\lambda_i - \omega^2)(M\varphi, \psi^i) = 0.$$

Для доказательства достаточности условий (8.17) предположим, что функция $\varphi^0(x)$ реализует минимум функционала (8.15) при выполнении условий (8.12), (8.14), (8.16). Тогда для любого числа μ и произвольной функции $\eta(x)$, удовлетворяющей граничным условиям (8.12) и соотношениям

$$(M\eta, \psi^i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (8.19)$$

справедливо неравенство $J(\varphi^0 + \mu\eta) \geq J(\varphi^0)$, которое записывается в виде

$$2\mu(C\varphi^0 - \omega^2 M\varphi^0 - Q, \eta) + \mu^2(C\eta - \omega^2 M\eta, \eta) \geq 0. \quad (8.20)$$

В силу положительной определенности оператора $C - \omega^2 M$ на функциях, удовлетворяющих условиям (8.12), (8.19), имеем $(C\eta - \omega^2 M\eta, \eta) \geq \varepsilon^2(M\eta, \eta)$, откуда, в частности, следует положительность второго слагаемого в (8.20). Неравенство (8.20) выполняется при любых значениях μ , и поэтому

$$(C\varphi^0 - \omega^2 M\varphi^0 - Q, \eta) = 0. \quad (8.21)$$

Далее из условий (8.16), (8.17), (8.19) следует, что элементы η и $C\varphi^0 - \omega^2 M\varphi^0 - Q$ представимы в виде линейных комбинаций по собственным функциям $\{\psi^i\}_{i=l+1}^{\infty}$ и принадлежат одному и тому же пространству. Так как равенство (8.21) выполняется для любых $\eta(x)$, удовлетворяющих (8.12), (8.19), то первый сомножитель в (8.21) равен нулю. Следовательно, функция φ^0 при выполнении условия (8.17) является решением краевой задачи (8.11), (8.12). Тем самым завершено доказательство утверждения об эквивалентности краевой задачи и сформулированного вариационного принципа.

1.9.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУТОГО ТЕЛА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ И ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

1.9.1. Опишем стандартную схему использования вариационных принципов в нестационарных задачах о колебаниях упругих тел. Пусть основные соотношения, определяющие динамику тела, записаны в форме (1.14)–(1.16). Решение нестационарной краевой задачи можно разыскивать в виде разложений в ряд по формам свободных колебаний

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \varphi^k(x) + \varphi^0(x, t). \quad (9.1)$$

Зависимость распределений смещений от времени определяется функциями $\varphi^0(x, t)$ и $f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, формы колебаний $\varphi^k(x)$ определяются как решения однородных краевых задач на

собственные значения:

$$\nabla \cdot [\mathbf{C} \cdot (\nabla \Phi^k)] + \omega^2 \rho \Phi^k = 0, \quad \varepsilon^k = 1/2 [(\nabla \Phi^k) + (\nabla \Phi^k)^*], \quad (9.2)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \Phi^k) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad \Phi^k = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (9.3)$$

Собственные формы ортогональны:

$$\int_{\Omega} \rho \Phi^k \cdot \Phi^j d\Omega = m_k \delta_{kj}, \quad (9.4)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon^k \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon^j d\Omega = \omega_k^2 m_k \delta_{kj}, \quad (9.5)$$

где $\varepsilon^k = 1/2 [(\nabla \Phi^k)^* + (\nabla \Phi^k)]$; ω_k — частота k -й формы колебаний, а $\delta_{kj} = 0$ при $k \neq j$, $\delta_{kj} = 1$ при $k = j$.

Фигурирующая в разложении (9.1) функция $\Phi^0(\mathbf{x}, t)$ может быть определена как решение следующей краевой задачи:

$$\nabla \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \Phi^0) = 0, \quad (9.6)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \Phi^0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma; \quad \Phi^0 = \mathbf{u}^s, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u. \quad (9.7)$$

С учетом разложения функции перемещений в ряд (9.1) по собственным формам колебаний выражения для кинетической и потенциальной энергий могут быть представлены в виде квадратичных зависимостей от обобщенных координат $f_k(\mathbf{x})$ и собственных скоростей $df_k(t)/dt$. Выражение для кинетической энергии T удобно записать следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \left(\frac{df_k}{dt} \right)^2 + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{df_k}{dt} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} d\Omega, \quad b_k = \int_{\Omega} \rho \Phi^k \cdot \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} d\Omega. \quad (9.8)$$

Выражение для потенциальной энергии упругих деформаций Π_e может быть преобразовано к виду

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k^2 m_k f_k^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon^0 d\Omega. \quad (9.9)$$

Отсутствие в представлении (9.9) членов, линейно зависящих от обобщенных координат, обусловлено обращением в нуль коэффициентов при f_k . Это нетрудно показать (см., например, [87]), преобразуя выражения для коэффициентов по формуле Гаусса — Остроградского и используя граничные условия (9.3), (9.7) и уравнение (9.6):

$$\int_{\Omega} \varepsilon^k \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon^0 d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\Phi^k \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon^0) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} \Phi^k \cdot (\nabla(\mathbf{C} \cdot \varepsilon^0)) d\Omega = \int_{\Gamma} \Phi^k \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \varepsilon^0) d\Gamma - \\ - \int_{\Omega} \Phi^k \cdot [\nabla \cdot (\mathbf{C} \cdot \varepsilon^0)] d\Omega = 0. \quad (9.10)$$

В соответствии с принятым разложением поля перемещений $u(x, t)$ потенциал внешних нагрузок запишется в виде

$$\begin{aligned} \Pi_f &= - \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \kappa_k f_k - \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \Phi^0 \, d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \Phi^0 \, d\Gamma, \\ \kappa_k &= \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \Phi^k \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \Phi^k \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Составим выражение для лагранжиана:

$$\begin{aligned} L &= T - \Pi_c - \Pi_f = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m_k}{2} \left(\frac{df_k}{dt} \right)^2 + b_k \frac{df_k}{dt} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_k \omega_k^2}{2} (f_k)^2 + \kappa_k f_k \right] + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} \cdot \frac{\partial \Phi^0}{\partial t} \, d\Omega - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^0 \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{q}^v \cdot \Phi^0 \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{q}^s \cdot \Phi^0 \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (9.12)$$

Воспользуемся вариационным принципом стационарности действия по Гамильтону. Выписывая необходимые условия стационарности функционала действия, приходим к уравнениям Лагранжа второго рода для обобщенных координат:

$$\begin{aligned} d^2 f_k / dt^2 + \omega_k^2 f_k &= g_k, \\ g_k &= (\kappa_k - db_k / dt) / m_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (9.13)$$

Начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений получаются следующим образом. Делается подстановка (9.1) в (1.16):

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \Phi^j \right)_{t=0} = \mathbf{u}^0(x), \quad \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{df_j}{dt} \Phi^j \right)_{t=0} = \mathbf{v}^0(x). \quad (9.14)$$

Затем левые и правые части соотношений (9.14) умножаются скалярно на $\rho \Phi^k$ и полученные произведения интегрируются по области Ω . Учитывая условия ортогональности (9.4), получаем начальные значения

$$\begin{aligned} f_k(0) &= \alpha_k, \quad (df_k/dt)_{t=0} = \beta_k, \\ \alpha_k &= (\rho \Phi^k, \mathbf{u}^0) / (\rho \Phi^k, \Phi^k), \quad \beta_k = (\rho \Phi^k, \mathbf{v}^0) / (\rho \Phi^k, \Phi^k). \end{aligned} \quad (9.15)$$

Численное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (9.13), (9.15) с начальными условиями, вытекающими из (1.16), (9.1), обычно основывается на стандартных методах интегрирования. При этом обычно в

системе (9.13) удерживается конечное число уравнений. Основное соображение, учитываемое при переходе к рассмотрению конечного числа форм колебаний, заключается в том, что удерживаться в (9.1), (9.13) должны прежде всего те тона колебаний, частоты которых попадают в полосу спектра внешних воздействий. Исключение из системы (9.13) обобщенных координат, соответствующих резонирующим формам колебаний, приводит к значительным искажениям решения.

1.9.2. Данные о спектре собственных частот и формах свободных колебаний могут эффективно использоваться при построении решений в задачах о вынужденных гармонических колебаниях. Для этого применим описанный в разд. 1.8 минимальный принцип. Этот принцип был доказан в случае, когда нагрузка удовлетворяет условиям (8.17). Однако этот принцип можно использовать для решения задач об установившихся колебаниях упругих конструкций и в общем случае произвольной функции $Q(x)$, не подчиненной условиям ортогональности.

Пусть частота внешних воздействий ω удовлетворяет неравенству (8.19), а $\psi^1(x), \dots, \psi^l(x)$ — формы свободных колебаний, являющиеся собственными функциями задачи (8.12), (8.13) и отвечающие первым l собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_l$.

Обозначим через β^i коэффициенты разложения амплитудной функции внешних воздействий $Q(x)$ по формам собственных колебаний:

$$\beta^i = (Q(x), \psi^i(x)), \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (9.16)$$

и представим функцию Q в виде суммы:

$$Q(x) = Q^t(x) + \sum_{i=1}^l \beta^i M \psi^i(x). \quad (9.17)$$

Для функции $Q^t(x)$ выполняются условия ортогональности (8.17).

В соответствии с указанным представлением нагрузки (9.16), (9.17) решение задачи (8.11), (8.12) записывается в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^l \frac{\beta^i}{(\lambda_i - \omega^2)} \psi_i(x) + \varphi^t(x), \quad (9.18)$$

где φ^t — решение задачи (8.11), (8.12) с $Q = Q^t(x)$.

При отыскании φ^t может быть непосредственно использован вариационный принцип (8.15), (8.17).

Таким образом, рассматриваемый вариационный подход к решению задачи о вынужденных гармонических колебаниях основывается на определении l -первых собственных функций и собственных значений и решении вариационной задачи на услов-

ный экстремум для квадратичного функционала (8.15) при ограничениях (8.16). Если $\omega < \lambda_1$, то отыскание $\varphi(x)$ сводится к безусловной минимизации функционала (8.15). Вариационный принцип для случая $\omega < \lambda_1$ формулировался в [170].

1.10.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ПОШАГОВЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПРИНЦИПОВ

Общие вариационные принципы, приведенные в разд. 1.2—1.4, представляют собой условия стационарности, а не условия минимума или максимума соответствующих функционалов. Это обстоятельство является характерным для задач динамики упругих систем, описываемых уравнениями гиперболического типа. По этой причине невозможно непосредственное применение прямых вариационных методов, т. е. методов отыскания минимума или максимума к задачам нестационарной динамики.

Для распространения прямых вариационных методов на нестационарные задачи может служить подход, основанный на дискретизации временной переменной в уравнениях динамики и построении пошаговых вариационных принципов. Для рассматриваемых здесь функционалов на действительных полях перемещений или приращениях перемещений реализуются минимумы (максимумы).

Проведем сначала соответствующие построения на примере задачи динамики упругого тела, записанной в форме (1.14)—(1.16). Разобьем интервал времени $[0, t_1]$, на котором рассматривается деформирование упругого тела, точками $t_i = i\tau$, где $\tau > 0$, $i = 1, 2, \dots$. Аппроксимируем производные по времени, входящие в соотношения (1.14)—(1.16), конечными разностями. Вводя обозначение $u(x, t_i) = u^i$, запишем уравнения, начальные и краевые условия дискретизованной по времени задачи в виде

$$\rho \frac{u^i - 2u^{i-1} + u^{i-2}}{\tau^2} = \nabla \cdot C \cdot (\nabla u^i)^* + (q^v)^i, \quad (10.1)$$

$$n \cdot C \cdot (\nabla u^i)^* = (q^s)^i, \quad x \in \Gamma_\sigma, \quad u^0 = u^s(x), \quad x \in \Gamma_u, \quad (10.2)$$

$$u^0(x, 0) = u^0(x), \quad u^1(x, \tau) = u^0(x) + \tau v^0(x). \quad (10.3)$$

Здесь принята простейшая конечно-разностная аппроксимация. С использованием принятой аппроксимации исходная задача (1.14)—(1.16) свелась к серии задач, последовательное решение которых позволяет исследовать весь процесс деформирования. Заметим, что на первом шаге определяется величина $u^2 = u(x, t_2)$.

Предположим, что величины u^{i-1} , u^{i-2} известны из решений на предыдущих шагах, и сформулируем вариационную задачу, служащую для отыскания величины u^i .

Действительное распределение перемещений $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_i)$ доставляет минимум квадратичному функционалу

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(\nabla \mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \mathbf{u}^i) + \frac{\rho}{\tau^2} (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^i) \right] d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{Q}^i \cdot \mathbf{u}^i d\Omega, \quad (10.4)$$

рассматриваемому на классе непрерывно дифференцируемых функций \mathbf{u}^i , удовлетворяющих граничным условиям (10.2) на Γ_σ и Γ_u . В выражении (10.4) через \mathbf{Q}^i обозначена эффективная объемная сила

$$\mathbf{Q}^i = (\mathbf{q}^v)^i - (\rho/\tau^2) (2\mathbf{u}^{i-1} - \mathbf{u}^{i-2}). \quad (10.5)$$

Класс функции \mathbf{u}^i , па котором ищется минимум функционала, можно расширить, исключив из требований, накладываемых на допустимые функции, выполнение граничного условия на Γ_σ . При этом в выражении для минимизируемого функционала следует включить интеграл по части границы тела Γ_σ , представляющий собой виртуальную работу сил $(\mathbf{q}^s)^i$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[(\nabla \mathbf{u}^i) \cdot \mathbf{C} \cdot (\nabla \mathbf{u}^i) + \frac{\rho}{\tau^2} (\mathbf{u}^i \cdot \mathbf{u}^i) \right] d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{Q}^i \cdot \mathbf{u}^i d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{q}^s \cdot \mathbf{u}^i d\Gamma. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Варьирование функционалов (10.4), (10.6) по \mathbf{u}^i в области Ω приводит, как нетрудно убедиться, к необходимым условиям экстремума, совпадающим с уравнениями (10.1). Кроме того, для случая, когда варьируется функционал (10.6) и на функцию \mathbf{u}^i на Γ_σ не наложено силовое условие (10.2), наряду с уравнением Эйлера, справедливым в Ω , получаем условия трансверсальности, справедливые на Γ_σ и совпадающие с силовыми условиями (10.2).

С учетом симметричности и положительной определенности жесткостного оператора теории упругости и положительной определенности второго квадратичного по \mathbf{u}^i слагаемого в подынтегральном выражении в (10.4) и (10.6) нетрудно показать, что указанные функционалы на допустимых классах функций являются строго выпуклыми. Это свойство гарантирует единственность решения вариационных задач (10.4) и (10.6) об определении действительных полей перемещений $\mathbf{u}^i(\mathbf{x})$ для момента времени $t = t_i$ по известным для моментов $t = t_{i-1}$ и $t = t_{i-2}$ распределениям перемещений $\mathbf{u}^{i-1}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{u}^{i-2}(\mathbf{x})$.

Описанный подход к решению эволюционных задач использовался в [12] для расчета поведения конструкций, проектируемых на нестационарные воздействия. Примеры применения данного подхода при решении задач анализа и оптимизации излагаются в главе 6 (см. разд. 6.4).

Отметим, что описанный способ решения динамических задач с использованием принятой схемы конечно-разностной аппроксими-

мации представляет собой простейший пошаговый метод. Другой вариант пошагового метода применялся в [38] для расчета динамической системы уравнений с начальными условиями

$$\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + C \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (10.7)$$

$$(\mathbf{u})_{t=0} = \mathbf{u}^0, \quad (\partial \mathbf{u} / \partial t)_{t=0} = \mathbf{v}^0 \quad (10.8)$$

и некоторыми краевыми условиями, выставленными на границе Γ области определения Ω . Через C , $\mathbf{u}^0(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}^0(\mathbf{x})$ в (10.7), (10.8) обозначены оператор дифференцирования по пространственным переменным и заданные функции пространственных координат, описывающие начальные распределения перемещений и скоростей, $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ — заданная функция от \mathbf{x} и $t \in [0, t_f]$.

Приближенное решение рассматриваемой задачи может быть построено при помощи пошаговой процедуры

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^{i-1} + \tau \mathbf{d}^i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.9)$$

основанной на последовательном решении вариационных задач с квадратичным функционалом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{d}^i, \mathbf{d}^i) d\Omega + \frac{1}{2} \theta \tau^2 \int_{\Omega} (C \mathbf{d}^i, \mathbf{d}^i) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (Q^i, \mathbf{d}^i) d\Omega \rightarrow \min_{\mathbf{d}^i \in \Lambda} \end{aligned} \quad (10.10)$$

Здесь τ — шаг по времени; θ — параметр, характеризующий схему аппроксимации; Λ — замкнутое выпуклое множество. Функция Q^i вычисляется следующим образом:

$$Q^i = (\tau/2) (C \mathbf{u}^i - \theta \tau C \delta^{i-1} - \mathbf{q}^i) - \delta^{i-1}, \quad (10.11)$$

где $\delta^{i-1} = (\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1})/\tau$. Верхним индексом i в (10.9) — (10.11) обозначаются значения соответствующих величин в момент времени $t = t_i = i\tau$, т. е.

$$\mathbf{u}^i = (\mathbf{u})_{t=i\tau}, \quad \mathbf{d}^i = (\mathbf{d})_{t=i\tau}, \quad i = 1, 2,$$

Величины \mathbf{u}^i при $i = 0, 1$ определяются начальными условиями

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \tau \mathbf{v}^0(\mathbf{x}).$$

Описанная схема аппроксимации является явной, полупеявной или неявной [38], если параметр θ принимает соответственно следующие значения: $\theta = 0$; $0 < \theta < 1$; $\theta = 1$. Расчеты, проводившиеся при различных значениях параметра θ , продемонстрировали устойчивость данной схемы аппроксимации по отношению к величине шага по времени. Заметим, что пример, иллюстрирующий применение описанного способа пошагового построения решения, приведен в разд. 6.5.

1.11. МЕТОД БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

При математическом моделировании динамических систем наряду с представлением решений в виде рядов по собственным формам свободных колебаний широко применяются и другие разложения решений с использованием некоторых полных систем координатных функций. Среди методов анализа динамики деформируемых тел, не связанных с использованием собственных форм колебаний и свойств минимальности или максимальной эффективности некоторых функционалов, одним из наиболее эффективных является метод Бубнова — Галеркина. Опишем стандартную схему применения метода Бубнова — Галеркина к динамическим задачам. Предположим, что тело является идеально упругим и демпфирование отсутствует. Запишем основные соотношения рассматриваемой динамической задачи в операторной форме:

$$M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + C \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (11.1)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \quad (\partial \mathbf{u} / \partial t)_{t=0} = \mathbf{v}^0(\mathbf{x}). \quad (11.2)$$

Обозначим через $\varphi^1(\mathbf{x}), \varphi^2(\mathbf{x}), \dots$ полную систему координатных функций. Будем считать, что координатные функции $\varphi^j(\mathbf{x})$ ортогональны относительно инерционного и жесткостного операторов, т. е.

$$(\varphi_i, M \varphi_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j, \quad (11.3)$$

$$(\varphi_i, C \varphi_j) = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (11.4)$$

Решение задачи представим в виде суммы с бесконечным числом слагаемых:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \varphi^j(\mathbf{x}), \quad (11.5)$$

где $f_j(t)$ — искомые коэффициенты разложения решения в ряд по координатным функциям $\varphi^j(\mathbf{x})$. Функции $f_j(t)$ обычно называются обобщенными координатами.

Подставив выражение (11.5) для \mathbf{u} в уравнение (11.1), приходим к соотношению

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 f_j}{dt^2} M \varphi^j + f_j C \varphi^j \right\} = \mathbf{q}. \quad (11.6)$$

Домножим далее выражения, записанные в левой и правой частях уравнения (11.6), на φ^k ($k = 1, 2, \dots$) и полученные произведения проинтегрируем по области Ω :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 f_j}{dt^2} (\varphi^k, M \varphi^j) + f_j (\varphi^k, C \varphi^j) \right\} = (\mathbf{q}, \varphi^k), \quad (11.7)$$

$$k = 1, 2,$$

Учитывая условия ортогональности, которым удовлетворяют координатные функции $\varphi^j(x)$, и выполняя элементарные преобразования, приходим к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, служащих для определения обобщенных координат $f_i(t)$, $i = 1, 2$,

$$d^2 f_k / dt^2 + \omega_k^2 f_k = Q_k, \quad k = 1, 2 \quad (11.8)$$

Фигурирующие в уравнениях метода Бубнова — Галеркина (11.8) величины ω_k^2 , Q_k определяются по формулам

$$\omega_j^2 = \frac{(\varphi^j, C\varphi^j)}{(\varphi^j, M\varphi^j)}, \quad Q_j = \frac{(\mathbf{q}(x, t), \varphi^j)}{(\varphi^j, M\varphi^j)}. \quad (11.9)$$

С целью получения начальных условий для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11.8) представление (11.5) подставляется в условия (11.2). Далее правые и левые части получающихся соотношений

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} f_j \varphi^j \right\}_{t=0} = \mathbf{u}^0, \quad \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{df_j}{dt} \right) \varphi^j \right\}_{t=0} = \mathbf{v}^0 \quad (11.10)$$

домножаются на $M\varphi^k$ и получающиеся выражения интегрируются по Ω . С учетом условий ортогональности (11.3) приходим к следующим начальным условиям:

$$f_k(0) = \alpha_k, \quad (d f_k / dt)_{t=0} = \beta_k, \\ \alpha_k = \frac{(\mathbf{u}^0, M\varphi^k)}{(\varphi^k, M\varphi^k)}, \quad \beta_k = \frac{(\mathbf{v}^0, M\varphi^k)}{(\varphi^k, M\varphi^k)}. \quad (11.11)$$

Таким образом, метод Бубнова — Галеркина приводит к необходимости интегрирования задачи Коши для бесконечной системы уравнений. В приложениях при построении приближенного решения ограничиваются конечным набором координатных функций $\varphi^j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, r$) и сводят расчет задачи динамики к интегрированию r обыкновенных уравнений второго порядка.

Заметим, что если уравнения динамики записаны в операторной форме $M(\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2) + C\mathbf{u} - \mathbf{q} = 0$, то при построении приближенного решения $\mathbf{u}(x, t)$ по методу Бубнова — Галеркина обобщенные координаты $f_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots$) определяются из условий ортогональности выражения, получающегося после подстановки в левую часть уравнения приближенного представления для $\mathbf{u}(x, t)$, к функциям $\varphi^j(x)$ ($j = 1, 2, \dots$).

О МОДИФИЦИРОВАННЫХ ФОРМУЛИРОВКАХ ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ И ВАРИАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

В разд. 1.2—1.5 были приведены различные вариационные принципы, используемые при анализе динамического поведения конструкций. Наряду с классическими вариационными принципами, такими, как принцип Гамильтона [36, 158, 159], излагались модифицированные и расширенные вариационные формулировки, которые могут эффективно применяться в динамических задачах теории упругости. Следует отметить, что интерес к вариационным принципам динамики в последнее время заметно возрос и их применение для решения прикладных задач существенно расширилось. Это объясняется в первую очередь использованием вариационных формулировок при формировании новых механических моделей, описывающих динамические процессы в конструкциях, и для разработки новых вычислительных методов. Однако применение вариационных принципов к задачам динамики связано с преодолением ряда трудностей, обусловленных имеющимися особенностями у этих принципов по сравнению с соответствующими принципами статки и квазистатки. Различные аспекты динамических вариационных принципов обсуждались в ряде работ [129, 137, 141, 224].

Рассмотрим поведение копсервативной механической системы, описываемое вектор-функцией перемещений $\mathbf{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$, на отрезке времени $[0, t_f]$ при условии, что момент времени $t = t_f$, а также величины перемещений $\mathbf{u}^0, \mathbf{u}^f$ при $t = 0$ и $t = t_f$ заданы, т. е.

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \mathbf{u}(t_f) = \mathbf{u}^f \quad (12.1)$$

Согласно принципу Гамильтона действительное динамическое поведение системы характеризуется обращением в нуль первой вариации интеграла действия

$$\delta \int_0^{t_f} L dt = 0, \quad (12.2)$$

$$L = T - \Pi = T - \Pi_d - \Pi_q,$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, M \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right), \quad \Pi_d = \frac{1}{2} (\mathbf{u}, C\mathbf{u}), \quad \Pi_q = -(\mathbf{q}, \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{q}(t)$ — вектор-функция нагрузки, а C и M — симметричные положительно определенные матрицы жесткости и масс. При наличии зависящих от скоростей и неконсервативных сил $\widehat{\mathbf{q}}$,

действующих на систему, принцип (12.2) допускает обобщенную формулировку

$$\delta \int_0^{t_f} (T - \Pi) dt + \int_0^{t_f} (\bar{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt = 0. \quad (12.3)$$

Заметим, однако, что для большинства задач динамики их естественная формулировка включает задание начальных перемещений \mathbf{u}^0 и скоростей $\dot{\mathbf{u}}^0$, т. е. условий

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad (d\mathbf{u}/dt)_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}^0, \quad (12.4)$$

п не предполагает фиксации перемещений в конечный момент времени. В этом случае при варьировании интеграла действия в принципе Гамильтона (12.2) или (12.3) возникает член

$$\left(\frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{u}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=t_f} = 0, \quad (12.5)$$

обращение которого в нуль возможно только тогда, когда импульсы, соответствующие конечному моменту времени, равны нулю.

Поэтому формулировка вариационных принципов динамики для систем с начальными и конечными условиями, отличными от условий (12.4), требует определенных уточнений. Предположим сначала, что на начальное и конечное состояние системы не наложены ограничения. Тогда, как нетрудно убедиться (см., например, [129]), корректная формулировка вариационного принципа имеет вид

$$\delta \int_0^{t_f} L dt + \int_0^{t_f} (\bar{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt - \left(\frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{u}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=t_f} + \left(\frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{u}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=0} = 0. \quad (12.6)$$

Возникающие при варьировании функции Лагранжа и выполнении интегрирования по частям в первом интеграле (12.6) внеинтегральные члены сокращаются при сложении с третьим и четвертым слагаемыми в этой формуле. Учет произвольности вариации $\delta \mathbf{u}$ во внутренних точках отрезка $[0, t_f]$ приводит к необходимым условиям экстремума в форме уравнений Эйлера:

$$M d^2\mathbf{u}/dt^2 + C\mathbf{u} = \mathbf{q} + \bar{\mathbf{q}}. \quad (12.7)$$

Для начальных условий вида (12.4) принцип Гамильтона запишется следующим образом:

$$\delta \int_0^{t_f} L dt + \int_0^{t_f} (\bar{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt - \left(\frac{\partial L}{\partial (d\mathbf{u}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=t_f} = 0, \quad (12.8)$$

$$(\delta \mathbf{u})_{t=0} = 0, \quad (d\delta \mathbf{u}/dt)_{t=t_f} = 0.$$

Возможны и другие корректные формулировки принципа Гамильтона [129]. Эти формулировки отличаются способами задания «начальных» данных. Так, наряду с принципами стационарности (12.3), (12.8) могут применяться следующие менее традиционные вариационные уравнения:

$$\delta \int_0^{t_f} L dt + \int_0^{t_f} (\widehat{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt - \left(\frac{\partial L}{\partial (\mathbf{du}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=t_f} + \left(\frac{\partial L}{\partial (\mathbf{du}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=0} = 0, \quad (12.9)$$

$$(d\delta \mathbf{u}/dt)_{t=0} = 0, \quad (d\delta \mathbf{u}/dt)_{t=t_f} = 0;$$

$$\delta \int_0^{t_f} L dt + \int_0^{t_f} (\widehat{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt + \left(\frac{\partial L}{\partial (\mathbf{du}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=0} = 0, \quad (12.10)$$

$$(\delta \mathbf{u})_{t=t_f} = 0, \quad (d\delta \mathbf{u}/dt)_{t=t_f} = 0;$$

$$\delta \int_0^{t_f} L dt + \int_0^{t_f} (\widehat{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt - \left(\frac{\partial L}{\partial (\mathbf{du}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=t_f} = 0, \quad (12.11)$$

$$(\delta \mathbf{u})_{t=0} = 0, \quad (d\delta \mathbf{u}/dt)_{t=t_f} = 0;$$

$$\delta \int_0^{t_f} L dt + \int_0^{t_f} (\widehat{\mathbf{q}}, \delta \mathbf{u}) dt + \left(\frac{\partial L}{\partial (\mathbf{du}/dt)}, \delta \mathbf{u} \right)_{t=0} = 0, \quad (12.12)$$

$$(d\delta \mathbf{u}/dt)_{t=0} = 0, \quad (\delta \mathbf{u})_{t=t_f} = 0.$$

Соотношения (12.3), (12.8), (12.9)–(12.12) представляют собой способ записи уравнений динамики в «слабой» или обобщенной форме. Запись определяющих соотношений динамики в обобщенной форме обладает тем преимуществом, что при ее использовании понижаются требования к гладкости решений.

Обозначим через \mathcal{R}_a пространство кинематически допустимых перемещений, и пусть $\mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}_a$. Считается, что вектор-функция перемещений $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, записанным в слабой форме, если для любых виртуальных перемещений $\delta \mathbf{u}(t) \in \mathcal{R}_a$ и для всех $t \in [0, t_f]$ выполняется равенство

$$\left(\delta \mathbf{u}(t), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial (\mathbf{du}/dt)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} - \widehat{\mathbf{q}} \right) = 0. \quad (12.13)$$

Соотношению (12.13) можно придать вид

$$(\delta \mathbf{u}(t), M \frac{d^2 \mathbf{u}(t)}{dt^2} + C \mathbf{u}(t) - \mathbf{q}(t) - \widehat{\mathbf{q}}(t, \mathbf{u}(t), \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt})) = 0. \quad (12.14)$$

Предположим теперь, что $\mathbf{q} = 0$, $\widehat{\mathbf{q}} = 0$ и рассматриваемая система совершает гармонические колебания, т. е.

$$\mathbf{u}(t) = \varphi \sin(\omega t + \alpha),$$

где φ — амплитудный вектор; ω — частота; α — фаза колебаний. Тогда вариационные уравнения Лагранжа (12.13) или (12.14) с учетом $\delta u = \delta\varphi$ запишутся в виде следующего соотношения:

$$\{(\delta\varphi, C\varphi) - \omega^2(\delta\varphi, M\varphi)\} \sin(\omega t + \alpha) = 0, \quad (12.15)$$

которое должно выполняться для всех $\delta\varphi \in \mathcal{H}_a$ и для любого момента времени $t \in [0, t_f]$. Так как требуется, чтобы уравнение (12.15) выполнялось для всех $t \in [0, t_f]$, то должно обращаться в нуль выражение, записанное в (12.15) в фигурных скобках:

$$(\delta\varphi, C\varphi) = \omega^2(\delta\varphi, M\varphi), \quad \delta\varphi \in \mathcal{H}_a. \quad (12.16)$$

Таким образом, приходим к обобщенной задаче на собственные значения. Фигурирующие в (12.16) билинейные формы кинетической энергии $(\delta\varphi, M\varphi)$ и потенциальной энергии деформаций $(\delta\varphi, C\varphi)$ являются положительно определенными в силу положительной определенности матриц M и C . Это обстоятельство делает задачу (12.16) хорошо поставленной.

Принцип Гамильтона и другие слабые формы записи уравнений динамики могут быть применены для построения соотношений метода конечных элементов [137]. Рассмотрим общую формулировку принципа Гамильтона (12.16) и, следуя работе [137], преобразуем вариационное уравнение к более удобному виду

$$\int_0^{t_f} (\delta Z, \mathbf{a}) dt = (\delta Z, \mathbf{b})_{t=t_f} - (\delta Z, \mathbf{b})_{t=0}, \quad (12.17)$$

где через Z , \mathbf{a} , \mathbf{b} обозначены векторы размерности $2m$;

$$\begin{aligned} \delta Z &= \left\{ \frac{d\delta u_1}{dt}, \dots, \frac{d\delta u_m}{dt}, \delta u_1; \dots, \delta u_m \right\}; \\ \mathbf{a} &= \left\{ \frac{\partial L}{\partial (du_1/dt)}, \dots, \frac{\partial L}{\partial (du_m/dt)}, \frac{\partial L}{\partial u_1} + \widehat{q}_1, \dots, \frac{\partial L}{\partial u_m} + \widehat{q}_m \right\}; \\ \mathbf{b} &= \left\{ 0, \dots, 0, \frac{\partial L}{\partial (du_1/dt)}, \dots, \frac{\partial L}{\partial (du_m/dt)} \right\}. \end{aligned}$$

Имея в виду применение метода Ньютона, полагаем $Z = Z^0 + \Delta Z$, где Z^0 — некоторое заданное состояние системы. Линеаризация вектора \mathbf{a} в (12.17) в окрестности состояния Z^0 приводит к соотношению

$$\int_0^{t_f} (\delta Z, \mathbf{a}^0) dt + \int_0^{t_f} (\delta Z, k^0 \Delta Z) dt = (\delta Z, \mathbf{b})_{t=t_f} - (\delta Z, \mathbf{b})_{t=0}, \quad (12.18)$$

$$k^0 = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial (du/dt)^2} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial (du/dt)} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial (du/dt)} \right] + \left[\frac{\partial \widehat{q}}{\partial (du/dt)} \right] & \left[\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \right] + \left[\frac{\partial \widehat{q}}{\partial u} \right] \end{pmatrix}.$$

Здесь k^0 — матрица размерности $2m \times 2m$, компоненты которой вычисляются при $Z = Z^0$. Виртуальные вариации δZ и приращения ΔZ в (12.18) представляют собой изохронные изменения вектора Z . К линеаризованному вариационному уравнению (12.18) применим конечноэлементную аппроксимацию. Для этого введем обозначения $u^i = u(t_i)$, $i = 1, \dots, N+1$, причем $t_1 = 0$, $t_{N+1} = t_j$, и определим вектор узловых перемещений

$$X = \{u_1^1, \dots, u_m^1, u_1^2, \dots, u_m^2, \dots, u_1^{N+1}, \dots, u_m^{N+1}\}.$$

Для каждого отдельного элемента вектор состояния Z определяется по значениям перемещений X^e в узловых точках этого элемента, т. е.

$$Z = NX^e, \quad (12.19)$$

где N — матрица функций формы. В результате уравнение (12.18) преобразуется к следующему виду:

$$(\delta X, A^0 + K^0 \Delta X - B) = 0, \quad (12.20)$$

где

$$B = \{-p_1^1, -p_2^1, \dots, -p_m^1, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0, p_1^{N+1}, \dots, p_m^{N+1}\},$$

$$p_i^i = \left(\frac{\partial L}{\partial (du_i/dt)} \right)_{t=t_i}, \quad p_m^i = \left(\frac{\partial L}{\partial (du_m/dt)} \right)_{t=t_i},$$

$$i = 1, 2, \dots, N+1.$$

Вектор A^0 и матрица K^0 полной системы уравнений получаются в результате используемой в методе конечных элементов процедуры объединения соответствующих векторов и матриц элементов:

$$(A^i)_e = \int N^* a^0 dt, \quad (K^i)_e = \int N^* k^0 N dt,$$

где нижний индекс e обозначает интегрирование по элементу. Если рассматриваются непериодические динамические процессы и вектор δX полностью произволен, то на основании (12.20) получаем систему алгебраических уравнений для определения ΔX :

$$K^0 \Delta X = B - A^0. \quad (12.21)$$

Таким образом, метод конечных элементов сводится к пошаговому решению системы уравнений с начальными условиями $\Delta u^1 = 0$, $\Delta p^1 = 0$ и определению $N+1$ векторов $u^2, u^3, \dots, u^{N+1}, p^{N+1}$.

Для периодических процессов с периодом $\tau = t_j$ имеем

$$u^{N+1} = u^1, \quad p^{N+1} = p^1, \quad (\delta X, B) = 0.$$

В этом случае приходим к алгебраической системе уравнений

$$A^0 + K^0 \Delta X = 0. \quad (12.22)$$

Решение системы уравнений (12.22) позволяет определить неизвестные N векторов u^1, u^2, \dots, u^N .

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ

2.1.

О ПОСТАНОВКАХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ

Задачи теории оптимального проектирования заключаются в определении формы, внутренних свойств и условий работы конструкций, доставляющих экстремум (минимум или максимум) выбранной характеристике конструкции при ряде дополнительных ограничений. Рассмотрим классические постановки задач оптимального проектирования. Некоторые обобщения будут изложены в разд. 2.3 и 2.4. Строгая постановка задач оптимизации конструкций включает формулировку основных определяющих уравнений (выбор модели), оптимизируемого функционала, ограничений на функции состояния и искомые переменные проектирования. Существенным элементом постановки задачи является выбор механической модели. Сначала выбираются переменные состояния и уравнения

$$L(x, t, u, h, q) = 0, \quad (1.1)$$

связывающие эти переменные с физическими и геометрическими параметрами конструкции и внешними воздействиями. Здесь $u = \{u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)\}$ — вектор-функция, определяющая состояние конструкции. Независимая переменная $x = \{x_1, \dots, x_i\}$ принимает значения из области Ω . Через L в (1.1) обозначен дифференциальный оператор, включающий операции дифференцирования по времени t и по пространственным координатам x_i . Равенство (1.1) можно рассматривать как систему дифференциальных уравнений, в общем случае нелинейных. Основное внимание в дальнейшем уделим теориям, в которых предполагаются выполненными условия геометрической и физической линейности. В этих предположениях поведение конструкций описывается операторами, линейными относительно переменных состояния.

Предполагается, что функционирование проектируемой конструкции рассматривается на отрезке времени $[0, t_f]$, где t_f — фиксированный конечный момент времени. На указанном отрезке времени считается заданной программа нагружения, т. е. предполагается известной вектор-функция нагрузок $q(x, t)$.

Оператор L зависит от вектор-функции проектирования $h = \{h_1(x), \dots, h_n(x)\}$ и вектор-функции внешних воздействий $q(x, t)$.

Считается, что начальные и граничные условия, определяющие состояние конструкции при $t = 0$ и способ ее закрепления, включены в оператор L . Информация о программе нагружения и

функционирования конструкции, а также об изменении во времени некоторых ее структурных параметров и параметров, характеризующих состояние материала, существенна для определения оператора L . Имеются в виду данные об изменении сплошных полей, смене условий закрепления, упрочнении материала, повреждении и износе частей конструкции в процессе ее эксплуатации.

Переменные проектирования $h_i(x)$ определяют форму и физико-механические свойства материала конструкции. В качестве $h_i(x)$ могут, например, выбираться распределения толщин и площадей сечений тела, функции, определяющие положение срединных поверхностей криволинейных стержней и оболочек, распределение концентрации армирующего материала по конструкции, углы, задающие ориентацию осей анизотропии в каждой точке упругого тела.

Кроме функций состояния и управляющих переменных, в задачах оптимального проектирования фигурируют функциональные характеристики — функционалы, зависящие от u, h, q :

$$J_1 = J_1(u, h, q), \quad J_r = J_r(u, h, q). \quad (1.2)$$

В оптимальном проектировании рассматриваются функционалы (1.2) двух типов: интегральные функционалы

$$J_j = \int_0^{t_j} \int_{\Omega} f_j(x, t, u, h, q) d\Omega dt, \quad j=1, 2, \dots, r_1, \quad (1.3)$$

и локальные функционалы

$$J_j = \max_t \max_x f_j(x, t, u(x, t), h(x), q(x, t)), \quad j=r_1+1, \dots, r_1+r_2. \quad (1.4)$$

Через f_j обозначены заданные дифференциальные выражения, а r_1, r_2 — заданные целые числа, причем $r_1 + r_2 = r$. В виде (1.3) может быть представлен функционал веса тонкостенной конструкции

$$\frac{\gamma}{t_k} \int_0^{t_j} \int_{\Omega} h d\Omega dt. \quad (1.5)$$

Функция $h(x)$ задает распределение толщин конструкции, а через γ обозначен удельный вес материала.

Интегрально или посредством комбинации интегралов вида (1.3) представляются такие характеристики конструкции, как энергия деформаций, частоты собственных колебаний, параметры потери устойчивости [8, 9, 45, 46, 77, 106, 118]. Приведем в качестве примера функционал, широко используемый в теории оптимального проектирования в случае медленных квазистатических нагружений тела и равный осредненной работе, производимой внешними силами в течение интервала времени $[0, t_j]$. Этот функционал называется податливостью конструкции. Пусть

упругое тело закреплено на части границы Γ_u , а к другой части Γ_σ приложены нагрузки \mathbf{q} . Тогда осредненная податливость определяется двумя операциями интегрирования: интегрированием по t от $t=0$ до $t=t_f$ и интегрированием по Γ_σ скалярного произведения векторов упругих смещений и внешних сил:

$$\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{q} \mathbf{u} \, d\Gamma dt. \quad (1.6)$$

Локальными характеристиками являются величины максимального смещения $|\mathbf{u}(\mathbf{x})|$:

$$\max_t \max_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|, \quad (1.7)$$

или величина максимальной интенсивности напряжений $g(\sigma_{ij})$:

$$\max_t \max_{\mathbf{x} \in \Omega} g(\sigma_{ij}). \quad (1.8)$$

Требования, предъявляемые к конструкции, приводят к ограничениям, накладываемым на переменные проектирования и функции состояния. Эти ограничения составляют систему неравенств, записываемых в векторной форме:

$$\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{h}, J_1, \dots, J_r) \leq 0. \quad (1.9)$$

Компоненты ψ_i вектора $\psi = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ являются заданными функциями аргументов. Различные формы записи ограничений (1.9) обсуждаются в [8, 9]. В качестве неравенств (1.9) в конкретных задачах могут выступать ограничения на напряжения, деформации, перемещения, интегральную жесткость или податливость, а также на собственные частоты колебаний и значения критических параметров потери устойчивости.

Один из рассматриваемых функционалов или их функция $\mathcal{F}(J_1, \dots, J_r)$ принимается в качестве оптимизируемого функционала

$$J = \mathcal{F}(J_1, J_2, \dots, J_r). \quad (1.10)$$

Задача оптимизации динамически нагруженной конструкции заключается в отыскании функции $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, доставляющей минимум (максимум) функционалу (1.10), и такой, что для любых $t \in [0, t_f]$ и $\mathbf{x} \in \Omega$ удовлетворяются условия (1.9). При проверке условий (1.9) функционалы J_j подсчитываются по формулам (1.3), (1.4), а функция $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, соответствующая переменной проектирования $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ и нагрузке $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$, находится как решение начально-краевой задачи (1.1).

Заметим, что число рассматриваемых функционалов и накладываемых ограничений, которые предполагаются непротиворечивыми, может быть в принципе сколь угодно большим. Оптимизируемый функционал, или критерий качества конструкции, в каждой конкретной задаче вида (1.1)–(1.4), (1.9), (1.10) только один. Корректная постановка задач оптимизации с век-

торным критерием качества ставится возможной при использовании понятия оптимальности в смысле Парето [8, 9] или других понятий многокритериальной оптимизации.

2.2.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КОНСТРУКЦИЙ, СОВЕРШАЮЩИХ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ

Проблемы оптимизации конструкций приводят к разнообразным математическим задачам, которые могут быть разделены на группы по ряду признаков. С математической точки зрения эти задачи могут быть классифицированы в зависимости от типов рассматриваемых уравнений и граничных условий, вида оптимизируемых функционалов и учитываемых ограничений, размерности задачи, способов вхождения переменных проектирования в основные соотношения (управление коэффициентами и границами областей), полноты информации об исходных данных (задачи с полной и неполной информацией), характера экстремума (одноэкстремальные и многоэкстремальные задачи) и способа определения оптимума (однокритериальные и многокритериальные задачи) и других обстоятельств.

При постановке задач проектирования конструкций, находящихся в состоянии равновесия, предполагается, что определяющие уравнения и ограничения не зависят от временной переменной. Искомые функции состояния и проектирования разыскиваются в зависимости только от пространственных переменных, т. е. $u = u(x)$, $h = h(x)$. К отысканию функций состояния и проектирования в зависимости только от пространственных независимых переменных приходим и при проектировании конструкций, совершающих свободные или установившиеся вынужденные колебания.

В общем случае динамического нагружения конструкции основные соотношения задачи включают зависимость от времени t , и поведение конструкции во времени описывается функцией состояния $u = u(x, t)$. Определение управляющей функции в этом случае в зависимости от t и x , т. е. $h = h(x, t)$, приводит к задачам оптимального управления. Заметим, что задачи отыскания h как функции x и t возникают при проектировании конструкций с переменной во времени геометрией и структурой. Методы исследования этих задач излагаются в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Постановка и решение подобных проблем представляют определенный интерес. Однако основное внимание в книге уделено другому классу динамических задач оптимизации, для которых переменная проектирования определяется только как функция пространственных переменных, т. е. $h = h(x)$ (разделение задач на соответствующие группы показано на рис. 2.1). Разработка со-

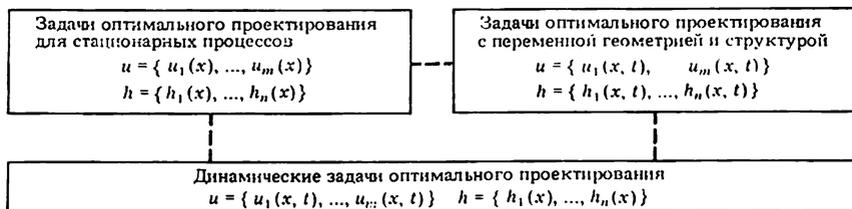


Рис. 2.1

ответствующих вопросов проектирования конструкций, рассчитываемых на динамические воздействия, имеет в настоящее время большое теоретическое и прикладное значение [89, 90, 139, 140, 147, 148, 163—165, 168, 181, 183, 188, 216].

Важной проблемой динамического проектирования больших крупногабаритных конструкций и сложных составных механических систем является проблема снижения их материалоемкости (веса) при условии обеспечения требуемого уровня прочности и жесткости конструкции или отдельных ее частей. Укажем задачу оптимизации сложной конструкции, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + C \mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (2.1)$$

где M — инерционный оператор; C — жесткостной оператор; $\mathbf{q}(x, t)$ — прикладываемые к конструкции внешние нагрузки; $\mathbf{u}(x, t)$ — вектор, характеризующий смещения упругого тела.

Способ представления определяющих соотношений динамической задачи в форме (2.1) и свойства операторов $M = M(\mathbf{h})$ и $C = C(\mathbf{h})$ указаны в разд. 1.1. Перераспределение масс и жесткостей по конструкции через посредство операторов $M = M(\mathbf{h})$ и $C = C(\mathbf{h})$ определяет изменения в реакции конструкции. Представляют интерес задачи отыскания оптимальных распределений жесткостей и масс по конструкции из условия минимизации максимального прогиба при ограничениях на вес конструкции $V(\mathbf{h})$:

$$J_* = \min_{\mathbf{h}} \max_{x,t} |\mathbf{u}|, \quad V(\mathbf{h}) = \text{const}, \quad (2.2)$$

или условия минимальности отклонения поведения проектируемой системы от требуемого поведения.

Характерные динамические задачи оптимизации возникают, например, при проектировании крыльев с учетом нестационарных порывных воздействий [13, 14]. Воздействия типа порывов учитываются в расчетной схеме в виде некоторых заданных функций, определяемых экспериментально и аппроксимируемых аналитическими зависимостями. Оптимальное проектирование заключается в отыскании распределения силового материала и неконструктивных масс по крылу, обеспечивающего минимальный вес конструкции крыла, и такого, что при возникающих в результате порыва вибрациях амплитудные значения прогибов и

интенсивностей напряжений не превосходят заданных предельных величин. Аналогичные задачи возникают при проектировании оболочек, рассчитываемых на ударные нагрузки.

Динамическое поведение сложной конструкции, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$M \partial^2 u / \partial t^2 + D \partial u / \partial t + C u = q, \quad (2.3)$$

во многом определяется диссипативными свойствами материала, выраженными матрицей D . Поэтому при проектировании сложных конструкций и структурно неоднородных элементов конструкций представляет интерес рассмотрение функций распределения вязкостных свойств $\mu(x)$ в качестве переменной проектирования $h(x)$ и исследование задач отыскания наилучших распределений вязкости по конструкции из условий оптимизации ее динамической реакции. В качестве примера укажем важную для практических приложений задачу отыскания распределения вязкоупругого материала по конструкции с целью минимизации времени t_f гашения вибрации

$$t_f^* = \min_{\mu} t_f. \quad (2.4)$$

Предполагается, что начальные возмущения, действующие на систему (2.3), принадлежат заданному классу и что принята некоторая количественная мера оценки уровня вибраций. В качестве меры, оцениваемой в задаче демпфирования колебаний упругой системы, может рассматриваться, например, сумма кинетической энергии T и потенциальной энергии упругих деформаций Π . Отметим также задачу отыскания такого распределения $\mu(x)$, для которого полная энергия системы, вычисленная в заданный момент времени $t = t_f$, будет минимальна:

$$J_* = \min_{\mu} J = \min_{\mu} (T + \Pi)_{t=t_f}, \quad (2.5)$$

при условии, что на переменную проектирования $\mu(x)$ наложены некоторые условия, ограничивающие количество используемого вязкоупругого материала и степень неравномерности в его распределении.

2.3.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИЙ, СОВЕРШАЮЩИХ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВЫНУЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Отметим некоторые случаи, для которых возможно исключение времени t и сведение динамических задач оптимального проектирования к более простым стационарным задачам.

Важный класс задач динамики связан с расчетом вынужденных установившихся колебаний под действием периодической нагрузки. В предположении, что амплитуды колебаний являются малыми, а поведение конструкции линейно-упругим, соответ-

вующая пачально-краевая задача для вектор-функции перемещений записывается в операторном виде:

$$L(x, t, u, h, q) = M \partial^2 u / \partial t^2 + C u - q = 0, \quad (3.1)$$

где M — матричный инерционный оператор; C — матричный жесткостной оператор, реализующий операции дифференцирования по пространственным переменным. Коэффициенты операторов M и C зависят от переменных проектирования h , т. е. $M = M(h)$, $C = C(h)$.

Считается, что внешнее воздействие задано гармонической функцией времени и что обусловленные этой функцией колебания также являются гармоническими. Это предположение позволяет следующим образом представить нагрузки и перемещения конструкции:

$$u = U(x) e^{i\omega t}, \quad q = Q(x) e^{i\omega t}. \quad (3.2)$$

Здесь ω — частота вынужденных колебаний; i — мнимая единица, $U(x)$ и $Q(x)$ — амплитудные функции перемещений и нагрузки. Представления (3.2) позволяют исключить из последующих расчетов время t и записать определяющие соотношения (3.1) в виде уравнений относительно неизвестной амплитудной функции перемещений

$$C U - \omega^2 M U = Q. \quad (3.3)$$

Используя уравнение (3.3) и рассматривая $U(x)$ в качестве функции, характеризующей поведение конструкции, возможно формулировать задачи оптимального проектирования аналогично тому, как это делается при проектировании статически нагруженных конструкций. С применением соотношений (3.3) можно, например, рассмотреть задачу минимизации веса $J(h)$ топкостенной конструкции при ограничении на динамическую податливость

$$\int_{\Omega} Q U d\Omega - c \leq 0 \quad (3.4)$$

и некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на распределение толщин $h(x)$. При формулировке ограничения (3.4) предполагается, что векторы Q и U имеют одинаковую размерность. Через c в (3.4) обозначена заданная константа, а подынтегральное выражение представляет собой скалярное произведение. Подробное изложение вопросов оптимизации конструкций, совершающих вынужденные гармонические колебания, будет дано в гл. 5 (см. также работы [21—25, 53—55, 75, 113, 114, 136, 149, 170]).

Другой класс задач, для которых возможно исключение временной переменной, относится к свободным колебаниям упругих тел. Наиболее полно здесь изучены вопросы предельного снижения веса упругих конструкций при ограничениях на собственные частоты колебаний. Рассматривались также взаимные задачи

оптимизации собственных частот колебаний упругих элементов при заданном весе. В данной книге соответствующие вопросы оптимального проектирования подробно излагаются в гл. 4. В настоящем параграфе ограничимся некоторыми пояснениями по постановке задач.

Собственные частоты и собственные функции свободных колебаний тонкостенной конструкции определяются из соотношений (3.1), в которых положено $Q=0$. Переменные ω и U , подчиненные уравнению собственных колебаний

$$CU - \omega^2 MU = 0, \quad (3.5)$$

могут быть представлены также в виде рэлеевских отношений

$$\omega^2 = \frac{(CU, U)_\Omega}{(MU, U)_\Omega} = \frac{\Pi(U, h)}{T(U, h)}. \quad (3.6)$$

Здесь Π , T — соответственно амплитудные значения потенциальной и кинетической энергии единицы объема:

$$\begin{aligned} \Pi &= (CU, U)_\Omega = \int_{\Omega} (CU, U) d\Omega, \\ T &= (MU, U)_\Omega = \int_{\Omega} (MU, U) d\Omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Круглыми скобками в (3.7) обозначено скалярное произведение. В случае продольных колебаний упругого прямолинейного стержня переменной площади поперечного сечения $h = h(x)$ имеем

$$T = \int_{\Omega} hU^2 dx, \quad \Pi = \int_{\Omega} h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Здесь и ниже используются безразмерные переменные.

При поперечных колебаниях сплошных пластин переменной толщины

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_{\Omega} h^3 \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy, \\ T &= \int_{\Omega} hU^2 dx dy, \end{aligned}$$

где $U = U(x, y)$ — амплитудная функция прогибов пластинки.

Собственные частоты ω_i ($i = 0, 1, 2, \dots$), отвечающие различным собственным функциям U^i , образуют спектр колебаний

$$0 \leq \omega_0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots$$

Если частоты внешних воздействий, которые могут быть приложены к конструкции, совпадают с частотами собственных колебаний, то в конструкции могут возникнуть нежелательные резонансные явления. Поэтому при проектировании конструкции с

целью исключения резонанса требуется отстройка собственных частот колебаний от частот внешних воздействий.

Конструкция, спроектированная так, что частоты воздействий ω удовлетворяют условию

$$0 < \omega < \omega_0 \quad (3.8)$$

или двустороннему неравенству

$$\omega_k < \omega < \omega_{k+1}, \quad (3.9)$$

не подвергается резонансу.

Расширение безрезонансной полосы частот (3.8) приводит к задаче максимизации фундаментальной частоты ω_0 за счет соответствующего выбора переменной проектирования $\mathbf{h}(\mathbf{x})$. Обычно на функцию $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ накладываются изопериметрические условия постоянства объема V (веса) конструкции и некоторые дополнительные условия принадлежности \mathbf{h} заданному множеству \mathcal{H} , выражающие требования ограниченности, непрерывности и гладкости функции проектирования. Задача оптимизации записывается в виде

$$\omega_0^* = \max_{\mathbf{h}} \omega_0, \quad (3.10)$$

$$V(\mathbf{h}) = \text{const}, \quad \mathbf{h} \in \mathcal{H}. \quad (3.11)$$

Если рассматривается полоса (3.9), то для проектируемой конструкции ставится задача отыскания \mathbf{h} из условий

$$\omega_{k+1}^* = \max_{\mathbf{h}} \omega_{k+1}(\mathbf{h}), \quad \omega_k(\mathbf{h}) = \text{const} \quad (3.12)$$

или задача минимизации ω_k при фиксированном значении ω_{k+1} :

$$\omega_k^* = \min_{\mathbf{h}} \omega_k(\mathbf{h}), \quad \omega_{k+1}(\mathbf{h}) = \text{const}. \quad (3.13)$$

При отыскании максимума и минимума в (3.12), (3.13) требуется дополнительно удовлетворить условиям (3.11).

Возможна и постановка задачи максимизации разности значений близлежащих собственных частот

$$(\Delta\omega_k)^* = \max_{\mathbf{h}} (\omega_{k+1} - \omega_k) \quad (3.14)$$

при условии, например, что оптимизируемая безрезонансная полоса частот включает некоторый заданный диапазон частот.

2.4.

ЗАДАЧИ МНОГОЦЕЛЕВОГО ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

Для классических одноцелевых задач оптимального проектирования, постановка которых обсуждалась в разд. 2.1, характерным является предположение, что программа нагружения, условия закрепления конструкции и требования, предъявляемые к напряженно-деформированному состоянию, определены един-

ственным образом и единственно само назначение конструкции. При этом проектирование осуществляется в рамках одной расчетной схемы.

Представляет интерес рассмотрение задач многоцелевого оптимального проектирования, когда конструкция рассчитывается на использование в различных условиях. Формулировка задач многоцелевой оптимизации заключается в описании применяемых расчетных схем, выборе искомого переменных проектирования, оптимизируемого критерия качества и ограничений на поведение конструкции для различных программ ее нагружения. Обозначая через j ($j = 1, 2, \dots, s$) номер программы нагружения, а через $u^j = \{u_1^j(x, t), \dots, u_m^j(x, t)\}$, $J^j = \{J_1^j(u^j, h), \dots, J_r^j(u^j, h)\}$ соответственно вектор-функцию состояния конструкции и функциональные характеристики, приведем уравнения состояния, ограничения и выражение для оптимизируемого функционала:

$$L^j(x, t, u^j, h, q^j) = 0, \quad (4.1)$$

$$\psi^j(x, t, u^j, h, q^j, J^j) \leq 0, \quad (4.2)$$

$$J = F(J^1, \dots, J^s) \rightarrow \min_h. \quad (4.3)$$

Соотношения (4.1), (4.2) представляют собой системы дифференциальных уравнений и неравенств относительно переменных проектирования, функций состояния и функциональных характеристик.

С математической точки зрения задачи многоцелевой оптимизации обладают следующими особенностями. Функция состояния с номером j входит только в отмеченные тем же индексом уравнения и неравенства (4.1), (4.2), а также в выражение для оптимизируемого функционала. Другими словами, функции u^j ($j = 1, 2, \dots, s$) являются локальными переменными задачи проектирования. Вхождение переменной проектирования h в уравнения и неравенства, отвечающие различным j , делает эти соотношения связанными. Функция h в отличие от локальных переменных u^j является глобальной переменной задачи проектирования. Для отыскания оптимального решения требуется информация обо всем множестве параметров, характеризующих программы нагружений, способы закреплений конструкции, совокупность характерных требований, предъявляемых к конструкции при различных вариантах ее функционирования.

Если распределение $h(x)$ задано, то соотношения (4.1) представляют собой для каждого j замкнутые системы дифференциальных уравнений и граничных условий, служащие для определения u^j , и могут интегрироваться независимо. В этом основное содержание принципа декомпозиции, применяемого в теории оптимального проектирования. При отыскании функций состояния этот принцип позволяет упростить решение за счет существенного уменьшения размерности «прямых» задач анализа.

Задачи многоцелевого проектирования могут формулироваться различными способами. Возможны формулировки как в виде за-

дач оптимизации интегральных функционалов при ограничениях типа неравенств, так и в виде минимаксных или максиминных задач оптимизации. Минимаксные постановки задач многоцелевого проектирования предлагались в работах [3, 9] и заключаются в следующем. Пусть каждое (j -е) состояние конструкции характеризуется некоторым функционалом J^j , и все функционалы J^j ($j = 1, 2, \dots, s$) имеют одинаковую физическую размерность. Тогда проблема многоцелевой оптимизации сводится к отысканию максимина или минимакса:

$$J^* = \min_h \max \{J^1, J^2, \dots, J^s\}, \quad (4.4)$$

$$J^* = \max_h \min \{J^1, J^2, \dots, J^s\}. \quad (4.5)$$

Внутренние операции максимума и минимума в (4.4), (4.5) означают отыскание максимума, минимума из величин, указанных в фигурных скобках. При использовании критериев (4.4), (4.5) функция F из (4.3) соответственно имеет вид $F = \max \{J^1, J^2, \dots, J^s\}$, $F = \min \{J^1, J^2, \dots, J^s\}$.

В качестве примера многоцелевой оптимизации может быть указана задача проектирования упругого стержня переменной толщины $h(x)$ из условия оптимизации фундаментальных частот собственных колебаний нескольких типов (задача максимизации минимума из нескольких величин). Последовательные состояния стержня представляют собой собственные колебания трех типов ($j = 1, 2, 3$): продольные (l), крутильные (t) и изгибные (b) колебания. Функционалы J^j означают здесь минимальные собственные частоты, отвечающие низшим тонам колебаний каждого типа:

$$J^1 = \omega_1^l, \quad J^2 = \omega_1^t, \quad J^3 = \omega_1^b. \quad (4.6)$$

В качестве оптимизируемого критерия качества, подлежащего максимизации, берется минимальная из указанных трех частот (4.6), т. е.

$$J = \min \{J^1, J^2, J^3\}.$$

Заметим, что минимаксные и максиминные задачи многоцелевого проектирования могут быть сформулированы как классические задачи минимизации или максимизации некоторой величины при ограничениях типа неравенств. Так, задача многоцелевого проектирования (4.1), (4.2), (4.4) эквивалентна минимизации функционала J_U :

$$J_* = \min_h J_U, \quad (4.7)$$

при условиях (4.1), (4.2) и ограничениях

$$J^j \leq J_U, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.8)$$

Аналогично задача (4.1), (4.2), (4.5) эквивалентна задаче максимизации величины J_L :

$$J^* = \max_h J_L, \quad (4.9)$$

при условиях (4.1), (4.2) и неравенствах

$$J^j \geq J_L, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.10)$$

2.5.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Перейдем к основным понятиям многокритериальной оптимизации. В вариационном исчислении и теории оптимального управления рассматриваемые задачи обычно заключаются в минимизации или максимизации некоторого скалярного функционала при удовлетворении ряду ограничений. Задача одновременной оптимизации нескольких функционалов или одного вектор-функционала в рамках традиционного определения оптимальности оказывается в общем случае некорректной задачей. Постановка корректных задач оптимизации векторных функционалов, называемых многокритериальными задачами, становится возможной только при расширении классического определения экстремума. Естественным обобщением и расширением этого понятия является концепция Парето-оптимальных решений. Применение концепции оптимальности по Парето позволяет, в частности, расширить круг проблем, рассматриваемых в теории оптимального проектирования, и исследовать принципиальные вопросы проектирования конструкций, оптимальных в смысле нескольких критериев качества. На основе многокритериальной теории достигается понимание некоторых закономерностей в формировании «естественных» конструктивных форм [175, 177].

Приведем определение оптимальности в смысле Парето. Пусть конструкция характеризуется r критериями качества $J_i(\mathbf{h})$, $i = 1, 2, \dots, r$, зависящими от переменной проектирования $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$, где \mathcal{H} — множество допустимых проектов. Обозначим через $\mathbf{J}(\mathbf{h})$ векторный функционал $\mathbf{J}(\mathbf{h}) = \{J_1(\mathbf{h}), \dots, J_r(\mathbf{h})\}$ и будем рассматривать задачу минимизации этого функционала.

Переменная проектирования $\mathbf{h}_* \in \mathcal{H}$ является оптимальной в смысле Парето, если из неравенства $\mathbf{J}(\mathbf{h}) \leq \mathbf{J}(\mathbf{h}_*)$ ($J_i(\mathbf{h}) \leq J_i(\mathbf{h}_*)$) для любых $i = 1, 2, \dots, r$), где $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$, вытекает, что $\mathbf{J}(\mathbf{h}) = \mathbf{J}(\mathbf{h}_*)$.

Другими словами, если переменная проектирования \mathbf{h}_* является Парето-оптимальной, то невозможно дальнейшее уменьшение никакого из критериев J_i без одновременного увеличения по крайней мере одного из оставшихся функционалов J_j ($j \neq i$).

Для оптимальных в смысле Парето решений $\mathbf{h}_* \in \mathcal{H}$ справедливо следующее утверждение. При любом фиксированном j решение \mathbf{h}_* минимизирует функционал J_j , рассматриваемый на множестве допустимых решений $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$, при условии, что остальные функционалы J_i ($i \neq j$) не превышают их значений для

$\mathbf{h} = \mathbf{h}_*$, т. е.

$$J_j(\mathbf{h}_*) = \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} J_j(\mathbf{h}), \quad (5.1)$$

$$J_i(\mathbf{h}) \leq J_i(\mathbf{h}_*), \quad i = 1, 2, \quad j \neq i. \quad (5.2)$$

Свойство (5.1), (5.2) эффективно применяется при получении необходимых условий отыскания оптимальных в смысле Парето переменных проектирования.

Решение многокритериальных задач и отыскание оптимальных в смысле Парето переменных проектирования может быть сведено к минимизации некоторой скалярной функции, определяемой равенством

$$G(\mathbf{h}) = C_1 J_1(\mathbf{h}) + C_2 J_2(\mathbf{h}) + \dots + C_r J_r(\mathbf{h}). \quad (5.3)$$

С использованием функции $G(\mathbf{h})$ достаточное условие оптимальности по Парето формулируется следующим образом: предположим, что $C_i \geq 0$ и $\mathbf{h}_* \in \mathcal{H}$ минимизирует $G(\mathbf{h})$ на множестве $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$, тогда $\mathbf{h}_* \in \mathcal{H}$ является оптимальным в смысле Парето решением. Доказательство этого утверждения содержится, например, в работе [226].

Применение понятия оптимальности в смысле Парето позволяет сформулировать следующую общую задачу проектирования. Пусть поведение конструкции и ограничения, наложенные на переменные состояния, проектирования и функциональные характеристики, описываются начально-краевой задачей и системой неравенств

$$L(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{q}) = 0, \quad (5.4)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{q}, J_1, \dots, J_r) \leq 0, \quad (5.5)$$

где $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \{h_1(\mathbf{x}), \dots, h_n(\mathbf{x})\}$ — вектор переменных проектирования; $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_m(\mathbf{x}, t)\}$ — вектор переменных состояния; $J_k = J_k(\mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{q})$, $k = 1, 2, \dots, r$. Векторный критерий качества конструкции \mathcal{F} включает s скалярных функционалов \mathcal{F}_i , т. е. $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_s\}$. Скалярные функционалы представляют собой заданные функции от рассматриваемых функциональных характеристик J_k :

$$\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i(J_1, J_2, \dots, J_r), \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (5.6)$$

Многокритериальная задача проектирования конструкции заключается в отыскании множества переменных проектирования, таких, что

$$\mathcal{F} \rightarrow \min_{\mathbf{h}}. \quad (5.7)$$

Для задач многокритериальной оптимизации (5.4) — (5.7) характерным является существование не единственного решения, а целого множества оптимальных в указанном смысле решений, так называемого множества Парето. Построение множества Парето дает важную информацию о возможностях совершенства-

ния конструкций и позволяет выявить скрытые резервы оптимизации.

Вопрос о выборе на множестве Парето единственной функции проектирования может быть решен при использовании соответствующих представлений многоуровневой оптимизации. Так, например, при двухуровневой оптимизации на первом уровне решается многокритериальная задача и находится множество функций проектирования (оптимальных в смысле Парето решений). На втором же уровне при помощи дополнительно введенного скалярного критерия на полученном множестве находится единственное оптимальное решение.

Как уже отмечалось выше, постановка и решение задач многокритериальной оптимизации позволяет получить важную информацию относительно свойств проектируемой конструкции и более полно изучить ее предельные свойства. Однако отыскание оптимальных решений и построение множеств Парето сопряжено с проведением расширенного анализа и выполнением значительного объема вычислений. Поэтому в современных исследованиях по многокритериальной оптимизации уделяется много внимания разработке методов решения задач с векторными функционалами [152, 153, 226]. Наиболее широко применяемым в многоцелевом оптимальном проектировании является подход, основанный на введении вспомогательных ассоциированных задач со скалярными функционалами, представляющими собой некоторые «свертки» из компонент векторных функционалов. При построении ассоциированной оптимизационной задачи и формулировке скалярного функционала, называемого функцией предпочтительности или критерием качества ассоциированной задачи, обычно требуется, чтобы ее решение принадлежало множеству Парето исходной многокритериальной проблемы.

Рассмотрим задачу многокритериальной оптимизации

$$\mathbf{J} = \{J_1(\mathbf{h}), J_2(\mathbf{h}), \dots, J_r(\mathbf{h})\} \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}}. \quad (5.8)$$

Обозначим через \mathcal{H}_* множество оптимальных в смысле Парето решений \mathbf{h}_* задачи (5.8), а через $\mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \mathcal{P}(J_1(\mathbf{h}), J_2(\mathbf{h}), \dots, J_r(\mathbf{h}))$ — функцию предпочтительности. Оптимизационную задачу со скалярным критерием качества

$$\mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \quad (5.9)$$

будем называть ассоциированной задачей для многокритериальной проблемы проектирования (5.8), если существует проект $\hat{\mathbf{h}} \in \mathcal{H}_*$, доставляющий минимум функции предпочтительности $\mathcal{P}(\mathbf{h})$ на множестве \mathcal{H} , т. е.

$$\mathcal{P}(\mathbf{J}(\hat{\mathbf{h}})) = \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})). \quad (5.10)$$

Приведем ниже некоторые основные способы формирования критериев качества ассоциированных задач.

Один из наиболее распространенных способов построения функционала ассоциированной задачи известен как метод линей-

ной свертки [83, 152]. Согласно этому способу скалярный критерий качества определяется как сумма компонент векторного функционала

$$\mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \sum_{i=1}^r C_i J_i(\mathbf{h}) = (\mathbf{C}, \mathbf{J}(\mathbf{h})) \quad (5.11)$$

с положительными весовыми коэффициентами C_i ($i = 1, 2, \dots, r$), нормированными для определенности следующим образом:

$$0 \leq C_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^r C_i = 1. \quad (5.12)$$

Для способа свертки (5.11), (5.12) изменение критерия качества $\mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h}))$ при изменении функционалов J_i оценивается величинами весовых множителей C_i ($C_i = \partial \mathcal{P} / \partial J_i$).

Другой способ построения скалярного критерия качества основан на введении метрики в r -мерном пространстве критериев J_i . Пусть решены задачи однокритериальной оптимизации

$$J_i(\mathbf{h}) \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \bar{J}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (5.13)$$

и в результате определены проекты \mathbf{h}_0^i и соответствующие им значения функционалов $J_i^0 = J_i(\mathbf{h}_0^i)$. Тогда скалярный критерий качества ассоциированной задачи может быть определен следующим образом:

$$\mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \left(\sum_{i=1}^r |J_i(\mathbf{h}) - J_i^0|^p \right)^{1/p} \quad (5.14)$$

где $p > 0$ — некоторый целочисленный параметр. Заметим, что если проекты \mathbf{h}_0^i , минимизирующие функционалы $J_i(\mathbf{h})$, различны, то разности $J_i(\mathbf{h}) - J_i^0$, фигурирующие в (5.14), не обращаются одновременно в нуль ни для каких проектов $\mathbf{h} \in \mathcal{H}$. Другими словами, это означает, что точка $(J_1(\mathbf{h}), J_2(\mathbf{h}), \dots, J_r(\mathbf{h}))$ в r -мерном функциональном пространстве ни при каких \mathbf{h} не может достигнуть точки $(J_1^0, J_2^0, \dots, J_r^0)$. Поэтому функционал (5.14) строго положителен и характеризует расстояние до точки $(J_1^0, J_2^0, \dots, J_r^0)$, называемой иногда точкой абсолютного минимума. Наиболее часто в теории оптимального проектирования при построении функции предпочтительности используются метрики, соответствующие случаям $p = 1$, $p = 2$ и $p \rightarrow \infty$:

$$p = 1, \quad \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \sum_{i=1}^r |J_i(\mathbf{h}) - J_i^0|;$$

$$p = 2, \quad \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \left[\sum_{i=1}^r (J_i(\mathbf{h}) - J_i^0)^2 \right]^{1/2}$$

$$p \rightarrow \infty, \quad \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \max_{i=1,2, \dots, r} |J_i(\mathbf{h}) - J_i^0|.$$

В качестве примера сформулируем задачу многокритериальной оптимизации упругой конструкции и соответствующую ассоциированную задачу с функционалом вида (5.14). Пусть конструкция совершает свободные колебания с частотами $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_r \leq \dots$. Выберем величины, обратные нижним r частотам, в качестве компонент векторного функционала ($J_i(\mathbf{h}) = \omega^{-1}(\mathbf{h})$, $i = 1, 2, \dots, r$) и рассмотрим следующую задачу оптимизации с векторным функционалом:

$$\mathbf{J}(\mathbf{h}) = \{\omega_1^{-1}(\mathbf{h}), \omega_2^{-1}(\mathbf{h}), \dots, \omega_r^{-1}(\mathbf{h})\} \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \quad (5.15)$$

где \mathbf{h} — переменная проектирования, в качестве которой может быть, например, принята толщина тонкостенной конструкции. Обозначим через ω_i^0 ($i = 1, 2, \dots, r$) максимальные значения частот, получаемые из решения системы вспомогательных однокритериальных задач оптимизации:

$$\omega_i^0 = \max_{\mathbf{h}} \omega_i(\mathbf{h}), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (5.16)$$

Тогда использование евклидовой метрики приводит к ассоциированной задаче оптимизации со скалярным функционалом

$$\mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \left[\sum_{i=1}^r (\omega_i^{-1}(\mathbf{h}) - (\omega_i^0)^{-1})^2 \right]^{1/2} \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \quad (5.17)$$

Приведем теперь минимаксную формулировку ассоциированной задачи скалярной оптимизации. Пусть J_i^0 — значения оптимизируемых функционалов J_i для задач однокритериальной оптимизации (5.13). Относительные отклонения величин $J_i(\mathbf{h})$ от значений J^0 обозначим через $\Psi_i(\mathbf{h})$. В этих обозначениях минимаксная форма ассоциированной задачи примет вид

$$\min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) = \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}} \max_{i=1,2,\dots} \Psi_i(\mathbf{h}), \quad (5.18)$$

$$\Psi_i(\mathbf{h}) = (J_i(\mathbf{h}) - J_i^0)/J_i^0, \quad J_i^0 > 0.$$

В силу безразмерности величин Ψ_i критерий качества \mathcal{P} в (5.18) обладает известной универсальностью. Поэтому в виде (5.18) могут быть сформулированы задачи оптимального проектирования с разнотипными функционалами. Например, если пластинчатая конструкция проектируется из условий максимизации жесткости (минимизации податливости) и в качестве жесткостных характеристик рассматриваются смещения u_j и углы поворотов срединной поверхности v_j в заданных точках, то в соответствии с (5.18) для функции предпочтительности будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) &= \max_{i=1,2,\dots,s_1+s_2} \Psi_i(\mathbf{h}), \\ \Psi_i(\mathbf{h}) &= (u_i(\mathbf{h}) - u_i^0)/u_i^0, \quad i = 1, 2, \dots, s_1, \\ \Psi_j(\mathbf{h}) &= (v_j(\mathbf{h}) - v_j^0)/v_j^0, \quad j = s_1 + 1, \dots, s_1 + s_2, \end{aligned} \quad (5.19)$$

где u_i^0, v_j^0 — значения перемещений и углов поворотов в соответствующих однокритериальных задачах оптимизации.

Удобная формализация, применяемая при решении проблем многокритериальной оптимизации и формулировке ассоциированных задач, основана на введении вспомогательного скалярного параметра β , подлежащего минимизации при ограничениях типа неравенств

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{J}(\mathbf{h})) &= \beta \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}}, \\ J_i(\mathbf{h}) &\leq \beta, \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Так, например, при многокритериальном проектировании стержневой конструкции из условий максимизации фундаментальных частот изгибных ω_b , крутильных ω_i и продольных ω_l колебаний ассоциированная задача оптимизации принимает вид

$$\beta \rightarrow \min_{\mathbf{h} \in \mathcal{H}}, \quad \omega_b^{-1} \leq \beta, \quad \omega_i^{-1} \leq \beta, \quad \omega_l^{-1} \leq \beta.$$

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

3.1.

ПРИМЕНЕНИЕ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Важная роль в теории оптимального проектирования отводится анализу чувствительности. Основная задача анализа чувствительности заключается в установлении эффективных соотношений между изменениями в проектах конструкций и изменениями в их функциональных характеристиках. Получению этих соотношений и применению их при проектировании уделяется существенное внимание во многих работах, поскольку это способствует выявлению наиболее эффективных способов оптимизации. Обычно при оптимальном проектировании конструкции имеется широкий выбор переменных проектирования, варьированием которых можно повлиять на величину критерия качества. Например, уменьшение веса конструкции может быть достигнуто в результате рационального распределения толщины, управления анизотропией материалов, армирования, создания предварительного напряженного состояния и т. д. Важно знать, какие способы оптимизации или их комбинации приводят к большим изменениям рассматриваемых функционалов J_i , $i = 1, 2, \dots, r$, и каким образом может быть достигнут максимальный выигрыш по оптимизируемому функционалу. На указанные вопросы можно дать ответ, если получены характерные для анализа чувствительности соотношения.

Отметим сначала некоторые характерные аспекты анализа чувствительности. Будем предполагать, что динамическое поведение рассматриваемой системы описывается некоторой начально-краевой задачей. Для большей ясности и компактности изложения воспользуемся операторными представлениями и запишем уравнения задачи в виде

$$L(u, h) = 0. \quad (1.1)$$

Нелинейное (в общем случае) операторное соотношение (1.1), устанавливающее функциональную зависимость между переменными проектирования и состояния, включает в себя уравнения динамики, начальные и граничные условия. Соответствующее линеаризованное уравнение, связывающее малые вариации δh и δu , запишем следующим образом:

$$L_u \delta u + L_h \delta h = 0, \quad (1.2)$$

где L_u , L_h — линейные относительно δu и δh операторы, коэффициенты которых, вообще говоря, могут зависеть от u и h .

Зависимость вариаций функционалов δJ_i от вариаций переменных проектирования и состояния $\delta \mathbf{h}$, $\delta \mathbf{u}$ получается непосредственно при помощи линеаризации выражений $J_i = J_i(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ и представления величин δJ_i в виде суммы линейных относительно $\delta \mathbf{h}$ и $\delta \mathbf{u}$ функционалов:

$$\delta J_i = (\chi_{\mathbf{h}}^i, \delta \mathbf{h}) + (\chi_{\mathbf{u}}^i, \delta \mathbf{u}). \quad (1.3)$$

Круглыми скобками в (1.3) обозначены скалярные произведения векторов $\delta \mathbf{h}$, $\chi_{\mathbf{h}}^i = \chi_{\mathbf{h}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ и векторов $\delta \mathbf{u}$, $\chi_{\mathbf{u}}^i = \chi_{\mathbf{u}}^i(\mathbf{u}, \mathbf{h})$.

Принципиальный интерес в теории проектирования заключается в установлении эффективной непосредственной зависимости δJ_i от $\delta \mathbf{h}$. Для исключения явной зависимости вариаций функционалов δJ_i от вариаций переменных состояния $\delta \mathbf{u}$ и получения основной формулы анализа чувствительности в виде

$$\delta J_i = (\mathbf{e}_{\mathbf{h}}^i, \delta \mathbf{h}) \quad (1.4)$$

могут использоваться следующие два подхода. Первый подход основан на построении обратного оператора $L_{\mathbf{u}}^{-1}$, нахождении решения задачи (1.2): $\delta \mathbf{u} = -L_{\mathbf{u}}^{-1} L_{\mathbf{h}} \delta \mathbf{h}$, и последующем исключении $\delta \mathbf{u}$ из (1.3):

$$\begin{aligned} \delta J_i &= (\chi_{\mathbf{h}}^i, \delta \mathbf{h}) + (\chi_{\mathbf{u}}^i, -L_{\mathbf{u}}^{-1} L_{\mathbf{h}} \delta \mathbf{h}) = \\ &= (\chi_{\mathbf{h}}^i - [L_{\mathbf{u}}^{-1} L_{\mathbf{h}}]^* \chi_{\mathbf{u}}^i, \delta \mathbf{h}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Другой подход к установлению зависимостей между δJ и $\delta \mathbf{h}$ вида (1.4), который находит применение в современных работах по оптимальному проектированию (см. также [79, 80]), основан на введении сопряженных переменных \mathbf{v} и сопряженных краевых задач, служащих для их определения. Опишем схематично данный подход. С этой целью умножим скалярно выражение, записанное в левой части равенства (1.2), на сопряженную вектор-функцию \mathbf{v}^i и выполним преобразования, связанные с введением сопряженных операторов.

Имеем

$$0 = (\mathbf{v}^i, L_{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + L_{\mathbf{h}} \delta \mathbf{h}) = (L_{\mathbf{u}}^* \mathbf{v}^i, \delta \mathbf{u}) + (L_{\mathbf{h}}^* \mathbf{v}^i, \delta \mathbf{h}). \quad (1.6)$$

Почленное сложение (1.3) с (1.6) приводит к равенству

$$\delta J_i = (\chi_{\mathbf{h}}^i + L_{\mathbf{h}}^* \mathbf{v}^i, \delta \mathbf{h}) + (\chi_{\mathbf{u}}^i + L_{\mathbf{u}}^* \mathbf{v}^i, \delta \mathbf{u}). \quad (1.7)$$

Определяя сопряженную переменную \mathbf{v}^i как решение сопряженной задачи

$$L_{\mathbf{u}}^* \mathbf{v}^i = -\chi_{\mathbf{u}}^i \quad (1.8)$$

и обращая тем самым в нуль второе скалярное произведение в (1.7), приходим к искомому выражению вида (1.4)

$$\delta J_i = (\chi_{\mathbf{h}}^i + L_{\mathbf{h}}^* \mathbf{v}^i, \delta \mathbf{h}). \quad (1.9)$$

Существуют другие различия в получении соотношений (1.4), (1.9), обусловленные в основном характером зависимости соотношений задачи, моделирующих динамику поведения системы, от переменных проектирования. Переменные проектирования могут входить в коэффициенты уравнений или ими может определяться форма области, в которой заданы эти уравнения. Для этих двух основных случаев (случай управления коэффициентами и управления границами) соотношения анализа чувствительности вида (1.4), основанные на введении сопряженных переменных, получены в разд. 3.2, 3.3. В разд. 3.4 рассматривается другой случай, когда для описания поведения конструкции вместо системы с распределенными параметрами применяется конечноэлементная модель конструкции.

При помощи формул (1.4) могут быть указаны способы улучшения рассматриваемых характеристик конструкции. Применение этих формул и проведение сопутствующих расчетов основной и сопряженной систем уравнений имеет важное значение и в тех случаях, когда по причинам большой стоимости или трудностям технологического характера возможности модификации конструкции ограничены, так как позволяют оценить качество рассматриваемого неоптимального проекта.

Если принять некоторую величину

$$J = F(J_1, J_2, \dots, J_r) \quad (1.10)$$

в качестве оптимизируемого функционала задачи, то соотношения анализа чувствительности (1.4) позволяют выразить зависимость между δh и δJ в виде

$$\delta J = \sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial J_i} (e^i, \delta h) \quad (1.11)$$

и получить формулу для улучшающей вариации проекта. Так, при безусловной минимизации функционала (1.10) выражение для δh может быть взято в виде

$$\delta h = -\tau \sum_{i=1}^r e^i \frac{\partial F}{\partial J_i} \quad (1.12)$$

Фигурирующий в выражении (1.12) для улучшающей вариации δh параметр τ ($\tau > 0$) представляет собой величину шага в градиентной процедуре минимизации функционала J . Если для подсчета δh используется формула (1.12), то «автоматически» осуществляется минимизация функционала

$$\delta J = -(1/\tau) (\delta h, \delta h) \leq 0. \quad (1.13)$$

Проведение анализа чувствительности на основе решения основной системы уравнений (1.1) и r сопряженных систем уравнений (1.8) для сопряженных переменных v^i с целью оценки вариаций r функционалов J_i представляет собой эффективную

процедуру, если получаемая при этом информация непосредственно используется в процессе проектирования конструкции. Например, получаемая в указанном объеме информация необходима при оптимальном проектировании, если оптимальность понимается в смысле Парето и решается задача многокритериальной оптимизации с векторным критерием $\{J_1, J_2, \dots, J_r\}$. В качестве другого примера можно указать проблему рационального проектирования конструкции, в которой наложены ограничения на допустимые возмущения рассматриваемых функционалов.

В случае, если при проектировании ставится более узкая задача определения чувствительности оптимизируемого функционала J и нахождения улучшающей вариации проекта, то для построения эффективной процедуры не требуется отдельного решения r систем уравнений (1.8) и определения r сопряженных вектор-функций \mathbf{v}^i . Действительно, при решении этой ограниченной задачи достаточно ввести одну сопряженную переменную.

Чтобы пояснить данное утверждение, запишем выражение для δJ , учитывая при этом представления (1.3) и равенство (1.6) (индекс у сопряженной переменной в (1.6) опускается). Имеем

$$\delta J = \left(\sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial J_i} \chi_h^i + L_h^* \mathbf{v}, \delta \mathbf{h} \right) + \left(\sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial J_i} \chi_u^i + L_u^* \mathbf{v}, \delta \mathbf{u} \right). \quad (1.14)$$

Определяя затем сопряженную переменную \mathbf{v} как решение уравнения

$$L_u^* \mathbf{v} = - \sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial J_i} \chi_u^i, \quad (1.15)$$

приходим к результирующей формуле анализа чувствительности вида

$$\delta J = \left(\sum_{i=1}^r \frac{\partial F}{\partial J_i} \chi_h^i + L_h^* \mathbf{v}, \delta \mathbf{h} \right). \quad (1.16)$$

В данном случае при построении улучшающих вариаций проекта на основе соотношения (1.16) требуется решать всего две задачи: задачу (1.15) для определения сопряженной переменной \mathbf{v} и задачу (1.1) для отыскания переменной состояния.

Рассмотрим теперь задачу минимизации некоторого выбранного функционала $J(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ при условии, что \mathbf{u} и \mathbf{h} связаны уравнением (1.1) и что на другие r функционалов $J_i(\mathbf{u}, \mathbf{h})$ ($i = 1, 2, \dots, r$) наложены ограничения

$$J_i(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = C_i, \quad (1.17)$$

где C_i — заданные константы. Для данной задачи на основе введения линеаризованной системы уравнений (1.2) и сопряженных систем уравнений вида (1.8) можно выразить δJ и δJ_i ($i = 1, 2, \dots, r$) непосредственно через $\delta \mathbf{h}$ и с учетом наложенных

ограничений (1.17) записать

$$\delta J = (e_h, \delta h), \quad (1.18)$$

$$\delta J_i = (e_h^i, \delta h) = 0. \quad (1.19)$$

Нетрудно установить, что выражение для улучшающей вариации проекта может быть взято в виде

$$\delta h = \tau \left[-e_h + \sum_{i=1}^r \lambda_i e_h^i \right]. \quad (1.20)$$

Множители Лагранжа λ_i находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j (e_h^i, e_h^j) = (e_h^i, e_h), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (1.21)$$

К соотношениям (1.21) приходим в результате подстановки выражения (1.20) для δh в равенства (1.19) и выполнения элементарных преобразований. Для так определяемой вариации проекта выполняются условия

$$\delta J \leq 0, \quad \delta J_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (1.22)$$

и, следовательно, вариация δh , определяемая соотношениями (1.20), (1.21), является улучшающей, т. е. приводит к уменьшению функционала J и не меняет (в линейном приближении) значений функционалов J_i . Действительно, на основании соотношений (1.20), (1.21) имеем

$$\delta J = (e_h, \delta h) = \left(e_h - \sum_{i=1}^r \lambda_i e_h^i, \delta h \right) = -\frac{1}{\tau} (\delta h, \delta h) \leq 0. \quad (1.23)$$

Выполнение же равенств в (1.22) обеспечивается за счет выбора множителей λ_i из решения системы уравнений (1.21).

3.2.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ВАРИАЦИЯХ КОЭФФИЦИЕНТОВ УРАВНЕНИЙ

В данном разделе приведем вывод основных формул, связывающих вариации рассматриваемых функционалов с вариациями переменных проектирования в случае вхождения этих переменных в коэффициенты уравнений.

Для описания динамического поведения конструкции воспользуемся моделью с распределенными параметрами. Пусть $x \in \Omega$ — вектор пространственных переменных; Ω — заданная область, занимаемая конструкцией; Γ — граница области Ω ; $t \in [0, t_i]$ — время; t_i — фиксированная константа, определяющая отрезок времени эксплуатации конструкции. Через $u(x, t)$, $h(x)$, $q(x, t)$ обозначим вектор-функции состояния, проектирования и нагру-

зок. Ограничимся рассмотрением линейной начально-краевой задачи

$$M \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + D \partial \mathbf{u} / \partial t + C \mathbf{u} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \quad (2.1)$$

$$(N_b \mathbf{u})_{\Gamma} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t), \quad (N_t \mathbf{u})_{t=0} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

определяющей при заданной переменной проектирования $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ и заданных нагрузках, условиях закрепления и начальных условиях поведения конструкции. Фигурирующие в уравнении (2.1) M, C, D — массовый, жесткостной и диссипативный операторы, коэффициенты которых зависят от переменных проектирования, т. е. $M = M(\mathbf{h}), C = C(\mathbf{h}), D = D(\mathbf{h})$. Операторы M, C, D, N_b, N_t являются линейными и, кроме того, M и C симметричны. Функции $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ и $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x})$ в (2.1), (2.2) считаются заданными.

Оцениваемые характеристики конструкции представляются в виде линейных функционалов

$$J_i = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} f_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}, \mathbf{h}, \mathbf{q}) d\Omega dt. \quad (2.3)$$

Если рассматриваются локальные характеристики, такие, как максимальная интенсивность напряжений ψ или максимальный прогиб w :

$$I_1 = \max_{\mathbf{x}, t} \psi, \quad I_2 = \max_{\mathbf{x}, t} w,$$

то эти величины можно аппроксимировать при помощи интегральных функционалов вида (2.3), полагая

$$f_1 = \psi^p, \quad f_2 = w^p,$$

где p — достаточно большое целое число. Функционалы J_j и I_j ($j = 1, 2$) связаны следующим приближенным равенством:

$$J_j = I_j^p (\text{mes } \Omega) t_f.$$

Для вывода формул анализа чувствительности сначала проварьируем уравнения (2.1), начальные и граничные условия (2.2). Получим

$$M \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} + D \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + C \delta \mathbf{u} + \delta_n M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \delta_n D \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \delta_n C \mathbf{u} = 0, \quad (2.4)$$

$$(N_b \delta \mathbf{u})_{\Gamma} = 0, \quad (N_t \delta \mathbf{u})_{t=0} = 0, \quad (2.5)$$

где $\delta_n M, \delta_n D, \delta_n C$ определяются соотношениями $M(\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}) = M(\mathbf{h}) + \delta_n M + o(\delta \mathbf{h}), D(\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}) = D(\mathbf{h}) + \delta_n D + o(\delta \mathbf{h}), C(\mathbf{h} + \delta \mathbf{h}) = C(\mathbf{h}) + \delta_n C + o(\delta \mathbf{h})$.

Затем умножим скалярно левую часть уравнения (2.4) на вектор-функцию $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}, t)$ и проинтегрируем по частям полученное выражение.

Будем иметь

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\mathbf{v}^i, M \frac{\partial^2 \delta \mathbf{u}}{\partial t^2} + D \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial t} + C \delta \mathbf{u} + \delta_{\mathbf{h}} M \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{\mathbf{h}} D \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \delta_{\mathbf{h}} C \mathbf{u} \right) d\Omega dt = \\
 &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{u}, M \frac{\partial^2 \mathbf{v}^i}{\partial t^2} - D^* \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial t} + C \mathbf{v}^i \right) d\Omega dt + \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{h}, \int_0^{t_f} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}^i) dt \right) d\Omega. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Здесь $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}^i)$ — вектор билинейных форм относительно переменных \mathbf{u} и \mathbf{v} и их частных производных, коэффициенты которых зависят от \mathbf{h} ; * означает операцию сопряжения. Для обращения в нуль внеинтегральных членов, получающихся при интегрировании по частям, требуется, кроме учета соотношений (2.5), подчинить функцию $\mathbf{v}^i(\mathbf{x}, t)$ краевым условиям $(N_b^* \mathbf{v}^i)_{\Gamma} = 0$ и условиям в конечный момент времени $(N_t^* \mathbf{v}^i)_{t=t_f} = 0$.

Далее, учитывая (2.6), представим вариации функционалов J_i следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \delta J_i &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{u}, M \frac{\partial^2 \mathbf{v}^i}{\partial t^2} - D^* \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial t} + C \mathbf{v}^i + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} \right) d\Omega dt + \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{h}, \int_0^{t_f} \left[B(\mathbf{u}, \mathbf{v}^i) + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{h}} \right] dt \right) d\Omega. \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

Определим сопряженную вектор-функцию $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ как решение краевой задачи

$$M \frac{\partial^2 \mathbf{v}^i}{\partial t^2} - D^* \frac{\partial \mathbf{v}^i}{\partial t} + C \mathbf{v}^i + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} = 0, \tag{2.8}$$

$$(N_b^* \mathbf{v}^i)_{\Gamma} = 0, \quad (N_t^* \mathbf{v}^i)_{t=t_f} = 0 \tag{2.9}$$

и тем самым обратим в нуль первое слагаемое, записанное в правой части (2.7). Таким образом, введение сопряженных переменных \mathbf{v}^i и сопряженных краевых задач (2.8), (2.9) позволяет в рассматриваемом случае, когда переменные проектирования входят в коэффициенты уравнений, прийти к результирующим соотношениям анализа чувствительности вида

$$\delta J_i = \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{h}, \int_0^{t_f} \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{h}} + B(\mathbf{u}, \mathbf{v}^i) \right] dt \right) d\Omega. \tag{2.10}$$

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ВАРЬИРОВАНИИ ФОРМЫ ОБЛАСТИ

Выше был рассмотрен случай, когда вектор-функция $u(x, t)$, описывающая поведение проектируемой конструкции, определяется как решение начально-краевой задачи (3.1), (3.2). Данный способ описания папряженно-деформированного состояния характерен для тошкостенных конструкций и стержневых систем (пластинки, оболочки, фермовые и рамные конструкции). В общем же случае трехмерных упругих тел и нетонкостенных конструкций функции состояния (напряжения и перемещения) удовлетворяют следующей системе уравнений динамики упругой среды, краевым и пачальным условиям:

$$\sigma_{ij,j} + q_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (3.1)$$

$$(u_i)_{\Gamma_u} = U_i(x, t), \quad (\sigma_{ij} n_j)_{\Gamma_\sigma} = T_i(x, t), \quad (3.2)$$

$$(u_i)_{t=0} = u_i^0(x), \quad (\partial u_i / \partial t)_{t=0} = v_i^0(x). \quad (3.3)$$

Система уравнений (3.1) определена в области $\Omega \times [0, t_j]$. Через ρ , q_i обозначены соответственно плотность материала конструкции и объемные силы, а через $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$ — граница области Ω , занимаемой конструкцией. Заданные функции $u_i^0(x)$ и $v_i^0(x)$ описывают начальное распределение перемещений и скоростей. Задание на интервале $[0, t_j]$ функций $U_i(x, t)$ ($x \in \Gamma_u$), $T_i(x, t)$ ($x \in \Gamma_\sigma$), $q_i(x, t)$ ($x \in \Omega$) определяет процесс деформирования и нагружения конструкции. Индексы i, j, k, l в (3.1) — (3.3) принимают значения от 1 до 3. Конечный момент времени t_j фиксирован.

В отличие от предыдущего раздела здесь при рассмотрении динамического поведения деформируемого тела диссипация энергии не учитывается.

На решениях начально-краевой задачи динамики упругого тела определены функционалы

$$J_\nu = \int_0^{t_j} \int_\Omega f_\nu(x, t, u_k, \sigma_{ij}, q_l) d\Omega dt, \quad \nu = 1, 2, \dots, r, \quad (3.4)$$

характеризующие поведение конструкции. Роль варьируемой переменной проектирования играет часть границы тела Γ_ν .

Перейдем к получению соотношений, связывающих вариации части границы Γ_ν с вариациями рассматриваемых функционалов (3.4). Будем допускать вариации границы Γ_ν , не изменяющие связности области Ω . Это означает, что сравниваются только тела, которые можно перевести друг в друга с помощью непрерывного отображения. Кроме того, считается, что для каждого тела с проварьированными границами существует решение зада-

чи теории упругости. При этом необходимо уточнить, как изменяются граничные условия при вариации формы области. Наиболее простым является случай, когда в пространстве заданы векторные поля

$$U_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv U_i(x_k, t), \quad T_i(x_1, x_2, x_3, t) \equiv T_i(x_k, t). \quad (3.5)$$

Задание векторных полей (3.5) приводит к тому, что в данном случае для каждой точки допустимой поверхности определяются правые части граничных условий (3.2). В дальнейшем принимается именно такой способ задания граничных условий при варьировании областей.

Для оценки чувствительности ν -го функционала J_ν домпозируем варьированные уравнения равновесия и соотношения закона Гука почленно на сопряженные переменные $\psi_i(x, t)$, $\chi_{ij}(x, t)$, а выражение

$$\delta v_i - \partial \delta u_i / \partial t = 0$$

для скорости v_i — на $\zeta_i(x, t)$ и проинтегрируем произведения по области Ω и по времени от $t=0$ до $t=t_f$. После сложения полученных выражений и выполнения элементарных преобразований приходим к следующему выражению для вариации рассматриваемого функционала:

$$\begin{aligned} \delta J_\nu = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_\Omega & \left[\delta f_\nu + \psi_i \left(\delta \sigma_{ij,j} - \rho \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \chi_{ij} (\delta \sigma_{ij} - C_{ijkl} \delta u_{k,l}) + \zeta_i \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial t} - \delta v_i \right) \right] d\Omega dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Выражение для вариации функционала (3.6) представим в виде суммы двух слагаемых

$$\delta J_\nu = \delta_u J_\nu + \delta_\sigma J_\nu, \quad (3.7)$$

обусловленных вариациями участков границы $\Gamma_\nu \cap \Gamma_\sigma$ и $\Gamma_\nu \cap \Gamma_u$. Нетрудно показать, что, как в случае варьирования участка границы $\Gamma_\nu \cap \Gamma_u$, так и в случае варьирования участка границы $\Gamma_\nu \cap \Gamma_\sigma$, без ограничения общности можно рассматривать только вариации в направлении нормали к поверхности тела $\delta x_i = n_i \delta l$, δl определяет абсолютную величину смещения точек вдоль нормали n_i .

Выражения для функционалов $\delta_u J_\nu$, $\delta_\sigma J_\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots, r$) получаются с применением разработанной методики¹ (см. также [9]). Опуская промежуточные преобразования, приведем лишь окончательные результаты.

¹ *Ваничук Н. В., Вельский В. Г., Кобелев В. В.* Задачи с неизвестными границами в теории оптимального проектирования конструкций: Препр. Ин-та пробл. механики АН СССР № 246. М., 1985. 63 с.

Если сопряженные переменные $\psi_i^v, \chi_{ij}^v, \zeta_i^v$ определены как решение краевой задачи

$$\psi_{i,j}^v = \chi_{ij}^v + \frac{\partial f_v}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \rho \frac{\partial \psi_i^v}{\partial t} - \zeta_i^v = 0, \quad (3.8)$$

$$(C_{ijkl} \chi_{kl}^v)_{,j} + \frac{\partial f_v}{\partial u_i} - \zeta_i^v = 0,$$

$$(\psi_i^v)_{\Gamma_u} = 0, \quad (C_{kl ij} \chi_{kl}^v n_j)_{\Gamma_\sigma} = 0, \quad (3.9)$$

$$(\psi_i^v)_{t=t_f} = 0, \quad (\zeta_i^v)_{t=t_f} = 0, \quad (3.10)$$

то для вариации функционала $\delta_u J_v$, обусловленной варьированием части границы, где заданы перемещения, справедливо выражение

$$\delta_u J_v = \int_{\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u} \left\{ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [f_v + C_{kl ij} \chi_{kl}^v (U_i - u_i)_{,j}] dt \right\} \delta l \, d\Gamma, \quad (3.11)$$

а выражение для вариации $\delta_\sigma J$, вызванной изменением части границы, где заданы усилия, дается формулой

$$\delta_\sigma J_v = \int_{\Gamma_v \cap \Gamma_\sigma} \left\{ \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} [f_v - 2H \psi_i^v T_i - (\psi_i^v \sigma_{ij})_{,j} + (\psi_i^v T_i)_{,k} n_k] dt \right\} \delta l \, d\Gamma. \quad (3.12)$$

Через H в (3.12) обозначена средняя кривизна варьируемой поверхности тела. Именно слагаемое в подынтегральном выражении (3.12), содержащее величину H , определяет чувствительность к изменениям кривизны границы. Если к варьируемой поверхности не прикладываются внешние усилия ($T_i = 0$), то зависимость вариации функционала от кривизны поверхности становится неявной.

Особенность краевой задачи для сопряженных переменных (3.8) — (3.10) по сравнению с краевой задачей для функций состояния (3.1) — (3.3), как уже отмечалось выше, заключается в том, что распределения функций ψ_i, ζ_i в Ω задаются не в начальный, а в конечный момент времени $t = t_f$. Другой особенностью системы (3.8) — (3.10) по сравнению с соответствующими соотношениями (3.1) — (3.3) является то, что в соотношениях краевой задачи (3.8) — (3.10) входят только производные первого порядка как по пространственным переменным, так и по времени. Однако это отличие несущественно, так как переменную ζ_i^v можно исключить из уравнений и начальных условий (3.8) — (3.10) и записать сопряженную систему уравнений в виде, аналогичном (3.1) — (3.3).

КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

В разд. 3.2 и 3.3 для описания динамического поведения конструкции использовался континуальный подход, и операторы задачи включали дифференцирование как по времени, так и по пространственным координатам. При этом формулируемая задача включала как начальные условия для вектор-функции состояния и ее производной по времени (скорости), так и краевые условия, характеризующие способы закрепления и нагружения конструкции. Если при проектировании конструкции использовать для моделирования ее поведения вместо системы с распределенными параметрами конечноэлементное представление, то частные производные по пространственным переменным будут исключены из рассмотрения [101]. Динамическое поведение конструкции будет описываться задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M\ddot{\mathbf{u}} + D\dot{\mathbf{u}} + C\mathbf{u} = \mathbf{q}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \dot{\mathbf{u}}^0, \quad (4.2)$$

где $\mathbf{u}(t) = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$ — искомая вектор-функция, описывающая напряженно-деформированное состояние конструкции; $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — вектор параметров проектирования; \mathbf{u}^0 и $\dot{\mathbf{u}}^0$ — заданные векторы. Матрицы M , C , D , характеризующие инерционные, жесткостные и демпфирующие свойства конструкции, предполагаются зависящими от вектора параметров проектирования и положительными, кроме того, предполагается, что матрицы масс и жесткостей симметричны, т. е. $M^* = M$, $C^* = C$.

Основные функционалы системы представим в виде

$$J_\nu = \int_0^{t_f} f(t, \mathbf{u}, \mathbf{h}) dt, \quad \nu = 1, 2, \dots, r. \quad (4.3)$$

Из выражений (4.3) непосредственно следует, что вариации интегральных функционалов δJ_ν , вариации вектор-функций состояния и вариации параметров проектирования связаны следующим образом:

$$\delta J_\nu = \int_0^{t_f} \left[\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right) + \left(\frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{h}}, \delta \mathbf{h} \right) \right] dt. \quad (4.4)$$

Для исключения из (4.4) вариаций переменных состояния $\delta \mathbf{u}$ и установления «прямой» связи $\delta \mathbf{h}$ с δJ_ν , выполним следующие операции. Проварьируем соотношения (4.1), (4.2) и после умножения обеих частей проварьированного уравнения (4.1) на вектор-функцию сопряженных переменных $\mathbf{v}^\nu(t) = \{v_1^\nu(t), v_2^\nu(t), \dots, v_m^\nu(t)\}$ выполним интегрирование в пределах от $t=0$ до $t=$

$= t_f$. Имеем

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_0^{t_f} [(\mathbf{v}^v, M\delta\ddot{\mathbf{u}} + D\delta\dot{\mathbf{u}} + C\delta\mathbf{u}) + (\mathbf{B}^v, \delta\mathbf{h})] dt = \\
 &= \int_0^{t_f} [(\delta\mathbf{u}, M\dot{\mathbf{v}}^v - D^*\dot{\mathbf{v}}^v + C\mathbf{v}^v) + (\mathbf{B}^v, \delta\mathbf{h})] dt + \\
 &+ (\mathbf{v}^v, M\delta\dot{\mathbf{u}})_{t=t_f} - (\dot{\mathbf{v}}^v, M\delta\mathbf{u})_{t=t_f} + (\mathbf{v}^v, D\delta\mathbf{u})_{t=t_f}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Через \mathbf{B}^v в (4.5) обозначен вектор с компонентами B_i^v ($i = 1, 2, \dots, n$), определяемыми следующим образом:

$$\mathbf{B}_i^v = \left(\mathbf{v}^v, \frac{\partial M}{\partial h_i} \ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial D}{\partial h_i} \dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial h_i} \right).$$

При помощи соотношения (4.5) и наложения условий $\mathbf{v}^v(t_f) = \dot{\mathbf{v}}^v(t_f) = 0$ выражение для вариации функционала J_v (4.4) может быть записано в виде

$$\delta J_v = \int_0^{t_f} \left[\left(\delta\mathbf{h}, \frac{\partial f_v}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{B}^v \right) + \left(\delta\mathbf{u}, \frac{\partial f_v}{\partial \mathbf{u}} + M\dot{\mathbf{v}}^v - D^*\dot{\mathbf{v}}^v + C\mathbf{v}^v \right) \right] dt. \tag{4.6}$$

Определяя затем вектор-функцию $\mathbf{v}^v(t)$ как решение задачи Коши

$$M\ddot{\mathbf{v}}^v - D^*\dot{\mathbf{v}}^v + C\mathbf{v}^v + \partial f_v / \partial \mathbf{u} = 0, \tag{4.7}$$

$$\mathbf{v}^v(t_f) = 0, \quad \dot{\mathbf{v}}^v(t_f) = 0 \tag{4.8}$$

с условиями в конечный момент времени $t = t_f$, приходим к результирующей формуле анализа чувствительности

$$\delta J_v = \left(\delta\mathbf{h}, \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial f_v}{\partial \mathbf{h}} + \mathbf{B}^v \right) dt \right). \tag{4.9}$$

Для того чтобы воспользоваться формулами анализа чувствительности (4.9) и определить вариации функциональных характеристик δJ_v , $v = 1, 2, \dots, r$, обусловленные вариацией вектора параметров проектирования $\delta\mathbf{h}$, или построить улучшающие вариации переменных проектирования, требуется найти соответствующие вектору \mathbf{h} переменные состояния $\mathbf{u}(t)$ и сопряженные переменные $\mathbf{v}^v(t)$. С этой целью при заданном \mathbf{h} интегрируется на отрезке времени $[0, t_f]$ система уравнений (4.1) с начальными условиями при (4.2) при $t = 0$ и определяется вектор-функция состояния $\mathbf{u}(t)$, а затем в обратном направлении от момента времени $t = t_f$ интегрируются сопряженные системы уравнений (4.7) с условиями (4.8) и находятся сопряженные вектор-функ-

ции $v^v(t)$. Если вектор-функции $u(t)$ и $v^v(t)$ найдены, то отыскание вариаций δJ , сводится к выполнению операций дифференцирования и интегрирования по формулам (4.9).

Выполнение анализа чувствительности существенно упрощается в случае педемпфируемой конструкции. В этом случае вектор-функция состояния $u(t)$, описываемая задачей Коши:

$$M\ddot{u} + Cu = q, \quad (4.10)$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0, \quad (4.11)$$

представляется в виде разложения

$$u(t) = \sum_{i=1}^s \alpha_i(t) \varphi^i = \Phi \alpha(t) \quad (4.12)$$

по собственным векторам φ^i обобщенной задачи на собственные значения

$$C\varphi^i = \omega_i^2 M\varphi^i, \quad i = 1, 2, \dots, s \leq m, \quad (4.13)$$

$$(\varphi^i, M\varphi^j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, s. \quad (4.14)$$

Здесь $\alpha(t)$ — вектор с компонентами $\alpha_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, s$, а Φ — матрица, столбцами которой являются собственные векторы φ^i .

Подстановка представления (4.12) для $u(t)$ в (4.10), (4.11) и умножение (4.10) слева на Φ^* приводит к задаче Коши с трансформированными матрицами \tilde{M} и \tilde{C} и вектором \tilde{q} :

$$\tilde{M}\ddot{\alpha} + \tilde{C}\alpha = \tilde{q}, \quad (4.15)$$

$$\alpha(0) = 0, \quad \dot{\alpha}(0) = 0. \quad (4.16)$$

Матрицы \tilde{M} , \tilde{C} и вектор \tilde{q} связаны с соответствующими матрицами и вектором исходной задачи (4.10), (4.11) преобразованиями

$$\tilde{M} = \Phi^* M \Phi, \quad \tilde{C} = \Phi^* C \Phi, \quad \tilde{q} = \Phi^* q. \quad (4.17)$$

Условия нормировки (4.14) и соотношения (4.13) показывают, что трансформированные матрицы \tilde{M} и \tilde{C} являются диагональными. Матрица \tilde{M} — единичная, а вдоль диагонали матрицы \tilde{C} расположены собственные значения ω_i^2 задачи (4.13), (4.14). Таким образом, построение решения задачи Коши для связанной системы уравнений (4.10), (4.11) сводится к решению обобщенной задачи на собственные значения и интегрированию расщепленной системы уравнений

$$\ddot{\alpha}_i + \omega_i^2 \alpha_i = \tilde{q}_i, \quad (4.18)$$

$$\alpha_i(0) = 0, \quad \dot{\alpha}_i(0) = 0. \quad (4.19)$$

Решение задач (4.18), (4.19) находится в квадратурах

$$\alpha_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^{t_f} \sin[\omega_i(t - \tau)] \tilde{q}_i(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

В случае отсутствия демпфирования сопряженная система уравнений допускает аналогичные упрощения. Применение для сопряженной системы

$$M\ddot{\mathbf{v}} + C\dot{\mathbf{v}} = \partial f / \partial \mathbf{u}, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{v}(t_f) = 0, \quad \dot{\mathbf{v}}(t_f) = 0 \quad (4.22)$$

разложения решения по собственным векторам задачи (4.13), (4.14)

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^s \beta_i(t) \Phi^i = \Phi \beta(t) \quad (4.23)$$

приводит к расщепленной системе уравнений и начальных условий для функций

$$\ddot{\beta}_i + \omega_i^2 \beta_i = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Phi^i \right), \quad (4.24)$$

$$\beta_i(t_f) = 0, \quad \dot{\beta}_i(t_f) = 0. \quad (4.25)$$

Это обстоятельство позволяет представить в квадратурах функции $\beta_i(t)$:

$$\beta_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_t^{t_f} \sin[\omega_i(t - \tau)] \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Phi^i \right) d\tau. \quad (4.26)$$

Аналогичные упрощения возможны и для демпфируемых систем, если матрица демпфирования пропорциональна матрице масс или жесткостной матрице.

3.5.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ И СООТНОШЕНИЯ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ ОБЩЕГО ВИДА

В данном разделе рассматриваются эволюционные системы общего вида в предположении, что уравнения, описывающие динамические процессы, содержат только производные по времени первого порядка. Сначала излагаются соотношения анализа чувствительности для дискретных механических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с обыкновенными производными по времени. Затем приводятся необходимые условия экстремума и соотношения анализа чувствительности для непрерывных механических систем, поведение которых описывается

дифференциальными уравнениями с частными производными как по времени, так и по пространственным переменным.

При конечноэлементном моделировании динамики конструкции используем представление ее как системы с сосредоточенными параметрами. Движение рассматриваемой системы с конечным числом степеней свободы опишем при помощи вектор-функции состояния $w(t) = \{w_1(t), \dots, w_m(t)\}$, являющейся решением следующей задачи Коши:

$$\dot{w} = \Psi(w, h), \quad w(0) = w^0, \quad (5.1)$$

где w^0 — заданный вектор начальных условий, а Ψ — заданная вектор-функция правых частей уравнений. К виду (5.1) может быть, в частности, приведена система линейных уравнений и начальных условий

$$\begin{aligned} M\ddot{u} + D\dot{u} + Cu &= q, \\ u(0) &= u^0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}^0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

описывающих малые перемещения идеально упругой системы, характеризуемой матрицами масс M , диссипации D и жесткости C , под действием нагрузок q . Действительно, систему уравнений (5.2) можно разрешить относительно вектора ускорений

$$u = -M^{-1}D\dot{u} - M^{-1}Cu + M^{-1}q \quad (5.3)$$

и записать в эквивалентной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M^{-1}D & -M^{-1}C \\ E & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Здесь E — единичная матрица. Если затем ввести в рассмотрение расширенные векторы состояния системы и начальных данных $w = \{\dot{u}, u\}$, $w^0 = \{\dot{u}^0, u^0\}$, объединенную матрицу A и модифицированный вектор нагрузки Q :

$$A = \begin{bmatrix} -M^{-1}D & -M^{-1}C \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix},$$

то система уравнений и начальные условия (5.2) запишутся в виде (5.1) с вектором Ψ , линейно зависящим от w :

$$\Psi = Aw + Q. \quad (5.5)$$

Рассмотрим теперь задачу оптимизации динамической системы (5.1), заключающуюся в отыскании вектора параметров проектирования, доставляющего минимум функционалу

$$J = \int_0^{t_f} f(t, w, h) dt + \Phi(w(t_f)). \quad (5.6)$$

Здесь Φ и f — заданные функции. Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(x, t)$ и вспомогательную функцию

$$f^* = -f + (v, \Psi) \quad (5.7)$$

и выполним варьирование функционала J :

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^{t_f} \delta f dt + \delta \Phi = \int_0^{t_f} \delta(-f^* + (v, \Psi)) dt + \delta \Phi = \\ &= \int_0^{t_f} \left[(v, \delta \dot{w}) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial w}, \delta w \right) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial h}, \delta h \right) \right] dt + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}, \delta w \right), \quad (5.8) \\ (\partial f^* / \partial w) &= \{ \partial f / \partial w_1, \dots, \partial f / \partial w_m \}, \\ (\partial f^* / \partial h) &= \{ \partial f / \partial h_1, \dots, \partial f / \partial h_n \}. \end{aligned}$$

Применяя к первому слагаемому в квадратных скобках в (5.8) интегрирование по частям и учитывая, что в силу начальных условий (5.1) $\delta w(0) = 0$, будем иметь

$$\begin{aligned} \delta J &= - \left(\delta h, \int_0^{t_f} \frac{\partial f^*}{\partial h} dt \right) - \int_0^{t_f} \left(\delta w, \dot{v} + \frac{\partial f^*}{\partial w} \right) dt + \\ &+ \left(\delta w, v + \frac{\partial \Phi}{\partial w} \right)_{t=t_f}. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Для исключения явной зависимости в (5.9) вариации функционала J от вариаций переменных состояния определим сопряженную вектор-функцию $v(t)$ как решение следующей системы уравнений с условиями в конечный момент времени $t = t_f$:

$$v - \partial f / \partial w + v(\partial \Psi / \partial w) = 0, \quad (v + \partial \Phi / \partial w)_{t=t_f} = 0. \quad (5.10)$$

При этом второе и третье слагаемые в формуле (5.9) обратятся в нуль. С учетом равенств (5.7), (5.9), (5.10) приходим к основному соотношению анализа чувствительности, связывающему вариацию оптимизируемого функционала с вариацией вектора параметров проектирования:

$$\delta J = \left(\delta h, \int_0^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial h} - v \frac{\partial \Psi}{\partial h} \right] dt \right). \quad (5.11)$$

К необходимому условию оптимальности рассматриваемого проекта приходим, полагая $\delta J = 0$ и учитывая произвольность δh . Имеем

$$\int_0^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial h} - v \left(\frac{\partial \Psi}{\partial h} \right) \right] dt = 0. \quad (5.12)$$

При континуальном рассмотрении конструкции ее динамическое поведение описывается системой уравнений с частными производными как по времени, так и по пространственным переменным. Известные приемы позволяют записать эту систему дифференциальных уравнений в каноническом виде, исключив из нее временные производные выше первого порядка:

$$\partial \mathbf{u} / \partial t = \Psi(x, t, \mathbf{u}, \partial \mathbf{u} / \partial x, \mathbf{h}), \quad (5.13)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \Phi^*(x), \quad \mathbf{u}(0, t) = \Phi^{**}(t). \quad (5.14)$$

Здесь t — время; x — пространственная координата; $\mathbf{u} = \{u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_m(x, t)\}$ — вектор-функция состояния; $\mathbf{h} = \{h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)\}$ — вектор-функция проектирования; $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$, $\Phi^* = \{\varphi_1^*, \varphi_2^*, \dots, \varphi_m^*\}$, $\Phi^{**} = \{\varphi_1^{**}, \varphi_2^{**}, \dots, \varphi_m^{**}\}$ — заданные вектор-функции, причем фигурирующие в начальных и граничных условиях функции $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$ таковы, что $\varphi^*(0) = \varphi^{**}(0)$. Система уравнений (5.13) определена в прямоугольной области $\Omega = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq t_f\}$, причем начальные и краевые условия заданы на нижней ($t=0$) и левой ($x=0$) сторонах прямоугольника. Параметры l и t_f также предполагаются заданными.

Задача оптимизации заключается в отыскании вектор-функции переменных проектирования $\mathbf{h}(x)$ из условия минимума критерия качества динамического поведения конструкции

$$J = \int_{\Omega} \int f(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \mathbf{h}) dx dt + \int_0^{t_f} f_1(t, \mathbf{u}(l, t)) dt + \int_0^l f_2(x, \mathbf{u}(x, t_f)) dx \rightarrow \min_{\mathbf{h}}. \quad (5.15)$$

Для сформулированной задачи оптимизации (5.13) — (5.15) не представляет трудностей получение формулы, связывающей вариацию функционала δJ и вариацию переменной проектирования $\delta \mathbf{h}$, и необходимых условий экстремума. Приведем вкратце соответствующие выкладки. Вводя в рассмотрение вектор-функцию сопряженных переменных $\mathbf{v} = \{v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_m(x, t)\}$ и функцию f^* , связанную с f , \mathbf{v} и Ψ следующим равенством:

$$f^* = -f + \sum_{i=1}^m v_i \Psi_i(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \mathbf{h}) = -f + (\mathbf{v}, \Psi), \quad (5.16)$$

можно с учетом (5.16) записать выражение для вариации функционала J в виде

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega} \int \delta f dx dt + \int_0^{t_f} \delta f_1 dt + \int_0^l \delta f_2 dx = \\ &= \int_{\Omega} \int \delta [(\mathbf{v}, \Psi) - f^*] dx dt + \int_0^{t_f} \delta f_1 dt + \int_0^l \delta f_2 dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} \left[\left(\mathbf{v}, \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \right) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{u}}, \delta \mathbf{u} \right) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)}, \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \right) - \left(\frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{h}}, \delta \mathbf{h} \right) \right] dx dt + \\
&\quad + \int_0^{t_f} \left(\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}(l, t)}, \delta \mathbf{u}(l, t) \right) dt + \int_0^l \left(\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}(x, t_f)}, \delta \mathbf{u}(x, t_f) \right) dx, \quad (5.17) \\
&\left(\frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)}, \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) \right) = \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_1} \right) \frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u}_1 / \partial x_1)} + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial x_2} \right) \frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u}_1 / \partial x_2)} + \dots + \\
&\quad + \delta \left(\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x_e} \right) \frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u}_m / \partial x_e)}.
\end{aligned}$$

Выполняя операции интегрирования по частям для слагаемых в (5.17), содержащих вариации $\delta(\partial \mathbf{u} / \partial x)$ и $\delta(\partial \mathbf{u} / \partial t)$, и учитывая, что в силу условий (5.14)

$$(\delta \mathbf{u})_{x=0} = (\delta \mathbf{u})_{t=0} = 0,$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
\delta J &= - \int_0^l \left(\delta \mathbf{h} \int_0^{t_f} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{h}} dt \right) dx + \int_{\Omega} \left(\delta \mathbf{u}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{u}_x} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{u}} \right) dx dt + \\
&\quad + \int_0^{t_f} \left(\delta \mathbf{u}, \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}_x} - \frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)} \right)_{x=l} dt + \int_0^l \left(\delta \mathbf{u}, \mathbf{v} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}} \right)_{t=t_f} dx, \quad (5.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)}, \delta \mathbf{u} \right) &= \sum_{i=1}^m \delta u_i \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f^*}{\partial (\partial u_i / \partial x)} \right) = \\
&= \sum_{i=1}^m \delta u_i \left(\sum_{j=1}^e \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f^*}{\partial (\partial u_i / \partial x_j)} \right), \\
\left(\frac{\partial f^*}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)}, \delta \mathbf{u} \right) &= \sum_{i=1}^m \delta u_i \left(\frac{\partial f^*}{\partial (\partial u_i / \partial x)} \right) = \sum_{i=1}^m \delta u_i \left(\sum_{j=1}^e \frac{\partial f^*}{\partial (\partial u_i / \partial x_j)} \right).
\end{aligned}$$

Если теперь определить вектор-функцию сопряженных переменных как решение следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{v}, \Psi) + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial (\mathbf{v}, \Psi)}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)} = 0, \quad (5.19)$$

$$\left(\mathbf{v} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}} \right)_{t=t_f} = 0, \quad \left(- \frac{\partial f}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)} + \frac{\partial}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)} (\mathbf{v}, \Psi) - \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{u}} \right)_{x=l} = 0, \quad (5.20)$$

где $\frac{\partial f}{\partial (\partial \mathbf{u} / \partial x)} = \left\{ \sum_{j=1}^e \frac{\partial f}{\partial (\partial u_1 / \partial x_j)}, \dots, \sum_{j=1}^e \frac{\partial f}{\partial (\partial u_m / \partial x_j)} \right\}$ — вектор с m компонентами, то нетрудно заметить с учетом (5.16), что второе,

третье и четвертое слагаемые в (5.18) обратятся в нуль. Приходим к основному соотношению анализа чувствительности при проектировании

$$\delta J = - \int_0^l \left(\delta \mathbf{h}, \int_0^{t_l} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{h}} dt \right) dx. \quad (5.21)$$

Соотношение (5.21) совместно с введенной сопряженной системой уравнений (5.19), (5.20) позволяет эффективно оценивать влияние изменений в проекте на рассматриваемый функционал J и может использоваться при построении вычислительных алгоритмов оптимизации. Широкое применение соотношения (5.19) — (5.21) нашли в градиентных алгоритмах оптимизации, причем наиболее часто для улучшающей вариации $\delta \mathbf{h}$, обеспечивающей уменьшение функционала J ($\delta J < 0$), принимается следующее выражение:

$$\delta \mathbf{h} = - \int_0^{t_l} \left[\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{h}} (\mathbf{v}, \Psi) \right] dt. \quad (5.22)$$

Заметим, что необходимое условие, получающееся приравниванием выражения (5.21) к нулю с использованием произвольности вариации $\delta \mathbf{h}$, совпадает по виду с условием экстремума (5.12).

Рассмотренная задача (5.13) — (5.15) допускает непосредственные обобщения на случаи большего числа независимых переменных, вхождения в правые части дифференциальных уравнений пространственных производных более высокого порядка, другие способы задания краевых условий. Поскольку соответствующие этим случаям соотношения анализа чувствительности и условия экстремума получаются при помощи выкладок, полностью аналогичных приведенным выше, то, опуская стандартные рассуждения, приведем некоторые результаты.

Пусть в правые части дифференциальных уравнений (5.13) входят производные по пространственным переменным более высокого порядка:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Psi \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^k}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k}, \mathbf{h} \right). \quad (5.23)$$

При этом начальные условия имеют вид (5.14), а формулировка граничных условий сводится к заданию при $x=0$ частных производных по x до порядка $k-1$ включительно:

$$\mathbf{u}(0, t), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} (0, t), \quad \frac{\partial^{k-1} \mathbf{u}}{\partial x^k} (0, t). \quad (5.24)$$

Оптимизируемый функционал качества динамической системы имеет вид

$$J = \int_{\Omega} \int f \left(x, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^k \mathbf{u}}{\partial x^k}, \mathbf{h} \right) dx dt + \\ + \int_0^{t_f} f_1 \left(t, \mathbf{u}, \dots, \frac{\partial^{k-1} \mathbf{u}}{\partial x^{k-1}} \right) dt + \int_0^l f_2(x, \mathbf{u}) dx. \quad (5.25)$$

Для сформулированной задачи оптимизации (5.23) — (5.25), (5.14) соотношения анализа чувствительности и необходимое условие экстремума сохраняют вид (5.21), (5.22) и (5.12), если сопряженная система уравнений, условия при $x=l$ и в конечный момент времени $t=t_f$ определены следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = - \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{u}} - \sum_{r=1}^k (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} \left(\frac{\partial f^*}{\partial [\partial^r \mathbf{u} / \partial x^r]} \right), \quad (5.26)$$

$$\left(\mathbf{v} + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{u}} \right)_{t=t_f} = 0, \quad (5.27)$$

$$\left[\sum_{r=\alpha}^k (-1)^{r-\alpha} \frac{\partial^{r-\alpha}}{\partial x^{r-\alpha}} \left(\frac{\partial f^*}{\partial (\partial^r \mathbf{u} / \partial x^r)} \right) - \frac{\partial f_1}{\partial (\partial^{\alpha-1} \mathbf{u} / \partial x^{\alpha-1})} \right]_{x=l} = 0,$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, k$; $f^* = -f + (\mathbf{v}, \Psi)$.

Рассмотрим теперь многомерный случай, когда x является e -мерным вектором, принимающим значения в e -мерном множестве G ($x \in G$) с границей Γ . В этом случае динамический процесс описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \Psi \left(t, x_1, \dots, x_e, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e}, \mathbf{h} \right) \quad (5.28)$$

с начальными условиями при $t=0$ и $x \in G$:

$$\mathbf{u}(x_1, \dots, x_e, 0) = \mathbf{u}^*(x_1, \dots, x_e), \quad (5.29)$$

и граничными условиями при $x \in \Gamma$ и $t \in [0, t_f]$:

$$\mathbf{u}(x_1, \dots, x_e, t) = \mathbf{u}^{**}(x_1, \dots, x_e, t). \quad (5.30)$$

Фигурирующие в (5.28) — (5.30) величины Ψ , \mathbf{u}^* , \mathbf{u}^{**} являются заданными вектор-функциями своих аргументов. Предполагается, что при $x \in \Gamma$ условия (5.29) и (5.30) согласованы, т. е. $\mathbf{u}^*(x_1, \dots, x_e) = \mathbf{u}^{**}(x_1, \dots, x_e, t)$. В качестве критерия, характеризующего динамическое поведение системы в многомерном случае, принимается интегральный функционал

$$J = \int_{\Omega} \int f \left(x_1, \dots, x_e, t, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_e}, \mathbf{h} \right) dx dt + \\ + \int_G f_1(x_1, \dots, x_e, \mathbf{u}(x_1, \dots, x_e, t_f)) dx. \quad (5.31)$$

Для многомерного случая [задача оптимизации (5.28) — (5.31)] соотношения анализа чувствительности и необходимые условия экстремума также сохраняют вид (5.22), (5.12), если сопряженную систему уравнений и условия в конечный момент времени задать следующим способом ($f^* = -f + (v, \Psi)$):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial f^*}{\partial u} + \sum_{j=1}^e \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f^*}{\partial (\partial u / \partial x_j)} \right), \quad (5.32)$$

$$(v + \partial f_1 / \partial u)_{t=t_f} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (5.33)$$

3.6. ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Многие проблемы оптимального проектирования сводятся к оптимизации систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями или системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, при проектировании конструкций, совершающих вынужденные гармонические колебания, в тех случаях, когда функции состояния конструкции зависят от одной пространственной координаты, после разделения независимых переменных приходим к проблемам оптимизации систем, описываемых краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений возникают при описании динамического поведения балок, стержневых систем (ферм и рам), круглых пластин и осесимметричных оболочек. При оптимизации одномерных конструкций, совершающих свободные колебания, и при проектировании систем, отстраиваемых от резонанса, приходим к спектральным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Различные задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений рассматриваются при проектировании неконсервативных механических систем при ограничениях по устойчивости [26].

Для всех перечисленных выше классов задач оптимального проектирования применим широко используемый в математической теории оптимального управления процессами принцип максимума Л. С. Понтрягина [88]. Ниже в данном разделе приведем без доказательства формулировку принципа максимума, используемые при оптимизации конструкций, рассчитываемых на динамические воздействия.

Пусть вектор-функция u , определяющая состояние системы, зависит от одной пространственной переменной x , т. е. $u = u(x) = \{u_1(x), \dots, u_m(x)\}$, и удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$du/dx = \Psi(u, h), \quad x \in [x^1, x^2] \quad (6.1)$$

с краевыми условиями, выставленными при $x = x^1$ и $x = x^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x^1) \in \Gamma_1, \quad \Gamma_1: \mu_1(\mathbf{u}) = 0, \quad \mu_k(\mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u}(x^2) \in \Gamma^2, \quad \Gamma^2: \chi_1(\mathbf{u}) = 0, \dots, \chi_l(\mathbf{u}) = 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x) = \{h_1(x), \dots, h_n(x)\}$ — вектор переменных проектирования, а $\Psi = \{\Psi_1(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \dots, \Psi_m(\mathbf{u}, \mathbf{h})\}$, $\mu_1(\mathbf{u})$, $\mu_k(\mathbf{u})$, $\chi_1(\mathbf{u})$, \dots , $\chi_l(\mathbf{u})$ — заданные функции своих аргументов.

Задача оптимизации заключается в отыскании вектора переменных проектирования $\mathbf{h}(x)$, принадлежащего заданному замкнутому множеству \mathcal{H} ($\mathbf{h} \in \mathcal{H}$), доставляющего минимум функционалу

$$J_0 = \int_{x^1}^{x^2} \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}) dx \rightarrow \min_{\mathbf{h}} \quad (6.3)$$

и такого, что выполняются соотношения (6.1), (6.2). Фигурирующая в (6.3) функция f_0 — заданная функция аргументов. Введением дополнительной переменной состояния $u_0 = u_0(x)$, определяемой из решения задачи Коши

$$du_0/dx = \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \quad u_0(x^1) = 0, \quad (6.4)$$

исходная задача оптимизации (6.1), (6.3) сводится к минимизации значения функции u_0 при $x = x^2$, т. е. $u_0(x^2) \rightarrow \min_{\mathbf{h}}$.

Для рассматриваемой расширенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.1), (6.4) введем функцию Гамильтона

$$H = H(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{h}) = \sum_{i=0}^m v_i \Psi_i = (\mathbf{v}, \Psi), \quad (6.5)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = \{v_0(x), \dots, v_m(x)\}$ — вектор-функция сопряженных переменных, удовлетворяющая следующей системе дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$\frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial u_i} = -\left(\mathbf{v}, \frac{\partial \Psi}{\partial u_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{v}(x^1) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla \mu_j(\mathbf{u}), \quad \mathbf{v}(x^2) = \sum_{j=1}^l \beta_j \nabla \chi_j, \quad (6.7)$$

причем $v_0 = -1$.

Заметим, что уравнения (6.1), (6.6) записываются в виде гамильтоновой системы

$$\frac{du_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \frac{dv_i}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (6.8)$$

Согласно принципу максимума, если $\mathbf{h}(x)$ — оптимальная вектор-функция переменных проектирования, а $\mathbf{u}(x)$, $\mathbf{v}(x)$ — соответствующее ей решение гамильтоновой системы (6.8), (6.2),

(6.7), то при всех $x \in [x^1, x^2]$ выполняется условие принципа максимума

$$H(u_*(x), v_*(x), h_*(x)) = \sup_{h \in \mathcal{H}} H(u_*(x), v_*(x), h). \quad (6.9)$$

Приведем теперь другую постановку задачи оптимального проектирования, основанную на представлении конструкции набором конечных элементов и использовании для описания динамических процессов системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями, т. е. задачи Коши. Будем рассматривать систему определяющих уравнений с начальными условиями

$$\dot{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{u}(t), \mathbf{h}), \quad (6.10)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0 \quad (6.11)$$

на фиксированном отрезке времени $[0, t_f]$. Здесь Ψ , как и прежде, заданная m -мерная вектор-функция правых частей уравнений; $\mathbf{h} = \{h_1, \dots, h_n\}$ — подлежащий определению вектор параметров проектирования; \mathbf{u}^0, t_f — фиксированные величины. Формулировка лппейных динамических систем общего вида в форме (6.10), (6.11) обсуждалась в разд. 3.5.

В качестве оптимизируемого критерия качества конструкции в рассматриваемой динамической задаче оптимального проектирования примем функционал Больца

$$J = \Phi_0(\mathbf{u}(t_f)) + \int_0^{t_f} \Psi_0(\mathbf{u}(t), \mathbf{h}) dx. \quad (6.12)$$

Следуя традиционной схеме, введем дополнительную переменную состояния $u_0(t)$ с помощью соотношений

$$\dot{u}_0(t) = \Psi_0(\mathbf{u}, \mathbf{h}), \quad u_0(0) = 0 \quad (6.13)$$

и преобразуем задачу Больца к задаче Майера с функционалом, зависящим от значений расширенной функции состояния $\tilde{\mathbf{u}}$ в конечный момент времени:

$$J = u_0(t_f) + \Phi_0(\mathbf{u}(t_f)) = \Phi(\tilde{\mathbf{u}}(t_f)). \quad (6.14)$$

Определим, как и прежде, функцию Гамильтона H формулой (6.5) и запишем систему уравнений и краевых условий для вектор-функции состояния и вектор-функции сопряженных переменных в виде

$$\dot{u}_i = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad \dot{v}_i = -\frac{\partial H}{\partial u_i}, \quad i = 0, 1, \dots, m, \quad (6.15)$$

$$u_i(0) = u_i^0, \quad v_i(t_f) = (v_0 \partial \Phi / \partial u_i)_{t=t_f}, \quad (6.16)$$

где $u_0^0 = 0$, $v_0 = \text{const} < 0$. Согласно принципу максимума, если вектор параметров проектирования $\mathbf{h}^* = \{h_1, \dots, h_n\}$ и вектор-функция состояния $\mathbf{u}^*(t)$ доставляют минимум функционалу

(6.14) при ограничениях (6.10), (6.11), то существует ненулевая вектор-функция $v = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$, $v_0 \leq 0$, удовлетворяющая соотношениям (6.15), (6.16), и имеют место равенства (условия оптимальности)

$$\int_0^{t_f} \frac{\partial H}{\partial h_k} dt \equiv \sum_{\alpha=0}^n \int_0^{t_f} v_{\alpha}^*(t) \frac{\partial \Psi_{\alpha}(u^*, v^*(t), h^*)}{\partial h_k} dt = 0, \quad (6.17)$$

$$k = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть теперь в конечный момент времени $t = t_f$ заданы дополнительные условия

$$\Phi_j(u(t_f), h) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \leq m, \quad (6.18)$$

а момент времени t_f не фиксирован и выбирается из решения задачи оптимизации. В этом случае условия трансверсальности при $t = t_f$ примут вид [82]

$$v_i(t_f) = \left(v_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial u_i} + \sum_{j=1}^p v_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial u_i} \right)_{t=t_f} \quad (6.19)$$

$$(H)_{t=t_f} = - \left(v_0 \frac{\partial \Phi_0}{\partial t_f} + \sum_{j=1}^p v_j \frac{\partial \Phi_j}{\partial t_f} \right)_{t=t_f}, \quad (6.20)$$

где v_j — множители Лагранжа, отвечающие ограничениям (6.18).

Приведенная выше формулировка принципа максимума остается справедливой, если в ней заменить равенства (6.16), выведенные при $t = t_f$, на (6.19) и дополнить систему рассматриваемых соотношений условием (6.20), служащим для определения параметра t_f .

Широкий класс задач оптимального проектирования конструкций, рассчитываемых на нестационарные воздействия при помощи конечноэлементных представлений, может быть сформулирован в виде оптимизационной проблемы для линейной динамической системы, рассматриваемой на фиксированном интервале времени $[0, t_f]$, с функционалом Майера

$$\dot{u} = Au + Q, \quad u(0) = u^0, \quad (6.21)$$

$$J = (C, u(t_f)) = \sum_{i=1}^m C_i u_i(t_f) \rightarrow \min_{\mathbf{h}}. \quad .22$$

Здесь $A = A(h)$ — заданный линейный матричный оператор с коэффициентами a_{ij} , зависящими от вектора параметров проектирования $h = \{h_1, \dots, h_n\}$, т. е. $a_{ij} = a_{ij}(h_1, h_2, \dots, h_n)$, $i, j = 1, 2, \dots, m$; $Q = Q(t)$ — заданная при $t \in [0, t_f]$ вектор-функция от времени; $C = (C_1, C_2, \dots, C_m)$ и $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_m^0)$ — заданные векторы параметров задачи.

Для рассматриваемой задачи оптимизации со свободным правым концом запишем выражение для функции Гамильтона H и

ее вариации δH , обусловленной вариациями параметров проектирования и переменных состояния:

$$H = (\mathbf{v}, \mathbf{A}\mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{Q}), \quad (6.23)$$

$$\delta H = (\mathbf{v}, \mathbf{A}\delta\mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \delta_h \mathbf{A}\mathbf{u}). \quad (6.24)$$

Второе слагаемое в (6.24) может быть представлено в виде

$$\int_0^{t_f} (\mathbf{v}, \delta_h \mathbf{A}\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial a_{ij}}{\partial h_k} v_i(t) u_j(t) \right) \delta h_k. \quad (6.25)$$

Сопряженную вектор-функцию $\mathbf{v}(t) = \{v_1(t), \dots, v_n(t)\}$ определим как решение задачи Коши для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с условиями в конечный момент времени $t = t_f$:

$$\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(t_f) = -\mathbf{C}. \quad (6.26)$$

В задаче Коши (6.26) при определении $\mathbf{v}(t)$ при $t \in [0, t_f]$ интегрирование производится справа налево, т. е. в обратном по сравнению с системой (6.21) направлении.

Следующей цепочкой соотношений устанавливается связь между вариацией оптимизируемого функционала и вариациями параметров проектирования:

$$\begin{aligned} \delta J &= (\mathbf{C}, \delta \mathbf{u}(t_f)) = -(\mathbf{v}(t_f), \delta \mathbf{u}(t_f)) = \\ &= -[(\mathbf{v}, \delta \mathbf{u})]_0^{t_f} = - \int_0^{t_f} [(\dot{\mathbf{v}}, \delta \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \dot{\delta \mathbf{u}})] dt = \\ &= - \int_0^{t_f} [-(\mathbf{A}^* \mathbf{v}, \delta \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \mathbf{A}\delta \mathbf{u}) + (\mathbf{v}, \delta_h \mathbf{A}\mathbf{u})] dt = \\ &= - \int_0^{t_f} \sum_{k=1}^p \frac{\partial H}{\partial h_k} \delta h_k dt. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Преобразования (6.27) выполнены с использованием соотношений (6.21), (6.23), (6.24), (6.26). Необходимые условия оптимальности, служащие для отыскания параметров проектирования h_k , с учетом (6.25) запишутся в виде

$$\int_0^{t_f} \frac{\partial H}{\partial h_k} dt = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial a_{ij}}{\partial h_k} \int_0^{t_f} u_j(t) v_i(t) dt = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (6.28)$$

3.7.

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ

В предыдущих разделах данной главы излагались методы анализа чувствительности характеристик конструкций, основанные на введении сопряженных переменных. Эти методы интенсивно

развиваются и оказываются наиболее эффективными при оптимизации конструкций. Однако наряду с указанными подходами в современных работах по проектированию применяются прямые методы, не требующие явного введения сопряженных переменных и сопряженных систем уравнений. Прямые методы позволяют исследовать чувствительность переменных состояния динамической системы к вариациям параметров проектирования. Прямые методы оказываются эффективными и для задач оптимизации с такими функционалами, как собственные частоты колебаний или критические силы потери устойчивости конструкции. Они применимы и для любых самосопряженных задач оптимизации, когда сопряженная система уравнений совпадает с основной системой уравнений для переменных состояния и сопряженные переменные исключаются из рассмотрений. Подробно с такими задачами оптимизации можно ознакомиться по книге [9].

При анализе динамических процессов в конструкции воспользуемся ее конечноэлементной моделью, применявшейся выше в разд. 3.4:

$$M\ddot{\mathbf{u}} + D\dot{\mathbf{u}} + C\mathbf{u} = \mathbf{q}. \quad (7.1)$$

Матрицы масс, демпфирования и жесткости могут зависеть от вектора параметров проектирования $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ и в нелинейном случае от вектор-функции переменных состояния $\mathbf{u} = \{u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)\}$. Для определения вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ связанная система обыкновенных дифференциальных уравнений (7.1) может быть проинтегрирована при соответствующих начальных условиях. Ниже в данном разделе рассматривается пошаговая процедура интегрирования, причем, следуя работе [239], принимается одна из ее наиболее широко используемых реализаций. Предполагая, что при интегрировании системы уравнений (7.1) разбиение временного интервала осуществляется с постоянным шагом величины Δt , и обозначая через κ и τ произвольные параметры, запишем соотношение метода

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \mathbf{u}(t) + \tau\dot{\mathbf{u}}(t) + (1/2 - \kappa)\tau^2\ddot{\mathbf{u}}(t) + \kappa\tau^2\ddot{\mathbf{u}}(t + \tau), \quad (7.2)$$

$$\mathbf{u}(t + \tau) = \dot{\mathbf{u}}(t) + (\tau/2) \{\ddot{\mathbf{u}}(t) + \ddot{\mathbf{u}}(t + \tau)\}.$$

Из соотношений (7.2), фиксируя конкретные значения параметров τ и κ , приходим к известным вариантам метода линейных ускорений: классическому методу линейных ускорений ($\kappa = 1/6$, $\tau = \Delta t$), методу Ньюмарка ($\kappa = \beta$, $0 \leq \beta \leq 1/6$, $\tau = \Delta t$), методу Вилсона ($\kappa = 1/6$, $\tau = \theta\Delta t$, $\theta > 1,37$). Отнесем уравнения динамики (7.1) к моменту времени $t + \tau$ и подставим в эти уравнения выражения (7.2) для $\mathbf{u}(t + \tau)$ и $\dot{\mathbf{u}}(t + \tau)$. Будем иметь

$$\left(M + \frac{\tau}{2} D + \kappa\tau^2 C \right) \mathbf{u}(t + \tau) = \left\{ \mathbf{q}(t + \tau) - \right. \\ \left. - D \left[\dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\tau}{2} \dot{\mathbf{u}}(t + \tau) \right] - C \left[\mathbf{u}(t) + \tau\dot{\mathbf{u}}(t) + \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \tau^2\ddot{\mathbf{u}}(t) \right] \right\}. \quad (7.3)$$

К формулам для чувствительности ускорений приводит непосредственное дифференцирование по h_i ($i = 1, 2, \dots, n$) выражений в (7.3)

$$\begin{aligned} \left(M + \frac{\tau}{2} D + \kappa \tau^2 C \right) \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t + \tau)}{\partial h_i} = & - \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u}(t) + C \frac{\partial \mathbf{u}(t)}{\partial h_i} + \right. \\ & + \left(\frac{\partial D}{\partial h_i} + \tau \frac{\partial C}{\partial h_i} \right) \dot{\mathbf{u}}(t) + \left(\frac{\tau}{2} \frac{\partial D}{\partial h_i} + \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \tau^2 \frac{\partial C}{\partial h_i} \right) \mathbf{u}(t) + \\ & + (D + \tau C) \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}(t)}{\partial h_i} + \left(\frac{\tau}{2} D + \left(\frac{1}{2} - \kappa \right) \tau^2 C \right) \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial h_i} + \\ & + \left(\frac{\partial M}{\partial h_i} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial D}{\partial h_i} + \kappa \tau^2 \frac{\partial C}{\partial h_i} \right) \mathbf{u}(t + \tau). \end{aligned} \quad (7.4)$$

При исследовании методов линейных ускорений и метода Ньюмарка формулы (7.4) могут быть непосредственно применены для отыскания градиентов чувствительности.

Чувствительность скоростей и перемещений также находится непосредственным дифференцированием по h_i соответствующих выражений (7.2) после подстановки в них величин $\mathbf{u}(t + \tau)$ из (7.3). Так, например, для метода Ньюмарка и классического метода линейных ускорений будем иметь

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)}{\partial h_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}(t)}{\partial h_i} + \frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial h_i} + \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)}{\partial h_i} \right\}. \quad (7.5)$$

Несколько отличен вывод основных соотношений анализа чувствительности для метода Вилсона. Для получения этих соотношений сначала осуществляется экстраполяция ускорений на момент времени $t + \Delta t$:

$$\mathbf{u}(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\theta} \mathbf{u}(t + \tau). \quad (7.6)$$

Искомые выражения для частных производных вектора ускорений по параметрам проектирования получим дифференцированием (7.6)

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)}{\partial h_i} = \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t)}{\partial h_i} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial \ddot{\mathbf{u}}(t + \tau)}{\partial h_i}. \quad (7.7)$$

Для вычисления фигурирующих в (7.7) производных $\partial \ddot{\mathbf{u}}(t + \tau) / \partial h_i$ используется выражение (7.4). Аналогично находятся производные перемещений и скоростей по параметрам проектирования

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t + \Delta t)}{\partial h_i} = \frac{\partial}{\partial h_i} \left\{ \mathbf{u}(t) + \Delta t \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{\theta} \tau^2 [2\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}(t + \tau)] \right\}, \quad (7.8)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t)}{\partial h_i} = \frac{\partial}{\partial h_i} \left\{ \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{\Delta t}{2} [\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{u}(t + \tau)] \right\}.$$

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ КОНСТРУКЦИЙ, СОВЕРШАЮЩИХ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$C\varphi^i = \lambda_i M\varphi^i, \quad (8.1)$$

которая возникает при определении собственных форм $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ и соответствующих собственных частот ω_i ($\lambda_i = \omega_i^2$) свободных колебаний конструкции, моделируемой дискретной механической системой. Матрицы жесткости и масс C, M размерности $m \times m$ являются симметричными, положительно определенными и зависят от вектора параметров проектирования $h = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Все собственные значения λ_i предполагаются некрратными. Условия нормировки и ортогональности собственных векторов записываются в виде

$$(\varphi^i, M\varphi^j) = \delta_{ij}, \quad (\varphi^i, C\varphi^j) = \lambda_i \delta_{ij}, \quad (8.2)$$

где через δ_{ij} обозначен символ Кронекера. Получение соотношений анализа чувствительности в этом случае не представляет сложностей. Дифференцируя соотношение (8.1) по h_k , получим

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial h_k} M\varphi^i = \frac{\partial C}{\partial h_k} \varphi^i - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_k} \varphi^i + \left(C \frac{\partial \varphi^i}{\partial h_k} - \lambda_i M \frac{\partial \varphi^i}{\partial h_k} \right). \quad (8.3)$$

После скалярного умножения обеих частей соотношения (8.3) на вектор φ^i и учета условия нормировки (8.2), а также обращения в нуль произведения величин, записанных в скобках, будем иметь

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial h_k} = \left(\varphi^i, \frac{\partial C}{\partial h_k} \varphi^i \right) - \lambda_i \left(\varphi^i, \frac{\partial M}{\partial h_k} \varphi^i \right). \quad (8.4)$$

Примем собственные векторы $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ задачи (8.1) в качестве базиса m -мерного пространства и представим вектор чувствительности переменных состояния в виде разложения по выбранному базису

$$\frac{\partial \varphi^i}{\partial h_k} = \sum_{j=1}^m \alpha_{jh}^i \varphi^j. \quad (8.5)$$

Подстановка разложения (8.5) в (8.3) и скалярное умножение получающегося соотношения на φ^s приводит к равенству

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial h_k} \delta_{is} = \left(\varphi^s, \frac{\partial C}{\partial h_k} \varphi^i \right) - \lambda_i \left(\varphi^s, \frac{\partial M}{\partial h_k} \varphi^i \right) + \lambda_s \alpha_{ih}^s - \lambda_i \alpha_{ih}^i. \quad (8.6)$$

Откуда при $i \neq s$ будем иметь

$$\alpha_{ih}^s = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_s} \left(\Phi^s, \left[\frac{\partial C}{\partial h_k} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_k} \right] \Phi^i \right). \quad (8.7)$$

В случае $i = s$ для нахождения коэффициента α_{ih}^i дифференцируется по h_k условие нормировки $(\Phi^i, M\Phi^i) = 1$. Имеем

$$2 \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial h_k}, M\Phi^i \right) + \left(\Phi^i, \frac{\partial M}{\partial h_k} \Phi^i \right) = 0. \quad (8.8)$$

Используя соотношение (7.8) и разложение (8.5) для $\partial \Phi^i / \partial h_k$, получим

$$\alpha_{ih}^i = -\frac{1}{2} \left(\Phi^i, \frac{\partial M}{\partial h_k} \Phi^i \right). \quad (8.9)$$

Подстановка выражений (8.7) и (8.9) в (8.5) приводит к искомой формуле анализа чувствительности собственных векторов

$$\frac{\partial \Phi^i}{\partial h_k} = -\frac{1}{2} \left(\Phi^i, \frac{\partial M}{\partial h_k} \Phi^i \right) \Phi^i + \sum_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^m \frac{1}{\lambda_i - \lambda_s} \left(\Phi^s, \left[\frac{\partial C}{\partial h_k} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_k} \right] \Phi^i \right) \Phi^s. \quad (8.10)$$

Приведенные формулы (8.4), (8.10) представляют собой основные соотношения анализа чувствительности первого порядка.

Формулы анализа чувствительности второго порядка также выводятся непосредственно при помощи несложных выкладок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial h_k \partial h_j} = & \left(\Phi^i, \left[\frac{\partial^2 C}{\partial h_k \partial h_j} - \lambda_i \frac{\partial^2 M}{\partial h_k \partial h_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial h_j} \frac{\partial M}{\partial h_k} \right] \Phi^i \right) + \\ & + 2 \left(\frac{\partial \Phi^i}{\partial h_j}, \left[\frac{\partial C}{\partial h_k} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_k} \right] \Phi^i \right). \end{aligned} \quad (8.11)$$

Если при помощи формулы анализа чувствительности (8.10) выразить величины $\partial \Phi^i / \partial h_j$, фигурирующие в (8.11), то получим формулу анализа чувствительности второго порядка для простого собственного значения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial h_k \partial h_j} = & \left(\Phi^i, \left[\frac{\partial^2 C}{\partial h_k \partial h_j} - \lambda_i \frac{\partial^2 M}{\partial h_k \partial h_j} \right] \Phi^i \right) + \\ & + 2\lambda_i \left(\Phi^i, \frac{\partial M}{\partial h_j} \Phi^i \right) \left(\Phi^i, \frac{\partial M}{\partial h_k} \Phi^i \right) - \left(\Phi^i, \frac{\partial C}{\partial h_j} \Phi^i \right) - \left(\Phi^i, \frac{\partial M}{\partial h_j} \Phi^i \right) + \\ & + \sum_{\substack{s=1 \\ i \neq s}}^m \frac{2}{\lambda_i - \lambda_s} \left(\Phi^s, \left[\frac{\partial C}{\partial h_j} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_j} \right] \Phi^i \right) \left(\Phi^s, \left[\frac{\partial C}{\partial h_k} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_k} \right] \Phi^i \right). \end{aligned} \quad (8.12)$$

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В КОНСТРУКЦИЯХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА МОДАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Рассмотрим снова связанную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (7.1), описывающую динамическое поведение конструкции, и применим к ней метод модальных разложений, основанный на представлении решения нестационарной задачи в виде линейной комбинации мод свободных колебаний. Коэффициенты этих модальных разложений по формам свободных колебаний, являющиеся искомыми функциями времени, при определенных дополнительных предположениях относительно матрицы демпфирования D удовлетворяют более простой несвязанной (расщепленной) системе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом анализ чувствительности переменных состояния исходной системы уравнений сводится к оценке влияния вариации параметров проектирования на моды и частоты свободных колебаний и на переменные полученной расщепленной системы.

Составим из собственных векторов φ^i ($i = 1, 2, \dots, m$) обобщенной задачи на собственные значения (8.1), (8.2) матрицу Φ размерности $m \times m$. Собственные векторы будут столбцами матрицы Φ . Перейдем затем при помощи матрицы Φ к новым переменным $\alpha(t) = \{\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_m(t)\}$ по формуле

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \alpha(t). \quad (9.1)$$

Соотношение (9.1) можно рассматривать как разложение вектор-функции $\mathbf{u}(t)$ по полной системе собственных векторов φ^i с коэффициентами $\alpha_j(t)$.

Подставляя разложение (9.1) в (7.1) и домножая получающееся при этом соотношение слева на транспонированную матрицу Φ^* , приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для вектор-функции $\alpha(t)$:

$$\ddot{\tilde{M}}\alpha + \dot{\tilde{D}}\alpha + \tilde{C}\alpha = \tilde{\mathbf{q}}, \quad (9.2)$$

с трансформированными матрицами \tilde{M} , \tilde{C} , \tilde{D} и вектором $\tilde{\mathbf{q}}$:

$$\tilde{M} = \Phi^* M \Phi, \quad \tilde{C} = \Phi^* C \Phi, \quad \tilde{D} = \Phi^* D \Phi, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \Phi^* \mathbf{q}. \quad (9.3)$$

Матрицы \tilde{M} и \tilde{C} в силу условий (8.2) — диагональные. Диагональными элементами этих матриц являются соответственно единицы и собственные значения $\lambda_i = \omega_i^2$.

Применительно к матрице демпфирования D сделаем основное допущение об ортогональности относительно этой матрицы соб-

ственных векторов задачи (8.1), (8.2), т. е.

$$(\varphi^i, D\varphi^j) = 0 \quad \text{при } i \neq j. \quad (9.4)$$

При сделанном допущении уравнения (9.2) расщепляются и их можно записать в скалярной форме следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{\alpha}_i + \omega_i^2 \alpha_i &= \tilde{q}_i, \\ \lambda_i = \omega_i^2 &= (\varphi^i, C\varphi^i), \quad \mu_i = \xi_i \omega_i = 1/2 (\varphi^i, D\varphi^i), \\ \tilde{q}_i &= (\varphi^i, \tilde{q}). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Решение уравнений (9.5) с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$\alpha_i = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^{t_f} \tilde{q}_i(t) \exp(-\mu_i(t_f - t)) \sin \gamma_i(t_f - t) dt, \quad (9.6)$$

где $\gamma_i = \sqrt{\lambda_i - \mu_i^2}$.

При получении соотношений анализа чувствительности будем предполагать, что все собственные значения λ_i являются различными, т. е. $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Продифференцируем соотношение (9.1) по параметрам проектирования h_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial h_k} = \frac{\partial}{\partial h_k} \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi^i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\alpha_i \frac{\partial \varphi^i}{\partial h_k} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial h_k} \varphi^i \right). \quad (9.7)$$

Фигурирующие в (9.7) производные собственных векторов даются формулами (8.10). Поэтому определение чувствительности системы к изменениям параметров проектирования сводится к определению производных $\partial \alpha_i / \partial h_k$.

Непосредственное дифференцирование по h_k выражений (9.6) для α_i дает

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial h_k} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial h_k} \chi_{\lambda}^i + \frac{\partial \mu_i}{\partial h_k} \chi_{\mu}^i + \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial h_k}, \chi_{\varphi}^i \right). \quad (9.8)$$

Величины $\chi_{\lambda}^i, \chi_{\mu}^i, \chi_{\varphi}^i$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \chi_{\lambda}^i &= \frac{1}{2\gamma_i^2} \int_0^{t_f} \tilde{q}_i \exp(-\mu_i(t_f - t)) \left[(t_f - t) \cos \gamma_i(t_f - t) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\gamma_i} \sin \gamma_i(t_f - t) \right] dt, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\begin{aligned} \chi_{\mu}^i &= \frac{1}{\gamma_i^3} \int_0^{t_f} \tilde{q}_i \exp(-\mu_i(t_f - t)) \{ \mu_i \sin \gamma_i(t_f - t) - \\ &\quad - \gamma_i(t_f - t) \cos \gamma_i(t_f - t) - \gamma_i^2(t_f - t) \sin \gamma_i(t_f - t) \} dt, \end{aligned}$$

$$\chi_{\varphi}^i = \frac{1}{\gamma_i} \int_0^{t_f} \tilde{q} \exp(-\mu_i(t_f - t)) \sin \gamma_i(t_f - t) dt.$$

Производные $\partial\mu_i/\partial h_k$ и $\partial\lambda_i/\partial h_k$ в (9.8) определяются следующими выражениями:

$$\frac{\partial\mu_i}{\partial h_k} = \left(\Phi^i, D \frac{\partial\Phi^i}{\partial h_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\Phi^i, \frac{\partial D}{\partial h_k} \Phi^i \right), \quad (9.10)$$

$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial h_k} = \left(\Phi^i, \left[\frac{\partial C}{\partial h_k} - \lambda_i \frac{\partial M}{\partial h_k} \right] \Phi^i \right).$$

Заметим, что первое из соотношений (9.10) получается дифференцированием выражения для μ_i (9.5), а вывод второго соотношения (9.10) приведен в разд. 3.8.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Исследование динамического поведения конструкций тесно связано с анализом собственных частот и собственных форм свободных колебаний [6, 7, 102, 103]. При этом рассмотрение проблем повышения динамической жесткости и расширения диапазонов безрезонансной работы конструкции приводит к задачам оптимизации частотных характеристик в расчете на заданные внешние воздействия и к задачам предельного снижения веса конструкций при ограничениях на собственные частоты. Наиболее характерными и хорошо изученными являются задачи максимизации фундаментальной частоты колебаний конструкций при заданном объеме материала, а также задачи минимизации веса конструкций при условии, что частота основного тона колебаний не превышает заданного значения. Решение этих, а также других родственных задач проектирования сводится к отысканию наилучших распределений жесткостей и масс по конструкции, а также к оптимизации геометрии и параметров структурной неоднородности используемых в конструкции материалов.

Данная глава посвящена изложению вопросов спектральной оптимизации на примерах проектирования стержней, балок, стержневых систем, пластинок и оболочек (см. также [20, 39, 52, 64, 65, 74, 86, 93, 94, 105, 117, 169, 184, 187, 189, 190, 194, 200, 201, 206, 209, 215, 217, 219, 230, 240]).

4.1.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА ДЛЯ ЗАДАЧ СПЕКТРАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим сначала упругую топкостенную конструкцию, поведение которой описывается уравнениями с распределенными параметрами. Для определения собственных частот и собственных форм свободных колебаний воспользуемся уравнениями и граничными условиями в операторной форме

$$Cu - \omega^2 Mu = 0, \quad (4.1)$$

$$(Nu)_r = 0, \quad (4.2)$$

где ω — частота колебаний; $u(x)$ — амплитудная функция перемещений; C и M — линейные операторы, характеризующие жесткостные и инерционные свойства конструкции; N — оператор гра-

ничных условий; $x \in \Omega$, Γ — граница области Ω . Коэффициенты самосопряженных и положительно определенных операторов C , M , а также оператора граничных условий N зависят от переменной проектирования $h(x)$. Свойства этих операторов обсуждаются, например, в [35, 66, 81].

Рассмотрим некоторые постановки задач оптимального проектирования для конструкций, совершающих свободные колебания.

1. Необходимо найти переменную проектирования $h(x)$ ($x \in \Omega$), описывающую распределение материала по тонкостенной конструкции, из условия минимума функционала объема (массы, веса)

$$V = \int_{\Omega} f(h) d\Omega \rightarrow \min_h, \quad (1.3)$$

так что фундаментальная собственная частота колебаний принимает заданное значение

$$\omega_0^2 = \min_u [(u, Cu)_{\Omega} / (u, Mu)_{\Omega}] = \mu_0^2. \quad (1.4)$$

Здесь μ_0 — заданная константа; $f(h)$ — заданная функция. С учетом обозначений для кинетической энергии $T(u, h)$ и потенциальной энергии $\Pi(u, h)$, использованных выше в гл. 1 и 2, будем иметь

$$\Pi(u, h) = (u, Cu)_{\Omega} = \int_{\Omega} (u, Cu) d\Omega,$$

$$T(u, h) = (u, Mu)_{\Omega} = \int_{\Omega} (u, Mu) d\Omega.$$

2. Требуется найти такое распределение $h(x)$, которое максимизирует функционал

$$\omega_0^2 = \min_u [(u, Cu)_{\Omega} / (u, Mu)_{\Omega}] \rightarrow \max_h \quad (1.5)$$

при условии, что объем (масса, вес) конструкции задан:

$$V = \int_{\Omega} f(h) d\Omega = V_0. \quad (1.6)$$

Фигурирующие в (1.3) — (1.6) величины μ_0 , V_0 — заданные константы; $f(h)$ — заданная функция.

Минимум по u в (1.4), (1.5) разыскивается на множестве кинематически допустимых амплитудных функций $u(x)$, т. е. при отыскании минимумов по u учитывается только часть так называемых главных граничных условий из системы условий (1.2), включающих производные не выше p -го порядка, где p — порядок высших производных в рэлеевских отношениях (1.4), (1.5).

Классическим способом получения необходимых условий экстремума оптимизируемых функционалов является используемый во многих работах по оптимальному проектированию метод множителей Лагранжа. При этом возможны различные способы вве-

дения постоянных или переменных множителей Лагранжа (сопряженных переменных) и составления расширенного функционала Лагранжа. Так, для задачи (1.3), (1.4) при помощи введения сопряженной переменной $v(x)$ можно составить следующий расширенный функционал:

$$J = \int_{\Omega} f(h) d\Omega + \int_{\Omega} (v(x), [Cu - \mu_0^2 Mu]) d\Omega. \quad (1.7)$$

Варьирование этого функционала по h и по u с учетом граничных условий (1.2) и приравнивание получающегося выражения к нулю приводит к следующему равенству:

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial h} \delta h d\Omega + \int_{\Omega} (v(x), [\delta C - \mu_0^2 \delta M] u) d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (v(x), [C - \mu_0^2 M] \delta u) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где через δC и δM обозначены операторы, линейно зависящие от δh и получающиеся при отбрасывании членов более высокого порядка в разложениях для возмущенных операторов

$$C(h + \delta h) = C(h) + \delta C + o(\delta h),$$

$$M(h + \delta h) = M(h) + \delta M + o(\delta h).$$

После применения ко второму и третьему слагаемому в (1.8) операций интегрирования по частям с учетом граничных условий (1.2) и вытекающих из них равенств $(N\delta u)_{\Gamma} = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial h} \delta h d\Omega + \int_{\Omega} B(u, v) \delta h d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} (\delta u, [Cv - \mu_0^2 Mv]) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь $B(u, v)$ — билинейная форма относительно переменных u и v . При получении равенства (1.9) для исключения части членов, образующихся при интегрировании по частям, сопряженная функция v подчиняется граничным условиям $(Nv)_{\Gamma} = 0$. С учетом произвольности вариации переменной проектирования δh и вариации вектор-функции состояния δu приходим к условию оптимальности

$$(\partial f / \partial h) + B(u, v) = 0 \quad (1.10)$$

и соотношениям краевой задачи, служащей для определения сопряженной переменной:

$$Cv - \mu_0^2 Mv = 0, \quad (1.11)$$

$$(Nv)_{\Gamma} = 0. \quad (1.12)$$

Из совпадения однородных систем уравнений и граничных условий (1.1), (1.2) и (1.11), (1.12) для вектор-функции состоя-

ния $u(x)$ и сопряженной вектор-функции $v(x)$ вытекает, что с точностью до постоянного множителя κ эти функции совпадают, т. е.

$$v(x) = \kappa u(x). \quad (1.13)$$

Поэтому для рассматриваемой задачи оптимизации возможно исключить сопряженную переменную из рассмотрений и записать условие экстремума в следующем виде:

$$(\partial/\partial h) + \kappa B(u, u) = 0. \quad (1.14)$$

Это свойство самосопряженности рассмотренной задачи оптимизации характерно и для многих других задач спектральной оптимизации. Заметим, что оба слагаемых в условии оптимальности (1.14) могут зависеть явным образом от переменной проектирования h и что для определения константы κ следует пользоваться равенством $\omega_0^2(u, h) = \mu_0^2$.

Отметим свойство самосопряженности задачи оптимизации [35, 81] и то, что уравнения состояния (1.1) и часть некинематических (динамических) граничных условий из (1.2) являются соответственно уравнениями Эйлера и условиями трансверсальности для функционала (1.4). Эти обстоятельства позволяют не вводить в рассмотрение сопряженную функцию $v(x)$ и при получении условия оптимальности построить расширенный функционал с постоянным множителем Лагранжа λ , отвечающим за выполнение ограничения на частоту основного тона колебаний:

$$J = \int_{\Omega} f(h) d\Omega + \lambda \left(\frac{\int_{\Omega} (u, Cu) d\Omega}{\int_{\Omega} (u, Mu) d\Omega} - \mu_0^2 \right). \quad (1.15)$$

Варьирование функционала (1.15) как по h , так и по u приводит к уравнению состояния (1.1), динамическим граничным условиям из (1.2) и к условиям оптимальности (1.14).

Отметим и другое важное свойство проблем спектральной оптимизации. При проектировании конструкций как с ограничениями на собственные частоты колебаний, так и при оптимизации частот отдельных тонов свободных колебаний или комбинаций из нескольких частот часто рассматриваются так называемые взаимные задачи, решения которых отличаются лишь масштабными множителями. В ряде случаев непосредственное решение задачи можно заменить указанием взаимной задачи, если последняя уже изучена, и способа «перерастяжения» решений. Выделение взаимных задач оказывается полезным в исследованиях по оптимальному проектированию и позволяет сократить число решаемых задач. Свойство взаимности наиболее характерно для проблем спектральной оптимизации с однородными функционалами [220], к которым и относятся сформулированные выше задачи 1 и 2. Применительно к этим взаимным задачам можно ука-

зять простой способ перерастяжения оптимальных решений. Пусть степени однородности функционалов объема V и частоты ω_0^2 по отношению к h соответственно равны α и β . Обозначим величины h и u , относящиеся к задачам (1.3), (1.4) и (1.5), (1.6), соответственно через h^* , u^* и h^{**} , u^{**} . Тогда, если решение одной из указанных задач существует и единственно, то решение взаимной задачи также существует и единственно, причем эти решения связаны соотношениями

$$h^{**} = \gamma_1 h^*, \quad \gamma_1 = (V(h^*)/V_0)^{-1/\alpha}, \quad (1.16)$$

$$h^* = \gamma_2 h^{**}, \quad \gamma_2 = (\omega_0^2(h^{**})/\mu_0^2)^{-1/\beta}. \quad (1.17)$$

Выше, при обсуждении постановок задач спектральной оптимизации на переменную проектирования h не накладывалось дополнительных ограничений вида $h \in \mathcal{H}$, где \mathcal{H} — заданное множество. Однако во многих случаях при проектировании приходится рассматривать условия, наложенные как на саму функцию $h(x)$:

$$h_{\min}(x) \leq h(x) \leq h_{\max}(x), \quad (1.18)$$

так и на ее производные:

$$|\nabla h(x)| < \varepsilon. \quad (1.19)$$

Здесь ε — заданное положительное число, а $h_{\min}(x)$ и $h_{\max}(x)$ — заданные функции, причем $h_{\min}(x) \leq h_{\max}(x)$. Учет ограничений (1.18), (1.19) может осуществляться при помощи введения вспомогательных функций и преобразований, описанных подробно в книге [9].

Рассматривавшиеся выше континуальные способы описания упругих конструкций обычно применяются при проектировании отдельных элементов конструкции, моделируемых балками, пластинками или оболочками. Для стержневых систем или сложных составных конструкций предпочтительнее использовать методы, основанные на дискретном описании конструкции и в особенности различные варианты метода конечных элементов. Методы дискретного описания конструкции хорошо адаптируются к математическим методам оптимизации. Здесь прежде всего имеются в виду методы пелинейного программирования. Отметим, что на основе использования дискретных моделей рассмотрение задач спектральной оптимизации проводилось в целом ряде работ [118, 143—145, 179, 221—223, 225, 232].

Дискретизация расчетной модели приводит к тому, что динамическое поведение конструкции описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений вместо исходного описания континуальной модели с применением уравнений в частных производных. Динамическое же поведение конструкций, совершающих свободные колебания, определяется после дискретизации и исключения времени линейными алгебраическими задачами на собственные значения, применяемыми при отыскании амплитудных векторов колебаний и собственных частот.

Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух групп элементов [232]. К первой группе относятся так называемые неконструктивные элементы с неподлежащими варьированию при проектировании жесткостными и массовыми свойствами. Матрицы глобальной жесткости и масс набора элементов с фиксированными свойствами обозначим через C_f и M_f . Ко второй группе отнесем элементы с варьируемыми в процессе проектирования жесткостными и инерционными характеристиками. Будем считать, что инерционные и жесткостные матрицы M_i , C_i варьируемых элементов второй группы пропорциональны их массам h_i ($i = 1, 2, \dots, n$; n — число элементов второй группы), и запишем выражения для глобальных жесткостной и инерционной матриц конструкции в виде

$$C = \sum_{i=1}^n h_i C_i + C_f, \quad (1.20)$$

$$M = \sum_{i=1}^n h_i M_i + M_f.$$

В дальнейшем будем пренебрегать жесткостью неконструктивных элементов, полагая $C_f = 0$.

С учетом неизменяемости неконструктивных элементов рассматриваемая ниже задача оптимизации полной массы (веса) конструкции сводится к минимизации массы J варьируемых элементов второй группы:

$$J = \sum_{i=1}^n h_i \rightarrow \min. \quad (1.21)$$

Уравнение для собственных частот ω и форм \mathbf{u} свободных колебаний $C\mathbf{u} = \omega^2 M\mathbf{u}$ с использованием представлений (1.20) запишем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n h_i [C_i - \omega^2 M_i] \mathbf{u} = \omega^2 M_f \mathbf{u}. \quad (1.21a)$$

Сформируем матрицу B , расположив вдоль ее i -й строки транспонированный вектор $[C_i - \omega^2 M_i] \mathbf{u}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). С использованием так введенной матрицы B система уравнений (1.21) примет вид

$$B\mathbf{h} = \omega^2 M_f \mathbf{u}. \quad (1.22)$$

Если число степеней свободы конструкции, т. е. размерность вектора состояния \mathbf{u} равна числу варьируемых элементов n , то система уравнений (1.22) может быть разрешена относительно вектора параметров проектирования

$$\mathbf{h} = \omega^2 B^{-1} M_f \mathbf{u}. \quad (1.23)$$

При этом следующим образом запишется выражение для оптимизируемого функционала:

$$J = \sum_{i=1}^n h_i = \omega^2 [1, 1, \dots, 1] B^{-1} M_j \mu. \quad (1.24)$$

В этом случае необходимые условия минимума варьируемой массы конструкции с учетом условия нормировки $u_n = 1$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial u_j} &= \omega^2 [1, 1, \dots, 1] \frac{\partial B^{-1}}{\partial u_j} M_j \mu + \\ &+ \omega^2 [1, 1, \dots, 1] B^{-1} M_j^j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где M_j^j — j -й столбец матрицы M_j . Если в (1.25) учесть, что

$$\frac{\partial B^{-1}}{\partial u_j} = -B^{-1} \left(\frac{\partial B}{\partial u_j} \right) B^{-1},$$

то необходимые условия оптимальности запишутся в форме

$$\begin{aligned} \omega^2 [1, 1, \dots, 1] B^{-1} \left(M_j^j - \frac{\partial B}{\partial u_j} B^{-1} M_j \mu \right) &= 0, \\ j = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В общем случае, когда размерности векторов параметров проектирования h и переменных состояния не совпадают и матрица B в (1.22) не является квадратной, для вывода необходимых условий экстремума воспользуемся методом множителей Лагранжа. Основное утверждение состоит в том, что существует вектор множителей Лагранжа $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, для которого расширенный функционал Лагранжа

$$J^v = \sum_{i=1}^n h_i + (v, B h) - \omega^2 (v, M_j \mu) \quad (1.27)$$

признает стационарные значения при независимых вариациях параметров проектирования h_i и перемещений u_j . В качестве условий экстремума J^v имеем систему n уравнений для определения оптимальных параметров h_i :

$$\partial J^v / \partial h_i = 1 + (v, B^i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.28)$$

и систему m уравнений для определения компонент вектора v :

$$\frac{\partial J^v}{\partial u_j} = \left(v, \frac{\partial B}{\partial u_j} h \right) - \mu^2 (v, M_j^j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (1.29)$$

Учитывая, что полученная система однородных уравнений, служащая для определения компонент вектора v , совпадает с соответствующей системой уравнений для u , можно положить $v = \mu u$, где μ — коэффициент пропорциональности. Исключая из рассмотрений вектор множителей Лагранжа, приходим к следую-

щим основным соотношениям задачи оптимизации:

$$(C - \omega^2 M) \mathbf{u} = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial h_i} = 1 + \nu \left(\mathbf{u}, \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} - \omega^2 \frac{\partial M}{\partial h_i} \right] \mathbf{u} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad n. \quad (1.30)$$

Проведенные выше рассуждения относились к задаче оптимизации с заданной частотой основного тона колебаний. Не представляя, однако, трудностей обобщение рассматриваемых соотношений на случай задания n собственных частот колебаний. Так, если в задаче оптимизации фиксированы две частоты свободных колебаний ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \neq \omega_2$), то основные соотношения запишутся следующим образом [232]:

$$\frac{\partial J}{\partial h_i} + \nu_1 \left(\mathbf{u}^1, \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} - \omega_1^2 \frac{\partial M}{\partial h_i} \right] \mathbf{u}^1 \right) + \\ + \nu_2 \left(\mathbf{u}^2, \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} - \omega_2^2 \frac{\partial M}{\partial h_i} \right] \mathbf{u}^2 \right) = 0, \quad (1.31) \\ (C - \omega_j^2 M) \mathbf{u}^j = 0, \quad j = 1, 2,$$

где $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2$ — собственные векторы, отвечающие частотам ω_1 и ω_2 , а ν_1, ν_2 — неизвестные константы, определяемые из условий $\omega(\mathbf{h}, \mathbf{u}^1) = \omega_1$ и $\omega(\mathbf{h}, \mathbf{u}^2) = \omega_2$.

4.2.

ОПТИМИЗАЦИЯ СТЕРЖНЕЙ, СОВЕРШАЮЩИХ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

При малых крутильных колебаниях прямолинейного стержня амплитудная функция $\varphi(x)$, описывающая распределение углов поворота сечений стержня, удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка и некоторым граничным условиям в точках закрепления стержня $x = 0$ и $x = l$:

$$\frac{d}{dx} \left[GI \frac{d\varphi}{dx} \right] + \omega^2 \rho I \varphi = 0, \quad (2.1)$$

$$(C d\varphi/dx + \kappa \varphi)_{x=0, l} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь ω — частота свободных колебаний; $G(x)$ — модуль сдвига; $I(x)$ — погонный момент инерции сечения стержня; $\rho(x)$ — плотность. Параметр κ характеризует жесткость закрепления концов стержня. В случае незакрепленного конца $\kappa = 0$, для упругой заделки $0 < \kappa < \infty$, а в пределе при $\kappa \rightarrow \infty$ приходим к условиям жесткого защемления края стержня.

Примем линейную зависимость жесткостной и инерционной характеристики стержня от переменной проектирования, т. е.

$$GI = k_1 (1 + k_2 h), \quad \rho I = k_3 h + k_4. \quad (2.3)$$

Через k_1, k_2, k_3, k_4 обозначены заданные константы.

Для удобства перейдем к безразмерным переменным, отнеся все размерные величины к соответствующим параметрам используемого для сравнения стержня с постоянным распределением переменной проектирования $h(x) = h_r$:

$$\alpha = \frac{k_1 k_2}{k_1(1 + k_2 h_r)}, \quad \beta = \frac{k_1}{k_1(1 + k_2 h_r)}, \quad \gamma = \frac{k_3}{k_3 h_r + k_4},$$

$$\delta = \frac{k_4}{k_3 h_r + k_4}, \quad (\omega')^2 = \frac{\omega^2 (k_3 h_r + k_4)}{k_1(1 + k_2 h_r)}, \quad \kappa' = \frac{\kappa}{k_1(1 + k_2 h_r)},$$

$$x' = \frac{x}{l}.$$

Опуская штрихи у безразмерных переменных, запишем уравнение и граничные условия (2.1), (2.2) в виде

$$\frac{d}{dx} \left[(\alpha h + \beta) \frac{d\varphi}{dx} \right] + \omega^2 (\gamma h + \delta) \varphi = 0, \quad (2.4)$$

$$((\alpha h + \beta) d\varphi/dx + \kappa \varphi)_{x=0, 1} = 0. \quad (2.5)$$

Рассматриваемая ниже задача оптимизации заключается в отыскании переменной проектирования $h(x)$, доставляющей минимум функционалу

$$J = \int_0^1 h \, dx \rightarrow \min \quad (2.6)$$

на множестве функций, удовлетворяющих двусторонним неравенствам

$$h_{\min} \leq h(x) \leq h_{\max}, \quad (2.7)$$

и такой, что фундаментальная частота крутильных колебаний ω совпадает с частотой основного тона ω_r , используемой для сравнения балки с постоянным распределением $h(x) = h_r$. Заметим, что для балки с $h = h_r$ выполняются следующие условия на параметры:

$$\alpha h_r + \beta = 1, \quad \gamma h_r + \delta = 1. \quad (2.8)$$

Ниже, следуя работе [126], изложим численно-аналитическое решение задачи (2.4) — (2.7).

Предполагая применение принципа максимума Л. С. Понтрягина и условий Вейерштрасса — Эрдманна «в угловых точках» для отыскания численно-аналитических решений задачи оптимального проектирования, запишем соотношения краевой задачи (2.2), (2.5) в виде системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями в точках $x = 0$ и $x = 1$. При этом конкретизируем вид граничных условий, полагая, что в точке $x = 0$ стержень зашкреплен, а другой его

конец ($x = 1$) является свободным. Имеем

$$d\varphi/dx = \psi/(\alpha h + \beta), \quad d\psi/dx = -\omega^2(\gamma h + \delta)\varphi, \quad (2.9)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(1) = 0. \quad (2.10)$$

Для задачи оптимизации составим функцию Гамильтона

$$H = -h + \lambda[\psi^2/(\alpha h + \beta) + \omega^2(\gamma h + \delta)\varphi^2]. \quad (2.11)$$

Вхождение в выражение для функции Гамильтона множителя λ вызвано исключением из H сопряженных переменных с учетом имеющейся пропорциональности (λ — коэффициент пропорциональности) между сопряженными переменными и переменными состояниями.

Оптимальное распределение переменной проектирования (управляющей переменной) находится из условия принципа максимума

$$H(\varphi^*, \psi^*, h^*) = \max_h H(\varphi^*, \psi^*, h). \quad (2.12)$$

Максимум по h в (2.12) вычисляется на множестве непрерывных распределений переменной проектирования, удовлетворяющем условиям (2.7). Звездочки у оптимальных значений величин в дальнейшем опускаются.

Из условия принципа максимума следует, что возможны режимы распределения переменной проектирования трех типов: $h(x) = h_{\max}$ (режим I); $h_{\min} < h(x) < h_{\max}$, $\partial H/\partial h = 0$ (промежуточный режим II); $h(x) = h_{\min}$ (режим III). В общем случае оптимальное решение оказывается комбинацией всех трех указанных режимов. Для режимов I и III требуется определить переменные состояния из решения системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Для промежуточного режима II отысканию подлежит и оптимальное распределение $h(x)$. На промежуточном участке переменная проектирования удовлетворяет условию, вытекающему из равенства $\partial H/\partial h = 0$:

$$1 + \lambda\alpha\psi^2/(\alpha h + \beta)^2 - \lambda\omega^2\gamma\varphi^2 = 0. \quad (2.13)$$

Из рассмотрения соотношения (2.13) при $x = 0$ с учетом граничного условия $\varphi(0) = 0$ и положительности конструктивного параметра α можно сделать вывод, что $\lambda < 0$. Поэтому соотношение (2.13) можно представить в виде

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda\alpha}} \sqrt{1 - \lambda\omega^2\gamma\varphi^2}. \quad (2.14)$$

Определяющие соотношения рассматриваемой задачи с учетом оптимального задания функции проектирования $h(x)$ могут быть проинтегрированы для каждого из трех рассматриваемых режимов. С учетом анализа оптимального расположения участков

постоянного задания $h = h_{\max}$, $h = h_{\min}$ и промежуточного задания h ($h_{\min} < h < h_{\max}$) в соответствии с условием (2.14) будем иметь:

Режим I ($0 \leq x \leq x_1$)

$$\varphi = \frac{c_1 d_{\max}}{\omega^2 (\gamma h_{\max} + \delta)} \sin d_{\max} x, \quad \psi = c_1 \cos d_{\max} x, \quad (2.15)$$

$$h = h_{\max}, \quad H = -h_{\max} + \frac{\lambda c_1^2}{\alpha h_{\max} + \beta}, \quad d_{\max}^2 = \frac{\omega^2 (\gamma h_{\max} + \delta)}{(\alpha h_{\max} + \beta)}.$$

Режим II ($x_1 \leq x \leq x_2$)

$$\varphi = \frac{1}{\omega \sqrt{-\lambda \gamma}} \operatorname{sh}(c_2 + vx), \quad v = \omega \sqrt{\gamma/\alpha}, \quad (2.16)$$

$$\psi = \frac{c_3}{\operatorname{ch}(c_2 + vx)} + \frac{\omega}{2v \sqrt{-\lambda \gamma}} [\gamma \beta/\alpha - \delta] \operatorname{ch}(c_2 + vx),$$

$$h = \frac{c_3}{\operatorname{ch}^2(c_2 + vx)} \sqrt{-\lambda/\alpha} - 1/2 [\beta/\alpha + \delta/\gamma],$$

$$H = 2c_3 \sqrt{-\lambda/\alpha} - \delta/\alpha.$$

Режим III ($x_2 \leq x \leq 1$)

$$\varphi = \frac{c_4 d_{\min}}{\omega^2 (\gamma h_{\min} + \delta)} \cos [d_{\min} (1 - x)], \quad (2.17)$$

$$\psi = c_4 \sin [d_{\min} (1 - x)],$$

$$h = h_{\min}, \quad H = -h_{\min} + \frac{c_4 \lambda}{\alpha h_{\min} + \beta},$$

$$d_{\min}^2 = \frac{\omega^2 (\gamma h_{\min} + \delta)}{\alpha h_{\min} + \beta}.$$

Для определения фигурирующих в формулах (2.15)–(2.17) шести неизвестных констант x_1 , x_2 , c_1 , c_2 , c_3 , c_4 имеется шесть условий непрерывности функции φ , ψ , H в точках x_1 и x_2 . Соответствующие соотношения представляют собой алгебраические уравнения и решаются численно. Зависимость соотношений (2.15)–(2.17) от произвольной константы λ обусловлена однородностью краевой задачи о колебаниях и неоднородным определением амплитудных функций. Значение этой константы обычно задается нормировочным условием.

На рис. 4.1–4.7 показаны распределения переменной проективования $h(x)$ для различных значений параметров α , β , γ , δ , h_{\max} , h_{\min} . Во всех случаях для сравнения рассматривался стержень с постоянным жесткостными и инерционными характеристиками с $h(x) = h_r = 0,5$.

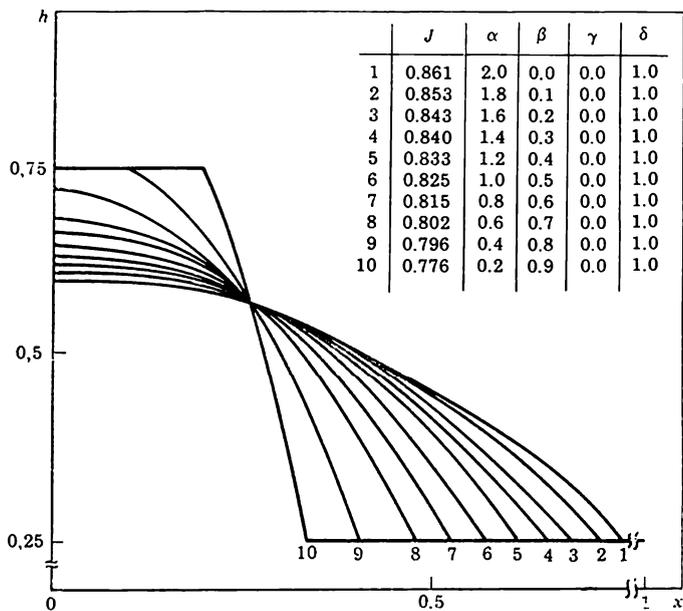


Рис. 4.1

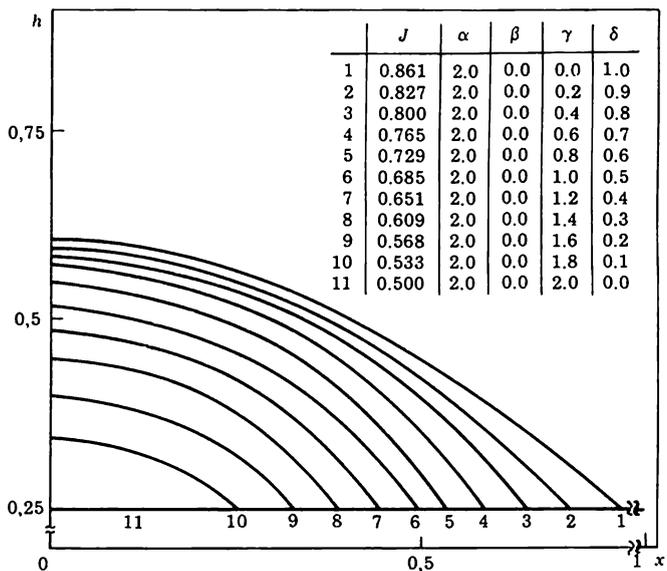


Рис. 4.2

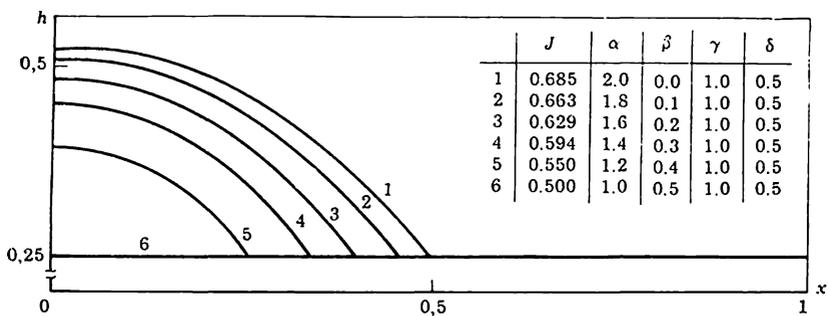


Рис. 4.3

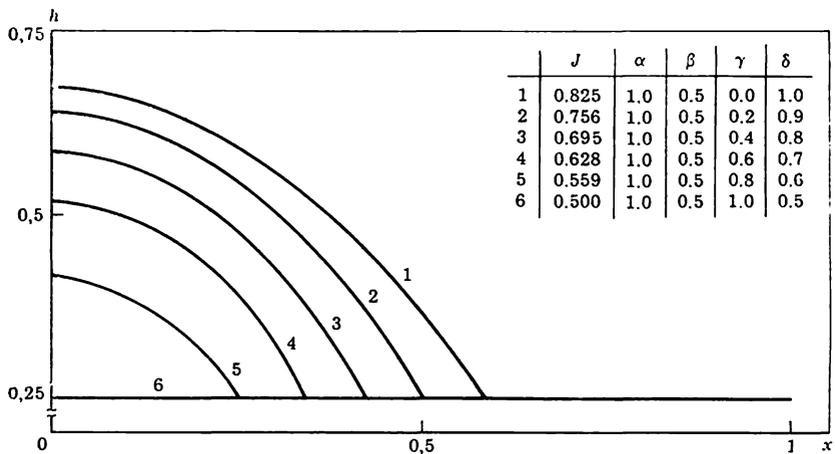


Рис. 4.4

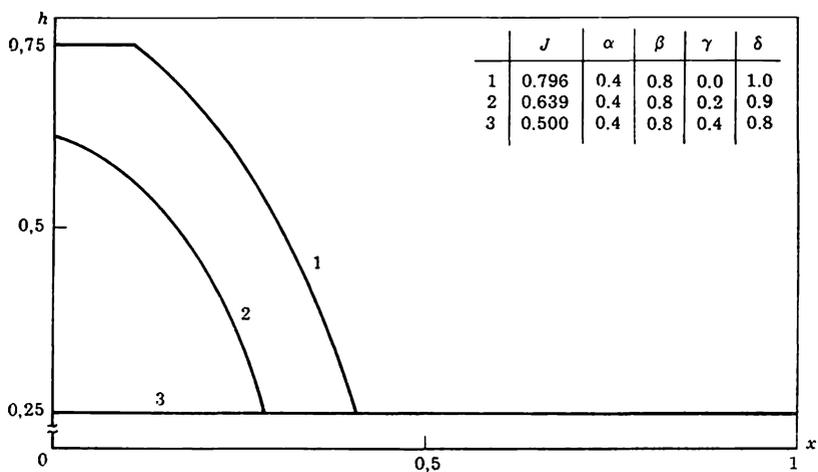


Рис. 4.5

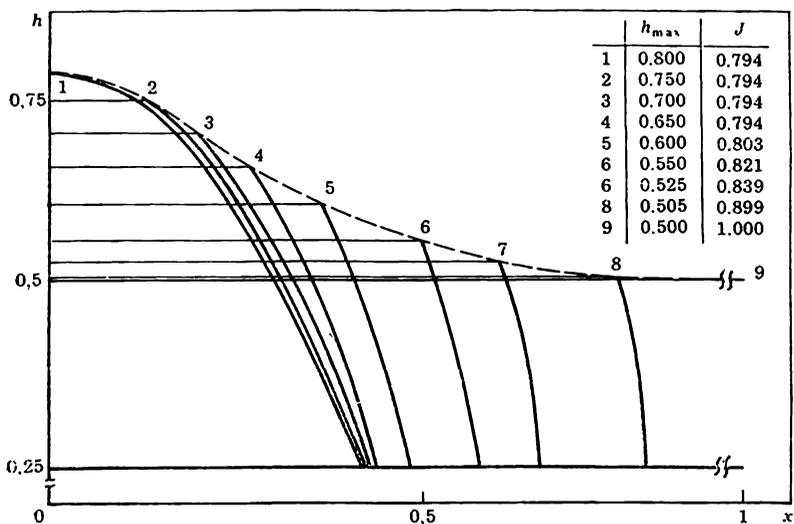


Рис. 4.6

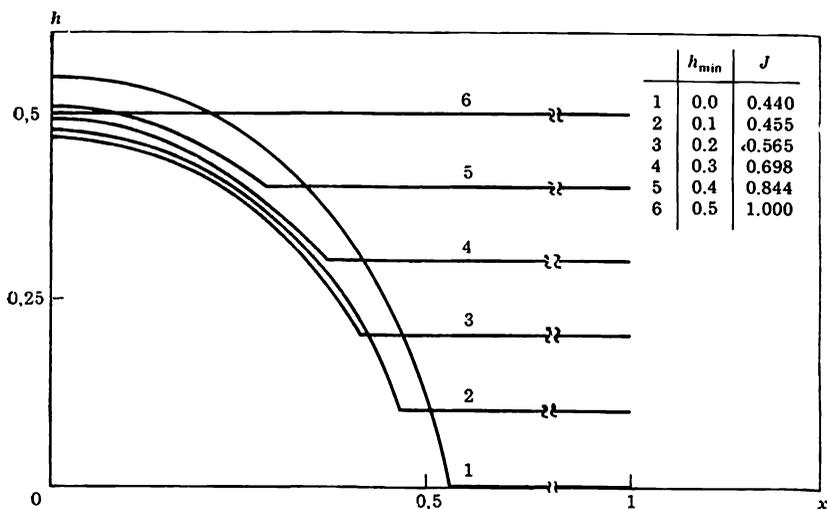


Рис. 4.7

На рис. 4.1 приведены результаты расчетов для случая, когда оптимизация осуществляется за счет рационального распределения жесткостных характеристик ($\gamma = 0$, $\delta = 1$). Для всех рассмотренных вариантов выбора значений параметров α и β (кривые с номерами 1—10) полагалось $h_{\max} = 0,75$, $h_{\min} = 0,25$. Видно, что наибольшего снижения веса конструкции можно достигнуть при больших значениях α .

Оптимальные распределения $h(x)$ при $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $h_{\max} = 0,75$, $h_{\min} = 0,25$ для различных значений параметров γ и δ показаны на рис. 4.2 кривыми 1—11. Оптимизация наиболее эффективна при небольших значениях δ .

Кривые с номером 1—6, показанные на рис. 4.3, соответствуют оптимальному распределению жесткостных характеристик конструкции при неизменных инерционных характеристиках ($\gamma = 1$, $\delta = 0,5$). Для сравнения на рис. 4.4 и 4.5 приведены результаты расчетов в задаче оптимизации инерционных характеристик. В первом случае (рис. 4.4) полагалось $\alpha = 1$, $\beta = 0,5$; во втором (рис. 4.5) —

$$\alpha = 0,4, \beta = 0,8.$$

Оптимальные распределения $h(x)$, построенные на рис. 4.6, отвечают постоянному значению $h_{\min} = 0,25$ и различным значениям параметра h_{\max} (кривые 1—9). Каждая кривая имеет участки, где реализуются режимы I—III для распределений $h(x)$. При расчетах полагалось $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,8$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$.

На рис. 4.7 приведены оптимальные распределения $h(x)$ для $h_{\max} = 0,75$ и различных значений параметра h_{\min} (кривые 1—6). При этом полагалось $\alpha = 1,6$, $\beta = 0,2$, $\gamma = 1$, $\delta = 0,5$.

4.3.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СТЕРЖНЕЙ

Проведенные в предыдущем разделе рассмотрения задачи о крутильных колебаниях стержня в значительной мере переносятся и на задачу оптимизации стержня, совершающего продольные колебания. Это объясняется близостью математических формулировок задач. Краевые задачи на собственные значения, описывающие оба типа колебаний, имеют одинаковую структуру и порядок уравнений и при соответствующей замене параметров переходят одна в другую. Так, если в соотношениях (2.1) — (2.2) заменить модуль сдвига G модулем упругости E , а полярный момент инерции I моментом инерции поперечного сечения, то получим краевую задачу для определения собственных частот и форм свободных продольных колебаний. Следует отметить также, что с точностью до обозначений вид оптимизируемых функционалов, основных ограничений и условий оптимальности для соответствующих задач оптимизации будет одним и тем же. Поэтому для решения задач оптимизации стержней, рассчитываемых на крутильные и продольные колебания, применяются одни и те же методы, а получаемые при этом решения преобразуются одно в другое при помощи простых преобразований.

Отметим, что задачи оптимизации стержней, совершающих продольные и крутильные колебания, относятся к числу классических и наиболее полно изученных проблем оптимального про-

ектирования. Впервые указанные задачи были рассмотрены в работах Тэрнера [232], Тейлора [227, 228], Эшли и Макинтоша [124]. Впоследствии данные задачи неоднократно становились предметом рассмотрений (см., например, [44—46, 106, 235, 237]). Наиболее полно вопросы оптимального проектирования стержней, совершающих продольные колебания, исследованы В. Б. Грипевым и А. П. Филипповым [44—46].

Приведенные в разд. 4.2 рассмотрения проводились в предположении, что проектируемый стержень обладает непрерывно изменяющимися характеристиками, т. е. является системой с распределенными параметрами. Однако на практике реализация оптимальных законов непрерывного изменения переменных проектирования часто оказывается затруднительной. Поэтому наряду с исследованием континуальных моделей, дающих проектировщику ценную информацию о качественных особенностях оптимального проекта, полезными являются рассмотрения на дискретных моделях с кусочно-постоянными или ступенчатыми распределениями массово-жесткостных характеристик. Такие исследования были начаты Тэрнером [232], использовавшим модель с конечным числом параметров проектирования.

Рассмотрим, следуя работе [222], задачу о продольных колебаниях стержня, разбитого на элементы. Для каждого из элементов жесткость считается постоянной. В точках с координатами x_r^* ($r = 1, 2, \dots, s$) на стержне расположены сосредоточенные массы m_r . Положение элементов задается координатами x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а их удельные (на единицу длины) массы определяются как $\alpha_i^2 + \beta_i^2 h_i$, где h_i — жесткость i -го элемента, а α_i и β_i — заданные константы. Общее количество элементов n и фундаментальная частота собственных колебаний ω_0 предполагаются заданными. Будем минимизировать вес такого стержня за счет выбора жесткостей его элементов. Пусть границы элементов считаются заданными. Обозначим через h_i и \hat{h}_i два набора параметров проектирования (два проекта) для одной и той же частоты собственных колебаний ω_0 . Через $u(x)$ и $\hat{u}(x)$ обозначим соответствующие формы колебаний. Из соотношения Рэлея имеем

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{\sum_i h_i \int e [u(x_i)] dx_i}{\sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 h_i) \int u^2(x_i) dx_i + \sum_r m_r u^2(x_r^*)} = \\ &= \frac{\sum_i \hat{h}_i \int e [\hat{u}(x_i)] dx_i}{\sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 \hat{h}_i) \int \hat{u}^2(x_i) dx_i + \sum_r m_r \hat{u}^2(x_r^*)}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $h_i e [u(x_i)]$ — удвоенная энергия деформации, приходящаяся на единицу длины стержня и обусловленная перемещением $u(x_i)$, интегралы в (3.1) берутся в пределах i -го элемента. Отметим,

что если i -й элемент имеет площадь поперечного сечения S_i , то $h_i e [u(x_i)] = ES_i [\partial u(x_i) / \partial x_i]^2$.

Поскольку поле перемещений $u(x)$ кинематически допустимо для параметров проектирования \widehat{h}_i , то из принципа Рэлея получаем

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{\sum_i \widehat{h}_i \int e [\widehat{u}(x_i)] dx_i}{\sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 \widehat{h}_i) \int \widehat{u}^2(x_i) dx_i + \sum_r m_r \widehat{u}^2(x_r^*)} \leq \\ &\leq \frac{\sum_i \widehat{h}_i \int e [u(x_i)] dx_i}{\sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 \widehat{h}_i) \int u^2(x_i) dx_i + \sum_r m_r u^2(x_r^*)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из соотношений (3.1), (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \sum_i h_i \int \{e [u(x_i)] - \beta_i^2 \omega_0^2 u^2(x_i)\} dx_i &= \\ &= \omega_0^2 \left\{ \sum_i \alpha_i^2 \int u^2(x_i) dx_i + \sum_r m_r u^2(x_r^*) \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \sum_i \widehat{h}_i \int \{e [u(x_i)] - \beta_i^2 \omega_0^2 u^2(x_i)\} dx_i &\geq \\ &\geq \omega_0^2 \left\{ \sum_i \alpha_i^2 \int u^2(x_i) dx_i + \sum_r m_r u^2(x_r^*) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Вычитая из неравенства (3.4) равенство (3.3), получим следующее неравенство:

$$\sum_i (\widehat{h}_i - h_i) \int \{e [u(x_i)] - \beta_i^2 \omega_0^2 u^2(x_i)\} dx_i \geq 0. \quad (3.5)$$

Разница масс двух рассматриваемых проектов с жесткостями \widehat{h}_i и h_i определяется формулой

$$\begin{aligned} \Delta J &= \sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 \widehat{h}_i) l_i - \sum_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 h_i) l_i = \\ &= \sum_i \beta_i^2 (\widehat{h}_i - h_i) l_i, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где l_i — длина i -го элемента. Если предположить, что выполнено следующее условие:

$$\frac{1}{\beta_i^2 l_i} \int \{e [u(x_i)] - \beta_i^2 \omega_0^2 u^2(x_i)\} dx_i = \lambda = \text{const}, \quad (3.7)$$

где $\lambda > 0$ не зависит от i , то неравенство (3.5) можно переписать в виде

$$\sum_i (\widehat{h}_i - h_i) \lambda \beta_i^2 l_i = \lambda \sum_i (\widehat{h}_i - h_i) \beta_i^2 l_i \geq 0.$$

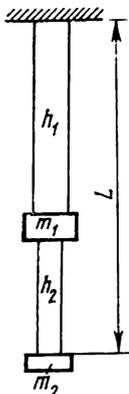


Рис. 4.8

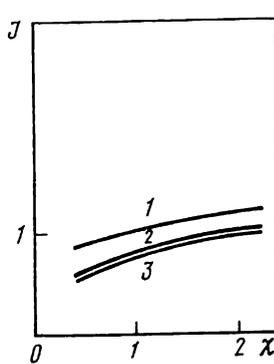


Рис. 4.9

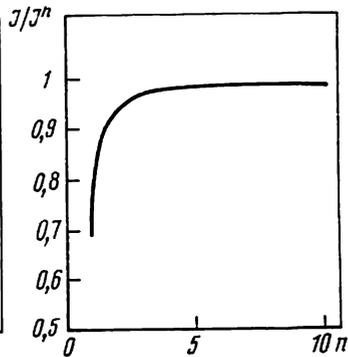


Рис. 4.10

Следовательно, условие (3.7) является достаточным условием для того, чтобы разница масс ΔJ была неотрицательной, т. е. оно является достаточным условием оптимальности. Можно показать, что оно является также и необходимым, проведя рассуждения, аналогичные описанным в работе [223]. Если в формуле (3.7) устремить l_i к нулю, то приходим к условию оптимальности, полученному Прагером и Тэйлором [214] для стержня с непрерывно изменяющейся жесткостью.

В работе [225] сравниваются результаты, полученные для систем с непрерывным и кусочно-постоянным распределением переменных проектирования. Стержень с кусочно-постоянным распределением переменной проектирования разбит на два элемента с массами h_1 и h_2 , к которым прикреплены сосредоточенные массы заданной величины m_1 и m_2 (рис. 4.8). Хорошее соответствие этих результатов, а также эффективность оптимизации подтверждается зависимостями, показанными на рис. 4.9. Кривая 1 соответствует изменению полной массы J неоптимизированной системы ($h_1 = h_2$) при изменении параметра $\chi = m_2/m_1$ и заданных длинах элементов $l_1 = l_2 = L/2$, где L — общая длина стержня. Кривые 2 и 3 показывают, как зависит от χ соответственно полная масса оптимального кусочно-однородного стержня и стержня с непрерывно изменяющимися массами элементов. Значение частотного параметра полагалось равным $\omega_0 L = 1$. Из рис. 4.9 видно, что оптимальный кусочно-однородный стержень хорошо аппроксимирует поведение стержня с непрерывно изменяющимися характеристиками и что в обоих случаях можно добиться значительного снижения веса по сравнению с полностью однородным стержнем.

Вопросы сходимости кусочно-однородного решения задачи о продольных колебаниях к непрерывному последовались в [143—145]. На рис. 4.10 приведена зависимость отношения J/J^n , где J — полная масса оптимальной непрерывной модели, а J^n — полная масса оптимальной n -элементной кусочно-однородной модели

одномерной упругой конструкции от числа n . В [144] показывается, что если частотный коэффициент $\omega_0 L$, то минимальное число n элементов кусочно-однородной конструкции минимального веса должно удовлетворять условию $n > 2\omega_0 L/\pi$.

4.4.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК ПРИ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

Методы решения оптимизационных задач для стержней, совершающих продольные или крутильные колебания, описанные в предыдущих разделах, могут быть применены и в случае проектирования балок при свободных поперечных колебаниях.

Рассмотрим шарнирно опертую с обоих концов балку с переменной площадью поперечного сечения $h(x)$. Уравнение свободных поперечных колебаний упругой балки и соответствующие шарнирному опиранию граничные условия записываются в виде

$$\frac{d}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho h u = 0, \quad (4.1)$$

$$u(0) = (EI d^2 u / dx^2)_{x=0} = 0, \quad u(l) = (EI d^2 u / dx^2)_{x=l} = 0, \quad (4.2)$$

где $u = u(x)$; $x \in [0, l]$ — форма поперечных колебаний; l — длина балки; ω — собственная частота; E — модуль Юнга; $I(x) = A_\alpha h^\alpha(x)$ — момент инерции поперечного сечения; A_α и α — константы, характеризующие форму поперечного сечения; ρ — плотность материала балки.

Будем предполагать, что объем V материала балки задан, т. е.

$$V = \int_0^l h(x) dx = \text{const}. \quad (4.3)$$

В безразмерных переменных $x' = x/l$, $u' = u/l$, $(\omega')^2 = \omega^2 E A_\alpha V^{\alpha-1} / \rho l^{\alpha+3}$, $h'(x) = h(x)l/V$ уравнение (4.1) и граничные условия (4.2) перепишутся в виде (штрихи опускаем)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^\alpha \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \omega^2 h u = 0, \quad (4.4)$$

$$u(0) = m(0) = 0, \quad u(1) = m(1) = 0, \quad (4.5)$$

где $m(0)$ и $m(1)$ — граничные условия изгибающего момента:

$$m(x) = h^\alpha(x) d^2 u / dx^2.$$

Задача оптимизации заключается в определении переменной проектирования $h(x)$, удовлетворяющей изопериметрическому условию постоянства объема

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 \quad (4.6)$$

и максимизирующей первое собственное значение краевой задачи (4.4), (4.5)

$$\omega^2 = \frac{\int_0^1 h^\alpha(x)(d^2u/dx^2)^2 dx}{\int_0^1 h(x) u^2 dx}. \quad (4.7)$$

Задача оптимизации (4.4) — (4.7) впервые рассматривалась Нпордсоном в работе [193], где было получено необходимое условие оптимальности, исследовано асимптотическое поведение функций $u(x)$ и $h(x)$ вблизи концов балки и построено численное решение задачи с помощью итерационной процедуры. Для оптимальной балки с круговым поперечным сечением (рис. 4.11)

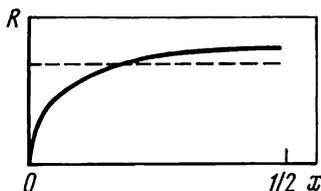


Рис. 4.11

($\alpha = 2$) показана зависимость радиуса сечения $R = \sqrt{h/\pi}$ от переменной x , причем в силу симметрии задачи рассматривается только половина балки, $0 \leq x \leq 1/2$. Пунктиром на этом рисунке показано постоянное распределение $R(x)$, которое отвечает балке того же объема.

Приведем теперь предложенный А. А. Барсуком приближенный аналитический способ решения задачи (4.4) — (4.7).

Используя соотношение Рэлея (4.7) для представления первого собственного значения задачи (4.4), (4.5) и учитывая изопериметрическое условие (4.6), составим расширенный функционал Лагранжа

$$J_L = \omega^2 - \lambda \left(\int_0^1 h dx - 1 \right). \quad (4.8)$$

Здесь λ — множитель Лагранжа. Необходимое условие оптимальности запишем в виде

$$\alpha h^{\alpha-1} \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)^2 - \omega^2 u^2 = \lambda \int_0^1 h u^2 dx. \quad (4.9)$$

Домножение обеих частей равенства (4.9) на функцию $h(x)$ и последующее применение операции интегрирования позволяет с учетом условия (4.6) получить значение множителя Лагранжа

$$\lambda = (\alpha - 1) \omega^2.$$

Далее условие оптимальности (4.9) преобразуется к виду

$$\alpha h^{\alpha-1} (d^2u/dx^2)^2 = \omega^2 [\alpha - 1 + u^2]. \quad (4.10)$$

Здесь предполагается, что собственные функции нормированы следующим образом:

$$\int_0^1 hu^2 dx = 1. \quad (4.11)$$

Используя выражение для изгибающего момента $m(x)$, представим необходимое условие оптимальности (4.10) в форме

$$m^2(x) = \frac{\omega^2}{\alpha} (\alpha - 1 + u^2(x)) h^{\alpha+1}(x). \quad (4.12)$$

Поскольку функция $m(x)$ обращается в нуль в точках $x=0$ и $x=1$ для шарнирно опертой балки, то и оптимальное распределение $h(x)$ также принимает в этих точках нулевые значения.

Исследуем асимптотическое поведение оптимального решения вблизи точки $x=0$. С этой целью запишем уравнение колебания (4.4) в виде

$$d^2m/dx^2 - \omega^2 hu = 0. \quad (4.13)$$

Пропинтегрировав дважды левую часть уравнения (4.13) с учетом граничных условий (4.5), получим

$$m(x) = \int_0^x dy \int_0^y h(\xi) u(\xi) d\xi + C_1 x. \quad (4.14)$$

Поскольку $h(0)=0$ и $u(0)=0$, то первое слагаемое в правой части (4.14) имеет более высокий порядок малости по сравнению со вторым слагаемым. Следовательно, вблизи точки $x=0$

$$m(x) \approx C_1 x, \quad x \ll 1. \quad (4.15)$$

Из условия оптимальности (4.12) с учетом (4.15) приходим к формуле, определяющей асимптотическое поведение распределения площади поперечного сечения вблизи опертого края балки:

$$h(x) \approx C_2 x^{2/(\alpha+1)}, \quad x \ll 1. \quad (4.16)$$

Аналогичным образом функции $m(x)$ и $h(x)$ ведут себя вблизи правого конца ($x=1$) оптимальной балки. Отметим, что линейный характер поведения изгибающего момента в окрестностях концевых точек в условиях шарнирного опирания будет иметь место и в случае, если функция $h(x)$ принимает в этих точках произвольное конечное значение. Это замечание относится к оптимальной задаче с ограничениями на минимальные допустимые значения переменной проектирования $h(x)$, что выходит за рамки рассматриваемой постановки задачи.

На основе необходимого условия оптимальности (4.12) можно построить итерационную процедуру определения оптималь-

ного решения следующим образом:

$$h_{n+1}(x) = \gamma \left[\frac{m_n^2(x)}{\alpha - 1 + u_n^2(x)} \right]^{1/(\alpha+1)} \quad (4.17)$$

Здесь n — номер итерации. Множитель γ определяется на каждом шаге итерационного процесса с помощью изопериметрического условия (4.6).

Выберем в качестве начального приближения $h_0(x) \equiv 1$. Для балки с постоянным распределением площадей поперечных сечений форма колебаний $u_0(x)$ при условии нормировки (4.11) и рассматриваемых граничных условиях запишется следующим образом:

$$u_0(x) = \sqrt{2} \cdot \sin \pi x, \quad (4.18)$$

а первое собственное значение будет равно $\omega^2 = \pi^4$. Распределение $h_1(x)$, вычисленное по формуле (4.17), будет иметь вид

$$h_1(x) = \gamma \sqrt[3]{\frac{\sin^2 \pi x}{1 + 2 \sin^2 \pi x}} \quad \text{при } \alpha = 2, \quad (4.19)$$

$$h_1(x) = \gamma_1 \sqrt[4]{\frac{\sin^2 \pi x}{1 + \sin^2 \pi x}} \quad \text{при } \alpha = 3. \quad (4.20)$$

Заметим, что уже на первом шаге итерационной процедуры для распределений (4.19) и (4.20) выполняются установленные выше асимптотические свойства. Распределению (4.19) отвечает значение $\omega^2 = 110,498$, а распределению (4.20) — $\omega^2 = 122,198$. На второй итерации вычисленные собственные значения оказались равны соответственно $\omega^2 = 110,656$ ($\alpha = 2$) и $\omega^2 = 122,344$ ($\alpha = 3$). Расчеты проводились с удвоенной точностью. Численное определение собственных значений осуществлялось с помощью метода последовательных приближений [61], и при этом существенно использовалась информация о характере асимптотического поведения функции $h(x)$.

Отметим хорошее совпадение значений оптимальных частот, вычисленных уже на второй итерации, и результатов, полученных в работе [193], где для случая $\alpha = 2$ оптимальное собственное значение $\omega^2 = 110,658$.

Вопросы оптимального проектирования балок, совершающих свободные поперечные колебания, так же как и задачи оптимизации стержней, совершающих продольные и крутильные колебания, до недавнего времени привлекали внимание широкого круга исследователей и обсуждались во многих работах. Различные типы краевых условий и виды ограничений, накладываемых на перемещения проектирования в задачах оптимизации форм колеблющихся балок, были рассмотрены в работах [46, 106, 138, 176, 177, 195, 227, 228, 232].

Как уже отмечалось в гл. 2, помимо задач проектирования, в которых максимизируется фундаментальная частота собствен-

ных колебаний или на эту частоту накладываются ограничения, возможны и другие постановки задач оптимизации. В случае оптимизации высших собственных частот поперечных колебаний балок [196, 197, 238] при выводе необходимых условий оптимальности может быть использован обобщенный принцип Рэлея, где предполагается ортогональность функций $u(x)$, среди которых разыскивается n -я форма свободных колебаний, ко всем пизшим собственным функциям $u^1(x), \dots, u^{n-1}(x)$ (верхний индекс обозначает номер формы колебаний). В работах [196, 197] показывается, что при максимизации n -й собственной частоты колеблющейся балки все пизшие частоты обращаются в нуль и оптимальный проект содержит точки, в которых переменная проектирования $h(x)$ (например, площадь поперечного сечения) обращается в нуль. Поэтому для сохранения целостности конструкции необходимо ограничивать функцию $h(x)$ снизу. Задачи оптимизации с учетом такого рода ограничений подробно исследовались в [197]. Там же приведены результаты расчетов профилей оптимальных балок, выполненных с помощью метода последовательных приближений.

Рассмотрим теперь на основе конечноэлементного подхода [174] задачу максимизации основной частоты поперечных колебаний балки при заданном объеме. Матричное уравнение, описывающее поведение конечноэлементной модели балки, т. е. конструкции, состоящей из некоторого числа элементов, с учетом заданных граничных условий можно записать в форме

$$(C - \omega^2 M) \mathbf{u} = 0, \quad (4.21)$$

где ω — фундаментальная частота свободных поперечных колебаний; C — глобальная невырожденная матрица жесткости конструкции; M — глобальная матрица масс конструкции; \mathbf{u} — собственный вектор. Обозначим через Π_i и T_i энергию деформации и кинетическую энергию i -го элемента, через V_i , h_i и l_i — соответственно объем, площадь поперечного сечения и длину этого элемента ($V_i = h_i l_i$). Пусть общее количество элементов рассматриваемой модели равно N . Тогда для плотностей энергии деформации и кинетической энергии каждого элемента справедливы соотношения

$$\frac{\Pi_i}{V_i} = \frac{1}{2} \frac{(u_i, C_i u_i)}{h_i l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\frac{T_i}{V_i} = \frac{1}{2} \frac{(u_i, M_i u_i)}{h_i l_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где u_i — форма собственных колебаний i -го элемента; C_i , M_i — матрицы жесткости и масс этого элемента. Условие оптимальности для каждого элемента может быть представлено в виде

$$\alpha(\Pi_i/V_i) - T_i/V_i = \kappa, \quad (4.22)$$

где κ — константа (множитель Лагранжа), а значение постоянной α определяется формой поперечного сечения. Формулу (4.22) можно переписать как

$$\frac{\alpha (\Pi_i/V_i)}{\kappa + T_i/V_i} = 1 \quad \text{при } \kappa > 0,$$

$$\frac{\alpha (\Pi_i/V_i) - \kappa}{T_i/V_i} = 1 \quad \text{при } \kappa < 0.$$

Решение задачи может быть построено итерационным способом. Если известны значения моментов инерции I_i^r всех элементов на r -м шаге алгоритма, то для $(r+1)$ -й итерации величины I_i^{r+1} можно вычислить по формулам [174]

$$I_i^{r+1} = \beta^{r+1} I_i^r \left[\frac{\alpha (\Pi_i^r/V_i^r)}{\kappa^r + T_i^r/V_i^r} \right]^p \quad \text{при } \kappa^r > 0,$$

$$I_i^{r+1} = \beta^{r+1} I_i^r \left[\frac{\alpha (\Pi_i^r/V_i^r)}{T_i^r/V_i^r} \right]^p \quad \text{при } \kappa^r < 0,$$
(4.23)

где верхний индекс r указывает номер итерации, p — положительное число, а константа β^{r+1} определяется из условия постоянства полного объема

$$V = \sum_{i=1}^N V_i^r = \text{const.}$$

Можно показать [174], что если величины, заключенные в квадратные скобки в формулах (4.23), отличны от единицы, то найдется такое число $p > 0$, для которого $(\omega^{r+1})^2 \geq (\omega^r)^2$. Если в процессе выполнения алгоритма окажется, что $(\omega^{r+1})^2 < (\omega^r)^2$, то число p необходимо уменьшить. Предложенный алгоритм гарантирует монотонную сходимость к максимальному значению первой собственной частоты. В качестве начального приближения рассматривается постоянное распределение площадей поперечных сечений, соответствующее балке, объем которой равен V . Вычисления производятся до тех пор, пока необходимые условия оптимальности не будут выполнены с достаточной степенью точности.

Если предположить, что на переменные проектирования наложено ограничение снизу, т. е. $I_i \geq I_0$, $i = 1, 2, \dots, N$, где I_0 — заданная константа, то описанная выше итерационная процедура останется без изменений до тех пор, пока не будет для какого-либо элемента нарушено заданное ограничение. Для всех j элементов, где нарушается ограничение, полагается $I_s^{r+1} = I_0$, $s = 1, 2, \dots, j$, а для оставшихся $(N-j)$ элементов итерационный процесс продолжается с учетом условия постоянства объема $(V - \bar{V})$, где

$$\bar{V} = \sum_{s=1}^j V_s.$$

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК, СОВЕРШАЮЩИХ ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В приложениях довольно часто возникают задачи оптимального проектирования тонкостенных стержневых конструкций, в поперечных сечениях которых не совпадают центры жесткости и тяжести. Изгибно-крутильные колебания таких конструкций описываются системой связанных уравнений. В качестве примера рассмотрим балочную модель крыла большого удлинения с переменной толщиной обшивки $h(x)$. Упругую ось предполагаем прямой линией, а линия центров тяжести поперечных сечений смещена относительно упругой оси на расстояние x_α . Уравнения и граничные условия связанных изгибно-крутильных свободных колебаний балки, жестко заделанной в точке $x=0$ и со свободным правым концом ($x=l$), запишутся в виде [116]

$$C_1 \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - m \omega_0^2 u \right] + m C_2 x_\alpha \omega_0^2 \theta = 0, \quad (5.1)$$

$$- C_1 \omega_0^2 m x_\alpha u + C_2 \left[\frac{d}{dx} \left(GI_p \frac{d\theta}{dx} \right) + I_\alpha \omega_0^2 \theta \right] = 0, \quad (5.2)$$

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=l} =$$

$$= \left[\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right]_{x=l} = 0, \quad (5.3)$$

$$\theta(0) = 0, \quad \left(GI_p \frac{d\theta}{dx} \right)_{x=l} = 0, \quad (5.4)$$

где ω_0 — основная частота собственных колебаний; $u(x)$, $\theta(x)$, $I(x)$, $I_p(x)$, $I_\alpha(x)$, $m(x)$ — амплитудные функции прогибов и углов закрутки, распределения моментов инерции, полярных моментов инерции, массовых моментов инерции и масс поперечных сечений; C_1 и C_2 — подлежащие определению константы; E и G — модули упругости и сдвига. Для одноконтурных тонкостенных конструкций зависимости изгибного и полярного моментов инерции от толщин $h(x)$ линейны и отличаются друг от друга только постоянным множителем. Учитывая это и проводя обезразмеривание с сохранением обозначений для рассматриваемых величин, запишем соотношения задачи (5.1)–(5.4) следующим образом:

$$\alpha \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \omega_0^2 k_1 h u \right] + \beta \omega_0^2 k_2 h \theta = 0, \quad (5.5)$$

$$- \alpha \omega_0^2 h k_3 u + \beta \left[\frac{d}{dx} \left(h \frac{d\theta}{dx} \right) + \omega_0^2 h \theta \right] = 0, \quad (5.6)$$

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=1} = 0, \quad \left[\frac{d}{dx} \left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \right]_{x=1} = 0, \quad (5.7)$$

$$\theta(0) = 0, \quad \left(h \frac{d\theta}{dx} \right)_{x=1} = 0. \quad (5.8)$$

Здесь α, β — безразмерные коэффициенты; k_1, k_2, k_3 — заданные безразмерные константы.

Для определения низших собственных значений в задаче (5.5) — (5.8) об изгибно-крутильных колебаниях можно воспользоваться выражением [116], полученным с использованием соотношений (5.5) — (5.8):

$$\omega_0^2 = (Q \mp \sqrt{Q^2 - 4PR}) / (2P), \quad (5.9)$$

г. е.

$$(\omega_0^2)_1 = \frac{Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, \quad (\omega_0^2)_2 = \frac{Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P}, \quad (5.10)$$

где $Q = \gamma_{22}\delta_{11} - \gamma_{11}\delta_{22}$; $P = \delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}$; $R = -\gamma_{11}\gamma_{22}$;

$$\gamma_{11} = \int_0^1 h(u_{xx})^2 dx; \quad \delta_{11} = \int_0^1 k_1 h u^2 dx; \quad \gamma_{22} = \int_0^1 h(\theta^x)^2 dx;$$

$$\delta_{12} = \int_0^1 k_2 h u \theta dx; \quad \delta_{21} = \int_0^1 k_3 h u \theta dx; \quad \delta_{22} = \int_0^1 h \theta^2 dx.$$

Известно [47, 48], что одно из собственных значений, определяемых формулами (5.10), несколько меньше квадрата частоты чисто изгибных колебаний балки, а второе — несколько больше квадрата частоты чисто крутильных колебаний.

Сформулируем задачу оптимизации¹. Необходимо отыскать такое распределение переменной проектирования $h(x)$, удовлетворяющей ограничению

$$h(x) \geq h_{\min}, \quad (5.11)$$

где h_{\min} — заданная константа, которое доставляет максимальное значение функционалу квадрата основной частоты свободных колебаний

$$J_1 = (\omega_0^2)_1 = \frac{Q - \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \quad (5.12)$$

при постоянном объеме материала балки

$$\int_0^1 h(x) dx = 1 \quad (5.13)$$

и дополнительном условии

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{h(x)} dx \leq \kappa. \quad (5.14)$$

¹Ниже использованы результаты диссертационной работы И. И. Коандэ.

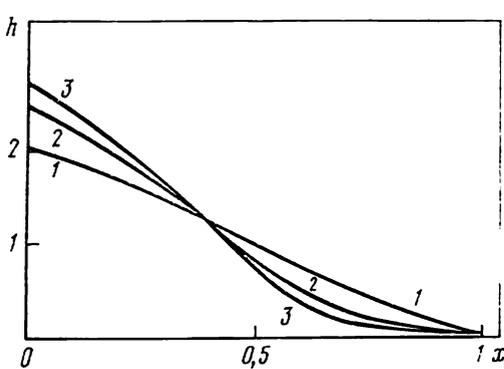


Рис. 4.12

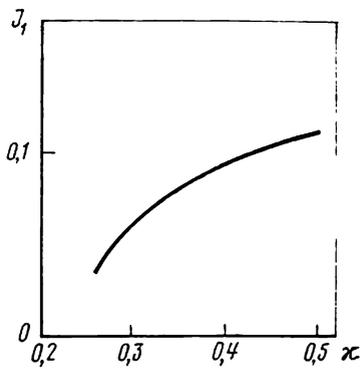


Рис. 4.13

Неравенство (5.14) накладывает ограничение на перемещение свободного конца балки под действием заданной сосредоточенной силы, приложенной в точке $x=1$, т. е. это перемещение не должно превышать заданной величины κ .

Для построения оптимального распределения $h(x)$, максимизирующего функционал J_1 , применялся численный метод последовательной оптимизации, в основе которого лежал алгоритм проектирования градиентов. На каждом шаге алгоритма при заданном распределении $h(x)$ с помощью метода последовательных приближений решались задачи (5.5)–(5.8) и определялись формы и частоты свободных изгибно-крутильных колебаний. При этом в качестве начального приближения на первом шаге алгоритма оптимизации брались формы и частоты несвязанных топов колебаний, а на последующих шагах в качестве начального приближения использовались решения, полученные на предыдущем шаге. На каждом этапе последовательной оптимизации согласно методу проектирования градиентов определялись улучшающие поправки к распределению $h(x)$, после чего осуществлялся переход к следующей итерации.

На рис. 4.12 кривыми 1–3 показаны полученные в результате расчетов оптимальные распределения $h(x)$, соответствующие значениям параметра $\kappa = 0,35, 0,4, 0,5$. В расчетах полагались $k_1 = 9,50, k_2 = 0,1425, k_3 = 0,125, h_{\min} = 0,05$. Значения коэффициентов α и β определялись из условий нормировки собственных функций $u(x)$ и $\theta(x)$. Из рис. 4.1 видно, что с возрастанием значения κ наиболее эффективно оказывается размещать материал у закрепленного конца балки, облегчая ее свободный конец. Следует отметить также, что решение оптимизационной задачи (5.5)–(5.8), (5.11)–(5.14) существует только при значениях $\kappa \geq 0,25$.

Изображенная на рис. 4.13 зависимость величины J_1 от параметра κ показывает, что при увеличении κ основная частота изгибно-крутильных колебаний оптимальной балки также увеличивается. Отметим, что проведенные расчеты позволяют сле-

лать вывод о том, что оптимальные фундаментальные частоты совместных колебаний слабо зависят от расстояния x_α между линиями центров тяжести и жесткости поперечных сечений. Отметим также, что формы совместных колебаний, отвечающие при различных значениях параметров κ и κ_α собственным значениям $(\omega_0)_1^2$, близки по виду к формам чисто изгибных колебаний.

4.6.

УЧЕТ ПОПРАВОК НА СДВИГ И ВРАЩЕНИЕ

В предыдущих разделах рассматривались задачи оптимизации балок, совершающих крутильные, продольные, изгибные и изгибно-крутильные свободные колебания. При этом во всех случаях предполагалось, что размеры поперечных сечений балки малы по сравнению с ее длиной. Такое предположение позволяло воспользоваться балочной моделью Бернулли — Эйлера, в которой не учитываются влияние сдвига и инерция вращения. В случае, если размеры поперечных сечений сравнимы с длиной балки, необходимо применять уточненную балочную теорию Тимошенко, где введены предположения [35, 102]: поперечные сечения остаются плоскими, но они не перпендикулярны деформированной оси балки; нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, равны нулю; учитываются инерционные составляющие, обусловленные поворотом сечений. Отметим, что эти уточнения полезно принимать во внимание при исследовании задач оптимизации высших собственных частот колебаний, когда балка разбивается на несколько более коротких отрезков.

Система линейных дифференциальных уравнений, описывающих свободные поперечные колебания балки с учетом деформации сдвига и инерции вращения, имеет вид [102, 208]

$$\frac{d}{dx} \left[EI \frac{d\theta}{dx} \right] + kGh \left(\frac{du}{dx} - \theta \right) + \omega^2 \rho I \theta = 0, \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left[kGh \left(\frac{du}{dx} - \theta \right) \right] + \omega^2 \rho hu = 0. \quad (6.2)$$

Здесь $u(x)$, $\theta(x)$ — амплитудные функции прогибов и углов наклона деформированной оси балки (без учета поперечных сил); ω — собственная частота; $h(x)$ — площадь поперечного сечения; ρ — плотность материала; E , G — модули упругости и сдвига; I — момент инерции поперечного сечения; k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения. Обозначим через l заданную длину балки, а через V — объем балки постоянного поперечного сечения, фундаментальная частота свободных колебаний которой равна ω . Учитывая, что $I(x) = A_\alpha h^\alpha$, где A_α , α — константы, зависящие от формы поперечного сечения, и вводя безразмерные переменные и обозначения $x' = x/l$, $u' = u/l$, $h' = h/l$, $(\omega')^2 = \omega^2 \rho l^{\alpha+3} / (EA_\alpha V^{\alpha-1})$, $\gamma^2 = E / (kG)$, $\eta = A_\alpha V^{\alpha-1} / l^{\alpha+1}$, перепишем уравнения (6.1), (6.2) в безразмерной форме

(штрихи опускаем):

$$\frac{d}{dx} \left[h^\alpha \frac{d\theta}{dx} \right] + \frac{h}{\eta\gamma^2} \left(\frac{du}{dx} - \theta \right) + \eta\omega^2 h^\alpha \theta = 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{h}{\eta\gamma^2} \left(\frac{du}{dx} - \theta \right) \right] + \omega^2 h u = 0. \quad (6.4)$$

Будем рассматривать прямую балку, жестко заделанную на левом конце ($x=0$). На свободном правом конце ($x=1$) балка несет сосредоточенную массу m . Граничные условия для уравнений (6.3), (6.4) в этом случае запишутся в виде

$$\begin{aligned} u(0) = \theta(0) &= 0, \\ \left(h^\alpha \frac{d\theta}{dx} \right)_{x=1} &= 0, \\ \left[\frac{h}{\eta\gamma^2} \left(\theta - \frac{du}{dx} \right) + \frac{\omega^2 m}{\rho V} u \right]_{x=1} &= 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Задача минимизации веса (объема) балки, совершающей свободные колебания, описываемые системой уравнений (6.3), (6.4) с граничными условиями (6.5), исследовалась в работе [208]. При этом рассматривались ограничения, накладываемые на одну или несколько собственных частот.

Введем новые переменные $\varphi = u$, $\psi = \theta$, $v = h^\alpha d\theta/dx$, $w = h(\theta - du/dx)/(\eta\gamma^2)$. С помощью введенной замены переменных система двух уравнений (6.3), (6.4) с граничными условиями (6.5) может быть записана в виде системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\varphi}{dx} = \psi - \frac{\eta\gamma^2}{h} w, \quad (6.6)$$

$$d\psi/dx = v/h^\alpha, \quad (6.7)$$

$$dv/dx = -\eta\omega^2 h^\alpha \psi + w, \quad (6.8)$$

$$dw/dx = \omega^2 h \varphi \quad (6.9)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad (6.10)$$

$$v(1) = 0, \quad w(1) + \omega^2 \frac{m}{\rho V} \varphi(1) = 0.$$

Первый член в правой части уравнения (6.8) обусловлен влиянием инерции вращения, а появление второго члена в правой части уравнения (6.6) связано с учетом деформации сдвига.

Задача оптимизации заключается в определении такого распределения переменной проектирования $h(x)$, которое минимизирует функционал

$$J = \int_0^1 h(x) dx \quad (6.11)$$

при заданном значении фундаментальной собственной частоты ω .

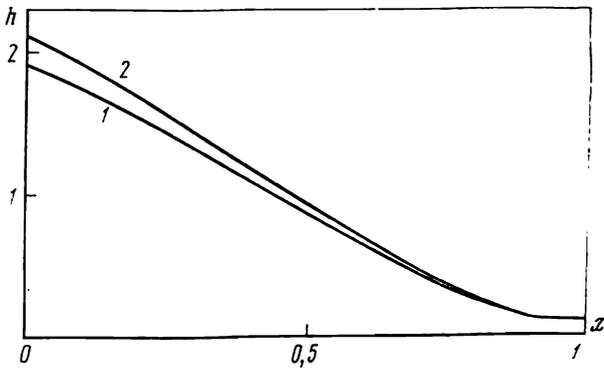


Рис. 4.14

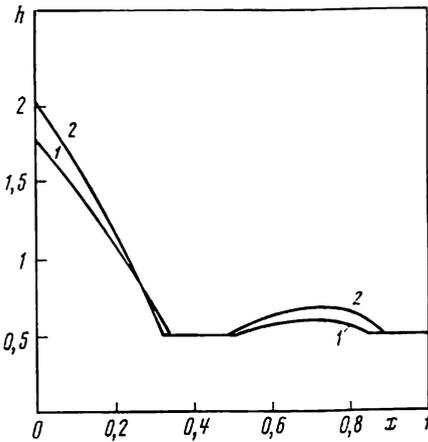


Рис. 4.15

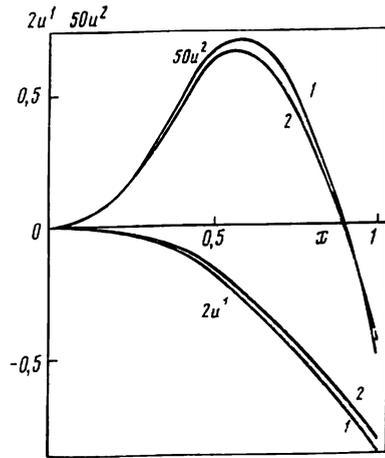


Рис. 4.16

Будем предполагать, что на функцию $h(x)$ наложено ограничение

$$0 < h_{\min} \leq h(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6.12)$$

Сформулированная задача оптимизации была решена Пирсоном [208] численно с помощью метода проектирования градиентов. Учет ограничения (6.12) осуществлялся при помощи введения вспомогательной переменной проектирования

$$h(x) = h_{\min} + 1/2 h^2(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (6.13)$$

На рис. 4.14 кривыми 1 и 2 изображены оптимальные распределения поперечных сечений балки. Кривая 1 соответствует модели Бернулли — Эйлера (без учета инерции вращения и сдвига, $\eta = \gamma^2 = 0$), а кривая 2 — модели Тимошенко ($\eta = 10^{-2}$, $\gamma^2 = 1$).

В расчетах полагалось $\omega^2 = 50$, $h_{\min} = 0,1$. Отношение минимального значения функционала объема J к значению объема балки с постоянным поперечным сечением при той же фундаментальной собственной частоте составило 0,90552 для балочной модели Бернулли — Эйлера и 0,97642 — для балки Тимошенко, что на 7,8 % выше, чем в первом случае. Расчеты показали, что влиянием деформации сдвига и инерции вращения можно пренебречь, если параметр $\eta < 10^{-3}$, однако при больших значениях η в уравнениях (6.6) — (6.9) необходимо учесть соответствующие члены, причем влияние деформации сдвига оказывается более существенным, чем влияние инерции вращения.

В работе [208] была также рассмотрена задача минимизации объема балки при заданных значениях первой и второй собственных частот $\omega_1^2 = 8,80806$ и $\omega_2^2 = 374,647$ соответственно.

Рассматривалась балка с подобными поперечными сечениями ($\alpha = 2$) при значениях параметров $h_{\min} = 0,5$, $m/(\rho V) = 0,1$. Для модели Бернулли — Эйлера ($\eta = 0$, $\gamma^2 = 0$) выигрыш от оптимизации по сравнению с балкой постоянного поперечного сечения при тех же значениях ω_1 и ω_2 составил 24,9 %, а для модели Тимошенко ($\eta = 0,16 \cdot 10^{-2}$, $\gamma^2 = 2,4$) — 18,6 %. На рис. 4.15 показаны оптимальные распределения функции $h(x)$ для случаев, когда не учитывалось влияние сдвига и инерции вращения (кривая 1) и когда принимались во внимание соответствующие поправки (кривая 2). Формы собственных поперечных колебаний $u^1(x)$ и $u^2(x)$, соответствующие частотам ω_1 и ω_2 , для двух рассмотренных моделей балки приведены на рис. 4.16. Номером 1 обозначены собственные функции $u^1(x)$ и $u^2(x)$ для балочной модели Бернулли — Эйлера, номером 2 — для модели Тимошенко.

Отметим, что вопросы оптимизации балок при учете поправок на сдвиг и инерцию вращения рассматривались также в [46, 173].

4.7.

МНОГОЦЕЛЕВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ СТЕРЖНЕЙ

Пусть прямолинейный упругий стержень длиной l расположен вдоль оси x и жестко зашпемлен в точке $x = 0$ (консольное закрепление). В процессе эксплуатации стержень может раздельно совершать либо изгибные, либо крутильные колебания, а также находиться в состоянии статического изгиба под действием силы P , прикладываемой к незакрепленному концу стержня.

Собственные частоты изгибных и крутильных колебаний и соответствующие амплитудные функции определяются из решения краевых задач на собственные значения

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{4\pi\rho}{E} \omega_0^2 h w = 0, \quad (7.1)$$

$$w(0) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l} = \frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l} = 0, \quad (7.2)$$

$$\frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{d\varphi}{dx} \right) + \frac{\rho}{G} \omega_i^2 h^2 \varphi = 0, \quad (7.3)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \left(h^2 \frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=l} = 0. \quad (7.4)$$

Предполагается, что стержень имеет круглые поперечные сечения, и поэтому для момента инерции поперечного сечения и полярного момента инерции сечения используются следующие представления: $I = h^2/4\pi$, $I_p = h^2/2\pi$. Функция $h(x)$, описывающая распределение площадей поперечных сечений (толщин) стержня, принимается в рассматриваемой ниже задаче проектирования в качестве искомой управляющей функции. На искомое распределение толщин наложено условие постоянства объема (веса) стержня

$$\int_0^l h(x) dx = V, \quad (7.5)$$

где V — заданная константа. Кроме того, для обеспечения необходимой статической жесткости стержня требуется, чтобы при приложении к незакрепленному концу стержня сосредоточенной силы P величина прогиба в точке $x=l$ не превышала заданного значения w_0 . Это приводит ко второму интегральному ограничению, накладываемому на допустимые распределения площадей сечений:

$$\frac{4\pi\rho}{E} \int_0^l \frac{P(l-x)^2}{h^2} dx = w_0. \quad (7.6)$$

Допустимым распределениям $h(x)$, удовлетворяющим ограничениям (7.5), (7.6), соответствуют в силу краевых задач (7.1), (7.2) и (7.3), (7.4) некоторые значения частот ω_b , ω_i основного тона колебаний. Минимальная из величин квадратов фундаментальных частот принимается в качестве функционала, т. е.

$$J = \min \{ \omega_b^2, \omega_i^2 \}. \quad (7.7)$$

Рассматриваемая в данном разделе задача оптимизации [3] заключается в отыскании распределения $h(x)$, удовлетворяющего условиям (7.5), (7.6), и такого, что реализуется максимум функционала (7.7), т. е. достигается максимум минимальной из рассматриваемых квадратов частот

$$J_* = \max_h J = \max_h \min \{ \omega_b^2, \omega_i^2 \}. \quad (7.8)$$

Для удобства проведения расчетов и анализа результатов запишем исходные соотношения в безразмерных переменных

$$x' = x/l, \quad h' = lh/V, \quad w'_0 = EV^2 w_0 / 4\pi\rho l^5,$$

$$\mu = EV/4\pi G l^3, \quad (\omega'_b)^2 = 4\pi\rho l^6 \omega_b^2 / EV, \quad (\omega'_t)^2 = \rho l^2 \omega_t^2 / G.$$

Соотношения задачи (7.1)–(7.7) примут вид (штрихи опускаются)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \omega_b^2 w = 0, \quad (7.9)$$

$$w(0) = \left(\frac{dw}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad \left(h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=1} = 0, \quad (7.10)$$

$$\frac{d}{dx} \left(h^2 \frac{d\varphi}{dx} \right) + \omega_t^2 h^2 \varphi = 0, \quad (7.11)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \left(h^2 \frac{d\varphi}{dx} \right)_{x=1} = 0, \quad (7.12)$$

$$\int_0^1 h \, dx = 1, \quad (7.13)$$

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{h^2} \, dx \leq w_0, \quad (7.14)$$

$$J = \min \{ \mu \omega_b^2, \omega_t^2 \}. \quad (7.15)$$

Как видно из соотношений (7.9)–(7.15), сформулированная задача оптимизации является двухпараметрической с параметрами w_0 и μ .

В дальнейшем будем также пользоваться принципом Рэля и определять фундаментальные частоты изгибных и крутильных колебаний из условия минимума функционалов

$$\omega_b^2 = \min_w \frac{\int_0^1 h^2 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^1 h w^2 dx}, \quad (7.16)$$

$$\omega_t^2 = \min_\varphi \frac{\int_0^1 h^2 \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx}{\int_0^1 h^2 \varphi^2 dx}. \quad (7.17)$$

Минимум в (7.16) разыскивается на классе функций w , удовлетворяющих краевым условиям (7.10) при $x=0$. Минимизация в (7.17) проводится на классе функций φ , удовлетворяющих первому условию (7.12). Краевые условия (7.10) при $x=1$ и второе условие (7.12) естественны для функционалов (7.16), (7.17), и им не требуется удовлетворять заранее.

Согласно схеме [3], решение оптимизационной задачи (7.8) — (7.15) сводится к решению нескольких вспомогательных задач. Сначала для заданных w_0 рассчитывается вспомогательная задача (задача I) отыскания распределения $h(x)$ из условия максимума ω_b^2 при ограничениях (7.13), (7.14) и дифференциальных связях (7.9), (7.10). Для найденного распределения $h(x)$ из решения краевой задачи (7.11), (7.12) вычисляется значение ω_i^2 . Затем из неравенства

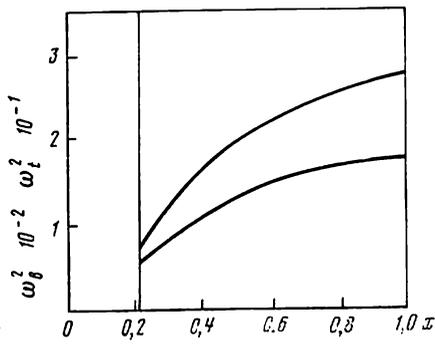
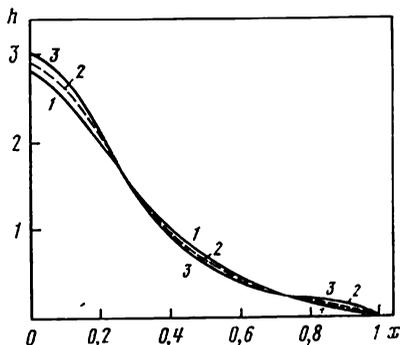
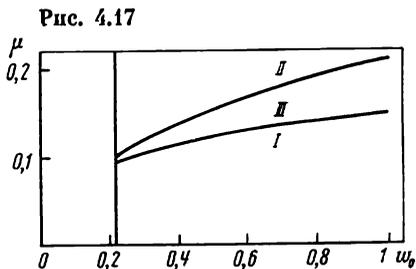
$$\mu \omega_b^2 \leq \omega_i^2$$

находятся значения параметра μ . Изменяя значения w_0 и решая для рассматриваемых значений задачу I, находим область изменения параметров w_0, μ (область I), для которых решение задачи I является решением исходной задачи оптимизации.

Далее рассчитывается вспомогательная задача (задача II) отыскания распределения $h(x)$, доставляющего максимум при ограничениях (7.13), (7.14) и дифференциальных связях (7.11), (7.12). Для полученного распределения $h(x)$ из решения краевой задачи (7.9), (7.10) подсчитывается ω_b^2 . Для найденных величин ω_i^2, ω_b^2 из неравенства

$$\mu \omega_b^2 \geq \omega_i^2$$

определяются значения μ . Варьируя значения w_0 и решая для рассматриваемых значений задачу II, определяем область



изменения параметров w_0 , μ (область II), для которых решение задачи II является решением исходной задачи.

Для рассматриваемых значений w_0 и μ , не принадлежащих областям I и II, исходная задача оптимизации сводится к задаче III максимизации величины ω_b^2 при дополнительном условии

$$\mu\omega_b^2 = \omega_i^2$$

и ограничениях (7.9) — (7.14). Найденное из решения задачи III распределение $h(x)$ для указанных w_0 , μ является оптимальным решением.

Для численного решения задач I—III в [3] использовался алгоритм последовательной оптимизации (см., например, [8, 9]), основанный на последовательном выполнении малых улучшающих вариаций распределений площадей поперечных сечений и на расчетах прямых задач (7.9) — (7.12), осуществляемых при фиксированных распределениях $h = h(x)$ итерационным методом [61].

На рис. 4.17 показаны найденные в результате расчетов области I—III. Заметим, что решение задачи оптимального проектирования существует при $w_0 \geq 0,216$. Для $w_0 < 0,216$ не существует допустимых функций $h(x)$ из (7.13), удовлетворяющих неравенству (7.14). Это обстоятельство легко объясняется. За счет конечного количества материала нельзя обеспечить сколь угодно малый прогиб.

Остальные распределения площадей поперечных сечений для значений $w_0 = 0,6$ и $\mu = 0,1; 0,15; 0,2$ показаны соответственно кривыми 1—3 (рис. 4.18). Эти распределения соответствуют значениям параметров из областей I—III. Для всех рассчитанных вариантов (разных w_0 и μ) толщины оптимального стержня максимальны у заземленного края и уменьшаются (стремятся к нулю) при приближении к незакрепленному концу.

Зависимости величин $\omega_b^2 \cdot 10^{-2}$ и $\omega_i^2 \cdot 10^{-1}$ от значений параметра w_0 показаны кривыми 1, 2 на рис. 4.19.

4.8.

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОЛОГИХ АРОК

В связи с различными приложениями в технике представляют значительный интерес вопросы оптимизации формы упругих криволинейных стержней. Ряд исследований [202, 203, 212] посвящен проблемам минимизации веса при заданных значениях частот основных тонов свободных колебаний и максимизации фундаментальных частот колебаний при ограничениях на вес. Наименее сложными в смысле отыскания оптимальных форм и полезными с методической точки зрения оказываются задачи проектирования пологих стержней.

Ниже, следуя в основном работам [203, 212], опишем построение оптимальных форм для пологих арок.

Рассмотрим сначала свободные колебания пологой упругой арки (рис. 4.20) постоянного поперечного сечения, шарнирно закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$. Арка предполагается плоской, и положение ее срединной линии описывается функцией $f(x)$. Длина арки l_f , а также площадь и момент инерции ее поперечного сечения считаются заданными. В предположении о

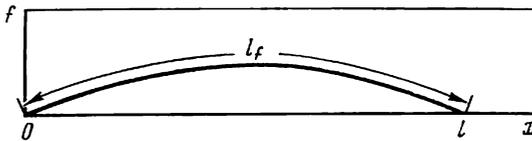


Рис. 4.20

малости амплитуд колебаний и пологости арки изопериметрическое условие постоянства длины арки и уравнение поперечных колебаний для функции прогибов арки $w(x, t)$ запишутся следующим образом:

$$l_f = l + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx,$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{ES}{l} \frac{d^2 f}{dx^2} \int_0^1 \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{df}{d\xi} d\xi + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где m — погонная масса, а E — модуль Юнга материала.

Представляя функцию распределения прогибов $w(x, t)$ в виде $w(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$

и переходя к безразмерным переменным

$$x = x/l, \quad f' = 1/2f\sqrt{S/I}, \quad w' = 1/2w\sqrt{S/I}, \quad t' = (t/l^2)\sqrt{EI/m},$$

приведем соотношения краевой задачи, служащей для отыскания амплитудной функции прогибов, и изопериметрическое условие к форме

$$\frac{d^4 u}{dx^4} - \omega^2 u - 4 \frac{d^2 f}{dx^2} \int_0^1 \frac{du}{d\xi} \frac{df}{d\xi} d\xi = 0, \quad (8.1)$$

$$u(0) = (du/dx)_{x=0} = 0, \quad u(1) = (du/dx)_{x=1} = 0, \quad (8.2)$$

$$\int_0^1 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx = \beta^2, \quad \beta^2 = \frac{Sl}{2I} (l_f - l). \quad (8.3)$$

Рассмотренная в работе [212] задача оптимизации заключается в отыскании функции $f(x)$ (переменной проектирования), доставляющей максимум фундаментальной частоте свободных колебаний арки при заданном значении параметра β^2 .

Если амплитудную функцию подчинить условию нормировки

$$\int_0^1 u^2 dx = 1, \quad (8.4)$$

а выражение, записанное в левой части уравнения (8.1), помножить на $u(x)$ и затем проинтегрировать от 0 до 1, то с учетом условий (8.2) будем иметь

$$\omega^2(u, f) = \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx + 4 \left[\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{df}{dx} dx \right]^2 \quad (8.5)$$

Основываясь на соотношениях (8.3) — (8.5), составим расширенный функционал Лагранжа

$$J(u, f) = \omega^2(u, f) - \eta \left[\int_0^1 u^2 dx - 1 \right] - \mu \left[\int_0^1 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx - \beta^2 \right].$$

Здесь η и μ — постоянные множители Лагранжа.

Варьирование по f расширенного функционала Лагранжа непосредственно приводит к следующему необходимому условию оптимальности:

$$\mu \frac{df}{dx} = 4 \frac{du}{dx} \int_0^1 \frac{du}{d\xi} \frac{df}{d\xi} d\xi. \quad (8.6)$$

Для арки оптимальной геометрии в зависимости от значений, принимаемых параметром β^2 , может реализоваться один из двух случаев.

Первый случай характеризуется отличием от нуля интеграла в правой части условия оптимальности (8.6):

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{df}{dx} dx \neq 0, \quad \mu \neq 0. \quad (8.7)$$

В этом случае умножение обеих частей (8.6) на du/dx и последующее их интегрирование на отрезке $[0, 1]$ дает

$$\mu = 4 \int_0^1 (du/dx)^2 dx. \quad (8.8)$$

Последующая подстановка, выраженная для df/dx из (8.6), (8.8) в изопериметрическое условие (8.3) приводит к следующей формуле, связывающей величину параметра β^2 с распределением прогибов оптимальной балки:

$$\beta^2 = \left[\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{df}{dx} dx \right]^2 / \int_0^1 \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx. \quad (8.9)$$

Само же уравнение (8.1) для амплитудной функции прогибов $u(x)$ с учетом (8.6), (8.8), (8.9) примет вид

$$d^4u/dx^4 - 4\beta^2(d^2u/dx^2) - \omega^2u = 0. \quad (8.10)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае уравнение свободных колебаний оптимальной арки совпадает с уравнением поперечных колебаний прямолинейной балки, растянутой осевыми силами. Кроме того, как это нетрудно установить при помощи (8.7), (8.10), данный случай характеризуется симметричным распределением прогибов, отвечающих низшему тону колебаний, и симметричным строением арки.

Второй случай, когда

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{df}{dx} dx = 0, \quad \mu = 0, \quad (8.11)$$

характеризуется неединственностью оптимального решения и независимостью частот колебаний от геометрии арки. В данном случае уравнение колебаний арки

$$d^4u/dx^4 - \omega^2u = 0 \quad (8.12)$$

совпадает с уравнением свободных поперечных колебаний однородной прямолинейной балки. Все арки, для которых одна и та же антисимметричная форма колебаний $u(x)$, определяемая из (8.12), является низшей формой колебаний, соответствуют одному и тому же фундаментальному собственному значению ω^2 .

С учетом отмеченных свойств основных соотношений рассматриваемой задачи оптимизации построение оптимального решения не составляет трудностей. Действительно, распределение прогибов i -й формы колебаний, получаемых из краевой задачи на собственные значения (8.2), (8.10) (первый случай) и нормированных, согласно (8.4), имеет вид

$$u^i(x) = \sqrt{2} \cdot \sin i\pi x, \quad \omega_i^2 = i^4\pi^4 + 4i^2\pi^2\beta^2, \quad i = 1, 2, \quad (8.13)$$

Низший тон колебаний реализуется при $i = 1$. Согласно (8.6), (8.8), положение осевой линии оптимальной арки дается выражением

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \beta \sin \pi x. \quad (8.14)$$

Во втором случае для антисимметричной формы колебаний, соответствующей низшему собственному значению, имеем

$$u(x) = \sqrt{2} \cdot \sin 2\pi x, \quad \omega^2 = 16\pi^4. \quad (8.15)$$

Сопоставление полученных выражений (8.13) — (8.15) позволяет прийти к выводу, что при $\beta^2 \leq \beta_0^2 = 15\pi^2/4$ реализуется первый случай и оптимальная геометрия арки задается формулой (8.14), а при достаточно больших значениях параметра

$\beta^2 (\beta^2 > \beta_0^2)$ оптимальная форма арки неединственна. Максимизируемый функционал квадрата частоты в зависимости от величины параметра β^2 принимает следующие значения:

$$\omega^2 = \pi^2 (\pi^2 + 4\beta^2) \quad \text{при } 0 < \beta^2 \leq \beta_0^2, \quad \omega^2 = 16\pi^4 \quad \text{при } \beta^2 > \beta_0^2. \quad (8.16)$$

Сопоставление фундаментальных частот для круглой арки и арки оптимальной синусоидальной формы, имеющих одинаковые длины, показывает, что выигрыш, получаемый за счет оптимизации, не превышает 2 %.

Большой оптимизационный эффект достигается в случае максимизации частоты основного тона колебаний защемленной арки. Отыскание оптимального решения для защемленной арки полностью аналогично проведенным выше рассмотрением случая шарнирного закрепления. Симметричная форма колебаний, отвечающая наименьшему собственному значению ω_s^2 , дается выражением

$$u(x) = \gamma \{ (\cos \sigma_2 - \cos h\sigma_1) (\sigma_1 \sin \sigma_2 x - \sigma_2 \sin h\sigma_1 x) + (\sigma_1 \sin \sigma_2 - \sigma_2 \sin h\sigma_1) (\cos h\sigma_1 x - \cos \sigma_2 x) \}, \quad (8.17)$$

$$\sigma_1 = \left(2\beta^2 + \sqrt{4\beta^4 + \omega_s^2} \right), \quad \sigma_2 = \left(-2\beta^2 + \sqrt{4\beta^4 + \omega_s^2} \right),$$

где γ — произвольная константа. Собственное значение ω_s^2 определяется как наименьший корень уравнения

$$\omega_s (1 - \cos h\sigma_1 \cos \sigma_2) + 2\beta^2 \sin h\sigma_1 \sin \sigma_2 = 0. \quad (8.18)$$

Оптимальная форма арки $f(x)$, как это следует из (8.6), (8.3), определяется при $0 < \beta^2 \leq \beta_0^2 \equiv 7,36\pi^2$ соотношениями (8.17), (8.18) (см. [212]). Фундаментальная частота оптимальной арки в случае жесткого защемления ее концов зависит от параметра β^2 следующим образом:

$$\omega^2 = \omega_s^2 \quad \text{при } 0 < \beta^2 \leq \beta_0^2, \quad \text{а } \omega_s^2 = 39,047\pi^4 \quad \text{при } \beta^2 > \beta_0^2.$$

Практически зависимость ω_s^2 от β^2 в диапазоне от $\beta^2 = 0$ ($\omega_s^2 = 5,14\pi^4$) до $\beta^2 = 7,36\pi^2$ ($\omega_s^2 = 39,047\pi^4$) оказывается линейной. При этом выигрыш, получаемый за счет оптимизации формы арки, по сравнению с круглой аркой достигает (при некоторых значениях параметра β^2) 16 %.

Оптимальная форма жестко защемленной арки показана на рис. 4.21. Заметим, что в отличие от случая шарнирного закрепления концов при жестком закреплении арки ее форма зависит от параметра длины β^2 .

Другая постановка задачи оптимизации [202, 203] пологой арки, совершающей свободные колебания, связана с одновременным отысканием формы осевой линии $f(x)$ и распределения толщин $h(x)$ из условия максимизации фундаментальной частоты колебаний при заданном объеме материала V и длине арки l .

При этом предполагается, что арка имеет прямоугольное поперечное сечение постоянной ширины b и переменной высоты $h(x)$ и жестко закреплена в фиксированных точках $x=0$ и $x=l$. Кроме указанных ограничений, на переменные проектирования $f(x)$ и $h(x)$, обусловленных постоянством объема материала V

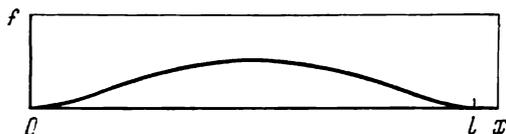


Рис. 4.21



Рис. 4.22

и длины арки l , накладывается дополнительное условие на минимально допустимые значения толщин $h(x) \geq h_{\min}$ (h_{\min} — заданная константа).

Расчеты оптимальных решений проводились в [203, 212] в безразмерных переменных

$$(\omega')^2 = \frac{\omega^2 \rho l^4}{E r^2}, \quad f' = \frac{f}{2r}, \quad h' = \frac{lb}{V} h,$$

$$h'_{\min} = h_{\min} \frac{lb}{V}, \quad C^2 = \frac{3(l_f - l)l}{32r^2}, \quad r = \frac{V}{2\sqrt{3}lb}$$

и найденные фундаментальные частоты ω оптимальных арок сравнивались с фундаментальными частотами круглых арок, имеющими одинаковые с оптимальными арками объема, длины, величины пролетов и константы материала. В зависимости от значений безразмерных параметров задачи h_{\min} и C были найдены оптимальные решения как с некратной фундаментальной частотой, так и бимодальные решения с двукратной основной частотой.

На рис. 4.22 показана оптимальная форма арки при $C=3$; $h_{\min}=0,2$. При данных значениях параметров нижняя частота $\omega=81,9$ является двукратной, и оптимизация приводит к значительному выигрышу $\omega/\omega_{\text{св}}=1,81$. Штриховой линией на рис. 4.22 показаны две нижние формы колебаний, отвечающие двукратной фундаментальной частоте.

4.9.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИНОК ПРИ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

До сих пор в этой главе мы рассматривали вопросы оптимального проектирования одномерных конструкций, совершающих свободные колебания. Под одномерными конструкциями имеются в виду не только стержни и балки, но также и такие осесимметричные конструкции, как круглые пластинки и оболочки вра-

щения, для которых переменные состояния и проектирования зависят только от одной пространственной координаты. Определение собственных форм и собственных частот колебаний таких конструкций заключалось в решении краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В случае, когда при описании поведения конструкции осуществляется выход за рамки одномерной модели, как это имеет место при рассмотрении несимметричных форм колебаний осесимметричных конструкций или колебаний существенно неодиомерных упругих тел, собственные функции и собственные частоты определяются из решения однородных краевых задач для уравнений в частных производных.

Рассмотрим задачу минимизации массы (объема, веса) квадратной в плане топкой упругой пластинки переменной толщины $h(x, y)$, совершающей свободные поперечные колебания с частотой ω . Пластинка занимает область Ω : $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, где a — заданная константа. Обозначим через $u(x, y)$ амплитудную функцию прогибов, а через ν , E , ρ — соответственно заданные постоянные величины коэффициента Пуассона, модуля Юнга и плотности материала. Уравнение, описывающее свободные изгибные колебания пластинки, запишется в виде

$$\frac{E}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \right. \\ \left. + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] - \omega^2 h \rho u = 0. \quad (9.1)$$

Пусть пластинка шарнирно оперта вдоль контура Γ -границы области Ω . Граничные условия запишутся в этом случае следующим образом:

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ (h^3 \partial^2 u / \partial x^2)_{x=0} = (h^3 \partial^2 u / \partial x^2)_{x=a} = 0, \\ u(x, 0) = u(x, a) = 0, \\ (h^3 \partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} = (h^3 \partial^2 u / \partial y^2)_{y=a} = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Сформулируем задачу оптимизации. Необходимо найти такое распределение переменной проектирования $h(x, y)$, которое удовлетворяло бы ограничениям

$$h_{\min}(x, y) \leq h(x, y) \leq h_{\max}(x, y) \quad (9.3)$$

и минимизировало функционал массы пластинки

$$J = \rho \int_{\Omega} h \, d\Omega \quad (9.4)$$

при ограничении на фундаментальную собственную частоту

$$\omega \geq \omega_0. \quad (9.5)$$

Здесь ω_0 — заданная константа; $h_{\min}(x, y)$, $h_{\max}(x, y)$ — заданные функции.

Сформулированная оптимизационная задача была решена в [111] для конечноэлементной модели пластинки. Пластинка разбивалась на конечные элементы с тремя степенями свободы в узле. Отыскивался вектор параметров проектирования h с компонентами h_i , $i=1, \dots, n$, минимизирующий массу конструкции при заданной пизшей частоте собственных колебаний ω_0 . Компоненты вектора h подчинялись ограничениям

$$h_{\min} \leq h_i \leq h_{\max}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Оптимизация проводилась на основе имитационного подхода [78], который заключается в поэтапной замене ограничения (9.5) аппроксимирующим выражением и решении оптимальной задачи на каждом этапе. В качестве исходного проекта выбиралась квадратная пластинка со стороной $a = 0,8$ м и постоянной толщиной $h = 10^{-3}$ м. В расчетах полагалось $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м², $\nu = 0,3$, $\rho = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³. В силу симметрии задачи расчеты проводились для четверти пластинки, которая разбивалась на 32 конечных элемента. Матрица масс была диагональной. Значение собственной частоты ω_0 полагалось равным вычисленной собственной частоте рассматриваемого исходного проекта, $\omega_0 = 47,39$ рад/с. Ограничения сверху и снизу на параметры проектирования h_i выбирались соответственно $h_{\max} = 1,2 \cdot 10^{-3}$ м, $h_{\min} = 0,8 \cdot 10^{-3}$ м, общее число параметров проектирования с учетом симметрии $n = 20$. Проведенная оптимизация позволила снизить массу пластинки на 7,9% по сравнению с массой исходного проекта. На рис. 4.23 изображена оптимальная форма конечноэлементной мо-

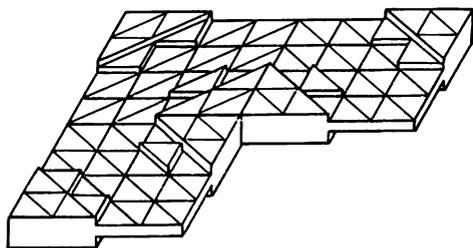


Рис. 4.23

дели пластинки, рассчитанная предложенным методом. Расчеты показали, что в центральной области и в угловых зонах пластинки параметры проектирования принимают наибольшее допустимое значение. Выход на нижнее ограничение h_{\min} наблюдался вблизи середин сторон пластинки.

Отметим, что оптимальные задачи для круглых и прямоугольных пластинок, совершающих свободные поперечные колебания, без ограничений на перемещения проектирования рассматривались в [198, 199]. Вопросы оптимизации круглых и прямоугольных пластин, работающих на сдвиг, при свободных колебаниях

исследовались в работах Армана [5, 122], где были рассмотрены различные варианты закрепления краев. Необходимые условия оптимальности были получены на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина, при этом учитывались ограничения, накладываемые на переменную проектирования (толщину пластинки).

4.10.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИНОК С УЧЕТОМ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Вопросы оптимального проектирования пластинок, совершающих свободные колебания, интенсивно исследовались с применением различных подходов и получили освещение в значительном числе публикаций (см., например, [5, 72, 85, 96, 107, 108, 111, 112, 118, 121, 122, 132, 133, 192, 198, 199]). Однако большая часть исследований была посвящена регулярному случаю простых (некратных) собственных значений. В более общем случае, когда в процессе оптимизации допускается появление кратных частот свободных колебаний, необходимые условия оптимальности были получены в [10, 32, 135, 162, 166, 192, 202, 241].

Ниже, следуя результатам работы [192], рассмотрим задачу максимизации фундаментальной собственной частоты квадратной в плане пластинки переменной толщины, учитывая возможность появления кратных частот. Будем предполагать, что вес пластинки задан и наименьшее собственное значение задачи о свободных колебаниях такой пластинки может быть двукратным. Для описания поведения пластинки воспользуемся уравнением (9.1), записав его в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \omega^2 h u = 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Здесь $h = h(x, y)$, $u = u(x, y)$ — соответственно переменная толщина и амплитудная функция прогибов пластинки, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, где a — заданная константа, ν — коэффициент Пуассона.

Граничные условия для шарнирного опирания краев будут иметь вид

$$\begin{aligned} u(0, y) &= u(a, y) = 0, \\ (\partial^2 u / \partial x^2)_{x=0} &= (\partial^2 u / \partial x^2)_{x=a} = 0, \\ u(x, 0) &= u(x, a) = 0, \\ (\partial^2 u / \partial y^2)_{y=0} &= (\partial^2 u / \partial y^2)_{y=a} = 0, \end{aligned} \quad (10.2)$$

а в случае жесткой заделки запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ (\partial u / \partial x)_{x=0} = (\partial u / \partial x)_{x=a} = 0, \\ u(x, 0) = u(x, a) = 0, \\ (\partial u / \partial y)_{y=0} = (\partial u / \partial y)_{y=a} = 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

На переменную проектирования $h(x, y)$ наложим ограничения

$$h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max}, \quad (10.4)$$

где h_{\min} , h_{\max} — заданные константы.

Будем максимизировать первое собственное значение ω^2 задачи (10.1), (10.2) (или задачи (10.1), (10.3)) при условии (10.4) и ограничении

$$V = \int_{\Omega} h d\Omega = C, \quad (10.5)$$

отражающем требование постоянства веса (объема) пластинки (C — заданная константа).

Предположение о том, что первое собственное значение ω^2 может быть кратным, приводит к тому, что оптимизируемый функционал

$$J(h) = \omega^2(h) \quad (10.6)$$

не является дифференцируемым в смысле Фреше, а дифференцируем только по направлениям [178]. Это обстоятельство существенно учитывается в [162, 166, 192] при выводе необходимых условий оптимальности.

Опуская подробные выкладки и обоснования, приведем здесь только формулировку условия оптимальности.

Пусть $\mathcal{H} = L^\infty(\Omega)$ — пространство существенно ограниченных функций, а \mathcal{H}_a — множество допустимых функций из \mathcal{H} , удовлетворяющих условиям (10.4), (10.5). Предполагается, что константы h_{\min} , h_{\max} и C таковы, что множество \mathcal{H}_a не пусто. Производная по направлению $dJ(h, \delta h)$ функционала J при $h \in \mathcal{H}_a$ в направлении $\delta h \in \mathcal{H}$ определяется по формуле

$$dJ(h, \delta h) = \lim_{t \rightarrow 0^+} [J(h + t\delta h) - J(h)]/t.$$

С учетом введенных обозначений условие оптимальности формулируется следующим образом. Если $h \in \mathcal{H}_a$ является оптимальным проектом, то для любых вариаций $\delta h \in \mathcal{H}$, таких, что $h + \delta h \in \mathcal{H}_a$, выполняется неравенство

$$dJ(h, \delta h) - \alpha \int_{\Omega} \left(h + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \right) \delta h d\Omega \leq 0,$$

где $\alpha > 0$ — некоторый регуляризационный параметр.

Таблица 4.1

Распределение оптимальных толщин
для четверти шарнирно-опертой пластинки

y	$x=0,000$	$x=0,125$	$x=0,250$	$x=0,375$	$x=0,500$
0,500	0,83	0,83	0,81	0,80	0,81
0,375	0,95	1,20	0,82	0,80	0,80
0,250	1,03	1,20	1,20	0,83	0,82
0,125	1,07	1,20	1,20	1,12	0,87
0,000	0,87	1,20	1,11	0,95	0,83

Таблица 4.2

Распределение оптимальных толщин
для четверти жесткозаделанной пластинки

y	$x=0,000$	$x=0,125$	$x=0,250$	$x=0,375$	$x=0,500$
0,500	1,18	κ 1,10	1,00	0,88	0,84
0,375	1,20	1,02	1,12	0,94	0,86
0,250	1,04	0,80	1,11	1,06	0,99
0,125	0,91	0,83	1,19	0,81	1,20
0,000	0,98	0,96	1,18	0,80	0,95

Для численного решения сформулированной задачи в [192] был применен метод негладкой оптимизации [182] в сочетании с методом штрафных функций. Результаты расчетов приведены в табл. 4.1, 4.2 для значений параметров $a=1$, $\nu=0,3$, $h_{\min}=0,8$, $h_{\max}=1,2$, $C=1$, $\alpha=10^{-5}$. Вычисленные оптимальные значения толщин $h(x, y)$, представленные для четверти пластинки в табл. 4.1, отвечают шарнирному опиранию краев. Материал концентрируется вокруг угловых областей. В центральной области переменная проектирования $h(x, y)$ выходит на свое нижнее ограничение. Значение оптимизируемого функционала удалось увеличить за счет оптимизации с $\omega^2=219$ для исходного проекта ($h=1$) до $\omega^2=305$. Наименьшее собственное значение для оптимальной пластинки в этом случае оказалось кратным.

Данные, приведенные в табл. 4.2, характеризуют оптимальное распределение толщин для четверти жесткозаделанной пластинки. Видно, что зоны концентрации материала расположены в этом случае вблизи середины сторон пластинки и вокруг ее центра, где функция $h(x, y)$ принимает максимально допустимое значение. В качестве исходного проекта также была выбрана пластинка постоянной толщины $h=1$, для которой значение функционала (10.6) было $\omega^2=1030$. Проведенная оптимизация привела к существенному увеличению первого собственного зна-

чения ($\omega^2 = 2072$), которое также оказалось кратным для оптимального проекта.

Анализируя приведенные результаты, можно сделать вывод о том, что, несмотря на определенное качественное сходство построенных в [192] оптимальных распределений $h(x, y)$ с распределениями толщины для оптимальных пластинок, найденных в [107, 108, 111, 118] без учета появления кратности собственных значений, полученные в [192] оптимальные решения уже не обладают свойством симметрии относительно диагоналей пластинки. Следует отметить также, что учет возможности появления кратности первого собственного значения у оптимального проекта, делает оптимизацию более эффективной, т. е. позволяет дополнительно увеличивать значение оптимизируемого функционала.

4.11.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК, СОВЕРШАЮЩИХ СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Исследование вопросов оптимизации частотных характеристик оболочек в отличие от аналогичных задач для балок, стержней и пластинок было начато сравнительно недавно. Это объясняется более сложным видом определяющих уравнений и трудностями, возникающими при численной реализации таких оптимальных задач. Первые результаты в этой области получены для наиболее простых моделей [2, 92, 213].

Рассмотрим в системе координат x, y, z осесимметричную пологую оболочку, закрепленную в плоскости xy вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$ и совершающую свободные колебания с частотой ω_n . Оболочка имеет постоянную толщину a . Будем рассматривать два возможных способа закрепления краев оболочки — шарнирное опирание и жесткую заделку. Через E, ρ и ν обозначим модуль Юнга, плотность и коэффициент Пуассона. Положение точки срединной поверхности оболочки вращения задается функцией $z = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — полярный радиус, причем $f(R) = 0$. Наклон образующей оболочки к плоскости основания xy определяется величиной $h = df(r)/dr$, которую будем рассматривать как переменную проектирования. Срединная поверхность рассматриваемой оболочки имеет заданную площадь S . Обозначим через $u^n(r)$ и $\varphi^n(r)$ амплитудные функции прогибов и напряжений. Введем следующие безразмерные переменные и обозначения:

$$\begin{aligned} r' &= r/R, & a' &= a/\sqrt{12(1-\nu^2)}, & b^4 &= 4(S - \pi R^2)/(\pi(a')^2), \\ \gamma &= Ea^3/(12(1-\nu^2)), & z' &= z/a', & (u^n)' &= u^n/a', \\ (\varphi^n)' &= \varphi^n/\gamma, & (\omega_n')^2 &= \omega_n^2 \gamma / (\rho a R^4), & h' &= df'/dx. \end{aligned}$$

В последующих выкладках штрихи опускаем. Параметр b характеризует площадь поверхности оболочки. Условие постоянства

площади срединной поверхности может быть записано в виде [213]

$$\int_0^1 h^2 r \, dr = \frac{1}{4} b^4. \quad (11.1)$$

Оптимизационная задача заключается в отыскании распределения переменной проектирования $h(r)$, максимизирующего собственную частоту ω_n при условии (11.1).

Для собственной формы колебаний $u^n(x)$ примем следующее условие нормировки:

$$\int_0^1 (u^n)^2 r \, dr = 1. \quad (11.2)$$

Следуя работам [167, 185], получим для определения собственных функций u^n и φ^n следующие уравнения [213]:

$$L_n L_n u^n = -\frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi^n}{dr} - \frac{n^2}{r} \varphi^n \right) \frac{dh}{dr} - \frac{1}{r} h \frac{d^2 \varphi^n}{dr^2} + \omega_n^2 u^n, \quad (11.3)$$

$$L_n L_n \varphi^n = \frac{1}{r} \left(\frac{du^n}{dr} - \frac{n^2}{r} u^n \right) \frac{dh}{dr} + \frac{1}{r} h \frac{d^2 u^n}{dr^2}, \quad (11.4)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, а дифференциальный оператор L_n имеет вид

$$L_n = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2}.$$

Применяя принцип Рэля, с учетом условия (11.2) получим следующее представление для квадрата собственной частоты:

$$\begin{aligned} \omega_n^2 = & \int_0^1 \left[(L_n u^n)^2 - (L_n \varphi^n)^2 - \frac{2}{r} \left(\frac{d\varphi^n}{dr} - \frac{n^2}{r} \varphi^n \right) h \frac{du^n}{dr} - \right. \\ & \left. + \frac{2n^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \varphi^n \right) h u^n \right] r \, dr + (1 + \nu) \left[\left(\frac{d\varphi^n}{dr} \right)^2 - \right. \\ & \left. - n^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} (\varphi^n)^2 \right) \right]_{r=1} + (\nu - 1) \left[\left(\frac{du^n}{dr} \right)^2 \right]_{r=1}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Здесь предполагается, что край оболочки ($r=1$) либо шарнирно оперт, либо жестко заделан, так что радиальные и тангенциальные смещения краев отсутствуют.

Расширенный функционал Лагранжа с учетом возможности появления кратных частот, т. е. случая, когда $\omega_n = \omega_m$, имеет вид

$$\begin{aligned} J_1 = & \omega_n^2 - \varepsilon (\omega_n^2 - \omega_m^2) - \lambda \left[\int_0^1 h^2 r \, dr - \frac{1}{4} b^4 \right] - \\ & - \lambda_n \left(\int_0^1 (u^n)^2 r \, dr - 1 \right) - \mu_m \left(\int_0^1 (u^m)^2 r \, dr - 1 \right). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Здесь ε , λ , λ_n , μ_m — подлежащие определению константы. В случае простого (не кратного) собственного значения в соотношении (11.6) следует положить $\varepsilon = 0$, $\mu_m = 0$. Необходимое условие оптимальности записывается в форме

$$\lambda h(r) = (1 - \varepsilon) \Phi^n(r) + \varepsilon \Phi^m(r), \quad (11.7)$$

где λ — постоянный множитель Лагранжа и

$$\Phi^n(x) = \frac{n^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \varphi^n \right) u^n - \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi^n}{dr} - \frac{n^2}{r} \varphi^n \right) \frac{du^n}{dr},$$

$$\Phi^m(x) = \frac{m^2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \varphi^m \right) u^m - \frac{1}{r} \left(\frac{d\varphi^m}{dr} - \frac{m^2}{r} \varphi^m \right) \frac{du^m}{dr}.$$

Решение рассматриваемой задачи оптимизации строилось численно методом последовательных приближений [213]. В качестве начального приближения выбиралась сферическая форма оболочки. На каждом шаге итерационного алгоритма определялись улучшающие поправки к распределению переменной проектирования $h(r)$, известному с предыдущего шага, и для вычисленного нового распределения $h(r)$ методом Рунге — Кутты с переменным шагом строилось решение уравнений (11.3), (11.4) при заданных граничных условиях и определялись собственные значения ω_n^2 и соответствующие формы $u^n(r)$ и $\varphi^n(r)$. При определении улучшающих поправок к распределению переменной проектирования существенно использовалось условие оптимальности (11.7).

В случае, если собственная частота ω_n не является кратной, в условии оптимальности (11.7) следует положить $\varepsilon = 0$. Вводя функцию $\hat{h}(r) = \hat{u}^n(r)/\lambda$ и поставив ее в условие (11.1) вместо $h(r)$, определим величину λ^2 , причем знак λ следует выбрать таким образом, чтобы значения функции $\hat{h}(r)$ лежали выше плоскости xy . Пусть $h_i(r)$ — распределение переменной проектирования, известное на i -м шаге итерационного алгоритма. Тогда следующее приближение $h_{i+1}(r)$ может быть построено на основе соотношения

$$h_{i+1}(r) = \kappa [h_i(r) + \tau \hat{h}(r)], \quad (11.8)$$

где $\tau > 0$ — параметр, обеспечивающий сходимость процесса, а константа κ выбирается из условия, что $h_{i+1}(r)$ удовлетворяет соотношению (11.1).

Если собственная частота оказалась кратной ($\omega_n = \omega_m$), подставим в условие (11.7) $h(r) = \hat{h}(r)$ и затем, подставляя $\hat{h}(r)$ из формулы (11.7) в условие (11.1), получим уравнение с двумя неизвестными λ и ε . Второе уравнение получим, приравняв правую часть (11.5) (где подставлено $h(r) = \hat{h}(r)$) правой части аналогичной формулы для ω_m^2 . Величины $u^n(r)$, $\varphi^n(r)$, $u^m(r)$ и $\varphi^m(r)$ считаем известными (вычисленными для i -го приближения $h_i(r)$). Полученная таким образом система двух уравнений

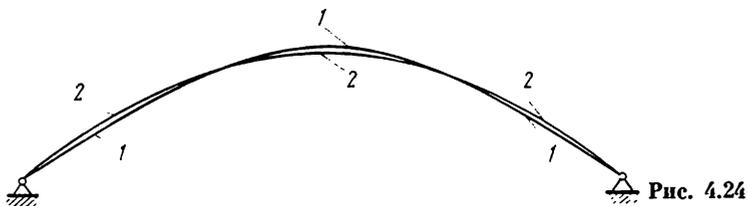


Рис. 4.24

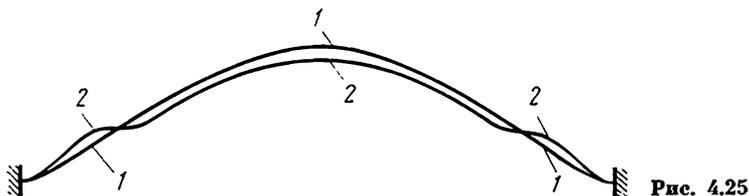


Рис. 4.25

для определения двух неизвестных λ и ε ($0 < \varepsilon < 1$) может быть разрешена, и для определения $h_{i+1}(r)$ можно воспользоваться, как и в первом случае, формулой (41.8).

На рис. 4.24 кривыми 1, 2 показаны оптимальные формы для образующей шарнирно опертой оболочки вращения при значениях $b = \sqrt{10}$ и $b = 7$ соответственно. Оптимальные формы для жестко заделанной оболочки при $b = 4$ (кривая 1) и $b = 10$ (кривая 2) изображены на рис. 4.25. При расчетах полагалось $\nu = 1/3$, $n = 0$. Отметим, что из всех рассмотренных четырех примеров только в случае шарнирного опирания оболочки при $b = \sqrt{10}$ собственная частота ω_0 не была кратной. В остальных случаях ω_0 совпадала с ω_1 . Проведенная оптимизация позволила увеличить собственную частоту по сравнению с частотой колебаний сферической оболочки в случае жесткой заделки края на 21 % для $b = 4$ и на 42 % для $b = 7$.

Отметим, что в более общем случае непологой тонкой упругой оболочки вращения в задаче максимизации основной собственной частоты поперечных колебаний при заданном весе оптимизация осуществлялась за счет выбора формы срединной поверхности¹. Решение задачи строилось численно с помощью метода конечных элементов.

4.12.

ОПТИМИЗАЦИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИНОК В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Для современных приложений теории оптимального проектирования является характерным требование учета сложного взаимодействия конструкции с внешней средой. В ряде случаев воздействие среды на колеблющуюся конструкцию может быть

¹ Эта задача рассматривалась в диссертационной работе М. О. Арабян.

оценено с применением классической модели идеальной жидкости. Соответствующая динамическая задача гидроупругости о совместных колебаниях упругого тела и жидкости решается точно только в отдельных частных случаях, для которых реакция жидкости определяется в замкнутом виде на основе внешней гидродинамической задачи. Так, определение воздействия жидкости в замкнутом виде и сведение смешанной краевой задачи гидроупругости к решению существенно более простой задачи для интегродифференциального уравнения возможно при рассмотрении свободных колебаний длинных прямоугольных пластинок в идеальной жидкости. Для указанного случая решение задач оптимального проектирования получено в [16] (см. также [8]).

Пусть длинная прямоугольная пластинка шарнирно закреплена вдоль длинных краев, которые параллельны оси y

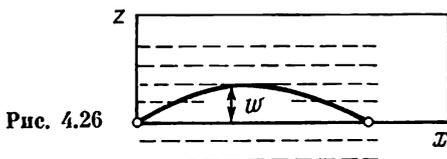


Рис. 4.26

(рис. 4.26). Будем предполагать, что толщина пластинки не меняется в направлении y , т. е. $h = h(x)$, и все рассуждения проведем в плоскости xz , так как производные по y от искомых функций равны нулю. Площадь сечения пластинки плоскостью xz обозначим через S и будем считать заданной величиной.

Обозначая через $w = w(x, y)$ функцию прогибов пластинки, а через $\varphi = \varphi(x, z, t)$ — потенциал скоростей движения жидкости, запишем уравнения колебаний пластинки и граничные условия

$$\rho_p h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \rho_f \left(\frac{\partial \varphi^+}{\partial t} - \frac{\partial \varphi^-}{\partial t} \right), \quad (12.1)$$

$$(w)_{x=\pm l} = \left(h^3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=\pm l} = 0, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Фигурирующие в (12.1) величины ρ_p , ρ_f , D означают плотности пластинки, жидкости и изгибную жесткость. Верхними знаками $+$ и $-$ обозначены значения величин соответственно для верхнего и нижнего берегов разреза $-l \leq x \leq l$, $y = 0$, т. е. $(\partial \varphi / \partial t)^+ = (\partial \varphi / \partial t(x, 0, t))^+$ и $(\partial \varphi / \partial t)^- = (\partial \varphi / \partial t(x, 0, t))^-$. Внешняя гидродинамическая задача определения потенциала φ заключается в интегрировании уравнения Лапласа с граничными условиями $(\partial \varphi / \partial z)^\pm = \partial w / \partial t$ ($-l \leq x \leq l$, $y = 0$), полученными путем сноса на ось x краевых условий непротекания жидкости через поверхности пластинки. При этом используются предположения о малости прогибов w и толщин h , гладкости $h(x)$, а также о безотрывности движений жидкости и пластинки.

Решение связанной задачи гидроупругости можно искать в виде

$$w = e^{i\omega t} u(x), \quad \varphi = i\omega e^{i\omega t} \Phi(x, a), \quad (12.2)$$

переходя для удобства к безразмерным переменным и обозначениям:

$$\begin{aligned} x' &= x/l, \quad z' = z/l, \quad u' = u/l, \quad \Phi' = \Phi/l^2, \\ h' &= lh/S, \quad (\omega^2)' = 12\rho_p l^6 (1 - \nu^2) \omega^2 / S^2 E, \quad \rho = \rho_p l^2 / \rho_p S. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Штрихи у безразмерных переменных в дальнейшем опускаем. В новых переменных закрепленным концам пластинки в плоскости xz соответствуют точки $(x = -1, z = 0)$, $(x = 1, z = 0)$. Подстановка (12.2), (12.3) в (12.1) приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \omega^2 [hu - \rho(\Phi^+ - \Phi^-)] = 0, \quad (12.4)$$

$$(u)_{x=\pm 1} = \left(h^3 \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=\pm 1} = 0. \quad (12.5)$$

Реакция жидкости на пластинку, определяемая членом $\rho(\Phi^+ - \Phi^-)$, найдена в [16] из решения внешней гидродинамической задачи и имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(\Phi^+ - \Phi^-) &= -\rho \int_{-1}^1 K(\xi, x) u(\xi) d\xi, \\ K(\xi, x) &= \frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1+\chi}{1-\chi} \right|, \quad \chi = \left[\frac{(1-x)(1+\xi)}{(1-\xi)(1+x)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (12.6)$$

Подставляя в (12.4) выражение (12.6) для разности гидродинамических потенциалов, имеем

$$Lu \equiv \frac{d^2}{dx^2} \left(h^3 \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \omega^2 \left(hu + \rho \int_{-1}^1 K(\xi, x) u(\xi) d\xi \right) = 0. \quad (12.7)$$

Для заданного распределения толщин пластинки $h(x)$ решение однородной задачи на собственные значения для интегродифференциального уравнения (12.7) с граничными условиями (12.5) позволяет определить собственные функции $u(x)$ и соответствующие им собственные числа. Релеевское выражение для квадратов частот собственных колебаний, получаемое из условия $(u, Lu) = 0$, запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \omega^2(h) &= J(h, u) = \frac{J_1(h, u)}{J_2(h, u) + \rho J_3(u)}, \\ J_1 &= \int_{-1}^1 h^3 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx, \quad J_2 = \int_{-1}^1 hu^2 dx, \\ J_3 &= \int_{-1}^1 K(\xi, x) u(\xi) u(x) d\xi dx. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Рэлеевское отношение (12.8) является функционалом от $h(x)$ и $u(x)$. Следовательно, и фундаментальная частота ω_0 , определяемая из вариационного принципа Рэлея

$$\omega_0^2(h) = \min_u J(h, u), \quad (12.9)$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad (12.10)$$

зависит от $h(x)$. Краевым условиям $h^3 d^2u/dx^2 = 0$, выставленным при $x = \pm 1$, удовлетворять заранее не требуется, так как эти условия являются «естественными» для функционала (12.8) и искома экстремаль этого функционала, найденная из (12.9), (12.10), будет автоматически удовлетворять условиям $h^3(d^2u/dx^2) = 0$ в точках $x = -1$ и $x = 1$. Функция $u(x)$, реализующая данный минимум, соответствует минимальному собственному значению задачи (12.5), (12.7). Уравнение Эйлера для функции $u(x)$ в вариационной задаче (12.9), (12.10) совпадает с уравнением (12.7).

На множестве непрерывных функций $h(x)$ рассмотрим следующую оптимизационную задачу. Требуется определить функцию $h(x)$, максимизирующую минимальное собственное значение

$$\omega_{0*}^2 = \max_h \omega_0^2(h) = \max_h \min_u J(h, u) \quad (12.11)$$

и удовлетворяющую условию постоянства объема

$$\int_{-1}^1 h dx = 1. \quad (12.12)$$

Минимизация по u в (12.11) проводится на множестве гладких функций, удовлетворяющих условиям (12.10). Задача оптимизации (12.11), (12.12) является однопараметрической с параметром $\rho = \rho_l l^2 / \rho_p S$. При $\rho = 0$ (случай отсутствия жидкости) приходим к классической задаче оптимизации фундаментальной частоты колебаний упругих пластинок в вакууме.

Данная задача (12.11), (12.12) относится к числу самосопряженных задач оптимизации, не требующих при выводе условий оптимальности и отыскании экстремалей введения сопряженных переменных. Необходимое условие оптимальности получается непосредственно при помощи варьирования (12.8) по h и учета изопериметрического условия (12.12). Обозначая через c^2 множитель Лагранжа, отвечающий изопериметрическому ограничению (12.12), приходим к следующему условию оптимальности:

$$3h^2(d^2u/dx^2)^2 - \omega^2 u^2 = c^2, \quad (12.13)$$

служащему для отыскания распределений толщин в пластинке.

Ниже отдельно приведем решения задач оптимизации для сплошных и трехслойных пластин. В случае трехслойных пластин h^3 в первом члене уравнения (12.7) и в выражении (12.8) для J_1 заменяется на h .

Отыскание оптимальных распределений толщин сплошных пластинок проводилось численно с применением алгоритма по-

следовательной оптимизации [8]. Для отыскания вариации распределения толщин применялись формулы (см. [8, 9])

$$\delta h = \tau \left\{ e - \frac{(e, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 \right\} = \tau \left\{ e - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e dx \right\}, \quad (12.14)$$

$$h^{k+1} = h^k + \delta h, \quad e_1 = 1, \quad e = \frac{3h^2(d^2 u/dx^2)^2 - \omega_0^2 u^2}{J_2(h, u) - \rho J_3(u)}. \quad (12.15)$$

Подбирая достаточно малое положительное число τ и вычисляя по формулам (12.14), (12.15) новое распределение толщин, можно добиться возрастания оптимизируемого функционала и выполнения изопериметрического условия (см. разд. 2.3), т. е.

$$\delta \omega_0^2 = \int_{-1}^1 e \delta h dx > 0, \quad \int_{-1}^1 \delta h dx = 0.$$

При отыскании прогибов, которое осуществлялось методом локальных вариаций, учитывалась симметрия задачи относительно точки $x=0$, и расчеты велись на отрезке $-1 \leq x \leq 0$, который разбивался на 30 равных ячеек. Для аппроксимации интегралов J_1, J_2, J_3 использовался метод трапеций.

Расчеты проводились при $\rho = 0$; $2^n/10$; $n = 0, 1, 2, \dots, 7$. Для каждого из указанных значений ρ в качестве начального приближения для h выбирали постоянное распределение толщин $h(x) = 1/2$ и на первом этапе распределение прогибов и значение квадрата частоты ω_0^2 , соответствующее постоянному распределению толщин.

На рис. 4.27 показаны зависимости квадрата частоты ω_0^2 от ρ для оптимальных пластин (кривая 1) и для пластин постоянной толщины (кривая 2).

В [16] показано, что как для неоптимальных пластинок, так и для пластинок с оптимальным распределением толщин справедливы соотношения вида

$$\frac{d\omega_{0*}^2}{d\rho} = \frac{-\omega_{0*}^2 J_3(u)}{J_2(h, u) + \rho J_3(u)} \leq 0. \quad (12.16)$$

Неравенство (12.16), в частности, показывает, что максимум оптимизируемого функционала (фундаментальной частоты) является монотонно убывающей функцией параметра ρ .

Заметим, что если для заданного значения параметра $\rho = \rho_1$ решение оптимизационной задачи найдено, т. е. определены величина максимизируемого функционала $(\omega_{0*}^2)_1$ и функции u^1, h^1 , то для приближенного отыскания максимального значения фундаментальной частоты, отвечающей близкому значению параметра $\rho = \rho_2$, можно пользоваться формулой

$$(\omega_{0*}^2)_2 = (\omega_{0*}^2)_1 \left[1 - \frac{(\rho_2 - \rho_1) J_3(u^1)}{J_2(h^1, u^1) + \rho_1 J_3(u^1)} \right],$$

вытекающей из (12.16).

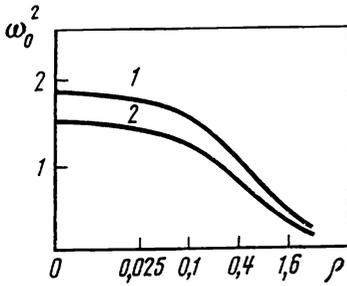


Рис. 4.27

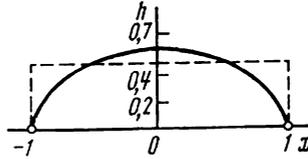


Рис. 4.29

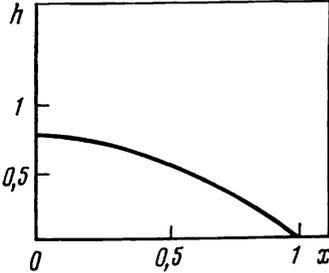


Рис. 4.28

На рис. 4.28 показано оптимальное распределение толщины для $\rho = 1,6$. Функция $h(x)$ достигает максимума при $x = 0$ и стремится к нулю при стремлении x к ± 1 , т. е. при приближении к шарнирно закрепленным концам пластинки. Пунктирной линией показано начальное приближение для функции толщин.

Заметим, что при $\rho = 0$ выигрыш для ω_0^2 составляет 23,6 %, а при $\rho = 1,6$ — 38 %.

Обсудим кратко некоторые результаты, относящиеся к задаче отыскания оптимальных распределений толщин $h(x)$ внешних несущих слоев трехслойных пластинок. Через h_d обозначим расстояние между несущими слоями ($h_d = \text{const}$). Вводя в рассматриваемом случае безразмерную частоту ω' (штрих в дальнейшем опускаем):

$$\omega' = \left[\frac{4\rho_f l^6 (1 - \nu^2)}{SEh_d^2} \right]^{1/2} \omega, \quad (12.17)$$

занимем основные соотношения задачи: уравнение колебаний, граничные условия и условия оптимальности

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \omega^2 \left[\frac{hu}{\rho} + \int_{-1}^1 K(\xi, x) u(\xi) d\xi \right], \quad (12.18)$$

$$u(-1) = u(1) = 0, \quad (12.19)$$

$$\left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=-1} = \left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=+1} = 0, \quad (12.20)$$

$$\left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 - \frac{\omega^2}{\rho} u^2 = c^2 \quad (c^2 \neq 0). \quad (12.21)$$

Рассмотрим предельный случай $\rho = \rho_f l^2 / \rho_p S \rightarrow \infty$, соответствующий тонким пластинкам или жидкости большой плотности.

Уравнение (12.18) при условии оптимальности (12.21) запишется в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(h \frac{d^2 u}{dx^2} \right) = \omega^2 \int_{-1}^1 K(\xi, x) u(\xi) d\xi, \quad (12.22)$$

$$(d^2 u / dx^2)^2 = c^2. \quad (12.23)$$

Учитывая симметрию задачи относительно точки $x = 0$, будем разыскивать решение на интервале $[-1, 0]$, выставив в точке $x = 0$ следующие граничные условия:

$$(du/dx)_{x=0} = 0, \quad (12.24)$$

$$(dh/dx)_{x=0} = 0. \quad (12.25)$$

Отметим особенность рассмотренной задачи, заключающуюся в том, что условие оптимальности (12.23) не зависит явно от h . Это обстоятельство позволяет искать решение задачи следующим образом. Рассматривая соотношения (12.19), (12.23), (12.24), определяем с точностью до множителя c функцию $u(x) = c(x^2 - 1)/2$, соответствующую оптимальной пластинке. Подставляя затем найденную функцию $u(x)$ в уравнение (12.22) и граничные условия (12.20), (12.25) и решая это уравнение относительно h при указанных граничных условиях, находим оптимальное распределение толщин

$$h = \frac{\omega_{0*}^2}{2} \int_{-1}^x \int_0^\eta \int_{-1}^1 K(\xi, \zeta) (\xi^2 - 1) d\xi d\zeta d\eta. \quad (12.26)$$

Использование найденного распределения (12.26) оптимальных толщин $h(x)$ и изопериметрического условия

$$\int_{-1}^0 h dx = \frac{1}{2}$$

приводит к следующему значению для квадрата фундаментальной частоты: $\omega_{0*}^2 = 1,121$. График оптимального распределения толщин показан на рис. 4.29. В заключение отметим, что вопросы обоснования постановки задач и применяемых методов обсуждались в [8].

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИСКЛЮЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ

5.1.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ И ВЫВОД НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ЭКСТРЕМУМА

Среди проблем динамической оптимизации в виде особого класса можно выделить задачи оптимального проектирования конструкций, совершающих вынужденные установившиеся колебания под действием гармонических нагрузок. Данный вид нагружения обуславливает ряд существенных упрощений при анализе поведения конструкции и позволяет провести аналогию с решением некоторых статических задач оптимизации.

Исследование поведения упругих тонкостенных конструкций при вынужденных гармонических колебаниях основывается на представлении векторов перемещений $w(x, t)$ и внешних воздействий $q(x, t)$ в виде

$$w(x, t) = u(x)e^{i\omega t}, \quad q(x, t) = Q(x)e^{i\omega t} \quad (1.1)$$

и сводится к определению амплитудной вектор-функции $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$ в области Ω изменения пространственных переменных x из решения следующей краевой задачи для системы дифференциальных уравнений:

$$Cu - \omega^2 Mu = Q, \quad (1.2)$$

$$(Nu)_\Gamma = 0. \quad (1.3)$$

Здесь C и M — матричные дифференциальные операторы, характеризующие соответственно жесткостные и инерционные свойства конструкции; N — линейный дифференциальный оператор граничных условий; $Q(x) = (Q_1(x), \dots, Q_m(x))$ — амплитудная вектор-функция внешних воздействий; ω — частота вынужденных колебаний; t — время; Γ — граница области Ω . Коэффициенты дифференциальных операторов C и M зависят от переменной проектирования $h(x)$, т. е.

$$C = C(h), \quad M = M(h).$$

Для тонкостенных конструкций минимизируемый функционал и интегральные ограничения могут быть представлены в виде

$$J = \int_{\Omega} f(h) d\Omega, \quad (1.4)$$

$$J_i = \int_{\Omega} f_i(h, \mathbf{u}) d\Omega \leq C_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1.5)$$

Наложённые на конструкцию локальные ограничения вида

$$\max_x |g_j(h(x), \mathbf{u}(x))| \leq C_j, \quad j = r+1, \dots, s, \quad (1.6)$$

могут быть приближенно заменены интегральными ограничениями [8]

$$J_j = \int_{\Omega} f_j(h, \mathbf{u}) d\Omega \leq C_j, \quad (1.7)$$

где $f_j = (1/\text{mes } \Omega) |g_j|^p$ и p — достаточно большое число. Переменная проектирования удовлетворяет неравенствам

$$h_{\min} \leq h(x) \leq h_{\max}. \quad (1.8)$$

Здесь C_i ($i = 1, 2, \dots, s$), h_{\min} , h_{\max} — заданные константы.

Будем предполагать, что удовлетворение ограничений (1.8) осуществляется за счет введения вспомогательных функций (переменных проектирования), т. е. за счет применения приемов Валентайна или аналогичных ему способов. Учитывая это обстоятельство, исключим ограничения (1.8) на максимальное и минимальное допустимые значения переменной проектирования из дальнейших рассуждений.

В основу процесса минимизации функционала (1.4) при ограничениях (1.5), (1.7) положим построение улучшающих вариаций δh переменной проектирования. Краевая задача (1.2), (1.3) в вариациях примет вид

$$C\delta\mathbf{u} - \omega^2 M\delta\mathbf{u} + \delta_h(C\mathbf{u}) - \omega^2 \delta_h(M\mathbf{u}) = 0, \quad (1.9)$$

$$(N\delta\mathbf{u})_{\Gamma} = 0, \quad (1.10)$$

где $\delta\mathbf{u}$ — вариация амплитудной вектор-функции, а символ δ_h означает вариацию величины только при изменении h . Вариации функционалов δJ , δJ_i , δJ_j запишутся в виде

$$\delta J = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial h} \delta h d\Omega, \quad (1.11)$$

$$\delta J_i = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial f_i}{\partial h} \delta h \right) d\Omega, \quad i = 1, \dots, r, \quad (1.12)$$

$$\delta J_j = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial f_j}{\partial h} \delta h \right) d\Omega, \quad j = r+1, \dots, s. \quad (1.13)$$

Для получения выражения, связывающего вариации δJ и δh , введем сопряженную вектор-функцию $\mathbf{v}(x)$. Умножая скалярно левую часть уравнения в вариациях (1.9) на вектор-функцию $\mathbf{v}(x)$ и интегрируя полученное выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v} [C\delta\mathbf{u} - \omega^2 M\delta\mathbf{u} + \delta_h(C\mathbf{u}) - \omega^2 \delta_h(M\mathbf{u})] d\Omega = \\ = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} [C^* \mathbf{v} - \omega^2 M^* \mathbf{v}] d\Omega + \int_{\Omega} \delta h [B_C(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \omega^2 B_M(\mathbf{v}, \mathbf{u})] d\Omega, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $B_C(\mathbf{v}, \mathbf{u})$, $B_M(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ — билинейные формы по \mathbf{v} и \mathbf{u} , а символ * означает сопряжение. Часть контурных членов, возникающих при интегрировании по частям, обращается в нуль в силу соотношения (1.10), являющегося следствием граничного условия (1.3). Остальные члены положим равными нулю за счет наложения на функцию $\mathbf{v}(x)$ граничных условий

$$(N^*\mathbf{v})_\Gamma = 0. \quad (1.15)$$

Заменяя неравенства (1.5), (1.7) при помощи введения вспомогательных параметров β_i ($i = 1, \dots, s$) по формулам

$$\beta_i^2 = C_i - J_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad (1.16)$$

ограничениями типа равенств, придем к выражению для вариации δJ в виде

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} \Lambda(h, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \delta h \, d\Omega + \int_{\Omega} \left[C^*\mathbf{v} - \omega^2 M^*\mathbf{v} + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} \right] \delta \mathbf{u} \, d\Omega + 2 \sum_{i=1}^s \lambda_i \beta_i \delta \beta_i. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Здесь λ_i — множители Лагранжа, и введено обозначение

$$\Lambda(h, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = B_C(\mathbf{v}, \mathbf{u}) - \omega^2 B_M(\mathbf{v}, \mathbf{u}) + \frac{\partial f}{\partial h} + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial h}.$$

Определим сопряженную переменную как решение краевой задачи для дифференциального уравнения

$$C^*\mathbf{u} - \omega^2 M^*\mathbf{v} + \sum_{i=1}^s \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (1.18)$$

с граничными условиями (1.15). Множители Лагранжа λ_i и вспомогательные параметры β_i подчиним дополнительным условиям

$$\lambda_i \beta_i = 0, \quad i = 1, \dots, s. \quad (1.19)$$

Теперь основная формула анализа чувствительности, связывающая вариацию оптимизируемого функционала с переменной проектирования, может быть представлена в виде

$$\delta J = \int_{\Omega} \Lambda(h, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \delta h \, d\Omega. \quad (1.20)$$

Необходимое условие оптимальности с учетом произвольности δh запишется следующим образом:

$$\Lambda(h, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0. \quad (1.21)$$

Формулы вида (1.20) лежат в основе метода последовательной оптимизации [8], позволяющего осуществлять монотонное

уменьшение функционала качества при удовлетворении ограничений задачи проектирования. Выражение для δh , обеспечивающее неположительность δJ , имеет вид $\delta h = -\tau \Lambda$, где $\tau > 0$ — малое число. Этим же свойством обладают выражения $\delta h = -\tau \Lambda^\alpha$ (α — целые нечетные числа).

Для реализации процесса варьирования переменной проектирования с использованием указанной формулы для δh требуется решение краевых задач (1.2), (1.3) и (1.18), (1.15) с целью отыскания u и v и определение множителей Лагранжа λ_i ($i = 1, \dots, s$) из условий (1.5), (1.7).

Отметим, что в работах [155, 191, 211], посвященных проектированию одномерных конструкций, для получения необходимых условий оптимальности и решения конкретных задач существенно использовалось предположение, что частота вынужденных колебаний не превышает значения первой собственной частоты. Методика, описанная в настоящем разделе (см. также [53, 99, 100, 231]), не требует наложения ограничений на частоты внешних воздействий и позволяет получить условия оптимальности в случае произвольной нерезонансной частоты ω . Необходимо отметить также то обстоятельство, что если в уравнении (1.12) и во всех дальнейших выкладках положить $-\omega^2 = c$ и заменить оператор M на оператор $\widehat{M} = M/h$, то от рассматриваемой задачи оптимизации конструкций, совершающих установившиеся колебания под действием гармонических нагрузок, можно перейти к задачам оптимального проектирования конструкций, взаимодействующих с упругим винклеровским основанием (в общем случае коэффициент жесткости основания c является переменным, т. е. $c = c(x)$). Учитывая это, для решения динамических задач в рассматриваемом случае можно пользоваться разработанными ранее методиками оптимизации конструкций, взаимодействующих с упругим основанием и нагруженных статическими силами.

В качестве примера рассмотрим самосопряженную задачу минимизации объема тонкостенной конструкции при ограничении на амплитудное значение работы прикладываемых сил (на интегральную жесткость). Краевая задача для отыскания амплитудной функции прогибов $u(x)$ имеет вид (1.2), (1.3). Минимизируется функционал объема

$$J = \int_{\Omega} h \, d\Omega$$

при ограничении по жесткости

$$J_1 = \int_{\Omega} Qu \, d\Omega = C_1,$$

где $Q(x)$ — амплитудная функция нагрузки. Дифференциальное уравнение (1.18) для определения сопряженной переменной $v(x)$

с учетом самосопряженности основных операторов C , M и N примет вид

$$Cv - \omega^2 Mv = -\lambda_1 Q \quad (1.22)$$

с граничным условием

$$(Nv)_\Gamma = 0. \quad (1.23)$$

Видно, что краевая задача (1.22), (1.23) совпадает с краевой задачей (1.2), (1.3) для определения функции прогибов $u(x)$ с точностью до множителя $-\lambda_1$ в правой части уравнения (1.22). Из сравнения этих задач вытекает, что

$$v(x) = -\lambda_1 u(x).$$

Если на переменную проектирования $h(x)$ не наложено дополнительных требований, то условие оптимальности (1.21) сводится к равенству

$$B_c(u, u) - \omega^2 B_M(u, u) = \text{const},$$

означающему, что для оптимальной конструкции, рассчитываемой на гармонические воздействия и установившиеся режимы колебаний, разность между распределениями потенциальной и кинетической энергии постоянна по конструкции.

5.2.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕЙ И БАЛОК ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Задачам проектирования одномерных конструкций (стержней и балок), совершающих установившиеся гармонические продольные и поперечные колебания, посвящено значительное число публикаций [53, 99, 100, 120, 155, 168, 171, 172, 191, 211, 231]. В этих работах на основе различных подходов решаются задачи оптимизации таких характеристик конструкций, как вес, податливость, жесткость, работа внешних сил. При этом используются дискретные и континуальные модели. В [170, 191, 211] был сформулирован и доказан вариационный принцип, согласно которому решение краевых задач для определения амплитудных функций состояния конструкций, совершающих установившиеся вынужденные гармонические колебания, эквивалентно минимизации некоторого квадратичного функционала при соответствующих граничных условиях. Данный принцип использовался в [170, 191, 211] при решении ряда конкретных оптимальных задач. Однако при этом существенным было условие, что частота вынужденных колебаний не превосходит первую собственную частоту. Вопрос обобщения этого вариационного принципа на случай произвольной перерезонансной частоты вынужденных колебаний подробно рассматривался в разд. 1.8.

Задачи оптимального проектирования стержней и балок, совершающих вынужденные гармонические колебания, исследовались в работах [99, 100, 231]. При этом получение необходимых условий оптимальности основывалось на введении переменных множителей Лагранжа (сопряженных переменных) и носило более общий характер, чем в работах [155, 191, 211], где при выводе необходимых условий оптимальности накладывались дополнительные ограничения на частоты возмущающих воздействий.

Следуя работе [100], рассмотрим консольный стержень переменного поперечного сечения, жестко заделанный на левом конце (в точке $x=0$). На правом конце ($x=l$) к стержню приложена действующая вдоль оси стержня гармоническая нагрузка $Q \sin \omega t$, где ω — заданная частота, Q — заданная амплитуда воздействия. Уравнение, описывающее установившиеся выпущенные продольные колебания стержня, и граничные условия записываются в виде

$$\frac{d}{dx} \left[Eh \frac{du}{dx} \right] + \rho \omega^2 hu = 0, \quad (2.1)$$

$$u(0) = 0, \quad (Eh \, du/dx)_{x=l} = Q. \quad (2.2)$$

Здесь $u(x)$, $h(x)$ — соответственно амплитудная функция продольных смещений и площадь поперечного сечения стержня, принимаемая в качестве переменной проектирования. Через E и ρ обозначены модуль упругости и плотность материала стержня. Уравнение (2.1) может быть переписано в эквивалентной форме

$$\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right) + \left(\lambda^2 u + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) / \left(\frac{du}{dx} \right) = 0, \quad (2.3)$$

где $\lambda^2 = \rho \omega^2 / E$.

Будем минимизировать функционал объема стержня

$$J = \int_0^l h(x) \, dx \quad (2.4)$$

за счет выбора оптимального распределения $h(x)$ при условии на прочность

$$|\psi| \leq 1. \quad (2.5)$$

Здесь $\psi = \sigma / \sigma_0$, где σ_0 — заданное допустимое напряжение $\sigma = E \, (du/dx)$.

Условие (2.5) может быть удовлетворено при помощи введения вспомогательной функции φ по формуле

$$\sin \varphi = \psi = \frac{E}{\sigma_0} \frac{du}{dx}. \quad (2.6)$$

Новая переменная φ определяется из условий минимума функционала (2.4).

Расширенный функционал Лагранжа записывается в виде [100]

$$J_L = \int_0^l \left[h + v_1 \left(\frac{1}{h} \left(\frac{dh}{dx} \right) + \left(\lambda^2 u + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \left(\frac{du}{dx} \right) \right) + v_2 \left(\frac{du}{dx} - \frac{\sigma_0}{E} \sin \varphi \right) \right] dx, \quad (2.7)$$

где через $v_1 = v_1(x)$ и $v_2 = v_2(x)$ обозначены переменные множители Лагранжа (сопряженные переменные).

Варирирование функционала (2.7) приводит к необходимым условиям оптимальности [100]

$$1 - \frac{v_1}{h^2} \frac{dh}{dx} - \frac{d}{dx} \left(\frac{v_1}{h} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv_1}{dx} = h, \quad (2.8)$$

$$\frac{v_1 \lambda^2}{du/dx} + \frac{d}{dx} \left[v_1 \left(\lambda^2 u + \frac{d^2 u}{dx^2} \right) \frac{1}{(du/dx)^2} \right] + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{v_1}{du/dx} \right) - \frac{dv_2}{dx} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{v_2 \sigma_0}{E} \cos \varphi = \frac{v_2 \sigma_0}{E} \sqrt{1 - \psi^2} = 0. \quad (2.10)$$

Из условий трансверсальности имеем

$$(v_1/h)_{x=0} = 0. \quad (2.11)$$

С помощью соотношений (2.8) — (2.11) находятся два решения оптимизационной задачи [100]. Для первого решения оптимальное распределение $h(x)$ имеет вид

$$h(x) = h(l) (\operatorname{ch}(\lambda l) / \operatorname{ch}(\lambda x))^2 \quad (2.12)$$

и доставляет функционалу (2.4) значение

$$J = Q \operatorname{sh}(\lambda l) \operatorname{ch}(\lambda l) / (\sigma_0 \lambda). \quad (2.13)$$

Для второго решения переменная проектирования дается выражением

$$h(x) = h(l) \exp [(\lambda^2/2)(l^2 - x^2)]. \quad (2.14)$$

При этом минимальное значение функционала J , вычисленное по формуле

$$J = \frac{Q \sqrt{2}}{\sigma_0 \lambda} \exp \left(\frac{\lambda l}{\sqrt{2}} \right)^2 \int_0^{\lambda l / \sqrt{2}} e^{-\xi^2} d\xi, \quad (2.15)$$

оказывается меньше, чем соответствующая величина, определяемая с помощью формулы (2.13). Следовательно, распределение площадей поперечных сечений (2.14) является оптимальным.

В работе [99] с использованием описанного подхода были найдены необходимые условия оптимальности в задаче минимизации

объема балки, совершающей установившиеся вынужденные поперечные колебания. Отметим, что в [99, 100] делается вывод о том, что в резонансных областях (когда частота приложенной гармонической нагрузки превышает фундаментальную частоту свободных колебаний) оптимальная балка (стержень) будет иметь участки постоянного поперечного сечения.

В случае когда частота вынужденных гармонических колебаний является малой величиной, для исследования оптимальных задач можно воспользоваться методами теории возмущений и получить приближенное аналитическое решение.

Рассмотрим в качестве примера задачу отыскания оптимального распределения толщины упругой балки минимального объема, опертой в точках $x = \pm l$ и нагруженной гармонически изменяющейся во времени силой Q в центре пролета [53]. Длина балки равна $2l$. Обозначая через b постоянную ширину прямоугольного поперечного сечения и через $h = h(x)$ его переменную высоту, запишем уравнение колебаний балки в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2 u}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho b h u = Q \delta(x) \quad (2.16)$$

с граничными условиями

$$u(\pm l) = 0, \quad \left(\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2 u}{dx^2} \right)_{x=\pm l} = 0. \quad (2.17)$$

Здесь $u = u(x)$ — амплитудная функция прогибов; E , ρ , ω — соответственно модуль Юнга, плотность материала балки и частота прикладываемых гармонических воздействий. Символом $\delta(x)$ обозначается обобщенная δ -функция Дирака.

Минимизируется объем балки

$$J = b \int_{-l}^l h dx \quad (2.18)$$

при ограничении на жесткость

$$J_1 = Qu(0) = C_1, \quad (2.19)$$

где C_1 — заданная константа. Условие жесткости (2.19) означает задание величины прогиба $u(0) = d$ ($d = C_1/Q$) в точке приложения силы. Условие оптимальности распределения толщины имеет вид

$$h^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 - \frac{4\rho\omega^2}{E} u^2 = \lambda. \quad (2.20)$$

Здесь λ — множитель Лагранжа. В предположении, что частота колебаний ω является малой величиной, запишем $\omega^2 = \varepsilon\omega_0^2$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Представим величины $h(x)$, $u(x)$, λ , J в виде рядов по малому параметру. Оставляя в разложениях

только по два первых члена, запишем

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0(x) + \varepsilon h_1(x), \\ u(x) &= u_0(x) + \varepsilon u_1(x), \\ \lambda &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1, \\ J &= J_0 + \varepsilon J_1. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Величины $h_0(x)$, $h_1(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, λ_0 , λ_1 , J_0 , J_1 не зависят от параметра ε . Первые члены разложений (2.21) $h_0(x)$, $u_0(x)$, λ_0 , J_0 являются решением оптимизационной задачи при $\varepsilon = 0$, т. е. в статическом случае ($\omega = 0$).

Учитывая симметрию задачи относительно точки $x = 0$, все дальнейшие рассмотрения проведем при $0 \leq x \leq l$. Уравнение колебаний (2.16) перепишется в виде

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2u}{dx^2} \right) - \omega^2 \rho b h u = 0 \tag{2.22}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=0} &= 0, & \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2u}{dx^2} \right) \right)_{x=0} &= Q, \\ u(l) &= 0, & \left(\frac{Ebh^3}{12} \frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=l} &= 0. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Минимизируемый функционал (2.18) запишем следующим образом:

$$J = 2b \int_0^l h dx. \tag{2.24}$$

Ограничение по жесткости (2.19) и условие оптимальности (2.20) останутся без изменений.

Получим соотношения, служащие для определения нулевого и первого приближений. Подставим ряды (2.21) в соотношения оптимизационной задачи (2.22) — (2.24), (2.19), (2.20). Следующий шаг заключается в разложении этих соотношений по малому параметру ε и приведении коэффициентов при одинаковых степенях ε . Так как эти уравнения должны удовлетворяться для произвольных значений ε , а последовательность степеней ε линейно независима, то коэффициенты при каждой степени ε (нулевой и первой) обращаются в нуль независимо. При этом получаются уравнения для определения искомых величин $h_0(x)$, $u_0(x)$, λ_0 , J_0 и $h_1(x)$, $u_1(x)$, λ_1 , J_1 . Эти уравнения будем решать последовательно сначала для нулевого, а затем для первого приближения. Нулевое приближение ($\varepsilon = 0$ или $\omega = 0$) соответствует статической задаче минимизации веса балки, нагруженной сосредоточенной силой Q в центре пролета, при ограничении на

величину прогиба при $x=0$. Решение этой задачи известно (см. [8]) и имеет вид

$$\begin{aligned} h_0(x) &= l \sqrt[3]{\frac{4Q}{Edb}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} \\ \lambda_0 &= \frac{9d^2}{4b^2l^2} \left(\frac{4Qb^2}{Ed}\right)^{2/3} \\ u_0(x) &= d \left(1 - \frac{x}{l}\right) \left(3 - 2 \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2}\right), \\ J_0 &= \frac{4l^2}{3} \sqrt{\frac{4Qb^2}{Ed}}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Величины первого приближения $h_1(x)$, $u_1(x)$, λ_1 , J_1 (поправки к нулевому приближению) определяются из решения краевой задачи

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{Ebh_0^3}{12} \frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{Ebh_0^2h_1}{4} \frac{d^2u_0}{dx^2} \right) - \omega_0^2 \rho b h_0 u_0 = 0, \quad (2.26)$$

$$\left(\frac{du_1}{dx} \right)_{x=0} = 0, \quad u_1(0) = 0, \quad (2.27)$$

$$\left(\frac{d}{dx} \left(\frac{Ebh_0^3}{12} \frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{Ebh_0^2h_1}{4} \frac{d^2u_0}{dx^2} \right) \right)_{x=0} = 0,$$

$$u_1(l) = 0, \quad \left(\frac{Ebh_0^3}{12} \frac{d^2u_1}{dx^2} + \frac{Ebh_0^2h_1}{4} \frac{d^2u_0}{dx^2} \right)_{x=l} = 0,$$

$$J_1 = 2b \int_0^l h_1 dx, \quad (2.28)$$

$$2h_0h_1 \left(\frac{d^2u_0}{dx^2} \right)^2 + 2h_0^2 \frac{d^2u_0}{dx^2} \frac{d^2u_1}{dx^2} - \frac{4\rho}{E} \omega_0^2 u_0^2 = \lambda_1. \quad (2.29)$$

Не приводя здесь соответствующих выкладок по интегрированию уравнений и вычислению констант, укажем лишь окончательный результат. Поправки $h_1(x)$ и J_1 имеют вид

$$\begin{aligned} h_1(x) &= \frac{2\omega_0^2 \rho l^3}{3} \sqrt[3]{\frac{db}{4QE^2}} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} \left[\frac{863}{315} - \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(6 - \frac{208}{35} \left(1 - \frac{x}{l}\right)^{1/2} + \frac{5}{3} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \right) \right], \\ J_1 &= \frac{928}{567} \omega_0^2 \rho b l^4 \sqrt{\frac{db}{4QE^2}}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Из приведенных формул следует, что величина поправки $h_1(x) > 0$ на всем интервале $0 < x < l$ и величина $J_1 > 0$. Следовательно, в рассматриваемой задаче для оптимальной балки при заданных Q и d потребуется больше материала, чем в статиче-

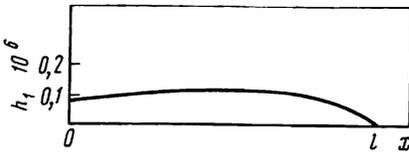


Рис. 5.1

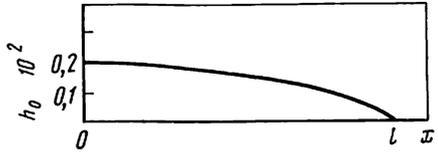


Рис. 5.2

ском случае, и колеблющаяся с частотой ω оптимальная балка по всему пролету должна быть толще, чем оптимальная балка, выдерживающая статическую нагрузку той же интенсивности. На рис. 5.1, 5.2 показаны соответственно распределения $h_1(x)$ и $h_0(x)$ для значений параметров

$$l = 0,5 \text{ м}, \quad Q = 20 \text{ Н}, \quad E = 7,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \quad d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \\ b = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad \omega_0 = 1 \text{ с}^{-1}, \quad \rho = 2700 \text{ кг/м}^3.$$

5.3.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ВЫНУЖДЕННЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

Рассмотрим задачу минимизации объема колеблющейся пластинки переменной толщины $h(x, y)$, квадратной в плане [53]

$$\Omega: -a/2 \leq x \leq a/2, \quad -a/2 \leq y \leq a/2$$

при двух вариантах закрепления краев: свободном опирании и жесткой заделке. Здесь Ω — область, занимаемая пластинкой; a — заданная положительная константа. Распределение амплитудной функции нагрузки по пластинке считается постоянным, $Q(x, y) = Q_0 = \text{const}$. Ограничения накладываются на распределения толщины пластинки

$$h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max} \quad (3.1)$$

и на допустимые величины амплитудной функции прогибов

$$\max_{x,y} |u(x, y)| = d, \quad (3.2)$$

где h_{\min} , h_{\max} , d — заданные константы ($h_{\min} \leq h_{\max}$, $d > 0$).

Для удобства проведения расчетов введем безразмерные переменные

$$x' = x/a, \quad y' = y/a, \quad u'(x, y) = u(x, y)/a, \\ d' = d/a, \quad h' = h/h_{\max}, \quad h'_{\min} = h_{\min}/h_{\max}, \\ h'_{\max} = 1, \quad Q'_0 = 12(1 - \nu^2)a^3Q_0/(Eh_{\max}^3), \quad J' = J/(h_{\max}a^2), \quad (3.3) \\ \omega' = \frac{\omega a^2}{h_{\max}} \sqrt{12\rho(1 - \nu^2)/E}.$$

Здесь через ν , E , ρ , ω обозначены коэффициент Пуассона, модуль Юнга, плотность материала и частота вынужденных колебаний пластинки соответственно. В новых переменных (штрихи опускаем) запишем уравнение для определения амплитудной функции прогибов

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \\ + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \omega^2 h u = Q_0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

с граничными условиями в случае шарнирного опирания пластинки

$$\begin{aligned} u(\pm 1/2, y) = 0, \quad (\partial^2 u / \partial x^2)_{x=\pm 1/2} = 0, \\ u(x, \pm 1/2) = 0, \quad (\partial^2 u / \partial y^2)_{y=\pm 1/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

или в случае жесткого защемления

$$\begin{aligned} u(\pm 1/2, y) = 0, \quad (\partial u / \partial x)_{x=\pm 1/2} = 0, \\ u(x, \pm 1/2) = 0, \quad (\partial u / \partial y)_{y=\pm 1/2} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Минимизируемый функционал объема материала пластинки представим следующим образом:

$$J = \int_{\Omega} \int h(x, y) dx dy \rightarrow \min_h. \quad (3.7)$$

Здесь Ω — область, занимаемая пластинкой ($\Omega: -1/2 \leq x \leq 1/2, -1/2 \leq y \leq 1/2$). Ограничения (3.1) на минимальное и максимальное допустимые значения переменной проектирования $h(x, y)$ примут вид

$$h_{\min} \leq h(x, y) \leq 1. \quad (3.8)$$

Обозначим через p параметр, введение которого в задачу обусловлено редукцией от локального ограничения на максимальные значения прогибов (3.2) к интегральному ограничению

$$J_p = \left(\frac{1}{\text{mes } \Omega} \int_{\Omega} \int u^p d\Omega \right)^{1/p} = d. \quad (3.9)$$

Этот переход осуществлен благодаря близости норм в пространствах непрерывных функций и функций, интегрируемых с p -й степенью для достаточно больших p [8]. Для упрощения выкладок в (3.9) принимается, что p — четное натуральное число, знак модуля у функции u исключается.

Для проведения анализа чувствительности и построения численного решения введем в рассмотрение сопряженную перемен-

ную $v(x, y)$. Тогда вариация расширенного функционала Лагранжа может быть представлена следующим образом:

$$\delta J_L = \iint_{\Omega} \delta h \, d\Omega + \iint_{\Omega} \left[3h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2(1-v) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \omega^2 uv \right] \delta h \, d\Omega. \quad (3.10)$$

Сопряженная переменная $v(x, y)$ определяется из решения краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^3 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2(1-v) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(h^3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \omega^2 h v = -\lambda (u/J_p)^{p-1} \quad (3.11)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} v(\pm 1/2, y) &= 0, & (\partial^2 v / \partial x^2)_{x=\pm 1/2} &= 0, \\ v(x, \pm 1/2) &= 0, & (\partial^2 v / \partial y^2)_{y=\pm 1/2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

соответствующими случаю шарнирного опирания краев пластинок, или

$$\begin{aligned} v(\pm 1/2, y) &= 0, & (\partial v / \partial x)_{x=\pm 1/2} &= 0, \\ v(x, \pm 1/2) &= 0, & (\partial v / \partial y)_{y=\pm 1/2} &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

в случае их жесткого защемления. Через λ в (3.11) обозначен множитель Лагранжа.

Последовательное уменьшение объема пластинки осуществлялось численно [53]. При построении улучшающих вариаций распределения толщины применялся метод проектирования градиентов. Выражение для δh , обеспечивающее неположительность δJ , может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \delta h &= -\tau \Lambda^\alpha (h, u, v), \\ \Lambda (h, u, v) &= 1 + 3h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2(1-v) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \omega^2 uv, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где α — целые нечетные числа; τ — достаточно малое положительное число (шаг по градиенту). Процесс варьирования переменной проектирования будет в этом случае сопряжен с решением краевых задач (3.4), (3.5) и (3.11), (3.12) для определения

функции прогибов и сопряженной переменной в случае шарнирно-опертой пластинки или краевых задач (3.4), (3.6) и (3.11), (3.13) в случае жесткого защемления краев. Множитель Лагранжа λ нужно определять каждый раз при помощи условия (3.9).

В рассматриваемой задаче построения улучшающих вариаций применяется прием, позволяющий уменьшать функционал объема и «автоматически» удовлетворять условию жесткости (3.9). Зависимости вариаций функционалов δJ и δJ_p от вариаций переменной проектирования δh имеют вид

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{\Omega} \delta h \, d\Omega = (e_1, \delta h)_{\Omega}, \\ \delta J_p &= \int_{\Omega} \left[3h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \omega^2 uv \right] \delta h \, d\Omega = (e_2, \delta h)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Улучшающая вариация переменной проектирования вычислялась по формуле

$$\delta h = \tau \left(-e_1 + \frac{(e_1, e_2)_{\Omega}}{(e_2, e_2)_{\Omega}} e_2 \right). \quad (3.16)$$

Ограничение (3.8) на минимальное и максимальное допустимые значения переменной проектирования учитывалось при помощи введения вспомогательной функции $\varphi(x, y)$, связанной в $h(x, y)$ соотношением

$$h(x, y) = (1 + h_{\min})/2 + (1 - h_{\min})/2 \sin \varphi(x, y). \quad (3.17)$$

При любых значениях функции φ переменная проектирования h удовлетворяет двусторонним ограничениям (3.8).

Для каждого «текущего» распределения h отыскание соответствующих распределений функции прогибов и сопряженной переменной выполнялось градиентным методом с использованием следующих вариационных формулировок, эквивалентных краевым задачам (3.4), (3.5), (3.6) и (3.11), (3.12), (3.13):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[h^3 \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - h\omega^2 u^2 - 2Q_0 u \right] d\Omega \rightarrow \min_u, \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[h^3 \left(\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) - \right. \\ \left. - h\omega^2 v^2 + 2(u/J_p)^{p-1} v \right] d\Omega \rightarrow \min_v \end{aligned} \quad (3.19)$$

при соответствующих краевых условиях.

Возможность перехода от краевых задач к вариационным формулировкам (3.18), (3.19) основывается на вариационном принципе, сформулированном и доказанном в работах [170, 191, 211] для частот вынужденных колебаний, меньших первой собственной частоты.

Для численной реализации градиентных процедур минимизации функционалов (3.18), (3.19) при соответствующих граничных условиях область Ω разбивалась параллельными прямыми $x = x_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$), $y = y_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) на квадратные ячейки со стороной Δ . Функциям $u(x, y)$ и $v(x, y)$ ставились в соответствие сеточные функции u_{ij} , v_{ij} , так что $u_{ij} = u(x_i, y_j)$, $v_{ij} = v(x_i, y_j)$. Для удобства записи и аппроксимации граничных условий вводились еще два внешних вспомогательных слоя точек. Частные производные $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 u / \partial x \partial y$ в узлах сетки аппроксимировались следующими конечно-разностными соотношениями:

$$\begin{aligned} (\partial^2 u / \partial x^2)_{ij} &= (u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}) / \Delta^2, \\ (\partial^2 u / \partial y^2)_{ij} &= (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}) / \Delta^2, \\ (\partial^2 u / \partial x \partial y)_{ij} &= (u_{i-1,j-1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1}) / 4\Delta^2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Частные производные $\partial^2 v / \partial x^2$, $\partial^2 v / \partial y^2$, $\partial^2 v / \partial x \partial y$ аппроксимировались соотношениями, аналогичными (3.20).

Расчеты проводились для шарнирно-опертых и жесткозакрепленных пластинок при различных параметрах ω , причем в силу симметрии задачи рассматривалась лишь одна четверть пластинки. На рис. 5.3, 5.4 показаны найденные в результате расчетов распределения толщины $h(x, y)$ шарнирно-опертой пластинки соответственно для случаев $\omega = 0$ (статическое нагружение) и $\omega = 10$. Показанные на рис. 5.3, 5.4 распределения отвечают значениям параметров $\Delta = 0,1$; $\nu = 0,3$; $\tau = 0,125$; $d = 0,01$; $h_{\min} = 0,25$; $Q_0 = 0,533$; $p = 100$. Из рис. 5.3, 5.4 видно, что эффективным является расположение материала в углах и центре шарнирно-опертых пластинок. С увеличением частоты ω возрастает количество материала, необходимого для обеспечения требуемой жесткости (объемы показанных пластинок отличаются в 1,26 раза).

На рис. 5.5, 5.6 приведены полученные в результате расчетов распределения толщин жесткозакрепленных пластинок соответственно для случаев $\omega = 0$ (статический случай) и $\omega = 15$. Для показанных распределений $h(x, y)$ максимальная допустимая величина прогиба равна $d = 0,0046$. Значения остальных параметров брались теми же, что и для шарнирно-опертых пластинок. Для уменьшения объема жесткозакрепленных пластинок при обеспечении условий жесткости эффективным оказывается расположение материала в центре пластинки и у середины ее краев. Объем колеблющейся пластинки превышает объем статически нагруженной пластинки в 1,19 раза.

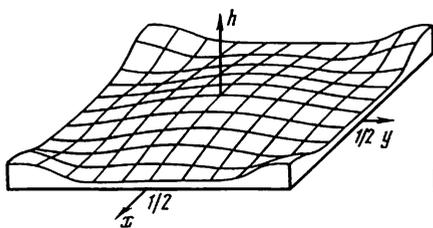


Рис. 5.3

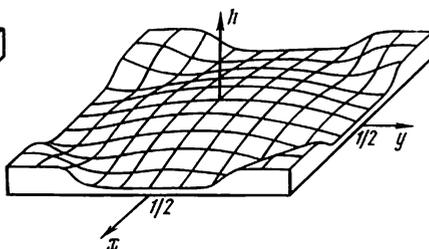


Рис. 5.4

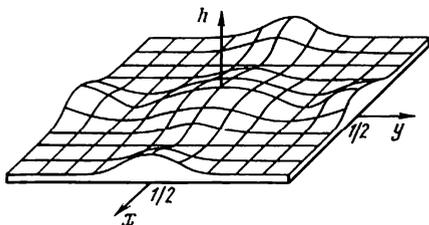


Рис. 5.5

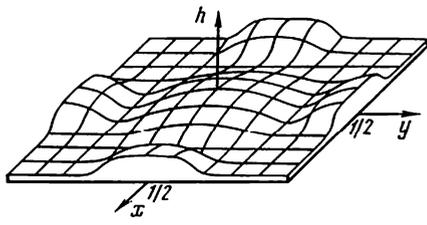


Рис. 5.6

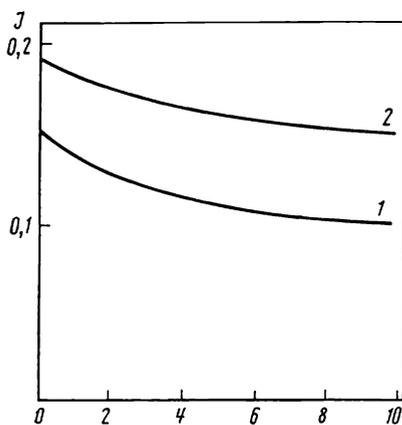


Рис. 5.7

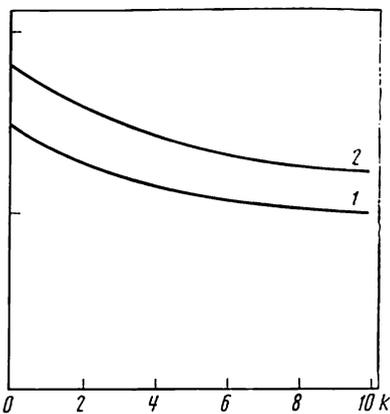


Рис. 5.8

Метод последовательной оптимизации позволяет добиться снижения объема материала шарнирно-опертой пластинки при $\omega = 10$ на 20,3 % по сравнению с пластинкой постоянной толщины, удовлетворяющей тому же ограничению по жесткости. В случае жесткозашемленной пластинки для $\omega = 15$ относительный выигрыш за счет оптимизации составляет соответственно 36,6 %.

На рис. 5.7 кривыми 1, 2 показаны зависимости функционала объема J от номера улучшающей итерации k в случае шарнирно-опертой пластинки для $\omega = 0$ и $\omega = 10$ соответственно. На рис. 5.8 кривыми 1, 2 представлены аналогичные зависимости при $\omega = 0$ и $\omega = 15$ для жесткозашемленной пластинки.

5.4.

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ, СОВЕРШАЮЩИХ ВЫНУЖДЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Вынужденные установившиеся колебания топкостенных коп-струкций, подверженных действию гармонических нагрузок, опи-сываются уравнением

$$[C(h) - \omega^2 M(h)]u(x, y) = Q(x, y). \quad (4.1)$$

Здесь ω — частота вынужденных гармонических колебаний; $u(x, y)$ — амплитудная функция ($x, y \in \Omega$); $Q(x, y)$ — распре-деление амплитуд вынужденных сил, действующих по гармониче-скому закону; $C(h)$, $M(h)$ — соответственно жесткостной и инер-ционный операторы, зависящие от переменной проектирования $h(x, y)$, характеризующей распределение материала в конст-рукции. Оператор $C(h)$ определен на функциях $u(x, y)$ в области Ω с кусочно-гладкой границей Γ . Функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям

$$(B_i u(x, y))_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad (4.2)$$

где B_i — линейные однородные дифференциальные операторы.

Рассмотрим класс самосопряженных задач (4.1), (4.2). В об-ласти Ω для функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих усло-виям (4.2), выполняется равенство $(C(h)u, v) = (u, C(h)v)$. Круг-лыми скобками обозначено скалярное произведение в $L_2(\Omega)$:

$$(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} u(x, y) v(x, y) d\Omega. \quad (4.3)$$

Оператор $C(h)$ положительно определен, т. е. существует такая постоянная $\gamma > 0$, что выполняется неравенство $(C(h)u, u) \geq \gamma \|u\|^2$, где $\|u\|^2 = (u, u)$. Будем рассматривать лишь слабые ре-шения краевой задачи (4.1), (4.2), принадлежащие соответ-ствующему энергетическому пространству, порожденному опера-тором $C(h)$ [81].

Допустим, что возможные распределения толщины конструкции удовлетворяют ограничениям

$$\int_{\Omega} h(x, y) d\Omega \leq C_1, \\ \int_{\Omega} (\nabla h)^2 d\Omega \leq C_2, \quad (4.4)$$

$$0 < h_{\min} \leq h(x, y) \leq h_{\max},$$

где C_1 , C_2 , h_{\min} , h_{\max} — заданные константы. Первые два условия имеют вид интегральных неравенств и представляют собой огра-

печения на объем материала и производные изменения толщины. Третье условие наложено на минимальное и максимальное допустимые значения толщины.

Рассмотрим задачу оптимизации [30]. Для заданной частоты ω выпущенных гармонических колебаний требуется найти такое распределение толщины конструкции $h(x, y)$, удовлетворяющее условиям (4.4), при котором максимальное значение величины потенциальной энергии деформации конструкции достигало бы минимального значения:

$$\Pi(h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} u(x, y) [C(h) u(x, y)] d\Omega \rightarrow \min_h. \quad (4.5)$$

Функционал (4.5) характеризует податливость конструкции. Одновременно можно рассмотреть задачу минимизации максимальной величины кинетической энергии по всем допустимым распределениям толщины [118, 154]:

$$T(h) = \frac{\omega^2}{2} \int_{\Omega} M(h) u^2(x, y) d\Omega \rightarrow \min_h. \quad (4.6)$$

Заметим, что задачи (4.5), (4.6) допускают двойственную постановку: минимизация объема конструкции при ограничениях на величины функционалов (4.5) или (4.6) и двух последних ограничениях (4.4). Так как решение прямой задачи позволяет получить решение двойственной задачи, будем рассматривать лишь исходные прямые задачи (4.5), (4.6).

Для вычисления вариаций функционалов и построения необходимых условий экстремума рассмотрим задачу на собственные значения, соответствующую (4.1), (4.2), предполагая выполненными условия (4.4):

$$C(h) \varphi^i(x, y) - \lambda_i M(h) \varphi^i(x, y) = 0, \quad (4.7)$$

где λ_i , $\varphi^i(x, y)$ — соответственно собственное число — квадрат частоты свободных колебаний и собственная функция — форма колебаний. Система функций φ^i полна в энергетическом пространстве, порожденном оператором $C(h)$, и ортонормирована [81]:

$$\int_{\Omega} M(h) \varphi^i(x, y) \varphi^j(x, y) d\Omega = \delta_{ij}, \quad (4.8)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Собственные числа λ_i положительны и образуют монотонно возрастающую последовательность. Для тонкостенных конструкций $M(h) = \rho h$, где ρ — плотность материала.

Дадим приращение функции толщины $h(x, y)$ в виде $\varepsilon \delta h(x, y)$, где ε — достаточно малое число. В силу ограничений (4.4) функция $\delta h(x, y)$ не является произвольной при допустимом h . Вычислим вариацию амплитудной функции $\delta u(x, y)$. С этой целью

рассмотрим дифференциальный оператор

$$C_h(h, \delta h) = [dC(h + \varepsilon \delta h)/d\varepsilon]_{\varepsilon=0}.$$

Функция $\delta u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (4.1), записанному в вариациях с однородными краевыми условиями (4.2):

$$[C(h) - \omega^2 M(h)] \delta u = -[C_h(h, \delta h) - \omega^2 \rho \delta h] u.$$

Будем искать δu в виде ряда по собственным функциям задачи (4.7) $\delta u = a_1 \varphi^1 + a_2 \varphi^2 + \dots$, где a_i — коэффициенты ряда. Подставляя δu в полученное уравнение и умножая его скалярно последовательно на φ^i , получим выражение для коэффициентов ряда

$$a_i = ((C_h(h, \delta h) u, \varphi^i) - \omega^2 \rho (\delta h u, \varphi^i)) / (\omega^2 - \lambda_i).$$

С другой стороны, функция $u(x, y)$ представляется в виде ряда по собственным функциям φ^i :

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Q(x, y), \varphi^i) \varphi^i}{(\lambda_i - \omega^2)}. \quad (4.9)$$

Так как оператор $C_h(h, \delta h)$ самосопряженный, то можно записать

$$(C_h(h, \delta h) \varphi^j, \varphi^i) = \int_{\Omega} g_h(\varphi^i, \varphi^j) \delta h \, d\Omega.$$

Последнее равенство служит определением формы $g_h(\varphi^i, \varphi^j)$. Отметим, что форма $g_h(\varphi^i, \varphi^j)$ симметричная, т. е. $g_h(\varphi^i, \varphi^j) = g_h(\varphi^j, \varphi^i)$. В случае пластинки имеем

$$g_h(\varphi^i, \varphi^j) = \frac{Eh^2}{4(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial y^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \varphi^j}{\partial x \partial y} \right]. \quad (4.10)$$

Учитывая вид коэффициентов a_i и равенство (4.9), получим выражение для вариации $\delta u(x, y)$, зависящее от δh :

$$\delta u(x, y) = - \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(Q, \varphi^i) (Q, \varphi^j) u_i(x, y) \int_{\Omega} (g_h(\varphi^i, \varphi^j) - \rho \omega^2 \varphi^i \varphi^j) \delta h \, d\Omega}{(\lambda_i - \omega^2) (\lambda_j - \omega^2)^2},$$

откуда можно получить выражение для вариации функционала (4.5)

$$\begin{aligned} \delta \Pi(h, \delta h) &= \int_{\Omega} \delta u C(h) u \, d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u C_h(h, \delta h) u \, d\Omega = \\ &= - \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(Q, \varphi^i) (Q, \varphi^j) \int_{\Omega} [1/2 (\lambda_i + \omega^2) g_h(\varphi^i, \varphi^j) - \lambda_i \omega^2 \rho \varphi^i \varphi^j] \delta h \, d\Omega}{(\lambda_i - \omega^2) (\lambda_j - \omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Аналогичная формула имеет место для функционала (4.6):

$$\begin{aligned} \delta T(h, \delta h) &= \rho\omega^2 \int_{\Omega} hu\delta u \, d\Omega + \frac{\rho\omega^2}{2} \int_{\Omega} u^2\delta h \, d\Omega = \\ &= -\rho\omega^2 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{(Q, \varphi^i)(Q, \varphi^j) \int_{\Omega} [g_h(\varphi^i, \varphi^j) - \rho/2(\lambda_i + \omega^2)\varphi^i\varphi^j] \delta h \, d\Omega}{(\lambda_i - \omega^2)(\lambda_j - \omega^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Формулы (4.11), (4.12) позволяют выделить главную часть вариации функционалов (4.5), (4.6) при различных значениях частоты вынужденных колебаний ω . Положим $\theta_i^2 = \lambda_i/\omega^2$ и введем величину $\alpha_i^2 = |\theta_i^2 - 1|$. Пусть частота вынужденных колебаний ω такова, что для некоторого i выполняется неравенство $|\lambda_i - \omega^2| \ll \omega^2$. В этом случае для данного номера i величину α можно считать малым параметром. Используя разложение по малому параметру из (4.11) и (4.12), можно выделить главные части, обозначив их $\delta\Pi_1(h, \delta h)$ и $\delta T_1(h, \delta h)$:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_1(h, \delta h) &= \delta T_1(h, \delta h) = \\ &= \mp \frac{(Q, \varphi^i)^2}{\omega^4} \int_{\Omega} [g_h(\varphi^i, \varphi^i) - \lambda_i(\varphi^i)^2] \delta h \, d\Omega. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Знак «минус» соответствует случаю $1 - \theta_i^2 > 0$, а знак «плюс» — $1 - \theta_i^2 < 0$.

Покажем, что формула (4.13) отличается от формулы, задающей вариацию i -го собственного числа задачи (4.7) лишь числовым множителем. С этой целью запишем уравнение (4.7) в вариациях

$$[C(h) - \lambda_i\rho h] \delta\varphi^i = -[C_h(h, \delta h) - \lambda_i\rho\delta h] \varphi^i + \delta\lambda_i h \varphi^i. \quad (4.14)$$

Представим вариацию $\delta\varphi^i$ в виде ряда $\sum_{i=1}^{\infty} b_i \varphi^i$ с коэффициентами b_i . Подставляя выражение для $\delta\varphi^i$ в вариационное уравнение (4.14), умножая скалярно на φ^i ($i=1, 2, \dots$), в силу альтернативы Фредгольма [62] получим, что все коэффициенты b_k , кроме случая $k=i$, определяются однозначно. При $k=i$ условие разрешимости дает формулу для вариации i -го собственного значения

$$\delta\lambda_i = \int_{\Omega} [g_h(\varphi^i, \varphi^i) - \lambda_i(\varphi^i)^2] \delta h \, d\Omega,$$

которая совпадает с интегралом, стоящим в выражении (4.13).

Покажем, что при $\alpha_i \rightarrow 0$ решение задачи минимизации функционалов (4.5), (4.6) с ограничениями (4.4) стремится к решению задачи на экстремум i -го собственного значения задачи (4.7)

при тех же ограничениях. Заметим, что решение последней задачи во многих случаях хорошо известно [29, 31, 72, 106, 107].

Допустим, что $\omega^2 < \lambda_i$, т. е. $\theta_i^2 > 1$. Необходимое условие минимума i -го собственного значения при условиях (4.4) имеет вид

$$\delta\lambda_i(h, \delta h) \leq 0, \quad \delta h \in \mathcal{H}, \quad (4.15)$$

где \mathcal{H} — множество всех допустимых вариаций δh , при которых функция $h + \delta h$ удовлетворяет ограничениям (4.4). Из соотношения (4.13) следует равенство

$$\delta\Pi(h + \delta h) = \delta\Pi_1(h + \delta h) + \alpha_i^2 W(h, \delta h),$$

где $W(h, \delta h)$ — ограниченный функционал при $\alpha_i^2 \rightarrow 0$. Так как $\delta\Pi_1(h, \delta h) = -\kappa \delta\lambda_i(h + \delta h)$, $\kappa = \omega^4 / (Q, \varphi^i)^2$, учитывая (4.15), получим $\delta\Pi(h, \delta h) \geq \alpha_i^2 W(h, \delta h)$, $\delta h \in \mathcal{H}$. В силу произвольности малой величины α_i^2 отсюда следует, что выполняются необходимые условия минимума для $\Pi(h)$ при выполнении (4.4), $\delta\Pi(h, \delta h) \geq 0$, $\delta h \in \mathcal{H}$, что и требовалось доказать.

Пусть максимальное значение функционала $\lambda_i(h)$ достигается при некотором допустимом $h(x, y)$. Тогда при значениях частоты ω , для которых $1 - \theta_i^2 > 0$, распределение толщины $h(x, y)$ будет доставлять функционалу (4.5) значение, близкое к минимальному при $\alpha_i \rightarrow 0$. Если частота ω такова, что $1 - \theta_i^2 < 0$, то при $\alpha_i \rightarrow 0$ минимальное значение функционала $\lambda_i(h)$ доставляет функционалу (4.5) значение, близкое к минимальному.

Таким образом, если ω близка к одной из собственных частот свободных колебаний конструкции, оставаясь меньшей, то оптимальное распределение $h(x, y)$ стремится к распределению, при котором частота свободных колебаний достигает максимального значения. С другой стороны, если частота вынужденных гармонических колебаний больше частоты свободных колебаний $\sqrt{\lambda_i}$, оставаясь близкой к ней, то оптимальное распределение $h(x, y)$, доставляющее минимум функционалу (4.5), стремится к распределению, при котором частота свободных колебаний достигает своего минимума.

Иными словами, не существует оптимального в указанном смысле распределения жесткостей для интервалов частот вынужденных колебаний, содержащих хотя бы одну собственную частоту конструкции. Аналогичный вывод можно сделать, проводя анализ формулы (4.12) для функционала (4.6). Оптимальное распределение $h(x, y)$ при вынужденных грамопических колебаниях в значительной степени зависит от частоты внешнего воздействия.

В качестве расчетного примера рассмотрим свободно опертую прямоугольную пластинку переменной толщины, удовлетворяющую условиям (4.4) [30]. Для решения задачи оптимизации применим метод, основанный на предположениях относительно малости толщины варьированного слоя [29, 31]. Прямоугольная пла-

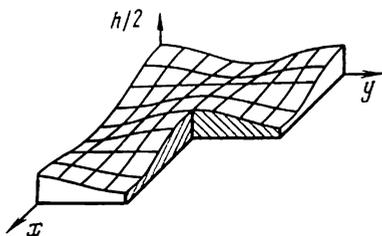


Рис. 5.9

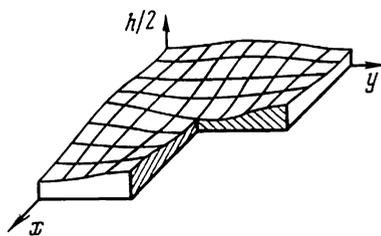


Рис. 5.10

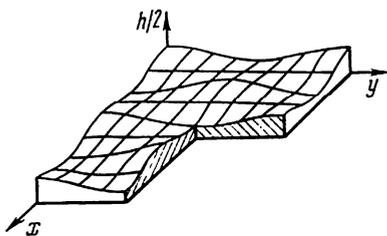


Рис. 5.11

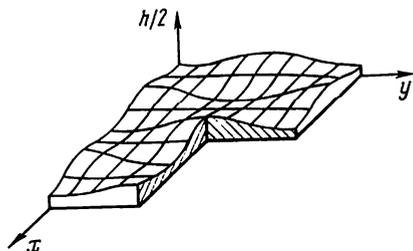


Рис. 5.12

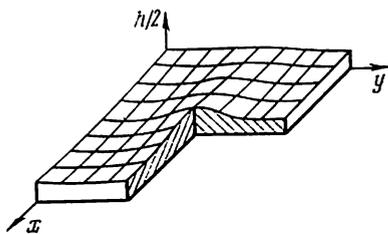


Рис. 5.13

стинка нагружена гармонической силой $Q(x, y) = 1$, если $0,5 \leq x \leq 1$, и $Q(x, y) = 0$, если $0 \leq x < 0,5$; $0 \leq y \leq 1$.

На рис. 5.9—5.13 представлены оптимальные распределения толщины (в безразмерных переменных) при различных значениях частоты вынужденных гармонических колебаний.

Рис. 5.9 соответствует случаю $\omega^2 = 0,8\lambda_1$. Полученное распределение толщины качественно совпадает с распределением, соответствующим максимальному значению первой частоты свободных колебаний [107]. Рис. 5.10 соответствует случаю $\omega^2 = 1,2\lambda_1$. Выпуклости на рис. 5.9 сменяются вогнутостями на рис. 5.10. Это распределение переменной проектирует вывод о зависимости форм распределения толщин от того, с какой стороны частота вынужденных гармонических колебаний приближается к частоте свободных колебаний. На рис. 5.11 показаны оптимальные распределения толщин для случая $\omega^2 = 0,9\lambda_2$, а на рис. 5.12 — $\omega^2 = 1,2\lambda_2$. На рис. 5.13 приведено распределение толщин, соответствующее частоте вынужденных гармонических колебаний $\omega^2 = 0,5\lambda_2$, т. е. случаю, когда частота находится на приблизительно равном расстоянии от λ_1 и λ_2 .

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ АЭРОУПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КРЫЛА БОЛЬШОГО УДЛИНЕНИЯ

При движении летательного аппарата в потоке газа возможно возникновение динамической неустойчивости конструкции — флаттера, который проявляется в быстром нарастании амплитуд колебаний, приводящих к разрушению всей конструкции или некоторых ее частей. В реальных конструкциях летательных аппаратов существуют разнообразные формы флаттера [98, 110], такие, как изгибно-крутильный флаттер крыла, флаттер фюзеляжа, оперения, изгибно-элеронный флаттер и т. д. Возникновение разнообразных форм флаттера зависит от упругомассовой компоновки летательного аппарата, геометрии конструкции, ее аэродинамических характеристик.

При проектировании конструкций, подверженных явлению флаттера, важное значение приобретает анализ конструктивных решений с использованием упрощенных математических моделей [27, 110]. Одной из простейших моделей крыла большого удлинения является балочная модель, которая широко используется при анализе динамики крыльев летательных аппаратов.

Рассмотрим малые колебания в потоке газа упругого крыла большого удлинения, моделируемого консольной балкой, показанного на рис. 5.14. Координатная ось Oz на этом рисунке направлена перпендикулярно заделке крыла (ось Ox) и ориентирована по оси жесткости балки. Малые колебания крыла около положения равновесия в потоке газа описываются следующей системой дифференциальных уравнений [47]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - mx_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \\ = C_y^{\alpha} \rho b V_s^2 \left[\theta + \frac{b}{V_s} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial u}{\partial t} \right], \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(GI_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - mx_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \\ = C_m^{\alpha} \rho b^2 V_s^2 \left[\theta + \frac{b}{V_s} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16C_m^{\alpha}} \right) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1}{V_s} \frac{\partial u}{\partial t} \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $u(z, t)$, $\theta(z, t)$ — функция прогиба и угла поворота сечения крыла относительно упругой оси; $EI(z)$, $GI_p(z)$ — жесткости крыла на изгиб и кручение; $m(z)$ — распределенная масса крыла; $I_m(z) = m(z)r^2(z)$ — массовый момент инерции ($r(z)$ — радиус инерции); C_y^{α} , C_m^{α} — аэродинамические коэффициенты подъемной силы и момента; $b(z)$ — хорда крыла; $x_m(z)$ — расстояние от оси жесткости крыла до центра масс; $x_0(z)$ — расстояние от пе-

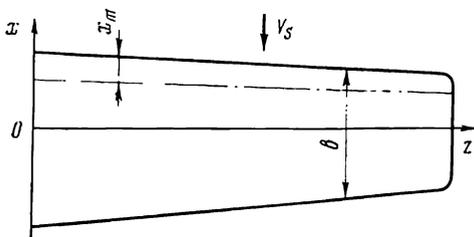


Рис. 5.14

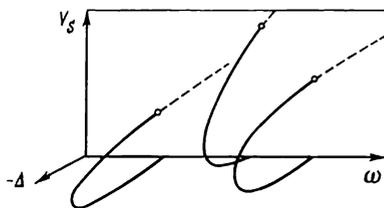


Рис. 5.15

редней кромки крыла до упругой оси; ρ — плотность газа; V_s — скорость потока.

Граничные условия для $u(z, t)$ и $\theta(z, t)$ имеют вид

$$u(0, t) = (\partial u / \partial z)_{z=0} = 0, \quad \theta(0, t) = 0, \\ \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=l} = \frac{\partial}{\partial z} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=l} = 0, \quad \left(GI_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=l} = 0, \quad (5.2)$$

где l — полуразмах крыла.

Решение линейной однородной системы уравнений (5.1) ищем в виде

$$u(z, t) = u(z) e^{\lambda t}, \quad \theta(z, t) = \theta(z) e^{\lambda t}. \quad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (5.1), (5.2), исключим временную переменную. В результате получим краевую задачу на собственные значения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + m\lambda^2 u - mx_m \lambda^2 \theta = \\ = C_y^\alpha \rho b V_s^2 \left[\theta + \frac{b}{V_s} \lambda \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) \theta - \frac{\lambda}{V_s} u \right], \\ - \frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{d\theta}{dz} \right) - m\lambda^2 x_m u + mr^2 \lambda^2 \theta = \\ = C_m^\alpha \rho b^2 V_s^2 \left[\theta + \frac{b\lambda}{V_s} \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16C_m^\alpha} \right) \theta - \frac{\lambda}{V_s} u \right], \quad (5.4)$$

$$u(0) = \left(\frac{du}{dz} \right)_{z=0} = 0, \quad \theta(0) = 0, \\ \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=l} = \frac{d}{dz} \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=l} = 0, \quad \left(GI_p \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=l} = 0, \quad (5.5)$$

где $\lambda = \Delta + i\omega$ — комплексное собственное число; Δ , ω — декремент и частота колебаний; $u(z)$, $\theta(z)$ — комплексные собственные функции.

Анализ аэроупругой устойчивости крыла в потоке газа осуществляется следующим образом. При отсутствии потока ($V_\infty = 0$) краевая задача (5.4), (5.5) и соотношения (5.3) описывают свободные изгибно-крутильные колебания консольного крыла. Решением системы уравнений (5.4) с крайевыми условиями (5.5) в этом случае являются набор собственных чисел — квадратов частот свободных колебаний и действительные функции — формы свободных колебаний. Если скорость потока становится отличной от нуля, то изменяется и спектр задачи на собственные значения. Собственные числа задачи (5.4), (5.5) непрерывно зависят от параметра — скорости потока газа V_∞ . Следовательно, можно построить кривые, характеризующие изменение собственных чисел в зависимости от скорости потока газа (рис. 5.15). Поскольку зависимость собственных значений от скорости потока газа является неявной, то для построения характеристических кривых требуется многократное решение задачи (5.4), (5.5). При малых значениях скорости потока V_∞ все характеристические кривые находятся в области отрицательных значений декрементов колебаний, т. е. при этих значениях скорости потока крыло не теряет устойчивость. При возрастании скорости потока газа одна из кривых может пересечь плоскость $\Delta = 0$ и перейти в область положительных декрементов, что соответствует потере устойчивости. Различаются два основных типа аэроупругой неустойчивости: динамическая неустойчивость — флаттер, которой соответствует $\Delta \geq 0$, $\omega \neq 0$, и статическая неустойчивость — дивергенция, характеризующаяся $\Delta \geq 0$, $\omega = 0$. Значение скорости потока, при которой наступает неустойчивость ($\Delta = 0$), называется в теории аэроупругости критической скоростью.

В дальнейшем колебания крыла, соответствующие определенной характеристической кривой, будем называть тоном колебаний, а саму кривую — ветвью. Каждому тону может соответствовать свое значение критической скорости аэроупругой устойчивости, так как каждая ветвь характеристических кривых может пересечь плоскость $\Delta = 0$. В силу того что возбуждение колебаний крыла может произойти по любому тону, нас будет интересовать минимальная критическая скорость аэроупругой устойчивости. Возможна ситуация, когда крыло теряет устойчивость по двум или более тонам колебаний. В этом случае говорят о кратной критической скорости.

Введем некоторые характерные константы b_r , I_r , m_r , обозначим основные параметры

$$I' = I/I_r, \quad (GI_p)' = GI_p l^2 / (EI_r b_r^2), \quad h = m/m_r,$$

$$b' = b/b_r, \quad x'_m = x_m/b_r, \quad r' = r/b_r, \quad x'_0 = x_0/b_r,$$

$$(\lambda')^2 = \lambda^2 (m_r l / (EI_r)), \quad q^2 = V_\infty^2 \rho l^4 / (EI_r), \quad k = b_r \sqrt{\rho/m_r}, \quad z' = z/l.$$

Опуская штрихи у безразмерных переменных, систему уравнений и граничные условия (5.4), (5.5) можно записать следующим

образом:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + \lambda^2 h u - \lambda^2 h x_m \theta = \\ & = C_y^\alpha q^2 b \left[\theta + \theta b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) k \frac{\lambda}{q} - k \frac{\lambda}{q} u \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{d\theta}{dz} \right) - \lambda^2 h x_m \theta + \lambda^2 h r^2 \theta = \\ & = C_m^\alpha q^2 b \left[\theta + \theta b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16 C_m^\alpha} \right) k \frac{\lambda}{q} - k \frac{\lambda}{q} u \right], \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$u(0) = (du/dz)_{z=0} = 0, \quad \theta(0) = 0,$$

$$\left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=1} = \frac{d}{dz} \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=1} = 0, \quad \left(GI_p \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=1} = 0.$$

Для тонкостенной конструкции кессона крыла большого удлинения можно получить зависимость между $EI(z)$, $GI_p(z)$ и $h(z)$:

$$EI(z) = h(z) \chi_b(z),$$

$$GI_p(z) = h(z) \chi_t(z),$$

где χ_b , χ_t — заданные функции, зависящие от конструкции крыла. Изменяя функцию $h(z)$, т. е. изменяя массовые и жесткостные характеристики крыла, можно изменять и критическое значение q^* (значение q , при котором происходит потеря устойчивости, т. е. $\text{Re } \lambda = 0$).

Получим формулы, характеризующие чувствительность критических параметров аэроупругой устойчивости к малым вариациям распределения материала по размаху крыла. С этой целью введем сопряженную систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right) + \lambda^2 h v - \lambda^2 h x_m s + C_y^\alpha b q k \lambda v + C_m^\alpha q b^2 k \lambda s = 0, \\ & - \frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{ds}{dz} \right) - \lambda^2 h x_m v + \lambda^2 h r^2 s - \\ & - C_y^\alpha q^2 b v \left[1 + b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) k \frac{\lambda}{q} \right] - \\ & - C_m^\alpha q^2 b^2 s \left[1 + b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16 C_m^\alpha} \right) k \frac{\lambda}{q} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

с краевыми условиями

$$\begin{aligned} v(0) = \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=0} = 0, \quad s(0) = 0, \\ \left(EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=1} = \frac{d}{dz} \left(EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right)_{z=1} = 0, \quad \left(GI_p \frac{ds}{dz} \right)_{z=1} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Система уравнений (5.8), (5.9) представляет собой линейную краевую задачу на собственные значения; λ — собственное число; $v(z)$, $s(z)$ — сопряженные собственные функции. Заметим, что в силу сопряженности задач [58], системы уравнений (5.6), (5.7) и (5.8), (5.9) при одинаковых значениях параметра q имеют одинаковые собственные значения. Следовательно, для этих систем совпадают характеристические кривые. Таким образом, совпадают также значения q^* для каждого тона колебаний.

Для того чтобы получить зависимость малых вариаций скорости потока δq и собственных значений $\delta \lambda$ от вариаций распределения материала в крыле δh , проварьируем систему уравнений (5.6) по всем входящим параметрам. Собственные функции u , θ получают вариации δu и $\delta \theta$. Умножим затем первое уравнение в вариациях на $v(z)$, а второе — на $s(z)$. Проинтегрируем полученные соотношения по отрезку $[0, 1]$ и результаты интегрирования сложим. Выполнив интегрирование по частям и приняв во внимание систему уравнений (5.8) с крайевыми условиями (5.9), получим следующее вариационное уравнение:

$$N_\lambda \delta \lambda + N_q \delta q + \int_0^1 I_m \delta h dz = 0, \quad (5.10)$$

где

$$N_q = \int_0^1 \left\{ C_y^\alpha b \left[2q\theta v + \theta v b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) k \lambda - kuv \lambda \right] - \right. \\ \left. - C_m^\alpha b^2 \left[2q\theta s + \theta s b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16C_m^\alpha} \right) k \lambda - k \lambda u s \right] \right\} dz,$$

$$N_\lambda = \int_0^1 \left\{ 2\lambda h (uv - x_m \theta v - x_m u s + r^2 \theta s) - \right. \\ \left. - C_y^\alpha q b \left[r \theta b \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} \right) k + kuv \right] - \right. \\ \left. - C_m^\alpha q b^2 \left[kus - b \theta s \left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{b} - \frac{\pi}{16C_m^\alpha} \right) \right] \right\} dz,$$

$$I_m(z) = \gamma_b \frac{d^2 u}{dz^2} \frac{d^2 v}{dz^2} + \lambda^2 (uv - x_m \theta v - x_m u s + \\ + r^2 \theta s) + \gamma_t \frac{d\theta}{dz} \frac{ds}{dt}.$$

Полученное вариационное соотношение (5.10) позволяет провести анализ изменения характеристических кривых в зависимости от малых вариаций распределения материала в крыле δh .

Для фиксированного значения скорости потока $\delta q = 0$. Таким образом, для каждого тона колебаний получим соотношение

$$\delta \lambda = - \left(\int_0^1 I_m \delta h dz \right) / N_\lambda.$$

Взяв его действительную часть, получим выражение для вариации декремента колебаний, зависящей от вариации δh при фиксированном значении скорости потока:

$$\delta\lambda = \operatorname{Re} \delta\lambda = - \operatorname{Re} \left(\int_0^1 I_m \delta h dz / N_\lambda \right). \quad (5.11)$$

Аналогично, взяв мнимую часть, можно вычислить вариацию частоты $\delta\omega$, зависящую от вариации δh :

$$\delta\omega = \operatorname{Im} \delta\lambda = - \operatorname{Im} \left(\int_0^1 I_m \delta h dz / N_\lambda \right). \quad (5.12)$$

Допустим, что нас интересует выражение для вариации критической скорости аэроупругой устойчивости, зависящее от вариации δh . Критическая скорость аэроупругой устойчивости характеризуется равенством нулю декремента колебаний, т. е. $\operatorname{Re} \delta\lambda = 0$. Учитывая это и деля выражения, записанные в левой части вариационного уравнения (5.10), на N_λ , получим следующее соотношение:

$$\delta q^* \operatorname{Re} \frac{N_q}{N_\lambda} + \operatorname{Re} \left(\int_0^1 I_m \delta h dz / N_\lambda \right) = 0.$$

Обозначая $\operatorname{Re} (N_q / N_\lambda)$ через κ , получим

$$\delta q^* = - \frac{1}{\kappa} \operatorname{Re} \left(\int_0^1 I_m \delta h dz / N_\lambda \right). \quad (5.13)$$

Константа κ , как легко заметить из уравнения (5.10), является производной декремента колебаний по скорости потока при $\operatorname{Re} \lambda = 0$ и характеризует, в какой степени быстро возрастает амплитуда колебаний крыла при возрастании скорости потока (жесткость флаттера).

Выражения (5.11) — (5.13) позволяют осуществить анализ чувствительности параметров аэроупругой устойчивости к вариациям распределения массовых и жесткостных характеристик конструкции крыла. Так, например, функция

$$g(z) = - \frac{1}{\kappa} \operatorname{Re} \frac{I_m}{N_\lambda} \quad (5.14)$$

характеризует чувствительность величины критической скорости флаттера к малым изменениям распределения материала в крыле. Если функция $g(z)$ положительна для некоторых значений z , то добавление материала в этой области приводит к увеличению критической скорости. В области, где $g(z)$ отрицательна, для увеличения критической скорости аэроупругой устойчивости необходимо убирать материал. Заметим, что собственные функции задач (5.6), (5.7) и (5.8), (5.8) определены с точностью до

произвольного множителя, т. е. допускают определенную нормировку. Выражение (5.14) не зависит от способа нормирования собственных функций.

Полученные вариационные соотношения позволяют рассмотреть следующую задачу оптимизации.

Требуется выбрать такое распределение массовых и жесткостных характеристик конструкции крыла, характеризующееся функцией $h(z)$, чтобы при неизменной массе крыла

$$\int_0^1 h(z) dz = 1 \quad (5.15)$$

значение минимальной критической скорости аэроупругой устойчивости достигало максимума:

$$J = \min q_i^* \rightarrow \max h.$$

Для решения поставленной задачи составим расширенный функционал Лагранжа, включив в него условие (5.15) с множителем Лагранжа μ :

$$J_L = q_i^* + \mu \left(\int_0^1 h(z) dz - 1 \right).$$

В дальнейшем предполагаем, что значение номера тона, для которого достигается минимальная критическая скорость, определяется однозначно, что позволяет индекс i опустить, имея в виду, что собственные функции и собственные числа соответствуют i -му тону. Приравнявая нулю первую вариацию функционала Лагранжа J_L и воспользовавшись соотношением (5.13), в силу произвольности вариации δh получим

$$-\frac{1}{\kappa} \operatorname{Re} \frac{I_m}{N_\lambda} + \mu = 0. \quad (5.16)$$

Множитель μ определяется с использованием уравнения (5.15). Соотношения (5.6)–(5.9) вместе с (5.15), (5.16) составляют систему необходимых условий экстремума рассматриваемой задачи.

Следует иметь в виду, что полученная система необходимых условий экстремума справедлива для случая, когда минимальная критическая скорость флаттера достигается для одного тона. Однако одинаковое значение критической скорости аэроупругой устойчивости может достигаться для нескольких тонов одновременно, т. е. критическая скорость может быть многократной. В этом случае, если через $g_i(z)$ обозначить градиенты i -х критических скоростей, то выражение (5.16) заменяется следующим [37, 49]:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 g_i + \mu = 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1,$$

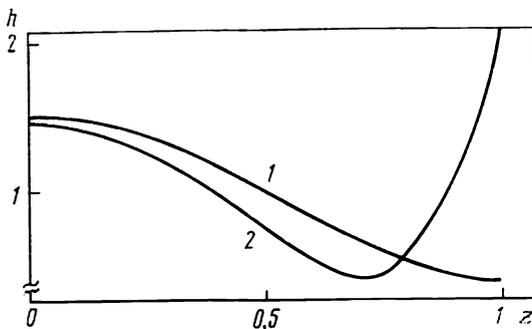


Рис. 5.16

где n — кратность критической скорости (i принимает значения номеров критических тонов).

В качестве примера рассмотрим задачу оптимизации крыла, распределение материала в котором приведено на рис. 5.16 (кривая 1). Полученное в результате решения задачи оптимизации распределение материала (кривая 2) при неизменной массе крыла позволило повысить величину критической скорости флаттера на 17%. Описанная в настоящем разделе процедура оптимизации допускает выбор и других параметров проектирования.

5.6.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ КРЫЛА МАЛОГО УДЛИНЕНИЯ

В настоящем разделе будет рассмотрена задача максимизации критической скорости аэроупругой устойчивости крыла малого удлинения, для описания которого используется дискретная модель [33, 34].

В задачах анализа динамической устойчивости конструкций значительный интерес представляет исследование влияния параметров системы (геометрических, жесткостных и массовых характеристик) на область устойчивости. В общем случае анализ влияния различных параметров затруднителен ввиду того, что критические параметры устойчивости, как правило, явно не выражаются через определяющие параметры системы. С помощью введения сопряженной системы уравнений можно получить соотношения, характеризующие чувствительность критических параметров устойчивости к изменению параметров проектирования конструкции.

Рассмотрим линейную неконсервативную систему с конечным числом степеней свободы, подверженную явлению динамической неустойчивости типа флаттера. Предполагается, что система характеризуется вектором параметров проектирования $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, которые выбираются проектировщиком. В качестве параметров проектирования могут выступать геометрические, массовые и жесткостные характеристики системы: размеры

силовых элементов, их положение, толщины панелей, величины сосредоточенных грузов, ориентация главных осей анизотропии в ортотропном материале обшивки и т. д.

Произведя отделение временной переменной при помощи представления решения в виде $ue^{\lambda t}$, запишем матричное уравнение для амплитудного вектора \mathbf{u} , характеризующее малые колебания системы около положения равновесия

$$L(V_s, \lambda, \mathbf{h})\mathbf{u} = 0. \quad (6.1)$$

Здесь V_s — действительный параметр неконсервативной внешней нагрузки; $\lambda = \alpha + i\omega$ — комплексное собственное значение; $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ представляет собой комплексный собственный вектор обобщенных перемещений. Матрица L представляет собой комплексную несимметричную матрицу размера $m \times m$ и может быть записана в виде следующей суммы матриц:

$$L = C(\mathbf{h}) + \lambda^2 M(\mathbf{h}) + \lambda D(V_s, \mathbf{h}) + C_a(V_s, \mathbf{h}), \quad (6.2)$$

где C , M — симметрические действительные матрицы жесткости и масс; D , C_a — несимметрические матрицы размера $m \times m$. Предполагается, что матрицы C , M , D , C_a непрерывно дифференцируемы по h_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Устойчивость невозмущенного состояния механической системы обеспечивается, если действительные части всех собственных значений λ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяют неравенствам

$$\operatorname{Re} \lambda_i \leq -\varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\varepsilon_0 \geq 0$. При $\varepsilon_0 > 0$ данные неравенства гарантируют асимптотическую устойчивость. При достаточно малых $\varepsilon_0 > 0$ эти условия могут использоваться для определения критического значения параметра внешней нагрузки V^k и критического тона колебаний λ_k :

$$\operatorname{Re} \lambda_k = -\varepsilon_0, \quad \operatorname{Re} \lambda_i < -\varepsilon_0,$$

$$\operatorname{Re}(\partial \lambda_k / \partial V_s) > 0, \quad i \neq k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad V_s = V_s^k. \quad (6.3)$$

Производная $\operatorname{Re}(\partial \lambda_i / \partial V_s)$ показывает, насколько быстро по отношению к приросту ΔV_s развивается динамическая неустойчивость, т. е. насколько опасным является флаттер.

Вычислим производные критического значения V^k по параметрам проектирования h_1, h_2, \dots, h_n и производную $\operatorname{Re}(\partial \lambda / \partial V_s)$. С этой целью введем сопряженную к (6.1) задачу

$$L^*(V_s, \lambda, \mathbf{h})\mathbf{v} = 0, \quad (6.4)$$

где L^* обозначает матрицу, транспонированную по отношению к L , а вектор \mathbf{v} — комплексный собственный вектор обобщенных перемещений сопряженной системы. При фиксированном значении V_s в сопряженных задачах (6.1) и (6.4) все собственные числа совпадают ввиду того, что детерминанты матриц L и L^* равны.

Придадим параметру h_i малую вариацию δh_i . Тогда величины λ , \mathbf{u} , V_s также получают приращения $\delta\lambda$, $\delta\mathbf{u}$, δV_s . Уравнение в вариациях имеет вид

$$\delta V_s \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u} + \delta\lambda \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{u} + \delta h_i \frac{\partial L}{\partial h_i} \mathbf{u} + L\delta\mathbf{u} = 0. \quad (6.5)$$

Умножая уравнение (6.5) слева на транспонированный собственный вектор сопряженной задачи \mathbf{v} , получим выражение

$$\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u}\right) \delta V_s + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{u}\right) \delta\lambda + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial h_i} \mathbf{u}\right) \delta h_i = 0. \quad (6.6)$$

Скобками обозначено скалярное произведение векторов. Последний член в уравнении (6.5) исчезает ввиду равенства

$$(\mathbf{v}, L\delta\mathbf{u}) = (\delta\mathbf{u}, L^*\mathbf{v}) = 0$$

согласно (6.4).

Из вариационного соотношения (6.6) можно найти производную критической нагрузки V_s^h по произвольному параметру проектирования h_i . С этой целью подставим в (6.6) значения $V_s = V_s^h$ и $\lambda = \lambda_k$ и используем определение (6.3). Предполагается, что векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} соответствуют величинам V_s^h и λ_k . Поделив уравнение (6.6) на $(\mathbf{v}, (\partial L/\partial \lambda_k)\mathbf{u})$ и отделяя действительную часть, получим

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u}\right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} \mathbf{u}\right) \right] \delta V_s^h + \operatorname{Re} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial h_i} \mathbf{u}\right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} \mathbf{u}\right) \right] \delta h_i = \\ = -\delta(\operatorname{Re} \lambda_k) = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Последнее равенство справедливо вследствие определения критического тона.

Из уравнения (6.7) получим

$$\frac{\partial V_s^h}{\partial h_i} = - \frac{\operatorname{Re} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial h_i} \mathbf{u}\right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} \mathbf{u}\right) \right]}{\operatorname{Re} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u}\right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} \mathbf{u}\right) \right]}. \quad (6.8)$$

Правая часть (6.8) вычисляется при $V_s = V_s^h$, $\lambda = \lambda_k$ и соответствующих \mathbf{u} и \mathbf{v} .

Производная критической частоты по h_i вычисляется аналогично. Поделив (6.6) на $(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u})$ и отделяя мнимую часть, приходим к выражению

$$\frac{\partial \omega}{\partial h_i} = - \frac{\operatorname{Im} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial h_i} \mathbf{u}\right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u}\right) \right]}{\operatorname{Re} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{u}\right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u}\right) \right]}. \quad (6.9)$$

Таким образом, для вычисления производных критической нагрузки V_s^k и частоты колебаний ω_k по параметрам проектирования h_i , необходимо знать значения V_s^k , λ_k и соответствующие собственные векторы \mathbf{u} и \mathbf{v} . Имея выражения для производных (6.8) и (6.9), можно вычислить конечные приращения

$$\Delta V_s^k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V_s^k}{\partial h_i} \Delta h_i + o(\|\Delta \mathbf{h}\|),$$

$$\Delta \omega_k = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_k}{\partial h_i} \Delta h_i + o(\|\Delta \mathbf{h}\|).$$

Из вариационного соотношения (6.6) получим выражение для производной от собственного значения λ по параметру нагрузки V_s . Полагая в (6.6) $\delta h_i = 0$, имеем

$$\partial \lambda / \partial V_s = - \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u} \right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{u} \right). \quad (6.10)$$

Таким образом, выражение для производной $\text{Re}(\partial \lambda / \partial V_s)$ получим из (6.10), отделяя действительную часть

$$\text{Re} \frac{\partial \lambda}{\partial V_s} = - \text{Re} \left[\left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial V_s} \mathbf{u} \right) / \left(\mathbf{v}, \frac{\partial L}{\partial \lambda} \mathbf{u} \right) \right]. \quad (6.11)$$

Вычисление производной $\text{Re}(\partial \lambda / \partial V_s)$ представляет самостоятельный интерес для анализа устойчивости механической системы, так как она характеризует скорость развития динамической неустойчивости.

Развиваемый метод анализа чувствительности критических параметров устойчивости является наиболее эффективным при наличии большого числа определяющих параметров, так как для вычисления градиента критического параметра устойчивости по параметрам проектирования требуется лишь однократное решение прямой и сопряженной задачи о потере устойчивости. Между тем численное дифференцирование критического параметра как функции n переменных требует для вычисления градиента не менее $(n+1)$ -кратного решения задачи о потере устойчивости. Анализ чувствительности позволяет выделить наиболее существенные параметры, влияющие на область устойчивости, и тем самым подсказывает проектировщику наиболее рациональные способы воздействия на систему с целью улучшения характеристик устойчивости.

Рассмотрим задачу максимизации критического параметра потери устойчивости при ограничении, наложенном на вектор переменных проектирования \mathbf{h} : $S(\mathbf{h}) = S_0$, где S — заданная скалярная функция векторного аргумента, S_0 — фиксированная константа. Формулировка задачи оптимизации описывается соотношением

$$\max_{\mathbf{h}} V_s^k(\mathbf{h}), \quad S(\mathbf{h}) = S_0. \quad (6.12)$$

Необходимое условие экстремума имеет вид

$$\nabla V_s^k + v \nabla S = 0, \quad (6.13)$$

где символ ∇ обозначает вектор градиента по переменным проектирования: $\nabla = (\partial/\partial h_1, \partial/\partial h_2, \dots, \partial/\partial h_n)$; v — скалярный множитель Лагранжа.

Для численного решения задачи оптимизации воспользуемся методом градиента. Выражение для улучшающей вариации запишем в виде

$$\Delta h = \beta (\nabla V_s^k + v \nabla S),$$

где β — положительная константа, характеризующая величину шага по градиенту; v — скалярный множитель, выбираемый из условия

$$\Delta S = (\nabla S, \Delta h) = \beta [(\nabla S, \nabla V_s^k) + v(\nabla S, \nabla S)] = 0,$$

откуда

$$v = -(\nabla V_s^k, \nabla S) / (\nabla S, \nabla S).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta V_s^k &= (\nabla V_s^k, \Delta h) = (\nabla V_s^k, \Delta h) + v(\nabla S, \Delta h) = \\ &= \beta \|\nabla V_s^k - v \nabla S\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, на каждом шаге градиентной процедуры $\Delta V_s^k \geq 0$ и $\Delta S = 0$ вплоть до выполнения необходимого условия экстремума.

Заметим, что, как уже отмечалось ранее, величина критической нагрузки в процессе оптимизации может оказаться кратной. Это значит, что критической нагрузке V_s^k может соответствовать несколько критических тонов колебаний λ_{h_i} , $i = 1, 2, \dots, r$. В этом случае удобно каждому критическому тону колебаний λ_{h_i} поставить в соответствие величину критического параметра $V_s^{k_i}$ и рассмотреть задачу оптимизации в максимальной постановке:

$$\max_h \min_{i=1,2,\dots,r} V_s^{k_i}, \quad S(h) = S_0. \quad (6.14)$$

Необходимое условие экстремума для этой задачи имеет вид

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \nabla V_s^{k_i} + v \nabla S = 0, \quad \mu_i \geq 0; \quad i = 1, 2, \dots, r; \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1. \quad (6.15)$$

Улучшающая вариация в этом случае вычисляется следующим образом:

$$\Delta h = \beta \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \nabla V_s^{k_i} - v \nabla S \right). \quad (6.16)$$

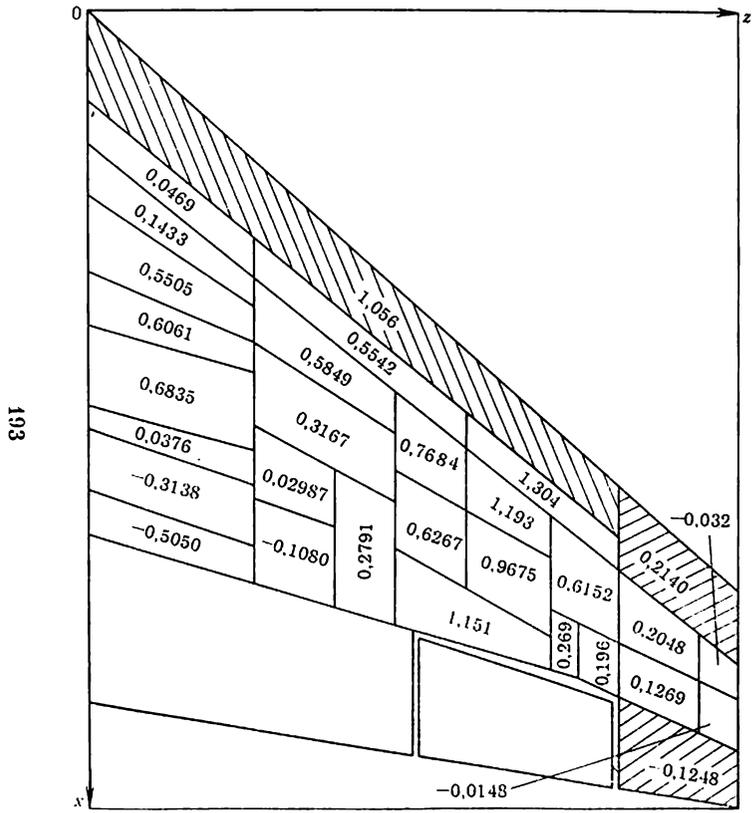


Рис. 5.18

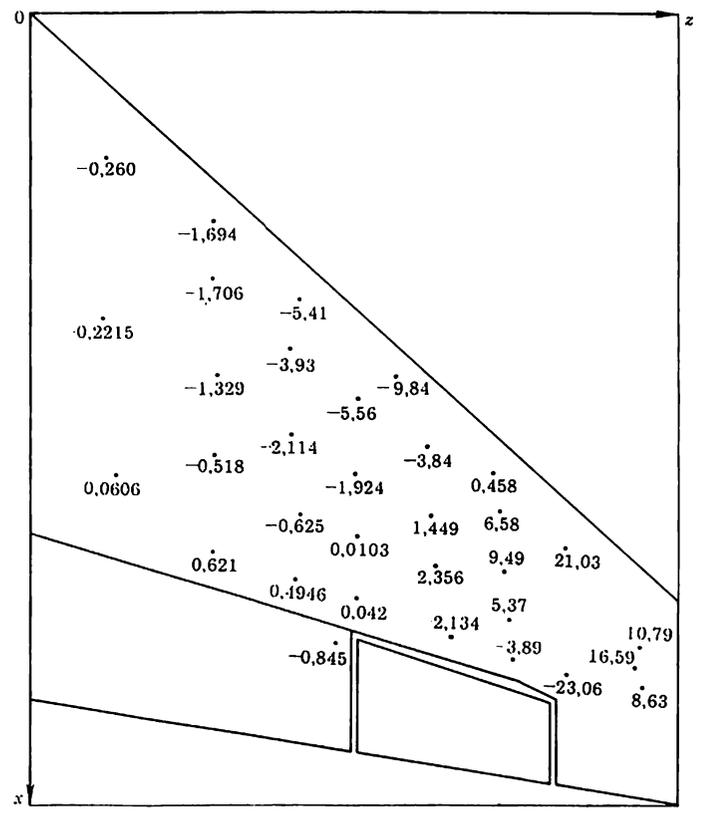


Рис. 5.17

Для определения величин μ_i и ν можно воспользоваться следующим условием:

$$\Delta V_s^{hi} = \Delta V_s^{hj}, \quad i, j = 1, 2, \dots, r;$$

$$\Delta S = 0; \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = 1,$$

что представляет собой систему $r+1$ уравнений относительно $r+1$ неизвестных μ_i и ν .

Итак, при решении задачи оптимизации на каждом шаге градиентной процедуры для определения вектора h необходимо решить прямую и сопряженную задачи о потере устойчивости (6.1) — (6.4), определить критические параметры V_s^{hi} , λ_{hi} и собственные векторы u_{hi} , v_{hi} , соответствующие этим величинам.

Далее по формуле (6.8) вычисляем вектор градиента ∇V_s^{hi} и затем вычисляем улучшающую вариацию. Ограничения снизу и сверху на параметры h_i могут быть учтены с помощью обычных приемов математического программирования.

Требования аэроупругой устойчивости при проектировании крыльев летательных аппаратов являются одними из наиболее существенных. Рассмотрим задачу максимизации критического параметра аэроупругой устойчивости крыла малого удлинения [97]. Критическим параметром в данном случае является параметр потока, пропорциональный величине скоростного напора и равный единице для исходного варианта распределения материала в конструкции. Расчетная модель крыла составлена из изотропных и ортотропных панелей кусочно-постоянной толщины, балок, работающих на изгиб и кручение, моделирующих силовой набор крыла (лонжероны, нервюры) и сосредоточенных грузов. Крыло предполагается закрепленным на пружинах, работающих на перемещение и поворот, которые моделируют упругое крепление крыла к фюзеляжу самолета. Расчет аэродинамических воздействий производился с помощью метода дискретных вихрей. Для расчета колебаний крыла в потоке использовался «метод многочленов», описанный в [34]. В качестве параметров проектирования приняты массы сосредоточенных грузов, толщины изотропных и ортогональных панелей, жесткости балок. На все параметры проектирования накладывались ограничения сверху и снизу. На рис. 5.17, 5.18, 5.19 приведен характер распределения градиентов критической скорости флаттера по сосредоточенным массам, толщинам панелей и жесткостям балок соответственно. Приведенные значения производных вычислены при исходном распределении материала в крыле. Как видно из рисунков, производные принимают как положительные, так и отрицательные значения. Если значение производной отрицательно, то уменьшение соответствующего параметра проектирования h_i приводит к увеличению критической скорости флаттера. Из ана-

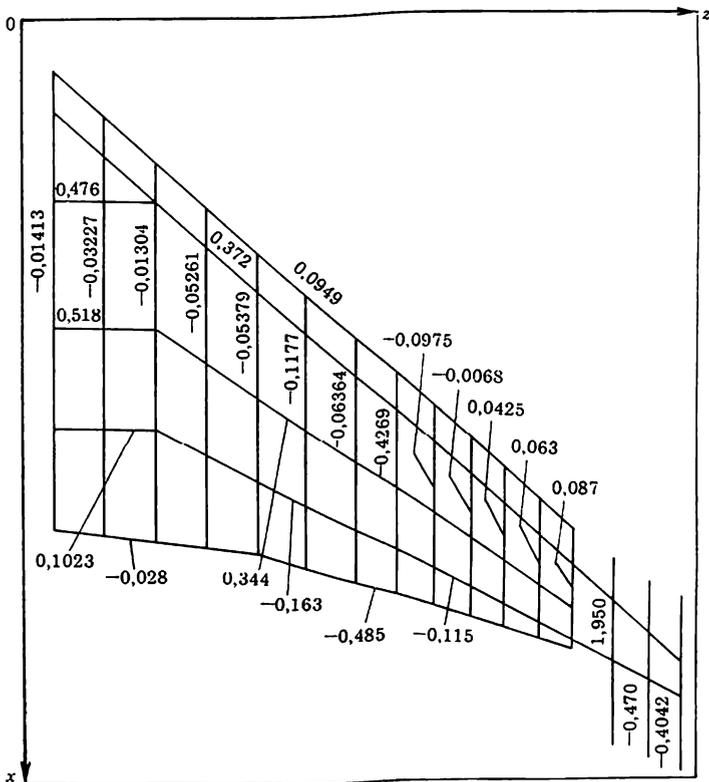


Рис. 5.19

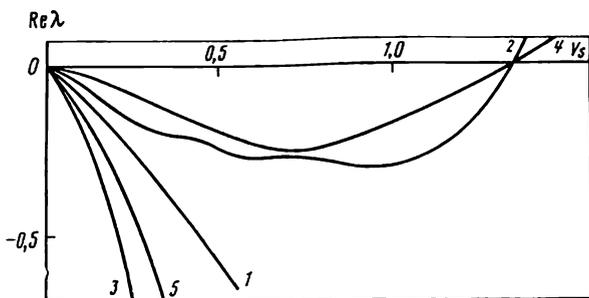


Рис. 5.20

Из результатов расчета следует, что наибольшее влияние на критический параметр потока оказывают сосредоточенные массы, расположенные у передней кромки на конце крыла. В результате решения задачи оптимизации с использованием метода градиента по приведенным ранее формулам значение критического параметра устойчивости по сравнению с исходным распределением

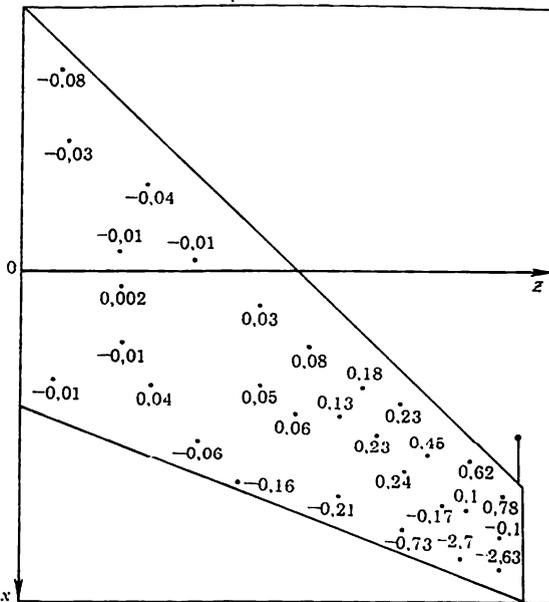


Рис. 5.21

материала увеличилось на 35%. Причем характерной особенностью полученного проекта крыла является кратность критического параметра аэроупругой устойчивости, что видно из рис. 5.20, на котором приведена проекция характеристических кривых на плоскость параметр устойчивости — декремент затухания. Задачи оптимизации аэроупругой устойчивости рассматривались также в [18, 97, 124].

Значительные возможности воздействия на величину критической скорости флаттера связаны с размещением и перераспределением неконструктивных сосредоточенных масс. Неконструктивные массы не оказывают значительного влияния на характеристики статической прочности, статической аэроупругости и ресурса. Кроме того, размещение сосредоточенных масс в крыле летательного аппарата с целью воздействия на характеристики динамической устойчивости является наиболее простой в технологическом отношении задачей для реально существующего прототипа конструкции. С другой стороны, как показывает приведенный выше пример расчета, неконструктивные массы могут оказывать значительное влияние на величину критического параметра устойчивости.

Рассмотрим крыло малого удлинения, в котором требуется распределить заданную неконструктивную массу с целью улучшения характеристик аэроупругой устойчивости. Из анализа функции градиента критической скорости, приведенной на рис. 5.21, следует, что наибольшее положительное значение достигается у передней кромки на свободном конце крыла. В ходе градиентной процедуры оптимизации вся неконструктивная мас-

са стала концентрироваться в этой точке, что повело на мысль об установке массового балансира, т. е. выносного груза. Разместив 80 % материала в балансира и 20 % в крыле для моделирования крепления балансира, в результате параметрического расчета была найдена оптимальная длина балансира. Характерно, что критический параметр аэроупругой устойчивости стал двукратным. Для конструкции крыла массой 900 кг добавление 25-килограммового балансира позволило увеличить величину критической скорости флаттера на 68 м/с.

Приведенные примеры расчета и оптимизации конструкции крыльев летательных аппаратов позволяют отметить некоторые особенности. Прежде всего это кратность критического параметра устойчивости, полученная в обоих случаях. Возникновение кратности объясняется тем, что в процессе оптимизации величины производных критических параметров устойчивости по проектным параметрам крыла возрастают и увеличивается чувствительность критических параметров к вариациям распределения материала. Заметим, что увеличение чувствительности к вариациям переменных проектирования при проектировании указывает на необходимость учета величины градиентов критических параметров в реальных крыльях, так как малые ошибки в изготовлении могут привести к значительным изменениям величины критической скорости аэроупругой устойчивости.

5.7.

НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ДИНАМИКЕ КОНСТРУКЦИЙ

В связи с выполнением анализа и оптимизации конструкций актуальными являются вопросы построения адекватных механических моделей и связанные с ними задачи идентификации параметров этих моделей. Так, при разработке и применении в практике проектирования сложных моделей характерно отсутствие необходимых данных о геометрических и физических параметрах конструкции. Неполнота информации обусловлена неточностями в изготовлении конструкции, разбросом физико-механических характеристик применяемых материалов, несовершенствами соединительных узлов и другими факторами. Для упрощенных же моделей часто отсутствуют объективные данные о неучитываемых рассматриваемой моделью эффектах. Применение этих моделей ограничено также неточностью задания геометрических и механических характеристик. Эти обстоятельства объясняют расхождения, возникающие при проектировании и оптимизационном моделировании между теоретическими решениями, получаемыми на основе математических моделей, и данными физических экспериментов на изделиях. Поэтому представляются важными вопросы разработки методов учета эксперименталь-

ных данных о поведении реальной конструкции для построения адекватной математической модели. Перспективным в этом направлении является подход, заключающийся в доопределении и уточнении геометрических и механических параметров модели на основе минимизации «невязок» между рассчитываемыми функциями состояния и функционалами, характеризующими динамику конструкции соответствующими величинами, получаемыми экспериментальным способом. Скорректированные таким образом математические модели становятся пригодными для использования при решении задач анализа и оптимизации динамических характеристик реальных конструкций.

Таким образом, задачи оптимизации при проектировании возникают как из естественных требований улучшения характеристик конструкции, так и из необходимости использования адекватных математических моделей. Для решения оптимизационных задач идентификации параметров модели обоснованным представляется применение эффективных методов оптимизации и анализа чувствительности, основанных на введении сопряженных переменных и сопряженных систем уравнений, получивших широкое применение в оптимальном проектировании конструкций.

Ниже основное внимание уделяется параметрической идентификации конструкций, рассчитываемых на динамические воздействия. Подробно вопросы параметрической идентификации механических систем рассматривались в [47, 91, 128, 131, 150, 218, 229].

Важнейшими характеристиками механических систем, подверженных действию нестационарных динамических нагрузок, являются частоты и формы свободных колебаний, декременты затухания. При расчете динамических реакций конструкций, подверженных действию нестационарных нагрузок, часто используются модальные методы, основанные на приведении матриц системы уравнений, описывающих математическую модель конструкции, к каноническому виду. Этот прием позволяет значительно упростить вычисления за счет снижения размерности задачи. Как правило, движение динамически нагруженных механических систем описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$M(d^2\mathbf{u}/dt^2) + D d\mathbf{u}/dt + C\mathbf{u} = \mathbf{q}(t), \quad (7.1)$$

где M — матрица, характеризующая инерционные свойства конструкции; C — матрица жесткости; D — матрица демпфирования; $\mathbf{q}(t)$ — вектор-функция внешних нагрузок. Матрицы M , C и D зависят от параметров конструкции $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, значения которых необходимо уточнить. Определение наилучших в некотором смысле параметров математической модели конструкции обычно сводится к минимизации функционалов вида

$$J = J(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{h}), \quad (7.2)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{h})$ — вектор, характеризующий обобщенную ошибку или

рассогласование расчетных характеристик конструкции и ее математической модели. Выбор структуры функционала (7.2) является важнейшим этапом решения задачи коррекции параметров модели. Способы построения функционалов рассматривались в [91].

В большинстве случаев задачу коррекции параметров математической модели конструкции можно свести к задаче минимизации функционала среднего значения квадрата обобщенной ошибки. В этом случае функционал (7.2) принимает вид

$$J_1 = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} (\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{h}), \boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{h})) dt, \quad (7.3)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{h})$ для механической системы, описываемой уравнением (7.1), имеет вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \mathbf{h}) = M \frac{d^2 \hat{\mathbf{u}}}{dt^2} + D \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} + C\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{q}}, \quad (7.4)$$

где $\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\mathbf{q}}$ — обозначает рассогласование расчетных и экспериментальных характеристик механической системы. При решении задачи минимизации функционала (7.3) в силу сложной зависимости характеристик динамической системы от параметров h_i используются, как правило, методы, применяемые при решении задач оптимизации динамически нагруженных механических систем. Эффективными в этом случае оказываются также методы анализа чувствительности.

Для получения информации о динамических характеристиках конструкции используются специальные целенаправленные эксперименты. Значительную роль при решении задачи идентификации играет планирование эксперимента. При проведении активного эксперимента конструкция нагружается разнообразными силовыми воздействиями, которые должны возбуждать все исследуемые частоты и формы свободных колебаний конструкции.

Заметим, что близость частот и форм свободных колебаний конструкций, полученных в эксперименте и вычисленных для математической модели, является одним из важнейших критериев адекватности построенной модели реальной конструкции. Кроме того, существует хорошо разработанная методика частотного эксперимента. Поскольку решение задач оптимизации конструкций часто связано с обработкой большого количества информации, значительное упрощение расчетов достигается благодаря применению модального метода, т. е. приведения системы уравнений (7.1) к каноническому виду, представляя приближенное решение в виде ряда по собственным формам колебаний. При этом матрицы M и C станут диагональными, и на диагонали матрицы C будут стоять квадраты частот свободных колебаний. Отсюда видно, сколь важным является соответствие частот и форм свободных колебаний конструкции и ее математической

модели. При решении задач идентификации механических систем в качестве минимизируемого функционала часто используется функционал квадратичной невязки частот и форм свободных колебаний.

В качестве примера решения задачи коррекции расчетной модели рассмотрим задачу идентификации массожесткостных характеристик консольной балки. Пусть балка с прямолинейной осью направлена вдоль оси oz . Деформация балки характеризуется перемещением в плоскости колебаний $u(z, t)$ и углом поворота относительно упругой оси $\theta(z, t)$. Уравнения, описывающие свободные изгибно-крутильные колебания балки, имеют вид [102]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - hx_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0, \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(GI_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - hx_m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_m \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где $EI(z)$, $GI_p(z)$ — жесткости балки на изгиб и кручение соответственно; $h(z)$ — распределенная масса балки; $I_m = hr^2$ — массовый момент инерции; r — радиус инерции; x_m — расстояние между упругой осью и осью инерции. Балка закреплена одним концом ($z=0$), а другой конец свободен ($z=l$). Краевые условия для u и θ имеют вид

$$\begin{aligned} u(0) = 0; \quad (\partial u / \partial z)_{z=0} = 0, \quad \theta(0) = 0; \\ \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{z=l} = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(EI \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right]_{z=l} = 0, \quad \left(GI_p \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)_{z=l} = 0. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Решение задачи (7.5) и (7.6) ищем в виде

$$\begin{aligned} u(z, t) = u(z) e^{iV\lambda t}, \\ \theta(z, t) = \theta(z) e^{i\lambda t} \end{aligned} \quad (7.7)$$

Подставляя (7.7) в (7.5) и (7.6), исключая временную переменную, получим краевую задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right) - h\lambda u + hx_m \lambda \theta = 0, \\ - \frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{d\theta}{dz} \right) + hx_m \lambda u - hr^2 \lambda \theta = 0, \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$u(0) = 0; \quad (du/dz)_{z=0}; \quad \theta(0) = 0;$$

$$\left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{z=l} = 0; \quad \left[\frac{d}{dz} \left(EI \frac{d^2 u}{dz^2} \right) \right]_{z=l} = 0; \quad \left(GI_p \frac{d\theta}{dz} \right)_{z=l} = 0.$$

Здесь λ — собственное число (квадрат частоты свободных колебаний); $u(z)$, $\theta(z)$ — собственные функции (формы колебаний).

Допустим, что для реального изделия, расчетную математическую модель которого необходимо создать, известны частоты

и формы свободных колебаний нескольких низших тонов, полученные в результате проведения частотного эксперимента. Построим функционал J , характеризующий величину рассогласования математической модели и реального изделия, т. е. характеризующий степень несовпадения частот и форм свободных колебаний. Одним из возможных видов этого функционала может быть следующий:

$$J = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \omega_i)^2 + \sum_{i=1}^n \beta_i \left[\int_0^l (\eta_i u_i - w_i)^2 dz + \int_0^l (\mu_i \theta_i - r_i)^2 dz \right], \quad (7.9)$$

где ω_i — квадраты частот свободных колебаний конструкции, полученные в эксперименте; w_i , r_i — экспериментальные формы колебаний, соответственно изгиб и кручение. Индекс i показывает, что рассматриваемая величина соответствует i -му тону колебаний. Коэффициенты α_i , β_i — некоторые положительные числа, характеризующие вклад соответствующего тона в функционал невязки. Значения этих коэффициентов зависят от степени достоверности полученных экспериментальных результатов. Чем меньше вероятная ошибка в измерении частот и форм свободных колебаний, тем большее значение должно задаваться для соответствующих коэффициентов α_i , β_i . При решении задачи (7.8) собственные функции u_i , θ_i могут быть отнормированы определенным образом. Аналогично формы свободных колебаний, замеренные в эксперименте, имеют свою нормировку. Поэтому в выражение для функционала J введены множители η_i и μ_i , которые подлежат определению. Таким образом, выбранный функционал J неотрицательный и достигает своего минимума только тогда, когда совпадают частоты и формы свободных колебаний конструкции и математической модели. Следовательно, для коррекции математической модели необходимо решить задачу минимизации функционала невязки J . Как известно, частоты свободных колебаний балки зависят от распределения массовых и жесткостных характеристик.

При выбранном типе поперечного сечения балки можно получить зависимость между распределениями масс и жесткостей:

$$EI(z) = h(z) \chi_b(z), \quad (7.10)$$

$$GI_p(z) = h(z) \chi_t(z).$$

Считаем, что функции χ_b , χ_t заданы. Таким образом, в качестве параметра, подлежащего определению из условия минимума функционала (7.9), выберем $h(z)$. Из анализа уравнений (7.8) видно, что пропорциональное изменение жесткостей и масс балки не приводит к изменению частот и форм свободных колебаний. Для единственности решения поставленной задачи необходимо дополнительное условие, например, на неизменность массы конструкции:

$$\int_0^l h dz = C. \quad (7.11)$$

Рассмотрим задачу минимизации функционала квадратичной ошибки

$$J \rightarrow \min_h$$

при выполнении условий (7.8), (7.10). Для проведения дальнейших вычислений удобно ввести безразмерные переменные по формулам

$$z' = z/l, \quad x'_m = x_m/l, \quad h' = h/h_0, \quad I'_m = I_m/(h_0 l^2),$$

$$(EI)' = EI/(EI_0), \quad (GI_p)' = GI_p/(EI_0), \quad \lambda' = \lambda l^4 h_0/(EI_0),$$

где h_0, EI_0 — заданные константы. Вид системы уравнений (7.8) и функционала (7.10) не изменится, если l положить равным единице. Штрихи в дальнейшем можно опустить.

Для решения поставленной задачи минимизации функционала J проварируем выражение (7.9) по всем входящим в него параметрам:

$$\begin{aligned} \delta J = & 2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \omega_i) \delta \lambda_i + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (\eta_i u_i - w_i) \eta_i \delta u_i dz + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (\mu_i \theta_i - r_i) \mu_i \delta \theta_i dz + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (\eta_i u_i - w_i) u_i \delta \eta_i dz + \\ & + 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 (\mu_i \theta_i - r_i) \theta_i \delta \mu_i dz. \end{aligned} \quad (7.12)$$

В выражении для вариации функционала (7.12) необходимо исключить вариации $\delta \lambda_i, \delta u_i$ и $\delta \theta_i$, выразив их через вариацию параметра проектирования δh . Прежде всего выразим $\delta \lambda_i$ через δh . С этой целью проварируем систему уравнений (7.8), умножим первое уравнение в вариациях на u_i , а второе — на θ_i , проинтегрируем от нуля до единицы и сложим. Выполняя интегрирование по частям, окончательно получим

$$\delta \lambda_i = - \int_0^1 I_i(z) \delta h dz / M_i,$$

$$I_i(z) = \chi_b \left(\frac{d^2 u_i}{dz^2} \right)^2 + \chi_t \left(\frac{d\theta_i}{dz} \right)^2 + \lambda_i (2x_m \theta_i u_i - u_i^2 - r^2 \theta_i), \quad (7.13)$$

$$M_i = \int_0^1 h_i (2x_m \theta_i u_i - u_i^2 - r^2 \theta_i) dz.$$

С помощью (7.13) первое слагаемое в (7.12) выражается через δh .

Для исключения вариаций δu_i и $\delta \theta_i$ необходимо рассмотреть следующую задачу для сопряженных переменных v_i и s_i :

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 v_i}{dz^2} \right) - h \lambda_i v_i + h x_m \lambda_i s_i = (\eta_i u_i - w_i) \eta_i + \gamma_i h (u_i - x_m \theta_i), \quad (7.14)$$

$$- \frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{ds_i}{dz} \right) + h \lambda_i x_m v_i - h r^2 \lambda_i s_i = (\mu_i \theta_i - r_i) \mu_i - \gamma_i h (x_m u_i - r^2 \theta_i),$$

$$\gamma_i = \frac{\int_0^1 [(\eta_i u_i - w_i) u_i \eta_i + (\mu_i \theta_i - r_i) \theta_i \mu_i] dz}{\int_0^1 h (2x_m \theta_i u_i - u_i^2 - r^2 \theta_i) dz}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$v_i(0) = 0; \quad (dv_i/dz)_{z=0} = 0; \quad s_i(0) = 0;$$

$$\left(EI \frac{d^2 v_i}{dz^2} \right)_{z=1} = 0; \quad \frac{d}{dz} \left(EI \frac{d^2 v_i}{dz^2} \right)_{z=1} = 0; \quad \left(GI_p \frac{ds_i}{dz} \right)_{z=1} = 0.$$

Выбор значения константы γ_i обусловлен существованием решения системы уравнений (7.14). Действительно, поскольку система уравнений (7.8) является сопряженной (7.14) и λ_i — собственное число (7.8), то для разрешимости системы (7.14) необходимо выполнение условия ортогональности правых частей собственным функциям u_i и θ_i . Заметим, что решение системы уравнений (7.14) определено неоднозначно. Если v_i и s_i — некоторое частное решение, то $v_i + \nu u_i$ и $s_i + \nu \theta_i$ также удовлетворяет системе уравнений (7.14) при любых значениях константы ν . Для исключения неоднозначности наложим дополнительное условие на решение системы уравнений (7.14)

$$\int_0^1 h (x_m \theta_i v_i + x_m u_i s_i - u_i v_i - r^2 \theta_i s_i) dz = 0. \quad (7.15)$$

Для исключения вариаций δu_i и $\delta \theta_i$ из (7.12) проварьируем (7.8) для i -го тона, получим

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(EI \frac{d^2 \delta u_i}{dz^2} \right) - h \lambda_i \delta u_i + h x_m \lambda_i \delta \theta_i - h u_i \delta \lambda_i + h x_m \theta_i \delta \lambda_i + \quad (7.16)$$

$$+ \frac{d^2}{dz^2} \left(\chi_b \delta h \frac{d^2 u_i}{dz^2} \right) + \lambda_i (x_m \theta_i - u_i) \delta h = 0,$$

$$- \frac{d}{dz} \left(GI_p \frac{d \delta \theta_i}{dz} \right) + h x_m \lambda_i \delta u_i - h r^2 \lambda_i \delta \theta_i - h r^2 \theta_i \delta \lambda_i +$$

$$+ h x_m u_i \delta \lambda_i - \frac{d}{dz} \left(\chi_t \delta h \frac{d \theta_i}{dz} \right) + \lambda_i (x_m u_i - r^2 \theta_i) \delta h = 0.$$

Подставим в вариационные уравнения (7.16) выражение для вариации собственного числа (7.13), получим систему уравнений

относительно δu_i и $\delta \theta_i$. Умножая первое вариационное уравнение (7.16) на v_i , а второе — на s_i , просуммируем и результат проинтегрируем от нуля до единицы. Группируя соответствующие члены и принимая во внимание (7.14), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \eta_i (\eta_i u_i - w_i) \delta u_i dz + \int_0^1 \mu_i (\mu_i \theta_i - r_i) \delta \theta_i dz - \\ & - \gamma_i \left[\int_0^1 h (x_m \theta_i - u_i) \delta u_i dz + \int_0^1 h_i (x_m u_i - r^2 \theta_i) \delta \theta_i dz \right] + \\ & + \int_0^1 \delta h \left[\chi_b \frac{d^2 u_i}{dz^2} \frac{d^2 v_i}{dz^2} + \chi_t \frac{d \theta_i}{dz} \frac{ds_i}{dz} + \right. \\ & \left. + \lambda_i (x_m \theta_i v_i - u_i v_i + x_m u_i s_i - r^2 \theta_i s_i) \right] dz = 0. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Вернемся к системе уравнений в вариациях (7.16). Решение этой системы определено неоднозначно. Действительно, если δu_i и $\delta \theta_i$ — какое-либо решение, то $\delta u_i + \nu u_i$ и $\delta \theta_i + \nu \theta_i$ также является решением при любом значении константы ν . Для того чтобы избавиться от неоднозначности решения, потребуем выполнения дополнительного условия для δu_i и $\delta \theta_i$:

$$\int_0^1 \delta u_i h (x_m \theta_i - u_i) dz + \int_0^1 \delta \theta_i h (x_m u_i - r^2 \theta_i) dz = 0. \quad (7.18)$$

В силу (7.18) слагаемое с коэффициентом γ_i в (7.17) равно нулю. Таким образом, получено выражение для компонентов вариации функционала J , зависящих от δu_i и $\delta \theta_i$, определенное через δh .

Из последних слагаемых в выражении для вариации функционала δJ (7.12) в силу произвольности вариаций $\delta \mu_i$ и $\delta \eta_i$ получим выражения для определения μ_i , η_i :

$$\eta_i = \int_0^1 u_i v_i dz \left/ \int_0^1 u_i^2 dz \right., \quad \mu_i = \int_0^1 \theta_i r_i dz \left/ \int_0^1 \theta_i^2 dz \right. \quad (7.19)$$

Подставляя в (7.12) выражения для вариаций (7.13), (7.17), окончательно получим

$$\delta J = -2 \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i - \omega_i) \int_0^1 I_i \delta h dz / M_i - 2 \sum_{i=1}^n \beta_i \int_0^1 D_i \delta h dz, \quad (7.20)$$

где

$$\begin{aligned} D_i = & \chi_b \frac{d^2 u_i}{dz^2} \frac{d^2 v_i}{dz^2} + \chi_t \frac{d \theta_i}{dz} \frac{ds_i}{dz} + \\ & + \lambda_i (x_m \theta_i v_i - u_i v_i + x_m u_i s_i - r^2 \theta_i s_i). \end{aligned}$$

Составим для задачи минимизации расширенный функционал Лагранжа, включив в него условие (7.11):

$$J_L = J + \Psi \left(\int_0^1 h dz - C \right), \quad (7.21)$$

где Ψ — множитель Лагранжа. Приравнявая нулю первую вариацию J_L , получим необходимое условие минимума для рассматриваемой задачи

$$\text{grad}_h J + \Psi = 0, \quad (7.22)$$

где

$$\text{grad}_h J = -2 \sum_{i=1}^n \left[\alpha_i (\lambda_i - \omega_i) \frac{I_i(z)}{M_i} + \beta_i D_i(z) \right].$$

Для численного решения задачи необходимо при заданном начальном приближении $h(z)$ решить систему уравнений (7.8), (7.14), принимая во внимание (7.15), (7.19), и построить выражение для улучшающей вариации на основе (7.22). В дальнейшем итерационный процесс оптимизации продолжается до выполнения необходимых условий экстремума с заданной точностью.

В качестве примера решения задачи коррекции расчетной модели рассмотрено крыло большого удлинения, моделируемое консольной балкой постоянного сечения. Для исходного варианта распределения массоженностных характеристик балки были рассчитаны частоты и формы низших шести тонов свободных колебаний, которые, как предполагалось, являются результатом частотного эксперимента. После этого распределение массоженностных характеристик балки искажалось при условии неизменности массы. Искаженная модель балки принималась за исходную, которая должна была корректироваться. Расчеты проведены для двух вариантов искажения — по косинусу и в виде ступеньки. В результате решения задачи минимизации квадратичного функционала ошибки по изложенному алгоритму в обоих случаях исходное распределение $h(z)$ было восстановлено с заданной точностью.

Отметим, что рассмотренная задача идентификации является некорректной. Решение некорректно поставленных задач может основываться на идее регуляризации. Эти вопросы подробно обсуждаются в [91].

ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

6.1.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ БАЛОК МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

Проблемы оптимального проектирования конструкций и их элементов, подверженных воздействию нестационарных нагрузок, включают в себя широкий круг задач. Рассмотренные в предыдущих главах задачи оптимизации динамических характеристик конструкций при свободных колебаниях и при действии гармонических нагрузок допускали исключение временной переменной из уравнений движения механической системы. При таком подходе к задачам оптимизации реальные условия эксплуатации конструкций учитываются косвенным образом. На практике конструкции часто подвержены существенно нестационарным динамическим нагрузкам с изменяющимися во времени интенсивностью, направлением действия и точками приложения. Поэтому изучение вопросов оптимизации нестационарно нагруженных механических систем имеет существенное значение для теории проектирования конструкций и их элементов.

Ниже рассмотрение проблемы оптимального проектирования механических систем, подверженных воздействию нестационарных нагрузок, начнем с задачи оптимизации балки.

Динамическое поведение упругой балки, шарнирно закрепленной в точках $x=0$ и $x=l$, находящейся под действием нестационарной поперечной нагрузки, описывается на интервале времени $[0, t_f]$ дифференциальным уравнением для функции прогибов $u(x, t)$ с граничными и начальными условиями

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E \alpha h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = q(x, t), \quad (1.1)$$

$$(u)_{x=0} = (\partial^2 u / \partial x^2)_{x=0} = 0, \quad (u)_{x=l} = (\partial^2 u / \partial x^2)_{x=l} = 0, \quad (1.2)$$

$$(u)_{t=0} = 0, \quad (\partial u / \partial t)_{t=0} = 0, \quad (1.3)$$

где $h(x)$ — площадь поперечного сечения балки (сечения балки предполагаются подобными); α — константа, зависящая от формы поперечного сечения; E — модуль упругости; ρ — плотность материала.

Рассматривается задача, заключающаяся в отыскании переменной проектирования, доставляющей минимум функционалу

массы балки:

$$J = \int_0^l \rho h \, dx = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_0^l \rho h \, dx \, dt \rightarrow \min_h, \quad (1.4)$$

при ограничениях на величину максимального прогиба

$$J_1 = \max_{x,t} |u(x,t)| \leq C_1 \quad (1.5)$$

и удовлетворяющей двусторонним неравенствам

$$h_{\min} \leq h(x) \leq h_{\max}. \quad (1.6)$$

Согласно предложенному в [8] методу, локальные ограничения типа (1.5) можно заменить интегральными, учитывая малое отличие норм в пространстве непрерывных функций и в пространстве функций, интегрируемых с p -й степенью при достаточно больших значениях p . Подробно вопрос о замене локальных ограничений интегральными обсуждался в [8, 125]. Таким образом, можно модифицировать постановку задачи оптимизации, аппроксимируя локальное ограничение (1.5) интегральным:

$$J_p = \left(\frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_0^l |u(x,t)|^p \, dx \, dt \right)^{1/p} \leq C_1. \quad (1.7)$$

Для вывода необходимых условий экстремума и построения формул анализа чувствительности проварьируем переменную проектирования h , придав ей значение $h + \delta h$, при этом функция прогибов примет значение $u + \delta u$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(2E\alpha h \delta h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E\alpha h^2 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right) + \\ + \rho h \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} + \rho \delta h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$(\delta u)_{x=0} = \left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right)_{x=0} = 0, \quad (\delta u)_{x=l} = \left(\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right)_{x=l} = 0, \quad (1.9)$$

$$(\delta u)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \right)_{t=0} = 0. \quad (1.10)$$

Вариации функционалов J и J_p запишутся следующим образом:

$$\delta J = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_0^l \rho \delta h \, dx \, dt, \quad (1.11)$$

$$\delta J_p = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_0^l \left[\frac{u}{J_p} \right]^{p-1} \delta u \, dx \, dt. \quad (1.12)$$

Выражение (1.12) зависит от вариации функции прогибов δu .

Для дальнейшего требуется исключить δu из (1.12) и получить выражение δJ_p как функцию δh . С этой целью введем сопряженную переменную $v(x, t)$. Домножим левую часть уравнения в вариациях (1.8) на $v(x, t)$ и проинтегрируем произведение по $x \in [0, l]$ и $t \in [0, t_f]$. Используя интегрирование по частям, с учетом граничных и начальных условий получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^l \left\{ 2E\alpha h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right\} \delta h + \\ & + \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E\alpha h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right] \delta u \Big|_{x=0}^{x=l} dx dt + \\ & + \left[\int_0^{t_f} v \frac{\partial}{\partial x} \left(2E\alpha h \delta h \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dt \right]_{x=0}^{x=l} + \left[\int_0^{t_f} v \frac{\partial}{\partial x} \left(E\alpha h^2 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} \right) dt \right]_{x=0}^{x=l} + \\ & + \left[\int_0^{t_f} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} E\alpha h^2 \frac{\partial \delta u}{\partial x} dt \right]_{x=0}^{x=l} + \left[\int_0^l v \rho \delta h \frac{\partial u}{\partial t} dx \right]_{t=0}^{t=t_f} + \\ & + \left[\int_0^l v \rho h \frac{\partial \delta u}{\partial t} dx \right]_{t=0}^{t=t_f} - \left[\int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} \rho h \delta u dx \right]_{t=0}^{t=t_f} = 0. \quad (1.13) \end{aligned}$$

Прибавим к правой части (1.12) выражение (1.13). Поскольку на функцию $v(x, t)$ пока не наложено никаких ограничений, выберем ее так, чтобы в выражении функционала δJ_p была исключена зависимость от δu . С этой целью потребуем, чтобы $v(x, t)$ удовлетворяла следующей начально-краевой задаче:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E\alpha h^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{1}{l t_f} \left(\frac{u}{J_p} \right)^{p-1}, \quad (1.14)$$

$$(v)_{x=0} = (\partial^2 v / \partial x^2)_{x=0} = 0, \quad (v)_{x=l} = (\partial^2 v / \partial x^2)_{x=l} = 0, \quad (1.15)$$

$$(v)_{t=0} = 0, \quad (\partial v / \partial t)_{t=0} = 0. \quad (1.16)$$

Таким образом, для вариации функционала δJ_p получим следующее выражение:

$$\delta J_p = \int_0^{t_f} \int_0^l \left[2E\alpha h \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right] \delta h dx dt, \quad (1.17)$$

т. е. получена зависимость от вариации параметра проектирования δh при условии (1.14)–(1.16). Заметим, что условия (1.16) для сопряженной переменной заданы в конечный момент времени $t = t_f$. Поэтому решение задачи (1.14)–(1.16) предполагает интегрирование по времени в обратном направлении.

С использованием обозначения

$$\Lambda(x) = \int_0^{t_f} \left(2Ech \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} \right) dt$$

необходимое условие экстремума в рассматриваемой задаче оптимизации имеет вид

$$\rho + \mu \Lambda(x) = 0, \quad (1.18)$$

где μ — множитель Лагранжа, подлежащий определению. Учет ограничений (1.6) на переменную проектирования осуществлялся одним из способов, описанных ранее.

При численном решении задачи оптимизации использовался метод проекции градиента. Каждый шаг итерационной процедуры оптимизации предполагал решение прямой (1.1) — (1.3) и сопряженной (1.14) — (1.16) задачи и вычисление улучшающей вариации с учетом ограничений (1.6) на основе проведенного анализа чувствительности. Решение прямой и сопряженной задачи строилось конечно-разностным методом с использованием выпуклых схем аппроксимации [15].

С применением приведенных соотношений проводились расчеты оптимальных форм балок для различных видов нагрузок [12] (рис. 6.1). Полученное в результате расчетов распределение $h(x)$ для гармонической нагрузки (рис. 6.1, а) показано на рис. 6.2 (кривая 1). При проведении расчетов полагалось $\alpha = 0,3$; $E = 70$ ГПа; $\rho = 1,2 \cdot 10^3$ кг/м³; $l = 0,4$ м; $t_f = 1$ с; $q_0 = 10$ Н/м; $h_{\min} = 0,5 \cdot 10^{-4}$ м²; $h_{\max} = 3 \cdot 10^{-4}$ м²; $C_1 = 2,3 \cdot 10^{-3}$ м. Относительный выигрыш в массе, полученный за счет оптимизации по сравнению с балкой постоянного поперечного сечения составил 18 %. На рис. 6.2 показано оптимальное распределение площади поперечного сечения по длине балки для нагрузки (кривая 2), показанной на рис. 6.1, б, при значениях $h_{\min} = 1$ см² и $C_1 = 0,21$ см. В этом случае выигрыш оказался равным 19,2 %. Кривая 3 соответствует оптимальному распределению $h(x)$ для шарнирно опертой балки при действии динамической нагрузки, приведенной на рис. 6.1, в.

Некоторое изменение постановки задачи происходит, если предположить, что балка предварительно напряжена. В этом случае уравнение для прогибов балки отличается от (1.1) тем, что в правой части добавляется слагаемое $h\sigma \partial^2 u / \partial x^2$ (со знаком «плюс» в случае растяжения и со знаком «минус» в случае сжатия). Через σ обозначено напряжение в сечении балки. Усилие $h\sigma = N$ является постоянной величиной. В правой части уравнения для сопряженной переменной добавится с соответствующим знаком член $N \partial^2 u / \partial x^2$. В остальной системе необходимых условий экстремума не изменится.

Следует отметить, что во всех рассмотренных случаях динамического нагружения оптимальные распределения $h(x)$ для шарнирно опертой балки качественно похожи, и это позволяет

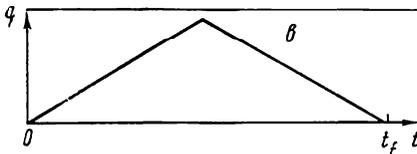
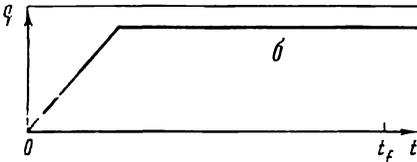
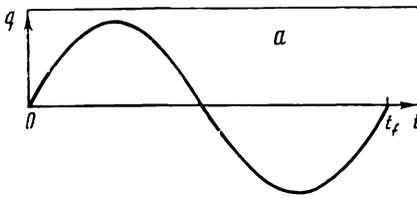


Рис. 6.1

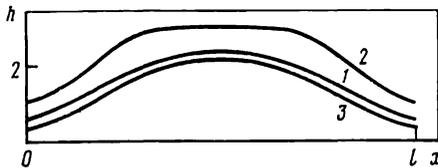


Рис. 6.2

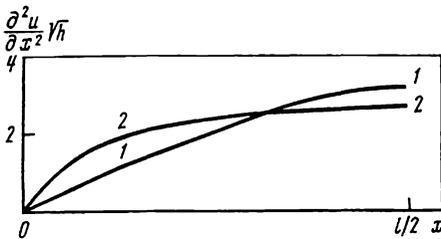


Рис. 6.3

нагрузке распределены более равномерно по пролету (кривая 2).

Рассмотренная задача оптимального проектирования балки при нестационарном динамическом нагружении демонстрирует эффективность одного из способов решения задачи оптимизации.

Р. Х. Плаут [210] в 1970 г. рассмотрел задачу о балке под действием нестационарной нагрузки. В работе получена верхняя оценка для максимального прогиба балки. Отыскивалось также кусочно-постоянное распределение толщин, которое минимизирует верхнюю оценку для прогиба при заданном весе конструкции.

дать некоторые общие рекомендации относительно изменения величины площади поперечного сечения по пролету балки заданной жесткости для целого набора динамических нагрузок.

Для полученных оптимальных распределений $h(x)$ можно вычислить напряжения $\sigma_{\max}(x)$, возникающие при изгибе в сечении балки, по формуле

$$\sigma_{\max} = M_x / W_x,$$

где M_x — изгибающий момент; W_x — момент сопротивления. Максимальное напряжение в балках с круглым поперечным сечением характеризуется величиной $h^{1/2} \partial^2 u / \partial x^2$. На рис. 6.3 представлена зависимость величины $h^{1/2} \partial^2 u / \partial x^2$ от координаты x , подсчитанной для момента времени t_{\max} , в который прогиб $u(x, t)$ достигает максимального значения. Кривая 1 на рис. 6.3 показывает распределение напряжений для половины шарнирно опертой балки постоянного сечения ($h = 2 \text{ см}^2$) при действии гармонического нагружения. Из рисунка видно, что наибольшего значения σ_{\max} достигает в центральной части пролета балки. Напряжения в оптимальной балке при той же

Вопросы динамической оптимизации упругих систем с распределенными параметрами рассматривались Э. Хогом и Я. Аророй [118, 123, 160, 161]. В этих работах для решения задач оптимального проектирования применялись методы анализа чувствительности. Получены оптимальные решения для балок и пластинок.

Работы В. Б. Гринева и В. Ф. Васильченко [42, 43] посвящены оптимальному проектированию одномерных конструкций при нестационарном нагружении. В работе [43] минимизируется вес стержня при ограничениях на допустимые напряжения и деформации. Рассматриваются разные способы дискретизации задачи, обсуждается их эффективность. Необходимые условия экстремума получены с использованном принципа максимума.

В статье Е. Цегельского и М. Жичковского [146] исследуются вопросы параметрической оптимизации вязкопластических стержней при ударных осевых нагрузках.

Ряд работ [59, 69—71, 183, 186] посвящен проблемам оптимального проектирования жесткопластических конструкций при динамическом нагружении. Характерной постановкой таких задач является минимизация остаточного прогиба при заданном весе. Для решения авторы (Ю. Р. Лепик, Я. А. Леллеп, Ю. Т. Кирс и др.), как правило, используют метод модальных движений, предложенный Дж. Б. Мартином и П. С. Саймондсом [186]. Данный метод применим к довольно узкому классу задач, но в границах применимости дает полезные результаты.

Можно также отметить работы [18, 19, 50, 142, 233, 239], посвященные вопросам оптимизации динамически нагруженных конструкций.

6.2.

МИНИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОГИБОВ БАЛОК МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

Опишем другой подход к проектированию балок, подверженных действию нестационарных динамических нагрузок. Предположим опять, что балка шарнирно закреплена и в качестве переменной проектирования $h = h(x)$ выбрана площадь поперечного сечения. Уравнение для функции прогибов $u(x, t)$ запишем следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t), \quad x \in [0, l], \quad (2.1)$$

где $I(x)$ — момент инерции сечения балки; $m(x) = \rho h(x)$ — масса, приходящаяся на единицу длины; q — внешняя динамическая нагрузка. Уравнение (2.1) можно преобразовать, введя следующие безразмерные переменные и обозначения: $x' = x/l$, $h'(x) = lh(x)/V$, где V — объем материала балки, ρ — плотность. Для разных форм сечений балки соотношения, связывающие момент

инерции I с площадью поперечного сечения h , можно представить в виде [139]

$$I(x) = C_p h^p(x), \quad (2.2)$$

где C_p, p — заданные константы ($p = 1, 2, 3$). Вводя обозначения $k^2 = \rho V l^3 / EC_p$ и $q'(x, t) = l^3 q(x, t) / EC_p$, с учетом (2.2) запишем уравнение (2.1) в безразмерной форме (штрихи опускаются):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[h^p(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] + k^2 h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q. \quad (2.3)$$

Применим к уравнению (2.3) преобразование Лапласа. Будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^p \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} \right) + s^2 k^2 h \widehat{u} = \widehat{q}, \quad (2.4)$$

где

$$\widehat{u}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} u(x, \tau) d\tau,$$

$$\widehat{q}(x, s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} q(x, \tau) d\tau.$$

Для построения решения уравнения (2.4) в виде разложения по полной системе собственных функций рассмотрим соответствующую однородную краевую задачу на собственные значения, описывающую свободные поперечные колебания балки:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[h^p \frac{d^2 \varphi^i(x)}{dx^2} \right] - v_n^2 h \varphi^i(x) = 0, \quad n = 1, 2, \quad (2.5)$$

$$\varphi^i(0) = (d^2 \varphi^i / dx^2)_{x=0} = 0, \quad \varphi^i(1) = (d^2 \varphi^i / dx^2)_{x=1} = 0.$$

Собственные функции $\varphi^i(x)$ образуют полную систему ортогональных с весом функций, определенных на отрезке $[0, 1]$. Поэтому $\widehat{u}(x, s)$ и $\widehat{q}(x, s)$ могут быть представлены в виде рядов по формам свободных колебаний

$$\widehat{u}(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(s) \varphi^i(x), \quad (2.6)$$

$$\widehat{q}(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i(s) \varphi^i(x).$$

Коэффициенты $A_i(s)$ и $B_i(s)$ находятся по формулам

$$A_i(s) = \frac{1}{\Lambda_i} \int_0^1 h(\xi) \widehat{u}(\xi, s) \varphi^i(\xi) d\xi, \quad (2.7)$$

$$B_i(s) = \frac{1}{\Lambda_i} \int_0^1 \widehat{q}(\xi, s) \varphi^i(\xi) d\xi,$$

где

$$\Lambda_i = \int_0^1 h(\xi) [\varphi^i(\xi)]^2 d\xi.$$

Умножая уравнение (2.4) на $\varphi^i(x)$ и интегрируя его по отрезку $[0, 1]$, получим следующие соотношения:

$$\int_0^1 \varphi^i \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h^p \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial x^2} \right) dx + s^2 k^2 \int_0^1 h \widehat{u} \varphi^i dx = \int_0^1 \widehat{q} \varphi^i dx. \quad (2.8)$$

Интегрирование по частям первого члена соотношения (2.8) с учетом (2.5) дает

$$v_i^2 \int_0^1 h \widehat{u} \varphi^i dx + s^2 k^2 \int_0^1 h \widehat{u} \varphi^i dx = \int_0^1 \widehat{q} \varphi^i dx.$$

Сравнивая полученное выражение с (2.7), получим соотношение между коэффициентами A_i и B_i :

$$A_i(s) = B_i(s) / (v_i^2 + k^2 s^2). \quad (2.9)$$

Подставим (2.9) в первое соотношение (2.6) и учтем выражения (2.7) для коэффициентов B_i . Применяя далее обратное преобразование Лапласа, будем иметь

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi^i(x)}{k v_i \Lambda_i} \int_0^t \int_0^1 q(\xi, \tau) \varphi^i(\xi) \sin \frac{v_i}{k} (t - \tau) d\tau d\xi. \quad (2.10)$$

Формула (2.10) дает решение уравнения (2.3) при нулевых начальных условиях, выраженное через собственные функции задачи (2.5).

Перейдем теперь к отысканию распределения материала по пролету балки, т. е. к определению переменной проектирования $h(x)$, минимизирующей прогиб в центральной точке $x = 1/2$. Для этого применим метод малого параметра. Представим первую собственную функцию задачи (2.5) в виде суммы

$$\varphi^1(x, \varepsilon) = \sin \pi x + \varepsilon \sin 3\pi x + \varepsilon^2 \sin 5\pi x,$$

зависящей от параметра ε , который может быть как положительным, так и отрицательным. Заметим, что $\varphi^1(x, 0)$ является первой собственной функцией задачи о свободных колебаниях балки постоянной толщины. Для $0 < \varepsilon \leq 1/2$ выполняется $\varphi^1(1/2, \varepsilon) < \varphi^1(1/2, 0)$. Подставляя $\varphi^1(x, \varepsilon)$ в (2.5), получим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка относительно h :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[h^p(x) \frac{d^2 \varphi^1(x, \varepsilon)}{dx^2} \right] - v_1^2 h(x) \varphi^1(x, \varepsilon) = 0. \quad (2.11)$$

Следуя методу малого параметра, решение будем искать в виде

$$h = h^0 + \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x) + \dots,$$

$$v_1^2 = v_{10}^2 + \varepsilon v_{11}^2 + \varepsilon^2 v_{12}^2 +$$

Подставляя эти разложения в (2.11) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Вводя обозначения $s_i(x) = \sin i\pi x$, приведем в качестве примера уравнения, получающиеся при удержании в разложениях членов до порядка ε^2 включительно для случая $p = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{d^2(s_1 h^0)}{dx^2} + \frac{v_{10}^2}{\alpha_0}(s_1 h^0) &= 0, \\ \frac{d^2(s_1 h^1)}{dx^2} + \frac{\pi^2}{2}(s_1 h^1) - 40h^0 \pi^2 s_3 - \frac{v_{11}^2}{2\pi^2} s_1, & \quad (2.12) \\ \frac{d^2(s_1 h^2)}{dx^2} + \frac{\pi^2}{2}(s_1 h^2) &= -\frac{1}{2h^0} \frac{d^2[s_1(h^1)^2]}{dx^2} - \\ &- 9 \frac{d^2}{dx^2}(s_2 h^1) - \frac{\pi^2}{2}(s_2 h^1) - \frac{v_{11}^2}{2h^0 \pi^2}(s_1 h^1) - \frac{v_{11}^2}{2\pi^2} s_2 - \frac{v_{11}^2}{2\pi^2} s_1. \end{aligned}$$

Заметим, что уравнения (2.12) можно разрешить относительно $(s_1 h^i)$ и что величины $(s_1 h^i)$ равны нулю при $x = 0$ и $x = 1$. Интегрируя уравнения (2.12) с учетом условия симметрии $h(x)$ относительно точки $x = 1/2$ и условия постоянства объема материала балки

$$\int_0^1 h(x) dx = 1, \quad (2.13)$$

будем иметь (при $p = 2$)

$$h^0 = 1, \quad h^1(x) = 4,7059 [1 - \sin(3\pi x)/\sin(\pi x)], \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} h^2(x) &= -42,521 + 10,698 \sin(3\pi x)/\sin(\pi x) + \\ &+ 19,089 \sin(5\pi x)/\sin(\pi x). \end{aligned}$$

Из условия (2.13) следует

$$v_1^2 = \pi^4 (1 + 4,7059\varepsilon - 87,642\varepsilon^2 + \dots). \quad (2.15)$$

Аналогично определяется приближенное решение для случаев $p = 1$, $p = 3$ [139]. Найденное однопараметрическое семейство решений уравнения (2.11) можно использовать для минимизации величины динамического прогиба. Возможность уменьшения величины динамического прогиба с использованием полученных представлений для искомых величин можно косвенно обосновать, исследуя зависимость наименьшей частоты свободных колебаний балки от ε . Ограничимся классом функций $h(x, \varepsilon) = 1 + \varepsilon h^1(x) + \varepsilon^2 h^2(x)$. Собственная функция $\phi^1(x)$ задачи на собственные

значения (2.5) выражается следующим образом:

$$\varphi^1(x) = \sin \pi x + \varepsilon \sin 3\pi x + \varepsilon^2 \sin 5\pi x + \dots$$

Приближенные выражения для собственных функций $\varphi^i(x)$ при $i > 1$, получаемые методом малого параметра, имеют вид

$$\varphi^i(x) = \sin i\pi x + \varepsilon [G_i^+ \sin(i+2)\pi x + G_i^- \sin(i-2)\pi x] + \dots, \quad i = 2, 3, \quad (2.16)$$

где G_i^+ и G_i^- зависят от i , p и определяются по формулам

$$\begin{aligned} (G_i)^\pm &= 40(i^2 \pm i^3) / [(i \pm 2)^4 - i^4], \quad p = 1, \\ (G_i)^\pm &= 4,7059(i^4 \pm 8i^3 + 8i^2) / [(i \pm 2)^4 - i^4], \quad p = 2, \\ (G_i)^\pm &= 6,1538(i^4 \pm 6i^3 + 6i^2) / [(i \pm 2)^4 - i^4], \quad p = 3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из-за громоздкости выражений приведены только члены, имеющие порядок по ε не выше первого. Соответствующие собственные числа $\nu_i^2 (i > 1)$ мало чувствительны к изменениям параметра ε . В [139] рассматривались динамические нестационарные нагрузки следующих четырех типов:

$$\begin{aligned} q_1(x, t) &= \delta(x - 1/2)\delta(t), \\ q_2(x, t) &= \delta(t), \\ q_3(x, t) &= \delta(x - 1/2), \\ q_4(x, t) &= 1, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

где символом δ обозначена δ -функция. Для данных нагрузок с использованием (2.10) и приведенных выше соотношений метода малого параметра найдены выражения для прогибов центральной части балки в зависимости от параметра ε :

$$\begin{aligned} (u^1)_\varepsilon &= \frac{1}{k} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{[\varphi^i(1/2, \varepsilon)]^2}{\nu_i(\varepsilon) \Lambda_i(\varepsilon)} \sin \frac{\nu_i(\varepsilon)}{k} t, \\ (u^2)_\varepsilon &= \frac{1}{k} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\varphi^i(1/2, \varepsilon) \int_0^1 \varphi^i(\xi, \varepsilon) d\xi}{\nu_i(\varepsilon) \Lambda_i(\varepsilon)} \sin \frac{\nu_i(\varepsilon)}{k} t, \\ (u^3)_\varepsilon &= \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{[\varphi^i(1/2, \varepsilon)]^2}{[\nu_i(\varepsilon)]^2 \Lambda_i(\varepsilon)} \left[1 - \cos \frac{\nu_i(\varepsilon)}{k} t \right], \\ (u^4)_\varepsilon &= \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\varphi^i(1/2, \varepsilon) \int_0^1 \varphi^i(\xi, \varepsilon) d\xi}{[\nu_i(\varepsilon)]^2 \Lambda_i(\varepsilon)} \left[1 - \cos \frac{\nu_i(\varepsilon)}{k} t \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Отметим, что в формулах (2.19) собственные функции и собственные числа при $i > 1$ заданы приближенно с точностью до ε .

Решение задачи оптимизации можно получить, разыскивая минимум по ε от максимального значения прогиба в центре бал-

Таблица 6.1

ρ	Максимальный прогиб		Выигрыш в сравнении с балкой постоянного сечения (в %)
Нагрузка $q_1(x, t) = \delta(x - 1/2)\delta(t)$			
1	1,0348	0,0435	17,9
2	0,8175	0,0715	32,7
3	0,8281	0,0798	31,8
Нагрузка $q_2(x, t) = \delta(t)$			
1	0,9995	0,0023	—
2	0,8446	0,0514	15,5
3	0,8532	0,0564	14,6
Нагрузка $q_3(x, t) = \delta(x - 1/2)$			
1	2,0021	0,0117	1,3
2	1,5698	0,0454	22,6
3	1,5070	0,0539	26,7
Нагрузка $q_4(x, t) = 1, t \geq 0$			
1	1,9896	0,0036	0,1
2	1,6438	0,0396	17,5
3	1,5995	0,0473	19,7

ки $u_* = \min_{\varepsilon} \max_t |u^i|$ ($t \in [0, t_f]$). С учетом того, что величина динамического прогиба балки, даваемая формулами (2.19), является сложной функцией ε и t , экстремум в [139] находился приближенно. На рис. 6.4 показана характерная зависимость величины максимального прогиба от ε . В табл. 6.1 приведены результаты численного расчета, которые показывают, что для всех рассмотренных случаев нестационарного нагружения на основе параметрической оптимизации достигается значительное уменьшение динамической реакции.

В заключение заметим, что изложенный подход к оптимизации форм балок не является столь общим, как подход, описанный в предыдущем разделе и основанный на использовании условий экстремума и алгоритма последовательной оптимизации. Большей общностью обладают также подходы, использующие теорию возмущений и методы анализа чувствительности. Тем не менее описанный способ, как и другие методы параметрического анализа и оптимизации, является относительно простым и позволяет в ряде случаев добиться значительного изменения функционала качества.

6.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ОБОЛОЧЕК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

В данном разделе подход, основанный на использовании необходимых условий экстремума и соотношений анализа чувствительности, применяется для оптимизации оболочек, работающих в условиях нестационарного динамического нагружения [14].

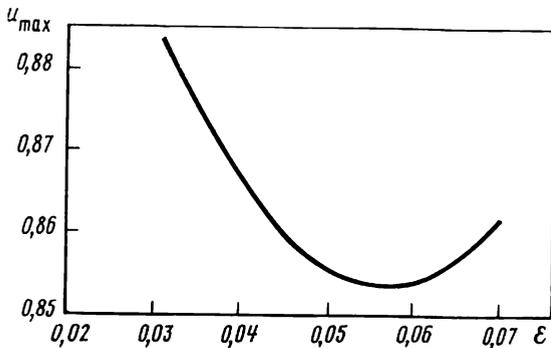


Рис. 6.4

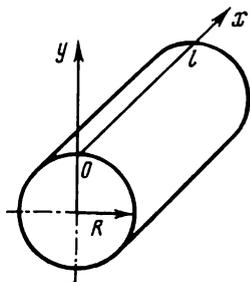


Рис. 6.5

Рассмотрим осесимметричную цилиндрическую оболочку переменной толщины $h = h(x)$, длины l и радиуса R (рис. 6.5). На оболочку действует радиальная нагрузка $q = q(x, t)$, изменяющаяся во времени. Обозначим через $w = w(x, t)$ прогиб в радиальном направлении (вдоль оси Oy), $u = u(x, t)$ — смещение в осевом направлении (вдоль оси Ox). Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} x' &= x/R, & h' &= h/R, & u' &= u/R, & w' &= w/R, & t' &= t/t_j, \\ \rho' &= \rho(1 - \nu^2)R^2/(Et_j^2), & q' &= q/E, & l' &= l/R, & t_j' &= 1. \end{aligned}$$

Уравнения, описывающие динамическое поведение оболочки, имеют вид (штрихи опускаются)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu w \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (3.1)$$

$$h \left(w + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t),$$

где ρ , E , ν — плотность материала, модуль Юнга, коэффициент Пуассона; $t \in [0, t_j]$ — заданный интервал времени.

Оболочку считаем шарнирно опертой с обоих концов. В этом случае граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} w(0, t) &= (\partial^2 w / \partial x^2)_{x=0} = 0, & w(l, t) &= (\partial^2 w / \partial x^2)_{x=l} = 0, & (3.2) \\ u(0, t) &= 0, & u(l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Предполагается, что начальные деформации оболочки отсутствуют и равны нулю скорости в осевом и радиальном направлениях при $t = 0$:

$$\begin{aligned} (w)_{t=0} &= (\partial w / \partial t)_{t=0} = 0, \\ (u)_{t=0} &= (\partial u / \partial t)_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Рассмотрим задачу минимизации объема материала оболочки посредством выбора переменной проектирования $h(x)$:

$$J = \int_0^l h \, dx \rightarrow \min_h, \quad (3.4)$$

при ограничении на величину максимального по $x \in [0, l]$ и $t \in [0, t_f]$ прогиба

$$\max_{x,t} |w(x, t)| \leq d, \quad (3.5)$$

обусловленного действием динамической нагрузки $q(x, t)$. На допустимые значения переменной проектирования $h(x)$ наложены ограничения

$$h_{\min} \leq h(x) \leq h_{\max}. \quad (3.6)$$

Здесь h_{\min} , h_{\max} — заданные константы.

Вводя функцию $w^*(x, t) = (|w(x, t)| - d + ||w(x, t)| - d|)/2$, которая принимает значения

$$w^*(x, t) = \begin{cases} |w(x, t)| - d, & \text{если } |w(x, t)| - d \geq 0, \\ 0, & \text{если } |w(x, t)| - d < 0, \end{cases}$$

условие (3.5) можно заменить эквивалентным интегральным представлением

$$J_1 = \int_0^1 \int_0^l w^*(x, t) \, dx \, dt = 0. \quad (3.7)$$

Для решения поставленной задачи оптимизации выразим вариацию функционала (3.7) через вариацию переменной проектирования δh . С этой целью введем сопряженные переменные $v(x, t)$ и $s(x, t)$. Проварьировав уравнения (3.1), умножим первое уравнение в вариациях на $v(x, t)$, а второе — на $s(x, t)$ и проинтегрируем произведение по частям с учетом граничных и начальных условий. Добавим полученные выражения к вариации функционала δJ_1 :

$$\delta J_1 = \int_0^1 \int_0^l \text{sign}[w(x, t)] \frac{1 + \text{sign}[|w(x, t)| - d]}{2} \delta w \, dx \, dt. \quad (3.8)$$

Для сохранения в получающейся при этом сумме только членов, обусловленных вариацией параметра проектирования δh , потребуем выполнения следующих соотношений для сопряженных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[h \left(\frac{\partial v}{\partial x} - vs \right) \right] - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\ h \left(s - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{h^3}{12} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} &= \\ = \text{sign}[w(x, t)] \frac{(1 + \text{sign}[|w(x, t)| - d])}{2}, & \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$s(0, t) = (\partial^2 s / \partial x^2)_{x=0} = 0, \quad s(l, t) = (\partial^2 s / \partial x^2)_{x=l} = 0, \quad (3.10)$$

$$v(0, t) = v(l, t) = 0,$$

$$(v)_{t=1} = (\partial v / \partial t)_{t=1} = 0, \quad (3.11)$$

$$(s)_{t=1} = (\partial s / \partial t)_{t=1} = 0.$$

В результате варпации функционалов δJ и δJ_1 запишем в виде

$$\delta J = \int_0^l \delta h \, dx = \langle e_1, \delta h \rangle, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \delta J_1 = & \int_0^1 \int_0^l \left[- \left(v w + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial t} + \right. \\ & + s \left(w + v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \\ & \left. - \rho \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \delta h \, dx \, dt = \int_0^l \Lambda(x) \delta h \, dx = \langle e_2, \delta h \rangle, \end{aligned}$$

где скобкам $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначим интеграл от произведения стоящих в скобках функций по $x \in [0, l]$.

Решение задачи оптимизации отыскивалось численно методом последовательной оптимизации [8, 9]. Для каждого приближения $h(x)$ решались прямая и сопряженная задача (3.1)–(3.3) и (3.9)–(3.11). С этой целью отрезок времени $[0, 1]$ разбивался на N равных интервалов Δt , и частные производные по времени в уравнениях (3.1), (3.9) заменялись конечно-разностными соотношениями. При определении функций w , u , v и s на каждом временном слое $t = t_i$ использовались вариационные формулировки прямой и сопряженной задачи. Для получения конечно-разностных аналогов вариационных задач строились выпуклые схемы аппроксимации второго порядка точности [15]. После определения функций w , u , v и s улучшающая вариация δh вычислялась по формуле

$$\delta h = \tau \left(-e_1 + \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\langle e_2, e_2 \rangle} e_2 \right),$$

где $\tau > 0$ — малое число (шаг по градиенту). Итерационный процесс последовательной оптимизации прекращался при достижении заданной точности в выполнении условия оптимальности

$$1 + \Lambda(x) = 0.$$

Ограничения на переменную проектирования $h(x)$ удовлетворялись с помощью введения вспомогательной функции (замена Валентайна [8]). На рис. 6.6 показано оптимальное распределе-

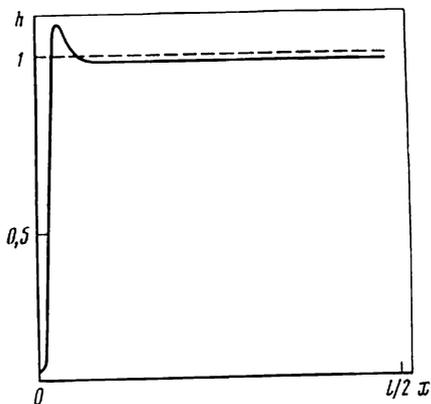


Рис. 6.6

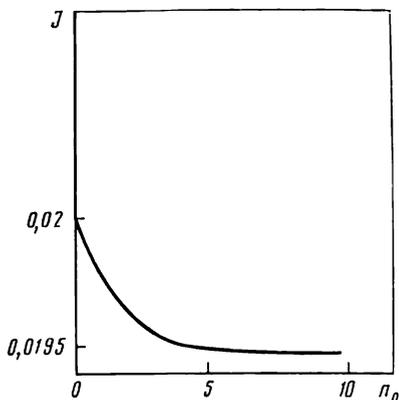


Рис. 6.7

ние толщины $h(x)$ для цилиндрической оболочки, находящейся под действием динамической нагрузки:

$$q = \begin{cases} q_0, & 0 \leq t \leq 0,25, \\ 0, & 0,25 < t \leq 1. \end{cases}$$

В силу симметрии задачи относительно сечения $x = l/2$ расчеты проводились для половины оболочки. При расчетах полагались $q_0 = 10^{-7}$; $\rho = 4 \cdot 10^{-3}$; $d = 0,13 \cdot 10^{-4}$; $\nu = 0,3$; $h_{\min} = 10^{-3}$; $l = 4$; $\Delta t = 0,05$; $\tau = 0,1$. Сравнивая оптимальную оболочку с оболочкой постоянной толщины, обладающей такой же жесткостью, отметим, что выигрыш в результате оптимизации по функционалу составляет 3 %.

Характерной особенностью представленного на рис. 6.6 распределения материала в оболочке является наличие краевого эффекта. Толщина оптимальной оболочки является практически постоянной за исключением малых областей вблизи ее краев. В этих областях функция толщины $h(x)$ довольно круто возрастает, а затем резко уменьшается, образуя ребро жесткости. На рис. 6.7 показана зависимость величины J от номера итерации n_0 при последовательной оптимизации. Эта зависимость характеризует хорошую сходимость метода в рассматриваемом случае.

6.4.

МИНИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОДАТЛИВОСТИ КОНСТРУКЦИИ ЗА СЧЕТ РАЦИОНАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДЕМПФИРОВАНИЯ

При проектировании конструкций, рассчитываемых на нестационарные динамические воздействия, нередко используются модели, в которых демпфированием можно пренебречь. Такие идеализированные модели позволяют получить вполне удовлетвори-

тельное описание поведения конструкций в случае, когда рассматриваемый интервал времени достаточно мал, материал, из которого изготовлена конструкция, является идеально упругим, взаимодействие ее со средой таково, что внешним трением можно пренебречь, а также можно не учитывать потери энергии за счет неидеальности соединения элементов конструкции и т. д. Если исключить из рассмотрения диссипативные силы не представляется возможным или, наоборот, включение диссипативных элементов в конструкцию predetermined ее назначением и позволяет существенно улучшить ее динамические свойства [76], то характеристики диссипации можно принять в качестве переменных проектирования и рассмотреть соответствующие оптимизационные задачи. Отметим, что здесь речь идет о тех характеристиках демпфирования, которые присущи самой проектируемой конструкции и могут быть изменены в процессе оптимизации.

Уравнение движения конструкции при наличии демпфирования, граничные и начальные условия можно записать следующим образом:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D \frac{\partial u}{\partial t} + Cu = q, \quad (4.1)$$

$$(Nu)_{\Gamma} = g(x, t), \quad (Ku)_{t=0} = \chi(x), \quad (4.2)$$

где $u = u(x, t)$ — перемещение конструкции под действием заданной внешней нагрузки $q(x, t)$; M , D , C — соответственно инерционный, диссипативный и жесткостный линейный операторы; N , K — линейные операторы граничных и начальных условий; Γ — граница области Ω , занимаемой конструкцией; $q(x, t)$, $\chi(x)$ — заданные функции. В дальнейшем зависимость от пространственных переменных не указываем для краткости. Будем предполагать, что материал конструкции является вязкоупругим и характеризуется наследственным трением. Тогда диссипативный оператор D может быть представлен в виде [35]

$$D \frac{\partial u}{\partial t} = \int_{-\infty}^t R(t, \tau) \frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (4.3)$$

где ядро оператора $R(t, \tau)$ выбирается с учетом свойства материала.

Рассмотрим тонкостенную конструкцию, поведение которой под действием заданной нагрузки $q(x, t)$ ($x \in \Omega$, $t \in [0, t_1]$) описывается соотношениями (4.1), (4.2). Конструкция изготовлена из двухслойного материала, причем основу его составляет упругий слой, определяющий жесткостные свойства конструкции, а другой относительно нежесткий слой обуславливает диссипативные свойства системы. Влиянием малой жесткости второго слоя (полимерной пленки, вязкой накладки) на жесткость кон-

струкции можно пренебречь, так же как можно не учитывать диссипацию энергии при колебаниях в жестком слое. Для полимерного материала вязкого слоя ядро $R(t, \tau)$ можно выбрать в виде [35]

$$R(t, \tau) = \gamma e^{-\beta(t-\tau)} / (t - \tau)^{1-\alpha},$$

где $\gamma = \gamma_0 h(x)$, $h(x)$ — функция распределения вязкоупругих свойств конструкции; $R(t, \tau) = h(x)R_0(t, \tau)$, константы α , β и γ_0 определяются выбором конкретного материала. Ниже рассмотрим функцию $h(x)$ в качестве переменной проектирования и будем считать, что $h(x)$ удовлетворяет ограничению

$$J_1 = \int_{\Omega} h(x) dx - V = 0, \quad (4.4)$$

где V — заданная константа. Сформулируем оптимизационную задачу. Требуется найти такое распределение переменной проектирования $h(x)$ по конструкции, которое доставляет минимум функционалу податливости

$$J = \max_{x,t} |u(x, t)| \rightarrow \min_h \quad (4.5)$$

и удовлетворяет ограничению (4.4). Минимизируемый локальный функционал (4.5) заменим интегральным соотношением

$$J_p = \frac{1}{t_f \text{mes } \Omega} \left(\int_0^{t_f} \int_{\Omega} |u|^p d\Omega dt \right)^{1/p} \quad (4.6)$$

основываясь на близости норм в пространстве непрерывных функций и в пространстве функций, интегрируемых с p -й степенью при достаточно больших значениях p . Для того чтобы провести анализ чувствительности, получить необходимые условия оптимальности и выписать сопряженную систему, воспользуемся приемами теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Проварьировав функции h , u , получим систему уравнений в вариациях

$$M \partial^2 \delta u / \partial t^2 + D \partial \delta u / \partial t + D_{\delta h} \delta u / \partial t + C \delta u = 0, \quad (4.7)$$

$$(N \delta u)_{\Gamma} = 0, \quad (K \delta u)_{t=0} = 0, \quad (4.8)$$

где $D_{\delta h} = (\partial D / \partial h) \delta h$.

Введем в рассмотрение сопряженную переменную $v(x, t)$. Умножим левую часть уравнения (4.7) скалярно на $v(x, t)$ и проинтегрируем полученное выражение:

$$I = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} v \left[M \frac{\partial^2 \delta u}{\partial t^2} + D \frac{\partial \delta u}{\partial t} + D_{\delta h} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + C \delta u \right] d\Omega dt. \quad (4.9)$$

Рассмотрим следующий интеграл:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{t_f} v(t) D \frac{\partial \delta u}{\partial t} dt = \int_0^{t_f} v(t) \left[\int_{-\infty}^t R(t, \tau) \frac{\partial \delta u(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] dt = \\ &= \int_0^{t_f} v(t) \left[\int_0^t R(t, \tau) \frac{\partial \delta u(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right] dt. \end{aligned}$$

После выполнения преобразований получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} J_0 &= \int_0^{t_f} \frac{\partial \delta u(\tau)}{\partial \tau} \left\{ \int_{\tau}^{t_f} R(t, \tau) [v(t) - v(\tau)] dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau}^{t_f} R(t, \tau) v(\tau) dt \right\} d\tau. \end{aligned}$$

Осуществляя интегрирование и заменяя в полученном соотношении t на τ и τ на t , с учетом начальных условий будем иметь

$$\begin{aligned} J_0 &= - \int_0^{t_f} \delta u(t) \frac{\partial}{\partial t} \int_t^{t_f} R(\tau, t) [v(\tau) - v(t)] d\tau dt - \\ &\quad - \int_0^{t_f} \delta u(t) \frac{\partial}{\partial t} \left[v(t) \int_t^{t_f} R(\tau, t) d\tau \right] dt = \\ &= - \int_0^{t_f} \delta u(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_t^{t_f} R(\tau, t) v(\tau) d\tau \right] \right\} dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

С использованием формулы (4.10) интеграл (4.9) можно представить в виде следующей суммы:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left\{ \delta u \left[M^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C^* v - \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_t^{t_f} R(\tau, t) v(\tau) d\tau \right] \right] \right\} d\Omega dt + \\ &\quad + \int_0^{t_f} \int_{\Omega} D_{\delta h}^* \frac{\partial u}{\partial t} \cdot v d\Omega dt. \end{aligned}$$

Символом * обозначены сопряженные операторы. В предположении, что p — четное число, вариации функционалов (4.4) и

(4.6) запишутся в форме

$$\delta J_1 = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \delta h \, d\Omega \, dt = 0, \quad (4.11)$$

$$\delta J_p = \frac{1}{t_f \operatorname{mes} \Omega} \int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(\frac{u}{J_p} \right)^{p-1} \delta u \, d\Omega \, dt. \quad (4.12)$$

Записывая условие стационарности расширенного функционала Лагранжа и приравнивая в нем нулю члены, содержащие множителем вариацию функции состояния δu в области Ω , на границе Γ и при $t = t_f$, получим уравнение, граничные условия и условия в конечный момент времени $t = t_f$, служащие для определения сопряженной переменной:

$$M^* \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C^* v - \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_t^{t_f} R(\tau, t) v(\tau) \, d\tau \right] + \frac{1}{t_f \operatorname{mes} \Omega} \left(\frac{u}{J_p} \right)^{p-1} = 0, \quad (4.13)$$

$$(N^* v)_{\Gamma} = 0, \quad (K^* v)_{t=t_f} = 0. \quad (4.14)$$

Необходимое условие экстремума в рассматриваемой задаче оптимизации имеет вид

$$\lambda + \int_0^{t_f} v \left[\int_0^t R_0(t, \tau) \frac{\partial u}{\partial \tau} \, d\tau \right] dt = 0, \quad (4.15)$$

где множитель Лагранжа λ определяется с помощью условия (4.4).

Следует отметить, что формула (4.15) содержит двойное интегрирование по времени и это представляет определенные трудности для численной реализации.

Рассмотрим теперь задачу об осесимметричных колебаниях круглой пластинки. Соотношения (4.1), (4.2) в полярных координатах с использованием безразмерных переменных запишутся в виде [104]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left[s^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial (s^3)}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] \right\} + D \frac{\partial u}{\partial t} + M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q, \quad (4.16)$$

$$u(1, t) = 0, \quad \left[s^3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_{r=1} = 0, \quad (4.17)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=0} = 0, \quad \left[s^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial (s^3)}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]_{r=0} = 0, \\ u(r, 0) = 0, \quad (\partial u / \partial t)_{t=0} = 0. \quad (4.18)$$

Здесь $s(r)$ — переменная толщина пластинки; ν — коэффициент Пуассона; $u = u(r, t)$ — функция прогибов; $r \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$. Граничные условия (4.17) отвечают шарнирному опиранию краев пластинки. Требуется найти такое распределение переменной проектирования $h(r)$, чтобы минимизировать (4.5) при условии (4.4).

Предполагая, что диссипация мала, примем γ_0 за малый параметр и подставим в соотношения (4.16) — (4.18) следующее разложение:

$$u = u_0 + \gamma_0 u_1 + \gamma_0^2 u_2 +$$

Нулевое приближение определим из решения системы (4.16) — (4.18) для u_0 при отсутствии диссипации. Поправка u_1 может быть найдена из решения уравнения

$$C u_1 + M \partial^2 u_1 / \partial t^2 = -D \partial u_0 / \partial t$$

с краевыми и начальными условиями (4.17) и (4.18) для u_1 .

Для решения краевых задач при заданном распределении переменной проектирования отрезок времени $[0, 1]$ разбивается с постоянным шагом на интервалы. Далее, для определения прогибов u^i под действием нагрузки q^i в моменты времени t^i , $i = 0, 1, \dots, N$ был использован метод, предложенный в [38]. Решение u^{i+1} в момент времени t^{i+1} строилось следующим образом:

$$u^{i+1} = u^{i-1} + k d^i, \quad i = 1, 2, \quad (4.19)$$

Здесь k — шаг по времени; d^i доставляет минимум функционалу

$$F^i = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (d^i, d^i) d\Omega + \frac{1}{2} \theta k^2 \int_{\Omega} (C d^i, d^i) d\Omega + \int_{\Omega} (Q^i, d^i) d\Omega \quad (4.20)$$

при соответствующих краевых условиях; круглыми скобками обозначается скалярное произведение; θ — числовой параметр ($0 \leq \theta \leq 1$),

$$Q^i = -\frac{u^i - u^{i-1}}{k} + \frac{k}{2} \left[C u^i - \theta k C \left(\frac{u^i - u^{i-1}}{k} \right) - q^i \right].$$

Таким образом, решение краевых задач сводилось к последовательной минимизации функционалов F^i , $i = 1, 2, \dots$, что было реализовано численно методом наискорейшего спуска. Предложенный алгоритм оказался устойчивым к выбору шага по времени k при условии $k \leq 10^{-5}$. Применение для решения поставленной задачи алгоритма, развитого в работах [12, 14] и основанного на использовании вариационных принципов теории упругости и минимизации на каждом шаге соответствующих квадратичных функционалов, оказалось неприемлемым из-за неустойчивости этого алгоритма к выбору шага по времени даже для очень малых значений k .

При решении задачи оптимизации предполагалось, что вязкоупругий демпфирующий слой располагается на пластинке в виде

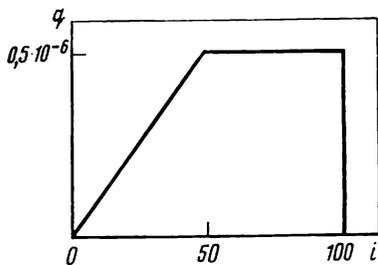


Рис. 6.8

кольца, площадь которого задана ($V = 0,785$). Отыскивалось такое расположение демпфирующего кольца, чтобы минимизировать значение величины максимального прогиба. Считалось, что нагрузка q распределена равномерно по пластинке и изменяется с течением времени, как показано на рис. 6.8.

Максимальное значение нагрузки равнялось $0,5 \cdot 10^{-6}$, значения параметров выбирались соответственно $\nu = 0,3$; $k = 10^{-5}$; $\gamma_0 = 4,4 \cdot 10^{-3}$. Функция $h(r) \equiv 0$ вне демпфирующего кольца и $h(r) = 10^{-5}$ всюду внутри кольца. Толщина пластинки принималась постоянной и равной 10^{-2} . При минимизации функционалов (4.21) принималось, что разбиение по радиусу равно 0,05, а параметр $\theta = 1$. Согласно терминологии, принятой в [38], случай $\theta = 1$ соответствует неявной схеме аппроксимации. Расчеты проводились также с использованием явной схемы ($\theta = 0$) и полунеявной схемы аппроксимации ($\theta = 1/2$). При этом было получено хорошее совпадение результатов, а затраты машинного времени были примерно одинаковы.

На рис. 6.9 кривыми с номерами 1–7 изображены зависимости максимальных прогибов пластинки от времени (от номера i шага по времени). Кривая 1 соответствует размещению вязкоупругого материала в центре пластинки, кривые 2–6 показывают, как изменяется поведение пластинки по мере перемещения демпфирующего кольца из центральной области к периферии, причем кривая 6 отвечает размещению демпфирующего материала по краю пластинки. Кривая с номером 7 представляет зависимость максимального прогиба от i при отсутствии демпфирования. Для кривых 2–7 максимальный прогиб достигался в центре пластинки, а для кривой 1 — на окружности малого радиуса. Из рис. 6.9 следует, что для указанного вида нагружения и краевых условий наиболее эффективно размещать демпфирующий материал в центре пластинки. Отметим, что с применением описанного метода аналогичные задачи оптимизации могут быть решены для открытых пологих осесимметричных оболочек.

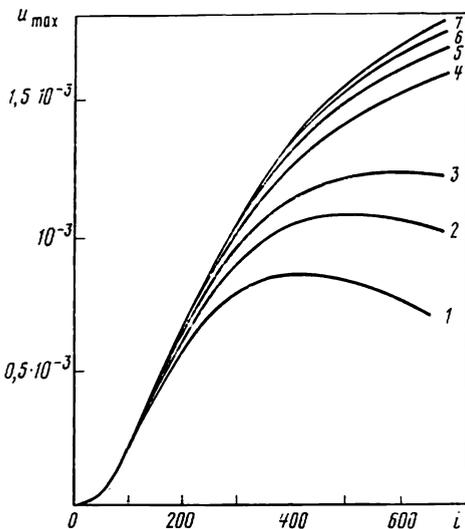


Рис. 6.9

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ПЛАСТИНОК ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

При проектировании конструкций, рассчитываемых на внешние динамические воздействия, интерес представляет исследование влияния массовых, жесткостных и геометрических параметров на величину, характеризующую динамическую реакцию конструкции. В качестве меры динамической реакции можно рассматривать величину максимального перемещения и оценивать жесткость конструкций по величине этого функционала. При этом существенно, что положение точки конструкции и моменты времени, для которых достигается максимум перемещения, заранее неизвестны и их предстоит определять в ходе динамического расчета. Данное обстоятельство осложняет задачу проектирования, связанные с отысканием рационального распределения массовых и жесткостных характеристик.

Отметим, что величина максимального прогиба является «естественной» мерой жесткости конструкции. Из равенства нулю этого функционала, очевидно, следует отсутствие в конструкции перемещений и деформаций, а также обращение в нуль таких интегральных характеристик конструкции, как энергия ее упругих деформаций и податливость.

В общем случае, как это уже отмечалось ранее, при нестационарном нагружении оценка влияния параметров проектирования на величину целевого функционала сопряжена с необходимостью расчета поведения конструкции на всем отрезке $[0, t]$ ее функционирования. Из-за отсутствия явной зависимости величины динамической реакции от параметров проектирования прямой анализ чувствительности сводится к сложным вычислениям и перебору большого числа вариантов. Эффективным в данном случае оказывается подход, основанный на введении сопряженных переменных и соответствующих систем уравнений для их определения.

Рассмотрим моделируемое пластинкой консольное крыло малого удлинения, помещенное в поток идеального газа. Для описания конструкции крыла применяется дискретная модель, описанная в работах [33, 34]. На крыло, находящееся в потоке, действует нестационарная аэродинамическая нагрузка типа вертикального порыва. Деформация пластинки характеризуется вектор-функцией обобщенных перемещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$. Поведение пластинки в потоке описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} (C + aC_a)\mathbf{u} + (aD_a + D)d\mathbf{u}/dt + M d^2\mathbf{u}/dt^2 &= \mathbf{q}(t), \\ \mathbf{u}(0) = (d\mathbf{u}/dt)_{t=0} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где C — матрица жесткости конструкции; C_a , D_a — аэродинамические матрицы; D — матрица демпфирования; M — матрица масс конструкции; a — параметр, характеризующий набегающий поток, пропорциональный величине скоростного напора; $q(t)$ — вектор-функция внешних нестационарных аэродинамических сил, действующих на пластинку. Предположим, что на поверхности пластинки задан конечный набор точек P^j . Вычисление истинных перемещений в точках P^j осуществляется с помощью матрицы перехода A по формуле

$$\mathbf{U} = A\mathbf{u}, \quad (5.2)$$

где \mathbf{U} — вектор-функция истинных перемещений.

Введем в рассмотрение функционалы J^k , характеризующие прогиб пластинки в некоторой j -й точке в момент времени t_k :

$$J^{jk} = (\mathbf{U}^j, \mathbf{U}^j)_{t=t_k}, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{U}^j = (0, 0, \dots, A^j\mathbf{u}, \dots, 0)$ — вектор-функция, j -я компонента которой равна истинному перемещению в j -й точке. Скобками (\cdot, \cdot) обозначено скалярное произведение; A^j — строка матрицы перехода A .

Конструкция крыла характеризуется вектором переменных проектирования $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, в качестве которых выбираются такие параметры модели крыла, как величины неконструктивных масс, толщины изотропных и ортотропных панелей обшивки крыла, жесткости балок силового каркаса крыла, работающие на изгиб и кручение.

Исследуем зависимости величины функционала J^k при некотором фиксированном j для момента времени $t = t_k$ и заданном изменении внешнего воздействия $q(t)$ и значении параметра a от малых вариаций параметров проектирования δh_i , $i = 1, 2, \dots, n$. С этой целью проварируем функционал (5.3) и систему уравнений (5.1) с начальными условиями

$$\delta J^{jk} = 2(A^j\mathbf{u}(t_k), A^j\delta\mathbf{u}(t_k)), \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} (C + aC_a)\delta\mathbf{u} + (aD_a + D)\frac{d\delta\mathbf{u}}{dt} + M\frac{d^2\delta\mathbf{u}}{dt^2} + \\ + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} + \frac{\partial M}{\partial h_i} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \delta h_i = 0, \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\delta\mathbf{u}(0) = 0, \quad (d\delta\mathbf{u}/dt)_{t=0} = 0.$$

Здесь предполагается, что матрицы C_a , D_a и D не зависят от параметров проектирования. Введем в рассмотрение вектор-функцию сопряженных переменных $\mathbf{v}(t)$, определив ее как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных

уравнений с условиями в момент времени $t = t_k$:

$$\begin{aligned} (C + aC_a^*) \mathbf{v} - (aD_a^* + D) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + M \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} &= 0, \\ \mathbf{v}(t_k) = 0, \quad \left(M \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{t=t_k} &= 2(A^j \mathbf{u}(t_k)) A^j. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Символом * обозначена операция транспонирования матрицы. Матрицы C , D и M предполагаются симметричными. В задаче Коши (5.6) для определения сопряженной переменной интегрирование по времени производится в направлении от $t = t_k$ до $t = 0$. Умножая левую часть системы уравнений в вариациях (5.5) скалярно на вектор-функцию сопряженных переменных $\mathbf{v}(t)$, интегрируя результат по времени от нуля до $t = t_k$ и используя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{t_k} \left\{ \delta \mathbf{u} \left[(C + aC_a^*) \mathbf{v} - (aD_a^* + D) \frac{d\mathbf{v}}{dt} + M \frac{d^2\mathbf{v}}{dt^2} \right] + \right. \\ \left. + \mathbf{v} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} + \frac{\partial M}{\partial h_i} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right) \delta h_i \right\} dt + [\mathbf{v} (aD_a + D) \delta \mathbf{u}]_{t=0}^{t=t_k} - \\ - \left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} M \delta \mathbf{u} \right]_{t=0}^{t=t_k} = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Первый член в вариационном соотношении (5.7) обращается в нуль ввиду (5.6). Принимая во внимание условия в момент времени $t = t_k$, из (5.7) с учетом (5.6) окончательно получим

$$\delta J^{jk} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^{t_k} \left(\mathbf{v}, \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} \mathbf{u} + \frac{\partial M}{\partial h_i} \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} \right] \right) dt \right\} \delta h_i. \quad (5.8)$$

Вариационное соотношение (5.8) позволяет исследовать влияние изменений параметров проектирования δh_i на рассматриваемую функциональную характеристику, т. е. изменение величины квадрата перемещения j -й точки пластинки в момент времени t_k при действии нестационарной нагрузки $\mathbf{q}(t)$.

Полученное вариационное соотношение позволяет перейти к рассмотрению задачи оптимизации, заключающейся в определении значений параметров проектирования h_i , при которых достигается минимум функционала квадрата максимального прогиба [13]:

$$J = \max_{j, t_k} J^{jk} \rightarrow \min_{h_i}, \quad (5.9)$$

при условиях

$$f_l(h_i) \leq C_l, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (5.10)$$

где f_i — заданные функции параметров проектирования; C_i — заданные константы. Рассматриваемые ограничения (5.10) включают в себя условия, накладываемые на полную массу конструкции и на границы изменения параметров проектирования. Ограничения (5.10) можно свести к условиям типа равенств любым из известных способов, например при помощи введения вспомогательных переменных

$$f_i(h_i) + \mu_i^2 - C_i = 0. \quad (5.11)$$

Задача условной оптимизации (5.9), (5.10) решалась методом проекции градиента. Сначала на заданном отрезке времени функционирования конструкции $[0, t_j]$ ищется решение системы уравнений (5.1) при заданных начальных значениях параметров проектирования h_i [115]. По формуле (5.2) вычисляются истинные перемещения пластины в заданном наборе точек P^j и их квадраты (5.3) на всем интервале времени $[0, t_j]$. Из полученного набора значений J^{jh} выбирается максимальное, которое достигается в точке с номером j в момент времени t_h . После построения решения прямой задачи определяются условия в момент времени $t = t_h$ для сопряженной задачи (5.6), которая решается относительно сопряженных переменных путем интегрирования системы уравнений (5.6) в обратном времени. По формулам для улучшающих вариаций параметров проектирования, полученных методом проектирования градиента на основе (5.8) и (5.11), вычисляются новые значения параметров h_i . Далее осуществляется переход к следующей итерации. Итерационный процесс заканчивается, когда достигается требуемая точность в выполнении необходимых условий экстремума.

В ходе решения задачи последовательной оптимизации максимальный прогиб может достигаться во многих точках конструкции в разные моменты времени t_h . Поэтому приведенные формулы анализа чувствительности должны быть обобщены с учетом возможности появления кратных максимумов функционала квадрата прогиба пластины. В этом случае $J = J^{\alpha\beta}$ представляет собой максимальное значение квадратов прогиба, достигаемое при заданных значениях параметров проектирования в моменты времени t_β ($\beta = 1, 2, \dots, s$) в точках P^α . Для каждого фиксированного значения β индекс α , обозначающий точку конструкции, в которой был достигнут максимум квадрата прогиба, принимает значения $\alpha = 1, 2, \dots, r_\beta$. Общее количество точек пластины, в которых достигается максимум квадрата прогиба в разные моменты времени, равно $\sum_{\beta} r_\beta = r$ ($\beta = 1, 2, \dots, s$). Заметим, что при сделанных предположениях функционал жесткости оказывается в общем случае недифференцируемым. Поэтому при решении задачи оптимизации для построения улучшающей вариации следует вычислять вариации во всех точках P^α для всех моментов времени, в которых был достигнут максимум [37, 49], и обобщить соотношения, определяющие сопряженные

переменные. В этом случае в рассмотрение вводятся r сопряженных вектор-функций $v^{\alpha\beta}$ и для их отыскания формулируется r задач Коши

$$(C + aC_a^*) v^{\alpha\beta} - (aD_a^* + D) \frac{dv^{\alpha\beta}}{dt} + M \frac{d^2 v^{\alpha\beta}}{dt^2} = 0, \quad (5.12)$$

$$v^{\alpha\beta}(t_\beta) = 0, \quad \left[M \frac{dv^{\alpha\beta}}{dt} \right]_{t=t_\beta} = 2(A^{\alpha\beta} u(t_\beta)) A^{\alpha\beta}.$$

При этом для вариации функционала жесткости справедлива формула

$$\delta J^{\alpha\beta} = \max_{\alpha, \beta} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{t_\beta} \left(v^{\alpha, \beta}, \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} u^{\alpha\beta} + \frac{\partial M}{\partial h_i} \frac{d^2 u^{\alpha\beta}}{dt^2} \right] \right) dt \delta h_i \right\}. \quad (5.13)$$

Наличие кратных максимумов функционала значительно усложняет процедуру решения задачи. Так, после выделения множества точек P^α , в которых достигается максимум в моменты времени t_β , необходимо решить r сопряженных задач (5.12). При вычислениях выражение для улучшающей вариации можно построить по формуле

$$\delta J^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{\alpha, \beta} \lambda^{\alpha\beta} \int_0^{t_\beta} \left(v^{\alpha, \beta}, \left[\frac{\partial C}{\partial h_i} u^{\alpha\beta} + \frac{\partial M}{\partial h_i} \frac{d^2 u^{\alpha\beta}}{dt^2} \right] \right) dt \right\} \delta h_i, \quad (5.14)$$

где $\lambda^{\alpha\beta}$ — неотрицательные числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda^{\alpha\beta} \geq 0, \quad \sum_{\alpha, \beta} \lambda^{\alpha\beta} = 1. \quad (5.15)$$

Заметим, что максимум квадрата прогиба пластинки может достигаться на целом отрезке времени $[t_1, t_2]$ ($0 < t_1 < t_2 \leq t_l$). Для вычисления вариации функционала в этом случае необходимо решать сопряженную задачу (5.6), зависящую от $t_\beta \in [t_1, t_2]$ как от непрерывно изменяющегося параметра, и определить сопряженную функцию двух переменных $v = v(t, t_\beta)$, а в выражении для вариации функционала (5.13) максимум должен браться по t_β . При проведении расчетов с дискретизованной временной переменной использовались формулы (5.14), (5.15). Расчеты проводились для нескольких случаев динамического нагружения пластинки. Изменение параметра внешней нагрузки во времени для этих случаев приведено на рис. 6.10. На рис. 6.11 при помощи изолиний представлены распределения безразмерных градиентов для двух типов переменных проектирования — неконструктивных масс (6.11, а, в, д) и толщины пластинки (6.11, б, г, е). Распределения градиентов неконструктивных масс для рассмотренных случаев нагружения пластинки качественно похожи. Характерной особенностью этих распределений является наличие довольно большой области отрицательных

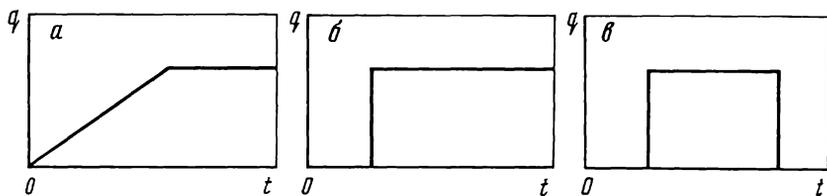


Рис. 6.10

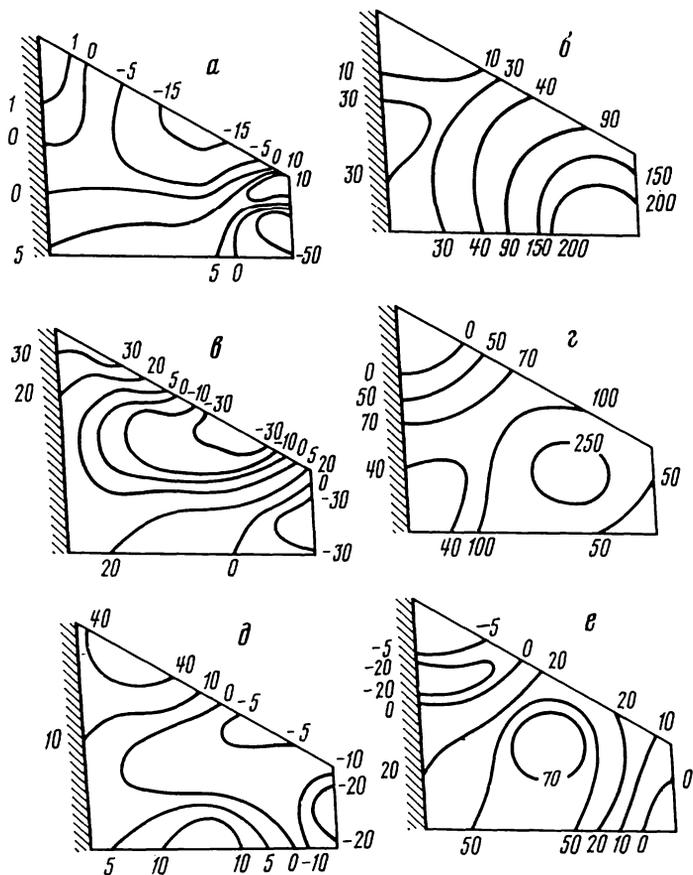


Рис. 6.11

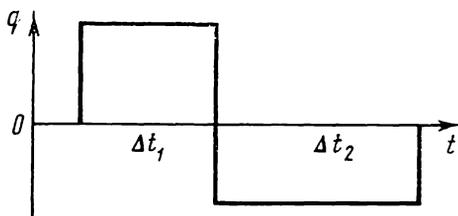


Рис. 6.12

значений градиентов в средней части пластины и в нижнем правом углу. В верхнем правом углу в процессе оптимизации происходит увеличение массы. Если в качестве переменных проектирования рассматриваются толщины пластины, то область отрицательных значений градиента, отсутствовавшая на рис. 6.11, б, появляется в левом верхнем углу при втором случае нагружения (рис. 6.11, в) и заметно увеличивается на рис. 6.11, е. Область максимальных положительных градиентов смещается соответственно из нижнего правого угла в центральную часть пластины.

Характерным обстоятельством, выявленным при проведении расчетов, во всех рассмотренных случаях нагружения является возрастание частот свободных колебаний пластины. В приведенных первых трех случаях динамического нагружения достигнуто значительное снижение величины функционала квадрата максимального прогиба. После выполнения 20—30 итераций численной процедуры оптимизации достигалось уменьшение целевого функционала на 60—70 %, что указывает на высокую эффективность алгоритма.

Распространенный подход к решению задачи оптимизации можно распространить на более широкий круг задач. Поскольку не накладывается никаких ограничений на вид функции $q(t)$, то при проектировании реальной конструкции, если возможно выделить характерные режимы эксплуатации конструкции, характеризующиеся нагрузками q_j , действующими на протяжении отрезков времени Δt_j , в системе (5.1) можно использовать внешнюю нагрузку, состоящую из последовательности q_j . При составлении сложной программы нагружения необходимо особо обратить внимание на переход от одного режима нагружения конструкции к другому, так как динамические напряжения и деформации, которые могут возникать при этом переходе, могут значительно превысить напряжения и деформации, действующие в конструкции при отдельном рассмотрении каждого из режимов q_j . Существенным при решении подобных задач является то, что значительно возрастает время нагружения конструкции. Таким образом, большое значение приобретает разработка эффективных численных методов решения задачи.

Рассмотрим в качестве иллюстрации воздействие на пластинку знакопеременной нагрузки (рис. 6.12). Первоначально на интервале времени Δt_1 прикладывается положительная ступенчатая нагрузка q_1 , а впоследствии на интервале Δt_2 — нагрузка q_2 противоположного знака. При решении задачи последовательной оптимизации максимальное значение функционала квадрата прогиба достигалось при действии нагрузки q_1 . В результате перераспределения материалов в пластинке в ходе итерационной процедуры максимум стал двукратным, т. е. первоначально максимальное значение прогиба достигалось в момент времени $t_1 \in \Delta t_1$, второй раз — в момент времени $t_2 \in \Delta t_2$. При этом оба максимума достигались в различных точках пластины. Каждому максимальному значению соответствуют свои распределения гра-

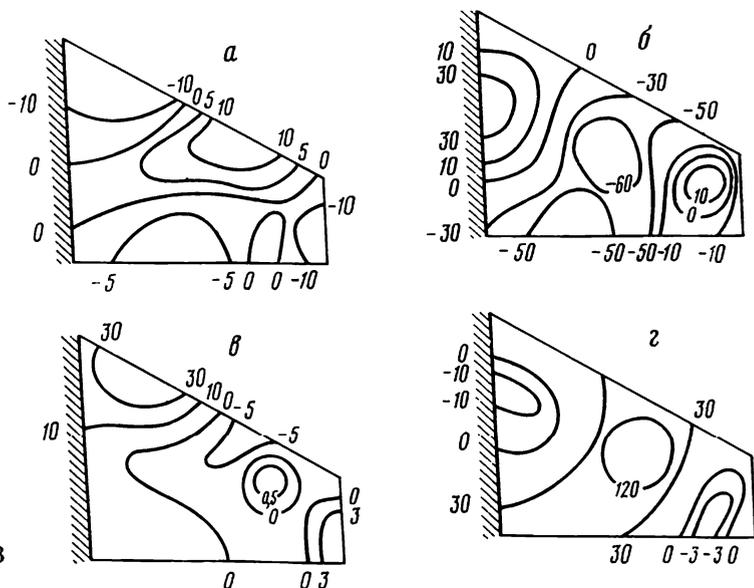


Рис. 6.13

диентов, показанные на рис. 6.13, а для неконструктивных масс и на рис. 6.13, б, г — для толщин пластинок. Как видно из рисунков, эти распределения градиентов качественно совершенно различны. В ходе последовательной оптимизации кратность максимумов сохранялась и вычисления проводились с использованием формул (5.14), (5.15). Ввиду того что области положительных и отрицательных значений градиентов для обоих максимумов не совпадают, скорость сходимости итерационной процедуры оптимизации при возникновении кратного максимума заметно снизилась.

Рассмотренная задача является примером того, как различные программы нагружения можно объединить в единой расчетной схеме.

6.6. АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТЕРЖНЕВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

При анализе динамических характеристик и проектировании сложных многоэлементных конструкций существенное значение приобретает вопрос о построении адекватных математических моделей и разработка эффективных численных методов решения задачи оптимизации. Создание эффективных методов оптимизации сложных конструкций возможно только при условии, что

вопросы выбора модели, методов прямого расчета динамического поведения конструкции и анализа чувствительности решаются комплексно. В общем случае нестационарного нагружения конструкции определение влияния параметров проектирования на величину целевого функционала требует проведения расчета поведения конструкции на всем интервале $[0, t_f]$ времени ее функционирования. Математическая модель сложной конструкции описывается системой уравнений большой размерности. Эффективное интегрирование такой системы уравнений на достаточно большом интервале времени, а тем более проведение анализа чувствительности целевого функционала к вариациям параметров проектирования конструкций приводит к необходимости выполнения чрезвычайно большого объема вычислений, поэтому требуется создание таких методов расчета динамики конструкций, которые можно было бы наиболее эффективно использовать в сочетании с итерационной процедурой оптимизации. С другой стороны, последовательно реализуемый оптимизационный процесс должен способствовать снижению вычислительных затрат на выполнение прямых расчетов от итерации к итерации. То есть эффективность вычислительного алгоритма оптимизации определяется не только эффективностью каждого отдельного этапа, но и хорошей сбалансированностью алгоритма в целом, обеспечивающей минимизацию суммарных вычислительных затрат.

Одним из наиболее эффективных методов, позволяющих рассчитывать динамические характеристики многоэлементных конструкций, является метод конечного элемента. Очевидно, что при использовании конечноеlementных моделей необходимо ориентироваться на применение специальных матричных методов для разреженных матриц, что в значительной степени ускоряет вычисления, позволяет рационально использовать память вычислительной машины.

Рассмотрим сложную составную конструкцию, подверженную внешнему нестационарному нагружению. Динамика конструкции описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$M \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + D \frac{d\mathbf{u}}{dt} + C\mathbf{u} = \mathbf{q}(t), \quad (6.1)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{a}, \quad (d\mathbf{u}/dt)_{t=0} = \mathbf{b},$$

где M — симметричная положительно определенная матрица масс конструкции; C — симметричная матрица жесткости конструкции; D — матрица демпфирования конструкции, структура и свойства которой зависят от выбранной модели демпфирования; \mathbf{a} , \mathbf{b} — векторы, характеризующие начальное состояние конструкции.

Для закрепленных конструкций вектор-функция $\mathbf{u}(t)$ описывает деформированное состояние конструкции. Для свободных конструкций в вектор $\mathbf{u}(t)$ входят как перемещения $\mathbf{u}_i(t)$, свя-

занные с деформациями, так и смещения $\mathbf{u}_r(t)$ конструкции как жесткого целого, т. е.

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_l(t) + \mathbf{u}_r(t).$$

В случае, если рассматривается свободная конструкция, матрица жесткости C несколько раз вырождена. Важно отметить, что система дифференциальных уравнений (6.1) записана в предположении, что перемещения малы. Это накладывает определенные ограничения на структуру вектор-функции $\mathbf{q}(t)$ внешних нагрузок. Будем предполагать, что действующие нагрузки являются самоуравновешенными.

При расчете п оптимизации реальных многоэлементных конструкций размерность системы уравнений (6.1) относительно велика и существенное значение приобретают вычислительные аспекты. В этом случае весьма эффективным является модельный метод, основанный на построении приближенного решения системы (6.1) с использованием разложения в ряд по формам свободных колебаний [17, 61, 130, 239]

$$\mathbf{u}_r = \Phi_j \mathbf{y}, \quad (6.2)$$

где \mathbf{y} — вектор обобщенных координат, а Φ_j — прямоугольная матрица, состоящая из собственных векторов задачи о свободных колебаниях конструкции:

$$C\Phi_j^i = \omega_i^2 M\Phi_j^i, \quad (\Phi_j^i, M\Phi_j^j) = \delta_{ij}, \quad (6.3)$$

где ω_i^2 — квадраты частот свободных колебаний; Φ_j^i — собственные векторы; δ_{ij} — символ Кронекера. Если n — порядок системы уравнений (6.1), а p — количество вычислительных собственных чисел задачи (6.3), то, как правило, $p \ll n$. Производя замену переменных в (6.1) по формуле (6.2) и умножая слева на Φ_j^* , приходим к задаче Коши для обобщенных переменных

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + [\Phi_j^* D \Phi_j] \frac{d\mathbf{y}}{dt} + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{y} = \Phi_j^* \mathbf{q}(t),$$

$$\mathbf{y}(0) = (\Phi_j^*)^{-1} M \mathbf{a}, \quad \left(\frac{d\mathbf{y}}{dt} \right)_{t=0} = (\Phi_j^*)^{-1} M \mathbf{b}. \quad (6.4)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (6.4) имеет значительно меньший порядок, чем исходная система (6.1), и для ее решения можно использовать стандартные методы интегрирования. Кроме того, в случае, когда рассматривается идеализационная механическая система без демпфирования, система (6.4) распадается на систему независимых уравнений. Аналогичное свойство сохраняется, когда используются упрощенные модели демпфирования (например, модель Фойхта [35]).

Для определения упругих смещений узлов конструкции при действии нестационарной внешней нагрузки необходимо проинтегрировать систему (6.4) и воспользоваться формулой (6.2).

Введем в рассмотрение функционал J_j^h , представляющий собой некоторую квадратичную форму упругих смещений узлов конструкции, вычисленную в момент времени $t_h \in [0, t_j]$:

$$J_j^h = (\mathbf{u}_j, R_j \mathbf{u}_j)_{t=t_h}, \quad (6.5)$$

где квадратная матрица R_j в зависимости от своей структуры определяет физический смысл функционала. Индекс j обозначает либо номер узла в конечноэлементной модели конструкции, либо номер элемента. Функционал J_j^h может обозначать величину квадрата упругого смещения узлов конструкции, величину потенциальной энергии деформации элемента, интенсивность напряжения и т. д. Во всех рассмотренных случаях функционал J_j^h является локальным и вычисляется в определенный момент времени t_h . Конструкция характеризуется вектором параметров проектирования \mathbf{h} , в качестве которых можно рассматривать величины масс и жесткостей элементов, их геометрические характеристики.

Зафиксируем определенное значение j и момент времени $t = t_h$. Исследуем зависимость величины функционала J_j^h от малых вариаций параметров проектирования. Для этого проварьируем систему уравнений (6.4) с учетом того, что коэффициенты в этой системе являются функциями параметров проектирования:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta \mathbf{y}}{dt^2} + [\Phi_j^* D \Phi_j] \frac{d \delta \mathbf{y}}{dt} + \text{diag}(\omega_i^2) \delta \mathbf{y} + \\ + \sum_{i=1}^m \delta h_i \left(\Phi_j^* \frac{\partial M}{\partial h_i} \Phi_j \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + \Phi_j^* \frac{\partial D}{\partial h_i} \Phi_i \frac{d \mathbf{y}}{dt} + \Phi_j^* \frac{\partial C}{\partial h_i} \Phi_j \mathbf{y} \right) = 0, \\ \delta \mathbf{y}(0) = 0, \quad (d \delta \mathbf{y} / dt)_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Умножим вариационное уравнение (6.6) слева скалярно на вектор-функцию сопряженных переменных $\mathbf{v}(t)$ и проинтегрируем результат от нуля до $t = t_h$. Определив сопряженную переменную как решение задачи Коши системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{v}}{dt^2} - [\Phi_j^* D^* \Phi_j] \frac{d \mathbf{v}}{dt} + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v}(t_h) = 0, \quad \left(\frac{d \mathbf{v}}{dt} \right)_{t=t_h} = 2 [\Phi_j^* R_j \Phi_j \mathbf{y}(t_h)], \end{aligned} \quad (6.7)$$

получим выражение для вариации функционала J_j^h , зависящее от вариаций параметров проектирования:

$$\begin{aligned} \delta J_j^h = \sum_{i=1}^m \int_0^{t_h} \left(\mathbf{v}, \left[\Phi_j^* \frac{\partial M}{\partial h_i} \Phi_j \right] \frac{d^2 \mathbf{y}}{dt^2} + \right. \\ \left. + \left[\Phi_j^* \frac{\partial D}{\partial h_i} \Phi_j \right] \frac{d \mathbf{y}}{dt} + \left[\Phi_j^* \frac{\partial C}{\partial h_i} \Phi_j \right] \mathbf{y} \right) dt \delta h_i. \end{aligned} \quad (6.8)$$

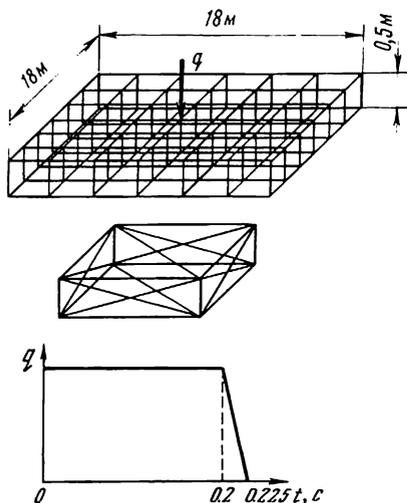


Рис. 6.14

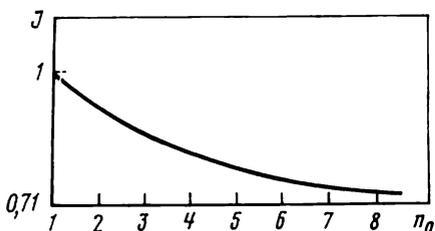


Рис. 6.15

Заметим, что система уравнений (6.7) интегрируется в обратном времени от $t = t_k$ до нуля. Вариационное соотношение (6.8) характеризует чувствительность значений функционалов J_j^k в момент времени $t = t_k$ к вариациям параметров проектирования δh_i при заданном динамическом нестационарном нагружении конструкции. На основании полученной формулы (6.8) можно рассматривать задачи построения улучшающей вариации в задаче минимизации целевого функционала

$$J = \max_{j, t_k} J_j^k \rightarrow \min_h \quad (6.9)$$

с ограничениями на параметры проектирования

$$f_l(h_i) \leq C_l, \quad l = 1, 2, \dots, m, \quad (6.10)$$

где f_l, C_l — заданные функции и константы.

Для расчета динамического поведения механической системы и проведения анализа чувствительности необходимо вычисление частот и форм свободных колебаний конструкции.

С этой целью используются методы, предназначенные для частичного решения обобщенной задачи на собственные значения для матриц большой размерности [17, 180, 204].

Одним из наиболее распространенных является метод итерирования векторных подпространств, который является комбинацией метода обратных итераций с аппроксимацией Рэлея — Ритца на каждом шаге итерационной процедуры. Метод итерирования векторных подпространств хорошо приспособлен для процедуры оптимизации. Это связано с тем, что в итерационных методах объем вычислений тесно связан с выбором начального приближения. При решении задач оптимизации формы свободных колебаний, полученные на предыдущем шаге итерационного процесса, являются идеальным начальным приближением для форм свободных колебаний конструкции с измененными проектными параметрами. Тем не менее объем вычислений остается достаточно большим, что связано с построением полных матриц жестко-

сти и масс конструкции на каждом шаге итерационной процедуры оптимизации. Значительного сокращения времени вычислений можно добиться, используя соотношения метода возмущений для вычисления поправок к собственным числам и векторам при изменении параметров проектирования. Разумное сочетание метода итерирования векторных подпространств и метода возмущений позволяет строить весьма эффективные в вычислительном отношении процедуры оптимизации.

С использованием рассмотренной процедуры оптимизации решалась задача рационального проектирования сложной составной конструкции, состоящей из 529 стержневых элементов (рис. 6.14). В качестве целевого функционала была выбрана величина наибольшего квадратичного смещения узлов конечноеlementной модели конструкции. Масса конструкции считалась неизменной, конструкция — свободной. В качестве переменных проектирования использовались площади поперечных сечений стержневых элементов. В силу симметрии конструкции переменные проектирования объединялись в 28 групп, т. е. отыскивалось 28 параметров проектирования. На все параметры проектирования были наложены ограничения сверху и снизу. Исходное значение параметров проектирования выбиралось равным $h_i = 50 \text{ мм}^2$, $i = 1, 2, \dots, 28$. Конструкция подвергалась воздействию сосредоточенной силы, зависимость которой от времени приведена на рис. 6.14. Максимальные смещения в конструкции достигались в восьми угловых узлах (для оптимального проекта в момент времени $t = 0,067 \text{ с}$). Зависимость функционала качества от номера итерации n_0 оптимизационной процедуры приведена на рис. 6.15. Данные, характеризующие оптимальный проект, приведены на рис. 6.16. Жирной линией выделены элементы, у которых в ходе перераспределения материала произошло увеличение площадей поперечных сечений.

Приведенная задача оптимизации демонстрирует высокую эффективность метода разложения решения динамической задачи

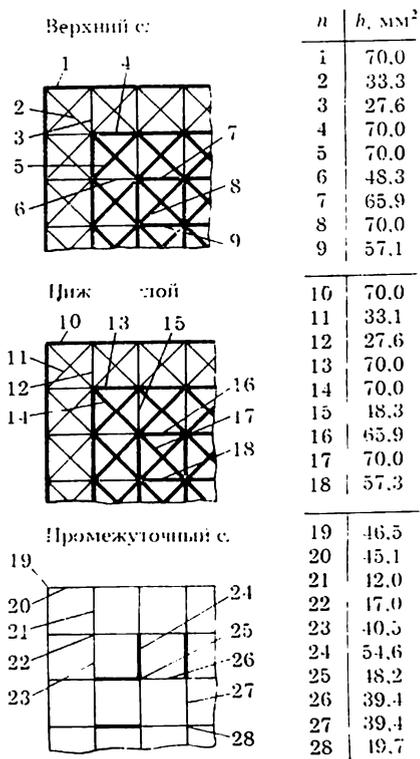


Рис. 6.16

по собственным формам колебаний. Следует отметить, что разнообразие задач динамической оптимизации порождает и разнообразие численных методов, от эффективности которых в значительной степени зависит, будет ли создан оптимальный проект [119].

6.7. ПОЛОГИЕ ОБОЛОЧКИ МАКСИМАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ

Как это видно из предшествующих рассмотрений, построение решений задач динамической оптимизации и в особенности задач оптимального проектирования конструкций, рассчитываемых на нестационарные воздействия, приводит к необходимости решения связанных нестационарных краевых задач для функций состояния и сопряженных переменных с нелинейными условиями оптимальности. Проведение аналитических исследований оказывается затруднительным, и к настоящему времени отсутствуют точные решения неоднородных нестационарных задач оптимального проектирования. Построение же численных решений сопряжено с большим объемом вычислений, а получаемые при этом результаты в известном смысле неупиверсальны вследствие зависимости оптимальных проектов от данных о программе нагружения. Поэтому представляет интерес изучение возможностей приведения сложных динамических задач оптимального проектирования к более простым и уже исследованным задачам. В качестве примера, допускающего эффективную декомпозицию, приведем задачу динамического оптимального проектирования пологой оболочки.

Рассмотрим динамический изгиб пологой оболочки, закрепленной вдоль контура Γ в плоскости xy и нагруженной действием нестационарных поперечных сил $q(x, y, t)$ ($t \in [0, t_1]$), а также статических сил, действующих в плоскости xy и приложенных к ее краям. На части границы оболочки Γ_1 реализовано жесткое защемление края, а на остальной части Γ_2 — шарнирное опирание ($\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$). Контур Γ ограничивает в плоскости xy область Ω . Обозначим через $f(x, y)$ форму срединной поверхности пологой оболочки (предварительно искривленной пластинки) при отсутствии действия внешних нагрузок. Пусть $w(x, y, t)$ — функция, описывающая динамические смещения точек срединной поверхности оболочки в направлении оси z , вызванные действием нагрузок. Будем отсчитывать величины смещений $w(x, y, t)$ от срединной поверхности оболочки. Тогда полное отклонение срединной поверхности от плоскости xy описывается функцией $w(x, y, t) + f(x, y)$. Предположим, что смещения являются малыми, т. е. что характерные смещения меньше, чем толщина оболочки. Пренебрежем внутриплоскостными динамическими эффектами. Тогда уравнение для динамических прогибов, гранич-

ные и начальные условия запишутся в виде

$$\rho h \partial^2 w / \partial t^2 + Lw - K(\varphi)w = q + K(\varphi)f, \quad (7.1)$$

$$(w)_{\Gamma} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_{\Gamma_1} = 0, \quad D_b \left[\Delta w - \frac{1-\nu}{R} \frac{\partial w}{\partial n} \right]_{\Gamma_2} = 0,$$

$$(w)_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

где $\partial w / \partial n$, R , Δ , φ — производная функции $w(x, y)$ по внешней нормали к контуру, радиус кривизны контура, оператор Лапласа, функция напряжений, действующих в плоскости пластинки. Изгибная жесткость пластинки $D_b = D_b(x, y)$ считается заданной функцией координат x и y . Через L и K обозначены линейные дифференциальные операторы, применяемые к функции прогибов:

$$Lw \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(D_b \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(D_b \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(D_b \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right), \quad (7.2)$$

$$K(\varphi)w \equiv h \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right).$$

Функция напряжений φ определяется как решение краевой задачи для уравнения в частных производных

$$\Delta \left(\frac{1}{Gh} \Delta \varphi \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{Gh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{Gh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{1}{Gh} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0 \quad (7.3)$$

с граничными условиями на Γ (классические граничные условия плоской задачи теории упругости). Функция φ не зависит от распределения прогибов w или формы оболочки f . Следовательно, эта функция может быть определена заранее. В приводимых ниже рассмотренных, связанных с отысканием прогибов $w(x, y, t)$ и наилучшей формы срединной поверхности $f(x, y)$, функцию φ предполагаем известной.

Заметим, что функция напряжений $\varphi(x, y)$ связана с компонентами тензора напряжений $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ и усилиями (N_x, N_y, T_{xy}) соотношениями

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = \frac{T_{xy}}{h} = - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Величину площади срединной поверхности оболочки считаем заданной и равной S . Это предположение приводит к изопериметрическому условию, накладываемому на функцию $f(x, y)$. Дан-

ное изопериметрическое условие после соответствующих преобразований с учетом малости функции $f(x, y)$ и ее частных производных записывается в виде

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega = 2(S - S_0), \quad (7.4)$$

где S_0 — площадь области Ω . Функция $f(x, y)$, задающая форму оболочки, должна удовлетворять граничному условию

$$(f)_{\Gamma} = 0. \quad (7.5)$$

В дальнейшем непрерывная функция $f(x, y)$, удовлетворяющая изопериметрическому равенству (7.4) и граничному условию (7.5), рассматривается в качестве искомой переменной проектирования.

Сформулируем следующую задачу оптимизации. Требуется найти функцию $f(x, y)$, которая удовлетворяет изопериметрическому условию (7.4), граничному условию (7.5), и такую, чтобы функция прогибов $w(x, y, t)$, определяемая из решения краевой задачи (7.1), доставляла оптимальное значение функционалу жесткости

$$J = \int_0^{t_f} (w, g)_{\Omega} dt = \int_0^{t_f} \int_{\Omega} w(x, y, t) g(x, y, t) d\Omega dt \rightarrow \min_f, \quad (7.6)$$

где $g(x, y, t)$ — некоторая заданная функция. Если в качестве функции g принята дельта-функция Дирака, т. е. $g = \delta_D(x - x_0, y - y_0, t - t_0)$ ($(x_0, y_0) \in \Omega$, $t_0 \in [0, t_f]$), то рассматриваемая задача оптимизации жесткости сводится к минимизации прогиба оболочки в точке (x_0, y_0) в момент времени $t = t_0$, так как в этом случае

$$J = \int_0^{t_f} (w, \delta_D)_{\Omega} dt = w(x_0, y_0, t_0). \quad (7.7)$$

Заметим, что аналогичные статические задачи оптимального проектирования пологих оболочек исследованы в [9, 127].

Выведем необходимые условия экстремума и уравнение для сопряженной переменной. Проварьируем величины f и w и запишем уравнение в вариациях, соответствующее (7.1):

$$\rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta w + L \delta w - K(\varphi) \delta w - K(\varphi) \delta f = 0. \quad (7.8)$$

Введем в рассмотрение сопряженную функцию $v(x, y, t)$ и умножим выражение, записанное в левой части уравнения (7.8), на $v(x, y, t)$. Интегрируя произведение по времени и по пространственным переменным, будем иметь

$$\int_0^{t_f} \int_{\Omega} \left(v, \rho h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta w + L \delta w - K(\varphi) \delta w - K(\varphi) \delta f \right) dt = 0. \quad (7.9)$$

Предположим, что функция $v(x, y, t)$ удовлетворяет граничным условиям (7.1). Для функций, удовлетворяющих этим условиям, оператор L является самосопряженным [66, 81], что выражается равенством

$$(v, L\delta w)_\Omega = (\delta w, Lv)_\Omega. \quad (7.10)$$

Можно показать [127], что оператор K также является самосопряженным для функций, удовлетворяющих указанным граничным условиям. Действительно, с учетом уравнений равновесия

$$\partial N_x/\partial x + \partial T_{xy}/\partial y = 0, \quad \partial T_{xy}/\partial x + \partial N_y/\partial y = 0$$

имеем

$$\begin{aligned} (v, K(\varphi)\delta w)_\Omega &= \int_\Omega h v \left[\sigma_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta w + \right. \\ &+ \sigma_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta w + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \delta w \left. \right] d\Omega = \\ &= \int_\Omega v \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(h\sigma_x \frac{\partial}{\partial x} \delta w + h\tau_{xy} \frac{\partial}{\partial y} \delta w \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h\sigma_y \frac{\partial}{\partial y} \delta w + \right. \right. \\ &+ \left. \left. h\tau_{xy} \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right) \right] d\Omega = - \int_\Omega h \left[\sigma_x \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \delta w + \right. \\ &+ \left. \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \delta w + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \delta w + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \delta w \right) \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Последний интеграл в (7.11) симметричен относительно переменных δw и v . Следовательно, имеет место равенство

$$(v, K(\varphi)\delta w)_\Omega = (K(\varphi)v, \delta w)_\Omega. \quad (7.12)$$

Будем считать также, что сопряженная переменная $v(x, y, t)$ наряду с указанными граничными условиями удовлетворяет условиям $v = 0$, $\partial v/\partial t = 0$ в конечный момент времени $t = t_f$. В этом случае интегрирование по частям в (7.9) и учет свойств (7.10), (7.12) позволяет преобразовать соотношение (7.9) к виду

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_f} \left(\delta w, \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Lv - K(\varphi)v \right)_\Omega dt - \\ &- \int_0^{t_f} (\delta f, K(\varphi)v)_\Omega dt = 0. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Приписывая во внимание полученное соотношение (7.13) и вытекающее из (7.6) равенство

$$\delta J = \int_0^{t_f} (\delta w, g)_\Omega dt, \quad (7.14)$$

представим выражение для вариации минимизируемого функционала следующим образом:

$$\delta J = \int_0^{t_f} \left(\delta w, \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Lv - K(\varphi)v - g \right)_{\Omega} dt - \int_0^{t_f} (\delta f, K(\varphi)v)_{\Omega} dt. \quad (7.15)$$

Определим сопряженную переменную $v(x, y, t)$ как решение следующей нестационарной краевой задачи:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Lv - K(\varphi)v &= -g, \\ (v)_{\Gamma} &= 0, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_{\Gamma_1} = 0, \quad D_b \left[\Delta v - \frac{1-v}{R} \frac{\partial v}{\partial n} \right]_{\Gamma_2} = 0, \\ (v)_{t=t_f} &= 0, \quad (\partial v / \partial t)_{t=t_f} = 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Для определенной таким образом функции $v(x, y, t)$ первый интеграл в правой части (7.15) обращается в нуль. В результате приходим к искомому выражению, связывающему первую вариацию функционала J с вариацией переменной проектирования:

$$\delta J = - \left(\delta f, \int_0^{t_f} K(\varphi)v dt \right)_{\Omega} \quad (7.17)$$

Учтем теперь изопериметрическое условие (7.4), наложенное на функцию f . Из (7.4) следует, что любая вариация переменной проектирования δf , входящая в подынтегральное выражение (7.17), должна удовлетворять условию $(\nabla f, \nabla \delta f)_{\Omega} = 0$. Используя граничное условие (7.5) и выполняя интегрирование по частям, придадим этому выражению следующий вид:

$$(\delta f, \Delta f)_{\Omega} = 0. \quad (7.18)$$

Из (7.17), (7.18) приходим к основной формуле анализа чувствительности

$$\delta J = \left(\delta f, \lambda \Delta f - \int_0^{t_f} K(\varphi)v dt \right)_{\Omega}, \quad (7.19)$$

где константа λ — множитель Лагранжа, введенный для учета соотношения (7.18).

Необходимое условие минимума функционала J выражается равенством $\delta J = 0$. Привлекая здесь соотношение анализа чувствительности (7.19), получим условие оптимальности формы оболочки, которое совместно с граничным условием (7.5) состав-

ляет краевую задачу:

$$\lambda \Delta f = \int_0^{t_f} K(\varphi) v dt, \quad (f)_{\Gamma} = 0, \quad (7.20)$$

решение которой позволяет определить оптимальную форму оболочки по известным величинам φ , v , λ . Заметим, что при заданных φ , v , λ задача (7.20) является классической задачей Дирихле для уравнения Пуассона, свойства решений которой хорошо изучены. Построение решений этой задачи возможно как при помощи аналитических, так и численных методов.

Таким образом, отыскание формы пологой оболочки сводится к решению нескольких краевых задач.

Сначала решается граничная задача плоской теории упругости для уравнения (7.3) и определяется функция напряжений $\varphi(x, y)$.

Затем решается уравнение (7.16) с указанными в (7.16) краевыми условиями и условиями в конечный момент времени и находится сопряженная функция $v(x, y, t)$. Заметим здесь, что нестационарная краевая задача (7.16) для сопряженной переменной $v(x, y, t)$ определяет, как известно, распределение прогибов неискривленной пластинки, находящейся под действием динамической поперечной нагрузки $-g(x, y, t)$ и статических сил, действующих в плоскости xy . Поэтому при отыскании $v(x, y, t)$ для ряда нагрузок $-g(x, y, t)$ можно воспользоваться известными аналитическими и численными решениями задачи о совместном динамическом изгибе и статическом растяжении пластинки.

После этого найденные выражения для $\varphi(x, y)$ и $v(x, y, t)$ подставляются в первую часть уравнения (7.20) и отыскание оптимальной формы $f(x, y)$, как уже отмечалось выше, сводится к решению классической задачи Дирихле (7.20) для уравнения Пуассона. Константа λ находится при помощи изопериметрического условия (7.4).

Важно отметить, что отыскание оптимальной формы пологой оболочки не связано с нахождением действительного распределения динамических прогибов оболочки. Не требует знания действительных прогибов и определение величины функционала качества для оптимальной оболочки. Эта основная характеристика оптимизируемой оболочки вычисляется непосредственно, если известны функции $v(x, y, t)$ и $f(x, y)$. Действительно, с учетом соотношений (7.10), (7.12), (7.16) имеем

$$J = \int_0^{t_f} (w, g)_{\Omega} dt = - \int_0^{t_f} \left(w, \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + Lv - K(\varphi) v \right) dt = - \int_0^{t_f} \left(v, \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Lw - K(\varphi) w \right) dt. \quad (7.21)$$

Используя уравнение (7.4) и выражение (7.21), получим искомую формулу, связывающую J с v , φ и f :

$$J = - \int_0^{t_f} (v, g + K(\varphi) f)_{\Omega} dt. \quad (7.22)$$

Рассмотрим теперь динамический изгиб пологой оболочки (предварительно искривленной пластины), лежащей на упругом винклеровском основании с коэффициентом податливости c . Пластина нагружена действием поперечных сил $q(x, y, t)$ и не подвержена действию сил в плоскости xy . Используя предложения и обозначения, аналогичные тем, которые делались при отсутствии упругого основания, получим выражение для силы реакции основания

$$q^r(x, y, t) = c[w(x, y, t) + f(x, y)]$$

и уравнение изгиба

$$\rho h \partial^2 w / \partial t^2 + Lw = q(x, y, t) + c[w(x, y, t) + f(x, y)]. \quad (7.23)$$

Как и в проводившихся выше рассмотренных, в качестве переменной проектирования принимается функция $f(x, y)$, задающая форму срединной поверхности оболочки, а роль критерия качества, минимизируемого при условиях (7.4), (7.5), играет интегральная податливость (7.6). Для решения задачи оптимизации может быть применен описанный выше подход. Проводя соответствующие выкладки, получим уравнение для сопряженной переменной

$$\rho h \partial^2 v / \partial t^2 + Lv + cv = -q(x, y, t) \quad (7.24)$$

с граничными условиями и условиями в конечный момент времени $t = t_f$ (7.16). Основное соотношение анализа чувствительности, связывающее вариацию минимизируемого функционала с вариацией формы, и необходимое условие оптимальности в рассматриваемом случае примут вид

$$\delta J = \left(\delta f, \lambda \Delta f - c \int_0^{t_f} v(x, y, t) dt \right)_{\Omega}, \quad (7.25)$$

$$\lambda \Delta f = c \int_0^{t_f} v(x, y, t) dt. \quad (7.26)$$

Оптимальная форма оболочки определяется как решение задачи Дирихле для уравнения (7.26) с граничным условием (7.5). Приходим к аналогичному результату. Оптимальное проектирование пологой оболочки, лежащей на упругом основании, сводится к определению сопряженной переменной на основе решения нестационарной краевой задачи для уравнения (7.24) с условиями (7.16) и последующему отысканию функции формы $f(x, y)$ из (7.5), (7.26). После отыскания $v(x, y, t)$ и $f(x, y)$ по формуле (7.22) с $K = c$ определяется значение функционала интегральной податливости для оптимальной оболочки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамов Ю. Ш.* Вариационные методы в теории операторных пучков. Спектральная оптимизация. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 180 с.
2. *Адамович И. С., Рикардс Р. Б.* Оптимизация по весу ортотропной цилиндрической оболочки с переменными свойствами с ограничениями на частоту собственных колебаний // Изв. АН СССР. МТТ. 1977. № 2. С. 120—125.
3. *Албул А. В., Баничук И. В., Коандэ И. И.* Об одной динамической задаче оптимального проектирования // Вычислительные методы механики. Кишинев: Штиинца, 1981. Вып. 64. С. 3—7.
4. *Андреев Ю. М., Штейнвольф Л. И.* Синтез нелинейных вибрационных систем по скелетным кривым с использованием теории чувствительности // Динамика и прочность машин. Харьков: Вища шк., 1984. Вып. 40. С. 50—56.
5. *Арман Ж.-Л.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. М.: Мир, 1977. 142 с.
6. *Арнольд В. И.* Моды и квазимоды // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, № 2. С. 12—20.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
8. *Баничук И. В.* Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 256 с.
9. *Баничук И. В.* Введение в оптимизацию конструкций. М.: Наука, 1986. 303 с.
10. *Баничук И. В., Барсук А. А.* Применение декомпозиции спектра собственных значений в задачах оптимизации упругой устойчивости // Проблемы устойчивости и предельной несущей способности конструкций. Л.: ЛИСИ, 1983. С. 17—24.
11. *Баничук И. В., Брагусь А. С., Иванова С. Ю.* Вариационный метод расчета вынужденных гармонических колебаний упругих конструкций // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Методы решения задач упругости и пластичности. Горький: Горьк. ун-т, 1985. С. 22—25.
12. *Баничук И. В., Иванова С. Ю.* Об оптимальном проектировании конструкций при динамических нагрузках // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горький: Горьк. ун-т, 1984. С. 88—96.
13. *Баничук И. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В.* Анализ чувствительности и оптимальное проектирование конструкций, рассчитываемых на динамические воздействия // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 166—172.
14. *Баничук И. В., Иванова С. Ю., Шаранюк А. В.* Вопросы оптимального проектирования конструкций при нестационарном нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Статика и динамика деформ. систем. Горький: Горьк. ун-т, 1985. С. 73—80.
15. *Баничук И. В., Каргвелишвили В. М., Черноусько Ф. Л.* О разностно-квадратурных аппроксимациях выпуклых интегральных функционалов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. С. 269—272.
16. *Баничук И. В., Миронов А. А.* Оптимальное проектирование пластин в динамических задачах гидроупругости // Тр. X Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Тбилиси: Мецниереба, 1975. С. 35—44.
17. *Бате П., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
18. *Бирюк В. И.* О задаче оптимального проектирования конструкций крыла из условий прочности и аэроупругости // Учен. зап. ЦАГИ. 1972. № 2. С. 114—119.

19. *Бирюк В. И., Литин Е. К., Фролов В. М.* Методы проектирования конструкций самолетов. М.: Машиностроение, 1977. 232 с.
20. *Богомолов С. И., Гринев В. Б., Симсон Э. А.* Оптимизация элементов конструкций по динамическим и прочностным критериям // Динамика и прочность машин. Харьков: Вища шк., 1984. Вып. 40. С. 3—8.
21. *Богомолов С. И., Симсон Э. А., Сукиасова Н. Г.* Оптимизация стержней по характеристикам демпфирования // Там же. 1980. Вып. 30. С. 70—76.
22. *Богомолов С. И., Симсон Э. А.* Оптимизация механических систем в резонансных режимах. Харьков: Вища шк., 1983. 153 с.
23. *Богомолов С. И., Симсон Э. А.* Оптимизация элементов конструкций по характеристикам рассеяния энергии при колебаниях механических систем. Киев: Наук. думка, 1980. С. 341—358.
24. *Богомолов С. И., Симсон Э. А.* Оптимизация механических систем на резонансных режимах // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 5. С. 31—36.
25. *Богомолов С. И., Симсон Э. А., Шляхов В. И.* Об одном подходе к задаче виброизоляции // Динамика и прочность машин. Харьков: Вища шк., 1980. Вып. 32. С. 69—75.
26. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехтеориздат, 1956. 600 с.
27. *Болотин В. В.* Некопсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
28. *Болотин Н. И.* Оптимизация параметров некоторых механических колебательных систем // Изв. АН СССР. МТТ. 1974. № 5. С. 27—33.
29. *Братусь А. С.* Проектирование круговых цилиндрических оболочек минимального веса с фиксированными частотами свободных колебаний // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 5. С. 805—814.
30. *Братусь А. С.* Оптимальные формы упругих тел при вынужденных гармонических колебаниях // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 4. С. 173—180.
31. *Братусь А. С., Каргвелишвили В. М.* Приближенные аналитические решения в задачах оптимизации устойчивости и частот колебаний упругих топкестных конструкций // Там же. 1981. № 6. С. 119—139.
32. *Братусь А. С., Сейранян А. П.* Бимодальные решения в задачах оптимизации собственных значений // Прикл. математика и механика. 1983. Т. 47, вып. 4. С. 546—554.
33. *Буныков В. Г.* Расчет на флаттер крыла малого удлинения // Тр. ЦАГИ. 1964. Вып. 905.
34. *Буныков В. Г.* Расчет оптимальных флаттерных характеристик методом градиента // Там же. 1969. Вып. 1166.
35. *Вибрации в технике: Справочник: В 6 т./Под ред. В. В. Болотина.* М.: Машиностроение, 1978. Т. 1: Колебания линейных систем. 352 с.
36. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961. 228 с.
37. *Гирсанов И. В.* Лекции по математической теории экстремальных задач. М.: Изд-во МГУ, 1970. 118 с.
38. *Гловински Р., Лионс Ж. Л., Тремольтер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979. 574 с.
39. *Гольдштейн Ю. Б., Соломеч М. А.* К оптимальному проектированию балок при динамических нагрузках // Стронт. механика и расчет сооружений. 1968. № 4. С. 27—30.
40. *Григоренко Я. М., Зверев О. А., Кокошин С. С.* О вариационной формулировке нестационарных задач теории топких оболочек // Прикл. механика. 1986. Т. 22, № 9. С. 23—27.
41. *Григоренко Я. М., Зверев О. А., Кокошин С. С.* Динамическое поведение стержней с вырезами при нестационарном нагружении // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. и техн. науки. 1986. № 9. С. 27—30.
42. *Гринев В. Б., Васильченко В. Ф.* Оптимизация балок при нестационарном нагружении // Пробл. машиностроения. 1981. Вып. 14. С. 9—18.
43. *Гринев В. Б., Васильченко В. Ф.* Оптимизация балок при неперриодическом нагружении // Динамика и прочность машин. Харьков, 1979. Вып. 29. С. 25—30.

44. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты // Прикл. механика. 1971. Т. 7, вып. 10. С. 19—25.
45. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. Киев: Наук. думка, 1975. 294 с.
46. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимизация стержней по спектру собственных значений. Киев: Наук. думка, 1979. 212 с.
47. *Гроссман Е. П.* Курс вибраций частей самолета. М.: Оборонгиз, 1940. 311 с.
48. *Гроссман Е. П., Пановко Я. Г.* Упругие колебания частей самолета. Л.: ЛКВВИА, 1947. 259 с.
49. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
50. *Доманский П. П.* Оптимизация динамических эффектов в цилиндрической оболочке при ударной силовой нагрузке // Мат. методы и физ.-механ. поля. 1981. № 14. С. 75—78.
51. *Дорожницын А. А.* Использование метода малого параметра для численного решения уравнений математической физики // Лекции летней школы по численным методам, Киев, 1966. М.: ВЦ АН СССР. 1966. С. 85—100.
52. *Иванкив Е. С., Флейшман Н. П.* Оптимальное проектирование колеблющихся круглых пластин с ребрами жесткости // Оптимизация конструкций при динамических нагрузках. Тарту, 1982. С. 39—40.
53. *Иванова С. Ю.* О некоторых задачах снижения веса конструкций, работающих в режиме вынужденных гармонических колебаний // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. № 5. С. 147—154.
54. *Иванова С. Ю.* Об оптимальном проектировании пластинок из композитного материала, совершающих вынужденные гармонические колебания // II Всесоюз. науч.-техн. конф. «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван: Изд-во Ерев. ун-та, 1984. Т. 2. С. 31—36.
55. *Иванова С. Ю.* Оптимальное проектирование пластинок, совершающих вынужденные гармонические колебания // Вопросы строительной механики и прочности летательных аппаратов: Тр. МАИ. М., 1985. С. 19—24.
56. *Ишлинский А. Ю.* Механика. Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 624 с.
57. *Ишлинский А. Ю.* Прикладные задачи механики. М.: Наука, 1986. Кн. 2: Механика упругих и абсолютно твердых тел. 416 с.
58. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
59. *Кирс Ю. Т.* Оптимальное проектирование жесткопластических оболочек вращения при динамической нагрузке // Учен. зап. Тарт. ун-та. 1979. № 487. С. 119—126.
60. *Колесников К. С.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
61. *Коллагц Л.* Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 504 с.
62. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
63. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфирующим колебаний простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 160 с.
64. *Кораблев С. С., Кашманов Ч. А.* Процедура проектирования механических колебательных систем в частотной области // Динамика и прочность машин. Харьков: Вища шк. 1984. Вып. 40. С. 61—64.
65. *Крейн М. Г.* О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости // Прикл. математика и механика. 1961. Т. 15, вып. 3. С. 323—348.
66. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. Т. 1. 476 с.
67. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.* Динамические формы потери ус-

- тоичности упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 776—782.
68. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
 69. *Леллен Я.* Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсно нагруженной пластической балки // Учен. зап. Тарт. ун-та. 1979. № 487. С. 52—57.
 70. *Лелик Ю. Р.* Оптимальное проектирование неупругих конструкций при динамических воздействиях // Прикл. механика. 1981. № 9. С. 3—20.
 71. *Лелик Ю. Р.* Оптимальное проектирование жесткопластических балок ступенчато-постоянной высоты под действием импульсного нагружения // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 1. С. 136—142.
 72. *Литвинов В. Г.* Задача оптимального управления собственной частотой пластины переменной толщины // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 866—877.
 73. *Литвинов В. Г.* Оптимальные задачи на собственные значения // Укр. мат. журн. 1981. Т. 33, № 5. С. 610—614.
 74. *Литвинов В. Г.* Оптимальное управление коэффициентами в эллиптических системах // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 6. С. 1036—1047.
 75. *Литвинов В. Г.* Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
 76. *Майборода В. П., Кравчук А. С., Васильев В. А., Вазагашвили М. Г.* Оптимизация защитных свойств неоднородных стержневых конструкций при ударных и взрывных воздействиях // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Методы решения задач упругости и пластичности. Горький: Горьк. ун-т, 1985. С. 107—114.
 77. *Малков В. П., Угодчиков А. Г.* Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 288 с.
 78. *Малков В. П., Торопов В. В., Филатов А. А.* Имитационный подход к оптимизации деформируемых систем // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Горьк. ун-т, 1982. С. 62—69.
 79. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 535 с.
 80. *Марчук Г. И.* Применение сопряженных уравнений к решению задач математической физики // Успехи механики. 1981. Т. 4, № 1. С. 3—27.
 81. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
 82. *Моисеев И. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
 83. *Моисеев И. Н.* Математические задачи системного анализа. М.: Наука, 1981. 488 с.
 84. *Повацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
 85. *Ольхофф Н.* Оптимальное проектирование конструкций. М.: Мир, 1981. 276 с.
 86. *Остапьявичюс В. В., Рагульскис К. М., Бараускас Р. А.* Проектирование конструкций, имеющих заданные частоты собственных колебаний // Динамика и прочность машин. Харьков: Вища шк., 1984. Вып. 40. С. 82—86.
 87. *Пальмов В. А.* Колебания упругопластических тел. М.: Наука, 1976. 328 с.
 88. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Т., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
 89. *Рабинович И. М.* Стержневые системы минимального веса // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике: Обзор. докл. М.: Наука, 1966. Вып. 3. С. 265—275.
 90. *Рабинович И. М.* К расчету ферм и балок минимального объема на

- действие динамических нагрузок и собственного веса // Исследования по теории сооружений. М.: Стройиздат, 1967. Вып. 15. С. 151—158.
91. *Редько С. Ф., Ушкалов В. Ф., Яковлев В. П.* Идентификация механических систем. Киев: Наук. думка, 1985. 216 с.
 92. *Рикардс Р. Б.* Исследование выпуклости некоторых классов задач оптимизации многослойных оболочек, работающих на устойчивость и колебания // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 145—154.
 93. *Рикардс Р. Б.* Об оптимальном пространственном армировании стержня, работающего на устойчивость и колебания. 1. Конечные элементы балки Тимошенко // Механика композит. материалов. 1980. № 4. С. 676—684.
 94. *Рикардс Р. Б.* Об оптимальном пространственном армировании стержня, работающего на устойчивость и колебания. 2. Оптимизация структуры армирования // Там же. № 6. С. 1041—1046.
 95. *Розил Л. А.* Вариационные постановки задач для упругих систем. Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. 224 с.
 96. *Самсонов А. М.* Условие Вейерштрасса в динамической задаче оптимизации упругой пластины с ребром // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. № 3. С. 185—188.
 97. *Сейранян А. П., Шаранюк А. В.* Оптимизация флаттерных характеристик // Изв. АН АрмССР. Механика. 1984. Т. 37, № 5. С. 38—51.
 98. *Смирнов А. И.* Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1980. 231 с.
 99. *Софронов Ю. Д.* Балки наименьшего объема при действии циклических нагрузок // Тр. КАИ. 1970. Вып. 116. С. 10—17.
 100. *Софронов Ю. Д.* Расчет стержней наименьшего веса при действии продольных циклических сил // Строит. механика и расчет сооружений. 1969. № 6. С. 40—43.
 101. *Стренг Г., Фикс Г.* Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
 102. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.
 103. *Тимошенко С. П.* Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975. 704 с.
 104. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
 105. *Троицкий В. А.* Оптимизация стержней при свободных колебаниях // Изв. АН СССР. МТТ. 1976. № 3. С. 145—152.
 106. *Троицкий В. А., Петухов Л. В.* Оптимизация формы упругих тел. М.: Наука, 1982. 432 с.
 107. *Троицкий В. А., Хватцев А. А.* Оптимизация собственной частоты прямоугольной пластины с опертыми краями // Прикладная математика. Тула: Тул. политехн. ин-т, 1977. С. 71—78.
 108. *Троицкий В. А., Хватцев А. А.* Оптимизация собственных частот упругих тонких пластин // Изв. АН СССР. МТТ. Т. 16, № 4. 1981. С. 160—168.
 109. *Федоренко Р. П.* Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978. 488 с.
 110. *Фершинг Г.* Основы аэроупругости. М.: Машиностроение, 1984. 600 с.
 111. *Филатов А. А.* Оптимизация изгибаемых пластин при ограничениях на частоты собственных колебаний // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Статика и динамика деформируемых систем. Горький: Горьк. ун-т, 1985. С. 102—106.
 112. *Флейшман Н. П., Иванкив Е. С.* Оптимальное проектирование составных оболочек и пластин методом геометрического программирования // Динамика и прочность машин. Харьков: Выща шк., 1984. Вып. 40. С. 56—61.
 113. *Фролов К. В.* Уменьшение амплитуды колебаний резонансной системы путем управляемого изменения параметров // Машиностроение. 1965. № 3. С. 40—48.

114. *Фролов К. В., Генкин М. Д., Литвин Л. М.* Многокритериальная оптимизация проектируемого оборудования // Динамика и прочность машин. Харьков: Выща шк., 1984. Вып. 40. С. 8—14.
115. *Фу С. С.* Численное интегрирование уравнений движепня, связанных с методом конечных элементов // Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика. 1970. № 3. С. 27—33.
116. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости. М.: Физматгиз, 1959. 524 с.
117. *Хафтка Р. Т., Прасад Б.* Обзор по оптимальному проектированию работающих на изгиб пластинок // Ракет. техника и космонавтика. 1981. Т. 19, № 6. С. 105—113.
118. *Хог Э., Арора Я.* Прикладное оптимальное проектирование. Механические системы и конструкции. М.: Мир, 1983. 478 с.
119. *Хофер Э., Дундерштедт Р.* Численные методы оптимизации. М.: Машпостроение, 1981. 192 с.
120. *Adali S.* The design of beams on Vinkler—Pasternak foundations for minimum dynamic response and maximum eigenfrequency // J. mec. theor. et appl. 1982. Vol. 1, N 6. P. 975—993.
121. *Adali S.* Design of shear-deformable antisymmetric angly ply laminates to maximize the fundamental frequency and frequency separation // Compos. Struct. 1984. Vol. 2. P. 349—369.
122. *Armand J.-L.* Minimum-mass design of a plate-like structure for specified fundamental frequency // AIAA J. 1971. Vol. 9, N 9. P. 1739—1745.
123. *Arora J. S., Haug E. J.* Discussion on optimum structural design and dynamic constraints // J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1977. Vol. 103, N 10. P. 2071—2074.
124. *Ashley H., McIntosh S. C. (jr.)* Applications of aeroelastic constraints in structural optimization // Proc. XII Intern. Congr. Appl. Mech., Stanford Univ., 1968. Berlin: Springer, 1969. P. 100—113.
125. *Banichuk N. V.* Problems and methods of optimal structural design. N. Y.: Plenum press, 1983. 313 p.
126. *Banichuk N., Barboni R., Peroni I.* Composite materials influences on aeroelastic and Structural design // Proc. Intern. Count. Aeronaut. Soc. USA. Seattle, 1982.
127. *Banichuk N. V., Larichev A. D.* Optimal design problems for curvilinear shallow elements of structures // Optimiz. Control Appl. Meth. 1984. Vol. 5, N 3. P. 197—205.
128. *Baruch M.* Correction of Stiffness Matrix Using Vibration Tests // AIAA J. 1982. Vol. 20, N 3. P. 441—442.
129. *Baruch M., Riff R.* Hamilton's principle, Hamilton's law, 6th correct formulations // Ibid. N 5. P. 687—692.
130. *Bathe K. J.* Finite elements procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs (N. J.): Prentice-Hall, 1982. P. 735.
131. *Berman A.* System identification of complex structures. AIAA P., N 75—809.
132. *Bert C. W.* Optimal design of a composite-material plate to maximize its fundamental frequency // J. Sound and Vibr. 1977. Vol. 50. P. 229—239.
133. *Bert C. W.* Design of clamped composite-material plates to maximize fundamental frequency // J. Mech. Des. ASME. 1978. Vol. 100. P. 274—278.
134. *Bisplinghoff R. L., Ashley H.* Principles of aeroelasticity. N. Y.: Dover, 1975. 527 p.
135. *Bochenek B., Gajewski.* Certain problems of unimodal and bimodal optimal design of structures // Optimization methods in structural design/ Ed. H. Eschenauer, N. Olhoff. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 204—209.
136. *Bogacz R., Mahrenholtz O.* On the optimal design of viscoelastic structures subjected to circulatory loading // Ibid. P. 282—288.
137. *Borri M., Chiringhelli G. L., Lanz M., Mantegazza, Merlini T.* Dynamic response of mechanical systems by a weak hamiltonian formulation // Comput. and Struct. 1985. Vol. 20, N 1/3. P. 495—508.

138. *Brach R. M.* On the extremal fundamental frequencies of vibrating beams // Intern. J. Solids and Struct. 1968. Vol. 4. P. 667—674.
139. *Brach R. M.* Minimum dynamic response for a class of simply supported beam shapes // Intern. J. Mech. Sci. 1968. Vol. 10. P. 429—439.
140. *Brach R. M.* Optimum design of beams for sudden loading // J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Civ. Eng. 1968. Vol. 96, N 6. P. 1395—1407.
141. *Bryson E. A. (jr.)*. Comment on "Application of Hamilton's Law of varying action" // AIAA J. 1976. Vol. 14. P. 1340—1341.
142. *Cassis J. H., Schmit L. A.* Optimum design with dynamic constraints // J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng. 1976. Vol. 102, N 10. P. 2053—2071.
143. *Cardou A.* Piecewise uniform optimum design for axial vibration requirement // AIAA J. 1973. Vol. 11. P. 1760—1761.
144. *Cardou A.* Necessary condition for piecewise uniform optimum design under frequency constraint // Ibid. 1974. Vol. 12. P. 1415.
145. *Cardou A., Warner W. H.* Minimum-mass design of sandwich structures with frequency and section constraints // J. Optimiz. Theory and Appl. 1974. Vol. 14. P. 633—647.
146. *Cegielski E., Zyczkowski M.* Parametric optimization of viscoplastic bars under dynamic axial loading // Rozp. inz. 1981. Vol. 29, N 1. P. 27—37.
147. *Cheng F. Y., Bothin M. E.* Nonlinear optimum design on dynamic damped frames // ASCE 102, ST 3, 1976. P. 609—627.
148. *Cheng Cengdong, Gu Yuanxian.* Sequential quadratic programming and dynamic optimal design of rotating blades // Optimization methods in structural design/Ed. H. Eshenauer, N. Olhoff. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 301—308.
149. *Claudon J. L.* Characteristic curves and optimum design of two structures subjected to circulatory loads // J. m c. 1975. Vol. 14. P. 531—543.
150. *Collins J. D., Hart G. C., Hasselman T. K., Kennedy B.* Statistical identification of structures // AIAA J. 1974. Vol. 12. P. 185—190.
151. *Courant R.* Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations // Bull. Amer. Math. Soc. 1943. Vol. 49. P. 1—23.
152. *Eschenauer H.* Numerical and experimental investigations on structural designs: A research project of the german research association, 1980—1984. Bonn, 1986. 309 p.
153. *Eschenauer H., Knepe G., Stenvers K. H.* Deterministic and stochastic multiobjective optimization of beam and shell structures // J. Mech. Transmiss. and Automat. Des. 1986. Vol. 108. P. 31—37.
154. *Feng T. T., Arora J. S., Haug E. J.* Optimal design under dynamic loads // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1977. Vol. 11, N 1. P. 39—52.
155. *Fox R. L., Kapoor M. P.* Structural optimization in the dynamic response regime. A computational approach // AIAA J. 1970. Vol. 8, N 10. P. 1798—1804.
156. *Gurtin M. E.* Variational principles for the linear theory of viscoelasticity // Arch. Rat. Mech. and Anal. 1963. Vol. 13. P. 179—191.
157. *Gurtin M. E.* Variational principle for linear elasto-dynamics // Ibid. 1964. Vol. 16, N 1. P. 34—50.
158. *Hamilton W. R.* On a general method in dynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1834. Vol. 124. P. 247—308.
159. *Hamilton W. R.* Second essay on a general method in dynamics // Ibid. 1835. Vol. 125. P. 95—144.
160. *Haug E. J., Arora J. S.* Distributed parameter structural optimization for dynamic response // Optimization of distributed parameter structures/Ed. E. J. Haug, J. Cea. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1981. P. 474—515.
161. *Haug E. J., Arora J. S., Feng T. T.* Sensitivity analysis and optimization of structures for dynamic response // ASME J. Mech. Des. 1978. Vol. 100. P. 311—318.
162. *Haug E. J., Choi K. K.* Systematic occurrence of repeated eigenvalues in

- structural optimization // *J. Optimiz. Theory and Appl.* 1982. Vol. 38, N 2. P. 25—30.
163. *Haug E. J., Choi K. K., Komkov V.* Design sensitivity analysis of structural systems. L.: Acad. press, 1986. 381 p.
 164. *Haug E. J., Feng T. T.* Optimization of distributed parameter structures under dynamic loads // *Control and Dyn. Syst.* 1977. Vol. 13. P. 207—246.
 165. *Haug E. J., Feng T. T.* Optimal design dynamically loaded continuous structures // *Intern. J. Numer. Meth. Eng.* 1978. Vol. 12. P. 299—307.
 166. *Haug E. J., Rousselet B.* Design sensitivity analysis in structural mechanics. II. Eigenvalue variations // *J. Struct. Mech.* 1980. Vol. 8. P. 161—186.
 167. *Huang N. C.* Unsymmetrical buckling of thin shallow spherical shells // *ASME J. Appl. Mech.* 1964. Vol. 31. P. 447—457.
 168. *Huang N. C.* Minimum-weight design of vibrating elastic structures with dynamic deflection constraints // *J. Appl. Mech.* 1976. Vol. 43, N 1. P. 178—180.
 169. *Hutchinson J. W., Niordson F. I.* Designing vibrating membranes // *Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа.* М., 1972. С. 581—590.
 170. *Icerman L. J.* Optimal structural design for given deflection // *Intern. J. Solids and Struct.* 1969. Vol. 5. P. 473—490.
 171. *Johnson E. H.* Disjoint design space in the optimization of harmonically excited structures // *AIAA J.* 1976. Vol. 14, N 2. P. 259—262.
 172. *Johnson E. H., Rizzi P., Ashley A., Segenreich S. A.* Optimization of continuous one-dimensional structures under steady harmonic excitation // *Ibid.* N 12. P. 1690—1698.
 173. *Kamat M. P.* Effect of shear deformations and rotary inertia on optimum beam frequencies // *Intern. J. Numer. Meth. Eng.* 1975. Vol. 9. P. 51—62.
 174. *Kamat M. P., Simitses G. J.* Optimal beam frequencies by the finite element displacement method // *Intern. J. Solids and Struct.* 1973. Vol. 9. P. 415—429.
 175. *Karihaloo B. L.* Optimal design of multi-purpose structures // *J. Optimiz. Theory and Appl.* 1979. Vol. 27, N 3. P. 449—461.
 176. *Karihaloo B. L., Niordson F. I.* Optimum design of vibrating cantilevers // *Ibid.* 1973. Vol. 11, N 6. P. 638—654.
 177. *Karihaloo B. L., Parbery R. D.* Minimum-weight multi-constraint vibrating cantilevers // *Intern. J. Solids and Struct.*, 1982. Vol. 18, N 5. P. 419—430.
 178. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. Berlin: Springer, 1984. 619 p.
 179. *Kiusalaas J., Shaw R. C. J.* An algorithm for optimum structural design with frequency constraints // *Intern. J. Numer. Meth. Eng.* 1978. Vol. 13. P. 283—295.
 180. *Lam H. L., Choi K. K., Haug E. J.* A sparse matrix finite element technique for iterative structural optimization // *Comput. and Struct.* 1983. Vol. 16, N 1/4. P. 289—295.
 181. *Lawo M., Thierauf G.* Optimal design for dynamic, stochastic loading. A solution by random search // *Optimization methods in structural design*/Ed. H. Eschenauer, N. Olhoff, Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 346—352.
 182. *Lemarechal C.* An extension of davidon methods to nondifferentiable programming // *Mathematical programming study.* 3/Ed. M. L. Balinski, P. Wolfe. Amsterdam: North-Holland publ. co., 1975. P. 95—109.
 183. *Lepik U.* Optimal design of rigid—plastic structures under dynamic loading // *Optimization methods in structural design*/Ed. H. Eschenauer, N. Olhoff, Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 360—365.
 184. *Levy R., Chai K.* Implementation of natural frequency analysis and optimally criterion design // *Comput. and Struct.* 1979. Vol. 10. P. 277—282.
 185. *Marguerre K.* Zur Theorie der gekrümmten Platte grosser Formände-

- rung // Proc. V Intern. Congr. Appl. Mech./Ed. der J. P. Hartog, H. Peters. N. Y.: Wiley, 1939. P. 93—101.
186. *Martin J. B., Symonds P. S.* Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures // J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE. 1966. Vol. 92, N 5. P. 43—66.
 187. *McCart B. R., Haug E. J., Streeter T. D.* Optimal design of structures with constraints on natural frequency // AIAA J. 1970. Vol. 8, N 6. P. 1012—1019.
 188. *McIntosh S. C., Ashley H.* On the optimization of discrete structures with aeroclastic constraints // Comput. and Struct. 1978. Vol. 8. P. 411—419.
 189. *Miele A., Mangiavacchi A., Mohanty B. P., Wu A. K.* Numerical determination of minimum mass structures with specified natural frequencies // Inter. J. Numer. Meth. Eng. 1978. Vol. 13, N 2. P. 203—228.
 190. *Mioduchowski A., Thermann K.* Minimum — weight design of structures with two prescribed frequencies // Ztschr. angew. Math. und Mech. 1974. Vol. 54. P. 442—445.— Idem // Proc. IV Canad. Congr. Appl. Mech. Montreal, 1973. P. 419—420.
 191. *Mroz Z.* Optimal design of elastic structures subjected to dynamic, harmonically-varying loads // Ztschr. angew. Math. und Mech. 1970. Vol. 50, N 5. P. 303—309.
 192. *Myslinski A.* Bimodal optimal design of vibrating plates using theory and methods of nondifferentiable optimization // J. O. T. A. 1985. Vol. 46, N 2. P. 187—203.
 193. *Niordson F. I.* On the optimal design of a vibrating beam // Quart. Appl. Math. 1965. Vol. 23, N 1. P. 47—53.
 194. *Niordson F. I., Pedersen P. A.* Review of optimal structural design // Applied mechanics/Ed. Becker, Mikhailov. Berlin: Springer, 1973. P. 264—278.
 195. *Olhoff N.* Optimization of transversely vibrating beams and rotating shafts // Optimization of distributed parameter structures, Iowa, 1980/Ed. E. J. Haug, J. Cea. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1981. P. 177—199.
 196. *Olhoff N.* Optimization of vibrating beams with respect to higher order natural frequencies // J. Struct. Mech. 1976. Vol. 4. P. 87—122.
 197. *Olhoff N.* Maximizing higher order eigenfrequencies of beams with constraints on the design geometry // Ibid. 1977. Vol. 5. P. 107—134.
 198. *Olhoff N.* Optimal design of vibrating circular plates // Intern. J. Solids and Struct. 1970. Vol. 6, N 1. P. 139—156.
 199. *Olhoff N.* Optimal design of vibrating rectangular plates // Ibid. 1974. Vol. 10, N 1. P. 93—109.
 200. *Olhoff N.* A survey of the optimal design of vibrating structural elements. Pt I. Theory // Shock and Vibr. Digest. 1976. Vol. 8, N 8. P. 3—10; Pt II. Applications. Vol. 8, N 9. P. 3—10.
 201. *Olhoff N.* Optimal design with respect to structural eigenvalues // Proc. XV Intern. Congr. Theor. and Appl. Mech., Toronto, 1980. Amsterdam: North — Holland publ. 1980. P. 133—149.
 202. *Olhoff N.* Bimodality in optimizing the shape of a vibrating shallow arch // Optimization methods in structural design/Ed. H. Eschenauer, N. Olhoff. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 97—102.
 203. *Olhoff N., Plaut R. M.* Bimodal optimization of vibrating shallow arches // Intern. J. Solids and Struct. 1983. Vol. 19. P. 553—570.
 204. *Parlett B. N.* The symmetric eigenvalue problem. Englewood Cliffs (N. J.): Prentice-Hall, 1980.
 205. *Pedersen P. A.* A unified approach to optimal design // Optimization methods in structural design/Ed. H. Eschenauer, N. Olhoff. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 182—187.
 206. *Pierson B. L.* A survey of optimal structural design under dynamic constraints // Intern. J. Numer. Meth. Eng. 1972. Vol. 4. P. 491—499.
 207. *Pierson B. L.* Panel flutter optimization by gradient projection // Ibid. 1975. Vol. 9. P. 271—296.

208. *Pierson B. L.* An optimal control approach to minimum weight vibrating beam design // *J. Struct. Mech.* 1977. Vol. 5, N 2. P. 147—178.
209. *Pister K. S.* Optimal design of structures under dynamic loading // *Optimization of distributed parameter structures*/Ed. E. J. Haug, J. Cea. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1980. P. 569—585.
210. *Plaut R. H.* On minimizing the response of structures to dynamic loading // *Ztschr. angew. Math. und Phys.* 1970. Vol. 21. P. 1004—1010.
211. *Plaut R. H.* Optimal structural design for given deflection under periodic loading // *Quart. Appl. Math.* 1971. Vol. 29. P. 315—318.
212. *Plaut R. H., Olhoff N.* Optimal forms of shallow arches with respect to vibration and stability // *J. Struct. Mech.* 1983. Vol. 11. P. 81—100.
213. *Plaut R. H., Johnson L. W., Parbery R.* Optimal forms of shallow shells with circular boundary // *J. Appl. Mech. Trans. ASME.* 1984. Vol. 51, N 3. P. 526—530.
214. *Prager W., Taylor J. E.* Problems of optimal structural design // *J. Appl. Mech. Trans. ASME. Ser. E.* 1968. Vol. 35, N 1. P. 102—106.
215. *Rangacharyulu M. A. V., Done G. T. S.* A survey of structural optimization under dynamic constraints // *Shock and Vibr. Digest.* 1979. Vol. 11, N 12. P. 15—25.
216. *Rao S. S.* Structural optimization under shock and vibration environment // *Ibid.* 1979. Vol. 11, N 2. P. 3—12.
217. *Rao S. S., Singh K.* Optimum design of laminates with frequency constraints // *J. Sound and Vibr.* 1979. Vol. 67. P. 101—112.
218. *Robben W. P.* A method for deriving structural influence coefficients from ground vibration tests // *AIAA J.* 1967. Vol. 5, N 5. P. 991—1000.
219. *Rubin C. P.* Minimum-weight design of complex structures subject to a frequency constraint // *Ibid.* 1970. Vol. 8. P. 923—927.
220. *Seyranian A. P.* Homogeneous functionals and structural optimization problems // *Intern. J. Solids and Struct.* 1979. Vol. 15, N 10. P. 749—759.
221. *Shamie B. J., Schmit L. A.* Frame optimization including frequency constraints // *J. Struct. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.* 1975. Vol. 101, N 1.
222. *Sheu C. Y.* Elastic minimum weight design for specified fundamental frequency // *Intern. J. Solids and Struct.* 1968. Vol. 4, N 10. P. 953—958.
223. *Sheu C. Y., Prager W.* Minimum weight design with piecewise constant specific stiffness // *J. Optimiz. Theory and Appl.* 1968. Vol. 2. P. 179—186.
224. *Simkins T. E.* Finite-elements for initial value problems in dynamics // *AIAA J.* 1981. Vol. 19, N 10. P. 1357—1362.
225. *Sippel D. L., Warner W. H.* Minimum — mass design of mulielement structures under a frequency constraint // *Ibid.* 1973. Vol. 11. P. 483—489.
226. *Stadler W.* A survey of multicriteria optimization or the vector maximum problem. Pt 3. 1776—1960 // *J. Optimiz. Theory and Appl.* 1979. Vol. 29, N 1. P. 1—52.
227. *Taylor J. E.* Minimum — mass bar for axial vibration at specified natural frequency // *AIAA J.* 1967. Vol. 5. P. 1911—1913.
228. *Taylor J. E.* Optimum design of a vibrating bar with specified minimum cross section // *Ibid.* 1968. Vol. 6. P. 1379—1381.
229. *Taylor J. E.* Scaling a discrete structural model to match measured modal frequencies // *Ibid.* 1977. Vol. 15, N 11. P. 1647—1649.
230. *Teschner W.* Minimum weight design for structural eigenvalue problems by optimal control theory // *Optimization methods in structural design*/Ed. H. Eschenauer, N. Olhoff. Mannheim: Bibliogr. Inst., 1983. P. 424—429.
231. *Thermann K.* Optimal design criteria of dynamically loaded elastic structures // *Optimization in structural design*/Ed. A. Sawczuk, Z. Mroz. N. Y.: Springer, 1975. P. 152—167.
232. *Turner M. J.* Design of minimum mass structures with specified natural frequencies // *AIAA J.* 1967. Vol. 5. P. 406—412.
233. *Venkayya V. B., Khot N. S.* Design of optimum structures to impulse type loading // *Ibid.* 1975. N 13. P. 989—994.

234. *Vepa K.* On the existence of solutions to optimization problems with eigenvalue constraints // *Quart. Appl. Math.* 1973/1974. Vol. 31. P. 329—341.
235. *Warner W. H., Vavrick D. J.* Optimal design in axial motion for several frequency constraints // *J. Optimiz. Theory and Appl.* 1975. Vol. 15. P. 157—166.
236. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. Oxford: Pergamon press, 1975. 412 p.
237. *Washizu K., Hanaoka M.* Application of the finite element method to minimum mass design of a bar with two specified natural frequencies // *Comput. and Struct.* 1979. Vol. 10. P. 277—282.
238. *Weisshaar T. A.* Optimization of simple structures with higher mode frequency constraints // *AIAA J.* 1972. Vol. 10. P. 691—693.
239. *Yamakawa H.* Optimum structural design for dynamic response // *New directions in optimum structural design*/Ed. E. Atrek et al. Chichester: Wiley, 1984. P. 249—266.
240. *Zarghamee M. S.* Optimum frequency of structures // *AIAA J.* 1968. Vol. 6. P. 749—750.
241. *Zolesio J. P.* Semi-derivatives of repeated eigenvalues // *Optimization of distributed parameter structures*/Ed. E. J. Haag, J. Ceas. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1981. P. 1457—1473.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
-------------	---

1.

МЕТОДЫ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ КОНСТРУКЦИЙ

1.1. Основные представления в динамике конструкций	7
1.2. Вариационные принципы динамики упругих тел	11
1.3. Расширенные вариационные принципы динамики	14
1.4. Краевые задачи и вариационные принципы динамики, использующие свертки по времени	17
1.5. Экстремальные принципы для свободных колебаний упругих тел	22
1.6. Некоторые свойства свободных колебаний	26
1.7. Применение метода возмущений для анализа свободных колебаний	31
1.8. Экстремальные принципы для упругих тел, совершающих вынужденные гармонические колебания	37
1.9. Моделирование динамики упругого тела с использованием собственных форм и частот свободных колебаний	41
1.10. Моделирование нестационарных динамических процессов на основе поперечных минимальных принципов	45
1.11. Метод Бубнова — Галеркина	48
1.12. О модифицированных формулировках вариационных принципов и вариационных уравнений динамики и их применениях	50

2.

ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ

2.1. О постановках динамических задач оптимизации конструкций	55
2.2. Задачи оптимизации динамических характеристик конструкций, совершающих неустойчившиеся движения	58
2.3. Задачи оптимизации для конструкций, совершающих свободные колебания и вынужденные гармонические колебания	60
2.4. Задачи многоцелевого оптимального проектирования	63
2.5. Многокритериальная оптимизация	66

3.

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ И УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

3.1. Применение анализа чувствительности при проектировании	72
3.2. Анализ чувствительности при вариациях коэффициентов уравнений	76
3.3. Анализ чувствительности при варьировании формы области	79
3.4. Конечноеэлементное моделирование и анализ чувствительности	82

3.5. Необходимые условия оптимальности и соотношения анализа чувствительности для эволюционных систем общего вида	85
3.6. Принцип максимума	92
3.7. Прямые методы анализа чувствительности	96
3.8. Анализ чувствительности при проектировании конструкций, совершающих свободные колебания	99
3.9. Анализ чувствительности нестационарных динамических процессов в конструкциях с использованием метода модальных разложений	101

4.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

4.1. Основные соотношения и условия экстремума для задач спектральной оптимизации	104
4.2. Оптимизация стержней, совершающих крутильные колебания	111
4.3. Оптимальные задачи о продольных колебаниях стержней	118
4.4. Проектирование балок при свободных поперечных колебаниях	122
4.5. Проектирование балок, совершающих изгибно-крутильные колебания	128
4.6. Учет поправок на сдвиг и вращение	131
4.7. Многоцелевое проектирование колеблющихся стержней	134
4.8. Оптимальные формы пологих арок	138
4.9. Проектирование пластинок при свободных колебаниях	143
4.10. Проектирование пластинок с учетом кратности собственных значений	146
4.11. Проектирование оболочек, совершающих свободные колебания	149
4.12. Оптимизация собственных частот колебаний пластинок в идеальной жидкости	152

5.

ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ, ДОПУСКАЮЩИЕ ИСКЛЮЧЕНИЕ ВРЕМЕНИ

5.1. Постановка задач оптимизации конструкций при вынужденных гармонических колебаниях и вывод необходимых условий экстремума	159
5.2. Оптимальное проектирование стержней и балок при вынужденных гармонических колебаниях	163
5.3. Проектирование прямоугольных пластинок переменной толщины при вынужденных гармонических колебаниях	169
5.4. Применение асимптотических разложений в задачах оптимизации конструкций, совершающих вынужденные гармонические колебания	175
5.5. Оптимизация параметров аэроупругой устойчивости крыла большого удлинения	181
5.6. Анализ чувствительности при проектировании крыла малого удлинения	188
5.7. Некоторые проблемы идентификации в динамике конструкций	197

6.
ОПТИМИЗАЦИЯ КОНСТРУКЦИЙ
ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ НАГРУЗКАХ

6.1. Проектирование балок методом последовательной оптимизации при нестационарных нагрузках	206
6.2. Минимизация динамических прогибов балок методом малого параметра	211
6.3. Оптимизация оболочек при нестационарных нагрузках	216
6.4. Минимизация динамической податливости конструкций за счет рационального распределения характеристик демпфирования	220
6.5. Анализ чувствительности и оптимальное проектирование пластинок при нестационарных динамических воздействиях	227
6.6. Анализ чувствительности и оптимальное проектирование многоэлементных стержневых конструкций при динамических нагрузках	234
6.7. Пологие оболочки максимальной жесткости	240
Литература	247

Динамика конструкций. Анализ и оптимизация/Н. В. Баничук, С. Ю. Иванова, А. В. Шарашук.— М.: Наука, 1989.— 262 с.

ISBN 5-02-006566-8

Монография посвящена оптимальному проектированию конструкций при динамическом нагружении. Изложены аналитические и численные решения задач оптимизации. Особое место отведено вариационным принципам и методам решения задач динамики, вопросам построения адекватных математических моделей конструкций. Развита метод анализа чувствительности целевых функционалов к вариациям проектных параметров, значительное внимание уделено задачам оптимизации конструкций при гармоническом и нестационарном нагружении, а также исследованию их устойчивости с учетом взаимодействия с окружающей средой.

Для специалистов в области технической механики, прикладной и вычислительной математики.

Б 2004030000-203 656-89, кн. 2
055(02)-89

Научное издание

Бапичук Николай Владимирович
Иванова Светлана Юрьевна
Шарапюк Александр Валентинович
**ДИНАМИКА КОНСТРУКЦИЙ.
АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ**

Утверждено к печати
Институтом проблем механики

Редактор издательства Н. В. Березникова
Художник А. Г. Кобрин
Художественный редактор А. В. Здринько
Технический редактор Т. В. Калинина
Корректоры
Т. М. Ефимова, Л. И. Кириллова

ИБ № 37391

Сдано в набор 28.11.88
Подписано к печати 21.04.89
Т-00145. Формат 60×90^{1/16}
Бумага бланочная
Гарнитура обыкновенная
Печать высокая
Усл. печ. л. 16,5. Усл. кр. отт. 16,5
Уч.-изд. л. 16,8
Тираж 1650 экз. Тип. зак. 503
Цена 3 р. 80 к.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
117864 ГСП-7, Москва В-485
Профсоюзная ул., 90.

4-я типография издательства «Наука»
630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславско-
го, 25