

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА И НАНОФОТОНИКА

Под редакцией В.А. Сойфера



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2014

УДК 535.42
ББК 22.343.4
Д 50



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 13-07.07005,
не подлежит продаже*

Авторский коллектив:

Безус Е.А., Быков Д.А., Досколович Л.Л., Ковалев А.А., Котляр В.В.,
Налимов А.Г., Порфирьев А.П., Скиданов Р.В., Сойфер В.А.,
Стафеев С.С., Хонина С.Н.

Дифракционная оптика и нанофотоника / Под ред. В.А. Сойфера. —
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 608 с. — ISBN 978-5-9221-1571-1.

Книга посвящена устройствам дифракционной оптики и нанофотоники, разработанным путем компьютерного решения прямых и обратных задач дифракции на основе уравнений Максвелла. Решения задач проводились как известными методами — методом конечных разностей во временной области и методом фурье-мод, так и авторскими методами — методом согласованных синусоидальных мод и методом конечных разностей для тел вращения. Эти методы применяются для моделирования дифракции света на компонентах плазмоники, резонансных дифракционных решетках, фотонно-кристаллических компонентах, элементах микрооптики для острой фокусировки света, элементах для формирования и фокусировки сингулярных световых пучков, а также для оптического манипулирования микрообъектами, в том числе биологическими.

Для широкого круга научных работников, инженеров, работающих в области оптики, нанофотоники, лазерной физики, оптоинформационных технологий, оптического приборостроения. Книга также может быть полезна студентам старших курсов специальностей «Прикладные математика и физика», «Прикладная математика и информатика», «Оптика» и аспирантам, специализирующимся в этих областях.

ISBN 978-5-9221-1571-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© Коллектив авторов, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	7
Глава 1. Метод фурье-мод и его применения в плазмонике и теории резонансных дифракционных решеток	11
1.1. Метод фурье-мод решения задачи дифракции	13
1.1.1. Уравнение плоской волны (13). 1.1.2. Метод фурье-мод для двумерных периодических структур учета (16). 1.1.3. Метод фурье-мод для трехмерных периодических структур (37). 1.1.4. Метод фурье-мод для двумерных непериодических структур (42).	
1.2. Методы расчета мод периодических дифракционных структур	55
1.2.1. Расчет мод на основе вычисления полюсов матрицы рассеяния (55). 1.2.2. Расчет мод на основе вычисления собственных значений матрицы прохождения (68).	
1.3. Резонансные дифракционные решетки для преобразования оптических импульсов	73
1.3.1. Интегрирование и дифференцирование оптических импульсов. Аномалии Вуда (74). 1.3.2. Типы решеток для интегрирования и дифференцирования импульсов (77). 1.3.3. Дробное интегрирование и дифференцирование оптических импульсов. Аномалии Рэлея–Вуда (78). 1.3.4. Примеры расчета дифференцирующих решеток (80). 1.3.5. Примеры расчета интегрирующих решеток (81).	
1.4. Дифракционные оптические элементы для управления распространением поверхностных плазмон-поляритонов	84
1.4.1. Дисперсионное соотношение и свойства поверхностных плазмон-поляритонов (85). 1.4.2. Фазовая модуляция поверхностных плазмон-поляритонов с помощью диэлектрических структур (97). 1.4.3. Подавление паразитного рассеяния поверхностных плазмон-поляритонов (101). 1.4.4. Расчет линз для фокусировки поверхностных плазмон-поляритонов (110). 1.4.5. Расчет брэгговских отражающих решеток для поверхностных плазмон-поляритонов (117).	
1.5. Формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн с помощью дифракционных решеток	119
1.5.1. Теоретическое описание интерференционных картин затухающих дифракционных порядков решеток с одномерной и двумерной периодичностью (119). 1.5.2. Формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн в металлodieлектрических дифракционных решетках (130). 1.5.3. Формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн в диэлектрических дифракционных решетках (143).	
Литература к главе 1.	152
Глава 2. Компоненты на фотонных кристаллах	160
2.1. Одномерные и двумерные фотонные кристаллы	160
2.1.1. Фотонные запрещенные зоны (160). 2.1.2. Дифракция плоской волны на фотонном кристалле без дефектов (162). 2.1.3. Распространение света в фотонно-кристаллическом волноводе (163). 2.1.4. Фотонно-кристаллические коллиматоры (164).	
2.2. Двумерная фотонно-кристаллическая градиентная линза Микаэляна	166
2.2.1. Модовое решение для градиентной секансной среды (167). 2.2.2. Фотонно-кристаллическая градиентная линза (169). 2.2.3. Фотонно-кристаллическая линза для сопряжения двух волноводов (173).	

2.3. Моделирование трехмерного устройства нанофотоники для ввода излучения в планарный волновод.	185
2.3.1. Двумерное моделирование ввода света в планарный волновод с помощью решетки (186). 2.3.2. Трехмерное моделирование фотонно-кристаллической линзы Микаэляна для сопряжения двух волноводов (189). 2.3.3. Трехмерное моделирование всего устройства нанофотоники (190).	
2.4. Фотонно-кристаллические световоды.	192
2.4.1. Расчет мод фотонно-кристаллических световодов методом согласованных синусоидальных мод (ССМ) (196). 2.4.2. Метод согласованных синусоидальных мод в векторном случае (209). 2.4.3. Метод Крылова для решения нелинейной задачи на собственные значения (215). 2.4.4. Расчет мод ступенчатого световода (219). 2.4.5. Расчет мод фотонно-кристаллического световода (223). 2.4.6. Расчет мод с помощью программы Fimmwave (226).	
Литература к главе 2.	227
Глава 3. Острая фокусировка света компонентами микрооптики	234
3.1. Численные и экспериментальные методы исследования острой фокусировки света	234
3.1.1. BOR-FDTD-метод (234). 3.1.2. Векторные формулы Ричардса–Вольфа (247). 3.1.3. Сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия (253).	
3.2. Аксикон	254
3.2.1. Острая фокусировка света радиальной поляризации с помощью микроаксикона (255). 3.2.2. Дифракционный логарифмический микроаксикон (264). 3.2.3. Бинарные аксиконы с периодом 4, 6 и 8 мкм (272). 3.2.4. Бинарный аксикон с периодом 800 нм (284).	
3.3. Зонная пластинка Френеля	286
3.3.1. Сравнение с формулами Ричардса–Вольфа (287). 3.3.2. Симметрия интенсивности и потока мощности субволнового фокусного пятна (291).	
3.4. Фокусировка света с помощью градиентных линз	301
3.4.1. Механизм сверхразрешения в планарной гиперболической секансной линзе (301). 3.4.2. Градиентные элементы микрооптики для достижения сверхразрешения (309). 3.4.3. Построение увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью планарных линз Микаэляна (322). 3.4.4. Гиперболическая секансная линза со щелью для субволновой фокусировки света (333). 3.4.5. Острая фокусировка радиально-поляризованного света 3D-гиперболической секансной линзой (338). 3.4.6. Оптимизация параметров планарной бинарной линзы для видимого диапазона излучения (340).	
3.5. Формирование фотонной наноструи с помощью сферы.	347
3.5.1. Численное моделирование прохождения непрерывного излучения через микросферу (348). 3.5.2. Численное моделирование прохождения импульсного излучения через микросферу (352). 3.5.3. Эксперимент по фокусировке света микросферой (353).	
Литература к главе 3.	355
Глава 4. Фокусировка вихревых пучков и преодоление дифракционного предела	362
Введение.	362
4.1. Формирование вихревых лазерных пучков с помощью элементов сингулярной оптики	364

4.1.1. Теоретический анализ дифракции плоской волны и гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке (364).	
4.1.2. Теоретический анализ дифракции плоской волны и гауссова пучка на спиральном аксиконе (371).	
4.1.3. Численное моделирование дифракции различных пучков на элементах сингулярной оптики (375).	
4.1.4. Выводы (379).	
4.2. Векторное представление поля в фокальной области для вихревой функции пропускания	380
4.2.1. Однородно-поляризованные пучки (линейная и круговая поляризация) (383).	
4.2.2. Цилиндрические векторные пучки (радиальная и азимутальная поляризации) (392).	
4.2.3. Обобщенная вихревая поляризация (398).	
4.2.4. Выводы (401).	
4.3. Применение аксиконов в высокоапертурной фокусирующей системе	402
4.3.1. Дополнение линзы аксиконом: параксиальная скалярная модель (404).	
4.3.2. Аподизация короткофокусной линзы аксиконом: непараксиальная векторная модель в приближении Дебая (407).	
4.3.3. Использование вихревых аксиконов для пространственного перераспределения компонент электрического поля в фокальной области (416).	
4.3.4. Выводы (417).	
4.4. Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур	420
4.4.1. Максимизация продольной компоненты для линейно-поляризованного излучения (420).	
4.4.2. Увеличение эффективности при фокусировке радиально-поляризованного излучения (426).	
4.4.3. Преодоление предела при азимутальной поляризации за счет поперечных компонент электрического поля (428).	
4.4.4. Выводы (429).	
4.5. Минимизация размера светового или теневого фокусного пятна с контролируемым ростом боковых лепестков	429
4.5.1. Скалярный дифракционный предел: теоретический анализ (430).	
4.5.2. Оптимизация функции пропускания фокусирующей системы (433).	
4.5.3. Минимизация светового пятна для радиально-поляризованного излучения (434).	
4.5.4. Формирование светового кольца субволнового радиуса при азимутальной поляризации лазерного излучения (439).	
4.5.5. Выводы (442).	
Заключение	443
Литература к главе 4	444
Глава 5. Оптическое манипулирование микро- и нанообъектами	449
5.1. Методы расчета силы, действующей на микрообъект со стороны сфокусированного лазерного излучения	451
5.1.1. Электромагнитная сила для трехмерного случая (451).	
5.1.2. Электромагнитная сила для двумерного случая (ТЕ- и ТМ-поляризаций) (453).	
5.1.3. Расчет силы для плоской волны (454).	
5.1.4. Расчет силы для непараксиального гауссова пучка (показатель преломления объекта больше показателя преломления среды) (456).	
5.1.5. Расчет силы для объекта с показателем преломления объекта, меньшим показателя преломления среды (461).	
5.1.6. Геометрооптический метод расчета силы, действующей на микрообъект (468).	
5.1.7. Сравнение результатов расчетов силы в рамках геометрооптического и электромагнитного подходов (472).	
5.2. Вращение микрообъектов в вихревых световых пучках	474
5.2.1. Вращение микрообъектов в бесселевых пучках (474).	
5.2.2. Оптическое вращение с использованием многопорядковой спиральной фазовой пластины (486).	
5.2.3. Вращение микрообъектов в вихревом световом	

кольце, сформированном аксиконом (489). 5.2.4. Оптическое вращение в двойном светлом кольце (490). 5.2.5. Формирование ДОЭ с помощью жидкокристаллического дисплея (492). 5.2.6. Вращение микрообъектов в гипергеометрических пучках и пучках, не обладающих орбитальным угловым моментом, с использованием динамического модулятора света (494). 5.2.7. Исследование параметров вращения микрообъектов в световых пучках с орбитальным угловым моментом (504).	
5.3. Вращение микрочастиц в световых пучках, рассчитанных и сформированных для получения максимального вращающего момента.	511
5.3.1. Формирование световых пучков, состоящих из нескольких светлых колец (511). 5.3.2. Формирование суперпозиции оптических вихрей высоких порядков (518). 5.3.3. Экспериментальное формирование суперпозиций вихревых пучков (520).	
5.4. Световые пучки, специально сформированные для линейного перемещения и позиционирования микрообъектов	521
5.4.1. Кодирование амплитуды методом локального фазового скачка (522). 5.4.2. Модификация метода кодирования амплитуды для расчета световых полей со сложной структурой (524). 5.4.3. Фокусаторы для позиционирования микрообъектов (524). 5.4.4. Фокусаторы для перемещения микрообъектов по заданным траекториям (529). 5.4.5. Фокусаторы для сортировки и фильтрации микрообъектов (532). 5.4.6. Фокусаторы для фильтрации отдельных микрообъектов (534). 5.4.7. Экспериментальное исследование движения микрообъектов в световых полях с заданным амплитудно-фазовым распределением, сформированных бинарными фокусаторами (536). 5.4.8. Линейное перемещение микрообъектов в суперпозиции двух вихревых пучков (542).	
5.5. Формирование массивов световых «бутылок» с помощью ДОЭ.	546
5.5.1. Световые пучки Бесселя и их замечательные свойства (548). 5.5.2. Многомодовые пучки Бесселя (549). 5.5.3. Формирование световых «бутылок» за счет использования составных пучков Бесселя 0-го порядка (550). 5.5.4. Алгоритм повышения однородности формируемых световых ловушек на основе градиентной процедуры (554). 5.5.5. Формирование массивов световых «бутылок» (560). 5.5.6. Формирование массивов полых световых пучков (568). 5.5.7. Экспериментальное формирование массивов световых «бутылок» с помощью бинарных ДОЭ (573). 5.5.8. Захват прозрачных микрообъектов в системе световых «бутылок» (576). 5.5.9. Захват и перемещение металлических микрочастиц олова, форма которых близка к сферической (582). 5.5.10. Осаждение и позиционирование микрообъектов с помощью массивов полых световых пучков (583).	
5.6. Световые пучки, формируемые ДОЭ, для неповреждающего захвата биологических микрообъектов	585
5.6.1. Модификация гауссова пучка с целью оптимизации силовых характеристик оптической ловушки (587). 5.6.2. Измерения энергетической эффективности ДОЭ, образующих пучки-полумесяцы (590). 5.6.3. Эксперименты по оптическим манипуляциям клетками <i>saccharomyces cerevisiae</i> (591).	
Литература к главе 5.	595
Заключение.	605

Введение

Явление дифракции, которое изначально рассматривалось как ограничивающий фактор в оптике, стало в настоящее время фундаментальной основой создания новой компонентной базы и перспективных информационных технологий.

В основе создания устройств дифракционной оптики и нанофотоники лежит компьютерное решение прямых и обратных задач теории дифракции на основе уравнений Максвелла. Среди численных методов решения уравнений Максвелла наибольшее распространение получили: метод конечных разностей во временной области, метод конечных элементов и метод фурье-мод, а также приближенные методы расчета дифракционных интегралов.

Книга посвящена современным достижениям дифракционной оптики, ориентированным на создание новых компонентов и устройств нанофотоники, а также приборов и информационных технологий на их базе.

В первой главе рассмотрен метод фурье-мод, предназначенный для численного решения уравнений Максвелла, а также ряд его применений в задачах расчета дифракционных решеток с резонансными свойствами и компонентов плазмонной оптики.

Метод фурье-мод (в англоязычной литературе — *rigorous coupled wave analysis*) имеет широкую область применения. В стандартной формулировке метод используется для решения задачи дифракции плоской монохроматической волны на дифракционных решетках. Представление светового пучка в базисе плоских волн позволяет использовать метод для моделирования дифракции оптических импульсов. Использование так называемых идеально согласованных поглощающих слоев (в англоязычной литературе — *perfectly matched layers*) в сочетании с искусственной периодизацией позволяет эффективно применять метод для решения задач дифракции световых волн на неперiodических структурах. В первой главе метод фурье-мод рассмотрен для решения задач дифракции плоской волны на двумерных и трехмерных дифракционных решетках, а также на неперiodических структурах. Рассматриваемая реализация метода основана на численно-устойчивом подходе, известном как метод матрицы рассеяния.

Для исследования резонансных особенностей в спектрах перидических дифракционных структур рассмотрены авторские методы расчета полюсов матрицы рассеяния. Данные методы учитывают вид матрицы рассеяния в окрестности резонансов, связанных с возбуждением в решетке собственных мод, и обладают лучшей сходимостью по сравнению с известными методами.

Метод фурье-мод и формализм матрицы рассеяния применяются к расчету дифракционных решеток с резонансными свойствами для преобразования оптических импульсов. Предложена теоретическая модель резонансных решеток, осуществляющих операции дифференцирования и интегрирования огибающей оптического импульса, представлены результаты расчета и исследований дифракционных решеток для дифференцирования и интегрирования пикосекундных импульсов.

Непериодический вариант метода фурье-мод используется в задаче расчета дифракционных оптических элементов для управления распространением поверхностных плазмон-поляритонов. Принцип работы основан на фазовой модуляции поверхностных плазмонов-поляритонов с помощью диэлектрических ступенек с изменяющимися высотой и длиной, расположенных на поверхности металла.

Метод фурье-мод также применяется к задаче расчета дифракционных решеток, формирующих в ближнем поле интерференционные картины затухающих электромагнитных волн и, в особенности, плазмонных мод. В главе приведены теоретическое описание и ряд численных примеров расчета решеток, формирующих интерференционные картины затухающих электромагнитных волн и плазмонных мод с существенно субволновым периодом, продемонстрирована возможность управления видом и периодом интерференционных картин затухающих волн за счет изменения параметров падающего излучения.

Области практического использования результатов первой главы включают системы оптических вычислений и сверхбыстрой оптической обработки информации, создание высокоэффективных элементов плазмонной оптики, системы контактной нанолитографии и системы оптического захвата и манипулирования наноразмерными объектами.

Во второй главе рассмотрены компоненты нанофоники на основе фотонных кристаллов: градиентная планарная фотонно-кристаллическая (ФК) линза и фотонно-кристаллические волноводы. Рассмотрено ультракомпактное устройство нанофоники, позволяющее эффективно связывать двумерные волноводы разной ширины с помощью ФК-линзы. Показано, что ФК-линза фокусирует свет в малое фокусное пятно непосредственно за линзой, размер которого существенно меньше, чем скалярный дифракционный предел. Моделирование проводилось методом разностного решения системы уравнений Максвелла.

Во второй главе также рассмотрен метод расчета световых волокон с ФК-оболочкой. В таком волноводе свет распространяется внутри сердечника не за счет эффекта полного внутреннего отражения от границы сердечник-оболочка, а за счет отражения от многослойного зеркала Брэгга, сформированного системой периодически расположенных отверстий вокруг сердечника. Расчет пространственных мод в ФК-волокнах основан на разбиении неоднородного поперечного сечения волокна на множество однородных ячеек, в каждой из которых известен набор пространственных синусоидальных мод. Далее осуществляется сшивание всех мод на границах всех ячеек. ФК-волноводы отличаются от ступенчатых и градиентных волноводов тем, что позволяют локализовать моды внутри сердечника, то есть все моды распространяются внутри сердечника и почти не заходят в оболочку, и позволяют увеличить модовый объем, соответственно, увеличить диаметр моды, локализованной внутри сердечника. Кроме того, ФК-волноводы с полым сердечником позволяют избежать хроматической дисперсии и передавать по волокну свет большей мощности. Короткий импульс света, проходя в через такой ФК-волновод конечных размеров, на выходе из-за нелинейной дисперсии преобразуется в белый свет. Участки ФК-волноводов используют в качестве фильтров,

источников белого света, устройств нелинейной оптики для генерации второй гармоники.

В третьей главе рассматривается фокусировка лазерного излучения. С конца 19-го века в оптике установилось понятие дифракционного предела, $d_{\min} = \lambda/(2n)$, где λ — длина волны света в вакууме, n — показатель преломления среды. Показано, что с помощью компонентов дифракционной микрооптики, фокусирующих свет вблизи своей поверхности, можно преодолеть дифракционный предел. Рассмотрена острая фокусировка лазерного света с помощью таких компонентов микрооптики, как аксикон, зонная пластинка, градиентная и бинарная планарные микролинзы, микросферы. Фокусировка света вблизи поверхности компонентов микрооптики позволяет преодолеть дифракционный предел из-за наличия поверхностных волн и влияния показателя преломления материала фокусирующего элемента. Моделирование фокусировки лазерного света проводится приближенным векторным методом Ричардса–Вольфа и методом разностного решения системы уравнений Максвелла.

Уменьшение размеров фокусного пятна и преодоление дифракционного предела является актуальной задачей в микроскопии ближнего поля, оптической микроманипуляции, контактной фотолитографии, увеличении плотности записи информации на оптический диск, сопряжении планарных волноводов разной ширины.

В четвертой главе рассмотрена фокусировка сингулярных вихревых лазерных пучков. В точке сингулярности интенсивность светового поля обращается в нуль, а значение фазы не определено. В окрестности такой точки происходят резкие фазовые изменения. Сингулярные особенности в световых полях могут появляться при их прохождении через случайно-неоднородные и нелинейные среды. Также возможно возбуждение вихревых полей в лазерных резонаторах и многомодовых волоконных световодах. Наиболее эффективным способом формирования вихревых лазерных пучков является использование спиральных дифракционных оптических элементов, в том числе спиральных фазовых пластинок и спиральных аксиконов. В четвертой главе рассматривается формирование вихревых пучков, представленных в виде суперпозиции мод Бесселя, Лагерра–Гаусса, Гаусса–Эрмита и др. При фокусировке вихревых пучков особое внимание уделяется сочетанию различных видов поляризационных и фазовых сингулярностей, которое приводит к преодолению дифракционного предела в дальней зоне дифракции.

Основные области применения вихревых лазерных пучков — это острая фокусировка лазерного света, манипулирование микрообъектами и уплотнение каналов передачи информации.

В пятой главе рассматривается задача оптического захвата, вращения, перемещения, позиционирования микрообъектов на основе применения дифракционных оптических элементов. Для вращения микрообъектов рассматривается использование световых пучков с орбитальным угловым моментом. Значительное внимание уделяется методам расчета сил, действующих на микрообъекты в световых полях. Проблема создания вращательного момента в микромеханических системах с помощью световых пучков имеет достаточно долгую историю. В ряде работ задача вращения рассматривается в сово-

купности с другими задачами: сортировка, перемещение, позиционирование и т. д. Следует заметить, что во всех упомянутых случаях упор делается, в первую очередь, на технологию изготовления элементов микромеханики и нет попыток совершенствования самих световых пучков. В то же время расчет и применение дифракционных оптических элементов, формирующих вихревые световые пучки под определенную форму микромеханического компонента, позволяет повысить эффективность передачи момента вращения в микромеханических системах.

В главе рассматриваются два метода расчета дифракционных оптических элементов для формирования световых полей с заданным амплитудно-фазовым распределением. Один из них заключается в расчете фокусатора, формирующего световое поле с заданным градиентом фазы вдоль контура. Другой метод позволяет за счет использования суперпозиции пучков Бесселя нулевого порядка, формировать световые ловушки в виде полых пучков для непрозрачных микрообъектов. Приведены результаты натурных экспериментов по оптическому захвату и перемещению микрообъектов. Также в главе рассматривается возможность использования световых пучков для перемещения биологических микрообъектов.

Книга написана сотрудниками Института систем обработки изображений Российской академии наук. В первой главе разделы 1.1, 1.2 написаны Быковым Д. А., Безусом Е. А. и Досколовичем Л. Л., раздел 1.3 — Быковым Д. А., Досколовичем Л. Л. и Сойфером В. А., разделы 1.4, 1.5 — Безусом Е. А. и Досколовичем Л. Л. Вторая глава написана Котляром В. В., Ковалевым А. А., Налимовым А. Г. и Сойфером В. А. Третья глава написана Котляром В. В., Ковалевым А. А., Налимовым А. Г. и Стафеевым С. С. Четвертая глава написана Хониной С. Н. Пятая глава написана Скидановым Р. В., Порфирьевым А. П. и Сойфером В. А.

Авторы выражают благодарность к.ф.-м.н. Шуюповой Я. О. за проведение численного моделирования для второй главы. Авторы также благодарны Лиму О'Фелону (Университет Сент-Эндрюса, Великобритания) за помощь в изготовлении компонентов микрооптики и к.т.н. Моисееву О. Ю. (ИСОИ РАН) за изготовление бинарных аксиконов, которые рассматриваются в третьей главе. Оригинальные результаты, представленные в пятой главе, были получены совместно с д.ф.-м.н. Хониной С. Н., к.ф.-м.н. Налимовым А. Г., Морозовым А. А., Рыковым М. А.. Авторы благодарят сотрудников ИСОИ РАН д.т.н. Волкова А. В., к.т.н. Моисеева О. Ю., Якуненкову Д. М. и Полетаева С. Д., изготовивших ДОЭ, использованные в экспериментах, описанных в пятой главе.

Глава 1

МЕТОД ФУРЬЕ-МОД И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ПЛАЗМОНИКЕ И ТЕОРИИ РЕЗОНАНСНЫХ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК

В главе рассмотрен метод фурье-мод, предназначенный для численного решения уравнений Максвелла, а также ряд его применений в задачах дифракционной нанофотоники.

Метод фурье-мод (в англоязычной литературе — rigorous coupled wave analysis и Fourier modal method) имеет широкую область применения. В стандартной формулировке метод используется для строгого решения задачи дифракции плоской монохроматической волны на дифракционных решетках. Представление падающего излучения в базисе плоских волн позволяет использовать метод для моделирования дифракции пространственно-временных оптических сигналов (оптических импульсов и пучков). Использование так называемых идеально согласованных поглощающих слоев (в англоязычной литературе — perfectly matched layers) в сочетании с искусственной периодизацией позволяет эффективно применять метод для решения задач дифракции световых волн на неперiodических структурах.

В разделе 1.1 метод фурье-мод рассмотрен как в стандартной формулировке для решения задачи дифракции плоской волны на двумерных и трехмерных многослойных периодических дифракционных структурах, так и для случая неперiodических структур. Рассматриваемая реализация метода основана на численно-устойчивом подходе, известном как метод матрицы рассеяния. Описание метода представлено со всеми деталями и использовалось авторами при создании оригинальных компьютерных программ для решения задач дифракции на структурах различных типов. Читатель может без опаски использовать приведенные в разделе формулы при создании собственных программ электромагнитного моделирования.

Взаимодействие света с периодическими структурами, в особенности, с металлodieлектрическими, является предметом интенсивных исследований. В таких структурах существует широкий спектр экстраординарных (резонансных) оптических эффектов, включающих экстраординарное пропускание, полное поглощение падающего излучения, резонансное изменение коэффициентов прохождения и отражения, формирование областей с высокой степенью локализации энергии вследствие интерференции затухающих и плазмонных волн. Указанные эффекты, как правило, связаны с возбуждением в периодической структуре собственных квазиволноводных и плазмонных мод.

Моды структуры соответствуют полюсам матрицы рассеяния. В разделе 1.2 представлен ряд предложенных авторами методов расчета полюсов матрицы рассеяния. Данные методы учитывают вид матрицы рассеяния в окрестности резонансов и, по сравнению с известными методами, обладают лучшей сходимостью.

В разделе 1.3 метод и аппарат матрицы рассеяния применяются к задаче расчета дифракционных решеток с резонансными свойствами для преобразования оптических импульсов. В первой части раздела в рамках единого методологического подхода описан класс преобразований оптических импульсов, реализуемых резонансными дифракционными решетками, и предложена теоретическая модель резонансных решеток, осуществляющих операции дифференцирования и интегрирования огибающей оптического импульса. Модель основана на резонансных представлениях комплексной амплитуды нулевого порядка дифракции в окрестности частот волноводных резонансов (аномалий Вуда) и в окрестности частот аномалий Рэлея–Вуда, связанных с появлением распространяющихся порядков дифракции. Далее в разделе представлены результаты расчета и исследования дифракционных решеток для выполнения операций дифференцирования и интегрирования пикосекундных импульсов (аномалии Вуда), а также операций дробного дифференцирования и интегрирования (аномалии Рэлея–Вуда).

Области практического применения результатов раздела включают системы оптических вычислений и сверхбыстрой оптической обработки информации.

В разделе 1.4 непериодический вариант метода фурье-мод используется в задаче расчета дифракционных оптических элементов (ДОЭ) для управления распространением поверхностных плазмон-поляритонов (ППП). Принцип работы ДОЭ основан на фазовой модуляции входного волнового поля с помощью дифракционного микрорельефа переменной высоты. Аналогичный подход может быть использован при создании оптических элементов для ППП. В разделе исследуются механизмы фазовой модуляции ППП и плазмонных мод тонких металлических пленок с помощью диэлектрических ступенек с изменяющейся высотой и фиксированной длиной (или с изменяющимися высотой и длиной), расположенных на поверхности металла или металлической пленки. В разделе также рассмотрен метод подавления паразитного рассеяния при дифракции ППП (плазмонных мод) на диэлектрической ступеньке, основанный на использовании структуры из двух изотропных диэлектрических слоев на поверхности металла. Указанная двухслойная структура позволяет осуществлять фазовую модуляцию ППП (плазмонных мод) при снижении потерь энергии на паразитное рассеяние на порядок по сравнению со ступеньками из одного материала. В разделе также представлены результаты расчета и исследования дифракционных линз для фокусировки ППП, основанные на различных методах фазовой модуляции.

Основным практическим применением результатов раздела является создание высокоэффективных элементов плазмонной оптики: линз, брэгговских решеток, плазмонных кристаллов.

В разделе 1.5 метод фурье-мод применяется к задаче расчета дифракционных решеток, формирующих в ближнем поле интерференционные картины затухающих электромагнитных волн (в особенности, плазмонных мод). В пер-

вой части раздела приведено теоретическое описание интерференционных картин затухающих дифракционных порядков для решеток с одномерной и двумерной периодичностью. Далее представлен ряд численных примеров расчета решеток, формирующих интерференционные картины затухающих электромагнитных волн и плазмонных мод с существенно субволновым периодом, продемонстрирована возможность управления видом и периодом интерференционных картин затухающих волн за счет изменения параметров падающего излучения.

Области практического использования результатов раздела включают системы контактной нанолитографии и системы оптического захвата и манипулирования наноразмерными объектами.

1.1. Метод фурье-мод решения задачи дифракции

1.1.1. Уравнение плоской волны. Данный пункт носит вспомогательный характер. В нем рассмотрен вывод общего уравнения плоской волны в изотропной среде, используемого в дальнейшем описании метода фурье-мод.

Запишем уравнения Максвелла и материальные уравнения в гауссовой системе единиц:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \\ \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) записаны в случае отсутствия зарядов, при этом ε — комплексная диэлектрическая проницаемость. Для монохроматического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y, z) \exp(-i\omega t), \\ \mathbf{H}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}(x, y, z) \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (1.2)$$

система (1.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = ik_0 \mu \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = -ik_0 \varepsilon \mathbf{E}, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$, λ — длина волны. Раскрыв оператор ротора, получим:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{bmatrix} = ik_0 \mu \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix},$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \end{bmatrix} = -ik_0 \varepsilon \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \quad (1.4)$$

Для получения уравнения плоской волны будем искать решение уравнений (1.4) в виде

$$\Phi(x, y, z) = \Phi \exp(ik_0(\alpha x + \beta y + \gamma z)), \quad (1.5)$$

где $\Phi = [E_x \ E_y \ E_z \ H_x \ H_y \ H_z]^T$ — вектор столбец из компонент поля. Величины α, β, γ в (1.5) определяют направление распространения плоской волны. Подставляя (1.5) в (1.4), получим:

$$\begin{aligned} ik_0 \begin{bmatrix} \beta E_z - \gamma E_y \\ \gamma E_x - \alpha E_z \\ \alpha E_y - \beta E_x \end{bmatrix} &= ik_0 \mu \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}, \\ ik_0 \begin{bmatrix} \beta H_z - \gamma H_y \\ \gamma H_x - \alpha H_z \\ \alpha H_y - \beta H_x \end{bmatrix} &= -ik_0 \varepsilon \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Представим уравнения (1.6) в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta & -\mu & 0 & 0 \\ \gamma & 0 & -\alpha & 0 & -\mu & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & -\mu \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\gamma & \beta \\ 0 & \varepsilon & 0 & \gamma & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \varepsilon & -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \Phi = \mathbf{A} \cdot \Phi = \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) представляет собой однородную систему линейных уравнений. Непосредственным вычислением несложно получить, что определитель системы имеет вид

$$\det \mathbf{A} = \varepsilon \mu (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varepsilon \mu)^2. \quad (1.8)$$

Искомое нетривиальное решение системы (1.7) существует, когда определитель (1.8) равен нулю. В случае $\mu = 1$ определитель (1.8) обращается в нуль при условии

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \varepsilon. \quad (1.9)$$

Выпишем решение системы (1.6) в явном виде. При условии (1.9) ранг системы (1.7) равен четырем, поэтому для записи решения зафиксируем значения амплитуд E_z и H_z . Введем так называемые E - и H -волны. Для

E -волны $E_z \neq 0$, $H_z \equiv 0$, а для H -волны $H_z \neq 0$, $E_z \equiv 0$. Представим искомое решение в виде суперпозиции E - и H - волн в виде

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{bmatrix} -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 \\ \beta\varepsilon \\ -\alpha\varepsilon \\ 0 \end{bmatrix} \frac{A_E}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \\ 0 \\ -\alpha\gamma \\ -\beta\gamma \\ \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix} A_H, \quad (1.10)$$

где A_E и A_H — амплитуды E - и H -волн, соответственно.

Запишем компоненты вектора $\mathbf{p} = (\alpha, \beta, \gamma)$, представляющего направление волны, через углы θ и φ сферической системы координат:

$$\alpha = \sqrt{\varepsilon} \cos \varphi \sin \theta, \quad \beta = \sqrt{\varepsilon} \sin \varphi \sin \theta, \quad \gamma = \sqrt{\varepsilon} \cos \theta, \quad (1.11)$$

где θ — угол между вектором \mathbf{p} и осью Oz , φ — угол между плоскостью падения волны и плоскостью xOz . Для этих углов выполняются следующие соотношения:

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\varepsilon} \sin \theta, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \sin \varphi. \quad (1.12)$$

Запишем отдельно y - и x -компоненты электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} = \begin{bmatrix} E_y \\ E_x \\ H_y \\ H_x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos \theta \sin \varphi \\ -\cos \theta \cos \varphi \\ -\sqrt{\varepsilon} \cos \varphi \\ \sqrt{\varepsilon} \sin \varphi \end{bmatrix} A_E + \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ -\sqrt{\varepsilon} \cos \theta \sin \varphi \\ -\sqrt{\varepsilon} \cos \theta \cos \varphi \end{bmatrix} A_H = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma/\sqrt{\varepsilon} & 0 \\ -\sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_E \\ A_H \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где \mathbf{R} — матрица поворота следующего вида:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Для описания поляризации волны введем угол ψ — угол между вектором \mathbf{E} и плоскостью падения. Под плоскостью падения будем понимать плоскость, содержащую вектор направления волны \mathbf{p} и ось Oz . В этом случае

$$\begin{aligned} A_H &= A \sin \psi, \\ A_E &= A \cos \psi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что при решении задачи дифракции случай $\varphi = 0$ соответствует так называемому плоскому падению. В этом случае E -волны называют волнами с ТМ-поляризацией, а H -волны — волнами с ТЕ-поляризацией.

Рассмотрим усредненный по времени вектор Умова–Пойнтинга, $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$. Вычислим z -компоненту данного вектора, которая соответствует плотности потока энергии через плоскость xOy . Для E -волны

$$2S_z = \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) = |A_E|^2 \text{Re}(\sqrt{\varepsilon}^*) \cdot \cos \theta = |A_E|^2 \text{Re} \sqrt{\varepsilon} \cdot \cos \theta; \quad (1.16)$$

аналогичное выражение справедливо для H -волны:

$$2S_z = \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*) = |A_H|^2 \text{Re}(\sqrt{\varepsilon}^*) \cdot \cos \theta = |A_H|^2 \text{Re} \sqrt{\varepsilon} \cdot \cos \theta. \quad (1.17)$$

Выражения (1.16), (1.17) описывают плотность потока энергии через плоскость xOy . Эти выражения важны для закона сохранения энергии при решении задачи дифракции на дифракционных структурах из непоглощающего материала.

1.1.2. Метод фурье-мод для двумерных периодических структур учета.

Метод фурье-мод ориентирован на численное решение уравнений Максвелла для случая периодических структур, состоящих из набора «бинарных слоев» [1–13]. В каждом слое диэлектрическая (магнитная) проницаемость материала структуры не зависит от переменной z (ось Oz перпендикулярна структуре). В рамках метода электромагнитное поле в областях над и под структурой задается в виде суперпозиции плоских волн (порядков дифракции). В каждом слое структуры функции диэлектрической и магнитной проницаемости материала представляется отрезками рядов Фурье, а компоненты электромагнитного поля записываются в виде разложения по фурье-модам. Вычисление фурье-мод сводится к задаче на собственные значения. Последовательное наложение условий равенств тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах слоев сводит определение амплитуд отраженных и прошедших порядков дифракции к решению системы линейных уравнений [1–13].

Метод рассмотрен для двумерных дифракционных решеток (для решеток с одномерной периодичностью). В двумерном случае свойства материалов структуры постоянны вдоль одной из осей координат. Материалы структуры задаются в общем виде через тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей.

1.1.2.1. Геометрия структуры и постановка задачи. Рассмотрим дифракционную решетку с периодом d по оси x (рис. 1.1). Для решеток с непрерывным профилем (пунктирная линия на рис. 1.1) метод предполагает аппроксимацию профиля решетки набором бинарных слоев. Будем считать, что дифракционная решетка состоит из L бинарных слоев (рис. 1.1). Диэлектрическая проницаемость ε и магнитная проницаемость μ в слоях зависят только от переменной x . Границами слоев являются линии $z = z_i$; l -й слой расположен в области $z_l < z < z_{l+1}$.

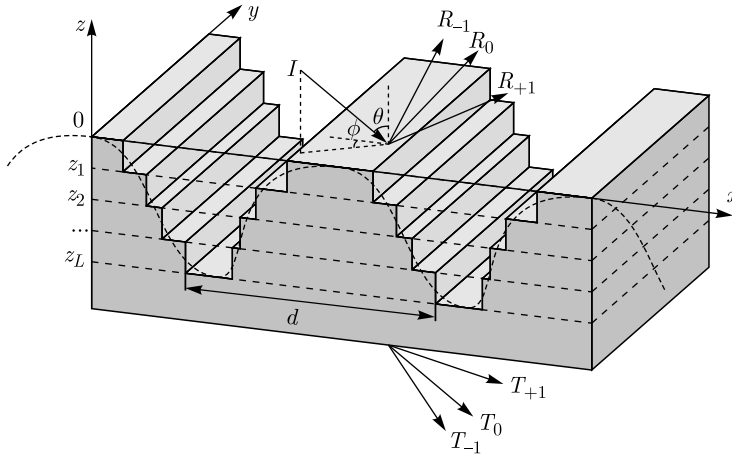


Рис. 1.1. Геометрия задачи

Над рассматриваемой структурой в области $z > z_0 = 0$ находится однородный диэлектрик с показателем преломления $n_U = \sqrt{\varepsilon_U}$. Под структурой при $z < z_L$ находится однородный диэлектрик с показателем преломления $n_D = \sqrt{\varepsilon_D}$.

Сверху на решетку падает плоская монохроматическая волна (длина волны — λ , волновое число — $k_0 = 2\pi/\lambda$), направление которой задается углами θ и φ в сферической системе координат (рис. 1.1). Поляризация волны определяется углом ψ между плоскостью падения и вектором \mathbf{E} (см. (1.15)).

Решение задачи дифракции света на периодической структуре состоит в вычислении интенсивностей или комплексных амплитуд порядков дифракции. Порядки дифракции — это отраженные и прошедшие плоские волны, возникающие при дифракции падающей волны на структуре. Различают отраженные порядки с амплитудами R_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и прошедшие порядки с амплитудами T_i , $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (рис. 1.1). Также порядки дифракции разделяют на затухающие и распространяющиеся. Амплитуда затухающих порядков экспоненциально убывает при удалении от решетки.

1.1.2.2. Представление поля над и под структурой. Поле над и под структурой записывается в виде суперпозиции плоских волн (разложения Рэлея). Согласно (1.5), (1.10), плоскую волну будем представлять вектором из шести компонент:

$$\Phi = [E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z]^T. \quad (1.18)$$

Уравнение падающей волны представим в виде

$$\Phi^{\text{inc}}(x, y, z) = \Phi^{\text{inc}}(\psi) \exp(i(k_{x,0}x + k_y y - k_{z,U,0}z)), \quad (1.19)$$

где запись $\Phi^{\text{inc}}(\psi)$ означает зависимость падающей волны от поляризации (см. (1.15)). Константы $k_{x,0} = k_0 n_U \sin \theta \cos \varphi$, $k_y = k_0 n_U \sin \theta \sin \varphi$, $k_{z,U,0} = \sqrt{(k_0 n_U)^2 - k_{x,0}^2 - k_y^2}$ в (1.19) определяются через углы θ и φ , задающие направление падающей волны.

Поле над решеткой соответствует суперпозиции падающей волны и отраженных порядков дифракции:

$$\Phi^U(x, y, z) = \Phi^{\text{inc}}(x, y, z) + \sum_m \Phi_m^R(R_m) \exp(i(k_{x,m}x + k_y y + k_{z,U,m}z)), \quad (1.20)$$

где $\Phi(R) = \Phi_E R_E + \Phi_H R_H$. Выражение для $\Phi(R)$ соответствует представлению (1.10) отраженной волны как суммы E - и H -волн с комплексными амплитудами R_E и R_H , соответственно.

Поле под решеткой записывается аналогично, в виде суперпозиции прошедших волн:

$$\Phi^D(x, y, z) = \sum_m (T_m) \exp(i(k_{x,m}x + k_y y - k_{z,D,m}(z - z_L))). \quad (1.21)$$

Направления порядков в (1.20), (1.21) задаются значениями $k_{x,m}$, k_y , $k_{z,p,m}$, которые называются константами распространения. Константы распространения имеют вид

$$\begin{aligned} k_{x,m} &= k_0 n_U \sin \theta \cos \varphi + m \frac{2\pi}{d}, \\ k_y &= k_0 n_U \sin \theta \sin \varphi, \\ k_{z,p,m} &= \sqrt{(k_0 n_p)^2 - k_{x,m}^2 - k_y^2}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

где в качестве p берется « U » для отраженных порядков (поле над решеткой) и « D » — для прошедших (поле под решеткой). Представленное выражение для $k_{x,m}$ следует из теоремы Блоха–Флоке [14, 15]. С математической точки зрения вид $k_{x,m}$ обеспечивает выполнение так называемого условия квазипериодичности:

$$\Phi^p(x + d, y, z) = \Phi^p(x, y, z) \exp(i k_{x,0} d), \quad p = U, D. \quad (1.23)$$

Согласно (1.23), амплитуда поля не изменяется при сдвиге на период. Волны с действительным $k_{z,p,m}$ являются распространяющимися, с мнимым — затухающими.

1.1.2.3. Система дифференциальных уравнений для описания поля внутри слоя. Перейдем теперь к рассмотрению поля внутри отдельно взятого l -го слоя. Для простоты записей индекс l опустим.

Поле в каждом слое описывается базовыми уравнениями Максвелла для монохроматического поля в виде

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = i k_0 \vec{\mu} \mathbf{H}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = -i k_0 \vec{\epsilon} \mathbf{E}, \end{cases} \quad (1.24)$$

где $\vec{\epsilon}$, $\vec{\mu}$ в общем случае являются тензорами:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{1,1} & \epsilon_{1,2} & \epsilon_{1,3} \\ \epsilon_{2,1} & \epsilon_{2,2} & \epsilon_{2,3} \\ \epsilon_{3,1} & \epsilon_{3,2} & \epsilon_{3,3} \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \mu_{1,3} \\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \mu_{2,3} \\ \mu_{3,1} & \mu_{3,2} & \mu_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (1.25)$$

Компоненты тензоров зависят только от координаты x . Раскрывая оператор ротора в (1.24), получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = ik_0(\mu_{1,1}H_x + \mu_{1,2}H_y + \mu_{1,3}H_z), \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik_0(\mu_{2,1}H_x + \mu_{2,2}H_y + \mu_{2,3}H_z), \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = ik_0(\mu_{3,1}H_x + \mu_{3,2}H_y + \mu_{3,3}H_z), \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = -ik_0(\varepsilon_{1,1}E_x + \varepsilon_{1,2}E_y + \varepsilon_{1,3}E_z), \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = -ik_0(\varepsilon_{2,1}E_x + \varepsilon_{2,2}E_y + \varepsilon_{2,3}E_z), \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -ik_0(\varepsilon_{3,1}E_x + \varepsilon_{3,2}E_y + \varepsilon_{3,3}E_z). \end{array} \right. \quad (1.26)$$

Представим компоненты электрического и магнитного полей в виде рядов Фурье по переменной x :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \sum_j S_{x,j}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)), \\ E_y = \sum_j S_{y,j}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)), \\ E_z = \sum_j S_{z,j}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)), \\ H_x = -i \sum_j U_{x,j}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)), \\ H_y = -i \sum_j U_{y,j}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)), \\ H_z = -i \sum_j U_{z,j}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)). \end{array} \right. \quad (1.27)$$

Представления (1.27) записаны с учетом квазипериодичности компонент полей по переменной x . Ограничимся конечным числом членов в разложениях (1.27), соответствующим $-N \leq j \leq N$. Составим из величин $S_{x,j}$, $S_{y,j}$, $S_{z,j}$, $U_{x,j}$, $U_{y,j}$, $U_{z,j}$ вектор-столбцы \mathbf{S}_x , \mathbf{S}_y , \mathbf{S}_z , \mathbf{U}_x , \mathbf{U}_y , \mathbf{U}_z , содержащие по $2N + 1$ элементов.

Рассмотрим разложение в ряд Фурье произведения двух функций $\varepsilon_a(x)E_b(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a(x)E_b(x) &= \left(\sum_m e_{a,m} \exp\left(i \frac{2\pi}{d} m x\right) \right) \left(\sum_l S_{b,l}(z) \exp(i(k_{x,l}x + k_y y)) \right) = \\ &= [j = l + m] = \sum_j e_{a,j-l} S_{b,l}(z) \exp(i(k_{x,j}x + k_y y)). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Ограничимся в (1.28) конечным числом членов разложения при $-N \leq j \leq N$, $-N \leq l \leq N$ и получим следующее выражение:

$$[\varepsilon_a(x)E_b(x)] = \llbracket \varepsilon_a(x) \rrbracket \mathbf{S}_b = \llbracket \varepsilon_a(x) \rrbracket [E_b(x)], \quad (1.29)$$

где квадратные скобки обозначают векторы, составленные из Фурье-коэффициентов разложения функций $\varepsilon_a(x)E_b(x)$ и $E_b(x)$, а $\llbracket \varepsilon(x) \rrbracket$ — теплицева матрица Фурье-коэффициентов, имеющая следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} e_0 & e_{-1} & e_{-2} & \cdots & \cdots & e_{-2N} \\ e_1 & e_0 & e_{-1} & e_{-2} & \ddots & e_{1-2N} \\ e_2 & e_1 & e_0 & e_{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & e_2 & e_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & e_{-1} \\ e_{2N} & e_{2N-1} & \cdots & \cdots & e_1 & e_0 \end{bmatrix}. \quad (1.30)$$

Подставляя разложения (1.27) в систему (1.26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых Фурье-гармониках, получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{S}_z - \frac{d\mathbf{S}_y}{dz} = k_0 (\mathbf{M}_{1,1} \mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{1,3} \mathbf{U}_z), \\ \frac{d\mathbf{S}_x}{dz} - ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{S}_z = k_0 (\mathbf{M}_{2,1} \mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{2,2} \mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{2,3} \mathbf{U}_z), \\ ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{S}_y - ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{S}_x = k_0 (\mathbf{M}_{3,1} \mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{3,2} \mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{3,3} \mathbf{U}_z), \\ ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{U}_z - \frac{d\mathbf{U}_y}{dz} = k_0 (\mathbf{E}_{1,1} \mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{1,2} \mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{1,3} \mathbf{S}_z), \\ \frac{d\mathbf{U}_x}{dz} - ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{U}_z = k_0 (\mathbf{E}_{2,1} \mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{2,2} \mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{2,3} \mathbf{S}_z), \\ ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{U}_y - ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{U}_x = k_0 (\mathbf{E}_{3,1} \mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{3,2} \mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{3,3} \mathbf{S}_z), \end{array} \right. \quad (1.31)$$

где $\mathbf{K}_x = \text{diag}_j \frac{k_{x,j}}{k_0}$, $\mathbf{K}_y = \text{diag}_j \frac{k_y}{k_0}$ — диагональные матрицы, $\mathbf{E}_{i,j} = \llbracket \varepsilon_{i,j} \rrbracket$ и $\mathbf{M}_{i,j} = \llbracket \mu_{i,j} \rrbracket$ — теплицевы матрицы вида (1.30), составленные из коэффициентов разложения в ряд Фурье функций $\varepsilon_{i,j}(x)$ и $\mu_{i,j}(x)$.

Проведем замену переменных $z' = k_0 z$ и преобразуем систему (1.31):

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{d\mathbf{S}_y}{dz'} = \mathbf{M}_{1,1}\mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{1,2}\mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{1,3}\mathbf{U}_z - i\mathbf{K}_y\mathbf{S}_z, \\ -\frac{d\mathbf{S}_x}{dz'} = -\mathbf{M}_{2,1}\mathbf{U}_x - \mathbf{M}_{2,2}\mathbf{U}_y - \mathbf{M}_{2,3}\mathbf{U}_z - i\mathbf{K}_x\mathbf{S}_z, \\ -\frac{d\mathbf{U}_y}{dz'} = \mathbf{E}_{1,1}\mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{1,2}\mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{1,3}\mathbf{S}_z - i\mathbf{K}_y\mathbf{U}_z, \\ -\frac{d\mathbf{U}_x}{dz'} = -\mathbf{E}_{2,1}\mathbf{S}_x - \mathbf{E}_{2,2}\mathbf{S}_y - \mathbf{E}_{2,3}\mathbf{S}_z - i\mathbf{K}_x\mathbf{U}_z, \\ \mathbf{E}_{3,3}\mathbf{S}_z = i\mathbf{K}_x\mathbf{U}_y - i\mathbf{K}_y\mathbf{U}_x - \mathbf{E}_{3,1}\mathbf{S}_x - \mathbf{E}_{3,2}\mathbf{S}_y, \\ \mathbf{M}_{3,3}\mathbf{U}_z = i\mathbf{K}_x\mathbf{S}_y - i\mathbf{K}_y\mathbf{S}_x - \mathbf{M}_{3,1}\mathbf{U}_x - \mathbf{M}_{3,2}\mathbf{U}_y. \end{array} \right. \quad (1.32)$$

Перепишем первые четыре уравнения системы в матричном виде:

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix} = \mathbf{Y} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -i\mathbf{K}_y & \mathbf{M}_{1,3} \\ -i\mathbf{K}_x & -\mathbf{M}_{2,3} \\ \mathbf{E}_{1,3} & -i\mathbf{K}_y \\ -\mathbf{E}_{2,3} & -i\mathbf{K}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_z \\ \mathbf{U}_z \end{bmatrix}, \quad (1.33)$$

где

$$\mathbf{Y} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{1,2} & \mathbf{M}_{1,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{M}_{2,2} & -\mathbf{M}_{2,1} \\ \mathbf{E}_{1,2} & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_{2,2} & -\mathbf{E}_{2,1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Выразим из последних двух уравнений (1.32) \mathbf{S}_z и \mathbf{U}_z и подставим полученные выражения в (1.33). В результате получим систему линейных дифференциальных уравнений относительно x - и y -фурье-компонент полей:

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix}, \quad (1.35)$$

где

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y} - \begin{bmatrix} i\mathbf{K}_y & -\mathbf{M}_{1,3} \\ i\mathbf{K}_x & \mathbf{M}_{2,3} \\ -\mathbf{E}_{1,3} & i\mathbf{K}_y \\ \mathbf{E}_{2,3} & i\mathbf{K}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3,3}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{3,3}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{3,2} & \mathbf{E}_{3,1} & -i\mathbf{K}_x & i\mathbf{K}_y \\ -i\mathbf{K}_x & i\mathbf{K}_y & \mathbf{M}_{3,2} & \mathbf{M}_{3,1} \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Таким образом, мы получили систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для векторов \mathbf{S}_x , \mathbf{S}_y , \mathbf{U}_x , \mathbf{U}_y . Отметим, что матрица \mathbf{A} имеет размерность $4(2N + 1) \times 4(2N + 1)$.

Корректные правила Фурье-разложения произведения функций. Вывод системы дифференциальных уравнений (1.35) был основан на представлении в формуле (1.26) компонент электромагнитных полей и компонент тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей в виде отрезков рядов Фурье. Представление рядами Фурье произведений функций в (1.26) имеет свои особенности. Используемые формулы (1.28)–(1.30) имеют ограниченную область применения.

Рассмотрим две периодические функции

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_m f_m \exp\left(2\pi i \cdot m \frac{x}{d}\right), \\ g(x) &= \sum_m g_m \exp\left(2\pi i \cdot m \frac{x}{d}\right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

и разложение в ряд Фурье их произведения:

$$h(x) = f(x)g(x) = \sum_m h_m \exp\left(2\pi i \cdot m \frac{x}{d}\right). \quad (1.38)$$

В качестве коэффициентов Фурье произведения стандартно используются величины

$$h_j = \sum_{m=-N}^N f_{j-m} g_m, \quad (1.39)$$

получаемые при прямом перемножении рядов (1.37), (1.38). Уравнение (1.39) для вычисления коэффициентов Фурье называется правилом Лорана. В матричных обозначениях (1.39) может быть представлено в виде [5]:

$$[h] = [f] [g], \quad (1.40)$$

где, как и в (1.29), квадратные скобки обозначают векторы, составленные из Фурье-коэффициентов разложения функций, а $[f]$ — теплицеву матрицу Фурье-коэффициентов.

Как было показано в работах [5, 6], применение формулы (1.40) является корректным, если не существует значений x , для которых функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно терпят разрыв, но функция $h(x)$ является непрерывной. Использование правила Лорана (1.40) в этом случае приводит к ухудшению сходимости ряда Фурье в точках разрыва.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ одновременно терпят разрыв, но функция $h(x) = f(x)g(x)$ является непрерывной, то корректным является использование так называемого обратного правила Лорана [5]:

$$[h] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ f \end{bmatrix} \right]^{-1} [g]. \quad (1.41)$$

В произведениях $\mu_{i,1}(x) \cdot H_x(x, y, z)$ и $\varepsilon_{i,1}(x) \cdot E_x(x, y, z)$ в (1.26) обе раскладываемые функции имеют разрывы в одних и тех же точках x , соответствующих вертикальным границам раздела сред в слоях. Соответственно, использование правила Лорана (1.28)–(1.30) при записи (1.31) является

ошибочным. Ошибки в использовании правила Лорана являются существенными при работе с дифракционными решетками из проводящих материалов. В частности, ошибочное использование правила Лорана приводит к медленной сходимости решения для бинарных металлических решеток для случая ТМ-поляризации [5–10]. Под сходимостью в данном случае понимается стабилизация результатов расчета амплитуд дифракционных порядков с ростом числа фурье-гармоник N в представлении компонент поля (1.27).

Непрерывными компонентами на вертикальных границах раздела сред являются тангенциальные компоненты E_y , E_z , H_y , H_z и нормальные компоненты электрического смещения и магнитной индукции D_x , B_x . Выразим разрывные компоненты E_x , H_x через непрерывные компоненты поля,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{\varepsilon_{11}} D_x - \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} E_y - \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} E_z, \\ H_x &= \frac{1}{\mu_{11}} B_x - \frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} H_y - \frac{\mu_{13}}{\mu_{11}} H_z, \end{aligned} \quad (1.42)$$

и подставим в уравнения Максвелла (1.26). В результате получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= ik_0 B_x, \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= ik_0 \left(\frac{\mu_{2,1}}{\mu_{1,1}} B_x + \left(\mu_{2,2} - \mu_{2,1} \frac{\mu_{1,2}}{\mu_{1,1}} \right) H_y + \left(\mu_{2,3} - \mu_{2,1} \frac{\mu_{1,3}}{\mu_{1,1}} \right) H_z \right), \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= ik_0 \left(\frac{\mu_{3,1}}{\mu_{1,1}} B_x + \left(\mu_{3,2} - \mu_{3,1} \frac{\mu_{1,2}}{\mu_{1,1}} \right) H_y + \left(\mu_{3,3} - \mu_{3,1} \frac{\mu_{1,3}}{\mu_{1,1}} \right) H_z \right), \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= -ik_0 D_x, \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= -ik_0 \left(\frac{\varepsilon_{2,1}}{\varepsilon_{1,1}} D_x + \left(\varepsilon_{2,2} - \varepsilon_{2,1} \frac{\varepsilon_{1,2}}{\varepsilon_{1,1}} \right) E_y + \left(\varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,1} \frac{\varepsilon_{1,3}}{\varepsilon_{1,1}} \right) E_z \right), \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -ik_0 \left(\frac{\varepsilon_{3,1}}{\varepsilon_{1,1}} D_x + \left(\varepsilon_{3,2} - \varepsilon_{3,1} \frac{\varepsilon_{1,2}}{\varepsilon_{1,1}} \right) E_y + \left(\varepsilon_{3,3} - \varepsilon_{3,1} \frac{\varepsilon_{1,3}}{\varepsilon_{1,1}} \right) E_z \right). \end{aligned} \right. \quad (1.43)$$

Уравнения (1.43) не содержат произведений функций, одновременно терпящих разрыв. Следовательно, при переходе в пространственно-частотную область можно использовать прямое правило Лорана (1.29), (1.30). Согласно (1.42), векторы коэффициентов Фурье функций D_x , B_x имеют вид

$$\begin{aligned} [D_x] &= \left[\left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right] \right]^{-1} \left([E_x] + \left[\left[\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \right] \right] [E_y] + \left[\left[\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \right] \right] [E_z] \right), \\ [B_x] &= \left[\left[\frac{1}{\mu_{11}} \right] \right]^{-1} \left([H_x] + \left[\left[\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} \right] \right] [H_y] + \left[\left[\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}} \right] \right] [H_z] \right). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Выполняя в (1.43) переход в пространственно-частотную область и проводя преобразования, также получим систему дифференциальных уравнений вида

(1.35)–(1.34), где матрицы $\mathbf{M}_{i,j}$ и $\mathbf{E}_{i,j}$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{1,1} &= \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1}, \quad \mathbf{M}_{1,2} = \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} \right], \quad \mathbf{M}_{1,3} = \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}} \right], \\
 \mathbf{M}_{2,1} &= \left[\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} \right] \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1}, \\
 \mathbf{M}_{2,2} &= \left[\mu_{22} - \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{\mu_{11}} \right] + \left[\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} \right] \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} \right], \\
 \mathbf{M}_{2,3} &= \left[\mu_{23} - \frac{\mu_{13}\mu_{21}}{\mu_{11}} \right] + \left[\frac{\mu_{21}}{\mu_{11}} \right] \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}} \right], \\
 \mathbf{M}_{3,1} &= \left[\frac{\mu_{31}}{\mu_{11}} \right] \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1}, \\
 \mathbf{M}_{3,2} &= \left[\mu_{32} - \frac{\mu_{31}\mu_{12}}{\mu_{11}} \right] + \left[\frac{\mu_{31}}{\mu_{11}} \right] \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\mu_{12}}{\mu_{11}} \right], \\
 \mathbf{M}_{3,3} &= \left[\mu_{33} - \frac{\mu_{31}\mu_{13}}{\mu_{11}} \right] + \left[\frac{\mu_{31}}{\mu_{11}} \right] \left[\frac{1}{\mu_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\mu_{13}}{\mu_{11}} \right], \\
 \mathbf{E}_{1,1} &= \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1}, \quad \mathbf{E}_{1,2} = \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \right], \quad \mathbf{E}_{1,3} = \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \right], \\
 \mathbf{E}_{2,1} &= \left[\frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1}, \\
 \mathbf{E}_{2,2} &= \left[\varepsilon_{22} - \frac{\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}} \right] + \left[\frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \right], \\
 \mathbf{E}_{2,3} &= \left[\varepsilon_{23} - \frac{\varepsilon_{13}\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}} \right] + \left[\frac{\varepsilon_{21}}{\varepsilon_{11}} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \right], \\
 \mathbf{E}_{3,1} &= \left[\frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1}, \\
 \mathbf{E}_{3,2} &= \left[\varepsilon_{32} - \frac{\varepsilon_{31}\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \right] + \left[\frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11}} \right], \\
 \mathbf{E}_{3,3} &= \left[\varepsilon_{33} - \frac{\varepsilon_{31}\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \right] + \left[\frac{\varepsilon_{31}}{\varepsilon_{11}} \right] \left[\frac{1}{\varepsilon_{11}} \right]^{-1} \left[\frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{11}} \right].
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

В дальнейшем систему дифференциальных уравнений (1.35) с матрицами $\mathbf{M}_{i,j}$, $\mathbf{E}_{i,j}$ в виде (1.45) будем называть системой, полученной с использованием корректных правил фурье-разложений для произведения функций.

Вид матрицы системы при различных тензорах диэлектрической проницаемости. Рассмотрим некоторые частные виды тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей и соответствующие им матрицы системы дифференциальных уравнений (1.35)–(1.34). Системы дифференциальных уравнений приведем для случая корректных правил фурье-разложений.

Рассмотрим изотропный материал. Для изотропного материала $\mu = 1$ и ε — скаляры. В этом случае матрицы $\mathbf{E}_{i,j}$, $\mathbf{M}_{i,j}$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{1,1} &= \mathbf{E}^* = \left[\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \right]^{-1}, \quad \mathbf{E}_{2,2} = \mathbf{E}_{3,3} = \mathbf{E} = [\varepsilon], \\ \mathbf{E}_{1,2} &= \mathbf{E}_{1,3} = \mathbf{E}_{2,1} = \mathbf{E}_{2,3} = \mathbf{E}_{3,1} = \mathbf{E}_{3,2} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{1,1} &= \mathbf{M}_{2,2} = \mathbf{M}_{3,3} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{M}_{1,2} &= \mathbf{M}_{1,3} = \mathbf{M}_{2,1} = \mathbf{M}_{2,3} = \mathbf{M}_{3,1} = \mathbf{M}_{3,2} = \mathbf{0},\end{aligned}\tag{1.46}$$

где \mathbf{I} — единичная матрица размерностью $(2N + 1) \times (2N + 1)$. Подставляя (1.46) в (1.36)–(1.34), получим матрицу системы дифференциальных уравнений в виде

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{I} - \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & -\mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_y \mathbf{K}_x & \mathbf{E}^* - \mathbf{K}_y^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E} & -\mathbf{K}_x \mathbf{K}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.\tag{1.47}$$

Рассмотрим случай плоского падения, когда $k_y = 0$ ($\varphi = 0$) в (1.22) и вектор направления падающей волны лежит в плоскости xOz . При этом $\mathbf{K}_y = \mathbf{0}$ в (1.47) и система дифференциальных уравнений (1.35) распадается на две независимые системы:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^{\text{TE}} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\text{TE}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \\ \frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{S}_x \end{bmatrix} &= \mathbf{A}^{\text{TM}} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{S}_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{\text{TM}} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}^* \\ \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{1.48}$$

Полученный результат позволяет в случае плоского падения свести решение задачи дифракции к двум независимым задачам дифракции волн с ТМ-поляризацией и ТЕ-поляризацией.

В настоящее время большой интерес вызывают структуры, содержащие слои магнитного материала. В таких структурах оптические свойства материалов могут быть изменены с помощью внешнего постоянного магнитного поля. Это позволяет эффективно управлять амплитудой и фазой дифракционных порядков с помощью внешнего магнитного поля. Для магнитных материалов диэлектрическая проницаемость задается тензором [16, 17]:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & ig \cos \theta_M & -ig \sin \theta_M \sin \varphi_M \\ -ig \cos \theta_M & \varepsilon & ig \sin \theta_M \cos \varphi_M \\ ig \sin \theta_M \sin \varphi_M & -ig \sin \theta_M \cos \varphi_M & \varepsilon \end{bmatrix},\tag{1.49}$$

где ε — главная диэлектрическая проницаемость среды, g — модуль вектора гирации среды, пропорционального намагниченности [16, 17], θ_M и φ_M — сферические координаты, описывающие направление вектора намагниченности. В оптическом диапазоне $\mu = 1$.

Рассмотрим три базовых случая, соответствующих направлению вектора намагниченности по трем координатным осям.

При *полярной геометрии намагниченности* (вектор намагниченности перпендикулярен плоскости слоев структуры и направлен по оси Oz) $\theta_M = 0$ и тензор (1.49) принимает вид

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

В этом случае

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{I} - \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & -\mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ i\mathbf{E}^* \mathbf{H} + \mathbf{K}_y \mathbf{K}_x & \mathbf{E}^* - \mathbf{K}_y^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E}_2 & i\mathbf{H} \mathbf{E}^* - \mathbf{K}_x \mathbf{K}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.51)$$

где

$$\mathbf{E}^* = \left[\left[\frac{1}{\varepsilon} \right] \right]^{-1}, \quad \mathbf{E} = \llbracket \varepsilon \rrbracket, \quad \mathbf{H} = \left[\left[\frac{g}{\varepsilon} \right] \right], \quad \mathbf{E}_2 = \left[\left[\varepsilon - \frac{g^2}{\varepsilon} \right] \right] + \mathbf{H} \mathbf{E}^* \mathbf{H}.$$

При *меридиональной геометрии намагниченности* (вектор намагниченности параллелен плоскости слоев и направлен по оси Ox) $\theta_M = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_M = 0$ и тензор (1.49) принимает вид

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & ig \\ 0 & -ig & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (1.52)$$

Матрица системы принимает вид

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{I} - \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & -\mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_y \mathbf{K}_x & \mathbf{E}^* - \mathbf{K}_y^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{G} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E} & -\mathbf{K}_x \mathbf{K}_y & \mathbf{G} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x & -\mathbf{G} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \end{bmatrix}, \quad (1.53)$$

где $\mathbf{G} = \llbracket g \rrbracket$.

При *экваториальной геометрии намагниченности* (вектор намагниченности параллелен плоскости слоев и направлен по оси Oy) $\theta_M = \varphi_M = \frac{\pi}{2}$. В этом случае из (1.49) получим

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & ig \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ -ig & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (1.54)$$

Для тензора (1.54) матрица системы принимает вид

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K}_y \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}^* & \mathbf{K}_y \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{I} - \mathbf{K}_y \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}^* & \mathbf{K}_x \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & -\mathbf{K}_x \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_y \mathbf{K}_x \mathbf{E}^* - \mathbf{K}_y^2 - \mathbf{E}^* \mathbf{H} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{H} \mathbf{E}^* & -\mathbf{E}^* \mathbf{H} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{E}^* \mathbf{H} \mathbf{E}_2^{-1} \mathbf{K}_y & \\ \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E} & -\mathbf{K}_x \mathbf{K}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.55)$$

1.1.2.4. Представление поля внутри слоя. Для непосредственной записи представления поля в слое рассмотрим собственное разложение матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}^{-1}, \quad (1.56)$$

где $\mathbf{\Lambda} = \text{diag } \lambda_i$ — диагональная матрица собственных значений матрицы \mathbf{A} , а \mathbf{W} — матрица собственных векторов. Тогда решение системы дифференциальных уравнений (1.35) можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix} = \mathbf{W} \exp(\mathbf{\Lambda} z') \mathbf{C}' = \mathbf{W} \exp(\mathbf{\Lambda} k_0 z) \mathbf{C}' = \sum_i c'_i \mathbf{w}_i \exp(\lambda_i k_0 z). \quad (1.57)$$

Разобьем последнюю сумму на две, в зависимости от знака действительной части λ_i , и запишем выражение в матричных обозначениях:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y \\ \mathbf{S}_x \\ \mathbf{U}_y \\ \mathbf{U}_x \end{bmatrix} &= \sum_i \mathbf{w}_i \exp(\lambda_i k_0 z) = \sum_{i: \text{Re} \lambda_i < 0} \mathbf{w}_i \exp(\lambda_i k_0 (z - z_l)) + \\ &+ \sum_{i: \text{Re} \lambda_i > 0} \mathbf{w}_i \exp(\lambda_i k_0 (z - z_{l-1})) = \\ &= \mathbf{W}^{(-)} \exp(\mathbf{\Lambda}^{(-)} k_0 (z - z_l)) \mathbf{C}^{(-)} + \\ &+ \mathbf{W}^{(+)} \exp(\mathbf{\Lambda}^{(+)} k_0 (z - z_{l-1})) \mathbf{C}^{(+)}, \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $\mathbf{\Lambda}^{(+)}$ и $\mathbf{\Lambda}^{(-)}$ — диагональные матрицы собственных значений, действительные части которых положительны и отрицательны, соответственно, $\mathbf{W}^{(+)}$ и $\mathbf{W}^{(-)}$ — соответствующие матрицы собственных векторов, $\mathbf{C}^{(-)}$, $\mathbf{C}^{(+)}$ — векторы из произвольных постоянных. Представление (1.58) ориентировано на численный расчет. Показатели экспонент в (1.58) всегда имеют отрицательную действительную часть. Это гарантирует отсутствие численных переполнений.

Процедуру вычисления собственных векторов и собственных значений в некоторых случаях можно значительно ускорить при учете специального

вида матрицы \mathbf{A} [4]. В частности, матрица \mathbf{A} в (1.47), (1.48), (1.51) имеет следующую блочную структуру:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.59)$$

Запишем для \mathbf{A} матрицы собственных векторов и собственных значений в виде

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_{22} \end{bmatrix}. \quad (1.60)$$

Поскольку $\mathbf{A} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}$, то

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda}_{22} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{12}\mathbf{W}_{21} & \mathbf{A}_{12}\mathbf{W}_{22} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{11} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11}\mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{W}_{12}\mathbf{\Lambda}_{22} \\ \mathbf{W}_{21}\mathbf{\Lambda}_{11} & \mathbf{W}_{22}\mathbf{\Lambda}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

и будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{11} &= \mathbf{A}_{12}\mathbf{W}_{21}\mathbf{\Lambda}_{11} = \mathbf{W}_{11}\mathbf{\Lambda}_{11}\mathbf{\Lambda}_{11}, \\ \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{12} &= \mathbf{A}_{12}\mathbf{W}_{22}\mathbf{\Lambda}_{22} = \mathbf{W}_{12}\mathbf{\Lambda}_{22}\mathbf{\Lambda}_{22}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Введем матрицу $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{21}$ и представим (1.61) в виде

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{11}\mathbf{\Lambda}_{11}^2, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{W}_{12} = \mathbf{W}_{12}\mathbf{\Lambda}_{22}^2. \quad (1.62)$$

Согласно (1.62), $(\mathbf{W}_{11}, \mathbf{\Lambda}' = \mathbf{\Lambda}_{11}^2)$, $(\mathbf{W}_{12}, \mathbf{\Lambda}_{22}^2)$ — матрицы собственных векторов и диагональные матрицы собственных значений одной и той же матрицы \mathbf{B} . Поэтому

$$\mathbf{W}_{11} = \mathbf{W}_{12}, \quad \mathbf{\Lambda}_{22} = -\mathbf{\Lambda}_{11} \text{ и } \mathbf{W}_{21} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{11}\mathbf{\Lambda}_{11}^{-1}, \quad \mathbf{W}_{22} = -\mathbf{W}_{21}. \quad (1.63)$$

Соотношения (1.63) определяют собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{A} через собственные значения и собственные векторы матрицы \mathbf{B} в два раза меньшего размера:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{11} \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{11}\sqrt{\mathbf{\Lambda}'}^{-1} & -\mathbf{A}_{21}\mathbf{W}_{11}\sqrt{\mathbf{\Lambda}'}^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{\Lambda}'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\sqrt{\mathbf{\Lambda}'} \end{bmatrix}. \quad (1.64)$$

В работе [4] отмечено, что уменьшение размерности задачи на собственные значения в 2 раза эквивалентно сведению системы (1.35) из $4(2N + 1)$ дифференциальных уравнений первого порядка к системе $2(2N + 1)$ дифференциальных уравнений второго порядка.

1.1.2.5. Условия для электромагнитного поля на границах слоев.

Выше получено общее представление поля в слое. Для получения решения, удовлетворяющего уравнениям Максвелла, необходимо приравнять тангенциальные компоненты полей на границах слоев. Приравнивание тангенциальных компонент полей эквивалентно приравниванию функций (1.58), имеющих смысл коэффициентов Фурье при каждом фиксированном z . Запишем пред-

варительно решения (1.58) на верхних и нижних границах всех слоев. Для удобства будем считать, что матрица собственных векторов \mathbf{W} имеет вид

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}^{(-)} & \mathbf{W}^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (1.65)$$

Кроме того, введем вектор неизвестных постоянных \mathbf{C} следующим образом:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{(-)} \\ \mathbf{C}^{(+)} \end{bmatrix}. \quad (1.66)$$

С учетом введенных обозначений решение (1.58) на верхней и нижней границах слоя имеет вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_y(z_{l-1}) \\ \mathbf{S}_x(z_{l-1}) \\ \mathbf{U}_y(z_{l-1}) \\ \mathbf{U}_x(z_{l-1}) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{(-)} \mathbf{X}^{(-)} \mathbf{C}^{(-)} + \mathbf{W}^{(+)} \mathbf{C}^{(+)} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{X}^{(-)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C} = \mathbf{N} \mathbf{C}, \quad (1.67)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_y(z_l) \\ \mathbf{S}_x(z_l) \\ \mathbf{U}_y(z_l) \\ \mathbf{U}_x(z_l) \end{bmatrix} = \mathbf{W}^{(-)} \mathbf{C}^{(-)} + \mathbf{W}^{(+)} \mathbf{X}^{(+)} \mathbf{C}^{(+)} = \mathbf{W} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}^{(+)} \end{bmatrix} \mathbf{C} = \mathbf{M} \mathbf{C}, \quad (1.68)$$

где

$$\mathbf{X}^{(+)} = \exp\left(\mathbf{\Lambda}^{(+)} k_0 (z_l - z_{l-1})\right), \quad \mathbf{X}^{(-)} = \exp\left(-\mathbf{\Lambda}^{(-)} k_0 (z_l - z_{l-1})\right). \quad (1.69)$$

Приравнивая тангенциальные компоненты на границе раздела соседних слоев, получаем уравнения

$$\mathbf{M}_{l-1} \mathbf{C}_{l-1} = \mathbf{N}_l \mathbf{C}_l, \quad l = 2, \dots, L, \quad (1.70)$$

где индекс $l = 2$ соответствует условию на нижней границе верхнего слоя, индекс $l = L$ — на верхней границе нижнего слоя.

Соотношения (1.70) необходимо дополнить условиями равенства тангенциальных компонент поля над структурой (1.20) и на верхней границе 1-го слоя, а также поля под структурой (1.21) и на нижней границе L -го слоя. С учетом того, что в области слоев компоненты поля представлены отрезками рядов Фурье размерностью $2N + 1$, в представлениях поля над и под решеткой (1.20)–(1.22) также следует взять $2N + 1$ волн при $-N \leq i \leq N$.

Добавив указанные соотношения для верхней и нижней границ дифракционной структуры, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{D} + \mathbf{P}^{(U)} \mathbf{R} = \mathbf{N}_1 \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{M}_{l-1} \mathbf{C}_{l-1} = \mathbf{N}_l \mathbf{C}_l, \quad l = 2, \dots, L, \\ \mathbf{M}_L \mathbf{C}_L = \mathbf{P}^{(D)} \mathbf{T}, \end{cases} \quad (1.71)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{T} — векторы комплексных амплитуд отраженных и прошедших порядков, соответственно. Указанные векторы имеют вид

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_E \\ \mathbf{R}_H \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_E \\ \mathbf{T}_H \end{bmatrix}, \quad (1.72)$$

\mathbf{R}_E и \mathbf{T}_E — векторы комплексных амплитуд E -волн, \mathbf{R}_H и \mathbf{T}_H — векторы комплексных амплитуд H -волн.

Вектор \mathbf{D} в (1.71) представляет падающую волну и имеет вид (см. (1.13) при $\theta \rightarrow \pi - \theta$)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \\ \cos \theta \cos \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \\ -in_U \cos \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \\ in_U \sin \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \end{bmatrix} \cos \psi + \begin{bmatrix} \cos \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \\ -\sin \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \\ in_U \cos \theta \sin \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \\ in_U \cos \theta \cos \varphi \cdot \boldsymbol{\delta}_i \end{bmatrix} \sin \psi, \quad (1.73)$$

где $\boldsymbol{\delta}_i$ — вектор-столбец, в котором лишь один элемент, стоящий в середине, отличен от нуля и равен единице. Вектор-столбец $\boldsymbol{\delta}_i$ имеет размерность $2N + 1$, вектор \mathbf{D} — размерность $4(2N + 1)$.

Матрицы $\mathbf{P}^{(U)}$ и $\mathbf{P}^{(D)}$ в (1.71) соответствуют отраженным и прошедшим порядкам, соответственно, и имеют вид

$$\mathbf{P}^{(p)} = \begin{bmatrix} -\cos \Theta^{(p)} \sin \Phi & \cos \Phi \\ -\cos \Theta^{(p)} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ -in_p \cos \Phi & -in_p \cos \Theta^{(p)} \sin \Phi \\ in_p \sin \Phi & -in_p \cos \Theta^{(p)} \cos \Phi \end{bmatrix}, \quad p = U, D, \quad (1.74)$$

где Φ , $\Theta^{(p)}$ — диагональные матрицы углов, определяющих направления рассеянных порядков дифракции. Они удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\sin \Phi = \text{diag}_i \frac{k_y}{\sqrt{k_{x,i}^2 + k_y^2}}, \quad \cos \Phi = \text{diag}_i \frac{k_{x,i}}{\sqrt{k_{x,i}^2 + k_y^2}}, \quad (1.75)$$

$$\cos \Theta^{(U)} = \text{diag}_i \frac{k_{z,U,i}}{k_0 n_U}, \quad \cos \Theta^{(D)} = \text{diag}_i \frac{-k_{z,D,i}}{k_0 n_D}. \quad (1.76)$$

Выражения (1.73)–(1.74) непосредственно следуют из общих формул (1.12), (1.13) для плоской волны при учете вида констант распространения порядков (1.22).

Согласно (1.71), решение задачи дифракции сводится к решению системы линейных уравнений. Последовательное выражение коэффициентов в \mathbf{C}_{l-1} в слое с индексом $(l - 1)$ через коэффициенты \mathbf{C}_{l-1} в l -м слое позволяет свести систему (1.71) к системе уравнений относительно коэффициентов \mathbf{R} и \mathbf{T} . Действительно, из двух последних уравнений в (1.71) получим

$$\mathbf{M}_{L-1} \mathbf{C}_{L-1} = \mathbf{N}_L \mathbf{M}_L^{-1} \mathbf{P}^{(D)} \mathbf{T}. \quad (1.77)$$

Подставляя (1.77) в уравнение с индексом $l = L - 1$ в (1.71), получим

$$\mathbf{M}_{L-2}\mathbf{C}_{L-2} = \mathbf{N}_{L-1}\mathbf{M}_{L-1}^{-1}\mathbf{N}_L\mathbf{M}_L^{-1}\mathbf{P}^{(D)}\mathbf{T}. \quad (1.78)$$

Продолжая указанный процесс до уравнения с индексом $l = 2$, будем иметь

$$\mathbf{M}_1\mathbf{C}_1 = \left(\prod_{l=2}^L \mathbf{N}_l\mathbf{M}_l^{-1} \right) \mathbf{P}^{(D)}\mathbf{T}. \quad (1.79)$$

Окончательно, подставляя (1.79) в первое уравнение системы (1.71), получим искомую систему линейных уравнений относительно коэффициентов \mathbf{R} и \mathbf{T} :

$$\mathbf{D} + \mathbf{P}^{(U)}\mathbf{R} = \left(\prod_{l=1}^L \mathbf{N}_l\mathbf{M}_l^{-1} \right) \mathbf{P}^{(D)}\mathbf{T}. \quad (1.80)$$

Отметим, что запись системы данным виде позволяет рассчитать векторы \mathbf{R} и \mathbf{T} , однако расчет непосредственно по формуле (1.80) может привести к численной неустойчивости задачи [3]. Существует несколько численно устойчивых подходов [3, 18] для вычисления векторов \mathbf{R} и \mathbf{T} . Рассмотрим так называемый метод матрицы рассеяния [18].

1.1.2.6. Алгоритм матрицы рассеяния. Рассмотрим разложение Рэлея (1.20), (1.21) поля над структурой, однако вместо одной падающей волны (соответствующей нулевому порядку дифракции) рассмотрим набор падающих волн (соответствующих порядкам $-N, \dots, N$). Тогда константы распространения можно описать следующими выражениями:

$$k_{x,m} = k_{x,0} + k_0 \cdot m \frac{\lambda}{d}, \quad m = -N, \dots, N; \quad (1.81)$$

$$k_{z,m}^R = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_U - k_{x,m}^2}; \quad (1.82)$$

$$k_{z,m}^I = -\sqrt{k_0^2 \varepsilon_U - k_{x,m}^2}, \quad (1.83)$$

где $k_{z,m}^R$ — константы распространения, соответствующие отраженным порядкам; $k_{z,m}^I$ — константы распространения для волн, падающих на структуру сверху.

Также рассмотрим набор волн, падающих на структуру со стороны подложки, и запишем аналогичные соотношения для порядков под структурой:

$$k_{z,m}^T = -\sqrt{k_0^2 \varepsilon_D - k_{x,m}^2}; \quad (1.84)$$

$$k_{z,m}^J = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_D - k_{x,m}^2}, \quad (1.85)$$

где $k_{z,m}^T$ — константы распространения, соответствующие прошедшим порядкам; $k_{z,m}^J$ — константы распространения для волн, падающих на структуру со стороны подложки.

В рассматриваемом случае, когда наряду с $2N + 1$ отраженными и $2N + 1$ прошедшими порядками дифракции существует также $2N + 1$ падающих сверху и $2N + 1$ падающих снизу волн, вычисление комплексных амплитуд

порядков дифракции заключается в нахождении матрицы \mathbf{S} , удовлетворяющей уравнению

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{J}_{L+1} \end{bmatrix}, \quad (1.86)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{T} — векторы комплексных амплитуд отраженных и прошедших порядков дифракции, а \mathbf{I}_1 и \mathbf{J}_{L+1} — векторы комплексных амплитуд волн, падающих на структуру сверху и снизу, соответственно. Матрица \mathbf{S} в (1.86) называется *матрицей рассеяния*. Матрица рассеяния \mathbf{S} полностью определяется геометрией структуры, оптическими свойствами материалов и параметрами падающего излучения.

Отличие матрицы \mathbf{S} от матрицы системы в полученном ранее выражении (1.80) заключается в том, что теперь необходимо учитывать не одну падающую волну, а набор волн, падающих на структуру как сверху, так и со стороны подложки. Для падающих волн вместо выражения (1.73) нужно использовать следующее выражение при $p = U$:

$$\mathbf{D}^{(p)} = \begin{bmatrix} \cos \Theta^{(p)} \sin \Phi & \cos \Phi \\ \cos \Theta^{(p)} \cos \Phi & -\sin \Phi \\ -in_p \cos \Phi & in_p \cos \Theta^{(p)} \sin \Phi \\ in_p \sin \Phi & in_p \cos \Theta^{(p)} \cos \Phi \end{bmatrix}. \quad (1.87)$$

При $p = D$ выражение (1.87) описывает фурье-коэффициенты тангенциальных компонент полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , соответствующих волнам, падающим на структуру «снизу».

Система (1.71) теперь примет вид

$$\begin{cases} \mathbf{D}^{(U)} \mathbf{I}_1 + \mathbf{P}^{(U)} \mathbf{R} = \mathbf{N}_1 \mathbf{C}_1, \\ \mathbf{M}_{l-1} \mathbf{C}_{l-1} = \mathbf{N}_l \mathbf{C}_l, \quad l = 2, \dots, L, \\ \mathbf{M}_L \mathbf{C}_L = \mathbf{D}^{(D)} \mathbf{J}_{L+1} + \mathbf{P}^{(D)} \mathbf{T}. \end{cases} \quad (1.88)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_l &= \mathbf{X}_{l-1}^{(+)} \mathbf{C}_{l-1}^{(+)}, & \mathbf{J}_l &= \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{C}_l^{(-)}, \\ \mathbf{R}_l &= \mathbf{C}_{l-1}^{(-)}, & \mathbf{T}_l &= \mathbf{C}_l^{(+)}, \end{aligned} \quad (1.89)$$

имеющие смысл комплексных амплитуд падающих и рассеянных порядков в каждом слое (см. рис. 1.2). Кроме того, для записи системы (1.88) в наиболее компактном виде введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0^{(-)} &= \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}, & \mathbf{C}_{L+1}^{(+)} &= \mathbf{T}_{L+1} = \mathbf{T}, \\ \mathbf{X}_0^{(+)} \mathbf{C}_0^{(+)} &= \mathbf{I}_1, & \mathbf{X}_{L+1}^{(-)} \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} &= \mathbf{J}_{L+1}, \\ \mathbf{W}_0^{(-)} &= \mathbf{P}^{(U)}, & \mathbf{W}_{L+1}^{(-)} &= \mathbf{D}^{(D)}, \\ \mathbf{W}_0^{(+)} &= \mathbf{D}^{(U)}, & \mathbf{W}_{L+1}^{(+)} &= \mathbf{P}^{(D)}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

$$\begin{array}{c}
l-1 \quad \nearrow \quad \quad \quad \searrow \\
\mathbf{R}_l \quad \quad \quad \mathbf{I}_l \\
\hline
\Phi_1 = \mathbf{W}_{l-1}^{(-)} \underbrace{\mathbf{C}_{l-1}^{(-)}}_{\mathbf{J}_l} + \mathbf{W}_{l-1}^{(+)} \underbrace{\mathbf{X}_{l-1}^{(+)} \mathbf{C}_{l-1}^{(+)}}_{\mathbf{T}_l} \\
\hline
\Phi_2 = \mathbf{W}_l^{(-)} \underbrace{\mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{C}_l^{(-)}}_{\mathbf{J}_l} + \mathbf{W}_l^{(+)} \underbrace{\mathbf{C}_l^{(+)}}_{\mathbf{T}_l} \\
\hline
l \quad \nearrow \quad \quad \quad \searrow \\
\mathbf{R}_{l+1} \quad \quad \quad \mathbf{I}_{l+1} \\
\hline
\Phi_3 = \mathbf{W}_l^{(-)} \underbrace{\mathbf{C}_l^{(-)}}_{\mathbf{J}_{l+1}} + \mathbf{W}_l^{(+)} \underbrace{\mathbf{X}_l^{(+)} \mathbf{C}_l^{(+)}}_{\mathbf{T}_{l+1}} \\
\hline
\Phi_4 = \mathbf{W}_{l+1}^{(-)} \underbrace{\mathbf{X}_{l+1}^{(-)} \mathbf{C}_{l+1}^{(-)}}_{\mathbf{J}_{l+1}} + \mathbf{W}_{l+1}^{(+)} \underbrace{\mathbf{C}_{l+1}^{(+)}}_{\mathbf{T}_{l+1}} \\
\hline
l+1 \quad \nearrow \quad \quad \quad \searrow
\end{array}$$

Рис. 1.2. Представления полей на нижней границе границе $l-1$ -го слоя (Φ_1), на верхней (Φ_2) и нижней (Φ_3) границах l -го слоя и верхней границе $l+1$ -го слоя (Φ_4)

Тогда систему (1.88) можно записать как

$$\left\{ \mathbf{W}_{l-1}^{(-)} \mathbf{R}_l + \mathbf{W}_{l-1}^{(+)} \mathbf{I}_l = \mathbf{W}_l^{(-)} \mathbf{J}_l + \mathbf{W}_l^{(+)} \mathbf{T}_l, \quad l = 1, \dots, L+1. \right. \quad (1.91)$$

Рассмотрим численно устойчивый метод нахождения матрицы рассеяния многослойной структуры [18]. Введем обозначение $\mathbf{S}^{(l)}$ для матрицы рассеяния, связывающей фурье-компоненты поля на нижней границе структуры и нижней границе l -го слоя:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1}^{(l)} & \mathbf{S}_{1,2}^{(l)} \\ \mathbf{S}_{2,1}^{(l)} & \mathbf{S}_{2,2}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l+1} \\ \mathbf{J}_{L+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{L+1} \\ \mathbf{R}_{l+1} \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

Также введем матрицу рассеяния $\tilde{\mathbf{S}}^{(l)}$, связывающую фурье-компоненты поля на нижней границе структуры и верхней границе l -го слоя:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l)} & \tilde{\mathbf{S}}_{1,2}^{(l)} \\ \tilde{\mathbf{S}}_{2,1}^{(l)} & \tilde{\mathbf{S}}_{2,2}^{(l)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_l \\ \mathbf{J}_{L+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{L+1} \\ \mathbf{J}_l \end{bmatrix}. \quad (1.93)$$

Рассмотрим метод последовательного построения матрицы рассеяния структуры, начиная от матрицы $\tilde{\mathbf{S}}^{(L+1)} = \mathbf{I}$, где \mathbf{I} — единичная матрица. Будем последовательно находить матрицы $\mathbf{S}^{(l)}$ и $\tilde{\mathbf{S}}^{(l)}$ в следующей последовательности:

$$\mathbf{I} = \tilde{\mathbf{S}}^{(L+1)} \rightarrow \mathbf{S}^{(L)} \rightarrow \tilde{\mathbf{S}}^{(L)} \rightarrow \mathbf{S}^{(L-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \tilde{\mathbf{S}}^{(1)} \rightarrow \mathbf{S}^{(0)} = \mathbf{S}. \quad (1.94)$$

Равенства (1.89) позволяют легко найти матрицу $\tilde{\mathbf{S}}^{(l)}$, зная матрицу $\mathbf{S}^{(l)}$:

$$\tilde{\mathbf{S}}^{(l)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_l^{(-)} \end{bmatrix} \mathbf{S}^{(l)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_l^{(+)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (1.95)$$

Найдем численно-устойчивые формулы для вычисления матрицы $\mathbf{S}^{(l-1)}$ на основе матрицы $\tilde{\mathbf{S}}^{(l)}$. Для этого запишем уравнение системы (1.91) с номером $l+1$ в следующем матричном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_l^{(+)} & -\mathbf{W}_{l+1}^{(-)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l+1} \\ \mathbf{J}_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{l+1}^{(+)} & -\mathbf{W}_l^{(-)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{l+1} \\ \mathbf{R}_{l+1} \end{bmatrix}. \quad (1.96)$$

Введем обозначение $\mathbf{H}^{(l)}$, предварительно переписав выражение (1.96) в следующем виде:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{l+1}^{(+)} & -\mathbf{W}_l^{(-)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_l^{(+)} & -\mathbf{W}_{l+1}^{(-)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^{(l)}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{l+1} \\ \mathbf{J}_{l+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{l+1} \\ \mathbf{R}_{l+1} \end{bmatrix}. \quad (1.97)$$

Матрица $\mathbf{H}^{(l)}$ имеет смысл матрицы рассеяния, связывающей поле на нижней границе l -го слоя и верхней границе $l+1$ -го слоя. На основе выражений (1.92), (1.93), (1.97) можно показать, что матрица $\mathbf{S}^{(l)}$ вычисляется как

$$\mathbf{S}^{(l)} = \mathbf{H}^{(l)} \otimes \tilde{\mathbf{S}}^{(l+1)}, \quad (1.98)$$

где ассоциативная операция « \otimes » вводится следующим образом [18]:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{H}_{1,2} \\ \mathbf{H}_{2,1} & \mathbf{H}_{2,2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1} & \mathbf{S}_{1,2} \\ \mathbf{S}_{2,1} & \mathbf{S}_{2,2} \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{1,1}(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1,2}\mathbf{S}_{2,1})^{-1}\mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{S}_{1,2} + \mathbf{S}_{1,1}\mathbf{H}_{1,2}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{2,1}\mathbf{H}_{1,2})^{-1}\mathbf{S}_{2,2} \\ \mathbf{H}_{2,1} + \mathbf{H}_{2,2}\mathbf{S}_{2,1}(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1,2}\mathbf{S}_{2,1})^{-1}\mathbf{H}_{1,1} & \mathbf{H}_{2,2}(\mathbf{I} - \mathbf{S}_{2,1}\mathbf{H}_{1,2})^{-1}\mathbf{S}_{2,2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Отметим, что в выражениях (1.95), (1.97), (1.99) отсутствует обращение плохо обусловленных матриц, следовательно, приведенный метод позволяет находить матрицу рассеяния структуры \mathbf{S} , избегая проблем с численной устойчивостью.

В рассматриваемом случае, когда на структуру сверху падает одна плоская волна единичной интенсивности, комплексные коэффициенты пропускания \mathbf{T} и отражения \mathbf{R} находятся из выражения (1.86):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} 1 \cdot \delta_i \\ 0 \cdot \delta_i \end{bmatrix}. \quad (1.100)$$

1.1.2.7. Расчет распределения поля. При расчете распределения поля в структуре могут возникать те же проблемы с численной устойчивостью, что и при вычислении комплексных амплитуд порядков дифракции. Для построения распределения поля на основе выражений (1.27), (1.58) необходимо знать значения векторов $\mathbf{C}^{(-)}$, $\mathbf{C}^{(+)}$. Рассмотрим итерационную процедуру для численно-устойчивого вычисления этих векторов [19].

Будем считать, что вектор \mathbf{R} комплексных амплитуд отраженных порядков и матрицы $\mathbf{S}^{(l)}$, $\tilde{\mathbf{S}}^{(l)}$ уже рассчитаны по методу, изложенному в предыдущем разделе.

Построим рекурсивную процедуру для вычисления $\mathbf{C}_l^{(+)}$. Из формулы (1.97) при $l = 0$ получим выражение для $\mathbf{C}_1^{(+)}$:

$$\mathbf{C}_1^{(+)} = \mathbf{T}_1 = \mathbf{H}_{1,1}^{(0)} \mathbf{I}_1 + \mathbf{H}_{1,2}^{(0)} \mathbf{J}_1 = \mathbf{H}_{1,1}^{(0)} \mathbf{I}_1 + \mathbf{H}_{1,2}^{(0)} \left(\mathbf{H}_{2,2}^{(0)} \right)^{-1} \left(\mathbf{R} - \mathbf{H}_{2,1}^{(0)} \mathbf{I}_1 \right). \quad (1.101)$$

Теперь, в предположении что $\mathbf{C}_l^{(+)}$ известно, найдем выражения для $\mathbf{C}_{l+1}^{(+)} = \mathbf{T}_{l+1}$. Из уравнения (1.93), с учетом $\mathbf{J}_{L+1} = 0$, получим

$$\mathbf{T}_{l+1} = \mathbf{C}_{l+1}^{(+)} = \left(\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l+1)} \right)^{-1} \mathbf{T}_{L+1} = \left(\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l+1)} \right)^{-1} \mathbf{T}. \quad (1.102)$$

Запишем матрицу $\mathbf{S}_{1,1}^{(l)}$ из уравнений (1.98), (1.99) в виде

$$\mathbf{S}_{1,1}^{(l)} = \tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l+1)} \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1,2}^{(l)} \tilde{\mathbf{S}}_{2,1}^{(l+1)} \right)^{-1} \mathbf{H}_{1,1}^{(l)}. \quad (1.103)$$

Выразим матрицу $\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l)}$ из формулы (1.95):

$$\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l)} = \mathbf{S}_{1,1}^{(l)} \mathbf{X}_l^{(+)}. \quad (1.104)$$

Выразим из уравнений (1.103) матрицу $\left(\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l+1)} \right)^{-1}$, при этом с использованием уравнения (1.104) исключим матрицу $\mathbf{S}_{1,1}^{(l)}$:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l+1)} \right)^{-1} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1,2}^{(l)} \tilde{\mathbf{S}}_{2,1}^{(l+1)} \right)^{-1} \mathbf{H}_{1,1}^{(l)} \left(\mathbf{S}_{1,1}^{(l)} \right)^{-1} = \\ &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1,2}^{(l)} \tilde{\mathbf{S}}_{2,1}^{(l+1)} \right)^{-1} \mathbf{H}_{1,1}^{(l)} \mathbf{X}_l^{(+)} \left(\tilde{\mathbf{S}}_{1,1}^{(l)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.105)$$

Умножая правую и левую части равенства (1.105) справа на \mathbf{T} , с учетом (1.102), окончательно получим

$$\mathbf{C}_{l+1}^{(+)} = \mathbf{T}_{l+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{H}_{1,2}^{(l)} \tilde{\mathbf{S}}_{2,1}^{(l+1)} \right)^{-1} \mathbf{H}_{1,1}^{(l)} \mathbf{X}_l^{(+)} \mathbf{C}_l^{(+)}. \quad (1.106)$$

Рекуррентное соотношение (1.106) вместе с формулой (1.101) позволяет находить $\mathbf{C}_l^{(+)}$ для всех l . Получим теперь формулу для нахождения $\mathbf{C}_l^{(-)} = \mathbf{R}_{l+1}$. Из формулы (1.92) при $\mathbf{J}_{L+1} = 0$ имеем

$$\mathbf{C}_l^{(-)} = \mathbf{R}_{l+1} = \mathbf{S}_{2,1}^{(l)} \mathbf{I}_{l+1} = \mathbf{S}_{2,1}^{(l)} \mathbf{X}_l^{(+)} \mathbf{C}_l^{(+)}. \quad (1.107)$$

1.1.2.8. Характеристики дифракционных порядков. При анализе поля вдали от дифракционной решетки исследователя, как правило, интересуют не комплексные амплитуды (1.72), а интенсивности отраженных и прошедших распространяющихся порядков дифракции. Распространяющиеся порядки определяются действительными значениями $k_{z,p,m}$ в (1.22). Интенсивности

дифракционных порядков определяют как поток вектора Умова–Пойнтинга через плоскость $z = \text{const}$, нормированный на поток падающей волны [15]. С учетом выражений (1.16), (1.17) интенсивности порядков могут быть найдены из следующих выражений:

$$\mathbf{I}^R = \left| \frac{n_U \operatorname{Re}(\cos \Theta^{(U)})}{n_U \cos \theta} \right| (|\mathbf{R}_E|^2 + |\mathbf{R}_H|^2), \quad (1.108)$$

$$\mathbf{I}^T = \left| \frac{n_D \operatorname{Re}(\cos \Theta^{(D)})}{n_U \cos \theta} \right| (|\mathbf{T}_E|^2 + |\mathbf{T}_H|^2), \quad (1.109)$$

где диагональные матрицы $\cos \Theta^{(U)}$, $\cos \Theta^{(D)}$ определены в (1.76), а возведение в квадрат векторов \mathbf{R}_E , \mathbf{R}_H , \mathbf{T}_E , \mathbf{T}_H производится поэлементно. Для затухающих порядков дифракции $\operatorname{Re}(\cos \Theta^{(p)}) = 0$, $p = U, D$, следовательно, их интенсивности равны нулю.

В общем случае распространяющиеся порядки дифракции являются плоскими волнами с эллиптической поляризацией. Действительно, каждый порядок дифракции соответствует суперпозиции E - и H -волн. Обозначим E_E , E_H комплексные амплитуды векторов электрического поля у E - и H -волн. Отметим, что векторы электрического поля у E - и H -волн перпендикулярны между собой и перпендикулярны направлению распространения волны. При сложении перпендикулярных колебаний и формируется в общем случае эллиптически поляризованная волна. Эллипс поляризации характеризуется двумя параметрами: углом наклона φ главной оси эллипса поляризации и параметром эллиптичности χ [20]. Параметр эллиптичности выражает отношение длин a , b осей эллипса поляризации в виде $\operatorname{tg} \chi = a/b$. Параметры φ и χ определяются через комплексные амплитуды E_E , E_H в виде [20]

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2\varphi) &= \frac{2 \operatorname{Re}(E_E/E_H)}{1 - |E_E/E_H|^2}, \\ \sin(2\chi) &= \frac{2 \operatorname{Im}(E_E/E_H)}{1 + |E_E/E_H|^2}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

В заключение, сделаем несколько замечаний по поводу выбора параметра N , определяющего длину отрезков рядов Фурье, аппроксимирующих компоненты электрического и магнитного полей в области решетки. При заданном N количество вычисляемых порядков равно $2N + 1$, от $-N$ до $+N$. Параметр N должен быть больше, чем число распространяющихся порядков. В случае, если решетка состоит только из диэлектриков (все показатели преломления — действительные числа), а параметр N удовлетворяет указанному условию, то должен выполняться закон сохранения энергии в следующей форме:

$$\sum I^R + \sum I^T = 1. \quad (1.111)$$

Если же в решетке присутствуют поглощающие материалы, то сумма (1.111) должна стать меньше единицы. В общем случае выбор N осуществляется

в вычислительном эксперименте из условия стабилизации значений интенсивностей порядков.

1.1.2.9. Численный пример. Рассмотрим пример расчета интенсивностей порядков дифракции бинарной дифракционной решетки. Геометрия решетки показана на рис. 1.3. Параметры решетки и используемые значения диэлектрических проницаемостей материалов решетки приведены в подписи к рисунку.

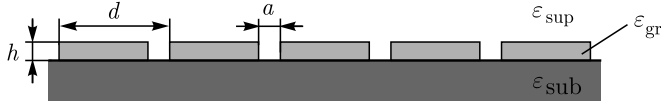


Рис. 1.3. Геометрия бинарной решетки (параметры: $d = 1000$ нм, $a = 200$ нм, $h = 200$ нм, $\epsilon_{\text{sup}} = 1$, $\epsilon_{\text{gr}} = 4$, $\epsilon_{\text{sub}} = 2,25$)

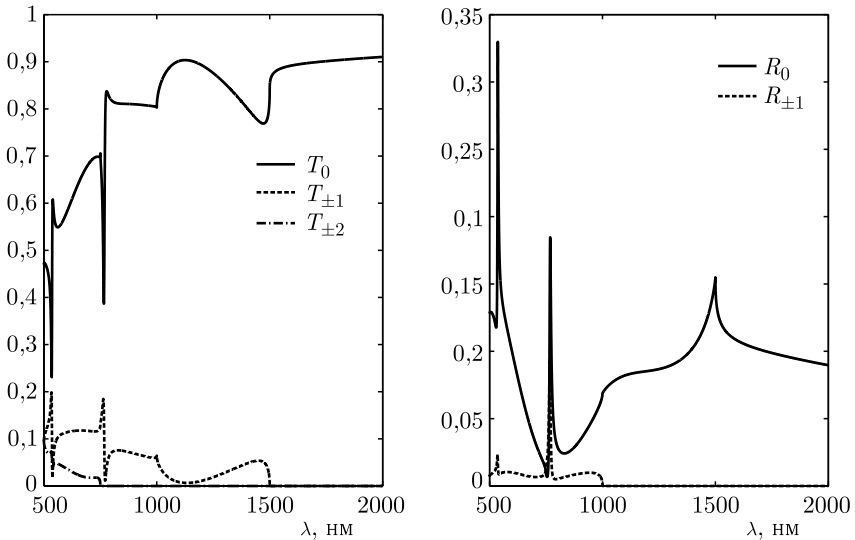


Рис. 1.4. Интенсивности отраженных и прошедших порядков дифракции

При расчетах в качестве параметра N , определяющего длину отрезков рядов Фурье, использовалось значение $N = 20$. Расчеты проводились для ТМ-поляризованной нормально падающей волны. Результаты расчета спектров отражения и пропускания решетки (интенсивностей дифракционных порядков) представлены на рис. 1.4.

1.1.3. Метод фурье-мод для трехмерных периодических структур.

Рассмотрим описанный метод в случае трехмерных периодических дифракционных структур. Ось z считаем направленной перпендикулярно плоскости расположения дифракционной решетки. Функции диэлектрической и магнитной проницаемости в области решетки предполагаем периодичными по переменным x , y с периодами d_x и d_y , соответственно. Как и в двумерном случае, будем считать, что дифракционная решетка состоит из L бинарных слоев,

в каждом из которых диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от переменной z .

Метод решения задачи дифракции в трехмерном случае аналогичен рассмотренному двумерному случаю. Приведем основные особенности трехмерной задачи.

При дифракции плоской волны на трехмерной дифракционной решетке формируется двумерный набор отраженных и прошедших порядков дифракции. В этом случае поле над и под структурой имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Phi^U(x, y, z) = & \Phi^{\text{inc}}(x, y, z) + \\ & + \sum_n \sum_m \Phi_{n,m}^R(R_{n,m}) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y + k_{z,U,n,m}z)), \end{aligned} \quad (1.112)$$

$$\begin{aligned} \Phi^D(x, y, z) = & \\ = & \sum_n \sum_m \Phi_{n,m}^T(T_{n,m}) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y - k_{z,D,n,m}(z - z_L))), \end{aligned} \quad (1.113)$$

где $\Phi^{\text{inc}}(x, y, z)$ — падающая волна. Падающую волну считаем заданной в виде (1.19). Константы распространения порядков дифракции с номерами (n, m) описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} k_{x,n} &= k_0 n_U \sin \theta \cos \varphi + n \frac{2\pi}{d_x}, \\ k_{y,m} &= k_0 n_U \sin \theta \sin \varphi + m \frac{2\pi}{d_y}, \\ k_{z,p,n,m} &= \sqrt{(k_0 n_p)^2 - k_{x,n}^2 - k_{y,m}^2}, \end{aligned} \quad (1.114)$$

где в качестве p берется «U» для отраженных порядков (поля над решеткой) и «D» — для прошедших (поля под решеткой). Вид констант распространения обеспечивает выполнение двумерного условия квазипериодичности:

$$\Phi^p(x + d_x, y + d_y, z) = \Phi^p(x, y, z) \exp(ik_{x,0}d_x + ik_{y,0}d_y), \quad p = U, D. \quad (1.115)$$

Согласно (1.115), амплитуда поля не изменяется при сдвиге на расстояния, кратные периодам. Волны с действительным $k_{z,p,n,m}$ являются распространяющимися, с мнимым — затухающими.

Электромагнитное поле в каждом слое, как и в двумерном случае, описывается базовыми уравнениями Максвелла для монохроматического поля в виде (1.24)–(1.27). Представим компоненты электрического и магнитного

полей в виде двумерных рядов Фурье по переменным x, y :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = \sum_n \sum_m S_{x,n,m}(z) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)), \\ E_y = \sum_n \sum_m S_{y,n,m}(z) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)), \\ E_z = \sum_n \sum_m S_{z,n,m}(z) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)), \\ H_x = -i \sum_n \sum_m U_{x,n,m}(z) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)), \\ H_y = -i \sum_n \sum_m U_{y,n,m}(z) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)), \\ H_z = -i \sum_n \sum_m U_{z,n,m}(z) \exp(i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)). \end{array} \right. \quad (1.116)$$

Представления (1.116) записаны с учетом квазипериодичности компонент полей по переменным x, y . Ограничимся конечным числом членов в разложениях (1.116), соответствующим $-N_x \leq n \leq N_x$, $-N_y \leq m \leq N_y$. Подставляя разложения (1.116) в систему (1.26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых гармониках Фурье, получим систему дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{S}_z - \frac{d\mathbf{S}_y}{dz} = k_0(\mathbf{M}_{1,1}\mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{1,2}\mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{1,3}\mathbf{U}_z), \\ \frac{d\mathbf{S}_x}{dz} - ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{S}_z = k_0(\mathbf{M}_{2,1}\mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{2,2}\mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{2,3}\mathbf{U}_z), \\ ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{S}_y - ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{S}_x = k_0(\mathbf{M}_{3,1}\mathbf{U}_x + \mathbf{M}_{3,2}\mathbf{U}_y + \mathbf{M}_{3,3}\mathbf{U}_z), \\ ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{U}_z - \frac{d\mathbf{U}_y}{dz} = k_0(\mathbf{E}_{1,1}\mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{1,2}\mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{1,3}\mathbf{S}_z), \\ \frac{d\mathbf{U}_x}{dz} - ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{U}_z = k_0(\mathbf{E}_{2,1}\mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{2,2}\mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{2,3}\mathbf{S}_z), \\ ik_0 \mathbf{K}_x \mathbf{U}_y - ik_0 \mathbf{K}_y \mathbf{U}_x = k_0(\mathbf{E}_{3,1}\mathbf{S}_x + \mathbf{E}_{3,2}\mathbf{S}_y + \mathbf{E}_{3,3}\mathbf{S}_z). \end{array} \right. \quad (1.117)$$

Вид полученной системы полностью совпадает с видом системы (1.31) для двумерного случая. Отличие состоит в конкретном представлении векторов и матриц, входящих в систему. Векторы $\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z, \mathbf{U}_x, \mathbf{U}_y, \mathbf{U}_z$ в (1.117) являются построчной разверткой матриц $S_{x,j,k}, S_{y,j,k}, S_{z,j,k}, U_{x,j,k}, U_{y,j,k}, U_{z,j,k}$, $-N_x \leq j \leq N_x$, $-N_y \leq k \leq N_y$. Это означает что элементу вектора \mathbf{S}_x с номером

$$l(i, j) = i(2N_y + 1) + j \quad (1.118)$$

соответствует значение $S_{x,i,j}$. Введенные таким образом векторы имеют размерность $(2N_x + 1)(2N_y + 1)$, равную общему количеству рассчитываемых порядков дифракции. Например, вектор \mathbf{S}_x имеет вид

$$\mathbf{S}_x = \left[S_{x,-N_x,-N_y}, S_{x,-N_x,1-N_y}, \dots, \dots, S_{x,-N_x,N_y}, S_{x,1-N_x,-N_y}, S_{x,1-N_x,1-N_y}, \dots, S_{x,N_x,N_y} \right]^T. \quad (1.119)$$

Матрицы \mathbf{K}_x , \mathbf{K}_y , $\mathbf{E}_{i,j}$, $\mathbf{M}_{i,j}$ в (1.117) имеют размерность

$$(2N_x + 1)(2N_y + 1) \times (2N_x + 1)(2N_y + 1).$$

Матрицы \mathbf{K}_x и \mathbf{K}_y определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} K_{x,l(i,j),l(n,m)} &= k_{x,i} \delta_{i-n} \delta_{j-m} / k_0, \\ K_{y,l(i,j),l(n,m)} &= k_{y,j} \delta_{i-n} \delta_{j-m} / k_0, \end{aligned} \quad (1.120)$$

где $-N_x \leq i$, $n \leq N_x$, $-N_y \leq j$, $m \leq N_y$.

Рассмотрим предварительно вид матриц $\mathbf{E}_{i,j}$, $\mathbf{M}_{i,j}$, получающихся при использовании обычных правил Лорана для разложения в ряд Фурье произведения функций. Матрицы $\mathbf{E}_{i,j}$, $\mathbf{M}_{i,j}$ состоят из коэффициентов Фурье тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей, структура матриц одинакова и имеет вид

$$T_{l(i,j),l(n,m)} = e_{i-n,j-m}, \quad (1.121)$$

где $e_{i,j}$ — фурье-коэффициенты, $-N_x \leq i$, $n \leq N_x$, $-N_y \leq j$, $m \leq N_y$.

Поскольку вид систем дифференциальных уравнений в двумерном и трехмерном случае идентичен, то совпадают и все последующие преобразования. Система дифференциальных уравнений для векторов \mathbf{S}_x , \mathbf{S}_y , \mathbf{U}_x , \mathbf{U}_y в (1.117) также имеет вид (1.35)–(1.34). В частности, для решетки из изотропного материала, когда $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ и $\mu = 1$ — скаляры, матрица системы дифференциальных уравнений (1.35) имеет вид

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{I} - \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & -\mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_y \mathbf{K}_x & \mathbf{E} - \mathbf{K}_y^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E} & -\mathbf{K}_x \mathbf{K}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (1.122)$$

где матрица \mathbf{E} имеет вид (1.120) и составлена из коэффициентов Фурье функций $\varepsilon(x, y)$. Формула (1.122) получается из общих выражений (1.36), (1.34) при

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{1,1} &= \mathbf{E}_{2,2} = \mathbf{E}_{3,3} = \mathbf{E}, \\ \mathbf{E}_{1,2} &= \mathbf{E}_{1,3} = \mathbf{E}_{2,1} = \mathbf{E}_{2,3} = \mathbf{E}_{3,1} = \mathbf{E}_{3,2} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}_{1,1} &= \mathbf{M}_{2,2} = \mathbf{M}_{3,3} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{M}_{1,2} &= \mathbf{M}_{1,3} = \mathbf{M}_{2,1} = \mathbf{M}_{2,3} = \mathbf{M}_{3,1} = \mathbf{M}_{3,2} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Рассмотрим переход к пространственно-частотному представлению (1.117) с использованием корректных правил фурье-разложений произведений функций. Вывод формул проведем для случая изотропного материала. При этом система уравнений Максвелла (1.26) содержит только три следующих произведения: εE_z , εE_x , εE_y .

Тангенциальная компонента E_z является непрерывной, поэтому произведение εE_z раскладывается в ряд Фурье с использованием правила Лорана (1.40). В этом случае соответствующая матрица $\mathbf{E}_{3,3}$ в (1.117) имеет вид (1.121).

Будем считать, что границы раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями в каждом слое параллельны осям координат [6]. Рассмотрим произведение $D_x = \varepsilon E_x$. Оно непрерывно на участках границ раздела сред, параллельных оси Oy . Действительно, на указанных участках $D_x = \varepsilon E_x$ является нормальной компонентой электрического смещения. При этом компонента E_x и функция диэлектрической проницаемости ε имеют разрывы на указанных границах. Таким образом, произведение $D_x = \varepsilon E_x$ является непрерывным по переменной x для любого фиксированного y . Соответственно, для разложения $D_x = \varepsilon E_x$ в ряд Фурье по переменной x применим обратное правило Лорана (1.41):

$$d_{x,i}(y, z) = \sum_n \varepsilon_{x,i,n}(y) S_{x,n}(y, z), \quad (1.124)$$

где $d_{x,i}(y, z)$, $S_{x,n}(y, z)$ — коэффициенты Фурье функций D_x , εE_x , а $\varepsilon_{x,i,n}(y)$ — элементы матрицы $\llbracket 1/\varepsilon_x \rrbracket^{-1}$, составленной из коэффициентов Фурье по переменной x функции $1/\varepsilon(x, y)$. На участках границ раздела сред, параллельных оси Ox , компонента E_x является тангенциальной и, следовательно, непрерывной по переменной y . Коэффициенты Фурье $S_{x,n}(y, z)$ функции E_x будут также непрерывны. Поэтому для разложения в (1.124) слагаемых $\varepsilon_{x,i,n}(y) S_{x,n}(y, z)$ в ряд Фурье по переменной y применим правило Лорана (1.40):

$$d_{x,i,j}(z) = \sum_{n,m} \varepsilon_{x,i,n,j-m} S_{x,n,m}(z), \quad (1.125)$$

где $\varepsilon_{x,i,n,j-m}$ — коэффициент Фурье с номером $(j-m)$ функции $\varepsilon_{x,i,n}(y)$.

Повторяя аналогичные рассуждения для $D_y = \varepsilon E_y$, получим

$$d_{y,j}(x, z) = \sum_m \varepsilon_{y,j,m}(x) S_{y,m}(x, z), \quad (1.126)$$

$$d_{y,i,j}(z) = \sum_{n,m} \varepsilon_{y,i-n,j,m} S_{y,n,m}(z), \quad (1.127)$$

где $\varepsilon_{y,j,m}(x)$ — элементы матрицы $\llbracket 1/\varepsilon_y \rrbracket^{-1}$, составленной из коэффициентов Фурье по переменной y функции $1/\varepsilon(x, y)$, а $\varepsilon_{y,i-n,j,m}$ — коэффициент Фурье с номером $(i-n)$ функции $\varepsilon_{y,j,m}(x)$.

Уравнения (1.125), (1.127) получены с применением корректных правил разложения в ряд Фурье произведений $D_x = \varepsilon E_x$, $D_y = \varepsilon E_y$. Соответственно, при переходе от системы (1.26) к пространственно-частотному представлению (1.117), матрицы $\mathbf{E}_{1,1}$, $\mathbf{E}_{2,2}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} E_{1,1\,l(i,n),l(j,m)} &= \varepsilon_{x\,i,n,j-m}, \\ E_{2,2\,l(i,n),l(j,m)} &= \varepsilon_{y\,i-n,j,m}, \end{aligned} \quad (1.128)$$

где $l(i, j)$ определено в (1.118), $-N_x \leq i, n \leq N_x$, $-N_y \leq j, m \leq N_y$. Матрицы в (1.128) имеют размерность $(2N_x + 1)(2N_y + 1) \times (2N_x + 1)(2N_y + 1)$.

В результате матрица \mathbf{A} системы линейных дифференциальных уравнений примет вид

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x & \mathbf{I} - \mathbf{K}_y \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & -\mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{K}_y \\ \mathbf{K}_y \mathbf{K}_x & \mathbf{E}_{1,1} - \mathbf{K}_y^2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_x^2 - \mathbf{E}_{2,2} & -\mathbf{K}_x \mathbf{K}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (1.129)$$

Подробное описание корректных правил разложения в ряд Фурье для общего случая тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости можно найти в работах [8, 9].

Последующие операции по «сшивке» решений на границах слоев и численно-устойчивой реализации расчета матрицы системы линейных уравнений относительно амплитуд дифракционных порядков также совпадают. Матрицы \mathbf{E} , \mathbf{F} в системах линейных уравнений, представляющие тангенциальные компоненты полей (1.112), (1.113) на верхней и нижней границах решетки, также имеют вид (1.74), где

$$\begin{aligned} \sin \Phi &= \text{diag}_{l(i,j)} \frac{k_{y,j}}{\sqrt{k_{x,i}^2 + k_{y,j}^2}}, & \cos \Phi &= \text{diag}_{l(i,j)} \frac{k_{x,i}}{\sqrt{k_{x,i}^2 + k_{y,j}^2}}, \\ \cos \Theta^{(U)} &= \text{diag}_{l(i,j)} \frac{k_{z,U,i,j}}{k_0 n_U}, & \cos \Theta^{(D)} &= \text{diag}_{l(i,j)} \frac{-k_{z,D,i,j}}{k_0 n_D}. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Запись $\text{diag}_{l(i,j)} f(i, j)$ означает диагональную матрицу, составленную из элементов $f(i, j)$, расположенных в порядке возрастания величины $l(i, j)$.

1.1.4. Метод фурье-мод для двумерных неперидических структур.

1.1.4.1 Геометрия структуры и постановка задачи. Метод фурье-мод может быть адаптирован для моделирования дифракции волноводных и плазмонных мод на неоднородностях волновода. Рассмотрим метод для случая, когда геометрия рассматриваемой структуры не зависит от координаты y . Кроме того, будем считать, что, как и ранее, структура может быть разделена на области $z_l < z < z_{l-1}$, в каждой из которых материальные параметры зависят только от координаты x (рис. 1.5). Для применения метода фурье-мод вводится искусственная периодизация по координате x , а для устранения взаимодействия между соседними периодами (то есть для обеспечения равенства нулю электромагнитного поля на границах периода) на границы периода добавляются специальные поглощающие слои, в качестве которых могут использоваться многослойные градиентные поглощающие слои или идеально согласованные поглощающие слои (в англоязычной литературе — PML, perfectly matched layers) [21, 22]. Градиентные поглощающие слои представляют собой слои, действительная часть диэлектрической проницаемости которых совпадает с диэлектрической проницаемостью среды, с которой они граничат, при этом мнимая часть, характеризующая поглощение, возрастает при приближении к границе периода. Недостатком градиентных поглощающих слоев является ненулевое отражение падающего на них излучения,

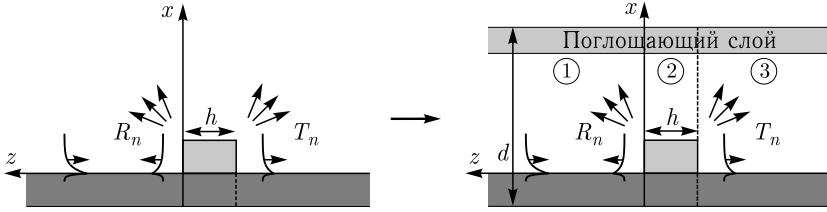


Рис. 1.5. Геометрия задачи дифракции поверхностного плазмон-поляритона на неперидической структуре

существенно возрастающее при увеличении угла падения. В ряде случаев указанный факт может существенно влиять на решение задачи с искусственной периодизацией, понижая точность решения относительно решения исходной неперидической задачи. Для устранения отражения на границах с поглощающими слоями используются идеально согласованные поглощающие слои, описанные ниже.

В отличие от стандартного варианта метода фурье-мод, ориентированного на решение задачи дифракции на перидических структурах, результатом применения неперидической модификации будет являться не набор интенсивностей дифракционных порядков, а набор амплитуд прошедших и отраженных волноводных мод.

1.1.4.2. Идеально согласованные поглощающие слои. Рассмотрим идеально согласованные поглощающие слои, представляющие собой слои из анизотропных материалов, добавляемые на границы периода структуры. Свойство идеально согласованных поглощающих слоев поглощать падающее излучение без обратного отражения в этом случае достигается за счет специального выбора тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости.

Для определения вида тензоров рассмотрим первоначально общее представление поля плоской электромагнитной волны в анизотропной среде, описываемой тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости диагонального вида:

$$\vec{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix}. \quad (1.131)$$

Поскольку свойства среды не зависят от переменной z , то векторы электрического и магнитного полей имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= \mathbf{E}(x, y) \exp(ik_0\gamma z), \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= \mathbf{H}(x, y) \exp(ik_0\gamma z). \end{aligned} \quad (1.132)$$

Подставляя (1.131) в (1.3), получим:

$$\begin{aligned} \partial_y H_z - ik_0\gamma H_y &= -ik_0\epsilon_x E_x, & \partial_y E_z - ik_0\gamma E_y &= ik_0\mu_x H_x, \\ -\partial_x H_z + ik_0\gamma H_x &= -ik_0\epsilon_y E_y, & -\partial_x E_z + ik_0\gamma E_x &= ik_0\mu_y H_y, \\ \partial_x H_y - \partial_y H_x &= -ik_0\epsilon_z E_z, & \partial_x E_y - \partial_y E_x &= ik_0\mu_z H_z, \end{aligned} \quad (1.133)$$

где $\partial_x = \partial f / \partial x$. Используя (1.133), представим тангенциальные компоненты через компоненты E_z , H_z в виде

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{-1}{ik_0 (\varepsilon_x - \gamma^2 / \mu_y)} \left(\partial_y H_z + \frac{\gamma}{\mu_y} \cdot \partial_x E_z \right), \\ E_y &= \frac{1}{ik_0 (\varepsilon_y - \gamma^2 / \mu_x)} \left(\partial_x H_z - \frac{\gamma}{\mu_x} \cdot \partial_y E_z \right), \\ H_x &= \frac{1}{ik_0 (\mu_x - \gamma^2 / \varepsilon_y)} \left(\partial_y E_z - \frac{\gamma}{\varepsilon_y} \cdot \partial_x H_z \right), \\ H_y &= \frac{-1}{ik_0 (\mu_y - \gamma^2 / \varepsilon_x)} \left(\partial_x E_z + \frac{\gamma}{\varepsilon_x} \cdot \partial_y H_z \right), \end{aligned} \quad (1.134)$$

где E_z , H_z удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_y - \gamma^2 / \varepsilon_x} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\varepsilon_x} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{\mu_x - \gamma^2 / \varepsilon_y} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{\gamma}{\varepsilon_y} \cdot \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial x} \right) &= -k_0^2 \varepsilon_z E_z, \\ \frac{1}{\varepsilon_y - \gamma^2 / \mu_x} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\mu_x} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial y} \right) + \frac{1}{\varepsilon_x - \gamma^2 / \mu_y} \left(\frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\gamma}{\mu_y} \cdot \frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial x} \right) &= -k_0^2 \mu_z H_z. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Для одноосной анизотропной среды с проницаемостями

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \quad (1.136)$$

получим из (1.135), что E_z , H_z удовлетворяют уравнениям Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} &= -k_0^2 \varepsilon_z (\mu - \gamma^2 / \varepsilon) E_z, \\ \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} &= -k_0^2 \mu_z (\varepsilon - \gamma^2 / \mu) H_z. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Решая (1.137) методом разделения переменных, получим

$$\begin{aligned} E_z(x, y, z) &= \exp \left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma z \right), \\ H_z(x, y, z) &= \exp \left(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma_1 z \right), \end{aligned} \quad (1.138)$$

где

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad \gamma_1 = \mu \sqrt{\varepsilon / \mu - (\alpha^2 + \beta^2) \varepsilon_z / \mu_z}. \quad (1.139)$$

Далее рассмотрим волны E - и H -типов. Для E -волны $E_z \neq 0$, $H_z = 0$, а для H -волны $H_z \neq 0$, $E_z = 0$. Из уравнений (1.134), (1.138) для E -волны

получим

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{\mp \gamma}{ik_0(\varepsilon\mu - \gamma^2)} \cdot \partial_x E_z = \frac{\mp \alpha \gamma \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\mu\varepsilon - \gamma^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma z), \\
 E_y &= \frac{\mp \gamma}{ik_0(\varepsilon\mu - \gamma^2)} \cdot \partial_y E_z = \frac{\mp \gamma \beta \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\mu\varepsilon - \gamma^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma z), \\
 H_x &= \frac{\varepsilon}{ik_0(\mu\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \partial_y E_z = \frac{\varepsilon \beta \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\mu\varepsilon - \gamma^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma z), \\
 H_y &= \frac{-\varepsilon}{ik_0(\mu\varepsilon - \gamma^2)} \cdot \partial_x E_z = \frac{-\varepsilon \alpha \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\mu\varepsilon - \gamma^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma z).
 \end{aligned} \tag{1.140}$$

Поскольку решение задачи дифракции требует наложения условий равенства тангенциальных компонент полей на границе раздела сред, то оказывается удобным введение следующего четырехкомпонентного вектора тангенциальных компонент:

$$\mathbf{E}_E = \begin{bmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}} \begin{bmatrix} \mp \alpha \gamma \\ -\varepsilon \alpha \\ \mp \gamma \beta \\ \varepsilon \beta \end{bmatrix} \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma z). \tag{1.141}$$

Вектор (1.141) записан с нормирующим множителем, выбранным из условия равенства единице z -компоненты вектора Умова–Пойнтинга $S_z = |E_x H_y - E_y H_x|$.

Из уравнений (1.134), (1.138) для H -волны получим:

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{-\mu}{ik_0(\varepsilon\mu - \gamma_1^2)} \cdot \partial_y H_z = \frac{-\mu \beta \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\varepsilon\mu - \gamma_1^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma_1 z), \\
 H_y &= \frac{\mp \gamma_1}{ik_0(\mu - \gamma_1^2)} \cdot \partial_y H_z = \frac{\mp \gamma_1 \beta \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\varepsilon\mu - \gamma_1^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma_1 z), \\
 E_y &= \frac{\mu}{ik_0(\varepsilon\mu - \gamma_1^2)} \cdot \partial_x H_z = \frac{\mu \alpha \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\varepsilon\mu - \gamma_1^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma_1 z), \\
 H_x &= \frac{\mp \gamma_1}{ik_0(\mu\varepsilon - \gamma_1^2)} \cdot \partial_x H_z = \frac{\mp \gamma_1 \alpha \sqrt{\varepsilon_z \mu}}{\varepsilon\mu - \gamma_1^2} \cdot \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma_1 z).
 \end{aligned} \tag{1.142}$$

Аналогично (1.141), введем вектор тангенциальных компонент для H -волны в виде

$$\mathbf{E}_H = \begin{bmatrix} E_x \\ H_y \\ E_y \\ H_x \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 \mu (\alpha^2 + \beta^2)}} \begin{bmatrix} -\mu \beta \\ \mp \gamma_1 \beta \\ \mu \alpha \\ \mp \gamma_1 \alpha \end{bmatrix} \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_z \mu} (\alpha x + \beta y) \pm ik_0 \gamma_1 z). \tag{1.143}$$

Формулы Френеля. Запишем формулы Френеля для границы раздела между однородным диэлектриком и средой, описываемой тензорами (1.136).

Без ограничения общности границей раздела будем считать плоскость $z = 0$. Будем считать, что в области $z > 0$ расположен однородный диэлектрик, а при $z < 0$ — анизотропная среда (1.136).

Пусть на границу раздела со стороны однородного диэлектрика падает плоская волна, представленная в виде суперпозиции E - и H -волн. В общем случае, при отражении и преломлении падающей волны на границе будут сформированы отраженная и преломленная волны, также представленные в виде суперпозиции E - и H -волн.

Полагая в (1.141), (1.143) $\varepsilon = \varepsilon_z = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_z = \mu_0$, запишем падающие на границу и отраженные от границы E - и H -волны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{inc},E} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \varepsilon_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \gamma_0 \\ -\varepsilon_0 \alpha_0 \\ \gamma_0 \beta_0 \\ \varepsilon_0 \beta_0 \end{bmatrix} \exp (ik_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y) - ik_0 \gamma_0 z), \\ \mathbf{E}_{\text{inc},H} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \mu_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\mu_0 \beta_0 \\ \gamma_0 \beta_0 \\ \mu_0 \alpha_0 \\ \gamma_0 \alpha_0 \end{bmatrix} \exp (ik_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y) - ik_0 \gamma_0 z), \\ \mathbf{E}_{\text{ref},E} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \varepsilon_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\alpha_0 \gamma_0 \\ -\varepsilon_0 \alpha_0 \\ -\gamma_0 \beta_0 \\ \varepsilon_0 \beta_0 \end{bmatrix} \exp (ik_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y) + ik_0 \gamma_0 z), \\ \mathbf{E}_{\text{ref},H} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 \mu_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\mu_0 \beta_0 \\ -\gamma_0 \beta_0 \\ \mu_0 \alpha_0 \\ -\gamma_0 \alpha_0 \end{bmatrix} \exp (ik_0 \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} (\alpha_0 x + \beta_0 y) + ik_0 \gamma_0 z), \end{aligned} \quad (1.144)$$

где $\gamma_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \sqrt{1 - \alpha_0^2 - \beta_0^2}$. Подписи «inc» и «ref» в нижних индексах волн в (1.144), (1.145) обозначают падающие и отраженные волны, соответственно.

При $z > 0$ волна имеет вид суперпозиции падающей и отраженной волн:

$$\mathbf{E}_{z>0}(\mathbf{x}) = I_E \mathbf{E}_{\text{inc},E}(\mathbf{x}) + I_H \mathbf{E}_{\text{inc},H}(\mathbf{x}) + R_E \mathbf{E}_{\text{ref},E}(\mathbf{x}) + R_H \mathbf{E}_{\text{ref},H}(\mathbf{x}), \quad (1.146)$$

где $\mathbf{x} = (x, y, z)$, I_E , I_H — коэффициенты E - и H -волн для падающей волны, а R_E , R_H — коэффициенты отражения. Прошедшая волна при $z < 0$ имеет вид

$$\mathbf{E}_{z<0}(\mathbf{x}) = T_E \cdot \mathbf{E}_{\text{tr},E}(\mathbf{x}) + T_H \cdot \mathbf{E}_{\text{tr},H}(\mathbf{x}), \quad (1.147)$$

где T_E , T_H — коэффициенты пропускания,

$$\mathbf{E}_{\text{tr},E} = \frac{1}{\sqrt{\gamma\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}} \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ -\varepsilon\alpha \\ \gamma\beta \\ \varepsilon\beta \end{bmatrix} \exp(ik_0\sqrt{\varepsilon_z\mu}(\alpha x + \beta y) - ik_0\gamma z),$$

$$\mathbf{E}_{\text{tr},H} = \frac{1}{\sqrt{\gamma_1\mu(\alpha^2 + \beta^2)}} \begin{bmatrix} -\mu\beta \\ \gamma_1\beta \\ \mu\alpha \\ \gamma_1\alpha \end{bmatrix} \exp(ik_0\sqrt{\varepsilon_z\mu}(\alpha x + \beta y) - ik_0\gamma_1 z),$$
(1.148)

где

$$\gamma = \sqrt{\varepsilon\mu} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}, \quad \gamma_1 = \mu \sqrt{\varepsilon/\mu - (\alpha^2 + \beta^2) \varepsilon_z/\mu_z}.$$

Для определения коэффициентов отражения и пропускания запишем условие равенства тангенциальных компонент при $z = 0$ ($\mu_0 = 1$):

$$\begin{aligned} & \frac{I_E}{\sqrt{\gamma_0\varepsilon_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} \gamma_0\alpha_0 \\ -\varepsilon_0\alpha_0 \\ \gamma_0\beta_0 \\ \varepsilon_0\beta_0 \end{bmatrix} + \frac{I_H}{\sqrt{\gamma_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\beta_0 \\ \gamma_0\beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0\alpha_0 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{R_E}{\sqrt{\gamma_0\varepsilon_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\gamma_0\alpha_0 \\ -\varepsilon_0\alpha_0 \\ -\gamma_0\beta_0 \\ \varepsilon_0\beta_0 \end{bmatrix} + \frac{R_H}{\sqrt{\gamma_0(\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\beta_0 \\ -\gamma_0\beta_0 \\ \alpha_0 \\ -\gamma_0\alpha_0 \end{bmatrix} = \\ & = \frac{T_E}{\sqrt{\gamma\varepsilon(\alpha^2 + \beta^2)}} \begin{bmatrix} \alpha\gamma \\ -\varepsilon\alpha \\ \gamma\beta \\ \varepsilon\beta \end{bmatrix} + \frac{T_H}{\sqrt{\gamma_1\mu(\alpha^2 + \beta^2)}} \begin{bmatrix} -\mu\beta \\ \gamma_1\beta \\ \mu\alpha \\ \gamma_1\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (1.149)$$

При этом должен выполняться закон преломления:

$$\alpha_0\sqrt{\varepsilon_0} = \alpha\sqrt{\varepsilon_z\mu}, \quad \beta_0\sqrt{\varepsilon_0} = \beta\sqrt{\varepsilon_z\mu}. \quad (1.150)$$

В частном случае,

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}, \quad (1.151)$$

получим

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \gamma = \gamma_1 = a\sqrt{\varepsilon_0} \sqrt{1 - \alpha_0^2 - \beta_0^2} = a\gamma_0. \quad (1.152)$$

В этом случае уравнение (1.149) примет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{I_E}{\sqrt{\gamma_0 \varepsilon_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} \gamma_0 \alpha_0 \\ -\varepsilon_0 \alpha_0 \\ \gamma_0 \beta_0 \\ \varepsilon_0 \beta_0 \end{bmatrix} + \frac{I_H}{\sqrt{\gamma_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\beta_0 \\ \gamma_0 \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \alpha_0 \end{bmatrix} + \\
 & + \frac{R_E}{\sqrt{\gamma_0 \varepsilon_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\gamma_0 \alpha_0 \\ -\varepsilon_0 \alpha_0 \\ -\gamma_0 \beta_0 \\ \varepsilon_0 \beta_0 \end{bmatrix} + \frac{R_H}{\sqrt{\gamma_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\beta_0 \\ -\gamma_0 \beta_0 \\ \alpha_0 \\ -\gamma_0 \alpha_0 \end{bmatrix} = \\
 & = \frac{T_E}{\sqrt{\gamma_0 \varepsilon_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} \alpha_0 \gamma_0 \\ -\varepsilon_0 \alpha_0 \\ \gamma_0 \beta_0 \\ \varepsilon_0 \beta_0 \end{bmatrix} + \frac{T_H}{\sqrt{\gamma_0 (\alpha_0^2 + \beta_0^2)}} \begin{bmatrix} -\beta_0 \\ \gamma_0 \beta_0 \\ \alpha_0 \\ \gamma_0 \alpha_0 \end{bmatrix}. \quad (1.153)
 \end{aligned}$$

Легко видеть, что решение системы (1.153) имеет вид

$$R_E = R_H = 0, \quad T_H = I_H, \quad T_E = I_E. \quad (1.154)$$

Согласно (1.154), среда (1.151) не отражает падающие волны. При комплексном $a = a' + ia''$ в (1.151) прошедшие волны (1.148) будут являться затухающими. Скорость затухания определяется мнимой частью a'' . Таким образом, слой из материала (1.151) при комплексном a будет идеально согласованным поглощающим слоем.

При $\beta_0 = 0$ в (1.144) вектор направления падающей волны лежит в плоскости xOz . В случае «плоского падения» E -волна соответствует волне с ТМ-поляризацией, а H -волна — волне с ТЕ-поляризацией.

Для падающей волны с ТМ-поляризацией среда (1.151) принимает вид

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}, \quad \mu = a. \quad (1.155)$$

Действительно, несложно получить, что при условии (1.155), $\beta_0 = 0$ и $I_H = 0$ решение системы (1.149) имеет вид

$$R_E = R_H = 0, \quad T_H = 0, \quad T_E = I_E. \quad (1.156)$$

Согласно (1.156), среда (1.155) не отражает падающие волны.

Аналогично, для падающей волны с ТЕ-поляризацией достаточно выполнения условия

$$\varepsilon = \varepsilon_0 a, \quad \vec{\mu} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1/a \end{bmatrix}. \quad (1.157)$$

В случае (1.157) решение системы (1.149) при $\beta_0 = 0$ и $I_E = 0$ имеет вид

$$R_E = R_H = 0, \quad T_H = I_H, \quad T_E = 0. \quad (1.158)$$

Идеально согласованные поглощающие слои как комплексное преобразование координат. Введем теперь идеально согласованные поглощающие слои методом нелинейного преобразования координат [23]. Для простоты рассмотрим случай дифракции ТМ-поляризованной волны (в частности, плазмонной моды — геометрия структуры показана слева на рис. 1.6) на структуре из изотропных материалов. В этом случае электрическое и магнитное поля имеют вид $\mathbf{E} = (E_x, 0, E_z)$, $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$. В каждом из слоев структуры из уравнений Максвелла (1.24) при $\mu = 1$ может быть получено уравнение Гельмгольца для компоненты H_y :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \varepsilon(x) \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right] + k_0^2 \varepsilon(x) H_y = 0, \quad (1.159)$$

При этом уравнение (1.159) записано в общем виде и справедливо как для исходной непериодической задачи, так, например, и для задачи дифракции ТМ-поляризованной волны на дифракционной структуре с одномерной периодичностью. Отметим, что при решении задачи дифракции методом фурье-мод уравнение (1.159), описывающее поле в слое структуры, сводится ко второй системе дифференциальных уравнений в (1.48).

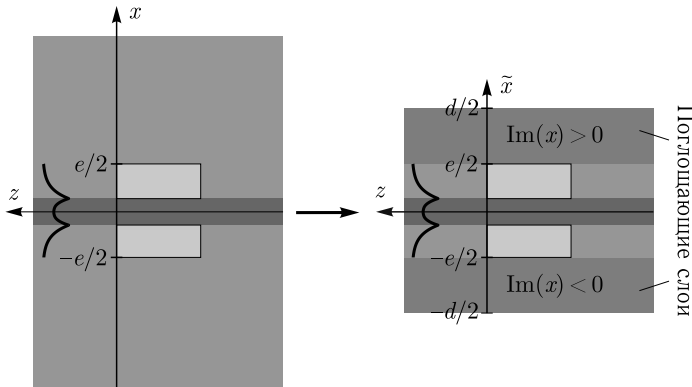


Рис. 1.6. Переход к непериодической задаче с помощью идеально согласованных поглощающих слоев в виде преобразования координат

Пусть нас интересует решение исходной непериодической задачи в области $|x| < e/2$, кроме того, области $|x| > e/2$ являются однородными (рис. 1.6). Отметим, что из физических соображений (отсутствие падающих волн помимо падающей волноводной или плазмонной моды) следует, что в областях $|x| > e/2$ присутствуют только волны, распространяющиеся от структуры (в направлении увеличения $|x|$).

Как было указано выше, для решения непериодической задачи методом фурье-мод необходимо ввести искусственную периодизацию с некоторым периодом $d > e$ таким образом, чтобы устранить взаимодействие между соседними периодами. Для этого нужно обеспечить равенство нулю компонент электромагнитного поля на границах между периодами. Рассмотрим аналитическое продолжение решения уравнения (1.159) для исходной задачи по переменной x на комплексную плоскость: $x = x' + ix''$. Заметим, что при

этом распространяющиеся волны становятся затухающими. Действительно, для волн, распространяющихся в положительном направлении оси x ($k_x > 0$), получим

$$\exp(ik_x x) = \exp(ik_x x') \exp(-k_x x''). \quad (1.160)$$

Таким образом, такие волны затухают при $x'' \rightarrow +\infty$. Аналогично, волны, распространяющиеся в отрицательном направлении оси x , затухают при $x'' \rightarrow -\infty$. Таким образом, будем рассматривать решение уравнения (1.159)

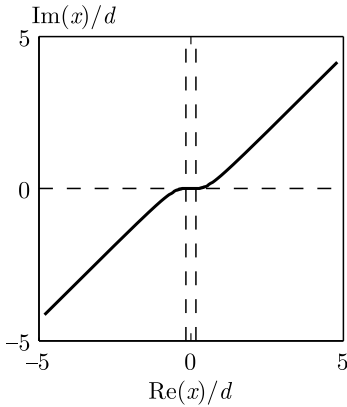


Рис. 1.7. Рассматриваемый контур на комплексной плоскости

на контуре в комплексной плоскости, имеющем вид, показанный на рис. 1.7. Горизонтальной пунктирной прямой отмечена действительная ось, вертикальными пунктирными прямыми — область $x'/d \in [-e, (2d), e/(2d)]$.

При $x' \in (-e/2, e/2)$ контур лежит на действительной оси, при удалении от действительной оси при $x' \rightarrow \pm\infty$ мнимая часть x'' также стремится к бесконечности, при этом выполняется условие $x'x'' > 0$. Такой выбор контура соответствует затуханию электромагнитного поля при удалении от действительной оси. Для того, чтобы ввести искусственную периодизацию, рассмотрим преобразование координат $F(\tilde{x}) = x$, отображающее рассматриваемый контур на комплексной плоскости в интервал $\tilde{x} \in (-d/2, d/2)$, где \tilde{x} — новая действительная координата. При этом при $\tilde{x} \in (-e/2, e/2)$ поле будет совпадать

с решением исходного уравнения (1.159), а при $\tilde{x} \rightarrow \pm d/2$ компоненты поля будут стремиться к нулю в силу выбора контура на комплексной плоскости x . Для перехода от уравнения (1.159) к новому дифференциальному уравнению, зависящему от переменной \tilde{x} , нужно сделать следующую замену дифференциального оператора: $\partial/\partial x \rightarrow f \cdot \partial/\partial \tilde{x}$, где $f(\tilde{x}) = d\tilde{x}/dx = (dF(\tilde{x})/d\tilde{x})^{-1}$. В результате получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \varepsilon(x) f \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{f}{\varepsilon(x)} \frac{\partial H_y}{\partial \tilde{x}} \right] + k_0^2 \varepsilon(x) H_y = 0. \quad (1.161)$$

Уравнение (1.161) может быть решено с помощью метода фурье-мод, поскольку задача теперь допускает искусственную периодизацию (так как поле на границах периода $\tilde{x} = \pm d/2$ стремится к нулю). При использовании разложений (1.27) решение дифференциального уравнения (1.161), описывающего общий вид поля в слое, может быть сведено к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz'} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{S}_x \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E}^* \\ \mathbf{F}_x \mathbf{K}_x \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F}_x \mathbf{K}_x - \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_y \\ \mathbf{S}_x \end{bmatrix}, \quad (1.162)$$

где $z' = k_0 z$, \mathbf{F}_x — теплицева матрица, составленная из коэффициентов разложения в ряд Фурье функции f . Сравнивая вторую систему дифференциальных уравнений в (1.48) с системой (1.162), можно увидеть, что послед-

няя получается из первой формальной заменой $\mathbf{K}_x \rightarrow \mathbf{F}_x \mathbf{K}_x$. Отметим, что в общем случае, когда поле в слое описывается системой дифференциальных уравнений (1.35) с матрицей (1.36), идеально согласованные поглощающие слои могут быть введены с помощью этой же формальной замены.

Приведем теперь в качестве примера конкретный вид функции $f(\tilde{x})$, описывающей преобразование координат [23]:

$$f(\tilde{x}) = \begin{cases} 1, & |\tilde{x}| < e/2, \\ \left[1 - \gamma \sin^2 \left(\pi \frac{|\tilde{x}| - e/2}{q} \right) \right] \cos^2 \left(\pi \frac{|\tilde{x}| - e/2}{q} \right), & \frac{e}{2} < |\tilde{x}| < \frac{d}{2}, \end{cases} \quad (1.163)$$

где $q = d - e$ — суммарный размер области, соответствующей поглощающим слоям, γ — комплексный параметр, характеризующий поглощающий слой (характерное значение $\gamma = 1/(1 - i)$). Для этой функции коэффициенты разложения в ряд Фурье могут быть найдены аналитически и имеют вид

$$f_n = \delta_{n0} - \frac{q}{2d} (-1)^n \left[\left(1 + \frac{\gamma}{4} \right) \text{sinc} \left(\frac{nq}{d} \right) + \frac{1}{2} \text{sinc} \left(\frac{nq}{d} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \text{sinc} \left(\frac{nq}{d} + 1 \right) - \frac{\gamma}{8} \text{sinc} \left(\frac{nq}{d} - 2 \right) - \frac{\gamma}{8} \text{sinc} \left(\frac{nq}{d} + 2 \right) \right], \quad (1.164)$$

где δ_{n0} — символ Кронекера, $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$. Отметим, что приведенная функция $f(\tilde{x})$ соответствует контуру на комплексной плоскости,

$$F(\tilde{x}) = \begin{cases} x, & |\tilde{x}| < e/2, \\ \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|} \left(\frac{e}{2} + \frac{q}{\pi(1-\gamma)} \left\{ \text{tg} \left(\pi \frac{|\tilde{x}| - e/2}{q} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\gamma}{\sqrt{1-\gamma}} \text{arctg} \left[\sqrt{1-\gamma} \text{tg} \left(\pi \frac{|\tilde{x}| - e/2}{q} \right) \right] \right\} \right), & \frac{e}{2} < |\tilde{x}| < \frac{d}{2}. \end{cases} \quad (1.165)$$

Действительная и мнимая части функции $F(\tilde{x})$, при $e = d/3$, $\gamma = 1/(1 - i)$, показаны на рис. 1.8; контур на комплексной плоскости показан на рис. 1.7.

1.1.4.1. Решение задачи дифракции. Этапы решения задачи дифракции в рассматриваемом случае совпадают с этапами решения задачи дифракции плоской волны на двумерной дифракционной структуре, описанными в п. 1.2. Отличия заключаются в представлении поля над и под структурой (в областях 1 и 3 на рис. 1.5). Поскольку области над и под структурой в данном случае не являются однородными, компоненты поля в них не могут быть представлены в виде разложений Рэлея (1.20) и (1.21). Общее представление поля в этих областях может быть получено аналогично представлению поля в слое структуры, получаемому при решении системы дифференциальных уравнений вида (1.35) (с учетом возможной модификации матрицы системы за счет введения идеально согласованных поглощающих слоев методом преобразования координат). Таким образом, компоненты поля над и под структурой

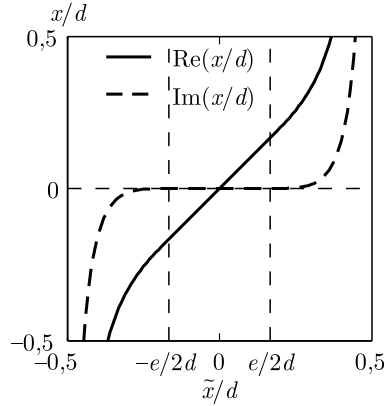


Рис. 1.8. Действительная и мнимая части точек контура на комплексной плоскости в зависимости от значения новой действительной переменной

будут представлены в виде разложений в ряд Фурье (1.27), а выражения для x - и y -фурье-компонент будут иметь вид, аналогичный (1.58):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_y^U \\ \mathbf{S}_x^U \\ \mathbf{U}_y^U \\ \mathbf{U}_x^U \end{bmatrix} = \mathbf{W}_{\text{inc}} \exp(\lambda_{\text{inc}} k_0 z) A_{\text{inc}} + \mathbf{W}_U^{(-)} \exp(\Lambda_U^{(-)} k_0 z) \mathbf{R}, \quad (1.166)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_y^D \\ \mathbf{S}_x^D \\ \mathbf{U}_y^D \\ \mathbf{U}_x^D \end{bmatrix} = \mathbf{W}_D^{(+)} \exp[\Lambda_D^{(+)} k_0 (z - z_L)] \mathbf{T}. \quad (1.167)$$

Аналогично выражениям (1.20), (1.21), индексы U и D соответствуют областям над и под структурой (на рис. 1.5 это области 1 и 3). Первое слагаемое в (1.166) описывает падающую волну с амплитудой A_{inc} , при этом собственное число λ_{inc} выбирается из $\Lambda_U^{(+)}$ как наиболее близкое к константе распространения падающей моды, рассчитываемой в результате решения соответствующего дисперсионного уравнения.

Система линейных уравнений (1.71), описывающая условия равенства тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах слоев структуры, сохраняет свой вид, однако меняются выражения для входящих в нее величин \mathbf{D} , $\mathbf{P}^{(U)}$ и $\mathbf{P}^{(D)}$. В рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{W}_{\text{inc}} A_{\text{inc}}, \\ \mathbf{P}^{(U)} &= \mathbf{W}_U^{(-)}, \\ \mathbf{P}^{(D)} &= \mathbf{W}_D^{(+)}. \end{aligned} \quad (1.168)$$

Как и ранее, для устойчивого решения системы уравнений (1.71) и нахождения амплитуд прошедших и отраженных волн может быть использован

алгоритм матрицы рассеяния, описанный в подразделе 1.2.6. Для расчета распределения поля может быть использована устойчивая процедура, описанная в подразделе 1.2.7.

1.1.4.2. Энергетические характеристики отраженного и прошедшего излучения. Найдем сначала энергетические характеристики прошедшего излучения. Для этого вычислим поток вектора Умова–Пойнтинга прошедших волн в пределах периода через отрезок $z = z_L$ (z -компонента вектора при этом равна $S_z = \text{Re}(E_x H_y^* - E_y H_x^*)/2$). Перепишем представление поля (1.167) при $z = z_L$, разделяя части собственных векторов $\mathbf{W}_D^{(+)}$, соответствующие различным компонентам электромагнитного поля:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_y^D \\ \mathbf{S}_x^D \\ \mathbf{U}_y^D \\ \mathbf{U}_x^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{D,S_y}^{(+)} \\ \mathbf{W}_{D,S_x}^{(+)} \\ \mathbf{W}_{D,U_y}^{(+)} \\ \mathbf{W}_{D,U_x}^{(+)} \end{bmatrix} \mathbf{T}. \quad (1.169)$$

Учитывая (1.169) в (1.27) и полагая для простоты $y = 0$, получим:

$$\begin{cases} E_x = \sum_k t_k \sum_j w_{j,k,S_x} \exp(ik_{x,j}x), \\ E_y = \sum_k t_k \sum_j w_{j,k,S_y} \exp(ik_{x,j}x), \\ H_x = -i \sum_k t_k \sum_j w_{j,k,U_x} \exp(ik_{x,j}x), \\ H_y = -i \sum_k t_k \sum_j w_{j,k,U_y} \exp(ik_{x,j}x), \end{cases} \quad (1.170)$$

где t_k — элементы вектора \mathbf{T} , а w_{j,k,S_x} , w_{j,k,S_y} , w_{j,k,U_x} и w_{j,k,U_y} — элементы векторов $\mathbf{W}_{D,S_x}^{(+)}$, $\mathbf{W}_{D,S_y}^{(+)}$, $\mathbf{W}_{D,U_x}^{(+)}$ и $\mathbf{W}_{D,U_y}^{(+)}$, соответственно. Учитывая (1.170), в выражении для z -компоненты вектора Умова–Пойнтинга, получим:

$$S_d^D = 2 \int_0^d S_z dx = \sum_{k,m,j,n} \int_0^d \text{Re}(it_k t_m^* [w_{j,k,S_x} w_{n,m,U_y}^* - w_{j,k,S_y} w_{n,m,U_x}^*] \times \\ \times \exp[i(k_{x,j} - k_{x,n})x]) dx. \quad (1.171)$$

Учитывая равенство

$$\int_0^d \text{Re}(a \exp[i(k_{x,j} - k_{x,n})x]) dx = \text{Re}(a) d\delta_{jn},$$

из (1.171) получим:

$$S_d^D = d \sum_{k,m} \text{Im} \left(t_k t_m^* \sum_j [w_{j,k,S_y} w_{j,m,U_x}^* - w_{j,k,S_x} w_{j,m,U_y}^*] \right). \quad (1.172)$$

Из выражения (1.172) следует, что, в отличие от рассмотренных выше периодических структур, поток вектора Умова–Пойнтинга на периоде не может быть представлен в виде суммы, каждое из слагаемых которой соответствует отдельной волне (моду). Отметим, однако, что для волноводных и плазмонных мод, распространяющихся в исходной структуре, численно (с точностью порядка 10^{-10}) выполняется условие ортогональности:

$$\sum_j [w_{j,k,S_y} w_{j,m,U_x}^* - w_{j,k,S_x} w_{j,m,U_y}^*] = 0, \quad k \neq m, \quad (1.173)$$

где k — фиксированный номер, а m пробегает все значения от 1 до числа волн, соответствующего размерности системы дифференциальных уравнений (1.35). Проверка выполнения этого условия позволяет судить о правильности выбора значения периода d при искусственной периодизации и параметров поглощающих слоев. Тем волнам, для которых выполняется условие ортогональности (1.173), могут быть приписаны энергетические характеристики, аналогичные интенсивностям порядков дифракции и определяющиеся выражением

$$I_n^T = \frac{|t_n|^2 \left| \text{Im} \left(\sum_j [w_{j,n,S_y} w_{j,n,U_x}^* - w_{j,n,S_x} w_{j,n,U_y}^*] \right) \right|}{|A_{\text{inc}}|^2 \left| \text{Im} \left(\sum_j [w_{j,\text{inc},S_y} w_{j,\text{inc},U_x}^* - w_{j,\text{inc},S_x} w_{j,\text{inc},U_y}^*] \right) \right|}, \quad (1.174)$$

где w_{j,inc,S_x} , w_{j,inc,S_y} , w_{j,inc,U_x} и w_{j,inc,U_y} — элементы вектора \mathbf{W}_{inc} . В знаменателе выражения (1.174) находится поток вектора Умова–Пойнтинга падающей волны. Аналогичным образом рассчитываются энергетические характеристики отраженных волн: элементы вектора \mathbf{T} в (1.174) заменяются на элементы вектора \mathbf{R} , а элементы собственных векторов из матрицы $\mathbf{W}_D^{(+)}$ заменяются на соответствующие значения из матрицы $\mathbf{W}_U^{(-)}$.

1.1.4.3. Численный пример. Рассмотрим в качестве примера прохождение ТМ-поляризованной фундаментальной моды плоскопараллельного волновода через пару выемок в нем (рис. 1.9) [21]. Показатели преломления материалов приведены на рисунке, толщина волновода 300 нм, ширина выемок и разделяющей их ступеньки 150 нм. Длина волны излучения в свободном пространстве — 975 нм.

В таблице 1.1 приведены значения коэффициентов отражения и пропускания (энергетические характеристики отраженной и прошедшей моды) в зависимости от числа гармоник N (полное число гармоник — $2N + 1$). При моделировании использовались идеально согласованные поглощающие слои в виде преобразования координат. При этом были выбраны следующие пара-

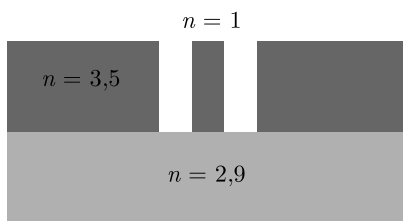


Рис. 1.9. Геометрия рассматриваемой задачи дифракции

метры моделирования: $e = 900$ нм, $d = 3e$, $\gamma = 1/(1 - i)$, середина волновода совпадала с серединой периода.

Таблица 1.1. Коэффициенты отражения и пропускания для ТМ-поляризованной фундаментальной моды

N	I^R	I^T
50	0,356216	0,129970
100	0,355637	0,129675
150	0,355569	0,129619
200	0,355531	0,129604

1.2. Методы расчета мод периодических дифракционных структур

1.2.1. Расчет мод на основе вычисления полюсов матрицы рассеяния. Дифракционные микро- и наноструктуры с резонансными свойствами представляют большой интерес при создании современных элементов интегральной оптики и фотоники [19, 24–31]. Резонансные свойства таких структур проявляются в резком изменении спектров пропускания и отражения и, как правило, связаны с возбуждением собственных мод структуры. Собственные моды могут быть рассчитаны как полюсы матрицы рассеяния [28, 32]. Такой подход к объяснению оптических свойств дифракционных структур широко используется при описании оптических свойств дифракционных решеток [28, 32], в том числе содержащих анизотропные [33] и гиротропные [29] материалы, фотонно-кристаллических структур [30, 31] и лазерных резонаторов [19].

Расчет полюсов матрицы рассеяния — вычислительно сложная задача. В известных работах предложено несколько итерационных методов ее решения. Самые простые методы заключаются в вычислении полюсов определителя матрицы рассеяния [30, 31] или полюсов ее максимального собственного числа [34]. В работах [26, 27, 35] предложен более совершенный метод, основанный на линеаризации матрицы, обратной к матрице рассеяния. Для адекватного описания оптических свойств метало-диэлектрических дифракционных решеток и плазмонных структур требуется использовать матрицы рассеяния с большим размером. Обычно матрица рассеяния вычисляется на основе метода фурье-мод [2]. Несмотря на ряд подходов к улучшению

сходимости этого метода размеры матрицы рассеяния по-прежнему могут достигать нескольких сотен [36]. Для матриц рассеяния такого большого размера операции вычисления определителя и обратной матрицы рассеяния [26, 27, 31, 34, 35] становятся численно неустойчивыми [37], существенно ограничивая область применимости методов.

Отдельно следует выделить метод расчета частот мод, основанный на интегральной формуле Коши. Этот метод применяется при расчете мод, распространяющихся в плоскопараллельных волноводах [38, 39] и фотонно-кристаллических структурах [34, 40, 41]. Особенностью метода является то, что он позволяет находить все полюсы рассеяния, расположенные в заданной области [34, 40, 41]. Однако в указанных работах сделан ряд допущений о виде матрицы рассеяния, которые как правильно не выполняются для матрицы рассеяния дифракционной решетки.

Ниже мы сравниваем существующие итерационные методы расчета полюсов матрицы рассеяния и предлагаем метод, учитывающий вид матрицы рассеяния в окрестности резонансов и обладающий лучшей сходимостью. Также предложен вариант метода на основе интегральной формулы Коши, который обобщает методы работ [24–26].

1.2.1.1. Резонансное представление матрицы рассеяния. Рассмотрим матрицу рассеяния периодической структуры. Пусть $M = 2N + 1$ обозначает рассматриваемое число фурье-гармоник в представлении поля (1.27). В этом случае матрица рассеяния связывает $2M$ падающих и $2M$ рассеянных волн. С учетом двух состояний поляризации падающих и рассеянных волн размер матрицы рассеяния составит $4M \times 4M$. Для заданных геометрии и материалов решетки матрица рассеяния \mathbf{S} в (1.86) является функцией частоты ω и x -компоненты волнового вектора падающей волны, $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\omega, k_{x,0})$. При описании резонансов в спектре пропускания или отражения решетки фиксируют направление падающей волны и рассматривают матрицу рассеяния как функцию частоты ω : $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\omega)$. При этом резонансам структуры соответствуют полюсы аналитического продолжения $\mathbf{S}(\omega)$ [19]. Действительная часть полюса соответствует частоте падающей волны которая может возбудить моду, в то время как мнимая часть определяет затухание моды.

Рассмотрим аналитическое продолжение, $\mathbf{S}(\omega), \omega \in \mathbb{C}$, матрицы рассеяния на область D комплексной ω -плоскости, ограниченную замкнутой кривой Γ . Будем предполагать, что аномалии Рэлея структуры находятся вдали от интересующей нас области частот. В этом случае аналитическое продолжение $\mathbf{S}(\omega)$ в рассматриваемой области D будет однозначным [42, 43].

Пусть в области D аналитическое продолжение матрицы рассеяния имеет простой полюс при $\omega = \omega_p$. Далее будем рассматривать случай, когда полюсы матрицы рассеяния — простые. Данное предположение допустимо для задач электродинамики и квантовой механики [40]. В этом случае имеет смысл определить вычет матрицы $\mathbf{S}(\omega)$:

$$\text{Res}_{\omega=\omega_p} \mathbf{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \mathbf{S}(\omega) D\omega, \quad (1.175)$$

где контур интегрирования γ выбирается таким образом, чтобы в него попал только один полюс ω_p . Формулу (1.175) следует понимать как *поэлементную* операцию. Если матрица рассеяния имеет единственный полюс в области D , то справедливо следующее представление:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{A}(\omega) + \frac{\mathbf{B}}{\omega - \omega_p}, \quad (1.176)$$

где $\mathbf{B} = \text{Res}_{\omega=\omega_p} \mathbf{S}(\omega)$, а матричнозначная функция $\mathbf{A}(\omega)$ не имеет полюсов в области D , то есть является голоморфной в этой области. В общем случае, когда в области D содержится M полюсов, разложение (1.176) примет следующий вид:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{A}(\omega) + \sum_{m=1}^M \frac{\mathbf{B}_m}{\omega - \omega_p^{(m)}}, \quad (1.177)$$

где $B_m = \text{Res}_{\omega=\omega_p^{(m)}} \mathbf{S}(\omega)$. Первое слагаемое в (1.176), (1.177) описывает нерезонансное рассеяние света, второе слагаемое — резонансное.

Рассмотрим теперь *матричные* свойства $\mathbf{S}(\omega)$. Предположим, что $\mathbf{S}(\omega)$ имеет полюс при $\omega = \omega_p$, а элементы обратной матрицы $\mathbf{S}^{-1}(\omega)$ не имеют полюса на данной частоте. В этом случае ядро матрицы $\mathbf{S}^{-1}(\omega_p)$ определяет нетривиальные решения однородного уравнения,

$$\mathbf{S}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi}^{\text{scat}} = \mathbf{0}, \quad (1.178)$$

где, в соответствии с (1.86), $\boldsymbol{\Psi}^{\text{scat}} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}$.

Таким образом, $\ker \mathbf{S}^{-1}(\omega_p)$ описывает распределение поля, существующее в отсутствии падающих волн, то есть частота ω_p соответствует частоте квазиволноводной моде решетки.

Несложно показать, что $\text{Im } \mathbf{B} = \ker \mathbf{S}^{-1}(\omega_p)$, следовательно $\text{rank } \mathbf{B} = \dim \ker \mathbf{S}^{-1}(\omega_p)$ [40]. Обычно $\text{rank } \mathbf{B} = 1$, то есть одной частоте соответствует только одна мода. Однако при определенных параметрах структуры частоты нескольких различных мод могут совпасть. В этом случае $\text{rank } \mathbf{B} > 1$. Такие резонансы называются вырожденными. Структуры с вырожденными резонансами имеют интересные оптические свойства [24, 25].

Пусть в общем случае $\text{rank } \mathbf{B} = r$. В этом случае для матрицы \mathbf{B} можно записать скелетное разложение [44],

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{R}, \quad (1.179)$$

где $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{r \times n}$, $\text{rank } \mathbf{L} = \text{rank } \mathbf{R} = r$. С учетом (1.179), выражение (1.177) можно представить в виде

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\omega) + \mathbf{L} \frac{1}{\omega - \omega_p} \mathbf{R}. \quad (1.180)$$

При этом общее разложение (1.177) запишем в следующем виде:

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\omega) + \sum_{m=1}^M \mathbf{L}_m \frac{1}{\omega - \omega_p^{(m)}} \mathbf{R}_m = \mathbf{A}(\omega) + \mathbf{L}(\mathbf{I}\omega - \mathbf{\Omega}_p)^{-1} \mathbf{R}, \quad (1.181)$$

где \mathbf{L} , \mathbf{R} — блочные матрицы $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \cdots \mathbf{L}_M]$, $\mathbf{R}^T = [\mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_2^T \cdots \mathbf{R}_M^T]$, а $\mathbf{\Omega}_p$ — диагональная матрица, составленная из $\omega_p^{(m)}$, $m = 1 \dots M$, причем частота $\omega_p^{(m)}$ повторяется столько раз, каков ранг соответствующей матрицы \mathbf{B}_m . Уравнения (1.180), (1.181) задают резонансное представление матрицы рассеяния, которое будет использовано в выводе численных методов вычисления матрицы рассеяния.

1.2.1.2. Вычисление полюсов матрицы рассеяния. Как было показано выше, полюсы матрицы рассеяния определяют собственные моды структуры. Рассмотрим задачу вычисления полюсов матрицы рассеяния $\mathbf{S}(\omega)$, расположенных в области D . Самый простой метод состоит в переходе от задачи поиска полюсов матричнозначной функции $\mathbf{S}(\omega)$ к задаче поиска полюсов скалярной функции $\det \mathbf{S}(\omega)$, то есть к численному решению уравнения

$$1/\det \mathbf{S}(\omega) = 0. \quad (1.182)$$

Данный метод позволяет вычислять полюсы при малой размерности матрицы \mathbf{S} . При большой размерности матрицы $\mathbf{S}(\omega)$ вычисление определителя становится численно неустойчивым. Более устойчивой является задача решения следующего уравнения [34]:

$$1/\max \text{eig } \mathbf{S}(\omega) = 0, \quad (1.183)$$

где $\max \text{eig } \mathbf{S}(\omega)$ — максимальное по модулю собственное число матрицы $\mathbf{S}(\omega)$. Для решения уравнений (1.182), (1.183) можно использовать итерационные методы поиска корня нелинейного уравнения, например метод Ньютона или более общий метод Хаусхолдера [45]. Для уравнения (1.183) этот метод запишется в виде следующей итерационной процедуры

$$\omega_{n+1} = \omega_n + p \frac{\frac{D^{p-1}}{D\omega^{p-1}} \max \text{eig } \mathbf{S}(\omega)}{\frac{D^p}{D\omega^p} \max \text{eig } \mathbf{S}(\omega)} \bigg|_{=\omega_n}, \quad (1.184)$$

где ω_n — начальное приближение полюса. При $p = 1$ уравнение (1.184) соответствует методу Ньютона; при $p = 2$ — методу Галлея. При решении уравнений (1.182), (1.183) метод (1.184) не учитывает вид матрицы рассеяния (1.181), заменяя ее скалярным числом (определителем или максимальным по модулю собственным числом $\mathbf{S}(\omega)$). Это причина достаточно медленной сходимости вышеуказанных методов. В следующих подразделах мы рассматриваем итерационные методы вычисления полюсов матрицы рассеяния с использованием матричных разложений.

Расчет полюсов на основе линеаризации обратной матрицы рассеяния. Рассмотрим итерационный метод расчета полюсов матрицы рассеяния

[19, 32, 33, 34]. Пусть ω_n — некоторое начальное приближение полюса. Разложим матрицу $\mathbf{S}^{-1}(\omega)$ в ряд Тейлора до первого члена:

$$\mathbf{S}^{-1}(\omega) = \mathbf{S}^{-1}(\omega_n) + \left. \frac{d\mathbf{S}^{-1}}{d\omega} \right|_{\omega_n} (\omega - \omega_n). \quad (1.185)$$

Пусть ω_p — полюс матрицы рассеяния, в этом случае существует вектор Ψ^{scat} , являющийся нетривиальным решением системы (1.178). Умножая (1.185) на Ψ^{scat} справа при $\omega = \omega_p$, имеем:

$$\mathbf{S}^{-1}(\omega_n) \Psi^{\text{scat}} = (\omega_n - \omega_p) \left. \frac{d\mathbf{S}^{-1}}{d\omega} \right|_{\omega_n} \Psi^{\text{scat}}. \quad (1.186)$$

Уравнение (1.186) представляет собой обобщенную задачу на собственные значения. Решая её, получим набор собственных чисел $\lambda_k = \omega_n - \omega_p$. Выбирая из собственных чисел число с минимальным модулем, получим следующую итерационную процедуру:

$$\omega_{n+1} = \omega_n - \min \text{eig} \left(\mathbf{S}^{-1}(\omega_n), \left. \frac{d\mathbf{S}^{-1}}{d\omega} \right|_{\omega_n} \right), \quad (1.187)$$

где $\text{eig}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ обозначает вектор, составленный из собственных значений для обобщенной задачи на собственные значения, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{X} = \lambda \mathbf{G} \cdot \mathbf{X}$. Выбор в (1.187) собственного числа с минимальным модулем означает, что в качестве следующего приближения полюса ω_{n+1} выбирается приближение, наиболее близкое к начальному значению ω_n .

Отметим ряд недостатков метода (1.187). Главным недостатком является невозможность численно устойчивого вычисления матрицы, обратной к матрице рассеяния при большом числе порядков [37]. В качестве второго недостатка отметим, что если в окрестности полюса матриц рассеяния $\mathbf{S}(\omega)$ присутствует полюс матрицы $\mathbf{S}^{-1}(\omega)$, то ряд Тейлора в (1.185), не будет сходиться [46].

Решение системы матричных уравнений $\mathbf{A} = \mathbf{LXR}$, $\mathbf{B} = \mathbf{LYR}$. Перед тем как переходить к описанию более совершенных методов вычисления полюсов матрицы рассеяния, основанных на резонансном приближении, рассмотрим необходимый математический аппарат. Пусть даны матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, которые имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{LXR}, \\ \mathbf{B} = \mathbf{LYR}, \end{cases} \quad (1.188)$$

где $\mathbf{L} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{C}^{r \times n}$ — некоторые неизвестные матрицы, $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ — неизвестные диагональные матрицы, причем значение r также неизвестно. Будем считать, что $\text{rank } \mathbf{A} = r$. Требуется найти связь между матрицами \mathbf{X} и \mathbf{Y} . Отметим, что системы такого вида возникают в задаче определения полюсов ЛИС-систем [47, 48].

Рассмотрим метод решения системы (1.188), основанный на сингулярном разложении [49]. Сначала найдем ранг r матрицы \mathbf{A} . Для этого вычислим ее сингулярное разложение $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^*$ (здесь \mathbf{V}^* означает эрмитово сопря-

жение). Ранг r будет определяться числом ненулевых сингулярных чисел. На практике матрица \mathbf{A} может оказаться зашумленной, в этом случае в качестве r следует взять количество сингулярных чисел, больших некоторого порога. Зная ранг \mathbf{A} , мы можем записать компактное сингулярное разложение:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^*, \quad (1.189)$$

где $\mathbf{\Sigma}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ — диагональная матрица, составленная из r наибольших сингулярных чисел матрицы \mathbf{A} ; $\mathbf{U}_r, \mathbf{V}_r \in \mathbb{C}^{n \times r}$ — матрицы соответствующих левых и правых сингулярных векторов. В случае зашумленной матрицы, равенство (1.189) выполняется приближенно и имеет смысл приближения матрицы \mathbf{A} матрицей ранга r .

Отметим, что матрицы \mathbf{U} и \mathbf{V} унитарны, и, следовательно, $\mathbf{U}_r^* \mathbf{U}_r = \mathbf{V}_r^* \mathbf{V}_r = \mathbf{I}$. Умножим уравнения системы (1.188) на \mathbf{U}_r^* слева и на \mathbf{V}_r справа. Получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}_r^* \mathbf{L}) \mathbf{X} (\mathbf{R} \mathbf{V}_r) &= (\mathbf{U}_r^* \mathbf{U}_r) \mathbf{\Sigma}_r (\mathbf{V}_r^* \mathbf{V}_r) = \mathbf{\Sigma}_r, \\ (\mathbf{U}_r^* \mathbf{L}) \mathbf{Y} (\mathbf{R} \mathbf{V}_r) &= \mathbf{U}_r^* \mathbf{B} \mathbf{V}_r. \end{aligned} \quad (1.190)$$

Отметим, что $\text{rank } \mathbf{\Sigma}_r = \text{rank } \mathbf{A} = \text{rank } \mathbf{U}_r = \text{rank } \mathbf{V}_r = r$, следовательно, $\mathbf{U}_r^* \mathbf{L}$ и $\mathbf{R} \mathbf{V}_r$ — квадратные матрицы из $\mathbb{C}^{r \times r}$, при этом являющиеся обратимыми. Умножая второе уравнение (1.190) на $\mathbf{\Sigma}_r^{-1}$ справа, получим

$$(\mathbf{U}_r^* \mathbf{L}) \mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} (\mathbf{U}_r^* \mathbf{L})^{-1} = \mathbf{U}_r^* \mathbf{B} \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1}. \quad (1.191)$$

Уравнение (1.191) можно рассматривать как собственное разложение матрицы, стоящей в правой части уравнения. Таким образом, мы нашли явное выражение для матрицы $\mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1}$:

$$\mathbf{Y} \mathbf{X}^{-1} = \text{diag eig}(\mathbf{U}_r^* \mathbf{B} \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1}). \quad (1.192)$$

Рассмотрим важный частный случай, когда матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} — матрицы единичного ранга, то есть $r = 1$. В этом случае вектор \mathbf{U}_1 будет являться собственным вектором матрицы \mathbf{A} , а \mathbf{V}_1 — собственным вектором матрицы \mathbf{A}^* . Следовательно, матрицу \mathbf{A} можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_1 \frac{\max \text{eig } \mathbf{A}}{\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1} \mathbf{V}_1^*, \quad (1.193)$$

где $\max \text{eig } \mathbf{A}$ — единственное ненулевое собственное число матрицы \mathbf{A} . Векторы \mathbf{U}_1 , \mathbf{V}_1 также будут собственными векторами матриц \mathbf{B} и \mathbf{B}^* , соответственно. Поэтому имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{U}_1 \frac{\max \text{eig } \mathbf{B}}{\mathbf{V}_1^* \mathbf{U}_1} \mathbf{V}_1^*. \quad (1.194)$$

Подставляя (1.193) и (1.194) в (1.192), получаем:

$$y/x = \frac{\max \text{eig } \mathbf{B}}{\max \text{eig } \mathbf{A}}. \quad (1.195)$$

Отметим, что на практике матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} могут быть зашумлены и поэтому в формуле (1.195) следует брать собственные значения, *максимальные* по модулю.

Расчет полюсов на основе резонансного приближения. Рассмотрим итерационный метод расчета полюсов матрицы рассеяния, учитывающий вид матрицы рассеяния в окрестности резонансов. Пусть имеется некоторое начальное приближение полюса $\omega = \omega_n$. Запишем резонансное приближение (1.181), пренебрегая зависимостью нерезонансного слагаемого от частоты:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{A} + \mathbf{L}(\omega\mathbf{I} - \Omega_p)^{-1}\mathbf{R}. \quad (1.196)$$

Вычислим две первые производные $\mathbf{S}(\omega)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}'(\omega) &= -\mathbf{L}(\omega\mathbf{I} - \Omega_p)^{-2}\mathbf{R}, \\ \mathbf{S}''(\omega) &= 2\mathbf{L}(\omega\mathbf{I} - \Omega_p)^{-3}\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Будем предполагать, что $\text{rank } \mathbf{L} = \text{rank } \mathbf{R} = \sum_m = \sum_{m'}^*$. Это предположение говорит о том, что столбцы матрицы \mathbf{L} являются линейно независимыми, или, что то же самое, ядра матриц $\mathbf{S}^{-1}(\omega_p^{(m)})$, $m = 1 \dots M$ являются линейно независимыми. Последнее означает, что распределения рассеянных полей для разных мод являются линейно независимыми. Данное предположение как правило выполняется, когда размер матрицы рассеяния много больше числа мод ($\dim \mathbf{S} > \text{rank } \mathbf{L}$).

Полагая в (1.197) $\omega = \omega_n$, получим систему из двух матричных уравнений относительно неизвестной диагональной матрицы Ω_p . Метод решения систем вида (1.197) приведен в предыдущем пункте. Следуя данному методу (см. (1.192)), диагональная матрица Ω_p вычисляется по формуле

$$\Omega_p = \omega_n \mathbf{I} + 2 \text{diag eig}(\mathbf{U}_r^* \mathbf{S}'(\omega_n) \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1}), \quad (1.198)$$

где $\text{diag eig } \mathbf{F}$ — диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы \mathbf{F} , а матрицы \mathbf{U}_r , Σ_r , \mathbf{V}_r получаются из компактного сингулярного разложения матрицы $\mathbf{S}''(\omega_n) = \mathbf{U}_r \Sigma_r \mathbf{V}_r^*$. Вычисляя собственные числа матрицы в правой части (1.198), приходим к следующей итерационной процедуре:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + 2 \min \text{eig} \left(\mathbf{U}_r^* \mathbf{S}'(\omega_n) \mathbf{V}_r \Sigma_r^{-1} \right). \quad (1.199)$$

Аналогично (1.187), выбор минимального по модулю собственного числа в (1.199) означает, что в качестве следующего приближения полюса ω_{n+1} выбирается приближение наиболее близкое к начальному ω_n .

Итерационная процедура (1.199) предполагает, что в окрестности начального приближения присутствует несколько полюсов. На практике можно считать, что в окрестности ω_n присутствует единственный полюс, соответствующий невырожденному резонансу. В этом случае с использованием соотношения (1.195) итерационная процедура принимает следующий простой вид:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + 2 \frac{\max \text{eig } \mathbf{S}'(\omega_n)}{\max \text{eig } \mathbf{S}''(\omega_n)}. \quad (1.200)$$

В отличие от (1.187), итерационные методы (1.199) и (1.200) основаны на резонансном приближении (1.196), а не на линеаризации матрицы $\mathbf{S}^{-1}(\omega)$. Результаты численных исследований показывают, что итерационные методы (1.199) и (1.200) обладают лучшей сходимостью по сравнению с (1.187). Кроме того, преимуществом предложенного подхода является то, что он остается справедливым при большом числе порядков дифракции (большой размерности матрицы \mathbf{S}) и в случае, когда полюсы матрицы рассеяния и матрицы, обратной к ней, расположены близко друг к другу (см. [46]).

Отметим, что метод (1.187) имеет смысл метода Ньютона для матричнозначных функций, в то время как методы (1.199), (1.200) можно рассматривать как матричное обобщение метода Галлея для решения уравнения вида $1/f(x) = 0$. Вообще, мы можем записать матричный аналог метода Хаусхолдера [45] на основе производных матрицы рассеяния порядка p и $p-1$ ($\mathbf{S}^{(p)}(\omega_n)$, $\mathbf{S}^{(p-1)}(\omega_n)$). В этом случае итерационная процедура (1.199) будет частным случаем ($p=2$) следующей итерационной процедуры:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + p \min \operatorname{eig} \left(\mathbf{U}_r^* \mathbf{S}^{(p-1)}(\omega_n) \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1} \right), \quad (1.201)$$

где матрицы \mathbf{U}_r , $\mathbf{\Sigma}_r$, \mathbf{V}_r определяются из компактного сингулярного разложения матрицы $\mathbf{S}^{(p)}(\omega_n) = \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^*$. Аналог процедуры (1.200) записывается аналогично:

$$\omega_{n+1} = \omega_n + p \frac{\max \operatorname{eig} \mathbf{S}^{(p-1)}(\omega_n)}{\max \operatorname{eig} \mathbf{S}^{(p)}(\omega_n)}. \quad (1.202)$$

Последнее выражение напоминает метод Хаусхолдера (1.184) для решения уравнения (1.183) за тем исключением, что операции дифференцирования и вычисления максимального собственного числа переставлены местами. При $p=1$ методы (1.201), (1.202) будут являться аналогом метода Ньютона, но, в отличие от (1.187), указанный метод основан на вычислении матрицы рассеяния $\mathbf{S}(\omega)$ и ее производной, а не матрицы $\mathbf{S}^{-1}(\omega)$.

Расчет полюсов на основе интегральной формулы Коши. Работоспособность рассмотренных выше методов (1.182), (1.183), (1.187), (1.199), (1.200) существенно зависит от начального приближения полюса $\omega = \omega_n$. Кроме того, указанные методы позволяют найти только один полюс в окрестности начального приближения. Отметим, что при расчете полюсов методами (1.187), (1.199), (1.201) можно использовать все собственные числа при вычислении следующих приближений. Однако, такой подход также не гарантирует, что в интересующей нас области D будут вычислены все полюсы матрицы рассеяния.

Ниже рассмотрен подход для вычисления всех полюсов матрицы рассеяния в заданной области. Подход основан на вычислении контурного интеграла и применении интегральной формулы Коши. Такой подход широко используется при расчете мод многослойных плоскопараллельных [38, 39] и фотоннокристаллических [34, 40] волноводов.

Следуя работам [24, 25, 26], вычислим два контурных интеграла от матричнозначных функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \mathbf{S}(\omega) d\omega, \\ \mathbf{C}_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \omega \mathbf{S}(\omega) d\omega, \end{aligned} \quad (1.203)$$

где Γ — граница области D . Используя представление (1.177), несложно получить, что

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \sum_n \mathbf{B}_n, \\ \mathbf{C}_2 &= \sum_n \omega_p^{(n)} \mathbf{B}_n, \end{aligned} \quad (1.204)$$

где $\mathbf{B}_n = \text{Res}_{\omega=\omega_p^{(n)}} \mathbf{S}(\omega)$. Отметим, что в работе [40] на ряде примеров показана возможность нахождения всех полюсов, ограниченных контуром Γ , на основе интегралов (1.203). Следует отметить, что в работе [40] предполагалось, что матрицы \mathbf{B}_n симметричны, а столбцы матрицы \mathbf{L} в (1.181) — ортогональны. Данные предположения, как правило, не выполняются для матриц рассеяния дифракционных решеток [27].

Рассмотрим метод решения уравнений (1.204) при более общих допущениях. Для этого запишем (1.204) в обозначениях уравнения (1.181):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \mathbf{L}\mathbf{R}, \\ \mathbf{C}_2 &= \mathbf{L}\mathbf{\Omega}_p\mathbf{R}. \end{aligned} \quad (1.205)$$

Как и раньше, будем предполагать, что столбцы матрицы \mathbf{L} являются линейно независимыми. Данное условие является более общим, чем условие ортогональности, использованное в работе [40]. Система уравнений (1.205) может быть решена относительно неизвестной диагональной матрицы $\mathbf{\Omega}_p$ с использованием метода, описанного выше. Следуя данному методу, матрица $\mathbf{\Omega}_p$ вычисляются по формуле

$$\mathbf{\Omega}_p = \text{diag eig}(\mathbf{U}_r^* \mathbf{C}_2 \mathbf{V}_r \mathbf{\Sigma}_r^{-1}), \quad (1.206)$$

где матрицы \mathbf{U}_r , $\mathbf{\Sigma}_r$, \mathbf{V}_r получаются из компактного сингулярного разложения матрицы $\mathbf{C}_1 = \mathbf{U}_r \mathbf{\Sigma}_r \mathbf{V}_r^*$.

1.2.1.3. Численные примеры. Рассматривается расчет полюсов матрицы рассеяния дифракционной решетки с использованием вышеприведенных методов. Для расчета матриц рассеяния решетки использовался метод фурье-мод. Отметим, что выполнение условия аналитичности матрицы рассеяния требует надлежащей реализации метода фурье-мод при комплексных частотах [28, 35].

Рассмотрим задачу расчета собственных мод дифракционной решетки, соответствующей периодической системе щелей в пленке серебра, расположенной на диэлектрическом волноводном слое (рис. 1.10). Нас интересуют моды, которые могут быть возбуждены при нормальном падении плоской

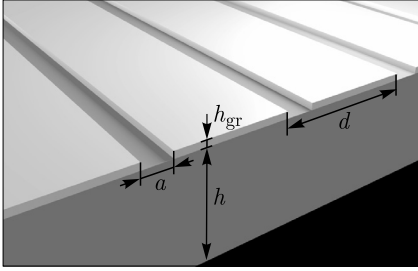


Рис. 1.10. Серебряная дифракционная решетка на волноводном слое (параметры решетки: период $d = 1000$ нм, высота щели $h_{gr} = 50$ нм, ширина щели $a = 200$ нм, толщина волноводного слоя $h = 800$ нм, диэлектрическая проницаемость слоя $\varepsilon = 5,5$)

волны ($k_{x,0} = 0$). Параметры решетки приведены в подписи к рис. 1.10. Для описания диэлектрической проницаемости серебра использовалась модель Лоренца–Друде [50], при этом аналитическое выражение для $\varepsilon_{Ag}(\omega)$ рассматривается как функция комплексной частоты. Отметим, что аналитичность функции $\varepsilon(\omega)$ является необходимым требованием для аналитичности $\mathbf{S}(\omega)$. Если данное условие не будет выполняться, то скорость сходимости итерационных методов существенно ухудшится, а метод на основе интегральной теоремы Коши вообще перестанет работать. Далее будем считать, что частота моды решетки вычислена правильно, если $\max \text{svd } \mathbf{S}(\omega) \geq 10^{10}$, где $\max \text{svd}$ обозначает максимальное сингулярное число матрицы рассеяния. Это же неравенство будем использовать в качестве критерия остановки итерационного алгоритма. Численные расчеты показывают, что для рассматриваемой решетки данное условие соответствует точности определения полюсов $|\Delta\lambda_p| < 10^{-8}$ нм. Такая точность достаточна для практических применений, в том числе для расчета распределения поля мод.

Метод на основе интегральной формулы Коши. Найдем все моды решетки в диапазоне частот $\omega \in [1,0 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}; 1,8 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}]$. При этом будем рассматривать только высокочастотные моды ($|\text{Im } \omega_p| < 5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}$). В дальнейших вычислениях мы использовали значение $M = 21$ в качестве числа гармоник.

Для оценки частот мод методом трапеций по 500 точкам были вычислены контурные интегралы (1.203) по границе вышеуказанной области. На основе формулы (1.206) были получены 10 приближенных значений полюсов. Данные значения указаны в первом столбце табл. 1.2. Во втором столбце представлены точные частоты полюсов, рассчитанные с использованием итерационной процедуры (1.200). В третьем столбце указана ошибка начального приближения. Из таблицы видно, что вычисление полюсов на основе метода контурного интегрирования обладает достаточно высокой точностью.

Для сравнения отметим, что если бы мы вычисляли начальные приближения полюсов на основе расчета матрицы рассеяния на сетке 500×20 точек (10000 вычислений матрицы рассеяния), мы смогли бы найти лишь 9 полюсов. Это связано с тем, что полюсы ω_6, ω_7 находятся очень близко друг к другу. Таким образом, использование метода на основе интегральной формулы Коши является в данном случае оправданным.

Сравнение скоростей сходимости итерационных методов. Рассмотрим вопрос о скорости сходимости итерационных методов (1.187), (1.200) и метода Ньютона для решения уравнения (1.182). Сначала рассмотрим

Таблица 1.2. Полюсы, рассчитанные по формуле (1.206), и их уточнение итерационным методом

	ω_{cauchy}	ω_{exact}	$ \omega_{\text{exact}} - \omega_{\text{cauchy}} $	n_{iter}		
				(1,200)	(1,187)	(1,182)
ω_1	$1,14246 \times 10^{15} - 3,35055 \times 10^{12}i$	$1,14247 \times 10^{15} - 3,34402 \times 10^{12}i$	$7,8665 \times 10^9$	1	2	3
ω_2	$1,15554 \times 10^{15} - 6,85407 \times 10^{11}i$	$1,15551 \times 10^{15} - 6,86647 \times 10^{11}i$	$3,40401 \times 10^{10}$	2	2	3
ω_3	$1,40431 \times 10^{12} - 1,87394 \times 10^{12}i$	$1,40428 \times 10^{15} - 1,87643 \times 10^{12}i$	$3,45275 \times 10^{10}$	2	2	3
ω_4	$1,48168 \times 10^{15} - 3,86736 \times 10^{12}i$	$1,48168 \times 10^{15} - 3,86743 \times 10^{12}i$	$2,35895 \times 10^9$	1	2	3
ω_5	$1,5047 \times 10^{15} - 1,11064 \times 10^{12}i$	$1,50469 \times 10^{15} - 1,11116 \times 10^{12}i$	$1,52001 \times 10^{10}$	2	2	3
ω_6	$1,66425 \times 10^{15} - 7,11868 \times 10^{11}i$	$1,66425 \times 10^{15} - 7,12688 \times 10^{11}i$	$3,4421 \times 10^9$	1	2	3
ω_7	$1,66551 \times 10^{15} - 1,0516 \times 10^{11}i$	$1,66545 \times 10^{15} - 1,06986 \times 10^{11}i$	$5,64199 \times 10^{10}$	2	2	4
ω_8	$1,73171 \times 10^{15} - 3,70973 \times 10^{12}i$	$1,73171 \times 10^{15} - 3,7085 \times 10^{12}i$	$1,23369 \times 10^9$	1	2	3
ω_9	$1,73768 \times 10^{15} - 2,4303 \times 10^{12}i$	$1,73768 \times 10^{15} - 2,43055 \times 10^{12}i$	$2,84178 \times 10^9$	1	2	3
ω_{10}	$1,7766 \times 10^{15} - 2,79575 \times 10^{12}i$	$1,77659 \times 10^{15} - 2,79747 \times 10^{12}i$	$6,09846 \times 10^9$	1	2	3

случай, когда нам известны достаточно хорошие начальные приближения полюсов. В этом случае применим указанные методы для уточнения оценок полюсов, приведенных в столбце 2 табл.1.2. В столбцах 5, 6, 7 табл.1.2 приведено количество итераций при расчете полюсов по методам (1.200), (1.187) и с использованием метода Ньютона для решения уравнения (1.182). Из таблицы 1.2 следует, что медленнее всего сходится метод Ньютона для уравнения (1.182). Предложенный метод (1.200) и метод (1.187) требуют примерно одинакового числа итераций.

Рассмотрим теперь сходимость итерационных методов более подробно в случае, когда начальные приближения полюсов неизвестны. В этом случае был проведен следующий численный эксперимент. Из рассматриваемой области частот выбиралась случайная точка и запускалась итерационная процедура. В таблицах 1.3–1.5 приведен средний процент сошедшихся к полюсу начальных приближений (n_{conv}), среднее число итераций (n_{iter}) и среднее число вычислений матрицы рассеяния ($n_{\text{s-calc}}$).

Отметим, что разные методы требуют разного числа вычислений матрицы рассеяния на каждой итерации. Так, метод Ньютона и метод (1.187) вычис-

ляют первую производную матрицы рассеяния и требуют два вычисления матрицы рассеяния на каждой итерации, тогда как метод Галлея и предложенные методы (1.199), (1.200) вычисляют вторую производную и требуют три вычисления матрицы рассеяния на итерацию. Поэтому при сравнении методов в первую очередь стоит обращать внимание на величину n_{s-calc} , означающую общее количество вычислений матрицы рассеяния. В то же время на каждой итерации матрицы рассеяния могут быть вычислены независимо друг от друга параллельно. Поэтому при параллельной реализации итерационных методов более важной оказывается величина n_{iter} .

Таблица 1.3 была рассчитана для $M = 21$. Из таблицы видно, что среди скалярных методов решения уравнений (1.182), (1.183) меньшее число итераций требуется при использовании метода Галлея. Это объясняется тем, что метод Галлея имеет порядок сходимости 3, в то время как метод Ньютона — 2 [45]. Отметим также, что метод Ньютона для решения уравнения (1.182) сходится лучше, чем для уравнения (1.183).

Таблица 1.3. Сходимость итерационных методов для числа гармоник $M = 21$ (матрица рассеяния 84×84)

	$n_{conv}, \%$	n_{iter}	n_{s-calc}	n_{near}
Метод Ньютона для (1.182) ^a	98,5	9,85	19,7	57,2
Метод Ньютона для (1.183) ^a	94,9	7,08	14,16	42,4
Метод Ньютона для (1.183) ^a	99,9	4,20	12,60	54,5
Метод (1.187) ^b	99,7	5,48	10,96	63,9
Метод (1.199) ^b	100	2,78	8,35	96,1
Метод (1.200) ^b	100	3,40	10,2	64,6

^a — скалярный метод; ^b — матричный метод.

Таблица 1.4. Сходимость итерационных методов для числа гармоник $M = 61$ (матрица рассеяния 244×244)

	$n_{conv}, \%$	n_{iter}	n_{s-calc}	n_{near}
Метод Ньютона для (1.182)	82,5	11,79	23,58	37,7
Метод Ньютона для (1.183)	87,2	7,1	14,2	24,5
Метод Галлея для (1.183)	99,7	4,54	13,62	40,3
Метод (1.187)	78	5,95	11,9	48,6
Метод (1.199)	100	2,88	8,64	87,6
Метод (1.200)	100	3,72	11,16	43,75

По числу вычислений матрицы рассеяния *матричные* методы (1.187), (1.199), (1.200) обладают лучшей сходимостью по сравнению со скалярными. Из таблиц видно, что предложенные методы (1.199) и (1.200) находят полюсы за меньшее число итераций среди всех рассмотренных методов. В частности, среднее число итераций для метода (1.199) почти в 2 раза меньше, чем для метода (1.187). В то же время среднее число вычислений матрицы рассеяния

Таблица 1.5. Сходимость итерационных методов для числа гармоник $M = 201$ (матрица рассеяния 804×804)

	$n_{\text{conv}}, \%$	n_{iter}	$n_{\text{s-calc}}$	n_{near}
Метод Ньютона для (1.182)	98,5	9,85	19,7	57,2
Метод Ньютона для (1.183)	94,9	7,08	14,16	42,4
Метод Ньютона для (1.183)	99,9	4,20	12,60	54,5
Метод (1.187)	99,7	5,48	10,96	63,9
Метод (1.200)	100	3,40	10,2	64,6

для метода (1.199) только в 1,31 раза меньше, чем для метода (1.187). Сравнивая методы (1.199) и (1.200), отметим, что метод (1.200), построенный в предположении наличия одного резонанса в окрестности начального приближения полюса, требует больше итераций, чем общий метод (1.200) в среднем в 1,22 раза.

Рассмотрим теперь работу методов при большем значении числа гармоник. Из таблицы 1.4 видно, что при $M = 61$ сходимость метода (1.187) и метода Ньютона для уравнения (1.182) ухудшается: первый метод находит полюс лишь в 78 % случаев, второй — в 83 %. При $M = 201$ (табл. 1.5), метод (1.187) и метод Ньютона для уравнения (1.182) перестают работать. Методы Ньютона и Галлея для решения уравнения (1.183) сходятся, однако требуют примерно на 30 % большее число итераций (число вычислений матрицы рассеяния), чем предложенные методы (1.199) и (1.200). Отметим, что методы (1.199) и (1.200) сходятся в 100 % случаев.

В дополнение к скорости сходимости важной характеристикой итерационных методов является форма областей притяжения. Говоря о вычислении полюсов, область притяжения полюса ω_p — это множество точек, из которых итерационный метод сходится к ω_p . В идеале, хотелось бы, чтобы метод сходил к ближайшему полюсу. В этом случае при варьировании какого-нибудь параметра решетки мы сможем вычислить соответствующее изменение собственной частоты моды. Следовательно, мы можем легко вычислить функциональную зависимость частоты от какого-нибудь параметра (например, мы можем вычислить дисперсионные кривые, варьируя волновое число $k_{x,0}$). К сожалению, метод Ньютона (как и метод Галлея) характеризуется фрактальными областями притяжения [51].

На рисунке 1.11 представлены области притяжения для области $\text{Re } \omega_0 \in [1,64 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}; 1,75 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}]$, $\text{Im } \omega_0 \in [-5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}; 5 \times 10^{12} \text{ с}^{-1}]$. Мы использовали число гармоник $M = 21$. В соответствии с рис. 1.11 области притяжения предложенного метода (1.199) имеют достаточно регулярную форму, в то время как для остальных методов области притяжения имеют выраженную фрактальную форму.

В качестве численной характеристики формы областей притяжения рассмотрим процентную долю начальных точек, из которых метод сошелся к ближайшему полюсу. Это значение (n_{near}), представленное в последнем столбце таблиц 1.3–1.5, должно быть как можно ближе к 100 %. Как следует из таблиц 1.3–1.5, предложенный метод (1.199) в большинстве случаев

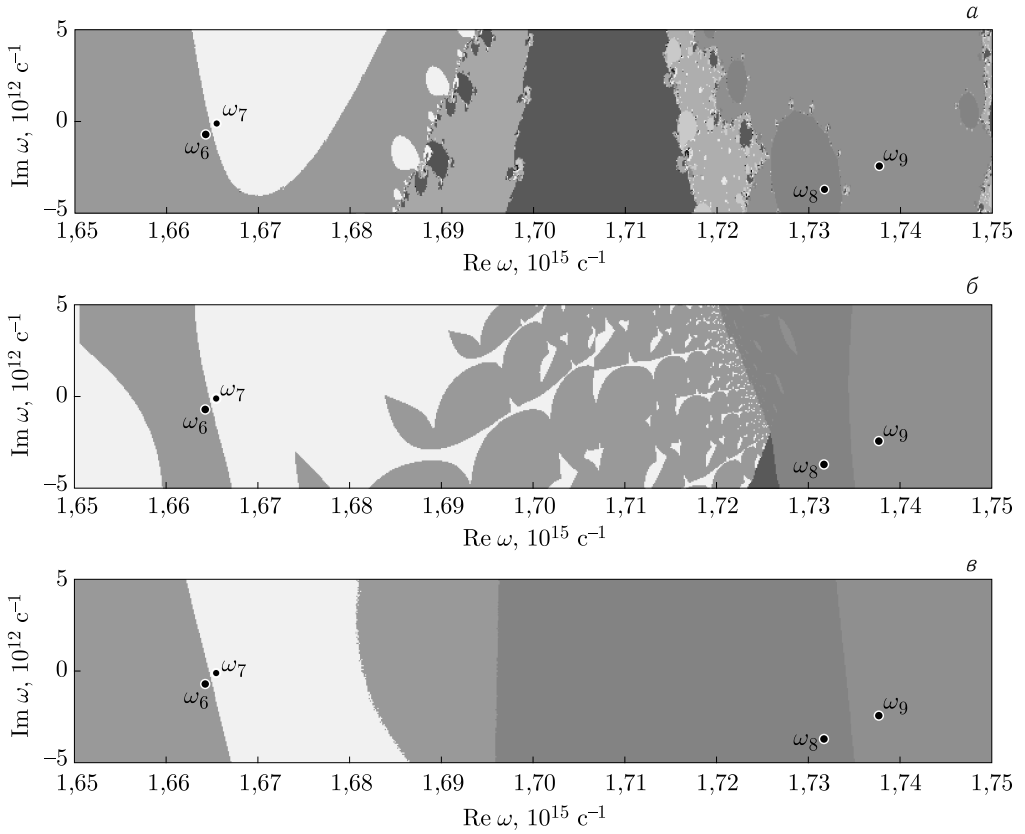


Рис. 1.11. Области притяжения (разные цвета обозначают разные полюсы притяжения): а) метод Ньютона для уравнения (1.182); б) уравнение (1.187); в) уравнение (1.199)

(70–90 %) сходится к ближайшему полюсу. В то же время для остальных методов значение n_{near} лежит в диапазоне от 20 % до 60 %.

Таблицы 1.3–1.5 показывают, что производительность рассмотренных методов уменьшается с увеличением размерности матрицы рассеяния. Следует отметить, что для всех методов за исключением метода (1.187) возможно использовать только часть матрицы рассеяния большой размерности. Например, мы можем использовать центральную часть размера 84×84 большой матрицы рассеяния, вычисленной при количестве гармоник $M = 201$. В этом случае следует ожидать, что производительность методов (1.199), (1.200), так же как и методов Ньютона и Галлея для решения уравнений (1.182), (1.183) будут близки к значениям, приведенным в таблице 1.3.

1.2.2. Расчет мод на основе вычисления собственных значений матрицы прохождения. **1.2.2.1. Расчет мод.** Рассмотрим теперь метод расчета собственных мод структуры, основанный на использовании модификации метода фурье-мод для неперiodических структур, описанной в п. 1.1.4. Пусть рассматриваемая структура периодична вдоль оси z с периодом d и состоит

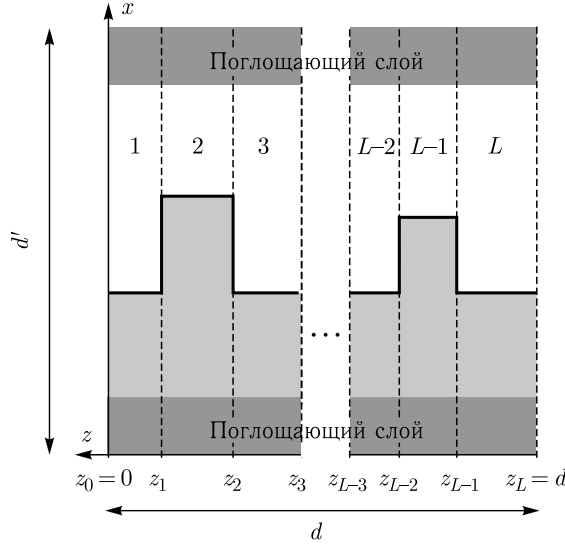


Рис. 1.12. Геометрия структуры

из L областей (слоев) внутри периода, в каждом из которых материальные параметры зависят только от координаты x (рис. 1.12). Для расчета собственных мод структуры с помощью метода фурье-мод вводится искусственная периодизация вдоль оси x с некоторым периодом d' [21, 52]. Для устранения взаимодействия между соседними периодами по оси x добавляются специальные поглощающие слои (например, идеально согласованные поглощающие слои, рассмотренные в п. 1.1.4.2).

После введения искусственной периодизации структура может рассматриваться как периодическая структура вдоль оси x , состоящая из бесконечного числа слоев по оси z . В каждом из слоев при выбранной частоте (длине волны в свободном пространстве) поле может быть представлено в виде (1.58). Аналогично выражению (1.71), граничные условия равенства тангенциальных компонент электромагнитного поля на границах слоев могут быть записаны в виде

$$\mathbf{M}_{l-1} \mathbf{C}_{l-1} = \mathbf{N}_l \mathbf{C}_l, \quad l = \dots, -1, 0, 1, \dots, L, \dots, \quad (1.207)$$

где вектор \mathbf{C}_l и матрицы \mathbf{N}_l и \mathbf{M}_l определяются выражениями (1.66), (1.67) и (1.68), соответственно.

Из (1.207) можно получить связь амплитуд волн в слоях с номерами l и $L+1$:

$$\mathbf{C}_{L+1} = \left(\prod_{l=1}^L \mathbf{N}_{l+1}^{-1} \mathbf{M}_l \right) \mathbf{C}_1 = \mathbf{T} \mathbf{C}_1, \quad (1.208)$$

где \mathbf{T} — так называемая матрица прохождения. Поскольку структура является периодической в направлении оси z , а ее период состоит из L областей (слоев) вдоль этой оси, $L+1$ -й слой совпадает с первым слоем. Следовательно, для

собственных мод структуры выполняется следующее равенство:

$$\mathbf{C}_{L+1} = \beta \mathbf{C}_1, \quad (1.209)$$

где $\beta = \exp(ik_0 n_{\text{ef}} d)$, n_{ef} — эффективный показатель преломления моды (нормированная константа распространения). Учитывая (1.209) в (1.208), получим

$$\mathbf{T} \mathbf{C}_1 = \beta \mathbf{C}_1. \quad (1.210)$$

Таким образом, задача нахождения констант распространения мод сводится к задаче вычисления собственных значений матрицы прохождения. В результате решения задачи на собственные значения (1.210) находим набор значений β , из которых могут быть найдены значения n_{ef} . Представляя n_{ef} в качестве суммы действительной и мнимой частей $n'_{\text{ef}} + n''_{\text{ef}} i$, будем иметь:

$$\beta = \exp[ik_0 (n'_{\text{ef}} + n''_{\text{ef}} i) d] = \exp(ik_0 n'_{\text{ef}} d) \exp(-k_0 n''_{\text{ef}} d). \quad (1.211)$$

Из выражения (1.211) сразу следует, что:

$$n''_{\text{ef}} = -\frac{\ln |\beta|}{k_0 d}. \quad (1.212)$$

Также из выражения (1.211) можно получить следующее выражение:

$$n'_{\text{ef}} = \frac{2\pi l + \arg \beta}{k_0 d}, \quad (1.213)$$

где l — целое число. При $l = 0$ константа распространения моды $k_0 n'_{\text{ef}}$ лежит в диапазоне $[-\pi/d, \pi/d]$, то есть в первой зоне Бриллюэна.

Следует отметить, что вычисление матрицы прохождения по формуле (1.208) может привести к численной неустойчивости, аналогичной численной неустойчивости при вычислении матрицы системы уравнений (1.80). В обоих случаях численная неустойчивость связана с необходимостью обращения матриц \mathbf{N}_l и \mathbf{M}_l , в которые в качестве множителей входят матрицы $\mathbf{X}_l^{(+)}$ и $\mathbf{X}_l^{(-)}$, определяющиеся выражением (1.69) и представляющие собой диагональные матрицы с элементами вида $\exp(\lambda^{(+)} k_0 (z_l - z_{l-1}))$, $\exp(-\lambda^{(-)} k_0 (z_l - z_{l-1}))$. Все действительные части показателей экспонент отрицательны, таким образом, при обращении матриц может возникнуть численное переполнение. Ниже приведен предложенный авторами [53] устойчивый алгоритм для расчета констант распространения и распределений электромагнитного поля мод структуры.

1.2.2.2. Расчет поля. Введем матрицу рассеяния $\mathbf{S}_l^{(L)}$, связывающую амплитуды волн на левых границах слоев с номерами 1 и l :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_l^{(+,L)} \\ \mathbf{C}_1^{(-,L)} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_l^{(L)} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+,L)} \\ \mathbf{C}_l^{(-,L)} \end{bmatrix}. \quad (1.214)$$

Также введем матрицу $\mathbf{S}_l^{(R)}$, связывающую амплитуды волн на правых границах слоев с номерами l и $L+1$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L+1}^{(+,R)} \\ \mathbf{C}_l^{(-,R)} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_l^{(R)} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_l^{(+,R)} \\ \mathbf{C}_{L+1}^{(-,R)} \end{bmatrix}. \quad (1.215)$$

Согласно (1.58), (1.67) и (1.68),

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l^{(-,L)} &= \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{C}_l^{(-)}, \mathbf{C}_l^{(+,L)} = \mathbf{C}_l^{(+)}, \\ \mathbf{C}_l^{(-,R)} &= \mathbf{C}_l^{(-)}, \mathbf{C}_l^{(+,R)} = \mathbf{X}_l^{(+)} \mathbf{C}_l^{(+)}. \end{aligned} \quad (1.216)$$

Устойчивое построение матриц рассеяния (1.214) и (1.215) производится аналогично процессу построения матрицы рассеяния, описанному выше в п. 1.2.6. Будем использовать следующие блочные представления для матриц $\mathbf{S}_l^{(L)}$ и $\mathbf{S}_l^{(R)}$:

$$\mathbf{S}_l^{(L)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,l}^{(L)} & \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \\ \mathbf{R}_{-+,l}^{(L)} & \mathbf{T}_{--,l}^{(L)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_l^{(R)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,l}^{(R)} & \mathbf{R}_{+-,l}^{(R)} \\ \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} & \mathbf{T}_{--,l}^{(R)} \end{bmatrix}. \quad (1.217)$$

Запишем уравнения (1.214) и (1.215) при $l = L+1$ в (1.214) и $l = 1$ в (1.215), учитывая равенства (1.216):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{(-)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L+1}^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_{L+1}^{(L)} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_{L+1}^{(-)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \end{bmatrix}, \quad (1.218)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{L+1}^{(+)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L+1}^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_1^{(R)} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{(+)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (1.219)$$

Перепишем первое уравнение (1.218) и второе уравнение (1.219), используя блочные представления (1.217):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L+1}^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,L+1}^{(L)} & \mathbf{R}_{+-,L+1}^{(L)} \mathbf{X}_{L+1}^{(-)} \\ \mathbf{R}_{-+,1}^{(R)} \mathbf{X}_1^{(+)} & \mathbf{T}_{--,1}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (1.220)$$

Перепишем (1.220), перенося в левую часть $\mathbf{C}_{L+1}^{(-)}$:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{+-,L+1}^{(L)} \mathbf{X}_{L+1}^{(-)} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{--,1}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L+1}^{(+)} \\ \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,L+1}^{(L)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{-+,1}^{(R)} \mathbf{X}_1^{(+)} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (1.221)$$

Учитывая (1.209) в (1.221), получим обобщенную задачу на собственные значения для нахождения значений β :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,L+1}^{(L)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{-+,1}^{(R)} \mathbf{X}_1^{(+)} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{R}_{+-,L+1}^{(L)} \mathbf{X}_{L+1}^{(-)} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{T}_{--,1}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (1.222)$$

Поскольку вычисление матриц рассеяния $\mathbf{S}_l^{(L)}$ и $\mathbf{S}_l^{(R)}$ производится с помощью устойчивого алгоритма, построение и решение задачи на собственные значения (1.222) не влечет за собой численных переполнений.

В результате решения обобщенной задачи на собственные значения (1.222), помимо набора значений β , находим набор собственных векторов $\mathbf{C}_1^{(\pm)}$, описывающих электромагнитное поле собственных мод в первом слое структуры. Для устойчивого вычисления амплитуд волн в произвольном слое с номером l выпишем выражения (1.214) и (1.215) с учетом (1.216) и (1.217):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1^{(-)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_l^{(+)} \\ \mathbf{C}_l^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,l}^{(L)} & \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \\ \mathbf{R}_{-+,l}^{(L)} & \mathbf{T}_{--,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \end{bmatrix}, \quad (1.223)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{L+1}^{(+)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{L+1}^{(+)} \\ \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(+)} & \mathbf{R}_{+-,l}^{(R)} \\ \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(+)} & \mathbf{T}_{--,l}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_l^{(+)} \\ \mathbf{C}_l^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (1.224)$$

Подставляя второе уравнение (1.224) в первое уравнение (1.223) и преобразовывая результат, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l^{(+)} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(+)} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{T}_{++,l}^{(L)} \mathbf{C}_1^{(+)} + \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{T}_{--,l}^{(R)} \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (1.225)$$

Подставляя первое уравнение (1.223) во второе уравнение (1.224), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_l^{(-)} &= \left(\mathbf{I} - \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(+)} \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \right)^{-1} \times \\ &\quad \times \left(\mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{T}_{++,l}^{(L)} \mathbf{C}_1^{(+)} + \mathbf{T}_{--,l}^{(R)} \mathbf{C}_{L+1}^{(-)} \right). \end{aligned} \quad (1.226)$$

Учитывая равенство $\mathbf{C}_{L+1}^{(-)} = \mathbf{C}_1^{(-)} \beta$ и объединяя (1.225) и (1.226), окончательно получаем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_l^{(+)} \\ \mathbf{C}_l^{(-)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(+)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(+)} \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \end{bmatrix}^{-1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{++,l}^{(L)} & \mathbf{R}_{+-,l}^{(L)} \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{T}_{--,l}^{(R)} \\ \mathbf{R}_{-+,l}^{(R)} \mathbf{X}_l^{(-)} \mathbf{T}_{++,l}^{(L)} & \mathbf{T}_{--,l}^{(R)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(+)} \\ \mathbf{C}_1^{(-)} \beta \end{bmatrix}. \quad (1.227)$$

Выражения (1.227) для амплитуд волн $\mathbf{C}_l^{(\pm)}$ являются устойчивыми, поскольку они не содержат обращений потенциально плохо обусловленных матриц, содержащих матрицы $\mathbf{X}_l^{(\pm)}$ в качестве множителей. Найденные амплитуды могут быть использованы в представлении поля (1.58) для устойчивого расчета компонент поля в структуре.

1.2.2.3. Численный пример. В качестве примера рассмотрим расчет мод дифракционной решетки, предназначенной для формирования высокочастотных интерференционных картин затухающих волн и рассмотренной ниже в п. 1.5.2.1 (рис. 1.57–1.60). Для расчета использовался устойчивый алгоритм (выражения (1.222) и (1.227)), описанный выше в п. 1.5.2.1. На рисунке 1.13 показано распределение интенсивности электрического поля, соответствующее интерференции двух распространяющихся в противоположных направлениях собственных мод структуры с константами распространения, наиболее близкими к нулю (соответственно, возбуждаемых при нормальном падении). Распределения на рис. 1.13, а и 1.13, б были рассчитаны при числе гармоник $N = 200$ и $N = 400$, соответственно (полное число гармоник составляет $2N + 1$). При этом численная неустойчивость не наблюдается, и для достаточно большого числа фурье-гармоник рассчитанное распределение интенсивности поля сходится и близко к распределению интенсивности поля в структуре при падении волны в резонансных условиях (рис. 1.59).

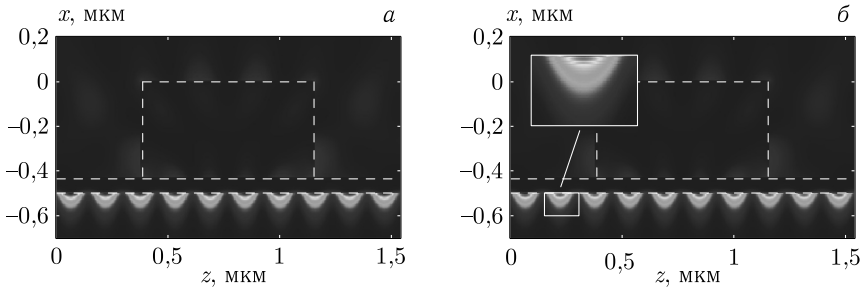


Рис. 1.13. Распределения интенсивности электрического поля $|\mathbf{E}|^2$, соответствующие интерференции двух распространяющихся в противоположных направлениях собственных мод рассматриваемой структуры, рассчитанные с помощью предложенного устойчивого алгоритма при $N = 200$ (а) и $N = 400$ (б)

1.3. Резонансные дифракционные решетки для преобразования оптических импульсов

Взаимодействие света с резонансными дифракционными решетками является предметом интенсивных исследований. В резонансных решетках наблюдается широкий круг экстраординарных (резонансных) оптических эффектов,

включающих экстраординарное оптическое пропускание, полное поглощение падающего излучения, резкие (резонансные) изменения спектра пропускания и отражения [54–59]. Резонансные особенности в спектре пропускания (отражения) связаны с возбуждением квазиволноводных мод [28, 60] и с возникновением новых распространяющихся порядков дифракции (аномалии Рэлея–Вуда) [42, 43].

Большой интерес вызывает дифракция оптических импульсов на резонансных дифракционных решетках. При дифракции оптического импульса на резонансной дифракционной решетке могут происходить сильные изменения формы огибающей импульса [61, 62]. Это делает резонансные решетки эффективным инструментом для выполнения заданных преобразований огибающей импульса. Базовыми операциями преобразования импульсов являются операции дифференцирования и интегрирования огибающей импульса. В настоящее время для интегрирования и дифференцирования оптических импульсов предложены различные варианты брэгговских решеток [63–68]. Продольные размеры брэгговских решеток для интегрирования (дифференцирования) пикосекундных импульсов составляют от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров.

В настоящем разделе с общих позиций рассмотрены преобразования оптического импульса, которые могут быть выполнены дифракционной решеткой в окрестности частот волноводных резонансов и аномалий Рэлея–Вуда. Вид реализуемых преобразований определяется общим видом комплексного коэффициента пропускания дифракционной решетки в окрестностях частот указанных аномалий. Показано, что дифракционные решетки в окрестности частот волноводных резонансов могут выполнять операции дифференцирования, интегрирования (с экспоненциальной весовой функцией). В окрестности частот аномалий Рэлея–Вуда дифракционные решетки позволяют вычислить дробные производную и интеграл порядка $1/2$.

1.3.1. Интегрирование и дифференцирование оптических импульсов. Аномалии Вуда. Рассмотрим оптический импульс с центральной частотой ω_0 и огибающей $P(t)$, распространяющийся в положительном направлении оси Oz . Напряженность поля импульса имеет вид

$$E(z, t) = \exp(ik(\omega_0)z - i\omega_0 t) P_{\text{inc}}(t - z/v_g) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega_0) \exp(ik(\omega)z - i\omega t) D\omega, \quad (1.228)$$

где функция $E(z, t)$ представляет в зависимости от поляризации x - или y -компоненту электрического поля, $k(\omega) = \sqrt{\varepsilon} \omega/c$ — волновое число, $v_g = c/\sqrt{\varepsilon}$ — групповая скорость, ε — диэлектрическая проницаемость среды, $F(\omega)$ — спектр огибающей импульса. Отметим, что под функцией $E(z, t)$ понимается аналитический сигнал [20].

Пусть импульс нормально падает на дифракционную решетку (рис. 1.14). Огибающая прошедшего импульса в 0-м порядке дифракции имеет вид

$$P_{tr}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} T(\omega + \omega_0) F(\omega) \exp(-i\omega t) D\omega, \quad (1.229)$$

где $T(\omega)$ — комплексный коэффициент пропускания (комплексная амплитуда 0-го прошедшего порядка дифракции) как функция частоты. Согласно (1.229), преобразование огибающей падающего импульса дифракционной решеткой в 0-м порядке дифракции соответствует прохождению сигнала $P(t)$ через линейную систему с передаточной функцией (ПФ), $H(\omega) = T(\omega + \omega_0)$.

Рассмотрим преобразования огибающей падающего импульса, которые могут быть выполнены дифракционной решеткой в окрестности частот волноводных резонансов, соответствующих возбуждению в решетке квазиволноводных мод. Для этого воспользуемся резонансным представлением матрицы рассеяния (1.180). Данное представление справедливо когда в окрестности центральной частоты падающего импульса ω_0 решетка имеет один резонанс, соответствующий моде с частотой ω_p . Рассмотрим элемент матрицы рассеяния, соответствующий рассеянию нормально падающей плоской волны в нулевой прошедший порядок дифракции. Из приближения (1.180), в окрестности частот волноводных резонансов (аномалий Вуда) для матрицы рассеяния следует следующее приближение для коэффициента пропускания:

$$T(\omega) \approx a + \frac{b}{\omega - \omega_p} = a \frac{\omega - \omega_z}{\omega - \omega_p}, \quad (1.230)$$

где a — это нерезонансный коэффициент пропускания, в то время как $b/(\omega - \omega_p)$ описывает резонансное пропускание. Значение b можно рассматривать как коэффициент связи моды и падающего света. Следует отметить, что каждому полюсу пропускания ω_p соответствует комплексный нуль $\omega_z = \omega_p - b/a$. Далее коэффициент пропускания $T(\omega)$ рассматривается как функция действительной частоты.

Подставляя уравнение (1.230) в уравнение (1.229) мы можем получить приближенное выражение для огибающей прошедшего импульса. Общий вид преобразования огибающей падающего импульса, который может быть осуществлен дифракционной решеткой в окрестностях частот аномалий Вуда, описывается ПФ $H(\omega) = T(\omega + \omega_0)$, где $T(\omega)$ имеет вид (1.230). Покажем, что дифракционная решетка с ПФ указанного вида позволяет выполнить интегрирование и дифференцирование огибающей импульса. Интегрирование сигнала осуществляется ЛИС системой с ПФ $H_{int}(\omega) = -1/i\omega$. Из-за полюса

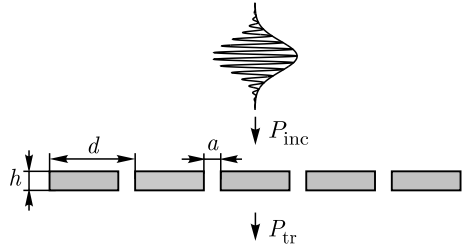


Рис. 1.14. Геометрия рассматриваемой структуры: падающий импульс, бинарная металлическая дифракционная решетка

при $\omega = 0$ указанная ПФ физически нереализуема. На практике возможно только приближенное вычисление интеграла с помощью линейной системы со следующей ПФ:

$$\tilde{H}_{\text{int}}(\omega) \sim \frac{b}{\omega + i/\tau}, \quad (1.231)$$

где постоянная b определяет амплитуду прошедшего сигнала, $\tau \geq 0$ — постоянная времени, определяющая точность интегрирования. ПФ дифракционной решетки, $H(\omega) = T(\omega + \omega_0)$, принимает вид (1.231) при $a = 0$ и $\omega_0 = \text{Re } \omega_p$ в (1.230). При этом $\tau = i/(\omega_0 - \omega_p) = 1/(-\text{Im } \omega_p)$. Отметим, что согласно условиям причинности $\text{Im } \omega_p \leq 0$. Импульсная характеристика системы с ПФ (1.231) имеет вид $h(t) = -ib \exp(-t/\tau) \theta(t)$ (см. [69]), где $\theta(t)$ — функция Хэвисайда. Прошедший сигнал задается сверткой $P_{\text{tr}}(t) = P_{\text{inc}}(t) * h(t)$. Таким образом, мы получили, что дифракционная решетка позволяет выполнить интегрирование входного сигнала с экспоненциальным весом:

$$\begin{aligned} P_{\text{tr}}(t) &= -ib \int_0^{+\infty} P_{\text{inc}}(t - T) \exp(-T/\tau) dT = \\ &= -ib \int_{-\infty}^t P_{\text{inc}}(T) \exp(-(t - T)/\tau) dT. \end{aligned} \quad (1.232)$$

Рассмотрим теперь операцию дифференцирования. Дифференцирование сигнала осуществляется линейной системой с ПФ $H_{\text{diff}}(\omega) = -i\omega$. Операция дифференцирования является неустойчивой к высокочастотным шумам. Поэтому для дифференцирования можно использовать систему со следующей ПФ:

$$\tilde{H}_{\text{diff}}(\omega) = \tilde{a} \omega \frac{1}{\omega \tau + i}, \quad (1.233)$$

где величина $\tilde{a} = a\tau$ определяет амплитуду прошедшего сигнала. Последний множитель в (1.233) соответствует интегратору и играет роль регуляризующего фильтра низких частот. ПФ дифракционной решетки (1.230) принимает вид (1.233) при $\omega_0 = \omega_z \in \mathbb{R}$, где ω_z — комплексный нуль функции $T(\omega)$. При этом $\tau = i/(\omega_0 - \omega_p)$ — комплексный аналог постоянной времени.

Таким образом, можно сказать, что дифференцирование осуществляется в нулях функции $T(\omega)$, а интегрирование — в полюсах. ПФ идеального дифференциатора получается из ПФ (1.233) при $|\tau| \rightarrow 0$ (при бесконечном удалении полюса от центральной частоты импульса ω_0). В противоположность этому, ПФ идеального интегратора получается из ПФ (1.231) при $\tau \rightarrow \infty$ (при стремлении полюса ω_p к центральной частоте импульса ω_0).

Из закона сохранения энергии, $|T(\omega_0)|^2 \leq 1$, и уравнения (1.230) несложно получить связь между постоянной времени τ и амплитудой $|b|$ сигнала на выходе интегратора:

$$|b| \cdot \tau \leq 1. \quad (1.234)$$

Аналогично, из условия $|T(+\infty)|^2 \leq 1$ соотношение между τ и амплитудой сигнала, $|\tilde{a}| = |T'(\omega_0)| = |a\tau|$, на выходе дифференциатора задается

выражением

$$|\tilde{a}| |\tau|^{-1} \leq 1. \quad (1.235)$$

Из выражений (1.234), (1.235) следует, что идеальное интегрирование ($\tau \rightarrow \infty$) и идеальное дифференцирование ($\tau \rightarrow 0$) невозможны, поскольку им соответствуют нулевые амплитуды (энергии) прошедших сигналов.

1.3.2. Типы решеток для интегрирования и дифференцирования импульсов. Анализ в предыдущих разделах относился к дифракционным решеткам общего вида, без каких-либо предположений о материале решетки (диэлектрик или металл), ее симметрии, либо отношении периода к длине волны. Теперь рассмотрим вопрос о том, какие дифракционные решетки более всего подходят для интегрирования и дифференцирования. Вид функции $T(\omega)$ и параметры a , b , ω_p в (1.230) зависят от геометрических параметров решетки (период, ширина и высота щелей и т. д.). Надлежащим выбором данных параметров можно получить ПФ решеток в виде (1.231), (1.233) и управлять соотношением между качеством интегрирования (дифференцирования) и энергией прошедшего сигнала. Определение конфигурации дифракционной решетки и расчет ее параметров из условия получения заданной функции $H(\omega)$ является сложной задачей, которая обычно решается с использованием оптимизационных методов.

Предположим, что были рассчитаны геометрические параметры решетки, имеющей ПФ вида (1.231) или (1.233). Из-за технологических погрешностей функция пропускания $T(\omega)$ изготовленной решетки будет несколько отличаться от расчетной. Это приведет к некоторому изменению функции $T(\omega)$. В ряде случаев ошибки изготовления могут быть компенсированы изменением центральной частоты падающего импульса [65–67]. Действительно, ошибки в параметрах интегрирующей решетки приведут к смещению полюса, которое может быть скомпенсировано изменением центральной частоты падающего импульса. Сложнее обстоит дело с дифференцирующими решетками. Ошибки в изготовлении дифференцирующей решетки могут привести к тому, что нуль функции пропускания $T(\omega)$ изготовленной решетки станет комплексным. В этом случае, решетка не будет выполнять дифференцирование ни при какой центральной частоте. У субволновой диэлектрической решетки функция комплексного пропускания будет всегда иметь *действительный* нуль в окрестности резонанса [70]. Поэтому для дифференцирования оптических импульсов целесообразно использовать диэлектрические решетки, работающие на пропускание. Именно такие дифференцирующие решетки были рассмотрены в [71, 72]. Для дифференцирования в отражении следует использовать субволновые диэлектрические решетки, симметричные в направлении распространения импульса (имеющие горизонтальную плоскость симметрии). В работе [70] показано, что в таких симметричных решетках может быть достигнуто нулевое отражение. В частности, данному условию удовлетворяют широко используемые для дифференцирования брэгговские решетки с дефектом [66, 68]. Следует отметить, что диэлектрическая решетка может одновременно дифференцировать в пропускании и интегрировать в отражении с одной и той же постоянной времени.

При интегрировании оптических импульсов нет требований к действительности нуля функции $T(\omega)$, поэтому решетка может быть изготовлена из проводящих материалов. Для интегрирования необходимо равенство нулю величины a в (1.230). Это означает, что интегрирующая решетка должна иметь большое пропускание на частоте резонанса $\omega_0 = \text{Re}\omega_p$, при малом фоновом пропускании. Такой спектр пропускания характерен для металлических дифракционных решеток, обладающих эффектом экстраординарного оптического пропускания (англ. extraordinary optical transmission) [54, 55]. Данный эффект состоит в появлении на определенных частотах в спектре пропускания решетки резких пиков. Обычно он наблюдается в субволновых металлических решетках, поддерживающих плазмонные моды. Отметим, что такие плазмонные решетки могут интегрировать только ТМ-поляризованные импульсы.

1.3.3. Дробное интегрирование и дифференцирование оптических импульсов. Аномалии Рэлея–Вуда. Выражение (1.230) записано в предположении, что аналитическое продолжение $T(\omega)$ — однозначная функция в окрестности ω_p . Это условие выполняется вдали от так называемых аномалий Рэлея, которые связаны с появлением дополнительных распространяющихся порядков дифракции. Частоты Рэлея, связанные с появлением $\pm m$ -х порядков дифракции, задаются как $\omega_R = \frac{2\pi}{d} \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot m$. В окрестности частот Рэлея функция $T(\omega)$ имеет характерные изломы. Излом функции $T(\omega)$ связан с тем, что точка $\omega = \omega_R$ является точкой ветвления [42, 43]. Наличие излома позволяет реализовать спектральные преобразования отличные от описанных уравнениями (1.231)–(1.233).

Рассмотрим комплексное пропускание T как функцию z -компоненты волнового вектора, $k_z = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{\omega^2 - \omega_R^2} / c$, $\pm m$ -х порядков дифракции. В этом случае функция $T(k_z)$ будет однозначной в окрестности частоты ω_R [61]. Также однозначной будет функция T от аргумента $\xi = \sqrt{\omega - \omega_R}$, поскольку $k_z(\xi)$ — однозначная функция в окрестности частоты ω_R . В этом случае уравнения аналогичные уравнениям (1.176), (1.178), (1.230) будут выполняться для функции $\tilde{T}(\xi)$ (и соответствующей матрицы рассеяния $\tilde{S}(\xi)$). Таким образом, в окрестности частот Рэлея мы можем использовать следующее приближение для коэффициента пропускания:

$$T(\omega) = \tilde{T}(\xi) \approx a + \frac{b}{\xi - \xi_p} = a \frac{\xi - \xi_z}{\xi - \xi_p}. \quad (1.236)$$

где $\xi = \sqrt{\omega - \omega_R}$, а коэффициенты a , b описывают резонансное и нерезонансное пропускание, ξ_p — комплексный полюс, а ξ_z — комплексный нуль функции $\tilde{T}(\xi)$.

Рассмотрим преобразование, выполняемое решеткой, когда центральная частота импульса совпадает с частотой Рэлея ($\omega_0 = \omega_R$). Соответствующая ПФ, $H(\omega) = T(\omega + \omega_0) = \tilde{T}(\sqrt{\omega})$, при $a = 0$ имеет вид

$$H(\omega) \approx b \cdot \frac{1}{\sqrt{\omega} - \xi_p}. \quad (1.237)$$

Импульсная характеристика системы с ПФ (1.237) может быть получена в виде

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\omega} - \xi_p} d\omega = b \left[\frac{1}{\sqrt{i\pi t}} - i\xi_p \cdot w(-\xi_p \sqrt{it}) \right] \cdot \theta(t), \quad (1.238)$$

где $\theta(t)$ — функция Хэвисайда, $w(x) = e^{-x^2} \operatorname{erfc}(-ix)$ комплексная функция ошибок (или функция Фаддеевой) [73], erfc — дополнительная функция ошибок. Вывод интеграла (1.238) приведен в работе [74]. Согласно (1.238), огибающая импульса, прошедшего через дифракционную решетку, имеет вид

$$P_{\text{tr}}(t) = b \int_0^{+\infty} P_{\text{inc}}(t-T) \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{i\pi T}} - i\xi_p \cdot w(-\xi_p \sqrt{iT}) \right] dT. \quad (1.239)$$

Выражение (1.239), как и выражение (1.232), описывает интегрирование падающего импульса, но с другой функцией затухания. Представим (1.239) в виде

$$P_{\text{tr}}(t) = b\sqrt{-i} \cdot \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_{-\infty}^t (t-T)^{-1/2} P_{\text{inc}}(T) dT - \\ - ib\xi_p \cdot \int_{-\infty}^t w(-\xi_p \sqrt{i(t-T)}) \cdot P_{\text{inc}}(T) dT. \quad (1.240)$$

Выражение (1.240) позволяет рассматривать прошедший сигнал как дробный интеграл порядка $1/2$ от входного сигнала. При этом второе слагаемое в (1.240) описывает аддитивную ошибку вычисления дробного интеграла. По аналогии с (1.234), из закона сохранения энергии, $|\tilde{T}(0)|^2 \leq 1$, несложно получить следующую связь между амплитудой прошедшего сигнала и точностью интегрирования $|\xi_p|^{-1}$:

$$|b| \cdot |\xi_p|^{-1} \leq 1. \quad (1.241)$$

При $\xi_z = 0$, где $\xi_z = \xi_p - b/a$ — комплексный нуль функции $\tilde{T}(\xi)$ в (1.236), ПФ решетки принимает вид

$$H(\omega) = a \frac{\sqrt{\omega}}{\sqrt{\omega} - \xi_p} = a \xi_p^{-1} \sqrt{\omega} \frac{1}{\sqrt{\omega} \cdot \xi_p^{-1} - 1}, \quad (1.242)$$

где коэффициент $\tilde{a} = a \xi_p^{-1}$ определяет амплитуду прошедшего сигнала. ПФ (1.242) описывает дробное дифференцирование порядка $1/2$. Согласно (1.242), вычисление полупроизводной с использованием резонансной дифракционной решетки можно представить как точное вычисление полупроизводной с последующим сглаживанием сигнала дробным интегрированием. ПФ идеального дробного дифференциатора получается из ПФ (1.242) при $|\xi_p^{-1}| \rightarrow 0$. По аналогии с (1.235) из условия $|T(+\infty)|^2 \leq 1$ можно записать

следующую связь между амплитудой сигнала, $|\tilde{a}| = |a \xi_p^{-1}|$, на выходе дробного дифференциатора и величиной $|\xi_p|$ (аналогом постоянной времени):

$$|\tilde{a}| \cdot |\xi_p| \leq 1. \quad (1.243)$$

1.3.4. Примеры расчета дифференцирующих решеток. 1.3.4.1. Расчет решетки для дифференцирования импульсов. В качестве примера была рассчитана резонансная дифракционная решетка (врезка к рис. 1.15) для дифференцирования ТМ-поляризованных импульсов с центральной частотой $\omega_0 = 1,2153 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ($\lambda_0 \approx 1550 \text{ нм}$). Параметры решетки указаны в подписи к рис. 1. Данные параметры были получены минимизацией постоянной времени τ при условии $T(\omega_0) = 0$. Для вычисления постоянной времени τ на каждой итерации строилась аппроксимация Паде порядка $[1/1]$ функции $T(\omega)$ в окрестности частоты ω_0 . На рисунке 1.15, а показана огибающая падающего импульса. На рисунке 1.15, б показан модуль огибающей импульса, прошедшего через решетку, и модуль аналитически рассчитанной производной. Расчет прошедшего импульса проводился по методу Фурье-мод (см. п. 1.1.2). Для оценки качества дифференцирования использован выборочный коэффициент корреляции. Для графиков на рис. 1.15, б он составляет 0,995, что говорит о высокой точности вычисления производной. Для подтверждения факта, что дифференцирование происходит при резонансных условиях, были рассчитаны комплексные частоты собственных мод решетки по методу матрицы рассеяния (см. п. 1.2.1). Согласно расчетам,

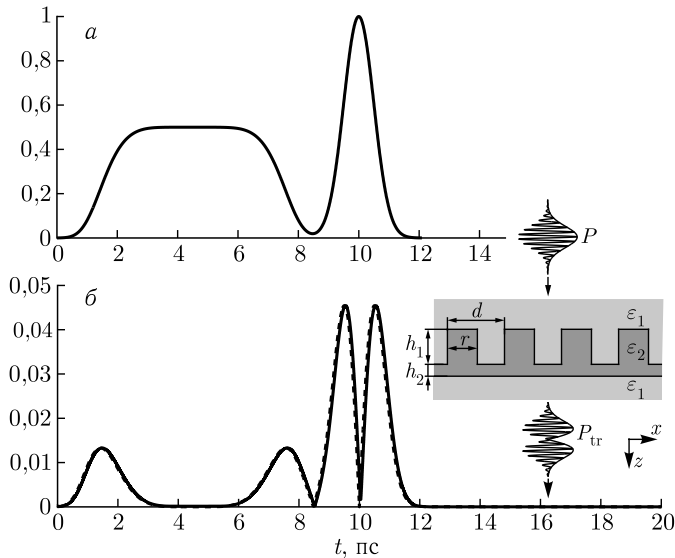


Рис. 1.15. Огибающая падающего импульса (а). Модуль амплитуды прошедшего сигнала (непрерывная линия) и модуль аналитически рассчитанной производной (пунктир) (б). На врезке — геометрия резонансной дифракционной решетки (период $d = 1010 \text{ нм}$, высота ступеньки $h_1 = 620 \text{ нм}$, ширина ступеньки $r = 530 \text{ нм}$, толщина слоя $h_2 = 210 \text{ нм}$, $\epsilon_1 = 2,1$, $\epsilon_2 = 5,5$)

в решетке существует квазиволноводная ТМ-мода с комплексной частотой $\omega_p = 1,2226 \cdot 10^{15} - 2,6347 \cdot 10^{13} i \text{ с}^{-1}$, действительная часть которой близка к центральной частоте, $\omega_0 = 1,2153 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

1.3.4.2. Расчет решетки для дробного дифференцирования импульсов. Была рассчитана дифракционная решетка (врезка к рис. 1.16) для вычисления дробной производной порядка $1/2$. Параметры решетки представлены в подписи к рис. 1.16. Указанные параметры были получены минимизацией величины $|\xi_p|$ при условии $T(\omega_0) = 0$. Для вычисления постоянной времени τ на каждой итерации строилась аппроксимация Паде порядка $[1/1]$ функции $T(\xi)$ в окрестности частоты ω_0 . На рисунке 1.16 представлен модуль амплитуды огибающей прошедшего сигнала, прошедшего через решетку и аналитически рассчитанная дробная производная. В качестве падающего сигнала рассматривался импульс, изображенный на рис. 1.1, а.

В сравнении с предыдущим примером (рис. 1.15, б), качество дифференцирования на рис. 1.16 несколько ухудшилось, коэффициент корреляции составляет 0,961. В то же время, в соответствии с упомянутым соотношением между качеством дифференцирования и энергией прошедшего сигнала, амплитуда прошедшего импульса на рис. 1.16 на порядок выше.

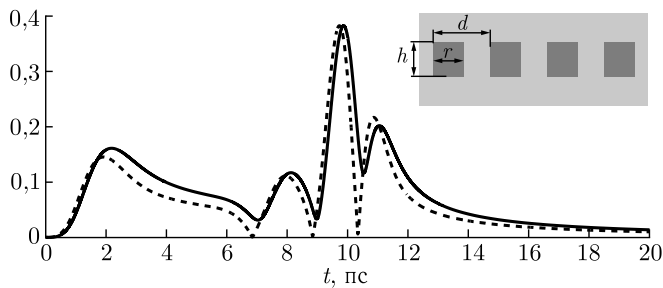


Рис. 1.16. Модуль амплитуды прошедшего сигнала (непрерывная линия) и модуль аналитически рассчитанной дробной производной (пунктир). На врезке — геометрия резонансной диффренцирующей структуры (период $d = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_1}$, высота решетки $h = 650 \text{ нм}$, ширина ступеньки $r = 570 \text{ нм}$)

1.3.5. Примеры расчета интегрирующих решеток. 1.3.5.1. Расчет решетки для интегрирования импульсов. В качестве примера интегрирующей дифракционной решетки была рассчитана структура, соответствующая периодической системе щелей в пленке серебра (рис. 1.10), для интегрирования ТМ-поляризованных импульсов с центральной частотой $\omega_0 = 1,2153 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$ ($\lambda_0 = 1550 \text{ нм}$). Для диэлектрической проницаемости серебра использовалась модель Лоренца–Друде [50]. В качестве диэлектрических проницаемостей материалов над решеткой, под решеткой и в щелях решетки использовалось значение $\varepsilon = 1$. Параметры рассчитанной решетки указаны в подписи к рис. 1.10. Значения указанных параметров были получены в результате оптимизации по критериям $b \rightarrow \max$, $\tau \rightarrow \max$ при условиях $a = 0$, $\text{Re } \omega_p = \omega_0$. Для вычисления критериев b , τ на каждой итерации строилась

аппроксимация Паде порядка $[1/1]$ функции $T(\omega)$ в окрестности частоты ω_0 . Для расчета функции $T(\omega)$ использовался метод фурье-мод (см. раздел 1.1.2).

Спектр пропускания рассчитанной решетки представлен на рис. 1.17. Для объяснения резонансного пика на рис. 1.17 были рассчитаны комплексные частоты собственных мод решетки как полюсы матрицы рассеяния (см. раздел 1.2.1). Было получено следующее значение комплексной частоты моды $\omega_p = (1,215 \cdot 10^{15} - 3,276 \cdot 10^{11}i) \text{ с}^{-1}$, соответствующей резонансу на рис. 1.17. Модельный спектр $I(\omega) \sim |b/(\omega - \omega_p)|^2$ при оцененном значении ω_p показан на рис. 1.17, *а* штриховой линией и хорошо совпадает с расчетным спектром. Оценка ω_p позволяет оценить ширину резонанса по полуспаду интенсивности, $\Delta\omega = -2\text{Im}\omega_p = 6,552 \cdot 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ($\Delta\lambda = 0,836 \text{ нм}$), и постоянную времени, $\tau = 3,05 \text{ пс}$.

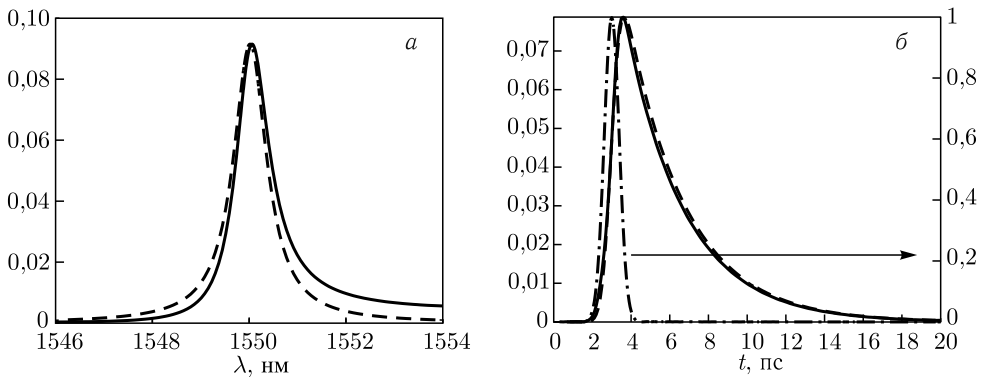


Рис. 1.17. Спектр пропускания интегрирующей решетки (период $d = 1540 \text{ нм}$, высота $h = 80 \text{ нм}$, ширина щелей $a = 440 \text{ нм}$) и модельный спектр (пунктирная линия) (*а*). Огибающая падающего импульса (штрих-пунктир; ось справа), огибающая импульса, прошедшего через структуру (сплошная линия; ось слева); аналитически рассчитанный по формуле (1.232) интеграл (пунктир; ось слева) (*б*)

Отметим, что толщина рассчитанной решетки составляет 90 нм. Для сравнения, характерный размер брэгговской решетки, осуществляющей интегрирование импульса с длительностью в несколько пикосекунд составляет единицы миллиметров [63, 64].

На рисунке 1.17, *б* представлены огибающая падающего гауссова импульса (ширина по полуспаду 0,912 пс) и рассчитанная огибающая импульса, прошедшего через решетку. Огибающая прошедшего импульса хорошо совпадают с интегралом (1.232) от огибающей падающего импульса с экспоненциальной весовой функцией $\exp(-t/\tau)$, где $\tau \approx 3,05 \text{ пс}$. Интеграл (1.232) показан на рис. 1.17, *б* штриховой линией.

1.3.5.2. Расчет решетки для дробного интегрирования импульсов.

В качестве второго примера была рассчитана решетка для вычисления дробного интеграла. Спектр пропускания рассчитанной решетки представлен на рис. 3, *а*, параметры решетки указаны в подписи к рисунку. Решетка имеет период $d = \lambda_0 = 1550 \text{ нм}$, таким образом аномалии Рэлея–Вуда у этой решетки

связаны с ± 1 -ми порядками дифракции. С использованием метода матрицы рассеяния был рассчитан полюс матрицы рассеяния:

$$\mathbf{S}(\xi) : \xi_p = \left(-2,154 \cdot 10^5 + 1,025 \cdot 10^4 i \right) c^{-1/2} \\ \left(k_z = \left(-8,738 \cdot 10^{-3} + 4,157 i \cdot 10^{-4} \right) \omega_0 / c \right).$$

Модельный спектр, $I(\omega) \sim \left| a \frac{\sqrt{\omega - \omega_0}}{\sqrt{\omega - \omega_0} - \xi_p} \right|^2$, при оцененном значении ξ_p показан на рис. 3, *а* штриховой линией. Из (1.236) несложно получить следующую оценку ширины резонанса по полуспаду интенсивности:

$$\Delta\omega_{RW} = \left(\sqrt{2(\operatorname{Im} \xi_p)^2 + (\operatorname{Re} \xi_p)^2} + \operatorname{Im} \xi_p \right)^2 + \\ + \left(\sqrt{2(\operatorname{Re} \xi_p)^2 + (\operatorname{Im} \xi_p)^2} + \operatorname{Re} \xi_p \right)^2. \quad (1.244)$$

При указанном ξ_p , $\Delta\omega_{RW} = 5,913 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, что значительно меньше минимально возможной ширины плазмонных резонансов соответствующих аномалиям Вуда [75]. На рисунке 1.18, *б* непрерывной линией показана огибающая импульса, прошедшего через дифракционную решетку. В качестве падающего импульса рассматривался гауссов импульс (на рис. 1.17, *б*). Пунктирной линией на рис. 1.18, *б* показан интеграл (1.239). Различие непрерывной и пунктирной линий на рис. 1.18, *б* объясняется некоторым отличием спектра пропускания от модельного спектра на рис. 1.18, *а*. Штрихпунктиром на рис. 1.18, *б* показано первое слагаемое формулы (1.240), соответствующее аналитически рассчитанному дробному интегралу порядка 1/2 от огибающей падающего импульса. Точечной линией отмечено второе слагаемое в формуле (1.240),

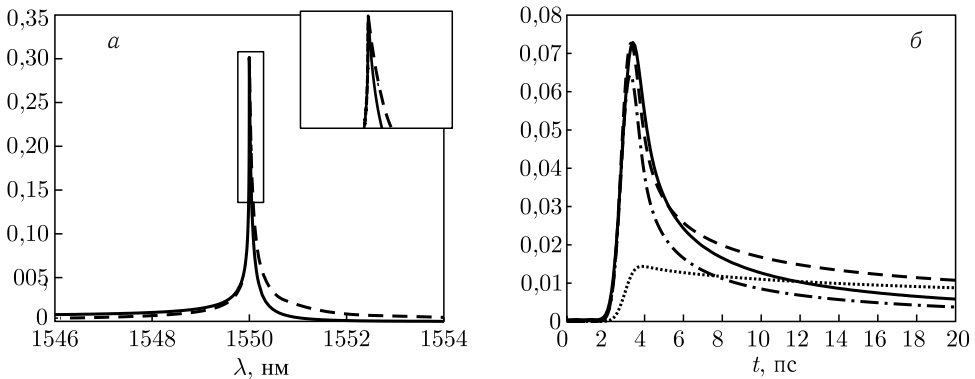


Рис. 1.18. Спектр пропускания решетки (сплошная линия) для дробного интегрирования (период $d = 1550$ нм, высота $h = 280$ нм, ширина щелей $a = 60$ нм) и модельный спектр (пунктир) (*а*). Огибающая импульса, прошедшего через структуру (сплошная линия); дробный интеграл порядка 1/2 (штрих-пунктир); ошибка вычисления дробного интеграла (модуль второго слагаемого формулы (1.240)) (точечная линия); интеграл, рассчитанный по формуле (1.240) (пунктир) (*б*)

рассчитанное на основе вычисленного значения ξ_p структуры. Аналитически рассчитанные величины из формулы (1.240) приведены с масштабным коэффициентом, обеспечивающим равенство максимальных значений модулей аналитического полуинтеграла и прошедшего сигнала.

Следует отметить различную длительность прошедших импульсов на рис. 1.17, 1.18. Импульс, прошедший через решетку для дробного интегрирования (рис. 1.18), является более длинным. При этом в начальный интервал времени ($4 < t < 6$ пс) этот импульс затухает быстрее, чем импульс на рис. 1.17. Разная длительность и характер затухания импульсов объясняются различным видом импульсных характеристик (весовых функций) в (1.232), (1.239). Импульсная характеристика интегрирующей решетки убывает как $e^{-t/\tau}$. Можно показать, что модуль импульсной характеристики (1.238) решетки для дробного интегрирования при $t \rightarrow \infty$ убывает как функция $1/\sqrt{t}$. Более медленное убывание импульсной характеристики (1.238) приводит к более медленному затуханию прошедшего импульса [42].

1.4. Дифракционные оптические элементы для управления распространением поверхностных плазмон-поляритонов

В настоящем разделе рассмотрен расчет дифракционных оптических элементов (ДОЭ) для управления распространением поверхностных плазмон-поляритонов (ППП) — электромагнитных волн, распространяющихся в металлодиэлектрических структурах. В подразделе 1.4.1 рассмотрен вывод дисперсионного соотношения поверхностного плазмон-поляритона, распространяющегося на границе раздела между металлом и диэлектриком, и описаны его характеристики. В подразделе 1.4.2 приведены результаты исследования механизмов фазовой модуляции PPP с помощью диэлектрических ступенек с изменяющейся длиной и высотой, использующиеся в п. 1.4.4 для расчета дифракционных линз для фокусировки PPP. Подраздел 1.4.3 посвящен описанию предложенного авторами метода подавления паразитного рассеяния в элементах для PPP и плазмонных мод с помощью двухслойных диэлектрических структур. Расчет линз для PPP в подразделе 1.4.4 проводится аналогично расчету (ДОЭ) в рамках скалярной теории дифракции, где прохождение падающей волны через элемент описывается фазовой модуляцией входного волнового поля [12, 76–78]. При этом фазовый набег в каждой точке вычисляется через решение модельной задачи прохождения падающей световой волны через диэлектрическую пластинку. Толщина пластинки равна толщине оптического элемента в рассматриваемой точке. Аналогично описанию прохождения световой волны через (ДОЭ) в скалярной теории дифракции, для описания прохождения PPP через дифракционную структуру предложено использовать модельную задачу дифракции PPP на диэлектрической ступеньке, расположенной на поверхности распространения. Изменения амплитуды и фазы PPP в каждой точке на выходе структуры считаются такими же, как и при прохождении PPP через ступеньку, у которой длина и высота совпадают с параметрами диэлектрического микрорельефа в данной

точке. В подразделе 1.4.5 рассмотрен расчет диэлектрических брэгговских отражающих решеток для ППП.

1.4.1. Дисперсионное соотношение и свойства поверхностных плазмон-поляритонов. Поверхностные плазмон-поляритоны (ППП) представляют собой электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль границы раздела металл/диэлектрик [79]. В настоящем подразделе приведен вывод дисперсионного соотношения поверхностных плазмон-поляритонов и рассмотрены свойства ППП.

1.4.1.1. Дисперсионное соотношение. Рассмотрим вывод дисперсионного соотношения поверхностных плазмон-поляритонов на плоской границе раздела двух полубесконечных изотропных сред. Магнитную проницаемость сред положим равной единице. Пусть граница раздела — плоскость $z = 0$, при этом среды с диэлектрическими проницаемостями ε_d и ε_m соответствуют областям $z > 0$ и $z < 0$ (рис. 1.19). Будем полагать, что $\varepsilon_d \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_m \in \mathbb{C}$.

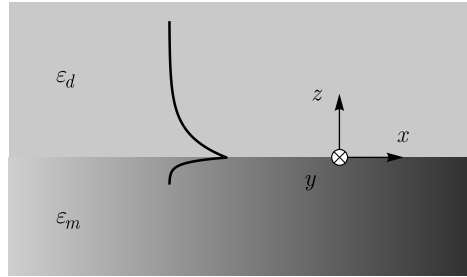


Рис. 1.19. Геометрия структуры, в которой возможно существование поверхностных плазмон-поляритонов

Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(l)}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_0^{(l)} \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z^{(l)} z \right) \right], \\ \mathbf{H}^{(l)}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}_0^{(l)} \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_y y - k_z^{(l)} z \right) \right], \end{aligned} \quad (1.245)$$

где

$$k_z^{(l)} = \pm \sqrt{k_0^2 \varepsilon_l - k_x^2 - k_y^2}, \quad (1.246)$$

$l = d$ при $z > 0$ и $l = m$ при $z < 0$. Знак корня в (1.246) будет выбран ниже из физических соображений. Без ограничения общности будем считать, что поверхностный плазмон-поляритон распространяется вдоль оси x , при этом $k_y = 0$. Подставив (1.245) в (1.1), получим систему линейных уравнений

относительно амплитуд компонент электрического и магнитного полей:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_z H_{y0}^{(l)} = k_0 \varepsilon_l E_{x0}^{(l)}, \\ k_x H_{z0}^{(l)} - k_z H_{x0}^{(l)} = k_0 \varepsilon_l E_{y0}^{(l)}, \\ -k_x H_{y0}^{(l)} = k_0 \varepsilon_l E_{z0}^{(l)}, \\ -k_z E_{y0}^{(l)} = k_0 H_{x0}^{(l)}, \\ k_z E_{x0}^{(l)} - k_x E_{z0}^{(l)} = k_0 H_{y0}^{(l)}, \\ k_x E_{y0}^{(l)} = k_0 H_{z0}^{(l)}, \end{array} \right. \quad (1.247)$$

$l = d, m$. Система уравнений (1.247) разделяется на две независимых системы: систему

$$\left\{ \begin{array}{l} k_z H_{y0}^{(l)} = k_0 \varepsilon_l E_{x0}^{(l)}, \\ -k_x H_{y0}^{(l)} = k_0 \varepsilon_l E_{z0}^{(l)}, \\ k_z E_{x0}^{(l)} - k_x E_{z0}^{(l)} = k_0 H_{y0}^{(l)}, \end{array} \right. \quad (1.248)$$

содержащую амплитуды компонент H_y , E_x и E_z , и систему

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_z E_{y0}^{(l)} = k_0 H_{x0}^{(l)}, \\ k_x E_{y0}^{(l)} = k_0 H_{z0}^{(l)}, \\ k_x H_{z0}^{(l)} - k_z H_{x0}^{(l)} = k_0 \varepsilon_l E_{y0}^{(l)}, \end{array} \right. \quad (1.249)$$

содержащую амплитуды компонент E_y , H_x и H_z . Ранг матриц систем (1.248) и (1.249) равен двум, поэтому зафиксируем амплитуды компонент E_y и H_y и введем обозначения: $e_l = E_{y0}^{(l)}$, $h_l = H_{y0}^{(l)}$. Выражая амплитуды $E_{x0}^{(l)}$, $E_{z0}^{(l)}$, $H_{x0}^{(l)}$, $H_{z0}^{(l)}$ через $E_{y0}^{(l)}$ и $H_{y0}^{(l)}$ и учитывая введенные обозначения, получим представление для компонент электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(l)}(x, z, t) &= \left(\frac{k_z^{(l)} h_l}{k_0 \varepsilon_l}, e_l, -\frac{k_x h_l}{k_0 \varepsilon_l} \right) \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z^{(l)} z \right) \right], \\ \mathbf{H}^{(l)}(x, z, t) &= \left(-\frac{k_z^{(l)} e_l}{k_0}, h_l, \frac{k_x e_l}{k_0} \right) \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z^{(l)} z \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.250)$$

Запишем теперь условия равенства тангенциальных компонент электрического и магнитного полей на границе раздела сред при $z = 0$:

$$\begin{cases} E_y^{(m)}(x, 0, t) = E_y^{(d)}(x, 0, t); \\ H_y^{(m)}(x, 0, t) = H_y^{(d)}(x, 0, t); \\ E_x^{(m)}(x, 0, t) = E_x^{(d)}(x, 0, t); \\ H_x^{(m)}(x, 0, t) = H_x^{(d)}(x, 0, t). \end{cases} \quad (1.251)$$

Подставляя (1.250) в первые два уравнения системы (1.251), получаем:

$$e_m = e_d, \quad h_m = h_d. \quad (1.252)$$

Подставляя (1.250) во вторые два уравнения системы (1.251), учитывая (1.252) и опуская индексы d и m у величин e_d , h_d и e_m , h_m , будем иметь:

$$\begin{cases} \left(\frac{k_z^{(d)}}{\varepsilon_d} - \frac{k_z^{(m)}}{\varepsilon_m} \right) h = 0, \\ \left(k_z^{(d)} - k_z^{(m)} \right) e = 0. \end{cases} \quad (1.253)$$

Система уравнений (1.253) будет иметь нетривиальное решение, когда

$$\left(\frac{k_z^{(d)}}{\varepsilon_d} - \frac{k_z^{(m)}}{\varepsilon_m} \right) \left(k_z^{(d)} - k_z^{(m)} \right) = 0. \quad (1.254)$$

В случае сред с различными диэлектрическими проницаемостями $k_z^{(d)} \neq k_z^{(m)}$ и равенство (1.254) будет выполняться, когда

$$\frac{k_z^{(d)}}{\varepsilon_d} = \frac{k_z^{(m)}}{\varepsilon_m}. \quad (1.255)$$

Учитывая соотношения (1.246), получим, что равенство (1.255) выполняется при

$$k_x = \pm k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}}. \quad (1.256)$$

Символ \pm в выражении (1.256) соответствует двум возможным направлениям распространения ППП (в положительном и отрицательном направлениях оси x).

Нетривиальное решение системы (1.253) при этом будет иметь вид

$$\begin{cases} e = 0, \\ h \neq 0. \end{cases} \quad (1.257)$$

С учетом (1.257) запишем выражения для компонент электрического и магнитного полей для случая, когда ППП распространяется вдоль оси x :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(l)}(x, z, t) &= h \left(\frac{k_z^{(l)}}{k_0 \varepsilon_l}, 0, -\frac{k_x}{k_0 \varepsilon_l} \right) \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z^{(l)} z \right) \right], \\ \mathbf{H}^{(l)}(x, z, t) &= h (0, 1, 0) \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z^{(l)} z \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.258)$$

Выражения (1.258) показывают, что поверхностные плазмон-поляритоны, распространяющиеся вдоль оси x , являются ТМ-поляризованными.

Отметим, что величина k_x комплексна, поскольку диэлектрическая проницаемость металла комплексна. При этом из физических соображений следует, что ППП должны затухать при распространении. Запишем выражение для y -компоненты магнитного поля, полагая для простоты $h = 1$:

$$\begin{aligned} H_y^{(l)}(x, z, t) &= \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z^{(l)} z \right) \right] = \\ &= \exp \left[-i \left(\omega t - k'_x x - k_z^{(l)} z \right) \right] \exp(-k''_x x), \end{aligned} \quad (1.259)$$

где $k_x = k'_x + ik''_x$. Рассмотрим сначала случай, когда $k'_x > 0$. Условие затухания волны при $x \rightarrow +\infty$: $|H_y^{(i)}(x, z, t)| \rightarrow 0$. Из (1.259) следует, что при этом должно выполняться неравенство $k''_x > 0$. Рассмотрев также волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси Ox и объединяя оба случая, получим условие

$$k'_x k''_x > 0. \quad (1.260)$$

Проверим выполнение условия (1.260) для значений константы распространения k_x , определяющихся выражением (1.256). Из (1.256) следует, что

$$k'_x k''_x = \frac{1}{2} k_0^2 \frac{\varepsilon_d^2 \varepsilon_m''}{(\varepsilon'_m + \varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_m'')^2}, \quad (1.261)$$

где ε'_m и ε''_m — действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости металла, соответственно. Равенство (1.261) показывает, что знак произведения $k'_x k''_x \gg x$ определяется знаком мнимой части диэлектрической проницаемости металла. Учитывая, что для поглощающих материалов мнимая часть положительна, получим, что условие (1.260) выполняется автоматически.

Запишем теперь выражения для компонент $k_z^{(l)}$, подставив дисперсионное соотношение (1.256) в (1.246):

$$k_z^{(l)} = \pm k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_l^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}}, \quad (1.262)$$

где $l = d, m$. Знак корня в (1.262) определяется из условия затухания волны при удалении от границы раздела. Подставив $k_z^{(l)} = k'_z{}^{(l)} + ik''_z{}^{(l)}$ в выражение (1.259), запишем выражение для y -компоненты магнитного поля:

$$\begin{aligned}
H_y^{(l)}(x, z, t) &= \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z^{(l)} z \right) \right] = \\
&= \exp \left[-i \left(\omega t - k_x x - k_z'^{(l)} z \right) \right] \exp \left(-k_z''^{(l)} z \right). \quad (1.263)
\end{aligned}$$

Из условия $|H_y^{(l)}(x, z, t)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm\infty$ получим:

$$\begin{aligned}
k_z''^{(d)} &> 0, \\
k_z''^{(m)} &< 0.
\end{aligned} \quad (1.264)$$

Найдем теперь соотношения между знаками действительной и мнимой частей величин $k_z^{(l)}$. Для удобства положим

$$k_d = k_z^{(d)}, \quad k_m = k_z^{(m)}. \quad (1.265)$$

Для $k_d = k_d' + ik_d''$ можно показать, что

$$k_d' k_d'' = -\frac{1}{2} k_0^2 \frac{\varepsilon_d^2 \varepsilon_m''}{(\varepsilon_m' + \varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_m'')^2}. \quad (1.266)$$

Отметим, что правая часть выражения (1.266) отличается от правой части выражения (1.261) лишь знаком. Учитывая в выражении (1.266) положительность мнимой части диэлектрической проницаемости металла, получим, что

$$k_d' k_d'' < 0. \quad (1.267)$$

Объединяя первое неравенство из (1.264) с неравенством (1.267) и учитывая обозначения (1.265), получаем, что

$$k_d' < 0. \quad (1.268)$$

Для $k_m = k_m' + ik_m''$ можно показать, что

$$k_m' k_m'' = \frac{1}{2} k_0^2 \frac{\varepsilon_m'' \left(|\varepsilon_m|^2 + 2\varepsilon_m' \varepsilon_d \right)}{(\varepsilon_m' + \varepsilon_d)^2 + (\varepsilon_m'')^2}. \quad (1.269)$$

В случае, когда $\varepsilon_m' > -|\varepsilon_m|^2/2\varepsilon_d$ (это условие выполняется, в частности, для границ раздела воздух/золото и воздух/серебро для длин волн видимого и инфракрасного диапазона),

$$k_m' k_m'' > 0. \quad (1.270)$$

Учитывая второе неравенство из (1.264) и обозначения (1.265), при выполнении неравенства (1.270) получаем, что

$$k_m' < 0. \quad (1.271)$$

Для удобства перепишем выражение для y -компоненты магнитного поля (1.263), вводя обозначения $\kappa_l = +\sqrt{k_x^2 - k_0^2 \varepsilon_l}$, $l = m, d$ ($\kappa_l = \kappa_l' + i\kappa_l''$):

$$H_y(x, z, t) = \begin{cases} \exp[-i(\omega t - k_x x)] \exp(-\kappa_d z), & z > 0, \\ \exp[-i(\omega t - k_x x)] \exp(\kappa_m z), & z < 0. \end{cases} \quad (1.272)$$

Аналогично (1.267) можно показать, что

$$\kappa''_d > 0. \quad (1.273)$$

При выполнении условия $\varepsilon'_m > -|\varepsilon_m|^2 / 2\varepsilon_d$,

$$\kappa''_m < 0. \quad (1.274)$$

Найдем теперь значение усредненного по времени вектора Умова–Пойнтинга, определяющегося выражением [80]:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{\text{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]}{2}, \quad (1.275)$$

где символ $*$ обозначает комплексное сопряжение. Перепишем представление поля (1.258), выделяя в показателях экспонент действительные и мнимые части величин k_x и $k_z^{(l)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(l)}(x, z, t) = h \left(\frac{k_z^{(l)}}{k_0 \varepsilon_l}, 0, -\frac{k_x}{k_0 \varepsilon_l} \right) \exp \left[-i \left(\omega t - k'_x x - k_z^{(l)} z \right) \right] \times \\ \times \exp \left[- \left(k''_x x + k_z^{(l)} z \right) \right], \end{aligned} \quad (1.276)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(l)}(x, z, t) = h (0, 1, 0) \exp \left[-i \left(\omega t - k'_x x - k_z^{(l)} z \right) \right] \times \\ \times \exp \left[- \left(k''_x x + k_z^{(l)} z \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\bar{\mathbf{S}}^{(l)}(x, z) = \frac{|h|^2}{2k_0} \left(\text{Re} \left[\frac{k_x}{\varepsilon_l} \right], 0, \text{Re} \left[\frac{k_z^{(l)}}{\varepsilon_l} \right] \right) \exp \left[-2 \left(k''_x x + k_z^{(l)} z \right) \right]. \quad (1.277)$$

Перепишем выражение (1.277) с учетом обозначений (1.265):

$$\bar{\mathbf{S}}(x, z) = \begin{cases} \frac{|h|^2}{2k_0} \left(\frac{k'_x}{\varepsilon_d}, 0, \frac{k'_d}{\varepsilon_d} \right) \exp \left[-2 \left(k''_x x + k''_d z \right) \right], & z > 0, \\ \frac{|h|^2}{2k_0} \left(\frac{k'_x \varepsilon'_m + k''_x \varepsilon''_m}{|\varepsilon_m|^2}, 0, \frac{k'_m \varepsilon'_m + k''_m \varepsilon''_m}{|\varepsilon_m|^2} \right) \exp \left[-2 \left(k''_x x + k''_m z \right) \right], & z < 0. \end{cases} \quad (1.278)$$

Вычислим поток вектора Умова–Пойнтинга через площадку единичной ширины (по координате y), расположенную в плоскости $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int \bar{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} = \int \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{n} dS = \int \bar{S}_x dS = \\ = \int_0^1 dy \left[\int_0^{+\infty} \bar{S}_x^{(d)}(0, z) dz + \int_{-\infty}^0 \bar{S}_x^{(m)}(0, z) dz \right]. \end{aligned} \quad (1.279)$$

Подставляя (1.277) в (1.279) и учитывая (1.264), получаем

$$\int \bar{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{|h|^2}{4k_0} \left(\operatorname{Re} \left[\frac{k_x}{\varepsilon_d} \right] \frac{1}{|k_z^{(d)}|} + \operatorname{Re} \left[\frac{k_x}{\varepsilon_m} \right] \frac{1}{|k_z^{(m)}|} \right). \quad (1.280)$$

Переходя к обозначениям (1.265), перепишем выражение (1.280):

$$\int \bar{\mathbf{S}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{|h|^2}{4k_0} \left(\frac{k'_x}{\varepsilon_d |k''_d|} + \frac{k'_x \varepsilon'_m + k''_x \varepsilon''_m}{|\varepsilon_m|^2 |k''_m|} \right). \quad (1.281)$$

Рассмотрим пример: поверхностный плазмон-поляритон с длиной волны в свободном пространстве 600 нм, распространяющийся на границе раздела между серебром [81] ($\varepsilon_m = -16,07 + 0,43i$) и диэлектриком с диэлектрической проницаемостью, равной 2,56. Нормированная константа распространения ППП в этом случае равна $1,7449 + 0,0045i$. На рисунке 1.20 приведены поперечные распределения абсолютной величины компоненты H_y и компоненты усредненного по времени вектора Умова-Пойнтинга \bar{S}_x . Также показаны направления вектора Умова-Пойнтинга в диэлектрике ($\bar{\mathbf{S}}_d$) и металле ($\bar{\mathbf{S}}_m$) и знаки действительных частей компонент волнового вектора ППП k'_x , k'_d и k'_m (показаны векторами с направлениями, совпадающими с положительным или отрицательным направлением соответствующей оси координат). Из рисунка 1.20 видно, что вектор Умова-Пойнтинга в обеих средах направлен под малым углом к оси Ox . Определим доли энергии,

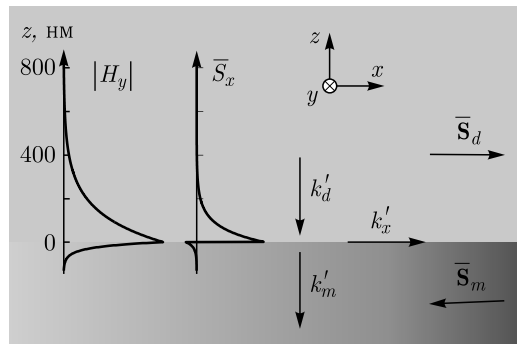


Рис. 1.20. Поперечное распределение абсолютной величины y -компоненты магнитного поля и x -компоненты вектора Умова-Пойнтинга ППП, распространяющегося вдоль оси Ox

переносимые в металле и диэлектрике как

$$W_d = \frac{\left| \int_0^{+\infty} \overline{S}_x(0, z) dz \right|}{\left| \int_0^{+\infty} \overline{S}_x(0, z) dz \right| + \left| \int_{-\infty}^0 \overline{S}_x(0, z) dz \right|},$$

$$W_m = \frac{\left| \int_{-\infty}^0 \overline{S}_x(0, z) dz \right|}{\left| \int_0^{+\infty} \overline{S}_x(0, z) dz \right| + \left| \int_{-\infty}^0 \overline{S}_x(0, z) dz \right|}.$$
(1.282)

Для рассматриваемого примера $W_d \approx 0,975$, $W_m \approx 0,025$, то есть основная часть энергии переносится в диэлектрике. Отметим, что значение

$$\int_{-\infty}^0 \overline{S}_x(0, z) dz < 0, \text{ поэтому } \int_0^{+\infty} \overline{S}_x(0, z) dz > \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{S}_x(0, z) dz.$$

В общем случае, рассматривая в выражении (1.245) и далее $k_y \neq 0$, можно получить аналог соотношения (1.256) для ППП, распространяющегося в произвольном направлении:

$$k_x^2 + k_y^2 = k_0^2 \frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}. \quad (1.283)$$

Выражение (1.283) представляет собой дисперсионное соотношение для поверхностного плазмон-поляритона. Для значений k_x и k_y , удовлетворяющих соотношению (1.283), можно получить аналог выражений (1.258) и показать, что в общем случае вектор \mathbf{H} ППП лежит в плоскости границы раздела двух сред и перпендикулярен направлению распространения, а вектор \mathbf{E} лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости границы раздела сред и параллельной направлению распространения.

Для удобства перепишем дисперсионное соотношение (1.283) в виде

$$k_{\text{spp}} = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}}. \quad (1.284)$$

Величина k_{spp} при этом обозначает компоненту волнового вектора, лежащую в плоскости Oxy (константу распространения поверхностного плазмон-поляритона). С учетом (1.284) величины k_x и k_y можно записать в виде

$$k_x = k_{\text{spp}} \alpha_0, \quad k_y = k_{\text{spp}} \beta_0, \quad (1.285)$$

где α_0, β_0 — компоненты единичного вектора, определяющего направление распространения ППП. Отметим, что в силу того, что $\varepsilon'_m < 0$, выполняется неравенство $|\sqrt{\varepsilon_m/(\varepsilon_m + \varepsilon_d)}| > 1$, из которого следует, что

$$|k_{\text{spp}}| > k_0 \sqrt{\varepsilon_d}. \quad (1.286)$$

Из неравенства (1.286) следует, что для возбуждения ППП невозможно использовать плоскую волну, падающую из диэлектрической среды с диэлектрической проницаемостью ε_d , и необходимо использование специальных структур, таких, как дифракционные решетки или схема Кречмана.

1.4.1.2. Свойства поверхностных плазмон-поляритонов. Рассмотрим ряд величин, характеризующих поверхностные плазмон-поляритоны, такие, как длина волны, длина распространения, глубина проникновения в диэлектрическую и металлическую среду [82]. В качестве иллюстрации приведем зависимости этих величин от длины волны в свободном пространстве для поверхностного плазмон-поляритона, распространяющегося на границе раздела диэлектрика с показателем преломления $n_d = 1,6$ и серебра. Как и в примере, рассмотренном выше, значения диэлектрической проницаемости серебра определялись методом сплайновой интерполяции на основе табличных данных, приведенных в работе [81] (рис. 1.21). При $\lambda \geq 365$ нм $\varepsilon'_m + \varepsilon_d < 0$, и на границе раздела возможно существование ППП.

Длина волны поверхностного плазмон-поляритона. Длина волны ППП определяется из выражения [82]

$$\lambda_{\text{spp}} = \frac{2\pi}{k'_{\text{spp}}}, \quad (1.287)$$

где $k'_{\text{spp}} = \text{Re} \{k_{\text{spp}}\}$. При выполнении условия

$$|\varepsilon'_m + \varepsilon_d| \gg |\varepsilon''_m| \quad (1.288)$$

справедливо приближенное равенство

$$k'_{\text{spp}} \approx k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon'_m \varepsilon_d}{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}}. \quad (1.289)$$

С учетом (1.289)

$$\lambda_{\text{spp}} \approx \lambda \sqrt{\frac{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}{\varepsilon'_m \varepsilon_d}}. \quad (1.290)$$

Таким образом, $\lambda_{\text{spp}}/\lambda \approx \sqrt{1/\varepsilon_d + 1/\varepsilon'_m}$. Из (1.286) следует, что $\lambda_{\text{spp}} < \lambda/\sqrt{\varepsilon_d}$. Именно этот факт является основой для различных потенциальных применений поверхностных плазмон-поляритонов, в частности, применения в контактной фотолитографии, рассмотренного ниже.

На рисунке 1.22 показана зависимость длины волны ППП от длины волны света в свободном пространстве, рассчитанная по формуле (1.287). Для сравнения приведена также длина волны света, распространяющегося в диэлектрике. Из рисунка 1.22 видно, что при приближении длины волны к так называемому резонансному значению, обеспечивающему выполнение равенства $\varepsilon'_m = -\varepsilon_d$, отношение $\lambda/\lambda_{\text{spp}}$ увеличивается. Однако, как будет показано ниже, одновременно существенно уменьшается длина распространения ППП.

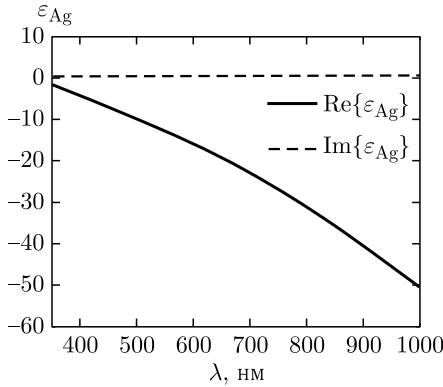


Рис. 1.21. Зависимость диэлектрической проницаемости серебра от длины волны в свободном пространстве (действительная часть — сплошная линия, мнимая часть — пунктирная линия)

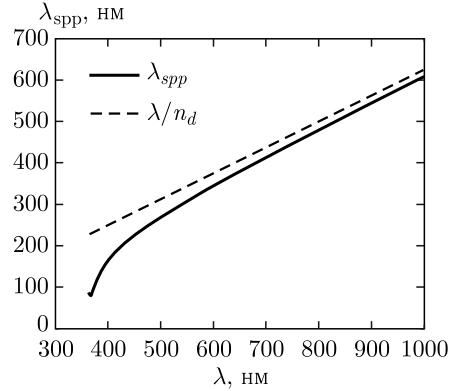


Рис. 1.22. Зависимость длины волны ППП (сплошная линия) и длины волны в диэлектрике (пунктирная линия) от длины волны в свободном пространстве

Длина распространения поверхностного плазмон-поляритона. Определим длину распространения поверхностного плазмон-поляритона δ_{spp} как расстояние, на котором интенсивность уменьшается в e раз по сравнению с исходным значением. В соответствии с этим определением

$$\delta_{\text{spp}} = \frac{1}{2k''_{\text{spp}}}. \quad (1.291)$$

При выполнении условия (1.288) справедливо приближенное равенство

$$k''_{\text{spp}} \approx k_0 \frac{\varepsilon''_m}{2(\varepsilon'_m)^2} \left(\frac{\varepsilon'_m \varepsilon_d}{\varepsilon'_m + \varepsilon_d} \right)^{3/2}. \quad (1.292)$$

Учитывая (1.292) в (1.291), получим приближенное выражение для длины распространения ППП:

$$\delta_{\text{spp}} \approx \lambda \frac{(\varepsilon'_m)^2}{2\pi \varepsilon''_m} \left(\frac{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}{\varepsilon'_m \varepsilon_d} \right)^{3/2}. \quad (1.293)$$

При выполнении условия $|\varepsilon'_m| \gg |\varepsilon_d|$ можно записать более простое приближенное выражение для δ_{spp} :

$$\delta_{\text{spp}} \approx \lambda \frac{(\varepsilon'_m)^2}{2\pi \varepsilon''_m \varepsilon_d^{3/2}}. \quad (1.294)$$

Выражение (1.294) подтверждает очевидное предположение о том, что для того, чтобы длина распространения ППП была большой, необходимы большая действительная и малая мнимая части диэлектрической проницаемости металла, то есть нужно использовать металл с малыми потерями.

На рисунке 1.23 представлена зависимость длины распространения ППП (1.291) от длины волны падающего света для рассматриваемой пары материалов. Из графика видно, что при приближении значения длины волны к резонансному длина распространения стремится к нулю. Этот факт ограничивает диапазон длин волн, при которых возможно практическое применение ППП.

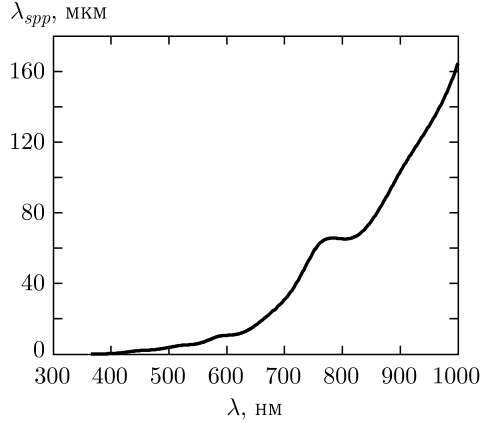


Рис. 1.23. Зависимость длины распространения ППП от длины волны в свободном пространстве

Глубина проникновения поверхностного плазмон-поляритона в диэлектрик и металл. Определим глубину проникновения ППП в среду как расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в e раз:

$$\delta_l = \frac{1}{|\text{Im} \{k_l\}|}, \quad (1.295)$$

где $l \in \{m, d\}$, k_m и k_d определяются выражением (1.265). При выполнении условия (1.288) справедливы следующие приближенные выражения:

$$\delta_d \approx \frac{1}{k_0} \left| \frac{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}{\varepsilon_d^2} \right|^{\frac{1}{2}}, \quad (1.296)$$

$$\delta_m \approx \frac{1}{k_0} \left| \frac{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}{(\varepsilon'_m)^2} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (1.297)$$

Следует отметить, что значения величин δ_d и δ_m являются практически важными, так как позволяют определить минимальные толщины слоев, необходимые для возбуждения ППП.

На рисунках 1.24 и 1.25 показаны зависимости глубины проникновения ППП в диэлектрическую и металлическую среды, соответственно, от длины волны падающего света, рассчитанные с помощью выражения (1.295). Видно, что при значениях длины волны, далеких от резонансного значения, глубина проникновения ППП в металлическую среду близка к постоянному значению, равному 22 нм.

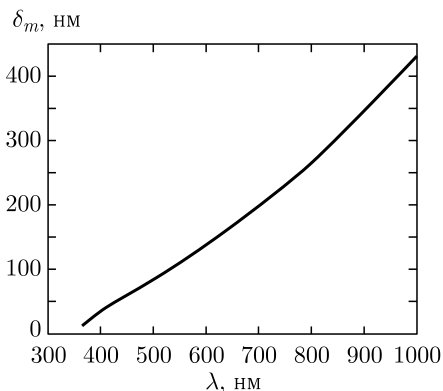


Рис. 1.24. Зависимость глубины проникновения ППП в диэлектрик от длины волны в свободном пространстве

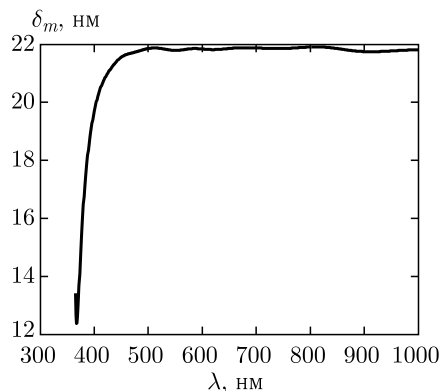


Рис. 1.25. Зависимость глубины проникновения ППП в металл от длины волны в свободном пространстве

1.4.1.3. Плазмонные волноводы. Простейшей геометрией плазмонного волновода является граница раздела металл/диэлектрик, рассмотренная выше. Плазмонные моды также могут существовать в системах «диэлектрик/металл/диэлектрик» (в тонких металлических пленках, в этом случае они обладают большой длиной распространения) [83, 84], «металл/диэлектрик/металл» (в зазорах между металлическими слоями, в этом случае энергия моды может быть локализована в субволновой области) [85], а также в многослойных металлодиэлектрических структурах [86]. В двух первых случаях плазмонные моды описываются дисперсионным соотношением для ТМ-поляризованных мод плоскопараллельного волновода [87]. В настоящем разделе для нахождения констант распространения таких мод используется устойчивая итерационная процедура, описанная в работе [88].

Также существуют плазмонные волноводы, в которых мода ограничена в двух измерениях, в частности, металлические полосы в диэлектрической среде [89], диэлектрические структуры на поверхности металла [90] и другие; однако в настоящем разделе рассматриваются структуры, в которых возбуждаемые плазмонные моды ограничены в одном измерении.

1.4.1.4. Возбуждение поверхностных плазмон-поляритонов. В соответствии с неравенством (1.286) для возбуждения ППП необходимо использование специальных структур. Рассмотрим схему Кречмана [79], представляющую собой диэлектрическую призму с металлической пленкой на основании (рис. 1.26). Для того, чтобы волна, падающая на призму с показателем преломления n_1 , могла возбудить ППП на границе раздела металлической пленки и среды с показателем преломления n_2 , должно выполняться условие $n_1 > \text{Re} \left\{ \sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_2 / (\varepsilon_m + \varepsilon_2)} \right\}$, где $\varepsilon_2 = n_2^2$. Тогда при некотором угле падения $\theta_{\text{сpp}}$ на нижней границе раздела возбуждается ППП, при этом угол $\theta_{\text{сpp}}$ оказывается близким к углу, при котором выполняется условие равенства

x -компонент волновых векторов падающей и поверхностной волн:

$$\sin(\theta_{\text{spp}}) \approx \frac{1}{n_1} \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_2}{\varepsilon_m + \varepsilon_2}} \right\}. \quad (1.298)$$

Равенство в выражении (1.298) является приближенным, так как оно не учитывает толщину металлической пленки. Более точные аналитические оценки угла θ_{spp} приведены в работе [91]. Возможен также и аналитический расчет вытекающих мод металлической пленки [84], однако отметим, что при достаточно большой толщине металлической пленки, в несколько раз превышающей глубину проникновения ППП в металл δ_m , приближенное равенство (1.298) выполняется с высокой точностью.

В настоящей главе рассмотрено возбуждение ППП (или, точнее, плазмонных мод) с помощью дифракционных решеток. Этот способ будет подробно рассмотрен в п. 1.5.2.

1.4.2. Фазовая модуляция поверхностных плазмон-поляритонов с помощью диэлектрических структур. Как было указано выше, для расчета дифракционных структур для управления распространением ППП необходимо решить модельную задачу прохождения ППП через диэлектрическую прямоугольную ступеньку. Геометрия модельной задачи приведена на рис. 1.27. ППП в среде 1 нормально падает на прямоугольную ступеньку слева, справа в среде 3 формируется прошедший ППП. Отметим, что геометрия модельной задачи не зависит от координаты y (то есть решается задача дифракции ППП с плоским волновым фронтом на бесконечном цилиндре с прямоугольным сечением), однако для простоты будем использовать термин «диэлектрическая ступенька».

Для решения модельной задачи дифракции ППП на диэлектрической ступеньке использовалась модификация метода фурье-мод для неперiodических структур, рассмотренная в п. 1.4.

На рисунке 1.28 приведены расчетные зависимости модуля и фазы комплексного коэффициента пропускания ППП T_{spp} от длины l и высоты h диэлектрической ступеньки. Расчет проводился при следующих параметрах: $\lambda = 550$ нм, $\varepsilon_m = -13,686 + 0,444i$, $\varepsilon_d = 1$, $\varepsilon_b = 2,25$. Значение ε_m соответствует диэлектрической проницаемости серебра при указанной длине волны. Отметим, что максимальное значение длины ступеньки l_{max} на рис. 1.28

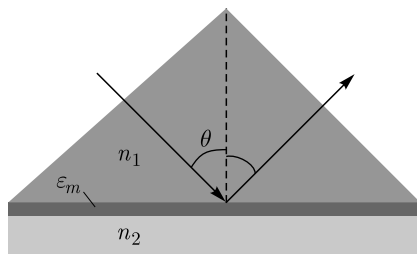


Рис. 1.26. Схема Кречмана

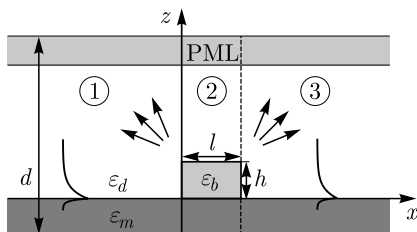


Рис. 1.27. Геометрия модельной задачи дифракции ППП на диэлектрической ступеньке

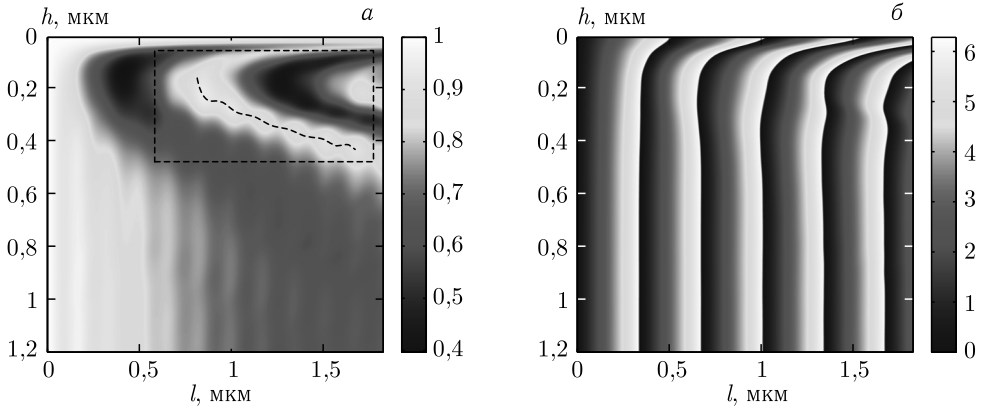


Рис. 1.28. Модуль $|T_{\text{spp}}(l, h)|$ (а) и фаза $\varphi(l, h) = \arg\{T_{\text{spp}}(l, h)\}$ (б) комплексного коэффициента пропускания ППП в зависимости от длины и высоты диэлектрической ступеньки

выбиралось из условия $\Delta\varphi = (k_{\text{spp}}^b - k_{\text{spp}}) l_{\text{max}} = 4\pi$. Это условие обеспечивает интервал разности фаз $[0, 4\pi]$ между ППП, прошедшим через ступеньку с диэлектрической проницаемостью ε_b , и ППП, распространяющимся в исходной среде.

Заметим, что согласно рис. 1.28, б зависимость фазы прошедшего ППП от длины ступеньки близка к линейной при каждом фиксированном значении высоты ступеньки. Такой вид зависимости позволяет предположить, что при прохождении ППП через ступеньку основная часть энергии переносится плазмонной модой, распространяющейся в ней. Для подтверждения этого предположения рассчитаем константу распространения k_{mode} плазмонной моды волновода вида «диэлектрик/диэлектрик/металл» с диэлектрическими проницаемостями ε_d , ε_b , ε_m при различных значениях толщины центрального слоя. Для нахождения значений константы распространения численно решается дисперсионное соотношение для ТМ-поляризованных мод планарного волновода. Зависимость действительной части констант распространения плазмонной моды, нормированной на волновое число, показана на рис. 1.29, а. Пунктирными линиями показаны значения действительных частей нормированных констант распространения ППП, распространяющихся на границах раздела $\varepsilon_d - \varepsilon_m$ и $\varepsilon_b - \varepsilon_m$. На рисунке 1.29, б показана приведенная к интервалу $[0, 2\pi)$ фаза плазмонной моды в диэлектрической ступеньке при распространении на расстояние l , $\varphi_{\text{mode}}(l) = \text{Re}\{k_{\text{mode}}\}l$, в зависимости от высоты ступеньки.

Сравнение рисунков 1.28, б и 1.29, б показывает, что расчетные значения фазы, полученные в результате численного моделирования, близки к теоретически рассчитанным значениям фазы плазмонной моды в области ступеньки, что говорит о правильности сделанного предположения о переносе основной части энергии внутри диэлектрической ступеньки именно плазмонной модой.

Рисунок 1.28, б также показывает, что существует несколько методов фазовой модуляции ППП с помощью диэлектрической ступеньки. В частности, при увеличении высоты ступеньки фаза прошедшего ППП зависит только от ее длины. Этот факт согласуется с рис. 1.29, а, показывающим,

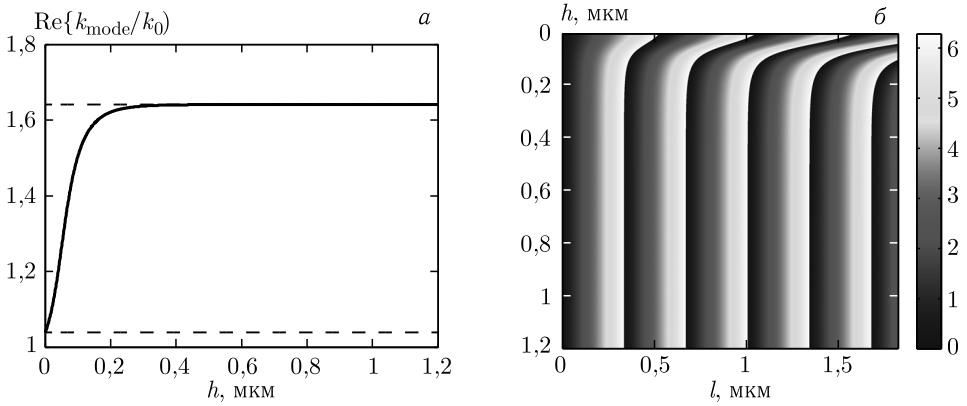


Рис. 1.29. Зависимость действительной части нормированной константы распространения плазмонной моды в области ступеньки от высоты ступеньки (сплошная линия) и действительные части нормированных констант распространения ППП, распространяющихся на границах раздела $\varepsilon_d - \varepsilon_m$ (нижняя пунктирная линия) и $\varepsilon_b - \varepsilon_m$ (верхняя пунктирная линия) (а) и зависимость фазы плазмонной моды в ступеньке при распространении на расстояние l от высоты ступеньки (б)

что при с увеличением высоты константа распространения плазмонной моды в ступеньке приближается к константе распространения ППП на границе раздела материалов с диэлектрическими проницаемостями ε_b и ε_m . Глубина проникновения ППП в материал ступеньки при указанных параметрах составляет $\delta_d = 0,13$ мкм. Напомним, что глубина проникновения определяется как расстояние, на котором амплитуда волны уменьшается в e раз и вычисляется по формулам (1.295), (1.296). При $h > 3\delta_d$ фаза хорошо описывается выражением

$$\varphi(l, h) = k_0 \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_b \varepsilon_m}{\varepsilon_b + \varepsilon_m}} \right\} l = \operatorname{Re} \{ k_{\text{спп}}^b \} l, \quad (1.299)$$

где $k_{\text{спп}}^b$ — константа распространения ППП на границе раздела металла и диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε_b . Выражение (1.299) аналогично формуле геометрической оптики, используемой для набега фазы плоской волны через слой с толщиной l . Введем функцию $\Delta(l, h) = \arg \{ T_{\text{спп}}(l, h) \} - \operatorname{Re} \{ k_{\text{спп}}^b \} l$, характеризующую ошибку формулы (1.299) при фиксированном значении h . Максимальное значение ошибки $\Delta(l, h)$ при $h = 1$ мкм составляет менее $\pi/17$. При расчете оптических элементов подобная ошибка в фазовой функции в большинстве случаев не является существенной. Модуль коэффициента пропускания при $h = 1$ мкм составляет более 0,7.

Линейная связь фазового набега с длиной диэлектрической ступеньки позволяет формировать заданные фазовые распределения за счет изменения длины ступеньки. Таким образом, для преобразования и фокусировки ППП могут быть использованы дифракционные диэлектрические структуры с изменяющейся длиной и фиксированной высотой (рис. 1.30). Согласно (1.299), в случае большой высоты длина микрорельефа элемента для формирования

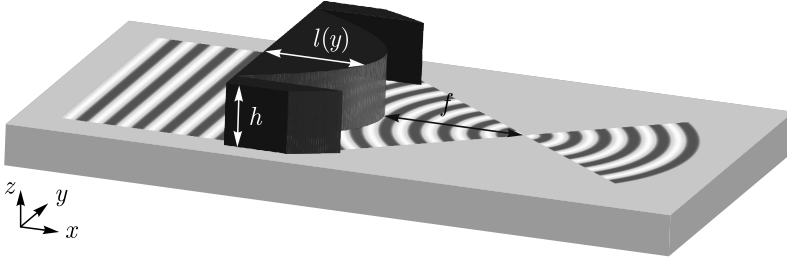


Рис. 1.30. Диэлектрическая дифракционная структура для ППП с изменяющейся длиной и фиксированной высотой

заданной фазовой функции $\varphi(y)$ имеет вид

$$l(y) = \frac{\varphi(y)}{\operatorname{Re} \{k_{\text{spp}}^b - k_{\text{spp}}\}}. \quad (1.300)$$

Из рисунка 1.28 также следует, что существует возможность изменения фазы прошедшего ППП за счет изменения высоты ступеньки при фиксированной длине. В частности, на рис. 1.31 представлены зависимости модуля и фазы комплексного коэффициента пропускания прошедшего ППП от высоты ступеньки при фиксированной длине $l = 1055$ нм. Рисунок 1.31 показывает возможность фазовой модуляции в интервале $[0, 2\pi)$ при изменении высоты ступеньки от 0 до 180 нм. При этом модуль коэффициента пропускания составляет более 0,7. Таким образом, для преобразования и фокусировки ППП могут быть также использованы диэлектрические структуры с изменяющейся высотой и фиксированной длиной (рис. 1.32).

Обобщением описанных выше способов фазовой модуляции ППП является использование структур с изменяющейся длиной и высотой (рис. 1.33). При этом, согласно рис. 1.28, множество точек (l, h) в пространстве геометрических параметров ступеньки, обеспечивающее возможность формирования произвольного распределения фазы в выходной плоскости элемента не единственно. Критерием выбора такого множества может быть, на-

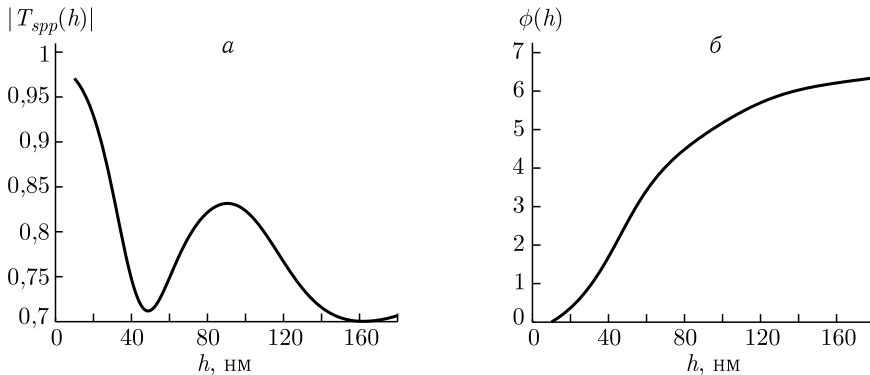


Рис. 1.31. Зависимости $|T_{\text{spp}}(h)|$ (а) и $\varphi(h)$ от высоты ступеньки при длине ступеньки $l = 1055$ нм (б)

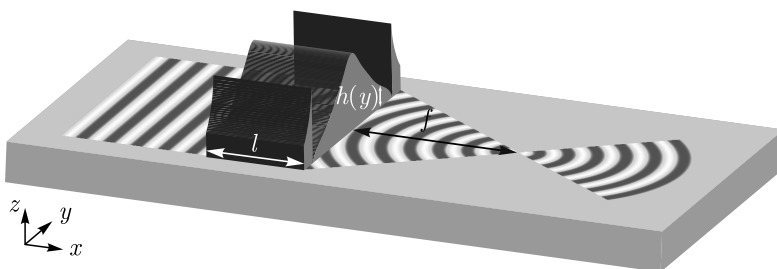


Рис. 1.32. Диэлектрическая дифракционная структура для ППП с изменяющейся высотой и фиксированной длиной

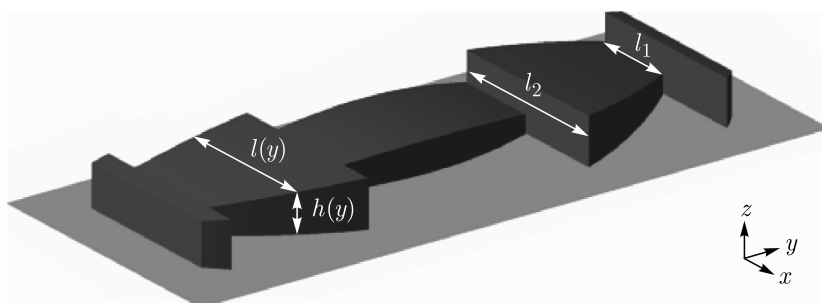


Рис. 1.33. Диэлектрическая дифракционная структура для ППП с изменяющимися высотой и длиной

пример, максимизация среднего значения коэффициента пропускания ППП $|T_{\text{spp}}(l, h)|$. Более подробно критерий оптимизации описан ниже в п. 1.4.4. Для рассмотренных параметров максимизация осуществлялась в области D , отмеченной пунктирным прямоугольником на рис. 1.28, (а). При этом оптимальные значения (l, h) оказываются на кривой, показанной пунктирной линией на рис. 1.28, а. Данная кривая проходит через максимумы модуля коэффициента пропускания. Модуль коэффициента пропускания при этом превышает 0,83, что более чем на 10% больше, чем в случае структур, у которых один из геометрических параметров фиксирован.

Расчет дифракционных линз для фокусировки ППП на основе исследованных методов фазовой модуляции проведен ниже в п. 1.4.4.

1.4.3. Подавление паразитного рассеяния поверхностных плазмон-поляритонов.

1.4.3.1. Теоретический анализ согласования поперечных профилей поля поверхностного плазмон-поляритона и плазмонной моды волновода диэлектрик/диэлектрик/металл. Согласно выражению для поперечной компоненты волнового вектора ППП (1.262), при прохождении ППП через границу элемента, расположенного на поверхности распространения в области $0 < x < l$ и выполненного из материала с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_d$, происходит изменение поперечного профиля поля ППП, что приводит к паразитному рассеянию. Таким образом, для уменьшения рассеяния необходимо, чтобы поперечный профиль плазмонной моды в области элемента

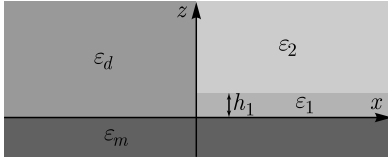


Рис. 1.34. Граница раздела между плазмонным волноводом металл/диэлектрик и волноводом диэлектрик/диэлектрик/металл

был близок к профилю поля падающего ППП. Авторами для подавления рассеяния предлагается использовать двухслойные диэлектрические структуры из изотропных материалов (геометрия структуры для случая прохождения через границу раздела при бесконечной толщине слоя с диэлектрической проницаемостью $n = 3$ показана на рис. 1.34) [92–94].

Будем рассматривать случай, когда толщина верхнего диэлектрического слоя h_2 достаточно велика, так что плазмонные моды в области структуры (при $0 < x < l$) могут быть описаны дисперсионным соотношением ТМ-поляризованных мод планарного волновода [87]:

$$\tanh(\gamma_1 h_1) = -\frac{\gamma_1 \varepsilon_1 (\varepsilon_2 \gamma_m + \varepsilon_m \gamma_2)}{\varepsilon_2 \varepsilon_m \gamma_1^2 + \varepsilon_1^2 \gamma_2 \gamma_m}, \quad (1.301)$$

где $\gamma_j^2 = k_{IIM}^2 - k_0^2 \varepsilon_j$, $j = m, 1, 2$, k_{IIM} — константа распространения плазмонной моды в структуре справа от границы раздела.

Найдем соотношения между диэлектрическими проницаемостями ε_d , ε_1 и ε_2 , при которых возможно согласование поперечных профилей плазмонных мод в области $z > h_1$. Для простоты анализа пренебрежем потерями в металле и будем считать, что ε_m действительно. С учетом (1.301) условие согласования профилей поля мод может быть записано в виде

$$\kappa_d = \gamma_2. \quad (1.302)$$

Поскольку большая часть энергии ППП переносится в диэлектрике [95], то, если (1.302) выполняется при $h_1 \ll \delta_d$, где δ_d — глубина проникновения ППП в диэлектрик (1.295), можно ожидать существенного уменьшения паразитного рассеяния. Отметим, что поскольку часть энергии моды сосредоточена вне области $h_1 < z < h_1 + h_2$, набор параметров ε_1 , ε_2 , h_1 , обеспечивающих выполнение условия (1.302), может не являться оптимальным.

Рассмотрим отдельно различные области значений $\varepsilon_1 = n_1^2$, $\varepsilon_2 = n_2^2$ (рис. 1.35).

Рассмотрим сначала случай, когда значения ε_1 , ε_2 лежат в области 1, то есть когда $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. В этом случае плазмонная мода в структуре существует при любых значениях h_1 [96]. При изменении толщины от 0 до $+\infty$ значение k_{IIM} непрерывно увеличивается от константы распространения плазмона на границе раздела ε_m – ε_2 до константы распространения плазмона на границе раздела ε_m – ε_1 . При $h_1 = 0$

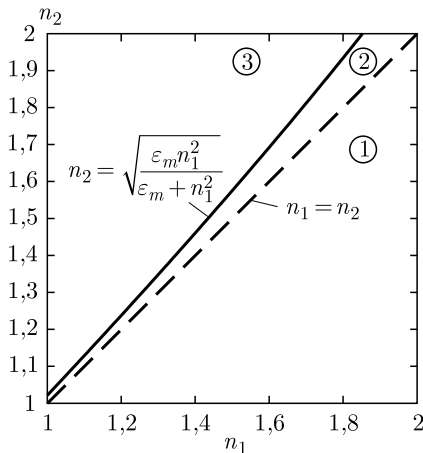


Рис. 1.35. Области значений ε_1 , ε_2 ($\lambda = 800$ нм, металл — золото без потерь)

$\gamma_2 = k_0 \sqrt{-\varepsilon_2^2/(\varepsilon_m + \varepsilon_2)}$, при $h_1 \rightarrow +\infty$ $\gamma_2^2 \rightarrow k_0^2 (\varepsilon_m \varepsilon_1/(\varepsilon_m + \varepsilon_1) - \varepsilon_2)$, и, следовательно, $\gamma_2 \rightarrow k_0 \sqrt{[\varepsilon_m (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2]/(\varepsilon_m + \varepsilon_1)}$. Таким образом, согласование профиля поля мод возможно при

$$k_0 \sqrt{\frac{-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_2}} \leq \kappa_d \leq k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_m + \varepsilon_1}}. \quad (1.303)$$

Поскольку значение величины $\sqrt{-\varepsilon_2^2/(\varepsilon_m + \varepsilon_2)}$ возрастает при увеличении ε_2 , из левой части двойного неравенства (1.303) следует, что согласование профиля мод возможно при

$$\varepsilon_d \geq \varepsilon_2. \quad (1.304)$$

Преобразуем правую часть двойного неравенства (1.303):

$$\sqrt{\frac{-\varepsilon_d^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}} \leq \sqrt{\frac{\varepsilon_m (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_m + \varepsilon_1}}. \quad (1.305)$$

Из (1.305) следует, что

$$\varepsilon_d^2 + A\varepsilon_d + A\varepsilon_m \leq 0, \quad (1.306)$$

где $A = [\varepsilon_m (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2]/(\varepsilon_m + \varepsilon_1)$. Отметим, что при выполнении условий $\varepsilon_m < 0$, $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d$ выполняется неравенство $A > 0$. Поскольку ε_d — существенно положительная величина, неравенство (1.306) выполняется при

$$0 < \varepsilon_d \leq \frac{-A + \sqrt{A^2 - 4A\varepsilon_m}}{2}. \quad (1.307)$$

Вводя обозначение

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\sqrt{A^2 - 4A\varepsilon_m} - A}{2}, \quad (1.308)$$

получаем, что

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_d \leq \varepsilon_{\max}. \quad (1.309)$$

Нетрудно показать, что $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_1$. Действительно, при $\varepsilon_d = \varepsilon_{\max}$

$$\kappa_d = \gamma_2 = k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_1}{\varepsilon_m + \varepsilon_1} - \varepsilon_2} > k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_1}{\varepsilon_m + \varepsilon_1} - \varepsilon_1}. \quad (1.310)$$

Правая часть неравенства (1.310) представляет собой поперечную компоненту волнового вектора плазмона, распространяющегося на границе раздела $\varepsilon_m - \varepsilon_1$. Поскольку эта величина при фиксированной диэлектрической проницаемости металла возрастает с увеличением диэлектрической проницаемости диэлектрика, получаем из (1.310) требуемое неравенство, $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_1$. При этом следует отметить, что второе неравенство в (1.309) носит скорее формальный характер, так как при больших значениях ε_d согласование профиля поля в области $z > h_1$ будет иметь место при больших h_1 . Последнее не позволяет ожидать существенного уменьшения рассеяния в этом случае.

Рассмотрим теперь случай, когда значения ε_1 , ε_2 лежат в области 2 (рис. 1.35). Анализируя дисперсионное соотношение (1.301), можно показать,

что для значений, удовлетворяющих неравенству $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_m \varepsilon_1 / (\varepsilon_m + \varepsilon_1)$, плазменная мода в структуре также существует при любых значениях h_1 . При изменении h_1 от 0 до $+\infty$ значение k_{IIM} непрерывно уменьшается от константы распространения плазмона на границе раздела $\varepsilon_m - \varepsilon_2$ до константы распространения плазмона на границе раздела $\varepsilon_m - \varepsilon_1$. При $h_1 = 0$, $\gamma_2 = k_0 \sqrt{-\varepsilon_2^2 / (\varepsilon_m + \varepsilon_2)}$, при $h_1 \rightarrow +\infty$, $\gamma_2 \rightarrow k_0 \sqrt{[\varepsilon_m (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2] / (\varepsilon_m + \varepsilon_1)}$. Согласование профиля поля мод при этом возможно при

$$k_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_m (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_m + \varepsilon_1}} \leq \gamma_d \leq k_0 \sqrt{\frac{-\varepsilon_2^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_2}}. \quad (1.311)$$

Преобразовывая неравенство (1.311) аналогично неравенству (1.303), получим, что выполнение (1.302) возможно при

$$\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon_d \leq \varepsilon_2, \quad (1.312)$$

где

$$\varepsilon_{\min} = \frac{\sqrt{A^2 - 4A\varepsilon_m} - A}{2}. \quad (1.313)$$

Отметим, что выражение (1.313) совпадает с выражением (1.308), полученным для области 1. Аналогично предыдущему случаю, можно показать, что для области 2 $\varepsilon_{\min} < \varepsilon_1$.

Перейдем теперь к рассмотрению области 3 (рис. 1.35), то есть случая, когда $\varepsilon_2 > \varepsilon_m \varepsilon_1 / (\varepsilon_m + \varepsilon_1)$. В этом случае волноводные моды в структуре существуют лишь при значениях $h_1 \in [0, h_1^{\max})$ [97]. При $h_1 = 0$ мода представляет собой плазмон, распространяющийся на границе раздела $\varepsilon_m - \varepsilon_2$. При увеличении h_1 константа распространения моды начинает уменьшаться и при $h_1 = h_1^{\max}$ достигает значения $k_0 \sqrt{\varepsilon_2}$, т. е. при $h_1 > h_1^{\max}$ мода перестает быть волноводной и становится вытекающей. Значение h_1^{\max} может быть найдено из (1.301) и составляет

$$h_1^{\max} = \tanh^{-1} \left[-\frac{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_m}}{\varepsilon_m \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \right] / (k_0 \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}). \quad (1.314)$$

Отметим, что поскольку при изменении h_1 от 0 до значения h_1^{\max} величина γ_2 уменьшается от $k_0 \sqrt{-\varepsilon_2^2 / (\varepsilon_m + \varepsilon_2)}$ до 0, то согласование профиля поля мод возможно при выполнении условия

$$\varepsilon_d < \varepsilon_2. \quad (1.315)$$

Результаты, полученные для трех областей, объединены в табл. 1.6. В таблицах 1.7, 1.8 представлены соответствующие значения h_1 и величины $l_{2\pi}$, соответствующие длине структуры, при которой фазовый набег $\Delta\varphi = |k_{\text{спр}} - k_{IIM}|l$ равен 2π .

До настоящего момента решалась задача нахождения возможных ε_d при заданных $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Используя полученные неравенства, решим другую задачу: найдем те $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, при которых возможно согласование профиля поля плазменной моды с профилем поля падающего ППП при фиксированном значении ε_d .

Таблица 1.6. Границы интервала возможных значений ε_d ($\lambda = 659$ нм) при различных соотношениях между ε_1 , ε_2

	Область 1: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$	Область 2: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \varepsilon_m / (\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$	Область 3: $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \varepsilon_m / (\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$
ε_d^{\min}	ε_2	$\frac{\sqrt{A^2 - 4A\varepsilon_m} - A}{2} < \varepsilon_1$	1
ε_d^{\max}	$\frac{\sqrt{A^2 - 4A\varepsilon_m} - A}{2} > \varepsilon_1$	ε_2	ε_2

Таблица 1.7. Границы интервала возможных значений h_1 при различных соотношениях между ε_1 , ε_2

	Область 1: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$	Область 2: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \varepsilon_m / (\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$	Область 3: $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \varepsilon_m / (\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$
h_1 при $\varepsilon_d = \varepsilon_d^{\min}$	0	∞	$h_{1\max}$
h_1 при $\varepsilon_d = \varepsilon_d^{\max}$	∞	0	0

Таблица 1.8. Границы интервала возможных значений $l_{2\pi}$ при различных соотношениях между ε_1 , ε_2

	Область 1: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$	Область 2: $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \varepsilon_m / (\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$	Область 3: $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \varepsilon_m / (\varepsilon_1 + \varepsilon_m)$
$l_{2\pi}$ при $\varepsilon_d = \varepsilon_d^{\min}$	∞	$l'_{2\pi} = \lambda_0 / \left \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_d}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_m \varepsilon_1}{\varepsilon_m + \varepsilon_1}} \right $	—
$l_{2\pi}$ при $\varepsilon_d = \varepsilon_d^{\max}$	$l'_{2\pi}$	∞	∞

Как и ранее, рассмотрим отдельно три области, в которых могут лежать ε_1 , ε_2 и сразу выпишем неравенства для ε_1 , ε_2 .

Для области 1 (рис. 1.35) согласование профиля поля плазмонной моды и падающего ППП возможно при

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &< \varepsilon_d, \\ \varepsilon_2 &< \frac{\varepsilon_m \varepsilon_1}{\varepsilon_m + \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_d^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}. \end{aligned} \quad (1.316)$$

Можно показать, что второе неравенство в (1.316) обеспечивает выполнение условия $\varepsilon_d < \varepsilon_{\max}$, где ε_{\max} определяется выражением (1.308).

Для области 2 согласование профиля поля плазмонной моды и падающего ППП возможно при

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &> \varepsilon_d, \\ \varepsilon_2 &> \frac{\varepsilon_m \varepsilon_1}{\varepsilon_m + \varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_d^2}{\varepsilon_m + \varepsilon_d}. \end{aligned} \quad (1.317)$$

Аналогично (1.316), второе неравенство в (1.317) обеспечивает выполнение условия $\varepsilon_d > \varepsilon_{\min}$.

Для области 3 согласование возможно при

$$\varepsilon_2 > \varepsilon_d. \quad (1.318)$$

На практике значения диэлектрических проницаемостей материалов обычно являются заданными. При заданных ω , ε_1 , ε_2 , ε_m , ε_d , обеспечивающих существование решения (1.302), соответствующее значение h_1 может быть аналитически рассчитано из (1.301) при

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= k_0 \sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_d / (\varepsilon_m + \varepsilon_d) + \varepsilon_2 - \varepsilon_d - \varepsilon_1}, \\ \gamma_2 &= k_0 \sqrt{-\varepsilon_d^2 / (\varepsilon_m + \varepsilon_d)}, \\ \gamma_m &= k_0 \sqrt{\varepsilon_m \varepsilon_d / (\varepsilon_m + \varepsilon_d) + \varepsilon_2 - \varepsilon_d - \varepsilon_m}. \end{aligned} \quad (1.319)$$

Выражения (1.319) получены из равенства (1.302) и выражения $\gamma_j^2 = k_{IIM}^2 - k_0^2 \varepsilon_j$. Отметим, что в случае, когда ε_m соответствует диэлектрической проницаемости реального металла и $\text{Im}(\varepsilon_m) \neq 0$, значение h_1 , рассчитанное из (1.301), будет комплексным. В случае малых потерь действительная часть этого значения может служить оценкой оптимальной толщины первого слоя.

1.4.3.2. Подавление паразитного рассеяния при прохождении поверхностных плазмон-поляритонов через двухслойные диэлектрические структуры. Рассмотрим пример подавления рассеяния при нормальном падении ППП на структуру на рис. 1.36, *a* при $\lambda = 800$ нм. Для диэлектрических проницаемостей материалов были выбраны следующие значения: $\varepsilon_m = -24,2$ (соответствует действительной части диэлектрической проницаемости золота), $\varepsilon_d = \varepsilon_1 = 1,96$, $\varepsilon_2 = 4$. В этом случае структура соответствует прямоугольному блоку, расположенному в диэлектрической обкладке плазмонного волновода на высоте h_1 . При указанных параметрах значение h_1 , рассчитанное с помощью выражений (1.301), (1.319), составляет 14 нм. В отличие от рис. 1.34, структура на рис. 1.36, *a* имеет конечную толщину h_2 верхнего слоя и конечную длину. Выбранное значение $h_2 = 2$ мкм в 14 раз превышает глубину проникновения в диэлектрик ППП, распространяющегося на границе раздела $\varepsilon_m - \varepsilon_d$. Таким образом, использованная выше модель планарного волновода является применимой. Отметим, что для выбранных параметров плазмонные моды в области структуры соответствуют модам волновода типа «проводник/зазор/диэлектрик» (conductor-gap-dielectric) [97].

Как и ранее, для моделирования дифракции ППП на рассматриваемой структуре использовался метод фурье-мод в формулировке работ [2, 5], адаптированный для неперiodических сред [21] и описанный в п. 1.1.4.

На рисунке 1.37 показаны рассчитанные зависимости коэффициента пропускания T (рис. 1.37, *a*) и фазового набег $\Delta\varphi = |k_{\text{spp}} - k_{IIM}|l$ прошедшего ППП (рис. 1.37, *б*) от высоты h_1 и длины структуры l . Сплошной линией показана толщина, при которой достигается минимум потерь на рассеяние (минимум величины $\int_0^{l_{\max}} S dl$, где $l_{\max} = 1,8$ мкм, $S = 1 - T - R$, где R — коэффициент отражения ППП). Из рисунка 1.37 видно, что это значение

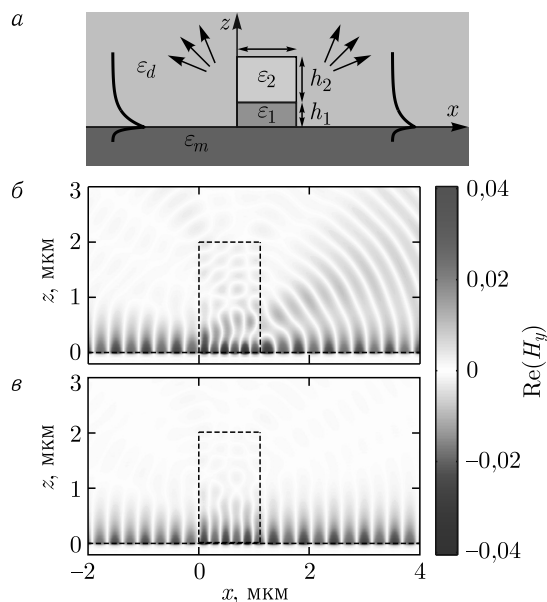


Рис. 1.36. Геометрия структуры (а) и распределение величины $\text{Re}(H_y)$ при прохождении ППП через структуру с $l = 1,1$ мкм при $h_1 = 0$ (б) и $h_1 = 16$ нм (в)

(16 нм) близко к расчетному значению 14 нм, показанному пунктирной линией. Рисунке 1.37 показывает, что возможна эффективная фазовая модуляция ППП за счет изменения длины структуры при высоком коэффициенте пропускания. Обозначим $l_{2\pi}$ длину структуры, при которой $\Delta\varphi = 2\pi$. Отметим, что поскольку константа распространения $k_{\text{ИМ}}$ зависит от толщины первого слоя, $l_{2\pi}$ также зависит от h_1 . Согласно рис. 1.37, $l_{2\pi} < 1,8$ мкм при $h_1 < 120$ нм.

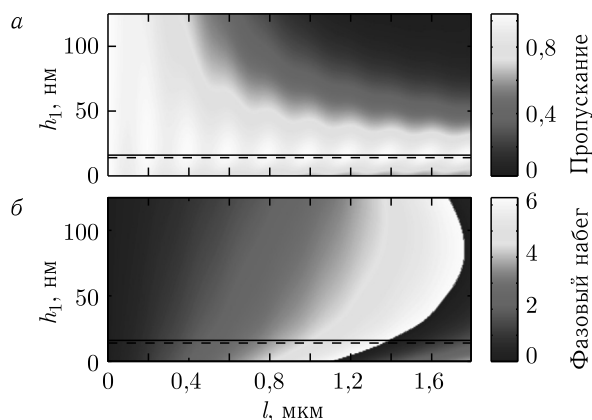


Рис. 1.37. Коэффициент пропускания ППП (а) и фазовый набег в зависимости от h_1 и длины структуры l (б). Сплошными линиями показано оптимальное значение $h_1 = 16$ нм, пунктирными линиями — расчетное значение $h_1 = 14$ нм

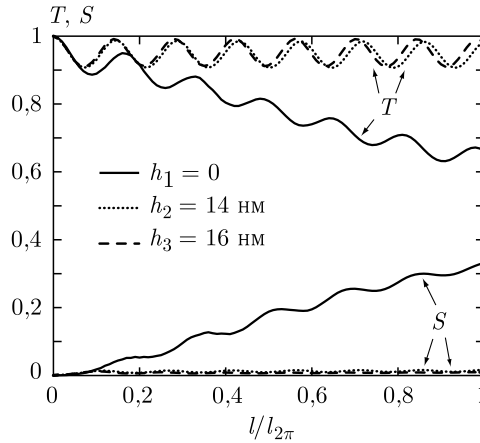


Рис. 1.38. Коэффициент пропускания ППП (T) и потери на рассеяние (S) при $h_1 = 0$ (сплошные линии), $h_1 = 14$ нм (точечные линии) и $h_1 = 16$ нм (пунктирные линии) в зависимости от нормированной длины структуры $l/l_{2\pi}$

На рисунке 1.38 показаны зависимости пропускания T и рассеяния S от нормированной длины структуры $l/l_{2\pi}$ для $h_1 = 0$, расчетного значения, $h_1 = 14$ нм и оптимального значения, $h_1 = 16$ нм. Значение $l_{2\pi}$ составляет 1,11 мкм для $h_1 = 0$, 1,37 мкм для $h_1 = 14$ нм и 1,4 мкм для $h_1 = 16$ нм. Рисунок 1.38 показывает, что переход к рассматриваемой двухслойной структуре позволяет снизить потери на паразитное рассеяние на порядок: максимальное рассеяние снижается с 33,1 % при $h_1 = 0$ до 1,6 % при $h_1 = 14$ нм и 1,2 % при $h_1 = 16$ нм (в 27 раз); среднее значение рассеяния $\bar{S} = \int_0^{l_{2\pi}} S dl / \int_0^{l_{2\pi}} dl$ снижается с 16,6 % при $h_1 = 0$ до 1,2 % при $h_1 = 14$ нм и 0,8 % при $h_1 = 16$ нм. На рисунках 1.36,б и 1.36,в показаны распределения величины $\text{Re}(H_y)$ при прохождении ППП через структуру длиной $l = 1,11$ мкм при $h_1 = 0$ и $h_1 = 16$ нм, соответственно. Рассеяние при этом составляет 33,1 % и 0,8 %, соответственно. Отметим, что значения h_1 , при которых происходит подавление рассеяния, достаточно слабо зависит от длины волны. Так, для рассматриваемого примера максимальное рассеяние для $h_1 = 16$ нм составляет 2,1 % при $\lambda = 700$ нм и 0,9 %, при $\lambda = 900$ нм, при $l \in [0, l_{2\pi})$.

Аналогичные расчеты были также проведены при $\varepsilon_2 = 1$ и $h_2 \gg 1$ мкм (этот случай соответствует выемке, выполненной в диэлектрической обкладке плазмонного волновода). В этом случае оптимальное значение h_1 составило 53 нм, а максимальное рассеяние было уменьшено с 14,1 % до 1,9 %. Среднее значение рассеяния при этом снижается с 7,9 % при $h_1 = 0$ до 1,4 % при $h_1 = 53$ нм.

Рассмотрим теперь пример подавления рассеяния в структуре с реальным металлом, в котором присутствует поглощение. В качестве диэлектрических проницаемостей материалов в примере были выбраны следующие значения: $\varepsilon_m = -24,2 + 1,442i$ (Au), $\varepsilon_d = 1$, $\varepsilon_1 = 2,1$, $\varepsilon_2 = 2,89$. При указанных параметрах значение h_1 , рассчитанное с помощью выражений (1.301), (1.319), составляет 53 нм. Выбранное значение $h_2 = 1,5$ мкм в 2,5 раза превышает глубину проникновения в диэлектрик падающего ППП.

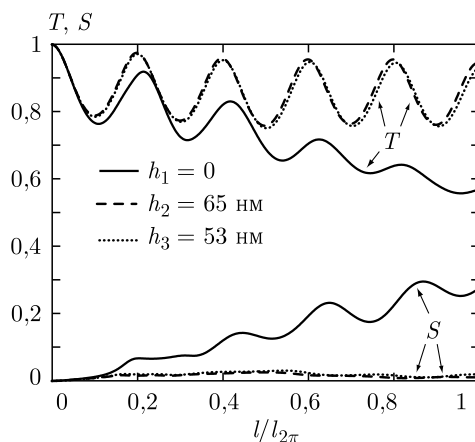


Рис. 1.39. Зависимости коэффициента пропускания плазмон-поляритона T и потерь на рассеяние S от нормированной длины структуры $l/l_{2\pi}$ при $h_1 = 0$ (сплошные линии), $h_1 = 53$ нм (точечные линии) и $h_1 = 65$ нм (пунктирные линии)

На рисунке 1.39 показаны зависимости коэффициента пропускания T и потерь на рассеяние S от нормированной длины структуры $l/l_{2\pi}$ для $h_1 = 0$, для расчетного значения $h_1 = 53$ нм и найденного в результате моделирования оптимального значения $h_1 = 65$ нм, при котором достигается минимум суммарных потерь на рассеяние, $\int_0^{l_{2\pi}} S dl$. При данных h_1 значения $l_{2\pi}$ составляют 1,06 мкм, 1,16 мкм и 1,17 мкм, соответственно. Рисунок 1.39 показывает, что переход к рассматриваемой двухслойной структуре позволяет снизить потери на паразитное рассеяние на порядок: максимальное рассеяние снижается с 29,5% при $h_1 = 0$ до 3% при $h_1 = 53$ нм и 2,5% при $h_1 = 65$ нм (в 12 раз); среднее значение рассеяния, $\bar{S} = \int_0^{l_{2\pi}} S dl / \int_0^{l_{2\pi}} dl$, снижается с 14,2% при $h_1 = 0$ до 1,9% при $h_1 = 53$ нм и 1,5% при $h_1 = 65$ нм.

Как и в предыдущем примере, значения h_1 , при которых происходит подавление рассеяния, медленно изменяются при изменении длины волны. На рисунке 1.40 представлены зависимости от длины волны потерь на рассеяние и оптимальной толщины $h_{1,\text{opt}}$ при прохождении плазмон-поляритона через границу раздела между стандартным плазмонным волноводом «металл/диэлектрик» и рассматриваемой структурой (вставка на рис. 1.40). Из рисунка 1.40 видно, что в диапазоне длин волн 700–900 нм оптимальные значения $h_{1,\text{opt}}$ лежат в диапазоне 58–63 нм, при этом максимальное рассеяние при оптимальной высоте составляет 3,2%. Данный результат показывает перспективность использования рассматриваемой структуры при создании элементов для преобразования плазмонных импульсов, исследование распространения которых является в настоящее время актуальной задачей [98].

На рисунке 1.41 показаны распределения величины $|\text{Re}(H_y)|$ при прохождении гауссова плазмонного импульса с длительностью 10 фс через диэлектрическую ступеньку ($h_1 = 0$, рис. 1.41, а) и рассматриваемую структуру ($h_1 = 65$ нм, рис. 1.41, б) длиной 950 нм. Значения диэлектрических проницаемостей ε_1 , ε_2 , ε_d считались постоянными, дисперсия диэлектрической проницаемости металла учитывалась на основе интерполяции табличных

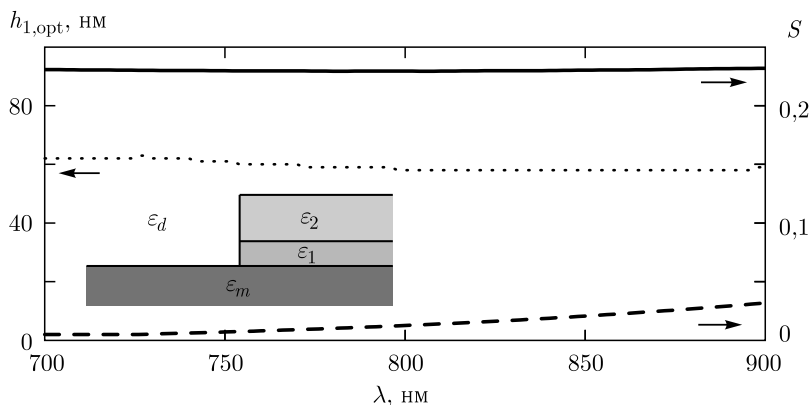


Рис. 1.40. Зависимости потерь на рассеяние S при $h_1 = 0$ (сплошная линия) и оптимальном значении $h_1 = h_{1,\text{opt}}$ (пунктирная линия) и оптимальной толщины $h_{1,\text{opt}}$ (точечная линия) от длины волны при прохождении плазмон-поляритона через границу раздела между стандартным плазмонным волноводом «диэлектрик/металл» и рассматриваемым волноводом «диэлектрик/диэлектрик/металл» (вставка)

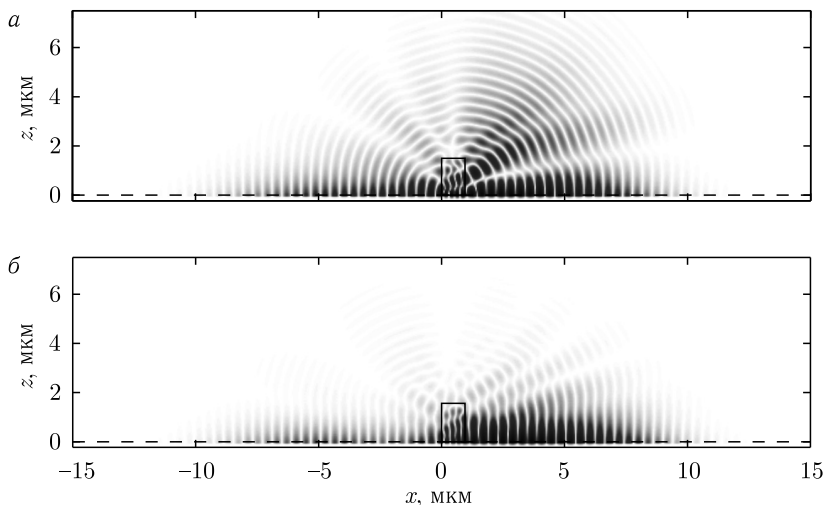


Рис. 1.41. Распределения величины $|\text{Re}(H_y)|$ при прохождении гауссова плазмонного импульса длительностью 10 фс и центральной длиной волны 800 нм через структуру с $h_1 = 0$ (а) и $h_1 = 65$ нм (б)

данных [81]. Потери энергии на паразитное рассеяние при этом снижаются с 29 % до 3 %.

1.4.4. Расчет линз для фокусировки поверхностных плазмон-поляритонов. **1.4.4.1. Интегральные представления поля в виде спектра поверхностных плазмон-поляритонов.** В скалярной теории дифракции широко используется представление дифрагированного поля в виде углового спектра плоских волн и дифракционного интеграла Кирхгофа [77, 78]. По аналогии со скалярной теорией указанные представления могут быть

также использованы для описания и дифракции ППП. Единственное отличие состоит в том, что в качестве длины волны излучения используется длина ППП. В частности, в работе [99] записано интегральное представление электромагнитного поля на поверхности распространения через угловой спектр ППП. В работе [100] указанное представление использовано для расчета линзы для фокусировки ППП и моделирования распространения ППП. В работе [101] для расчета линзы для ППП и описания дифракции ППП использован интеграл Френеля–Кирхгофа. Для корректности изложения приведем краткий вывод указанных интегральных представлений для ППП.

В соответствии с (1.245), компоненты поля ППП с вектором распространения $\mathbf{p} = (\alpha_0, \beta_0)$, $|\mathbf{p}| = 1$ в плоскости $z = 0$ имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^{(l)}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_0^{(l)} \exp(-i\omega t) \exp[ik_0(\alpha x + \beta y)] = \\ &= \mathbf{E}_0^{(l)} \exp(-i\omega t) \exp[ik_{\text{spp}}(\alpha_0 x + \beta_0 y)], \\ \mathbf{H}^{(l)}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}_0^{(l)} \exp(-i\omega t) \exp[ik_0(\alpha x + \beta y)] = \\ &= \mathbf{H}_0^{(l)} \exp(-i\omega t) \exp[ik_{\text{spp}}(\alpha_0 x + \beta_0 y)],\end{aligned}\tag{1.320}$$

где индекс $l = m, d$ обозначает среду, k_{spp} — константа распространения ППП (1.284). В соответствии с (1.283), константы α, β в (1.320) удовлетворяют дисперсионному соотношению

$$k_0^2 (\alpha^2 + \beta^2) = k_{\text{spp}}^2.\tag{1.321}$$

В качестве оптической оси выберем ось Ox . В этом случае поле удобно описывать компонентой H_y , которая аналогично выражению (1.272) имеет вид

$$H_y(x, y, z, t) = \begin{cases} H_y^{(d)}(x, y, z, t), & z > 0, \\ H_y^{(m)}(x, y, z, t), & z < 0, \end{cases}\tag{1.322}$$

где величины $H_y^{(d)}$ и $H_y^{(m)}$ при единичной амплитуде равны

$$\begin{aligned}H_y^{(d)}(x, y, z, t) &= \exp(-i\omega t) \exp[ik_0(\alpha x + \beta y)] \exp(-\kappa_d z), \\ H_y^{(m)}(x, y, z, t) &= \exp(-i\omega t) \exp[ik_0(\alpha x + \beta y)] \exp(\kappa_m z).\end{aligned}\tag{1.323}$$

Обычно под ППП понимают волну в виде (1.320), у которой константы распространения α, β определены через единичный вектор \mathbf{p} направления ППП в виде

$$k_0(\alpha, \beta) = k_{\text{spp}}(\alpha_0, \beta_0) = k_{\text{spp}}\mathbf{p}.\tag{1.324}$$

При этом α, β — комплексные числа, поскольку диэлектрическая проницаемость металла ε_m комплексна и величина k_{spp} также комплексна. В общем случае константы α, β должны лишь удовлетворять дисперсионному уравнению (1.321). В дальнейшем будем использовать ППП (1.323) при

$$k_0\alpha = \sqrt{k_{\text{spp}}^2 - k_0^2\beta^2}, \quad \beta \in \mathbb{R}.\tag{1.325}$$

При действительных значениях β компонента H_y ограничена по переменной y и на границе раздела $z = 0$ имеет вид

$$H_y(x, y, 0, t) = \exp(-i\omega t) \exp(ik_0\beta y) \exp\left(ik_0\sqrt{k_{\text{spp}}^2 - k_0^2\beta^2} x\right). \quad (1.326)$$

Уравнение (1.326) позволяет получить для функции H_y на границе раздела $z = 0$ интегральные представления, аналогичные представлению компонент поля через угловой спектр плоских волн и интегралу Кирхгофа, которые широко используются в скалярной теории дифракции [77, 78]. Действительно, запишем общее решение при $z = 0$ в виде суперпозиции ППП (опустим также зависимость от времени):

$$H_y(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\beta) \exp(ik_0\beta y) \exp\left(i\sqrt{k_{\text{spp}}^2 - k_0^2\beta^2} x\right) d\beta. \quad (1.327)$$

При этом функция $I(\beta)$ определяется через значения компонент поля при $x = 0$ в виде

$$I(\beta) = \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H_y(0, y) \exp(-ik_0\beta y) dy. \quad (1.328)$$

Уравнение (1.327) полностью идентично интегральному представлению поля через угловой спектр плоских волн, используемому в скалярной теории дифракции [77, 78]. Уравнение (1.327) позволяет записать интеграл Кирхгофа для ППП в виде

$$H_y(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_y(0, u) G(x, y - u) du, \quad (1.329)$$

где

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \frac{k_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(i\sqrt{k_{\text{spp}}^2 - k_0^2\beta^2} x\right) \exp(ik_0\beta y) d\beta = \\ &= \frac{ik_{\text{spp}}x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} H_1^1\left(k_{\text{spp}}\sqrt{x^2 + y^2}\right), \end{aligned} \quad (1.330)$$

$H_1^1(x)$ — функция Ханкеля первого рода, первого порядка [73].

1.4.4.2. Дифракционные линзы для фокусировки поверхностных плазмон-поляритонов. Рассмотрим в качестве примера расчет линз для фокусировки ППП с использованием рассмотренных в п. 1.4.2 методов фазовой модуляции [102, 103]. Согласно [12], фазовая функция дифракционной линзы с фокусом f имеет вид

$$\mathbf{E}_n = (E_{x,n}, 0, E_{z,n}) \varphi(y) = \text{mod}_{2\pi} \left(-\text{Re}(k_{\text{spp}}) \sqrt{y^2 + f^2} + \varphi_0 \right), \quad (1.331)$$

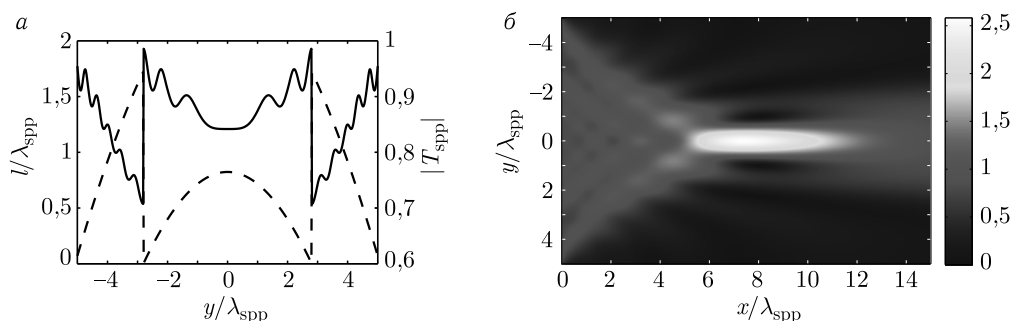


Рис. 1.42. Функция длины линзы, нормированная на длину волны ППП (пунктирная линия) и функция амплитудного пропускания (сплошная линия) в пределах апертуры линзы (а), формируемое распределение $|H_y(x, y)|$ (б)

где φ_0 — произвольная постоянная. На рисунке 1.42, а приведены функции длины микрорельефа линзы с изменяющейся длиной и фиксированной высотой (рис. 1.30) и амплитудного пропускания (модуля комплексного коэффициента пропускания ППП), рассчитанные при фокусе $f = 8\lambda_{\text{spp}}$ и размере апертуры линзы $2a = 10\lambda_{\text{spp}}$, где λ_{spp} — длина волны ППП (1.287). Длина микрорельефа нормирована на длину волны ППП. Расчет длины проводился по формулам (1.300), (1.331). Высота линзы составляет 1 мкм. Значения остальных параметров указаны в п. 1.4.2. На рисунке 1.42, б показано распределение величины $|H_y(x, y)|$, сформированное линзой и рассчитанное по формулам (1.329), (1.330). Рисунок 1.42, б показывает фокусировку на оси на прямой $x = f = 8\lambda_{\text{spp}}$.

На рисунке 1.43, а приведены функции высоты микрорельефа линзы и амплитудного пропускания для линзы, рассчитанной при фиксированной длине ступеньки $l = 1055$ нм (рис. 1.32). Параметры линзы совпадают с предыдущим примером. Формируемое распределение величины $|H_y(x, y)|$ приведено на рис. 1.43, б и также показывает фокусировку в точку. Распределения на рис. 1.42, б и 1.43, б близки по структуре. Отметим, что согласно рис. 1.31 и 1.43 использование метода фазовой модуляции на основе изменения высоты

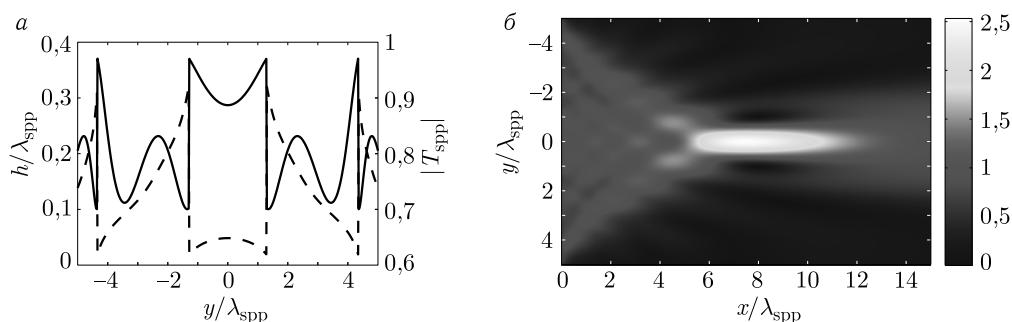


Рис. 1.43. Функция высоты линзы, нормированная на длину волны ППП (пунктирная линия) и функция амплитудного пропускания (сплошная линия) в пределах апертуры линзы (а), формируемое распределение $|H_y(x, y)|$ (б)

позволяет фокусировать ППП с помощью структур с высотой менее длины волны.

Энергетическая эффективность линз (доля энергии в прошедшей через линзу волне) может быть оценена по формуле [100]:

$$T_e = 100 \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|I(\beta)|^2 \operatorname{Re} \left(\sqrt{k_{\text{spp}}^2 - k_0^2 \beta^2} \right)}{\operatorname{Re}(k_{\text{spp}})} d\beta (\%). \quad (1.332)$$

Эффективность составляет 68,5 % для линзы, показанной на рис. 1.42, и 63,9 % для линзы, показанной на рис. 1.43. Отметим, что значение постоянной $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_{n,m,T}\mathbf{r}')]$ для обеих линз было выбрано из условия максимизации энергетической эффективности (1.332). Следует отметить, что, несмотря на несколько более низкую энергетическую эффективность линзы с фиксированной длиной и изменяющейся высотой, ее преимущества заключаются в плоских поверхностях элемента (такая линза является аналогом линзы с градиентным показателем преломления в обычной оптике) и высоте, существенно меньшей длины волны.

Наибольшая эффективность линзы может быть достигнута при модуляции ППП за счет одновременного изменения длины и высоты ступеньки. Действительно, будем считать, что линза расположена в области $-L \leq x \leq 0$, где L — максимальная длина линзы. При каждом значении y высоту h и длину l ступеньки можно определять из условия максимума модуля коэффициента пропускания:

$$|T_{\text{spp}}(l, h; y)| \exp[-\operatorname{Im}(k_{\text{spp}})(L - l)] \rightarrow \max, \quad (1.333)$$

где h, l определяются из условия формирования заданной фазы,

$$\operatorname{mod}_{2\pi} [\varphi(l, h) + \operatorname{Re}\{k_{\text{spp}}\}(L - l)] = \varphi(y). \quad (1.334)$$

Уравнение (1.334) предполагает, что заданное распределение фазы (1.331) формируется на прямой $x = 0$, расположенной непосредственно за линзой. При этом фаза складывается из фазы коэффициента пропускания ступеньки $\varphi(l, h)$ и фазового набеге, приобретаемого ППП при прохождении расстояния $L - l$ до прямой $x = 0$. Экспоненциальный коэффициент в (1.333) определяет затухание ППП при прохождении расстояния $L - l$. Согласно рис. 1.28, существует множество точек (l, h) , обеспечивающих заданный фазовый набег по модулю 2π .

На рисунке 1.44 показаны расчетные функции длины рельефа, высоты рельефа и амплитудного пропускания линзы, полученные из условия максимизации пропускания (1.333) при условии (1.334). Максимизация осуществлялась простым перебором значений (l, h) в области D , отмеченной пунктиром на рис. 1.28, а. При этом оптимальные значения (l, h) оказываются на кривой, показанной пунктиром на рис. 1.28, а. Данная кривая проходит через максимумы модуля коэффициента пропускания. Модуль коэффициента пропускания на рис. 1.44, а превышает 0,83, что значительно больше чем у линз на рис. 1.42 и 1.43. Формируемое распределение величины $|H_y(x, y)|$ приведено на рис. 1.44, б. Энергетическая эффективность линзы (1.332) со-

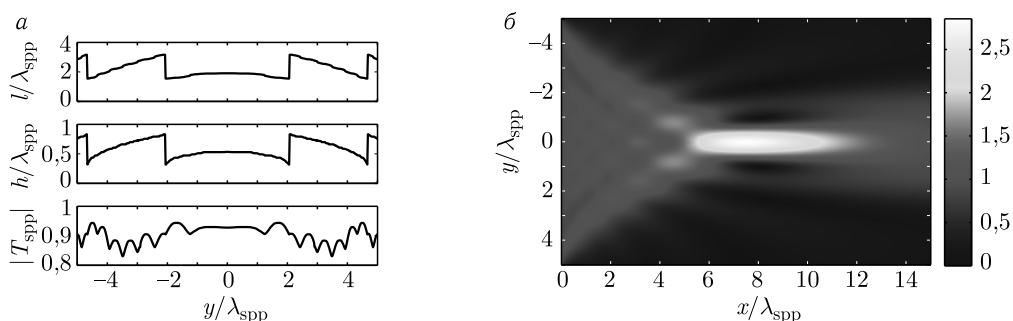


Рис. 1.44. Функции длины линзы (сверху), высоты (в середине) линзы, нормированные на длину волны ППП и функция амплитудного пропускания (снизу) в пределах апертуры линзы (а), формируемое распределение $|H_y(x, y)|$ (б)

ставляет 80,6%. Это более чем на 12% больше, чем у рассмотренных линз, основанных на изменении только одного параметра (длины или высоты). Оптимизация по (l, h) в более широкой области позволяет увеличить эффективность линзы еще на 3–4%, но при этом функции длины и высоты рельефа принимают существенно нерегулярный вид. Таким образом, метод модуляции ППП за счет одновременного изменения длины и высоты ступеньки является оптимальным с точки зрения достижения высокой энергетической эффективности дифракционных структур.

1.4.4.3. Расчет дифракционных линз для поверхностных плазмон-поляритонов с подавлением паразитного рассеяния. Рассмотрим теперь расчет линз для ППП с использованием метода подавления рассеяния, описанного выше. В качестве диэлектрических проницаемостей материалов были выбраны значения $\varepsilon_m = -24,2 + 1,442i$ (Au), $\varepsilon_d = 1$, $\varepsilon_1 = 2,1$, $\varepsilon_2 = 2,89$, совпадающие с материальными параметрами одного из рассмотренных выше примеров подавления рассеяния. Длина волны в свободном пространстве, как и ранее, составляет 800 нм.

Рассмотрим сначала линзу с $h_1 = 0$ (рис. 1.30). На рис. 1.45, а приведены фазовая функция (сверху), функция длины микрорельефа линзы (в середине)

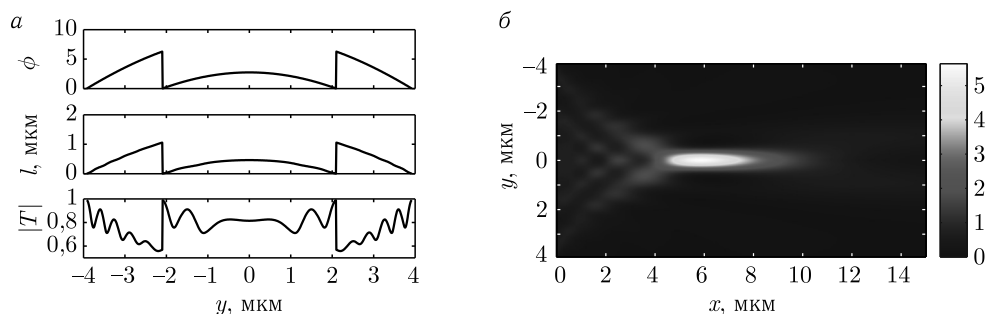


Рис. 1.45. Фазовая функция (сверху), функция длины микрорельефа линзы (в середине) и функция амплитудного пропускания (снизу) (а), формируемое распределение $|H_y(x, y)|^2$ (б) при $h_1 = 0$

и амплитудного пропускания (снизу), рассчитанные при фокусе $f = 8\lambda_{\text{сpp}}$ и размере апертуры линзы $2a = 10\lambda_{\text{сpp}}$. Высота линзы постоянна и составляет 1,5 мкм. На рис. 1.45, б показано распределение величины $|H_y(x, y)|^2$, сформированное линзой и рассчитанное по формулам (1.329), (1.330). Рисунок 1.45, б показывает фокусировку на оси на прямой $x = f = 8\lambda_{\text{сpp}}$.

Рассмотрим теперь двухслойную линзу (рис. 1.46), рассчитанную при $h_1 = 65$ нм (оптимальное значение для рассмотренного выше примера подавления рассеяния). На рисунке 1.47, а приведены функции высоты микрорельефа линзы и амплитудного пропускания. Параметры линзы совпадают с предыдущим примером. Формируемое распределение величины $|H_y(x, y)|^2$ приведено на рис. 1.47, б и также показывает фокусировку в точку. Графики на рис. 1.45, б и 1.47, б близки по структуре.

Энергетическая эффективность (1.332) составляет 54,5 % для линзы, показанной на рис. 1.45, и 74 % для линзы, показанной на рис. 1.47. Таким образом, предложенный метод подавления рассеяния позволяет увеличить эффективность линзы на 20 %. Отметим, что основной причиной меньшего значения эффективности линзы, показанной на рис. 1.45, по сравнению с линзой, показанной на рис. 1.42, являются большие потери на поглощение в металле (Au).

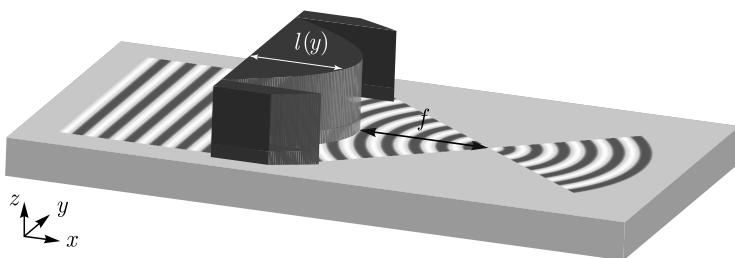


Рис. 1.46. Двухслойная диэлектрическая дифракционная структура для ППП с изменяющейся длиной и фиксированной высотой

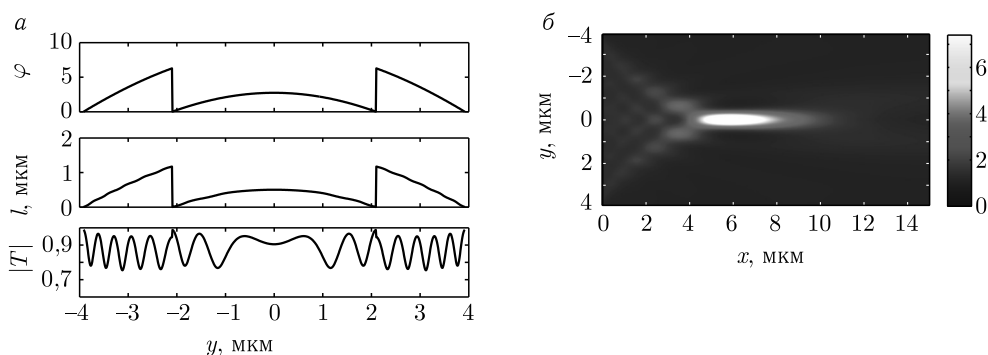


Рис. 1.47. Фазовая функция (сверху), функция длины микрорельефа линзы (в середине) и функция амплитудного пропускания (снизу) (а); формируемое распределение $|H_y(x, y)|^2$ (б) при $h_1 = 65$ нм

Одним из перспективных применений линз для фокусировки ППП являются плазмонные цепи, в которых ППП используются для передачи информации между различными элементами оптической интегральной схемы [104]. Для подобных применений актуальны линзы для ППП с несколькими фокусами, поэтому в качестве примера был проведен расчет линз с двумя фокусами. В качестве функции модуляции использовалась фазовая функция двухпорядковой линзы [12]:

$$\varphi(y) = \text{mod}_{2\pi} \{ [\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]/2 + \Phi [\text{mod}_{2\pi} ([\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]/2)] \}, \quad (1.335)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) &= -\text{Re}(k_{\text{spp}}) \sqrt{(y - y_1)^2 + f_1^2}, \\ \varphi_2(y) &= -\text{Re}(k_{\text{spp}}) \sqrt{(y - y_2)^2 + f_2^2} \end{aligned} \quad (1.336)$$

— фазовые функции линз с фокусами в точках (y_1, f_1) , (y_2, f_2) ,

$$\Phi(\xi) = \begin{cases} 0, \xi \in [0, \pi), \\ \pi, \xi \in [\pi, 2\pi). \end{cases} \quad (1.337)$$

Расчетные распределения $|H_y(x, y)|^2$, формируемые линзами с двумя фокусами с $h = 0$ и $h_1 = 65$ нм, приведены на рис. 1.48, а и 1.48, б, соответственно. Из рисунков видно, что переход к двухслойной структуре позволяет увеличить интенсивность в фокусах в 1,4 раза. Параметры линз: $f_1 = f_2 = 10\lambda_{\text{spp}}$, $y_1 = -5\lambda_{\text{spp}}$, $y_2 = 5\lambda_{\text{spp}}$, $2a = 20\lambda_{\text{spp}}$.

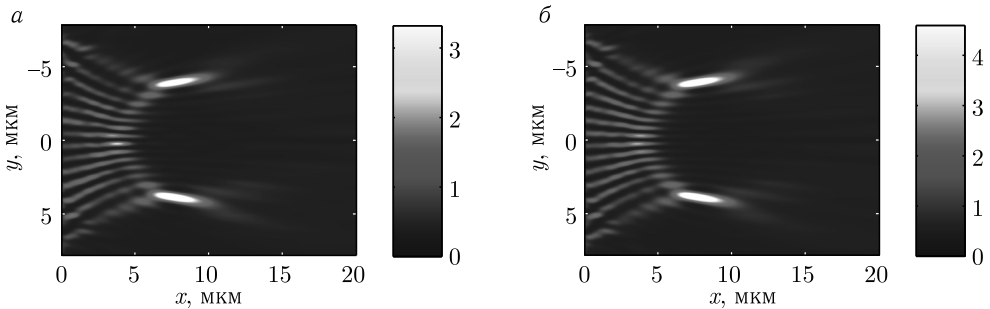


Рис. 1.48. Формируемые распределения $|H_y(x, y)|^2$ для двухфокусных линз с $h_1 = 0$ (а) и $h_1 = 65$ нм (б)

1.4.5. Расчет брэгговских отражающих решеток для поверхностных плазмон-поляритонов. Рассмотрим расчет брэгговских отражающих решеток (рис. 1.49) для случая нормального падения ППП с длиной волны 800 нм в свободном пространстве. При моделировании использовались следующие значения материальных параметров структуры: $\varepsilon_m = -24,2 + 1,44i$ (соответствует диэлектрической проницаемости золота), $\varepsilon_D = 1$, $\varepsilon_{\text{gr}} = 2,22$. Аспектное отношение решеток $h/\min\{l_1, l_2\}$ было ограничено значением 3, легко до-

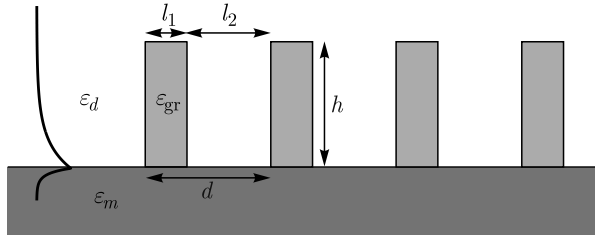


Рис. 1.49. Диэлектрическая брэгговская решетка для ППП

стижимым с помощью современных технологий изготовления наноструктур. Значения l_1 и l_2 были рассчитаны из уравнения

$$\operatorname{Re} \left(k_{\text{spp}}^1 \right) l_1 = \operatorname{Re} \left(k_{\text{spp}}^2 \right) l_2 = \frac{2n+1}{2} \pi, \quad (1.338)$$

где k_{spp}^1 и k_{spp}^2 — константы распространения плазмонных мод в соответствующих областях решетки, $n = 0, 1, \dots$ — порядок брэгговского отражения. Значения l_1 и l_2 , рассчитанные из (1.338), обеспечивают условие конструктивной интерференции в отраженной волне, или, что то же, условие появления запрещенной зоны:

$$\operatorname{Re} \left(k_{\text{spp}}^1 \right) l_1 + \operatorname{Re} \left(k_{\text{spp}}^2 \right) l_2 = (2n+1) \pi. \quad (1.339)$$

В рассмотренном примере были рассчитаны и с помощью метода фурие-мод промоделированы две брэгговские решетки для случаев $n = 0$ и $n = 1$. Геометрические параметры решеток: $d^0 = 325$ нм, $l_1^0 = 129$ нм, $l_2^0 = 196$ нм, $h^0 = 387$ нм, $d^1 = 972$ нм, $l_1^1 = 384$ нм, $l_2^1 = 588$ нм, $h^1 = 1152$ нм (верхний

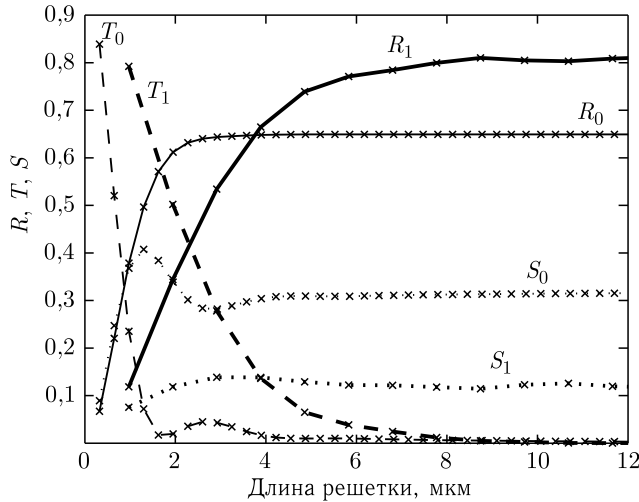


Рис. 1.50. Зависимость коэффициентов отражения ППП (R , сплошные линии), пропускания ППП (T , пунктирные линии) и потерь на рассеяние (S , точечные линии) от длины структуры при $n = 0$ (тонкие линии) и $n = 1$ (толстые линии)

индекс соответствует значению n). На рисунке 1.50 показаны зависимости коэффициентов отражения ППП, пропускания ППП и потерь на рассеяние от длины структуры при $n = 0$ и $n = 1$. Крестами показаны значения длины, соответствующие различному целому числу периодов решетки. Согласно рис. 1.50, увеличение периода решетки при постоянном аспектном отношении приводит к увеличению коэффициента отражения более чем на 15 % и позволяет уменьшить потери на рассеяние более чем в 3 раза.

Таким образом, основной причиной уменьшения эффективности диэлектрических брэгговских решеток для ППП является паразитное рассеяние. Использование брэгговских отражающих решеток с большим периодом позволяет существенно уменьшить паразитное рассеяние и увеличить коэффициент отражения.

1.5. Формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн с помощью дифракционных решеток

В настоящем разделе исследовано формирование высокочастотных интерференционных картин затухающих электромагнитных волн (ЗЭВ), соответствующих высшим затухающим порядкам дифракции, в ближнем поле дифракционных решеток с одномерной и двумерной периодичностью. Показано, что формирование интерференционных картин высших затухающих порядков дифракции происходит при возбуждении в решетках квазиволноводных мод. Предложены способы управления видом и периодом формируемых картин за счет изменения параметров падающего излучения (длины волны, поляризации, угла падения).

В подразделе 1.5.1 получено теоретическое описание интерференционных картин затухающих дифракционных порядков решеток с одномерной и двумерной периодичностью в предположении, что в решетках возбуждаются плазмонные моды или моды, близкие по структуре поля под решеткой к модам плоскопараллельного волновода. В подразделе 1.5.2 приведены результаты исследования возможности формирования одномерных и двумерных интерференционных картин плазмонных мод, возбуждаемых высшими затухающими порядками дифракции в дифракционных решетках с металлическим слоем и предложены способы управления формируемыми картинками за счет изменения параметров падающей волны. В подразделе 1.5.3 приведены результаты исследования возможности формирования интерференционных картин высших затухающих порядков дифракции в ближнем поле диэлектрических дифракционных решеток с одномерной и двумерной периодичностью.

1.5.1. Теоретическое описание интерференционных картин затухающих дифракционных порядков решеток с одномерной и двумерной периодичностью. Получены приближенные аналитические выражения для распределений электрического поля формируемых картин и оценки их контраста. Теоретически предсказана возможность управления конфигурацией формируемых двумерных интерференционных картин за счет изменения поляризации падающей волны.

1.5.1.1. Одномерные интерференционные картины. Рассмотрим вид одномерной интерференционной картины, формируемой двумя прошедшими затухающими порядками дифракции с номерами $\pm n$ в случае нормального падения на решетку с одномерной периодичностью волны с ТЕ- или ТМ-поляризацией. При этом будем полагать, что в решетке возбуждаются квазиволноводные моды (в частности, плазмонные), имеющие в области под решеткой распределение поля, близкое к полю рассматриваемых порядков, и поэтому для простоты анализа пренебрежем вкладом остальных прошедших порядков дифракции. В соответствии с (1.21), (1.22) зависимость от времени и координат компонент электрического и магнитного полей порядка с номером n имеет вид $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_{n,T}\mathbf{r}')]$, где $\mathbf{k}_{n,T} = (k_{x,n}, 0, i\kappa_n)$, $\kappa_n = \sqrt{k_{x,n}^2 - k_0^2 n^2}$. Учитывая последнее выражение, получим

$$\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n \sim T_n \exp(-i\omega t) \exp(ik_{x,n}x) \exp(-\kappa_n z'). \quad (1.340)$$

Отметим, что в случае нормального падения

$$k_{x,n} = -k_{x,-n} = \frac{2\pi}{d}n. \quad (1.341)$$

В случае симметричной структуры при этом $|T_n| = |T_{-n}|$, и амплитуды порядков $\pm n$ можно представить в виде

$$T_n = T_{\pm n} \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right), \quad (1.342)$$

$$T_{-n} = T_{\pm n} \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right),$$

где значения $T_{\pm n}$ и φ определяются выражениями

$$\begin{aligned} T_{\pm n} &= (T_n T_{-n})^{1/2}, \\ \varphi &= \arg(T_n) - \arg(T_{-n}). \end{aligned} \quad (1.343)$$

При этом, согласно выражениям (1.343), $|T_{\pm n}| = |T_n| = |T_{-n}|$.

Рассмотрим случай, когда падающая волна имеет ТЕ-поляризацию. Тогда $\mathbf{E}_n = (0, E_{y,n}, 0)$ и

$$E_{y,n} = T_n \exp(-i\omega t) \exp(ik_{x,n}x) \exp(-\kappa_n z'). \quad (1.344)$$

Учитывая (1.342) и (1.344), запишем выражение для интенсивности электрического поля интерференционной картины:

$$\begin{aligned} I(x, z') &= |E_{y,n} + E_{y,-n}|^2 = \\ &= |T_{\pm n}|^2 \left| \exp\left[i\left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2}\right)\right] + \exp\left[-i\left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2}\right)\right] \right|^2 \exp(-2\kappa_n z') = \\ &= 2|T_{\pm n}|^2 \cos^2\left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2}\right) \exp(-2\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.345)$$

Применяя к (1.345) формулы двойного угла, окончательно получим:

$$I(x, z') = |T_{\pm n}|^2 [\cos(2k_{x,n}x + \varphi) + 1] \exp(-2\kappa_n z'). \quad (1.346)$$

Из (1.346) следует, что период формируемой интерференционной картины равен $d_{\text{ip}} = \pi/k_{x,n}$. Учитывая (1.341) в выражении для периода, будем иметь

$$d_{\text{ip}} = \frac{d}{2n}. \quad (1.347)$$

Таким образом, период формируемой интерференционной картины в $2n$ раз меньше периода используемой дифракционной решетки. Из (1.346) также следует, что контраст интерференционной картины, определяемый выражением

$$K = \frac{\max_x I(x, 0) - \min_x I(x, 0)}{\max_x I(x, 0) + \min_x I(x, 0)}, \quad (1.348)$$

в случае ТЕ-поляризации равен

$$K_{\text{ТЕ}} = 1. \quad (1.349)$$

Отметим, что разность фаз φ между амплитудами порядков дифракции T_n , T_{-n} влияет лишь на положение максимумов и минимумов интерференционной картины на периоде, но не на ее вид и значение контраста. Здесь и далее будем считать, что интенсивность падающей на структуру волны равна 1, при этом выражение (1.346) и аналогичные выражения, которые будут получены ниже, будут описывать интенсивность интерференционной картины, нормированные на интенсивность падающей волны.

Рассмотрим теперь случай, когда падающая на решетку волна имеет ТМ-поляризацию. При этом $\mathbf{E}_n = (E_{x,n}, 0, E_{z,n})$, $\mathbf{H}_n = (0, H_{y,n}, 0)$ и для компоненты $H_{y,n}$ справедливо выражение

$$H_{y,n} = T_n \exp(-i\omega t) \exp(ik_{x,n}x) \exp(-\kappa_n z'). \quad (1.350)$$

Подставляя (1.350) в уравнения Максвелла (1.1), получим выражения для компонент электрического поля $E_{x,n}$ и $E_{z,n}$:

$$\mathbf{E}_n = \left(\frac{i\kappa_n}{k_0 n_2^2}, 0, -\frac{k_{x,n}}{k_0 n_2^2} \right) T_n \exp(-i\omega t) \exp(ik_{x,n}x) \exp(-\kappa_n z'). \quad (1.351)$$

Согласно (1.351),

$$\begin{aligned} E_{x,\pm n} &= E_{x,n} + E_{x,-n} = \\ &= \frac{i\kappa_n}{k_0 n_2^2} T_{\pm n} \left\{ \exp \left[i \left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2} \right) \right] + \exp \left[-i \left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\} \exp(-\kappa_n z') = \\ &= \frac{2i\kappa_n}{k_0 n_2^2} T_{\pm n} \cos \left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2} \right) \exp(-\kappa_n z'), \\ E_{z,\pm n} &= E_{z,n} + E_{z,-n} = \\ &= -\frac{k_{x,n}}{k_0 n_2^2} T_{\pm n} \left\{ \exp \left[i \left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2} \right) \right] - \exp \left[-i \left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \right\} \exp(-\kappa_n z') = \end{aligned} \quad (1.352)$$

$$= -\frac{2ik_{x,n}}{k_0 n_2^2} T_{\pm n} \sin\left(k_{x,n}x + \frac{\varphi}{2}\right) \exp(-\kappa_n z').$$

Запишем теперь выражение для интенсивности формируемой интерференционной картины:

$$\begin{aligned} I(x, z') &= |E_{x,\pm n}|^2 + |E_{z,\pm n}|^2 = \frac{2|T_{\pm n}|^2}{k_0^2 n_2^4} \times \\ &\times \left\{ \kappa_n^2 [\cos(2k_{x,n}x + \varphi) + 1] + k_{x,n}^2 [1 - \cos(2k_{x,n}x + \varphi)] \right\} \cdot \exp(-2\kappa_n z') = \\ &= \frac{2|T_{\pm n}|^2}{k_0^2 n_2^4} \left\{ \kappa_n^2 + k_{x,n}^2 + \cos(2k_{x,n}x + \varphi) (\kappa_n^2 - k_{x,n}^2) \right\} \exp(-2\kappa_n z'). \quad (1.353) \end{aligned}$$

Учитывая выражение для κ_n , перепишем (1.353) в виде

$$I(x, z') = \frac{2|T_{\pm n}|^2}{k_0^2 n_2^4} \left\{ 2k_{x,n}^2 - k_0^2 n_2^2 - k_0^2 n_2^2 \cos(2k_{x,n}x + \varphi) \right\} \exp(-2\kappa_n z'). \quad (1.354)$$

Согласно (1.354), период интерференционной картины в данном случае также определяется выражением (1.347). Для нахождения контраста интерференционной картины (1.348) запишем выражения для максимальной и минимальной интенсивностей интерференционной картины:

$$\begin{aligned} \max_x I &= \frac{4|T_{\pm n}|^2 k_{x,n}^2}{k_0^2 n_2^4} \exp(-2\kappa_n z'), \\ \min_x I &= \frac{4|T_{\pm n}|^2 (k_{x,n}^2 - k_0^2 n_2^2)}{k_0^2 n_2^4} \exp(-2\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.355)$$

Из (1.355) следует выражение для контраста формируемой картины в случае ТМ-поляризации падающей волны:

$$K_{TM} = \frac{n_2^2}{2(k_{x,n}/k_0)^2 - n_2^2} = \frac{n_2^2}{2(\lambda n/d)^2 - n_2^2}. \quad (1.356)$$

Еще раз отметим, что полученные выражения для вида интерференционных картин (1.346), (1.354) и контраста (1.349), (1.356) соответствуют «идеальным» интерференционным картинам в отсутствие дифракционных порядков с номерами, отличными от $\pm n$, поэтому исследование интерференционных картин, формируемых конкретными дифракционными решетками, необходимо проводить на основе моделирования в рамках строгой электромагнитной теории дифракции. Результаты моделирования для различных дифракционных решеток с помощью метода фурье-мод, описанного в п. 1.1, приведены ниже в п. 1.5.2 и 1.5.3.

1.5.1.2. Двумерные интерференционные картины. Исследуем конфигурацию двумерных интерференционных картин прошедших затухающих порядков дифракции, формируемых в ближнем поле дифракционных решеток с двумерной периодичностью при нормальном падении волны. В этом

случае зависимость от времени и координат компонент электромагнитного поля прошедших порядков дифракции имеет вид $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}_{n,m,T}\mathbf{r}')] \exp[-i\kappa_{n,m}z']$, где $\mathbf{k}_{n,m,T} = (k_{x,n}, k_{y,m}, i\kappa_{n,m})$, где

$$\begin{aligned} k_{x,n} &= \frac{2\pi}{d_x}n, & k_{y,m} &= \frac{2\pi}{d_y}m, \\ \kappa_{n,m} &= \sqrt{k_{x,n}^2 + k_{y,m}^2 - k_0^2 n^2}, \end{aligned} \quad (1.357)$$

где d_x, d_y — периоды решетки вдоль осей Ox и Oy , соответственно. При этом

$$\mathbf{E}_{n,m}, \mathbf{H}_{n,m} \sim T_{n,m} \exp(-i\omega t) \exp[i(k_{x,n}x + k_{y,m}y)] \exp(-\kappa_{n,m}z'). \quad (1.358)$$

В дальнейшем будем считать, что рассматриваемые решетки симметричны относительно плоскостей, параллельных координатным плоскостям xOz и yOz , и полагать периоды вдоль осей равными $d_x = d_y = d$; в этом случае $k_{x,n} = k_{y,n} = k_n$. Аналогично одномерному случаю, при падении на такие решетки волны с круговой или смешанной линейной поляризацией верно равенство $|T_{n,m}| = |T_{-n,-m}| = |T_{n,-m}| = |T_{-n,m}|$ [105, 106]. При смешанной линейной поляризации угол между вектором напряженности электрического поля и осью Ox составляет 45° .

Будем рассматривать суперпозицию четырех порядков дифракции с номерами $(\pm n, 0)$, $(0, \pm n)$, аналогично одномерному случаю полагая, что при нормальном падении на решетку волны с круговой или смешанной поляризацией в структуре возбуждаются квазиволноводные моды, имеющие в области под решеткой распределение поля, близкое к полю рассматриваемых порядков. Рассмотрим сначала случай, когда возбуждаемые моды имеют поляризацию, близкую к ТЕ-поляризации. Таким образом, будем учитывать только y -компоненту электрического поля для мод, распространяющихся вдоль оси Ox и x -компоненту для мод, распространяющихся вдоль оси Oy . Тогда компоненты электрического поля, соответствующие прошедшим затухающим порядкам дифракции с номерами $(\pm n, 0)$, $(0, \pm n)$, будут иметь вид

$$\begin{aligned} E_{y,n,0} &= T_{n,0} \exp(-i\omega t) \exp(ik_n x) \exp(-\kappa_n z'), \\ E_{x,0,n} &= T_{0,n} \exp(-i\omega t) \exp(ik_n y) \exp(-\kappa_n z'), \end{aligned} \quad (1.359)$$

где $\kappa_n = \kappa_{n,0} = \kappa_{0,n}$.

Будем считать, что в рассматриваемой структуре квазиволноводные моды, распространяющиеся вдоль осей Ox и Oy , возбуждаются только ТЕ- и только ТМ-компонентами падающей волны, соответственно. При этом разность фаз между возбуждаемыми модами будет равна разности фаз между компонентами падающей волны φ и для амплитуд порядков дифракции с номерами $(\pm n, 0)$, $(0, \pm n)$ будут справедливы следующие выражения:

$$\begin{aligned} T_{n,0} &= \exp(i\varphi) T_{0,n} = T_{\pm n} \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right), \\ T_{-n,0} &= \exp(i\varphi) T_{0,-n} = T_{\pm n} \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right), \end{aligned} \quad (1.360)$$

где величины $T_{\pm n}$ и φ определяются аналогично одномерному случаю (выражения (1.343)). Учитывая (1.360) в (1.359), запишем выражения для компонент электрического поля суперпозиции порядков дифракции:

$$\begin{aligned} E_{y,\pm n,0} &= E_{y,n,0} + E_{y,-n,0} = \\ &= 2T_{\pm n} \exp(-i\omega t) \cos\left(k_n x + \frac{\varphi}{2}\right) \exp(-\kappa_n z'), \\ E_{x,0,\pm n} &= E_{x,0,n} + E_{x,0,-n} = \\ &= 2 \exp(-i\varphi) T_{\pm n} \exp(-i\omega t) \cos\left(k_n y + \frac{\varphi}{2}\right) \exp(-\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.361)$$

Запишем теперь выражение для интенсивности электрического поля интерференционной картины:

$$\begin{aligned} I(x, y, z') &= |E_{y,\pm n,0}|^2 + |E_{x,0,\pm n}|^2 = \\ &= 4 |T_{\pm n}|^2 \left[\cos^2\left(k_n x + \frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(k_n y + \frac{\varphi}{2}\right) \right] \exp(-2\kappa_n z') = \\ &= |T_{\pm n}|^2 [2 + \cos(2k_n x + \varphi) + \cos(2k_n y + \varphi)] \exp(-2\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.362)$$

Из (1.362) следует, что аналогично одномерному случаю периоды формируемой интерференционной картины вдоль осей Ox и Oy равны $d_{ip,x} = d_{ip,y} = d_{ip} = \pi/k_n$, а контраст интерференционной картины на границе раздела между решеткой и подложкой, в двумерном случае равен

$$K = \frac{\max_{x,y} I(x, y, 0) - \min_{x,y} I(x, y, 0)}{\max_{x,y} I(x, y, 0) + \min_{x,y} I(x, y, 0)} = 1. \quad (1.363)$$

Найдем положение максимумов и минимумов интенсивности интерференционной картины, описываемой выражением (1.362). Для этого воспользуемся достаточным условием экстремума функции двух переменных [107]: для существования экстремума функции F двух переменных в точке (x_0, y_0) достаточно выполнения следующих условий:

$$F'_x(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) = 0, \quad (1.364)$$

$$F''_{xx}(x_0, y_0) \cdot F''_{yy}(x_0, y_0) - (F''_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0, \quad (1.365)$$

где F'_x , F'_y и F''_{xx} , F''_{yy} , F''_{xy} — первые и вторые частные производные функции F , соответственно. При этом если $F''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция имеет минимум, если $F''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ — максимум. Без ограничения общности положим $\varphi = 0$ и будем исследовать функцию

$$F = \cos(2k_n x) + \cos(2k_n y), \quad (1.366)$$

положения экстремумов которой совпадают с положениями экстремумов интенсивности электрического поля формируемой интерференционной картины.

Легко показать, что условие равенства первых производных нулю (1.364) выполняется в точках

$$\begin{cases} x = \frac{dl_x}{4n}, & l_x \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{dl_y}{4n}, & l_y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.367)$$

В найденных точках нужно проверить выполнение условия (1.365). Для рассматриваемой функции (1.366) оно будет иметь вид

$$\cos(2k_n x) \cos(2k_n y) > 0. \quad (1.368)$$

Подставляя в (1.368) множество точек (1.367), получим неравенство

$$\cos(\pi l_x) \cos(\pi l_y) > 0. \quad (1.369)$$

Неравенство (1.369) выполняется, когда l_x и l_y имеют одинаковую четность. Когда l_x и l_y четные, функция F (и, следовательно, интенсивность электрического поля интерференционной картины) достигает своего максимума; когда же l_x и l_y нечетные — минимума.

Положения экстремумов функции I при $n = 3$ представлены на рис. 1.51. Максимумы показаны символами «+», минимумы — точками. На рисунке 1.52 показано нормированное на максимальное значение распределение интенсивности (1.362) на одном периоде решетки при $n = 3$ и $\varphi = 0$.

Отметим, что из выражения (1.362) следует, что в случае, когда возбуждаемые в решетке моды имеют ТЕ-поляризацию, вид картины не зависит от разности фаз между ТЕ- и ТМ-компонентами падающей волны.

Рассмотрим теперь случай, когда в решетке возбуждаются квазिवолноводные моды с поляризацией, близкой к ТМ-поляризации. Таким образом,

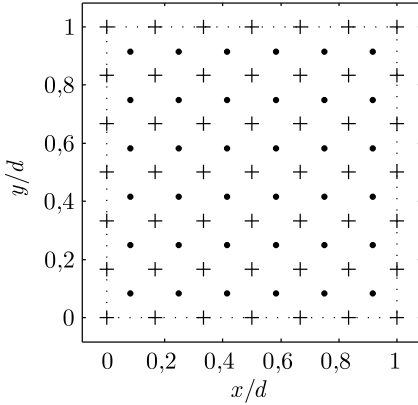


Рис. 1.51. Максимумы («+») и минимумы (точки) интенсивности интерференционной картины в случае возбуждения в решетке квазिवолноводных мод ТЕ-типа при $n = 3$. Точечным прямоугольником показаны границы периода

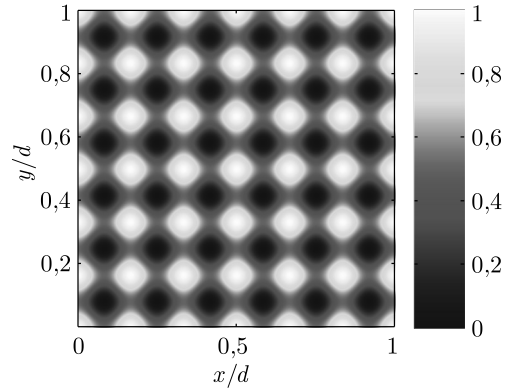


Рис. 1.52. Теоретическая оценка вида распределения интенсивности электрического поля I в подложке на границе раздела дифракционная решетка/подложка на одном периоде решетки при возбуждении в структуре квазिवолноводных мод ТЕ-типа при $n = 3$

будем учитывать только y -компоненту магнитного поля для мод, распространяющихся вдоль оси Ox и x -компоненту для мод, распространяющихся вдоль оси Oy . Тогда компоненты магнитного поля, соответствующие прошедшим затухающим порядкам дифракции с номерами $(\pm n, 0)$, $(0, \pm n)$, будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_{y,n,0} &= T_{n,0} \exp(-i\omega t) \exp(ik_n x) \exp(-\kappa_n z'), \\ H_{x,0,n} &= T_{0,n} \exp(-i\omega t) \exp(ik_n y) \exp(-\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.370)$$

Подставляя (1.370) в (1.1), запишем выражения для компонент электрического поля рассматриваемых порядков дифракции:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{n,0} &= \left(\frac{i\kappa_n}{k_0 n_2^2}, 0, \frac{-k_n}{k_0 n_2^2} \right) T_{n,0} \exp(-i\omega t) \exp(ik_n x) \exp(-\kappa_n z'), \\ \mathbf{E}_{0,n} &= \left(0, \frac{-i\kappa_n}{k_0 n_2^2}, \frac{k_n}{k_0 n_2^2} \right) T_{0,n} \exp(-i\omega t) \exp(ik_n y) \exp(-\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.371)$$

Предполагая, что, как и в случае возбуждения мод ТЕ-типа, выполняются равенства (1.360), запишем выражения для компонент электрического поля суперпозиции порядков дифракции:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\pm n,0} &= \mathbf{E}_{n,0} + \mathbf{E}_{-n,0} = \left(\kappa_n \cos\left(k_n x + \frac{\varphi}{2}\right), 0, -k_n \sin\left(k_n x + \frac{\varphi}{2}\right) \right) \times \\ &\times \frac{2iT_{\pm n}}{k_0 n_2^2} \exp(-i\omega t) \exp(-\kappa_n z'), \\ \mathbf{E}_{0,\pm n} &= \mathbf{E}_{0,n} + \mathbf{E}_{0,-n} = \left(0, -\kappa_n \cos\left(k_n y + \frac{\varphi}{2}\right), k_n \sin\left(k_n y + \frac{\varphi}{2}\right) \right) \times \\ &\times \frac{i2T_{\pm n}}{k_0 n_2^2} \exp(-i\varphi) \exp(-i\omega t) \cdot \exp(-\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.372)$$

С учетом (1.372) получим представления для интенсивности электрического поля формируемой интерференционной картины:

$$\begin{aligned} I(x, y, z') &= \frac{4|T_{\pm n}|^2}{(k_0 n_2^2)^2} \left\{ \kappa_n^2 \left[\cos^2\left(k_n x + \frac{\varphi}{2}\right) + \cos^2\left(k_n y + \frac{\varphi}{2}\right) \right] + \right. \\ &\left. + k_n^2 \left| \exp(-i\varphi) \sin\left(k_n y + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\left(k_n x + \frac{\varphi}{2}\right) \right|^2 \right\} \exp(-2\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.373)$$

Рассмотрим случай, когда падающая волна имеет смешанную линейную поляризацию и $\varphi = 0$. Тогда выражение (1.373) при $\varphi = 0$ примет вид

$$\begin{aligned} I(x, y, z') &= \frac{4|T_{\pm n}|^2}{(k_0 n_2^2)^2} \left\{ 2k_n^2 - k_0^2 n_2^2 - \left[k_0^2 n_2^2 \frac{\cos(2k_n x) + \cos(2k_n y)}{2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + 2k_n^2 \sin(k_n x) \sin(k_n y) \right] \right\} \cdot \exp(-2\kappa_n z'). \end{aligned} \quad (1.374)$$

Аналогично случаю возбуждения мод ТЕ-типа, найдем положения экстремумов интенсивности интерференционной картины. Условие (1.364) при этом будет иметь вид

$$\begin{cases} \cos(k_n x) [k_n^2 \sin(k_n y) - k_0^2 n_2^2 \sin(k_n x)] = 0, \\ \cos(k_n y) [k_n^2 \sin(k_n x) - k_0^2 n_2^2 \sin(k_n y)] = 0. \end{cases} \quad (1.375)$$

Решением системы (1.375) являются два множества точек:

$$\begin{cases} x = \frac{d}{4n} + \frac{dl_x}{2n}, \quad l_x \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{d}{4n} + \frac{dl_y}{2n}, \quad l_y \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (1.376)$$

и

$$\begin{cases} x = \frac{dl_x}{2n}, \quad l_x \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{dl_y}{2n}, \quad l_y \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (1.377)$$

Условие (1.365) в рассматриваемом случае примет вид

$$\begin{aligned} 4k_n^4 \left[k_n^2 \sin(k_n x) \sin(k_n y) + k_0^2 n_2^2 \cos(2k_n x) \right] \times \\ \times \left[k_n^2 \sin(k_n x) \sin(k_n y) + k_0^2 n_2^2 \cos(2k_n y) \right] - \\ - 4k_n^8 \cos^2(k_n x) \cos^2(k_n y) > 0. \end{aligned} \quad (1.378)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что точки (1.376) удовлетворяют неравенству (1.378), точки (1.377) — не удовлетворяют. Таким образом, положения экстремумов интенсивности интерференционной картины определяются выражением (1.376). Анализируя знак производной F''_{xx} , легко показать, что если значения l_x и l_y имеют разную четность, то достигаются максимумы интенсивности, а в противном случае — ее минимумы. Положения экстремумов функции I при $n = 3$ представлены на рис. 1.53. Как и в предыдущем случае, символами «+» показаны максимумы, точками — минимумы.

На рисунке 1.54 показано нормированное на максимальное значение распределение интенсивности (1.374) на одном периоде решетки при $n = 3$.

В данном случае периодом интерференционной картины удобно называть расстояние между соседними максимумами, расположенными на прямой, составляющей угол в 45° с осями координат (см. рис. 1.53). В этом случае период картины равен

$$d_{ip} = \frac{d}{\sqrt{2}n}. \quad (1.379)$$

Подставляя координаты экстремумов (1.376) в выражение для интенсивности (1.374), находим, что интенсивность в минимумах интерференционной картины равна 0, следовательно, контраст картины, определяемый равенством (1.363), равен в случае смешанной линейной поляризации падающей волны 1.

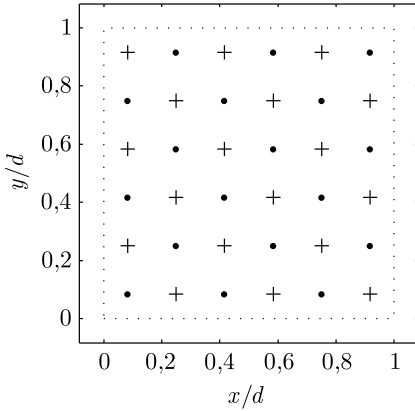


Рис. 1.53. Максимумы («+») и минимумы (точки) интенсивности интерференционной картины в случае возбуждения в решетке квазиволноводных мод ТМ-типа при смешанной линейной поляризации падающей волны при $n = 3$. Точечным прямоугольником показаны границы периода

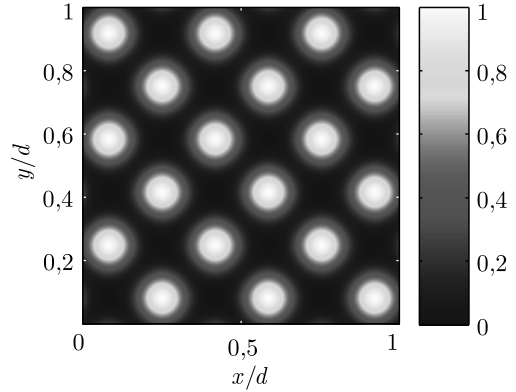


Рис. 1.54. Теоретическая оценка вида распределения интенсивности электрического поля I в подложке на границе раздела дифракционная решетка/подложка на одном периоде решетки при возбуждении в структуре квазиволноводных мод ТМ-типа при $n = 3$. Падающая волна имеет смешанную линейную поляризацию

Рассмотрим теперь случай, когда падающая на решетку волна имеет круговую поляризацию. Тогда $\varphi = \pi/2$ и выражение (1.373) при $\varphi = 0$ будет иметь вид

$$I(x, y, z') = \frac{4|T_{\pm n}|^2}{(k_0 n_2^2)^2} \left\{ 2k_n^2 - k_0^2 n_2^2 [\cos^2(k_n x) + \cos^2(k_n y)] \right\} \exp(-2\kappa_n z'). \quad (1.380)$$

Максимумы интенсивности интерференционной картины в этом случае находятся в точках (1.376), минимумы — в точках (1.377), при этом дополнительных ограничений на значения l_x и l_y не накладывается. Положения экстремумов функции I при $n = 3$ представлены на рис. 1.55. Символами «+» показаны максимумы, точками — минимумы.

На рисунке 1.56 показано нормированное на максимальное значение распределение интенсивности (1.380) на одном периоде решетки при $n = 3$.

Подставляя координаты экстремумов (1.376) и (1.377) в выражение (1.380), найдем максимальное и минимальное значения интенсивности формируемой интерференционной картины:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} I(x, y, 0) &= \frac{8k_n^2 |T_{\pm n}|^2}{(k_0 n_2^2)^2}, \\ \min_{x,y} I(x, y, 0) &= \frac{8(k_n^2 - k_0^2 n_2^2) |T_{\pm n}|^2}{(k_0 n_2^2)^2}. \end{aligned} \quad (1.381)$$

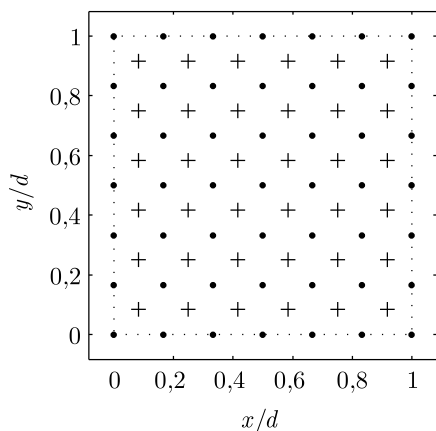


Рис. 1.55. Максимумы («+») и минимумы (точки) интенсивности интерференционной картины в случае возбуждения в решетке квазिवолноводных мод ТМ-типа при круговой поляризации падающей волны при $n = 3$. Точечным прямоугольником показаны границы периода

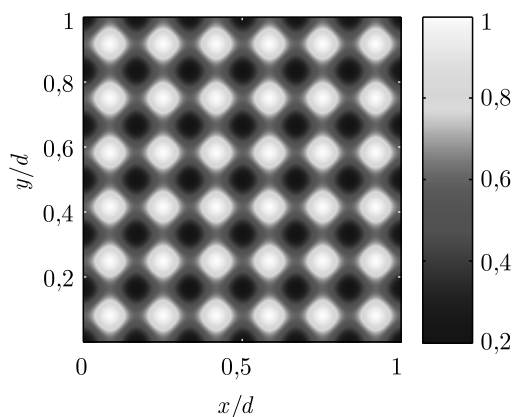


Рис. 1.56. Теоретическая оценка вида распределения интенсивности электрического поля I в подложке на границе раздела дифракционная решетка/подложка на одном периоде решетки при возбуждении в структуре квазिवолноводных мод ТМ-типа при $n = 3$. Падающая волна имеет круговую поляризацию. $\lambda/d \approx 0,596$, $n_2 = 1,6$

Из (1.381) следует, что в этом случае значение контраста интерференционной картины совпадает с выражением для одномерной интерференционной картины (1.356).

Из сравнения выражений (1.362) и (1.380) и рис. 1.52 и 1.56 следует, что вид интерференционной картины, формируемой при возбуждении квазिवолноводных мод ТМ-типа волной с круговой поляризацией, близок к виду картины, формируемой при возбуждении мод ТЕ-типа. Период картины при этом равен $d/2n$. Кроме того, из сравнения выражений (1.374) и (1.380) и рис. 1.54 и 1.56 следует, что вид формируемых при возбуждении мод ТМ-типа интерференционных картин зависит от поляризации падающей волны. Данное свойство может позволить формировать различные интерференционные картины с помощью одной дифракционной решетки.

Еще раз отметим, что полученные выражения для интенсивности и контраста формируемых интерференционных картин являются оценками, не учитывающими вклад дифракционных порядков с номерами, отличными от $\pm n$ (в случае одномерных интерференционных картин) или $(\pm n, 0)$, $(0, \pm n)$ (в случае двумерных интерференционных картин) и предполагающими, что возбуждаемые в дифракционной решетке квазिवолноводные моды близки по конфигурации поля и поляризации к модам плоскопараллельного волновода или плазмонным модам. Для их проверки необходимо с помощью численного моделирования на основе строгой электромагнитной теории дифракции рассчитать распределения интенсивности электрического поля, формируемые конкретными дифракционными решетками при возбуждении в них квазिवолноводных мод.

1.5.2. Формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн в металлодиэлектрических дифракционных решетках.

1.5.2.1. Формирование одномерных интерференционных картин. Рассмотрим формирование одномерных интерференционных картин затухающих электромагнитных волн с помощью дифракционной структуры, состоящей из диэлектрической дифракционной решетки с одномерной периодичностью и однородного металлического слоя, расположенных на диэлектрической подложке (рис. 1.57) [108, 109]. Период дифракционной решетки равен d , решетка имеет одну ступеньку на периоде, ширина которой равна w . Диэлектрическая проницаемость решетки равна ε_{gr} , высота ступеньки — h_{gr} , толщина однородного диэлектрического слоя решетки — h_l . Толщина однородной металлической пленки, расположенной под решеткой и имеющей диэлектрическую проницаемость ε_m , равна h_m .

Описание формирования интерференционных картин, приведенное в п. 1.5.1, было получено в предположении, что при нормальном падении плоской волны на структуру в ней возбуждаются квазиволноводные моды. В рассматриваемой структуре могут возбуждаться плазмонные моды, близкие по структуре к ППП, распространяющимся на границе раздела между металлическим слоем и подложкой. При этом приближенное условие возбуждения мод затухающими порядками дифракции с номерами $\pm n$ будет иметь вид

$$k_{x,n} = \text{Re } k_{\text{sp}}, \quad (1.382)$$

где константа распространения порядка дифракции с номером n определяется выражением (1.341), а константа распространения ППП — выражением (1.284), при этом в качестве диэлектрической проницаемости диэлектрика следует использовать значение n_2^2 . Задавшись конкретным значением n , из выражения (1.382) можно получить выражение для периода дифракцион-

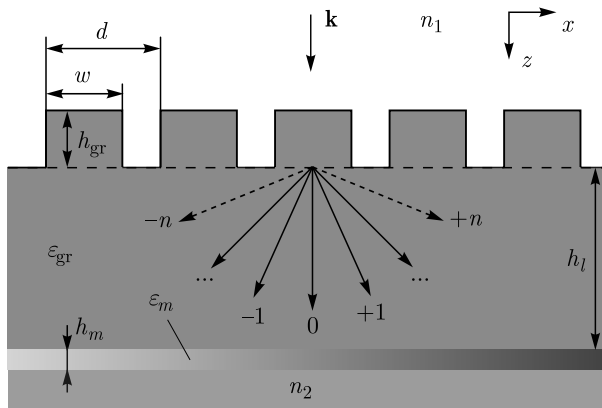


Рис. 1.57. Дифракционная структура для формирования одномерных интерференционных картин плазмонных мод

ной решетки:

$$d = \lambda n \operatorname{Re} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_m + n_2^2}{\varepsilon_m n_2^2}} \right\}. \quad (1.383)$$

Еще раз отметим, что выражение для периода решетки (1.383) соответствует приближенному условию возбуждения плазмонных мод в структуре, однако, как будет показано ниже, использование этого выражения для расчета периода решетки позволяет получить структуры, в которых формируются интерференционные картины, обладающие высокими значениями интенсивности и контраста.

Рассмотрим пример формирования одномерных интерференционных картин плазмонных мод с помощью структуры, показанной на рис. 1.57. При моделировании длина волны падающего света была равна 550 нм, а для материальных параметров структуры были выбраны следующие значения: $n_1 = 1$, $n_2 = 1,6$, $\varepsilon_m = -12,922 + 0,44727i$. Значение n_2 соответствует фоторезисту, а ε_m — диэлектрической проницаемости серебра для выбранной длины волны [110]. Диэлектрическая проницаемость материала решетки ε_{gr} была выбрана равной 2,56. Отметим, что выбранная длина волны находится вдали от резонансного значения, составляющего 368 нм для рассматриваемой пары материалов n_2^2 , ε_m . Длина распространения ППП, определяющаяся выражением (1.291), составляет при этом 5739 нм. При выбранном значении $n = 5$ период дифракционной решетки, рассчитанный по формуле (1.383), равен 1539 нм. Согласно (1.347), период интерференционной картины ППП d_{ip} равен 154 нм, то есть на порядок меньше, чем период формирующей картину дифракционной решетки. Таким образом, принимая размер деталей картины за половину ее периода, получим значение 77 нм.

Теоретическая оценка контраста картины, рассчитанная по формуле (1.356), равна 0,67.

Следует отметить, что в работе [111] плазмонные моды возбуждались высшими незатухающими порядками, сформированными дифракционной решеткой в большой по высоте области над металлической пленкой. В этом случае диэлектрическая проницаемость материала решетки ε_{gr} должна быть больше, чем диэлектрическая проницаемость материала n_2^2 под пленкой.

В настоящем разделе рассматривается случай, когда порядки дифракции, используемые для возбуждения плазмонных мод, являются затухающими. При этом ε_{gr} может быть равно или меньше, чем n_2^2 .

Значения остальных геометрических параметров структуры были определены из условия максимизации качества формируемой интерференционной картины. В качестве целевой была выбрана функция

$$F(h_{\text{gr}}, h_l, h_m, w) = \frac{\int_0^d |I(x, 0) - I_{\text{RCWA}}(x, 0)| dx}{\max_x \{I(x, 0)\}} \cdot \frac{1}{\max_x \{I(x, 0)\}} \rightarrow \min_{h_{\text{gr}}, h_l, h_m, w}. \quad (1.384)$$

Первый множитель в (1.384) является мерой близости расчетной интерференционной картины $I_{\text{RCWA}}(x, 0)$ к «идеальной» интерференционной картине $I(x, 0)$, формируемой при интерференции двух ППП, возбуждаемых двумя прошедшими порядками решетки и определяемой выражением (1.354). Второй множитель позволяет при минимизации находить структуры, формирующие интерференционные картины с большой интенсивностью поля в максимумах. Минимизация целевой функции проводилась численно с помощью оптимизационных процедур математического пакета MATLAB. Отметим, что при оптимизации геометрических параметров структуры учитывалось ограничение на минимальную толщину металлической пленки, связанное с глубиной проникновения в металл ППП, определяемой выражением (1.297) и равной для выбранной длины волны и пары материалов 22 нм.

В результате оптимизации была найдена структура, имеющая следующие геометрические параметры: $h_{\text{gr}} = 435$ нм, $h_l = 0$, $h_m = 65$ нм, $w = 0,5d$. На рисунке 1.58 представлен вид нормированной на интенсивность падающей волны интенсивности поля, формируемого непосредственно под металлическим слоем при указанных параметрах. Также приведено распределение интенсивности, формируемое только при учете порядков дифракции с номерами $\pm n$.

Отметим, что период интерференционной картины d_{ip} не только в 10 раз меньше периода формирующей картину дифракционной решетки, но и в 3,57 раз меньше длины волны падающего света. При этом отношение интенсивности в интерференционных максимумах к интенсивности падающей волны превышает 45. Контраст полученной интерференционной картины равен 0,69, что близко к теоретической оценке 0,67, полученной по формуле (1.356). Таким образом, предложенная структура позволяет формировать интерференционную картину высокого качества. При этом для определения периода структуры может быть использовано выражение (1.383), следующее из приближенного условия возбуждения плазмонных мод (1.382).

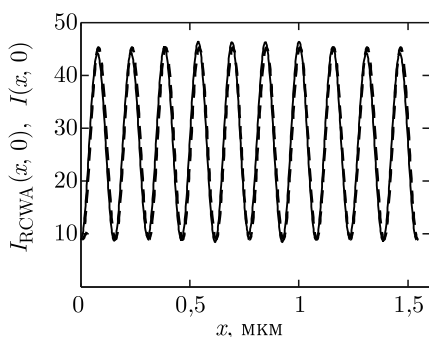


Рис. 1.58. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 5)

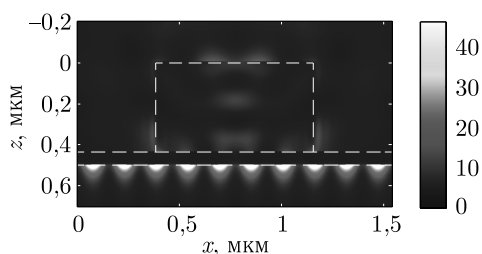


Рис. 1.59. Распределение интенсивности электрического поля в структуре (структура показана пунктирными линиями)

На рисунке 1.59 представлено распределение нормированной интенсивности электрического поля в рассматриваемой структуре. Глубина проникновения ППП в среду с показателем преломления n_2 (фоторезист) равна 111 нм, что согласуется с теоретическим значением для выбранной длины волны, рассчитанным по формуле (1.296) и равным 110 нм.

На рисунке 1.60 показаны зависимости интенсивности электрического поля в максимумах интерференционной картины и контраста от расстояния от границы раздела между металлическим слоем и подложкой. Отметим, что суммарная интенсивность прошедших порядков дифракции составляет 0,019, поэтому высокое значение контраста сохраняется на всем расстоянии затухания интерференционной картины.

Рассмотрим еще один пример. Пусть значение длины волны равно 436 нм, что соответствует InGaN/GaN полупроводниковому лазеру [112], а материалы решетки, металлической пленки и подложки совпадают с предыдущим случаем. При этом длина распространения ППП равна 1521 нм. Период дифракционной решетки, равный 1051 нм, был рассчитан по формуле (1.383) при $n = 5$. Геометрические параметры структуры, $h_{gr} = 835$ нм, $h_l = 0$, $h_m = 73$ нм, $w = 0,425d$, были найдены с использованием оптимизационной процедуры аналогично предыдущему случаю. Расчетная интерференционная картина приведена на рис. 1.61.

Период интерференционной картины равен 105 нм, что в 4,15 раз меньше длины волны падающего света. Нормированная на интенсивность падающей волны интенсивность электрического поля в максимумах интерференционной картины превышает 25, контраст составляет 0,45, что близко к теоретической оценке, равной 0,43.

Отметим, что при дальнейшем приближении длины волны падающего излучения к резонансному значению 368 нм длина распространения ППП уменьшается, что приводит к ухудшению качества формируемых интерференционных картин и уменьшению интенсивности электрического поля в их мак-

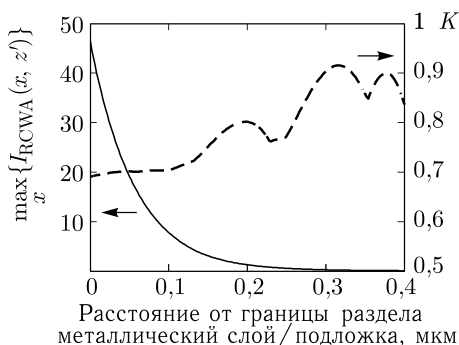


Рис. 1.60. Зависимость интенсивности в максимумах интерференционной картины (сплошная линия) и контраста (пунктирная линия) от расстояния от границы раздела между металлическим слоем и подложкой

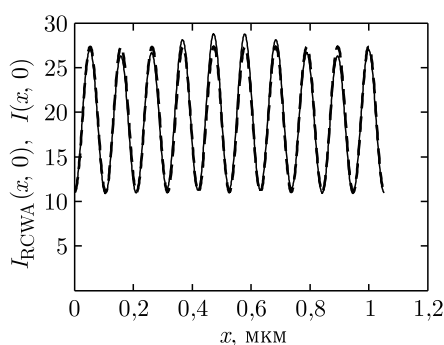


Рис. 1.61. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 5) при $\lambda = 436$ нм

симулах. Так, при длине волны 420 нм длина распространения ППП (1.291) становится меньше периода дифракционной решетки (1.383), рассчитанного при $n = 5$. Это ограничивает диапазон длин волн, при которых возможно практическое применение.

1.5.2.2. Управление периодом одномерных интерференционных картин за счет изменения параметров падающей волны. Предложено два способа управления частотой формируемых интерференционных картин за счет изменения параметров падающей волны. Такой подход позволяет формировать интерференционные картины с различным периодом с помощью одной и той же дифракционной структуры. При этом формирование интерференционных картин с различным периодом достигается за счет возбуждения плазмонных мод в структуре разными порядками дифракции. Как будет показано ниже, последнее возможно при изменении угла падения или длины волны падающего света.

Геометрические параметры структур, рассмотренных в качестве примеров, были найдены с помощью оптимизационной процедуры аналогично предыдущим случаям. Целевая функция при этом имела вид, аналогичный (1.384):

$$F(h_{\text{gr}}, h_l, h_m, w) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{\int_0^d |I^{(n)}(x, 0) - I_{\text{RCWA}}^{(n)}(x, 0)| dx}{\max_x \{I^{(n)}(x, 0)\}} \cdot \frac{1}{\max_x \{I^{(n)}(x, 0)\}} \right] \rightarrow \min_{h_{\text{gr}}, h_l, h_m, w}, \quad (1.385)$$

где \mathbb{N} — множество номеров порядков дифракции, возбуждающих плазмонные моды в структуре при различных параметрах падения волны, верхний индекс (n) соответствует номеру порядка.

Управление частотой интерференционной картины за счет изменения длины падающей волны. Рассмотрим использование падающего света с различными длинами волн для формирования интерференционных картин различного периода. Пусть период дифракционной решетки d , определяемый по формуле (1.383), рассчитан из условия возбуждения ППП порядками с номерами $\pm n$ при некоторой длине волны. Так как константа распространения ППП k_{spp} (1.284) зависит от длины волны, то возможно возбуждение плазмонных мод при другой длине волны с использованием прошедших дифракционных порядков с номерами $\pm m$, $n \neq m$. При этом, в соответствии с выражениями (1.341) и (1.382), длины волн, которые будут возбуждать плазмонные моды порядками с номерами $\pm m$, могут быть найдены из уравнения

$$\frac{2\pi m}{d} = \text{Re} \{k_{\text{spp}}(\lambda)\}. \quad (1.386)$$

В частности, для рассмотренного выше случая возбуждения плазмонных мод при $\lambda = 550$ нм, $n = 5$, ППП также будут возбуждаться ± 4 прошедшими порядками при $\lambda = 659$ нм и порядками с номерами ± 3 при $\lambda = 852$ нм. Соответствующие интерференционные картины будут иметь периоды 192 нм

и 257 нм (в 8 и 6 раз меньше периода дифракционной решетки). Теоретические оценки контраста формируемых интерференционных картин при этом составляют 0,77 и 0,87 для длин волн 659 нм и 852 нм, соответственно.

Геометрические параметры структуры были определены в результате минимизации критерия (1.385). Были найдены следующие значения: $w = 0,37 d$, $h_{\text{gr}} = 1000$ нм, $h_l = 0$, $h_m = 70$ нм. Расчетные графики нормированной интенсивности интерференционных картин в диэлектрике непосредственно под металлической пленкой и распределения интенсивности в структуре при длинах волн 550 нм, 659 нм и 852 нм приведены на рис. 1.62–1.64.

Значения контраста и нормированной интенсивности в максимумах картины составляют (0,69; 19), (0,78; 31) и (0,87; 73), соответственно. Отметим, что значения контраста полученных интерференционных картин близки к теоретически рассчитанным. Глубина проникновения ППП в среду с показателем

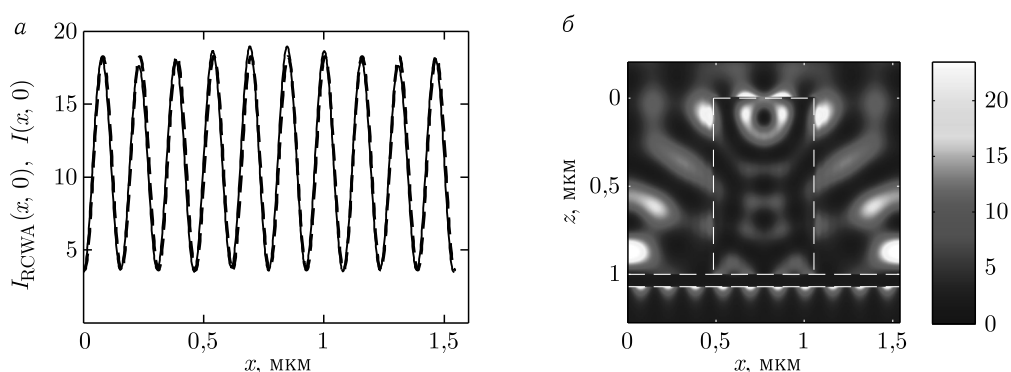


Рис. 1.62. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 5) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре (б) при $\lambda = 550$ нм

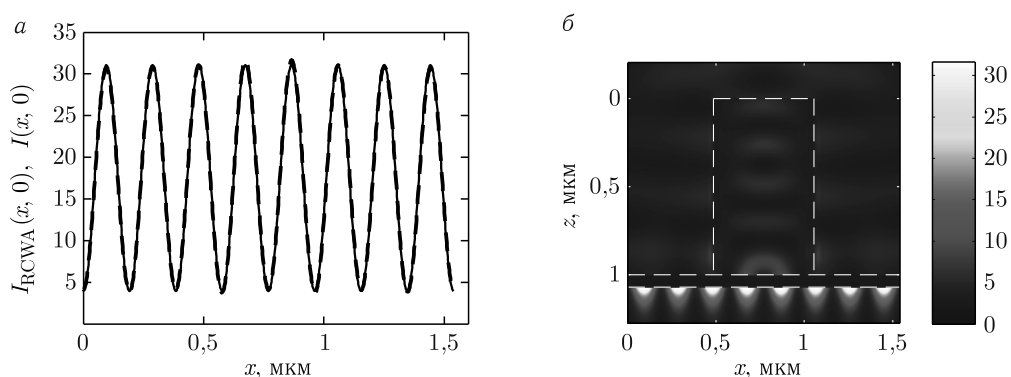


Рис. 1.63. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 4) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре (б) при $\lambda = 659$ нм

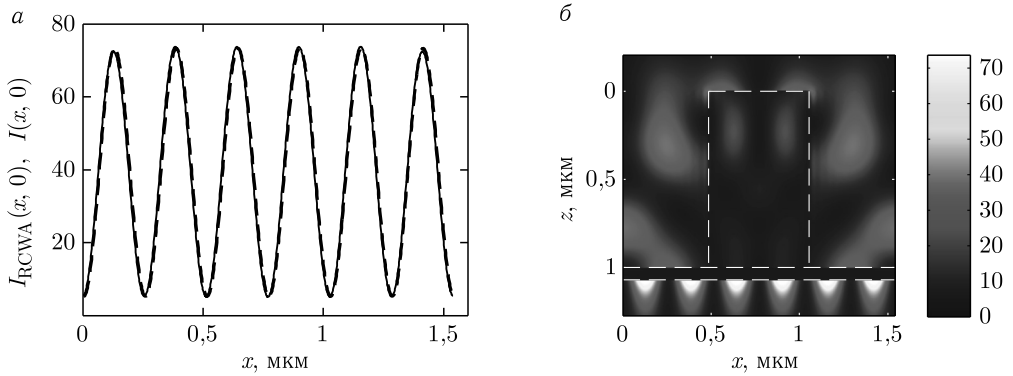


Рис. 1.64. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 3) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре (б) при $\lambda = 852$ нм

преломления n_2 равна 172 нм и 305 нм для значений длины волны падающего света 659 нм и 852 нм, соответственно.

Управление частотой интерференционной картины за счет изменения угла падения в конической геометрии падения. Отметим, что предложенный выше способ управления частотой интерференционной картины предполагает использование источников света с разными длинами волн, что может являться неудобством при его практической реализации. Поэтому рассмотрим второй способ, заключающийся в изменении угла падения при фиксированной длине волны. Рассмотрим случай конической дифракции, когда проекция волнового вектора падающей волны параллельна штрихам дифракционной решетки. Геометрия распространения волны представлена на рис. 1.65. В этом случае зависимость от времени и координат поля прошедших порядков дифракции будет иметь вид

$$\mathbf{E}_n, \mathbf{H}_n \sim \exp(-i\omega t) \exp[i(k_{x,n}x + k_y y)] \exp(-\kappa_n z'), \quad (1.387)$$

где $k_{x,n}$, как и ранее, определено выражением (1.341), а значение k_y находим из выражения [2]:

$$k_y = k_0 n_1 \sin \theta, \quad (1.388)$$

где θ — угол падения.

В этом случае приближенное условие возбуждения плазмонных мод (1.382) примет вид

$$\sqrt{k_{x,n}^2 + k_y^2} = \text{Re} \{k_{\text{сп}}\}. \quad (1.389)$$

Рассмотрим пример и покажем, что равенство (1.389) может выполняться при различных сочетаниях номера порядка n и угла падения θ . На рисунке 1.66 приведены зависимости модуля проекции волнового вектора $k_{\parallel,n}(\theta) = \sqrt{k_{x,n}^2 + k_y^2}(\theta)$ от угла падения для $n = 3$ (штрих-пунктирная линия), $n = 4$ (точечная линия) и $n = 5$ (пунктирная линия). Сплошная прямая соответствует константе распространения ППП. Графики получены при

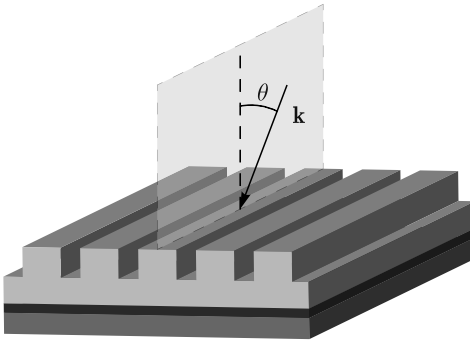


Рис. 1.65. Геометрия падения волны

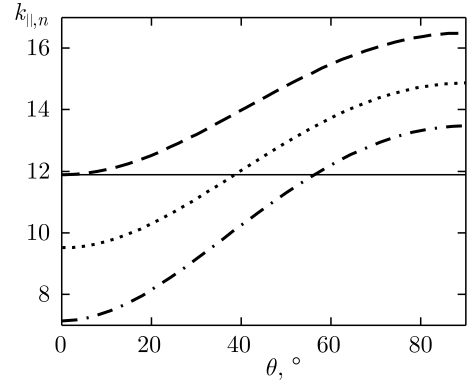


Рис. 1.66. Зависимость $k_{||,n}(\theta)$ от угла падения ($n = 3$ — штрих-пунктирная линия, $n = 4$ — точечная линия, $n = 5$ — пунктирная линия, величина $\text{Re}\{k_{\text{spp}}\}$ — сплошная линия)

$n_2 = 1$, $d = 2641$ нм, значения параметров λ , ε_m , n_1 и ε_{gr} совпадают с предыдущим примером. Условия (1.389) выполняются в точках $56,4^\circ$ ($n = 3$), $38,7^\circ$ ($n = 4$) и 0° ($n = 5$). Это означает, что при указанных углах плазмонные моды в структуре будут возбуждаться ± 3 , ± 4 и ± 5 порядками дифракции. Периоды интерференционных картин при этом составляют 440 нм, 330 нм и 264 нм, соответственно.

Аналогично предыдущему примеру, геометрические параметры структуры, $w = 0,554d$, $h_{\text{gr}} = 668$ нм, $h_l = 100$ нм, $h_m = 40$ нм, были найдены в процессе оптимизации из условия максимизации качества формируемых интерференционных картин (1.385). Расчетные графики нормированной интенсивности на границе металлический слой/подложка показаны на рис. 1.67–1.69. Зна-

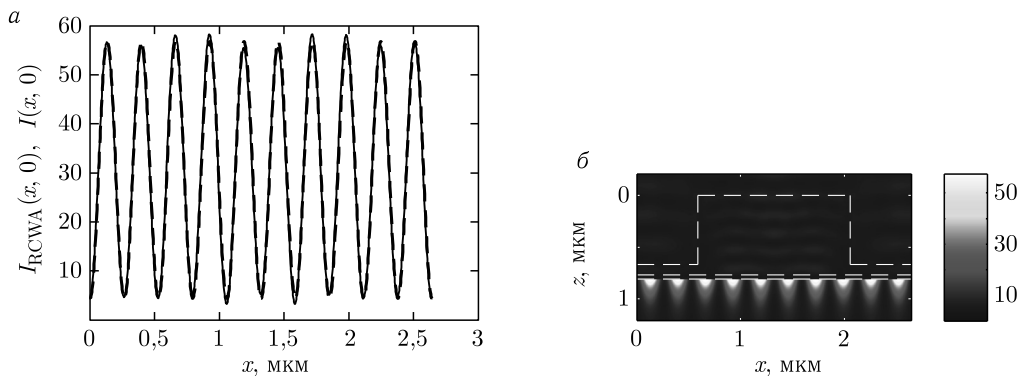


Рис. 1.67. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 5) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре (б) при $\theta = 0^\circ$

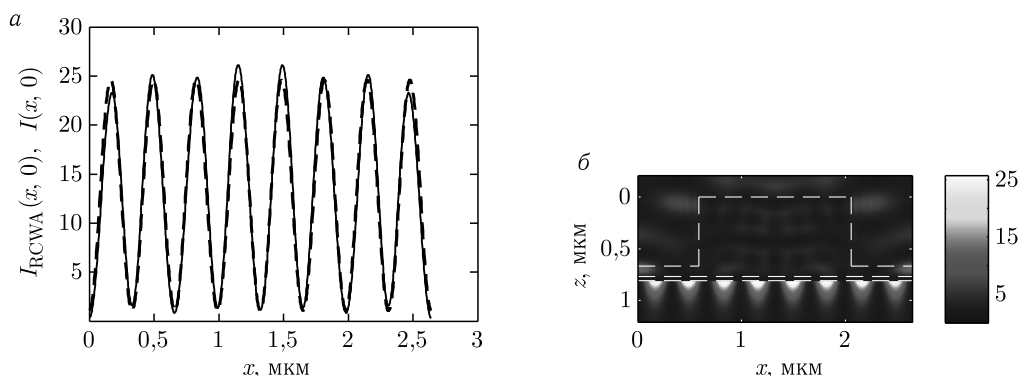


Рис. 1.68. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 4) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре (б) при $\theta = 38,7^\circ$

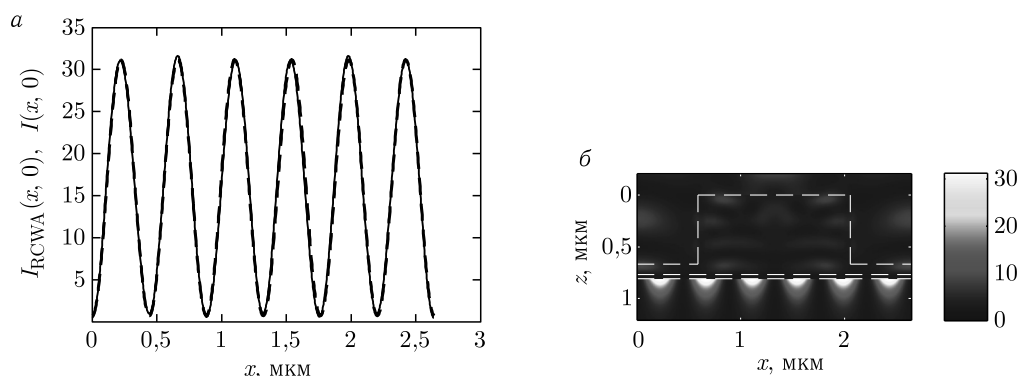


Рис. 1.69. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка (сплошная линия — полное поле, пунктирная линия — дифракционные порядки с номерами ± 3) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре (б) при $\theta = 56,4^\circ$

чения контраста и нормированной максимальной интенсивности составляют (0,89; 58), (0,98; 26), (0,97; 32), соответственно.

Таким образом, оба предложенных способа позволяют формировать интерференционные картины с изменяемым периодом, обладающие высоким контрастом и интенсивностью.

1.5.2.3. Формирование двумерных интерференционных картин и управление их видом за счет изменения параметров падающей волны. Перейдем к рассмотрению структуры, содержащей дифракционную решетку с двумерной периодичностью и предназначенную для формирования двумерных интерференционных картин затухающих порядков дифракции (рис. 1.70) [113, 114]. Как и в п. 1.5.1.2, будем полагать, что периоды решетки вдоль осей Ox и Oy равны d и решетка имеет одно квадратное отверстие на периоде с длиной стороны w . Рассмотрим пример решетки, рассчитанной для длины

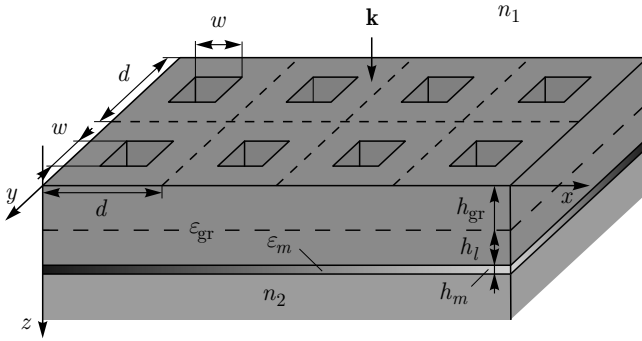


Рис. 1.70. Дифракционная структура для формирования двумерных интерференционных картин плазмонных мод

волны и материальных параметров, совпадающих с параметрами первого примера из п. 1.5.2.1. Период решетки был рассчитан согласно выражению (1.383) для $n = 3$ и составил 923 нм. Остальные геометрические параметры структуры $h_{gr} = 260$ нм, $h_l = 0$, $h_m = 70$ нм, $w = 0,26 d$ были найдены с помощью оптимизационной процедуры с целевой функцией, аналогичной (1.384).

На рисунках 1.71, 1.72 показаны распределения интенсивности электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка в случае нормального падения волны с ТМ- и ТЕ-поляризацией соответственно. Из рисунков следует, что в этом случае формируются одномерные интерференционные картины, период которых составляет $d_{ip} = d/6 = 154$ нм. Значения контраста и нормированной максимальной интенсивности составляют при этом 0,73 и 10,7. Формирование одномерных интерференционных картин при падении волн с ТМ- и ТЕ-поляризацией подтверждает сделанное в п. 1.5.1.2 предположение о том, что в рассматриваемой структуре квазиволноводные моды, распространяющиеся вдоль осей Ox и Oy , возбуждаются только ТЕ- и только ТМ-компонентами падающей волны, соответственно.

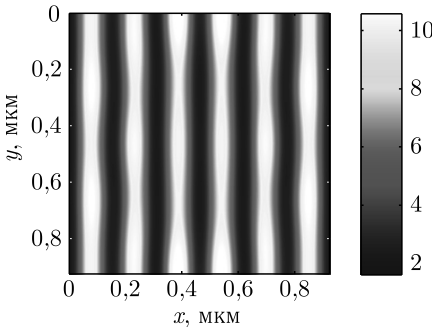


Рис. 1.71. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при ТМ-поляризации падающей волны

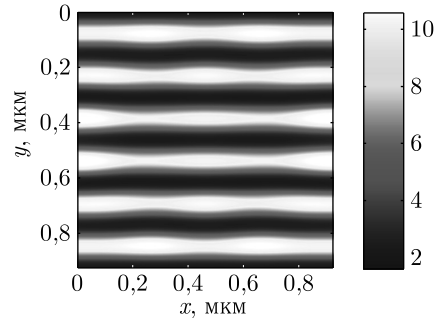


Рис. 1.72. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при ТЕ-поляризации падающей волны

Рассмотрим теперь случай, когда амплитуды ТМ- и ТЕ-компонент падающей волны равны. На рисунках 1.73 и 1.74 приведены расчетные интерференционные картины, формируемые непосредственно под металлической пленкой для линейной и круговой поляризации падающей волны. Период интерференционной картины при линейной поляризации падающей волны равен 218 нм и 154 нм в при круговой поляризации. Значения контраста и нормированной интенсивности электрического поля в максимумах интерференционной картины составляют (0,99; 19,5) и (0,73; 10,8), соответственно. Вид расчетных картин совпадает с теоретически полученным (рис. 1.54 и 1.56), значения контраста картин близки к теоретическим оценкам.

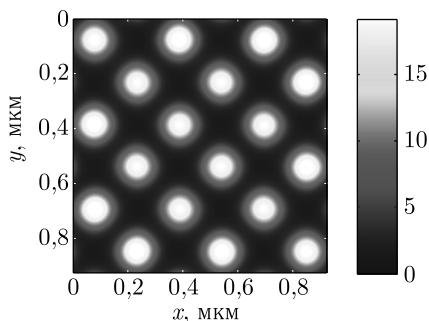


Рис. 1.73. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при смешанной линейной поляризации падающей волны

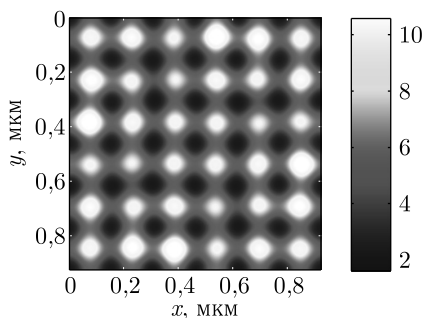


Рис. 1.74. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при круговой поляризации падающей волны

Отметим, что в случае падения на структуру волны с круговой поляризацией в ближнем поле также наблюдается усиление магнитооптического обратного эффекта Фарадея [115].

Рассмотрим еще два примера распределений интенсивности электрического поля под структурой. На рисунке 1.75 приведено распределение интенсивности для случая, когда падающая волна линейно поляризована и угол между вектором напряженности электрического поля и осью Ox составляет 20° . Контраст формируемой интерференционной картины составляет при этом 0,86, а нормированная максимальная интенсивность равна 16,2.

На рисунке 1.76 приведена расчетная интерференционная картина для эллиптически поляризованной падающей волны. Амплитуды ТЕ- и ТМ-компонент при этом равны, а разность фаз между ними равна 50° . Контраст формируемой интерференционной картины равен 0,83, интенсивность в максимумах интерференционной картины в 16,7 раз превышает интенсивность падающей волны.

Таким образом, предложенная структура позволяет формировать двумерные интерференционные картины затухающих электромагнитных волн, обладающие высокими контрастом и интенсивностью. Возможно управление видом формируемых картин за счет изменения поляризации падающей волны.

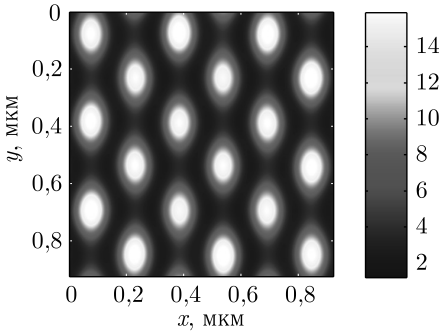


Рис. 1.75. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при линейной поляризации падающей волны (угол между вектором напряженности электрического поля и осью Ox составляет 20°)

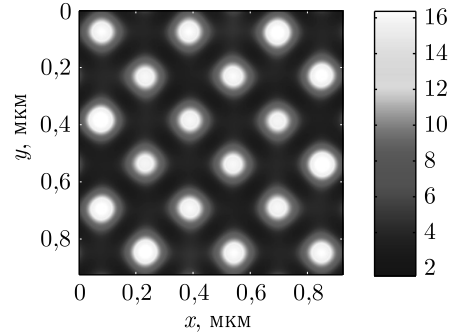


Рис. 1.76. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при эллиптической поляризации падающей волны (разность фаз между ТМ- и ТЕ-компонентами составляет 50°)

Отношение интенсивности электрического поля в максимумах картин к интенсивности падающей волны превышает 10.

Отметим, что в двумерном случае, как и при формировании одномерных интерференционных картин, возможно управление периодом интерференционных картин за счет изменения длины волны падающего света. В общем случае возбуждение плазмонных мод возможно порядками с номерами $(\pm m, \pm l)$, $(\pm l, \pm m)$, $m \neq n$, $l \neq n$. Приближенное условие возбуждения мод при этом принимает вид

$$\frac{2\pi}{d} \sqrt{m^2 + l^2} = \text{Re} \{k_{\text{сп}}(\lambda)\}. \quad (1.390)$$

Согласно (1.390), для рассматриваемой структуры плазмонные моды возбуждаются дифракционными порядками с номерами $(\pm 2, 0)$, $(0, \pm 2)$ при длине волны 774 нм и порядками с номерами $(\pm 3, \pm 1)$, $(\pm 1, \pm 3)$ при длине волны 532 нм. В последнем случае интерференционная картина будет формироваться восемью ППП.

Распределения интенсивности электрического поля непосредственно под структурой при длине волны падающего света 774 нм представлены на рис. 1.77 и 1.78. При линейной поляризации падающей волны период картины равен $d_{\text{лр}} = d/2\sqrt{2} = 326$ нм, нормированная интенсивность в максимумах картины в 47 раз превышает интенсивность падающей волны, контраст близок к 1. При круговой поляризации период картины составляет 231 нм, контраст картины и нормированная интенсивность в максимумах равны 0,85 и 24, соответственно. Вид картин, как и в случае длины волны 550 нм совпадает с теоретически предсказанным. Отметим, что в отличие от структуры с одномерной периодичностью, в данном случае не проводилось дополнительной оптимизации геометрических параметров структуры с целевой функцией, аналогичной (1.385).

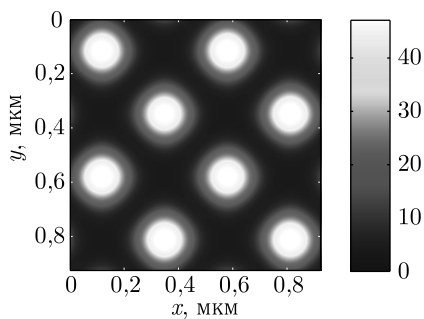


Рис. 1.77. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при смешанной линейной поляризации падающей волны при $\lambda = 774$ нм

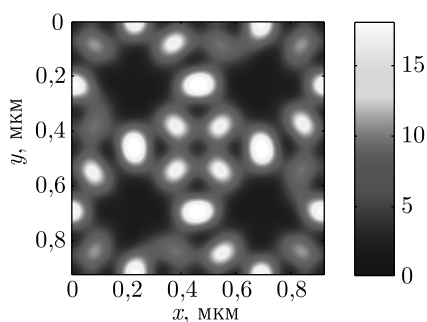


Рис. 1.78. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при круговой поляризации падающей волны при $\lambda = 774$ нм

На рисунке 1.79 представлено распределение электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка для длины волны 532 нм и круговой поляризации. В этом случае формируемая интерференционная картина имеет сложный вид.

Наконец, рассмотрим случай, когда условие возбуждения в структуре плазмонных мод (1.390) не выполняется ни для каких значений номеров порядков дифракции m и l . На рисунке 1.80 показана интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка для падающей волны с круговой поляризацией и длиной волны 600 нм. В этом случае возбуждения ППП не происходит, и максимальная интенсивность под металлическим слоем в 70 раз меньше интенсивности падающей волны. Отметим, что порядок значений интенсивности не зависит от поляризации падающей волны, так, при линейной поляризации максимальная нормированная интенсивность составляет 0,03.

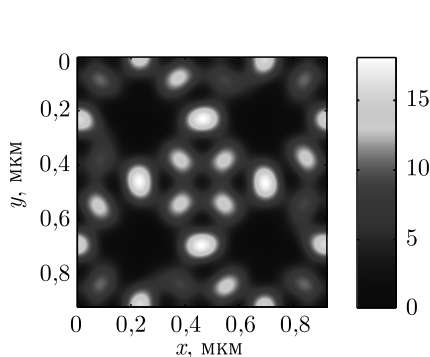


Рис. 1.79. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при круговой поляризации падающей волны при $\lambda = 532$ нм

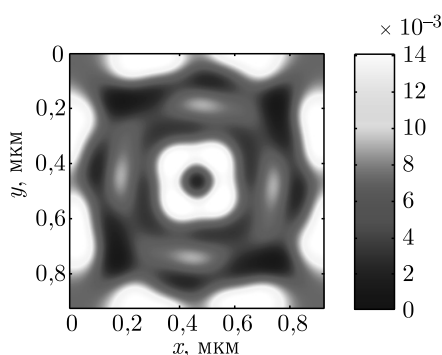


Рис. 1.80. Интенсивность электрического поля на границе раздела металлический слой/подложка при круговой поляризации падающей волны при $\lambda = 600$ нм

Таким образом, формирование высокочастотных интерференционных картин высших затухающих порядков дифракции в рассмотренных структурах, состоящих из диэлектрической дифракционной решетки с одномерной или двумерной периодичностью и металлического слоя, возможно при возбуждении в них плазмонных мод, близких по структуре поля к ППП, распространяющимся на границе раздела между металлическим слоем и подложкой. Сказанное подтверждается соответствием между расчетными интерференционными картинками и теоретическими оценками, полученными при анализе интерференции затухающих прошедших порядков дифракции, соответствующих возбуждаемым модам. Минимальный размер деталей формируемых интерференционных картин в рассмотренных примерах составляет 50–55 нм, что более чем в 8 раз меньше длины волны падающего света и в 10 раз меньше размера деталей используемой дифракционной решетки.

1.5.3. Формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн в диэлектрических дифракционных решетках. В настоящем разделе рассмотрено формирование интерференционных картин затухающих электромагнитных волн в диэлектрических волноводных дифракционных решетках (в англоязычной литературе — *guided-mode resonant gratings*) [116, 117]. Волноводные решетки интенсивно исследовались на протяжении последнего десятилетия как узкополосные спектральные фильтры, обладающие высокой отражательной способностью, близкой к 100 % в окрестности определенных длин волн падающего света [118–120], при этом до настоящего времени сравнительно немного внимания уделялось исследованию распределения поля в таких решетках [121, 122]. Указанный эффект высокого отражения связан с резонансным процессом возбуждения собственных квазिवолноводных мод в структуре [120]. Ниже продемонстрирована высокая эффективность данных структур в задаче формирования интерференционных картин ЗЭВ.

Рассматриваемые волноводные дифракционные решетки показаны на рис. 1.81–1.83. Мотивом для использования этих структур для формирования интерференционных картин ЗЭВ является следующее. При определенных условиях, обеспечиваемых выбором геометрических и физических параметров структуры, в ней возбуждаются квазिवолноводные моды, близкие по структуре поля к модам плоскопараллельного волновода [120–122]. В структуре на рис. 1.81, представляющей собой бинарную диэлектрическую дифракционную решетку (далее — структура А), можно предположить существование мод, которые в ближнем поле решетки имеют вид, близкий к суперпозиции двух затухающих порядков дифракции с номерами $\pm n$. Действительно, при малом относительном размере щелей или малом оптическом контрасте (т. е. малом различии в диэлектрических проницаемостях материалов решетки) структура А близка к плоскопараллельному волноводу. При субволновом периоде диэлектрическая проницаемость волновода может быть оценена методами теории эффективной среды. Для структуры на рис. 1.82, состоящей из бинарной диэлектрической решетки с волноводным слоем (далее — структура Б), можно предположить существование мод, которые локализованы в волноводном слое и в области подложки близки к суперпозиции двух зату-

хающих порядков дифракции. Структура, показанная на рис. 1.83, аналогична структуре Б и предназначена для формирования двумерных интерференционных картин ЗЭВ.

При возбуждении мод электрическое поле внутри структуры может значительно усиливаться. В частности, согласно результатам расчета электромагнитного поля внутри волноводных решеток, представленным в [121, 122], амплитуда электрического поля в максимумах интерференционных картин мод внутри решетки в 20–45 раз больше, чем амплитуда падающей на структуру

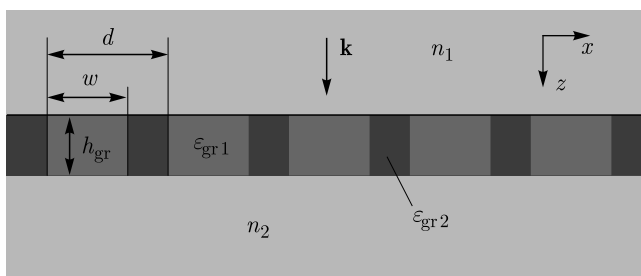


Рис. 1.81. Диэлектрическая дифракционная решетка для формирования одномерных интерференционных картин ЗЭВ (структура А)

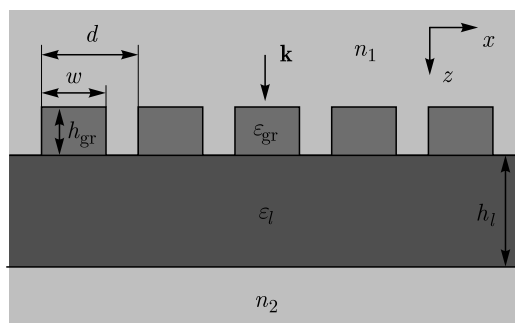


Рис. 1.82. Дифракционная структура для формирования одномерных интерференционных картин ЗЭВ, состоящая из диэлектрической дифракционной решетки с волноводным слоем (структура Б)

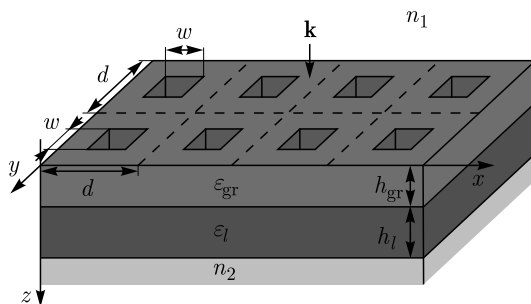


Рис. 1.83. Дифракционная структура для формирования двумерных интерференционных картин ЗЭВ

волны. Таким образом, при возбуждении мод следует ожидать также значительного увеличения амплитуды затухающих волн (порядков дифракции) в ближнем поле структуры.

Возможность большой амплитуды затухающих порядков при возбуждении мод в дифракционных решетках следует из описания их оптических свойств на основе метода матрицы рассеяния [60, 123]. Частоты собственных мод периодической структуры соответствуют полюсам матрицы рассеяния. При этом комплексная амплитуда n -го порядка дифракции (для структур с одномерной периодичностью) в окрестности резонанса имеет следующий вид [70, 124, 125]:

$$A_n(\omega) = a_n + \frac{b_n}{\omega - \omega_0}, \quad (1.391)$$

где ω_0 — комплексная частота собственной моды решетки, a_n и b_n — медленно меняющиеся функции действительной частоты ω падающего на структуру света. Для распространяющихся порядков максимальные значения квадратов модулей амплитуд ограничены законом сохранения энергии. Сумма интенсивностей распространяющихся порядков в решетках из непоглощающего материала равна 1. Большие значения амплитуд затухающих порядков не противоречат закону сохранения энергии и, согласно (1.391), при $\text{Im}(\omega_0) \ll 1$ (т. е. при высокой добротности моды [124]) в ближнем поле могут быть много больше амплитуды падающей волны.

В общем случае поле в области подложки представляется в виде суперпозиции бесконечного числа прошедших порядков дифракции (распространяющихся и затухающих). Однако, вследствие эффекта усиления поля при возбуждении мод [121, 122], в ближнем поле можно ожидать формирования доминирующего распределения, близкого по структуре к суперпозиции затухающих порядков, соответствующих возбуждаемым квазиволноводным модам и в зависимости от поляризации падающей волны (и поляризации возбуждаемой моды), описываемого выражениями (1.346), (1.354) в случае формирования одномерных интерференционных картин и выражениями (1.362), (1.374) и (1.380) в случае формирования двумерных интерференционных картин. Следует отметить, что в дифракционных структурах на рис. 1.81–1.83 могут существовать моды сложной конфигурации, существенно отличающиеся по распределению поля от мод плоскопараллельного волновода. Для таких мод интерференционная картина ЗЭВ будет также иметь сложный вид. Сложные интерференционные картины представляют меньший интерес для практических применений в области интерференционной литографии, поэтому ниже исследуется формирование интерференционных картин вида (1.346), (1.354), (1.362), (1.374) и (1.380).

1.5.3.1. Формирование одномерных интерференционных картин. Исследование возможности формирования одномерных интерференционных картин ЗЭВ (1.346), (1.354) проводилось для нормально падающей плоской волны с длиной волны $\lambda = 453$ нм (соответствует лазеру на InGaN/GaN квантоворазмерных гетероструктурах) для структуры А и $\lambda = 441,6$ нм (соответствует гелий-кадмиевому лазеру) для структуры Б. Отметим, что указанные значения лежат в диапазоне длин волн, используемых в ближнепольной

интерференционной литографии [126–129]. Использовались следующие значения диэлектрических проницаемостей материалов [130]: $n_1^2 = 2,15$ (SiO_2), $\varepsilon_{\text{gr1}} = 4,41$ (ZnO), $\varepsilon_{\text{gr2}} = n_2^2 = 2,56$ для структуры А и $n_1 = 1$, $\varepsilon_{\text{gr}} = \varepsilon_l = 4,41$, $n_2 = 1,6$ для структуры Б. Отметим, что значение $n_2 = 1,6$ соответствует стандартным фоторезистам.

Как и в предыдущих примерах, для моделирования дифракции света на структурах, расчета интенсивности интерференционных картин и распределений электрического поля в структурах использовался метод фурье-мод. Геометрические параметры структур находились с помощью оптимизационной процедуры с целевой функцией (1.384).

Первоначально были рассчитаны дифракционные структуры в геометрии Б для формирования интерференционных картин ЗЭВ, соответствующих ± 1 -м порядкам дифракции. Период решеток был равен 240 нм, в этом случае период формируемых интерференционных картин $d_{\text{ip}} = d/2 = 120$ нм.

На рисунке 1.84, б показано распределение электрического поля в структуре, параметры которой были оптимизированы для ТЕ-поляризации падающей волны. При оптимизации были получены следующие значения параметров: $h_{\text{gr}} = 123$ нм, $h_l = 545$ нм, $w = 98$ нм. Интерференционная картина на границе раздела между волноводным слоем и подложкой (фоторезистом) показана на рис. 1.84, а. Вид интерференционной картины соответствует выражению (1.346). Как и в предыдущих примерах, значения интенсивности на рис. 1.84 нормированы на интенсивность падающей волны. Максимальная интенсивность на границе раздела более чем в 30 раз превосходит интенсивность падающей волны, то есть сравнима с интенсивностью интерференционных картин поверхностных плазмон-поляритонов [109, 114] (см. также рис. 1.58, 1.61). На рисунке 1.85 приведены зависимости контраста и интенсивности в максимумах интерференционной картины от расстояния от границы раздела между волноводным слоем и подложкой. Из рисунка 1.85 видно, что в соответствии с полученной в п. 1.5.1.1 теоретической оценкой

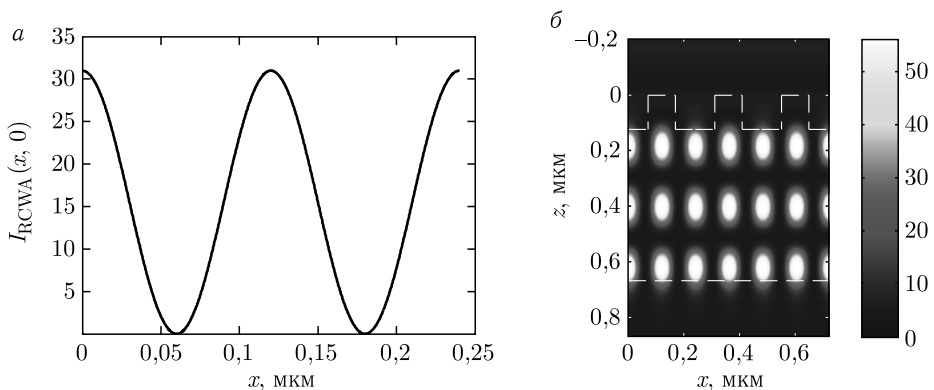


Рис. 1.84. Интенсивность электрического поля на границе раздела волноводный слой/подложка (на одном периоде) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре Б (на трех периодах) (б), рассчитанной для случая ТЕ-поляризации падающей волны при $n = 1$

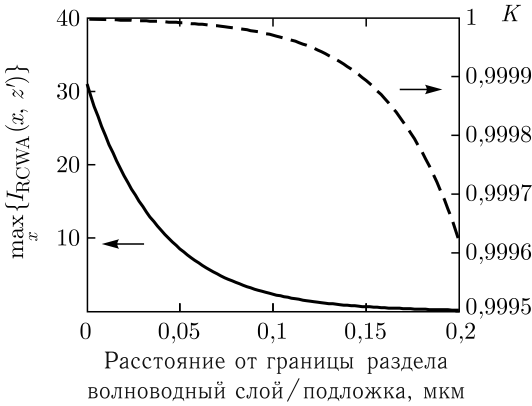


Рис. 1.85. Зависимость интенсивности в максимумах интерференционной картины (сплошная линия) и контраста (пунктирная линия) от расстояния от границы раздела между волноводным слоем и подложкой (структура Б для ТЕ-поляризации падающей волны, $n = 1$)

контраст сформированной картины близок к единице. Отметим, что распределение поля в структуре, показанное на рис. 1.84, б, близко к распределению поля при интерференции двух мод в планарном волноводе [131, 132].

На рисунках 1.86, а, б приведены интерференционная картина и распределение электрического поля, формируемые структурой, оптимизированной для случая ТМ-поляризации падающей волны. Параметры структуры: $h_{gr} = 290$ нм, $h_l = 456$ нм, $w = 166$ нм. Интерференционная картина соответствует формуле (1.354), а интенсивность интерференционных максимумов в 27 раз превосходит интенсивность падающей волны. Значение контраста интерференционной картины совпадает с теоретической оценкой (1.356) и составляет 0,608 (рис. 1.87).

Следует отметить, что для обеих структур интенсивность 0-го прошедшего порядка дифракции (единственного распространяющегося) менее 0,0001, поэтому контраст формируемых интерференционных картин при удалении от границы раздела фактически не изменяется.

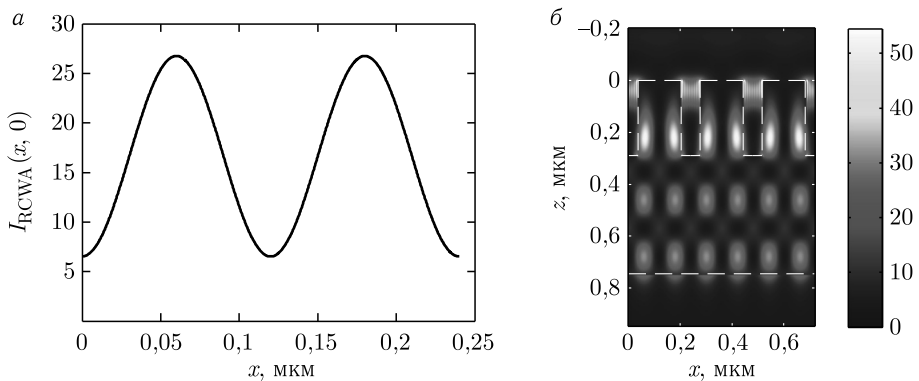


Рис. 1.86. Интенсивность электрического поля на границе раздела волноводный слой/подложка (на одном периоде) (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре Б (на трех периодах) (б), рассчитанной для случая ТМ-поляризации падающей волны при $n = 1$

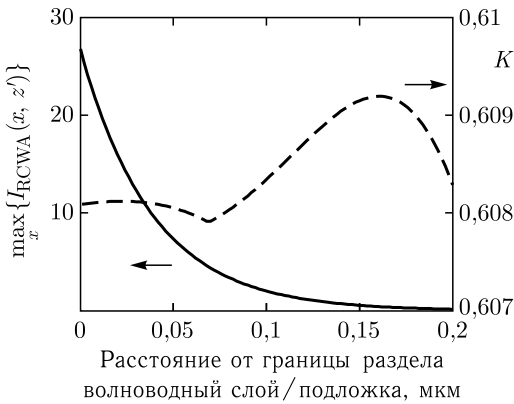


Рис. 1.87. Зависимость интенсивности в максимумах интерференционной картины (сплошная линия) и контраста (пунктирная линия) от расстояния от границы раздела между волноводным слоем и подложкой (структура Б для ТМ-поляризации падающей волны, $n = 1$)

Особый интерес представляет формирование интерференционных картин ЗЭВ в случае, когда моды структуры возбуждаются дифракционными порядками с номерами $\pm n$, $n > 1$. В этом случае период интерференционной картины ЗЭВ (1.347) будет в $2n$ раз меньше периода решетки. Таким образом, использование высших порядков снижает требования к технологической реализации структуры и позволяет формировать высокочастотные интерференционные картины ЗЭВ с помощью низкочастотного дифракционного рельефа.

Расчет интерференционных картин затухающих волн, формируемых структурой А, проводился при периоде решетки $d = 750$ нм для $n = 3$ и ТМ-поляризованной падающей волны. При этом период формируемой интерференционной картины равен $d_{ip} = d/6 = 125$ нм, что соответствует размеру деталей около 60 нм (более чем в 7 раз меньше длины волны падающего света). Геометрические параметры структуры, $h_{gr} = 141$ нм, $w = 675$ нм, были найдены в результате оптимизации критерия (1.384). На рисунке 1.88, б показано распределение электрического поля в рассчитанной структуре (параметры структуры приведены в подписи к рисунку). Интерференционная картина на различных расстояниях от границы раздела между решеткой и подложкой (фоторезистом) показана на рис. 1.88, а. Интенсивность интерференционных максимумов на границе раздела более чем в 100 раз превосходит интенсивность падающей волны. Такие высокие значения интенсивности характерны для плазмонной интерференционной литографии [109, 114]. Значение контраста на границе раздела составляет 0,68 и близко к теоретической оценке 0,64, полученной по формуле (1.356). При удалении от границы контраст уменьшается и на расстоянии 100 нм составляет примерно 0,54. Уменьшение контраста связано с наличием в прошедшем поле распространяющихся дифракционных порядков (суммарная интенсивность распространяющихся порядков составляет 0,76). На расстоянии 145 нм контраст убывает до 0,2 (рис. 1.89). Значение контраста 0,2 является минимально необходимым для регистрации интерференционной картины с использованием стандартных фоторезистов [133].

На рисунке 1.90, б показано распределение электрического поля в структуре Б с периодом $d = 720$ нм, формируемое при распространении ТЕ-поляризованной волны. Аналогично предыдущему примеру геометрические парамет-

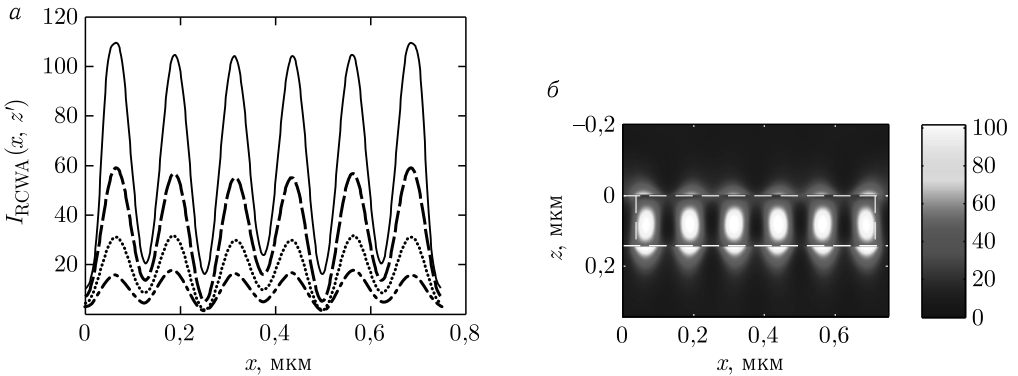


Рис. 1.88. Интенсивность электрического поля на расстояниях 0 нм (сплошная линия), 30 нм (пунктирная линия), 60 нм (точечная линия), 90 нм (штрих-пунктирная линия) от границы раздела решетка/подложка (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре А (б), рассчитанной для случая ТМ-поляризации падающей волны при $n = 3$

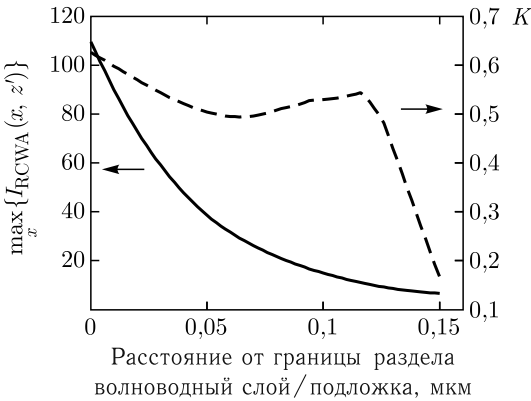


Рис. 1.89. Зависимость интенсивности в максимумах интерференционной картины (сплошная линия) и контраста (пунктирная линия) от расстояния от границы раздела между решеткой и подложкой (структура А для ТМ-поляризации падающей волны, $n = 3$)

ры структуры были найдены в результате оптимизации критерия (1.384) при $n = 3$, $h_{gr} = 155$ нм, $h_l = 763$ нм, $w = 349$ нм. Интенсивность сформированной под структурой интерференционной картины на различных расстояниях от границы раздела волноводный слой/фоторезист показана на рис. 1.90, а. Период сформированной картины составляет 120 нм (в 6 раз меньше, чем период решетки), что соответствует размеру деталей в 60 нм. Интенсивность интерференционных максимумов на нижней границе более чем в 25 раз превосходит интенсивность падающей волны, а контраст составляет 0,99, что также согласуется с теоретической оценкой. При удалении от границы контраст уменьшается и на расстоянии 127 нм составляет 0,2 (рис. 1.91).

Для дополнительного подтверждения связи формирования интерференционных картин с возбуждением в структуре собственных квазиволноводных мод был проведен расчет собственных мод. Для расчета мод был использован метод, описанный выше в п. 1.2.2. В результате расчета было установлено, что в рассмотренных выше структурах существуют квазиволноводные моды с константами распространения, близкими к константам распространения

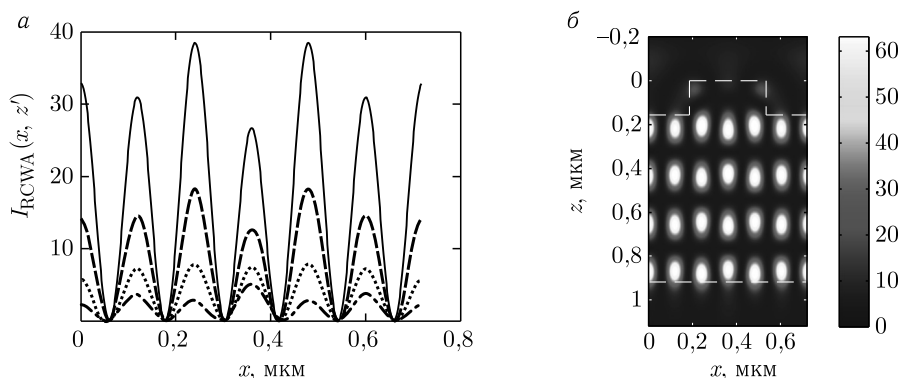


Рис. 1.90. Интенсивность электрического поля на расстояниях 0 нм (сплошная линия), 30 нм (пунктирная линия), 60 нм (точечная линия), 90 нм (штрих-пунктирная линия) от границы раздела волноводный слой/подложка (а) и распределение интенсивности электрического поля в структуре Б (б), рассчитанной для случая ТЕ-поляризации падающей волны при $n = 3$

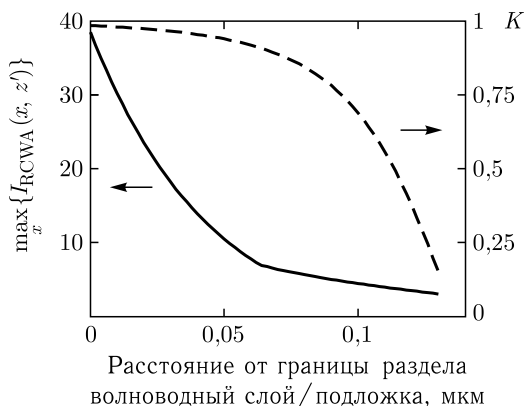


Рис. 1.91. Зависимость интенсивности в максимумах интерференционной картины (сплошная линия) и контраста (пунктирная линия) от расстояния от границы раздела между волноводным слоем и подложкой (структура Б для ТЕ-поляризации падающей волны, $n = 3$)

соответствующих порядков дифракции при нормальном падении волны (± 1 или ± 3). На рисунке 1.92 приведены распределения поля в структурах, показанных на рис. 1.86, б и 1.90, б, соответствующие интерференции двух собственных квазिवолноводных мод, распространяющихся в положительном и отрицательном направлениях оси Ox . На рисунке 1.92 интенсивность электрического поля нормирована на максимальное значение в структуре. Совпадение вида распределений поля 1.86, б, 1.92, а и 1.90, б, 1.92, б подтверждает сделанное предположение о возбуждении мод.

Отметим, что дифракционные структуры были также рассчитаны для случаев возбуждения мод порядками с номерами ± 5 при вышеуказанных параметрах. При этом суммарная интенсивность распространяющихся прошедших порядков возрастает, что приводит к более быстрому уменьшению контраста по сравнению с рис. 1.89, 1.91. Значение контраста при $n = 5$ становится менее 0,2 уже на расстоянии 40–50 нм от границы раздела.

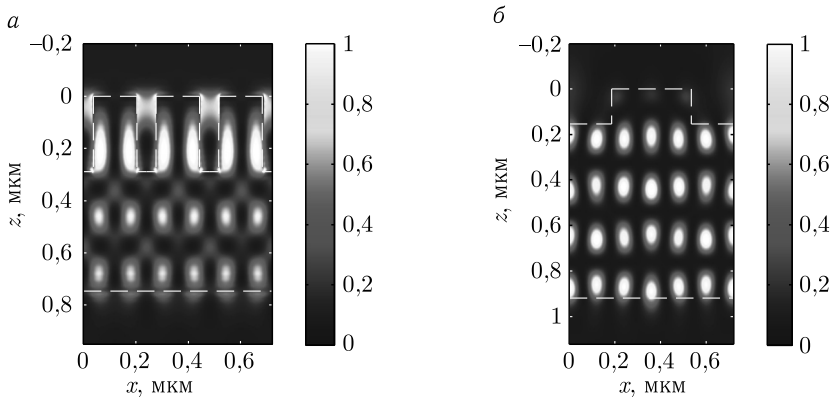


Рис. 1.92. Интенсивность электрического поля при интерференции двух собственных мод в структурах, рассчитанных для формирования интерференционных картин ± 1 затухающих порядков дифракции при ТМ-поляризации падающей волны (а) и ± 3 порядков при ТЕ-поляризации падающей волны

1.5.3.2. Формирование двумерных интерференционных картин. Предложенный подход может быть обобщен на случай формирования двумерных интерференционных картин ЗЭВ. При этом используется трехмерная дифракционная решетка (рис. 1.83); параметры решетки рассчитываются из условия формирования под структурой интерференционной картины порядков дифракции с номерами $(\pm n, 0)$, $(0, \pm n)$ на основе оптимизации критерия, аналогичного критерию (1.384). В качестве примера была рассчитана дифракционная структура с периодом $d = 660$ нм и материальными параметрами $\varepsilon_{\text{sup}} = n_1^2 = 1,69$, $\varepsilon_{\text{sub}} = n_2^2 = 2,56$, $\varepsilon_{\text{gr}} = \varepsilon_l = 4,41$ при длине волны $\lambda = 441,6$ нм для формирования двумерной интерференционной картины при $n = 3$. Геометрические параметры структуры, рассчитанные в процессе оптимизации, составили $h_{\text{gr}} = 287$ нм, $h_l = 305$ нм, $w = 200$ нм. Отметим, что в данной структуре, как и при формировании интерференционных картин плазмонных мод, конфигурация формируемых интерференционных картин ЗЭВ зависит от поляризации падающей волны, что говорит о том, что в структуре возбуждаются квазиволноводные моды с поляризацией, близкой к ТМ-поляризации. На рисунке 1.93 показана интерференционная картина на границе раздела между волноводным слоем и фоторезистом, формируемая для случая смешанной линейной поляризации падающей волны. При этом, в соответствии с теоретической оценкой (выражение (1.374), рис. 1.54), интерференционная картина повернута относительно координатных осей на угол в 45° , а ее период равен $d_{\text{ip}} = d/3\sqrt{2} = 156$ нм. Интенсивность интерференционных пиков на рис. 1.93 более чем в 45 раз превосходит интенсивность падающей волны, а контраст сформированной картины близок к 1.

Рассмотрим еще один пример: структуру с геометрическими параметрами $h_{\text{gr}} = 152$ нм, $h_l = 962$ нм, $w = 273$ нм. Остальные параметры совпадают с параметрами предыдущего примера. Интерференционная картина, формируемая на границе раздела между волноводным слоем и фоторезистом при смешанной линейной поляризации падающей волны показана на рис. 1.94. Вид картины близок к теоретической оценке, соответствующей возбуждению в структуре

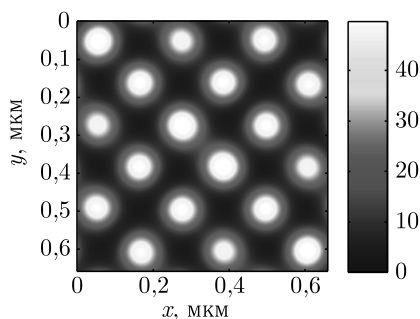


Рис. 1.93. Интенсивность электрического поля на границе раздела волноводный слой/подложка при смешанной линейной поляризации падающей волны в случае возбуждения квазिवолноводных мод ТМ-типа

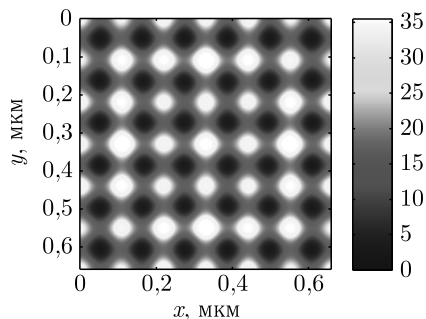


Рис. 1.94. Интенсивность электрического поля на границе раздела волноводный слой/подложка при смешанной линейной поляризации падающей волны в случае возбуждения квазिवолноводных мод ТЕ-типа

квазिवолноводных мод с поляризацией, близкой к ТЕ-поляризации (выражение (1.362), рис. 1.52). Расчеты показывают, что в соответствии с теоретическим описанием конфигурация картины в этом случае не изменяется при изменении поляризации падающей волны. Отметим, что аналогично металлодиэлектрической структуре, рассмотренной выше, когда падающая волна имеет круговую поляризацию, в ближнем поле также происходит усиление обратного эффекта Фарадея [134].

Таким образом, в настоящем разделе показана возможность формирования интерференционных картин ЗЭВ с помощью волноводных дифракционных решеток. Вид картин соответствует теоретическим оценкам, полученным в п. 1.5.1. Для рассматриваемых длин волн падающего света период интерференционных картин ЗЭВ составляет 120–160 нм, что соответствует размеру деталей около 60 нм ($\sim \lambda/7$). Контраст интерференционных картин, формируемых для случая ТЕ-поляризации падающей волны, близок к единице, а интенсивность электрического поля в интерференционных максимумах в ближнем поле более чем в 35 раз выше интенсивности падающей волны, что сравнимо с интенсивностью в максимумах интерференционных картин плазмонных мод (п. 1.5.2). Показана возможность формирования одномерных и двумерных интерференционных картин, соответствующих высшим затухающим порядкам дифракции. Использование высших порядков снижает требования к технологии изготовления решетки и позволяет формировать высокочастотные интерференционные картины затухающих волн с помощью низкочастотной решетки.

Литература к главе 1

1. Moharam M.G., Gaylord T.K. Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction // J. Opt. Soc. Am. 1981. V. 71(7) P. 811–818.
2. Moharam M.G., Eric B. Grann, Drew A. Pomett and Gaylord T.K. Formulation for stable and efficient implementation of the rigorous coupled-wave analysis of binary gratings // J. Opt. Soc. Am. A. 1995. V. 12(5). P. 1068–1076.

3. *Moharam M.G., Drew A. Pommet, Eric B. Grann and Gaylord T.K.* Stable implementation of the rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings: enhanced transmittance matrix approach // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1995. V.12(5). P.1077–1086.
4. *Peng S., Morris G.M.* Efficient implementation of rigorous coupled-wave analysis for surface-relief gratings // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1995. V.12(5). P.1087–1096.
5. *Lifeng Li.* Use of Fourier series in the analysis of discontinuous periodic structures // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1996. V.13(9). P.1870–1876.
6. *Lifeng Li.* New formulation of the Fourier modal method for crossed surface-relief gratings // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1997. V.14(10). P.2758–2767.
7. *Popov E., Nevière M.* Grating theory: new equations in Fourier space leading to fast converging results for TM polarization // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2000. V.17(10). P.1773–1784.
8. *Li L.* Fourier modal method for crossed anisotropic gratings with arbitrary permittivity and permeability tensors // *J. Opt. A: Pure Appl.* 2003. V.5(4). P.345–355.
9. *Popov E., Nevière M.* Maxwell equations in Fourier space: fast-converging formulation for diffraction by arbitrary shaped, periodic, anisotropic media // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2001. V.18(11). P.2886–2894.
10. *Watanabe K., Petit R., Nevière M.* Differential theory of gratings made of anisotropic materials *J. Opt. Soc. Am. A.* 2002. V.19(2). P.325–334.
11. *Zhou C., Li L.* Formulation of the Fourier modal method for symmetric crossed gratings in symmetric mountings // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2004. V.6. P.43–50.
12. Дифракционная компьютерная оптика / Под ред. В.А.Сойфера. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
13. *Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements* / Ed. by V.A. Soifer. A Wiley Interscience Publication. — New York: John Wiley & Sons, Inc., 2002. P.159–266.
14. *Gans M.J.* A General Proof of Floquet's Theorem // *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques.* 1965. V.13(3) P.384–385.
15. *Electromagnetic Theory of Gratings: Topics in current physics* / 22, Ed. by R.Petit. — New York: Springer-Verlag, 1980.
16. *Višovský S., Postava K., Yamaguchi T., Lopusník R.* Magneto-Optic Ellipsometry in Exchange-Coupled Films // *Appl. Opt.* 2002. V.41(19). P.3950–3960.
17. *Zvezdin A.K., Kotov V.A.* Modern Magneto-Optics and Magneto-Optical Materials. — Bristol: IOP, 1997.
18. *Lifeng Li.* Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1996. V.13(5). P.1024–1035.
19. *Vallius T., Tervo J., Vahimaa P., J. Turunen* Electromagnetic field computation in semiconductor laser resonators // *J. Opt. Soc. Am. A.* V.23(4). P.906–911.
20. *Born M., Wolf E.* Principles of optics. Fourth Edition. — Pergamon Press, 1968.
21. *Silberstein E. et al.* Use of grating theories in integrated optics // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2001. V.18, No 11. P.2865–2875.
22. *Berenger J.-P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *J. Comp. Phys.* 1994. V.114, No 2. P.185–200.
23. *Hugonin J.P., Lalanne P.* Perfectly matched layers as nonlinear coordinate transforms: a generalized formalization // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2005. V.22. P.1844–1849.

24. *Fan S., Villeneuve P.R., Joannopoulos J.D., Haus H.A.* Channel drop tunneling through localized states // *Phys. Rev. Lett.* 1998. V. 80. P. 960–963.
25. *Suh W., Fan S.* Mechanically switchable photonic crystal filter with either all-pass transmission or flat-top reflection characteristics // *Opt. Lett.* 2003. V. 28, No 19. P. 1763–1765.
26. *Gippius N.A., Tikhodeev S.G.* The scattering matrix and optical properties of metamaterials // *Phys. Usp.* 2009. V. 52, No 9. P. 1027–1030.
27. *Gippius N.A., Weiss T., Tikhodeev S.G., Giessen H.* Resonant mode coupling of optical resonances in stacked nanostructures // *Opt. Express.* 2010. V. 18, No 7. P. 7569–7574.
28. *Tikhodeev S.G., Yablonskii A.L., Muljarov E.A., Gippius N.A., Ishihara T.* Quasiguided modes and optical properties of photonic crystal slabs // *Phys. Rev. B.* 2002. V. 66, No 4. P. 045102.
29. *Bykov D.A., Doskolovich L.L.* Magneto-optical resonances in periodic dielectric structures magnetized in plane // *J. Mod. Opt.* 2010. V. 57, No 17. P. 1611–1618.
30. *Centeno E., Felbacq D.* Optical bistability in finite-size nonlinear bidimensional photonic crystals doped by a microcavity // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 62. P. R7683–R7686.
31. *Centeno E., Felbacq D.* Rabi oscillations in bidimensional photonic crystals // *Phys. Rev. B.* 2000. V. 62. P. 10 101–10 108.
32. *Nevière M., Popov E., Reinisch R.* Electromagnetic resonances in linear and nonlinear optics: Phenomenological study of grating behavior through the poles and zeros of the scattering operator // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 1995. V. 12, No 3. P. 513–523.
33. *Liscidini M., Gerace D., Andreani L.C., Sipe J.E.* Scattering matrix analysis of periodically patterned multilayers with asymmetric unit cells and birefringent-media // *Phys. Rev. B.* 2008. V. 77. Art. ID 035324.
34. *Felbacq D.* Numerical computation of resonance poles in scattering theory // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. Art. ID 047702.
35. *Weiss T., Gippius N.A., Tikhodeev S.G., Granet G., Giessen H.* Derivation of plasmonic resonances in the Fourier modal method with adaptive spatial resolution and matched coordinates // *J. Opt. Soc. Amer. A* 2011. V. 28, No 2. P. 238–244.
36. *Li L.* Field singularities at lossless metal-dielectric arbitrary-angle edges and their ramifications to the numerical modeling of gratings // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2012. V. 29, No 4. P. 593–604.
37. *Weiss T.* Advanced numerical and semi-analytical scattering matrix calculations for modern nano-optics // Ph.D. dissertation, Fakultät Mathematik und Physik, Physikalisches Institut der Universität, Stuttgart, Germany, 2011.
38. *Anemogiannis E., Glytsis E., Gaylord T.* Efficient solution of eigenvalue equations of optical waveguiding structure // *J. Lightw. Technol.* 1994. V. 12, No 12. P. 2080–2084.
39. *Chen C., Berini P., Feng D., Tanev S., Tzolov V.* Efficient and accurate numerical analysis of multilayer planar optical waveguides in lossy anisotropic media // *Opt. Express.* 2000. V. 7, No 8. P. 260–272.
40. *Zolla F., Renversez G., Nicolet A., Kuhlmeier B., Guenneau S., Felbacq D.* Foundations of Photonic Crystal Fibres. — London, U.K.: Imperial College, 2005.
41. *Felbacq D.* Finding resonance poles by means of cauchy integrals // *Proc. 13th Int. Conf. Transparent Optical Networks*, Jun. 2011, paper We.B4.2.

42. *Lomakin V., Michielssen E.* Transmission of transient plane waves through perfect electrically conducting plates perforated by periodic arrays of subwavelength holes // *IEEE Trans. Antennas Propag.* 2006. V.54, No 3. P.970–984.
43. *Akimov A., Gippius N., Tikhodeev S.* Optical Fano resonances in photonic crystal slabs near diffraction threshold anomalies // *JETP Lett.* 2011. V.93. P.427–430.
44. *Гантмахер Ф. П.* Теория матриц. — Изд. 4-е, доп. — М.: Наука, 1988. 548 с.
45. *Householder A.S.* The Numerical Treatment of a Single Nonlinear Equation, ser. Int. Series in Pure Appl. Math. — New York: McGraw-Hill, 1970.
46. *Bykov D.A., Doskolovich L.L.* Numerical methods for calculating poles of the scattering matrix with applications in grating theory // *J. Lightw. Technol.* 2013. V.31, No 5. P.793–801.
47. *Hua Y., Sarkar T.K.* Matrix pencil and system poles // *Signal Process.* 1990. V.21, No 2. P.195–198.
48. *Hua Y., Sarkar T.K.* Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise // *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.* 1990. V.38, No 5. P.814–824.
49. *Hua Y., Sarkar T.K.* On SVD for estimating generalized eigenvalues of singularmatrix pencil in noise // *IEEE Trans. Signal Process.* 1991. V.39, No 4. P.892–900.
50. *Rakic A.D., Djurišić A.B., Elazar J.M., Majewski M.L.* Optical properties of metallic films for vertical-cavity optoelectronic devices // *Appl. Opt.* 1998. V.37, No 22. P.5271–5283.
51. *Yau L., Ben-Israel A.* The Newton and Halley methods for complex roots // *Am. Math. Mon.* 1998. V.105, No 9. P.806–818.
52. *Cao Q., Lalanne P., Hugonin J.-P.* Stable and efficient Bloch-mode computational method for one-dimensional grating waveguides // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2002. V.19. P.335–338.
53. *Bezus E.A., Doskolovich L.L.* Stable algorithm for the computation of the electromagnetic field distribution of eigenmodes of periodic diffraction structures // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2012. V.29. P.2307–2313.
54. *Ebbesen T.W., Lezec H.J., Ghaemi H.F., et al.* Extraordinary optical transmission through subwavelength hole arrays // *Nature.* 1998. V.391. P.667–669.
55. *Ghaemi H.F., Thio T., Grupp D.E.* Surface plasmons enhance optical transmission through subwavelength holes // *Phys. Rev. B.* 1998. V.58. P.6779–6782.
56. *Le Perchec J., Quemerais P., Barbara A., Lopez-Rios T.* Why metallic surfaces with grooves a few nanometers deep and wide may strongly absorb visible light // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V.100. P.066408.
57. Дифракционная нанофотоника / Под ред В.А. Сойфера — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.
58. *Belotelov V.I., Bykov D.A., Doskolovich L.L., Kalish A.N., Zvezdin A.K.* Giant transversal Kerr effect in magneto-plasmonic heterostructures: The scattering-matrix method // *J. Exp. Theor. Phys.* 2010. V.110. P.816–824.
59. *Belotelov V.I., Bykov D.A., Doskolovich L.L., Kalish A.N., Kotov V.A., Zvezdin A.K.* Giant magneto-optical orientational effect in plasmonic heterostructures // *Opt. Lett.* 2009. V.34, Issue 4. P.398–400.
60. *Sarrazin M., Vigneron J.-P., Vigoureux J.-M.* Role of Wood anomalies in optical properties of thin metallic films with a bidimensional array of subwavelength holes // *Phys. Rev. B.* 2003. V.67. P.085415.

61. Vallius T., Vahimaa P., Turunen J. Pulse deformations at guided-mode resonance filters // Opt. Express. 2002. V. 10. P. 840–843.
62. Vabishchevich P.P., Bessonov V.O., Sychev F.Yu., et al. Femtosecond Relaxation Dynamics of Surface Plasmon–Polaritons in the Vicinity of Fano-Type Resonance // JETP Letters. 2010. V. 92. P. 575–579.
63. Azaña J. Proposal of a uniform fiber Bragg grating as an ultrafast all-optical integrator // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 1. P. 4–6.
64. Preciado M.A., Muriel M.A. Ultrafast all-optical integrator based on a fiber Bragg grating: proposal and design // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 12. P. 1348–1350.
65. Li M., Janner D., Yao J., Pruneri V. Arbitrary-order all-fiber temporal differentiator based on a fiber Bragg grating: design and experimental demonstration // Opt. Express. 2009. V. 17(22). P. 19798–807.
66. Berger N.K., Levit B., Fischer B., et al. Temporal differentiation of optical signals using a phase-shifted fiber Bragg grating // Opt. Express. 2007. V. 15(2). P. 371–381.
67. Park Y., Kulishov M., Slavík R., Azaña J. Picosecond and sub-picosecond flat-top pulse generation using uniform long-period fiber gratings // Opt. Express. 2006. V. 14(26). P. 12670–78.
68. Kulishov M., Azaña J. Design of high-order all-optical temporal differentiators based on multiple-phase-shifted fiber Bragg gratings // Opt. Expr. 2007. V. 15(10). P. 6152–6166.
69. Papoulis A. The Fourier integral and its applications. — New York: McGraw-Hill, 1962.
70. Gippius N.A., Tikhodeev S.G., Ishihara T. Optical properties of photonic crystal slabs with an asymmetrical unit cell // Phys. Rev. B. 2005. V. 72. P. 045138.
71. Bykov D.A., Doskolovich L.L., Soifer V.A. Temporal differentiation of optical signals using resonant gratings // Opt. Lett. 2011. V. 36. P. 3509–3511.
72. Быков Д.А., Досколович Л.Л., Соифер В.А. О способности резонансных дифракционных решеток дифференцировать импульсный оптический сигнал // ЖЭТФ. 2012. Т. 141, № 5. С. 832–839.
73. Abramowitz M., Stegun I. A. Handbook of Mathematical Functions. — New York: Dover Publications, 1964.
74. Bykov D.A., Doskolovich L.L., Soifer V.A. Single-resonance diffraction gratings for time-domain pulse transformations: integration of optical signals // J. Opt. Soc. Am. A. 2012. V. 29, No 8. P. 1734–1740.
75. Быков Д.А., Досколович Л.Л., Соифер В.А. Интегрирование оптических импульсов резонансными дифракционными решетками // Письма в ЖЭТФ. 2012. Т. 95, № 1. С. 8–12.
76. Soifer V., Kotlyar V., Doskolovich L. Iterative Methods for Diffractive Optical Elements Computation. — Taylor & Francis, 1997.
77. Goodman J.W. Introduction to Fourier Optics. — New York: McGraw-Hill, 2005.
78. Зверев В.А. Радиооптика. — М.: Советское радио, 1975.
79. Raether H. Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings. — Springer-Verlag, 1988.
80. Jackson J.D. Classical Electrodynamics. Third Edition. — New York: Wiley, 1998.
81. Johnson P.B., Christy R.W. Optical Constants of the Noble Metals // Phys. Rev. B. 1972. V. 6, No 12. P. 4370–4379.
82. Barnes W.L. Surface plasmon–polariton length scales: a route to sub-wavelength optics // J. Optics A: Pure and Applied Optics. 2006. V. 8, No 4. P. S87–S93.

83. *Berini P.* Long-range surface plasmon polaritons // *Advances in Optics and Photonics*. 2009. V. 1. P. 484–588.
84. *Burke J., Stegeman G., Tamir T.* Surface-polariton-like waves guided by thin, lossy metal films // *Phys. Rev. B*. 1986. V. 33, No 8. P. 5186–5201.
85. *Zia R. et al.* Geometries and materials for subwavelength surface plasmon modes // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2004. V. 21, No 12. P. 2442–2446.
86. *Avrutsky I. et al.* Highly confined optical modes in nanoscale metal-dielectric multilayers // *Phys. Rev. B*. 2007. V. 75. P. 241402(R).
87. *Pollock C.R.* Fundamentals of Optoelectronics. — Chicago: Irwin, 1995.
88. *Kekatpure R.D. et al.* Solving dielectric and plasmonic waveguide dispersion relations on a pocket calculator // *Opt. Express*. 2009. V. 17, No 26. P. 24112–24129.
89. *Berini P.* Plasmon–polariton modes guided by a metal film of finite width // *Opt. Lett.* 1999. V. 24, No 15. P. 1011–1013.
90. *Holmgaard T., Bozhevolnyi S.* Theoretical analysis of dielectric-loaded surface plasmon-polariton waveguides // *Phys. Rev. B*. 2007. V. 75, No 24. P. 245405.
91. *Kurihara K., Suzuki K.* Theoretical Understanding of an Absorption-Based Surface Plasmon Resonance Sensor Based on Kretschmann's Theory // *Anal. Chem. Am. Chem. Soc.* 2002. V. 74, No 3. P. 696–701.
92. *Bezus E.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L.* Scattering suppression in plasmonic optics using a simple two-layer dielectric structure // *Appl. Phys. Lett.* 2011. V. 98, No 22. P. 221108.
93. *Безус Е.А. и др.* Подавление рассеяния в элементах плазмонной оптики с помощью двухслойной диэлектрической структуры // *Письма в ЖТФ*. 2011. Т. 37, № 23. С. 10–18.
94. *Безус Е.А., Досколович Л.Л., Казанский Н.Л.* Плазмонный волновод диэлектрик-диэлектрик-металл для подавления паразитного рассеяния в элементах плазмонной оптики // *Известия РАН. Сер. физ.* 2011. Т. 75, № 12. С. 1674–1677.
95. *Liu Y. et al.* Transformational Plasmon Optics // *Nano Lett.* 2010. V. 10, No 6. P. 1991–1997.
96. *Санников Д.Г., Семенцов Д.И.* Поверхностная мода диэлектрического волновода с металлической подложкой // *Письма в ЖТФ*. 2003. Т. 29, № 9. С. 1–8.
97. *Avrutsky I., Soref R., Buchwald W.* Sub-wavelength plasmonic modes in a conductor-gap-dielectric system with a nanoscale gap // *Opt. Express*. 2010. V. 18, No 1. P. 348–363.
98. *Sámson Z.L. et al.* Femtosecond surface plasmon pulse propagation // *Opt. Lett.* 2011. V. 36, No 2. P. 250–252.
99. *Zia R., Brongersma M.L.* Surface plasmon polariton analogue to Young's double-slit experiment // *Nature Nanotechnol.* 2007. V. 2. P. 426–429.
100. *Kim H., Hahn J., Lee B.* Focusing properties of surface plasmon polariton floating dielectric lenses // *Opt. Express*. 2008. V. 16, No 5. P. 3049–3057.
101. *Feng L. et al.* Fourier plasmonics: Diffractive focusing of in-plane surface plasmon polariton waves // *Appl. Phys. Lett.* 2007. V. 91, No 8. P. 081101.
102. *Bezus E.A. et al.* Design of diffractive lenses for focusing surface plasmons // *J. Optics*. 2010. V. 12, No 1. P. 015001.
103. *Безус Е.А. и др.* Расчет дифракционных структур для фокусировки поверхностных электромагнитных волн // *Компьютерная оптика*. 2009. Т. 33, № 2. С. 185–192.

104. *Gramotnev D.K., Bozhevolnyi S.I.* Plasmonics beyond the diffraction limit // Nature Photonics. Nature Publishing Group, 2010. V. 4, No 2. P. 83–91.
105. *Bai B., Li L.* Reduction of computation time for crossed-grating problems: a group-theoretic approach // J. Opt. Soc. Am. A. 2004. V. 21, No 10. P. 1886–1894.
106. *Bai B., Li L.* Group-theoretic approach to enhancing the Fourier modal method for crossed gratings with square symmetry // J. Opt. Soc. Am. A. 2006. V. 23, No 3. P. 572–580.
107. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
108. *Безус Е.А. и др.* Формирование интерференционных картин поверхностных электромагнитных волн с изменяемым периодом с помощью дифракционных решеток // Компьютерная оптика. 2008. Т. 32, № 3. С. 234–237.
109. *Bezus E.A. et al.* Diffraction gratings for generating varying-period interference patterns of surface plasmons // J. Opt. A: Pure and Applied Optics. 2008. V. 10, No 9. P. 095204.
110. *Palik E.D.* Handbook of Optical Constants. — Academic press, 1985. V. 1.
111. *Doskolovich L.L., Kadomina E.A., Kadomin I.I.* Nanoscale photolithography by means of surface plasmon interference // J. Opt. A: Pure and Applied Optics. 2007. V. 9. P. 854–857.
112. *Weber M.J.* Handbook of Laser Wavelengths. — CRC Press, 1998.
113. *Безус Е.А., Досколович Л.Л.* Расчет и моделирование дифракционных структур для формирования двумерных интерференционных картин поверхностных электромагнитных волн // Компьютерная оптика. 2009. Т. 33, № 1. С. 10–16.
114. *Bezus E.A., Doskolovich L.L.* Grating-assisted generation of 2D surface plasmon interference patterns for nanoscale photolithography // Opt. Commun. 2010. V. 283, No 10. P. 2020–2025.
115. *Belotelov V.I. et al.* Inverse Faraday effect in plasmonic heterostructures // J. Physics: Conf. Ser. 2010. V. 200, No 9. P. 092003.
116. *Bezus E.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L.* Evanescent-wave interferometric nanoscale photolithography using guided-mode resonant gratings // Microelectronic Engineering. 2011. V. 88, No 2. P. 170–174.
117. *Bezus E.A., Doskolovich L.L., Kazanskiy N.L.* Interference pattern generation in evanescent electromagnetic waves for nanoscale lithography using waveguide diffraction gratings // Quantum Electronics. 2011. V. 41, No. 8. P. 759–764.
118. *Brundrett D.L. et al.* Effects of modulation strength in guided-mode resonant subwavelength gratings at normal incidence // J. Opt. Soc. Am. A. OSA. 2000. V. 17, No 7. P. 1221–1230.
119. *Magnum R., Shin D., Liu Z.S.* Guided-mode resonance Brewster filter // Opt. Lett. 1998. V. 23, No 8. P. 612–614.
120. *Tamir T., Zhang S.* Resonant scattering by multilayered dielectric gratings // J. Opt. Soc. Am. A. 1997. V. 14, No 7. P. 1607–1616.
121. *Wei C. et al.* Electric field enhancement in guided-mode resonance filters // Opt. Lett. 2006. V. 31, No 9. P. 1223–1225.
122. *Sun T. et al.* Electric field distribution in resonant reflection filters under normal incidence // J. Opt. A: Pure and Applied Optics. 2008. V. 10. P. 125003.
123. *Гуппиус Н.А., Тиходеев С.Г.* Применение метода матрицы рассеяния для расчета оптических свойств метаматериалов // УФН. 2009. Т. 179. С. 1027–1030.
124. *Белотелов В.И. и др.* Гигантский экваториальный эффект Керра в магнитоплазмонных гетероструктурах. Метод матрицы рассеяния // ЖЭТФ. 2010. Т. 137, № 5. С. 932–942.

125. Быков Д.А. и др. Экстраординарный магнитооптический эффект изменения фазы дифракционных порядков в диэлектрических дифракционных решетках // ЖЭТФ. 2010. Т. 138, № 6. С. 1093–1102.
126. Blaikie R.J., McNab S.J. Evanescent interferometric lithography // App. Opt. 2001. V. 40, No 10. P. 1692–1698.
127. Luo X., Ishihara T. Surface plasmon resonant interference nanolithography technique // Appl. Phys. Lett. 2004. V. 84, No 23. P. 4780–4782.
128. Guo X. et al. Large-area surface-plasmon polariton interference lithography // Opt. Lett. 2006. V. 31, No 17. P. 2613–2615.
129. Jiao X. et al. Numerical simulation of nanolithography with the subwavelength metallic grating waveguide structure // Opt. Express. 2006. V. 14, No 11. P. 4850–4860.
130. Handbook of Optics / Ed. Bass M. — New York: McGraw-Hill, 1995. V. 2.
131. Lifante G. Integrated photonics: fundamentals. — Wiley, 2003.
132. Belotelov V.I. et al. Magneto-optical effects in the metal-dielectric gratings // Opt. Commun. 2007. V. 278, No 1. P. 104–109.
133. Madou M.J. Fundamentals of microfabrication. — CRC Press, 1997.
134. Безус Е.А. и др. Усиление обратного эффекта Фарадея в диэлектрических дифракционных решетках с волноводным слоем // Компьютерная оптика. 2011. Т. 35, № 4. С. 432–437.

КОМПОНЕНТЫ НА ФОТОННЫХ КРИСТАЛЛАХ

2.1. Одномерные и двумерные фотонные кристаллы

Фотонными кристаллами (ФК) [1, 2] называют структуры с наноразрешением и периодической модуляцией показателя преломления, обладающие фотонной запрещенной зоной. Запрещенные зоны определяют области частот электромагнитного излучения, которые не могут существовать в данной структуре. Для оптических ФК на длине волны 1,3 мкм размер запрещенной зоны составляет десятки нанометров. Соответственно при падении электромагнитного излучения на ФК, частота которого лежит в запрещенной зоне, происходит полное отражение. Данное свойство определяет перспективы использования фотонно-кристаллических структур в качестве волноводов, антиотражающих покрытий, частотных фильтров, метаматериалов, фотонно-кристаллических линз, работающих на заданной световой частоте.

2.1.1. Фотонные запрещенные зоны. Основываясь на общей теории распространения света в ФК [3], рассмотрим решения уравнений Максвелла для диэлектрической среды без свободных зарядов и токов, моделирующей фотонный кристалл. Система уравнений Максвелла в этом случае имеет вид (в системе СИ):

$$\begin{cases} \nabla \mathbf{D} = 0, \\ \nabla \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$, $\sqrt{(\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}} = c$.

Из (2.1) получаем следующее соотношение:

$$\varepsilon^{-1}(r)(\nabla \times \mathbf{H}) = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Применяя операцию «rot» к выражению (2.2), с учетом (2.1) получаем

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1}(r)(\nabla \times \mathbf{H})) = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}. \quad (2.3)$$

Для монохроматических волн имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H}(r, t) = -\omega^2 \mathbf{H}(r, t). \quad (2.4)$$

С учетом (2.4), вместо (2.3) при $\mu=1$ можно записать, что

$$\nabla \times (\varepsilon^{-1}(r)(\nabla \times \mathbf{H})) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathbf{H}. \quad (2.5)$$

Так как величина $\varepsilon(r)$ в рассматриваемом случае вещественна, то уравнение (2.5) является задачей на нахождение собственных значений величины ω^2/c^2 эрмитова оператора $L = \nabla \times (\varepsilon^{-1}(r)\nabla \times)$ в уравнении

$$L\mathbf{H} = (\omega/c)^2 \mathbf{H}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим одномерный ФК с периодом структуры $d = a + b$, где a и b — размеры участков, имеющих диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2 , соответственно. Известно [1, 3], что собственные функции уравнения (2.6) в периодической среде имеют блоховский вид:

$$\varphi = e^{ikx}u(x), \quad (2.7)$$

где x — координата, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Собственные функции оператора L определяются, исходя из их вида (2.7) и граничных условий, определенных функцией

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1, & nd \leq x < a + nd, \\ \varepsilon_2, & a + nd \leq x < (n+1)d, \end{cases} \quad (2.8)$$

где n — целое число. Собственные функции в областях с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \\ \varphi_2(x) &= Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где A, B, C, D — неизвестные коэффициенты.

Так как на границах зон с различной диэлектрической проницаемостью должны быть непрерывны как собственные функции, так и их производные, то можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B = e^{-iQd}(Ce^{ik_2d} + De^{-ik_2d}), \\ k_2(A - B) = k_2e^{-iQd}(Ce^{ik_2d} - De^{-ik_2d}), \\ Ae^{ik_1a} + Be^{-ik_1a} = Ae^{ik_2a} + Be^{-ik_2a}, \\ k_1(Ae^{ik_1a} - Be^{-ik_1a}) = k_2(Ae^{ik_2a} - Be^{-ik_2a}). \end{cases} \quad (2.10)$$

В матричной форме эта система уравнений относительно A, B, C и D может быть записана в виде

$$M(k_1, k_2, Q)V = 0, \quad (2.11)$$

где

$$M(k_1, k_2, Q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -e^{id(k_2-Q)} & -e^{-id(k_2+Q)} \\ k_1 & -k_1 & -k_2 e^{id(k_2-Q)} & k_2 e^{-id(k_2+Q)} \\ e^{ik_1 a} & e^{-ik_1 a} & -e^{ik_2 a} & -e^{-ik_2 a} \\ k_1 e^{ik_1 a} & -k_1 e^{-ik_1 a} & -k_2 e^{ik_2 a} & k_2 e^{-ik_2 a} \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$V = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}.$$

Эта система уравнений имеет ненулевое решение, если $\det M = 0$. Раскрыв определитель, можно получить в неявном виде закон дисперсии $\omega(Q)$:

$$\cos(k_1 a) \cos(k_2 b) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \sin(k_1 a) \sin(k_2 b) = \cos(Qd), \quad (2.13)$$

где $k_i = \sqrt{\varepsilon_i} \omega / c$, $i = 1, 2$, Q — волновое число Блоха. Так как $|\cos(Qd)| \leq 1$, в спектре возникают запрещенные зоны, т.е. такие значения k_i , для которых

$$\left| \cos(k_1 a) \cos(k_2 b) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} \sin(k_1 a) \sin(k_2 b) \right| > 1. \quad (2.14)$$

В этих зонах распространение излучения в кристалле оказывается невозможным. Или наоборот, если задан одномерный фотонный кристалл $(a, b, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, то из неравенства (2.14) находим $\omega = 2\pi\nu$ — циклическую частоту света, который не может проходить через такой фотонный кристалл.

Рассмотрев простейшую одномерную теорию, теперь можно рассмотреть некоторые модельные примеры. Рассмотрим дифракцию плоской волны на фотонных кристаллах в двумерном случае. Во всех примерах в этом разделе рассматривается волна единичной интенсивности ($E_0 = 1$ В/м). Моделирование проводилось при помощи программы FullWAVE 6.0 и реализованного в ней FDTD-метода.

2.1.2. Дифракция плоской волны на фотонном кристалле без дефектов. Рассмотрим падение плоской электромагнитной волны с ТЕ-поляризацией на фотонный кристалл (ФК). Параметры ФК взяты из работы [4] для получения сопоставимых результатов: $n_1 = 3,25$ — коэффициент преломления среды, $n_2 = 1$ — коэффициент преломления отверстий, $r = 0,25$ мкм — радиус отверстий, $T_z = 0,6$ мкм и $T_x = 1$ мкм — расстояния между центрами отверстий по оптическим осям z и x , соответственно. Коэффициенты заполнения (по оси z $\Lambda_z = 0,83$, по оси x $\Lambda_x = 0,5$) тоже взяты из статьи [4]. На рисунке 5.1 показана запрещенная фотонная зона для данного кристалла для ТЕ-поляризации. Длина электромагнитной волны $\lambda = 1,55$ мкм. Из рисунка 2.1 видно, что данная длина волны лежит в фотонной запрещенной зоне, коэффициент отражения $R \approx 0,89$. Из рисунка 2.2 видно, что свет с данной длиной волны не проходит в кристалл дальше первых 3-х слоев отверстий.

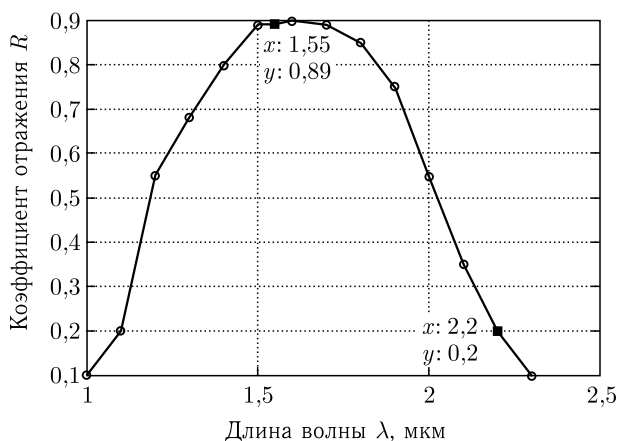


Рис. 2.1. Фотонная запрещенная зона

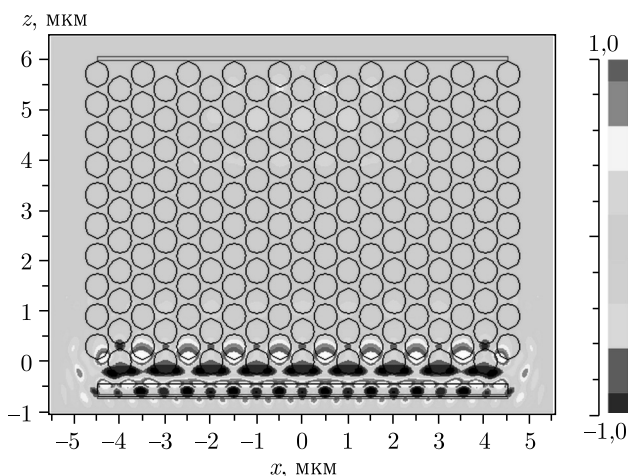


Рис. 2.2. Распространение света в фотонном кристалле в запрещенной зоне. Свет распространяется снизу вверх

Теперь рассмотрим тот же фотонный кристалл, но изменим длину волны на $\lambda = 2,2$ мкм. На рисунке 2.3 видно, что на этой длине волны ФК пропускает электромагнитное излучение, коэффициент отражения получился небольшим $R \approx 0,2$.

То есть запрещенная зона на рис. 2.1 не является точной функцией-прямоугольником (rect), и коэффициент отражения света не достигает максимального значения 1 в связи с тем, что при моделировании рассматриваются конечные размеры ФК по координатам x и z .

2.1.3. Распространение света в фотонно-кристаллическом волноводе.

Рассмотрим тот же фотонный кристалл, что и в предыдущем пункте, удалив из него три центральных ряда отверстий. Длину волны выберем, исходя из рис. 2.1 таким образом, чтобы коэффициент пропускания был минимален.

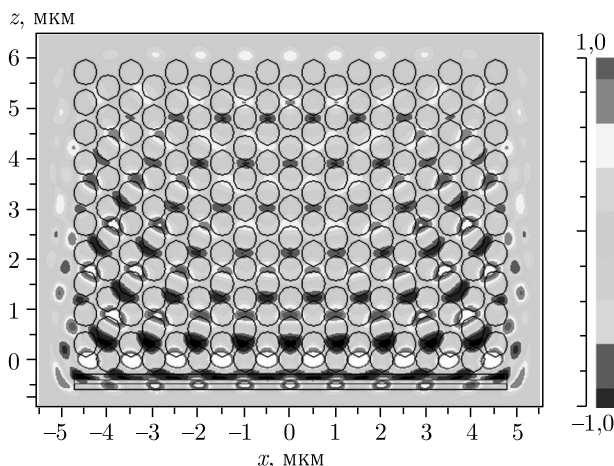


Рис. 2.3. Распространение света в фотонном кристалле за пределами запрещенной зоны. Свет распространяется снизу вверх

Это условие выполняется при $\lambda = 1,55$ мкм. На рисунке 2.4 показано распространение света в фотонно-кристаллическом волноводе. Из рисунка 2.4 видно, что свет распространяется только по тому пути, который мы создали в фотонном кристалле, удалив из него три соседних ряда отверстий.

Теперь уменьшим источник излучения до размеров волновода, чтобы оценить потери мощности при прохождении света через такой волновод (рис. 2.5).

Потери энергии на расстоянии 5 мкм (это длина волновода) составили приблизительно 0,51%. То есть, если сфокусировать свет на вход фотонно-кристаллического волновода шириной около 1 мкм, то он почти весь пройдет через него до выхода.

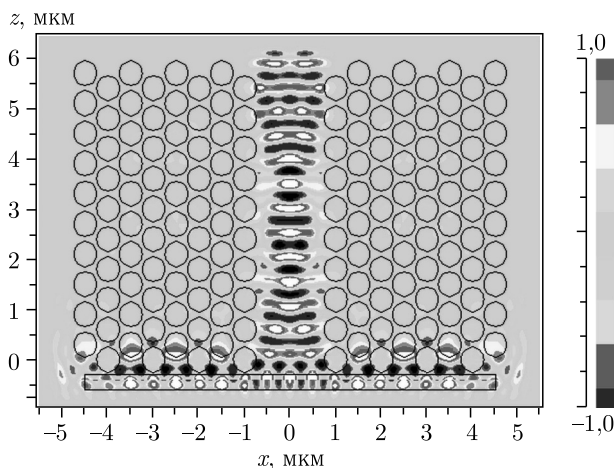


Рис. 2.4. Распространение света в фотонно-кристаллическом волноводе

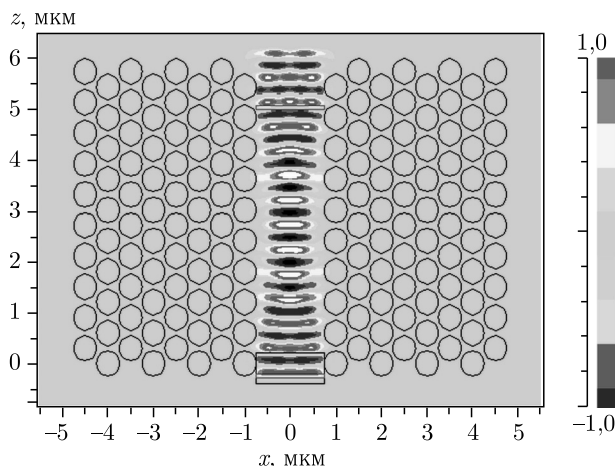


Рис. 2.5. Распространение света в фотонно-кристаллическом волноводе при освещении узким источником. Свет распространяется снизу вверх

2.1.4. Фотонно-кристаллические коллиматоры. В последнее время появились методы оптимизации [5] структуры фотонно-кристаллических световодов с целью уменьшения расходимости излучения при выходе из световода. Для обычных световых волокон эту задачу решают с помощью структурирования выходного торца волокна.

На рисунке 2.6, *а* показан схематично двумерный фотонно-кристаллический волновод, оболочка которого состоит из периодически расположенных (период 228 нм) диэлектрических наностержней ($\epsilon = 3,38$, кремний) диаметром 114 нм. Для создания волновода один ряд наностержней устраняется. Размер такого «дефекта» в периодической структуре наностержней равен 342 нм, в полтора периода. Длина волны света — 633 нм. На рисунке 2.6, *б* показана мгновенная картина дифракции света на данной структуре, расчи-

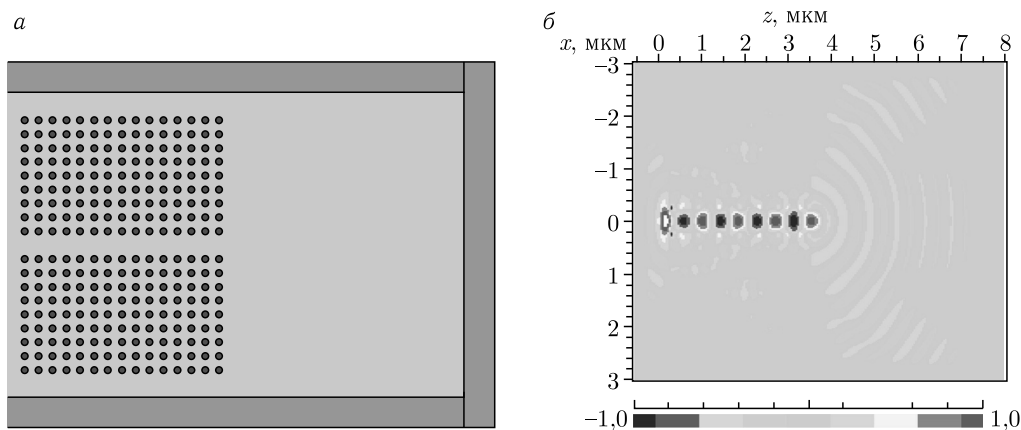


Рис. 2.6. Фотонно-кристаллический волновод (*а*) и картина дифракции света внутри волновода и при выходе из него (*б*). Свет распространяется слева направо

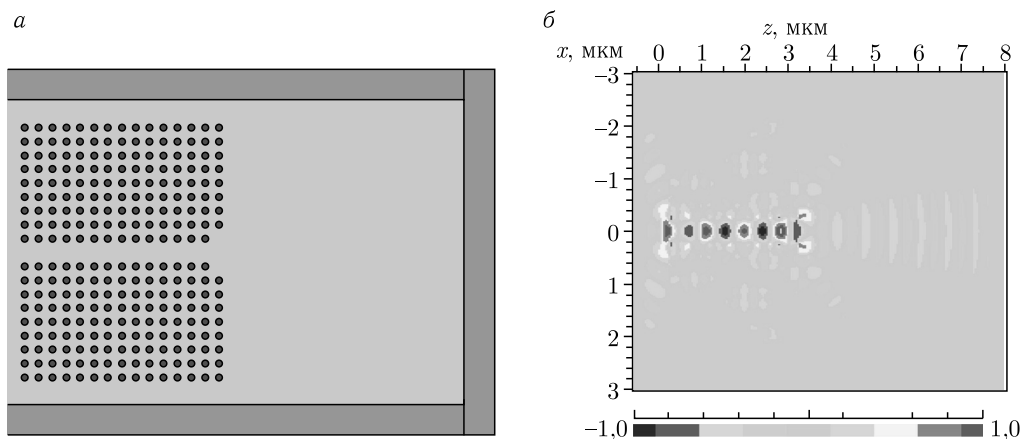


Рис. 2.7. Фотонно-кристаллический волновод с коллиматором (а) и картина дифракции света внутри волновода и при выходе из него (б). Свет распространяется слева направо

танная методом FDTD с помощью программы FullWAVE. Видно, что свет почти не заходит в оболочку и распространяется внутри волноведущей части с показателем преломления 1. При выходе из волновода световая волна сильно расходится, распространяясь в угле 140 градусов.

Заметим, что ширина волновода (342 нм) немного больше половины длины волны света (633 нм). Некоторая модернизация структуры волновода вблизи его выхода позволяет существенно уменьшить расходимость излучения. Так на рис. 2.7, а показан ФК-волновод, у которого убраны два стрежня в последнем ряду вблизи волноведущей части. Это привело к тому, что излучение после волновода расходится в угле всего 30 градусов (рис. 2.7, б). Заметим, что из скалярной теории дифракции полный угол расходимости можно оценить как $2\lambda/(\pi r) = 2,35$ или 130 градусов, r — радиус волноведущей части.

2.2. Двумерная фотонно-кристаллическая градиентная линза Микаэляна

Современные технологии позволяют создавать оптические микро- и нано-объекты с размерами, сопоставимыми с длиной волны света. Поэтому встает вопрос о компьютерном моделировании дифракции света на таких объектах. Для решения этой задачи нужно непосредственно решать систему уравнений Максвелла. Одним из самых распространенных методов для численного решения этих уравнений является метод «конечных разностей во временной области». В англоязычной литературе он закрепил за собой название «finite-difference time-domain method» (FDTD) [6]. Данный метод хорошо себя зарекомендовал, благодаря своей универсальности при решении задач дифракции [7, 8]. Он и используется в данном разделе.

Фотонные кристаллы, которые мы кратко рассмотрели в предыдущем разделе, это структуры, с периодически меняющимся показателем преломления (этот период должен быть меньше длины волны), которые позво-

ляют манипулировать светом в нанометровом масштабе [9]. В последнее время они привлекают к себе все большее внимание, благодаря ряду своих интересных свойств. Одним из фундаментальных свойств этих материалов является то, что они не пропускают свет в определенном диапазоне длин волн. Эта спектральная область называется «фотонной запрещенной зоной». В настоящее время наибольший интерес представляют фотонные кристаллы, запрещенная зона которых лежит в видимом или ближнем инфракрасном диапазонах [10–13].

Благодаря развитию технологии производства фотонных кристаллов становится возможным создание фотонно-кристаллических линз. ФК-линза — это фотонный кристалл, радиус дырок в котором меняется по определенному закону, обеспечивающему фокусировку света. При этом период решетки кристалла остается постоянным. Такие линзы, например, решают проблему фокусировки света на вход фотонно-кристаллического волновода, являясь более компактной альтернативой микролинзам и сужающимся волноводам.

Известно, что градиентная среда с радиальной зависимостью показателя преломления в виде гиперболического секанса [14], используется для самофокусировки лазерного излучения. Градиентная линза с таким показателем преломления собирает все параллельные оси лучи в фокус на поверхности и носит название линзы Микаэляна. В работе [15] предложено искать модовое решение волнового уравнения для 2D-градиентной среды с показателем преломления в виде гиперболического секанса, аналогично поиску солитонного решения нелинейного уравнения Шредингера.

В данном разделе рассмотрены параксиальное и непараксиальное решения в виде гиперболического секанса для градиентного двумерного волновода, показатель преломления которого зависит от поперечной координаты в виде гиперболического секанса. Для цилиндрической градиентной линзы найдена аналогичная фотонно-кристаллическая линза, которая может быть изготовлена по технологии фото- или электронной литографии. На основе реализованного на языке программирования C++ FDTD-метода проведено сравнительное моделирование прохождения плоской волны через обе микролинзы.

2.2.1. Модовое решение для градиентной секансной среды. В 1951 г. А.Л. Микаэлян показал [14], что в градиентной среде с цилиндрической симметрией и с зависимостью показателя преломления от радиальной координаты в виде функции гиперболического секанса все лучи, исходящие из одной осевой точки на некотором расстоянии опять соберутся в осевом фокусе. Это явление, называется самофокусировкой света в градиентной среде.

Можно показать, что в двумерной градиентной среде, показатель преломления которой зависит от поперечной координаты в виде функции гиперболического секанса, будет распространяться световое поле, которое сохраняет свою структуру, проявляя модовые свойства, и комплексная амплитуда которого пропорциональна той же функции гиперболического секанса.

Действительно, пусть распределение показателя преломления в 2D-модельной градиентной среде зависит только от поперечной координаты

в виде функции гиперболического секанса:

$$n(y) = n_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right), \quad (2.15)$$

где n_0 — максимальный показатель преломления в среде на оптической оси, k — волновое число света в вакууме. В случае ТЕ-поляризации единственная отличная от нуля проекция вектора напряженности электрического поля монохроматической электромагнитной волны $E_x(y, z)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k^2 n_0^2}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right)} \right] E_x(y, z) = 0, \quad (2.16)$$

где z — направление вдоль оптической оси. Тогда модовое решение уравнения (2.16) в виде «солитона» будет иметь вид

$$E_x(y, z) = E_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{ikn_0 z}{\sqrt{2}} \right), \quad (2.17)$$

где E_0 — постоянная. Слово «солитон» взято в кавычки, так как в нашем случае нет нелинейности, и решение (2.17) только похоже на солитонное решение, а является модой данной градиентной среды. Интересно, что решение (2.17) имеет место и в параксиальном случае. Если вместо градиентной среды (2.15) выбрать несколько иную зависимость показателя преломления от поперечной координаты,

$$n_1(y) = n_0 \sqrt{1 + \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right)}, \quad (2.18)$$

где $n_1(0) = \sqrt{2} n_0$ — максимальный показатель преломления среды и $n_1(\infty) = n_0$ — минимальный показатель преломления, то решение параксиального уравнения,

$$\left[2ik \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{k^2 n_0^2}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right)} \right] E_{1x}(y, z) = 0, \quad (2.19)$$

будет иметь вид, аналогичный комплексной амплитуде (2.17):

$$E_{1x}(y, z) = E_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right) \exp \left(\frac{ikn_0^2 z}{4} \right). \quad (2.20)$$

Заметим, что решения (2.17) и (2.20) обладают конечной энергией:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |E_x(y, z)|^2 dy = |E_0|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{kn_0 y}{\sqrt{2}} \right) dy = 2 |E_0|^2. \quad (2.21)$$

Модовые решения, аналогичные (2.17) и (2.20), можно найти для 3D градиентного волновода с показателем преломления

$$n(x, y) = n_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(bx + y \sqrt{(kn_0)^2 / 2 - b^2} \right), \quad (2.22)$$

где b — произвольный параметр. Способ получения такого ch^{-1} -решения можно найти в недавних работах Алимеева И. В. [16, 17], в которых найдены 3D-солитонные решения для нелинейного уравнения Шредингера с керровской нелинейностью третьего порядка, когда показатель преломления нелинейной среды описывается выражением

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 + \alpha I(x, y, z), \quad (2.23)$$

где α — постоянная, $I(x, y, z) = |E(x, y, z)|^2$ — интенсивность одной из компонент вектора напряженности электрического поля световой волны. На аналогию между солитонным ch^{-1} -решением для нелинейной среды (2.23) и для линейной градиентной среды с показателем преломления (2.15) или (2.18) впервые указал A.W. Snyder [15].

В следующем разделе показано как можно заменить цилиндрическую градиентную линзу (ГЛ) на 2D-фотонно-кристаллическую линзу.

2.2.2. Фотонно-кристаллическая градиентная линза. Двумерная фотонно-кристаллическая градиентная линза (ФКГЛ) состоит из фотонного кристалла, радиус дырочек в котором меняется по определенному закону. Подобно обычной линзе ФКГЛ позволяет сфокусировать параллельный световой пучок в точку. Однако ФКГЛ может быть более компактна или может быть более простой в изготовлении. На рисунке 2.8 схематически изображена ФКГЛ.

Цилиндрическая секансная ГЛ [14] — это градиентная линза, показатель преломления которой меняется от центра к краю линзы по закону

$$n(y) = \frac{n_0}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi |y|}{2L} \right)}, \quad (2.24)$$

где L — ширина линзы вдоль оси z , n_0 — показатель преломления в ее центре.

Подберем эквивалентную ФКГЛ из материала с показателем преломления n и толщиной вдоль оптической оси a так, чтобы ею можно было бы заменить ГЛ. Для этого потребуем, чтобы в дискретных точках этой линзы оптическая длина пути равнялась оптической длине пути в ГЛ. Оптическая длина пути в ГЛ будет равна

$$\Delta_1 = \frac{Ln_0}{\operatorname{ch} \left(\frac{\pi |y|}{2L} \right)}. \quad (2.25)$$

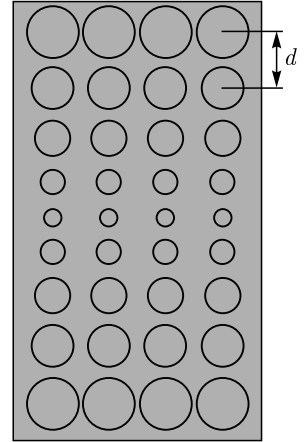


Рис. 2.8. Фотонно-кристаллическая градиентная линза

Оптическая длина пути в ФКГЛ равна

$$\Delta_2 = N [2r(y) + (d - 2r(y))n], \quad (2.26)$$

где N — количество дырок в ряду, d — постоянная кристалла или расстояние между центрами дырок, $r(y)$ — радиус дырок, меняющийся от ряда к ряду. Приравнявая оптические длины (2.25) и (2.26), получим следующую зависимость для радиуса:

$$r(y) = \frac{d}{2(n-1)} \left(n - n_0 \frac{1}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi|y|}{2L}\right)} \frac{L}{a} \right). \quad (2.27)$$

Пусть в каждом столбике линзы M дырок. Тогда полученная зависимость должна выполняться в точках $y = \pm dm$, m меняется от 0 до $M/2$. При этом на радиус дырочки также должны быть наложены определенные условия. Во-первых, радиус должен быть неотрицательным. Из формулы (2.27) видно, что минимальное значение радиуса достигается в точке $y = 0$. Наложив на него условие неотрицательности, получим следующую связь для параметров ГЛ и соответствующей ей ФКГЛ:

$$na \geq n_0 L. \quad (2.28)$$

Во-вторых, диаметр дырочки должен быть меньше постоянной кристалла. Максимальное значение радиуса достигается в точке $y = b/2$, где b — апертура линзы. Указанное условие налагает следующее ограничение на апертуру линзы:

$$\operatorname{ch} \frac{\pi b}{4L} < n_0 \frac{L}{a}. \quad (2.29)$$

В-третьих, на период решетки, как уже было сказано выше, должно налагаться условие $d < \lambda$. Кроме того, при численном моделировании фотонно-кристаллической линзы шаг сетки должен выбираться настолько маленьким, чтобы радиус менялся от ряда к ряду. Дело в том, что может получиться так, что изменение радиуса от ряда к ряду может оказаться меньшим, чем шаг дискретизации. В этом случае радиус не изменится и желаемый эффект достигнут не будет.

Моделирование дифракции света на 2D-микро-линзах проводилось с помощью разностного решения уравнений Максвелла FDTD-методом. На языке C++ в среде разработки MS Visual Studio 6.0 был реализован алгоритм Yee [18] в двумерном случае для ТЕ-поляризации. Ввод излучения в расчетную область реализован с использованием условия «полное поле–рассеянное поле» [19]. В качестве граничных условий выбраны идеально поглощающие слои Беренгера (Berenger J. P.) [20].

ГЛ обладает свойством фокусировки света в точку на поверхности. В нашем численном эксперименте использовалась ГЛ с параметрами: длина волны $\lambda = 1,5$ мкм, $L = 3$ мкм, $n_0 = 1,5$, $b = 3,7$ мкм. Распределение квадрата модуля комплексной амплитуды напряженности электрического поля при прохождении света через такую линзу показано на рис. 2.9, и сечение интенсивности — на рис. 2.10.

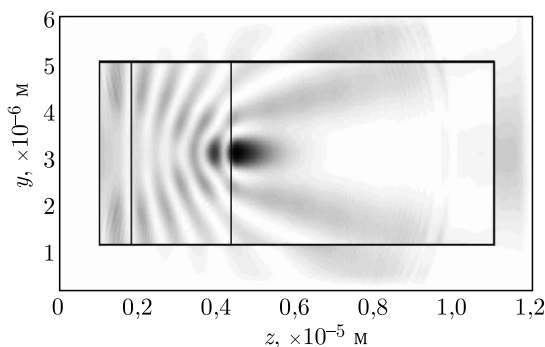


Рис. 2.9. Распределение квадрата модуля напряженности $|E_x|^2$ (негатив), расположение ГЛ линзы указано серым прямоугольником, свет распространяется слева направо

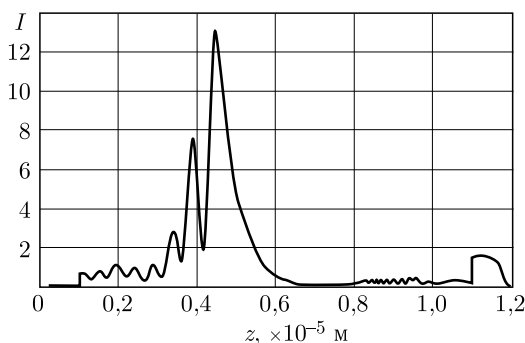


Рис. 2.10. Распределение квадрата модуля напряженности электрического поля $|E_x|^2$ в сечении по главной оси ГЛ

На графике видно, что фокус такой линзы точно совпадает с ее передней поверхностью.

Теперь промоделируем прохождение света через ФКГЛ с параметрами $a = L = 3$ мкм, $n = n_0 = 1,5$, $d = 0,25$ мкм. На рисунке 2.11 показана зависимость радиуса дырочек (рис. 2.8) от номера ряда этих дырочек.

Однако, даже при большой дискретизации, $\lambda/h = 100$, получается достаточно неточное приближение для радиуса. Это показано на рис. 2.12.

Период наноструктуры отверстий — 250 нм, минимальный диаметр отверстий — 10 нм, максимальный — 40 нм. На рисунках 2.13 и 2.14 показаны распределения квадрата модуля комплексной амплитуды напряженности электрического поля при прохождении через линзу.

Видно, что фокус этой линзы находится на расстоянии $f = 3,3$ мкм от начала линзы, т.е. достаточно точно соответствует ГЛ с $L = 3$ мкм. Интенсивность в фокусе $I_f = 7,5$, что меньше, чем в ГЛ (эффективность ФКГЛ составляет 70% от эффективности ГЛ), и фокусное расстояние ФКГЛ по оси z в 2 раза больше, чем у ГЛ. Это объясняется малой дискретизацией и грубой аппроксимацией (рис. 2.12) кривой на рис. 2.11. На рисунке 2.14 видны «шумы», вызываемые соединительными условиями процедуры «полное

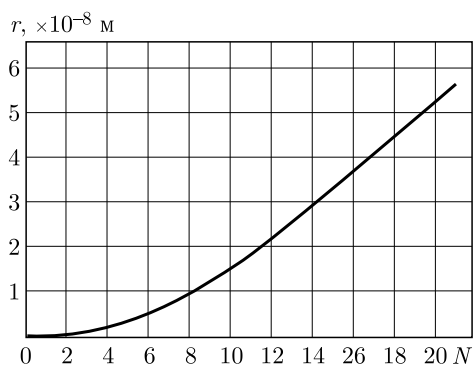


Рис. 2.11. Зависимость радиуса дырок от номера ряда

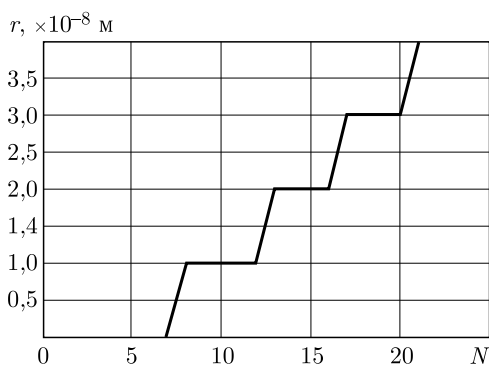


Рис. 2.12. Зависимость радиуса дырок от номера ряда, при дискретизации 100 отсчетов на длину волны

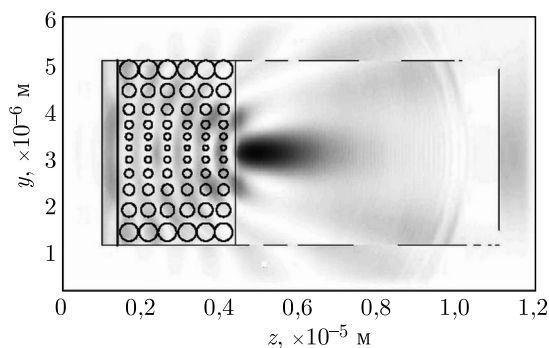


Рис. 2.13. Распределение квадрата модуля напряженности электрического поля $|E_x|^2$ (негатив) в ФКГЛ

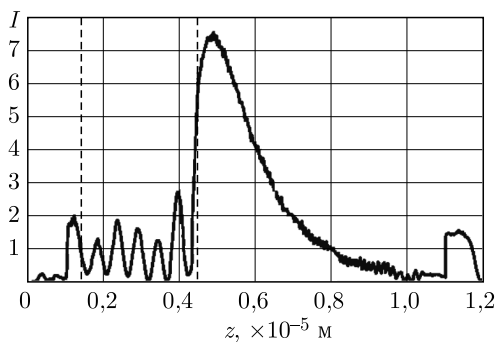


Рис. 2.14. Распределение квадрата модуля напряженности $|E_x|^2$ вдоль оптической оси ФКГЛ

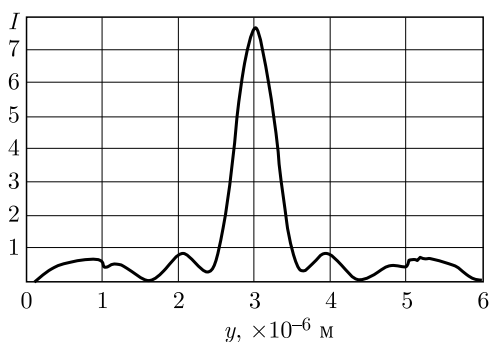


Рис. 2.15. Распределение квадрата модуля напряженности $|E_x|^2$ в фокальной плоскости ФКГЛ

поле–рассеянное поле» (это не физические шумы). Распределение квадрата модуля напряженности в фокальной плоскости показано на рис. 2.15

Из рисунка 2.15 видно, что диаметр фокусного пятна ФКГЛ по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,42\lambda$. FWHM — сокращение от английского выражения full width half maximum. Заметим, что в скалярном случае для фокусного пятна, интенсивность которого описывается sinc-функцией, известно, что ширина фокусного пятна по полуспаду равна $0,44\lambda/NA$, где NA — числовая апертура линзы. Поэтому дифракционный предел в случае 2D равен $\text{FWHM} = 0,44\lambda$, а размер фокуса на рис. 2.15 меньше этого значения.

2.2.3. Фотонно-кристаллическая линза для сопряжения двух волноводов. В последние годы активно исследуются различные устройства микро- и нанопотоники для сопряжения двух волноводов различных типов, например, обычное одномодовое волокно с проволочным или планарным волноводом, или планарный волновод с фотонно-кристаллическим (ФК) волноводом. Известны следующие устройства нанопотоники для сопряжения двух волноводящих структур:

- адиабатически сужающиеся (taper) гребешковые (ridge) волноводы для сопряжения с ФК-волноводами [21–27]; при этом волноводящие структуры могут не только стыковаться друг с другом выходом к входу, но и накладываться параллельно друг другу [28];
- дифракционные решетки Брэгга в волноводе [29–32] для вывода излучения из волокна; при этом волокно с решеткой Брэгга может лежать на поверхности планарного волновода [33];
- параболическое микро-зеркало под углом для ввода в планарный волновод [34];
- обычные рефракционные линзы или микро-линзы [35–38];
- суперлинзы Веселаго с отрицательной рефракцией: плоская [39–46] или с одной вогнутой поверхностью [47–49];
- устройства сопряжения в миллиметровой области спектра: суперлинзы [50, 51] и ФК-линзы [52].
- Известны также работы по сопряжению двух разных ФК-волноводов [53].

Сужающиеся волноводы могут иметь высокую эффективность связи, если ширина мод в гребешковом волноводе и ФК-волноводе сравнимы друг с другом. В этом случае эффективность связи (т. е. отношение энергии на выходе устройства к энергии на входе) может достигать 80 % [21], 90 % [24], 95 % [22] и даже почти 100 % [26]. Если же ширина гребешкового волновода (1,6 мкм) в несколько раз больше, чем ширина ФК-волновода (200 нм), то эффективность связи уменьшается до 60 % [23]. При еще большей разнице ширин сопрягаемых волноводов, размер адиабатически сужающейся части волновода становится относительно большим: при сжатии моды одномодового волокна с диаметром сердечника 4,9 мкм до размеров моды планарного волновода шириной 120 нм, длина тайпера (taper) — 40 мкм [25], а волновод сечением $0,3 \times 0,5$ мкм сужается до диаметра 75 нм на расстоянии 150 мкм [27].

Устройства сопряжения, которые вводят излучение из одномодового волокна в планарные волноводы или ФК-волноводы с помощью дифракционных решеток на волноводе, также имеют участки сужения. Например, сужение

гауссова пучка с диаметром перетяжки 14 мкм до размера волновода шириной 1 мкм выполняется тайпером длиной всего 14 мкм [29, 30]. При этом экспериментальная эффективность связи — 35 % [10], без зеркального слоя на обратной стороне волновода, и 57 % [29] с зеркалом. Ввод гауссова пучка с длиной волны 1,3 мкм в волновод был осуществлен с помощью дифракционной решетки на волноводе [30]. Аналогичное устройство сопряжения с решеткой на волноводе из кремния с периодом 630 нм и тайпером 20–40 мкм, но для длины волны 1,55 мкм, имело экспериментальную эффективность 33 % (с зеркалом — 54 %) [31]. Более качественно изготовленное устройство ввода излучения из одномодового волокна с помощью дифракционной решетки в кремнии с периодом 610 нм и шириной 10 мкм в проволочный (wire) волновод шириной 3 мкм имело экспериментальную эффективность связи — 69 % [32]. Расчетную эффективность связи более 90 % имеет устройство сопряжения (J-coupler), которое связывает широкий волновод (10 мкм) с ФК-волноводом (420 нм) с помощью параболического зеркала размером 15х20 мкм для длины волны 1,3 мкм [34]. При этом оба волновода и параболическое зеркало выполнены в пленке кремния (показатель преломления $n = 3,47$).

Обычные рефракционные линзы и микролинзы также успешно применяются в задачах сопряжения. Например, волновод в кремнии ($n = 3,092$) шириной 1–2 мкм имеет на конце линзу, которая позволяет с расчетной эффективностью 90 % связать этот волновод с ФК-волноводом тоже в кремнии ($n = 3,342$) [35]. Моделирование показало [37], что одномодовое волокно диаметром 10,3 мкм (длина волны $\lambda = 1,55$ мкм) с помощью коллимирующей линзы из стекла ВК7 (числовая апертура $NA = 0,1$) с радиусом $R = 1,77$ мм и с помощью фокусирующей микролинзы из кремния с радиусом апертуры 123 мкм можно состыковать с ФК-волноводом с сечением моды $0,19 \times 0,27$ мкм с эффективностью 80 %. При этом микролинза создает внутри ФК-волновода фокусное пятно с диаметром по полуспаду $FWHM = 0,24\lambda$ (числовая апертура волновода $NA = 2,2$).

Особое место среди устройств сопряжения имеют устройства на основе 2D-суперлинз (или линз Веселаго), работа которых основана на явлении отрицательной рефракции. Получить суперлинзу с эффективным показателем преломления близким к -1 можно с помощью фотонных кристаллов. Суперлинзу используют для изображения точечного источника. Причем первое изображение возникает внутри линзы, а второе изображение — за линзой на расстоянии $2B - A$, где B — толщина плоско-параллельной линзы, A — расстояние от линзы до источника [39, 43]. В работе [41] показано, что если 2D точечный источник света описать функцией Ханкеля $H_0(kr)$, k — волновое число, r — расстояние от источника до точки наблюдения, то интенсивность пятна изображения будет пропорциональна функции Бесселя $J_0(kr)$. То есть пятно изображения, сформированное суперлинзой имеет диаметр $FWHM = 0,36\lambda$. В работе [44] моделирование работы 2D ФК-суперлинзы показало, что если эта линза состоит всего из двух слоев диэлектрических стержней ($\varepsilon = 12,96$) радиусом $r = 0,45a$, где a — период решетки стержней, для длины волны $\lambda = 1,55$ мкм, то при безразмерной циклической частоте $\omega = 0,293a/\lambda$ показатель преломления будет равен $n = -1$, и точечный

источник, расположенный на расстоянии $A = 0,26\lambda$ от линзы, изобразится примерно на таком же расстоянии с другой стороны линзы, и ширина пятна изображения будет $\text{FWHM} = 0,36\lambda$. В некоторых работах рассмотрена линза Веселаго не в виде плоско-параллельного ФК-слоя, а одна поверхность ее вогнута. Так в работе [47] показано, что ФК-линза из прямоугольной решетки стержней с $\varepsilon = 10$ и магнитной проницаемостью $\mu = 1,5$ с периодом $a = 0,48$ см, радиус столбцов $r = 0,4a$, имеет эффективный показатель преломления $n = -0,634$. И если эта 2D-линза плоско-вогнутая с радиусом кривизны поверхности $R = 3,31$ см, то фокус такой суперлинзы будет находиться на расстоянии $f = R/(1 - n)$; для ТЕ-поляризации $f = 1,69$ см, а для ТМ-поляризации $f = 2,38$ см. «Частота» излучения равна $\omega = 0,48a/\lambda$. В работе [48] приведены результаты моделирования ввода излучения в ФК-волновод с помощью суперлинзы с вогнутой поверхностью. ФК-линза имела толщину $8,6a$ и апертуру $38a$, а сам ФК состоял из 2D-решетки отверстий с периодом $a = 465$ нм в GaAs ($\varepsilon = 12,96$) и диаметром $2r = 372$ нм. При этом в фокусе линзы на расстоянии $7,56\lambda$ ($\lambda = 1,55$ мкм) формировалось фокусное пятно радиусом $0,5\lambda$, если осветить линзу гауссовым пучком с радиусом перетяжки 3λ . Излучение после линзы попадало в 3W ФК-волновод (3W — означает, что ширина волновода равна трем периодам решетки ФК) шириной $3a$ (около λ). К сожалению, эффективность ввода такой структуры в [48] не приводится. В работе [49] также обсуждаются результаты моделирования ввода излучения из одномодового волокна в ФК-волновод с помощью ФК-суперлинзы (плоско-вогнутой, $n = -1$). Толщина линзы равна $16a = 4,8\lambda$, апертура — $25a$, и состоит она из треугольной решетки отверстий с периодом $a = 0,305\lambda$ и радиусом $r = 0,4a$ в GaAs. Радиус кривизны вогнутой поверхности линзы $R = 2,1\lambda$, фокусное расстояние $f = 1,05\lambda$. Рассчитанная эффективность ввода в ФК-волновод с $\varepsilon = 12,96$, $r' = 0,2a$, $a = 0,312\lambda$ была равна 95 %. Ширина волновода была равна одному периоду ФК-решетки a , а циклическая «частота» $\omega = 0,315a/\lambda$. К сожалению, размер фокусного пятна такой линзы не приводится.

В работах [54–56] рассмотрен другой тип ФК-линзы. Решетка отверстий такой 2D-ФК-линзы имеет постоянный период, но размер отверстий изменяется в соответствии с некоторой функцией. Известна градиентная линза Микаэляна [14], которая все лучи, параллельные оптической оси и падающие перпендикулярно на ее плоскую поверхность, собирает в точку на оптической оси на противоположенной плоской поверхности. Такая осесимметричная градиентная линза имеет зависимость показателя преломления от радиальной координаты (расстояние от оптической оси) в виде (6.24). В работе [43] промоделирована 2D-линза Микаэляна с апертурой 12 мкм, состоящая из 7 столбцов отверстий с периодом 0,81 мкм для длины волны $\lambda = 1,55$ мкм. Эффективность ввода из широкого волновода (12 мкм) в ФК-волновод шириной 1,5 мкм и с эффективным показателем преломления $n = 1,73$ составила 55 %. ФК-волновод состоял из решетки отверстий с периодом 0,63 мкм и диаметром 0,4 мкм. В этой работе тоже не приводятся характеристики фокусного пятна линзы. В работах [55, 56] моделировалась аналогичная ФКГЛ, но с другими параметрами. Толщина линзы равна 3 мкм, 12 столбцов отверстий, апертура линзы — 4 мкм, показатель преломления — 1,5, дли-

на волны — 1,5 мкм. Пятно фокусировки имело диаметр $\text{FWHM} = 0,42\lambda$, а от нуля до нуля интенсивности диаметр фокусного пятна был равен $0,8\lambda$.

В данном разделе рассмотрено ультракомпактное устройство нанофотоники, позволяющее эффективно связывать 2D-волноводы разной ширины с помощью ФКГЛ. Устройство было изготовлено по технологии «кремний на диоксиде кремния», ширина входного волновода 4,5 мкм, ширина выходного волновода 1 мкм, размер ФКГЛ 3×4 мкм. Линза состоит из матрицы отверстий 12×17 с периодом решетки отверстий 250 нм, и диаметр отверстий меняется от центра к периферии с 160 до 200 нм. Устройство работает в диапазоне длин волн 1,5–1,6 мкм. Рассчитанная эффективность связи варьировалась от 40 % до 80 % в зависимости от ширины выходного волновода. ФКГЛ фокусирует свет в малое фокусное пятно в воздухе сразу за линзой, которое по полуспаду интенсивности равно $\text{FWHM} = 0,36\lambda$, что в 1,4 раза меньше, чем скалярный дифракционный предел разрешения в 2D-случае, который определяется шириной *sinc*-функции и равен $\text{FWHM} = 0,44\lambda$.

Моделирование ФК-линзы в волноводе. Фотонно-кристаллическая градиентная линза, которая моделируется ниже, состояла из матрицы отверстий 12×17 в кремнии (эффективный показатель преломления для ТЕ-волны $n = 2,83$), постоянная решетки отверстий — 250 нм, минимальный диаметр отверстий на оптической оси — 186 нм, максимальный диаметр отверстий на краю линзы — 250 нм. Толщина линзы вдоль оптической оси — 3 мкм, ширина линзы (апертура) — 5 мкм. Длина волны $\lambda = 1,55$ мкм.

Моделирование проводилось с помощью разностного метода решения уравнений Максвелла FDTD, реализованного на языке программирования C++. На рисунке 2.16, а показана 2D ФК-линза в кремнии, описанная выше, а на рис. 2.16, б двумерная полутоновая картина дифракции (усредненная во времени) плоской волны ТЕ-поляризации с амплитудой E_x (ось x перпендикулярна плоскости рис. 2.16). На рисунках 2.16, в и 2.16, г показаны распределения интенсивности $|E_x(y, z)|^2$ вдоль оптической оси z и вдоль перпендикулярной к оптической оси линии y , на которой находится фокус. Из рисунка 2.16, в, г видно, что размер фокусного пятна по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,36\lambda$, а продольный размер фокуса равен $\text{FWHM} = 0,52\lambda$.

Моделировалась ФКГЛ с параметрами из предыдущего примера (рис. 2.16, а), но расположенная на выходе волновода в кремнии шириной 5 мкм и длиной 5 мкм (плюс длина линзы 3 мкм, всего длина волновода с линзой вдоль оптической оси 8 мкм) (рис. 2.17, а).

Поле дифракции (интенсивность $|E_x(y, z)|^2$), рассчитанное FDTD методом и усредненное по времени показано на рис. 2.17, б (длина волны 1,45 мкм). На рисунке 2.17, в показано распределение интенсивности вдоль оптической оси. Из сравнения рис. 2.16, в и рис. 2.17, в видно, что интенсивность в фокусе увеличилась, а амплитуда модуляции интенсивности внутри линзы уменьшилась. Это связано с тем, что разница показателей преломления между линзой и волноводом (рис. 2.17, в) гораздо меньше, чем разница между линзой и воздухом (рис. 2.16, а), и поэтому меньше амплитуда волны, отраженной от раздела сред. На рисунке 2.17, г показано распределение интенсивности в фо-

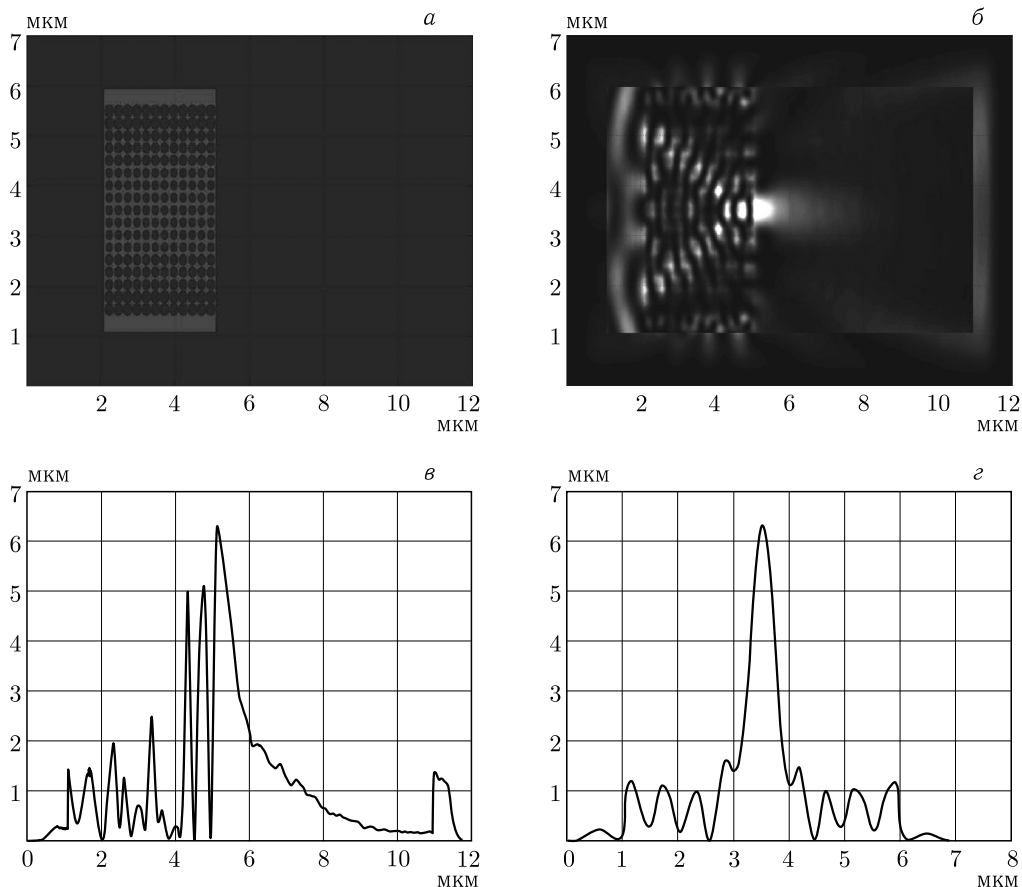


Рис. 2.16. 2D-ФКГЛ 12×17 отверстий в кремнии, размер 3×4 мкм (а), поле дифракции света (плоская ТЕ-волна) или 2D- распределение интенсивности $|E_x|^2$, y — вертикальная ось, z — горизонтальная ось (б), распределение интенсивности вдоль оптической оси (в) и в плоскости фокуса (г)

кусе линзы вдоль линии, параллельной оси y . Из рисунка 2.17, г видно, что диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,31\lambda$. Из сравнений рис. 2.17, г и рис. 2.16, г видно, что кроме уменьшения диаметра фокусного пятна в случае ФКГЛ в волноводе, также уменьшились боковые лепестки картины дифракции в фокусе.

Заметим, что скалярная теория в 2D случае описывает дифракционно-ограниченный фокус *sinc*-функцией: $E_x(y, z) = \text{sinc}(2\pi y/(\lambda NA))$, которая при максимальной числовой апертуре $NA = 1$ дает дифракционный предел фокусного пятна (диаметром по полуспаду интенсивности), равный $\text{FWHM} = 0,44\lambda$. Для суперлинзы [41] предельное значение пятна фокусировки описывается функцией Бесселя $J_0(kr)$ и дает значение диаметра по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 0,36\lambda$. Таким образом, линза на рис. 2.17, а фокусирует свет в пятно, меньшее дифракционного предела.

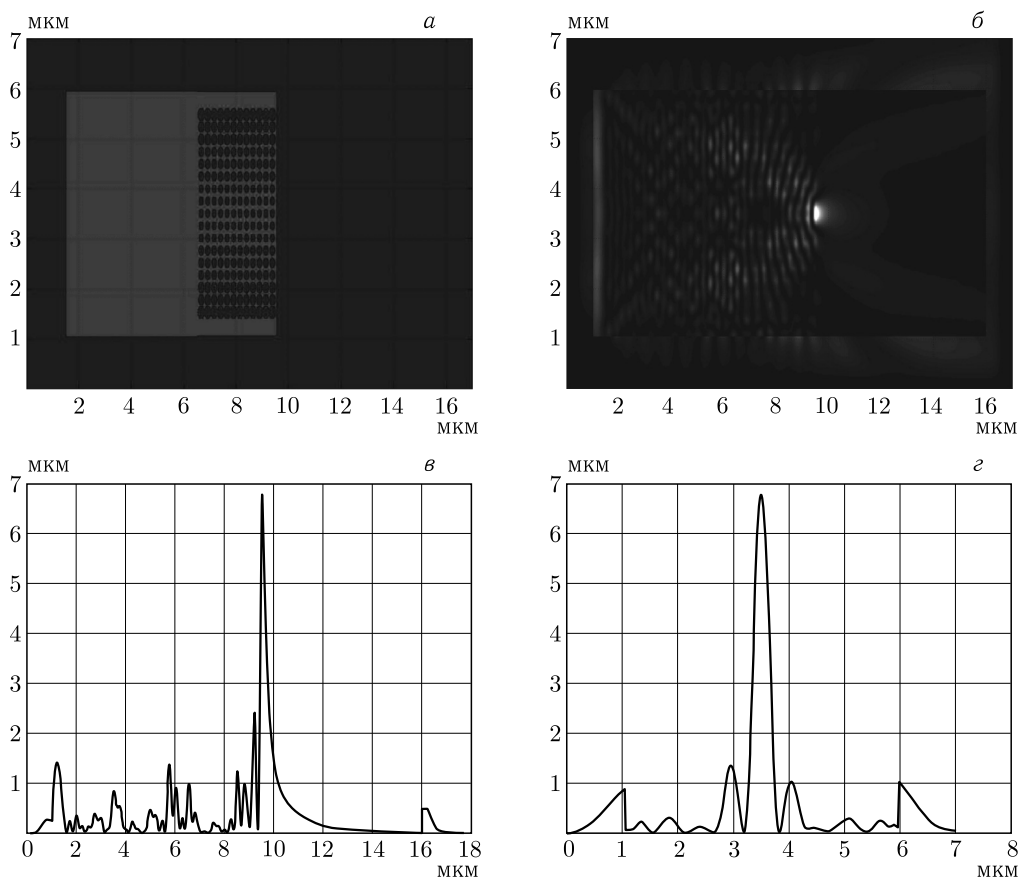


Рис. 2.17. 2D-ФКГЛ на выходе волновода (а), полутонная картина дифракции плоской ТЕ-волны с амплитудой E_x , падающей на вход волновода длиной 5 мкм, на выходе которого расположена линза длиной 3 мкм (б), распределение интенсивности $|E_x|^2$ вдоль оптической оси (в) и в фокусе линзы (з). Интенсивность дана в произвольных единицах

Моделирование показало, что в диапазоне длин волн 1,3–1,6 мкм интенсивность в фокусе имеет два максимальных значения для длин волн 1450 нм и 1600 нм (оба спектральных максимума имеют ширину около 20 нм). На остальных длинах волн из этого диапазона интенсивность фокуса в 2–3 раза меньше. С ростом длины волны фокус смещается к поверхности линзы, и при $\lambda = 1,6$ мкм фокус уже находится внутри линзы.

Моделировании связи двух волноводов с помощью ФКГЛ. На рисунке 2.18, а показано устройство сопряжения двух 2D-волноводов с помощью ФКГЛ. Ширина входного волновода равна 5 мкм, выходного — 0,5 мкм. ФКГЛ в кремнии ($n = 2,83$) имеет матрицу 12×19 отверстий с периодом решетки 0,25 мкм. Диаметры отверстий такие же, как в предыдущих примерах. Длина волны равна 1,55 мкм. Оба волновода имеют длину по 6 мкм.

Моделирование проводилось с помощью метода FDTD, реализованного в программе FullWAVE 6.0 (фирмы RSoft). На рисунке 2.18, б показана мгновенная картина дифракции ТЕ-волны. Эффективность связи — 45 %. Часть излучения (около 20 %) отражается от линзы назад во входной волновод, часть излучения проходит линзу, но не попадает в узкий волновод. На рисунке 2.18, в показан увеличенный фрагмент картины дифракции на рис. 2.18, б

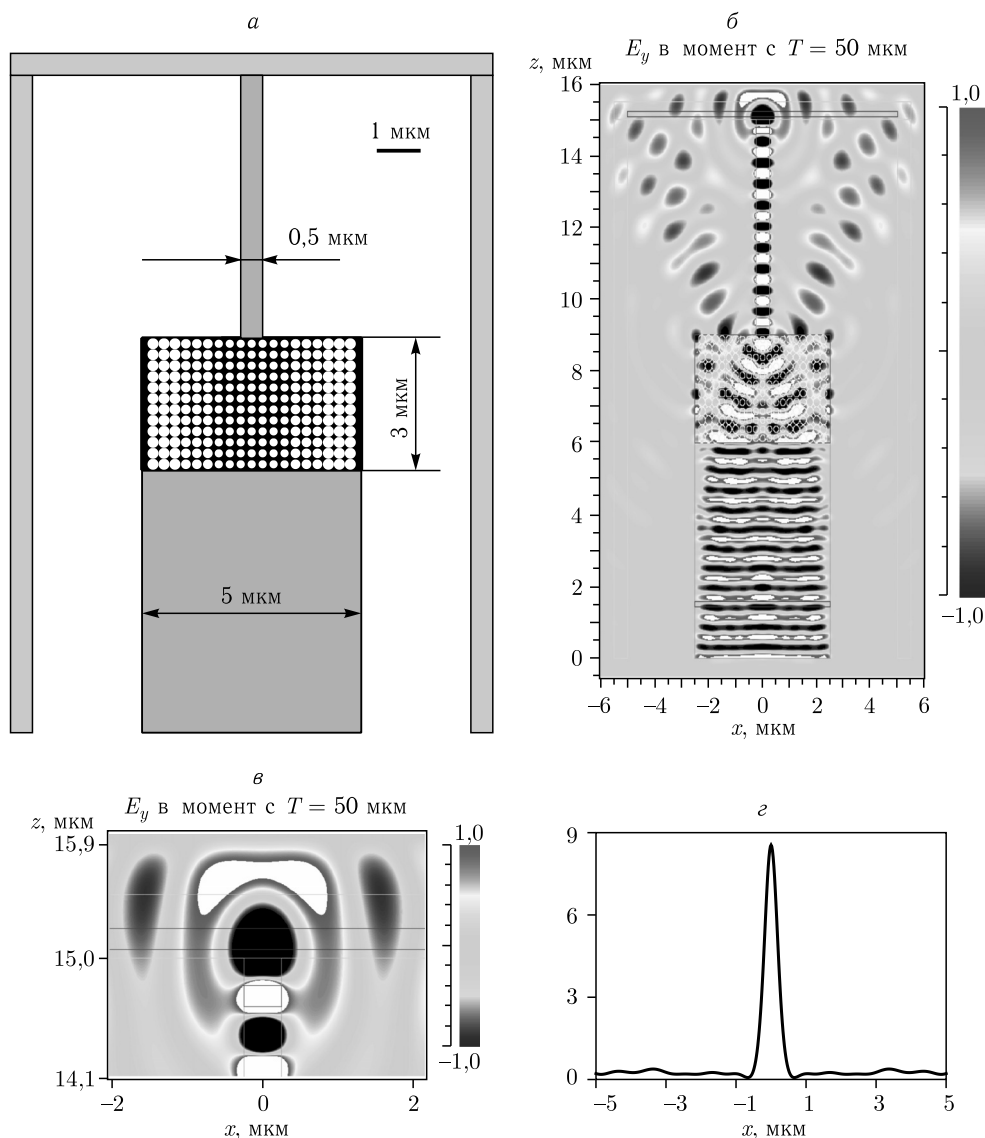


Рис. 2.18. Схема сопряжения двух планарных волноводов с помощью ФКГЛ (а), мгновенная картина дифракции ТЕ-волны, рассчитанная методом FDTD с помощью программы FullWAVE 6.0 (б) и увеличенный фрагмент этой картины на выходе из волокна шириной 0,5 мкм (в), распределение интенсивности на выходе из волновода (г)

на выходе из узкого выходного волновода. К сожалению, в этой программе поперечная ось не y , как было на рис. 2.16 и рис. 2.17, а ось x . Распределение интенсивности $|E_y(x, z)|^2$ вдоль этой поперечной оси x на выходе из узкого волновода показано на рис. 2.18, *г*. Из рисунка 2.18, *г* видно, что диаметр лазерного пятна на выходе (по полуспаду интенсивности) равен $\text{FWHM} = 0,32\lambda$. Заметим, что фокус внутри выходного волновода шириной 1 мкм (при прочих равных условиях) имел меньший диаметр $\text{FWHM} = 0,21\lambda$, где λ — длина волны в вакууме. Это меньше, чем сообщалось ранее [37] ($\text{FWHM} = 0,24\lambda$).

Моделирование влияния промежутка между волноводами. На рисунке 2.19 показана 2D схема связи двух соосных волноводов с промежутком между ними. Ширина входного волновода с ФКГЛ $W_1 = 4,6$ мкм, выходного — $W_2 = 1$ мкм, промежуток между волноводами $\Delta z = 1$ мкм. Остальные параметры: $\lambda = 1,55$ мкм, $n = 1,46$; ФК-линза состоит из 12×17 матрицы отверстий с периодом $a = 0,25$ мкм и диаметром отверстий от 186 до 250 нм. На рисунке 2.19, *а* белым цветом показан материал волноводов ($n = 1,46$), а черным и серым цветом — воздух ($n = 1$). На рисунке 2.19, *б* показана мгновенная картина амплитуды $E_y(x, z)$ для ТЕ-волны, рассчитанная с помощью программы FullWAVE 6.0 для схемы на рис. 2.19, *а*. На рисунке 2.19, *в* показана зависимость эффективности связи (отношение интенсивности света на выходе узкого I волновода к интенсивности на входе в широкий волновод I_0) от величины расстояния между волноводами Δz . Из рисунка 2.19, *в* видно, что максимальная эффективность связи 73 % достигается при величине промежутка между волноводами равной 0,6 мкм. Заметим, что в промежутке между волноводами находится не воздух, а материал волноводов ($n = 1,46$).

На рисунке 2.19, *г* показана рассчитанная зависимость эффективности связи для случая на рис. 2.19, *а* от ширины выходного волновода W_2 при значении промежутка $\Delta z = 1$ мкм. Из рисунка 2.19, *г* видно, что с ростом ширины выходного волновода W_2 эффективность связи почти линейно растет. В работе [57] моделировалось аналогичное устройство нанофотоники не в 2D, а в 3D варианте.

Изготовление двух 2D-волноводов, связанных ФКГЛ. Планарные волноводы по схеме на рис. 2.19, *а* были записаны на резист РММА по технологии прямой записи электронным лучом при напряжении 30 кВ с помощью литографа ZEP520A (Университет Сент-Эндрюса, Шотландия) [58]. Обработка резиста с целью устранения «засвеченных» электронным пучком участков осуществлялась ксиленом (xylene). После этого в смеси газов CHF_3 и SF_6 с помощью технологии реактивного ионного травления (RIE) происходило дальнейшее травление материалов плазмой. То есть происходила передача картины 2D волноводов с ФКГЛ (рис. 2.19, *а*) в пленку кремния (технология SOI: silicon-on-insulator): пленка кремния толщиной 220 нм на слое плавленого кварца толщиной 2 мкм. Глубина травления была около 300 нм. Диаметр отверстий ФКГЛ варьировался от 160 нм до 200 нм. Длина всего образца (длина двух волноводов) была 5 мм. На одной подложке было одновременно изготовлено несколько подобных структур, отличающихся промежутками между волноводами, $\Delta z = 0$ мкм, 1 мкм, 3 мкм, и несколько структур, отличающихся смещением между осями двух волноводов: $\Delta x = 0$ мкм, $\pm 0,5$ мкм,

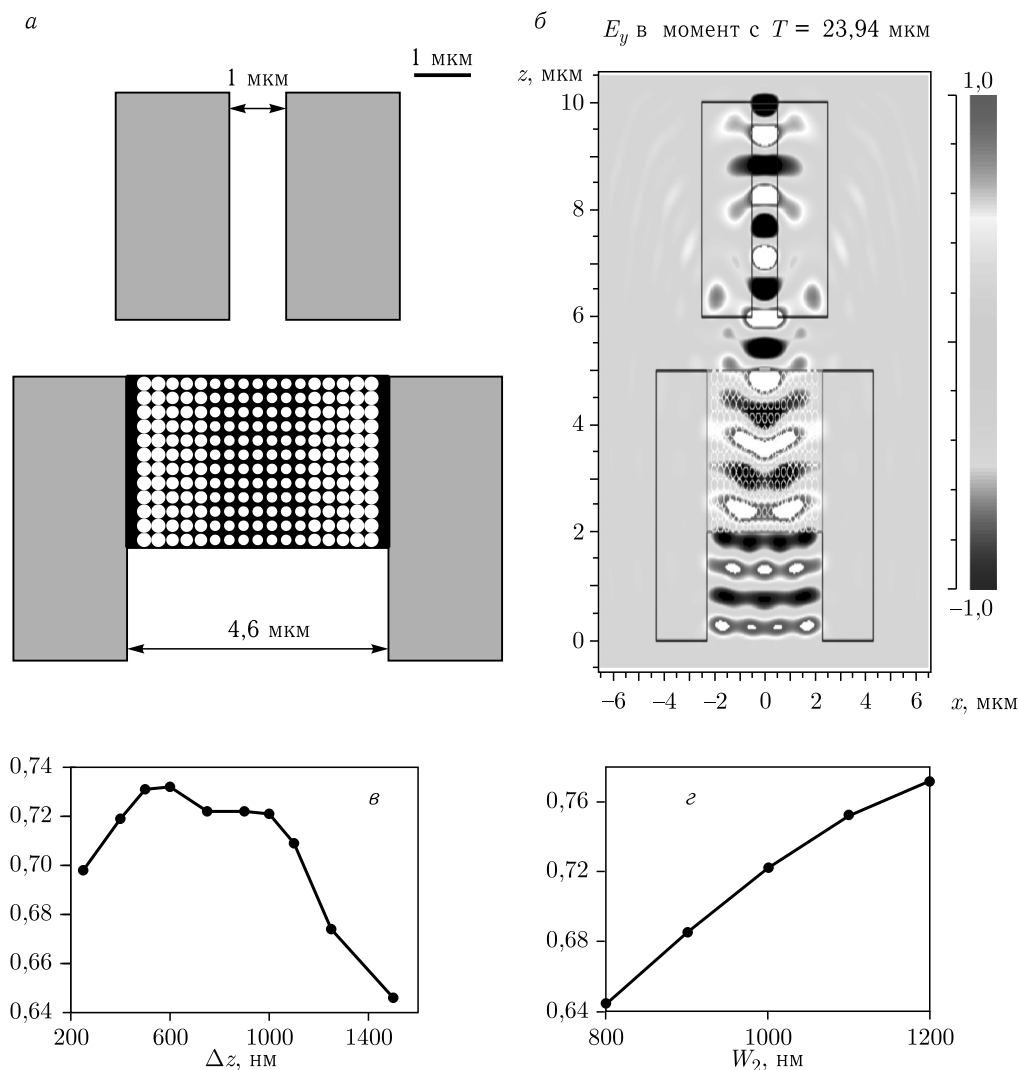


Рис. 2.19. 2D-схема связи двух волноводов с помощью ФКГЛ при наличии промежутка $\Delta z = 1$ мкм между волноводами (белый цвет — материал, черный цвет — воздух) (*a*); мгновенное распределение амплитуды $E_y(x, z)$ ТЕ-волны, рассчитанное с помощью FullWAVE (*б*); зависимости эффективности связи от расстояния между волноводами Δz (*в*) и от ширины выходного волновода W_2 (*г*)

± 1 мкм. На рисунке 2.20 показана увеличенная в 7000 раз фотография (вид сверху) изготовленных двух волноводов с промежутком $\Delta z = 1$ мкм и с ФКГЛ, полученная с помощью сканирующего электронного микроскопа.

Параметры образца на рис. 2.20 следующие. Проектная ширина волноводов $W_1 = 4,5$ мкм и $W_2 = 1$ мкм, ФКГЛ состоит из матрицы отверстий 12×17 с периодом 250 нм.

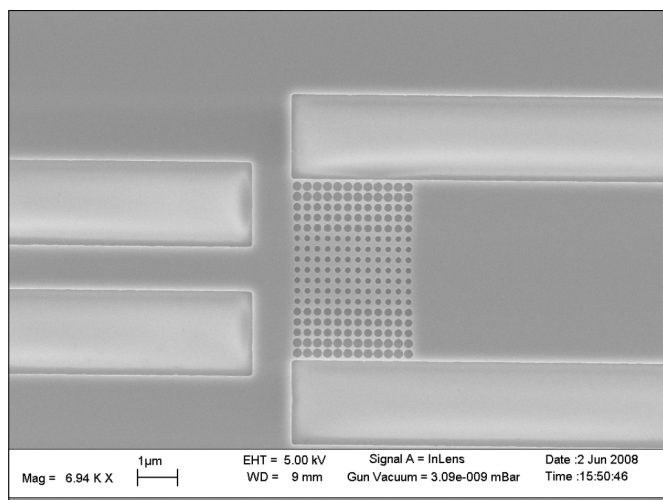


Рис. 2.20. Фотография изготовленных в пленке кремния двух планарных волноводов, связанных ФКГЛ, полученная с помощью сканирующего электронного микроскопа с увеличением 7000

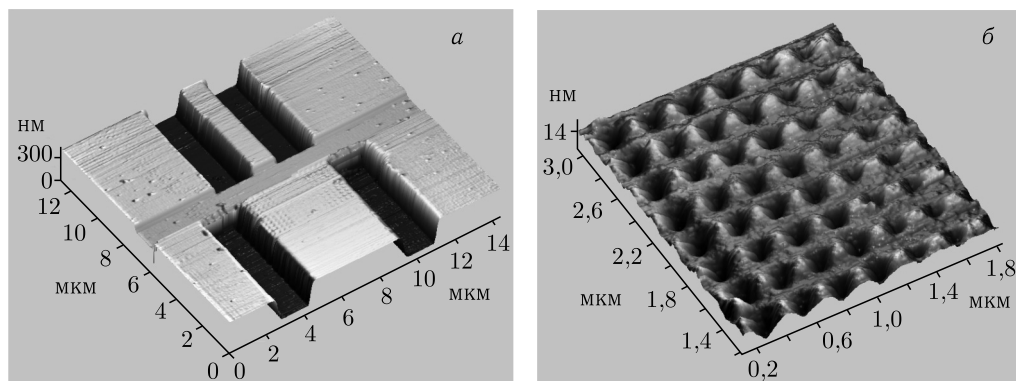


Рис. 2.21. Профиль рельефа изготовленных 2D-волноводов с ФКГЛ, полученный с помощью сканирующего зондового микроскопа (микроскопа на атомных силах) SolverPro (Зеленоград): профиль волноводов (а); участок 6×8 матрицы отверстий ФКГЛ (б). По горизонтальным осям отложены микроны, а по вертикальной оси — нанометры

На рисунке 2.21 показан участок профиля рельефа двух волноводов, изготовленных в пленке кремния на плавленом кварце (а) и участок матрицы отверстий 6×6 ФКГЛ (б), полученные с помощью сканирующего зондового микроскопа.

На рисунке 2.22 показаны сечения выходного (а) и входного (б) волноводов. Видно, что глубина травления обоих волноводов примерно одинаковая и равна 300 нм, а ширина выходного волновода у вершины равна 1 мкм, а у основания — 2 мкм (рис. 2.22, а). Аналогично, ширина входного волновода у вершины равна 4,5 мкм, а у основания трапеции — 5 мкм (рис. 2.22, б).

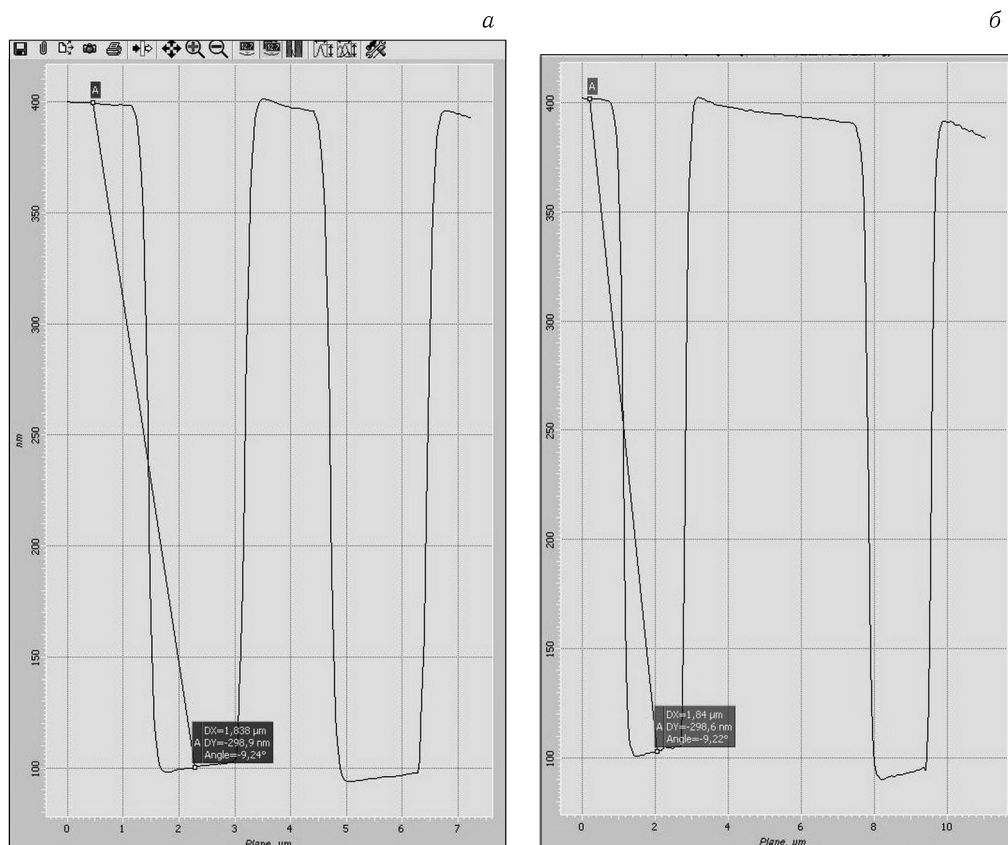


Рис. 2.22. Сечения профиля рельефа для узкого выходного (*a*) и широкого входного (*б*) волноводов

Два планарных волновода ФКГЛ. На рисунке 2.23 показана оптическая схема для получения спектра пропускания двух планарных волноводов, связанных ФКГЛ. Широкодиапазонный источник света (1450–1700 нм), работающий на основе усиления спонтанной эмиссии, соединен с оптическим волокном. Свет на выходе из волокна коллимируется и попадает на поляризатор, который выделяет ТЕ-поляризацию. Далее с помощью микроскопического объектива излучение фокусируется на поверхность входного волновода. Малая часть энергии света попадает в волновод и проходит через исследуемый образец.

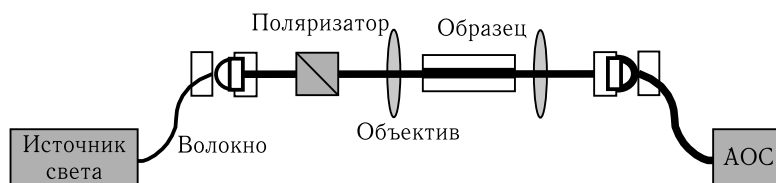


Рис. 2.23. Оптическая схема для исследования устройства нанопотоники, состоящего из двух волноводов и ФКГЛ

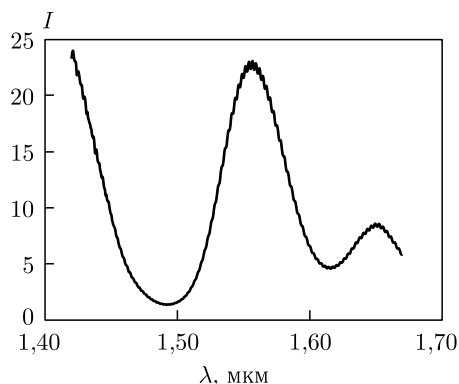


Рис. 2.24. Спектр излучения источника света, используемого в оптической схеме на рис. 2.23

На выходе из узкого волновода расположен второй микрообъектив, собирающий и фокусирующий свет на его входной торец многомодового оптического волокна, соединенного с анализатором оптического спектра (АОС). На рисунке 2.24 показан спектр излучения источника, максимум которого приходится на длину волны 1,55 мкм. Интенсивность излучения дана в произвольных единицах.

На рисунке 2.25 показаны спектры пропускания исследуемых образцов в диапазоне 1,5–1,6 мкм при следующих промежутках Δz между волноводами на оптической оси (а): 0 мкм (кривая 1), 1 мкм (кривая 2) и 3 мкм (кривая 3), а также при следующих величинах смещения Δx с оптической оси выходного волновода (б): 0 мкм (кривая 1), $-0,5$ мкм (кривая 2), $+0,5$ мкм (кривая 3), -1 мкм (кривая 4) и $+1$ мкм (кривая 5). Из рисунка 5.25, а (кривая 1) видно, что спектр пропускания имеет 4 локальных максимума примерно на длинах волн 1535 нм, 1550 нм, 1565 нм и 1590 нм. Причем два из этих максимумов (на длинах волн 1550 нм и 1565 нм) имеют интенсивность в 3 раза большую, чем два других. Скорее всего, это связано с тем, что спектр излучения источника (рис. 2.24) в несколько раз слабее излучает на этих длинах волн.

При увеличении осевого расстояния $\Delta z = 1$ мкм между волноводами (рис. 2.25, а, кривая 2) спектр пропускания в среднем сохраняет свою структуру, но локальные максимумы уменьшаются по величине и смещаются в «красную» область спектра. При дальнейшем увеличении расстояния, $\Delta z = 3$ мкм, между волноводами (рис. 2.25, а, кривая 3) локальные максимумы не только еще больше уменьшаются, но и приобретают «синее» смещение. «Красное» смещение равно примерно 10 нм, и «синее» смещение тоже — 10 нм (для максимума вблизи центральной длины волны — 1,55 мкм). Из рисунка 2.25, б видно, что при смещении выходного волновода с оптической оси на 1 мкм (кривые 4 или 5) интенсивность на выходе уменьшается в 8 раз (длина волны 1,55 мкм). Это означает, что диаметр фокусного пятна, сформированного ФКГЛ в кремнии, меньше 1 мкм.

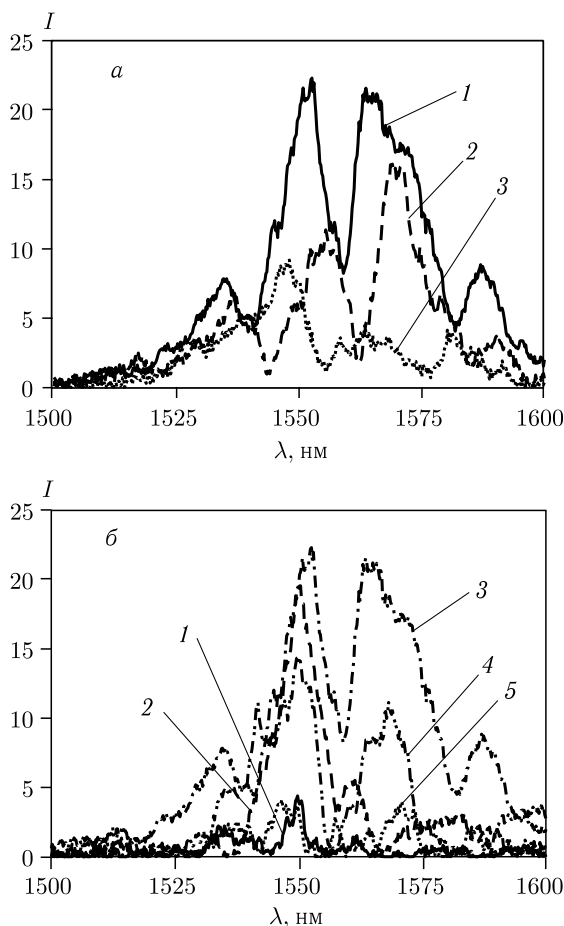


Рис. 2.25. Спектры пропускания, измеренные с помощью оптической схемы на рис. 2.23 для исследуемых образцов, аналогичных показанным на рис. 2.20 при следующих промежутках *а*): $\Delta z = 0$ мкм (кривая 1), $\Delta z = 1$ мкм (кривая 2) и $\Delta z = 3$ мкм (кривая 3), а также при следующих смещениях с оптической оси выходного волновода (*б*): $\Delta x = 0$ мкм (кривая 3), $\Delta x = -0,5$ мкм (кривая 2), $\Delta x = +0,5$ мкм (кривая 4), $\Delta x = -1$ мкм (кривая 4) и $\Delta x = +1$ мкм (кривая 1)

2.3. Моделирование трехмерного устройства нанопотоники для ввода излучения в планарный волновод

В данном параграфе приводятся результаты трехмерного моделирования полного устройства сопряжения, включающего и решетку для ввода сфокусированного гауссова пучка в широкий планарный волновод, и ФК-линзу Микаэляна для согласования мод широкого и узкого волноводов. С помощью программы FullWAVE показано, что эффективность такого устройства нанопотоники составляет 32 %, и при этом происходит «сжатие» площади сечения гауссова пучка ($3 \times 4,6$ мкм) в площадь моды узкого волновода ($0,22 \times 0,5$ мкм) в 125 раз. Если осветить дифракционную решетку участком

плоской волны, то эффективность повышается до 52 %. Причем эффективность ввода решеткой сфокусированного гауссова пучка в широкий планарный волновод равна 62,5 %, а эффективность сопряжения широкого (4,6 мкм) и узкого (0,5 мкм) волноводов с помощью ФК-линзы Микаэляна равна 46 %. Для плоской волны две последние цифры увеличиваются, соответственно — 78 % и 67 %.

2.3.1. Двумерное моделирование ввода света в планарный волновод с помощью решетки. На рисунке 2.26 показана 2D-схема ввода света в тонкий планарный волновод с бинарной решеткой (ширина штрихов равна ширине канавок) на тонкой подложке. Вдоль оси Y волновод, штрихи решетки и подложка имеют неограниченные размеры. Подложка имеет многослойную структуру (3 периода зеркала Брегга) для увеличения эффективности ввода света в волновод. Параметры структуры на рис. 2.26 подобраны квазиоптимальным образом путем перебора. Материалы выбраны согласно широко применяемой технологии кремний-на-диэлектрике.

Волновод был из кремния (Si) с показателем преломления $n_1 = 3,479$ для длины волны света $\lambda = 1,57$ мкм, толщиной $h = 220$ мкм на кварце (SiO_2) с показателем преломления $n_2 = 1,44$ и шириной $W_1 = 1,03$ мкм. Далее в подложке опять идет слой кремния шириной $W_2 = 0,55$ мкм. Эти два слоя в подложке (кремний + кварц) толщиной $W_1 + W_2$ повторяются еще два раза. При добавлении четвертого периода такого зеркала Брэгга эффективность ввода света в волновод не увеличивалась. На пленке кремния имеется субволновая поверхностная бинарная дифракционная решетка с периодом $T = 750$ нм, глубина канавок решетки $D = 90$ нм. Рабочая длина решетки равна 7–8 периодам. Свет в виде цилиндрического гауссова пучка TE -поляризации (вектор

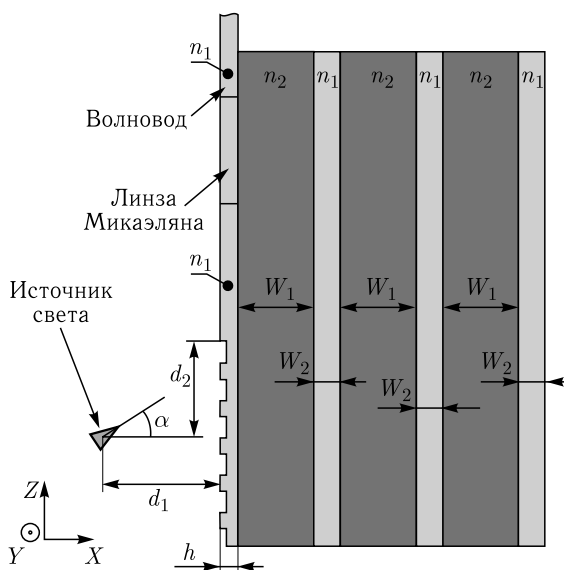


Рис. 2.26. Двумерная схема ввода света TE -поляризации ($E_y \neq 0$) в кремниевый волновод с помощью бинарной поверхностной субволновой дифракционной решетки

электрического поля направлен вдоль штрихов решетки и вдоль оси Y , при TM -поляризации свет почти не вводится в волновод). Радиус гауссова пучка по оси Z равен $b = 3$ мкм. Центр перетяжки гауссова пучка расположен на расстоянии от решетки (по оси X) $d_1 = 2,78$ мкм и на расстоянии от края решетки (по оси Z) $d_2 = 4,15$ мкм. Угол падения лазерного пучка на решетку равен $\alpha = 34^\circ$.

Моделирование проводилось программой FullWAVE 6.0, в которой реализован разностный FDTD-метод решения системы уравнений Максвелла. В нашем случае при приведенных выше параметрах эффективность ввода света в волновод с помощью решетки составила $\eta = 66,3\%$. Эффективностью здесь считаем отношение мощности (или суммарной интенсивности) моды волновода к мощности гауссова пучка, умноженное на 100% .

Моделирование в этой работе проводилось при следующих параметрах сетки: шаги по осям X и Y были равны $\lambda/87$, шаг по продольной оси Z был равен $\lambda/78$, а шаг по временной шкале выбирался равным $cT/196$, где c — скорость света в вакууме, T — период колебаний световой волны. Толщина поглощающего слоя со всех сторон области расчета была равна $0,5$ мкм. В таблице 2.1 приведена зависимость эффективности ввода от шагов дискретизации. Видно, что при выбранных значениях полученная эффективность устойчива к изменениям сетки (предпоследняя строка табл. 2.1).

Таблица 2.1. Зависимость эффективности ввода света в волновод от выбранных параметров сетки

Δx	Δz	Δt	$\eta, \%$
$\lambda/20$	$\lambda/20$	$cT/64$	22
$\lambda/30$	$\lambda/30$	$cT/80$	52
$\lambda/40$	$\lambda/40$	$cT/80$	63
$\lambda/50$	$\lambda/50$	$cT/100$	65
$\lambda/87$	$\lambda/78$	$cT/196$	66,3
$\lambda/100$	$\lambda/100$	$cT/200$	67

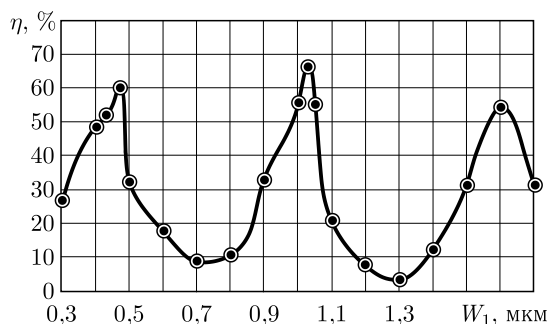


Рис. 2.27. Зависимость эффективности η ввода в 2D-волновод от толщины слоя кремния W_1 в подложке

На рисунке 2.27 показана зависимость эффективности η от толщины слоя кварца W_1 в подложке — зеркале Брэгга на рис. 2.26. Из рисунка 2.27 видно, что имеют место резонансные (узкие) пики отражения (как в зеркале Брэгга или 1D фотонном кристалле) при $W_1 = 0,47$ мкм, $1,03$ мкм и $1,6$ мкм. Максимальная эффективность достигается при $W_1 = 1,03$ мкм.

На рисунке 2.28 показан результат моделирования ввода света в 2D-волновод: показана мгновенная картина амплитуды электрического поля $E_y(x, z)$. Из рисунка 2.28 видно, что гауссов пучок затухает при прохождении внутрь подложки и за три периода зеркала Брэгга почти не проникает. Зеркало Брэгга работает так же, как антиотражающее покрытие, и поэтому гауссов пучок почти не отражается от решетки, а эффективно вводится в пленку кремния.

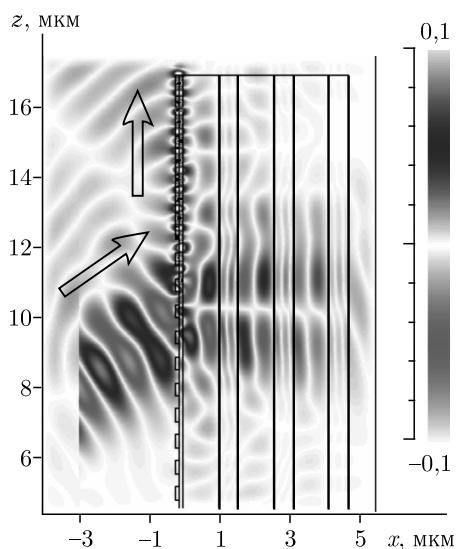


Рис. 2.28. Мгновенное распределение амплитуды $E_y(x, z)$ (стрелками показано направление распространения света)

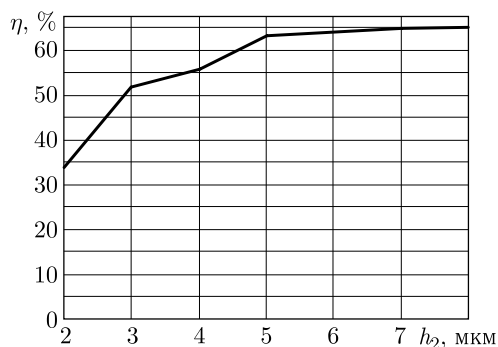


Рис. 2.29. Зависимость эффективности η ввода в 3D-волновод от толщины волновода h_2 в третьем измерении вдоль оси Y

На рисунке 2.29 показана зависимость эффективности ввода сфокусированного гауссова пучка в волновод в 3D-случае при увеличении толщины h_2 волновода (рис. 2.26) вдоль оси Y . Из рисунка 2.29 видно, что при толщине волновода и решетки $h_2 = 4,6$ мкм достигается эффективность $\eta = 60\%$, а при толщине $h_2 = 8$ мкм эффективность ввода $\eta = 65\%$ будет немного меньше, чем эффективность в 2D-случае $\eta = 66,3\%$. Дальнейшее увеличение толщины h_2 устройства (рис. 2.26) не моделировалось из-за ограниченного объема оперативной памяти компьютера. Таким образом, 3D-моделирование с помощью программы FullWAVE показало, что 60% световой энергии сфокусированного на решетку гауссова пучка (площадь перетяжки $3 \times 4,6$ мкм) можно ввести в планарный кремниевый волновод (рис. 2.26) шириной 4,6 мкм.

2.3.2. Трехмерное моделирование фотонно-кристаллической линзы Микаэляна для сопряжения двух волноводов. В работе [58] была промоделирована 2D-ФК-линза Микаэляна, соединяющая два планарных волновода в кремнии толщиной 5 мкм и 0,5 мкм. Эффективность связи была равна $\eta = 45\%$. В этом разделе приводятся результаты трехмерного моделирования аналогичного устройства нанопотоники.

На рисунке 2.30 показана схема планарных волноводов, сопряженных с помощью ФК-линзы. Ширина входного волновода — 4,6 мкм, выходного — 0,5 мкм, толщина пленки кремния — 220 нм, показатель преломления $n = 3,47$ для длины волны $\lambda = 1,55$ мкм, количество отверстий — 12×17 , диаметр отверстий от 186 нм на оси линзы до 240 нм на периферии, период решетки отверстий — 250 нм. Подложка из кварца с показателем преломления 1,44 и имеет толщину 1 мкм. На вход широкого волновода подавался ТМ-поляризованный свет (электрический вектор E лежит в плоскости ФК-линзы) эллиптического гауссова лазерного пучка с радиусами по осям X и Y 4,6 мкм и 0,22 мкм. Полная 3D область расчета программой FullWAVE была равна $X \times Y \times Z = 6 \times 3,1 \times 9$ мкм³. Расчет составляющих электромагнитного поля для устройства нанопотоники, показанного на рис. 2.30, занял примерно 18 минут на процессоре Intel® Celeron®, 3,06 ГГц, ОЗУ 512 Мб.

Эффективность связи между двумя волноводами (рис. 2.30) составила $\eta = 46\%$. Это почти совпадает с эффективностью в двумерном случае [58]. В обоих случаях френелевское отражение не учитывалось. Такое совпадение результатов говорит

о том, что трехслойная подложка подобрана так, что свет почти не покидает волноводы и линзу в направлениях «вверх» и «вниз» по оси Y , а только отражается от границ раздела сред и уходит из линзы мимо волновода в плоскости XZ , как и в двумерном случае.

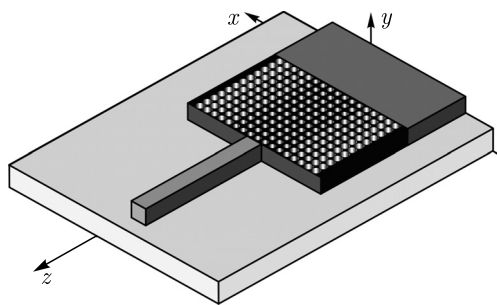


Рис. 2.30. 3D схема двух планарных кремниевых волноводов (темно-серый), сопряженных ФК-линзой (черный) на подложке из кварца (светло-серый)

Если заменить гауссов пучок на участок плоской волны площадью $4,6 \times 0,22 \text{ мкм}^2$, которая освещает торец входного волновода, то эффективность связи (без учета френелевского отражения от торца волновода) возрастает до 67%. Такое увеличение эффективности связи объясняется тем, что плоская волна фокусируется линзой Микаэляна в пятно меньшего диаметра, чем гауссов пучок такого же размера. А фокусное пятно меньшего диаметра эффективней «переходит» в моду узкого волновода.

На рисунке 2.31 показан результат моделирования устройства нанофотоники, показанного на рис. 2.30, при освещении широкого волновода гауссовым пучком с перетяжкой $4,6 \times 0,22 \text{ мкм}^2$.

Из рисунка 2.31, на котором показано мгновенное распределение амплитуды $E_x(x, y, z)$, видно, что свет распространяется внутри волновода и за его границы (в подложку) выходит только малая часть световой энергии. Большая часть из потерянной энергии отражается от границы ФК-линзы и уходит назад в широкий волновод. Видно также, что в узком волноводе потери (уход света в подложку) больше, чем в широком.

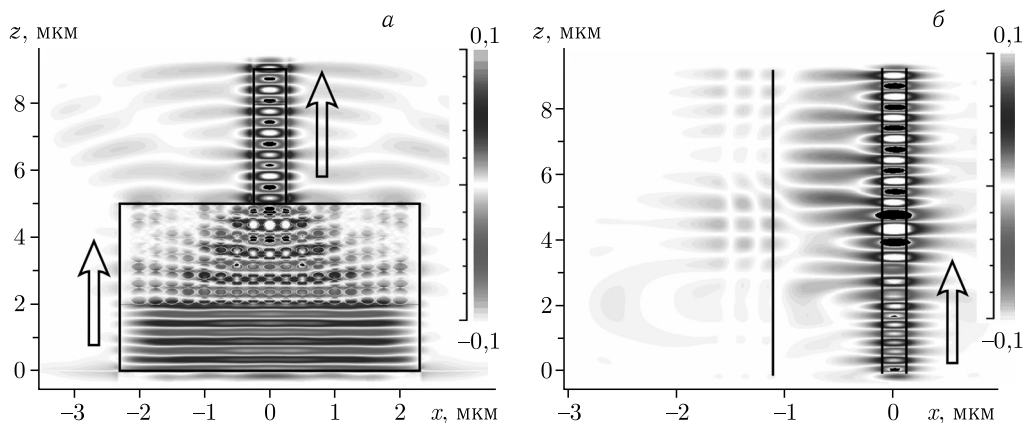


Рис. 2.31. Мгновенное распределение амплитуды $E_x(x, y, z)$ в плоскости ZX (а) и плоскости ZY (б), вертикальная линия (б) показывает границу подложки, стрелками показано направление распространения света

2.3.3. Трехмерное моделирование всего устройства нанофотоники.

На рисунке 2.32 показана 3D-схема всего устройства нанофотоники, которое включает решетку, ФК-линзу Микаэляна и два сопрягаемых планарных волновода. На подложке (три периода зеркала Брэгга) из кремния и кварца расположена тонкая пленка (толщиной 220 нм) кремния шириной $h_2 = 4,6 \text{ мкм}$ в области поверхностной решетки, линзы и широкого волновода и шириной $s = 0,5 \text{ мкм}$ в области выходного узкого волновода. Длина всего устройства 17 мкм. Для ФК-линзы $l_m = 3 \text{ мкм}$, промежуток волновода между решеткой и линзой $l = 4 \text{ мкм}$ (размер этого участка не сильно влияет на эффективность, и его длину можно менять). На устройство (рис. 2.32) под углом 34° в области решетки падает эллиптический гауссов пучок с линейной поляризацией (элек-

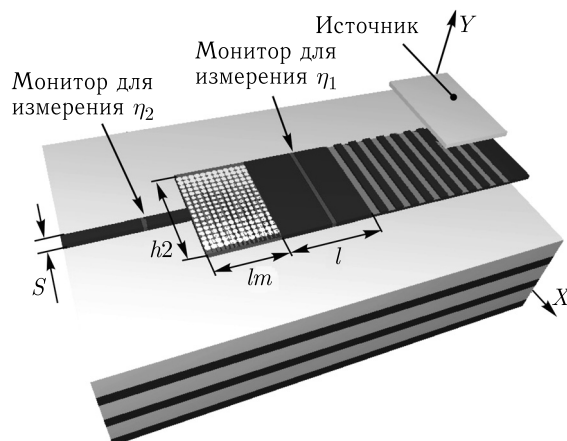


Рис. 2.32. Схема всего устройства нанопотоники, включающего решетку, широкий волновод, ФК-линзу, узкий волновод и подложку — зеркало Брэгга

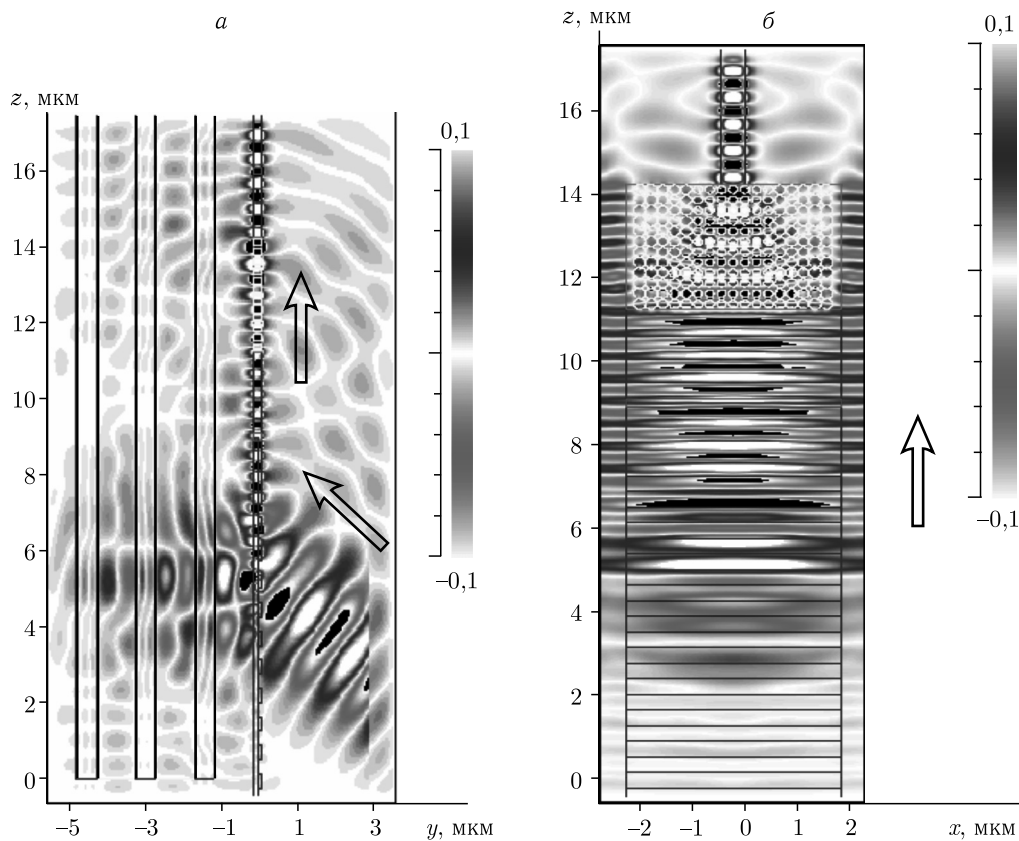


Рис. 2.33. Мгновенное распределение амплитуды напряженности $E_x(x, y, z)$ для всего устройства: в плоскости ZY (а) и плоскости ZX (б), стрелками показано направление распространения света

трический вектор имеет только одну проекцию E_x с площадью перетяжки $3 \times 4,6 \text{ мкм}^2$ (в этом случае эффективность максимальная).

На рисунке 2.33 показано мгновенное распределение амплитуды $E_x(x, y, z)$ в плоскости ZY (а) и плоскости ZX (б).

Из рисунка 2.33 видно, что свет проходит в подложку под решеткой, а под волноводом и линзой почти не рассеивается в подложку.

Эффективность ввода света в волновод решеткой (рассчитанная в широком волноводе после решетки) составила $\eta_1 = 62,5\%$ от полной световой мощности гауссова пучка (в этот раз эффективность дана с учетом и френелевского отражения от решетки), а эффективность всего устройства (рассчитанная на выходе узкого волновода) равна $\eta_2 = 32\%$. Если то же устройство (рис. 2.32) осветить участком плоской линейно-поляризованной волны с площадью сечения $3 \times 4,6 \text{ мкм}^2$, то эффективность увеличивается: $\eta_1 = 78\%$ и $\eta_2 = 52\%$. Заметим для сравнения, что если сфокусировать тот же гауссов пучок на торец широкого волновода устройства на рис. 2.30 (без решетки), то эффективность будет равна всего $\eta = 8\%$.

2.4. Фотонно-кристаллические световоды

Фотонно-кристаллические световоды (ФКС) — это относительно новый класс оптических волокон, использующих свойства фотонных кристаллов [59].

В поперечном сечении ФКС представляют собой кварцевую или стеклянную микроструктуру с периодической или аperiodической системой микро-включений, чаще цилиндрических микроотверстий, ориентированных вдоль оси волокна. Дефект микроструктуры, соответствующий отсутствию одного или нескольких элементов в ее центре, служит сердечником световода, обеспечивая волноводный режим распространения электромагнитного излучения.

ФКС делятся на два основных типа в соответствии с механизмом удержания и направления света. Существуют световоды со сплошным сердечником, или сердечником с более высоким усредненным показателем преломления относительно микроструктурированной (дырчатой) оболочки, которые используют эффект полного внутреннего отражения, так же как и обычные оптические волокна, но в отличие от последних, могут обладать лучшей способностью удерживать свет в сердечнике при его распространении за счет большей локальной разницы показателей преломления в сердечнике и оболочке. Другой тип ФКС для заключения в себе света использует эффект фотонных запрещенных зон (брэгговское отражение), создаваемый микроструктурированной оболочкой, за счет этого свет может удерживаться и распространяться даже в сердечнике с более низким по отношению к оболочке показателем преломления, в том числе и в полой сердечнике. Фотонная запрещенная зона, возникающая в спектре пропускания (зависимость коэффициента пропускания от длины волны) двумерной периодической оболочки световода данного типа, обеспечивает высокий коэффициент отражения для излучения, распространяющегося вдоль полого сердечника, позволяя существенно снизить потери, присущие модам обычных полых световодов со сплошной оболочкой

и быстро растущие [60] с уменьшением диаметра полого сердечника. Среди световодов второго типа выделяется несколько групп.

Световоды с полым сердечником — центральное отверстие, как правило, большего радиуса, окружается «кольцами» микроотверстий.

Волокно Брэгга [61–65] имеет полый сердечник, окруженный оболочкой, образованной чередующимися кольцами с низким и высоким показателями преломления. В работе [66] демонстрируется волокно Брэгга с заполненным (твердым) сердечником, рабочая область которого может быть смещена в видимый диапазон, путем варьирования толщины оболочки из брэгговских отражающих колец.

Твердотельные световоды [67, 68], оболочка которых содержит стержни с высоким показателем преломления, размещенные в основном материале световода с низким показателем преломления.

Кроме того, в обоих типах световодов может варьироваться целый ряд параметров (рис. 2.34), таких как форма микроотверстий (круглые, квадратные, эллиптические) [69], схема локализации микроотверстий (правильные шестиугольная и прямоугольная решетки, неправильные решетки) [70, 71], количество сердечников [72, 73], количество дефектов, образующих сердечник [74, 75], материал, заполняющий микроотверстия [76, 77]. Так, например, в работе [78] полости в оболочке ФКС заполнялись жидкими кристаллами, что породило гибридный механизм распространения света: эффект полного внутреннего отражения и эффект фотонных запрещенных зон действуют соответственно на ортогонально поляризованные моды. О применении ФКС, заполненных жидкими кристаллами, в оптических свичах говорится в работах [79–81].

С созданием ФКС появились новые степени свободы для управления характеристиками световода, позволившие эффективно управлять дисперсией, делать волокна с очень высокой или очень низкой нелинейностью, с большой или малой эффективной площадью моды и т. д.

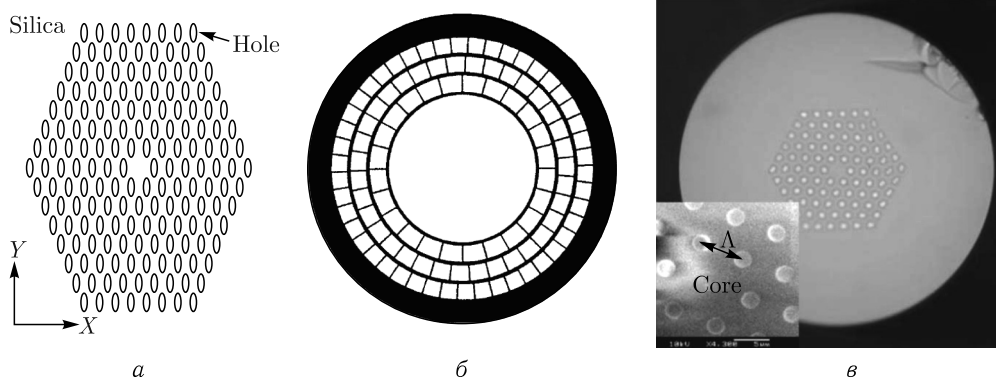


Рис. 2.34. Сечения различных типов ФКС: а) схема сплюснутой шестиугольной решетки с эллиптическими отверстиями [70], б) схема сечения волокна Брэгга с тремя concentрическими цилиндрическими слоями кварца [64], в) оптический микроснимок сечения твердотельного световода, светлые и темные области на снимке соответствуют областям с высоким и низким показателями преломления [68]

Теоретический интерес к ФКС вызван в большей степени фактом наличия в их структуре значительно больших контрастов показателя преломления, чем в обычных слабонаправляющих волокнах, и, как следствие, необходимостью создания специальных работоспособных методов их исследования. Стоит отметить, что, способность ФКС заключать в себе свет, зависит от множества факторов, таких как количество микровключений, их местоположение, соотношение диаметра и расстояния между центрами. Это дает широкое поле деятельности для проектирования световодов с заранее заданными свойствами.

Моды ФКС — это электромагнитные волны, которые способны возбуждаться и распространяться в световоде. Любой пучок излучения, направляемый в световод, будет возбуждать в нем совокупность пространственных мод.

Существует несколько методов, предназначенных для расчета мод ФКС, которые можно условно разделить на три группы: приближенно-аналитические методы или методы декомпозиции, интегральные методы и конечно-разностные методы.

Методы декомпозиции. Основная идея, эксплуатируемая в данной группе методов, — это возможность представления поля моды световода в форме разложения по некоторому базису. В результате чего отыскание мод сводится к задаче на собственные значения и собственные вектора некоторой матрицы.

Разложение по плоским волнам [82] с периодическими граничными условиями дает решение для бесконечного, периодически повторяющегося в поперечной плоскости световода, что делает принципиально невозможным получение данным методом мнимой части константы распространения, соответствующей потерям при распространении вытекающей или несобственной моды.

Метод разложения по модам Гаусса–Эрмита [83, 84] оказывается более пригодным для описания сложной структуры сечения ФКС, нежели метод разложения по плоским волнам, однако данный метод ограничен применением только к ФКС с отверстиями в оболочке, расположенными в узлах правильной гексагональной решетки, так как расстояние между центрами любых двух соседних отверстий должно быть фиксировано, и это значение входит в выражение для базисных функций.

Обобщением метода мультиполя, применяемого обычно для световодов с несколькими сердечниками, на случай ФКС можно считать работу [85]. Ключевым аспектом предлагаемого авторами метода мультиполя является то, что он с выгодой использует факт округлости включений и свойства симметрии, присущие многим ФКС, в связи с регулярностью расположения микроотверстий [86]. Сильная сторона метода также состоит в том, что он позволяет вычислять как действительную, так и мнимую части константы распространения. В отличие от подхода мультиполя для световодов с несколькими сердечниками [87], использующего технику поточечной стыковки поля на границах включений, метод [85] обрабатывает граничные условия путем разложения компонент поля по ортонормальному базису. Применение метода может быть расширено также на световоды с произвольной формой включений, в соответствии со стратегией, предложенной в работе [88].

Характерной чертой метода согласованных синусоидальных мод [89] является техника разбиения неоднородного сечения волноводной структуры

на прямоугольные области с постоянным значением показателя преломления среды. В каждой из таких областей поле моды аппроксимируется суперпозицией факторизованных гармонических функций. А константы распространения мод находятся из условия минимизации невязки представлений поля на границах соседних областей, для чего используется интегральный подход. Метод согласованных синусоидальных мод использует процедуры поиска корней уравнений, и потому проигрывает по скорости методам, основанным исключительно на отыскании собственных чисел матриц.

Интегральные методы. Интегральные методы являются сеточными, то есть, в отличие от методов предыдущей группы, в данном случае решением задачи отыскания поля моды является сеточная функция, а не заданная аналитически.

Среди этой группы можно выделить метод конечных элементов [90, 91]. Он представляет собой мощный инструмент векторного анализа, способный учитывать все особенности геометрии микроотверстий и расположение их в структуре сечения. Достаточно быстрый и гибкий, он часто используется для моделирования свойств ФКС. Среди недостатков метода конечных элементов можно назвать требовательность к ресурсам памяти, так как для описания структуры сечения ФКС требуется подробная дискретизация и большое количество переменных, а также необходимость вмешательства человека в работу алгоритма для лучшего определения граничных условий (Perfectly matched layer) и сетки дискретизации.

Метод граничных элементов [92], где сечение разбивается на однородные области, а задача на собственные значения получается в результате применения теоремы Грина, отличается меньшей требовательностью к ресурсам памяти. Однако существенным недостатком является возможность возникновения ложных решений.

В методе функции Грина [93] задача отыскания констант распространения мод также сводится к задаче на собственные числа матрицы, для решения которой разработан специальный быстрый алгоритм. Этот метод работоспособен в случае сложных геометрических форм микроотверстий, хотя и с меньшей скоростью сходимости, чем в случае круглых отверстий.

Конечно-разностные методы. Конечно-разностные методы так же, как и методы интегральные, дают сеточное решение.

Метод конечных разностей широко используется для решения разного рода уравнений. Благодаря простоте реализации, этот метод стал удобным инструментом для расчета мод оптических световодов, особенно тех, для которых не существует аналитического решения, например, таких как ФКС.

Наличие больших контрастов показателя преломления в структуре сечения ФКС требует использования полностью векторного подхода при расчете мод, вместо часто используемого для слабонаправляющих световодов скалярного. Однако, как было продемонстрировано в работе [94], скалярный конечно-разностный метод может использоваться для получения, как минимум, качественной оценки распределения мод ФКС, в том числе тех, механизм распространения света в которых основан на эффекте фотонных запрещенных зон.

Для более точного анализа были предложены векторные конечно-разностные схемы [95]. Дискретизации подвергаются дифференциальные операторы и функции входящие в уравнение Гельмгольца или волновые уравнения. В работе [96] представлен конечно-разностный пространственно-временной подход (FDTD-метод) расчета мод ФКС с использованием сдвинутых сеток (ячеек Йи). Усовершенствованному конечно-разностному пространственно-временному методу, учитывающему дисперсию материала, посвящена публикация [97].

Результатом применения специальных конечно-разностных схем к нестационарным волновым уравнениям или уравнениям Максвелла является семейство методов распространения пучка [98–100]. Суть методов состоит в моделировании распространения когерентного пучка света вдоль световода, в результате чего получают моды данной структуры, как бы апостериорно. С помощью метода удобно исследовать энергетические потери при прохождении излучения по световоду, хотя это может быть и затруднительно в связи с проблемой сходимости метода.

В этом разделе подробно рассматривается приближенно-аналитический метод расчета мод световодов: метод согласованных синусоидальных мод. Базовая идея метода согласованных синусоидальных мод (ССМ-метода), также известного как техника поперечного резонанса [101, 102], была впервые сформулирована в работе [103]. Последующее развитие метод получил в работе [104], где его применяли для расчета потерь излучения за счет вытекающих мод в ступенчатых световодах. Затем в работах [99, 105] был введен описательный термин «согласование синусоидальных мод» и дана точная математическая формулировка. ССМ-метод был модифицирован [106] с помощью итеративного метода Крылова [107] на наиболее вычислительно сложном этапе решения нелинейной задачи на собственные значения матрицы большой размерности, к которой сводится задача отыскания констант распространения мод. ССМ-метод может применяться для расчета как скалярных, так и векторных мод [108] обычных круглых волокон [109] и ФКС [110].

2.4.1. Расчет мод фотонно-кристаллических световодов методом согласованных синусоидальных мод (ССМ). Метод согласованных синусоидальных мод [89, 105] выгодно отличается от множества других подходов численного исследования однородных в продольном направлении световодов свойством аналитического представления поля, получаемого в качестве результата.

ССМ-метод основан на представлении решения для пространственной моды в виде суперпозиции локальных синусоидальных мод, которые являются собственными модами однородных, с постоянным показателем преломления, прямоугольных частей световода с неоднородным сечением.

Метод согласованных синусоидальных мод в скалярном случае. Сформулируем задачу отыскания собственных мод диэлектрического световода однородного в продольном направлении и неоднородного в поперечном сечении, окруженного идеальным проводником, так называемым «электрические стенки», или идеальным магнитным материалом — «магнитные стенки».

Однородные в продольном направлении световоды имеют постоянное по длине распределение показателя преломления материала в сечении. Цилиндрическая симметрия световода позволяет осуществить разделение переменных и представить поле моды в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_j(x, y, z, t) &= \mathbf{E}_j(x, y) \exp(-ik_{zj}z) \exp(i\omega t), \\ \mathbf{H}_j(x, y, z, t) &= \mathbf{H}_j(x, y) \exp(-ik_{zj}z) \exp(i\omega t),\end{aligned}\quad (2.30)$$

где $\mathbf{E}_j(x, y, z, t)$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{H}_j(x, y, z, t)$ — напряженность магнитного поля; k_{zj} — константа распространения, собственное значение j -й моды, или проекция на продольную ось z волнового вектора \bar{k}_j ; ω — частота излучения.

Константы распространения различных мод различны.

Пространственную составляющую поля j -й моды можно разложить на поперечную и продольную составляющие, которые обозначим индексами t и z , соответственно. В результате имеем:

$$\mathbf{E}_j(x, y, z) = \mathbf{E}_j(x, y) \exp(ik_{zj}z) = [\mathbf{e}_{tj}(x, y) + e_{zj}(x, y)\mathbf{z}] \exp(ik_{zj}z), \quad (2.31a)$$

$$\mathbf{H}_j(x, y, z) = \mathbf{H}_j(x, y) \exp(ik_{zj}z) = [\mathbf{h}_{tj}(x, y) + h_{zj}(x, y)\mathbf{z}] \exp(ik_{zj}z), \quad (2.31b)$$

где z — единичный вектор, параллельный оси световода.

Моды, продольная составляющая магнитного вектора которых равна нулю, называются поперечно-магнитными (ТМ), а те моды, для которых продольная составляющая электрического вектора равна нулю, — поперечно-электрическими (ТЕ). В общем случае ТЕ- и ТМ-моды не являются модами оптического световода. Моды оптических световодов в общем случае гибридные и содержат продольные составляющие как электрического, так и магнитного векторов. Они называются НЕ- или ЕН- модами.

Начнем рассмотрение со скалярного приближения, согласно которому распространение света описывается скалярным уравнением Гельмгольца:

$$\nabla^2 E(x, y, z) + k_0^2 \varepsilon E(x, y, z) = 0, \quad (2.32)$$

здесь $E(x, y, z)$ — комплексная амплитуда света, которую можно ассоциировать с любой составляющей электрического или магнитного векторов поля; $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, где λ_0 — длина волны в вакууме; ε — диэлектрическая проницаемость среды.

Решением уравнения (2.32) для прямоугольной области с постоянным значением показателя преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ является функция

$$E = u(x)\varphi(y)e^{-ik_z z}. \quad (2.33)$$

Подставим (2.33) в уравнение (2.32):

$$\begin{aligned}\nabla^2(u(x)\varphi(y)e^{-ik_z z}) + k_0^2 \varepsilon u(x)\varphi(y)e^{-ik_z z} &= 0, \\ \nabla^2(u(x)\varphi(y))e^{-ik_z z} - k_z^2 u(x)\varphi(y)e^{-ik_z z} + k_0^2 \varepsilon u(x)\varphi(y)e^{-ik_z z} &= 0, \\ \nabla^2(u(x)\varphi(y)) - k_z^2 u(x)\varphi(y) + k_0^2 \varepsilon u(x)\varphi(y) &= 0, \\ \ddot{u}(x)\varphi(y) + \ddot{\varphi}(y)u(x) + (k_0^2 \varepsilon - k_z^2)u(x)\varphi(y) &= 0.\end{aligned}$$

Будем опускать аргументы x и y у функций u и φ , чтобы записи были более короткими. Итак, мы получили

$$\ddot{u}\varphi + \ddot{\varphi}u + (k_0^2 \varepsilon - k_z^2)u\varphi = 0, \quad (2.34)$$

здесь и далее точками над обозначением функции обозначаются производные.

Проведем разделение переменных, поделим (2.34) на $u\varphi$:

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + \frac{\ddot{u}}{u} + (k_0^2 \varepsilon - k_z^2) = 0 \quad (2.35)$$

или

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} + (k_0^2 \varepsilon - k_z^2) = -\frac{\ddot{u}}{u}. \quad (2.36)$$

Положим

$$\frac{\ddot{u}}{u} = -k_x^2. \quad (2.37)$$

Уравнение (2.36) можно разделить на два уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + (k_0^2 \varepsilon - k_z^2 - k_x^2)\varphi = 0, \\ \ddot{u} + k_x^2 u = 0. \end{cases} \quad (2.38)$$

Обозначим

$$k_z^2 + k_x^2 = k_k^2, \quad (2.39)$$

тогда

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + (k_0^2 \varepsilon - k_k^2)\varphi = 0, \\ \ddot{u} + (k_k^2 - k_z^2)u = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Введем еще одно обозначение

$$k_0^2 \varepsilon - k_k^2 = k_y^2, \quad (2.41)$$

т. е. теперь

$$k_0^2 \varepsilon = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (2.42)$$

То есть k_x, k_y, k_z — проекции на соответствующие оси координат волнового вектора \mathbf{k} , модуль которого равен $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_0^2 \varepsilon}$.

Если сечение световода может быть разбито на N строк и M столбцов так, чтобы ни одна из прямоугольных ячеек этого разбиения не содержала неоднородностей (рис. 2.35), то в каждой из этих ячеек решение можно представить в достаточно простой форме.

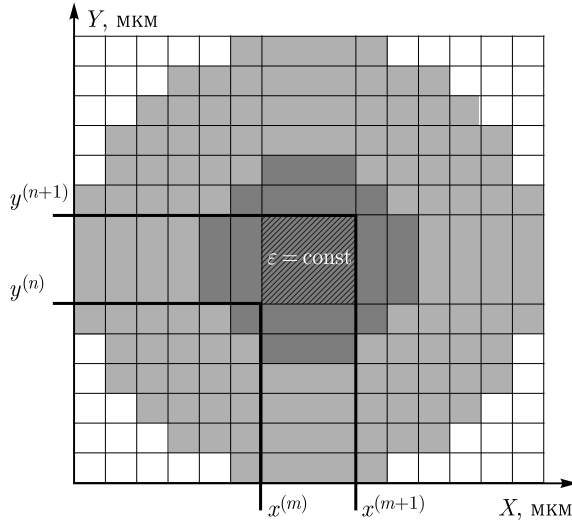


Рис. 2.35. Схема поперечного сечения световода, темно-серым цветом показаны области со значением показателя преломления $n_{co} = 1,47$, светло-серым — с $n_{cl} = 1,463$, белым — с $n_v = 1$

Каждой ячейке, находящейся на пересечении n -й строки и m -го столбца можно поставить в соответствие некоторое значение диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{(m,n)}$, постоянное для данной ячейки. Пусть оси координат располагаются, как показано на рисунке 2.35. Тогда толщина n -й строки

$$d_y^{(n)} = y^{(n+1)} - y^{(n)}, \quad (2.43)$$

где $y^{(n)}$ — координата плоскости, разделяющей строки $n - 1$ и n . Аналогично, толщина m -го столбца

$$d_x^{(m)} = x^{(m+1)} - x^{(m)}, \quad (2.44)$$

где $x^{(m)}$ — координата плоскости, разделяющей столбцы $m - 1$ и m .

Для однородного прямоугольного фрагмента (ячейки) сечения (рис. 2.35), где значение диэлектрической проницаемости постоянно $\varepsilon(x, y) = \varepsilon^{(m,n)} = \text{const}$, первое уравнение системы (2.40) примет вид

$$\ddot{\varphi}(y) + (k_0^2 \varepsilon^{(m,n)} - k_k^2) \varphi(y) = 0, \quad (2.45)$$

а его решение можно представить как

$$\varphi(y) = \varphi_s^{(n,l)} \cos[k_y^{(n)}(y - y^{(n)})] + \frac{\varphi_a^{(n,l)}}{k_y^{(n)}} \sin[k_y^{(n)}(y - y^{(n)})], \quad (2.46)$$

где

$$k_y^{(n)} = \sqrt{\varepsilon^{(m,n)} k_0^2 - k_k^2}; \quad (2.47)$$

$$\varphi_s^{(n,l)} = \varphi(y^{(n)} + 0) \quad (2.48a)$$

— нижнее или левое значение функции $\varphi(y)$ в данном прямоугольном фрагменте;

$$\varphi_a^{(n,l)} = \dot{\varphi}(y^{(n)} + 0) \quad (2.48б)$$

— нижнее или левое значение производной $\dot{\varphi}(y)$ в той же ячейке сечения.

Аналогично (2.48а) и (2.48б) можно определить правые значения $\varphi(y)$ и ее производной $\dot{\varphi}(y)$:

$$\varphi_s^{(r)} = \varphi(y^{(n+1)} - 0), \quad (2.48в)$$

$$\varphi_a^{(r)} = \dot{\varphi}(y^{(n+1)} - 0). \quad (2.48г)$$

Используя эти значения, можно предложить альтернативную форму решения (2.46) и его производной, которые вычислительно более удобны в случае, когда величина $k_y^{(n)}$ чисто мнимая:

$$\varphi(y) = (\varphi_s^{(n,l)} \sin[k_y^{(n)}(y^{(n+1)} - y)] + \varphi_s^{(n,r)} \sin[k_y^{(n)}(y - y^{(n)})]) / \sin(k_y^{(n)} d_y^{(n)}), \quad (2.49а)$$

$$\dot{\varphi}(y) = (\varphi_a^{(n,l)} \sin[k_y^{(n)}(y^{(n+1)} - y)] + \varphi_a^{(n,r)} \sin[k_y^{(n)}(y - y^{(n)})]) / \sin(k_y^{(n)} d_y^{(n)}). \quad (2.49б)$$

Иллюстрация расположения $\varphi_s^{(n,l)}$, $\varphi_a^{(n,l)}$, $\varphi_s^{(n,r)}$, $\varphi_a^{(n,r)}$ приводится на рис. 2.36.

Второе уравнение системы (2.40) в однородной области примет вид

$$\ddot{u}_k^{(m)}(x) + (k_k^{(m)2} - k_z^2)u_k^{(m)}(x) = 0, \quad (2.50)$$

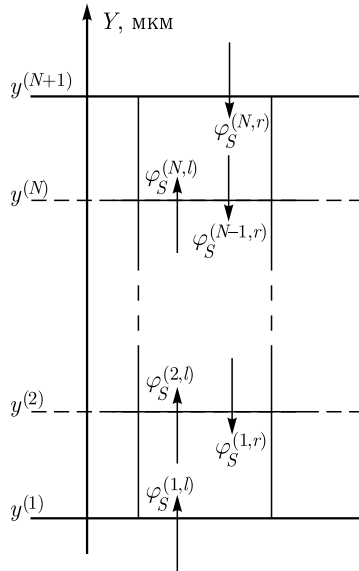


Рис. 2.36. Схема обозначения полей на границах разбиения сечения световода

а его решение, по аналогии с (2.46), имеет вид:

$$u_k^{(m)}(x) = u_{sk}^{(m,l)} \cos[k_{xk}^{(m)}(x - x^{(m)})] + \frac{u_{ak}^{(m,l)}}{k_{xk}^{(m)}} \sin[k_{xk}^{(m)}(x - x^{(m)})], \quad (2.51)$$

где

$$k_{xk}^{(m)} = \sqrt{k_k^{(m)2} - k_z^2}, \quad (2.52)$$

$$u_{sk}^{(m,l)} = u_k^{(m)}(x^{(m)} + 0), \quad (2.53a)$$

$$u_{ak}^{(m,l)} = \dot{u}_k^{(m)}(x^{(m)} + 0). \quad (2.53б)$$

Аналогичным образом вводятся обозначения:

$$u_{sk}^{(m,r)} = u_k^{(m)}(x^{(m+1)} - 0), \quad (2.53в)$$

$$u_{ak}^{(m,r)} = \dot{u}_k^{(m)}(x^{(m+1)} - 0). \quad (2.53г)$$

Наличие индекса k у функции $u(x)$ в выражениях (2.50)–(2.53) поясняется далее.

Таким образом, в однородной прямоугольной ячейке уравнению Гельмгольца удовлетворяет произведение двух гармонических функций.

В соответствии со скалярным приближением моды заданной световодной структуры являются решениями уравнения Гельмгольца (2.32) в области ее сечения. Пусть справедливы сделанные ранее предположения относительно возможности разбиения сечения световода на конечное число прямоугольных областей с постоянным значением показателя преломления среды, т.е. мы рассматриваем световод с кусочно-постоянным заполнением поперечного сечения. На краях сечения подразумевается наличие электрических или магнитных стенок, обеспечивающих равенство нулю функции поля или ее производной при $x = 0$, $y = 0$, $x = x^{(M+1)}$, $y = y^{(N+1)}$.

В скалярном приближении функцию поля в m -м столбце можно представить в виде

$$\xi^{(m)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(m)}(x) \varphi_k^{(m)}(y), \quad (2.54)$$

здесь опущен множитель $\exp(-ik_z z)$. Каждая из множества функций $u_k^{(m)}(x)$ удовлетворяет второму, а каждая из $\varphi_k^{(m)}(y)$ — первому уравнению системы (2.40) в столбце m , т.е. для $x^{(m)} \leq x < x^{(m+1)}$ и $y^{(1)} \leq y < y^{(N+1)}$, причем в данной области все эти функции являются непрерывными вместе с первыми производными. Будем называть $u_k^{(m)}(x)$ и $\varphi_k^{(m)}(y)$ локальными синусоидальными модами, индекс k определяет номер локальной моды и напрямую связан с введенной соотношением (2.39) величиной k_k , их взаимосвязь будет показана далее.

Учтем предложенную форму решения уравнения (2.45) в виде синусоидальной моды (2.46). Таким образом, чтобы решить (2.45) нужно определить

значение k_k и $2N - 2$ констант $\varphi_s^{(n,l)}$ и $\varphi_a^{(n,l)}$, так чтобы функция $\varphi(y)$ удовлетворяла (2.45) и граничным условиям,

$$\begin{cases} \varphi(y^{(1)}) = 0, \\ \varphi(y^{(N+1)}) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\varphi}(y^{(1)}) = 0, \\ \dot{\varphi}(y^{(N+1)}) = 0, \end{cases}$$

соответственно, для электрических или магнитных стенок.

Требование непрерывности решения (2.46) и его производной приводит к следующим соотношениям:

$$\varphi_s^{(n,r)} = \varphi_s^{(n+1,l)}, \quad (2.55a)$$

$$\varphi_a^{(n,r)} = \varphi_a^{(n+1,l)}. \quad (2.55б)$$

Кроме того, для $\varphi_s^{(n,l)}$, $\varphi_a^{(n,l)}$, $\varphi_s^{(n,r)}$, $\varphi_a^{(n,r)}$ справедливы равенства:

$$\varphi_s^{(n,r)} = \varphi_s^{(n,l)} \cos[k_y^{(n)} d_y^{(n)}] + \frac{\varphi_a^{(n,l)}}{k_y^{(n)}} \sin[k_y^{(n)} d_y^{(n)}], \quad (2.56a)$$

$$\varphi_a^{(n,r)} = \varphi_a^{(n,l)} \cos[k_y^{(n)} d_y^{(n)}] - \varphi_s^{(n,l)} k_y^{(n)} \sin[k_y^{(n)} d_y^{(n)}], \quad (2.56б)$$

$$\varphi_s^{(n,l)} = \varphi_s^{(n,r)} \cos[k_y^{(n)} d^{(n)}] - \frac{\varphi_a^{(n,r)}}{k_y^{(n)}} \sin[k_y^{(n)} d^{(n)}], \quad (2.57a)$$

$$\varphi_a^{(n,l)} = \varphi_a^{(n,r)} \cos[k_y^{(n)} d^{(n)}] + \varphi_s^{(n,r)} k_y^{(n)} \sin[k_y^{(n)} d^{(n)}]. \quad (2.57б)$$

Введем в рассмотрение матрицы, детерминант которых равен единице:

$$\mathbf{P}^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos[k_y^{(i)} d^{(i)}] & \sin[k_y^{(i)} d^{(i)}]/k_y^{(i)} \\ -\sin[k_y^{(i)} d^{(i)}]k_y^{(i)} & \cos[k_y^{(i)} d^{(i)}] \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{Q}^{(i)} = \begin{bmatrix} \cos[k_y^{(i)} d^{(i)}] & -\sin[k_y^{(i)} d^{(i)}]/k_y^{(i)} \\ \sin[k_y^{(i)} d^{(i)}]k_y^{(i)} & \cos[k_y^{(i)} d^{(i)}] \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

Очевидна справедливость равенств $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(n,r)} \\ \varphi_a^{(n,r)} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{(n)} \begin{bmatrix} \varphi_s^{(n,l)} \\ \varphi_a^{(n,l)} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(n,l)} \\ \varphi_a^{(n,l)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{(n)} \begin{bmatrix} \varphi_s^{(n,r)} \\ \varphi_a^{(n,r)} \end{bmatrix}$, которые равносильны (2.56) и (2.57). Используя матрицы

$\mathbf{P}^{(i)}$ и $\mathbf{Q}^{(i)}$ можно легко выражать значения $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(j,r)} \\ \varphi_a^{(j,r)} \end{bmatrix}$ через $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(i,l)} \\ \varphi_a^{(i,l)} \end{bmatrix}$, $i \leq j$,

и значения $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(j,l)} \\ \varphi_a^{(j,l)} \end{bmatrix}$ через $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(i,r)} \\ \varphi_a^{(i,r)} \end{bmatrix}$, $i \geq j$. Так, например,

$$\begin{bmatrix} \varphi_s^{(n',r)} \\ \varphi_a^{(n',r)} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{(n')} \mathbf{P}^{(n'-1)} \dots \mathbf{P}^1 \begin{bmatrix} \varphi_s^{(1,l)} \\ \varphi_a^{(1,l)} \end{bmatrix}, \quad (2.60)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_s^{(n'+1,l)} \\ \varphi_a^{(n'+1,l)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{(n'+1)} \mathbf{Q}^{(n'+2)} \dots \mathbf{Q}^{(N)} \begin{bmatrix} \varphi_s^{(N,r)} \\ \varphi_a^{(N,r)} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Для численного нахождения k_k , точнее квадрата этой величины, поскольку только квадрат фигурирует в приведенных выше формулах, воспользуемся следующим методом. Определим функцию, исходя из условий (2.62) на границе областей:

$$\Delta^{(n')}(k_k^2) = \varphi_s^{(n',r)} \varphi_a^{(n'+1,l)} - \varphi_a^{(n',r)} \varphi_s^{(n'+1,l)}, \quad (2.62)$$

где $n' \in (1, N)$, значения $\varphi_s^{(n',r)}$, $\varphi_a^{(n',r)}$ и $\varphi_s^{(n'+1,l)}$, $\varphi_a^{(n'+1,l)}$ вычисляются с использованием (2.60) и (2.61) и потому зависят от k_k^2 . Нули функции $\Delta^{(n')}(k_k^2)$, соответствующие стыковке левых и правых значений локальной моды на границе $n' + 1$ и n' строк разбиения, и есть искомые значения. Поиск нулей (2.62) равносильно решению характеристического уравнения

$$\varphi_s^{(n',r)} \varphi_a^{(n'+1,l)} - \varphi_a^{(n',r)} \varphi_s^{(n'+1,l)} = 0, \quad (2.63)$$

причем n' может быть произвольным числом из интервала $(1, N)$.

Нетрудно убедиться, что зависимость решения (2.63) от ненулевых значений $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(1,l)} \\ \varphi_a^{(1,l)} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(N,r)} \\ \varphi_a^{(N,r)} \end{bmatrix}$ отсутствует, поэтому, решая (2.63), в случае

электрических стенок можно считать $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(1,l)} \\ \varphi_a^{(1,l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(N,r)} \\ \varphi_a^{(N,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

а в случае магнитных — $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(1,l)} \\ \varphi_a^{(1,l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \varphi_s^{(N,r)} \\ \varphi_a^{(N,r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Различных значений k_k^2 , удовлетворяющих (2.63), бесконечно много, но все они находятся на полуинтервале $(-\infty, k_{\max}^2]$, где их можно отсортировать по убыванию. Каждое из значений k_k^2 определяет локальную моду $\varphi_k^{(m)}(y)$ в m -м столбце сечения световода. Точность построения поля по формуле (2.64) зависит от количества используемых локальных мод. Но как бы много мы их ни взяли (как бы много корней уравнения (2.63) ни нашли), это всегда будет некоторое конечное число K .

Поиск корней (2.63) осложняется тем, что их распределение внутри полуинтервала $(-\infty, k_{\max}^2]$ носит неравномерный характер. Для некоторых структур столбцов (особенно с многочисленным чередованием фрагментов с различными показателями преломления) два близких корня характеристического уравнения (2.63) могут отличаться на величину порядка 10^{-11} . Про-

пуск корней и, следовательно, соответствующих локальных мод в разложении (2.64) может привести к существенным искажениям результата.

Избежать пропуска корней и сократить количество вычислений позволяет следующий простой алгоритм адаптивного выбора шага при локализации корней характеристического уравнения. Задается начальное (произвольное) значение шага L . Затем на действительной оси, начиная с k_{\max}^2 , в направлении убывания последовательно рассматриваются отрезки длиной L . На каждом из них в P_1 точках вычисляются значения левой части уравнения (2.63). Для совокупности полученных величин определяются статистические характеристики, например дисперсия и математическое ожидание. Далее на том же отрезке вычисляются значения левой части уравнения еще в P_2 точках, и для $P_1 + P_2$ значений определяются те же статистические характеристики. Если относительное изменение дисперсии и математического ожидания не превосходит некоторого заранее определенного порога, производится локализация корней по найденным $P_1 + P_2$ значениям, иначе исходный отрезок делится на части, для каждой из которых все операции повторяются. Данная рекурсивная процедура позволяет повысить точность там, где это необходимо.

Когда все K значений k_k^2 найдены, нас интересуют константы $\varphi_s^{(n,l)}$, $\varphi_a^{(n,l)}$, $\varphi_s^{(n,r)}$, $\varphi_a^{(n,r)}$, которые можно найти из условия нормировки функции $\varphi(y)$ на единицу:

$$\frac{1}{y^{(N+1)} - y^{(1)}} \int_{y^{(1)}}^{y^{(N+1)}} \varphi^2(y) dy = 1. \quad (2.64)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I &= \int_{y^{(1)}}^{y^{(N+1)}} \varphi^2(y) dy = \sum_{n=1}^N \int_{y^{(n)}}^{y^{(n+1)}} \varphi^2(y) dy = \\ &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2(k_y^{(n)})^2} (\varphi_s^{(n,l)} \varphi_a^{(n,l)} - \varphi_s^{(n,r)} \varphi_a^{(n,r)}) + \frac{d^{(n)}}{2} ((\varphi_s^{(n,l)})^2 + (\frac{\varphi_a^{(n,l)}}{k_y^{(n)}})^2) \right]. \end{aligned}$$

Когда k_k^2 известны, значение $k_y^{(n)}$ для каждой строки разбиения может быть рассчитано по формуле (2.47). Принимая во внимание соотношения

$$\begin{bmatrix} \varphi_s^{(n',r)} \\ \varphi_a^{(n',r)} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{(n')} \mathbf{P}^{(n'-1)} \dots \mathbf{P}^1 \begin{bmatrix} \varphi_s^{(1,l)} \\ \varphi_a^{(1,l)} \end{bmatrix}, n' = \overline{1, N}, \quad (2.65)$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_s^{(n,l)} \\ \varphi_a^{(n,l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_s^{(n-1,r)} \\ \varphi_a^{(n-1,r)} \end{bmatrix}, n = \overline{2, N}, \quad (2.66)$$

значение интеграла I можно считать функцией от $\varphi_s^{(1,l)}$ или $\varphi_a^{(1,l)}$ в зависимости от типа граничных условий. Тогда уравнение (2.64) решается стандартными численными методами, например методом Ньютона, и имеет ровно два

действительных корня, отличающихся только знаком, любой из них может быть выбран в качестве значения $\varphi_s^{(1,l)}$ (или $\varphi_a^{(1,l)}$); остальные константы рассчитываются с использованием (2.65), (2.66) и найденного значения.

Действуя по вышеописанному алгоритму, для каждого столбца сечения световода можно найти K значений k_k^2 и для каждого из них сконструировать функцию $\varphi(y)$, которая будет удовлетворять (2.45) при данном k_k^2 .

Когда найдены локальные y -моды, для построения поля (2.54) недостает x -мод вида (2.51). Функция $u_k^{(m)}(x)$ является k -й модой в столбце m , она соответствует $k_k^{(m)}$ также как $\varphi_k^{(m)}(y)$.

Разница между уравнениями (2.45) и (2.50) состоит в том, что решением (2.50) является не одна непрерывная функция вида (2.51), а набор из M определенных и непрерывных на соответствующих интервалах функций. Формула (2.51) объединяет их в одну, но разрывную функцию, поэтому для $u_{sk}^{(m,l)}, u_{sk}^{(m,r)}$ и $u_{ak}^{(m,l)}, u_{ak}^{(m,r)}$ соотношения аналогичные (2.55) не выполняются, тем не менее, ввиду требования непрерывности поля (2.54) на границе столбцов разбиения, справедливы равенства

$$u_{ak}^{(m,l)} = -\frac{k_{xk}^{(m)} u_{sk}^{(m,l)}}{\operatorname{tg}(k_{kx}^{(m)} d_x^{(m)})} + \frac{k_{xk}^{(m)} u_{sk}^{(m,r)}}{\sin(k_{kx}^{(m)} d_x^{(m)})}, \quad (2.67a)$$

$$u_{ak}^{(m,r)} = -\frac{k_{xk}^{(m)} u_{sk}^{(m,l)}}{\sin(k_{kx}^{(m)} d_x^{(m)})} + \frac{k_{xk}^{(m)} u_{sk}^{(m,r)}}{\operatorname{tg}(k_{kx}^{(m)} d_x^{(m)})}. \quad (2.67b)$$

Поскольку соотношения (2.67) выполняются для всех $k = \overline{1, K}$, удобно использовать матричную запись. Введем диагональные матрицы $\mathbf{T}^{(m)}$ и $\mathbf{S}^{(m)}$ размерностью $K \times K$ с диагональными элементами

$$T_{kk}^{(m)} = k_{xk}^{(m)} / \operatorname{tg}(k_{kx}^{(m)} d_x^{(m)}), \quad (2.68a)$$

$$S_{kk}^{(m)} = k_{xk}^{(m)} / \sin(k_{kx}^{(m)} d_x^{(m)}). \quad (2.68b)$$

Теперь уравнения (2.67) примут вид

$$\mathbf{U}_a^{(m,l)} = -\mathbf{T}^{(m)} \mathbf{U}_s^{(m,l)} + \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{U}_s^{(m,r)}, \quad (2.69a)$$

$$\mathbf{U}_a^{(m,r)} = -\mathbf{S}^{(m)} \mathbf{U}_s^{(m,l)} + \mathbf{T}^{(m)} \mathbf{U}_s^{(m,r)}. \quad (2.69b)$$

Здесь

$$\mathbf{U}_a^{(m,l)} = [u_{a1}^{(m,l)} \quad u_{a2}^{(m,l)} \quad \dots \quad u_{aK}^{(m,l)}]^T,$$

$$\mathbf{U}_a^{(m,r)} = [u_{a1}^{(m,r)} \quad u_{a2}^{(m,r)} \quad \dots \quad u_{aK}^{(m,r)}]^T,$$

$$\mathbf{U}_s^{(m,l)} = [u_{s1}^{(m,l)} \quad u_{s2}^{(m,l)} \quad \dots \quad u_{sK}^{(m,l)}]^T,$$

$$\mathbf{U}_s^{(m,r)} = [u_{s1}^{(m,r)} \quad u_{s2}^{(m,r)} \quad \dots \quad u_{sK}^{(m,r)}]^T.$$

Для построения соотношений, связывающих левые и правые значения x -мод из соседних столбцов сечения, рассмотрим интеграл перекрытия

$$\langle f_1 | f_2 \rangle = \frac{1}{y^{(N+1)} - y^{(1)}} \int_{y^{(1)}}^{y^{(N+1)}} f_1(y) f_2(y) dy \quad (2.70)$$

и составим матрицу из элементов вида (2.70), где в качестве f_1 и f_2 будут использованы ранее найденные моды $\varphi_k^{(m)}(y)$:

$$\begin{aligned} O_{pq}^{(m,m')} = \langle \varphi_q^m | \varphi_p^{m'} \rangle = & \sum_{n=1}^N (\varphi_{sq}^{(n,r)(m)} \varphi_{ap}^{(n,r)(m')} - \varphi_{aq}^{(n,r)(m)} \varphi_{sp}^{(n,r)(m')} - \\ & - \varphi_{sq}^{(n,l)(m)} \varphi_{ap}^{(n,l)(m')} + \varphi_{aq}^{(n,l)(m)} \varphi_{sp}^{(n,l)(m')}) / (k_{kq}^{(m)2} - k_{kp}^{(m')2}) = \\ & \frac{\sum_{n=1}^N (\varphi_{sq}^{(n,r)(m)} \varphi_{ap}^{(n,r)(m')} - \varphi_{aq}^{(n,r)(m)} \varphi_{sp}^{(n,r)(m')} - \varphi_{sq}^{(n,l)(m)} \varphi_{ap}^{(n,l)(m')} + \varphi_{aq}^{(n,l)(m)} \varphi_{sp}^{(n,l)(m')})}{(k_{kq}^{(m)} + k_{kp}^{(m')})(k_{kq}^{(m)} - k_{kp}^{(m')})}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Получится квадратная матрица $\mathbf{O}^{(m,m')}$ размером $K \times K$, обладающая свойством

$$(\mathbf{O}^{(m,m')})^T = \mathbf{O}^{(m',m)}, \quad (2.72)$$

где символ «Т» — означает транспонирование.

Кроме того, так как ортогональные функции $\varphi_k^{(m)}(y)$ нормированы, то каждая из матриц $\mathbf{O}^{(m,m')}$ является унитарной:

$$\mathbf{O}^{(m,m')} \mathbf{O}^{(m',m)} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

В случае конечных значений размерности $K \times K$ соотношение (2.73) выполняется достаточно точно только для соседних столбцов, т.е. если $m' = m + 1$ или $m' = m - 1$. Из ортонормированности функций $\varphi_k^{(m)}(y)$ и требования непрерывности поля $\xi(x, y)$ из (2.54) вместе с нормальными к границе раздела столбцов производными следует выполнение условий:

$$u_{sk}^{(m,r)} = \sum_{p=1}^K O_{kp}^{(m,m+1)} u_{sp}^{(m+1,l)}, \quad (2.74a)$$

$$u_{ak}^{(m,r)} = \sum_{p=1}^K O_{kp}^{(m,m-1)} u_{ap}^{(m-1,l)}. \quad (2.74б)$$

Или в матричной записи,

$$\mathbf{U}_s^{(m,r)} = \mathbf{O}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_s^{(m+1,l)}, \quad (2.75a)$$

$$\mathbf{U}_a^{(m,r)} = \mathbf{O}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_a^{(m+1,l)}. \quad (2.75b)$$

Объединяя (2.69) и (2.75) и исключая $\mathbf{U}_a^{(m,l)}$, $\mathbf{U}_a^{(m,r)}$, $\mathbf{U}_s^{(m,r)}$, получим

$$(\mathbf{O}^{(m,m-1)} \mathbf{T}^{(m-1)} \mathbf{O}^{(m-1,m)} + \mathbf{T}^{(m)}) \mathbf{U}_s^{(m,l)} =$$

$$= \mathbf{O}^{(m,m-1)} \mathbf{S}^{(m-1)} \mathbf{U}_s^{(m-1,l)} + \mathbf{S}^{(m)} \mathbf{O}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_s^{(m+1,l)} \quad (2.76a)$$

для $2 < m < M$;

$$(\mathbf{O}^{(2,1)} \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{O}^{(1,2)} + \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{U}_s^{(2,l)} = \mathbf{S}^{(2)} \mathbf{O}^{(2,3)} \mathbf{U}_s^{(3,l)} \quad (2.76b)$$

для $m = 2$, когда $M > 2$;

$$(\mathbf{O}^{(M,M-1)} \mathbf{T}^{(M-1)} \mathbf{O}^{(M-1,M)} + \mathbf{T}^{(M)}) \mathbf{U}_s^{(M,l)} = \mathbf{O}^{(M,M-1)} \mathbf{S}^{(M-1)} \mathbf{U}_s^{(M-1,l)} \quad (2.76b)$$

для $m = M$.

В простейшем случае, когда $M = 2$, получаем

$$(\mathbf{O}^{(1,2)} \mathbf{T}^{(2)} + \mathbf{T}^{(1)} \mathbf{O}^{(1,2)}) \mathbf{U}_s^{(2,l)} = 0. \quad (2.76r)$$

Соотношения (2.76a)–(2.76r) выполняются в случае электрических степок, когда граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{U}_s^{(1,l)} = [0 & 0 & \dots & 0]^T, \\ \mathbf{U}_s^{(M,r)} = [0 & 0 & \dots & 0]^T. \end{cases}$$

Если стенки магнитные, т. е. граничные условия имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{U}_a^{(1,l)} = [0 & 0 & \dots & 0]^T, \\ \mathbf{U}_a^{(M,r)} = [0 & 0 & \dots & 0]^T, \end{cases}$$

то для $m = 2$, когда $M > 2$:

$$(\mathbf{O}^{(2,1)} (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{S}^{(1)} (\mathbf{T}^{(1)})^{-1} \mathbf{S}^{(1)}) \mathbf{O}^{(1,2)} + \mathbf{T}^{(2)}) \mathbf{U}_s^{(2,l)} = \mathbf{S}^{(2)} \mathbf{O}^{(2,3)} \mathbf{U}_s^{(3,l)}, \quad (2.76d)$$

а для $m = M$:

$$(\mathbf{O}^{(M,M-1)} \mathbf{T}^{(M-1)} \mathbf{O}^{(M-1,M)} + \mathbf{T}^{(M)} - \mathbf{S}^{(M)} (\mathbf{T}^{(M)})^{-1} \mathbf{S}^{(M)}) \mathbf{U}_s^{(M,l)} = \mathbf{O}^{(M,M-1)} \mathbf{S}^{(M-1)} \mathbf{U}_s^{(M-1,l)}. \quad (2.76e)$$

В простейшем же случае для $M = 2$ при магнитных граничных условиях имеем

$$\mathbf{O}^{(2,1)} [\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{S}^{(1)} (\mathbf{T}^{(1)})^{-1} \mathbf{S}^{(1)}] \mathbf{O}^{(1,2)} - \mathbf{S}^{(2)} (\mathbf{T}^{(2)})^{-1} \mathbf{S}^{(2)} \mathbf{U}_s^{(2,l)} = 0. \quad (2.76ж)$$

Задачу, описываемую соотношениями (2.76), в общем виде можно представить как

$$\mathbf{\Lambda}(k_z) \mathbf{U} = 0, \quad (2.77)$$

где матрица $\Lambda(k_z)$ состоит из $(M-1) \times (M-1)$ блоков, размерностью $K \times K$ каждый. Структура этой матрицы имеет вид

$$\Lambda(k_z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{(2)} & \mathbf{C}^{(2)} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}^{(3)} & \mathbf{A}^{(3)} & \mathbf{C}^{(3)} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B}^{(4)} & \mathbf{A}^{(4)} & \mathbf{C}^{(4)} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ & & \mathbf{O} & & & & & \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}^{(M-1)} & \mathbf{A}^{(M-1)} & \mathbf{C}^{(M-1)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{B}^{(M)} & \mathbf{A}^{(M)} \end{bmatrix}. \quad (2.78)$$

Здесь

$$\mathbf{A}^{(m)} = \mathbf{O}^{(m,m-1)} \mathbf{T}^{(m-1)} \mathbf{O}^{(m-1,m)} + \mathbf{T}^{(m)}; \quad (2.79a)$$

в случае магнитных стенок выражения для $\mathbf{A}^{(2)}$ и $\mathbf{A}^{(M)}$ не подходят под общую схему, поэтому их надо привести отдельно:

$$\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{O}^{(2,1)} (\mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{S}^{(1)} (\mathbf{T}^{(1)})^{-1} \mathbf{S}^{(1)}) \mathbf{O}^{(1,2)} + \mathbf{T}^{(2)}, \quad (2.79б)$$

$$\mathbf{A}^{(M)} = \mathbf{O}^{(M,M-1)} \mathbf{T}^{(M-1)} \mathbf{O}^{(M-1,M)} + \mathbf{T}^{(M)} - \mathbf{S}^{(M)} (\mathbf{T}^{(M)})^{-1} \mathbf{S}^{(M)}, \quad (2.79в)$$

$$\mathbf{B}^{(m)} = -\mathbf{O}^{(m,m-1)} \mathbf{S}^{(m-1)}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{C}^{(m)} = -\mathbf{S}^{(m)} \mathbf{O}^{(m,m-1)}, \quad (2.81)$$

\mathbf{O} — нулевая матрица размерностью $K \times K$.

В выражении (2.77) вектор

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_s^{(2,l)} \\ U_s^{(3,l)} \\ \vdots \\ U_s^{(M,l)} \end{bmatrix}. \quad (2.82)$$

Мы получили задачу (2.77), которая имеет только тривиальное решение $\mathbf{U} = 0$, если $\det(\Lambda(k_z)) \neq 0$. Значение параметра k_z , при котором существует нетривиальное решение, называется собственным значением матрицы $\Lambda(k_z)$. Для нахождения таких значений можно воспользоваться итеративным методом Крылова, который будет рассмотрен далее.

Для каждого из найденных собственных значений k_z , матрица $\Lambda(k_z)$ становится числовой; определив собственный вектор \mathbf{U} , мы получаем некоторые из значений констант, необходимых для конструирования K функций вида (2.51). Остальные можно найти, из соотношений (2.69) и (2.75), в следующем порядке.

1. Для $m = M$ $\mathbf{U}_s^{(M,l)}$ известно как часть \mathbf{U} .

1.1. Если стенки электрические, то $\mathbf{U}_s^{(M,r)} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, тогда

$$\mathbf{U}_a^{(M,l)} = -\mathbf{T}^{(M)} \mathbf{U}_s^{(M,l)} \quad \text{и} \quad \mathbf{U}_a^{(M,r)} = -\mathbf{S}^{(M)} \mathbf{U}_s^{(M,l)}.$$

1.2. Если стенки магнитные, то $\mathbf{U}_a^{(M,r)} = [0 \ 0 \ \dots \ 0]^T$, тогда

$$\mathbf{U}_a^{(M,l)} = (-\mathbf{T}^{(M)} + \mathbf{S}^{(M)}\mathbf{S}^{(M)}(\mathbf{T}^{(M)})^{-1})\mathbf{U}_s^{(M,l)}$$

и

$$\mathbf{U}_s^{(M,r)} = (\mathbf{T}^{(M)})^{-1}\mathbf{S}^{(M)}\mathbf{U}_s^{(M,l)}.$$

2. Для $1 \leq m < M$:

$$2.1. \mathbf{U}_s^{(m,r)} = \mathbf{O}^{(m,m+1)}\mathbf{U}_s^{(m+1,l)}.$$

$$2.2. \mathbf{U}_a^{(m,r)} = \mathbf{O}^{(m,m+1)}\mathbf{U}_a^{(m+1,l)}.$$

2.3. $\mathbf{U}_s^{(m,l)} = (\mathbf{S}^{(m)})^{-1}(-\mathbf{U}_a^{(m,r)} + \mathbf{T}^{(m)}\mathbf{U}_s^{(m,r)})$ — этот пункт выполняется только для $m = 1$, так как для других значений m вектор $\mathbf{U}_s^{(m,l)}$ известен как часть собственного вектора \mathbf{U} .

$$2.4. \mathbf{U}_a^{(m,l)} = -\mathbf{T}^{(m)}\mathbf{U}_s^{(m,l)} + \mathbf{S}^{(m)}\mathbf{U}_s^{(m,r)}.$$

Таким образом, для каждого значения k_z можно сконструировать K мод вида (2.51), объединив их с K модами вида (2.46) (они одни и те же для разных k_z) по формуле (2.54), получаем поле, распространяющееся в направлении оси z , с проекцией k_z волнового вектора на эту ось.

2.4.2. Метод согласованных синусоидальных мод в векторном случае. Принципиальное отличие векторного случая от скалярного состоит в том, что необходимо рассматривать локальные моды двух различных поляризаций — ТЕ и ТМ, поскольку обе они вносят свой вклад в формирование гибридной моды световода. Соответственно, выражение (2.54) трансформируется следующим образом:

$$F^{(m)}(x, y) = \sum_{p=e,h} \sum_{k=1}^{\infty} \left[u_{pk}^{(m)}(x) F_{spk}^{(m)}(y) + \dot{u}_{pk}^{(m)}(x) F_{apk}^{(m)}(y) \right], \quad (2.83)$$

где F — это любая из электрических или магнитных компонент поля моды, а внешняя сумма соответствует суммированию по поляризациям: ТЕ — $p = h$, ТМ — $p = e$. Рассмотрим подробнее локальные моды, входящие в выражение (2.83). Локальная x -мода теперь имеет вид

$$u_{pk}^{(m)}(x) = \left(\frac{k_0}{k_{pk}^{(m)}} \right)^2 u_{spk}^{(m,l)} \cos \left[k_{xpk}^{(m)}(x - x^{(m)}) \right] + \frac{u_{apk}^{(m,l)}}{k_{xpk}^{(m)}} \sin \left[k_{xpk}^{(m)}(x - x^{(m)}) \right], \quad (2.84)$$

здесь учитывается поляризация и введен множитель $\left(\frac{k_0}{k_{pk}^{(m)}} \right)^2$, необходимость которого будет пояснена далее. Выражения для $F_{sp}^{(m)}$ и $F_{ap}^{(m)}$ определены в табл. 2.2, через локальные y -моды.

В таблице 2.2 и далее используются следующие обозначения: $B_x = \mu H_x$, $B_y = \mu H_y$, $B_z = \mu H_z$, где μ — магнитная проницаемость в свободном пространстве.

Таблица 2.2. Симметричные и антисимметричные y -компоненты поля, выраженные через локальные моды

	TE		TM	
F	$F_{sh}^{(m)}$	$F_{ah}^{(m)}$	$F_{se}^{(m)}$	$F_{ae}^{(m)}$
E_x	$\left(\frac{k_z}{k_0}\right)\varphi^{(m)}(y)$	0	0	$-\frac{\dot{\psi}^{(m)}(y)}{k_0^2\varepsilon^{(m)}(y)}$
E_y	0	0	$-\left(\frac{k_{ek}^{(m)}}{k_0}\right)^2\frac{\psi^{(m)}(y)}{\varepsilon^{(m)}(y)}$	0
E_z	0	$-\frac{i\varphi^{(m)}(y)}{k_0}$	$\left(\frac{ik_z}{k_0^2}\right)\frac{\dot{\psi}^{(m)}(y)}{\varepsilon^{(m)}(y)}$	0
cB_x	0	$\frac{\dot{\varphi}^{(m)}(y)}{k_0^2}$	$\left(\frac{k_z}{k_0}\right)\psi^{(m)}(y)$	0
cB_y	$\left(\frac{k_{hk}^{(m)}}{k_0}\right)^2\psi^{(m)}(y)$	0	0	0
cB_z	$\left(\frac{-ik_z}{k_0^2}\right)\dot{\psi}^{(m)}(y)$	0	0	$-\frac{i\psi^{(m)}(y)}{k_0}$

Таким образом, выражение (2.83) принимает вполне определенную форму для каждой из компонент векторов $\vec{E}(x, y)$ и $c\vec{B}(x, y) = c\mu\vec{H}(x, y)$:

$$E_x^{(m)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{hk}^{(m)}(x) \frac{k_z}{k_0} \varphi_k^{(m)}(y) - \sum_{k=1}^{\infty} \dot{u}_{ek}^{(m)}(x) \frac{\dot{\psi}_k^{(m)}(y)}{k_0^2 \varepsilon^{(m)}(y)}, \quad (2.85a)$$

$$E_y^{(m)}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} u_{ek}^{(m)}(x) \left(\frac{k_{ek}^{(m)}}{k_0} \right)^2 \frac{\psi_k^{(m)}(y)}{\varepsilon^{(m)}(y)}, \quad (2.85б)$$

$$E_z^{(m)}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} \dot{u}_{hk}^{(m)}(x) \frac{i\varphi_k^{(m)}(y)}{k_0} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{ek}^{(m)}(x) \frac{ik_z}{k_0^2} \frac{\dot{\psi}_k^{(m)}(y)}{\varepsilon^{(m)}(y)}, \quad (2.85в)$$

$$cB_x^{(m)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \dot{u}_{hk}^{(m)}(x) \frac{\dot{\varphi}_k^{(m)}(y)}{k_0^2} + \sum_{k=1}^{\infty} u_{ek}^{(m)}(x) \frac{k_z}{k_0} \psi_k^{(m)}(y), \quad (2.85г)$$

$$cB_y^{(m)}(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{hk}^{(m)}(x) \left(\frac{k_{hk}^{(m)}}{k_0} \right)^2 \varphi_k^{(m)}(y), \quad (2.85д)$$

$$cB_z^{(m)}(x, y) = - \sum_{k=1}^{\infty} u_{hk}^{(m)}(x) \frac{ik_z}{k_0^2} \dot{\varphi}_k^{(m)}(y) - \sum_{k=1}^{\infty} \dot{u}_{ek}^{(m)}(x) \frac{i\psi_k^{(m)}(y)}{k_0}. \quad (2.85е)$$

Это компоненты гибридной моды.

В таблице 2.2 и выражениях (2.85) $\varphi(y)$ — рассмотренные подробно в п. 2.4.1 локальные y -моды, в данном случае соответствующие ТЕ-поляризации. Моды $\psi(y)$, представляющие ТМ-поляризацию, имеют аналогичный (2.46) вид в столбце m :

$$\psi(y) = \psi_s^{(n,l)} \cos[k_y^{(n)}(y - y^{(n)})] + \frac{\psi_a^{(n,l)}}{k_y^{(n)}} \sin[k_y^{(n)}(y - y^{(n)})], \quad (2.86)$$

но условия (2.55) на границе раздела однородных областей для них принимают иную форму:

$$\psi_s^{(n,r)} = \psi_s^{(n+1,l)}, \quad (2.87a)$$

$$\frac{\psi_a^{(n,r)}}{\varepsilon^{(n)}} = \frac{\psi_a^{(n+1,l)}}{\varepsilon^{(n+1)}}. \quad (2.87b)$$

Это влечет изменения в матричных соотношениях (2.60) и (2.61), для мод $\psi(y)$ они выглядят так:

$$\begin{bmatrix} \psi_s^{(n',r)} \\ \psi_a^{(n',r)} \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{(n')} \mathbf{W}^{(n')} \mathbf{P}^{(n'-1)} \mathbf{W}^{(n'-1)} \dots \mathbf{W}^{(2)} P^1 \begin{bmatrix} \psi_s^{(1,l)} \\ \psi_a^{(1,l)} \end{bmatrix}, \quad (2.88)$$

$$\begin{bmatrix} \psi_s^{(n'+1,l)} \\ \psi_a^{(n'+1,l)} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{(n'+1)} \mathbf{V}^{(n'+1)} \mathbf{Q}^{(n'+2)} \mathbf{V}^{(n'+2)} \dots \mathbf{V}^{(N-1)} \mathbf{Q}^{(N)} \begin{bmatrix} \psi_s^{(N,r)} \\ \psi_a^{(N,r)} \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

Здесь $\mathbf{P}^{(i)}$ и $\mathbf{Q}^{(i)}$ по-прежнему матрицы вида (2.58) и (2.59) соответственно;

$$\mathbf{W}^{(i+1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^{(i+1)}}{\varepsilon^{(i)}} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, N-1}; \quad (2.90)$$

$$\mathbf{V}^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon^{(i)}}{\varepsilon^{(i+1)}} \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, N-1}. \quad (2.91)$$

Очевидно, что матрицы $\mathbf{W}^{(i+1)}$ и $\mathbf{V}^{(i)}$ являются взаимно обратными и зависят исключительно от диэлектрической структуры сечения световода. Соотношения (2.88) и (2.89), также как их аналоги для ТЕ-поляризации, используются для расчета величин, входящих в характеристическое уравнение относительно k_k^2 :

$$\varepsilon^{(n')} \psi_s^{(n',r)} \psi_a^{(n'+1,l)} - \varepsilon^{(n'+1)} \psi_a^{(n',r)} \psi_s^{(n'+1,l)} = 0. \quad (2.92)$$

Не вызывает сомнений факт, что в общем случае корни уравнений (2.63) и (2.92) различны, и поскольку они характеризуют локальные y -моды различных поляризаций, необходимо ввести соответствующие обозначения во избежание путаницы. Пусть k_{hk}^2 — набор решений уравнения (2.63), соответствующий ТЕ-случаю, а k_{ek}^2 — решения уравнения (2.92), описывающие локальные ТМ-моды.

Также изменениям подвергается формула для расчета интеграла нормировки:

$$\frac{1}{y^{(N+1)} - y^{(1)}} \int_{y^{(1)}}^{y^{(N+1)}} \frac{\psi^2(y)}{\varepsilon(y)} dy = 1. \quad (2.93)$$

Таким образом, при расчете векторных полей задача усложняется ровно вдвое. Теперь алгоритм отыскания локальных y -мод представляется следующим:

- для каждого столбца сечения световода необходимо найти K корней k_{hk}^2 уравнения (2.63), определяющих моды $\varphi(y)$ при заданных граничных условиях (электрические или магнитные стенки);
- затем рассчитать константы $\varphi_s^{(n,l)}$, $\varphi_a^{(n,l)}$, $\varphi_s^{(n,r)}$, $\varphi_a^{(n,r)}$, исходя из условия нормировки (2.64), чтобы окончательно сформировать K y -мод вида (2.46), соответствующих случаю ТЕ-поляризации;
- для каждого столбца сечения световода необходимо найти ровно столько же K корней k_{ek}^2 уравнения (2.92), определяющих моды $\psi(y)$ с граничными условиями противоположными ТЕ-случаю, т. е. если для мод $\varphi(y)$ использовалось условие равенства нулю функции на границе, то для $\psi(y)$ нужно использовать условие равенства нулю производной на границе, и наоборот;
- далее рассчитать константы $\psi_s^{(n,l)}$, $\psi_a^{(n,l)}$, $\psi_s^{(n,r)}$, $\psi_a^{(n,r)}$, исходя из условия нормировки (2.93), чтобы окончательно сформировать K y -мод вида (2.86), соответствующих случаю ТМ-поляризации.

Существенной модификации требует и алгоритм поиска констант распространения, и собственно «сшивки» локальных мод в локально-непрерывные функции, описывающие компоненты векторного поля. Для локальных x -мод обеих поляризаций справедливы выражения

$$\mathbf{U}_{ap}^{(m,l)} = -\mathbf{T}_p^{(m)} \mathbf{U}_{sp}^{(m,l)} + \mathbf{S}_p^{(m)} \mathbf{U}_{sp}^{(m,r)}, \quad (2.94a)$$

$$\mathbf{U}_{ap}^{(m,r)} = -\mathbf{S}_p^{(m)} \mathbf{U}_{sp}^{(m,l)} + \mathbf{T}_p^{(m)} \mathbf{U}_{sp}^{(m,r)}. \quad (2.94б)$$

Здесь

$$T_{pkk}^{(m)} = (k_0/k_{pk}^{(m)})^2 k_{xpk}^{(m)} / \operatorname{tg}(k_{xpk}^{(m)} d_x^{(m)}), \quad (2.95a)$$

$$S_{pkk}^{(m)} = (k_0/k_{pk}^{(m)})^2 k_{xpk}^{(m)} / \sin(k_{xpk}^{(m)} d_x^{(m)}). \quad (2.95б)$$

Равенства, аналогичные (6.46), связывающие константы локальных x -мод обеих поляризаций из соседних столбцов, приведены ниже:

$$\mathbf{U}_{sh}^{(m,r)} = \mathbf{O}_{hh}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_{sh}^{(m+1,l)}, \quad (2.96a)$$

$$\mathbf{U}_{ah}^{(m,r)} = \mathbf{O}_{hh}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_{ah}^{(m+1,l)} - k_z \mathbf{O}_{he}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_{se}^{(m+1,l)}, \quad (2.96б)$$

$$\mathbf{U}_{se}^{(m,r)} = \mathbf{O}_{ee}^{(m,m+1)} \mathbf{U}_{se}^{(m+1,l)}, \quad (2.96в)$$

$$\mathbf{U}_{ae}^{(m,r)} = \mathbf{O}_{ee}^{(m+1,m)} \mathbf{U}_{ae}^{(m+1,l)} + k_z \mathbf{O}_{he}^{(m+1,m)} \mathbf{U}_{sh}^{(m+1,l)}, \quad (2.96\text{г})$$

где матрицы $\mathbf{O}_{hh}^{(m,m')}$, $\mathbf{O}_{ee}^{(m,m')}$ и $\mathbf{O}_{he}^{(m,m')}$ имеют следующие элементы:

$$O_{hhkp}^{(m,m')} = \langle \varphi_k^{(m)} | \varphi_p^{(m')} \rangle, \quad (2.97\text{а})$$

$$O_{eekp}^{(m,m')} = \langle \psi_k^{(m)} | \psi_p^{(m')} / \varepsilon^{(m')}(y) \rangle, \quad (2.96\text{б})$$

$$O_{hekp}^{(m,m')} = \langle \dot{\varphi}_k^{(m)} | \psi_p^{(m')} / \varepsilon^{(m')}(y) \rangle / k_{(hk)}^{(m)2} + \langle \varphi_k^{(m)} | \dot{\psi}_p^{(m')} / \varepsilon^{(m')}(y) \rangle / k_{(ep)}^{(m')2}. \quad (2.97\text{в})$$

Выражение для $\langle \varphi_k | \varphi_p \rangle$ через значения функций и производных на границах строк (константы $\varphi_s^{(n,l)}$, $\varphi_a^{(n,l)}$, $\varphi_s^{(n,r)}$, $\varphi_a^{(n,r)}$) уже определялось ранее формулой (2.81). Далее приведем формулы, удобные для расчета элементов остальных матриц интегралов перекрытия:

$$\langle \psi_k | \psi_p / \varepsilon(y) \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{(\psi_{sk}^{(n,r)} \psi_{ap}^{(n,r)} - \psi_{ak}^{(n,r)} \psi_{sp}^{(n,r)} - \psi_{sk}^{(n,l)} \psi_{ap}^{(n,l)} + \psi_{ak}^{(n,l)} \psi_{sp}^{(n,l)})}{\varepsilon^{(n)}(k_{kk}^2 - k_{kp}^2)}, \quad (2.98)$$

$$\langle \dot{\varphi}_k | \psi_p / \varepsilon(y) \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{(-\varphi_{ak}^{(n,l)} \psi_{ap}^{(n,l)} - k_{kk}^2 \psi_{sk}^{(n,l)} + \varphi_{ak}^{(n,r)} \psi_{ap}^{(n,r)} + k_{kk}^2 \varphi_{sk}^{(n,r)} \psi_{sp}^{(n,r)})}{\varepsilon^{(n)}(k_{kk}^2 - k_{kp}^2)}, \quad (2.99)$$

$$\langle \varphi_k | \dot{\psi}_p / \varepsilon(y) \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{(-\varphi_{ak}^{(n,l)} \psi_{ap}^{(n,l)} - k_{kp}^2 \varphi_{sk}^{(n,l)} \psi_{sp}^{(n,l)} + \varphi_{ak}^{(n,r)} \psi_{ap}^{(n,r)} + k_{kp}^2 \varphi_{sk}^{(n,r)} \psi_{sp}^{(n,r)})}{\varepsilon^{(n)}(k_{kk}^2 - k_{kp}^2)}. \quad (2.100)$$

Нужно отметить, что введение множителя $(k_0/k_{pk}^{(m)})^2$, отличающего выражение для x -мод (2.84) от скалярного аналога (2.51), позволяет, сохраняя простые выражения для нормировки (2.64) и (2.93) локальных y -мод ТЕ- и ТМ-поляризации соответственно, получать выражения для элементов матриц $O_{hhkp}^{(m,m')}$ и $O_{eekp}^{(m,m')}$, которые не зависят от корней характеристических уравнений (2.63) и (2.92).

Аналогично задаче (2.77) отыскания констант распространения для скалярного случая, можно сформулировать задачу решения однородной алгебраической системы уравнений

$$\Xi(k_z) \mathbf{U} = 0, \quad (2.101)$$

где матрица $\Xi(k_z)$, также как $\Lambda(k_z)$, имеет ленточную структуру и зависит от параметра k_z :

$$\Xi(k_z) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_h^{(2)} & \mathbf{C}_h^{(2)} & \mathbf{B}_h^2 & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{C}_e^{(2)} & \mathbf{A}_e^{(2)} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_e^{(2)} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D}_h^{(3)} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_h^{(3)} & \mathbf{C}_h^{(3)} & \mathbf{B}_h^{(3)} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}_e^{(3)} & \mathbf{C}_e^{(3)} & \mathbf{A}_e^{(3)} & \mathbf{O} & \mathbf{B}_e^{(3)} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ & & & \mathbf{O} & & & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{D}_h^{(M)} & \mathbf{O} & \mathbf{A}_h^{(M)} & \mathbf{C}_h^{(M)} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \dots & \mathbf{O} & \mathbf{D}_e^{(M)} & \mathbf{C}_e^{(M)} & \mathbf{A}_e^{(M)} \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

Компоненты блочной матрицы $\Xi(k_z)$ выражаются через уже определенные матрицы интегралов перекрытия и диагональные матрицы $\mathbf{T}_p^{(m)}$ и $\mathbf{S}_p^{(m)}$:

$$\mathbf{A}_h^{(m)} = \mathbf{O}_{hh}^{(m,m-1)} \mathbf{T}_h^{(m-1)} \mathbf{O}_{hh}^{(m-1,m)} + \mathbf{T}_h^{(m)}, \quad (2.103a)$$

$$\mathbf{A}_e^{(m)} = \mathbf{O}_{ee}^{(m-1,m)T} \mathbf{T}_e^{(m-1)} \mathbf{O}_{ee}^{(m-1,m)} + \mathbf{T}_e^{(m)}; \quad (2.103б)$$

точно так же, как отмечалось в п. 2.4.1, в случае магнитных стенок выражения для $\mathbf{A}_p^{(2)}$ и $\mathbf{A}_p^{(M)}$ отличаются от общей схемы:

$$\mathbf{A}_h^{(2)} = \mathbf{O}_{hh}^{(2,1)} (\mathbf{T}_h^{(1)} - \mathbf{S}_h^{(1)} (\mathbf{T}_h^{(1)})^{-1} \mathbf{S}_h^{(1)}) \mathbf{O}_{hh}^{(1,2)} + \mathbf{T}_h^{(2)}, \quad (2.103в)$$

$$\mathbf{A}_e^{(2)} = \mathbf{O}_{ee}^{(1,2)T} (\mathbf{T}_e^{(1)} - \mathbf{S}_e^{(1)} (\mathbf{T}_e^{(1)})^{-1} \mathbf{S}_e^{(1)}) \mathbf{O}_{ee}^{(1,2)} + \mathbf{T}_e^{(2)}, \quad (2.103г)$$

$$\mathbf{A}_h^{(M)} = \mathbf{O}_{hh}^{(M,M-1)} \mathbf{T}_h^{(M-1)} \mathbf{O}_{hh}^{(M-1,M)} + \mathbf{T}_h^{(M)} - \mathbf{S}_h^{(M)} (\mathbf{T}_h^{(M)})^{-1} \mathbf{S}_h^{(M)}, \quad (2.103д)$$

$$\mathbf{A}_e^{(M)} = \mathbf{O}_{ee}^{(M-1,M)T} \mathbf{T}_e^{(M-1)} \mathbf{O}_{ee}^{(M-1,M)} + \mathbf{T}_e^{(M)} - \mathbf{S}_e^{(M)} (\mathbf{T}_e^{(M)})^{-1} \mathbf{S}_e^{(M)}, \quad (2.103ж)$$

$$\mathbf{B}_h^{(m)} = -\mathbf{S}_h^{(m)} \mathbf{O}_{hh}^{(m,m+1)}, \quad (2.103е)$$

$$\mathbf{B}_e^{(m)} = -\mathbf{S}_e^{(m)} \mathbf{O}_{ee}^{(m,m+1)}, \quad (2.103з)$$

$$\mathbf{C}_h^{(m)} = k_z \mathbf{O}_{hh}^{(m,m-1)} \mathbf{O}_{he}^{(m-1,m)}, \quad (2.103к)$$

$$\mathbf{C}_e^{(m)} = -k_z \mathbf{O}_{ee}^{(m-1,m)T} \mathbf{O}_{he}^{(m,m-1)T}, \quad (2.103л)$$

$$\mathbf{D}_h^{(m)} = -\mathbf{O}_{hh}^{(m,m-1)} \mathbf{S}_h^{(m-1)}, \quad (2.103м)$$

$$\mathbf{D}_e^{(m)} = -\mathbf{O}_{ee}^{(m-1,m)T} \mathbf{S}_e^{(m-1)}. \quad (2.103н)$$

При построении матрицы $\Xi(k_z)$ задачи (2.101) необходимо также учесть правило задания граничных условий, сформулированное в табл. 2.3.

Таблица 2.3. Два возможных варианта задания граничных условий

	$\varphi(y)$	$\psi(y)$	$u_h(x)$	$u_e(x)$
Электрические стенки	$\begin{cases} \varphi_s^{(1,l)} = 0, \\ \varphi_s^{(N,r)} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \psi_a^{(1,l)} = 0, \\ \psi_a^{(N,r)} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{ha}^{(1,l)} = 0, \\ u_{ha}^{(N,r)} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{es}^{(1,l)} = 0, \\ u_{es}^{(N,r)} = 0 \end{cases}$
Магнитные стенки	$\begin{cases} \varphi_a^{(1,l)} = 0, \\ \varphi_a^{(N,r)} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \psi_s^{(1,l)} = 0, \\ \psi_s^{(N,r)} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{hs}^{(1,l)} = 0, \\ u_{hs}^{(N,r)} = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{ea}^{(1,l)} = 0, \\ u_{ea}^{(N,r)} = 0 \end{cases}$

В свою очередь вектор \mathbf{U} в (2.101) содержит константы локальных мод как ТЕ-, так и ТМ-поляризации:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{sh}^{(2,l)} \\ U_{se}^{(2,l)} \\ U_{sh}^{(3,l)} \\ U_{se}^{(3,l)} \\ \vdots \\ U_{sh}^{(M,l)} \\ U_{se}^{(M,l)} \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Задача (2.101) решается тем же самым способом, что и в скалярном случае (2.77). В результате, после получения константы распространения и доопределения локальных x -мод, из полученного набора функций по формулам (2.85) рассчитываются компоненты векторного поля E_x , E_y , E_z , cB_x , cB_y и cB_z .

2.4.3. Метод Крылова для решения нелинейной задачи на собственные значения. На этапе решения нелинейной задачи на собственные значения (2.77), (2.101) удобно использовать итеративный метод Крылова [107], позволяющий точно, избегая пропусков, рассчитывать собственные значения матриц большой размерности.

Интерполируя нелинейный матричный оператор $\Lambda(k_z)$ между двумя произвольными значениями σ и μ ,

$$\Lambda(k_z) \approx \tilde{\Lambda}(k_z) = \frac{k_z - \sigma}{\mu - \sigma} \Lambda(\mu) + \frac{\mu - k_z}{\mu - \sigma} \Lambda(\sigma), \quad (2.105)$$

получаем линейную задачу на собственные значения:

$$\tilde{\Lambda}(k_z) \mathbf{U} = 0, \quad (2.106)$$

которую будем решать итеративно в виде

$$\left[\frac{\mu_{k+1} - \sigma}{\mu_k - \sigma} \Lambda(\mu_k) + \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_k - \sigma} \Lambda(\sigma) \right] \mathbf{U}_k = 0, \quad (2.107)$$

где μ_{k+1} — приближенное значение искомого k_z , получаемое на $(k+1)$ -м шаге итерации. Введем обозначение:

$$\theta = \frac{\mu_{k+1} - \mu_k}{\mu_{k+1} - \sigma}. \quad (2.108)$$

Тогда уравнение (2.107) можно представить как

$$[\Lambda(\sigma)^{-1} \Lambda(\mu_k) - \theta \mathbf{I}] \mathbf{U}_k = 0. \quad (2.109)$$

Пусть μ_1 — некоторое начальное приближение для собственного числа k_z матрицы $\Lambda(k_z)$, пусть σ — некоторое фиксированное значение вблизи μ_1 , тогда итерационная процедура уточнения собственного значения k_z состоит в следующем. На k -м шаге решаем относительно θ :

$$\Lambda(\sigma)^{-1} \Lambda(\mu_k) \mathbf{U} = \theta \mathbf{U}, \quad (2.110)$$

рассчитываем новую оценку для собственного значения k_z из задачи (2.87) или (2.101):

$$\mu_{k+1} = \mu_k + \frac{\theta}{1 - \theta} (\mu_k - \sigma). \quad (2.111)$$

Итерации повторяются до тех пор, пока последовательность оценок $\{\mu_k\}$ не сойдется. В работе [111] показано, что итерационная процедура в методе Крылова сходится к искомому собственному значению.

В работе [90] рассматривается другой метод решения нелинейной задачи на собственные значения. Назовем его методом нулей функции. Суть метода состоит в следующем. Выберем произвольный вектор \mathbf{V} с ненулевыми компонентами, например, единичный. Будем решать неоднородное уравнение

$$\Lambda(k_z) \mathbf{U}' = \mathbf{V} \quad (2.112)$$

относительно \mathbf{U}' . Для разных значений параметра k_z будем получать разные решения уравнения (2.112). Определим функцию

$$f(k_z) = 1/U'_p, \quad (2.113)$$

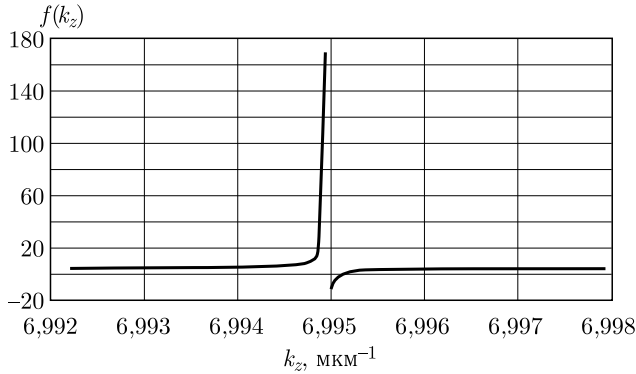
где U'_p есть p -я компонента вектора \mathbf{U}' . В окрестности искомых значений k_z функция $f(k_z)$ является непрерывной функцией скалярного аргумента, и ее нули есть искомые k_z .

Поиск нулей $f(k_z)$ осуществляется стандартными методами.

Разрывность функции $f(k_z)$ существенно затрудняет поиск констант пространства таким способом. Поэтому даже при достаточно малом шаге дискретизации, значительно меньшим необходимого для отделения соседних нулей функции $f(k_z)$, существует вероятность пропуска корней из-за разрывов расположенных вблизи нулей. Такая проблемная ситуация показана на рис. 2.37, где в районе корня $k_z = 6,9951 \text{ мкм}^{-1}$ функция имеет разрыв.

Многочисленные разрывы также не позволяют воспользоваться статистическими оценками поведения функции на интервале, а уменьшение шага дискретизации увеличивает время, затрачиваемое на расчеты.

Совместное использование метода (2.112)–(2.113) с методом Крылова (2.105)–(2.111) предположительно могло бы превзойти по эффективности оба этих метода.

Рис. 2.37. Пример разрыва функции $f(k_z)$ вблизи нуля

Пусть метод Крылова используется для индикации наличия корня на некотором интервале, где дальнейшее уточнение значений корней ведется при помощи функции (2.113). При заданной точности разделения корней, выберем шаг дискретизации в методе Крылова таким образом, чтобы минимизировать время расчета,

$$t(h_k) = Mt_{ki} + Int_{si} \rightarrow \min. \quad (2.114)$$

В (2.114) $M = L/h_k$ — количество интервалов анализируемых по методу Крылова, где L — длина интервала, на котором осуществляется поиск собственных значений k_z , t_{ki} — время на выполнение одной итерации метода Крылова, I — предполагаемое число корней на интервале длиной L , $n = h_k/h$ — число интервалов рассматриваемых на интервале длиной h_k при уточнении корней с шагом h , t_{si} — среднее время на выполнение одной итерации обнаружения нуля функции $f(k_z)$ на интервале длиной h .

Оптимальным значением шага дискретизации h_k является значение

$$h_k^{opt} = \sqrt{\frac{Lht_{ki}}{It_{si}}}. \quad (2.115)$$

Практический пример расчета нескольких собственных мод фотонного световода (рис. 2.38) с использованием трех описанных методов решения нелинейной задачи на собственные значения в методе согласованных синусоидальных мод приводится далее.

Для аппроксимации по формуле (2.54) использовалось тридцать локальных мод, что, согласно исследованию, проведенному в работе [110], достаточно для получения оценок констант распространения мод с ошибкой не более 10^{-4} , т.е. с точностью до третьего знака после запятой.

В соответствии с ССМ-методом была рассмотрена задача (2.77), где элементы матрицы $\Lambda(k_z)$ нелинейно зависят от параметра k_z , искомые значения которого обращают $\Lambda(k_z)$ в вырожденную числовую матрицу, детерминант которой равен нулю.

Для заданной структуры сечения размерность редуцированной по числу используемых локальных мод матрицы $\Lambda(k_z)$ составила 480×480 .

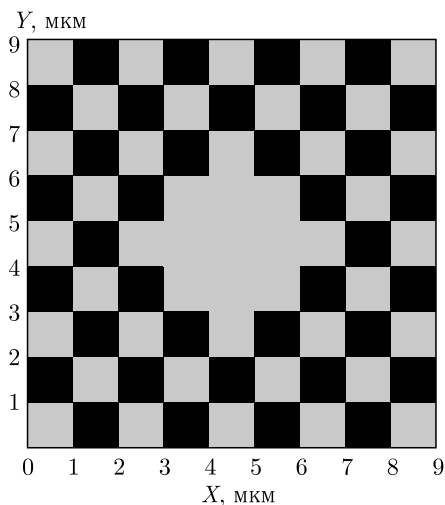


Рис. 2.38. Модель сечения фотонного световода, светлым показаны области со значением показателя преломления $n_1 = 1,47$, темным — с $n_2 = 1$

На интервале единичной длины поиск констант распространения осуществлялся тремя способами: методом определения нулей функции (2.113), методом Крылова (2.105)–(2.111) и комбинированным методом с оптимальным шагом дискретизации (2.115).

Диаграмма, показывающая количество обнаруженных с точностью 10^{-4} корней для каждого метода при разном количестве точек разбиения — величине обратно пропорциональной точности разделения корней h , приводится на рис. 2.39.

Как следует из диаграммы, метод Крылова существенно лучше двух других обнаруживает искомые значения параметра k_z , но при этом, как видно из графика на рис. 2.40, является самым затратным по времени при заданном значении h . Так при расчете тринадцати корней методом Крылова с $h = 10^{-3} \text{ мкм}^{-1}$

на персональном компьютере требуется около трех часов. Заметим (рис. 2.39), что методом Крылова обнаруживались те же тринадцать корней, но за время в восемь раз меньшее. В тоже время метод нулей функции и комбинированный метод имеют примерно одинаковую частоту обнаружения корней; незначительное преимущество комбинированного метода в области малой точности разделения корней объясняется случайно лучшим позиционированием интервала длиной h , на котором производятся вторичные итерации метода нулей

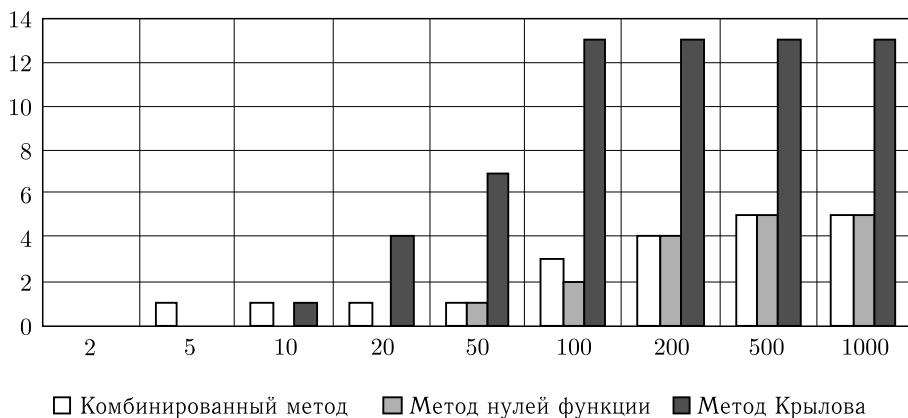


Рис. 2.39. Диаграмма зависимости количества найденных констант распространения нескольких первых мод ФКС (рис. 2.38) от величины $1/h$, обратно пропорциональной точности разделения корней

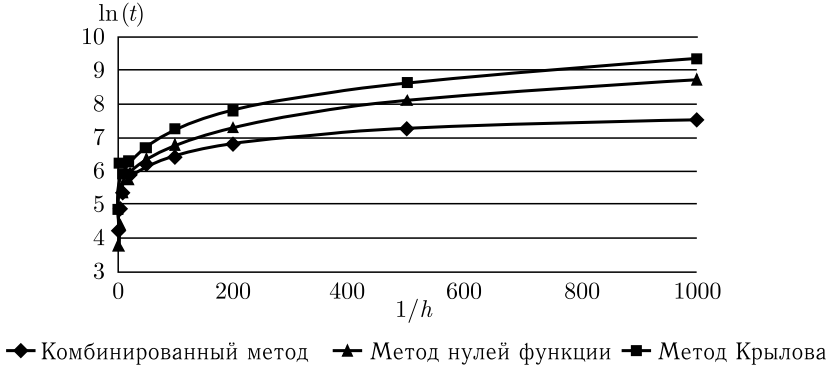


Рис. 2.40. Зависимость натурального логарифма времени в секундах, затраченного на расчет нулей, от величины $1/h$, обратно пропорциональной точности разделения корней

функции, относительно корня. При этом комбинированный метод является более эффективным по времени, чем метод нулей функции, как следует из рис. 2.40.

Таким образом, применение в ССМ-методе итеративной процедуры нахождения констант распространения по методу Крылова позволяет решить проблему пропуска близких по значению или расположенных вблизи разрыва функции (2.113) корней, возникающую при использовании метода нулей функции, ценой увеличения времени расчета.

2.4.4. Расчет мод ступенчатого световода. Рассмотрим применение ССМ-метода для расчета мод слабонаправляющих ступенчатых световодов из плавленого кварца SiO_2 . В качестве исходного излучения выберем инфракрасный свет с длиной волны в вакууме $\lambda_0 = 1,3$ мкм, соответствующей минимуму дисперсии материала.

Так световоды, сечения которых изображены на рис. 2.41 (модель 1) и рис. 2.42 (модель 2), представляют собой приближенные модели ступенчатого световода с круглым сечением, с показателем преломления материала в сердечнике и оболочке соответственно $n_{\text{co}} = 1,47$ и $n_{\text{cl}} = 1,463$. Поскольку показатели преломления сердечника и оболочки отличаются незначительно

$$n_{\text{co}} \approx n_{\text{cl}}, \quad (2.116)$$

данный световод является слабонаправляющим.

Кроме того, световод также не является многомодовым [112], так как условие

$$V = \frac{2\pi\rho\sqrt{n_{\text{co}}^2 + n_{\text{cl}}^2}}{\lambda_0} \gg 1 \quad (2.117)$$

не выполняется. В данном случае ρ — характерный размер сердечника (радиус) равен 3 мкм, а световодный параметр V [112] равен

$$V = \frac{2\pi\sqrt{1,47^2 + 1,463^2} \cdot 3 \text{ мкм}}{1,3 \text{ мкм}} \approx 2,078. \quad (2.118)$$

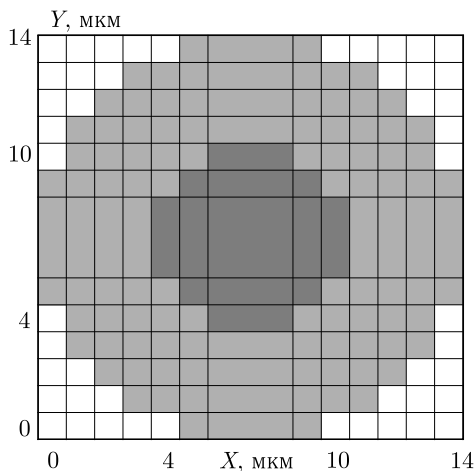


Рис. 2.41. Схема поперечного сечения световода (модель 1), темно-серым цветом показаны области со значением показателя преломления $n_{co} = 1,47$, светло-серым — с $n_{cl} = 1,463$, белым — с $n_v = 1$

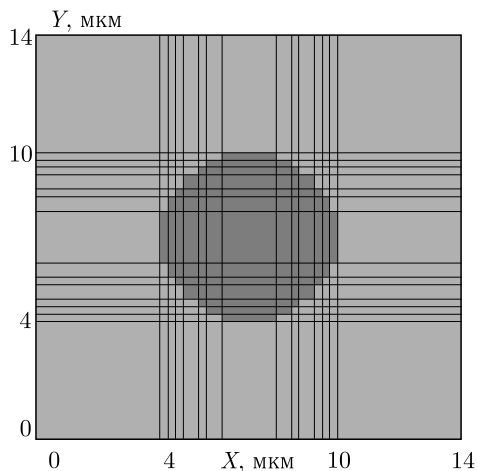


Рис. 2.42. Схема поперечного сечения световода (модель 2), темно-серым цветом показаны области со значением показателя преломления $n_{co} = 1,47$, светло-серым — с $n_{cl} = 1,463$

Поэтому внимание при расчетах уделим лишь нескольким модам низшего порядка. На рисунке 2.43 показаны распределения интенсивности фундаментальных мод для обеих моделей, полученные в результате применения скалярного варианта ССМ-метода, т. е. функции $|\xi(x, y)|^2$ из (2.54). На рисунке 2.43 моды показаны полутонами: черный цвет соответствует максимальному значению интенсивности моды, белый — минимальному (нулевому).

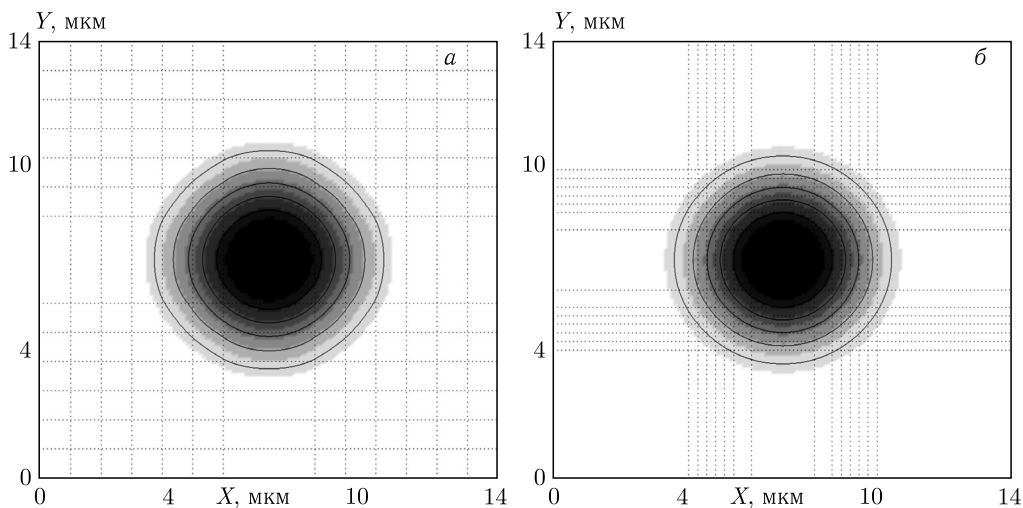


Рис. 2.43. Распределение интенсивности поля фундаментальной моды: а) для модели 1, б) для модели 2

Поскольку принципиальных качественных различий между этими двумя результатами нет, для дальнейших расчетов используется более удобная модель 2 с сечением, изображенным на рис. 2.42. При одинаковом количестве строк и столбцов в моделях 1 и 2, точность аппроксимации формы сердечника, для модели 2 выше, в тоже время, радиус оболочки можно считать много большим радиуса сердечника, потому что так обычно и бывает на практике. Распределения интенсивности первых десяти мод модели 2 показаны на рис. 2.44, из них только фундаментальная мода является направляемой, так как, только ее постоянная распространения удовлетворяет условию отсечки [112] $n_{cl}k_0 < k_z$ (табл. 2.4).

Таблица 2.4. Значения констант распространения первых десяти мод модели 2

№ моды	k_z , мкм ⁻¹	$n_{\text{eff}} = k_z/k_0$
1	7,0879	1,4665
2	7,0617	1,4611
3	7,0447	1,4576
4	7,0389	1,4564
5	7,0301	1,4545
6	7,0102	1,4604
7	6,9890	1,4460
8	6,9846	1,4451
9	6,9551	1,4390
10	6,9512	1,4382

Таблица 2.5. Матрица значений интегралов перекрытия для амплитуд первых десяти мод модели 2

№ моды	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8,4803	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	7,7895	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	14,7646	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	13,3078	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	10,5809	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	40,0445	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	9,9666	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	10,4592	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	19,4402	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	21,7969

Найденные пространственные моды представляют собой систему взаимно ортогональных функций в области сечения. Матрица значений интегралов вида

$$\int_{x^{(1)}}^{x^{(M+1)}} \int_{y^{(1)}}^{y^{(N+1)}} \xi_{k1}(x, y) \xi_{k2}(x, y) dx dy, \quad \text{где } k1, k2 = \overline{1, 10}, \quad (2.119)$$

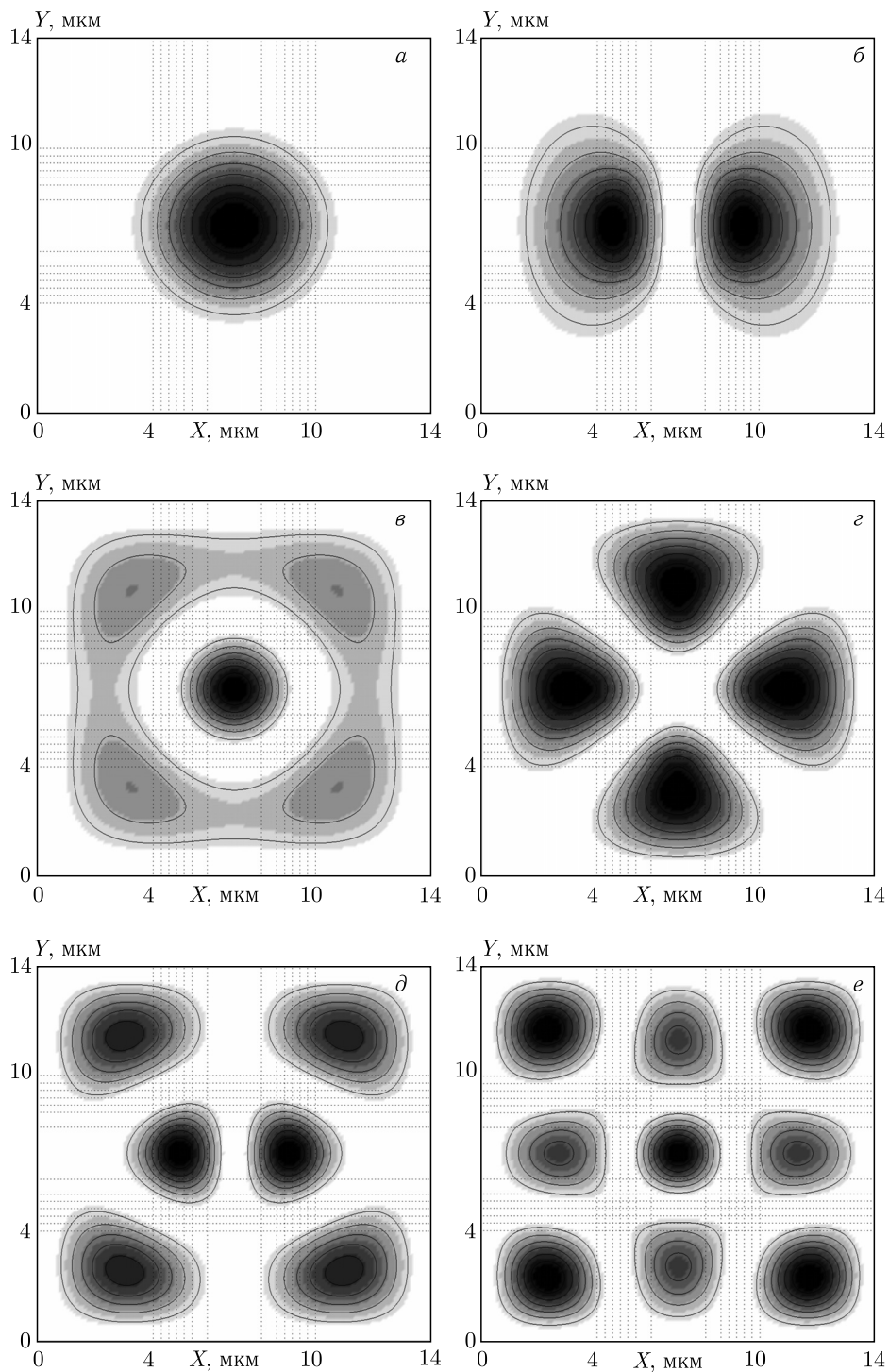


Рис. 2.44. Распределения интенсивности полей первых десяти мод для модели 2

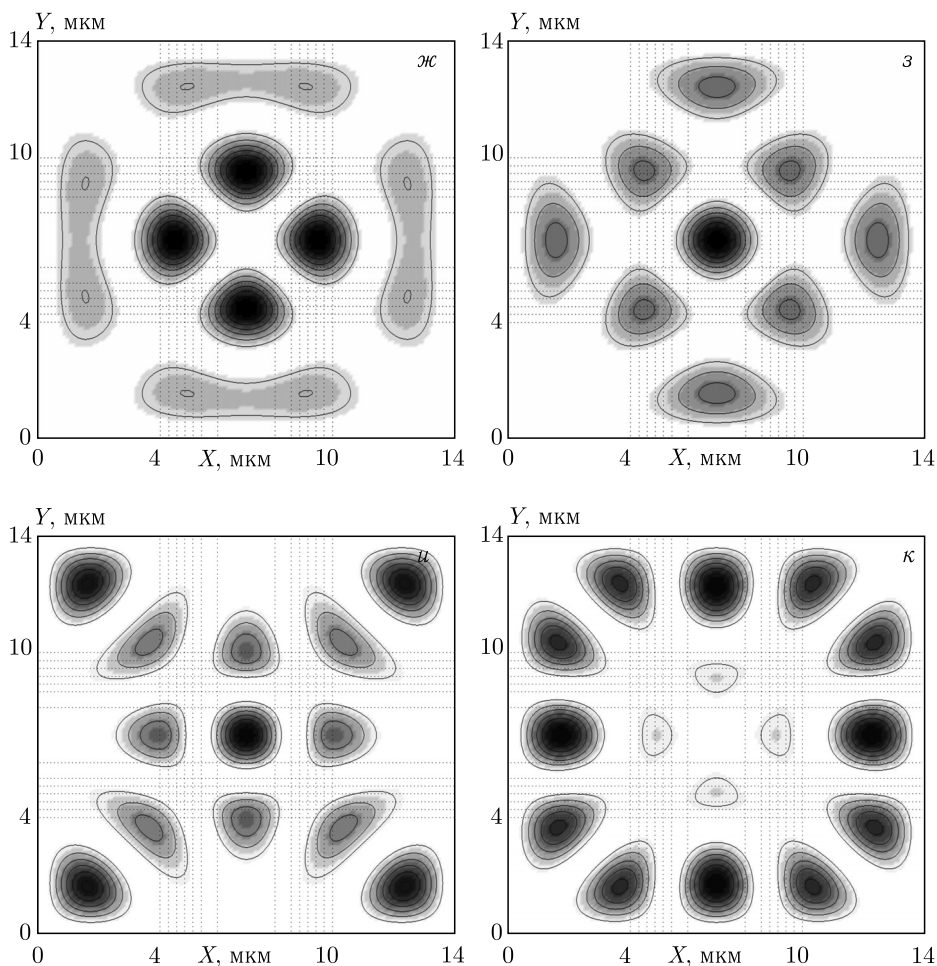


Рис. 2.44. Окончание

приводится в табл. 2.5. Из табл. 2.5 видно, что рассчитанные моды ортогональны с точностью до четвертого знака после запятой.

Проведя нормировку каждой из мод, получаем систему ортонормированных функций.

2.4.5. Расчет мод фотонно-кристаллического световода. Применение векторных методов расчета собственных мод, особенно актуально для исследования световодов, сечения которых содержат сильные (более 20%) перепады показателя преломления, например таких, как ФКС. Далее проводится сравнение рассчитанных ССМ-методом векторных и скалярных мод ФКС, сечение которого изображено на рис. 2.38.

Распределения интенсивности компоненты sB_y фундаментальной моды с эффективным показателем преломления $n_{\text{ef}} = 1,4473$ и интенсивность соответствующего скалярного поля с $n_{\text{ef}} = 1,4491$, рассчитанные для излучения с длиной волны $\lambda_0 = 1,3$ мкм показаны на рис. 2.45.

Наблюдается достаточно большое сходство конфигурации скалярного поля и векторной компоненты sB_y . Среднеквадратическое отклонение между двумя решениями, нормированными на единицу, по области $W_x \times W_y = 9 \times 9$ мкм составляет 0,0000014, или 0,00014 %. Для трех других мод, также отмечается соответствие распределения квадрата амплитуды одной из векторных компонент и интенсивности скалярного поля (рис. 2.46–2.48).

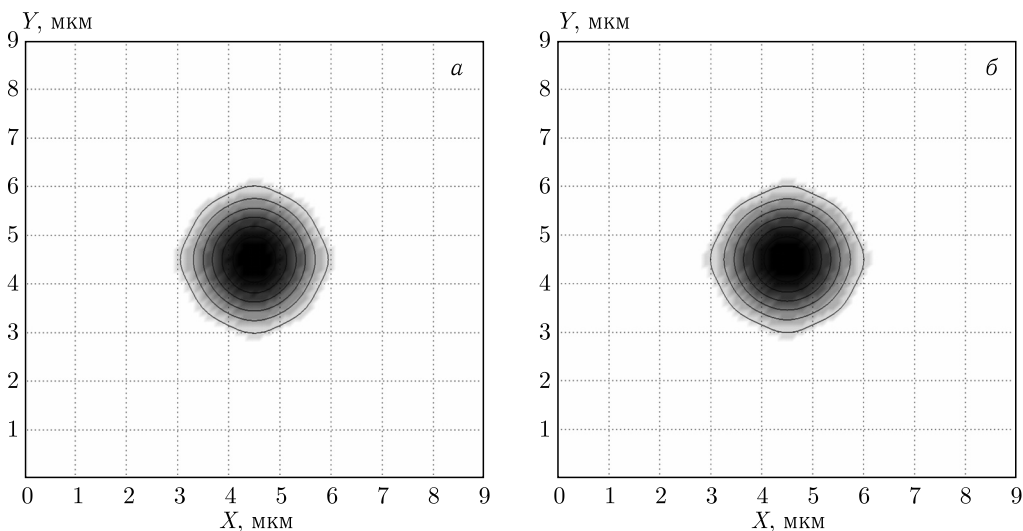


Рис. 2.45. Распределения *а)* квадрата амплитуды компоненты фундаментальной векторной моды sB_y , *б)* интенсивности соответствующей скалярной моды

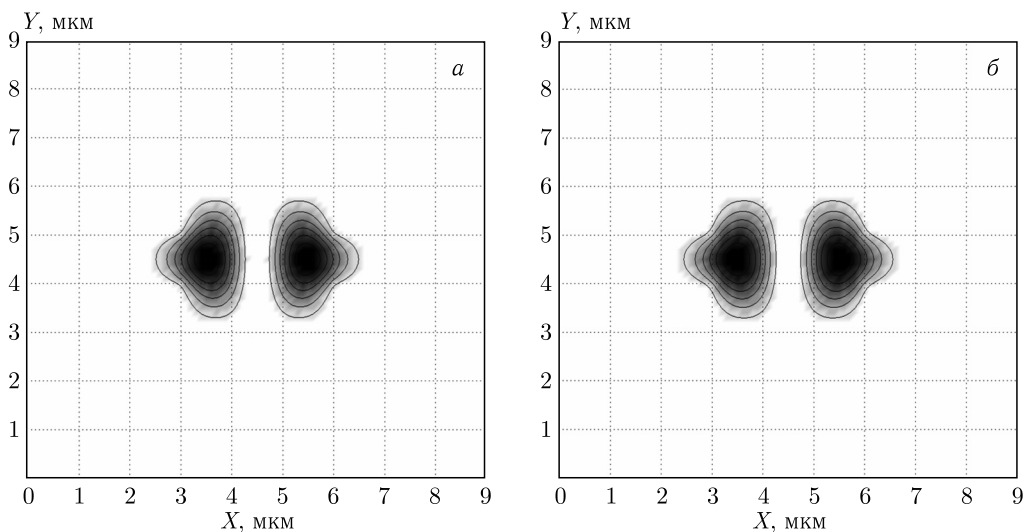


Рис. 2.46. Распределения *а)* квадрата амплитуды компоненты sB_y второй векторной моды, *б)* интенсивности соответствующей скалярной моды

Схожесть конфигураций отдельных компонент векторной моды и скалярной моды не случайна. Соответствующая векторная компонента является и наиболее мощной среди шести векторных компонент поля, т. е. имеет самое большое значение интеграла по области сечения (табл. 2.6).

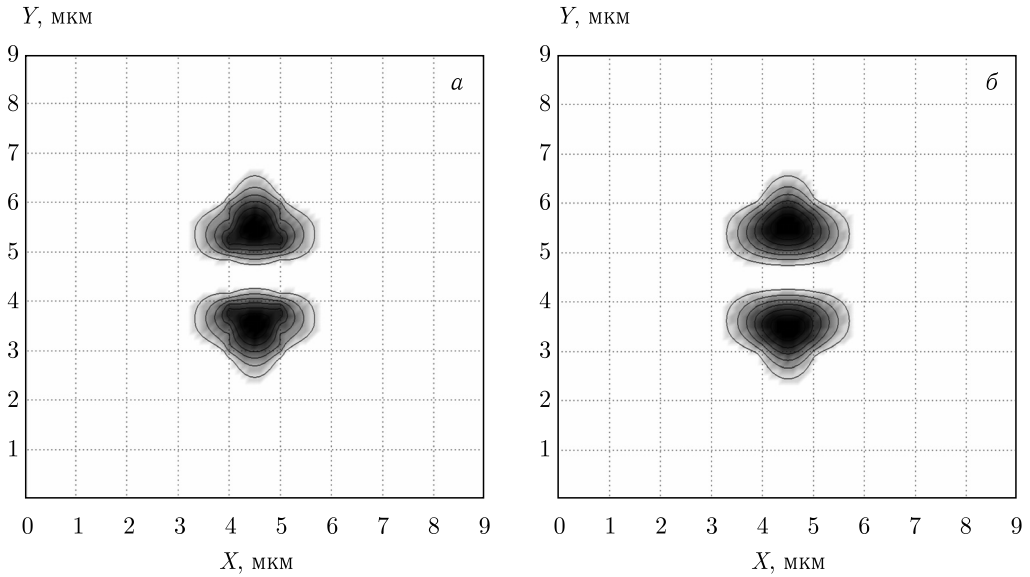


Рис. 2.47. Распределения *а)* квадрата амплитуды компоненты cB_x третьей векторной моды, *б)* интенсивности соответствующей скалярной моды

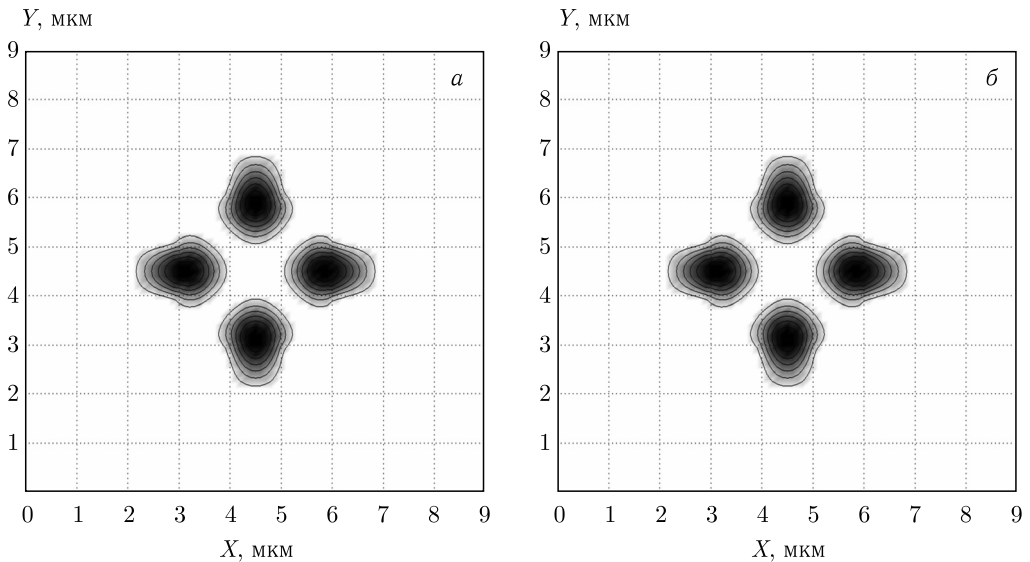


Рис. 2.48. Распределения *а)* квадрата амплитуды компоненты cB_y четвертой векторной моды, *б)* интенсивности соответствующей скалярной моды

Таблица 2.6. Значения интегралов от квадрата амплитуды компонент первых четырех мод

F	$I(F_1 ^2)$	$I(F_2 ^2)$	$I(F_3 ^2)$	$I(F_4 ^2)$
E_x	4,7671	4,7263	0,2488	5,9050
E_y	0,0662	0,0421	4,85388	0,2406
E_z	0,1364	0,2805	0,2899	0,9118
cB_x	0,2799	0,1442	10,6741	1,7101
cB_y	10,1416	10,3738	0,4344	11,1618
cB_z	02481	0,2208	0,3118	1,8900

Характерно, что интегралы продольных компонент составляют незначительную величину, по отношению к доминирующей составляющей из числа поперечных магнитных компонент.

Таким образом, произведенный расчет показывает, что скалярный ССМ-метод обеспечивает достаточно хорошее приближение наиболее интенсивной компоненты векторной моды даже в случае световодов с резкоизменяющимся профилем показателя преломления. Тем не менее, наличие нескольких отличных от нуля векторных компонент, делает применение векторного подхода целесообразным в случае ФКС.

2.4.6. Расчет мод с помощью программы Fimmwave. Коммерческая программа моделирования процессов распространения света FIMMWAVE v.4.6 <http://www.photond.com/products/fimmwave.htm> позволяет рассчитывать моды диэлектрических световодов с произвольным поперечным сечением однородных в продольном направлении, в том числе ФКС, с помощью реализации векторного метода согласованных синусоидальных мод (FMM Solver (real)) и метода эффективного индекса (Eff. Idx. Solver (real)).

Для модели ФКС, сечение которого изображено на рис. 2.38, и длины волны $\lambda = 1,3$ мкм в FIMMWAVE с применением FMM Solver (real), с числом локальных y -мод равным шестидесяти, была получена фундаментальная мода с эффективным индексом 1,4477.

Полученные в работе [109] результаты с помощью реализаций ССМ-и КР-методов в среде Matlab для данной модели сравниваются с результатом работы FIMMWAVE в табл. 2.7.

Таблица 2.7. Абсолютное и относительное отклонения значений эффективного индекса фундаментальной моды ФКС (рис. 2.38), рассчитанных разными методами, от результата, полученного FIMMWAVE

Метод	Эффективный индекс, n_{ef}	Абсолютное отклонение, Δ	Относительное отклонение, δ
КР-метод [113 – 115] $n_x \times n_y = 52 \times 52$	1,4480	0,0003	0,02 %
ССМ-метод (векторный)	1,4473	0,0004	0,03 %
ССМ-метод (скалярный)	1,4491	0,0014	0,10 %
FMM Solver (real)	1,4477	0	0

Как следует из таблицы 2.7, рассчитанные значения отличаются от результата FMM Solver (real) не более чем на одну десятую процента. Распределение интенсивности моды (рис. 2.49), полученное в FIMMWAVE также хорошо согласуется с распределениями интенсивности скалярной моды и основной векторной компоненты, показанными на рис. 2.45.

В сопровождающей документации FIMMWAVE, рекомендовано минимальное число локальных y -мод при расчете с помощью FMM Solver (real) равное тридцати, что согласуется с исследованиями сходимости метода, проведенными в работе [110].

Сравним две реализации СММ-метода: предложенную в работе [108] и коммерческую программу FIMMWAVE — на сходимость относительно числа локальных мод. Изменение относительной ошибки расчета одного из выходных параметров — константы распространения, от числа локальных мод в диапазоне от 10 до 60 для ФКС (рис. 2.38) показано на рис. 2.50.

Из сравнения графиков зависимости относительной ошибки расчета константы распространения от числа локальных мод для двух реализаций СММ-метода следует, что предложенная в работе [108] реализация в среде Matlab дает более устойчивую и монотонную сходимость, а также существенно меньшую ошибку при малом числе локальных мод, чем коммерческая программа FIMMWAVE.

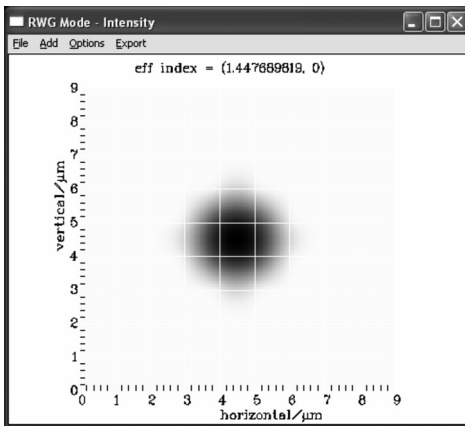


Рис. 2.49. Распределение интенсивности фундаментальной моды модели ФКС (рис. 2.38), полученное в программе FIMMWAVE

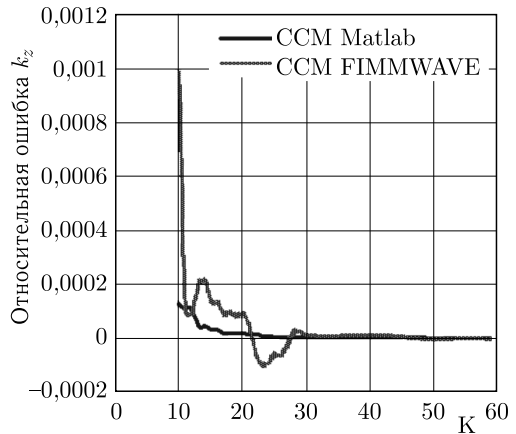


Рис. 2.50. Зависимость относительной ошибки константы распространения фундаментальной моды ФКС (рис. 2.38) от числа локальных y -мод для двух реализаций СММ-метода

Литература к главе 2

1. Joannopoulos J.D., Johnson S.G., Winn J.N. Photonic Crystals: Molding the Flow of Light / Sec. ed. — Princeton Univ. Press, 2008.
2. Prasad P.N. Nanophotonics. — Wiley, 2004.

3. *Yariv A., Yeh P.* Optical wave in crystals: propagation and control of laser radiation. — Wiley-Interscience, 2002.
4. *Fukaya Y., Ohsaki D., Baba T.* Two-dimensional photonic crystal waveguide with 60° bends in a thin slab structure // *J. Jap. Soc. Appl. Phys.* 2000. V. 39, No 5A. P. 2619–2623.
5. *Frei W.R., Tortorelli D.A., Johnson H.T.* Geometry projection method for optimizing photonic nanostructures // *Opt. Lett.* 2007. V. 32, No 1. P. 77–79.
6. *Taflove A.* Computational Electrodynamics: the finite-difference time-domain method. — M.: Artech House, Inc., 1995.
7. *Pernice W.H., Payne F.P., Gallagher D.F.* Numerical investigation of field enhancement by metal nano-particles using a hybrid FDTD-PSTD algorithm // *Opt. Express.* 2007. V. 15. P. 11433–11443.
8. *Kim J.H., Chrostowski L., Baisaillon E., Plant D.V.* DBR, sub-wavelength grating, and photonic crystal slab Fabry-Perot cavity design using phase analysis by FDTD // *Opt. Express.* 2007. V. 15. P. 10330–10339.
9. *Yablonovitch E.* Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics // *Phys. Rev.* 1987. V. 58. P. 2059–2062.
10. *Hugonin J.P., Lalanne P., White T.P., Krauss T.F.* Coupling into slow-mode photonic crystal waveguides // *Opt. Lett.* 2007. V. 32. P. 2639–2640.
11. *Kwan K.C., Tao X.M., Peng G.D.* Transition of lasing modes in disordered active photonic crystals // *Opt. Lett.* 2007. V. 32. P. 2720–2722.
12. *Zabelin V., Dunbar L.A., Thomas N.L., Houndre R., Kotlyar M.V., O'Faolain L., Krauss T.F.* Self-collimating photonic crystal polarization beam splitter // *Opt. Lett.* 2007. V. 32. P. 530–532.
13. *Li Y., Jin J.* Fast full-wave analysis of large-scale three-dimensional photonic crystal device // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2007. V. 24. P. 2406–2415.
14. *Микаэлян А. Л.* Применение свойств среды для фокусирования волн // *Докл. АН СССР.* 1951. Вып. 81. С. 569–571.
15. *Snyder A.W., Mitchell D.J.* Spatial solitons of the power-law nonlinearity // *Opt. Lett.* 1993. V. 18. P. 101–103.
16. *Алименков И.В.* Точно решаемые математические модели в нелинейной оптике // *Компьютерная оптика.* 2005. № 28. С. 45–54.
17. *Алименков И.В.* Нелинейное уравнение Шредингера в трех пространственных переменных // *Компьютерная оптика.* 2005. № 28. С. 55–59.
18. *Yee K.S.* Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media // *IEEE Trans. Antennas and Propagation.* 1966. AP-14. P. 302–307.
19. *Moore G.* Absorbing boundary conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic field equations // *IEEE Trans. Electromagnetic Compatibility.* 1981. V. 23. P. 377–382.
20. *Berenger J.P.* A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // *Computational Phys.* 1994. V. 114. P. 185–200.
21. *Xu Y., Lee R.K., Yariv A.* Adiabatic coupling between conventional dielectric waveguides with discrete translational symmetry // *Opt. Lett.* 2000. V. 25, No 10. P. 755–757.
22. *Mekis A., Joannopoulos J.D.* Tapered couplers for efficient interfacing between dielectric and photonic crystal waveguides // *J. Light Techn.* 2001. V. 19, No 6. P. 861–865.
23. *Happ T.D., Kamp M., Forchel A.* Photonic crystal tapers for ultracompact mode conversion // *Opt. Lett.* 2001. V. 26. P. 14. P. 1102–1104.

24. *Talneau A., Lalanne P., Agio M., Soukoulis C.M.* Low-reflection photonic crystal taper for efficient coupling between guide sections of arbitrary widths // *Opt. Lett.* 2002. V. 27, No 17. P. 1522–1524.
25. *Almeida V.R., Panepucci R.R., Lipson M.* Nanotaper for compact mode conversion // *Opt. Lett.* 2003. V. 28, No 15. P. 1302–1304.
26. *Bienstman P., Assefa S., Johson S.G., Joannopoulos J.D., Petrich G.S., Koloziejski L.A.* Taper structures for coupling into photonic crystal slab waveguides // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2003. V. 20, No 9. P. 1817–1821.
27. *MacNab S.J., Moll N., Vlasov Y.A.* Ultra-low loss photonic integrated circuit with membrane-type photonic crystal waveguide // *Opt. Express.* 2003. V. 11, No 22. P. 2927–2939.
28. *Barclay P.E., Srinivasan K., Painter O.* Design of photonic crystal waveguide for evanescent coupling to optical fiber tapers and integration with high-Q cavities // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2003. V. 20, No 11. P. 2274–2284.
29. *Orobtcchouk R., Layadi A., Gualous H., Pascal D., Koster A., Laval S.* High-efficiency light coupling in a submicrometric silicon-on-insulator waveguide // *Appl. Opt.* 2000. V. 39, No 31. P. 5773–5777.
30. *Lardenois S., Pascal D., Vivien L. et al.* Low-loss submicrometer silicon-on-insulator rib waveguides and corner mirrors // *Opt. Lett.* 2003. V. 28, No 13. P. 1150–1153.
31. *Taillaert D., Vanlaere F., Ayre M. et al.* Grating couplers for coupling between optical fiber and nanophotonic waveguides // *Jap. J. Appl. Phys.* 2006. V. 45, No 8. P. 6071–6077.
32. *Van Laere F., Roelkens G., Ayre M. et al.* Compact and high efficient grating couplers between optical fiber and nanophotonic waveguides // *J. Light. Techn.* 2007. V. 25, No 1. P. 151–156.
33. *Bachim B.L., Ogunsola O.O., Gaylord T.K.* Optical fiber-to-waveguide coupling using carbon-dioxide-laser-induced long-period fiber gratings // *Opt. Lett.* 2005. V. 30, No 16. P. 2080–2082.
34. *Prather D.W., Murakowski J., Shi S. et al.* High-efficiency coupling structure for a single-line-defect photonic crystal waveguide // *Opt. Lett.* 2002. V. 27, No 18. P. 1601–1603.
35. *Kim H., Lee S., Park B.O.S., Lee E.* High efficiency coupling technique for photonic crystal waveguides using a waveguide lens // *OSA Techn. Digest: Frontiers in optics.* 2003. MT68.
36. *Corbett J.C.W., Allington-Smith J.R.* Coupling starlight into single-mode photonic crystal fiber using a field lens // *Opt. Express.* 2005. V. 13, No 17. P. 6527–6540.
37. *Michaelis D., Wachter C., Burger S. et al.* Micro-optical assisted high-index waveguide coupling // *Appl. Opt.* 2006. V. 45, No 8. P. 1831–1838.
38. *Kong G., Kim J., Choi H. et al.* Lensed photonic crystal fiber obtained by use of an arc discharge // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, No 7. P. 894–896.
39. *Pokrovsky A.L., Efros A.L.* Lens based on the use of left-handed materials // *Appl. Opt.* 2003. V. 42, No 28. P. 5701–5705.
40. *Fabre N., Fasquel S., Legrand C. et al.* Toward focusing using photonic crystal flat lens // *Opto-electronics Rev.* 2006. V. 14, No 3. P. 225–232.
41. *Li C., Holt M., Efros A.L.* Far-field imaging by the Veselago lens made of a photonic crystal // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2006. V. 23, No 3. P. 490–497 ().
42. *Matsumoto T., Eom K., Baba T.* Focusing of light by negative refraction in a photonic crystal slab superlens on silicon-on-insulator substrate // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, No 18. P. 2786–2788.

43. *Li C.Y., Holt J.M., Efros A.L.* Imaging by the Veselago lens based upon a two-dimensional photonic crystal with a triangular lattice // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2006. V. 23, No 5. P. 963–968.
44. *Geng T., Lin T., Zhuang S.* All angle negative refraction with the effective phase index of -1 // *Chinese Opt. Lett.* 2007. V. 5, No 6. P. 361–363.
45. *Asatsume T., Baba T.* Abberation reduction and unique light focusing in a photonic crystal negative refractive lens // *Opt. Express.* 2008. V. 16, No 12. P. 8711–8718.
46. *Fabre N., Lalonat L., Cluzel B. et al.* Measurement of a flat lens focusing in a 2D photonic crystal at optical wavelength // *OSA Digest. CLEO/QELS.* 2008. CTuDD6. CA.
47. *Yang S., Hong C., Yang H.* Focusing concave lens photonic crystals with magnetic materials // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2006. V. 23, No 4. P. 956–959.
48. *Luan P., Chang K.* Photonic crystal lens coupler using negative refraction // *Prog. In Electr. Res.* 2007. V. 3, No 1. P. 91–95.
49. *Haxha S., Abdel Malek F.* A novel design of photonic crystal lens based on negative refractive index // *Prog. in Electr. Res.* 2008. V. 4, No 2. P. 296–300.
50. *Lu Z., Shi S., Schuetz C.A., Murakowski J.A., Prather D.* Three-dimensional photonic crystal flat lens by full 3D negative refraction // *Opt. Express.* 2005. V. 13, No 15. P. 5592–5599.
51. *Lu Z., Shi S., Schuetz C.A., Prather D.W.* Experimental demonstration of negative refraction imaging in both amplitude and phase // *Opt. Express.* 2005. V. 13, No 6. P. 2007–2012.
52. *Minin I.V., Minin O.V., Triandafilov Y.R., Kotlyar V.V.* Subwavelength diffractive photonic crystal lens // *Prog. In Electr. Res. B.* 2008. V. 7. P. 257–264.
53. *Pshenay-Severin E., Chen C.C., Pertsch T. et al.* Photonic crystal lens for photonic crystal waveguide coupling // *OSA Techn. Digest: CLEO, 2006, CThK3.*
54. *Kurt H., Citrin D.S.* Graded index photonic crystals // *Opt. Express.* 2007. V. 15, No 3. P. 1240–1253.
55. *Триандафилов Я.Р., Котляр В.В.* Фотонно-кристаллическая линза Микаэляна // *Компьютерная оптика.* 2007. Т. 31, № 3. С. 27–31.
56. *Triandafilov Y.R., Kotlyar V.V.* Photonic crystal Mikaelian lens // *Opt. Mem. Neur. Net.* 2008. V. 17, No 1. P. 1–7.
57. *Nalimov A.G., Kovalev A.A., Kotlyar V.V., Soifer V.A.* Three-dimensional simulation of a nanophotonics device with use of fullwave software // *Opt. Mem. Neur. Netw. (Inform.Opt.).* 2009. V. 18, No 2. P. 85–92.
58. *Kotlyar M.I., Traindaphilov Y.R., Kovalev A.A., Soifer V.A. et al.* Photonic crystal lens for coupling two waveguides // *Appl. Opt.* 2009. V. 48, No 19. P. 3722–3730.
59. *Knight J.C., Birks T.A., Russel P.S.J., Atkin D.M.* All-silica single mode optical fiber photonic crystal cladding // *Opt. Lett.* 1996. V. 21, № 19. P. 1547–1549.
60. *Adams M.J.* An Introduction to Optical Waveguides. — New York: Wiley, 1981.
61. *Yeh P., Yariv A., Marom E.* Theory of Bragg fiber // *J. Opt. Soc. Am.* 1978. V. 68. P. 1196–1201.
62. *Ibanescu M., Fink M., Fan S. et al.* All-dielectric coaxial waveguide // *Science.* 2000. № 289. P. 415–419.
63. *Cojocar E.* Dispersion analysis of hollow-core modes in ultralarge-bandwidth all-silica Bragg fibers, with nanosupports // *Appl. Opt.* 2006. V. 45, No 9. P. 2039–2045.

64. *Foroni M. et al.* Confinement loss spectral behavior in hollow-core Bragg fiber // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 21. P. 3164–3166.
65. *Zhelticov A.M.* Ray-optic analysis of the (bio)sensing ability of ring-cladding hollow waveguides // Appl. Opt. 2008. V. 47, No 3. P. 474–479.
66. *Dupuis A. et al.* Guiding in the visible with «colorful» solid-core Bragg fiber // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 19. P. 2882–2884.
67. *Fang Q. et al.* Dispersion design of all-solid photonic bandgap fiber // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. V. 24, No 11. P. 2899–2905.
68. *Ren G. et al.* Low-loss all-solid photonic bandgap fiber // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 9. P. 1023–1025.
69. *Yang R. et al.* Research of the effects of air hole shape on the properties of microstructured optical fibers // Opt. Eng. 2004. V. 43, No 11. P. 2701–2706.
70. *Yue Y. et al.* Highly birefringent elliptical-hole photonic crystal fiber with squeezed hexagonal lattice // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 5. P. 469–471.
71. *Choi H.-G. et al.* Dispersion and birefringence of irregularly microstructured fiber with elliptical core // Appl. Opt. 2007. V. 46, No 35. P. 8493–8498.
72. *Mafi A., Moloney J.V.* Shaping Modes in Multicore Photonic Crystal Fiber // IEEE Photonics Tech. Lett. 2005. V. 17. P. 348–350.
73. *Michaille L. et al.* Characteristics of a Q-switched multicore photonic crystal fiber laser with a very large mode field area // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 1. P. 71–73.
74. *Szpułak M. et al.* Experimental and theoretical investigations of birefringent holey fibers with a triple defect // Appl. Opt. 2005. V. 44. P. 2652–2658.
75. *Eguchi M., Tsuji Y.* Geometrical birefringence in square-lattice holey fibers having a core consisting of multiple defect // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. V. 24, No 4. P. 750–755.
76. *Zhang Ch. et al.* Design of tunable bandgap guidance in high-index filled microstructure fibers // J. Opt. Soc. Am. A. 2006. V. 23, No 4. P. 782–786.
77. *Sun J. et al.* Refractive index measurement using photonic crystal fiber // Opt. Eng. 2007. V. 46, No 1. P. 014402.
78. *Sun J., Chan C.C.* Hybrid guiding in liquid-crystal photonic crystal fibers // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. V. 24, No 10. P. 2640–2646.
79. *Larsen T. et al.* Optical devices based on liquid crystal photonic bandgap fibres // Opt. Express. 2003. V. 11, No 20. P. 2589–2596.
80. *Haakestad M. W. et al.* Electrically tunable photonic bandgap guidance in a liquid-crystal-filled photonic crystal fiber // IEEE Photon. Technol. Lett. 2005. V. 17, No 4. P. 819–821.
81. *Domachuk P., Nguyen H.C., Eggleton B.J.* Transverse probed microfluidic switchable photonic crystal fiber devices // Photon. Technol. Lett. 2004. V. 16, No 8. P. 1900–1902.
82. *Ferrando A. et al.* Nearly zero ultraflattened dispersion in photonic crystal fibers // Opt. Lett. 2000. V. 25. P. 790–792.
83. *Broderick N.G.R.* Modeling large air fraction holey optical fiber // J. Opt. Tech. 2000. V. 18. P. 50–56.
84. *Broderick N.G.R. et al.* Nonlinearity in holey optical fibers: measurement and future opportunities // Opt. Lett. 1999. V. 24. P. 1395.
85. *White T.P.* Multipole method for microstructured optical fibers // J. Opt. Soc. Am. A. 2002. V. 19, No 10. P. 2322–2330.
86. *Steel M.J. et al.* Symmetry and degeneracy in microstructured optical fibers // Opt. Lett. 2001. V. 26. P. 488–490.

87. Yamashita E., Ozeki S., Atsuki K. Modal analysis method for optical fibers with symmetrically distributed multiple cores // J. Lightwave Techn. 1985. V.3. P. 341–346.
88. Tayed G. et al. Scattering by a random set of parallel cylinders // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. P. 2526–2538.
89. Sudbo A.S. Film mode matching: A versatile method for mode field calculations in dielectric waveguides // Pure Appl. Opt. (J. Europ. Opt. Soc. A). 1993. V.2. P. 211–233.
90. Cucinotta A. et al. Holey fiber analysis through the finite element method // IEEE Photon. Technol. Lett. 2002. V. 14. P. 1530–1532.
91. Brechet F. et al. Complete analysis of characteristics of propagation into photonic crystal fibers by the finite element method // Opt. Fiber Technol. 2000. V. 6(2). P. 181–191.
92. Guan N. et al. Boundary Element Method for Analysis of Holey Optical Fibers // J. Lightwave Technol. 2003. V. 21(8).
93. Cheng H. et al. Fast accurate integral equation methods for the analysis of photonic crystal fibers // Opt. Express. 2004. V. 12(16). P. 3791–3805.
94. Riishede J.A., Mortensen N.S., Legsgaard J. «Poor Man's Approach» to Modeling Micro-Structured Optical Fibers // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2003. V.5. P. 534–538.
95. Hardley G.R., Smith R.E. Full-vector waveguide modeling using an iterative finite-difference method with transparent boundary conditions // J. Lightwave Technol. 1994. V. 13. P. 465–469.
96. Zhu Z., Brown T.G. Full-vectorial finite-difference analysis of microstructured optical fibers // Opt. Express. 2002. V. 10(17). P. 853–864.
97. Jiang W. et al. An Extended FDTD Method With Inclusion of Material Dispersion for the Full-Vectorial Analysis of Photonic Crystal Fibers // J. Lightwave Technol. 2006. V. 24(11). P. 4417–4423.
98. Xu C.L. et al. Full-vectorial mode calculations by finite difference method // Inst Elec. Eng. Proc.-J. 1994. V. 141. P. 281–286.
99. Huang W.P. et al. The finite-difference vector beam propagation method. Analysis and Assessment // J. Lightwave Technol. 1992. V. 10. P. 295–305.
100. Xu C.L. Efficient and accurate vector mode calculations by beam propagation method // J. Lightwave Technol. 1993. V. 11(9). P. 1209–1215.
101. Itoh T. Numerical techniques for microwave and millimeter-wave passive structures — New York: Wiley, 1988.
102. Sorrentino R. Transverse resonance technique // Ch. 11 in Itoh's book [101].
103. Schlosser W., Unger H.G. Partially filled waveguides and surface waveguides of rectangular cross section. — New York: Advances in Microwaves Academic, 1966.
104. Peng S.T., Oliner A.A. Guidance and leakage properties of a class of open dielectric waveguides: Part I Mathematical formulations // IEEE Trans. Microwave Theory Techn. 1981. V. MTT-29. P. 843–855.
105. Sudbo A.S. Improved formulation of the film mode matching method for mode field calculations in dielectric waveguides // Pure Appl. Opt. (J. Europ. Opt. Soc. A). 1994. V.3. P. 381–388.
106. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Нахождение констант распространения методом Крылова при расчете мод фотонных волноводов // Компьютерная оптика. ИСОИ РАН. 2007. Т. 31. С. 27–30.

107. Ruhe A.A. Rational Krylov Algorithm For Nonlinear Matrix Eigenvalue Problems // Zapiski Nauchnih Seminarov, Steklov Mathematical Institute. 2000. V. 268. P. 176–180.
108. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет векторных мод оптического волновода // Компьютерная оптика. ИСОИ РАН. 2005. Т. 27. С. 89–94.
109. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Практическое применение метода согласованных синусоидальных мод для моделирования некоторых распространенных типов волноводов // Компьютерная оптика. ИСОИ РАН. 2005. Т. 27. С. 84–88.
110. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет пространственных мод оптических волноводов с неоднородным поперечным сечением методом согласованных синусоидальных мод // Компьютерная оптика. ИСОИ РАН. 2003. Т. 25. С. 41–48.
111. Jarlebring E., Voss H. Rational Krylov for nonlinear eigenproblems, an iterative projection method // Appl. Math. 2005. V. 50. P. 543–554.
112. Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. — М.: Радио и связь, 1987.
113. Kotlyar V.V., Shuyupova Y.O. Calculating spatial modes in photonic crystal fibers based on applying finite-difference method to wave equations // Proc. of ICO Topical Meeting on Optoinformatics. Information Photonics 2006, September 4–7, 2006, St. Petersburg, Russia. P. 483–485.
114. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Сравнение аналитического и полученного конечно-разностным методом решений для круглого волокна // Компьютерная оптика. ИСОИ РАН. 2005. Т. 28. С. 41–44.
115. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет мод фотонно-кристаллического световода разностным методом // Оптический журнал. 2007. Т. 74, № 9. С. 600–608.

Глава 3

ОСТРАЯ ФОКУСИРОВКА СВЕТА КОМПОНЕНТАМИ МИКРООПТИКИ

3.1. Численные и экспериментальные методы исследования острой фокусировки света

3.1.1. BOR-FDTD-метод. Так как фокусировка с целью преодоления дифракционного предела зачастую осуществляется вблизи раздела двух сред, где необходимо учитывать векторную природу электромагнитного поля, то для численных исследований необходим аппарат, основанный на точном решении уравнений Максвелла. Для расчета острой фокусировки лазерного излучения нами преимущественно использовалась модификация конечно-разностного метода решений уравнений Максвелла (FDTD-метода) для цилиндрической системы координат. Модификация метода для цилиндрической системы координат была предложена в 1994 году и названа BOR-FDTD [1]. Сокращение BOR означает Body Of Revolution (т.е. тело вращения). Использование BOR-FDTD по сравнению с оригинальным трехмерным FDTD-методом позволяет путем устранения производной по азимутальному углу свести трехмерную задачу к двумерной, вследствие чего сокращаются вычислительные и временные затраты. Из недостатков метода можно отметить, во-первых, что формулы, используемые в основной вычисляемой области, нельзя применить на оси. Данная проблема решается использованием для расчета компонент поля на оси конечно-разностных уравнений отличных от уравнений вычисляемой области. Во-вторых, при расчете распространения электромагнитной волны методом BOR-FDTD наблюдается зависимость скорости распространения волны от направления распространения (или числовая дисперсия). Данная проблема возникает вследствие того, что размер ячейки (3D ячейки в цилиндрической системе координат) вблизи оси получается меньше размера ячейки на значительном удалении от оси. При этом влияние числовой дисперсии тем меньше, чем меньше размер вычисляемой области вдоль радиальной координаты.

В качестве ключевых этапов развития метода BOR-FDTD отметим создание модификации для наклонного падения входного излучения [2], модификацию для расчета распределения компонент поля на некотором расстоянии от вычисляемой области [3], и модификацию идеально согласованных слоев (PML), которая позже была применена для цилиндрической системы координат [4].

Как можно заметить из приведенных выше ссылок, метод BOR-FDTD преимущественно развивался не для оптического диапазона, а для микроволнового или радиодиапазона. Для оптического диапазона он был применен,

например, в статье [5], в которой, во-первых, приводится подробный вывод конечно-разностных уравнений, во-вторых, показано, что решение согласуется с известным аналитическим решением на шаре, в-третьих, метод применяется для анализа прохождения света через дифракционные линзы. Этой же группой исследователей метод позже был применен для расчета наклонного падения излучения на ДОО [6]. В качестве аналитического решения, с которым проводилось сравнение, выступало наклонное падение плоской волны на границу раздела двух сред. Решение в таком случае может быть найдено с помощью известных коэффициентов Френеля. Кроме того, было показано, что, во-первых, увеличение угла падения приводит к увеличению времени моделирования (шаг дискретизации по времени зависит от угла падения): увеличение угла от нуля до 10 градусов привело к увеличению времени в 600 раз. Во-вторых, несмотря на это, метод BOR-FDTD позволяет рассчитать прохождение света через дифракционную линзу со значительно меньшими вычислительными затратами, чем трехмерный метод FDTD: для расчета методом BOR-FDTD потребовалось в 90 раз меньше оперативной памяти и в 4,5 раза меньше времени.

В работе [7] метод BOR-FDTD (модификация) применяется для анализа нелинейной брэгговской решетки и брэгговского резонатора. В работе [8] метод применен для расчета оптимальных параметров безапертурного зонда для сканирующей ближнепольной оптической микроскопии. Поверхностные плазмоны исследуются в работе [9]. Расчеты BOR-FDTD-методом распределения интенсивности света после прохождения через дифракционную линзу приведены в работе [10]. Дисперсионные характеристики дифракционных линз изучались в работе [11]. В работе [12] метод применен для проверки одномодовости оптоволокна. Данная работа заслуживает отдельного внимания, потому что в ней проводится также сравнение распределения интенсивности, полученного методом BOR-FDTD, с известным аналитическим решением. Моделирование прохождения света с длиной волны $\lambda = 1,55$ мкм через одномодовое волокно (показатель преломления сердечника $n_c = 1,460$, показатель преломления оболочки $n_o = 1,455$, диаметр сердечника 10 мкм) показало, что коэффициент корреляции равен $VAF = 0,99$ (т.е. кривые совпадают на 99 %). Такой хороший результат был достигнут, несмотря на достаточно большой размер ячейки сетки Y_{ee} по пространству: $\Delta r = \Delta z = \lambda/10$.

Конечно-разностные схемы для уравнений Максвелла в цилиндрической системе координат. Система уравнений Максвелла в дифференциальной форме в системе СИ, в отсутствие сторонних токов, имеет вид

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля, \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля, \mathbf{D} — вектор (электрическое смещение) электрической

индукции, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции, \mathbf{J} — вектор плотности тока проводимости, ρ — плотность свободного электрического заряда.

Для дальнейших рассуждений нам понадобятся только первые два уравнения из системы уравнений (3.1):

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (3.2)$$

К этим уравнениям следует добавить еще три материальных уравнения, характеризующих вещество с которым взаимодействует электромагнитная волна:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mu_0 \mathbf{H}.\end{aligned}\quad (3.3)$$

где ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, ε_0 и μ_0 — электрическая и магнитная постоянные, σ — электрическая проводимость.

В дальнейшем будем считать, что рассматриваемая нами среда безынерционна, то есть диэлектрическая и магнитная проницаемости не зависят от времени, и изотропна, т.е. значения диэлектрической и магнитной проницаемостей не зависят от выбора системы координат. Тогда, с учетом материальных уравнений (3.1), система (3.2) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{cases}\quad (3.4)$$

В цилиндрической системе координат оператор ротора имеет вид

$$\operatorname{rot} (\mathbf{A}) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z. \quad (3.5)$$

Тогда система уравнений (3.4) может быть записана в следующий виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_r}{\partial t} + \sigma E_r, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_\varphi}{\partial t} + \sigma E_\varphi, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z, \quad (3.8)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_r}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu \mu_0 \frac{\partial H_\varphi}{\partial t}, \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Разложим все компоненты поля в ряд Фурье по азимутальному углу φ :

$$E_\gamma(r, z, \varphi, t) = \frac{E_{\gamma 0}(r, z, t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} E_{\gamma, k}^{(1)}(r, z, t) \cos(k\varphi) + E_{\gamma, k}^{(2)}(r, z, t) \sin(k\varphi), \quad (3.12)$$

$$H_\gamma(r, z, \varphi, t) = \frac{H_{\gamma 0}(r, z, t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} H_{\gamma, k}^{(1)}(r, z, t) \cos(k\varphi) + H_{\gamma, k}^{(2)}(r, z, t) \sin(k\varphi), \quad (3.13)$$

где

$$E_{\gamma, k}^{(1)}(r, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E_{\gamma, k}(r, z, \varphi, t) \cos(k\varphi) d\varphi,$$

$$E_{\gamma, k}^{(2)}(r, z, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} E_{\gamma, k}(r, z, \varphi, t) \sin(k\varphi) d\varphi;$$

для магнитных компонент аналогично.

Подстановка (3.12) и (3.13) в уравнения (3.6)–(3.11) позволит найти производную по азимутальному углу φ , а коэффициенты перед соответствующими множителями $\sin(k\varphi)$ и $\cos(k\varphi)$ образуют четыре независимые системы уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_{\varphi, 0}}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{r, 0}}{\partial t} + \sigma E_{r, 0}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{\varphi, 0})}{\partial r} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{z, 0}}{\partial t} + \sigma E_{z, 0}, \\ \frac{\partial E_{r, 0}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z, 0}}{\partial r} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{\varphi, 0}}{\partial t}; \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{r, 0}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z, 0}}{\partial r} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{\varphi, 0}}{\partial t} + \sigma E_{\varphi, 0}, \\ -\frac{\partial E_{\varphi, 0}}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{r, 0}}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_{\varphi, 0})}{\partial r} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{z, 0}}{\partial t}; \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{r}kH_{z,k}^{(1)} - \frac{\partial H_{\varphi,k}^{(2)}}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{r,k}^{(2)}}{\partial t} + \sigma E_{r,k}^{(2)}, \\ \frac{\partial E_{r,k}^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z,k}^{(2)}}{\partial r} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{\varphi,k}^{(2)}}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{\varphi,k}^{(2)})}{\partial r} + \frac{1}{r}kH_{r,k}^{(1)} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{z,k}^{(2)}}{\partial t} + \sigma E_{z,k}^{(2)}, \\ \frac{\partial H_{r,k}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z,k}^{(1)}}{\partial r} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{\varphi,k}^{(1)}}{\partial t} + \sigma E_{\varphi,k}^{(1)}, \\ -\frac{1}{r}kE_{z,k}^{(2)} - \frac{\partial E_{\varphi,k}^{(1)}}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{r,k}^{(1)}}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_{\varphi,k}^{(1)})}{\partial r} - \frac{1}{r}kE_{r,k}^{(2)} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{z,k}^{(1)}}{\partial t}; \end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H_{r,k}^{(2)}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z,k}^{(2)}}{\partial r} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{\varphi,k}^{(2)}}{\partial t} + \sigma E_{\varphi,k}^{(2)}, \\ -\frac{1}{r}kE_{z,k}^{(1)} - \frac{\partial E_{\varphi,k}^{(2)}}{\partial z} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{r,k}^{(2)}}{\partial t}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rE_{\varphi,k}^{(2)})}{\partial r} - \frac{1}{r}kE_{r,k}^{(1)} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{z,k}^{(2)}}{\partial t}, \\ -\frac{1}{r}kH_{z,k}^{(2)} - \frac{\partial H_{\varphi,k}^{(1)}}{\partial z} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{r,k}^{(1)}}{\partial t} + \sigma E_{r,k}^{(1)}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rH_{\varphi,k}^{(1)})}{\partial r} - \frac{1}{r}kH_{r,k}^{(2)} = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial E_{z,k}^{(1)}}{\partial t} + \sigma E_{z,k}^{(1)}, \\ \frac{\partial E_{r,k}^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial E_{z,k}^{(1)}}{\partial r} = -\mu\mu_0 \frac{\partial H_{\varphi,k}^{(1)}}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Для дальнейших вычислений понадобятся не все уравнения (3.14)–(3.17). Выбор того или иного уравнения будет зависеть от поляризации света, моделирование распространения которого будет изучаться. Нами будут рассмотрены линейная и радиальная поляризации.

Разностные схемы для линейной поляризации. Рассмотрим нормальное падение электромагнитной волны с линейной поляризацией в начальной плоскости $z = 0$. Электрический вектор такой волны будет иметь только одну проекцию $E^{\text{inc}} = E_y = E_0(r) \cos(\omega t)$, где ω — циклическая частота монохроматической волны, $E_0(r)$ — амплитуда волны в плоскости $z = 0$. Выразим E^{inc} через цилиндрические составляющие:

$$\begin{cases} E_r^{\text{inc}} = E^{\text{inc}} \sin \varphi, \\ E_{\varphi}^{\text{inc}} = E^{\text{inc}} \cos \varphi. \end{cases} \quad (3.18)$$

Разложим компоненты поля в ряд Фурье:

$$E_{\varphi,0}^{\text{inc}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E^{\text{inc}} \cos \varphi d\varphi = 0, \quad (3.19)$$

$$E_{r,0}^{\text{inc}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E^{\text{inc}} \sin \varphi d\varphi = 0, \quad (3.20)$$

$$E_{\varphi,k}^{\text{inc}(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E^{\text{inc}} \cos \varphi \cos k\varphi d\varphi = \begin{cases} E^{\text{inc}}, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} \quad (3.21)$$

$$E_{\varphi,k}^{\text{inc}(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E^{\text{inc}} \cos \varphi \sin k\varphi d\varphi = 0, \quad (3.22)$$

$$E_{r,k}^{\text{inc}(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E^{\text{inc}} \sin \varphi \cos k\varphi d\varphi = 0, \quad (3.23)$$

$$E_{r,k}^{\text{inc}(2)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E^{\text{inc}} \sin \varphi \sin k\varphi d\varphi = \begin{cases} E^{\text{inc}}, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases} \quad (3.24)$$

Таким образом, разложение компонент напряженности представляется в виде

$$E_{\varphi,1}^{\text{inc}(1)} = E_0 \cos \omega t, \quad (3.25)$$

$$E_{r,1}^{\text{inc}(2)} = E_0 \cos \omega t. \quad (3.26)$$

Следовательно, из уравнений (3.14)–(3.17) для дальнейших вычислений понадобятся только уравнения для вычисления компонент: $E_{\varphi,1}^{(1)}$; $E_{r,1}^{(2)}$; $E_{z,1}^{(2)}$; $H_{r,1}^{(1)}$; $H_{z,1}^{(1)}$; $H_{\varphi,1}^{(2)}$, т. е. система уравнений (3.16) для случая $k=1$. Ее конечно-разностная аппроксимация с учетом сетки Уее для цилиндрической системы координат (рис. 3.1) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon(i + \frac{1}{2}, j) \varepsilon_0 \frac{E_{r,1}^{(2)n+1}(i + \frac{1}{2}, j) - E_{r,1}^{(2)n}(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t} = \\ = -\frac{1}{r(i + \frac{1}{2})} H_{z,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - \\ - \frac{H_{\varphi,1}^{(2)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_{\varphi,1}^{(2)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta z}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i, j + \frac{1}{2}) \varepsilon_0 \frac{E_{z,1}^{(2)n+1}(i, j + \frac{1}{2}) - E_{z,1}^{(2)n}(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\
= \frac{1}{r(i)} \frac{r(i + \frac{1}{2}) H_{\varphi,1}^{(2)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - r(i - \frac{1}{2}) H_{\varphi,1}^{(2)n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta r} + \\
+ \frac{1}{r(i)} H_{r,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}), \quad (3.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon(i, j) \varepsilon_0 \frac{E_{\varphi,1}^{(1)n+1}(i, j) - E_{\varphi,1}^{(1)n}(i, j)}{\Delta t} = \\
= \frac{H_{r,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_{r,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta z} - \\
- \frac{H_{z,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_{z,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta r}, \quad (3.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \mu_0 \frac{H_{\varphi,1}^{(2)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_{\varphi,1}^{(2)n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\
= \frac{E_{r,1}^{(2)n}(i + \frac{1}{2}, j + 1) - E_{r,1}^{(2)n}(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta z} - \\
- \frac{E_{z,1}^{(2)n}(i + 1, j + \frac{1}{2}) - E_{z,1}^{(2)n}(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta r}, \quad (3.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \mu_0 \frac{H_{r,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_{r,1}^{(1)n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\
= \frac{1}{r(i)} E_{z,1}^{(2)n}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{E_{\varphi,1}^{(1)n}(i, j + 1) - E_{\varphi,1}^{(1)n}(i, j)}{\Delta z}, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
- \mu_0 \frac{H_{z,1}^{(1)n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_{z,1}^{(1)n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t} = \\
= \frac{1}{r(i + \frac{1}{2})} \frac{r(i + 1) E_{\varphi,1}^{(1)n}(i + 1, j) - r(i) E_{\varphi,1}^{(1)n}(i, j)}{\Delta r} - \\
- \frac{1}{r(i + \frac{1}{2})} E_{r,1}^{(2)n}(i + \frac{1}{2}, j), \quad (3.32)
\end{aligned}$$

где Δt , Δz , Δr — шаги дискретности по соответствующим координатам: $z = i\Delta z$, $r = j\Delta r$, $t = n\Delta t$. Отсчеты электрических компонент вычисляются в целые моменты времени, $t = n\Delta t$, а отсчеты магнитных векторов вычисляются в полуцелые моменты времени, $t = (n + 1/2)\Delta t$. Уравнения (3.27)–(3.32)

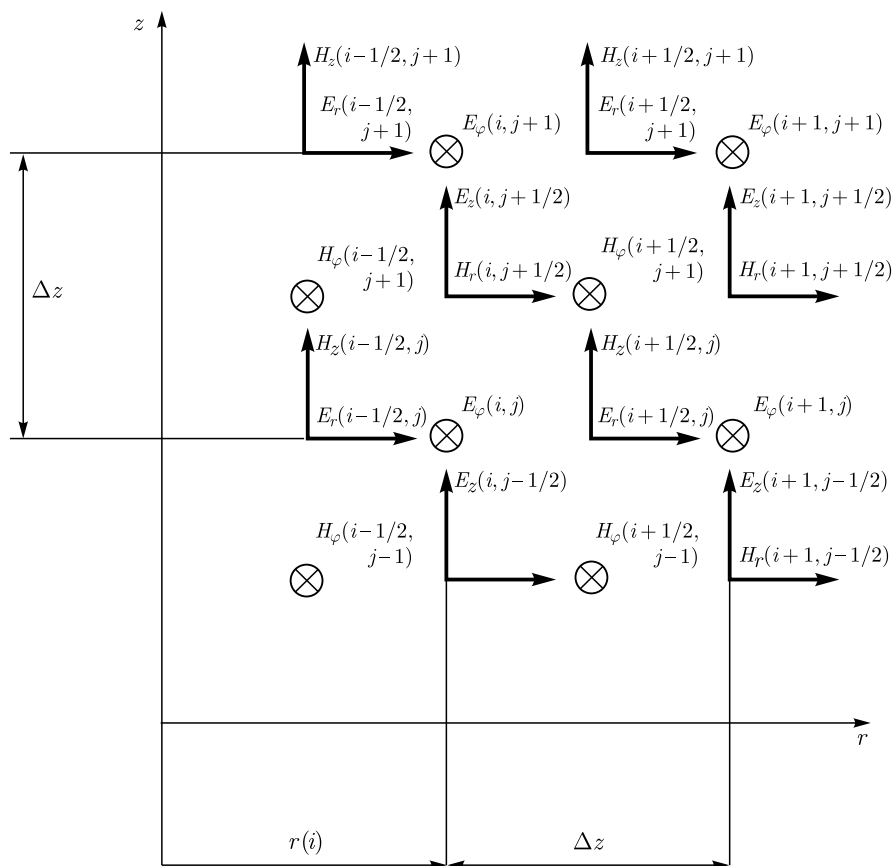


Рис. 3.1. Сетка с половинным шагом Yee в цилиндрической системе координат

представляют собой пример условно-устойчивой разностной схемы, которая решается методом прогонки с учетом граничных условий. Для устойчивой сходимости решения системы (3.27)–(3.32) шаги дискретизации следует выбирать, удовлетворяя следующему неравенству [5]:

$$c\Delta t \leq \frac{\min(\Delta r, \Delta z)}{2}, \quad (3.33)$$

где c — скорость света в вакууме.

Разностные схемы для радиальной поляризации. Если на оптический элемент, ось симметрии которого совпадает с оптической осью, нормально падает электромагнитная монохроматическая волна с радиальной поляризацией, то у электрического вектора падающей волны остается только одна радиальная компонента:

$$E^{\text{inc}} = E_r = E_0(r) \cos \omega t. \quad (3.34)$$

Для радиальной поляризации у электрического вектора падающей волны также остается только одна фурье-компонента: $E^{\text{inc}} = E_{r,0}$, а из уравнений

(3.14)–(3.17) останется только система уравнений (3.32). Ее конечно-разностная аппроксимация имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon(i + \frac{1}{2}, j) \varepsilon_0 \frac{E_{r,0}^n(i + \frac{1}{2}, j) - E_{r,0}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta t} = \\ = \frac{H_{\varphi,0}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_{\varphi,0}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta z}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(i, j + \frac{1}{2}) \varepsilon_0 \frac{E_{z,0}^n(i, j + \frac{1}{2}) - E_{z,0}^{n-1}(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ = \frac{1}{r(i)} \frac{r(i + \frac{1}{2}) H_{\varphi,0}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - r(i - \frac{1}{2}) H_{\varphi,0}^{n-\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta r}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} -\mu_0 \frac{H_{\varphi,0}^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_{\varphi,0}^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})}{\Delta t} = \\ = \frac{E_{r,0}^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - E_{r,0}^n(i + \frac{1}{2}, j)}{\Delta z} - \\ - \frac{E_{z,0}^n(i + 1, j + \frac{1}{2}) - E_{z,0}^n(i, j + \frac{1}{2})}{\Delta r}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Сетка Уее примет вид, изображенный на рис. 3.2.

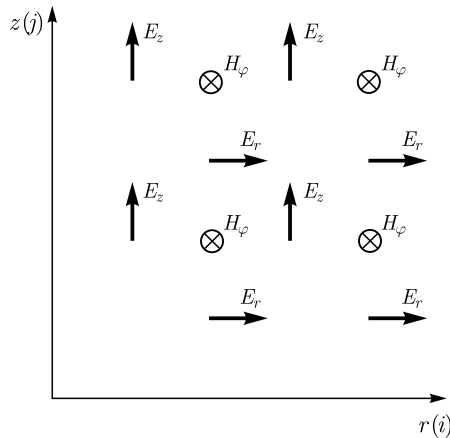


Рис. 3.2. Сетка с половинным шагом Уее в цилиндрической системе координат для радиальной поляризации

Особенность вычисления поля на оптической оси. Из уравнений (3.27)–(3.32) видно, что их применение невозможно при $r = 0$, т.е. на оси радиально-симметричного оптического элемента.

Первое уравнение Максвелла из (3.1) имеет вид

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}. \quad (3.38)$$

Рассмотрим контур, представляющий собой окружность с радиусом равным половине ячейки сетки Δr и расположенный перпендикулярно оси (рис. 3.3).

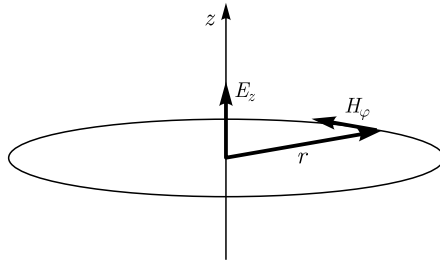


Рис. 3.3. Расположение компонент на оптической оси

Проинтегрируем уравнение (3.38) по площади, ограниченной радиусом $r = \Delta r/2$:

$$\int_s (\nabla \times \mathbf{H}) ds = \int_s \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) ds. \quad (3.39)$$

В соответствии с законом Стокса можем свести интеграл по площади к интегралу по контуру:

$$\int_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \right) ds. \quad (3.40)$$

Из рисунка 3.3 видно, что

$$H_\varphi \left(2\pi \frac{\Delta r}{2} \right) = \left(\frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z \right) \pi \left(\frac{\Delta r}{2} \right)^2, \quad (3.41)$$

или

$$H_\varphi \frac{4}{\Delta r} = \left(\frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z \right). \quad (3.42)$$

При отсутствии токов в вычисляемой области

$$H_\varphi \frac{4}{\Delta r} = \frac{\partial D_z}{\partial t}. \quad (3.43)$$

Конечно-разностный аналог такого уравнения будет иметь вид

$$\frac{D_z^{n+1} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) - D_z^n \left(j + \frac{1}{2}, i \right)}{\Delta t} = \frac{4}{\Delta r} H_\varphi. \quad (3.44)$$

Из этого уравнения находим значение продольной составляющей электрической индукции на оси:

$$D_z^{n+1} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) = D_z^n \left(j + \frac{1}{2}, i \right) + \frac{4\Delta t}{\Delta r} H_\varphi. \quad (3.45)$$

σ_z	$\sigma_r; \sigma_z; \gamma_r$
	$\sigma_r; \gamma_r$
σ_z	$\sigma_r; \sigma_z; \gamma_r$

Рис. 3.4. Расположение PML слоев для радиально-симметричного случая

Граничные условия в виде поглощающих слоев. Поглощающие слои располагаются на границах вычисляемой области (рис. 3.4) и предназначены для моделирования распространения электромагнитной волны в бесконечность. Поглощающие слои для BOR-FDTD считаются по отличным от обычного FDTD формулам. В данной работе будет использоваться модификация для расчета PML, предложенная в работе [5].

Расчет ведется в два этапа: на первом этапе вычисляются значения индукции электрического и магнитного полей по значениям напряженностей на предыдущем шаге по времени, а на втором этапе уже вычисляются значения новых напряженностей.

Уравнения Максвелла для монохроматического поля перепишем в виде

$$\begin{cases} \nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = i\omega\epsilon_0\tilde{\epsilon}\tilde{\mathbf{E}}, \\ \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0\tilde{\mu}\tilde{\mathbf{H}}, \end{cases} \quad (3.46)$$

где

$$\tilde{\mu} = \tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{s_\varphi s_z}{s_r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s_z s_r}{s_\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s_r s_\varphi}{s_z} \end{pmatrix}, \quad s_r = 1 + \frac{\sigma_r}{i\omega\epsilon_0}, \quad s_\varphi = 1 + \frac{\gamma_r}{i\omega\epsilon_0} \text{ и } s_z = 1 + \frac{\sigma_z}{i\omega\epsilon_0}.$$

Раскрыв оператор ротора и избавившись от производных по азимутальному углу φ (аналогично тому, как это происходило в свободном пространстве), запишем уравнения Максвелла в следующем виде:

$$i\omega \frac{s_\varphi s_z}{s_r} \mu_0 H_{r,k} = \frac{k}{r} E_{z,k} + \frac{\partial E_{\varphi,k}}{\partial z}, \quad (3.47)$$

$$i\omega \frac{s_r s_z}{s_\varphi} \mu_0 H_{\varphi,k} = -\frac{\partial E_{r,k}}{\partial z} + \frac{\partial E_{z,k}}{\partial r}, \quad (3.48)$$

$$i\omega \frac{s_r s_\varphi}{s_z} \mu_0 H_{z,k} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_{\varphi,k})}{\partial r} - \frac{k}{r} E_{r,k}, \quad (3.49)$$

$$i\omega \frac{s_\varphi s_z}{s_r} \epsilon_0 E_{r,k} = -\frac{k}{r} H_{z,k} - \frac{\partial H_{\varphi,k}}{\partial z}, \quad (3.50)$$

$$i\omega \frac{s_r s_z}{s_\varphi} \epsilon_0 E_{\varphi,k} = \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z,k}}{\partial r}, \quad (3.51)$$

$$i\omega \frac{s_r s_\varphi}{s_z} \varepsilon_0 E_{z,k} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{\varphi,k})}{\partial r} - \frac{k}{r} H_{r,k}. \quad (3.52)$$

Двухшаговый метод основан на расчете промежуточных значений электрической и магнитной индукции:

$$B_{r,k} = \mu_0 \frac{s_\varphi}{s_r} H_{r,k}, \quad (3.53)$$

$$B_{\varphi,k} = \mu_0 \frac{s_z}{s_\varphi} H_{\varphi,k}, \quad (3.54)$$

$$B_{z,k} = \mu_0 \frac{s_r}{s_\varphi} H_{z,k}, \quad (3.55)$$

$$D_{r,k} = \varepsilon_0 \frac{s_\varphi}{s_r} E_{r,k}, \quad (3.56)$$

$$D_{\varphi,k} = \varepsilon_0 \frac{s_z}{s_\varphi} E_{\varphi,k}, \quad (3.57)$$

$$D_{z,k} = \varepsilon_0 \frac{s_r}{s_\varphi} E_{z,k}. \quad (3.58)$$

Подставим их в уравнения выше:

$$i\omega s_z \mu_0 B_{r,k} = \frac{k}{r} E_{z,k} + \frac{\partial E_{\varphi,k}}{\partial z}, \quad (3.59)$$

$$i\omega s_r \mu_0 B_{\varphi,k} = -\frac{\partial E_{r,k}}{\partial z} + \frac{\partial E_{z,k}}{\partial r}, \quad (3.60)$$

$$i\omega s_\varphi \mu_0 B_{z,k} = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r E_{\varphi,k})}{\partial r} - \frac{k}{r} E_{r,k}, \quad (3.61)$$

$$i\omega s_z \varepsilon_0 D_{r,k} = -\frac{k}{r} H_{z,k} - \frac{\partial H_{\varphi,k}}{\partial z}, \quad (3.62)$$

$$i\omega s_r \varepsilon_0 D_{\varphi,k} = \frac{\partial H_{r,k}}{\partial z} - \frac{\partial H_{z,k}}{\partial r}, \quad (3.63)$$

$$i\omega s_\varphi \varepsilon_0 D_{z,k} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{\varphi,k})}{\partial r} - \frac{k}{r} H_{r,k}. \quad (3.64)$$

Для обновления компонент электрической индукции конечно-разностные формулы для первого этапа примут следующий вид:

$$\begin{aligned} D_r^{n+1} \left(j, i + \frac{1}{2} \right) &= \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t \sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t \sigma_z} D_r^n \left(j, i + \frac{1}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 \Delta t}{r \left(i + \frac{1}{2} \right) (2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t \sigma_z)} H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(j, i + \frac{1}{2} \right) - \\ &\quad - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 \Delta t}{\Delta z (2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t \sigma_z)} \left(H_\varphi^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - H_\varphi^{n+\frac{1}{2}} \left(j - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
D_z^{n+1} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) = & \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} D_z^n \left(j + \frac{1}{2}, i \right) - \\
& - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{r(i)(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r)} H_r^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) + \\
& + \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{r(i)\Delta r(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r)} \left(r \left(i + \frac{1}{2} \right) H_\varphi^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - \right. \\
& \left. - r \left(i - \frac{1}{2} \right) H_\varphi^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i - \frac{1}{2} \right) \right), \quad (3.66)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_\varphi^{n+1} (j, i) = & \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} D_\varphi^n (j, i) + \\
& + \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{\Delta z(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r)} \left(H_r^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) - H_r^{n+\frac{1}{2}} \left(j - \frac{1}{2}, i \right) \right) - \\
& - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{\Delta r(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r)} \left(H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(j, i + \frac{1}{2} \right) - H_z^{n+\frac{1}{2}} \left(j, i - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (3.67)
\end{aligned}$$

Для обновления компонент магнитной индукции получим:

$$\begin{aligned}
B_r^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) = & \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} B_r^{n-\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i \right) + \\
& + \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{r(i)(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z)} E_z^n \left(j + \frac{1}{2}, i \right) + \\
& + \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{\Delta z(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z)} (E_\varphi^n (j + 1, i) - E_\varphi^n (j, i)), \quad (3.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_z^{n+\frac{1}{2}} \left(j, i + \frac{1}{2} \right) = & \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} B_z^{n-\frac{1}{2}} \left(j, i + \frac{1}{2} \right) + \\
& + \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{r \left(i + \frac{1}{2} \right) (2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r)} E_r^n \left(j, i + \frac{1}{2} \right) - \\
& - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{r \left(i + \frac{1}{2} \right) \Delta r (2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r)} (r(i+1) E_\varphi^n (j, i+1) - r(i) E_\varphi^n (j, i)), \quad (3.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_\varphi^{n+\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) = & \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} B_\varphi^{n-\frac{1}{2}} \left(j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2} \right) - \\
& - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{\Delta z(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r)} \left(E_r^n \left(j + 1, i + \frac{1}{2} \right) - E_r^n \left(j, i + \frac{1}{2} \right) \right) - \\
& - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0\Delta t}{\Delta r(2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r)} \left(E_z^n \left(j + \frac{1}{2}, i + 1 \right) - E_z^n \left(j + \frac{1}{2}, i \right) \right). \quad (3.70)
\end{aligned}$$

На втором этапе происходит вычисление компонент напряженностей по формулам (3.53)–(3.58):

$$E_r^{n+1} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} E_r^n + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} D_r^{n+1} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} D_r^n \right), \quad (3.71)$$

$$E_z^{n+1} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} E_z^n + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} D_z^{n+1} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} D_z^n \right), \quad (3.72)$$

$$E_\varphi^{n+1} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} E_\varphi^n + \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} D_\varphi^{n+1} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} D_\varphi^n \right), \quad (3.73)$$

$$H_r^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} H_r^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} B_r^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r} B_r^{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (3.74)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} H_z^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} B_z^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_r} B_z^{n-\frac{1}{2}} \right), \quad (3.75)$$

$$H_\varphi^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\sigma_z}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} H_\varphi^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\mu\mu_0} \left(\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} B_\varphi^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 - \Delta t\gamma_r}{2\varepsilon\varepsilon_0 + \Delta t\sigma_z} B_\varphi^{n-\frac{1}{2}} \right). \quad (3.76)$$

3.1.2. Векторные формулы Ричардса–Вольфа. В большинстве работ по моделированию острой фокусировки лазерного пучка используется векторная теория Дебая или аналогичная ей теория Ричардса–Вольфа. В этих теориях электромагнитное поле в изображении точечного источника, находящегося на бесконечности, апланатической оптической системой выражено в интегральной форме как разложение по плоским волнам. В некоторых работах используются дифракционные формулы Рэлея–Зоммерфельда. Так, в работе [13] на основе формул Дебая, которые верны, если фокусное расстояние много больше длины волны, показано, что с помощью параболического зеркала или плоской дифракционной линзы с числовой апертурой $NA = 0,98$, можно радиально-поляризованный полый гауссов пучок с амплитудой $r \exp(-r^2/w^2)$, где r — радиальная координата, w — радиус перетяжки гауссова пучка, сфокусировать апланатической линзой в фокальное пятно площадью $HMA = 0,210\lambda^2$ и $HMA = 0,157\lambda^2$, соответственно. Рассчитано также [13], что для параболического зеркала с числовой апертурой $NA = 1$ площадь фокального пятна будет меньше $HMA = 0,154\lambda^2$. А если при этом ограничить гауссов пучок узкой кольцевой диафрагмой, то площадь фокального пятна будет еще меньше, $HMA = 0,101\lambda^2$.

В работе [14] рассматривалась непараксиальное распространение спирально-поляризованных пучков Лагерра–Гаусса (ЛГ). Показано, что такие пучки также являются кандидатами для получения острой фокусировки. Для получения радиально-поляризованных лазерных пучков можно использовать обычный интерферометр, в плечи которого вставлены две фазовые ступеньки, дающие задержку на полдлины волны, и повернутые одна относительно другой на 90 градусов вокруг оптической оси [15]. В работе [16] с помощью формул Ричардса–Вольфа (РВ-формулы) промоделирована фокусировка линейно-поляризованного плоского пучка с помощью апланатической линзы с высокой числовой апертурой совместно с кольцевой (2 или 3 кольца) ступенчатой фазовой маской. Вычислены параметры маски, при которых достигается сверхразрешение на 20% вдоль оптической оси. С помощью РВ-формул показано [17], что при фокусировке радиально-поляризованной лазерной моды TEM_{11} , имеющей в своем сечении два светлых кольца, с помощью апланатической линзы с $NA = 1,2$ в воде ($n = 1,33$) в фокальной области возникает темная область, окруженная со всех сторон светом (оптическая бутылка). Причем продольный размер этой области равен 2λ , а поперечный — λ . В работе [18] с помощью РВ-формул рассмотрено распространение оптического вихря с круговой поляризацией. Показано, что при топологическом заряде $n = 1$ и при выборе такого знака, что спиральное вращение фазы оптического вихря компенсирует вращение поляризации в обратную сторону, в фокальной плоскости ($NA = 0,9$) возникает круглое фокальное пятно диаметром меньшим длины волны.

С помощью интеграла Рэлея–Зоммерфельда (РЗ-интеграл) рассматривается непараксиальное распространение моды ЛГ с радиальной поляризацией, но без спиральной фазовой составляющей [19]. Показано, что при выборе параметра непараксиальности $f = (kw)^{-1}$, где k — волновое число света, w — радиус перетяжки гауссова пучка, равный 0,5, на расстоянии Френеля от перетяжки диаметр светового пятна составляет около $0,4\lambda$ при $p = 3$, где p — порядок многочлена Лагерра. В работе [20] для решения уравнения Максвелла в цилиндрических координатах использовалось разложение в ряд по параметру непараксиальности $f = \theta/2$, где θ — угол дифракции, с точностью θ^5 . В качестве примера рассмотрена дифракция пучка типа аксикон–Гаусс. Показано, что при угле дифракции $\theta = 0,75$ радиус перетяжки составляет $0,424\lambda$. На основе РЗ-интеграла получены аналитические выражения [21], описывающие непараксиальное распространение элегантных мод ЛГ, в поперечном сечении которых всегда формируется кольцевое распределение интенсивности. В работе [22] сообщается о новом виде резиста для литографии PMMA-DR1, который обладает поляризационно-фильтрующими свойствами и реагирует только на продольную составляющую электрического вектора электромагнитной волны. В работе экспериментально показано, что радиально-поляризованный пучок аргонового лазера, $\lambda = 514$ нм, проходя аксикон с $NA = 0,67$, формирует фокальное пятно диаметром $FWHM = 0,89\lambda$, но после записи на резист формируется пятно размером $0,62\lambda$.

С помощью РВ-формул показано [23], что радиально-поляризованные высшие моды лазерного излучения $R-TEM_{p1}$ позволяют уменьшить диаметр фокального пятна. Так, при $NA = 1$ и при фокусировке с помощью аплана-

тической линзы для номеров мод $p = 0, 1, 2, 3$ получаются фокальные пятна с диаметрами $\text{FWHM} = 0,582\lambda, 0,432\lambda, 0,403\lambda, 0,378\lambda$. А в работе [24] с помощью РВ-формул рассмотрена векторная дифракция и фокусировка апланатической линзой линейно-поляризованного пучка с эллиптической радиальной симметрией с эксцентриситетом 0,87. Числовая апертура была равна $NA = 0,9$. В этом случае формируется эллиптическое фокальное пятно площадью $\text{HMA} = 0,56\lambda^2$. В работе [25] рассмотрено непараксиальное распространение (поправки 5-го порядка) радиально-поляризованных пучков ЛГ $R\text{-TEM}_{p1}$. Показано, что при угле дифракции $\theta = 2(kw)^{-1}$ больше 0,5 непараксиальных поправок 5-го порядка уже недостаточно для описания моды $R\text{-TEM}_{21}$. В работе [26] с помощью РВ-формул показано, что при освещении выходного зрачка сферической линзы плоским, гауссовым или Бессель-Гауссовым пучками радиально-поляризованного света, диаметр фокального пятна будет равен $\text{FWHM} = 0,6\lambda, 1,2\lambda, 1,4\lambda$, соответственно, при $NA = 1,4$, $\lambda = 632,8$ нм, $n = 1,5$. Также [27] с помощью РВ-формул показано, что для падающего радиально-поляризованного Бессель-Гауссова пучка $J_1(2r)\exp(-r^2)$ и бинарной фазовой пластинки Френеля фокальное пятно имеет диаметр $\text{FWHM} = 0,425\lambda/NA$. После того, как к зонной пластинке Френеля добавили трехзонную оптимизированную пластинку, получили еще меньший диаметр фокального пятна, $\text{FWHM} = 0,378\lambda/NA$.

С помощью параболического зеркала диаметром 19 мм и $NA = 0,999$, и с помощью радиально-поляризованного лазерного пучка с длиной волны 632,8 нм [28] экспериментально получено фокальное пятно с наименьшей на сегодняшний день площадью, $\text{HMA} = 0,134\lambda^2$. Радиальную поляризацию получали из линейной поляризации лазерного пучка с помощью четырех полуволновых пластинок, расположенных в четырех квадрантах апертуры пучка и повернутых на 45 градусов (вдоль биссектрисы в каждом квадранте). Падающий пучок имел амплитуду Бесселя-Гаусса. Моделирование осуществлялось с помощью формул Дебая. Распределение интенсивности в фокальной плоскости было измерено с помощью флуоресцентного шарика диаметром 40 нм. Для сравнения напомним, что радиус диска Эйри в скалярном приближении равен $0,61\lambda$ при $NA = 1$, а в работе [28] получено фокальное пятно с радиусом от максимума до первого минимума равным $0,45\lambda$. Напомним, что лучший экспериментальный результат для апланатической линзы равен $\text{HMA} = 0,16\lambda^2$ [29].

Интересный результат получен в работе [30], где с помощью формулы Дебая показано, что радиально-поляризованные моды ЛГ четных порядков LG_p^0 при числовой апертуре $NA = 0,85$ после прохождения специальной кольцевой амплитудной маски фокусируются в малое фокальное пятно почти без боковых лепестков с площадью по полуспаду $\text{HMA} = 0,276\lambda^2$. Использование амплитудной маски не уменьшает размер фокального пятна, но уменьшает уровень боковых лепестков в фокальной картине дифракции и в 5 раз уменьшает глубину резкости. В работе [31] на основе скалярного варианта РВ-формулы аналитически исследуются оптимальные для получения высокого разрешения функции выходного зрачка. В двумерном случае, для излучения, распространяющегося в плоских волноводах, и для фокусировки

этого излучения на выходе волновода может быть использована фотонно-кристаллическая линза.

Согласно векторной теории Дебая вектор напряженности электрического поля электромагнитной волны в области фокусировки в цилиндрических координатах (r, ψ, z) выражается через амплитуду $l(\theta)$ сходящейся сферической волны в координатах выходного зрачка апланатической оптической системы (вектор линейной поляризации направлен вдоль оси y):

$$E_x(r, \psi, z) = \frac{-iA}{2\pi} \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta \sqrt{\cos \theta} \sin 2\varphi \times \\ \times (1 - \cos \theta) l(\theta) \exp [ikz \cos \theta - ikr \sin \theta \cos(\psi - \varphi)], \quad (3.77)$$

$$E_y(r, \psi, z) = \frac{iA}{2\pi} \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta \sqrt{\cos \theta} [(1 + \cos \theta) + (1 - \cos \theta) \cos 2\varphi] \times \\ \times l(\theta) \exp [ikz \cos \theta - ikr \sin \theta \cos(\psi - \varphi)], \quad (3.78)$$

$$E_z(r, \psi, z) = \frac{iA}{\pi} \int_0^\alpha d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin^2 \theta \sqrt{\cos \theta} \cos \varphi \times \\ \times l(\theta) \exp [ikz \cos \theta - ikr \sin \theta \cos(\psi - \varphi)], \quad (3.79)$$

где A — постоянная, $\alpha = \arcsin(NA)$, k — волновое число света. Например, гауссова функция в плоскости зрачка будет иметь вид

$$l(\theta) = \exp \left(\frac{-\rho^2}{w^2} \right) = \exp \left[- \left(\frac{\beta \sin \theta}{\sin \alpha} \right)^2 \right], \quad (3.80)$$

где β — постоянная.

Ричардс и Вольф на основе формул Дебая (3.30)–(3.32) получили более простые формулы, выполнив интегрирование по азимутальному углу φ для радиально-поляризованного света [80]:

$$E_r(r, z) = A \int_0^\alpha \sin 2\theta \sqrt{\cos \theta} l(\theta) \exp [ikz \cos \theta] J_1(kr \sin \theta) d\theta, \quad (3.81)$$

$$E_z(r, z) = 2iA \int_0^\alpha \sin^2 \theta \sqrt{\cos \theta} l(\theta) \exp [ikz \cos \theta] J_0(kr \sin \theta) d\theta, \quad (3.82)$$

где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ — функции Бесселя. Из формул (3.81) и (3.82) видно, что радиально-поляризованная волна не зависит от угла ψ , имеет только две электрические составляющие E_r и E_z и что $E_r(r=0) = 0$ при любом z и любой функции $l(\theta)$. Фокус находится в начале координат $(r, \psi, z) = (0, \psi, 0)$.

При замене апланатической линзы на зонную пластинку Френеля вместо множителя $(\cos \theta)^{1/2}$ в (5.81), (3.82) следует использовать другой множитель $(\cos \theta)^{-3/2}$ [13].

В декартовых координатах для линейно-поляризованного света (вектор поляризации направлен вдоль оси y) РВ-формулы примут следующий вид:

$$E_x(r, \psi, z) = -iA \sin 2\psi \int_0^\alpha \sin \theta \sqrt{\cos \theta} \times \\ \times l(\theta)(1 - \cos \theta) \exp [ikz \cos \theta] J_2(kr \sin \theta) d\theta, \quad (3.83)$$

$$E_y(r, \psi, z) = -iA \cos 2\psi \int_0^\alpha \sin \theta \sqrt{\cos \theta} l(\theta)(1 - \cos \theta) \exp [ikz \cos \theta] J_2(kr \sin \theta) \times \\ \times d\theta - iA \int_0^\alpha \sin \theta \sqrt{\cos \theta} l(\theta)(1 + \cos \theta) \exp [ikz \cos \theta] J_0(kr \sin \theta) d\theta, \quad (3.84)$$

$$E_z(r, \psi, z) = -2A \cos \psi \int_0^\alpha \sin^2 \theta \sqrt{\cos \theta} l(\theta) \exp [ikz \cos \theta] J_1(kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.85)$$

В случае азимутальной поляризации света отличной от нуля будет только азимутальная составляющая электрического поля:

$$E_\psi(r, z) = 2A \int_0^\alpha \sin \theta \sqrt{\cos \theta} l(\theta) \exp [ikz \cos \theta] J_1(kr \sin \theta) d\theta. \quad (3.86)$$

Из формулы (3.86) видно, что азимутально-поляризованная волна не зависит от угла ψ . Именно этими формулами (3.81)–(3.86) пользовались для моделирования в работах [13, 16–18, 21, 23, 24, 26–30], изучая острую фокусировку лазерного света.

Минимальное фокальное пятно: аналитическая оценка. Для анализа распределения интенсивности света в фокусе радиально-симметричной оптической системы с высокой числовой апертурой применяется скалярная форма РВ-формулы [31]:

$$U(r, z) = -ikf \int_0^\alpha P(\theta) \exp [ikz \cos \theta] J_0(kr \sin \theta) d\theta, \quad (3.87)$$

где $U(r, z)$ — комплексная амплитуда света вблизи фокуса, $P(\theta)$ — функция зрачка оптической системы, f — фокусное расстояние. Если сравнить (3.87) с выражением (3.82) для продольной составляющей радиально-поляризованного света, то можно заключить, что скалярная амплитуда, описывающая непараксиальную фокусировку света (3.87), пропорциональна продольной

составляющей сходящейся сферической волны с радиальной поляризацией (3.82). Используя справочные интегралы [32], можно оценить минимально возможный диаметр фокального пятна в фокусе непараксиальной оптической системы. Используя справочный интеграл

$$\int_0^{\pi} \left\{ \begin{array}{c} \sin(bx) \\ \cos(bx) \end{array} \right\} J_v(c \sin x) dx = \pi \left\{ \begin{array}{c} \sin(b\pi/2) \\ \cos(b\pi/2) \end{array} \right\} J_{(v-b)/2}(c/2) J_{(v+b)/2}(c/2), \quad (3.88)$$

и положив в (3.87) $P(\theta) = \sin \theta$, $\alpha = \pi$, а в (3.88) $v = 0$, $b = 1$, $c = kr$, получим из уравнения (3.87) для однородного зрачка в фокальной плоскости $z = 0$ следующую комплексную амплитуду:

$$U_1(r, z = 0) = -2ikf \sin(kr)/(kr). \quad (3.89)$$

Из уравнения (3.89) следует, что минимальный диаметр фокального пятна (двойное расстояние от максимума до первого минимума) равен

$$D_1 = \lambda, \quad (3.90)$$

диаметр такого фокального пятна по полуспаду равен $\text{FWHM} = 0,44\lambda$, а площадь пятна по полуспаду равна $\text{НМА} = 0,152\lambda^2$. Последняя цифра согласуется с расчетом работы [13].

К такому же по порядку величины результату можно прийти, если выбрать функцию зрачка равномерной, в виде $P(\theta) = 1$. Тогда вместо (3.87), с учетом (3.88) получим ($v = 0$, $b = 0$):

$$U_2(r, z = 0) = -ikf\pi J_0^2(kr/2). \quad (3.91)$$

Из (3.91) следует, что в этом частном случае диаметр фокального пятна (двойное расстояние от максимума до первого минимума интенсивности) равен

$$D_2 = 1,53\lambda. \quad (3.92)$$

Если осветить фокусирующую линзу узким кольцевым полем с функцией зрачка $P(\theta) = \delta(\theta - \alpha)$, то из (5.87) получим для амплитуды в фокусе:

$$U_3(r, z = 0) = -2ikf J_0(krNA). \quad (3.93)$$

Из (3.93) следует, что диаметр фокального пятна, аналогичный (3.90) и (3.92), будет равен ($NA = 1$)

$$D_3 = 0,76\lambda, \quad (3.94)$$

а диаметр такого фокального пятна по полуспаду равен $\text{FWHM} = 0,36\lambda$, площадь пятна по полуспаду равна $\text{НМА} = 0,101\lambda^2$. Последняя цифра согласуется с расчетом работы [13].

Формулы (3.90), (3.92) и (3.94) дают только оценку минимального диаметра фокального пятна с помощью скалярной формулы (3.87), но при острой фокусировке требуется учитывать векторный характер поля, когда все три компоненты электрического поля дают сравнимый вклад в формирование фокальной картины. Хотя значение (3.94) можно считать точной минимальной площадью фокального пятна, которое может быть сформировано с помощью

фокусирующей оптической системы при освещении ее радиально-поляризованным светом. Это следует из того, что скалярная формула (3.87) совпадает с выражением для продольной компоненты поля (3.82), а радиальная компонента (3.81) радиально-поляризованного света на оптической оси равна нулю. Но формулы Дебая и Ричардса–Вольфа являются приближенными (они получены при условии, что фокусное расстояние оптической системы много больше длины волны), поэтому далее будем рассматривать строгое решение задачи дифракции на основе численного решения уравнений Максвелла. Только при точном решении задачи дифракции, и в случае фокусного расстояния сравнимого с длиной волны можно надеяться получить площадь фокального пятна меньше $\text{НМА} = 0,101\lambda^2$.

3.1.3. Сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия.

Так как часть исследуемых нами объектов осуществляют фокусировку в ближнем поле, где присутствуют затухающие волны, для экспериментальной проверки результатов нами использовались средства сканирующей ближнепольной оптической микроскопии (СБОМ), позволяющей эти затухающие волны детектировать. Идея СБОМ заключается в использовании зондов, которые, находясь в непосредственной близости от поверхности образца, способны преобразовывать затухающие волны в распространяющиеся. Первый сканирующий ближнепольный микроскоп был создан в 1984 году Дитером Полем и его коллегами [33]. Таким образом, первый СБОМ был создан всего на два года позднее создания сканирующего туннельного микроскопа — первого зондового микроскопа [34].

В наших исследованиях использовался микроскоп Ntegra Spectra (NT-MDT); его изображение, а также оптическая схема проводимых экспериментов показаны на рис. 3.5.

Измерения распределения интенсивности в фокусе, формируемом исследуемым объектом, проводились следующим образом. Линейно-поляризованный свет от твердотельного лазера с длиной волны 532 нм или от гелий-неонового лазера с длиной волны 633 нм, фокусировался линзой $L1$ на поверхность стеклянной подложки, на которой был расположен исследуемый объект мик-

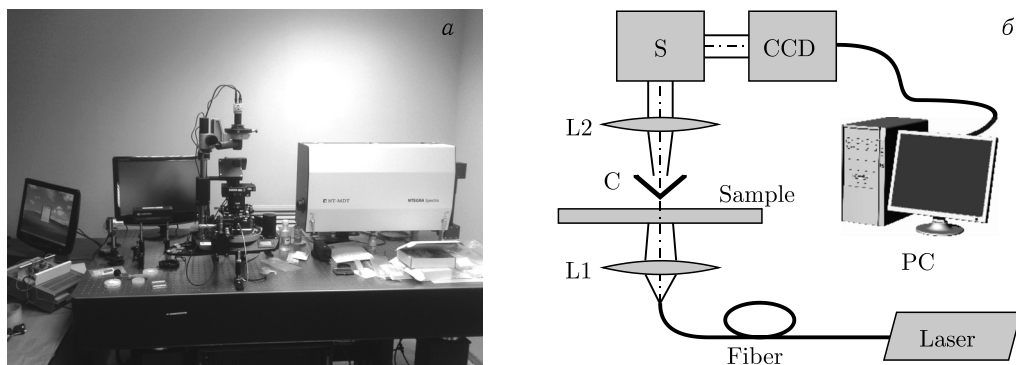


Рис. 3.5. Общий вид микроскопа Ntegra Spectra (а); оптическая схема эксперимента (б): L — лазер, $L1$, $L2$ — линзы, $A1$ — исследуемый объект, $C1$ — кантилевер с отверстием, S — спектрометр, CCD — ПЗС-камера, PC — компьютер

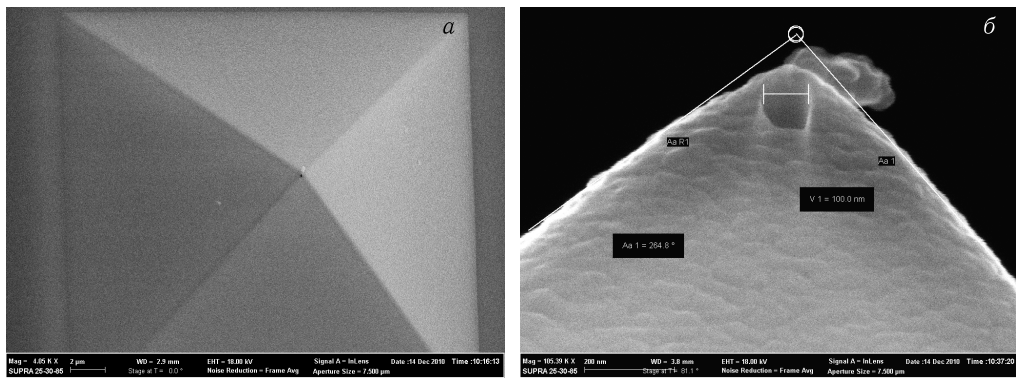


Рис. 3.6. Вид металлического четырехгранного кантиливера с отверстием 100 нм, используемого в микроскопе ближнего поля: вид сверху в электронном микроскопе (а) и увеличенный вид сбоку (б). Отверстие показано горизонтальным отрезком

рооптики. За ним был расположен кантиливер $C1$ (рис.3.6), с помощью которого осуществлялось сканирование параллельно поверхности подложки на разных расстояниях от нее. Свет, который проходил сквозь отверстие кантиливера, далее собирался линзой $L2$, проходил через спектрометр S (для фильтрации постороннего излучения) и регистрировался CCD-камерой.

3.2. Аксикон

Для фокусировки света при использовании затухающих волн требуется сформировать фокусное пятно вблизи поверхности раздела сред. Простейший рефракционный оптический элемент, который может фокусировать свет вблизи своей поверхности — это конический аксикон. Аксикон для использования в оптических приложениях впервые был предложен в 1954 году [35] (дифракционный аналог — в 1958 году [36]). Заметим также, что аналитические выражения для осевой интенсивности при дифракции плоской волны и гауссова пучка на обычном коническом аксиконе были впервые получены в работе [37]. Однако, несмотря на такой солидный возраст, интерес к исследованию аксиконов и подобных им структур не угасает. Так, например, в работе [38] была разработана приближенная теория, которая хорошо описывает дифракционный аксикон с периодом колец $T < 5\lambda$. В этом случае бинарный аксикон можно рассматривать как дифракционную решетку, если центральную часть аксикона закрыть непрозрачным диском. Показано, что для аксикона с периодом $T = 5\lambda$, радиусом 40λ , на расстоянии 40λ от поверхности аксикона диаметр фокального пятна будет равен $\text{FWHM} = 0,88\lambda$. В работе [39] экспериментально исследовался бинарный аксикон (диаметр 30 мм) с периодом $T = 33$ мкм (он соответствует коническому аксикону из стекла с углом при вершине 88°), выполненным на резисте ZEP520A (показатель преломления $n = 1,46$). Было показано, что диаметр лазерного пучка не зависит от длины волны, что на расстоянии от 0 до $z = 50$ мм радиус бесселева пучка увеличивается от 1,2 мкм ($\lambda = 532$ нм) до 12,5 мкм, и далее, от $z = 50$ мм до $z = 100$ мм, сохраняет этот радиус.

Кроме того, аксикон используется для того, чтобы сформировать на определенном участке оптической оси бездифракционный пучок Бесселя, интерес к изучению которых также не ослабевает. Так, например, в работе [40] с помощью световода диаметром 30 мкм с кольцевым сечением из плавленного кварца (толщина кольца 3 мкм), на конце которого была помещена линза с радиусом кривизны 70 мкм, был сформирован бесселев пучок диаметром 20 мкм и протяженностью 500 мкм (длина волны $\lambda = 1,55$ мкм). В работе [41] FDTD-методом моделировался 2D фотонный кристалл из прямоугольной сетки диэлектрических стержней в форме аксикона: основание $20a$, высота аксикона $10a$, показатель преломления стержней $n = 3,13$, радиус стержней $0,22a$, длина волны $\lambda = a/0,36$, a — период решетки стержней. Показано, что на расстоянии $z < 30a$ формируется расходящийся Бесселев пучок с диаметром по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 1,5\lambda$. Экспериментально [42] с помощью радиально-поляризованного лазерного пучка ($\lambda = 532$ нм), конического аксикона и иммерсионной микролинзы с числовой апертурой $NA = 1,25$ в серебряной пленке толщиной 50 нм (с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = -10,1786 - i0,8238$) была сформирована поверхностная плазмонная волна в виде концентрических колец, описываемых функцией Бесселя первого порядка. Диаметр центрального осевого кольца — 278 нм, толщина — 250 нм $\approx 0,5\lambda$. Картина поверхностного плазмона наблюдалась в микроскопе ближнего поля Veeco Augora 3 с разрешением 50–100 нм. Аналогично с помощью He–Ne лазера ($\lambda = 632,8$ нм), излучающего радиально-поляризованный свет, аксикона и иммерсионной линзы с $NA = 1,4$ в пленке золота толщиной 44 нм ($\epsilon = 0,3 + i3,089$) формировался поверхностный плазмон с фокусной точкой в центре диаметром $\text{FWHM} = 0,22$ мкм $= 0,35\lambda$ [43]. Плазмон наблюдался с помощью латексного шара диаметром 175 нм.

3.2.1. Острая фокусировка света радиальной поляризации с помощью микроаксикона. Впервые возможность преодоления дифракционного предела с помощью изменения состояния поляризации была продемонстрирована в статье [29], где с помощью радиально-поляризованного пучка было получено фокусное пятно с размерами. Полученное значение площади пятна было на 35 % меньше площади пятна, полученного с помощью линейно поляризованного света. Для конверсии линейно-поляризованного света в радиально-поляризованный использовалась четырехсекторная пластинка, в каждый сектор которой была помещена полуволновая пластинка, осуществляющая поворот плоскости поляризации на 90 градусов. Способ фокусировки с использованием радиально поляризованного света был назван данной группой исследователей «острой» («sharp focusing» [29]) или «сжатой» («tight focusing» [44]) фокусировкой. В данной работе будет применяться первый термин — острая фокусировка, однако необходимо отметить, что второе название в зарубежной литературе используется чаще.

Последующие работы по острой фокусировке были в основном направлены на уменьшение размеров фокуса путем подбора поляризации, амплитуды и фазы освещающего пучка, а также параметров фокусирующего элемента. При этом часто целью работ наряду с уменьшением ширины фокального пятна являлось увеличение глубины фокусировки.

В качестве фокусирующего элемента в ранних работах использовался широкоапертурный апланатический объектив [29]. Позднее в работе [1] на примере фокусировки радиально-поляризованного пучка Эрмита–Гаусса (амплитуда падающего пучка пропорциональна $\rho \cdot \exp\{-\rho^2/\omega^2\}$, где ρ — радиальная координата, а ω — радиус пучка) численно (моделирование проводилось с помощью формул Ричардса–Вольфа (РВ-формул)) было показано, что параболическое зеркало и плоская дифракционная линза могут сфокусировать свет в пятно с меньшими размерами, чем апланатический объектив. Так при фокусировке плоской дифракционной линзой с числовой апертурой $NA = 0,98$ площадь фокусных пятен составила $HMA = 0,14\lambda^2$ (это в 2,38 раз меньше площади, сформированной апланатическим объективом с такой же числовой апертурой). В работе [28] экспериментально было подтверждено, что параболическое зеркало с диаметром 19 мм и числовой апертурой $NA = 0,999$ позволяет сфокусировать радиально-поляризованный лазерный пучок с длиной волны $\lambda = 632,8$ нм в пятно с площадью $HMA = 0,134\lambda^2$ ($FWHM = 0,41\lambda$). Радиальную поляризацию получали из линейной поляризации лазерного пучка с помощью четырех полуволновых пластинок, расположенных в четырех квадрантах апертуры пучка и повернутых на 45 градусов (вдоль биссектрисы в каждом квадранте). Падающий пучок имел амплитуду бessel-гаусса. Моделирование осуществлялось с помощью формул Дебая. Распределение интенсивности в фокальной плоскости было измерено с помощью флуоресцентного шарика диаметром 40 нм. В работе [45] было численно проведено сравнение фокусировки фазовой зонной пластинкой (с восемью зонами и числовой апертурой $NA = 0,996$) плоской линейно поляризованной волны с радиально поляризованным бessel-гауссовым пучком. Было показано, что такая фазовая зонная пластинка позволяет сфокусировать бessel-гауссов пучок в фокусное пятно с диаметром по полуспаду $FWHM = 0,39\lambda$, а плоскую линейно поляризованную волну в эллиптическое пятно с диаметрами $FWHM_x = 0,87\lambda$ и $FWHM_y = 0,39\lambda$. В работе [46] в качестве фокусирующего элемента рассматривался линзовый аксикон (линза плюс аксикон), и ширина получившегося фокусного пятна по полуспаду интенсивности была равна $FWHM = 0,43\lambda$, а глубина фокусировки (DOF — Depth Of Focus) тоже по полуспаду интенсивности — $DOF = 1,8\lambda$.

Кроме того, было показано, что добавление бинарных фазовых пластинок к фокусирующему элементу также помогает уменьшить размер фокального пятна. Такие фазовые пластинки работают как поляризационный фильтр, позволяющий выделить продольную компоненту в сфокусированном пучке. В работе [47] радиально поляризованный бessel-гауссов пучок фокусируется линзой с числовой апертурой $NA = 0,95$, перед которой расположена бинарная фазовая пластинка, состоящая из 5 кольцевых зон (четные зоны обеспечивают набег фазы на π по сравнению с нечетными). В [47] расчетный фокус имел диаметр $FWHM = 0,43\lambda$ и глубину $DOF = 4\lambda$. В другой работе [48] при фокусировке бessel-гауссова пучка с такими же параметрами, но используя бинарную фазовую пластинку с четырьмя зонами (а не с пятью как в [47]), удалось рассчитать фокус с диаметром $FWHM = 0,44\lambda$ и глубиной $DOF = 3\lambda$. В работе [27] также моделировалась фокусировка бessel-гауссова пучка фазовой зонной пластинкой и апла-

натическим объективом. Получилось уменьшение размера фокуса при добавлении к фокусирующим элементам фазовой трехзонной пластинки: при использовании апланатического объектива диаметр пятна удается уменьшить с $\text{FWHM} = 0,584\lambda/NA$ до $\text{FWHM} = 0,413\lambda/NA$, а при использовании зонной пластинки — с $\text{FWHM} = 0,425\lambda/NA$ до $\text{FWHM} = 0,378\lambda/NA$. Аналогичный подход предлагается в работе [50], где использовано понятие «outward-input-outward polarization», чтобы показать, что после прохождения бинарного фазового элемента с набегом фазы π , радиальная поляризация меняет направление на каждом скачке рельефа. В результате удается получить фокусное пятно с радиусом $\Delta r = 0,29\lambda$ ($0,46\lambda$ — без фазового элемента), но при этом отношение энергии в первом боковом лепестке к энергии в основном лепестке составляет 0,54 (против 0,06 без использования фазового элемента). Интересный результат получен в работе [50], где с помощью формулы Дебая показано, что радиально-поляризованные моды Лагерра-Гаусса четных порядков LG_p^0 при числовой апертуре $NA = 0,85$ после прохождения специальной кольцевой амплитудной маски фокусируются в малое фокальное пятно почти без боковых лепестков с площадью по полуспаду $\text{HMA} = 0,276\lambda^2$. Использование амплитудной маски не уменьшает размер фокального пятна, но уменьшает уровень боковых лепестков в фокальной картине дифракции и в 5 раз уменьшает глубину резкости.

В качестве освещающего пучка можно использовать радиально-поляризованный бессель-гауссов пучок [51], радиально-поляризованные моды R-TEM_{p1} (моды Лагерра-Гаусса) [23] (увеличивая порядок моды с $p = 1$ до $p = 5$, удается уменьшить фокальное пятно с $\text{FWHM} = 0,582\lambda$ до $\text{FWHM} = 0,378\lambda$). В работе [26] с помощью РВ-формул показано, что при освещении выходного зрачка сферической линзы плоским, гауссовым или бессель-гауссовым пучками радиально-поляризованного света диаметр фокального пятна будет равен $\text{FWHM} = 0,6\lambda, 1,2\lambda, 1,4\lambda$, соответственно, при $NA = 1,4, \lambda = 632,8$ нм, $n = 1,5$. В работе [52] для субволновой фокусировки предлагается использовать поляризационно неоднородные пучки Бесселя-Гаусса. А в работе [24] для аналогичных целей предлагается использовать пучки с «эллиптической симметрией линейной поляризации»: с помощью РВ-формул моделировалась векторная дифракция и фокусировка апланатической линзой линейно-поляризованного пучка с эллиптической радиальной симметрией с эксцентриситетом 0,87. Числовая апертура была $NA = 0,9$. В этом случае формируется эллиптическое фокальное пятно площадью $\text{HMA} = 0,56\lambda^2$.

Скажем также несколько слов о способах получения радиально-поляризованного света. Разделяют два способа получения радиально-поляризованного света: внутриврезонаторный и врезонаторный. В первом случае конверсия света происходит внутри резонатора лазера, во втором — вне лазера. Для получения радиально-поляризованных лазерных пучков можно использовать обычный интерферометр, в плечи которого вставлены две фазовые ступеньки, дающие задержку на полдлины волны и повернутые одна относительно другой на 90 градусов вокруг оптической оси [15]. В работе [53] предложен и экспериментально апробирован способ преобразования линейной поляризации в радиальную или азимутальную с помощью фотонно-кристаллического световода длиной 24 мм. В работе [54] пучок из Nd:YAG лазера проходил

через коническую призму с углом Брюстера у основания: при этом азимутально-поляризованная составляющая испытывала полное внутренне отражение, а радиально-поляризованная составляющая проходила через призму. В результате была получена радиально-поляризованная мода R-TEM₀₁.

Экспериментально было показано [54], что центральное сечение радиально-поляризованной моды с высокой степенью точности совпадает с модой Эрмита–Гаусса (0,1). Поэтому мы можем аналитически записать распространение такой моды, и потом промоделировать ее фокусировку с помощью микрооптики. Мода Эрмита–Гаусса (ЭГ) имеет вид

$$E_{mn}(x, y, z) = \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \exp \left\{ i(m+n+1)\eta(z) - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - \frac{(x^2+y^2)}{w^2(z)} \right\}, \quad (3.95)$$

$$H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right),$$

где $\eta(z) = \arctg(z/z_0)$, $R(z) = z(1 + z_0^2/z^2)$, $w(z) = w_0(1 + z^2/z_0^2)^{1/2}$, $z_0 = k(w_0)^2/2$, $H_n(x)$ — многочлен Эрмита, $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, w_0 — радиус перетяжки гауссова пучка. Лазерная мода с радиальной поляризацией равна сумме двух линейно-поляризованных мод $E_{1,0}$ и $E_{0,1}$, одна из которых поляризована по x , а другая по y :

$$\mathbf{E}_r(x, y, z) = \left[\frac{2\sqrt{2}w_0}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ i2\eta(z) - \frac{ik(x^2+y^2)}{2R(z)} - \frac{x^2+y^2}{w^2(z)} \right\} (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y), \quad (3.96)$$

где в последних круглых скобках стоят два единичных вектора по декартовым осям. Введя обозначение единичного вектора, направленного вдоль радиуса полярной системы координат \mathbf{e}_r , получим окончательное выражение для вектора напряженности электрического поля радиально-поляризованной лазерной моды R-TEM₀₁:

$$\mathbf{E}_r(x, y, z) = \left[\frac{2\sqrt{2}w_0}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ i2\eta(z) - \frac{ikr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w^2(z)} \right\} r\mathbf{e}_r. \quad (3.97)$$

При $z = 0$ (плоскость перетяжки, где волновой фронт плоский) выражение (3.97) может быть записано в виде

$$\mathbf{E}_r = Ar \exp \left\{ -\frac{r^2}{w_0^2} \right\} \mathbf{e}_r. \quad (3.98)$$

Ниже будет численно исследована фокусировка моды (3.98) такими объектами микрооптики как аксикон (рефракционный, дифракционный и логарифмический) и зонная пластинка Френеля.

Рефракционный аксикон. Рассматривается фокусировка радиально-поляризованного света рефракционным микроаксиконном с параметрами, близкими к тем, при которых реализуется полное внутреннее отражение.

Благодаря таким параметрам аксикона удастся сформировать острый фокус вблизи его вершины.

Промоделируем с помощью метода BOR-FDTD распространение света через рефракционный конический стеклянный ($n = 1,5$) аксикон с высотой $h = 6$ мкм и радиусом основания $R = 7$ мкм. На рисунке 3.7 показан профиль такого аксикона и его расположение в вычисляемой области. Числовая апертура конического аксикона вычисляется по формуле

$$NA = \frac{\frac{nh}{R} - \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - n^2 + 1}}{\left(\frac{h}{R}\right)^2 + 1}. \quad (3.99)$$

В нашем случае $NA = 0,6$.

В качестве освещающего пучка возьмем моду $R\text{-TEM}_{01}$ с длиной волны $\lambda = 1$ мкм и радиусом перетяжки $w = 3$ мкм. В данном моделировании размеры области вдоль оси z составляли 20 мкм (или 20λ), вдоль оси r — 9 мкм (или 9λ), на краях области помещались идеальные поглощающие слои толщиной 1 мкм (или 1λ). Дискретность разбиения области по пространству составляла 50 отсчетов на одну длину волны. Результаты моделирования прохождения моды $R\text{-TEM}_{01}$ через аксикон приведены на рис.3.8–3.11. На рисунке 3.8 показано распределение интенсивности вдоль оси аксикона, а на рис. 3.9 — распределение интенсивности в фокусе.

Из рисунка 3.8, б видно, что субволновая фокусировка света происходит на расстоянии 0,02 мкм от вершины аксикона и осевая (продольная) ширина фокуса по полуспаду интенсивности равна $\text{DOF} = 0,12\lambda$.

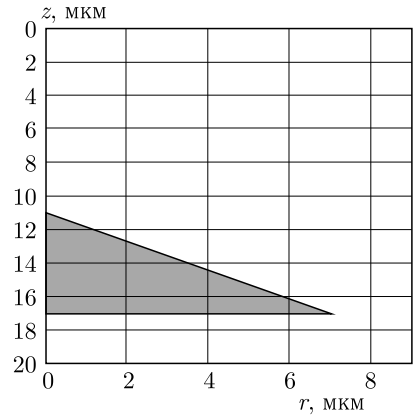


Рис. 3.7. Радиально-осевое сечение рефракционного конического аксикона и его расположение в вычисляемой области

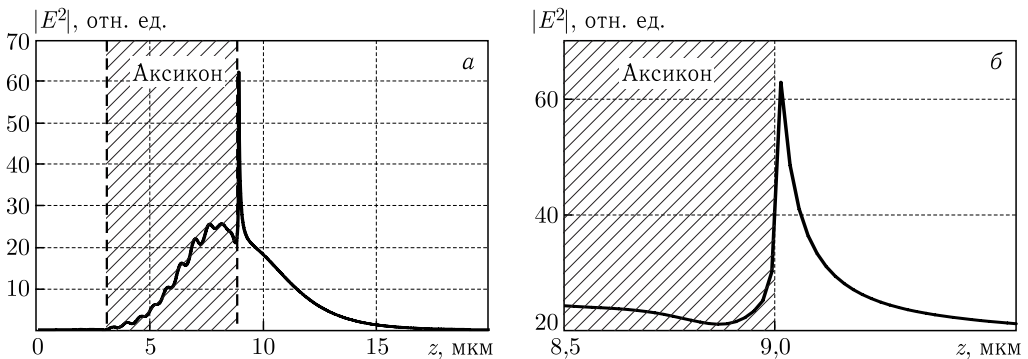


Рис. 3.8. Распределение интенсивности вдоль оси аксикона: (а) вдоль всей вычисляемой области, (б) увеличенный фрагмент вблизи вершины аксикона. Пунктирной линией показаны границы аксикона

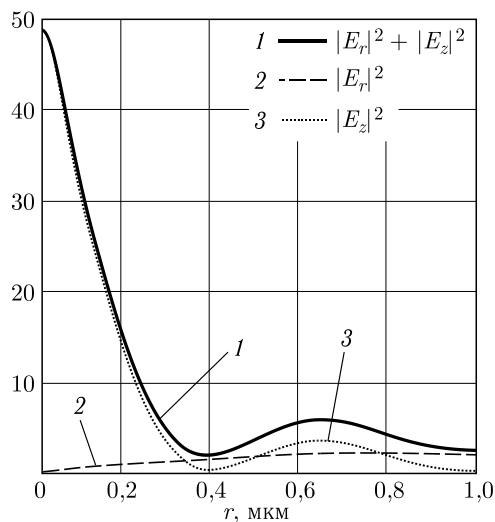


Рис. 3.9. Распределение интенсивности $|E|^2$ в фокусе (кривая 1), $|E_r|^2$ (кривая 2), $|E_z|^2$ (кривая 3)

На рисунке 3.10 показано мгновенное распределение амплитуд E_z и E_r в вычисляемой области, а на рис. 3.11 — распределение интенсивности в вычисляемой области.

Диаметр получившегося фокусного пятна (рис. 3.9) по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,30\lambda$, а площадь фокусного пятна по полуспаду интенсивности равна $\text{HMA} = 0,071\lambda^2$. Радиус фокусного пятна от максимума до первого минимума равен $\Delta r = 0,40\lambda$. Для сравнения отметим, что полученный нами диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности в 1,7 раз меньше, чем диаметр пятна Эйри ($\text{FWHM} = 0,51\lambda$), а площадь в 2,87 раз меньше, чем площадь пятна Эйри ($\text{HMA} = 0,204\lambda^2$).

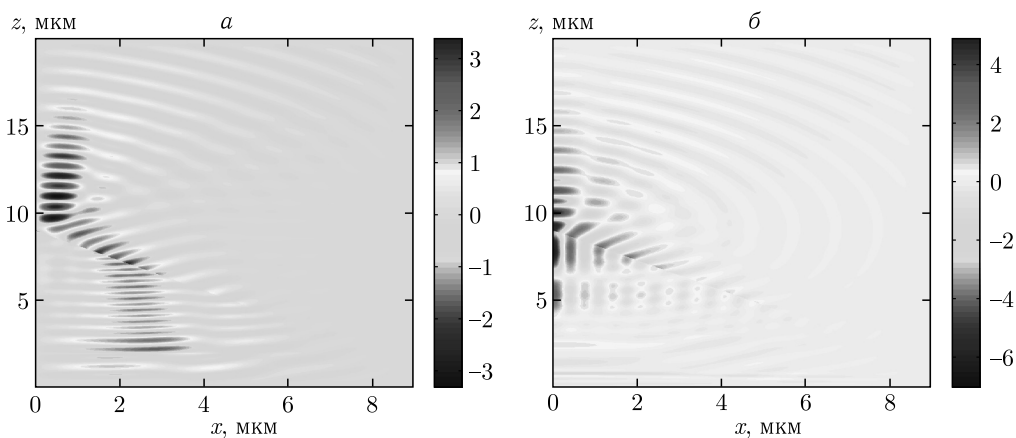


Рис. 3.10. Мгновенное распределение амплитуд (а) E_r и (б) E_z в вычисляемой области

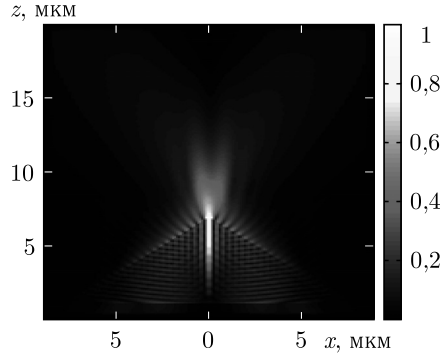


Рис. 3.11. Распределение интенсивности в вычисляемой области

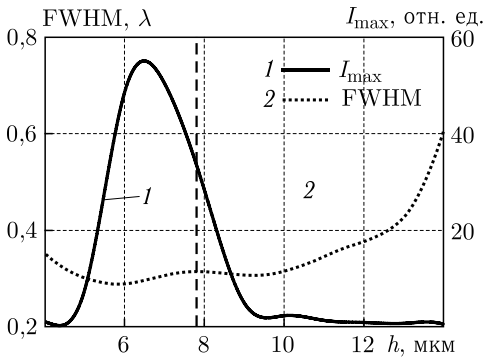


Рис. 3.12. Зависимость изменения интенсивности I_{\max} в фокусе (кривая 1, ось справа) и ширины фокального пятна FWHM (кривая 2, ось слева) от высоты стеклянного аксикона h с радиусом основания 7 мкм. Пунктирным отрезком показана высота аксикона, при которой достигается угол полного внутреннего отражения падающего луча от конической поверхности аксикона

Рисунок 3.12 показывает, что выбранные нами параметры аксикона являются оптимальными: изменение высоты аксикона h (при постоянном радиусе основания) приводит к увеличению размеров фокального пятна и уменьшению интенсивности в фокусе.

Бинарный аксикон. Бинарный микроаксикон более прост в изготовлении, чем конический аксикон, рассмотренный ранее. Так, например, бинарный аксикон может быть изготовлен по технологии электронной литографии или фотолитографии с помощью одной бинарной амплитудной маски (или прямой записью электронным лучом) в виде концентрических темных и светлых колец одинаковой толщины. На рисунке 3.13 показано радиальное сечение бинарного микроаксикона.

Данный бинарный микроаксикон (рис. 3.13) имеет высоту ступенек $H = \lambda/2(n - 1) \approx 633$ нм для длины волны $\lambda = 633$ нм и показателя преломления $n = 1,5$, ширина ступеньки $d = 0,74$ мкм (равна ширине «ямки» $D - d = 0,74$ мкм), а период равен $D = 2d = 1,48$ мкм. Общая высота аксикона с подложкой (вдоль оси z) равна $2H = 1,266$ мкм. Радиус аксикона равен трем периодам, $R = 3D = 4,44$ мкм. В этом разделе приведены результаты моделирования острой фокусировки лазерной моды R-TEM₀₁ с помощью бинарного аксикона (рис. 3.13). Микроаксикон освещался радиально-поляризованной модой R-TEM₀₁ с радиусом перетяжки $w = 1,9$ мкм.

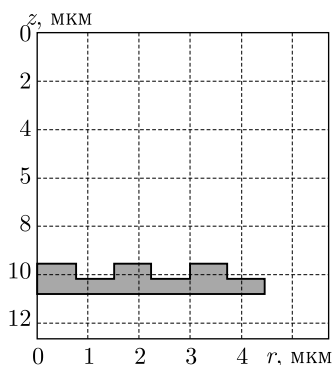


Рис. 3.13. Профиль бинарного микроаксикона и его расположение в вычисляемой области

В таблице 3.1 приведены данные по зависимости расстояния от поверхности аксикона до максимума интенсивности вдоль оси аксикона (фокусное расстояние) (L) и диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности (FWHM) от длины волны освещающего аксикон излучения (λ). Из табл. 3.1 видно, что хроматическая дисперсия бинарного микроаксикона такая же (по знаку), как и у обычной дифракционной решетки: более длинные волны дифрагируют под большим углом к оптической оси. Поэтому из табл. 3.1 следует, что с ростом длины волны λ в пределах от 0,600 мкм до 0,850 мкм фокусное пятно формируется все ближе к вершине аксикона, и его диаметр (в длинах волн) уменьшается. Минимальный диаметр фокусного пятна был равен

$\text{FWHM} = 0,39\lambda$ и формировался в непосредственной близости от вершины аксикона ($L = 0,08$ мкм). На рисунке 3.14 показано распределение интенсивности $|E|^2$ вдоль оптической оси (a) и радиальные распределения интенсивности $|E_z|^2$ (кривая 3), $|E_r|^2$ (кривая 2) и $|E|^2 = |E_r|^2 + |E_z|^2$ (кривая 1) в плоскости фокуса (b) для длины волны 850 нм.

Таблица 3.1. Зависимость диаметра фокусного пятна по полуспаду интенсивности (FWHM) и фокусного расстояния (L) от длины волны (λ)

λ , мкм	FWHM, λ	L , мкм
0,600	0,69	0,64
0,630	0,56	0,53
0,700	0,45	0,19
0,750	0,46	0,19
0,850	0,39	0,08

Из рисунка 3.14 видно, что вблизи центральной круговой ступеньки бинарного аксикона (рис. 3.13) формируется острый фокус, диаметр которого по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,39\lambda$, а площадь по полуспаду интенсивности равна $\text{НМА} = 0,119\lambda^2$.

На рисунке 3.15 показаны мгновенные распределения амплитуды E_r (a) и амплитуды E_z (b), а на рис. 3.16 — распределение интенсивности при дифракции R-ТЕМ₀₁ моды с длиной волны 850 нм на бинарном аксиконе в вычисляемой области. Из рисунка 3.15 видно, что каждая ступенька профиля аксикона формирует в основном свой лепесток в картине дифракции: центральная приосевая ступенька формирует основной первый лепесток фокусной картины, вторая кольцевая ступенька аксикона — второй кольцевой лепесток, и третья ступенька — третий лепесток. Таким образом, бинарный микроаксикон проще при изготовлении, но менее эффективен при острой фокусировке, чем конический аксикон, хотя и он (бинарный аксикон) формирует фокусное пятно ($\text{FWHM} = 0,39\lambda$) меньшее, чем дифракционный предел ($\text{FWHM} = 0,51\lambda$).

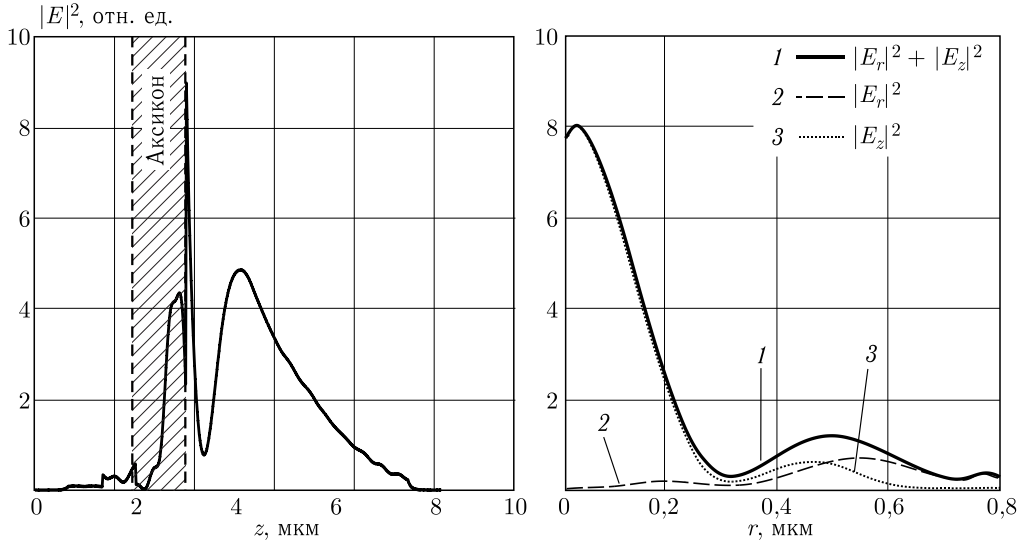


Рис. 3.14. Распределение интенсивности $|E|^2$ вдоль оптической оси (а) и радиальные распределения интенсивности $|E_z|^2$ (кривая 3), $|E_r|^2$ (кривая 2) и $|E| = |E_z|^2 + |E_r|^2$ (кривая 1) в плоскости фокуса (б) для длины волны 850 нм

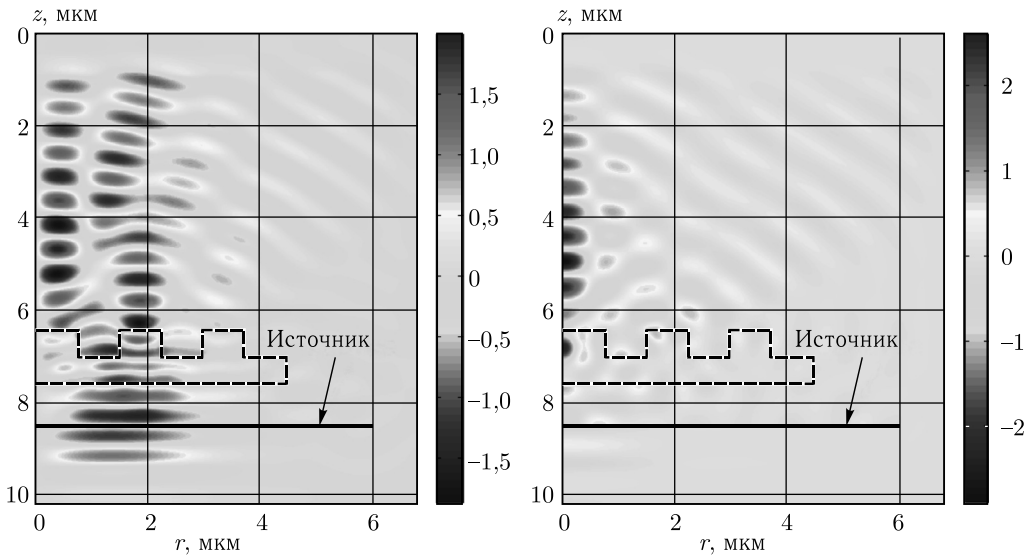


Рис. 3.15. Мгновенные распределения амплитуды E_r (а) и амплитуды E_z (б) при дифракции R-TEM₀₁ моды с длиной волны 850 нм на бинарном стеклянном микроаксиконе с периодом 1,48 мкм в вычисляемой области

Числовая апертура бинарного аксикона получена из уравнения дифракционной решетки и для первого порядка дифракции равна $NA = \sin \theta = \lambda/D$. Следовательно, чтобы числовая апертура бинарного аксикона с периодом $D = 1,48$ мкм, была такой же, как у конического аксикона, описанного

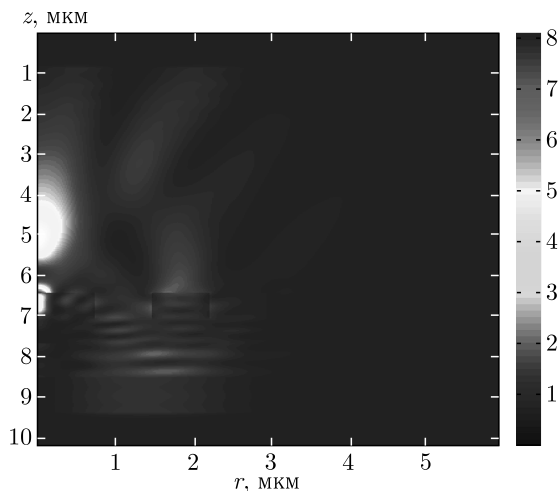


Рис. 3.16. Усредненное распределение интенсивности для бинарного микроаксикона с периодом 1,48 мкм в вычисляемой области

ранее (рис. 3.7, $NA = 0,6$), его нужно осветить светом с длиной волны $\lambda = 0,888$ мкм. Эта оценка хорошо согласуется с оптимальной длиной волны из табл. 3.1, $\lambda = 0,850$ мкм. Для используемой длины волны $\lambda = 0,850$ мкм числовая апертура бинарного микроаксикона будет равна $NA = 0,57$.

3.2.2. Дифракционный логарифмический микроаксикон. В данном разделе будет рассмотрена дифракция на логарифмическом аксиконе (ЛА). Ранее ЛА были рассмотрены, например, в работе [55], где алмазным резцом из пластика был изготовлен логарифмический аксикон (ЛА) с радиусом 6,5 мм, имеющий фазовую функцию вида $S(r) = \gamma \ln(a + br^2)$, где γ , a , b — постоянные, r — поперечная радиальная координата в цилиндрической системе координат. Этот аксикон фокусировал свет от He-Ne-лазера в осевой отрезок длиной 10 см и диаметром 10 мкм. В [56] впервые рассмотрен ЛА с квадратичной зависимостью от радиальной координаты $S(r) = \gamma \ln(a + br^2)$, который был реализован с помощью цифровой голограммы и фокусировал свет в осевой отрезок. В работе [57] проведено моделирование ЛА и показано, что осевая интенсивность вдоль отрезка в среднем более постоянная, в отличие от конического линейного аксикона, у которого средняя интенсивность возрастает вдоль осевого отрезка.

Нами будет рассмотрена скалярная параксиальная дифракция гауссова пучка на логарифмическом аксиконе, который описывается фазовой функцией, как в [55–57], но при $a = 0$. Такой аксикон фокусирует свет в осевой отрезок, который начинается сразу за аксиконом. Фазовая функция такого аксикона имеет вид $S(r) = \gamma \ln(r/\sigma)$ и имеет особенность в начале координат при $r = 0$. В этой точке фаза $S(r)$ стремится к плюс (или минус) бесконечности. Однако эта особенность имеет место только в начальной плоскости при $z = 0$. В любой другой плоскости ($z > 0$), при освещении такого ЛА гауссовым пучком, световое поле имеет конечную энергию и не имеет особенностей. Приводится явное аналитическое выражение для комплексной амплитуды

такого поля в зоне дифракции Френеля. Получена оценка для диаметра поперечной интенсивности, которая обратно пропорциональна параметру ЛА $|\gamma|^{-1/2}$. То есть при достаточно большом $|\gamma| \gg 1$ можно получить субволновой диаметр лазерного пучка вблизи ЛА. Численные примеры подтверждают это. Численное моделирование гипергеометрических пучков уже проводилось в работе [58], где также была показана возможность преодоления дифракционного предела с помощью логарифмического аксикона, однако формул для осевой интенсивности и ширины фокусного пятна получено не было.

Общее выражение для амплитуды. В скалярном параксиальном приближении рассмотрим дифракцию гауссова пучка на спиральном логарифмическом аксиконе (СЛА) и просто на логарифмическом аксиконе. Функция пропускания в приближении тонкого транспаранта для СЛА в полярных координатах (r, φ) имеет вид

$$T(r, \varphi) = \exp \left[i \gamma \ln \left(\frac{r}{\sigma} \right) + i n \varphi \right], \quad (3.100)$$

где n — целое число (топологический заряд оптического вихря), γ — вещественное число (параметр «силы» аксикона), σ — параметр масштабирования аксикона. Тогда сразу за СЛА комплексная амплитуда монохроматического светового поля будет иметь вид

$$E_0(r, \varphi) = \exp \left[- \left(\frac{r}{w} \right)^2 + i \gamma \ln \left(\frac{r}{\sigma} \right) + i n \varphi \right], \quad (3.101)$$

где w — радиус перетяжки гауссова пучка. Преобразование Френеля от функции (3.101) имеет вид

$$\begin{aligned} E(\rho, \theta, z) = & \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \left(\frac{z_0}{z} \right) \left(\frac{w}{\sigma} \right)^{i\gamma} \left(\frac{k w \rho}{2z} \right)^n \times \\ & \times \Gamma \left(\frac{n+2+i\gamma}{2} \right) \left(1 - \frac{i z_0}{z} \right)^{-\frac{n+2+i\gamma}{2}} \exp \left(i n \theta + \frac{i k \rho^2}{2z} \right) \times \\ & \times {}_1F_1 \left[\frac{n+2+i\gamma}{2}; n+1; - \left(\frac{k w \rho}{2z} \right)^2 \left(1 - \frac{i z_0}{z} \right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (3.102)$$

где (ρ, θ) — поперечные полярные координаты в плоскости наблюдения, z — координата вдоль оптической оси, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $z_0 = k w^2/2$ — расстояние Рэлея, $\Gamma(x)$ — гамма-функция, ${}_1F_1(a, c, x)$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция [59]. Заметим, что выражение (3.102) является точным решением параксиального волнового уравнения (типа уравнения Шредингера), и оно является частным случаем ранее полученного решения для семейства гипергеометрических лазерных пучков [60, 61].

Интенсивность светового поля, $I(\rho, z) = |E(\rho, z)|^2$, полученная на основе (3.102), имеет следующий вид:

$$I(\rho, z) = \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{kw\rho}{2z}\right)^{2n} \left| \Gamma\left(\frac{n+2+i\gamma}{2}\right) \right|^2 \times \\ \times \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{-\frac{n+2}{2}} \exp\left[-\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{z_0}{z}\right)\right] \times \\ \times \left| \Gamma_1 F_1 \left[\frac{n+2+i\gamma}{2}; n+1; -\left(\frac{kw\rho}{2z}\right)^2 \left(1 - \frac{iz_0}{z}\right)^{-1} \right] \right|^2. \quad (3.103)$$

Осевая интенсивность. Заметим, что интенсивность (3.103) не зависит от масштабного параметра аксикона σ в (3.100). Интенсивность (3.103) везде на оптической оси (кроме начальной плоскости $z = 0$) равна нулю при $n \neq 0$. Чтобы рассматривать фокусировку света с помощью ЛА, положим в дальнейшем $n = 0$. Тогда вместо (3.103) интенсивность светового поля будет иметь вид

$$I_0(\rho, z) = \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \left| \Gamma\left(1 + \frac{i\gamma}{2}\right) \right|^2 \exp\left[-\gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{z_0}{z}\right)\right] \times \\ \times \left| \Gamma_1 F_1 \left[1 + \frac{i\gamma}{2}; 1; -\left(\frac{kw\rho}{2z}\right)^2 \left(1 - \frac{iz_0}{z}\right)^{-1} \right] \right|^2. \quad (3.104)$$

Положив $\rho = 0$ в (3.104), получим выражение для осевой интенсивности:

$$I_0(z) = \left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{\pi\gamma}{2}\right) \frac{z_0^2}{z_0^2 + z^2} \exp\left[-\frac{\pi\gamma}{2} + \gamma \operatorname{arctg}\left(\frac{z}{z_0}\right)\right]. \quad (3.105)$$

При получении (3.105) воспользовались тем, что ${}_1F_1(a, c; 0) = 1$, $|\Gamma(1+ix)|^2 = (\pi x) \operatorname{sh}^{-1}(\pi x)$ и $\operatorname{arctg}(x) = \pi/2 - \operatorname{arctg}(1/x)$.

На рисунке 3.17 значения осевой интенсивности в нуле ($\rho = 0$, $z = 0$) из (5.105) равно

$$I_0(0) = \pi\gamma [\exp(\pi\gamma) - 1]^{-1} \geq 1. \quad (3.106)$$

Осевая интенсивность на рис. 3.17 (пунктирная кривая) рассчитана с помощью непараксиального интеграла Рэлея–Зоммерфельда для того, чтобы показать, что, во-первых, параксиальная и непараксиальная осевая интенсивности существенно отличаются друг от друга при $z < 2\lambda$ и, во-вторых, параксиальная кривая (сплошная кривая) дает неправильный результат в нуле $I_0(0) \geq 1$ ($z = \rho = 0$).

На рисунке 3.18 показано распределение интенсивности в поперечной плоскости $z = 2\lambda$, полученное с помощью интегралов Рэлея–Зоммерфельда (кривая 1) и Френеля (кривая 2). Остальные параметры моделирования те же, что и на рис. 3.17.

Из рисунка 3.18 видно, что ЛА формирует световой пучок почти без боковых лепестков, в отличие от обычного аксикона, формирующего пучок

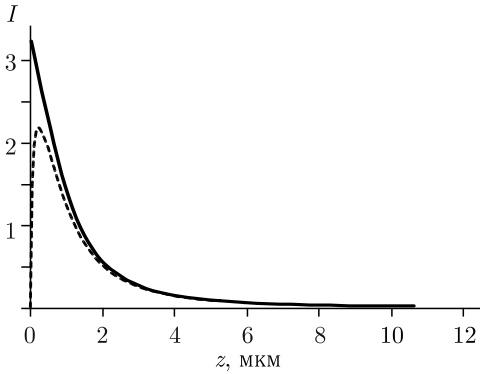


Рис. 3.17. Осевая интенсивность ($\rho = 0$) для собирающего ($\gamma < 0$) ЛА ($\gamma = -1$, $w = \lambda$, $\lambda = 532$ нм), рассчитанная по формуле (6) (сплошная кривая) и на основе интеграла Рэлея-Зоммерфельда (пунктирная кривая)

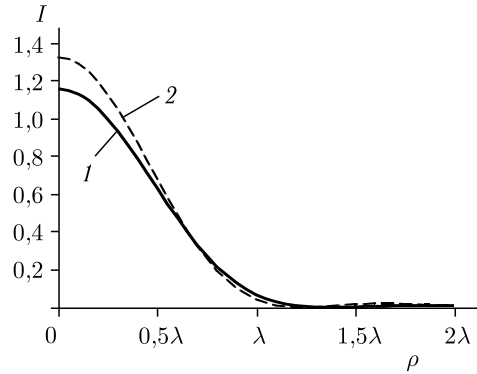


Рис. 3.18. Интенсивность в поперечной плоскости $z = 2\lambda$ ($\gamma = -1$, $w = \lambda$, $\lambda = 532$ нм), полученная с помощью интегралов Рэлея-Зоммерфельда (кривая 1) и Френеля (кривая 2)

с амплитудой, пропорциональной функции Бесселя $J_0(\alpha\rho)$, боковые лепестки которой составляют 0,4 от осевой амплитуды.

Фазовая радиальная сингулярность в центре. Значение $I_0(0)$ из (3.106) больше единицы (или равно единице при $\gamma = 0$), и поэтому оно противоречит выражению (3.101), из которого следует, что интенсивность в нуле $I_0(0)$ должна быть равна нулю, так как фаза в начале координат не определена и в любой малой окрестности нуля ($\rho = z = 0$) содержатся все значения фазы из отрезка $[0, 2\pi]$. Дело в том, что переход от (3.104) к (3.105) возможен при любом z и $\rho = 0$, кроме $z = 0$. При одновременном стремлении к нулю z и ρ результат преобразования выражения (3.104) будет зависеть от того, с какой относительной скоростью стремятся к нулю обе переменные z и ρ . Например, если устремить к нулю z при фиксированном $\rho \neq 0$, то вместо (3.105) из (3.104) получим, что

$$I_0(\rho, z) = \frac{z_0^2}{z_0^2 + z^2} \exp \left[-\frac{2\rho^2}{w^2} + 2\gamma \arctg \left(\frac{z}{z_0} \right) \right]. \quad (3.107)$$

При получении (3.107) воспользовались асимптотическим выражением для гипергеометрической функции при $x \rightarrow \infty$ [59]:

$$F_1(a; c; x) = \frac{\Gamma(c) \exp(x)}{\Gamma(a) x^{c-a}}. \quad (3.108)$$

При $z = 0$ из (3.107) следует правильное выражение для начальной интенсивности поля (3.101), $I_0(\rho, z = 0) = \exp[-2(\rho/w)^2]$. Выражение (3.107) верно при $z \rightarrow 0$ и $\rho \neq 0$. На рисунке 3.19 показан вид функции (3.107) при ρ , близкой к нулю.

На первый взгляд рис. 3.17 и 3.19 противоречат друг другу, но это не так. Так как при $z = 0$ и $\rho = 0$ имеет место фазовая радиальная сингулярность, т. е. фаза в (3.101) и ее производная при $n = 0$ стремятся к бесконечности

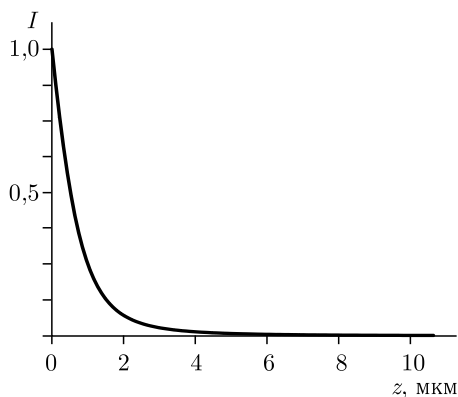


Рис. 3.19. Зависимость от z интенсивности вблизи $z = 0$ и при $\rho = 0,1\lambda$ ($\gamma = -1$, $w = \lambda$, $\lambda = 532$ нм)

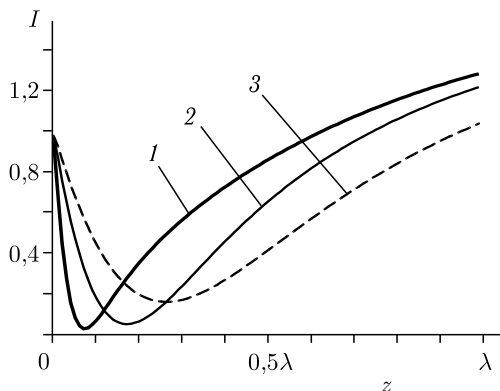


Рис. 3.20. Осевая интенсивность для поля (5.109)

при $r \rightarrow 0$, то это означает, что при $z = 0$ в центре ($\rho = 0$) интенсивность равна нулю, $I_0(0) = 0$, а в соседних точках ($\rho \neq 0$) $I_0(\rho \approx 0) \approx 1$. Поэтому непрерывным предельным переходом вдоль оптической оси по направлению к точке $z = 0$ нельзя получить начальную интенсивность, $I_0(0) = 1$. Но если предельный переход осуществить при $\rho \neq 0$ (рядом с оптической осью), то значение интенсивности при $z = 0$ получается правильным, $I_0(0) \approx 1$ (рис. 3.19).

В случае, когда ρ строго равно нулю, а z принимает значения, близкие к нулю, вычисление интеграла Рэлея–Зоммерфельда дает нулевую осевую интенсивность (рис. 3.17), что можно объяснить неопределенностью фазы в центре начального поля при $\rho = z = 0$. Однако если в поле (3.101) устранить фазовую сингулярность в центре, заменив ее на плоскую волну с постоянной фазой внутри круга $r < r_0$, т. е. поле (3.101) заменить на

$$E_0(r, \varphi) = \begin{cases} \exp \left[-\left(\frac{r}{w}\right)^2 + i\gamma \ln \left(\frac{r}{\sigma}\right) + in\varphi \right], & r \geq r_0, \\ 1, & r < r_0, \end{cases} \quad (3.109)$$

то вычисление интеграла Рэлея–Зоммерфельда дает единичную осевую интенсивность, $I_0(0) = 1$, которая быстро спадает в зависимости от радиуса круга r_0 , достигая локального минимума. На рисунке 3.20 показана осевая интенсивность для нескольких значений r_0 : $r_0 = 0,01\lambda$ (кривая 1), $r_0 = 0,03\lambda$ (кривая 2), $r_0 = 0,05\lambda$ (кривая 3).

Радиус поперечного распределения интенсивности. Оценим ширину поперечного распределения интенсивности вблизи оптической оси. Известно, что первое приближение координаты x_1 первого нуля гипергеометрической функции ${}_1F_1(a, c; x)$ находят по формуле [59]

$$x_1 = \frac{\gamma_{c-1,1}^2}{2(c-2a)}, \quad (3.110)$$

где $\gamma_{c-1,1}$ — первый корень функции Бесселя $(c-1)$ -го порядка: $J_{c-1}(\gamma_{c-1,1}) = 0$. С учетом (3.104) в (3.110) следует подставить значения $a = 1 + i\gamma/2$, $c = 1$, $\gamma_{0,1} = 2,4$. Так как величины a и x в нашем случае комплексные, то формулу (3.110) следует применять для модулей комплексных чисел:

$$|x_1| = \frac{\gamma_{c-1,1}^2}{2|c - 2a|}. \quad (3.111)$$

Тогда вещественную координату первого комплексного нуля (локального минимума) ρ_1 интенсивности (3.104) можно оценить с помощью выражения

$$\rho_1 = 2,4w \left[\frac{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}{2(1 + \gamma^2)} \right]^{1/4}. \quad (3.112)$$

Из выражения (3.112) следует, что при больших параметрах, $|\gamma| \gg 1$, эффективный радиус поперечного распределения интенсивности будет пропорционален $(z \ll z_0) 2w |\gamma|^{-1/2}$,

$$\rho_1 \approx 2w |\gamma|^{-1/2}. \quad (3.113)$$

Из (3.112) также следует, что выбором достаточно большого значения $|\gamma| (\gamma < 0)$ можно с помощью ЛА получить вблизи плоскости $z = 0$ световое пятно с любым малым субволновым диаметром. Например, при $w = \lambda$, $z_0 = kw^2/2 = \pi\lambda$, $z = \lambda$ и $\gamma = -400$ можно получить световое пятно с диаметром по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = \rho_1 = \lambda/10$. Это следует из того, что градиент фазы (3.100) при $n = 0$ равен $\gamma\sigma/r$ и стремится к бесконечности при $r \rightarrow 0$. То есть ЛА не только собирает на оптической оси распространяющиеся волны, но и возбуждает неоднородные (исчезающие) поверхностные волны с высоким значением проекции волнового вектора на поперечную ось, $k_r \gg k$. Наличие таких поверхностных волн вблизи $z = 0$ обеспечивает субволновые размеры фокусного пятна. Проверим правильность зависимости (3.113) с помощью моделирования.

В таблице 3.2: M — номер по порядку; γ_m — параметр ЛА; ρ_m — радиус в длинах волн первого нуля (или первого локального минимума) интенсивности при $z = 10\lambda$ (другие параметры $w = 2\lambda$, $z_0 = 4\pi\lambda$), численно рассчитанный с помощью преобразования Френеля; ρ_m/ρ_{m+1} — отношение двух соседних радиусов; $(\gamma_{m+1}/\gamma_m)^{1/2}$ — корень квадратный из отношения двух соседних параметров ЛА. В соответствии с (3.113) значения в третьей и четвертой строках табл. 3.2 в каждом столбце должны совпадать, так как $\rho_m/\rho_{m+1} = (\gamma_{m+1}/\gamma_m)^{1/2}$. Из сравнения третьей и четвертой строк табл. 3.2 видно, что с ростом модуля параметра γ значения в этих строках сближаются.

Моделирование FDTD-методом. Рассмотрим прохождение радиально-поляризованной моды R-ТЕМ₀₁ через дифракционный логарифмический микроаксикон. Моделирование проводилось с помощью метода BOR-FDTD. Параметры моделирования: размеры области расчета $20\lambda \times 20\lambda$, дискретность разбиения по пространству $\lambda/20$, дискретность разбиения по времени $\lambda/40$ с, где c — скорость света в вакууме. Параметры аксикона — максимальная высота $h_{\max} = \lambda/(n-1)$, где n — показатель преломления

Таблица 3.2. Радиусы поперечного распределения интенсивности

M	1	2	3	4	5
$-\gamma_m$	1	3	5	7	9
ρ_m, λ	2,80	1,93	1,53	1,29	1,13
ρ_m/ρ_{m+1}	1,45	1,26	1,19	1,14	—
$(\gamma_{m+1}/\gamma_m)^{1/2}$	1,52	1,29	1,18	1,13	—

вещества ($n = 1,5$), текущая высота профиля рассчитывалась по формуле $\lambda \bmod [\gamma \ln(r/\sigma)/(2\pi)] / [2\pi(n-1)]$, где $\gamma = -20$ и $\sigma = 20$ мкм, а \bmod означает остаток от деления. Параметры моды — радиус $w = 6\lambda$, длина волны $\lambda = 532$ нм. На рисунке 3.21 показано радиальное сечение ЛА. На рисунке 3.22 — радиальное сечение амплитуды освещающего аксикон пучка. На рисунке 3.23 показано осевое распределение интенсивности, а на рис. 3.24 — радиальное сечение интенсивности в фокальной плоскости (в плоскости с максимальным значением интенсивности).

Моделирование показало, что глубина фокуса по полуспаду интенсивности (рис. 3.23) равна $\text{DOF} = 2\lambda$, а диаметр фокусного пятна, находящегося на расстоянии длины волны от «зубчатой» поверхности аксикона, по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,43\lambda$. Это меньше дифракционного предела, $\text{FWHM} = 0,51\lambda$.

Приведем еще один пример. В этот раз ЛА выберем двумерный и моделирование проведем с помощью программы FullWAVE (RSoft).

На рисунке 3.25 показан рельеф двумерного аксикона. Граница области моделирования: $[-4\lambda, +4\lambda] \times [0, 3\lambda]$, время моделирования: $cT = 30\lambda$; дискретизация: по x (горизонтальная ось) и по z (вертикальная) — $\lambda/50$, по времени — $T/100$. Высота рельефа, $\lambda/(n-1) = 2\lambda$, показатель преломления: $n = 1,5$, длина волны освещающего света равна 532 нм, параметры аксикона: $\gamma = -20$ и $\sigma = 4\lambda$. ЛА освещается гауссовым пучком света с ТЕ-поляризацией и радиусом перетяжки $w = 3\lambda$.

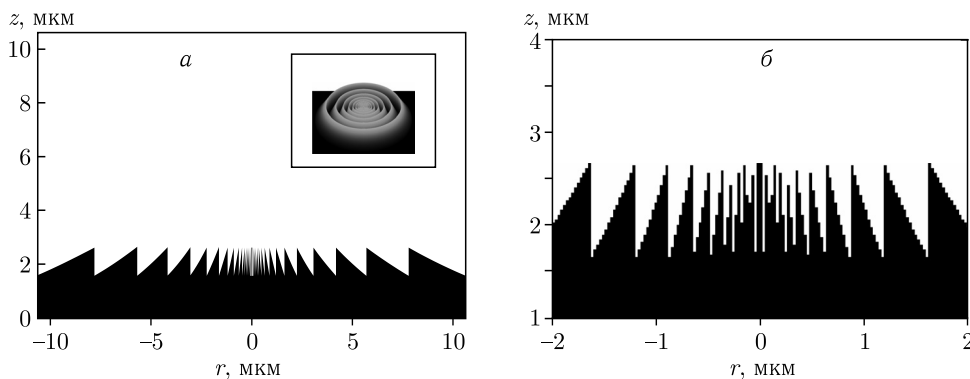


Рис. 3.21. Логарифмический микроаксикон (а) в вычисляемой области и его увеличенный фрагмент (б) вблизи оси. На вставке — трехмерный вид логарифмического аксикона

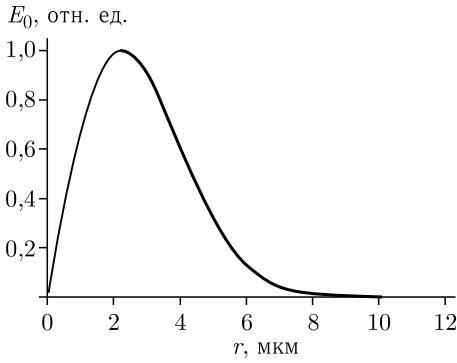


Рис. 3.22. Радиально-поляризованная лазерная мода R-TEM₀₁

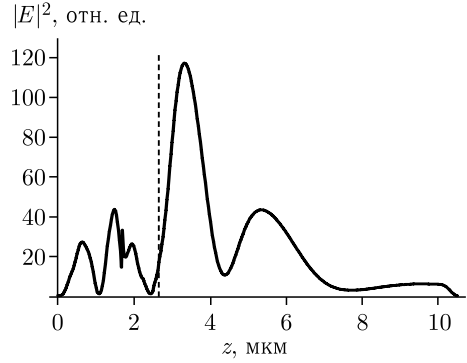


Рис. 3.23. Распределение интенсивности вдоль оси z (вертикальная линия — линия, на которой лежат вершины рельефа ЛА)

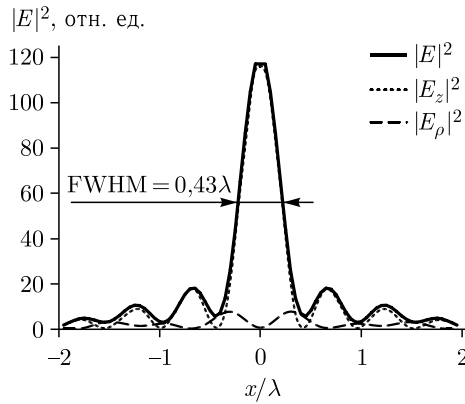


Рис. 3.24. Распределение интенсивности в фокальном пятне

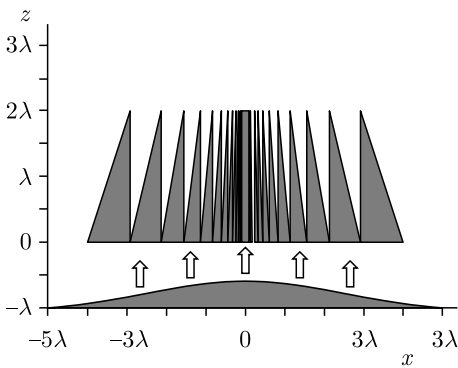


Рис. 3.25. Вид двумерного ЛА с параметрами: радиус 4λ , высота рельефа $\lambda/(n-1) = 2\lambda$, параметр $\gamma = -20$

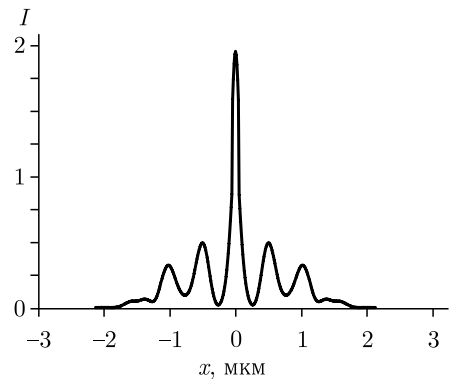


Рис. 3.26. Усредненное распределение интенсивности сразу за аксиконом (при $z = 2\lambda$)

Ширина по полуспаду центрального максимума интенсивности на рис. 3.26 равна $\text{FWHM} = 108 \text{ нм} = 0,20\lambda$. Это меньше, чем дифракционный предел в 2D среде, $\text{FWHM} = 0,44\lambda/n = 0,293\lambda$ (для стекла $n = 1,5$).

3.2.3. Бинарные аксиконы с периодом 4, 6 и 8 мкм.

Скалярная непараксиальная дифракция на бинарном аксиконе. Для анализа поля вблизи оптической оси и вблизи аксикона нельзя воспользоваться электромагнитной теорией [38], так как в центральной части аксикон нельзя считать дифракционной решеткой.

Пусть на аксикон падает плоская волна с линейной поляризацией, тогда в начальной плоскости $z = 0$, совпадающей с выходной поверхностью аксикона в приближении транспаранта составляющая электрического поля для бинарного аксикона будет иметь вид

$$E_{x0}(r) = (1 - e^{i\varphi}) \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \text{circl} \left(\frac{r}{r_n} \right), \quad (3.114)$$

где $r_n = (n+1)r_0$, n — целое число, r_n — радиусы скачков бинарного рельефа аксикона вдоль радиальной координаты r , φ — задержка фазы, к которой приводят выступы рельефа аксикона по отношению к впадинам рельефа, N — число скачков рельефа аксикона. Амплитуду спектра плоских волн для начального поля (3.114) находим из выражения

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \frac{k^2}{2\pi} (1 - e^{i\varphi}) \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \int_0^\infty \text{circl} \left(\frac{r}{r_n} \right) J_0(kr\rho) r dr = \\ &= (1 - e^{i\varphi}) k^2 r_0^2 \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (n+1)^2 \frac{J_1[k\rho(n+1)r_0]}{[k\rho(n+1)r_0]}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

где ρ — безразмерная переменная.

Тогда амплитуду x -й составляющей электрического поля на любой плоскости z найдем из выражения

$$\begin{aligned} E_x(r, z) &= (1 - e^{i\varphi}) k^2 r_0^2 \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n (n+1)^2 \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{J_1[kr_0(n+1)\rho]}{[kr_0(n+1)\rho]} J_0(k\rho r) e^{ikz\sqrt{1-\rho^2}} \rho d\rho. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Задача нахождения амплитуды светового поля вблизи бинарного аксикона (3.116) свелась к вычислению интеграла:

$$I = \int_0^\infty J_1(\alpha x) J_0(\beta x) e^{i\gamma\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (3.117)$$

где α, β, γ — постоянные числа. Интеграл (3.117) не удалось найти в справочной литературе, поэтому будем вычислять его в предельных случаях. Пусть $\gamma = kz \ll 1$ — мы хотим найти поле вблизи аксикона. Тогда, раскладывая в ряд Тейлора экспоненту, вместо (3.117) получим, сохранив только два члена ряда следующее выражение:

$$I \approx \int_0^{\infty} J_1(\alpha x) J_0(\beta x) dx + i\gamma \int_0^{\infty} \sqrt{1-x^2} J_1(\alpha x) J_0(\beta x) dx. \quad (3.118)$$

Первый интеграл можно найти в справочнике [62]:

$$\int_0^{\infty} J_1(\alpha x) J_0(\beta x) dx = \begin{cases} 1/\alpha, & \alpha > \beta, \\ 0, & \alpha < \beta. \end{cases} \quad (3.119)$$

В нашем случае $\alpha = kr_0(n+1)$, $\beta = kr$. Второй интеграл в (3.118) найдем вблизи оптической оси, предположив, что радиальная координата r много меньше радиуса первого скачка рельефа аксикона r_0 , $r \ll r_0$, в этом случае функцию Бесселя нулевого порядка можно заменить ее квадратной зависимостью: $J_0(x) \approx 1 - (x/2)^2$ при $x \ll 1$. Тогда для вычисления второго интеграла в (3.118) можно использовать справочный интеграл [62]:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{a-1} (1-x^2)^{b-1} J_n(cx) dx = \\ = \frac{c^n}{2^{n+1}} \frac{\Gamma(b)\Gamma(\frac{n+a}{2})}{\Gamma(b+\frac{n+a}{2})\Gamma(n+1)} {}_1F_2\left[\frac{n+a}{2}, \frac{n+a}{2} + b, n+1, -\frac{c^2}{4}\right], \end{aligned} \quad (3.120)$$

где ${}_1F_2(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция.

Тогда для второго интеграла в (3.118) можно записать выражение:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} J_1(\alpha x) dx - \left(\frac{kr}{2}\right)^2 \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} J_1(\alpha x) dx = \\ = \left(\frac{kr_0}{6}\right)^2 \left\{ {}_1F_2\left(1, \frac{5}{2}, 1, -y^2\right) - \frac{(kr)^2}{10} {}_1F_2\left(2, \frac{7}{2}, 2, -y^2\right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.121)$$

где $y = kr_0/2$.

Замена бесконечных пределов интегрирования в (3.118) на конечные пределы интегрирования в (3.121) является обычной в таких случаях процедурой, суть которой заключается в том, что пренебрегают вкладом в амплитуду затухающих неоднородных волн.

С учетом (3.109) и (3.121) получим для напряженности поля вблизи оптической оси и вблизи аксикона ($kz \ll 1, r \ll r_0$) следующее выражение:

$$E_x(r, z) \approx \frac{1}{kr_0} + ikz \frac{(kr_0)}{6} \left[{}_1F_2 \left(1, \frac{5}{2}, 2, -y^2 \right) - \frac{(kr)^2}{10} {}_1F_2 \left(2, \frac{7}{2}, 2, -y^2 \right) \right]. \quad (3.122)$$

Из (3.122) можно получить выражение для оценки диаметра центрального максимума светового поля вблизи оптической оси:

$$2r = k^{-1} \left[\frac{{}_10F_2 \left(1, \frac{5}{2}, 2, -y^2 \right)}{{}_1F_2 \left(2, \frac{7}{2}, 2, -y^2 \right)} \right]^{1/2}, \quad (3.123)$$

из которого можно получить числовую оценку диаметра фокуса:

$$2r \approx 0,6\lambda. \quad (3.124)$$

Из (3.124) следует, что диаметр центрального максимума светового поля вблизи аксикона не зависит от его периода $T = 2r_0$ и равен дифракционному пределу ($\text{FWHM} = 0,51\lambda/NA$).

Чтобы проверить выражение (3.124) оценим диаметр центрального максимума интенсивности поля из других соображений.

Параксиальная оценка диаметра осевого пучка. В работе [39] на основе скалярной параксиальной теории показано, что так как аксикон формирует пучок Бесселя, то диаметр пучка Бесселя можно оценить из выражения

$$J_0^2(k \sin \theta \cdot r) = 0. \quad (3.125)$$

Тогда получим

$$2r = \frac{2,4\lambda}{\pi \sin \theta}, \quad (3.126)$$

где θ — половина угла при вершине конической волны, которую формирует аксикон.

Для бинарного аксикона, рассматривая его как дифракционную решетку [38], можно считать, что угол θ конической волны в то же время является углом дифракционной решетки с периодом T :

$$\sin \theta_m = \frac{\lambda m}{T}, \quad (3.127)$$

где m — номер порядка дифракции.

С учетом (3.126) и (3.127) получим окончательные выражения для оценки диаметра светового поля аксикона на оптической оси:

$$2r = \frac{2,4}{\pi} \frac{T}{m} \approx 0,774 \frac{T}{m}. \quad (3.128)$$

Из (3.128) видно, что для бинарного аксикона диаметр пучка Бесселя не зависит от длины волны [39], а определяется только периодом аксикона и номером дифракционного порядка. Из (3.128) следует, что в точку на оптиче-

ской оси вблизи аксикона будут приходить от разных точек аксикона разные порядки дифракции. Поэтому вблизи аксикона при $z < z_0$, где $z_0 = RT/2\lambda$ — расстояние, после которого световое поле формирует только один порядок дифракции аксикона, R — радиус аксикона, будет формироваться световое поле, диаметр которого на оптической оси будет сложным образом меняться при $0 < z < z_0$.

Из (3.128) следует, что при $z \geq z_0$ диаметр осевого пучка будет равен $2r = 6,2\lambda$ для аксикона с периодом $T = 4$ мкм $= 8\lambda$.

Оценка диаметра осевого пучка как моды волновода. Вблизи аксикона при $r < r_0 = T/2$ и $z < T$ диаметр светового поля на оптической оси можно оценить из теории волноводов, так как глубина рельефа аксикона $H = \lambda/[2(n - 1)] = \lambda$ при $n = 1,5$ — показатель преломления, а центральную часть аксикона можно рассматривать как участок круглого волокна с радиусом сердечника равным $r_0 = T/2$.

Число мод круглого волокна со ступенчатым показателем преломления рассчитывается на основе дисперсионного уравнения [63]:

$$\frac{uJ_0(u)}{J_1(u)} = -\frac{wI_0(w)}{I_1(w)}, \quad (3.129)$$

где J_0, J_1, I_0, I_1 — обычные и модифицированные функции Бесселя нулевых и первых порядков, $u^2 + w^2 = V^2$, $V = kr_0\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$, где n_1 и n_2 — показатели преломления сердечника и оболочки волокна, r_0 — его радиус.

Максимальный корень уравнения (3.129) для моды меньше числа отсечки $u_{\max} < V$, поэтому мода волновода с минимальным диаметром имеет амплитуду пропорциональную функции Бесселя: $J_0\left(\frac{Vr}{r_0}\right)$, $r < r_0$. Тогда диаметр моды с максимальным номером будет равен ($n = 1,5$)

$$2r = 2\frac{2,4r_0}{V} = \frac{2,4\lambda}{\pi\sqrt{n^2 - 1}} \approx 0,7\lambda. \quad (3.130)$$

Интересно, что оценка диаметра (3.130) также не зависит от периода аксикона T , как и оценка (3.124).

Непараксиальные выражения для осевой интенсивности. Зависимость диаметра центрального максимума светового поля от расстояния от аксикона должна коррелировать с зависимостью осевой интенсивности от расстояния от аксикона. Действительно, если на оси имеет место световое кольцо, то диаметр его больше по сравнению с диаметром в фокусе, а осевая интенсивность, наоборот, в случае фокуса достигает локального максимума, а в случае кольца — минимума. Поэтому получим выражение для осевой интенсивности света для бинарного аксикона. Известно выражение для осевой амплитуды скалярного непараксиального поля от круглого отверстия радиуса R в зависимости от продольной координаты [64]:

$$E_x(z) = e^{ikz} - \frac{ze^{ik\sqrt{R^2+z^2}}}{\sqrt{R^2+z^2}}. \quad (3.131)$$

Для бинарного аксикона с пропусканием (3.114) можно аналогично найти выражение для амплитуды электрического вектора на оптической оси:

$$E_x(z) = e^{i\varphi} \left[e^{ikz} - \frac{ze^{ik\sqrt{r_{2N+1}^2 + z^2}}}{\sqrt{r_{2N+1}^2 + z^2}} \right] + (e^{i\varphi} - 1) z \sum_{m=1}^{2N} \frac{e^{ik\sqrt{r_m^2 + z^2}}}{\sqrt{r_m^2 + z^2}} (-1)^m, \quad (3.132)$$

где $r_m = mr_0$ — радиус скачка рельефа бинарного аксикона, $r_0 = T/2$ — половина периода аксикона.

Из (3.132) следует, что при $\varphi = \pi$ в любую точку на оси z будут давать вклад сферические волны, исходящие как от вторичных источников от каждой точки скачков рельефа (т.е. через полпериода аксикона). Поскольку таких точек будет $2N+1$ слагаемое, то результат такой многолучевой интерференции предсказать будет трудно. Единственное, что можно сказать, это то, что при $z \ll R$ уравнение (3.132) сводится к уравнению (3.131), а из последнего следует, что вблизи поверхности аксикона минимальный период колебаний осевой интенсивности равен λ .

Изготовление бинарных аксиконов. Первым объектом исследования выступали бинарные аксиконы с периодом 4, 6 и 8 мкм и диаметром 4 мм. Для их изготовления на кварцевую подложку (толщиной 1 мм, диаметром 30 мм) с показателем преломления $n = 1,46$ был напылен слой хрома толщиной 100 нм с помощью установки УВМ2М1. На такой пластинке с хромом записывался фотошаблон на круговой лазерной записывающей системе CLWS-200 (Новосибирск) с минимальным диаметром лазерного пятна 0,8 мкм и точностью позиционирования 20 нм. Запись фотошаблона представляла собой создание защитной оксидной пленки на поверхности хрома путем ее засвечивания сфокусированным пучком аргонового лазера с длиной волны 500 нм. После этого фотошаблон подвергался плазмохимическому травлению. Процесс травления осуществлялся на установке УТП ПДЭ-125-009, позволяющей получить детали рельефа, горизонтальный размер которых не менее 100 нм. Параметры травления кварца: мощность тока высокой частоты равна 800 Вт, предварительный вакуум — $p \approx 2,1 \cdot 10^{-2}$ Па, ток электромагнита, локализирующего плазму, был равен 0,8 А. Травление проводилось в атмосфере фреона-12 в течение 21 мин. Скорость травления кварцевой подложки была равна 20–25 нм в минуту. Таким образом были изготовлены три аксикона диаметром по 4 мм каждый с периодами 4 мкм, 6 мкм и 8 мкм.

На рисунке 3.27 показан вид сверху бинарного аксикона на кварце с периодом 4 мкм, полученный с помощью растрового электронного микроскопа SUPRA-25-30-85 с увеличением в 1000 раз. На рисунке 3.28 также вид сверху, но бинарного аксикона с периодом 8 мкм, полученный с помощью микроскопа на атомных силах Solver Pro (Зеленоград).

На рисунке 3.29 показаны картины рельефа бинарных аксиконов, снятых с помощью микроскопа Solver Pro под углом: периферийная часть аксикона с периодом 6 мкм (а) и центральная часть аксикона с периодом 8 мкм (б).

На рисунке 3.30 показано радиальное сечение периферийной части рельефа бинарного аксикона с периодом 6 мкм (рис. 3.29, а), из которого видно, что

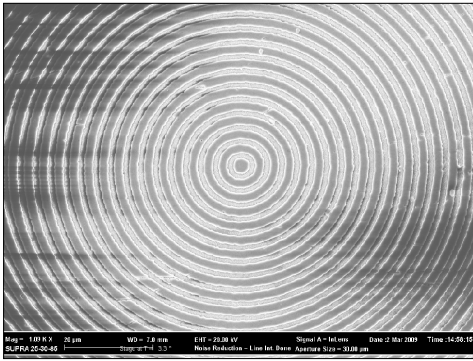


Рис. 3.27. Вид сверху бинарного аксикона с периодом 4 мкм, полученный на растровом электронном микроскопе «Supra-25-30-85» с увеличением 1000

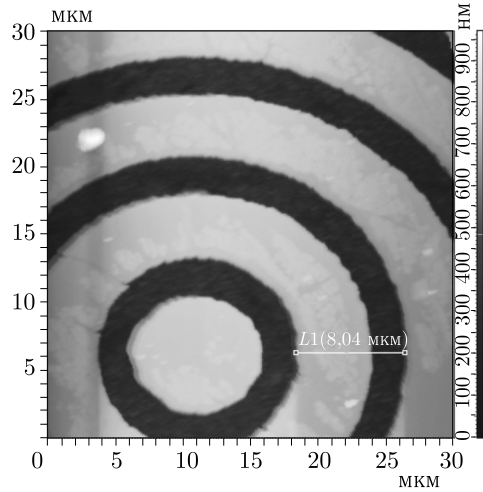


Рис. 3.28. Вид сверху бинарного аксикона с периодом 8 мкм, полученный с помощью микроскопа на атомных силах Solver Pro

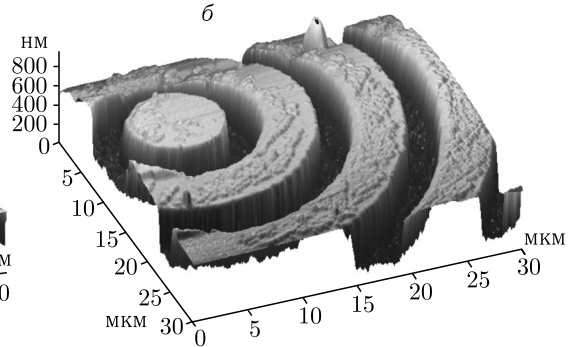
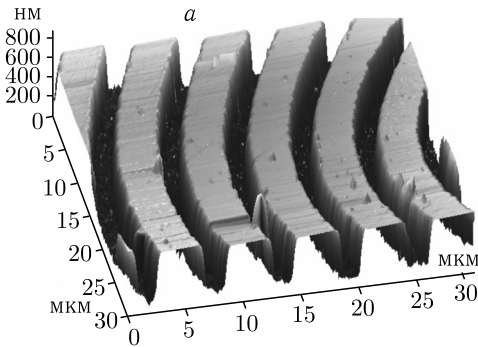


Рис. 3.29. Вид под углом периферийной части бинарного аксикона с периодом 6 мкм (а) и центральной части аксикона с периодом 8 мкм (б), полученный с помощью микроскопа Solver Pro

глубина рельефа составляет 450–500 нм. Все три аксикона рассчитывались для длины волны 532 нм, поэтому расчетная глубина рельефа должна быть

$$h = \frac{\lambda}{2(n-1)} \approx 578 \text{ нм.} \quad (3.133)$$

Ошибка в высоте травления рельефа (недотрав) составляла около 20%. Из рисунка 3.30 также видно, что верхние грани рельефа имеют наклон около $1/150$ радиана, на дне рельефа видны шероховатости с амплитудой 30 нм. Также имеет место трапецевидность бинарного рельефа: отношение длины «верха» ступеньки к длине «низа» ступеньки составляет 3:4. Кроме

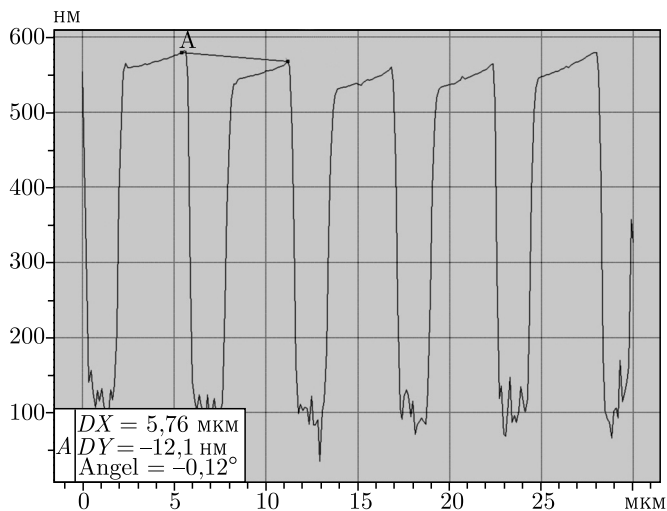


Рис. 3.30. Сечение (профиль) рельефа бинарного аксикона с периодом 6 мкм, показанного на рис. 3.29, а, полученное с помощью микроскопа Solver Pro

того на рисунке 2 хорошо заметно, что ширина ступеньки больше расстояния между соседними ступеньками (соотношение составляет приблизительно 2:1).

Экспериментальные результаты. Целью эксперимента было исследование величины диаметра центрального пятна в зависимости от расстояния вдоль оптической оси. Изготовленные бинарные аксиконы помещались поочередно в оптическую схему на рис. 3.31 и с помощью ПЗС камеры измерялись картины дифракции в ближней зоне на разных расстояниях при освещении аксиконов коллимированным лазерным светом с длиной волны 532 нм.

Луч твердотельного лазера $\lambda = 532$ нм диаметром 1,4 мм фокусировался микрообъективом L_1 в точечную диафрагму диаметром 15 мкм.

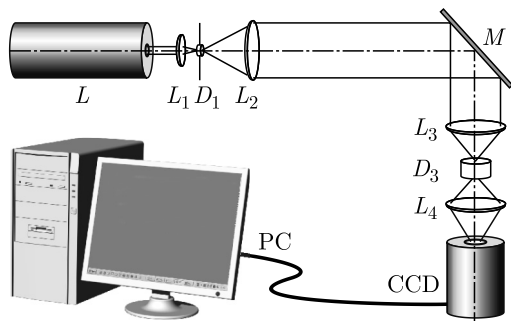


Рис. 3.31. Оптическая схема измерения картины дифракции в ближней зоне для бинарных аксиконов: L — лазер, L_1 — микрообъектив (20 \times , NA = 0,4), D_1 — точечная диафрагма (диаметр 15 мкм), L_2 — коллимирующая линза ($f = 100$ мм), M — поворотное зеркало, L_3 — фокусирующий микрообъектив (8 \times , NA = 0,2), L_4 — изображающий микрообъектив (20 \times , NA = 0,4), D_3 — бинарный аксикон

После прохождения этой диафрагмы формировалось ровное световое пятно, центральная часть которого коллимировалась линзой L_2 . Сформированный пучок представлял собой почти плоскую волну с ограниченной апертурой. Центральная часть этого пучка вводилась в оптическую систему микроскопа Биолам-М, где фокусировалась микрообъективом L_3 таким образом, чтобы диаметр лазерного пучка был равен диаметру аксикона D_3 (согласование диаметров светового пучка и аксикона выполнялось с целью уменьшения энергетических потерь). Получившаяся картина дифракции фиксировалась на CCD камеру через микрообъектив L_4 . При этом, смещая аксикон D_3 можно было получать картины дифракции на разных расстояниях от элемента. За точку отсчета принималась плоскость впадин микрорельефа. Эта плоскость определялась путем получения резкого изображения впадин микрорельефа в белом свете. Аксикон D_3 смещался микрометрическим винтом с ценой деления 1 мкм. Разрешение CCD камеры составляло 2048×1536 пикселей, с размером пикселя 6,9 мкм.

На рисунке 3.32 показано распределение диаметра центрального максимума (по одной из поперечных декартовых координат) от расстояния до поверхности аксиконов: с периодом 4 мкм (а) и 8 мкм (б).

Из рисунка 3.32 следует, что на расстоянии от 0 до 40 мкм диаметр центрального максимума интенсивности меняется квазипериодически с примерным периодом колебаний 2 мкм (рис. 3.32, а) и 4 мкм (рис. 3.32, б). Причем значения диаметров больше 5λ (рис. 3.32, а) и 9λ (рис. 3.32, б) соответствуют диаметру кольцевого распределения интенсивности на оси (т. е. в этом случае интенсивность на оси имеет локальный минимум), а значения диаметров меньше $4,5\lambda$ (рис. 3.32, а) и 8λ (рис. 3.32, б) соответствуют диаметрам локальных максимумов (фокальных точек). Анализ рис. 3.32 позволяет заключить, что диаметр осевых фокальных пятен в ближней зоне (на расстоянии до 40 мкм) меняется от $3,5\lambda$ до $4,5\lambda$ (рис. 3.32, а) с ошибкой $0,4\lambda$ и от 5λ до 8λ (рис. 3.32, б) с ошибкой $0,5\lambda$, соответственно, для аксиконов с периодом 4 мкм и 8 мкм.

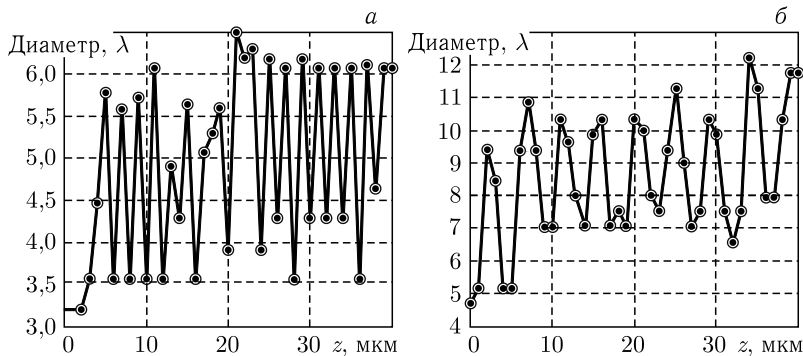


Рис. 3.32. Зависимость диаметра пятна максимума интенсивности на оптической оси (в длинах волн) от расстояния до бинарных аксиконов с периодом: 4 мкм (а) и 8 мкм (б)

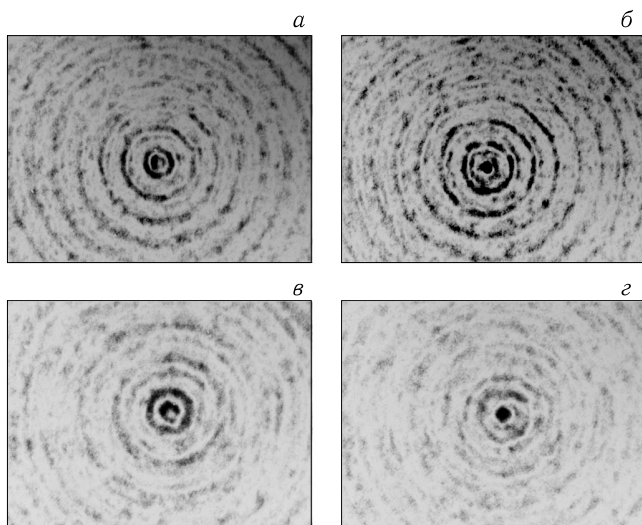


Рис. 3.33. Зарегистрированные ПЗС камерой картины дифракции для аксиконов с периодом 4 мкм (*а*, *б*) и 8 мкм (*в*, *г*) на разных расстояниях: 5 мкм (*а*), 8 мкм (*б*), 16 мкм (*в*) и 18 мкм (*г*)

На рисунке 3.33 показаны зарегистрированные картины дифракции лазерного света на бинарных аксиконах с периодом 4 мкм (*а*, *б*) и 8 мкм (*в*, *г*) на расстояниях: 5 мкм (*а*), 8 мкм (*б*), 16 мкм (*в*) и 18 мкм (*г*). Из рисунка 3.33 видно, что кольцевое распределение интенсивности на оптической оси (*а*, *в*) сменяется формированием фокального пятна (центрального максимума) через 2–3 мкм на расстояниях, меньших 40 мкм. Масштаб картин дифракции на рис. 3.33 одинаковый, поэтому можно видеть, что диаметры кольца и фокального пятна для аксикона с периодом 8 мкм в 1,5 раза больше, чем для аксикона с периодом 4 мкм.

На рисунке 3.34 показана картина дифракции на аксиконе с периодом 4 мкм, зарегистрированная на расстоянии 2 мкм от его поверхности (*а*) и ее сечения по осям x (*б*) и y (*в*). Из рисунка 3.34 можно видеть, что при небольших расстояниях $z < 5$ мкм (на рис. 3.33 эллиптичность уже не обнаруживается) в картине дифракции можно наблюдать эллиптичность фокального пятна (эксцентриситет $\varepsilon = 5/7$), связанная с линейной поляризацией падающего на аксикон лазерного света (электрический вектор падающего пучка направлен вдоль оси y на рис. 3.34).

Результаты моделирования. Моделирование дифракции линейно-поляризованной плоской волны на бинарных дифракционных аксиконах проводилось двумя близкими, но разными методами: методом BOR-FDTD, реализующем в среде Matlab алгоритм разностного решения системы уравнений Максвелла в цилиндрических координатах и 3D-FDTD методом, реализованным в программе FullWAVE (фирма RSoft, США).

На рисунке 3.35 показаны распределения квадрата модуля электрического вектора в плоскости xz линейно-поляризованной плоской волны, прошедшей бинарный аксикон с периодом 4 мкм, рассчитанные двумя разными методами.

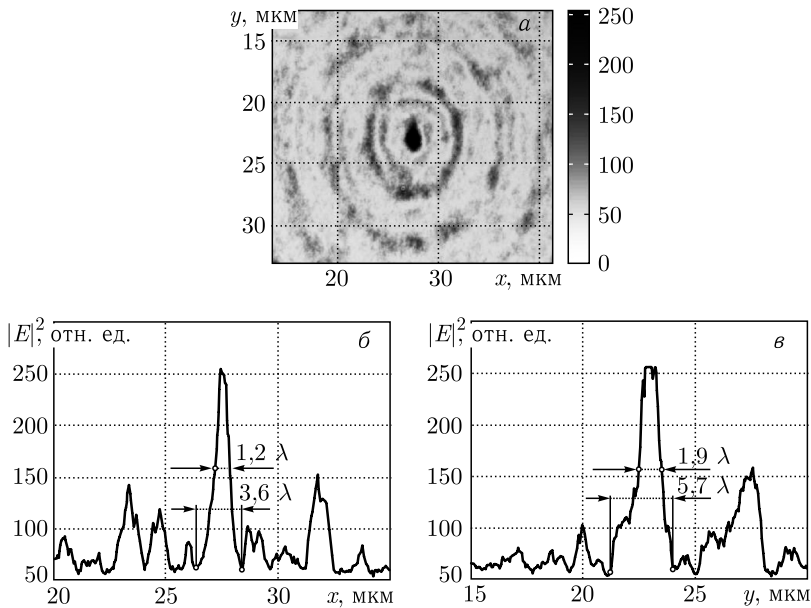


Рис. 3.34. Распределение интенсивности, зарегистрированные на расстоянии 2 мкм от бинарного аксикона с периодом 4 мкм (а) и его сечения по осям x (б) и y (в)

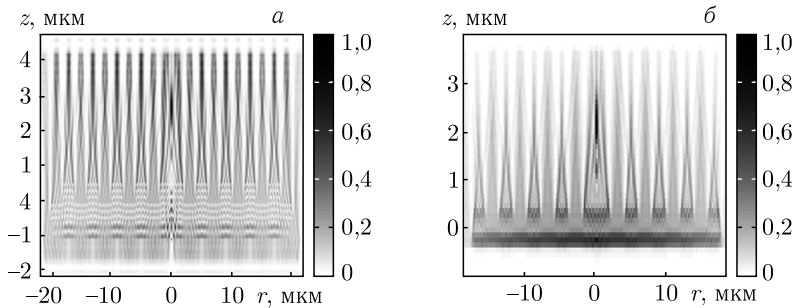


Рис. 3.35. Рассчитанное распределение интенсивности в плоскости xz при дифракции линейно-поляризованной плоской волны (электрический вектор направлен вдоль оси y) на бинарном аксиконе с периодом 4 мкм: Matlab2008a (а) FullWAVE (RSoft) (б)

Из рисунка 3.35 видно, что качественно обе картины дифракции согласуются, так как на обеих картинах видно, что каждый выступ рельефа аксикона фокусирует свет в локальные фокусы, на расстоянии 2 мкм (рис. 3.35, а) и 1,7 мкм (рис. 3.35, б) от поверхности аксикона.

На рисунке 3.36 показаны картины дифракции в плоскости xy на расстоянии $z = 1,7$ мкм (в плоскости локального фокуса) (а) и ее радиальное сечение (б); для сравнения показано распределение интенсивности в плоскости xy на расстоянии $z = 0,3$ мкм (в), где на оптической оси формируется световое кольцо.

Из рисунка 3.36, а, б можно оценить диаметр локального максимума, который равен $1,25\lambda$ ($\lambda = 532$ нм). Если сравнить это значение с диамет-

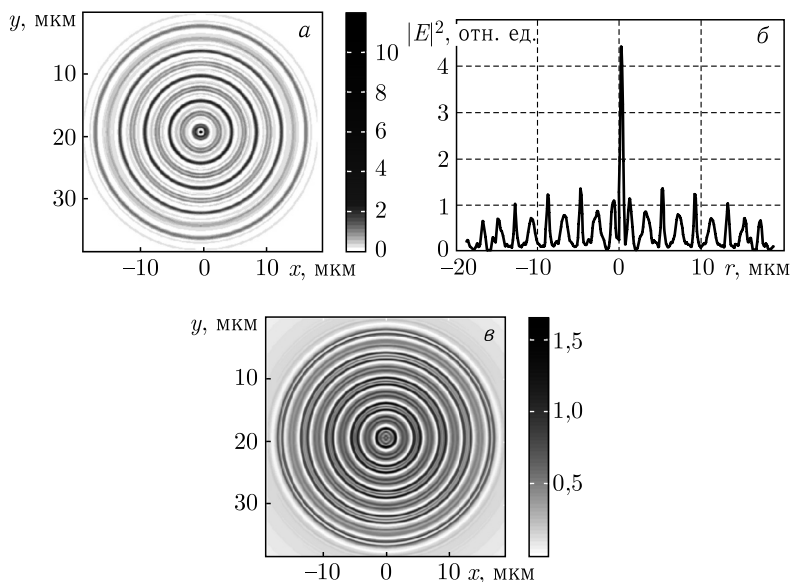


Рис. 3.36. Рассчитанное с помощью программы FullWAVE (RSoft) распределение интенсивности в поперечной плоскости XY на расстоянии 1,7 мкм (а) и его сечение (б) и на расстоянии 0,3 мкм (в) для бинарного аксикона с периодом 4 мкм

ром экспериментально зарегистрированного локального фокусного пятна на рис. 3.34 (диаметр по оси x равен $3,3\lambda$), то оно окажется в 2,5 раза меньше.

На рисунке 3.37 показано рассчитанное с помощью BOR-FDTD метода осевое распределение интенсивности для аксикона с периодом 4 мкм.

Из рисунка 3.37 следует, что локальные экстремумы вдоль оптической оси сменяют друг друга квазипериодическим образом. Расстояние между соседними максимумами растет от 2 мкм до 8 мкм на расстоянии $z < 60$ мкм

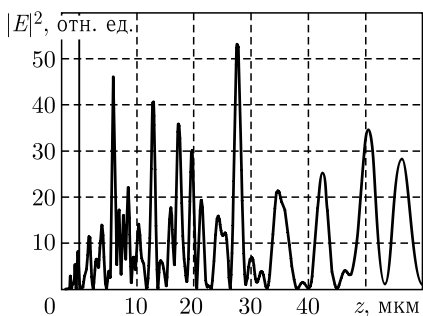


Рис. 3.37. Рассчитанное с помощью BOR-FDTD метода осевое распределение интенсивности для аксикона с периодом 4 мкм, освещаемого гауссовым пучком с линейной поляризацией

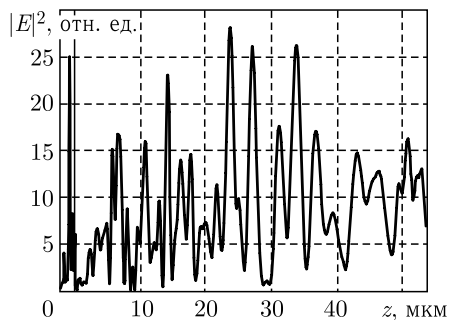


Рис. 3.38. Распределение интенсивности вдоль оптической оси, рассчитанное с помощью R-FDTD метода для аксикона с периодом 4 мкм, радиус аксикона 28 мкм, освещался расходящимся гауссовым пучком с линейной поляризацией

На рисунке 3.38 показано распределение интенсивности света (в произвольных единицах) вдоль оптической оси для бинарного аксикона с периодом 4 мкм и радиусом 28 мкм. В отличие от рис. 3.37 в данном случае (рис. 3.38) аксикон освещался расходящимся гауссовым пучком с линейной поляризацией с амплитудой электрического вектора в виде

$$E_x(r, z = 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + i\frac{kr^2}{zf}\right), \quad (3.134)$$

где $w = 2$ мм — радиус перетяжки гауссова пучка, $f = 2,5w$ — фокусное расстояние параболической линзы. Расходящийся пучок (в отличие от плоского, который исследовался до сих пор) был использован, чтобы лучше согласовать расчеты с экспериментальными результатами, полученными по схеме на рис. 3.32. В схеме на рис. 3.32 бинарный аксикон D_3 диаметром 4 мм освещался расходящимся лазерным светом после микрообъектива L_3 . Расходящийся пучок света был использован, чтобы согласовать диаметр освещающего светового пятна с диаметром аксикона D_3 . На рисунке 3.38 расстояние между соседними максимумами интенсивности растет с 2 мкм до 4 мкм при $z < 50$ мкм. Уменьшение расстояния между максимумами связано с использованием расходящегося гауссова пучка вместо гауссова пучка без расходимости.

На рисунке 3.39 показаны, рассчитанные R-FDTD методом, диаметры центральных пятен картины дифракции расходящейся волны (3.134) на аксиконе с периодом $T = 4$ мкм в зависимости от расстояния до аксикона

На рисунке 3.39 локальные максимумы соответствуют кольцевому распределению интенсивности в центральном пятне картины дифракции, а локальные минимумы — соответствуют фокальным пятнам на оптической оси.

Из рисунка 3.39 также видно, что диаметр фокальных пятен на оптической оси для бинарного аксикона с периодом 4 мкм в ближней зоне ($z < 40$ мкм) меняется в пределах от 2λ до $4,3\lambda$ с продольным периодом примерно 3 мкм (на 40 мкм имеется 12 локальных минимумов на рис. 3.38).

Из сравнения экспериментальной кривой диаметров центральных пятен картин дифракции (рис. 3.32, а) с расчетной кривой диаметров центральных пятен (рис. 3.39) следует, что имеет место согласование по диаметру фокальных пятен на расстоянии до 40 мкм: от $3,5\lambda$ до $4,5\lambda$ (рис. 3.32, а) и от 2λ до $4,3\lambda$ (рис. 3.39). Хотя продольный период изменения диаметра фокальных пятен на рисунке 13 составил 3 мкм, а в эксперименте был меньше — 2 мкм.

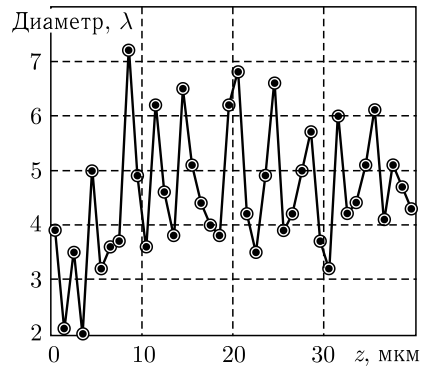


Рис. 3.39. Рассчитанное с помощью BOR-FDTD метода распределение полной ширины (диаметр вдоль оси x в длинах волн) центрального максимума интенсивности в картине дифракции расходящегося лазерного пучка на бинарном аксиконе с периодом 4 мкм

Из сравнения рисунков 3.38 и 3.39 видно, что имеет место согласование числа локальных фокусов (минимум на рис. 3.38) и локальных максимумов интенсивности (рис. 3.39): в промежутке между $30 \text{ мкм} < z < 40 \text{ мкм}$ на рис. 3.39 имеется 4 минимума, а на рис. 3.38 — 4 максимума; в промежутке между $20 \text{ мкм} < z < 30 \text{ мкм}$ на рис. 3.39 всего 2 минимума, а на рис. 5.38 два больших максимума.

Из уравнения (3.128) следует, что диаметр фокального пятна для аксикона с периодом 4 мкм будет равен: $2r = 0,774T = 3,1 \text{ мкм} = 6\lambda$, при $m = 1$, и 3λ при $m = 2$. Сравнивая эти числа с экспериментом (рис. 3.32, а) и расчетом (рис. 3.39), можно заключить, что в ближней зоне дифракции вклад в формирование фокусов вдоль оптической оси дают первый и второй порядки дифракции бинарного аксикона.

3.2.4. Бинарный аксикон с периодом 800 нм.

Изготовление. На стеклянную подложку был нанесен тонкий слой резиста ZEP520A, который затем грелся 10 мин при температуре 180°C , чтобы высушить растворитель. Высота резиста подбиралась так, чтобы она была достаточной для требуемой фазовой задержки аксикона. Картина концентрических колец «рисовалась» на резисте с помощью электронного луча на электронном микроскопе ZEISS GEMINI с литографической приставкой RAITH ELPHY PLUS при напряжении 30 КВ. Размер пиксела был равен 10 нм , а энергия экспозиции — 45 мАс/см^2 . После экспонирования образец подвергался травлению в ксилене при температуре 23°C и потом промывался в изопропанолe для фиксирования процесса проявления. Промывка также устраняла проэкспонированные области резиста, в которых исходные длинные молекулы полимера были разорваны при экспонировании электронным лучом. После этого оставшийся резист формировал аксикон с периодом 800 нм (показатель преломления резиста $n = 1,5$). На рисунке 3.40 показано изображение исследуемого аксикона. Высота профиля такого аксикона была равна 465 нм .

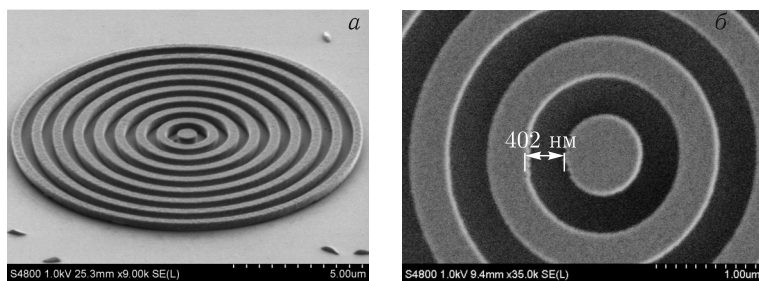


Рис. 3.40. Изображение исследуемого бинарного аксикона с периодом 800 нм , полученное на электронном микроскопе: вид под углом (а) и вид сверху, увеличенный (б)

Эксперимент и численное моделирование. Далее с помощью микроскопа ближнего поля NT-MDT исследовалось прохождение линейно-поляризованного гауссова пучка с длиной волны $0,532 \text{ мкм}$ через бинарный аксикон с периодом 800 нм .

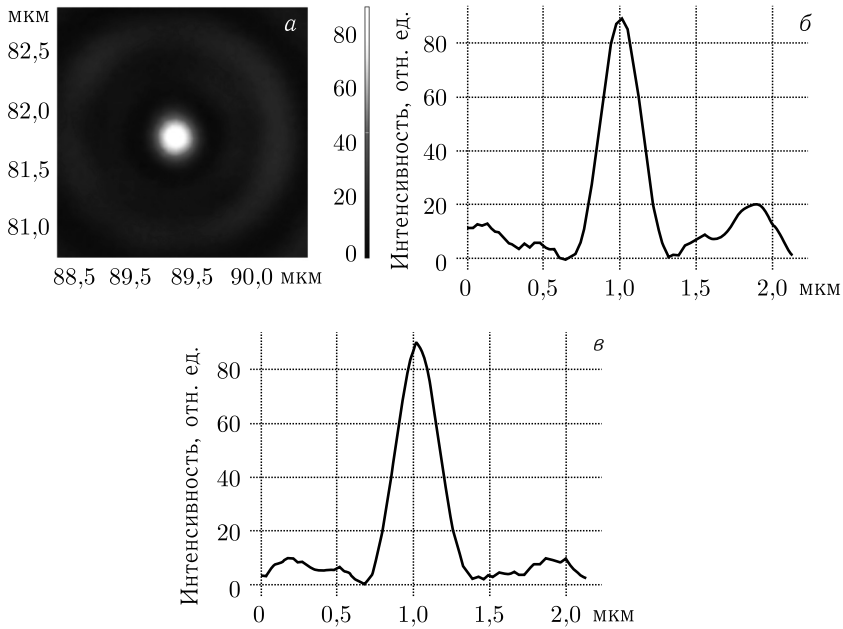


Рис. 3.41. Зарегистрированная картина интенсивности с фокусным пятном на расстоянии 100 нм от аксикона (3.41): 2D-изображение (а) и сечения вдоль оси x (б) и вдоль оси y (в)

На рисунке 3.41, а показано распределение интенсивности, измеренное на расстоянии 1 мкм от аксикона. На рисунке 3.41, б, в показаны горизонтальное и вертикальное сечения двумерной картины интенсивности (рис. 3.41, а). Из сравнения сечений на рис. 3.41 видно, что фокусное пятно из-за линейной поляризации (плоскость поляризации вертикальная) имеет эллиптическое сечение. Наименьший диаметр пятна по полуспаду интенсивности был равен $\text{FWHM} = 0,58\lambda$. Ошибка измерений 10%. Интенсивность на рис. 3.19 дана в относительных единицах. Интенсивность в фокусе была в 5 раз больше, чем максимальная интенсивность освещающего микроаксикон гауссова пучка. Хотя эффективность фокусировки была невысокой — 6%. Это означает, что в формирование фокусного пятна (рис. 3.41, а) давали вклад только первые круг и кольцо рельефа микроаксикона (рис. 3.40).

На рисунке 3.42 показано сравнение экспериментального распределения интенсивности в фокусе (на расстоянии 1 мкм от поверхности аксикона)

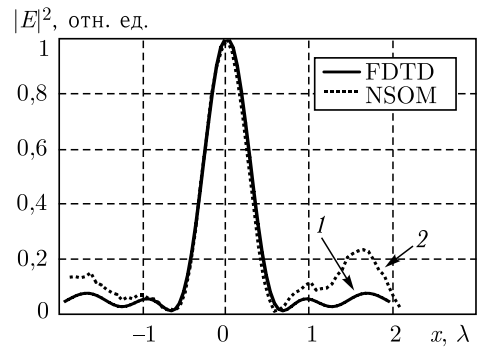


Рис. 3.42. Нормированное поперечное распределение интенсивности на расстоянии 1 мкм от поверхности микроаксикона

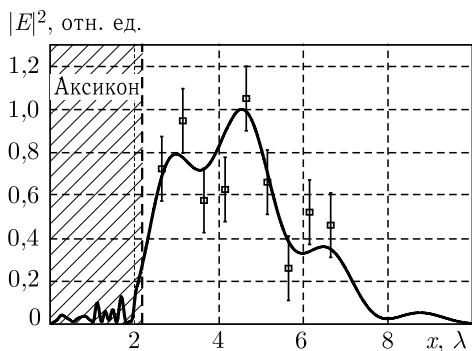


Рис. 3.43. Распределение интенсивности (нормированной) вдоль оптической оси за аксиконом, полученное при моделировании в Matlab (сплошная линия) и экспериментально (отдельные квадратики с вертикальными отрезками, которые показывают диапазон ошибки измерения). Вертикальная пунктирная линия показывает границу аксикона

с распределением, полученным при моделировании BOR-FDTD методом. Среднеквадратичное отклонение кривых на рис. 3.42 равно 6%. Причем основное отличие кривых на рис. 3.42 касается боковых лепестков картин дифракции. Основной максимум интенсивности при $|x| \leq 1$ мкм отличается от расчетного максимума всего на 1%. При моделировании считалось, что аксикон освещается Гауссовым пучком с длиной волны 532 нм с линейной поляризацией и радиусом 2,5 мкм (эта величина была выбрана, чтобы согласовать результаты моделирования с экспериментом).

На рисунке 3.43 показано рассчитанное распределение интенсивности вдоль оптической оси z . Вертикальная прямая на рис. 3.43 показывает поверхность аксикона. Квадратиками с вертикальными отрезками на рис. 3.43 отмечены экспериментальные значения интенсивности. Вертикальные отрезки показывают величину допустимой ошибки измерения интенсивности (ошибка $\pm 0,1$). Продольная глубина фокуса микроаксикона по полуспаду интенсивности равна $\text{DOF} = 3$ мкм $= 5,6\lambda$.

Оценим диаметр фокусного пятна нашего бинарного микроаксикона с периодом $T = 800$ нм в соответствии с (3.128). Так как $NA = \lambda/T = 0,665$ при $m = 1$: $\text{FWHM} = 0,36\lambda/NA = 0,54\lambda$. Таким образом, экспериментально полученное значение диаметра фокусного пятна ($\text{FWHM} = 0,58\lambda$) отличается от теоретической оценки ($\text{FWHM} = 0,54\lambda$) всего на 8%.

3.3. Зонная пластинка Френеля

В качестве фокусирующего элемента в данном разделе описано использование зонной пластинки (ЗП). Ранее [13] с помощью ЗП было получено фокальное пятно с диаметром $0,42\lambda$, а в статье [27] показано, что добавление к ЗП фазовой пластинки, состоящей из трех кольцевых зон, позволяет уменьшить размер пятна до $0,37\lambda$. В вышеназванных работах при моделировании фокусировки используются формулы Ричардса–Вольфа (РВ) [65], модифицированные для радиально поляризованного света [51]. Необходимо отметить, что векторная теория Дебая [66], на которой основаны РВ-формулы, справедлива только при фокусных расстояниях много больших длины волны. На расстояниях же сопоставимых с длиной волны следует использовать, например, метод FDTD (=finite difference time domain), представляющий собой численное решение уравнений Максвелла и в настоящее время получивший

широкое распространение благодаря своей универсальности. Применительно к острой фокусировке света зонными пластинками данный метод используется, в частности, для расчета фокусировки света с помощью плазмонных линз. Так, теоретически [67] с помощью FDTD и экспериментально с помощью ближнепольной оптической микроскопии демонстрируется преодоление дифракционного предела плазмонной линзой (диаметр пятна по полуспаду интенсивности теоретически $\text{FWHM} = 0,41\lambda$, экспериментально — $0,48\lambda$). В работе [68] с помощью FDTD метода для плазмонной линзы получено фокальное пятно шириной $0,33\lambda$, а в работе [69] численно показана возможность фокусировки в ближнем поле с помощью простой фазовой ЗП (диаметр пятна при этом равен $0,52\lambda$). В [70] анализируются фокусирующие свойства амплитудной ЗП. В [71] FDTD-методом проведено моделирование фокусировки зонной пластинки с радиусом колец $r_n^2 = 2nf\lambda + n^2\lambda^2$, $f = 1$ мкм, $\lambda = 633$ нм, выполненной в тонких пленках серебра (50 нм) и золота (50 нм), напыленных на кварце. Диаметр кольцевой структуры 13 мкм. Показано, что на расстоянии $z = 1,5$ мкм от пластины возникает фокальное пятно диаметром по полуспаду $\text{FWHM} = 0,3\lambda$ (полная ширина пятна — $0,7\lambda$). В работе [72] экспериментально организованы аналогичные кольцевые структуры (диаметр 8 мкм) в пленке золота (100 нм). В микроскоп ближнего поля NTEGRA (NT-MDT) с разрешением 100 нм на расстоянии $z = 1,6$ мкм наблюдалось фокальное пятно диаметром по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 1,7\lambda$ (полный диаметр 5λ), $\lambda = 633$ нм. Хотя теория предсказывает размер фокального пятна $\text{FWHM} = 0,5\lambda$. В работе [73] на пленке аморфного кремния толщиной 120 нм реализована линза Френеля с фокусным расстоянием $f = 5$ мкм и диаметром 50 мкм для длины волны $\lambda = 575$ нм (26 % пропускания). В иммерсии линза имела числовую апертуру $NA = 1,55$ и фокусировала свет в фокальное пятно диаметром $\text{FWHM} = 0,9\lambda$. Интересно, что измерено это пятно было с помощью флуоресцентной сферы с диаметром 0,5 мкм.

3.3.1. Сравнение с формулами Ричардса–Вольфа. Как уже ранее отмечалось, с помощью бинарной зонной пластинки (ЗП) свет радиальной поляризации фокусируется в пятно с меньшими размерами, чем при фокусировке с помощью апланатического объектива с такой же числовой апертурой [13]. Моделирование фокусировки света зонной пластинкой осуществлялось двумя разными методами: с помощью метода BOR-FDTD и по формулам Ричардса–Вольфа. Сравнение полученных результатов проводилось на примере стеклянной зонной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$, радиусом $R = 20\lambda$ и высотой рельефа $h = \lambda/2(n - 1) = 0,532$ мкм, которая осуществляет фокусировку радиально поляризованной моды R-TEM₀₁ с длиной волны $\lambda = 0,532$ мкм и радиусом перетяжки $w = 10\lambda$. Радиусы колец зонной пластинки вычислялись по известной формуле (рис. 3.44):

$$r_m^2 = m\lambda f + m^2\lambda^2/4, \quad (3.135)$$

где f — фокусное расстояние зонной пластинки, m — целое число. Зависимость изменения диаметра фокального пятна по полуспаду интенсивности от фокусного расстояния ЗП приведена на рис. 3.44, а (кривая 1 — BOR-FDTD-метод, кривая 2 — РВ-формулы).

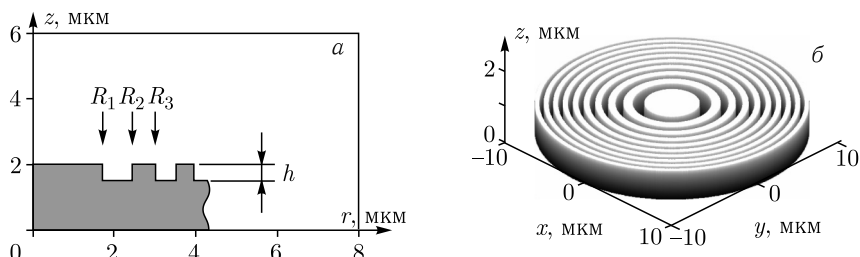


Рис. 3.44. Радиальный профиль (а) и объемное изображение (б) бинарной зонной пластинки с фокусным расстоянием $f = 15\lambda$

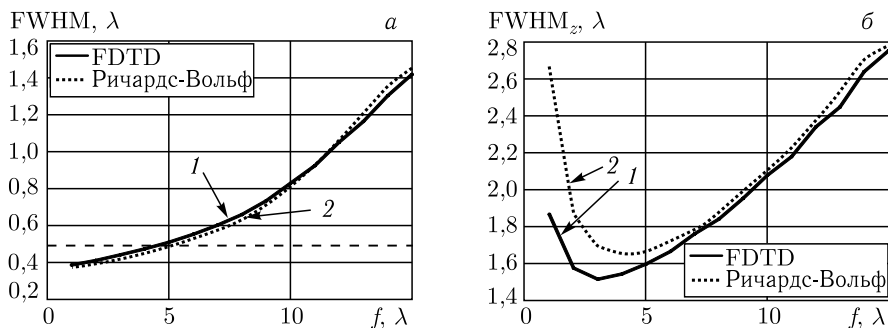


Рис. 3.45. Зависимость изменения (а) диаметра фокального пятна FWHM и (б) глубины фокального пятна DOF по полуспаду интенсивности от фокусного расстояния зонной пластинки с радиусом $R = 20\lambda$ при освещении ее радиально-поляризованной модой R-TEM₀₁ с радиусом $w = 10\lambda$. Моделирование с помощью метода BOR-FDTD (кривая 1) и по РВ-формулам (кривая 2). Пунктирной кривой на рисунке 3.45, а отмечен дифракционный предел

На рисунке 3.45, б аналогично показана зависимость изменения продольной ширины фокального пятна (глубины резкости фокуса) по полуспаду интенсивности от фокусного расстояния.

Параметры моделирования FDTD-методом: дискретность разбиения по пространству $\lambda/50$, дискретность разбиения по времени $\lambda/100c$, где c — скорость света в вакууме, на границах области помещались поглощающие идеальные слои толщиной λ .

Среднеквадратичное относительное отклонение δ диаметра фокусного пятна, вычисленного BOR-FDTD-методом и по РВ-формулам, не превышало 6% (рис. 3.46, кривая 1), а относительное отклонение глубины фокуса DOF возрастало при уменьшении фокусного расстояния до 30% при $f = \lambda$ (рис. 3.46, кривая 2). При фокусном расстоянии большем $f \geq 4\lambda$ ($NA \leq 0,98$) обе ошибки не превышают 6%. Таким образом, можно утверждать, что РВ-формулы могут найти применение при моделировании острой фокусировки света, если фокус ЗП находится на расстоянии от поверхности большем, чем 4λ .

Как видно из рис. 3.45, а оба метода моделирования показывают преодоление дифракционного предела. При расчете методом BOR-FDTD преодоление дифракционного предела наблюдается для фокусного расстояния $f = 4,7\lambda$ ($NA = 0,97$), а по РВ-формулам — при $f = 5,4\lambda$ ($NA = 0,96$).

Минимальные значения диаметров фокальных пятен составили $\text{FWHM} = 0,37\lambda$ при расчете по РВ-формулам и $\text{FWHM} = 0,39\lambda$ при расчете методом FDTD (согласуется с [45]) для числовой апертуры $NA = 0,999$ ($f = \lambda$). На рисунке 3.47 приведено распределение интенсивности в фокальной плоскости для зонной пластинки с фокусным расстоянием $f = \lambda$. Из рисунка видно, что преодоление дифракционного предела происходит за счет увеличения энергии боковых лепестков (или увеличения глубины фокуса), и как следствие уменьшается эффективность фокусировки. Из рисунка 3.45, б видно, что глубина фокусировки, рассчитанная FDTD-методом (кривая 1) всегда меньше, чем рассчитанная РВ-формулами (кривая 2). Это объясняется тем, что ЗП своей поверхностью ограничивает световой пучок в продольном направлении. Это хорошо видно из рис. 3.47, б.

Из рисунка 3.47, б видно, что наблюдается минимальное значение продольной ширины фокусного пятна — при моделировании методом FDTD оно составило $\text{DOF} = 1,51\lambda$ для фокусного расстояния $f = 3\lambda$ ($NA = 0,99$), при расчете по РВ-формулам $\text{DOF} = 1,65\lambda$ для фокусного расстояния $f = 4\lambda$ ($NA = 0,98$). Из рисунка 3.47, б (кривая 1) видно, что при уменьшении фокусного расстояния ЗП до $f = 3\lambda$ глубина фокуса также уменьшается, но при уменьшении фокусного расстояния при $f < 3\lambda$ глубина фокуса растет. Это подтверждает общее представление о том, что при уменьшении диаметра фокусного пятна меньше дифракционного предела глубина фокуса начинает

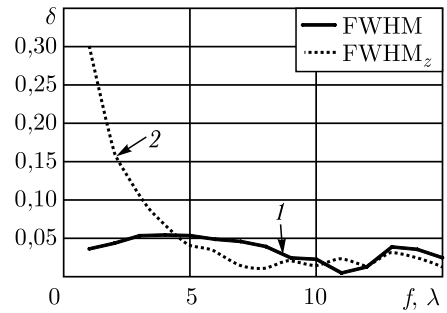


Рис. 3.46. Зависимость среднеквадратичной относительной ошибки вычисления диаметра фокального пятна (кривая 1) и глубины фокального пятна (кривая 2) от фокусного расстояния зонной пластинки

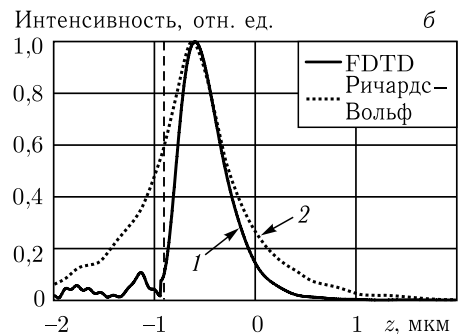
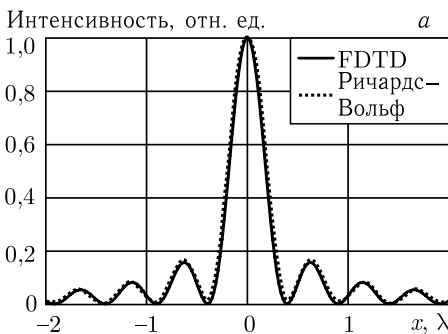


Рис. 3.47. Распределение интенсивности (а) в фокальной плоскости вдоль оси x и (б) вдоль оси симметрии ЗП с радиусом $R = 20\lambda$ и фокусным расстоянием $f = \lambda$ при освещении ее радиально-поляризованной модой $R\text{-TEM}_{01}$ с $w = 10\lambda$. Моделирование с помощью метода FDTD (кривая 1) и по РВ-формулам (кривая 2). Пунктирной вертикальной прямой на рис. 3.47, б отмечен край ЗП

увеличиваться таким образом, чтобы сохранялся предельный дифракционный объем фокуса.

Эффективность фокусировки можно оценить, как $\eta = W_1/W_0$, где $W_0 = \int_0^\infty |E_r|^2 r dr$ — энергия входного пучка, E_r — радиальная составляющая

амплитуды моды R-TEM₀₁, $W_1 = \int_0^{r_0} I_{\text{FDTD}} r dr$ — энергия в фокусе, I_{FDTD} —

распределение интенсивности в фокусе (рис. 3.47, а), $r_0 = 0,4\lambda$ — точка первого минимума функции I_{FDTD} . При фокусировке моды с радиусом $w = 10\lambda$ зонной пластинкой с фокусным расстоянием $f = \lambda$ и радиусом $R = 20\lambda$ эффективность фокусировки составила $\eta = 42\%$.

Полученные нами результаты находятся в согласии с результатами работы [45], где с помощью РВ-формул и методом FDTD было получено пятно с диаметром FWHM = 0,39λ при освещении зонной пластинки радиально-поляризованным бessel-гауссовым пучком. В статье [13] также с помощью РВ-формул при фокусировке ЗП с числовой апертурой $NA = 0,98$ было получено фокальное пятно с шириной FWHM = 0,42λ. В нашем случае, для числовой апертуры $NA = 0,98$ (она достигается, когда радиус ЗП $R = 20\lambda$ и фокусное расстояние $f = 4\lambda$), вычисление по РВ-формулам дает аналогичный результат, если радиус моды равен $w = 15\lambda$. Моделирование методом FDTD для таких параметров зонной пластинки и входного пучка показало, что диаметр пятна равен FWHM = 0,44λ. Таким образом, относительная погрешность вычисления FWHM равна 4,55%. Если же радиус моды уменьшить до $w = 10\lambda$, то моделирование методом FDTD показывает увеличение диаметра пятна до FWHM = 0,47λ.

На рисунках 3.48 и 3.49 показана зависимость влияния радиуса ЗП и ширины освещающего пучка на характеристики фокусного пятна (диаметр по полуспаду и глубину).

Как видно из рис. 3.48, увеличение радиуса зонной пластинки при неизменных параметрах освещающего пучка приводит к уменьшению диаметра

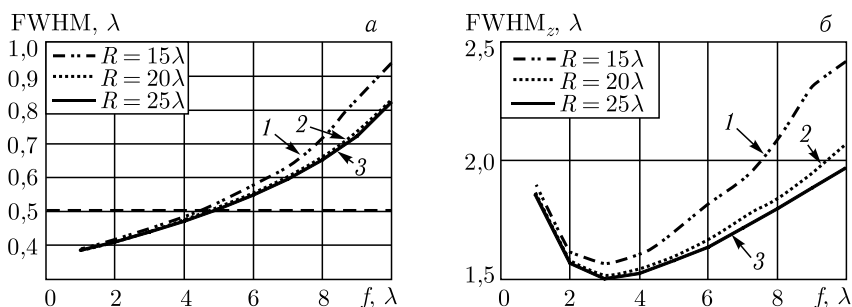


Рис. 3.48. Зависимость диаметра фокального пятна (а) по полуспаду интенсивности и глубины фокального пятна (б) по полуспаду интенсивности от фокусного расстояния ЗП с радиусом $R = 15\lambda$ (кривая 1), $R = 2\lambda$ (кривая 2) и $R = 25\lambda$ (кривая 3) при освещении ее радиально-поляризованной модой R-TEM₀₁ с $w = 10\lambda$

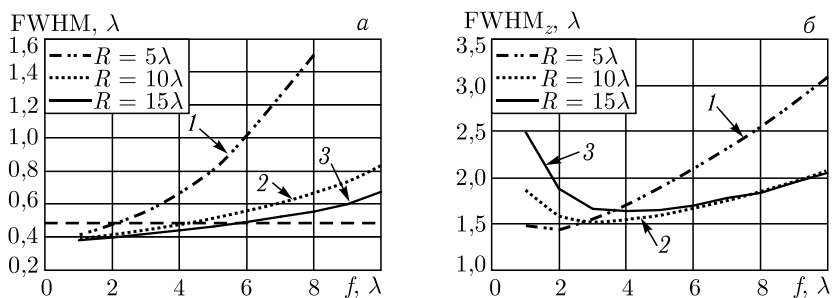


Рис. 3.49. Зависимость диаметра фокального пятна (а) по полуспаду интенсивности и глубины фокального пятна (б) по полуспаду интенсивности от фокусного расстояния ЗП с радиусом $R = 20\lambda$ при освещении ее радиально-поляризованной модой R-TEM₀₁ с $w = 5\lambda$ (кривая 1), $w = 10\lambda$ (кривая 2) и $w = 15\lambda$ (кривая 3)

фокального пятна. Однако, при $R > 20\lambda$ диаметр фокального пятна почти не изменяется (кривые 2 и 3 на рис. 3.48, а). Это означает, что значение радиуса ЗП $R = 20\lambda$ и радиуса пучка $w = 10\lambda$ выбраны оптимальным образом. Из рисунка 3.49 видно, что увеличение радиуса освещающего пучка w приводит к уменьшению диаметра фокального пятна. Хотя происходит это нелинейным образом. Так, увеличение w в 1,5 раза (кривые 2 и 3 на рис. 3.49, а) приводит к уменьшению диаметра фокального пятна на 20%–25% при $f > 6\lambda$ и почти не меняет диаметр фокального пятна при $f < 2\lambda$. А глубина фокуса при $f > 6\lambda$ почти не меняется (кривые 2 и 3 на рис. 3.49, б). Из рисунка 3.49 видно, что как только диаметр фокусного пятна становится меньше дифракционного предела (кривые 1, 2, 3 становятся ниже пунктирной линии на рис. 3.49, а), то при дальнейшем уменьшении f глубина фокуса начинает возрастать (кривые 1, 2, 3 «проходят» через минимум на рис. 3.49, б).

3.3.2. Симметрия интенсивности и потока мощности субволнового фокусного пятна. При изучении острой фокусировки света методом сканирующей ближнепольной оптической микроскопии может возникнуть вопрос: что именно регистрирует микроскоп ближнего поля — плотность энергии (мощности) или поток энергии (мощности)? Чтобы ответить на этот вопрос в данной главе будет описано экспериментальное исследование с помощью микроскопа ближнего поля по фокусировке линейно-поляризованного гауссова пучка бинарной стеклянной зонной пластинкой с фокусным расстоянием, равным длине волны. Сравнение экспериментальных данных с результатами моделирования FDTD-методом позволило однозначно заключить, что микроскоп ближнего поля измеряет поперечную интенсивность (плотность мощности), а не поток мощности и не полную интенсивность. То, что металлический кантилевер с малым отверстием измеряет поперечную интенсивность следует из теории Бете–Баукампа.

Также будет дан ответ на еще один важный вопрос: почему для линейно-поляризованного света интенсивность (плотность мощности) фокусного пятна имеет вид эллипса, а проекция на оптическую ось вектора Умова–Пойнтинга (поток мощности) в фокусном пятне имеет вид круга? Ответ на этот вопрос будет получен с помощью разложения световой волны с линейной

поляризацией по плоским волнам. Будет показано, что эллиптическая форма поперечного сечения интенсивности определяется продольной составляющей электрического вектора, и так как проекция вектора Умова–Пойнтинга на оптическую ось (поток мощности) не зависит от этой продольной составляющей электрического вектора, то сечение потока мощности имеет форму круга.

Интенсивность и проекция вектора Умова–Пойнтинга для линейно-поляризованного света. Рассмотрим распространение света вдоль оптической оси z от одной поперечной плоскости P_1 (будем называть ее начальной плоскостью) до другой поперечной плоскости P_2 , параллельной начальной и находящейся от нее на расстоянии z . Введем в этих плоскостях декартовы координаты (x, y) и (u, v) и полярные координаты (r, φ) и (ρ, θ) . Пусть в начальной плоскости сформировано линейно-поляризованное электромагнитное поле с радиальной симметрией:

$$\begin{cases} E_x(r, \varphi, 0) \equiv E_x(r), \\ E_y(r, \varphi, 0) \equiv 0, \\ E_z(r, \varphi, 0) \equiv 0. \end{cases} \quad (3.136)$$

В плоскости P_2 будем измерять интенсивность,

$$I = |\mathbf{E}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2, \quad (3.137)$$

и поток мощности (составляющую вектора Умова–Пойнтинга, параллельную оптической оси z):

$$S_z = \frac{1}{2} \text{Re} \{ (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_z \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_x H_y^* - E_y H_x^* \}. \quad (3.138)$$

Согласно дифракционным интегралам Рэлея–Зоммерфельда, составляющая E_y и в плоскости P_2 также будет равна нулю. Поэтому (3.137) и (3.138) можно переписать в виде

$$I = |E_x|^2 + |E_z|^2, \quad (3.139)$$

$$S_z = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_x H_y^* \}. \quad (3.140)$$

Используя уравнение Максвелла для монохроматического света с частотой ω ,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -i\omega \mu_0 \mu \mathbf{H}, \quad (3.141)$$

где μ — магнитная проницаемость среды, μ_0 — магнитная постоянная; получаем из (3.140):

$$S_z = \text{Re} \left\{ \frac{-i}{2\omega\mu_0\mu} E_x \left(\frac{\partial E_x^*}{\partial z} - \frac{\partial E_z^*}{\partial u} \right) \right\}. \quad (3.142)$$

Разложим составляющую E_x в угловой спектр плоских волн. Введем для этого декартовы (α, β) и полярные (ζ, φ) координаты в спектральной

плоскости. Тогда

$$E_x(u, v, z) = \iint_{\mathbb{R}^2} A(\alpha, \beta) \exp \left\{ ik \left[\alpha u + \beta v + z \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right] \right\} d\alpha d\beta. \quad (3.143)$$

Из третьего уравнения Максвелла,

$$\frac{\partial E_x}{\partial u} + \frac{\partial E_y}{\partial v} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad (3.144)$$

с учетом того, что $E_y \equiv 0$, получим выражение для составляющей E_z :

$$E_z(u, v, z) = - \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} A(\alpha, \beta) \times \\ \times \exp \left\{ ik \left[\alpha u + \beta v + z \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right] \right\} d\alpha d\beta + C(u, v). \quad (3.145)$$

Константа $C(u, v)$, возникшая при интегрировании по z , означает постоянное поле бесконечной протяженности вдоль оси z . Из физических соображений приравняем ее нулю. Преобразуем также выражение в скобках в (3.142):

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial z} - \frac{\partial E_z^*}{\partial u} = -ik \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2}} A^*(\alpha, \beta) \times \\ \times \exp \left\{ -ik \left[\alpha u + \beta v + z \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right] \right\} d\alpha d\beta. \quad (3.146)$$

Так как в начальной плоскости составляющая E_x радиально симметрична, ее угловой спектр также радиально симметричный, т.е. $A(\zeta, \varphi) \equiv A(\zeta)$. Учитывая это, перепишем (3.143), (3.145) и (3.146) в полярных координатах. При этом все интегралы по φ выразятся через функции Бесселя:

$$E_x(\rho, \theta, z) = 2\pi \int_0^\infty A(\zeta) \exp \left(ikz \sqrt{1 - \zeta^2} \right) J_0(k\rho\zeta) \zeta d\zeta, \quad (3.147)$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = -2\pi i \cos \theta \int_0^\infty A(\zeta) \exp \left(ikz \sqrt{1 - \zeta^2} \right) J_1(k\rho\zeta) \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (3.148)$$

$$\frac{\partial E_x^*}{\partial z} - \frac{\partial E_z^*}{\partial u} = -2\pi ik \int_0^\infty A^*(\zeta) \exp \left(-ikz \sqrt{1 - \zeta^2} \right) \times \\ \times \left[\left(1 - \frac{\zeta^2}{2} \right) J_0(k\rho\zeta) - \frac{\zeta^2}{2} J_2(k\rho\zeta) \cos(2\theta) \right] \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}. \quad (3.149)$$

Подставим (3.147)–(3.149) в (3.139) и (3.141):

$$I = 4\pi^2 \left| \int_0^\infty A(\zeta) \exp(ikz\sqrt{1-\zeta^2}) J_0(k\rho\zeta) \zeta d\zeta \right|^2 + \\ + 4\pi^2 \cos^2 \theta \left| \int_0^\infty A(\zeta) \exp(ikz\sqrt{1-\zeta^2}) J_1(k\rho\zeta) \frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right|^2, \quad (3.150)$$

$$S_z = -\frac{2\pi^2 k}{\omega \mu_0 \mu} \operatorname{Re} \left(\left\{ \int_0^\infty A(\zeta) \exp(ikz\sqrt{1-\zeta^2}) J_0(k\rho\zeta) \zeta d\zeta \right\} \times \right. \\ \times \left. \left\{ \int_0^\infty A^*(\zeta) \exp(-ikz\sqrt{1-\zeta^2}) \left[\left(1 - \frac{\zeta^2}{2}\right) J_0(k\rho\zeta) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\zeta^2}{2} J_2(k\rho\zeta) \cos(2\theta) \right] \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right\} \right) \quad (3.151)$$

Из (3.150) и (3.151) видно, что и интенсивность, и поток мощности симметричны относительно оси x . т.е. для любых пар точек с полярными координатами (ρ, θ) и $(\rho, -\theta)$ они равны. Из (3.150) также видно, что для фиксированного ρ интенсивность в точках $(\rho, 0)$ и (ρ, π) максимальна, а в точках $(\rho, \pi/2)$ и $(\rho, 3\pi/2)$ минимальна. Этим и объясняется формирование фокального пятна в форме эллипса, вытянутого вдоль оси x (плоскость поляризации xz). Заметим, что нарушение радиальной симметрии в выражении для интенсивности определяется вторым слагаемым, а в выражении для потока мощности — вторым множителем. В случае малой числовой апертуры множитель $\zeta^2/(1-\zeta^2)^{-1/2}$ во втором интеграле в (3.150) близок к нулю и не позволяет второму слагаемому давать существенный вклад в интенсивность. Поэтому фокальное пятно имеет круглую форму. Если же фокусировка острая, то в угловом спектре существенную часть занимают волны с ζ , близким к единице. В этом случае вклад второго слагаемого возрастает, может превысить вклад первого слагаемого в несколько раз, появляется асимметрия, и пятно принимает эллиптическую форму или даже форму «кости» или «гантели».

Для потока мощности зависимость иная. Множитель $\zeta/(1-\zeta^2)^{-1/2}$ одинаково влияет и на симметричную, и на асимметричную часть выражения в квадратных скобках в (3.151). В случае малой числовой апертуры ($\zeta \ll 1$) поток мощности определяется радиально симметричным слагаемым $(1 - \zeta^2/2)J_0(k\rho\zeta)$. Поэтому фокальное пятно, измеренное не по интенсивности, а по потоку мощности, имеет круглую форму. В случае большой числовой апертуры, когда ζ близко к единице, вклад обоих слагаемых в квадратных скобках примерно одинаков, но вклад второго слагаемого не может существенно превысить вклад первого, и, кроме того, вблизи фокуса ($\rho = 0$)

функция Бесселя нулевого порядка оказывает большее влияние по сравнению с функцией Бесселя второго порядка. Поэтому пятно получается более круглой формы, чем в случае измерения интенсивности.

Для примера рассмотрим бesselев пучок. У него угловой спектр имеет кольцевую форму

$$A(\zeta) = \delta(\zeta - \alpha), \quad (3.152)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, α — параметр бesselева пучка. В этом случае интегралы в (3.150)–(3.151) пропадают и интенсивность с потоком мощности легко вычисляются:

$$I = [2\pi\alpha J_0(k\alpha\rho)]^2 + \left[\frac{2\pi\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}} J_1(k\alpha\rho) \cos\theta \right]^2, \quad (3.153)$$

$$S_z = -\frac{2\pi^2 k}{\omega\mu_0\mu} J_0(k\alpha\rho) \left[\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) J_0(k\alpha\rho) - \frac{\alpha^2}{2} J_2(k\alpha\rho) \cos(2\theta) \right] \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \quad (3.154)$$

Для моделирования случая малой числовой апертуры выберем $\alpha = 0,3$ (рис. 3.50). Для моделирования острой фокусировки выберем $\alpha = 0,8$ (рис. 3.51) и $\alpha = 0,9$ (рис. 3.52). Интенсивность и поток мощности для разных значений α показаны на рис. 3.50–3.52: горизонтальная ось — ось x , вертикальная ось — ось y . Другие параметры моделирования: длина волны $\lambda = 532$ нм, расстояние $z = 10\lambda$, область моделирования — $5\lambda \leq x \leq +5\lambda$, $-5\lambda \leq y \leq +5\lambda$.

Рисунки 3.50–3.52 подтверждают ранее сделанные предположения. При увеличении числовой апертуры фокальное пятно, измеренное по интенсив-

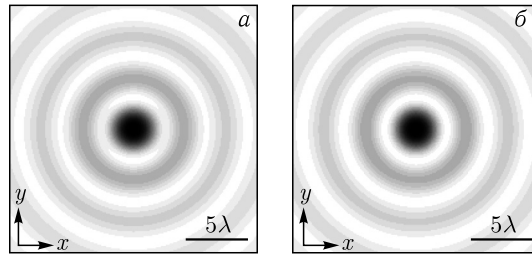


Рис. 3.50. Интенсивность (а) и поток мощности (б) для бesselева пучка с $\alpha = 0,3$

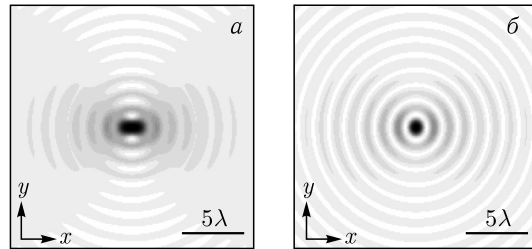


Рис. 3.51. Интенсивность (а) и поток мощности (б) для бesselева пучка с $\alpha = 0,8$

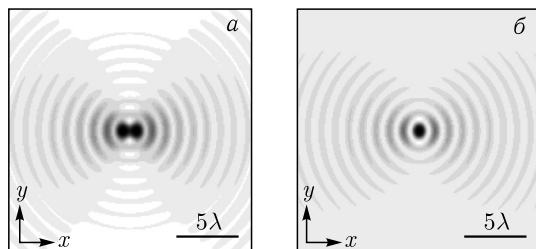


Рис. 3.52. Интенсивность (а) и поток мощности (б) для бесселева пучка с $\alpha = 0,9$

ности, сначала имело круглую форму, затем эллиптическую, затем форму «кости». При этом фокальное пятно, измеренное по потоку мощности, все время оставалось почти круглым (на рис. 3.52, б фокусное пятно имеет форму слабого эллипса, вытянутого вдоль оси y , это нетрудно показать с помощью уравнения (3.154)).

Из рисунков 3.51 и 3.52 можно видеть, что размеры фокальных пятен для интенсивности и потока мощности вдоль вертикальной оси близки.

Моделирование острой фокусировки линейно-поляризованного света с помощью зонной пластинки. Рассматривалась фокусировка линейно-поляризованного Гауссова пучка с длиной волны $\lambda = 532$ нм и радиусом $w = 7\lambda$ бинарной зонной пластинкой (ЗП) с фокусным расстоянием, равным одной длине волны фокусируемого света $f = \lambda$, радиусом 10,64 мкм (20λ), показателем преломления материала 1,52. На рисунке 3.53 показан шаблон такой ЗП в поле расчета. Числовая апертура ЗП равна $NA = 0,997$. Рассчитанная эффективность фокусировки — 42 %.

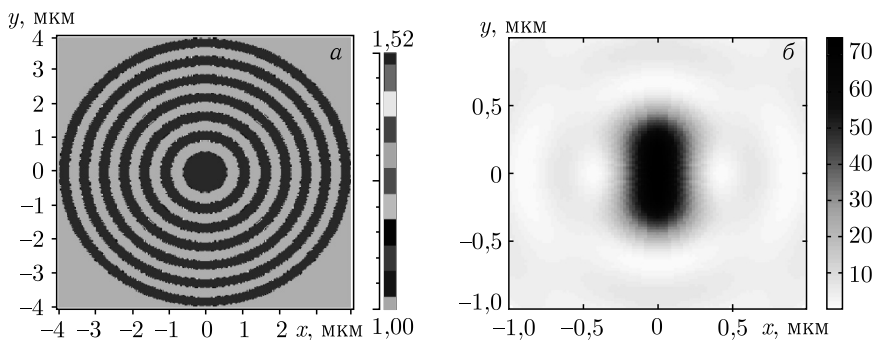


Рис. 3.53. Шаблон ЗП с фокусным расстоянием, равным длине волны, $f = \lambda$ (а), и распределение интенсивности в плоскости фокуса (б). Ось y — ось поляризации

Радиусы ЗП (рис. 3.53, а) рассчитывались по известной формуле $r_m(m\lambda f + m^2\lambda^2/4)^{1/2}$, где $f = \lambda = 532$ нм — фокусное расстояние, m — номер радиуса зоны. Моделирование проводилось BOR-FDTD методом, при этом проводилось сравнение результатов, полученных при разной дискретности разбиения вычисляемой области по пространству. На рисунке 3.53, б показано в псевдоцветах распределение интенсивности в фокусе.

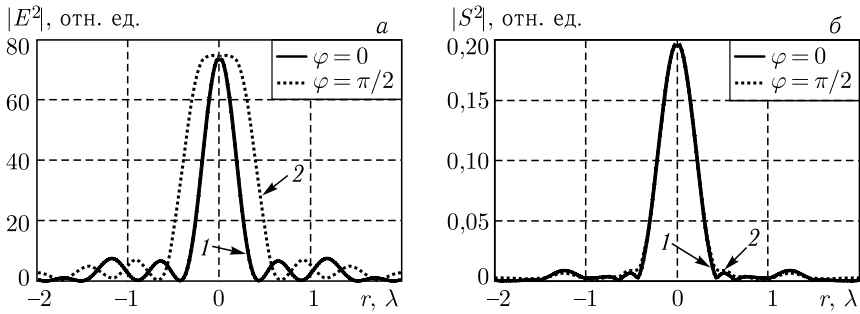


Рис. 3.54. Распределения (а) интенсивности и (б) модуля проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга в фокусе при дискретности разбиения $\Delta r = \lambda/50$. Сечение по оси x ($\varphi = 0$) и по оси y ($\varphi = \pi/2$)

На рисунке 3.54 показаны сечения по декартовым осям: по оси x ($\varphi = 0$) и по оси y ($\varphi = \pi/2$) интенсивности (а) и потока мощности (модуль проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга) (б). Из рисунка 3.53, б и рис. 3.54, а видно, что фокальное пятно интенсивности эллиптическое. А из рисунка 3.54, б также видно, что фокальное пятно потока мощности — круглое. В таблице 3.3 первые две строчки значений показывают размер фокусного пятна по полуспаду интенсивности (первая строка) и потока мощности (вторая строка).

Таблица 3.3. Значения диаметров фокусного пятна

	$\text{FWHM}_x (\varphi = 0), \lambda$	$\text{FWHM}_y (\varphi = \pi/2), \lambda$	DOF, λ
Интенсивность	$0,42 \pm 0,01$	$0,84 \pm 0,01$	$0,86 \pm 0,01$
Модель проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга	$0,45 \pm 0,01$	$0,45 \pm 0,01$	—
Эксперимент на NSOM	$0,44 \pm 0,02$	$0,52 \pm 0,02$	$0,75 \pm 0,02$

Значение глубины фокуса для ЗП показаны в последнем столбце табл. 5.3.

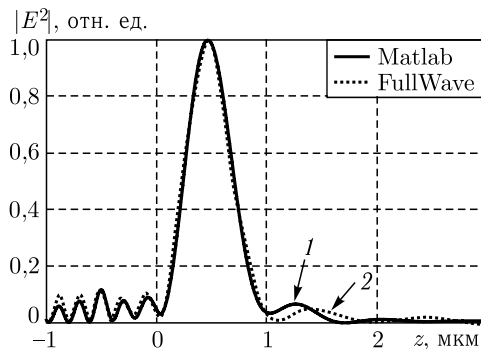


Рис. 3.55. Сравнение распределения интенсивности вдоль оптической оси для ЗП при моделировании в BOR-FDTD Matlab (кривая 1) и FDTD FullWAVE (кривая 2)

На рисунке 3.55 показаны рассчитанные с помощью метода BOR-FDTD в пакете Matlab (кривая 1) и методом FDTD, реализованного в программе FullWAVE (кривая 2).

Экспериментальное исследование фокусировки линейно-поляризованного света зонной пластинкой с фокусным расстоянием $f = \lambda$. Зонная пластинка высокого качества была изготовлена по технологии литографии из резиста ZEP (показатель преломления резиста $n = 1,52$). На рисунке 3.56 показано изображение ЗП в электронном микроскопе: глубина рельефа — 510 нм, диаметр — 14 мкм, крайняя зона — $0,5\lambda = 266$ нм. ЗП имеет 12 колец и центральный диск. На рисунке 3.57 показаны вид сбоку (а) и сверху (б) ЗП в сканирующем микроскопе на атомных силах.

Экспериментально с помощью сканирующего ближнепольного оптического микроскопа (СБОМ) Ntegra Spectra изучалось прохождение линейно-поляризованного гауссова пучка с длиной волны $\lambda = 532$ нм через зонную пластинку с фокусным расстоянием $f = \lambda$.

На рисунке 3.58, а показано экспериментальное распределение интенсивности вдоль оптической оси для ЗП (кривая, ось слева), а также значения диаметра фокусного пятна (квадраты, ось справа). На рисунке 3.58, б показан пример распределения интенсивности в фокусе (изображение, полученное непосредственно с микроскопа).

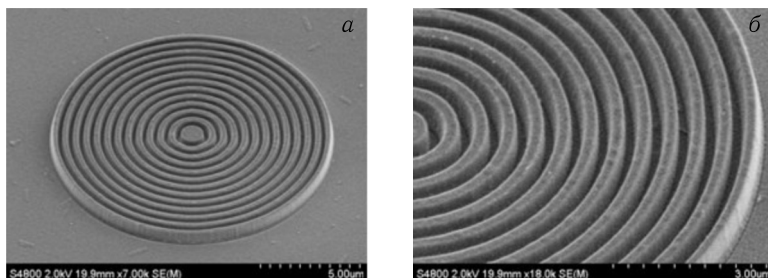


Рис. 3.56. Изображение ЗП в электронном микроскопе с увеличением 7000 раз (а) и 18000 раз (б)

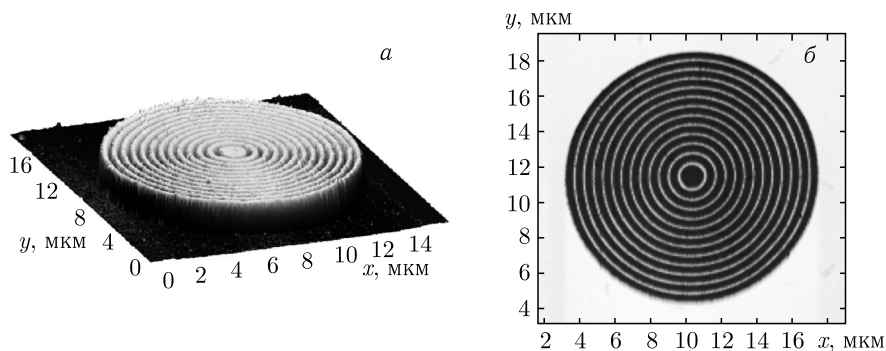


Рис. 3.57. Вид ЗП сбоку (а) и сверху (б), полученные на сканирующем микроскопе на атомных силах

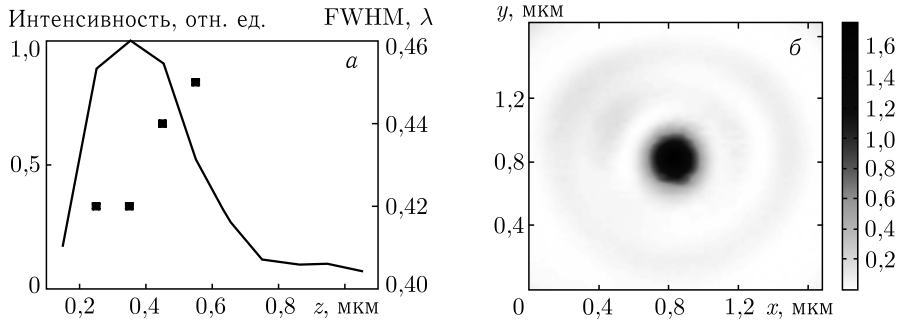


Рис. 3.58. Экспериментальное распределение интенсивности вдоль оптической оси (а) для ЗП (кривая, ось слева) и значения меньших диаметров фокусных пятен (квадраты, ось справа); поперечное сечение фокусного пятна на фокусном расстоянии $f = \lambda = 532$ нм (вертикальная ось совпадает с плоскостью поляризации) (б)

Усредненные значения диаметра эллиптического фокусного пятна ЗП приведены в третьей строке значений в табл. 3.3. Из рисунка 3.58, а видно, что максимальное значение интенсивности на оси смещено от плоскости геометрического фокуса $f = \lambda = 532$ нм ближе к ЗП ($z = 400$ нм). Заметим, что на этом расстоянии ($z = 400$ нм) меньший диаметр фокусного пятна расчетный и экспериментальный совпадают, $\text{FWHM} = 0,42\lambda$.

Для сравнения на рис. 3.59 приведены сечения вдоль оси x , перпендикулярной плоскости поляризации, интенсивности (кривая 1), потока мощности (кривая 3) и экспериментальная кривая, измеренная с помощью NSOM (кривая 2). Кривые почти совпадают (см. второй столбец табл. 3.3): их отличия меньше ошибки измерения ($\pm 0,02\lambda$). Отличия заметны только в боковых лепестках. Но и по ним нельзя однозначно сказать, что измеряется в эксперименте — интенсивность или поток мощности, так как боковые лепестки расчетного потока мощности немного меньше, чем у экспериментальной кри-

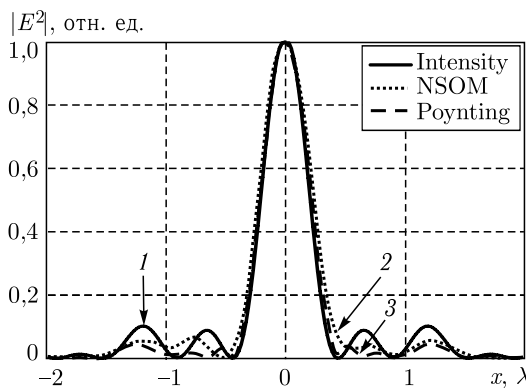


Рис. 3.59. Сравнение экспериментального и расчетного распределения в фокусе вдоль оси x : расчетное распределение интенсивности (кривая 1), экспериментальное распределение интенсивности (кривая 2) и расчетное распределение модуля проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга (кривая 3)

вой, а боковые лепестки кривой расчетной интенсивности немного больше, чем у экспериментальной кривой.

На рисунке 3.60 показаны сечения кривых в фокусе вдоль оси y (параллельной плоскости поляризации): расчетное распределение модуля проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга (кривая 3), экспериментальное распределение интенсивности (кривая 2) и расчетное распределение интенсивности (кривая 1), вычисленной как сумма всех составляющих (а) и как сумма только поперечных составляющих (б).

Из рисунка 3.60, а видно, что в эксперименте не измеряется продольная составляющая интенсивности (см. третий столбец табл. 3.3), так как кривая полной интенсивности ($\text{FWHM} = 0,84\lambda$) шире экспериментальной кривой ($\text{FWHM} = 0,52\lambda$) на величину, большую ошибки измерения ($\pm 0,02\lambda$). Но, в свою очередь, экспериментальная кривая шире расчетной кривой потока мощности ($\text{FWHM} = 0,45\lambda$) также на величину, большую ошибки эксперимента. Но что же измеряется в эксперименте? На рисунке 3.60, б приведены сравнения экспериментальной кривой (кривая 2) с поперечной интенсивностью $|E_x|^2 + |E_y|^2$ (кривая 1). Их ширины совпадают ($\text{FWHM} = 0,52\lambda$). Поэтому из рис. 3.60 можно однозначно заключить, что микроскоп ближнего поля NSOM с кантиливером в виде металлической пирамиды с отверстием 100 нм (рис. 3.60, б) измеряет поперечную интенсивность $|E_x|^2 + |E_y|^2$ (плотность мощности), а не поток мощности и не полную интенсивность $|E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$. Поэтому эллипс фокусного пятна на рис. 3.58, б менее выражен, чем расчетный эллипс на рис. 3.53, б.

Проникновение электромагнитного поля в малое отверстие в металлическом экране описывается в рамках теории Бете–Баукампа [74–76]. Согласно этой теории плоская линейно-поляризованная волна, падающая под углом на металлический экран с малым круглым отверстием диаметром $a \ll \lambda$, индуцирует электрический диполь, ориентированный перпендикулярно отверстию, и магнитный диполь, расположенный в плоскости отверстия. И поэтому

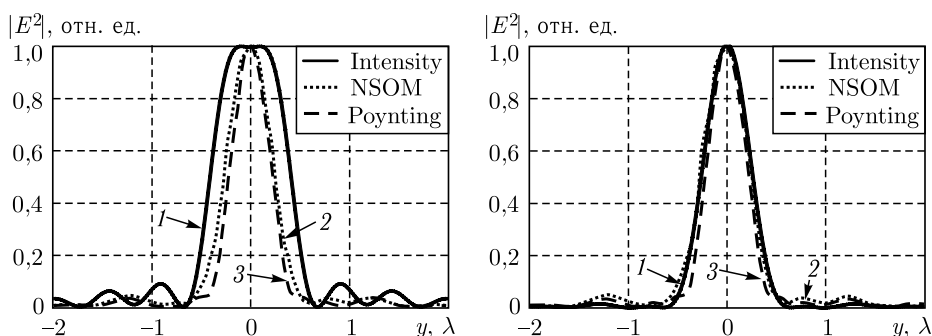


Рис. 3.60. Сравнение экспериментального и расчетного распределения в фокусе вдоль оси y (параллельной плоскости поляризации): экспериментальное распределение интенсивности (кривая 2), расчетное распределение модуля проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга (кривая 3) и расчетное распределение интенсивности (кривая 1), вычисленной как сумма всех составляющих (а) и как сумма только поперечных составляющих (б)

поле в дальней зоне для малого отверстия, освещенного наклонной плоской волной \mathbf{E} , задается излучением электрического и магнитного диполей с моментами

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= -\frac{4}{3}\varepsilon_0 a^3 (\mathbf{E} \mathbf{n}_z) \mathbf{n}_z, \\ \mathbf{M} &= -\frac{8}{3} a^3 [\mathbf{n}_z \times [\mathbf{E} \times \mathbf{n}_z]],\end{aligned}\tag{3.155}$$

где \mathbf{n}_z — единичный вектор вдоль оптической оси (перпендикулярной плоскости отверстия). Из (3.155) видно, что электрический диполь формирует только продольная составляющая электрического поля \mathbf{E} . Но диполь, ориентированный вдоль оптической оси, излучает в поперечном направлении и не излучает вдоль самой оптической оси. Магнитный диполь в (3.155) формируется, наоборот, только поперечными составляющими вектора электрического поля, так как внутреннее векторное произведение в правой формуле в (3.155) равно нулю для продольной составляющей вектора электрического поля. То есть продольная составляющая не будет регистрироваться фотоприемником, расположенным на некотором расстоянии от малого отверстия в металле вдоль оптической оси.

3.4. Фокусировка света с помощью градиентных линз

3.4.1. Механизм сверхразрешения в планарной гиперболической секансной линзе. С помощью ДОО совместно с фокусирующей рефракционной оптикой дальнего поля можно достичь сверхразрешения, например, получить фокусное пятно с диаметром по полуспаду интенсивности, равным $\text{FWHM} = 0,44\lambda$ [48], где λ — длина волны света в вакууме, вместо дифракционного предела ($\text{FWHM} = 0,51\lambda$). Но при этом боковые лепестки дифракционной картины в фокусе будут превышать по интенсивности значение 0,1 от интенсивности в фокусе. Можно достичь еще меньшего значения диаметра фокального пятна в дальней зоне, но при этом будет возрастать доля световой энергии в боковых лепестках так, что их интенсивность может сравниться или превысить интенсивность в фокусе [77]. Заметим, что дифракционных пределов разрешения в оптике известно несколько: это предел разрешения Рэля $0,61\lambda/NA$ [78], предел Хьюстона $0,5\lambda/NA$ и предел Спарроу $0,475\lambda/NA$ [79], где NA — числовая апертура фокусирующей системы. Мы будем пользоваться своими пределами разрешения, которые определяются для 3D-полей по полуспаду квадрата функции Эйри ($0,51\lambda/NA$), а для 2D-полей по полуспаду sinc-функции ($0,44\lambda/NA$).

Чтобы преодолеть предел разрешения без увеличения боковых лепестков, следует приблизить оптический элемент к источнику света. Эту область оптики исследует микроскопия ближнего поля [74]. Если исключить из рассмотрения металлические поверхности и поверхностные плазмоны [80], которые позволяют достигать разрешения $\lambda/50$, а остаться в рамках рефракционной и градиентной оптики, то высокого разрешения можно добиться с помощью линз ближнего поля: SIL (solid immersion lens) [81], NAIL (numerical aperture immersion lens) [82–84] и nSIL (nano solid immersion lens) [78, 85].

С помощью SIL экспериментально для длины волны $\lambda = 633$ нм и полусферы из стекла LASFN9 с радиусом 5 мм и показателем преломления $n = 1,845$ было получено разрешение $\text{FWHM} = 190$ нм $= 0,298\lambda$ [81]. С помощью полусферы из кремния для NAIL радиусом 1,6 мм было экспериментально получено разрешение $\text{FWHM} = 250$ нм $= 0,23\lambda$ (теоретический предел для кремния $\text{FWHM} = 0,147\lambda$ при $n = 3,4$ и $\lambda = 1$ мкм) [82]. В более поздней работе [83] удалось с помощью кольцевой апертуры и кремниевой NAIL достичь разрешения $\text{FWHM} = 145$ нм $= 0,11\lambda$ ($\lambda = 1,3$ мкм). Если линза освещается кольцевым пучком, то в фокусе формируется бесселев пучок, для которого предел разрешения равен $\text{FWHM} = 0,36\lambda/NA$. С помощью оптики ближнего поля (nSIL) на модельных примерах показано, что для полусферы радиусом 1–2 мкм [78] из стекла ($n = 1,6$) можно получить фокусное пятно диаметром $\text{FWHM} = 126$ нм $= 0,235\lambda$ ($\lambda = 532$ нм) [85]. Заметим, что рефракционная оптика ближнего поля увеличивает числовую апертуру уже сходящегося светового пучка, а при распространении света от источника эта оптика способна только собрать свет, но для фокусировки света требуется дополнительная оптика.

Туннелирование неоднородных волн источника в среду. В двумерном (2D) случае напряженность электрического поля монохроматической ТЕ-волны на расстоянии z от начальной плоскости имеет вид

$$E_1(x, z) = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(x', z=0) \exp \left[-ik\xi(x' - x) + ikz\sqrt{1 - \xi^2} \right] dx' d\xi. \quad (3.156)$$

Если источник в начальной плоскости точечный,

$$E_0(x, z=0) = E_0 \delta \left(\frac{kx}{2\pi} \right), \quad (3.157)$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, то амплитуда поля на расстоянии z будет равна сумме плоских волн и неоднородных затухающих волн:

$$E_1(x, z) = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-ik\xi x + ikz\sqrt{1 - \xi^2} \right] d\xi. \quad (3.158)$$

Заметим, что так как функция Ханкеля нулевого порядка и первого рода имеет вид [86]

$$H_0^1(k\sqrt{x^2 + z^2}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \left[-ik\xi x + ikz\sqrt{1 - \xi^2} \right]}{\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi, \quad (3.159)$$

то (3.158) можно выразить через производную функции Ханкеля:

$$E_1(x, z) = -\frac{i\pi}{k} \frac{\partial}{\partial z} H_0^1(k\sqrt{x^2 + z^2}). \quad (3.160)$$

Пусть на пути излучения, на расстоянии z от источника появляется граница раздела двух сред. То есть излучение от источника проходит в среду с показателем преломления n . Тогда в среде на расстоянии z от источника амплитуда электрического вектора будет равна

$$E_2(x, z) = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} T_1(\xi) \exp \left[-ik\xi x + ikz\sqrt{n^2 - \xi^2} \right] d\xi, \quad (3.161)$$

где

$$T_1(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{n^2-\xi^2}}, & 0 < |\xi| < 1, \\ \frac{2i\sqrt{\xi^2-1}}{i\sqrt{\xi^2-1} + \sqrt{n^2-\xi^2}}, & 1 < |\xi| < n, \\ \frac{2\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-1} + \sqrt{\xi^2-n^2}}, & |\xi| > n. \end{cases} \quad (3.162)$$

Величины $T_1(\xi)$ представляют собой коэффициенты, полученные по формулам Френеля для трех различных случаев: преобразование распространяющейся плоской волны в распространяющуюся плоскую волну; преобразование затухающей плоской волны в распространяющуюся плоскую волну; преобразование затухающей плоской волны в затухающую плоскую волну в среде.

Действительно, из (3.162) видно, что распространяющиеся волны от точечного источника в среде с $n = 1$ и с $0 < |\xi| < 1$, где $\xi = k_x/k$, войдут в среду под углами $0 < \theta < \theta_1$, где $\theta_1 = \arcsin(1/n)$, и будут далее распространяться в среде с $n > 1$. Поверхностные волны первого типа от источника с проекцией волнового числа в диапазоне $1 < |\xi| < n$ войдут в среду под углами $\theta_2(\xi) = \arcsin(\xi/n)$, лежащими в диапазоне $\theta_1 < \theta_2(\xi) < \pi/2$, так как максимальный угол $\theta_2(\xi)$ равен $\pi/2$ при $\xi = n$. Эти волны, преобразованные из поверхностных затухающих в распространяющиеся, будут и дальше распространяться в среде с $n > 1$. Оставшиеся поверхностные волны (второго типа) от источника с $|\xi| > n$ будут поверхностными волнами среды и будут распространяться вдоль границы раздела.

Числовая апертура гиперболической секансной линзы. Рассмотрим двумерную гиперболическую секансную (ГС) линзу, показатель преломления которой имеет вид

$$n(x) = \frac{n}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L}\right)}, \quad (3.163)$$

где n — показатель преломления на оси линзы, L — длина линзы, а x — координата в поперечной плоскости.

Числовая апертура ГС-линзы может быть найдена из уравнения луча в градиентной среде: $n(x) \cos \theta(x) = \text{const}$, где θ — угол между касательной к лучу и оптической осью z . Пусть луч падает на линзу параллельно оптической оси на расстоянии $x = R$ от нее, где R — радиус ГС-линзы, который может быть найден из условия $n(R) = 1$, $R = \operatorname{arcch}(n)$. Тогда уравнение луча примет следующий вид: $n \cos \theta_0 = n(R) \cos \theta(R) = 1$, где θ_0 — угол между

касательной к лучу и оптической осью z в точке пересечения луча с осью. Отсюда следует, что $\cos \theta_0 = 1/n$, т.е. числовая апертура ГС-линзы равна $NA = n \sin \theta_0 = (n^2 - 1)^{1/2}$.

Так как числовая апертура такой линзы равна $NA = (n^2 - 1)^{1/2} = n \sin \theta_0$, где $\theta_0 = \arcsin[(n^2 - 1)^{1/2}/n]$, то плоские волны с углами распространения θ_1 и θ_2 меньшими θ_0 будут давать вклад в фокусное пятно на выходе ГС-линзы. Найдем максимальное ξ_{\max} для световых волн, которые участвуют в формировании фокуса ГС-линзы. Исходим из равенства $\theta_2(\xi_{\max}) = \theta_0$, тогда получим $\arcsin(\xi/n) = \arcsin[(n^2 - 1)^{1/2}/n]$. Из последнего равенства следует выражение $\xi_{\max} = (n^2 - 1)^{1/2}$. Для кремния и длины волны $\lambda = 1550$ нм получим $\xi_{\max} = 3,32$, так как $n = 3,47$. Тогда минимальный диаметр по полуспаду интенсивности фокусного пятна на выходе планарной ГС-линзы будет равен ($n = 3,4$)

$$\text{FWHM} = 0,44 \frac{\lambda}{NA} = 0,44 \frac{\lambda}{\sqrt{n^2 - 1}} = 0,44 \frac{\lambda}{\xi_{\max}} = 0,133\lambda. \quad (3.164)$$

Теоретический предел разрешения (в планарном случае), который можно получить с помощью твердотельной иммерсионной оптики ближнего поля: SIL (solid immersion lens) [81], NAIL (numerical aperture increasing lens) [82] равен ($n = 3,47$)

$$\text{FWHM} = 0,44 \frac{\lambda}{n} = 0,127\lambda. \quad (3.165)$$

Выражение (3.165) следует из того, что числовая апертура для SIL и NAIL, $NA_{\text{SIL}} = n \sin \theta \leq NA_{\text{NAIL}} = (n^2 - \cos^2 \theta)^{1/2}$, в пределе ($\theta \rightarrow \pi/2$) стремится к $NA_{\max} = n$. Предельное фокусное пятно (3.165) всего на 5% меньше, чем фокусное пятно ГС-линзы (3.164). Оценим максимальный угол, под которым распространяются лучи в ГС-линзе. Распространяющиеся плоские волны от источника с относительной проекцией волновых векторов из интервала $0 < |\xi| < 1$ преобразуются в однородной среде ($n = 3,47$) также в распространяющиеся волны, идущие под углами в диапазоне $0 < \theta < \theta_1 = \arcsin(1/n) \approx 17^\circ$, а максимальный угол (к оптической оси), под которым могут распространяться лучи в ГС-линзе, равен $\theta_0 = \arcsin[(n^2 - 1)^{1/2}/n] \approx 74^\circ$.

Заметим, что если SIL или NAIL освещать кольцевым световым пучком, то в фокусе возникнет картина дифракции, описываемая не функцией Эйри (и не *sinc*-функцией в 2D-случае), а функцией Бесселя нулевого порядка. Поэтому теоретический предел разрешения в среде будет равен

$$\text{FWHM} = 0,36 \frac{\lambda}{n} = 0,104\lambda. \quad (3.166)$$

Три типа волн, распространяющихся в гиперболической секансной линзе. Но не все волны, вошедшие в ГС-линзу, выйдут из нее. Если среда, в которую входят волны от источника, имеет конечные размеры вдоль оптической оси z , то пусть это будет плоскопараллельная пластина толщиной d .

Тогда волны, прошедшие эту пластину, на выходе из нее будут описываться выражением

$$E_3(x, z) = E_0 \int_{-\infty}^{\infty} T_2(\xi) \exp \left[-ik\xi x + ikz\sqrt{1-\xi^2} \right] d\xi, \quad (3.167)$$

где

$$T_2(\xi) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{(1-\xi^2)(n^2-\xi^2)}}{2\sqrt{(1-\xi^2)(n^2-\xi^2)} \cos A - i(n^2+1-2\xi^2) \sin A}, & 0 < |\xi| < 1, \\ \frac{2\sqrt{(1-\xi^2)(n^2-\xi^2)}}{2\sqrt{(1-\xi^2)(n^2-\xi^2)} \cos A - (n^2+1-2\xi^2) \sin A}, & 1 < |\xi| < n, \\ \frac{2\sqrt{(1-\xi^2)(n^2-\xi^2)}}{2\sqrt{(1-\xi^2)(n^2-\xi^2)} \operatorname{ch} B - (n^2+1-2\xi^2) \operatorname{sh} B}, & |\xi| > n, \end{cases} \quad (3.168)$$

$A = iB = kd(n^2 - \xi^2)^{1/2}$. Величины $T_2(\xi)$, как и T_1 в формуле (3.162), представляют собой коэффициенты, полученные по формулам Френеля для трех различных случаев. Из (3.168) следует, что распространяющиеся от источника плоские волны ($0 < |\xi| < 1$) пройдут сквозь пластину и опять будут распространяться за пластиной под теми же углами (среда перед и после пластины — воздух $n = 1$). Поверхностные волны первого типа ($1 < |\xi| < n$) преобразуются в моды внутри плоскопараллельной пластины и в поверхностные волны на противоположной (от источника) поверхности пластины. То есть эти волны не будут распространяться в пространстве за пластиной. Поверхностные волны второго типа ($|\xi| > n$) преобразуются в поверхностные волны на ближайшей (к источнику) стороне пластины, и до противоположенной стороны пластины будут «доставать» только их экспоненциально затухающие «хвосты». Поэтому в ГС-линзе центральные лучи от источника, распространяющиеся в ГС-линзе под углами к оптической оси меньшими, чем $\theta_1 = \arcsin(1/n) \cong 17^\circ$ для $n = 3,47$, будут проходить через линзу и далее распространяться за линзой. А поверхностные волны первого типа будут распространяться от источника в ГС-линзе как в кольцевом резонаторе [87] и не будут выходить из нее. Поверхностные волны второго типа будут распространяться от источника как поверхностные волны ГС-линзы, рассеиваясь частично на ее острых углах, так как линза не является плоскопараллельной пластиной и ограничена по поперечным координатам.

Поэтому, если считать, что фокусное пятно в ГС-линзе создается только распространяющимися волнами с максимальным наклоном, равным θ_1 , то ширина фокусного пятна должна быть равной ($n = 3,47$; $\theta_1 = 17^\circ$) $\text{FWHM} = 0,44\lambda/n \sin \theta_1 = 0,43\lambda$. А если учесть, что в формирование фокуса вносят существенный вклад поверхностные волны первого типа, которые распространяются в ГС-линзе с максимальным наклоном к оптической оси, равным $\theta_0 = 74^\circ$, то диаметр фокусного пятна должен быть равен $\text{FWHM} = 0,44\lambda/n \sin \theta_0 = 0,132\lambda$. Эта цифра хорошо согласуется с формулой

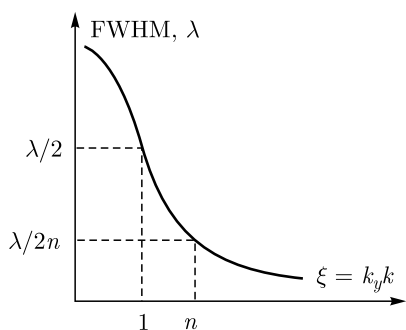


Рис. 3.61. Зависимость диаметра изображения точечного источника (3.164) от ширины спектра плоских волн, включая поверхностные исчезающие волны, достигающие плоскости изображения

$NA = \sin \theta$, где θ — максимальный угол, который образуют лучи этого пучка с оптической осью. Если такой пучок войдет в среду с показателем преломления n и плоской границей раздела сред, то его числовая апертура не изменится $NA = n \sin \beta = \sin \theta$, где β — максимальный угол лучей этого пучка в среде. Для того чтобы увеличить числовую апертуру исходного пучка используют SIL. Это полусфера из материала с показателем преломления n , расположенная своей сферической поверхностью к падающим лучам таким образом, чтобы лучи падали на эту поверхность нормально (рис. 3.62, а). Тогда лучи сходящегося пучка соберутся в фокус в центре полусферы и числовая апертура светового пучка внутри этой полусферы будет равна $NA_{\text{SIL}} = n \sin \theta$. Таким образом с помощью оптики ближнего поля (ближнее поле потому, что фокус формируется на плоской поверхности полусферы) можно в n раз увеличить числовую апертуру исходного светового пучка, или в n раз уменьшить диаметр фокусного пятна.

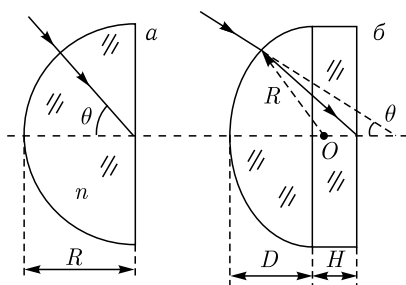


Рис. 3.62. Схема падения и преломления лучей в SIL (а) и NAIL (б)

(3.164), которая, собственно, приводит к тому же результату, только другим путем.

На рисунке 3.61 показана характерная зависимость ширины фокусного пятна от ширины спектра плоских волн, дающих вклад в этот фокус, согласно формуле (3.164).

Таким образом, если моделирование покажет, что диаметр пятна в ГС-линзе меньше дифракционного предела в среде (3.165), то это означает, что в формировании этого фокусного пятна участвуют поверхностные волны второго типа.

Числовые апертуры оптики ближнего поля. Сравним числовые апертуры линз ближнего поля (SIL и NAIL) и ГС-линзы. Пусть в вакууме распространяется сходящийся световой пучок с числовой апертурой

Другой тип линзы ближнего поля — NAIL — позволяет еще более увеличить числовую апертуру пучка. В отличие от SIL, на пути лучей сходящегося светового пучка располагается сегмент сферы (меньше полусферы). При этом лучи должны падать на сферическую поверхность таким образом, чтобы их угол с оптической осью был меньше угла, образованного с этой осью нормалью к сферической поверхности, проходящей через точку пересечения луча со сферой. При этом к сегменту сферы следует добавить цилиндр радиусом как у сферы и высотой H , сделанный из того же матери-

ала, что и сфера. Цилиндр подбирается таким образом, чтобы лучи фокусировались как раз на пересечении его задней плоскости с оптической осью. Пусть сфера (шар) имеет радиус R , высота сегмента $D < R$, тогда если высота цилиндра находится из уравнения $D + H = R(1 + 1/n)$, то фокус сформируется на выходной (для лучей) плоскости цилиндра (рис. 3.62, б). На рисунке 3.62, б видно, что луч преломляется в линзе и пересекает оптическую ось под углом, большим, чем угол θ у падающего на линзу луча. При этом, если числовая апертура падающего на NAIL светового пучка была равна $NA = \sin \theta$, то числовая апертура пучка лучей в цилиндре, сходящихся на выходной плоской поверхности будет равна $NA_{NAIL} = (n^2 - \cos^2 \theta)^{1/2}$. Можно показать, что $NA_{NAIL} \geq NA_{SIL}$. Если сравнить эти числовые апертуры с числовой апертурой ГС-линзы, $NA = (n^2 - 1)^{1/2} = n \sin \theta_0$, то различие будет небольшое: максимальная числовая апертура для рефракционной оптики ближнего поля, $NA_{NAIL} = NA_{SIL} = n = 3,47$, отличается от числовой апертуры градиентной линзы, $NA = (n^2 - 1)^{1/2} = 3,32$, всего на 5%. Однако заметим, что линзы SIL и NAIL только собирают свет от источника и преобразуют поверхностные волны первого типа в распространяющиеся волны, но не фокусируют собранный свет. Для последующей фокусировки требуется дополнительная рефракционная оптика. В отличие от этого, ГС-линза и собирает свет от источника, и фокусирует его на своей выходной поверхности.

Уменьшение фокусного пятна с помощью модуляции показателя преломления. В недавних работах [88, 89] показано численно, что с помощью субволновых дифракционных решеток можно поверхностные волны от источника преобразовать в распространяющиеся волны и достичь сверхразрешения $\lambda/20$. В работе [88] для этого использовались неограниченные по апертуре, уложенные друг на друга, несколько дифракционных решеток с разным субволновым периодом, а в работе [89] использовалась металлическая субволновая дифракционная решетка с очень большой диэлектрической проницаемостью ($\epsilon = -100$). Однако, в этих работах не использовался оптический элемент для фокусировки или изображения.

Моделирование с помощью программы FullWAVE, реализующей FDTD-метод, показало, что добавление к градиентной ГС-линзе субволновой дифракционной решетки или выполнение ГС-линзы в бинарном виде с субволновыми неоднородностями приводит к уменьшению ширины фокусного пятна на 10% и 20%.

На рисунке 3.63 показан в серых тонах профиль показателя преломления ГС-линзы (а) и распределение интенсивности на выходе из линзы (б). Ширина фокусного пятна на рис. 3.63, б равна $\text{FWHM} = 191 \text{ нм} = 0,123\lambda$, $\lambda = 1,55 \text{ мкм}$. Это значение немного меньше дифракционного предела в кремнии (3.165), что доказывает, что в формировании фокусного пятна в ГС-линзе участвуют поверхностные волны второго типа.

На рисунке 3.64 показана та же ГС-линза, что и на рис. 3.63, но в верхней ее части (на выходе) имеется субволновая дифракционная решетка (а), а на рис. 3.64, б показано распределение интенсивности на выходе из этой линзы. Ширина фокусного пятна на рис. 3.64, б равна

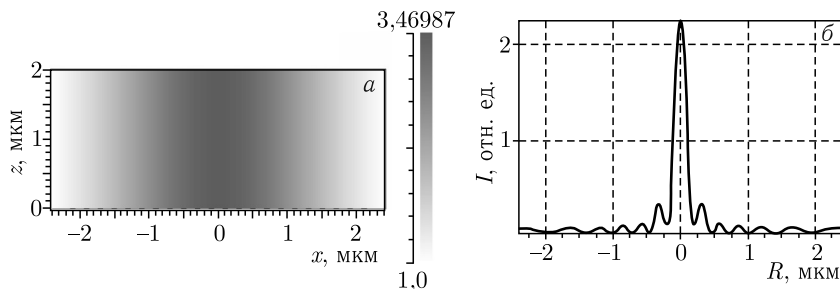


Рис. 3.63. Распределение показателя преломления в градиентной ГС-линзе (а) (на оси показатель преломления 3,47), горизонтальный размер 4,8 мкм, вертикальный — 2 мкм. Свет распространяется вертикально. И поперечное распределение интенсивности $|E|^2$ на выходе из линзы (на расстоянии 10 нм от нее) (б)

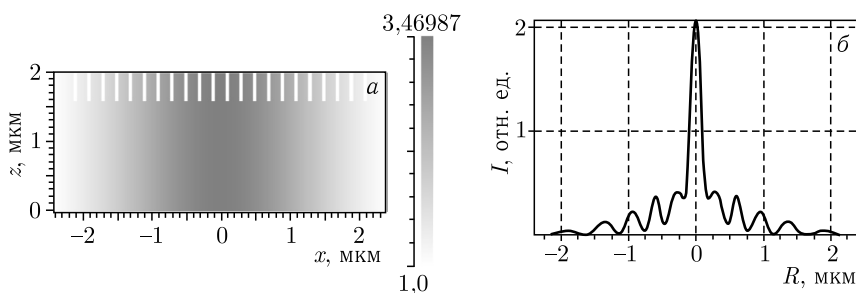


Рис. 3.64. Распределение показателя преломления в градиентной ГС-линзе (а) (на оси показатель преломления 3,47), горизонтальный размер 4,8 мкм, вертикальный — 2 мкм. В верхней части ГС-линзы имеется дифракционная решетка глубиной 0,4 мкм с периодом 0,2 мкм и шириной канавок 0,05 мкм (внутри канавок — воздух). Свет распространяется снизу вверх. И поперечное распределение интенсивности $|E|^2$ на выходе из линзы (на расстоянии 10 нм от нее) (б)

$\text{FWHM} = 177 \text{ нм} = 0,114\lambda$. Это на 8 % меньше, чем ширина фокуса на рис. 3.63, б и на 10 % меньше дифракционного предела (3.165).

Рассмотрим двумерную зонную линзу, размеры зон которой подобраны таким образом, что эффективный показатель преломления описывается формулой (3.162). Такую зонную линзу будем называть бинарной ГС-линзой. На рисунке 3.65 показан профиль градиентной и бинарной ГС-линз. Радиус линзы разбит на отрезки $[x_m, x_{m+1}]$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, в каждом из которых подобрана точка $x_m < x_m^b < x_{m+1}$ такая, что на отрезке $[x_m, x_m^b]$ материал линзы — кремний, а на отрезке $[x_m^b, x_{m+1}]$ — воздух. Точка x_m^b выбирается так, чтобы аппроксимировать показатель преломления (3.163):

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} n(x) dx = n_0 (x_m^b - x_m) + 1 \cdot (x_{m+1} - x_m^b). \quad (3.169)$$

На рисунке 3.66, а показана бинарная ГС-линза, полученная по формуле (3.169) для линзы на рис. 3.63, а, а на рис. 3.66, б распределение интенсивности в фокусе на выходе из этой линзы. Ширина фокусного пятна

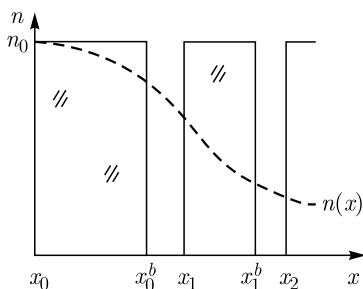


Рис. 3.65. Профили показателя преломления градиентной (пунктирная линия) и бинарной (сплошная линия) ГС-линз. Заштрихованные области — кремний

на рис. 3.66, б равна $\text{FWHM} = 159 \text{ нм} = 0,102\lambda$. Это на 17 % меньше, чем ширина фокуса на рис. 3.63, б и на 20 % меньше дифракционного предела (3.165). То есть в формировании фокусного пятна (рис. 3.66, б) на выходе бинарной ГС-линзы, согласно графику на рис. 3.61 на 20 % вносят вклад поверхностные волны второго типа ($k_x > nk$).

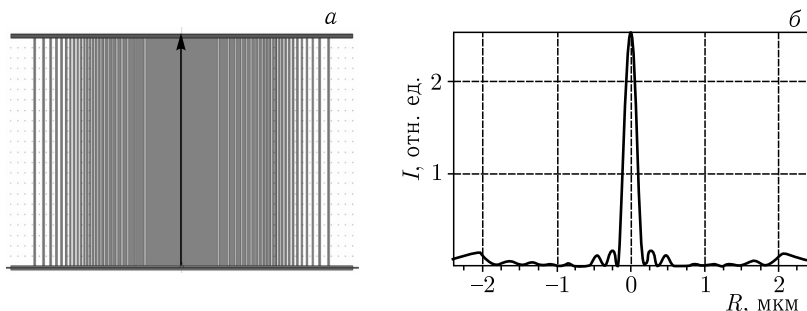


Рис. 3.66. Бинарная ГС-линза (а) ($n = 3,47$), горизонтальный размер 4,8 мкм, вертикальный — 2 мкм, минимальная канавка — 20 нм (внутри канавок — воздух). Свет распространяется вертикально. И поперечное распределение интенсивности $|E|^2$ на выходе из линзы (на расстоянии 10 нм от нее) (б)

3.4.2. Градиентные элементы микрооптики для достижения сверхразрешения. Фокусировать когерентный лазерный свет в пятно меньшее дифракционного предела или изображать точечный источник света со сверхразрешением стало возможно в последние годы с развитием микрооптики и нанопотоники. Преодолевать дифракционный предел, равный $0,51\lambda/n$, где λ — длина волны света в вакууме, n — показатель преломления вещества в месте фокуса, можно с помощью суперлинз [90]. Суперлинза — это 2D-плоская пластина из метаматериала, который представляет собой чередующиеся субволновые слои металла и диэлектрика. Диэлектрические проницаемости таких слоев подбирают таким образом, чтобы эффективный показатель преломления композитного вещества был равен $n = -1$. Эксперименты по сверхразрешению с помощью такой линзы были осуществлены авторами работ [91, 92]. Было достигнуто сверхразрешение равное $0,4\lambda$ [91]. Аналогичный эксперимент был проведен [93] с помощью субволнового слоя

серебра, который также работает как суперлинза. В этой работе были разрешены две линии, разделенные расстоянием 145 нм при освещении их ультрафиолетовым светом с длиной волны 365 нм. То есть было также достигнуто сверхразрешение, равное $0,4\lambda$ [93].

В работе [94] была описана гиперлинза, которая изображает со сверхразрешением в дальней зоне. При этом были разрешены две линии шириной по 35 нм, разделенные расстоянием 150 нм, с помощью света с длиной волны 365 нм. То есть опять было достигнуто сверхразрешение равное $0,4\lambda$. Хотя при моделировании гиперлинзы в виде решетки [95] было получено сверхразрешение равное $0,05\lambda$ на расстоянии $1,5\lambda$ от поверхности. По-видимому, при моделировании не учитывается поглощение и рассеяние света метаматериалом, которое имеет место в реальных экспериментах. Это косвенно подтверждают результаты работы [72], где исследовалась фокусировка лазерного света с помощью зонной пластинки из золотой пленки, толщиной 100 нм. Расчет показал, что диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности должен быть равен $0,35\lambda$, а в эксперименте было получено, что диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности равен λ .

В работах [96–98] численно анализируются многослойные и анизотропные наноструктуры, которые позволяют получить субволновое разрешение. Так, в работе [96] подобраны параметры 8-ми слойной 1D-структуры на основе Ag/SiO_2 , которая имеет толщину 400 нм и изображает источник шириной $0,4\lambda$ в виде пятна такой же ширины. В работе [97] предложена анизотропная 2D-наноструктура, у которой составляющие тензора диэлектрической проницаемости имеют значения $\varepsilon_x = 0,01 - i0,01$ и $\varepsilon_z = -100$, а толщина структуры вдоль оси z равна 400 нм (длина волны $\lambda = 700$ нм). Моделирование показало, что такая структура разрешает две линии толщиной по 3 нм, разделенных расстоянием 23 нм. То есть было достигнуто сверхразрешение равное $0,03\lambda$. Теми же авторами предложена другая 2D-наноструктура, состоящая из двух разных анизотропных слоев, которая разрешает две узкие щели, разделенные расстоянием 50 нм, при освещении их светом с длиной волны 1550 нм [98].

Еще одним кандидатом на достижение сверхразрешения являются фотонные кристаллы. В работе [99] с помощью моделирования показано, что 2D-фотонно-кристаллический слой из диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 12$ и треугольной решеткой круглых отверстий с радиусом $r = 0,4a$, a — период решетки отверстий, имеет эффективный показатель преломления $n = -1$ и является изображающей линзой для длины волны $\lambda = a/0,3$. При этом точечный источник изображается в виде пятна диаметром по полуспаду интенсивности, равным $0,3\lambda$, а два точечных источника разрешаются по критерию 20 %, если расстояние между ними равно $0,5\lambda$.

В недавно проведенных экспериментах по использованию 2D-фотонно-кристаллического слоя в качестве суперлинзы было получено изображение точечного источника шириной $0,4\lambda$ [100]. Появились также работы, в которых предлагается усовершенствовать суперлинзу с помощью специальной наноразмерной оболочки [101] или с помощью градиентной границы для слоя вещества с отрицательной рефракцией [102]. Экспериментально продемонстрировано, что слой анизотропного вещества способен усиливать и преобра-

зовывать поверхностные неоднородные волны в распространяющиеся световые волны [103].

В данном разделе численно показано, что хорошо известные в оптике градиентные линзы Микаэляна и «рыбий глаз» Максвелла также могут рассматриваться как кандидаты на получение изображений со сверхразрешением. Для 2D-микролинзы Микаэляна показано, что точечный источник света изображается вблизи поверхности линзы в виде светового пятна с шириной по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 0,12\lambda$. Это меньше, чем дифракционный предел для кремния ($n = 3,47$), $0,5\lambda/n = 0,144\lambda$, и меньше, чем сообщалось в работах [72, 96, 99, 100]. Также показано, что микролинза Микаэляна разрешает по полуспаду два близких точечных источника, разделенных расстоянием $0,3\lambda$, что меньше, чем сообщалось в работах [91, 93, 94, 99].

В работах [104, 105] получены аналитические соотношения для расчета мод в градиентном планарном волноводе. На основе аппроксимации непрерывной функции показателя преломления градиентного волновода кусочно-постоянной функцией, и на основе применения метода передаточных матриц записаны рекуррентные уравнения для поиска неопределенных постоянных локальных мод в каждом слое с постоянным показателем преломления [104]. На основе модифицированных функций Эйри и метода ВКБ получены уравнения на собственные значения для расчета параметров модовых функций градиентной среды [105]. Общим ограничением в этих работах является предположение о наличии одной [104] или двух [105] точек возврата, которые имеет функция распределения показателя преломления планарного волновода.

В данной работе получены более общие аналитические выражения для модовых решений в планарном волноводе без ограничений на число точек возврата в функции показателя преломления.

Решение уравнения Гельмгольца для 2D-градиентного волновода.

На рисунке 3.67 показана схема задачи. Рассмотрим градиентную двумерную среду с показателем преломления $n = n(x)$, в которой распространяется электромагнитная волна с ТЕ-поляризацией, вектор напряженности электрического поля которой направлен вдоль оси y .

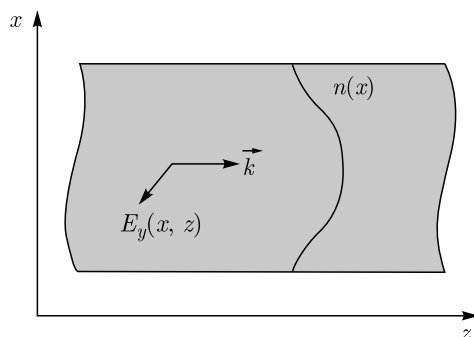


Рис. 3.67. Схема задачи распространения ТЕ-поляризованной волны в 2D-градиентном волноводе

Амплитуда электрического вектора $E_y(x, z)$, удовлетворяет уравнению Гельмгольца [106]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2(x) \right] E_y(x, z) = 0, \quad (3.170)$$

где k — волновое число. Разложим амплитуду электромагнитной волны по поперечным модам градиентной среды:

$$E_y(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) \exp(i\beta_n z), \quad (3.171)$$

где $\beta_n = k_{zn}$ — постоянная распространения n -й моды. Из представления (3.171) следует, что у светового поля имеется продольный период T , так что $\beta_n = 2\pi n/T$. Например, для градиентной среды с квадратичной зависимостью показателя преломления модами являются функции Эрмита–Гаусса, составляющие счетный базис [107].

Подставляя (3.171) в (3.170), получаем уравнение для амплитуды мод градиентной среды:

$$\frac{d^2 C_n(x)}{dx^2} + p_n(x) C_n(x) = 0, \quad (3.172)$$

где

$$p_n(x) = k^2 n^2(x) - \beta_n^2. \quad (3.173)$$

Заменой переменных,

$$C_n(x) = C_n(0) \exp \left[\int_0^x f_n(\xi) d\xi \right], \quad (3.174)$$

уравнение (3.172) сводится к нелинейному дифференциальному уравнению Уиттекера [108] для функции $f_n(x)$:

$$\frac{df_n(x)}{dx} + f_n^2(x) + p_n(x) = 0. \quad (3.175)$$

Уравнение (3.175) может быть решено с помощью разложения в ряд Тейлора функций $f_n(x)$ и $p_n(x)$:

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(n)} x^m, \quad (3.176)$$

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m^{(n)} x^m, \quad (3.177)$$

где $C_m^{(n)}$ и $p_m^{(n)}$ — неизвестные и известные коэффициенты разложения соответствующих функций. Подставляя (3.176) и (3.177) в (3.175) для неизвестных коэффициентов ряда (3.176) получаем рекуррентные соотношения ($m > 0$):

$$C_m^{(n)} = -m^{-1} \left(p_{m-1}^{(n)} + \sum_{s=0}^{m-1} C_s^{(n)} C_{m-1-s}^{(n)} \right), \quad (3.178)$$

где n — положительное целое число, $C_0^{(n)}$ — неопределенные константы. Тогда для амплитуд мод градиентной волноводной среды можно записать явное выражение:

$$C_n(x) = C_n(0) \exp \left(\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(n)} \frac{x^{m+1}}{m+1} \right), \quad (3.179)$$

в котором $C_m^{(n)}$ находятся из рекуррентных соотношений (3.178). Коэффициенты $p_m^{(n)}$, входящие в (3.177) и (3.178), находятся по формулам

$$p_m^{(n)} = \frac{k^2}{m!} \left. \frac{d^m n^2(x)}{dx^m} \right|_{x=0}, \quad (3.180)$$

при $m > 0$ и при $m = 0$, из соотношений

$$p_0^{(n)} = k^2 n^2(0) - \beta_n^2. \quad (3.181)$$

Окончательное выражение для амплитуды светового поля ТЕ-поляризованной волны в градиентной 2D-среде имеет вид

$$E_y(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0) \exp \left[i\beta_n z + \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(n)} \frac{x^{m+1}}{m+1} \right]. \quad (3.182)$$

В формуле (3.182) для каждой моды имеются две неопределенные константы $C_n(0)$ и $C_0^{(n)}$. Моды (3.189) не являются ортогональными и нормированными, поэтому для разложения поля (3.182) по этим модам (т.е. нахождение коэффициентов $C_n(0)$) потребуются усечение обоих рядов в (3.182) до конечных сумм и решение системы линейных алгебраических уравнений.

Постоянные $C_0^{(n)}$ для каждой моды нужно выбирать специальным образом. Для примера рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $n(x) = n_0$ и моды распространяются в однородном пространстве. Из (3.180) и (3.182) получим, что $p_0^{(n)} = k^2 n^2(0) - \beta_n^2$ при $m = 0$ и $p_m^{(n)} = 0$ при $m > 0$. Из (3.178) следует, что

$$C_1^{(n)} = - \left(p_0^{(n)} + (C_0^{(n)})^2 \right). \quad (3.183)$$

Пользуясь произволом в выборе $C_0^{(n)}$, положим, что

$$C_0^{(n)} = i\sqrt{p_0^{(n)}} = i\sqrt{k^2 n_0^2 - \beta_n^2}. \quad (3.184)$$

Тогда из (3.183) следует, что $C_1^{(n)} = 0$, а из (3.178) следует, что и все остальные коэффициенты равны нулю: $C_m^{(n)} = 0$ при $m > 0$. Итак, для однородного пространства, $n(x) = n_0$, вместо (3.182) получим

$$E_y(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(0) \exp \left[i\beta_n z + ix\sqrt{k^2 n_0^2 - \beta_n^2} \right]. \quad (3.185)$$

Решение (3.185) представляет собой хорошо известное решение уравнения Гельмгольца (3.170) в виде суперпозиции плоских волн.

2. Рассмотрим другой частный случай: $n^2(x) = n_0^2 - \alpha^2 x^2$ — квадратичная среда. В этом случае $p_n(x) = p_0^{(n)} + p_1^{(n)}x + p_2^{(n)}x^2$, где $p_0^{(n)} = k^2 n_0^2 - \beta_n^2$, $p_1^{(n)} = 0$, $p_2^{(n)} = -k^2 \alpha^2$ и $p_m^{(n)} = 0$ при $m > 2$. Пусть $C_0^{(n)} = 0$, тогда $C_2^{(n)} = -(C_0^{(n)} C_1^{(n)}) = 0$, а $C_1^{(n)} = -p_0^{(n)} = \beta_n^2 - k^2 n_0^2$. Чтобы все остальные коэффициенты были равны нулю, $C_m^{(n)} = 0$ при $m > 2$, достаточно положить равным нулю третий коэффициент: $C_3^{(n)} = -p_2^{(n)}/3 - (C_1^{(n)})^2/3 = 0$. Тогда на параметр среды α получим условие: $k^2 \alpha^2 = (k^2 n_0^2 - \beta_n^2)^2$. Положим $\beta_n = kn_0/\sqrt{2}$, тогда получим, что $\alpha = kn_0^2/2$. Итак, получается, что модой квадратичного волновода с показателем преломления $n^2(x) = n_0^2 (1 - k^2 n_0^2 x^2/4)$ является гауссова экспонента:

$$E_y(x, z) = C(0) \exp \left(\frac{ikn_0 z}{\sqrt{2}} - \frac{k^2 n_0^2 x^2}{4} \right). \quad (3.186)$$

В заключении этого раздела отметим, что так как производная в нуле модовой функции (3.179) пропорциональна нулевому коэффициенту в ряде (3.176):

$$\frac{dC_n(x)}{dx} \Big|_{x=0} = C_n(0)C_0^{(n)}, \quad (3.187)$$

то выбором $C_0^{(n)} = 0$ (как это было сделано в последнем примере) обеспечивается наличие экстремума у моды на оптической оси.

Общее решение для секанс-градиентного волновода. Для градиентного волновода с секансной зависимостью показателя преломления от поперечной координаты,

$$n(x) = n_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right), \quad (3.188)$$

известно частное решение уравнения (3.170) следующего вида [109]:

$$E_{1y}(x, z) = \exp \left(\frac{ikn_0 z}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.189)$$

Уравнение Гельмгольца (3.170) в этом случае имеет вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n_0^2 \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right) \right] E_y(x, z) = 0. \quad (3.190)$$

Будем искать общее решение (3.190) в виде

$$E_{1y}(x, z) = A(x) \exp(i\gamma z). \quad (3.191)$$

Подставляя (3.191) в (3.190), получаем уравнение

$$\frac{d^2 A(x)}{dx^2} + g(x)A(x) = 0, \quad (3.192)$$

где

$$g(x) = k^2 n_0^2 \operatorname{ch}^{-2} \left(\frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right) - \gamma^2. \quad (3.193)$$

Известно [108], что уравнение вида (3.192) имеет общее решение

$$A(x) = A_1(x) \left[C_1 + C_2 \int_0^x A_1^{-2}(\xi) d\xi \right], \quad (3.194)$$

где $A_1(x)$ — частное решение (3.192), C_1, C_2 — неопределенные константы. В нашем случае в качестве частного решения может быть выбрано решение (3.189), т. е.

$$A_1(x) = \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right), \quad \gamma = \frac{kn_0}{\sqrt{2}}. \quad (3.195)$$

Тогда общее решение для моды секанс-градиентного волновода будет иметь следующий вид:

$$E_{1y}(x, z) = \exp \left(\frac{ikn_0 z}{\sqrt{2}} \right) \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right) \times \\ \times \left\{ C_1 + \frac{C_2}{kn_0 \sqrt{2}} \left[\frac{1}{2} \operatorname{sh}(kn_0 x \sqrt{2}) + \frac{kn_0 x}{\sqrt{2}} \right] \right\}, \quad (3.196)$$

где

$$C_1 = |E_{1y}(x=0, z)|, \quad C_2 = \left| \frac{dE_{1y}(x=0, z)}{dx} \right|. \quad (3.197)$$

Из (3.189) можно получить выражение для ширины моды по полуспаду интенсивности в секанс-градиентном волноводе:

$$\text{FWHM} = \frac{\ln(3 + 2\sqrt{2})}{\pi n_0 \sqrt{2}} \approx \frac{0,4\lambda}{n_0}, \quad (3.198)$$

где λ — длина волны света в вакууме, n_0 — как и прежде, показатель преломления на оси волновода.

Частное решение для квадратичного волновода. В первом разделе данной работы показано, что для квадратичной среды с определенными параметрами модой является гауссова экспонента (3.186). В этом разделе покажем, что это остается верным и для квадратичной среды с произвольными параметрами:

$$n^2(x) = n_0^2 (1 - w^2 x^2), \quad (3.199)$$

где w — произвольная постоянная. Тогда уравнение (3.170) будет иметь вид

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n_0^2 (1 - w^2 x^2) \right] E_y(x, z) = 0, \quad (3.200)$$

а его решение будем искать в виде

$$E_{2y}(x, z) = E_0 \exp(ipz - q^2 x^2). \quad (3.201)$$

Подставляя (3.201) в (3.200), получаем уравнение

$$(-2q^2 - p^2 + k^2 n_0^2 + 4q^4 x^2 - w^2 k^2 n_0^2 x^2) E_0 \exp(ipz - q^2 x^2) = 0. \quad (3.202)$$

Из (3.202) определим неизвестные параметры:

$$q^2 = \frac{wkn_0}{2}, \quad p = kn_0 \sqrt{1 - \frac{w}{kn_0}}.$$

Таким образом, частное модовое решение уравнения (3.200) имеет вид

$$E_{2y}(x, z) = E_0 \exp \left(ikn_0 z \sqrt{1 - \frac{w}{kn_0}} - \frac{wkn_0}{2} x^2 \right). \quad (3.203)$$

Заметим, что при $w = kn_0/2$ решение (3.203) совпадает с решением (3.186). При $w = kn_0/2$ из (3.203) следует, что ширина (диаметр) гауссовой моды по полуспаду интенсивности равна:

$$\text{FWHM} = \frac{\sqrt{\ln 4} \lambda}{\pi n_0} \approx \frac{0,38\lambda}{n_0}. \quad (3.204)$$

Сравнивая (3.204) с (3.198), видим, что ширина обеих мод (секансной и гауссовой) почти одинаковые. Эффективная ширина квадратичного волновода находится из условия $n(x_0) = 1$ и равна

$$2x_0 = \frac{2\sqrt{n_0^2 - 1}}{\pi n_0} \lambda. \quad (3.205)$$

При $n_0 = 1,5$ из (3.205) получим: $2x_0 \approx 0,48\lambda$. То есть эффективная ширина стеклянного планарного волновода с квадратичной зависимостью показателя преломления, в котором может распространяться только гауссова мода (3.203), почти равна половине длины волны света в вакууме. Заметим, что такие «полуволновые» волноводы в настоящее время активно используются в приложениях [110, 111].

Моделирование прохождения света через градиентные элементы микрооптики: сверхразрешение. Несколько лет назад были проведены эксперименты по сверхразрешению в оптическом диапазоне с помощью суперлинз [92, 94]. В работе [92] в качестве суперлинзы использовался тонкий слой серебра толщиной 50 нм. Эксперимент состоял в получении изображения со сверхразрешением в слое резиста амплитудной решетки с периодом 145 нм вблизи тонкой пленки серебра. После освещения ультрафиолетовым светом с длиной волны 365 нм трехслойной структуры (амплитудная решетка + пленка серебра + резист) и после проявления, в слое резиста «записывалась» и была восстановлена с помощью преобразования Фурье решетка с периодом 170 нм. В работе [94] была реализована гиперлинза, представляющая собой полуцилиндр с кольцевым вырезом на подложке из кварца, состоящий из чередующихся слоев серебра (толщиной 35 нм) и диэлектрика Al_2O_3 (толщиной 35 нм). Такая многослойная структура имеет анизотропную диэлектрическую проницаемость. Объектом разрешения служили две амплитудные линии, полученные литографическим способом и имеющие ширину 35 нм, и разделенные расстоянием 150 нм. Этот объект освещался ультрафиолетовым светом с ТЕ-поляризацией и длиной волны 365 нм. С помощью обычной линзы было получено увеличенное изображение этих двух линий, разделенных уже

расстоянием 350 нм. Таким образом, в описанных экспериментах [92, 94] было достигнуто сверхразрешение, равное $0,4\lambda$.

Теоретически (без учета поглощения материала) с помощью суперлинзы может быть достигнуто любое разрешение. С помощью моделирования показано, что гиперболическую линзу, формирующую в ближнем поле увеличенное субволновое изображение, можно реализовать и в виде плоскопараллельного слоя [97]. Было показано, что слой анизотропного вещества с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_x = 0,01 - i0,01$ и $\varepsilon_z = -100$, толщиной 400 нм, разрешает две щели шириной по 3 нм (вытянутые вдоль оси y) в металлическом экране с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - i10^4$, разделенные расстоянием 23 нм, если осветить их светом с ТМ-поляризацией и длиной волны 700 нм. Величину сверхразрешения можно оценить как $0,05\lambda$.

Далее будет численно показано (хорошо известным методом FDTD), что с помощью градиентной 2D-микрооптики также можно достичь сверхразрешения. Моделирование проводилось с помощью программы FullWAVE фирмы RSoft (США).

Сверхразрешение с помощью микролинзы Микаэляна. Из-за дифракции света в однородном пространстве два близких точечных источника света перестают разрешаться на расстоянии много меньшем длины волны. Так, на рисунке 3.68, *а* показаны исходные (в плоскости $z = 5$ нм) пять гауссовых когерентных источников света шириной $\lambda/200$ каждый, которые разделены расстоянием $\lambda/50$. На рисунке 3.68, *б* показана интенсивность света от этих источников на расстоянии $z = 30$ нм для длины волны $\lambda = 1550$ нм. Из рисунка 3.68 видно, что близкие точечные источники перестают разрешаться на расстоянии, примерно равном промежутку между ними ($z = \lambda/50$).

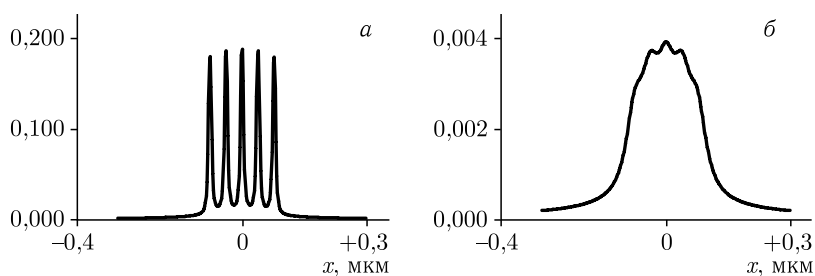


Рис. 3.68. Интенсивность света вблизи пяти гауссовых источников шириной $\lambda/200$, разделенных расстоянием $\lambda/50$, на разных расстояниях: $z = 5$ нм (*а*), $z = 30$ нм (*б*), $\lambda = 1550$ нм (по оси ординат отложены произвольные единицы)

На рисунке 3.69 показан результат моделирования формирования изображения двух точечных источников света (ширина каждого из них по 35 нм), разделенных расстоянием 150 нм, с помощью линзы Микаэляна [112, 113]. Показатель преломления такой секанс-градиентной 2D микролинзы имеет вид:

$$n(x) = n_0 \operatorname{ch}^{-1} \left(\frac{\pi x}{2L} \right), \quad (3.206)$$

где $2L$ — длина линзы. Ширина линзы $2R$ находится из условия, что $n(R) = 1$. Для линзы на рис. 3.69 показатель преломления на оси $n_0 = 2,1$, ширина

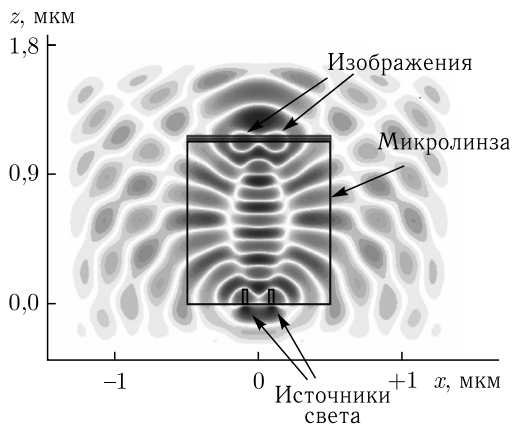


Рис. 3.69. Схема расположения 2D-градиентной микролинзы Микаэляна в окне программы FullWAVE для моделирования изображения двух близких точечных источников света. Показана мгновенная амплитуда $E_y(x, z)$ в момент времени, когда свет прошел расстояние в 18,2398 мкм

линзы $2R = 1$ мкм, длина линзы $2L = 1,144$ мкм, длина волны $\lambda = 365$ нм. Выбранные параметры совпадают с параметрами эксперимента в работе [94].

На рисунке 3.69 показана мгновенная картина амплитуды электрической составляющей электромагнитной волны с ТЕ-поляризацией (свет распространяется на рис. 3.69 снизу вверх). Видно, что на противоположной по отношению к источникам света стороне линзы формируется их изображение. На рисунке 3.70, а показано распределение усредненной по времени интенсивности электрического поля $I(x, z = z_0) = |E_y(x, z = z_0)|^2$ непосредственно на «задней» стороне линзы, т. е. на расстоянии $z_0 = 2L$ от «передней» стороны линзы. Два источника света находились перед «передней» стороной линзы на расстоянии 20 нм.

Из рисунка 3.70, а видно, что два точечных источника, разделенных расстоянием 150 нм (между центрами источников 180 нм), уверенно разрешаются. Если плоскость регистрации интенсивности удалить от «задней» плоскости линзы на расстояние $z = 10$ нм (рис. 3.70, б), то источники продолжают разрешаться, хотя величина «провала» в распределении интенсивности слегка уменьшается. Величина разрешения, достигнутая на рис. 3.70, равна $0,41\lambda$. Из рисунка 3.70, а можно также определить, что ширина изображения лин-

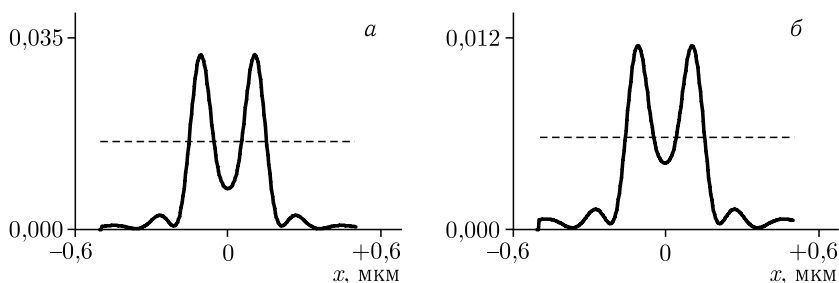


Рис. 3.70. Распределения усредненной интенсивности электрической составляющей ТЕ-поляризованной световой волны, рассчитанные на расстоянии $z = 0$ (а) и $z = 10$ нм (б) от «задней» поверхности линзы Микаэляна (рис. 3.69), на входе у которой расположены два близких точечных источника света (горизонтальная линия делит интенсивность по полуспаду, по оси ординат отложены произвольные единицы)

зой Микаэляна точечного источника по полуспаду интенсивности равна $\text{FWHM} = 100 \text{ нм} = 0,27\lambda$. Полученное значение разрешения $0,41\lambda$ почти равно разрешению, полученному в [91, 92, 94] ($0,4\lambda$). Заметим, что полученная ширина изображения $0,27\lambda$ точечного источника согласуется с минимальной шириной моды, способной распространяться в секанс-градиентном волноводе, $0,4\lambda/n_0 = 0,27\lambda$ при $n_0 = 1,5$ (см. (3.199)).

С целью увеличения разрешения линзы Микаэляна, как следует из (3.199) и (3.205), был увеличен показатель преломления на оси, $n_0 = 3,47$ (кремний, Si). Другие параметры моделирования тоже изменились (рис. 3.71, а): длина волны $\lambda = 1 \text{ мкм}$, ширина линзы $2R = 6 \text{ мкм}$, длина линзы $2L = 4,92 \text{ мкм}$. Шаг моделирования по пространственным осям во всех примерах равен $\lambda/100$. Ширина гауссова точечного источника света в начальной плоскости равна $\lambda/20$. На рисунке 3.71, а показана мгновенная картина амплитуды электрического вектора волны в линзе Микаэляна, рассчитанной в момент времени, когда волна от источника прошла 200 мкм . На рисунке 3.71, б показано распределение усредненной интенсивности света ТЕ-поляризованной волны на выходе из линзы (рис. 3.71, а), на «задней» плоскости линзы Микаэляна. Расчет показал, что для интенсивности, показанной на рис. 3.71, б, ширина центрального максимума по полуспаду в изображении точечного источника равна $\text{FWHM} = 0,12\lambda$. Однако интенсивность (или плотность мощности света) не является той величиной, которая показывает какая часть мощности излучения источника распространяется в пространстве вдоль оси z . Поэтому на рис. 3.71 как раз показана такая величина: проекция на оптическую ось вектора Умова–Пойнтинга, рассчитанного на выходе из линзы Микаэляна (рис. 3.71, а), на входе которой был расположен точечный источник света.

Ширина центрального максимума потока мощности вдоль оси z на рис. 3.72 такая же, как и на рис. 3.71, б и равна $\text{FWHM} = 0,12\lambda$.

Значение дифракционного предела, которого можно достичь при фокусировке света в однородной среде, известно и равно $0,5\lambda/n$, где n — показатель

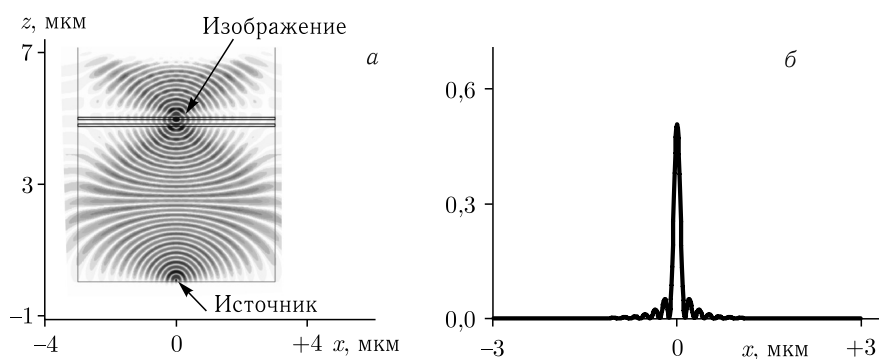


Рис. 3.71. Мгновенная картина амплитуды электрического поля ТЕ-поляризованной световой волны в линзе Микаэляна с точечным источником на передней плоскости линзы (а) и усредненное распределение интенсивности в задней плоскости линзы (б) (по оси ординат отложены произвольные единицы)

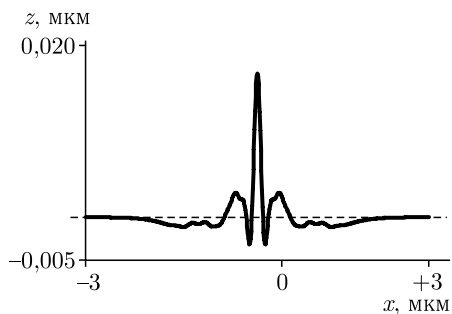


Рис. 3.72. Распределение вдоль оси x проекции на ось z вектора Умова–Пойнтинга (в относительных единицах), рассчитанного на выходе линзы Микаэляна (рис. 3.71, a) с входным точечным источником

преломления однородной среды. Для нашего случая $n_0 = 3,47$, поэтому дифракционный предел равен $\text{FWHM} = 0,144\lambda$. Таким образом, из рис. 3.71, b и рис. 3.72 следует, что с помощью микролинзы Микаэляна (рис. 3.71, a) можно преодолеть дифракционный предел не только в свободном пространстве, но и в среде. Причина этого, на наш взгляд, заключается в том, что при фокусировке света на границе раздела двух сред в формировании фокуса дают вклад и поверхностные неоднородные волны, которые могут формировать интерференционные и дифракционные картины с периодом много меньшим длины волны. То, что поверхностные волны присутствуют при

формировании изображения точечного источника, видно из рис. 3.72. Проекция вектора Умова–Пойнтинга на ось z в некоторой области на оси x отрицательна, т.е. вблизи выходной поверхности линзы Микаэляна свет не только выходит из линзы, но и заходит в нее, т.е. вдоль поверхности микролинзы распространяется поверхностная волна. При распространении света в свободном пространстве при удалении от поверхности линзы ширина изображения точечного источника быстро увеличивается, и на расстоянии от поверхности, примерно равным длине волны, ширина изображения достигает дифракционного предела $0,5\lambda$.

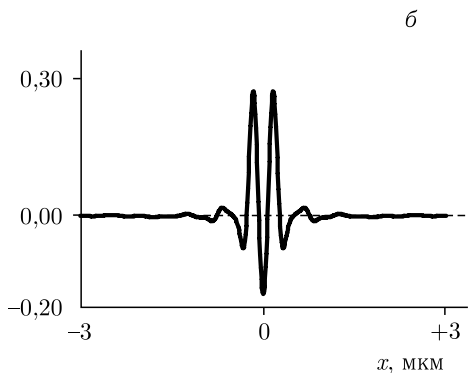
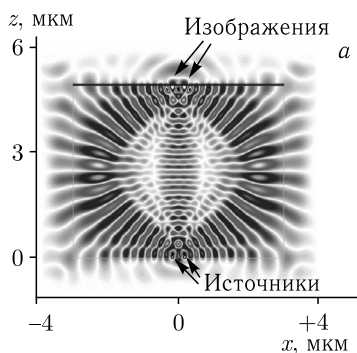


Рис. 3.73. Мгновенная картина амплитуды электрического вектора световой волны с ТЕ-поляризацией в линзе Микаэляна (рис. 3.69, a), когда перед ее входной (нижняя горизонтальная линия на рисунке) поверхностью на расстоянии 10 нм находятся два точечных источника (шириной по 50 нм), разделенных расстоянием 300 нм (a); усредненное по времени распределение проекции вектора Умова–Пойнтинга на оптическую ось, рассчитанное на расстоянии 10 нм от задней (верхняя горизонтальная линия на рисунке) плоскости линзы (по оси ординат отложены произвольные единицы) (b)

Заметим, что смена знаков проекции вектора Умова–Пойнтинга, аналогичная рис. 3.72, ранее наблюдалась в работе [96] и была названа оптическим вихрем, и интерпретирована как интерференция распространяющейся волны и усиленной поверхностной волны. Однако, в работе [96] рассматривалась 1D-многослойная структура (1D-фотонный кристалл).

На рисунке 3.73, *а* показана мгновенная картина амплитуды электрического вектора световой волны в линзе Микаэляна (параметры такие же, как для рис. 3.71, *а*), когда перед ее входной (нижней на рис. 3.73, *а*) поверхностью на расстоянии 10 нм находятся два точечных источника (шириной по 50 нм), разделенных расстоянием 300 нм. На рисунке 3.73, *б* показано усредненное распределение проекции на оптическую ось вектора Умова–Пойнтинга, рассчитанное за выходной поверхностью микролинзы на расстоянии 10 нм. Из рисунка 3.73, *б* видно, что два источника разрешаются, при этом величина сверхразрешения равна $0,3\lambda$, что меньше, чем в работах [91, 92, 93].

Сверхразрешение с помощью микролинзы «рыбий глаз». Наряду с рассмотренной в предыдущем разделе микролинзой Микаэляна можно использовать и другие градиентные изображающие оптические элементы, зависимость показателя преломления от координат которых получена в явном аналитическом виде.

Одним из таких оптических элементов является «рыбий глаз» Максвелла [96, 114, 115], функция показателя преломления которого в двумерном случае в полярных координатах имеет вид

$$n(r) = n_0 \left[1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3.207)$$

где n_0 — показатель преломления в центре круга, R — радиус элемента. Из (3.207) видно, что при $r = R$ показатель преломления уменьшается в 2 раза. Недостатком этого элемента является ограниченный перепад показателя преломления в центре и на краю оптического элемента: он не может изменяться больше, чем в 2 раза. В линзе Микаэляна перепад показателя преломления определяется только материалом. Например, для кремния показатель меняется от 3,47 до 1. Однако «рыбий глаз» обладает круговой симметрией, и поэтому любой точечный источник, расположенный на его поверхности, изображается «идеально» в диаметрально противоположенной точке на его поверхности.

На рисунке 3.74, *а* показано мгновенное распределение амплитуды электрического поля ТЕ-поляризованной световой волны внутри 2D микролинзы «рыбий глаз», на поверхности которой находятся два точечных близких источника света. Параметры моделирования: показатель преломления в центре линзы $n_0 = 3,47$, радиус линзы $R = 2,5$ мкм, длина волны света $\lambda = 1$ мкм, ширина точечных источников по $0,05\lambda$, и они разделены расстоянием 440 нм или $0,44\lambda$. На рисунке 3.74, *б* показано распределение усредненной по времени интенсивности в плоскости изображения (верхняя горизонтальная линия на рис. 3.74, *а*). Видно, что два источника разрешаются (разрешение равно $0,44\lambda$, по критерию Рэлея 20%). Таким образом, данная микролинза незначительно ($0,44\lambda$) преодолевает дифракционный предел в разрешении ($0,5\lambda$).

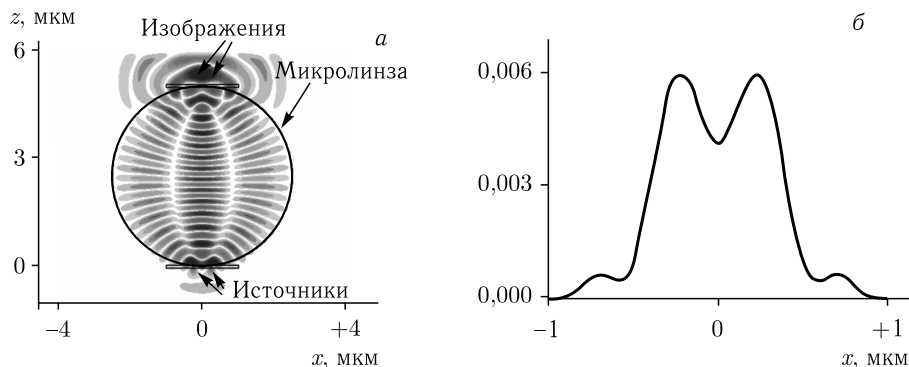
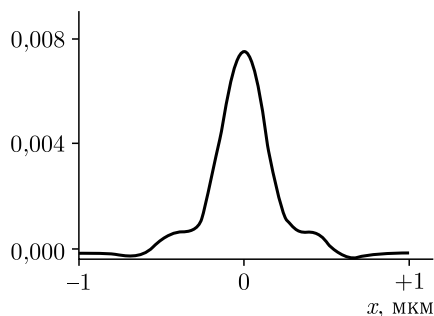


Рис. 3.74. 2D-микролинза «рыбий глаз» в окне программы FullWAVE и мгновенная картина амплитуды электрического поля ТЕ-поляризованной волны внутри линзы, у которой на входе два точечных источника (свет распространяется снизу вверх) (а), а также распределение усредненной интенсивности в плоскости изображения линзы (по оси ординат отложены произвольные единицы) (б)

При изображении отдельного точечного источника с помощью данной микролинзы (рис. 3.74, а) получается распределение интенсивности, показанное на рис. 3.75. Ширина центрального максимума интенсивности по полуспаду равна $\text{FWHM} = 0,3\lambda$. Из сравнения рис. 3.75 и рис. 3.71, б можно заключить, что микролинза «рыбий глаз» формирует более широкое изображение (примерно в 2 раза шире) точечного источника, чем микролинза Микаэляна при сравнимых параметрах. Хотя при этом значения разрешения $0,44\lambda$ (рис. 3.74, б) и $0,3\lambda$ (рис. 3.75) сравнимы с значениями сверхразрешения, полученными в работах [91, 92, 93, 96, 99, 100].

Рис. 3.75. Усредненное по времени распределение интенсивности электрического поля в плоскости изображения микролинзы «рыбий глаз» (рис. 5.75, а), у которой на поверхности расположен только один точечный источник света (по оси ординат отложены произвольные единицы)



3.4.3. Построение увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью планарных линз Микаэляна. В данном разделе рассматривается построение увеличенного изображения с помощью линз Микаэляна, состоящих полностью из диэлектриков. С использованием принципа Ферма предсказано положение изображения внеосевого источника, формируемого двумя кремниевыми линзами Микаэляна, расположенными вплотную друг к другу. Кремний для длины волны $\lambda > 1$ почти не поглощает свет. Показано, что в оптической системе из двух линз Микаэляна, одна из которых вдвое больше другой, изображение, формируемое внеосевым точечным источником,

расположенным на расстоянии y от оптической оси, не находится на расстоянии, вдвое большем от оптической оси (т.е. $2y$), а представляет собой световое пятно, основная энергия которого заключена в пределах $(3,7y; 2y)$. Построение изображения с помощью двух линз и с помощью одной линейно расширяющейся линзы Микаэляна исследовано численно с помощью конечно-разностного FDTD-метода. Для системы двух линз Микаэляна, одна из которых в 2,5 раза больше другой, получено изображение двух точечных источников света с линейным увеличением, равным 2,1. Для линейно расширяющейся линзы Микаэляна получено линейное увеличение 3,14. В обоих случаях были разрешены точечные источники, разделенные расстоянием $0,28\lambda$.

Уравнение траектории луча в градиентном волноводе. Пусть дан планарный градиентный волновод с оптической осью x и зависимостью показателя преломления от поперечной координаты $n(y)$. Пусть луч света соединяет точки A и B с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (рис. 3.76).

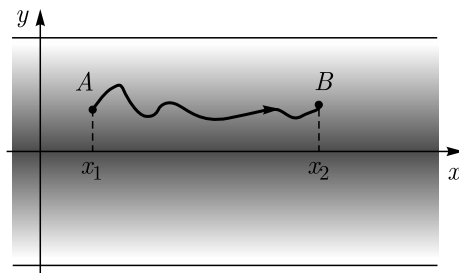


Рис. 3.76. Однородный градиентный волновод и световой луч, соединяющие произвольные две точки A и B

Согласно принципу Ферма, световой луч проходит по траектории $y(x)$, обеспечивающей минимальный оптический путь, т.е. минимум следующего функционала:

$$L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} n(y) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (3.208)$$

Известно, что такие задачи можно решать с помощью уравнения Эйлера–Лагранжа [116], которое для функционала (3.208) выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{n(y)} \frac{dn}{dy} = \frac{y''}{1 + (y')^2}. \quad (3.209)$$

Умножив обе части на $2y$, и проинтегрировав по переменной x , получим выражение для производной траектории луча $y(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{Cn^2(y) - 1}, \quad (3.210)$$

где C — постоянная.

Данное дифференциальное уравнение решается в радикалах, если искать траекторию луча через обратную функцию $x(y)$:

$$x(y) = \pm \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{Cn^2(t) - 1}} + D, \quad (3.211)$$

где D — постоянная.

Это уравнение является уравнением траектории луча для произвольного планарного градиентного волновода. Далее получим это уравнение для градиентного секансного волновода.

Уравнение траектории луча в градиентном секансном волноводе.

В работах [117–118] приведен вывод уравнения луча в градиентном секансном волноводе. Кратко повторим его с помощью уравнения (3.211).

Пусть распределение показателя преломления задано в виде гиперболического секанса:

$$n(y) = \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{y}{a}\right)}, \quad (3.212)$$

где n_0 — показатель преломления на оси волновода (т. е. при $y = 0$), a — параметр, определяющий ширину волновода и задающий скорость уменьшения показателя преломления от оси волновода к его краям.

Подставив это выражение в уравнение для траектории луча (3.211), получим:

$$x(y) = D \pm a \arcsin \left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{y}{a}\right)}{\sqrt{n_0^2 C - 1}} \right]. \quad (3.213)$$

Из полученного уравнения выразим явно $\operatorname{sh}(y/a)$ через x :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{y}{a}\right) = \sqrt{n_0^2 C - 1} \sin\left(\frac{x - D}{a}\right). \quad (3.214)$$

Знак « \pm » в (3.214) опущен, так как изменение « $+$ » на « $-$ » достигается прибавлением πa к константе D . Обозначим $(n_0^2 C - 1)^{1/2} \cos(D/a)$ как C , а $(n_0^2 C - 1)^{1/2} \sin(D/a)$ как $-D$. Тогда уравнение траектории луча в градиентном секансном волноводе примет вид

$$\operatorname{sh}\left(\frac{y}{a}\right) = C \sin\left(\frac{x}{a}\right) + D \cos\left(\frac{x}{a}\right). \quad (3.215)$$

Пусть в плоскости $x = x_1$ луч проходит через точку с координатами (x_1, y_1) и тангенс угла наклона луча к оптической оси равен α (рис. 3.77).

Получим уравнение для такого луча, продифференцировав (3.215) по x :

$$\operatorname{sh}\left(\frac{y}{a}\right) = \alpha \operatorname{ch}\left(\frac{y_1}{a}\right) \sin\left(\frac{x - x_1}{a}\right) + \operatorname{sh}\left(\frac{y_1}{a}\right) \cos\left(\frac{x - x_1}{a}\right). \quad (3.216)$$

По аналогии с матричными методами расчета оптических систем, будем описывать луч двумя координатами, задающими точку пересечения луча

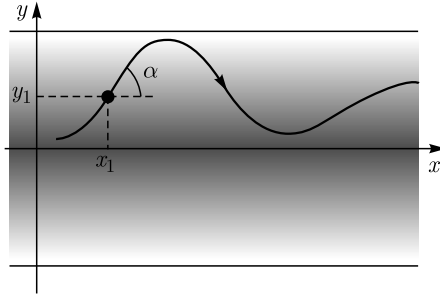


Рис. 3.77. Задание луча, распространяющегося в градиентном гиперболическом секансном волноводе, расстоянием от оптической оси y_1 и углом наклона к ней α в некоторой опорной плоскости $x = x_1$

с некоторой опорной плоскостью, а также наклон луча к оптической оси. Первой координатой будем считать величину $\text{sh}(y/a)$, а второй — $\text{ch}(y/a)(dy/dx)$.

Тогда из (3.216) нетрудно получить, что в матричной форме распространение луча описывается следующим уравнением:

$$\begin{bmatrix} \text{sh}\left(\frac{y}{a}\right) \\ \text{ch}\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy(x)}{dx} \end{bmatrix} = T\left(\frac{x - x_1}{a}\right) \begin{bmatrix} \text{sh}\left(\frac{y_1}{a}\right) \\ \text{ch}\left(\frac{y_1}{a}\right) \frac{dy(x_1)}{dx} \end{bmatrix}, \quad (3.217)$$

где

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}. \quad (3.218)$$

Из этого уравнения следует, что при $x = x_1 + \pi m a$ (m — целое), $y = (-1)^m y_1$, независимо от угла наклона луча α . Это означает, что даже для неосевого точечного источника света сохраняется гомоцентричность пучка лучей и формируется точечное изображение.

Числовая апертура при построении изображения в градиентном гиперболическом секансном волноводе. Очевидно, реальный волновод ограничен по ширине, которая для волновода (3.212) определяется, например, спадом показателя преломления до единицы. В этом случае не каждый луч, проходящий через некоторую точку, останется в волноводе, часть лучей выйдет через край волновода. Чтобы определить самый крайний луч, найдем точки траектории луча, в которых он максимально удаляется от оптической оси. Для этого продифференцируем обе части (3.217) по x и приравняем в левой части производную $y'(x)$ нулю. Тогда получим, что луч максимально удаляется от оптической оси в точках (точки поворота луча) с координатами x_{extr} , удовлетворяющих уравнению

$$\text{th}\left(\frac{y_1}{a}\right) \text{tg}\left(\frac{x_{\text{extr}} - x_1}{a}\right) = \alpha. \quad (3.219)$$

Далее будем рассматривать градиентную линзу, которая представляет собой усеченный волновод длиной πa . Из уравнения (3.219) видно, что если

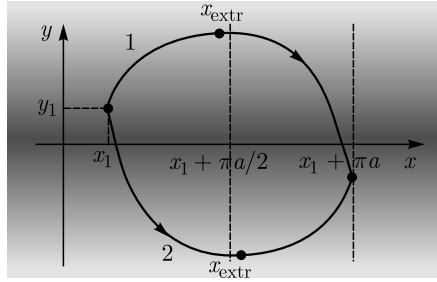


Рис. 3.78. Планарный гиперболический секансный волновод и световые лучи, соединяющие точку предмета (x_1, y_1) и точку изображения $(x_1 + \pi a, -y_1)$

y_1 и α одного знака, то $x_{\text{extr}} < x_1 + \pi a/2$ (луч 1 на рис. 3.78), а если y_1 и α разных знаков, то $x_1 + \pi a/2 < x_{\text{extr}} < x_1 + \pi a$ (луч 2 на рис. 3.78).

Согласно (3.216), (3.219), максимальное удаление луча от оси описывается следующим уравнением:

$$\text{sh}\left(\frac{y_{\text{extr}}}{a}\right) = \pm \sqrt{\text{sh}^2\left(\frac{y_1}{a}\right) + \alpha^2 \text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)}. \quad (3.220)$$

На краю волновода $n(y_{\text{extr}}) = 1$, значит $\text{sh}(y_{\text{extr}}/a) = (n_0^2 - 1)/2$. Из этого условия можно найти максимальный угол наклона α_{max} , при котором луч не выйдет из волновода, а будет распространяться в нем, формируя в точке $(x_1 + \pi a, -y_1)$ изображение точечного источника, расположенного в точке (x_1, y_1) :

$$\alpha_{\text{max}} = \pm \sqrt{\frac{n_0^2}{\text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)} - 1}. \quad (3.221)$$

Это означает, что при удалении точечного источника от оптической оси числовая апертура лучей, формирующих изображение такого источника, будет уменьшаться. В точке изображения синус максимального угла луча с оптической осью равен

$$\sin \theta = \frac{|\alpha_{\text{max}}|}{\sqrt{1 + \alpha_{\text{max}}^2}} = \sqrt{1 - \frac{\text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)}{n_0^2}}, \quad (3.222)$$

а числовая апертура равна

$$NA = n(y) \sin \theta = \sqrt{\frac{n_0^2}{\text{ch}^2\left(\frac{y_1}{a}\right)} - 1}. \quad (3.223)$$

Для осевого источника света ($y_1 = 0$) числовая апертура равна $NA = (n_0^2 - 1)^{1/2}$, что совпадает с результатом из работы [117]. Для источника на краю волновода (т. е. $\text{ch}(y_1) = n_0$) числовая апертура стремится к бесконечности и формируемое световое пятно изображения бесконечно расплывается.

Построение увеличенного изображения с помощью двух линз Микаэляна. Рассмотрим градиентную линзу, которая представляет собой усеченный гиперболический секансный волновод длиной $\pi a/2$. Такая линза известна как

линза Микаэляна [118]. Пусть дана оптическая система, состоящая из двух таких линз с параметрами $a_1 = 2L_1/\pi$ и $a_2 = 2L_2/\pi$ ($a_1 < a_2$, L_1, L_2 — длины линз), расположенных вплотную друг к другу (рис. 3.79). Пусть в передней плоскости первой линзы ($x = x_1$) расположен точечный источник вблизи оптической оси на расстоянии y_1 ($y_1 \ll a_1$).

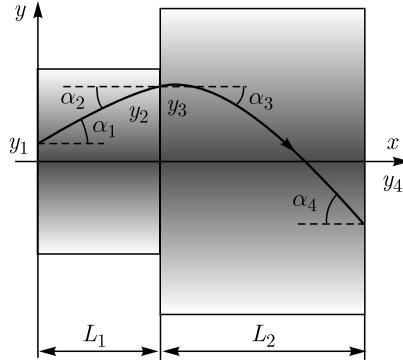


Рис. 3.79. Оптическая система из двух линз Микаэляна

Согласно (3.218), для обеих линз матрица T имеет вид

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.224)$$

Тогда из (3.217) следует, что в задней плоскости первой линзы световые лучи можно описать следующими координатами:

$$\begin{cases} \operatorname{sh} \left(\frac{y_2}{a_1} \right) = \alpha_1 \operatorname{ch} \left(\frac{y_1}{a_1} \right), \\ \alpha_2 \operatorname{ch} \left(\frac{y_2}{a_1} \right) = -\operatorname{sh} \left(\frac{y_1}{a_1} \right), \end{cases} \quad (3.225)$$

где α_1 и α_2 — тангенсы углов наклона луча к оптической оси в плоскостях $x_2 = x_1$ и $x_2 = x_1 + \pi a_1/2$, соответственно.

Из второго уравнения (3.225) и близости источника к оптической оси ($y_1 \ll a_1$) следует (так как $\operatorname{ch}(y_2/a_1) \leq 1$), что $\alpha_2 \ll 1$. Поэтому при записи закона преломления на границе первой и второй линзы можно вместо синусов писать тангенсы:

$$\frac{n_0}{\operatorname{ch} \left(\frac{y_2}{a_1} \right)} \alpha_2 = \frac{n_0}{\operatorname{ch} \left(\frac{y_3}{a_2} \right)} \alpha_3, \quad (3.226)$$

где y_3 и α_3 — расстояние до оптической оси от луча и тангенс наклона луча к оптической оси в плоскости границы двух линз. Очевидно, $y_3 = y_2$, т. е. обозначение y_3 введено для единообразия индексов. Снова применим преобразование лучей (3.217), но уже для второй линзы. Обозначим y_4 и α_4 — рас-

стояние до оптической оси от луча и тангенс наклона луча к оптической оси в задней плоскости второй линзы (т. е. в плоскости $x_2 = x_1 + \pi a_1/2 + \pi a_2/2$):

$$\begin{cases} \operatorname{sh} \left(\frac{y_4}{a_2} \right) = \alpha_3 \operatorname{ch} \left(\frac{y_3}{a_2} \right), \\ \alpha_4 \operatorname{ch} \left(\frac{y_4}{a_2} \right) = -\operatorname{sh} \left(\frac{y_3}{a_2} \right). \end{cases} \quad (3.227)$$

Выразив из (3.226) явно α_3 через α_2 , выразив явно α_2 из (3.225) и подставив полученное выражение для α_3 в первое уравнение (3.227), получим:

$$\operatorname{sh} \left(\frac{y_4}{a_2} \right) = -\frac{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{y_2}{a_2} \right)}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{y_2}{a_1} \right)} \operatorname{sh} \left(\frac{y_1}{a_1} \right). \quad (3.228)$$

Данное уравнение позволяет определить положение точки пересечения луча в задней плоскости второй линзы, зная положение источника в передней плоскости первой линзы. Легко видеть, что если источник света осевой ($y_1 = 0$), то все лучи из него соберутся в одной точке и сформируют осевое изображение ($y_4 = 0$). Также видно, что при $a_1 = a_2$ лучи снова соберутся в одной точке и сформируют симметричное относительно оптической оси изображение источника, независимо от того, осевой он или нет. Однако при $a_1 \neq a_2$ и $y_1 \neq 0$ изображение сформировано не будет, так как координата y_4 зависит от того, какой угол имел луч с оптической осью в начальной плоскости $x = x_1$.

Отношение квадратов гиперболических косинусов в (3.228) не может превышать единицу, так как $a_1 < a_2$. Источник света расположен недалеко от оси, т. е. $y_1 \ll a_1$. Из этого следует, что гиперболические синусы в обеих частях (3.228) примерно равны своим аргументам и точка пересечения луча задней плоскости второй линзы может быть приближенно определена следующим образом:

$$y_4 = -\frac{a_2}{a_1} \frac{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{y_2}{a_2} \right)}{\operatorname{ch}^2 \left(\frac{y_2}{a_1} \right)} y_1. \quad (3.229)$$

Для луча, выходящего из источника параллельно оптической оси ($\alpha_1 = 0$), из (3.225) следует, что $y_2 = 0$ и, согласно (3.229),

$$y_4 = -\frac{a_2}{a_1} y_1. \quad (3.230)$$

Для луча, проходящего через самый край первой линзы, справедливо соотношение $\operatorname{ch}(y_2/a_1) = n_0$, а значит

$$\operatorname{ch} \left(\frac{y_2}{a_2} \right) = \frac{1}{2} \left[\left(n_0 + \sqrt{n_0^2 - 1} \right)^{\frac{a_1}{a_2}} + \left(n_0 - \sqrt{n_0^2 - 1} \right)^{\frac{a_1}{a_2}} \right]. \quad (3.231)$$

В частности, при $a_2 = 2a_1$ получим:

$$\text{ch} \left(\frac{y_2}{a_2} \right) = \sqrt{\frac{n_0 + 1}{2}}, \quad (3.232)$$

т. е.

$$y_4 = -\frac{n_0 + 1}{n_0^2} y_1. \quad (3.233)$$

Это означает, что при $a_2 = 2a_1$ изображение точечного источника, находящегося на расстоянии y_1 от оси двойной линзы Микаэляна из кремния ($n_0 = 3,47$) не будет находиться на расстоянии $2y_1$ от оси, а будет расплываться, причем основная доля энергии будет сосредоточена между расстояниями $0,37y_1$ и $2y_1$ от оптической оси.

Численное моделирование проводилось FDTD-методом. Параметры моделирования были следующими (рис. 3.79): материал обеих линз — кремний (показатель преломления на оси $n_0 = 3,47$), длина волны света $1,55$ мкм,

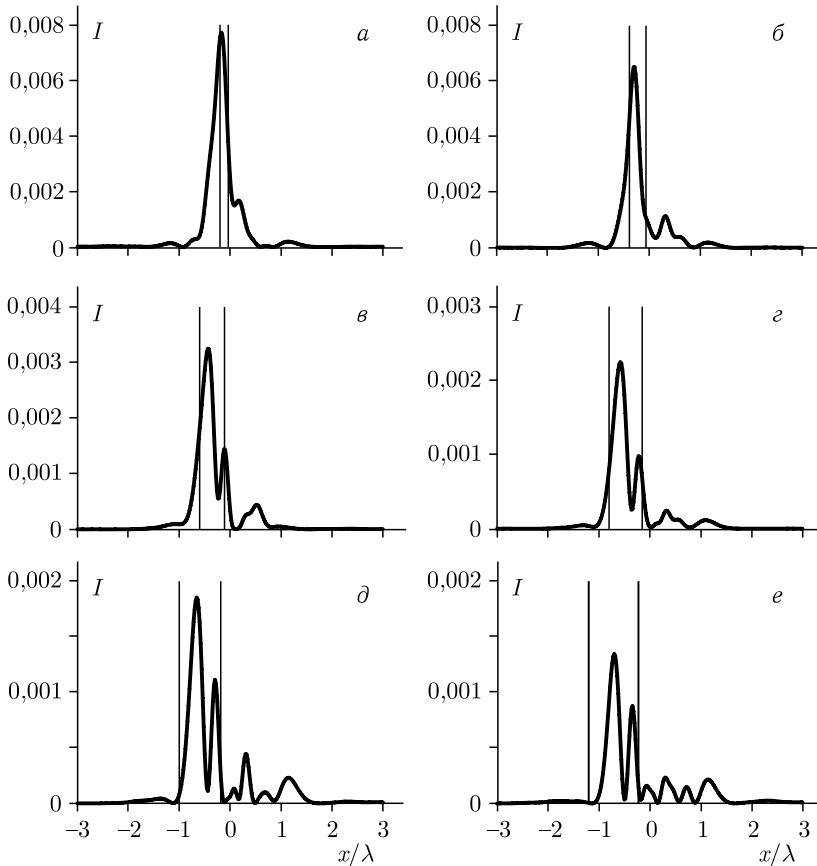


Рис. 3.80. Распределения интенсивности света в плоскости измерительного экрана для шести положений источника, задаваемых расстоянием от оптической оси: $0,1\lambda$ (а), $0,2\lambda$ (б), $0,3\lambda$ (в), $0,4\lambda$ (г), $0,5\lambda$ (д), $0,6\lambda$ (е)

длина первой линзы 1 мкм (ширина 2,44 мкм), второй — 2 мкм (ширина 4,88 мкм), расчетная область — $3\lambda \leq x \leq 3\lambda$, $-0,2\lambda \leq x \leq 2,5\lambda$, время моделирования $60\lambda/c$, где c — скорость света в вакууме, шаг дискретизации по обеим координатам $\lambda/50$, по времени — $\lambda/(100 \text{ с})$. Источник света — плоская волна шириной $\lambda/50$, расстояние от источника до передней плоскости первой линзы $\lambda/50$. Расстояние от центра источника света до оптической оси варьировалось и составляло $0,1\lambda$, $0,2\lambda$, $0,3\lambda$, $0,4\lambda$, $0,5\lambda$, $0,6\lambda$. Измерительный экран помещался на расстоянии $\lambda/50$ от задней плоскости второй линзы. На рисунке 3.80 показаны распределения интенсивности света в плоскости измерительного экрана для всех шести положений источника.

Вертикальными линиями показаны границы пятна, предсказанные уравнениями (3.231) и (3.234). Из рисунка 3.80 видно, что основная энергия сосредоточена как раз в этих границах, за исключением рис. 3.80, *a*. На рисунке 3.80, *a* границы находятся на расстоянии всего $0,163\lambda$ друг от друга, что близко к двумерному дифракционному пределу в кремнии. В этом случае геометрооптический подход неприменим и световое пятно не помещается в указанных пределах. Кроме того, при удалении источника от оси возникает два пика интенсивности вместо одного. Это можно объяснить наличием aberrаций типа комы.

Численное моделирование построения увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью двух линз Микаэляна. В предыдущем разделе показано, что при использовании двух линз Микаэляна разных размеров формируемое изображение имеет линейное увеличение, меньшее, чем отношение размеров линз.

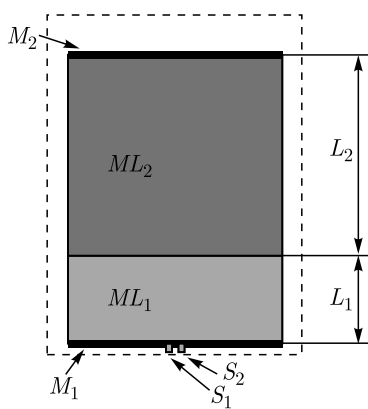


Рис. 3.81. Оптическая схема изображающей системы с увеличением, состоящей из двух микролинз Микаэляна

В данном разделе приводятся результаты моделирования построения увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью двух градиентных микролинз Микаэляна, одна из которых в 2,5 раза больше другой. Схема моделирования представлена на рис. 3.81. Свет от двух точечных источников S_1 и S_2 (рис. 3.81) попадал в линзу Микаэляна ML_1 (источниками могли бы быть, например, два отверстия диаметром 100 нм, разделенные расстоянием 100 нм, как в работе [119]). В передней плоскости линзы интенсивность света регистрировалась экраном M_1 . Затем свет распространялся через линзу ML_1 длиной L_1 и попадал в линзу Микаэляна ML_2 , длина которой L_2 примерно в 2,5 раза больше L_1 . В задней плоскости линзы ML_2 располагался измерительный экран M_2 . Пунктирной линией показаны границы области моделирования.

Показатели преломления обеих линз распределены по закону гиперболического секанса, т. е. распределение показателя преломления всего элемента

имеет следующий вид:

$$n(x, z) = \begin{cases} \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L_1}\right)}, & 0 \leq z \leq L_1, \\ \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L_2}\right)}, & L_1 < z \leq L_2. \end{cases} \quad (3.234)$$

Параметры моделирования для ТЕ-поляризации были следующими: длина волны света в вакууме $\lambda = 1$ мкм, материал линзы — кремний, показатель преломления на оптической оси $n_0 = 3,47$, ширина обеих линз $W = 4,8$ мкм, расчетная длина первой линзы $L_1 = 2$ мкм, расчетная длина второй линзы $L_2 = 4,45$ мкм. Шаг дискретизации по обеим координатам $\lambda/50 = 20$ нм, расстояние между источниками $0,28\lambda$, ширина источников $0,14\lambda$. Расстояние между источниками и началом первой линзы равно $0,1\lambda$, интенсивность $(|E_y|^2)$ на входе линзы (т.е. в плоскости экрана M_1 на рис. 5.81) показана на рис. 3.82.

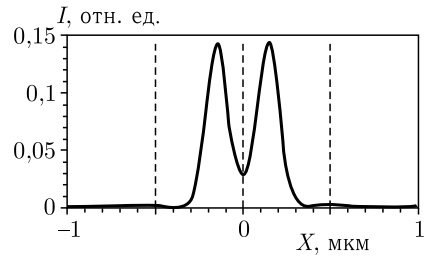


Рис. 3.82. Интенсивность светового поля в передней плоскости первой линзы

На рисунке 3.83 представлено мгновенное распределение амплитуды E_y в момент времени $30,6\lambda/c$, где c — скорость света в вакууме.

Из рисунка 3.83 видно, что в плоскости изображения (т.е. в задней плоскости второй линзы) формируется два световых пятна. Усредненная

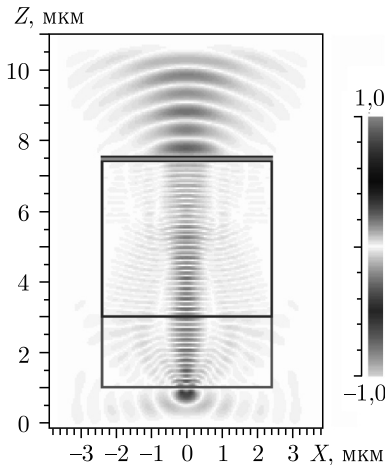


Рис. 3.83. Мгновенное распределение амплитуды E_y в момент времени $30,6\lambda/c$

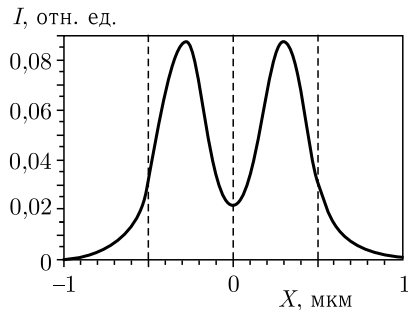


Рис. 3.84. Интенсивность светового поля в задней плоскости второй линзы

по времени интенсивность $|E_y|^2$ в этой плоскости, показанная на рис. 3.84, это подтверждает, источники разрешаются по уровню $1/4$ от максимума.

Из рисунка 3.84 видно, что расстояние между изображениями источников равно примерно $0,59\lambda$, т. е. линейное увеличение составляет приблизительно 2,1. Эти два изображения уже можно различить обычной высоко-апертурной оптикой с числовой апертурой 0,86.

Построение увеличенного изображения со сверхразрешением с помощью расширяющейся линзы Микаэляна. На стыке двух линз в предыдущем разделе возникают френелевские потери. Чтобы этого избежать, исследуем линзу Микаэляна с линейным расширением вдоль оптической оси, т. е. в показатель преломления добавим зависимость от координаты z :

$$n = \frac{n_0}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi x}{2L(z)}\right)}, \quad (3.235)$$

где $L(z) = 2 + 0,5755z$. Распределение показателя преломления такой линзы показано на рис. 3.85 (в полутонах).

Длина линзы на рис. 3.85 равна $15,2$ мкм, ширина в передней плоскости $4,8$ мкм, в задней — 48 мкм. На рисунке 3.86 приведено распределение интенсивности в задней плоскости линзы при изображении тех же двух источников шириной $0,14$ мкм с расстоянием между их центрами $0,28\lambda$.

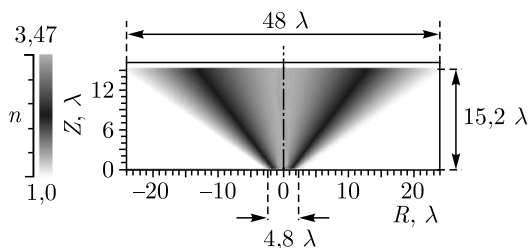


Рис. 3.85. Распределение показателя преломления (в полутонах) в линзе Микаэляна с линейным расширением вдоль оптической оси

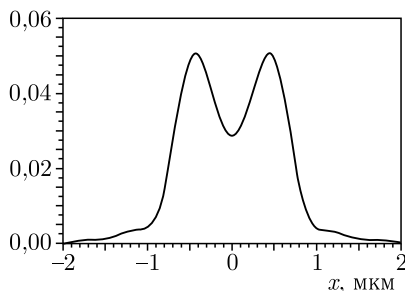


Рис. 3.86. Распределение интенсивности в задней плоскости линзы (3.85) при изображении двух источников шириной $0,14\lambda$ с расстоянием между их центрами $0,28\lambda$

Расстояние между центрами изображений равно $0,88\lambda$, т. е. увеличение такой линзы составляет примерно 3,14. Эти два изображения уже можно разрешить обычным микрообъективом с числовой апертурой 0,58.

Ранее было показано, что при удалении от оптической оси даже в случае не увеличивающей линзы, когда пучок лучей сохраняет гомоцентричность и сходится в плоскости изображения, формируемое изображение точечного источника имеет все больший размер вследствие дифракционного размытия. Это следует из того, что дифракционный предел обратно пропорционален числовой апертуре, которая для системы из двух одинаковых линз Микаэляна

имеет вид (3.223). Если состыковать две линзы разного размера, то лучи из внеосевого источника уже не пересекаются в плоскости изображения, т.е. пятно на изображении будет расширяться не только из-за дифракции, но и из-за нарушения гомоцентричности пучка лучей. На рисунке 3.87 показана зависимость ширины (по полуспаду интенсивности FWHM) светового пятна, формируемого внеосевым источником света с помощью линейно расширяющейся линзы (3.235). Расчет проводился FDTD-методом. Параметры расчета те же самые, что и на рис. 3.84.

Положение источника менялось от 0 до 2,4 мкм, т.е. вдоль всей передней плоскости линзы (рис. 3.85). Из рис. 3.87 видно, что ширина светового пятна на изображении в задней плоскости линзы варьировалась от $0,51\lambda$ до $0,58\lambda$, т.е. оставалась примерно постоянной, что выгодно отличает линзу (3.235) от системы из двух линз (3.234).

На рисунке 3.88 показана расчетная зависимость положения центра светового пятна от положения центра источника света при формировании изображения с помощью линзы (3.85).

Из рисунка 3.88 видно, что зависимость близка к линейной. Это позволяет ожидать, что при наличии нескольких источников на изображении будут сохраняться пропорции.

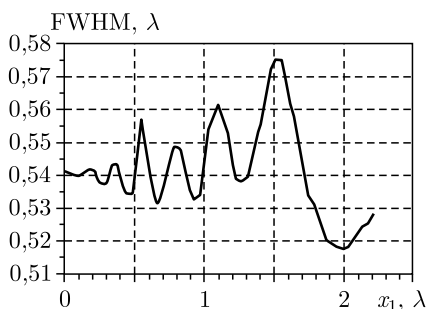


Рис. 3.87. Зависимость ширины FWHM формируемого изображения от положения точечного источника

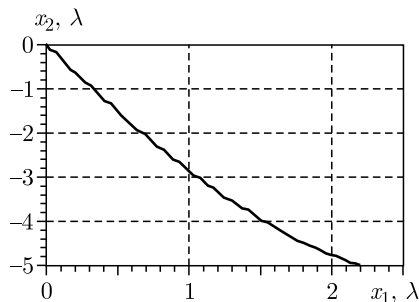


Рис. 3.88. Зависимость центра фокусного пятна от положения центра источника света

3.4.4. Гиперболическая секансная линза со щелью для субволновой фокусировки света. В данной главе суммируются полезные качества щели размером несколько десятков нанометров для локализации света и градиентной линзы для острой фокусировки света, например, линзы Микаэляна [120, 121]. Рассмотрена острая фокусировка света с помощью планарной градиентной линзы с использованием щели для локализации света в узком пятне, шириной FWHM близким к ширине щели. Например, для планарной бинарной микролинзы в кремнии со щелью шириной 50 нм с энергетической эффективностью 44 % формируется вблизи поверхности линзы фокусное пятно с шириной $\text{FWHM} = \lambda/23$. Фокусировка производится на границе линзы, таким образом острое фокусное световое пятно доступно для различных приложений нанофотоники.

Схема рассматриваемой задачи представлена на рис. 3.89.

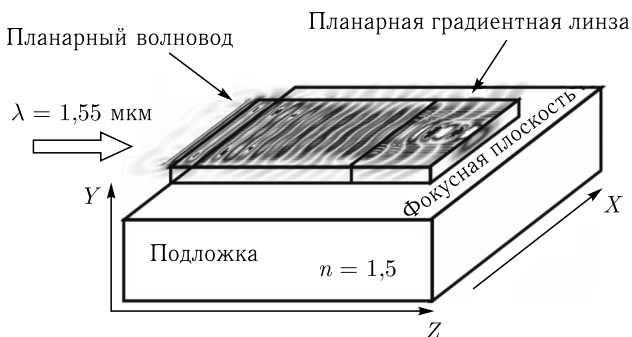


Рис. 3.89. Схема рассматриваемой задачи

Свет, выходящий из планарного волновода, выполненного из кремния ($n_0 = 3,47$) на подложке из плавленного кварца, фокусируется градиентной линзой. Максимальный показатель преломления градиентной линзы на оптической оси равен показателю преломления в волноводе n_0 .

На рисунке 3.90 представлена схема планарной градиентной линзы со щелью. В качестве градиентной линзы рассмотрим планарную гиперболическую секансную (ГС) линзу, показатель преломления которой зависит от поперечной координаты x следующим образом [120, 121]:

$$n(x) = n_0 \frac{1}{\text{ch} \left(\frac{\pi x}{2H} \right)}, \quad (3.236)$$

где H — длина линзы.

Щель в планарной ГС линзе шириной W_1 располагается на оптической оси линзы и доходит до выходной фокусной плоскости линзы. Щель может проходить через всю линзу ($W_2 = H$), или находиться в последней части

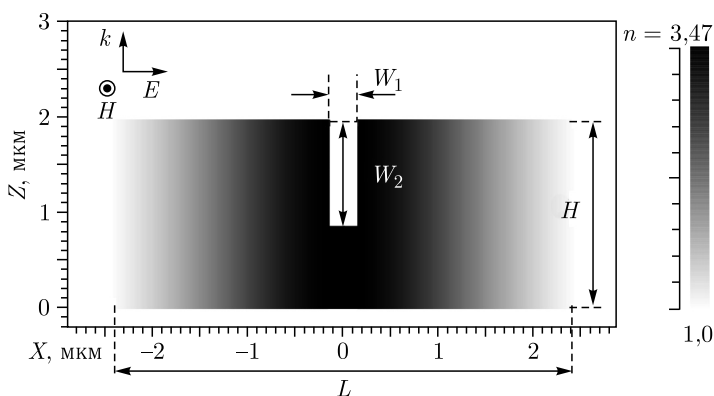


Рис. 3.90. Распределение показателя преломления (в полутонах) градиентной линзы со щелью, направление векторов электрического и магнитного полей показаны для случая ТМ-поляризации

линзы ($W_2 < H$). Ширина щели W_1 может быть менее дифракционного предела фокусировки света в материале линзы на оптической оси.

Моделирование распространения света через линзу проводилось методом FDTD, реализованным в коммерческом программном обеспечении FullWave (фирма RSoft). На рисунке 3.91 представлено распределение интенсивности в фокусной плоскости линзы без щели, на расстоянии 10 нм за выходной плоскостью линзы. Параметры моделирования: $H = 1,95$ мкм, $L = 4,8$ мкм, показатель преломления на оптической оси $n = 3,47$ (кремний), длина волны света $\lambda = 1,55$ мкм, падающая волна плоская, ТЕ-поляризация. Длина линзы H подобрана для оптимального фокусного пятна. Отметим, что в случае ТМ-поляризации качество фокусирования света градиентной линзой без щели будет намного хуже (фокусное пятно будет шире в 4 раза, а боковые лепестки близ фокуса будут составлять приблизительно половину от фокусного пятна).

На рисунке 3.91 ширина фокусного пятна по полуспаду интенсивности $\text{FWHM} = 0,181$ мкм $= 0,117\lambda$. Это значение меньше дифракционного предела в фокусе, который составляет для данного показателя преломления $\text{FWHM} = 0,44\lambda/3,47 = 0,127\lambda$. Покажем, что используя щель на оптической оси линзы с показателем преломления в щели $n = 1$ и начальное световое поле с ТМ-поляризацией, можно достичь более острой фокусировки света. На рисунке 3.92, а приведена зависимость ширины фокусного пятна FWHM от ширины щели W_1 . Длина щели была взята равной длине линзы $W_2 = H = 2,2$ мкм, остальные параметры моделирования такие же, что и для рис. 3.91.

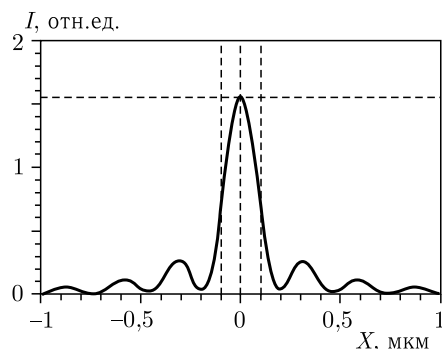


Рис. 3.91. Распределение интенсивности излучения $|E_y|^2$ в фокусе линзы при отсутствии щели, падающая волна имеет ТЕ-поляризацию

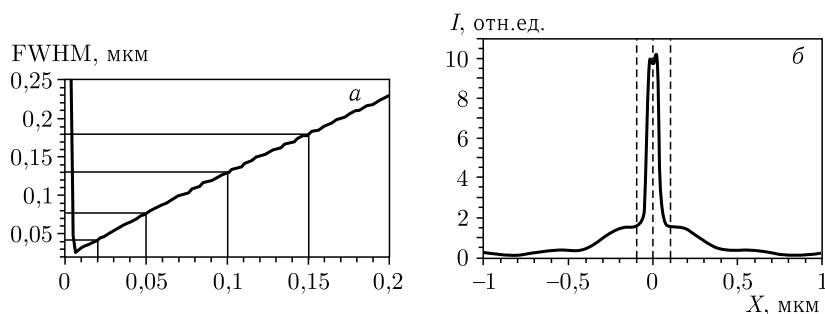


Рис. 3.92. Зависимость ширины фокусного пятна по полуспаду интенсивности от ширины щели W_1 (а), распределение интенсивности $I = |E_x|^2 + |E_z|^2$ в фокусной плоскости (10 нм от линзы) при $W_1 = 50$ нм (б)

Из рисунка 3.92, *а* видно, что ширина фокусного пятна по полуспаду интенсивности линейно зависит от ширины щели в линзе W_1 , фокусное пятно немного шире ее. На рисунке 3.92, *б* приведена зависимость интенсивности в фокусе линзы при $W_1 = 50$ нм. Видно, что интенсивность света в фокусе линзы со щелью примерно в 6,5 раз больше, чем в случае линзы без щели (рис. 3.91) при прочих равных параметрах.

Дифракционная эффективность фокусировки света η_D планарной градиентной линзой со щелью в область, близкую к ширине щели, также зависит от ширины щели W_1 . Максимум эффективности фокусирования света наблюдается при $W_1 \approx 40$ нм, при увеличении ширины щели наблюдается спад эффективности η_D (рис. 3.93, *а*). Такой эффект обуславливается, во-первых, уменьшением интенсивности света в фокусе при увеличении ширины щели W_1 (рис. 3.93, *б*), а во-вторых, изменением боковых лепестков, и как следствие, изменением η_D . Эффективность η_D рассчитывалась как отношение энергии, заключенной в центральном лепестке картины дифракции в фокусе (приблизительно -75 нм $< X < 75$ нм на рис. 3.92, *б*) ко всей энергии, пришедшей в выходную плоскость шириной L .

Из рисунка 3.92, *а* также видно, что при ширине щели $W_1 < 5$ нм ширина фокуса начинает расти. При этом минимальная ширина фокусного пятна достигается при $W_1 = 5$ нм и равна $\text{FWHM} = 13$ нм $= \lambda/119$. Для сравнения отметим, что на рис. 3.91 фокусное пятно имеет ширину $\text{FWHM} = \lambda/8$ и эффективность $\eta_D = 60\%$.

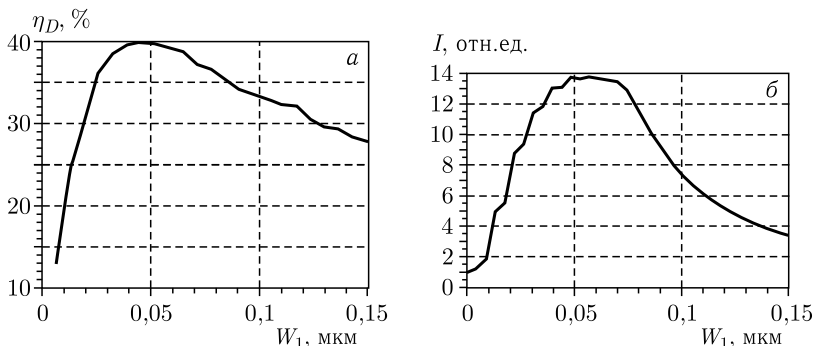


Рис. 3.93. Зависимость эффективности фокусировки света η_D (*а*) и интенсивности в произвольных единицах в фокусе линзы (*б*) от ширины щели W_1 , $W_2 = H$

Из рисунке 3.93 видно, что при рассматриваемых параметрах максимальная эффективность равна $\eta_D = 39,9\%$, а ширина фокусного пятна при этом равна $\text{FWHM} = 55$ нм $= \lambda/28$ (см. рис. 3.92, *а*).

На рисунке 3.94 показаны зависимости эффективности фокусировки света η_D (*а*) и интенсивности света в фокусе линзы (*б*) от длины щели W_2 для фиксированной ширины щели $W_1 = 50$ нм. Для расчета эффективности η_D здесь так же, как и для рис. 3.93, учитывалась область наиболее острой части фокусного пятна (до ближайших боковых лепестков), и была взята -75 нм $< X < 75$ нм. Из рисунка 3.94 видно, что в отсутствие щели ($W_1 = W_2 = 0$) дифракционная эффективность фокусирования света около 10%.

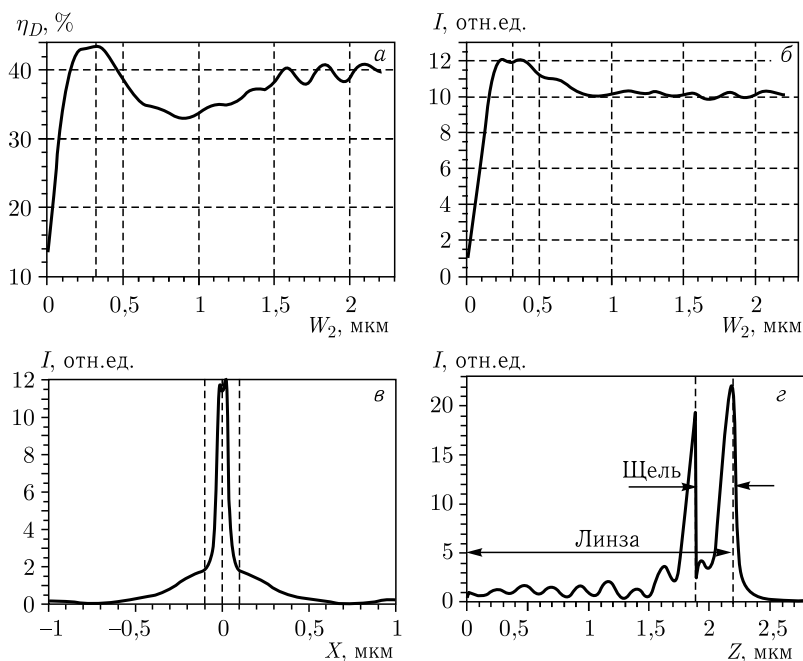


Рис. 3.94. Зависимость эффективности фокусировки света η_D (а) и интенсивности света в фокусе линзы (б) от длины щели W_2 при $W_1 = 50$ нм; распределение интенсивности света на 10 нм за линзой при $W_1 = 50$ нм, $W_2 = 0,31$ мкм (в) и на оптической оси (г)

Видно, что максимальные значения эффективности фокусировки η_D и интенсивности светового поля возникают приблизительно при длине щели, обеспечивающей задержку света в ней на $\lambda/2$, что при рассматриваемой длине волны и показателе преломления соответствует $W_2 = \lambda/[2(n_0 - 1)] = 0,314$ мкм. Эффективность фокусировки света в этом случае достигает $\eta_D = 43,4$ %. При этом интенсивность света в фокусе линзы больше приблизительно на 20 % (рис. 3.94, в), а боковые лепестки менее выражены, чем в случае $W_2 = H$ (рис. 3.92, б). Из рисунка 3.94, г видно, что наибольших значений интенсивность светового поля достигает приблизительно на расстоянии 30 нм от края линзы внутри щели.

Так как линзу с градиентным распределением показателя преломления сложно изготовить современными средствами нанолитографии, для подобной острой фокусировки ТМ-поляризованной волны можно использовать фотонно-кристаллическую линзу со щелью на оптической оси, аналогичную градиентной линзе по среднему распределению показателя преломления. На рисунке 3.95, а показано распределение показателя преломления в плоскости XZ фотонно-кристаллической линзы, аналогичной градиентной линзе (рис. 3.91).

Параметры линзы на рис. 3.95, а: 8 рядов отверстий вдоль оси Z , 20 рядов отверстий вдоль оси X с шахматным расположением, минимальный диаметр отверстий 30 нм, максимальный — 250 нм, длина линзы 2 мкм, ширина

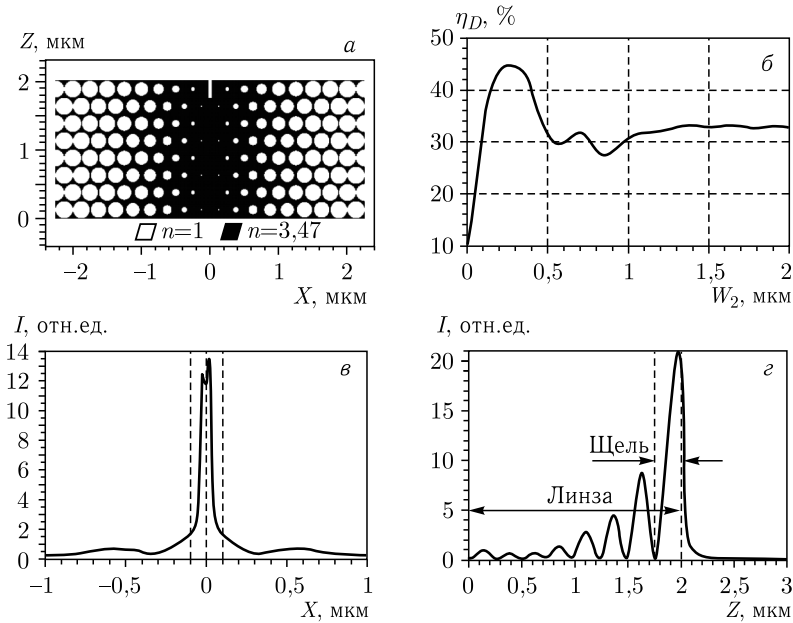


Рис. 3.95. Распределение показателя преломления в фотонно-кристаллической линзе со щелью (а), зависимость дифракционной эффективности η_D от длины щели W_2 при ширине щели $W_1 = 50$ нм (б), распределение интенсивности в фокусе в поперечной плоскости на 10 нм за линзой (в) и на оптической оси (г)

4,8 мкм, показатель преломления материала линзы $n = 3,47$, $W_1 = 50$ нм, $W_2 = 0,25$ мкм. Для такой линзы зависимость эффективности фокусировки света η_D от длины щели W_2 при фиксированном значении ширины щели $W_1 = 50$ нм выглядит аналогично градиентному варианту линзы (рис. 3.95, б). Максимальная эффективность фокусировки света в фокусное пятно шириной 150 нм составляет $\eta_D = 44,3\%$ при $W_2 = 0,25$ мкм. Ширина такого фокусного пятна $\text{FWHM} = 0,044\lambda$.

3.4.5. Острая фокусировка радиально-поляризованного света 3D-гиперболической секансной линзой. Рассмотрим фокусировку волны с радиальной поляризацией, падающей нормально на плоскую поверхность гиперболической секансной линзы с цилиндрической симметрией.

На рисунке 3.96 показано радиальное распределение показателя преломления в градиентной микролинзе. Параметры микролинзы (рис. 3.96): $n_0 = 1,5$, $L = 10$ мкм, радиус апертуры линзы $R = 6$ мкм. Радиус линзы R определяется в идеальном случае из уравнения (3.25) при условии, что $n(R) = 1$.

Микролинза (рис. 3.96) освещалась с помощью радиально-поляризованного кольцевого гауссова пучка:

$$E_r = \exp \left\{ -\frac{(r - r_0)^2}{w^2} \right\}, \quad (3.237)$$

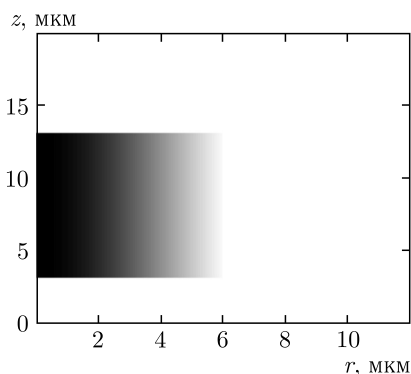


Рис. 3.96. Радиальное сечение цилиндрической градиентной секансной линзы и ее расположение в вычисляемой области (зависимость показателя преломления от радиальной координаты показана в полутонах)

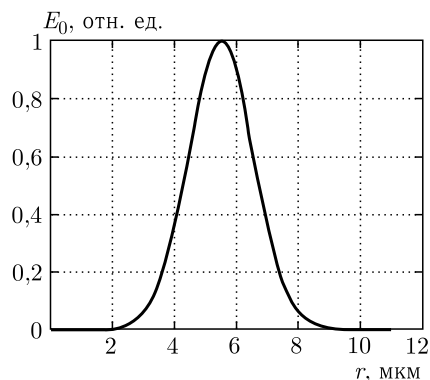


Рис. 3.97. Радиальный профиль амплитуды кольцевого гауссова пучка с радиальной поляризацией

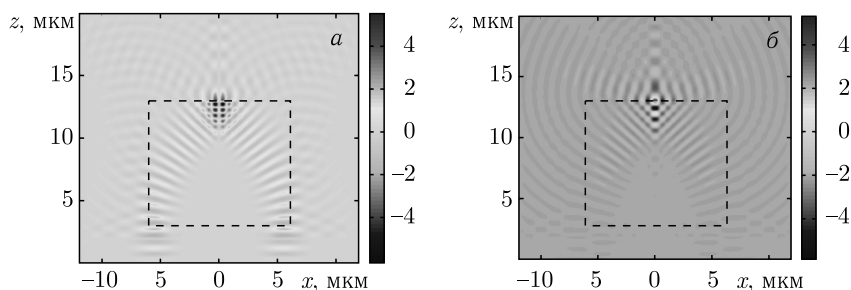


Рис. 3.98. Мгновенное распределение амплитуд $E_r(a)$ и $E_z(б)$ при дифракции кольцевого гауссова пучка с радиальной поляризацией на цилиндрической градиентной секансной линзе

где $r_0 = 5,5$ мкм — центр, $w = 1,5$ мкм — радиус перетяжки. Длина волны выбиралась равной $\lambda = 1$ мкм. На рисунке 3.97 показан профиль такого пучка.

На рисунке 3.98 показана мгновенная картина распределения амплитуд для этого случая. На рисунке 3.99 показано радиальное распределение интенсивности в фокальной плоскости, а на рис. 3.100 показано распределение интенсивности вдоль оси градиентной секансной линзы. Диаметр фокального пятна по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = 0,40\lambda$, а площадь фокального пятна по полуспаду интенсивности равна $\text{HMA} = 0,126\lambda^2$.

Необходимо отметить, что на практике реализовать кольцевой гауссов пучок (3.237) не удастся. На практике, например, можно на подложку, на которой будет изготавливаться микролинза, предварительно напылить тонкую металлическую пленку с кольцевой диафрагмой.

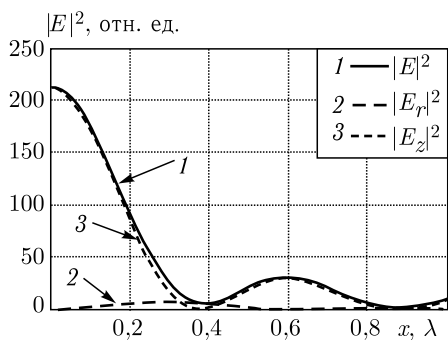


Рис. 3.99. Радиальное распределение интенсивности в фокальной плоскости (сразу за линзой при $z = 13$ мкм) градиентной секансной линзы при падении кольцевого гауссова пучка с радиальной поляризацией

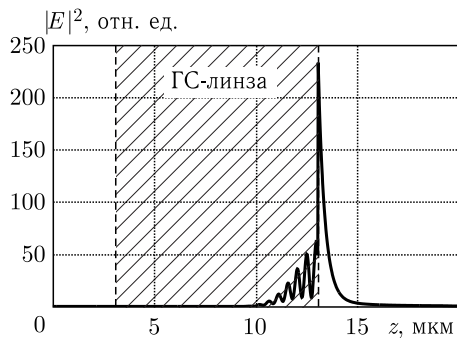


Рис. 3.100. Распределение интенсивности вдоль оси градиентной секансной линзы при прохождении через нее кольцевого гауссова пучка с радиальной поляризацией

Бинарный аналог градиентной ГС-линзы представляет собой фрагмент оптического волокна Брэгга (рис. 3.101). Толщина ступеньки бинарного аналога ГС-линзы вычисляется по формуле

$$x(r) = \Delta r \left[\frac{n(r) - 1}{n_0 - 1} \right], \quad (3.238)$$

где n_0 и $n(r)$ взяты из уравнения (3.237), $\Delta r = 0,5$ мкм — шаг дискретности.

Результаты фокусировки бинарным аналогом ГС-линзы показаны на рис. 3.96 — распределение интенсивности вдоль оси — на рис. 3.102, а и распределение интенсивности в фокусе — на рис. 3.102, б. Из рисунка 3.102, а видно, что замена градиентной линзы на бинарный аналог приводит к уменьшению интенсивности в фокусе (примерно на 20 %), при этом размер пятна остается практически неизменным.

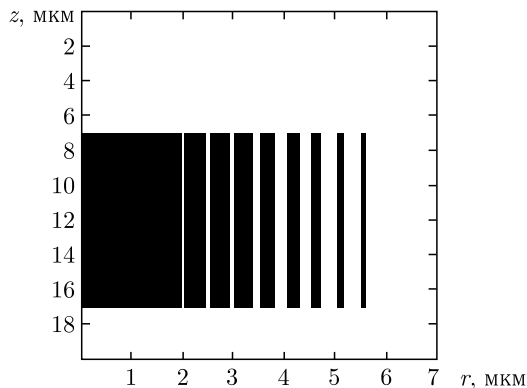


Рис. 3.101. Бинарный аналог ГС-линзы

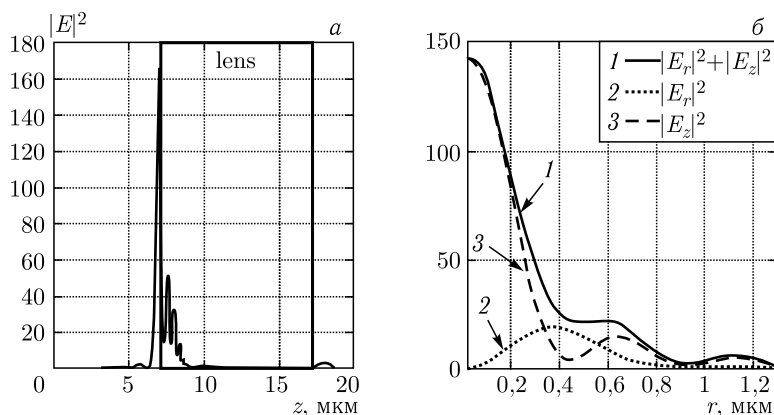


Рис. 3.102. Распределение интенсивности вдоль оси z (а) и в фокальном пятне (б)

3.4.6. Оптимизация параметров планарной бинарной линзы для видимого диапазона излучения. В данной главе проведено 3D-моделирование фокусировки линейно-поляризованного света планарной бинарной микролинзой или фотонно-кристаллической (ФК) линзой, аналогичной градиентной линзе Микаэляна для длины волны света $\lambda = 0,532$ нм, на ее границе. Фотонные кристаллы использовались для фокусировки света и ранее, например в работе [122] моделировалась фокусировка световых импульсов многослойным фотонным кристаллом, однако полученное фокусное пятно было порядка длины волны света 1.55 мкм. Кроме того, фотонный кристалл не рассматривался [122] как аппроксимация градиентной секансной линзы.

Предполагается, что линза, рассчитанная в данной работе, выполнена в пленке электронного резиста, имеющего показатель преломления $n = 1,56$, нанесенного на подложку из плавленного кварца ($n_0 = 1,46$). Такой вариант моделирования линзы выбран, потому что возможно изготовление такой линзы средствами электронной литографии. Моделирование проводилось FDTD-методом, реализованным в программе FullWave фирмы RSoft.

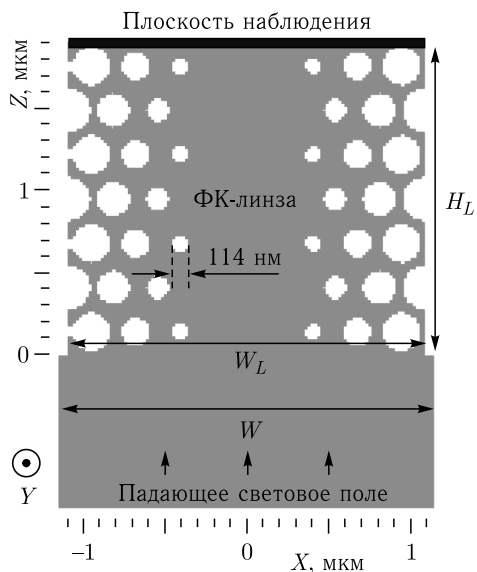


Рис. 3.103. Схема рассматриваемой задачи в двумерном случае (серый цвет $n = 1,56$, белый — $n = 1$)

Моделирование в двумерном случае. Для начала рассмотрим двумерный вариант. На рисунке 3.103 приведена схема рассматриваемой задачи в 2D-случае. Свет с длиной волны $\lambda = 532$ нм распространяется в планарном волноводе шириной W и фокусируется градиентной секансной линзой.

На линзу падала плоская волна с ТЕ-поляризацией. Вектор электрического поля был направлен вдоль оси Y . Волноводом была пленка электронного резиста, нанесенная на плавленный кварц. Показатель преломления резиста был равен $n_1 = 1,56$. Для удобства изготовления линза была выполнена в виде фотонного кристалла (ФК). Градиентный показатель преломления в линзе формируется за счет травления отверстий в электронном резисте до подложки. Линза рассчитывалась в предположении возможности изготовления средствами электронной литографии с разрешением 100 нм.

Минимальный диаметр отверстия в градиентном фотонном кристалле, образующем линзу, равен 114 нм. Показатель преломления подложки был $n_0 = 1,46$. Для получения острой фокусировки света на границе ФК линзы ее ширина была выбрана $W_L = 2,55$ мкм, длина $H_L = 1,83$ мкм. При таких параметрах в двумерном случае ширина фокусного пятна по полуспаду интенсивности составила $\text{FWHM} = 0,361\lambda$, эффективность фокусировки по полуспаду интенсивности составила 65 %. Расположение и диаметр отверстий в ФК были рассчитаны для данных параметров ширины и высоты линзы, после чего была проведена оптимизация величин W_L и H_L с целью уменьшения фокусного пятна. Для ускорения расчетов оптимизация размеров ФК линзы была проведена в двумерном случае для ТЕ-поляризации.

При изменении ширины W_L и высоты H_L линзы координаты центров отверстий сдвигались пропорционально, но их диаметры оставались неизменными. На рисунке 3.104 представлены распределения интенсивности излучения в плоскости наблюдения в 10 нм за линзой до и после оптимизации.

При начальных расчетных параметрах в плоскости наблюдения имеется только фокусное пятно практически с полным отсутствием боковых лепестков (рис. 104, а). Однако, при некотором появлении боковых лепестков (их высота составляет около 30 % от основного максимума интенсивности) можно уменьшить ширину фокусного пятна. Минимальная ширина фокусного пятна (рис. 3.104, б) равна $\text{FWHM} = 0,28\lambda$ и достигается при ширине и высоте линзы $W_L = 2,652$ мкм, $H_L = 1,39$ мкм (рис. 3.105). Эффективность фокусировки при этом уменьшилась до 39,8 %. Оптимизированный профиль показателя преломления линзы показан на рис. 3.105.

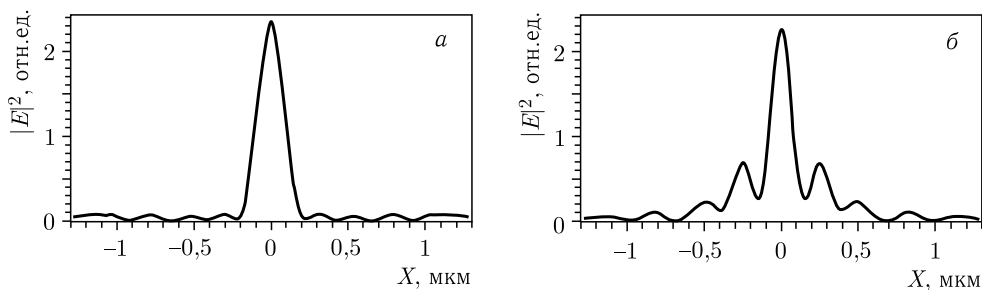


Рис. 3.104. Распределение интенсивности в 10 нм за линзой в двумерном случае до оптимизации (а) и после оптимизации (б) размеров линзы. Падающая волна на волновод плоская, интервал разбиения сетки отсчетов по всем трем координатам равен $\lambda/30$

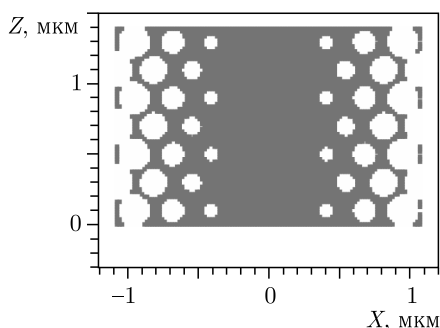


Рис. 3.105. Распределение показателя преломления в линзе в плоскости XZ после оптимизации ширины и высоты (серый цвет $n = 1,56$, белый цвет $n = 1$)

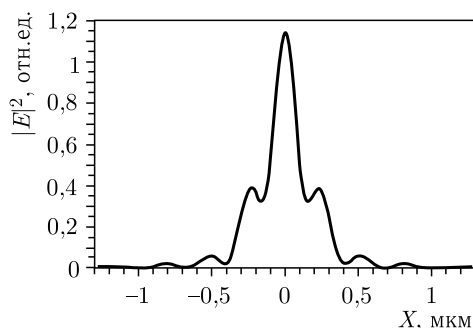


Рис. 3.106. Распределение интенсивности за линзой, освещенной гауссовым пучком с радиусом вдоль оси $X\sigma = 1,275$ мкм в двумерном случае, $W = W_L$

Наибольшее значение для получения острой фокусировки имеет часть света, падающего на края линзы. Если линза освещается светом с гауссовым распределением интенсивности с радиусом σ вдоль оси X , равным половине ширины линзы, то острота фокусировки уменьшается значительно. На рисунке 3.106 представлено распределение интенсивности поля на расстоянии 10 нм за линзой для гауссова источника света с радиусом вдоль оси X $\sigma = 1,275$ мкм в двумерном случае. Для рисунка 3.106 ширина фокусного пятна равна $\text{FWHM} = 0,35\lambda$, что примерно на 30 % больше, чем в случае плоской падающей волны. Однако в волноводе с постоянным показателем преломления устанавливается основная мода с почти гауссовым распределением интенсивности. Для увеличения интенсивности падающего света на края линзы ширина волновода W была выбрана больше ширины линзы, а радиус гауссова пучка вдоль оси X был принят $\sigma = 2,75$. Таким образом на линзу попадает центральная часть гауссова пучка, амплитуда которого на краях линзы падает приблизительно до 0,8 от максимума по центру линзы. Это улучшает остроту фокусировки, хотя и уменьшает ее эффективность.

Моделирование в трехмерном случае. Трехмерная оптическая схема и внешний вид линзы с волноводом изображены на рис. 3.107. Ось Z проходит через оптическую ось системы — по центру планарного волновода (хотя на рис. 3.107 она нарисована сбоку).

Основной волновод шириной W продолжается по бокам линзы, при этом между ним и ФК-линзой имеются щели шириной x_1 . Таким образом, часть света, не попавшая на линзу, распространяется дальше за нее и может быть отведена по двум волноводам за пределы области фокуса. Моделирование показало, что в трехмерном случае на ширину фокусного пятна ФК-линзы влияет как толщина пленки волновода, так и значение зазора x_1 по бокам линзы.

Моделирование трехмерной оптической схемы проводилось при следующих параметрах: радиус распространяющегося в волноводе гауссова пучка $\sigma = 2,75$ мкм, длина волновода между источником и линзой $L = 6$ мкм, ширина волновода $W = 5,5$ мкм, интервал разбиения сетки отсчетов по всем трем

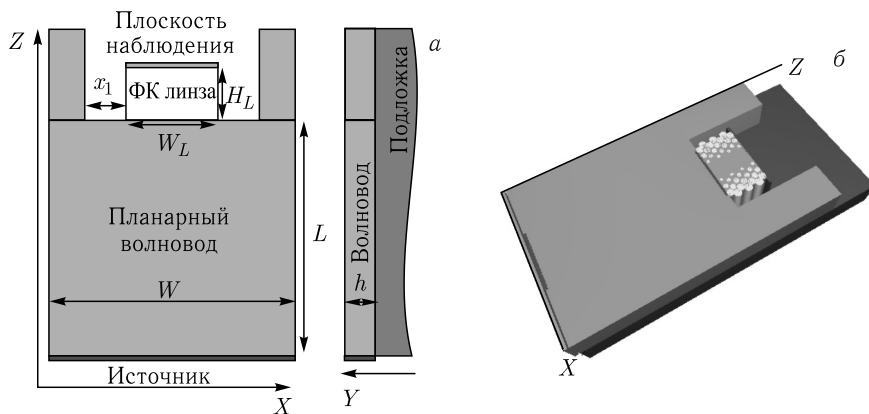


Рис. 3.107. Трехмерная оптическая схема планарной ФК линзы на подложке из плавленного кварца (а) и 3D-вид (б)

координатам равен $\lambda/20$. Размеры линзы W_L и H_L те же, что и на рис. 3.107. На рис. 3.108 показаны мгновенные распределения амплитуды напряженности поля E_y в момент времени T , $cT = 12$ мкм, где c — скорость света в вакууме. Волновод освещен волной с напряженностью электрического поля E_y , а в фокусе линзы рассчитывалась интенсивность $I = |E^2| = |E_y|^2 + |E_z|^2$, где E_z — продольная составляющая электрического вектора.

Из мгновенных распределений E_y видно, что после достижения конца линзы часть света переходит в подложку и начинает распространяться вглубь, другая часть выходит в окружающее пространство над подложкой. Также

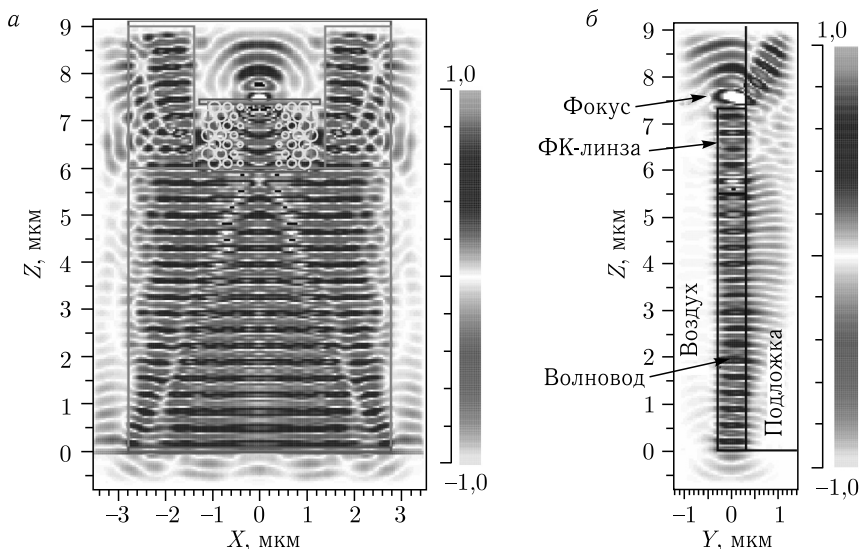


Рис. 3.108. Мгновенное распределение напряженности поля E_y в момент времени $cT = 12$ мкм в плоскости XZ , $Y = 0$ (а) и в плоскости YZ , $X = 0$ (б), ТЕ-поляризация

видно, что за счет избыточной ширины W волновода по отношению к ширине линзы W_L , на линзу попадает центральная часть из гауссова пучка в волноводе. За счет этого достигается более равномерная интенсивность падающего света как по центру, так и на краях ФК линзы, что улучшает остроту фокусировки.

На рисунке 3.109, *а* представлена зависимость ширины фокусного пятна по полуспаду интенсивности от толщины волновода, измеренная по центру волновода. Зазор по краям линзы при этом был равен $x_1 = 0,11$ мкм.

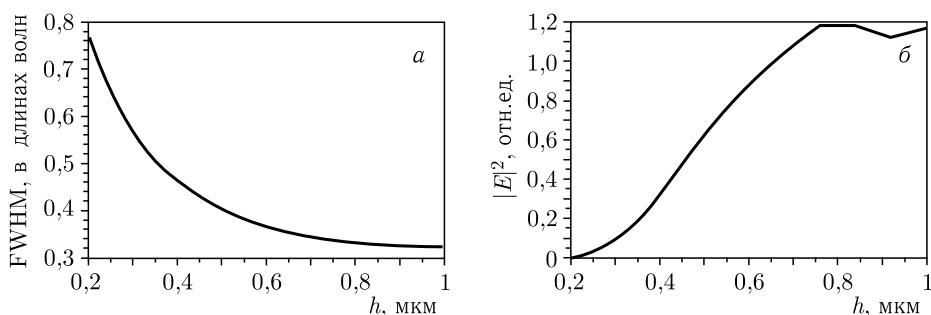


Рис. 3.109. Зависимость ширины фокусного пятна линзы от толщины пленки волновода (*а*); зависимость максимума интенсивности $|E|^2$ в фокусе от толщины волновода (*б*); $x_1 = 0,11$ мкм для обоих графиков

Из рисунка 3.109, *а* видно, что чем меньше толщина волновода h , тем шире фокусное пятно вдоль оси X . С другой стороны, чем меньше толщина волновода h , тем меньше доля света, распространяющаяся в пленке волновода в виде моды. Зависимость максимума усредненной по времени интенсивности в фокусе линзы от толщины волновода показана на рис. 3.109, *б*. Видно, что с уменьшением толщины волновода h менее 0,75 мкм интенсивность света в фокусе линзы уменьшается, что свидетельствует о потере света, уходящего в подложку. Однако, с увеличением толщины волновода увеличивается соотношение глубины травления к диаметру отверстий, составляющих фотонный кристалл (аспектное отношение), что усложняет изготовление ФК линзы средствами электронной литографии. Оптимальным было выбрано значение высоты $h = 0,6$ мкм.

На рисунке 3.110 показана зависимость ширины фокусного пятна вдоль оси X через центр волновода по полуспаду интенсивности от расстояния x_1 .

Видно, что наиболее оптимальное расстояние $x_1 = 0,11$ мкм. При этом достигается минимальное фокусное пятно $\text{FWHM} = 0,365\lambda$ и максимальная интенсивность в фокусе. Эффективность фокусировки по полуспаду интенсивности при этом равна 41 %. При другой толщине волновода h меняется только интенсивность в фокусном пятне, оптимальное расстояние x_1 остается постоянным.

На рисунке 3.111 показана форма фокусного пятна за линзой при оптимальных параметрах: $x_1 = 0,11$ мкм, $h = 0,6$ мкм. Видно, что в трехмерном случае боковые лепестки проявляются слабее (15 %), чем в двумерном случае (30 %), как в случае плоской падающей волны на линзу (рис. 3.104, *б*), так

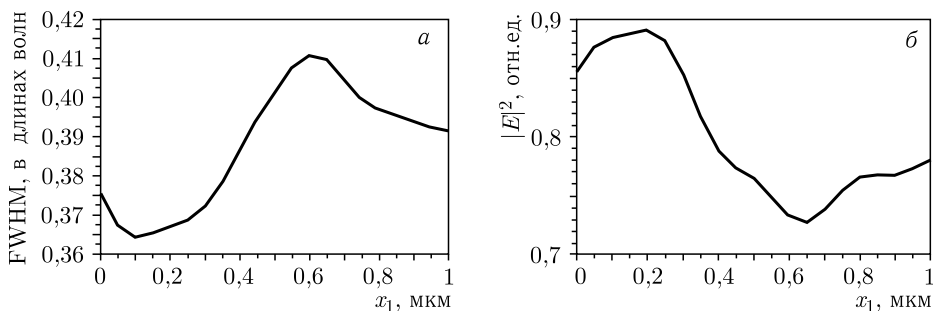


Рис. 3.110. Зависимость ширины фокуса FWHM вдоль оси X (а) и зависимость интенсивности $|E|^2$ в центральной части фокусного пятна (б) от расстояния x_1 между линзой и частями волновода вдоль линзы, толщина волновода $h = 0,6$ мкм

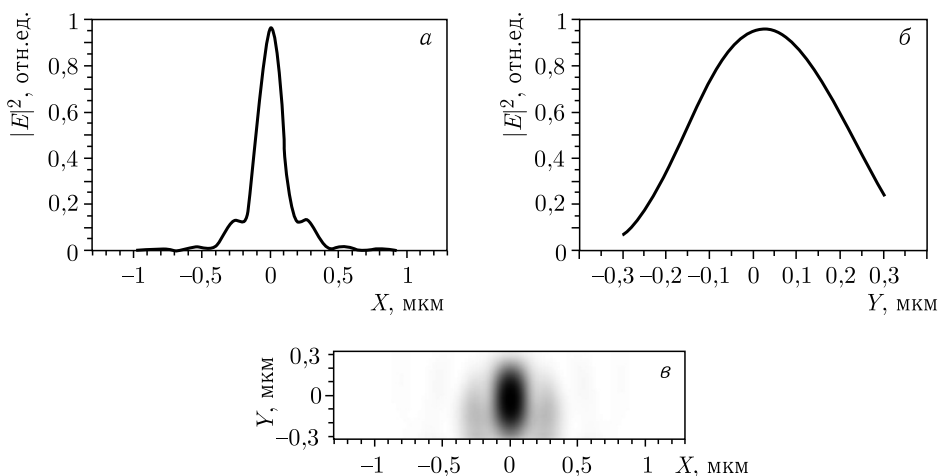


Рис. 3.111. Распределение интенсивности $|E|^2$ за линзой по линии вдоль оси X (а) через максимум интенсивности (по центру волновода) с ФК линзой, вдоль оси Y (б) через центр волновода; двумерное распределение интенсивности $|E|^2$ в плоскости наблюдения, негатив (в)

и в случае гауссова распределения (рис. 106). Ширина фокусного пятна вдоль оси X равна $\text{FWHM} = 0,365\lambda$. Поскольку линза планарная, вдоль оси Y фокус не наблюдается, ширина по полуспаду интенсивности вдоль оси Y $\text{FWHM} = 0,74\lambda$. Если же убрать фотонный кристалл (заполнить отверстия тем же материалом), то фокус в плоскости наблюдения превращается в интерференционную картину, состоящую из трех пиков интенсивности равной величины, причем центральный пик интенсивности становится шире, в этом случае его ширина $\text{FWHM} = 0,46\lambda$. Это показано на рис. 3.112. Остальные все параметры моделирования те же, что и на рис. 3.111.

Из рисунка 3.112 также видно, что в случае отсутствия ФК линзы несимметричность оптической схемы вдоль оси Y (наличие подложки с близким показателем преломления) сказывается на положении максимумов интенсив-

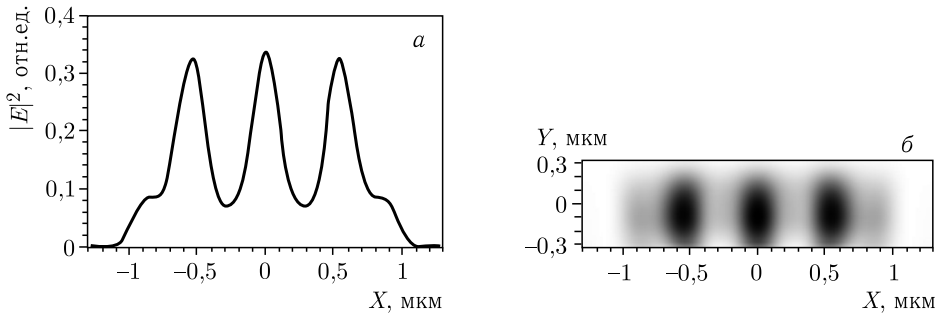


Рис. 3.112. Распределение интенсивности за линзой ($|E|^2$) по линии вдоль оси X через максимум интенсивности (на расстоянии 0,24 мкм от подложки) без фотонного кристалла (отверстия отсутствуют); двумерное распределение $|E|^2$ в плоскости наблюдения, негатив (б)

ности, они смещены в сторону подложки примерно на 60 нм. При наличии фотонного кристалла, образующего линзу, этого эффекта не наблюдается.

3.5. Формирование фотонной наноструи с помощью сферы

То, что сфера с радиусом R фокусирует плоскую волну вблизи своей поверхности, следует из формулы для фокусного расстояния $f = R/(n - 1) \approx 2R$, где $n \approx 1,5$ — показатель преломления. В последнее время возрос интерес к фокусировке света микросферой. В работе [123] исследовалось прохождение плоской ТМ-поляризованной волны через двумерный диэлектрический цилиндр и впервые было введено понятие фотонной наноструи.

Обобщение двумерного случая на трехмерный приводится в статье [124]. Было показано [124], что при фокусировке плоской линейно-поляризованной волны с длиной волны $\lambda = 400$ нм сферой с показателем преломления $n = 1,59$ и диаметром $2R = 1$ мкм диаметр перетяжки фотонной струи составит $\text{FWHM} = 0,325\lambda$ от длины волны. Первое прямое экспериментальное наблюдение фотонной наноструи было осуществлено методами конфокальной микроскопии [125]. С помощью латексного ($n = 1,6$) шарика с $2R = 3$ мкм была получена фотонная струя с диаметром перетяжки $\text{FWHM} = 0,52\lambda$ [125]. Интерес представляет также экспериментальная работа [126], в которой с помощью высокоточного интерферометра изучалось влияние параметров входного излучения на фотонную струю. Было рассмотрено формирование фотонной наноструи при фокусировке плоской волны, сферической волны, бесселева пучка, а также азимутально-поляризованного пучка. В работе [127] экспериментально с помощью оптического микроскопа с $100\times$ объективом ($NA = 0,7$) исследовалась фотонная струя, формируемая с помощью диска из нитрида кремния ($n = 2,1$) высотой 400 нм и $2R = 9,5$ мкм. Такой диск позволяет получить фокусное пятно с наименьшим диаметром по полуспаду интенсивности, равным $\text{FWHM} = 0,86\lambda$. Другая важная характеристика фотонной наноструи — длина фотонной струи (глубина фокуса, DOF) — была исследована в статье [128]. Было показано, что применение градиентной микросферы, в которой показатель преломления меняется линейно от 1,43

до 1,59, позволяет увеличить длину фотонной наноструи до $\text{DOF} = 11,8\lambda$. Здесь нужно отметить, что длина определялась как расстояние от сферы до точки, где интенсивность падала в два раза по сравнению с освещающей сферу пучком. В работе [129] авторы поставили перед собой обратную задачу — добиться уменьшения размеров фотонной наноструи как по поперечным, так и по пространственным координатам. Для этого микросфера (радиус $2,5\lambda$) освещалась гауссовым пучком, сфокусированным широкоапертурной линзой ($NA \approx 1$). Длина фотонной наноструи составила в данном случае $\text{DOF} = 0,88\lambda$.

Фотонные наноструи могут найти применение в рамановской спектроскопии [130], для оптических систем памяти [131], а также в нанолитографии. В работе [132] на основе микросфер была создана литографическая установка, в которой перемещение микросферы осуществлялось посредством оптического пинцета ($\lambda = 532$ нм, точность позиционирования сферы 40 нм). Перемещенная в нужную точку и освещенная лазерным импульсом ($\lambda = 355$ нм) микросфера формировала позади себя фокусное пятно, используемое для прожигания канавки в подложке (удалось сформировать рисунок с размерами деталей 100 нм).

3.5.1. Численное моделирование прохождения непрерывного излучения через микросферу. С помощью радиального метода разностного решения системы уравнений Максвелла в цилиндрических координатах (BOR-FDTD) было проведено численное моделирование прохождения линейно поляризованного (плоскость поляризации yz) гауссова пучка с длиной волны

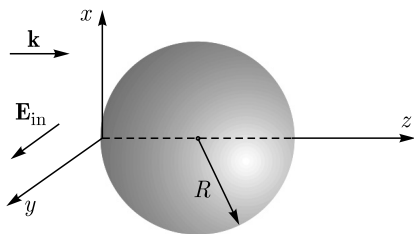


Рис. 3.113. Геометрия рассматриваемой задачи

$\lambda = 633$ нм с радиусом $w = 7\lambda$ через полистироловую микросферу ($n = 1,59$) с диаметром $2R = 5$ мкм с помощью метода BOR-FDTD со следующими параметрами: шаг сетки по пространству $\lambda/50$, по времени $\lambda/100c$, где c — скорость света в вакууме; на краях помещались поглощающие слои Беренгера толщиной λ . Геометрия рассматриваемой задачи приведена на рис. 3.113.

Полученные в ходе моделирования результаты: размеры фокусного пятна составили вдоль оси x — $\text{FWHM}_x = (0,49 \pm 0,02)\lambda$, а вдоль оси y — $\text{FWHM}_y = (0,78 \pm 0,02)\lambda$. Максимум интенсивности располагался на расстоянии 0,134 мкм от сферы. Данную точку в разных источниках называют или областью перетяжки фотонной наноструи [124], или областью фокуса [133]; мы будем придерживаться второго наименования. Тогда под фокусным расстоянием будем подразумевать расстояние от поверхности микросферы до фокуса.

На рисунке 3.114 показано усредненное по времени распределение интенсивности в вычисляемой области в плоскости xz , перпендикулярной к плоскости поляризации входного излучения (рис. 3.114, а), и в плоскости yz , параллельной плоскости поляризации входного излучения (рис. 3.114, б).

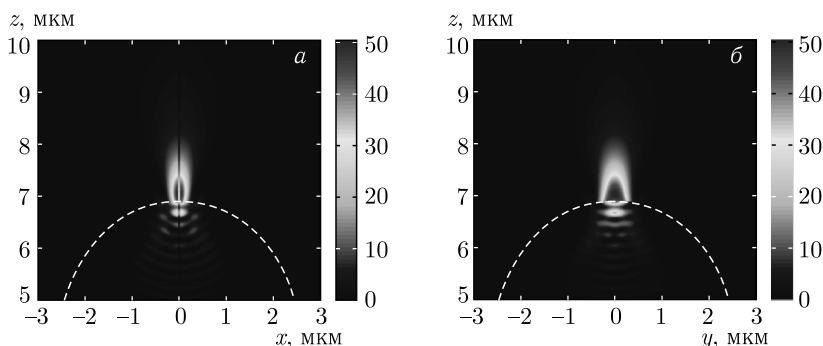


Рис. 3.114. Распределение интенсивности в вычисляемой области в плоскостях (а) перпендикулярной и (б) параллельной к плоскости поляризации входного излучения

На рисунке 3.115 показаны сечения интенсивности в фокусе вдоль оси x (рис. 3.115, а) и y (рис. 3.115, б), а на рис. 3.116 — распределение интенсивности вдоль оси z . Из рисунка 3.116 можно оценить глубину фокусировки или длину фотонной наноструктуры по полуспаду интенсивности вдоль оси z : $\text{DOF} = (1,06 \pm 0,02)\lambda$.

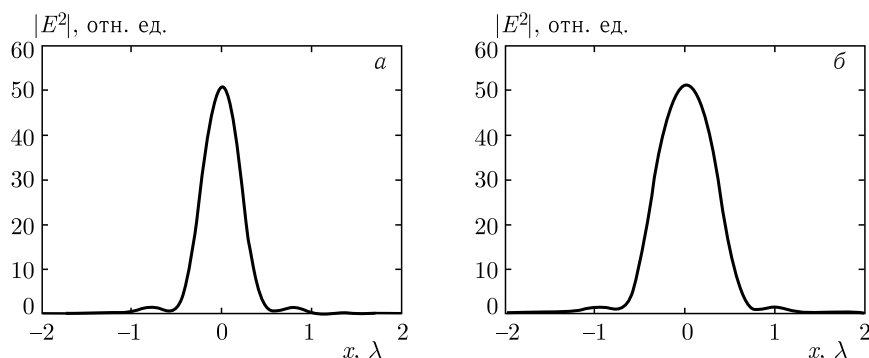


Рис. 3.115. Распределение интенсивности в фокусе

С целью проверки правильности результатов моделирования, а также проверки влияния ширины входного пучка на размеры фокусного пятна было проведено сравнение результатов, полученных с помощью метода BOR-FDTD и с помощью коммерческой программы FullWave, на примере фокусировки плоской волны. В обоих случаях рассчитывалось только распределение интенсивности в плоскости перпендикулярной к направлению поляризации входного излучения (плоскость xz).

Моделирование методом BOR-FDTD проводилось с теми же параметрами вычисляемой области, что и в предыдущем разделе. На рисунках ниже показаны результаты моделирования: на рис. 3.117 — распределение интенсивности в плоскости перпендикулярной к направлению поляризации входного излучения (где наблюдается минимальный диаметр фокусного пятна), на рис. 3.118 — распределение интенсивности вдоль оси z , на рис. 3.119 —

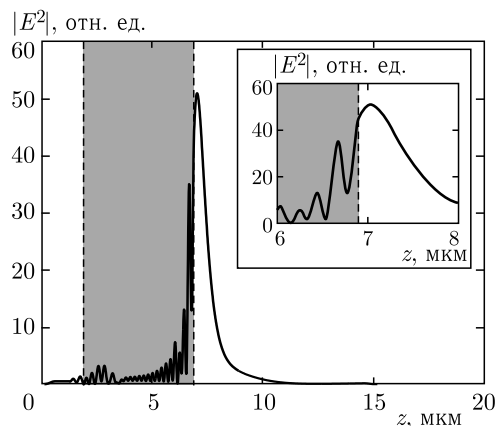


Рис. 3.116. Распределение интенсивности вдоль оси z , (на вставке увеличенный фрагмент вблизи поверхности сферы) Серым цветом показана область внутри микросферы

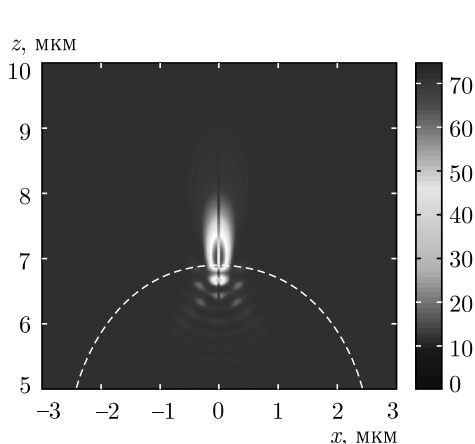


Рис. 3.117. Распределение интенсивности в вычисляемой области в плоскости xz

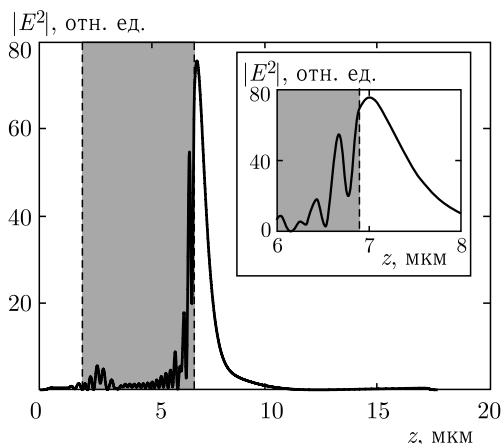
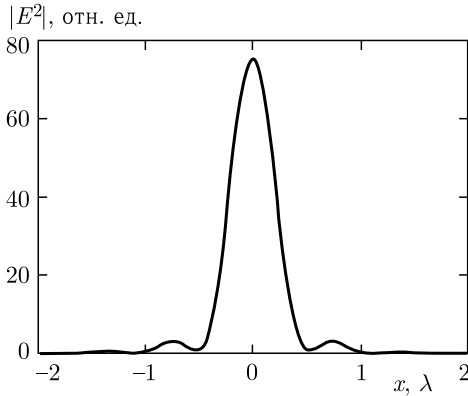
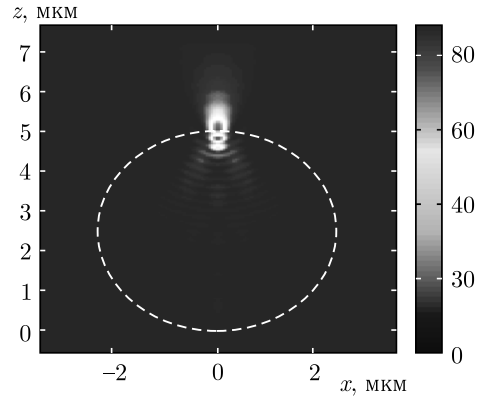


Рис. 3.118. Распределение интенсивности вдоль оси z , (на вставке увеличенный фрагмент вблизи поверхности сферы). Серым цветом показана область внутри микросферы

распределение интенсивности в фокусе в плоскости xz . В данном случае фокусное расстояние составило $0,108 \text{ мкм}$ (от поверхности сферы), а наименьший диаметр фокусного пятна был равен $\text{FWHM} = (0,46 \pm 0,02)\lambda$; глубина фокуса — $\text{DOF} = (0,99 \pm 0,02)\lambda$.

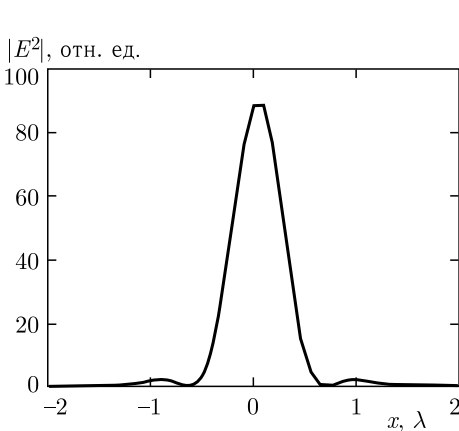
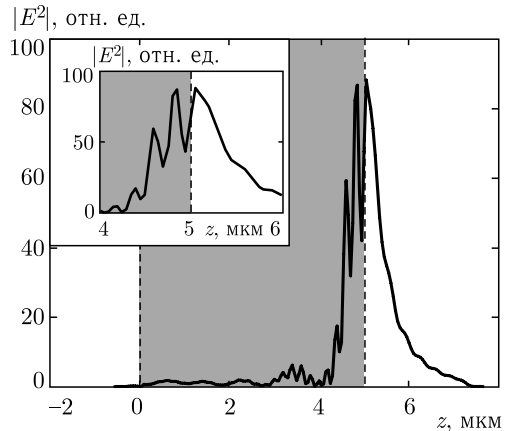
При моделировании FDTD-методом, реализованным с помощью программы FullWave, были выбраны следующие параметры: шаг сетки по пространству $0,05 \text{ мкм}$ (или $\approx \lambda/13$), по времени $0,025 \text{ мкм/с}$, где c — скорость света в вакууме. Распределение интенсивности в плоскости перпендикулярной к направлению поляризации входного излучения приведено на рис.3.120. На рисунке 3.121 приведено поперечное сечение интенсив-

Рис. 3.119. Распределение интенсивности в фокусе вдоль оси x Рис. 3.120. Распределение интенсивности в вычисляемой области в плоскости xz

ности, а на рис. 3.122 — распределение интенсивности вдоль оси z . Наименьший диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности составил $\text{FWHM} = (0,55 \pm 0,08)\lambda$, глубина фокуса $\text{DOF} = (0,68 \pm 0,08)\lambda$, а расстояние от сферы до максимума интенсивности было равно $0,05$ мкм.

Сетка отсчетов в программе FullWave была выбрана почти в 4 раза более редкой, чем для программы BOR-FDTD из-за того, что первая программа считает в десятки раз дольше, чем вторая.

С помощью программы МЕЕР (Массачусетский технологический институт) была рассмотрена фокусировка гауссова пучка шириной $w = 12\lambda$ сферами с показателем преломления $n = 1,59$, радиус которых варьировался от $0,5\lambda$ до 4λ . Размер вычисляемой области составил $10 \times 10 \times 10$ длин волн, а шаг

Рис. 3.121. Распределение интенсивности в фокусе вдоль оси x Рис. 3.122. Распределение интенсивности вдоль оси z , (на вставке увеличенный фрагмент вблизи поверхности сферы). Серым цветом показана область внутри микросферы

сетки по пространству $\lambda/20$. При расчете интенсивности усреднение проводилось по 20 периодам. На рисунке 3.123 показана зависимость расстояния от центра сферы до точки максимальной интенсивности вне сферы. Зависимости диаметров фокусного пятна от радиуса сферы приведены на рис. 3.124.

Из рисунка 3.124 видно, что если радиус сферы равен длине волны фокусируемого света, $R = \lambda$, то диаметр фокусного пятна достигает своего наименьшего значения — $\text{FWHM} = 0,3\lambda$. Для сферы с радиусом $R = 2,5 \text{ мкм} = 3,95\lambda$, которая рассматривалась в предыдущих разделах, получен следующий результат: $\text{FWHM} = (0,50 \pm 0,05)\lambda$.

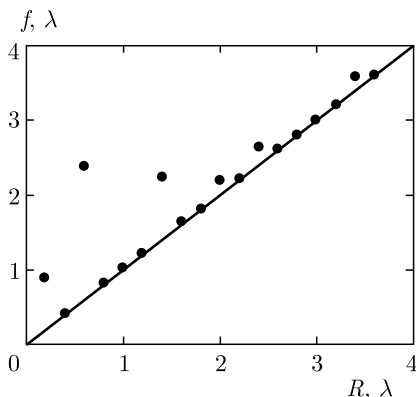


Рис. 3.123. Зависимость расстояния от центра сферы до точки максимальной интенсивности вне сферы

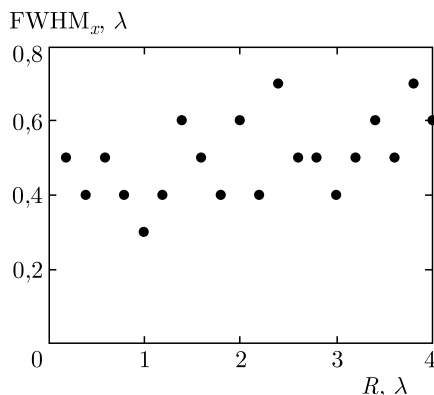


Рис. 3.124. Зависимости диаметров фокусного пятна FWHM вдоль оси x от радиуса сферы

3.5.2. Численное моделирование прохождения импульсного излучения через микросферу. Моделировалась фокусировка импульсов линейно-поляризованной плоской волны длительностью 1,25 фс по полуспаду интенсивности ($\lambda = 633 \text{ нм}$) полистироловой сферой ($n = 1,59$) с диаметром $2R = 5 \text{ мкм}$. Численное моделирование фокусировки сферой импульсного лазерного излучения проводилось в программе FullWave при тех же параметрах, что и непрерывное: шаг сетки по пространству равен 0,05 мкм (или $\approx \lambda/13$), по времени — 0,025 мкм/ c (или $\approx \lambda/26$), где c — скорость света в вакууме.

Рассматриваемый нами импульс длительностью 1,25 фс имеет форму, показанную на рис. 3.125. В момент фокусировки микросферой $t = 30 \text{ фс}$ мгновенное распределение интенсивности в плоскости перпендикулярной плоскости поляризации входного излучения примет вид, показанный на рис. 3.126. Сечение мгновенного распределения интенсивности вдоль оси z в момент фокусировки показано на рис. 3.127, а на рис. 3.128 — распределение интенсивности в фокусе вдоль оси x . Максимальная интенсивность в фокусе в произвольных единицах — 134,22 (это почти в 100 раз больше, чем максимальная интенсивность падающего импульса), а фокусное расстояние составило 0,05 мкм. Наименьший диаметр фокусного пятна по полуспаду интенсивности равен $\text{FWHM} = (0,55 \pm 0,08)\lambda$.

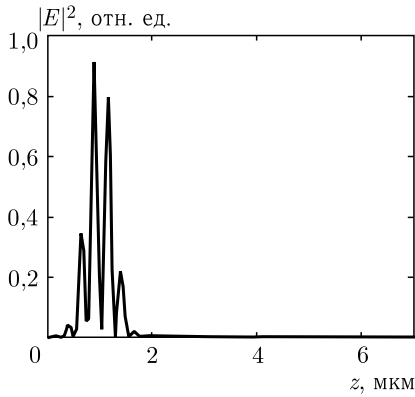


Рис. 3.125. Мгновенное распределение интенсивности входящего импульса длительностью 1,25 фс вдоль оси z

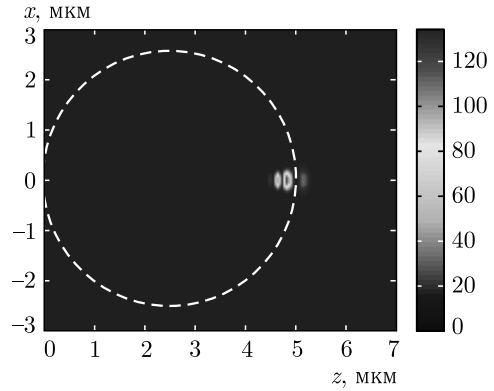


Рис. 3.126. Мгновенное распределение интенсивности в плоскости yz ($x = 0$ мкм) для импульса длительностью 1,25 фс в момент фокусировки $t = 30$ фс

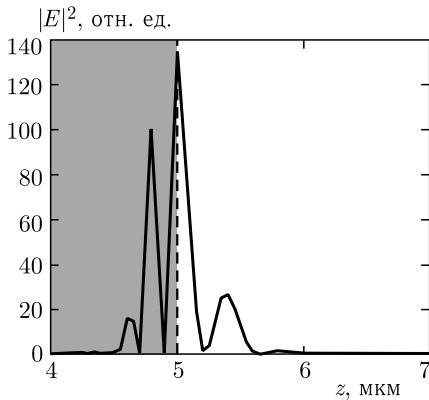


Рис. 3.127. Мгновенное распределение интенсивности вдоль оси z для импульса длительностью 1,25 фс в момент фокусировки $t = 30$ фс. Пунктиром отмечена граница сферы

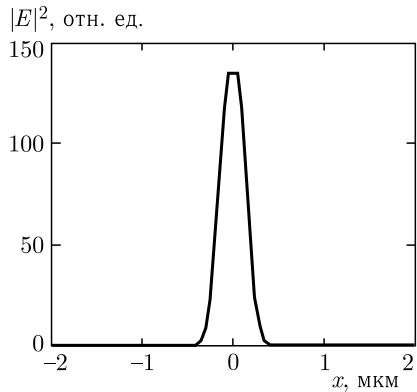


Рис. 3.128. Мгновенное распределение интенсивности в фокусе вдоль оси y для импульса длительностью 1,25 фс в момент фокусировки $t = 30$ фс

3.5.3. Эксперимент по фокусировке света микросферой. Эксперимент проводился с помощью сканирующего ближнепольного оптического микроскопа Интегра Спектра (фирмы NT-MDT), оптическая схема которого приведена на рис. 3.5. В данной схеме линейно-поляризованный свет от лазера ЛГН-215 с длиной волны $\lambda = 633$ нм проходил через полистироловую сферу, формируя фотонную нанострую, поперечное распределение интенсивности в которой затем измеряли с помощью металлического пирамидального кантиливера с размером отверстия 100 нм на разных расстояниях от поверхности сферы. Фокус располагался на расстоянии 100 нм от поверхности сферы.

На рисунке 3.129 показано распределение интенсивности, полученное в плоскости фокуса. Фокусное пятно имеет эллиптическую форму, с размерами вдоль оси x — $\text{FWHM}_x = (0,73 \pm 0,08)\lambda$, а вдоль оси y — $\text{FWHM}_y = (0,60 \pm 0,08)\lambda$. На рисунке 3.130 показаны сечения интенсивности вдоль осей x и y (рис. 3.129).

Распределение интенсивности на рис. 3.129 и 3.130, получено при небольшом числе отсчетов с разрешением, равном размеру отверстия кантилевера — 100 нм. Ошибка при измерении диаметра фокусного пятна равна $0,08\lambda$.

В таблице 3.4 для сравнения приведены все данные, полученные в статье.

В этом разделе было показано, что при некоторых значениях радиуса сферы возможно преодоление дифракционного предела. Минимальное возможное значение диаметра фокуса достигается при радиусе $R = \lambda$ и равно $\text{FWHM} = 0,3\lambda$. Моделирование с помощью программы FullWave показало, что при фокусировке непрерывного лазерного излучения (плоская волна с длиной волны 633 нм) меньший диаметр фокуса для сферы с радиусом $R = 2,5$ мкм $= 3,95\lambda$ равен $\text{FWHM} = (0,55 \pm 0,08)\lambda$, а при фокусировке импульсного излучения с длительностью 1,25 фс — $\text{FWHM} = (0,54 \pm 0,08)\lambda$. При расчете с помощью программы МЕЕР было получено, что меньший

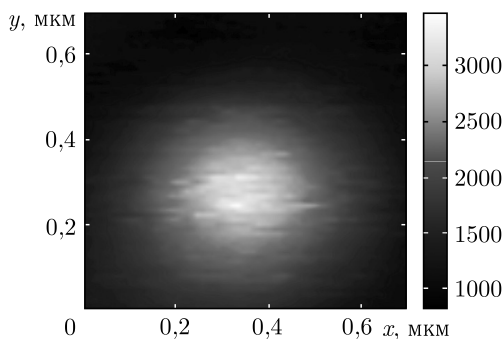


Рис. 3.129. Распределение интенсивности в фокусе, измеренное экспериментально с помощью сканирующего ближнепольного оптического микроскопа

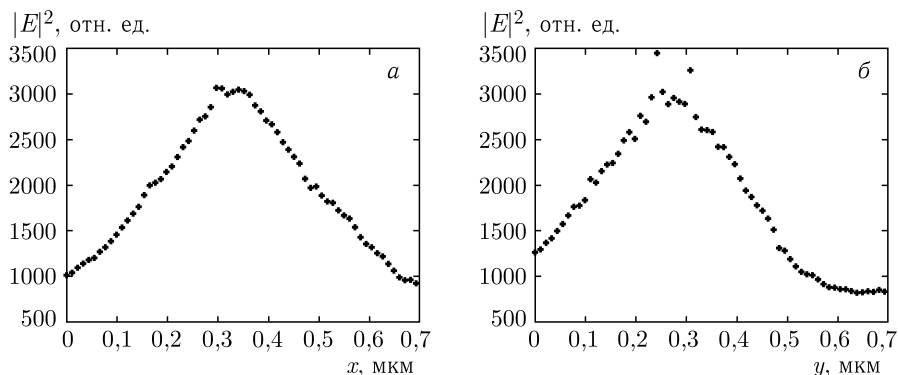


Рис. 3.130. Экспериментальные сечения интенсивности в фокусе (рис. 3.130) вдоль осей (а) x , (б) y

Таблица 3.4. Значения меньшего диаметра фокусного пятна, сформированного вблизи поверхности сферы с радиусом $3,95\lambda$ ($n = 1,59$), полученные разными методами

Способ получения значения диаметра	FWHM, λ
BOR-FDTD, гауссов пучок	$0,49 \pm 0,02$
BOR-FDTD, плоская волна	$0,46 \pm 0,02$
FullWave, плоская волна	$0,55 \pm 0,09$
FullWave, плоская волна, импульс	$0,54 \pm 0,08$
МЕЕР, широкий гауссов пучок	$0,50 \pm 0,05$
Эксперимент	$0,60 \pm 0,08$

размер фокусного пятна для сферы с тем же радиусом равен $\text{FWHM} = (0,50 \pm 0,05)\lambda$. Все эти значения немного меньше, чем значение диаметра фокусного пятна, измеренного с помощью оптического сканирующего микроскопа ближнего поля, $\text{FWHM} = (0,60 \pm 0,08)\lambda$.

Литература к главе 3

1. Davidson D.B., Ziolkowski R.W. Body-of-revolution finite-difference time-domain modeling of space-time focusing by a three-dimensional lens // J. Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11, No 4. P. 1471–1490.
2. Yu W., Arakaki D., Mittra R. On the solution of a class of large body problems with full or partial circular symmetry by using the finite-difference time-domain. NoFDTD) method // IEEE Trans. on An. And Prop. 2000. V. 48, No 12. P. 1810–1817.
3. Farahat N.A., Yu W., Mittra R. Fast near-to-far-field transformation in body of revolution finite-difference time-domain method // IEEE Trans. on An. And Prop. 2003. V. 51, No 9. P. 2534–2540.
4. Gedney S.D. An anisotropic perfectly matched layer-absorbing medium for the truncation of FDTD lattices // IEEE Trans. on An. And Prop. 1996. V. 44, No 12. P. 1630–1639.
5. Prather D.W., Shi S. Formulation and application of the finite-difference time-domain method for the analysis of axially symmetric diffractive optical elements // J. Opt. Soc. Am. A. 1999. V. 16, No 5. P. 1131–1142.
6. Shi S., Prather D.W. Electromagnetic analysis of axially symmetric diffractive optical elements illuminated by oblique incident plane waves // J. Opt. Soc. Am. A. 2001. V. 18, No 11. P. 2901–2907.
7. EL_Mashade M.B., Nady M. BOR-FDTD analysis of nonlinear Fiber Bragg grating and distributed Bragg resonator // Optics & Laser Technology. 2011. V. 43, No 7. P. 1065–1072.
8. Antosiewicz T.J., Wróbel P., Szoplik T. Dielectric-metal-dielectric nanotip for SNOM // Proc. of SPIE. 2009. V. 7353. P. 735301.
9. Olkkonen J.T., Kataja K., Aikio J., Howe D.G. On surface plasmon enhanced near-field transducers // Proc. of SPIE. 2004. V. 5380. P. 360–367.
10. Liu H., Liu Y. Analysis of a diffractive microlens using the finite-difference time-domain method // J. Micro/Nanolith. MEMS MOEMS. 2010. V. 9, No 3. P. 033004.

11. *Liu Y., Liu H., He L., Zhou L., Sui C.* Broadband dispersion characteristics of diffractive microlenses based on the finite-difference time-domain method // Optics & Laser Technology. 2010. V. 42, No 8. P. 1286–1293.
12. *Pérez-Ocón F., Pozo A.M., Jiménez J.R., Hita E.* Fast Single-Mode Characterization of Optical Fiber by Finite-Difference Time-Domain Method // J. Lightwave Technol. 2006. V. 24, No 8. P. 3129.
13. *Davidson N., Bokor N.* High-numerical-aperture focusing of radially polarized doughnut beams with a parabolic mirror and a flat diffractive lens // Opt. Lett. 2004. V. 29, No 12. P. 1318–1320.
14. *Borghi R., Santarsiero M.* Nonparaxial propagation of spirally polarized optical beams // J. Opt. Soc. Am. A, 2004. V. 21, No 10. P. 2029–2037.
15. *Passilly N., Denis R.S., Ait-Ameur K.* Simple interferometric technique for generation of a radially polarized light // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22, No 5. P. 984–991.
16. *Jabbour T.G., Kuebler S.M.* Vector diffraction analysis of high numerical aperture focused beams modified by two- and three-zone annular multi-phase plates // Opt. Express. 2006. V. 14, No 3. P. 1033–1043.
17. *Kozawa Y., Sato S.* Focusing property of a double-ring-shaped radially polarized beam // Opt. Lett. 2006. V. 31, No 7. P. 867–869.
18. *Zhan Q.* Properties of circularly polarized vortex beams // Opt. Lett. 2006. V. 31, No 7. P. 867–869.
19. *Deng D.* Nonparaxial propagation of radially polarized light beams // J. Opt. Soc. Am. B. 2006. V. 23, No 6. P. 1228–1234.
20. *Salamon Y.I.* Fields of a radially polarized Gaussian laser beam beyond the paraxial approximation // Opt. Lett. 2006. V. 31, No 17. P. 2619–2621.
21. *Deng D., Guo Q., Wu L., Yang X.* Propagation of radially polarized elegant light beams // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. V. 24, No 3. P. 636–643.
22. *Grosjean T., Courjon D., Banier C.* Smallest lithographic marks generated by optical focusing systems // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 8. P. 976–978.
23. *Kozawa Y., Sato S.* Sharper focal spot formed by higher-order radially polarized laser beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2007. V. 24, No 6. P. 1793–1798.
24. *Lerman G.M., Levy U.* Tight focusing of spatial variant vector optical fields with elliptical symmetry of linear polarization // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 15. P. 2194–2196.
25. *Yan, S. Yao, B.* Description of a radially polarized Laguerre-Gauss beam beyond the paraxial approximation // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 22. P. 3367–3369.
26. *Yew E.Y.S., Sheppard, C.J.R.* Tight focusing radially polarized Gaussian and Bessel-Gauss beams // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 23. P. 3417–3419.
27. *Kalosha V.P., Golub I.* Toward the subdiffraction focusing limit of optical superresolution // Opt. Lett. 2007. V. 32, No 24. P. 3540–3542.
28. *Stadler J., Stanciu C., Stupperich C., Meixner A.J.* Tighter focusing with a parabolic mirror // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 7. P. 681–683.
29. *Dorn R., Quabis S., Leuchs G.* Sharper focus for a radially polarized light beam // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 233901.
30. *Ohtaka Y., Ando T., Inoue T. et al.* Sidelobe reduction of tightly focused radially higher-order Laguerre-Gaussian beams using annular masks // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 6. P. 617–619.
31. *Sheppard C.J.R., Alonso M.A., Moore N.J.* Localization measures for high-aperture wave fields based on pupil moments // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 2008. V. 10. P. 033001.

32. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: специальные функции. — М.: Наука, 1983.
33. Pohl D.W., Denk W., Lanz M. Optical spectroscopy: image recording with resolution $\lambda/20$ // Appl. Phys. Lett. 1984. V. 44. P. 651–653.
34. Binnig G., Rohrer H., Gerber Ch., Weibel E. Tunneling through a controllable vacuum gap // Appl. Phys. Lett. 1982. V. 40, No 2. P. 178.
35. McLeod J.H. The Axicon: A New Type of Optical Element // J. Opt. Soc. Am. 1954. V. 44, No 8. P. 592–597.
36. Dyson J. Circular and Spiral Diffraction Gratings // Proc. R. Soc. Lond. A. 1958. V. 248. P. 93–106.
37. Lit J.W., Tremblay R. Focal depth of a transmitting axicon // J. Opt. Soc. Am. 1973. V. 63, No 4. P. 445–449.
38. Vahimaa P., Kettunen V., Knittinm M., Turunen J. Electromagnetic analysis of nonparaxial Bessel beams generated by diffractive axicon // J. Opt. Soc. Am. A. 1997. V. 4, No 8. P. 1817–1824.
39. Kizuka T., Yamanchi M., Matsuoka Y. Characteristics of a laser beam spot focused by a binary diffractive axicon // Opt. Eng. 2008. V. 45, No 5. P. 053401.
40. Kim J.K., Kim J., Jung Y. et al. Compact all-fiber Bessel beam generator based on hollow optical fiber combined with a hybrid polymer fiber lens // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 19. P. 2973–2975.
41. Kurt H. Limited-diffraction light propagation with axicon-shape photonic crystal // J. Opt. Soc. Am. B. 2009. V. 26, No 5. P. 981–986.
42. Chen W., Zhan Q. Realization of an evanescent Bessel beam via surface Plasmon interference excited by a radially polarized beam // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 6. P. 722–724.
43. Watanabe K., Terakedo G., Kano H. Localized surface plasmon microscope with an illumination system employing a radially polarized zeros-order Bessel beam // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 8. P. 1180–1182.
44. Quabis S., Dorn R., Eberler M., Glöckl O., Leuchs G. Focusing light to a tighter spot // Opt. Commun. 2000. V. 179. P. 1–7.
45. Mote R.G., Yu S.F., Zhou W., Li X.F. Subwavelength focusing behavior of high numerical-aperture phase Fresnel zone plates under various polarization states // Appl. Phys. Lett. 2009. V. 95. P. 191113.
46. Rajesh K.B., Anbarasan P.M. Generation of sub-wavelength and super-resolution longitudinally polarized non-diffraction beam using lens axicon // Chin. Opt. Lett. 2008. V. 6, No 10. P. 785–787.
47. Wang H., Shi L., Lukyanchuk B., Sheppard C., Chong C.T. Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics // Nature photonics. 2008. V. 2. P. 501–505.
48. Huang K., Huang K., Shi P. et al. Design of DOE for generating a needle of a strong longitudinally polarized field // Opt. Lett. 2010. V. 35, No 7. P. 965–967.
49. Sun C.-C., Liu C.-K. Ultrasmall focusing spot with a long depth of focus based on polarization and phase modulation // Opt. Lett. 2003. V. 28, No 2. P. 99–101.
50. Ohtake Y., Ando T., Inoue T., Matsumoto N., Toyoda H. Sidelobe reduction of tightly focused radially higher-order Laguerre-Gaussian beams using annular masks // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 6. P. 617–619.
51. Youngworth K.S., Brown T.G.. Focusing of high numerical aperture cylindrical vector beams // Opt. Expr. 2000. V. 7. P. 77–87.
52. Huang K., Shi P., Cao G.W. et al. Vector-vortex Bessel-Gauss beams and their tightly focusing properties // Opt. Lett. 2011. V. 36, No 6. P. 888–890.

53. Witkowska A., Leon-Saval S.G., Pham A., Birks T.A. All-fiber LP₁₁ mode convertors // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 4. P. 306–308.
54. Kozawa Y., Sato S. Generation of a radially polarized laser beam by use of a conical Brewster prism // Opt. Lett. 2005. V. 30, No 22. P. 3063–3065.
55. Golub I., Chebi B., Shaw D., Nowacki D. Characterization of a refractive logarithmic axicon // Opt. Lett. 2010. V. 35, No 16. P. 2828–2830.
56. Golub M.A., Karpeev S.V., Prokhorov A.M., Sisakyan I.N., Soifer V.A. Focusing light into a specified volume by computer-synthesized hologram // Sov. Tech. Phys. Lett. 1981. V. 7. P. 264–266.
57. Staronski L.R., Sochacki J., Jroszewicz Z., Kolodziejczak A. Lateral distribution and flow of energy in uniform-intensity axicon // J. Opt. Soc. Am. A. 1992. V. 9, No 11. P. 2091–2094.
58. Хонина С.Н., Балалаев С.А. Гипергеометрические пучки в ближней зоне дифракции в рамках скалярной теории // Компьютерная оптика. 2009. Т. 33, № 4. С. 427–435.
59. Handbook of Mathematical Functions / Ed. by M. Abramowitz, I.A. Stegun. National Bureau of Standards. — Washington: DC, 1964.
60. Ковалев А.А., Котляр В.В. Гипергеометрические лазерные пучки общего вида и их известные частные случаи // Компьютерная оптика. 2007. Т. 31, № 4. С. 29–32.
61. Kotlyar V.V., Kovalev A.A. Family of hypergeometric laser beams // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. V. 25. P. 262–270.
62. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marichev O.I. Integrals and Series. Special functions. — M.: Science, 1983.
63. Snyder A., Love J. Optical waveguide theory. — M.: Radio and Communications, 1987.
64. Osterberg H., Smith L. Closed solutions of Rayleigh's diffraction integral for axial points // J. Opt. Soc. Am. 1961. V. 51. P. 1050–1054.
65. Richards B., Wolf E. Electromagnetic diffraction in optical systems II. Structure of the image field in an aplanatic system // Proc. R. Soc. London A. 1959. V. 253. P. 358–379.
66. Debay P. Das Verhalten von Lichtwellen in der Nähe eines Brennpunktes oder einer Brennnlinie // Ann. d. Phys. 1909. V. 335, No 14. P. 755–776.
67. Fu Y., Liu Yu., Zhou X., Xu Z., Fang F. Experimental investigation of superfocusing of plasmonic lens with chirped circular nanoslits // Opt. Exp. 2010. V. 18. P. 3438–3443.
68. Fu Y., Zhou W., Lim L.E.N. et al. Plasmonic microzone plate: Superfocusing at visible regime // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 91. P. 061124.
69. Mote R.G., Yu S.F., Ng B.K. et al. Near-field properties of zone plates in visible regime — New insights // Opt. Express. 2008. V. 16. P. 9554–9564.
70. Lopez L.C., Molina M.P., Gonzalez P.A. et al. Vectorial diffraction analysis of near-field focusing of perfect black Fresnel zone plates under various polarization states // J. Light Technol. 2011. V. 29. P. 822–829.
71. Fu Y., Zhou W. Hybrid Au-Ag subwavelength metallic structures with variant periods for superfocusing // J. Nanophotonics. 2009. V. 3. P. 033504.
72. Fu Y., Mote R.G., Wang Q., Zhou W. Experimental study of plasmonic structures with variant periods for sub-wavelength focusing: analyses of characterization errors // J. Mod. Opt. 2009. V. 56, No 14. P. 1550–1556.
73. Schonbrun E., Ye W.N., Crozier K.B. Scanning microscopy using a short-focallength Fresnel zone plate // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 14. P. 2228–2230.

74. *Novotny L., Hecht B.* Principles of nano-optics. — Cambridge University Press, 2006.
75. *Michalski K.A.* Complex image method analysis of a plane wave-excited subwavelength circular aperture in a planar screen // *Prog. Electromag. Res. B.* 2011. V. 27. P. 253–272.
76. *Wu J.H.* Modeling of near-field optical diffraction from a subwavelength aperture in a thin conducting film // *Opt. Lett.* 2011. V. 36, No 17. P. 3440–3442.
77. *Khonina S.N., Volotovskiy S.G.* Controlling of the components of vectors of electrical and magnetic fields in a focus of lens with a high aperture with aim of binary phase structures // *Computer optics.* 2010. V. 34, No 1. P. 58–68.
78. *Lee J.Y., Hong B.H., Kim W.Y., Min S.K.* Near-field focusing and magnification through self-assembled nanoscale spherical lenses // *Nature.* 2009. V. 460, 08173. P. 498–501.
79. *Goldstein D.J.* Resolution in light microscopy studied by computer simulations // *J. Microsc.* 1992. V. 166. P. 185–197.
80. *Bouhelier A., Renger J., Beversluis M.R., Novotny L.* Plasmon-coupled tip-enhanced near-field optical microscopy // *J. Microsc.* 2003. V. 210. P. 220–224.
81. *Karrai K., Lorenz X.* Enhanced reflectivity contrast in confocal solid immersion lens microscopy // *Appl. Phys. Lett.* 2000. V. 77, No 21. P. 3459–3461.
82. *Ippolito S.B., Goldberg B.B., Unlu M.S.* High spatial resolution subsurface microscopy // *Appl. Phys. Lett.* 2001. V. 78, No 26. P. 4071–4073.
83. *Koklu F.H., Ippolito S.B., Goldberg B.B., Unlu M.S.* Subsurface microscopy of integrated circuits with angular spectrum and polarization control // *Opt. Lett.* 2009. V. 34, No 8. P. 1261–1263.
84. *Karabacak D.M., Ekinici K.L., Gan C.H., Gbur G.J.* Diffraction of evanescent waves and nanomechanical displacement detection // *Opt. Lett.* 2007. V. 32, No 13. P. 1881–1883.
85. *Mason D.R., Jouravlev M.V., Kim K.S.* Enhanced resolution beyond the Abbe diffraction limit with wavelength-scale solid immersion lenses / *Opt. Lett.* 2010. V. 35, No 12. P. 2007–2009.
86. *Зверев. В.А.* Радиооптика. — М.: Сов. Радио, 1975.
87. *Kotlyar V.V., Shujupova Y.O., Nalimov A.G.* Subwave light localization in waveguide structures // *Computer optics.* 2010. V. 34, No 2. P. 169–186.
88. *Handmer C.J., Martijn de Sterke C., McPhedran R.C., Botten L.S.* Blazing evanescent grating orders: a spectral approach to beating the Rayleigh limit // *Opt. Lett.* 2010. V. 35, No 17. P. 2846–2848.
89. *Thongrattanasiri S., Kuhta N.A., Escarra M.D., Hoffman A.J.* Analytical technique for subwavelength far field imaging // *App. Phys. Lett.* 2010. V. 97. P. 101103.
90. *Pendry, J.B.* Negative refraction makes a perfect lens // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 85, No 18. P. 3966–3969.
91. *Blaikie R.G., Melville D.O.S.* Imaging through planar silver lenses in the optical near field // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2005. V. 7, No 2. P. S176–S183.
92. *Melville D.O.S., Blaikie R.J.* Super-resolution imaging through a planar silver layer // *Opt. Express.* 2005. V. 13, No 6. P. 2127–2134.
93. *Fang N., Lee H., Sun C., Zhang X.* Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens // *Science.* 2005. V. 308, No 5721. P. 534–537.
94. *Liu Z., Lee H., Xiong Y., Sun C., Zhang X.* Far-field optical hyperlens magnifying sub-diffraction-limited object // *Science.* 2007. V. 315, No 5819. P. 1686.

95. *Thongrattanasiri S., Podolskiy V.A.* Hypergratings: nanophotonics in planar anisotropic metamaterials // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 7. P. 890–892.
96. *Webb K.J., Yang M.* Subwavelength imaging with a multilayer silver film structure // Opt. Lett. 2006. V. 31, No 14. P. 2130–2132.
97. *Liu H., Shivanand, Webb K.J.* Subwavelength imaging opportunities with planar uniaxial anisotropic lenses // Opt. Lett. 2008. V. 33, No 21. P. 2568–2570.
98. *Liu H., Shivanand, Webb K.J.* Subwavelength imaging with nonmagnetic anisotropic bilayers // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 14. P. 2243–2245.
99. *Wang, X., Ren Z.F., Kempa K.* Unrestricted superlensing in a triangular two-dimensional photonic crystal // Opt. Express. 2004. V. 12, No 13. P. 2919–2924.
100. *Casse B.D.F., Lu W.T., Banyal R.K.* et al. Imaging with subwavelength resolution by a generalized superlens at infrared wavelengths // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 13. P. 1994–1996.
101. *Tsukerman I.* Superfocusing by nanoshells // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 7. P. 1057–1059.
102. *Ingrey P.C., Hopcraft K.I., French O., Jakeman E.* Perfect lens with not so perfect boundaries // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 7. P. 1015–1017.
103. *Ray E.A., Hampton M.J., Lopez R.* Simple demonstration of visible evanescent-wave enhancement with far-field detection // Opt. Lett. 2009. V. 34, No 13. P. 2048–2050.
104. *Cao Z., Jiang Y., Shen Q., Dou X., Chen Y.* Exact analytical method for planar optical waveguides with arbitrary index profile // J. Opt. Soc. Am. A 1999. V. 16, No 9. P. 2209–2212.
105. *Chung M., Kim C.* General eigenvalue equations for optical planar waveguides with arbitrarily graded-index profiles // J. Lightwave Techn. 2000. V. 18, No 6. P. 878–885.
106. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: пер. с англ./ Под ред. Г.П. Мотулевин. — М.: Наука, 1973
107. *Миллер У (мл.).* Симметрия и разделение переменных. — М.: Мир, 1981.
108. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — 4-е изд. — М.: Наука, 1978.
109. *Triandafilov Y.R., Kotlyar V.V.* Photonic-crystal Mikaelian lens // Computer Optics. 2007. V. 31, N 3. P. 27–31.
110. *He J., Liu D.* Wavelength switchable semiconductor laser using half-wave V-coupled cavities // Opt. Express 2008. V. 16, No 6. P. 3896–3911.
111. *Lin, X., Liu D., He J.* Design and analysis of 2x2 half-wave waveguide couplers // Appl. Opt. 2009. V. 48, No 25. P. F18–F23.
112. *Mikaelian A.L.* Application of stratified medium for waves focusing // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1951. V. 81. P. 569–571.
113. *Kotlyar V.V., Melekhin A.S.* Abel's transform in tasks of synthesis of gradient-index optical elements // Computer Optics. 2001. No 22. P. 29–36.
114. *Kotlyar V.V., Melekhin A.S.* Abel's transform for calculation of gradient-index optical elements with spherically-symmetric index distribution // Computer Optics. 2002. No 24. P. 48–52.
115. *Kotlyar V.V., Melekhin A.S.* Calculation of Maxwell's «Fish eye» and Iton-Lipman's generalized lenses // Computer Optics. 200., No 24. P. 53–57.
116. *Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V.* Optimal control. — М.: Nauka, 1979.
117. *Beliakov G., Chan D.* Analysis of inhomogeneous optical systems by the use of ray tracing. I. Planar systems // Appl. Opt. 1997. V. 36. P. 5303–5309.

118. *Mikaelian A.L.* Self-focusing media with variable index of refraction // *Prog. Opt.* 1980. V. 17. P. 279–345.
119. *Rho J., Ye Z., Xiong Y., Yin X.* et al. Spherical hyperlens for two-dimensional sub-diffractive imaging at visible frequencies // *Nature Commun.* 2010. V. 1. P. 443.
120. *Котляр В.В., Налимов А.Г.* Оптимизация параметров планарной бинарной линзы для видимого диапазона излучения // *Компьютерная оптика.* 2012. Т. 36, № 3. С. 327–332.
121. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Nalimov A.G., Stafeyev S.S.* High resolution through graded-index microoptics // *Advances in Optical Technologies.* 2012. V. 2012. P. 1–9.
122. *Chien H.T., Chen C.C.* Focusing of electromagnetic waves by periodic arrays of air holes with gradually varying radii // *Opt. Exp.* 2006. V. 14. P. 10759.
123. *Chen Z., Taflove A., Backman V.* Photonic nanojet enhancement of backscattering of light by nanoparticles: a potential novel visible-light ultramicroscopy technique // *Opt. Exp.* 2004. V. 12. P. 1214.
124. *Li X., Chen Z., Taflove A., Backman V.* Optical analysis of nanoparticles via enhanced backscattering facilitated by 3-D photonic nanojets // *Opt. Exp.* 2005. V. 13. P. 526.
125. *Ferrand P., Wenger J., Devilez A.* et al. Direct imaging of photonic nanojets // *Opt. Exp.* 2008. V. 16. P. 6930.
126. *Kim M.-S., Scharf T., Mühlig S.* et al. Engineering photonic nanojets // *Optics Express.* 2011. V. 19. P. 10206.
127. *McCloskey D., Wang J.J., Donegan J.F.* Low divergence photonic nanojets from Si_3N_4 microdisks // *Opt. Exp.* 2012. V. 20. P. 128.
128. *Kong S.-C., Taflove A., Backman V.* Quasi one-dimensional light beam generated by a graded-index microsphere // *Opt. Exp.* 2009. V. 17, P. 3722.
129. *Devilez A., Bonod N., Wenger J.* et al. Three-dimensional subwavelength confinement of light with dielectric microspheres // *Opt. Exp.* 2009. V. 17. P. 2089.
130. *Yi K.J., Wang H., Lu Y.F., Yang Z.Y.* Enhanced Raman scattering by self-assembled silica spherical microparticles // *J. Appl. Phys.* 2007. V. 101. P. 063528.
131. *Kong S.-C., Sahakian A., Taflove A., Backman V.* Photonic nanojet-enabled optical data storage // *Opt. Exp.* 2008. V. 16. P. 13713.
132. *McLeod E., Arnold C.B.* Subwavelength direct-write nanopatterning using optically trapped microspheres // *Nature Nano.* 2008. V. 3. P. 413.
133. *Wang T., Kuang C., Hao X., Liu X.* Subwavelength focusing by a microsphere array // *J. Opt.* 2011. V. 13. P. 035702.

ФОКУСИРОВКА ВИХРЕВЫХ ПУЧКОВ И ПРЕОДОЛЕНИЕ ДИФРАКЦИОННОГО ПРЕДЕЛА

Введение

Объекты с вихревой структурой существуют в самых разнообразных сферах материального мира: в макром мире (спиральная форма галактик и туманностей), в микромире (элементарные частицы, световые поля) и в нашей повседневной жизни (циклоны и антициклоны, торнадо и тайфуны). Их структуры и поведение до сих пор еще исчерпывающе не изучены и представляют собой обширное поле для исследований. Раздел оптики, занимающийся исследованием световых пучков с винтовыми фазовыми особенностями (т. е. вихревых лазерных пучков), назван «сингулярной оптикой».

В точке сингулярности интенсивность светового поля обращается в нуль, а значение фазы не определено. В окрестности такой точки происходят резкие фазовые изменения.

Сингулярные особенности в световых полях могут появляться при их прохождении через случайно-неоднородные и нелинейные среды. Также возможно возбуждение вихревых полей в лазерных резонаторах и многомодовых волоконных световодах. Наиболее простым и управляемым способом формирования вихревых полей является использование спиральных дифракционных оптических элементов (ДОЭ), также динамических жидко-кристаллических транспарантов (энергетическая эффективность последних пока еще довольно низка). Простейшими такими ДОЭ являются спиральная фазовая пластинка (СФП) и спиральный аксикон (СА). Вихревым лазерным пучкам посвящены многочисленные исследования и публикации как российских ученых-оптиков, так и их зарубежных коллег. В настоящее время активно изучаются свойства подобных пучков на основе мод Бесселя, Лагерра–Гаусса, гипергеометрических и др.

Область применения оптических вихрей постоянно расширяется. В частности, в задачах нанофотоники их предлагается использовать для манипулирования диэлектрическими микро- и нанообъектами. Также все больше уделяется внимание исследованию возможностей использования плазмонных эффектов в качестве нанопинцетов. Использование оптических вихрей в фотолитографии позволяет достичь разрешения $\lambda/10$ (λ — длина волны света). При этом возможно эффективное использование спиральных оптических структур даже с малым числом уровней квантования.

К числу других применений оптических вихрей относится, например, интерферометрия: с помощью СФП, помещенной в плоскость пространственного спектра $4f$ -оптической системы (f — фокусное расстояние сферической

линзы) предложен способ получения спиральных интерферограмм, используя которые легко различать выпуклые и вогнутые участки волнового фронта. С помощью спиральных фильтров выполняется контрастирование и рельефное изображение фазовых объектов нанометрового размера.

С помощью оптико-вихревых интерферометров, в основе которых лежит генерация световых полей, представляющих собой регулярные решетки или сетки оптических вихрей (т.е. измерения ведутся по положению узлов не с максимальной световой интенсивностью, а минимальной) можно определять углы поворота с погрешностью 0,03 угловых секунды и измерять углы наклона волнового фронта с погрешностью 0,2 угловых секунды.

СФП используется также в звездном коронографе, в котором свет от яркой звезды преобразуется в кольцо и диафрагмируется, а слабый свет от планет этой звезды проходит через диафрагму и регистрируется. Известно, что вихревые волны в когерентной системе имеют хорошо определенную фазу, которая, однако, плохо определена в частично-когерентной системе. В пределе, для полностью некогерентного случая ни винтовая фаза, ни нулевая интенсивность не наблюдаются. Это позволяет использовать оптические вихри для исключения из области наблюдения когерентного излучения с целью усиления некогерентного сигнала. Именно этот эффект используется в коронографе.

Пластинки со спиральным фазовым рельефом успешно применяются для оптического выполнения радиального преобразования Гильберта. Гильберто-оптика, а также близкая по преобразованиям в частотной области теневая оптика успешно используется для предобработки изображений и фазового анализа. Гильберт-спектроскопия позволяет достигать наноразрешения при спектральном анализе. Использование радиального преобразования Гильберта, в том числе дробного, на основе СПФ открывает новые возможности в решении упомянутых выше задач.

Фазовые дислокации, определяющие нулевую интенсивность, представляют собой перспективное средство в метрологии. Так как точность определения положения дислокации не ограничена классическим дифракционным пределом (градиент изменения фазы в этом случае неограниченно возрастает), а лишь отношением сигнал/шум, то геометрия объекта при условии наличия априорной информации об объекте может быть определена с очень высокой точностью. На этом подходе основывается метод оптико-вихревой метрологии, успешно примененный в оптико-вихревом интерферометре, позволяющем отслеживать смещение объектов с нанометрической точностью. Чувствительность сингулярных пучков к изменениям волнового фронта и различного рода дефектам могут использоваться для тестирования поверхностей и анализа оптических систем.

В нелинейных оптических средах оптические вихри могут использоваться для формирования волноводных структур и «лабиринтов», а также для исследования различных физических явлений.

Особый интерес представляет использование элементов сингулярной оптики в острой фокусировке, когда сочетание поляризационных и фазовых особенностей приводит к разнообразным эффектам, в том числе к преодолению дифракционного предела в дальней зоне дифракции.

4.1. Формирование вихревых лазерных пучков с помощью элементов сингулярной оптики

Простейшими элементами сингулярной оптики являются спиральная фазовая пластинка и спиральный аксикон (см. рис. 4.1). Теоретическое обсуждение возможности применения СФП было представлено в 1984 г. в Докладах Академии Наук [1]. А впервые изготовлена и экспериментально исследована — в 1992 г. [2]. До сих пор изготовление многоуровневых СФП представляет определенную технологическую сложность, но заменить их динамическими жидко-кристаллическими модуляторами часто невозможно из-за низкой эффективности и пространственного разрешения последних. Поэтому часто выполняются кодирование многоуровневой фазы в бинарное распределение (см. рис. 4.1, в).

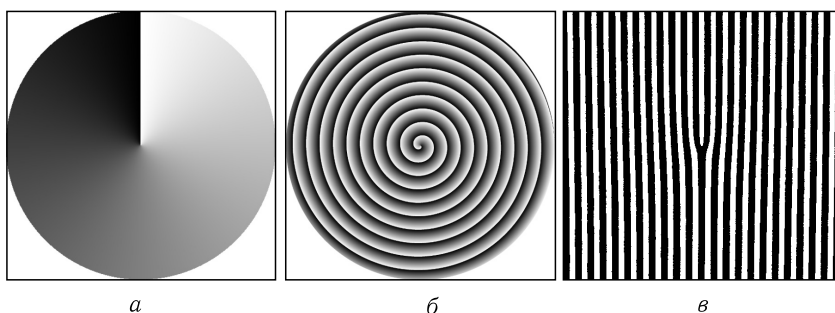


Рис. 4.1. Элементы сингулярной оптики: спиральная фазовая пластинка (а) и спиральный аксикон (б), бинарная решетка с «вилкой» (в)

Свойства вихревых пучков часто рассматриваются на основе лазерных мод Бесселя, Лагерра–Гаусса, гипергеометрических и др. Причем, если генерация высших мод и их суперпозиций в лазерном резонаторе требует особого мастерства и точной подстройки, то средства дифракционной оптики позволяют решать эту задачу наиболее простым и гибким способом [3].

В разделе теоретически и численно рассматривается формирование основных видов параксиальных вихревых лазерных пучков с помощью дифракционных элементов сингулярной оптики.

4.1.1. Теоретический анализ дифракции плоской волны и гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке. Комплексная функция пропускания спиральной фазовой пластинки имеет вид

$$f_n(r, \varphi) = f_n(\varphi) = \exp(in\varphi). \quad (4.1)$$

Преобразование Френеля, описывающее распространение света в свободном пространстве, от светового поля (4.1) имеет вид

$$F_n(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}k}{z} \exp\left(in\theta + \frac{ik}{2z}\rho^2\right) \int_0^\infty \exp\left(\frac{ik}{2z}r^2\right) J_n\left(\frac{k}{z}r\rho\right) r dr, \quad (4.2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число световой волны; z — координата вдоль оптической оси; (ρ, θ) — поперечные полярные координаты в поперечной плоскости на расстоянии z ; $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Интеграл, входящий в выражение (4.2), можно вычислить [4], и вместо (4.2) получим

$$F_n(\rho, \theta, z) = (-i)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{k\rho^2}{4z}} \exp\left(in\theta + \frac{i\pi n}{4} + \frac{ik}{4z}\rho^2\right) \times \\ \times \left\{ i J_{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) + J_{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) \right\}. \quad (4.3)$$

Из уравнения (4.3) видно, что при $\rho = 0$ функция $F_n(\rho, \theta, z)$ при любом z (кроме $z = 0$) равна нулю. Само поле $F_n(\rho, \theta, z)$ является результатом интерференции двух расходящихся световых пучков типа мод Бесселя. Но, в отличие от модовых пучков Бесселя, порядок самой функции Бесселя и порядок угловой гармоники (фазовой сингулярности) в уравнении (4.3) не согласованы:

$$J_{\frac{n+1}{2}}(x) \exp(in\theta).$$

По этой причине результирующая интерференция двух пучков типа Бесселя должна меняться с ростом z не только масштабно, но и структурно. Однако этого не происходит в связи с тем, что функция $F_n(\rho, \theta, z)$ в уравнении (4.3) однородная, так как зависит только от комбинации переменных ρ^2/z . То есть световое поле (4.3) является параксиальной модой свободного пространства, так как при своем распространении сохраняет свою структуру, а изменяется только масштабно, аналогично обычным гауссовым модам. Также поле (4.3) является решением параксиального волнового уравнения, удовлетворяющим граничному условию (4.1) при $z = 0$.

Из уравнения (4.3) следует выражение для распределения интенсивности:

$$\hat{I}_n(\rho, z) = |F_n(\rho, \theta, z)|^2 = \frac{\pi}{2} x \left\{ J_{\frac{n-1}{2}}^2(x) + J_{\frac{n+1}{2}}^2(x) \right\}, \quad (4.4)$$

где $x = k\rho^2/(4z)$.

Найдем уравнение для определения локальных максимумов интенсивности (4.4). Производная функции (4.4) по переменной ρ имеет вид

$$\frac{d\hat{I}_n(\rho, z)}{d\rho} = \frac{\pi k \rho n}{4z} \left\{ J_{\frac{n-1}{2}}^2\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) - J_{\frac{n+1}{2}}^2\left(\frac{k\rho^2}{4z}\right) \right\}. \quad (4.5)$$

Приравнявая правую часть уравнения (4.5) к нулю, получим уравнение для поиска локальных максимумов:

$$\left| J_{\frac{n-1}{2}}(x) \right| = \left| J_{\frac{n+1}{2}}(x) \right|. \quad (4.6)$$

Информативным является положение только первого максимума, который определяет радиус световой «воронки», где интенсивность спадает от максимума до нуля при $\rho = 0$. Из уравнения (4.6) точно аналитически координату

первого максимума определить нельзя, но приблизительно оценить можно. Например, при $z \rightarrow 0$ аргументы функций в уравнении (4.6) при постоянном ρ будут стремиться к бесконечности. Поэтому можно воспользоваться асимптотикой для функций Бесселя [5]:

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.7)$$

при $x \rightarrow \infty$.

Тогда уравнение (4.6) для первого максимума можно переписать в виде:

$$\operatorname{tg}\left[x - (n-1)\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right] = 1, \quad (4.8)$$

из которого следует оценка для радиуса световой «воронки» ($n > 0$):

$$\rho_n \approx \sqrt{\frac{(n+1)\lambda z}{2}}. \quad (4.9)$$

Из уравнения (4.9) следует, что размер «воронки» может быть меньше длины волны при

$$z < \frac{2\lambda}{n+1}, \quad (4.10)$$

т. е. при расстоянии от плоскости $z = 0$, меньшем длины волны.

Для конкретных порядков сингулярности $n = 1, 2$ можно получить оценки радиуса «воронки» при любом z . При $n = 1$ уравнение (4.6) приобретает вид

$$J_0(x) = J_1(x), \quad (4.11)$$

из которого следует оценка для радиуса первого светлого кольца:

$$\rho_1 \approx 0,94\sqrt{\lambda z}. \quad (4.12)$$

Для $n = 2$ вместо уравнения (4.6) получим

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1-x}{x}, \quad (4.13)$$

из которого следует оценка для первого светлого кольца:

$$\rho_2 \approx 1,13\sqrt{\lambda z}. \quad (4.14)$$

Из формулы (4.9), верной только при $z \rightarrow 0$, при $n = 1$ и $n = 2$ получим:

$$\rho_1 \approx \sqrt{\lambda z}, \quad (4.15)$$

$$\rho_2 \approx 1,22\sqrt{\lambda z}. \quad (4.16)$$

На рисунке 4.2 показано распределение интенсивности плоской волны с сингулярностью первого (а) и второго (б) порядков на расстоянии 10 мм от плоскости $z = 0$ и для длины волны 0,633 мкм.

На основе численного построения графика по формуле (4.4) было получено, что радиус первого светлого кольца или радиус «воронки» равен $\rho_1 \approx 0,076$ мм, при этом по формуле (4.12) получается 0,074 мм, а по формуле (4.15) — 0,0795 мм. Для $n = 2$ графически было получено значение

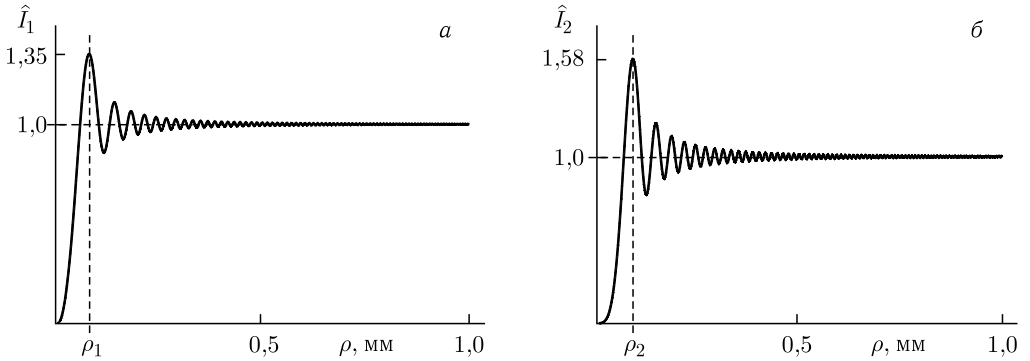


Рис. 4.2. Распределение интенсивности плоской волны с сингулярностью первого ($n = 1$) (а) и второго ($n = 2$) (б) порядков на расстоянии 10 мм от плоскости $z = 0$

$\rho_2 \approx 0,091$ мм, по формуле (4.14) — 0,0899 мм, и по формуле (4.16) — 0,097 мм.

Получим выражения для интенсивности (4.4) при $\rho \rightarrow \infty$ и $\rho \rightarrow 0$. Для этого воспользуемся асимптотикой функций Бесселя (4.7) при $\rho \rightarrow \infty$, и при $\rho \rightarrow 0$, где $\Gamma(x)$ — гамма-функция:

$$J_\nu(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \Gamma^{-1}(\nu + 1). \quad (4.17)$$

Из уравнения (4.7) следует, что интенсивность плоской волны с сингулярностью при $\rho \rightarrow \infty$ стремится к единице:

$$\begin{aligned} \hat{I}_n(\rho, z) \approx \frac{\pi}{2} x \left\{ \frac{2}{\pi x} \left[\cos^2 \left(x - \frac{(n-1)\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos^2 \left(x - \frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\} = 1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

На рисунке 4.2 это хорошо видно.

Из уравнения (4.17) следует, что при $\rho \rightarrow 0$ интенсивность (4.4) можно аппроксимировать выражением

$$\hat{I}_n(\rho, z) \approx \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \left(\frac{k\rho^2}{8z}\right)^n. \quad (4.19)$$

Из уравнения (4.19) видно, что с ростом порядка сингулярности «стенки воронки» становятся все более вертикальными, т.е. стремятся к виду «ступеньки» при том же z (рис. 4.3).

Заметим, что уравнение (4.4) не описывает поведение интенсивности в дальней зоне дифракции, так как при $z \rightarrow \infty$ из него (4.4) получается аппроксимация (4.19). То есть при $z \rightarrow \infty$ радиус «воронки» (область с пониженной интенсивностью) стремится к бесконечности, а интенсивность при любом фиксированном ρ стремится к нулю.

Для того чтобы оценить поведение плоской волны с сингулярностью в дальней зоне, нужно ограничить плоскую волну при $z = 0$ некоторым

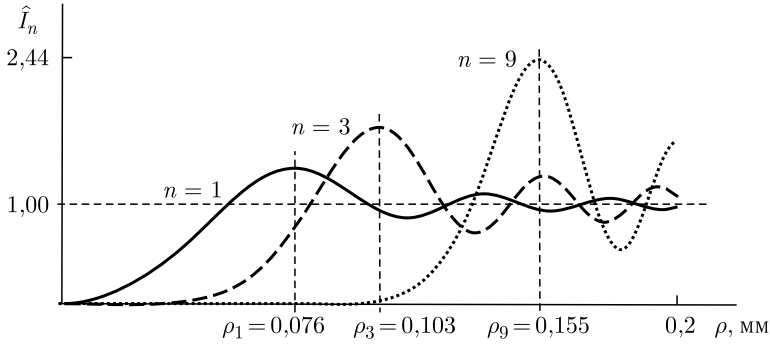


Рис. 4.3. Распределение интенсивности плоской волны с сингулярностью $n = 1, 3, 9$ порядков на расстоянии 10 мм

кругом радиусом R . Тогда вместо уравнения (4.1) следует рассматривать световое поле с амплитудой

$$F(r, \varphi) = \text{circl}\left(\frac{r}{R}\right) \exp(in\varphi) = \begin{cases} \exp(in\varphi), & r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (4.20)$$

Аналитическое исследование дифракции Фраунгофера светового поля (4.20) приводится далее, однако аналитически исследовать дифракцию Френеля не удастся. Но если вместо функции $\text{circl}(x)$ использовать гауссову функцию, т. е. осуществить «мягкое» ограничение плоской волны,

$$F(r, \varphi) = \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(in\varphi), \quad (4.21)$$

то можно получить некоторые аналитические выражения.

Рассмотрим дифракцию Френеля гауссова пучка на СФП. На расстоянии z комплексная амплитуда напряженности электрического поля в параксиальном приближении будет иметь следующий вид [6]:

$$\begin{aligned} E_n(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)k}{2\pi z} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} E_n^0(r, \varphi) \exp\left\{\frac{ik}{2z} [r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \theta)]\right\} r dr d\varphi = \\ &= \frac{(-i)^{n+1} \sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \left(\frac{\rho}{w}\right) \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right]^{-\frac{3}{4}} \times \\ &\times \exp\left[i\frac{3}{2} \arctg\left(\frac{z_0}{z}\right) + i\frac{k\rho^2}{2R(z)} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} + in\theta\right] \times \\ &\times \left\{ I_{\frac{n-1}{2}} \left[\rho^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)} \right) \right] - I_{\frac{n+1}{2}} \left[\rho^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)} \right) \right] \right\}, \quad (4.22) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 w^2(z) &= 2w^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right], \\
 R(z) &= 2z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right] \cdot \left[2 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]^{-1}, \\
 R_0(z) &= 2z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right], \\
 z_0 &= \frac{kw^2}{2}, \\
 E_n^0(r, \varphi) &= \exp \left[- \left(\frac{r}{w} \right)^2 + in\varphi \right],
 \end{aligned}$$

$I_\nu(x)$ — функция Бесселя второго рода ν -го порядка.

Путем предельного перехода от дифракции в зоне Френеля к дальней зоне можно получить выражение для дифракции Фраунгофера гауссова пучка на СФП [7].

При $z \gg z_0$

$$\begin{aligned}
 w^2(z) &\approx 2w^2 \frac{z^2}{z_0^2}, \\
 R(z) &\approx z, \quad R_0(z) \approx \frac{2z^3}{z_0^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_n(\rho, \theta, z \rightarrow \infty) &= \frac{(-i)^{n+1} \sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \left(\frac{\rho}{w} \right) \times \\
 &\times \exp(in\theta) \exp \left[- \frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \left\{ I_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) - I_{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \right\}. \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Из формулы (4.23) следует выражение для интенсивности гауссова пучка с фазовой сингулярностью в дальней зоне дифракции:

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_n(\rho, z \rightarrow \infty) &\approx \\
 &\approx \frac{\pi}{4} \left(\frac{z_0}{z} \right)^4 \left(\frac{\rho}{w} \right)^2 \exp \left[- \frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \left\{ I_{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) - I_{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right) \right\}^2 = \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 x \exp(-2x) \left\{ I_{\frac{n-1}{2}}(x) - I_{\frac{n+1}{2}}(x) \right\}^2, \quad (4.24)
 \end{aligned}$$

где $x = \left(\frac{\rho z_0}{\sqrt{2} z w} \right)^2$.

Картина дифракции Фраунгофера формируется в фокальной плоскости сферической линзы.

Рассмотрим исходную функцию в виде

$$f'_n(r, \theta) = \exp\left(-\frac{r^2}{w^2} + in\theta\right), \quad (4.25)$$

где w — радиус перетяжки гауссова пучка. Тогда комплексная амплитуда дифракции Фраунгофера гауссова пучка в перетяжке на СФП будет описываться выражением

$$F'_n(\rho, \varphi) = \frac{(-i)^{n+1}k}{f} \exp(in\varphi) \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{w^2}\right) J_n\left(\frac{k}{f}r\rho\right) r dr. \quad (4.26)$$

Известен справочный интеграл [4]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp(-px^2) J_n(cx) x dx = \\ = \frac{c\sqrt{\pi}}{8p^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{8p}\right) \left[I_{(n-1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) - I_{(n+1)/2}\left(\frac{c^2}{8p}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.27)$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя или функция Бесселя второго рода. С учетом уравнения (4.27) выражение (4.26) перепишем в виде

$$F'_n(\rho, \varphi) = (-i)^{n+1} \exp(in\varphi) \left(\frac{kw^2}{4f}\right) \sqrt{2\pi x} \exp(-x) [I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x)], \quad (4.28)$$

где $x = \frac{1}{2} \left(\frac{kw\rho}{2f}\right)^2$.

Выражение для интенсивности при дифракции Фраунгофера гауссова пучка на СФП имеет вид

$$\overline{I}'_n(\rho) = |F'_n(\rho, \varphi)|^2 = 2\pi \left(\frac{kw^2}{4f}\right)^2 x \exp(-2x) [I_{(n-1)/2}(x) - I_{(n+1)/2}(x)]^2. \quad (4.29)$$

Из уравнения (4.29) видно, что при $x = 0$ в центре Фурье-плоскости интенсивность будет равна нулю ($n \neq 0$): $\overline{I}'_n(0) = 0$. Сомножители $x \exp(-2x)$ в уравнении (4.29) показывают, что в дальней зоне формируется кольцевое распределение интенсивности. Радиус кольца можно найти из уравнения

$$(n - 4x)I_{(n-1)/2}(x) + (n + 4x)I_{(n+1)/2}(x) = 0. \quad (4.30)$$

Найдем вид функции интенсивности на внешней стороне кольца при $\rho \rightarrow \infty$ (или $x \rightarrow \infty$). Для этого воспользуемся асимптотикой функции Бесселя [5]:

$$I_\nu(x) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{4\nu^2 - 1}{8x}\right), \quad x \gg 1. \quad (4.31)$$

Тогда вместо выражения (4.29) при $x \rightarrow \infty$ получим

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx \left(\frac{nf}{k\rho^2} \right)^2. \quad (4.32)$$

Заметим, что выражение (4.32) можно получить из выражения (4.29), устремляя к бесконечности радиус гауссова пучка $w \rightarrow \infty$ при фиксированном ρ .

Найдем выражение для интенсивности на внутренней стороне кольца. При стремлении ρ к нулю (при фиксированном w) аргумент функции Бесселя x также стремится к нулю, и можно использовать первые члены разложения в ряд цилиндрической функции:

$$I_v(x) \approx \left(\frac{x}{2} \right)^v \Gamma^{-1}(v+1), \quad x \ll 1, \quad (4.33)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Тогда вместо выражения (4.29) при $\rho \rightarrow 0$ получим

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx \pi \Gamma^{-2} \left(\frac{n+1}{2} \right) \left(\frac{kw^2}{f} \right) \left(\frac{kw\rho}{4f} \right)^{2n}. \quad (4.34)$$

Из уравнения (4.34) видно, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости растет как степень $2n$ от радиальной координаты:

$$\bar{I}'_n(\rho) \approx (w\rho)^{2n}, \quad \rho \ll 1. \quad (4.35)$$

Если одновременно со стремлением ρ к нулю устремить к бесконечности радиус гауссова пучка w так, чтобы их произведение $w\rho$ оставалось постоянным, то из уравнения (4.34) следует, что интенсивность вблизи центра Фурье-плоскости будет стремиться к бесконечности пропорционально квадрату радиуса перетяжки:

$$\bar{I}'_n(\rho \rightarrow 0, w \rightarrow \infty) \approx w^2, \quad \rho w = \text{const}, \quad (4.36)$$

но в самой центральной точке при $\rho = 0$ интенсивность будет нулевой, $\bar{I}'_n(\rho = 0) = 0$ при любом w .

4.1.2. Теоретический анализ дифракции плоской волны и гауссова пучка на спиральном аксиконе. Дифракция Фраунгофера плоской волны на спиральном аксиконе конечного радиуса с функцией пропускания $\text{circl}(r/R) \exp(i\alpha r)$ описывается следующим выражением:

$$F(\rho) = \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n \left(\frac{k}{f} \bar{\rho} r \right) r dr. \quad (4.37)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^R \exp(i\alpha r) J_n(\rho r) r dr, \quad \rho = \frac{k}{f} \bar{\rho}. \quad (4.38)$$

Используя интегральное представление функции Бесселя,

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \exp(ix \cos \varphi) d\varphi, \quad (4.39)$$

получим [8]

$$I = \frac{(-i)^{n+2}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\exp(i\alpha R) \int_0^{2\pi} \exp(in\varphi) \frac{\exp(iR\rho \cos \varphi)}{\alpha + \rho \cos \varphi} d\varphi - \int_0^{2\pi} \frac{\exp(in\varphi) d\varphi}{\alpha + \rho \cos \varphi} \right]. \quad (4.40)$$

Используя соотношение

$$\exp(ix \cos \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \exp(-im\varphi) J_m(x), \quad (4.41)$$

вместо интеграла (4.40) можно получить выражение для дифракции в виде ряда:

$$I = \frac{(-i)^n}{2\pi} \frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} - \frac{\exp(i\alpha R)}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m \left(iR I_1^m + \frac{\partial I_1^m}{\partial \alpha} \right) J_{m+n}(R\rho), \quad (4.42)$$

где

$$I_1^n = \int_0^{2\pi} \frac{\exp(in\varphi) d\varphi}{\alpha + \rho \cos \varphi}. \quad (4.43)$$

Интегралы (4.43) и их производные вычисляются с применением теории вычетов. Выражения для интегралов I_1^n и $\partial I_1^n / \partial \alpha$ в случае $|\alpha| > \rho$ и $|\alpha| < \rho$ приведены ниже.

Случай 1, $0 < \rho < |\alpha|$.

$$I_1^n = \frac{2\pi \operatorname{sgn} \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} \left(\frac{-\alpha + \operatorname{sgn} \alpha \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\rho} \right)^{|n|}. \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = -2\pi \operatorname{sgn} \alpha \left(\frac{-\alpha + \operatorname{sgn} \alpha \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{\rho} \right)^{|n|} \frac{\alpha + \operatorname{sgn} \alpha |n| \sqrt{\alpha^2 - \rho^2}}{(\alpha^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.45)$$

Случай 2, $\rho > |\alpha|$:

$$\begin{aligned} I_1^n &= \frac{\pi i}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}} \left[\left(\frac{-\alpha - i\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\rho} \right)^{|n|} - \left(\frac{-\alpha + i\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}{\rho} \right)^{|n|} \right] = \\ &= \pi i \frac{\chi^{*|n|} - \chi^{|n|}}{\sqrt{\rho^2 - \alpha^2}}, \end{aligned} \quad (4.46)$$

где $\chi = \left[-\alpha + i(\rho^2 - \alpha^2)^{1/2} \right] / \rho$.

$$\frac{\partial I_1^n}{\partial \alpha} = \pi i \left[\alpha (\rho^2 - \alpha^2)^{-\frac{3}{2}} (\chi^{*|n|} - \chi^{|n|}) - i (\rho^2 - \alpha^2)^{-1} |n| (\chi^{*|n|} + \chi^{|n|}) \right]. \quad (4.47)$$

Рассмотрим скалярную параксиальную дифракцию коллимированного гауссова пучка с комплексной амплитудой

$$E_0(r) = \exp \left(-\frac{r^2}{w^2} \right) \quad (4.48)$$

на СА, который в приближении тонкого транспаранта описывается функцией пропускания вида

$$\tau_n(r, \varphi) = \exp(i\alpha r + in\varphi), \quad (4.49)$$

где w — радиус перетяжки гауссова пучка, (r, φ) — полярные координаты в плоскости СА при $z = 0$, z — оптическая ось, α — параметр аксикона, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — номер СФП.

Тогда параксиальная дифракция волны (4.48) на СА (4.49) описывается преобразованием Френеля:

$$F_n(\rho, \theta, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \exp \left(ikz + \frac{ik\rho^2}{2z} \right) \times \\ \times \int_0^R \int_0^{2\pi} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2} + i\alpha r + in\varphi + \frac{ikr^2}{2z} - \frac{ik}{z} \rho r \cos(\varphi - \theta) \right] r dr d\varphi, \quad (4.50)$$

где (ρ, θ) — полярные координаты в плоскости z (z — оптическая ось), $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Используя справочный интеграл [4]

$$\int_0^\infty x^{\lambda+1} \exp(-px^2) J_\nu(cx) dx = \\ = \frac{c^v p^{-(v+\lambda+2)/2}}{2^{v+1} v!} \Gamma \left(\frac{v+\lambda+2}{2} \right) {}_1F_1 \left[\frac{v+\lambda+2}{2}, v+1, -\left(\frac{c}{2\sqrt{p}} \right)^2 \right], \quad (4.51)$$

вместо выражения (4.50) получим

$$F_n(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp \left[in\theta + ikz + \frac{ik\rho^2}{2z} \right] \times \\ \times \left(\frac{k\rho}{2z} \right)^n \frac{\gamma^{-(n+2)/2}}{2^{n+1} n!} \sum_{m=0}^\infty \frac{(i\alpha)^m \gamma^{-m/2}}{m!} \Gamma \left(\frac{m+n+2}{2} \right) \times \\ \times {}_1F_1 \left[\frac{m+n+2}{2}, n+1, -\left(\frac{k\rho}{2z\sqrt{\gamma}} \right)^2 \right], \quad (4.52)$$

где $\gamma = 1/w^2 - ik/(2z)$, ${}_1F_1(a, b, x)$ — вырожденная, или конфлюэнтная гипергеометрическая функция:

$${}_1F_1(a, b, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m m!}, \quad (4.53)$$

$(a)_m = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$, а $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Из выражения (4.52) следует, что картина дифракции представляет собой набор концентрических колец. При $\rho = 0$ в центре картины дифракции при любом $n \neq 0$ будет нулевая интенсивность. Так как комплексная амплитуда (4.52) зависит от комбинации переменных $k\rho/(2z\sqrt{\gamma})$, то радиусы ρ_l локальных максимумов и минимумов картины дифракции должны удовлетворять выражению

$$\rho_l = \frac{wz a_l}{z_0} \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right)^{1/4}, \quad (4.54)$$

где a_l — постоянные, зависящие только от номера кольца $l = 1, 2, \dots$ картины дифракции и параметра α , $z_0 = kw^2/2$ — длина Рэлея.

При $\alpha = 0$ (т. е. аксикон отсутствует), из (4.52) следует соотношение для комплексной амплитуды при дифракции Френеля гауссова пучка на СФП:

$$F_n(\rho, \theta, z, \alpha = 0) = \frac{(-i)^{n+1} k}{z} \exp \left[i(n\theta + kz) + \frac{ik\rho^2}{2z} \right] \left(\frac{k\rho}{2z} \right)^n \times \\ \times \frac{\gamma^{-(n+2)/2}}{2^{n+1} n!} \Gamma \left(\frac{n+2}{2} \right) {}_1F_1 \left[\frac{n+2}{2}, n+1, - \left(\frac{k\rho}{2z\sqrt{\gamma}} \right)^2 \right]. \quad (4.55)$$

Учитывая связь между гипергеометрической функцией и функцией Бесселя,

$$J_{(n-1)/2}(x) = \exp(-ix) \left(\frac{x}{2} \right)^{(n-1)/2} \Gamma^{-1} \left(\frac{n-1}{2} \right) {}_1F_1 \left(\frac{n}{2}, n; 2ix \right), \quad (4.56)$$

и рекуррентное соотношение для гипергеометрических функций,

$${}_1F_1 \left(\frac{n}{2}, n+1; 2ix \right) = \left(i \frac{d}{dx} + 2 \right) {}_1F_1 \left(\frac{n}{2}, n; 2ix \right), \quad (4.57)$$

мы можем вместо выражения (4.55) получить хорошо известное соотношение для напряженности поля при дифракции Френеля гауссова пучка на СФП:

$$E_n(\rho, \theta, z, \alpha = 0) = \frac{(-i)^{n+1} \sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \left(\frac{\rho}{w} \right) \left[1 + \left(\frac{z_0}{z} \right)^2 \right]^{-3/4} \times \\ \times \exp \left[i \frac{3}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z_0}{z} \right) - i \frac{k\rho^2}{2R_0(z)} + i \frac{k\rho^2}{2z} - \frac{\rho^2}{w^2(z)} + in\theta + ikz \right] \times \\ \times \left\{ I_{\frac{n-1}{2}} \left[\rho^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)} \right) \right] - I_{\frac{n+1}{2}} \left[\rho^2 \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R_0(z)} \right) \right] \right\}, \quad (4.58)$$

где $w^2(z) = 2w^2 [1 + (z/z_0)^2]$, $R_0(z) = 2z [1 + (z/z_0)^2]$, $I_\nu(x)$ — функция Бесселя второго рода и ν -го порядка.

При $z \rightarrow \infty$ ($z \gg z_0$) из выражения (4.52) следует соотношение для комплексной амплитуды при дифракции Фраунгофера гауссова пучка на СА ($\gamma = 1/w^2$):

$$F_n(\rho, \theta, z \rightarrow \infty) = \frac{(-i)^{n+1} z_0}{2^n n! z} \exp\left(in\theta + ikz + \frac{ik\rho^2}{2z}\right) \left(\frac{z_0\rho}{zw}\right)^n \times \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha w)^m}{m!} \Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right) {}_1F_1\left[\frac{m+n+2}{2}, n+1, -\left(\frac{z_0\rho}{zw}\right)^2\right]. \quad (4.59)$$

При $\alpha = 0$ (т. е. аксикон отсутствует) и $z \rightarrow \infty$ ($z \gg z_0$), из формулы (4.52) следует выражение для комплексной амплитуды при дифракции Фраунгофера гауссова пучка на СФП:

$$F_n(\rho, \theta, z \rightarrow \infty, \alpha = 0) = \\ = \frac{(-i)^{n+1} z_0}{2^n n! z} \exp\left(in\theta + ikz + \frac{ik\rho^2}{2z}\right) \left(\frac{z_0\rho}{zw}\right)^n \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \times \\ \times {}_1F_1\left[\frac{n+2}{2}, n+1, -\left(\frac{z_0\rho}{zw}\right)^2\right]. \quad (4.60)$$

Интересно сравнить выражение (4.60) с комплексной амплитудой при дифракции Фраунгофера плоской ограниченной волны радиусом R на СФП, когда фокусное расстояние сферической линзы равно f :

$$E_n(\rho, \theta) = \frac{(-i)^{n+1} \exp(in\theta + ikz)}{(n+2)n!} \left(\frac{kR^2}{f}\right) \left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^n \times \\ \times {}_1F_2\left[\frac{n+2}{2}, \frac{n+4}{2}, n+1, -\left(\frac{kR\rho}{2f}\right)^2\right], \quad (4.61)$$

где ${}_1F_2(a, b, c, x)$ — гипергеометрическая функция:

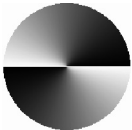

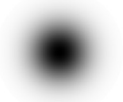

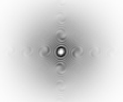

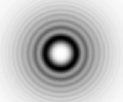




$${}_1F_2(a, b, c, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m x^m}{(b)_m (c)_m m!}. \quad (4.62)$$

4.1.3. Численное моделирование дифракции различных пучков на элементах сингулярной оптики. В таблицах 4.1 и 4.2 показаны результаты параксиального моделирования дифракции различных пучков на элементах сингулярной оптики с помощью преобразований Френеля и Фурье. Были выбраны следующие параметры освещающих пучков: длина волны падающего света $\lambda = 0,63 \cdot 10^{-6}$ м, радиус круглой апертуры $R = 1$ мм, радиус гауссова пучка $\sigma = 0,7234$ мм.

Характер дифракции для ограниченного плоского пучка и гауссова пучка различается в зоне Френеля, однако в дальней зоне распределение интенсивности света в пучках становится практически одинаковым.

Далее предполагается использование элементов сингулярной оптики для аподизации функции пропускания линзы. В этом случае желательно знать распределение пучка в ближней зоне дифракции. В скалярном случае для

Таблица 4.1. Дифракция различных пучков на СФП второго порядка в зоне Френеля и Фраунгофера



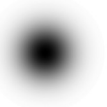
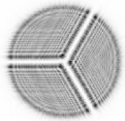


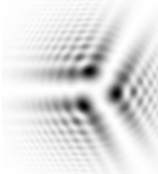

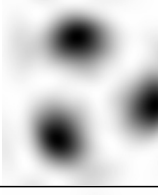


Расстояние от элемента	Ограниченный плоский пучок	Гауссов пучок
 $Z = 0$		
$z = 10 \text{ мм}$		
$z = 100 \text{ мм}$		
$z = 1000 \text{ мм}$		
В фокусе линзы		

этого можно использовать дифракционный интеграл Релея–Зоммерфельда первого типа:

$$E(u, v, z) = -\frac{z}{2\pi} \iint_{\Sigma_0} E_0(x, y) \frac{e^{ik\ell}}{\ell^2} \left(ik - \frac{1}{\ell} \right) dx dy. \quad (4.63)$$

где $E_0(x, y)$ — напряженность поля в падающей волне, $\ell = \sqrt{(u-x)^2 + (v-y)^2 + z^2}$, Σ_0 — область, в которой задана $E_0(x, y)$, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны.

Таблица 4.2. Дифракция различных пучков на элементе $T(\varphi) = \arg \left[\sum_p \exp(in_p \varphi) \right]$, $n_1 = -1, n_2 = 2$ в зоне Френеля и Фраунгофера

Расстояние от элемента	Ограниченный плоский пучок	Гауссов пучок
 $Z = 0$		
$z = 10$ мм		
$z = 100$ мм		
$z = 1000$ мм		
В фокусе линзы		

Также можно использовать интегральный оператор распространения, основанный на разложении по плоским волнам:

$$E(u, v, z) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_{\Sigma_0} E_0(x, y) \times \left\{ \iint_{\Sigma_s} \exp \left(ikz \sqrt{1 - \xi^2 - \eta^2} \right) \exp \left(ik [\xi(u - x) + \eta(v - y)] \right) d\xi d\eta \right\} dx dy, \quad (4.64)$$

где Σ_S — область учитываемых пространственных частот, $\sigma_1 \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq \sigma_2$. При $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ рассматриваются только распространяющиеся волны, а при $\sigma_2 > 1$ учитываются также затухающие волны. Вычисление выражения (4.64) может быть реализовано через алгоритм быстрого преобразования Фурье.

Кроме того, если входное поле представимо в радиально-вихревом виде

$$E_0(r, \varphi) = E_0(r) \exp(im\varphi), \quad (4.65)$$

то выражение (4.64) можно упростить [9, 10]:

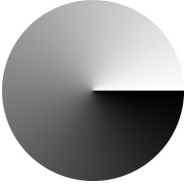
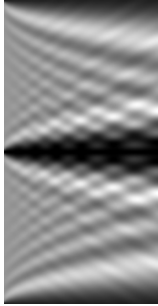
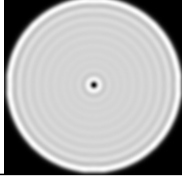

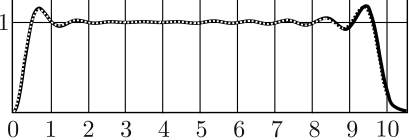
$$E(\rho, \theta, z) = -i^{n+1} k \exp(in\theta) \int_0^{\sigma_0} \exp(ikz\sqrt{1-\sigma^2}) \times \\ \times \left(\int_0^{r_0} E_0(r) J_n(k\sigma r) r dr \right) J_n(k\sigma \rho) \sigma d\sigma, \quad (4.66)$$

где r_0 — радиус ограничивающей апертуры, σ_0 — радиус учитываемых пространственных частот, n — порядок вихревой фазовой сингулярности.

В таблицах 4.3 и 4.4 приведены результаты моделирования дифракции в ближней зоне ограниченной плоской волны на СФП и вихревом аксиконе с помощью выражения (4.66).

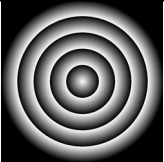

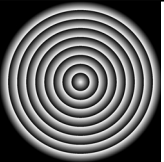

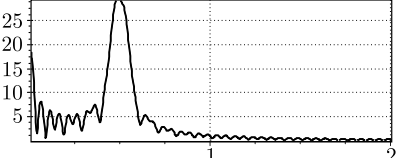
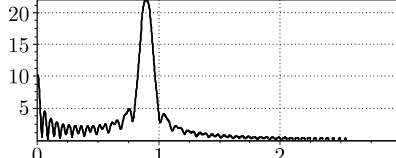
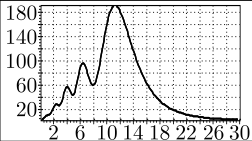
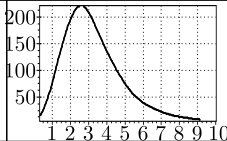
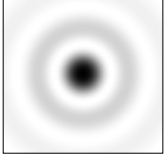
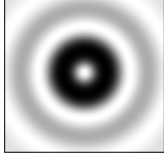
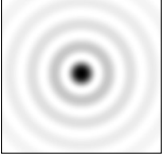
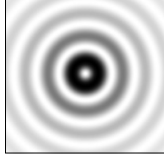
Параметры расчета: $r_0 = 10\lambda$, шаг дискретизации $\Delta r = 0,01\lambda$, $\sigma_0 = 3$, шаг дискретизации $\Delta \sigma = 0,01$.

Таблица 4.3. Дифракция ограниченной плоской волны на СФП первого порядка в ближней зоне

Фаза в области апертуры радиусом 10 ($z = 0$)	Распределение интенсивности в области $z [0, 10]$ $x [10, 10]$	Распределение в плоскости $z = 0, 3$, $r [0, 10]$	
		Интенсивность	Фаза
			
			

По результатам моделирования видно, что действие элементов сингулярной оптики сказывается даже на расстоянии менее длины волны, т.е. буквально сразу за плоскостью оптического элемента.

Таблица 4.4. Дифракция ограниченной плоской волны на осесимметричном и вихревом аксиконах в ближней зоне

	$\alpha_0 = 0,5$		$\alpha_0 = 0,9$	
	$n = 0$	$n = 1$	$n = 0$	$n = 1$
Вид фазовой функции				
Спектральное распределение				
Осевое распределение				
Интенсивность в максим., рад. = 2λ	 $z = 11\lambda, \rho = 2\lambda$ FWHM = $0,66\lambda$	 $z = 11\lambda,$	 $z = 2,5\lambda,$ FWHM = $0,39\lambda$	 $z = 2,5\lambda,$

Спиральный аксикон описывается выражением

$$E_0(r, \varphi) = \exp(-ik\alpha_0 r + im\varphi), \quad (4.67)$$

где α_0 — параметр конической волны, определяющий угол, под которым лучи пересекают оптическую ось.

По результатам моделирования видно, что при увеличении параметра конической волны α_0 для осесимметричного случая ($n=0$) происходит уменьшение размера центрального светового пятна. При $\alpha_0 = 0,9$ скалярная теория предсказывает преодоление дифракционного предела по полуспаду интенсивности FWHM = $0,39\lambda$ (предел для линзы $0,51\lambda$). При наличии вихревой составляющей на оптической оси будет нулевое значение интенсивности и формируется компактное световое кольцо.

4.1.4. Выводы. В данном разделе методами скалярной теории дифракции рассмотрено формирование вихревых пучков с помощью дифракционных элементов сингулярной оптики.

В рамках параксиальной скалярной теории рассмотрена дифракция различных пучков на спиральной фазовой пластинке. Комплексная амплитуда «чистого» оптического вихря, формируемого при дифракции неограниченной

плоской волны, пропорциональна разности двух функций Бесселя первого рода $[(n + 1)/2]$ - и $[(n - 1)/2]$ -го порядков. При дифракции гауссова пучка комплексная амплитуда в дальней зоне пропорциональна разности двух функций Бесселя второго рода (модифицированных) тех же порядков.

Также получены аналитические выражения для дифракции ограниченной плоской волны и гауссова пучка на спиральном аксиконе. В первом случае комплексная амплитуда пропорциональна ряду из функций Бесселя, во втором ряду из функций Куммера.

Численное моделирование с использованием параксиальных операторов распространения показало, что характер дифракции на спиральных элементах для ограниченного плоского пучка и гауссова пучка различается в зоне Френеля, однако в дальней зоне распределение пучков становится практически одинаковым.

Для получения картины дифракции в ближней зоне был использован скалярный интегральный оператор распространения, основанный на разложении по плоским волнам. Моделирование показало, что действие элементов сингулярной оптики сказывается даже на расстоянии менее длины волны, т.е. буквально сразу за плоскостью оптического элемента. Таким образом, их применение для аподизации пропускающей функции фокусирующей линзы вполне оправдано.

Однако в ближней зоне дифракции нельзя пренебрегать векторным характером электромагнитного поля, поэтому далее будем учитывать также влияние поляризации лазерного пучка.

4.2. Векторное представление поля в фокальной области для вихревой функции пропускания

Последнее время появилось много работ, рассматривающих возможности уменьшения размера фокусного пятна или/и углубления фокуса высокоапертурной фокусирующей системы [10–18]. При этом, как правило, рассматривается какой-нибудь конкретный тип поляризации, чаще всего радиальный [19–21], так как он обеспечивает наибольшую мощность продольной компоненты, полезную для многих приложений [22].

Для генерации радиально-поляризованных пучков было разработано множество внутрирезонаторных [23–26] и внерезонаторных схем [27–29]. Более того, имеются способы генерации практически произвольно (неоднородно) поляризованных пучков [30–33], но все они достаточно сложны в реализации либо требуют дорогостоящих устройств.

Таким образом, с одной стороны, необходимо рассмотреть возможность субволновой локализации света и углубления фокуса для более общего типа поляризации, с другой стороны, полезно выяснить такие возможности для наиболее распространенных и простых в реализации типов поляризации — линейной и круговой.

Острая фокусировка лазерных пучков с вихревой сингулярностью является актуальной задачей в области оптического манипулирования микро- и нанообъектами [34–40], в литографии [41, 42] и микроскопии [43, 44]. Поэтому фокусировка вихревых лазерных пучков с помощью высокоапер-

турной оптической системы рассматривается во многих работах, особенно недавних [45–49].

Вопросы взаимного влияния фазовых и поляризационных оптических вихрей, их переход друг в друга, а также компенсация или усиление в этом случае орбитального углового момента имеют более давнюю историю [50–54]. В данной работе на основе компенсации поляризационных вихрей с помощью вихревой фазовой функции пропускания показана возможность формирования субволновых структур как в отдельных компонентах векторного поля, так и в общей интенсивности.

Рассмотрим высокоапертурную апланатическую фокусирующую оптическую систему, фокальная область которой расположена от апертуры на расстоянии, значительно большем длины волны. Тогда напряженность электрического поля в однородной диэлектрической среде вблизи фокуса можно описать в приближении Дебая [45, 55]:

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = -\frac{if}{\lambda} \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} B(\theta, \phi) T(\theta) \mathbf{P}(\theta, \phi) \exp \left[ik(\rho \sin \theta \cos(\phi - \varphi) + z \cos \theta) \right] \sin \theta d\theta d\phi, \quad (4.68)$$

где (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты фокальной области, (θ, ϕ) — сферические угловые координаты выходного зрачка фокусирующей системы, $B(\theta, \phi)$ — функция пропускания, $T(\theta)$ — функция аподизации зрачка, $\mathbf{P}(\theta, \phi)$ — матрица поляризации, $n \sin \alpha = NA$ — числовая апертура, n — показатель преломления среды, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны, f — фокусное расстояние.

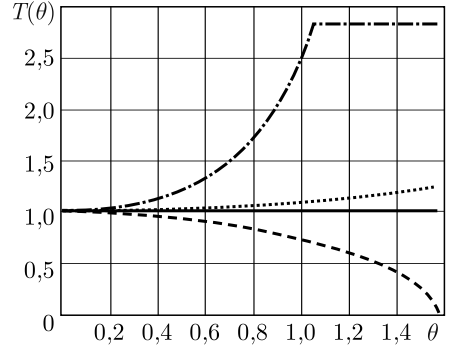
Функция аподизации зрачка $T(\theta)$ [22]:

$$T(\theta) = \begin{cases} \sqrt{\cos \theta}, & \text{Sine : } r = f \sin \theta, \\ 1, & \text{Herschel : } r = 2f \sin(\theta/2), \\ \sqrt{\theta/\sin \theta}, & \text{Lagrange : } r = f\theta, \\ (1/\cos \theta)^{3/2}, & \text{Helmholtz : } r = f \tan \theta, \end{cases} \quad (4.69)$$

зависит от геометрии фокусирующей системы. В частности, синусное правило используется для микроскопических объективов и апланатических систем, правило (Хершеля) — для равномерной фокусировки, также для такой фокусировки используется правило Лагранжа, а функцию Гельмгольца можно использовать для описания плоских дифракционных линз. Есть и другие функции, в том числе для параболического зеркала [15].

По рисунку 4.4 видно, что влияние функции аподизации $T(\theta)$ практически несущественно для малых числовых апертур и сильно различается при $\theta \rightarrow \pi/2$. В частности, при использовании условия Гельмгольца происходит чрезвычайное усиление периферийного вклада. Далее в этой работе будем рассматривать только синусное правило аподизации.

Рис. 4.4. Зависимость функции аподизации $T(\theta)$ от угла θ для синусного условия (пунктирная линия), условия Хершеля (сплошная линия), условия Лагранжа (точечная линия) и условия Гельмгольца (штрих-пунктирная линия)



Матрица поляризации фокусирующей системы $\mathbf{P}(\theta, \varphi)$ имеет следующий вид [16]:

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1) \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) \cos \phi \sin \theta \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) & 1 + \sin^2 \phi (\cos \theta - 1) \sin \phi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \phi & -\sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(\phi, \theta) \\ b(\phi, \theta) \\ c(\phi, \theta) \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

где $a(\theta, \phi)$, $b(\theta, \phi)$, $c(\theta, \phi)$ — функции поляризации для x -, y - и z -компонент падающего пучка.

Для часто используемых типов поляризации эти функции имеют простой вид и не зависят от θ .

Тогда, если функцию пропускания $B(\theta, \phi)$ можно представить в виде радиальной части и суперпозиции угловых гармоник [57, 58]:

$$B(\theta, \phi) = R(\theta) \Omega_B(\phi), \quad (4.71)$$

где

$$\Omega_B(\phi) = \sum_{m=-M_1}^{M_2} d_m \exp(im\phi) \quad (4.72)$$

то интеграл по ϕ в выражении (4.68) можно взять аналитически для частных случаев поляризации.

В частности, если коэффициенты входной поляризации также представимы в виде суперпозиции угловых гармоник (4.72): $a(\varphi) = \Omega_a(\varphi)$, $b(\varphi) = \Omega_b(\varphi)$, $c(\varphi) = \Omega_c(\varphi)$, интегралы по ϕ в (4.68) будут выражаться через соответствующую сумму бesselевых функций первого рода различного порядка [56]:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \exp(it \cos(\phi - \varphi)) \Omega_p(\phi) \Omega_B(\phi) d\phi = \\ = \int_0^{2\pi} \exp(it \cos(\phi - \varphi)) \sum_{l,m} p_l d_m \exp[i(l+m)\phi] d\phi = \\ = 2\pi \sum_{l,m} p_l d_m i^{l+m} \exp[i(l+m)\varphi] J_{l+m}(t), \end{aligned} \quad (4.73)$$

где $t = k\rho \sin \theta$.

Тогда вектор напряженности электрического поля в фокальной области вычисляется одномерным интегрированием:

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = -ikf \int_0^\alpha \mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta) q(\theta) d\theta, \quad (4.74)$$

где

$$q(\theta) = R(\theta)T(\theta) \sin \theta \exp(ikz \cos \theta), \quad (4.75)$$

а вид $\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta)$ зависит от поляризации падающей волны.

Функция $q(\theta)$ при малых значениях числовой апертуры (α мало) близка к нулю из-за множителя $\sin \theta$. Влияние функции аподизации $T(\theta)$ в этом случае (близкое к единице) незначительно.

Поэтому достигнуть высокой степени фокусировки при малых числовых апертурах можно только за счет амплитудного распределения (что приводит к потерям энергии) или специального вида $R(\theta)$ (например, использование радиально-поляризованных пучков высокого порядка [20, 23, 24]).

Считая функцию $R(\theta)$ чисто фазовой, можно записать для распространенных типов поляризации падающей волны — линейной, круговой, радиальной и азимутальной — явные выражения для интенсивности поля в фокальной плоскости и выполнить анализ возможности субволновой локализации света в фокальной области на основе выражения (4.74) высокоапертурной фокусирующей системы при использовании сингулярной фазовой функции пропускания (4.72).

4.2.1. Однородно-поляризованные пучки (линейная и круговая поляризация). **4.2.1.1. Линейная x -поляризация.** Для линейной x -поляризации излучения, падающего на высокоапертурную апланатическую фокусирующую систему, коэффициенты входной поляризации записываются как $a(\phi) = 1$, $b(\phi) = 0$, $c(\phi) = 0$, и матрица поляризации системы имеет вид

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} 1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1) \\ \sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1) \\ -\cos \phi \sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.76)$$

Тогда матрица $\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta)$ в выражении (4.74) для вихревой функции пропускания (4.72) может быть представлена выражением

$$\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta) = i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} J_m(t) + C2_m(t)(\cos \theta - 1) \\ SC_m(t)(\cos \theta - 1) \\ -C_m(t) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad t = k\rho \sin \theta \quad (4.77)$$

где

$$C2_m(t) = \frac{1}{4} \left[2J_m(t) - e^{i2\phi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\phi} J_{m-2}(t) \right],$$

$$SC_m(t) = \frac{i}{4} \left[e^{i2\phi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\phi} J_{m-2}(t) \right],$$

$$C_m(t) = \frac{i}{2} \left[e^{i\phi} J_{m+1}(t) - e^{-i\phi} J_{m-1}(t) \right].$$

Рассмотрим осевое (при $\rho = 0$) распределение интенсивности волны (4.74).

Матрица вихревого пропускания в этом случае будет содержать ненулевые компоненты только для порядков вихревой сингулярности $|m| \leq 2$:

$$\mathbf{Q}_{m=0}(0, 0, \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.78)$$

$$\mathbf{Q}_{m=1}(0, 0, \theta) = -\frac{1}{2} \sin \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.79)$$

$$\mathbf{Q}_{m=2}(0, 0, \theta) = \frac{1}{4} (\cos \theta - 1) \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

Как видно из выражений (4.78)–(4.80), в каждом из случаев осевое распределение имеет определенную поляризацию: исходную линейную x -поляризацию при $m = 0$, продольную при вихревой сингулярности первого порядка и круговую при вихревой сингулярности второго порядка.

В таблице 4.5 приведены распределения поля в фокальной области для линейно-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропускания,

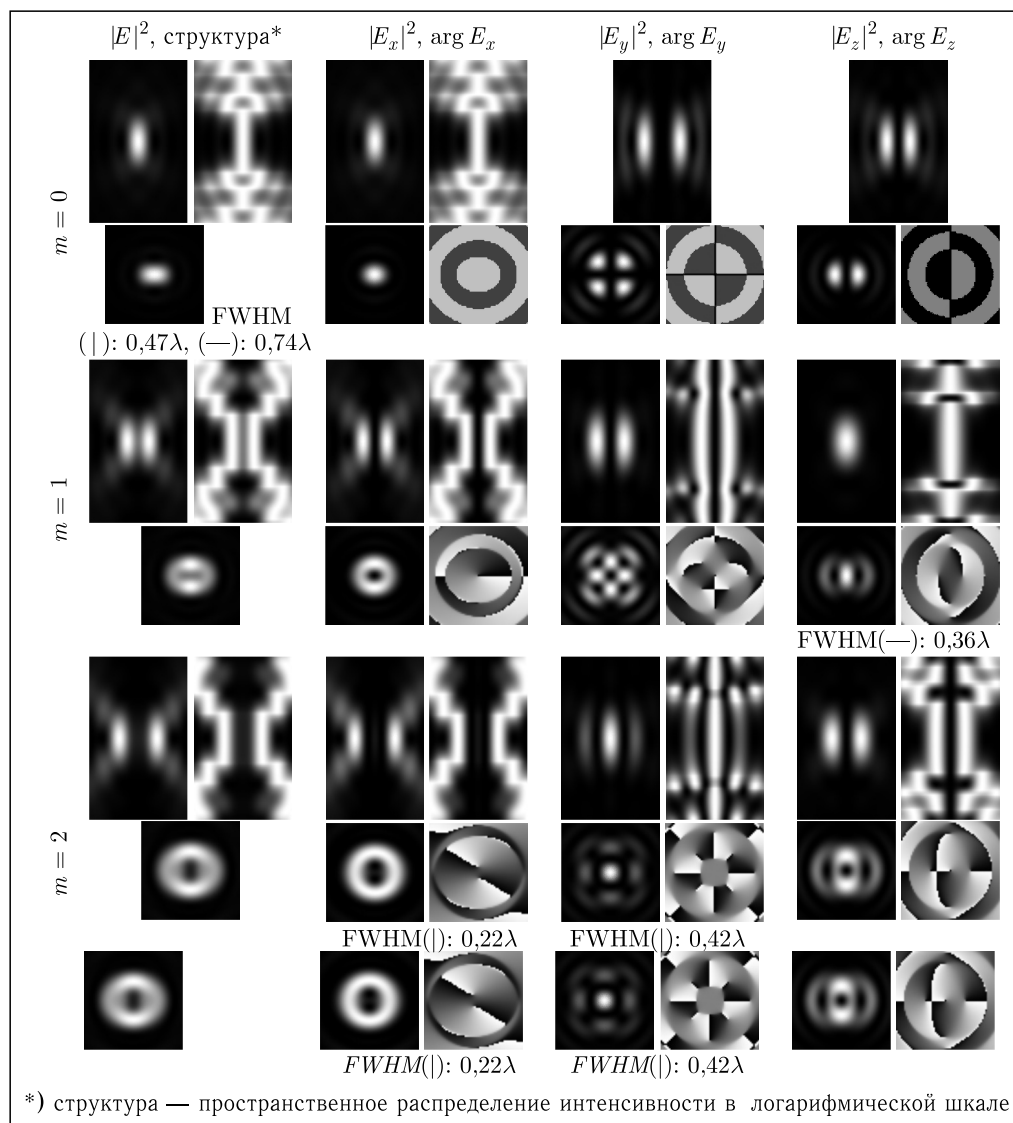
$$B(\theta, \phi) = \text{circ}(\theta, \alpha) \exp(im\phi) = \exp(im\phi) \begin{cases} 1, & \theta \in [0, \alpha] \\ 0, & \theta > \alpha \end{cases}, \quad |m| \leq 2, \quad (4.81)$$

для апланатической системы с фокусом $f = 101\lambda$ и $\alpha = 82^\circ$. Поперечная область ограничена размерами $3\lambda \times 3\lambda$, а продольная область варьируется в пределах пяти длин волн, $z \in [-2,5\lambda, 2,5\lambda]$, поперечное сечение показано в фокусе ($z = 0$).

В таблице также приведены картины интенсивности в логарифмической шкале для визуализации «тонкой» структуры поля, включая области низкой интенсивности. Как видно, структуры в областях низкой интенсивности могут быть очень интересными, в том числе имеют место разнообразные «оптические бутылки» (темных областей, окруженных светом) [59], возникающие в фокальной области при использовании вихревой пропускающей функции. Размер таких полых капсул, как правило (см. иллюстрации), меньше даже субволновых световых пятен, однако практическое их использование, в связи с малыми значениями энергии, под вопросом.

Из таблицы 4.5 видно, что вихревое поле соответствующего порядка позволяет получить субволновую локализацию света в отдельных компонентах,

Таблица 4.5. Продольное, $z \in [-2,5\lambda, 2,5\lambda]$, и поперечное, $z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$, распределения для линейно-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропуска (4.81)



однако влияние других компонент при постоянном по апертуре распределении $R(\theta)$ (4.81) нивелирует этот эффект в общей интенсивности поля.

Известно [14], что при использовании узкой кольцевой диафрагмы максимального радиуса для фокусирующей системы можно выделить продольную компоненту при радиальной поляризации. Рассмотрим в более общем случае действие узкой кольцевой диафрагмы произвольного радиуса, $R(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$.

При линейной x -поляризации выражение (4.74) примет следующий вид:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = -ikf i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} J_m(t_0) + C2_m(t_0)(\cos \theta_0 - 1) \\ SC_m(t_0)(\cos \theta_0 - 1) \\ -C_m(t_0) \sin \theta_0 \end{bmatrix} \times \\ \times \sqrt{\cos \theta_0} \sin \theta_0 \exp(ikz \cos \theta_0), \quad (4.82)$$

где $t_0 = k\rho \sin \theta_0$.

Очевидно, основной вклад в интенсивность центрального пятна будут вносить слагаемые, содержащие $J_0(k\rho \sin \theta_0)$. Также понятно, что наименьший размер будет достигнут при $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$.

Однако в этом случае функция аподизации $\sqrt{\cos \theta_0} \rightarrow 0$, поэтому максимальное значение на оси для определенной компоненты нужно искать отдельно.

В частности, при $m = 0$ и использовании узкой кольцевой диафрагмы осевая интенсивность x -компоненты определяется выражением

$$|E_{m=0}^x(0, 0, z)|^2 = \frac{(kf)^2}{4} \left| \exp(ikz \cos \theta_0) (1 + \cos \theta_0) \sin \theta_0 \sqrt{\cos \theta_0} \right|^2, \quad (4.83)$$

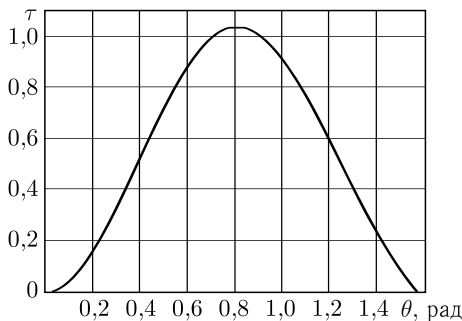


Рис. 4.5. Зависимость осевой интенсивности x -компоненты от угла θ для линейной x -поляризации при $m = 0$

которое теперь не зависит от дефокусировки z .

На рисунке 4.5 построен график функции $\tau(\theta) = (1 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta \cos \theta$ от угла $\theta \in [0, \pi/2]$. Из графика видно, что максимум достигается при $\theta_0 = 0,8$ радиан.

В таблице 4.6 приведено поперечное распределение полной интенсивности и интенсивности x -компоненты в фокальной плоскости (а также сечения) при использовании узкой кольцевой диафрагмы максимального радиуса рассматриваемой фокусирующей системы, $r_0 = 100\lambda$, и оптимального радиуса,

$r_0 = f \sin(\theta_0) \approx 73,5\lambda$. Использование диафрагмы с оптимальным радиусом позволяет получить наиболее компактное равномерное поперечное распределение, а диафрагма с максимальным радиусом приводит к минимально достижимому размеру фокусного пятна с потерей симметрии.

При $|m| = 1$ использование узкой кольцевой диафрагмы приводит к следующему выражению для осевой интенсивности продольной компоненты:

$$|E_{m=1}^z(0, 0, z)|^2 = \frac{(kf)^2}{4} \left| \sin^2 \theta_0 \sqrt{\cos \theta_0} \right|^2. \quad (4.84)$$

При $|m| = 2$ в осевую интенсивность вносят вклад обе поперечные компоненты (см. (4.80)) и ее можно максимизировать оптимальным выбором

Таблица 4.6. Поперечные ($z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$) распределения интенсивности (негатив) при использовании узкой кольцевой диафрагмы максимального и оптимального радиусов для линейной x -поляризации при $m = 0$

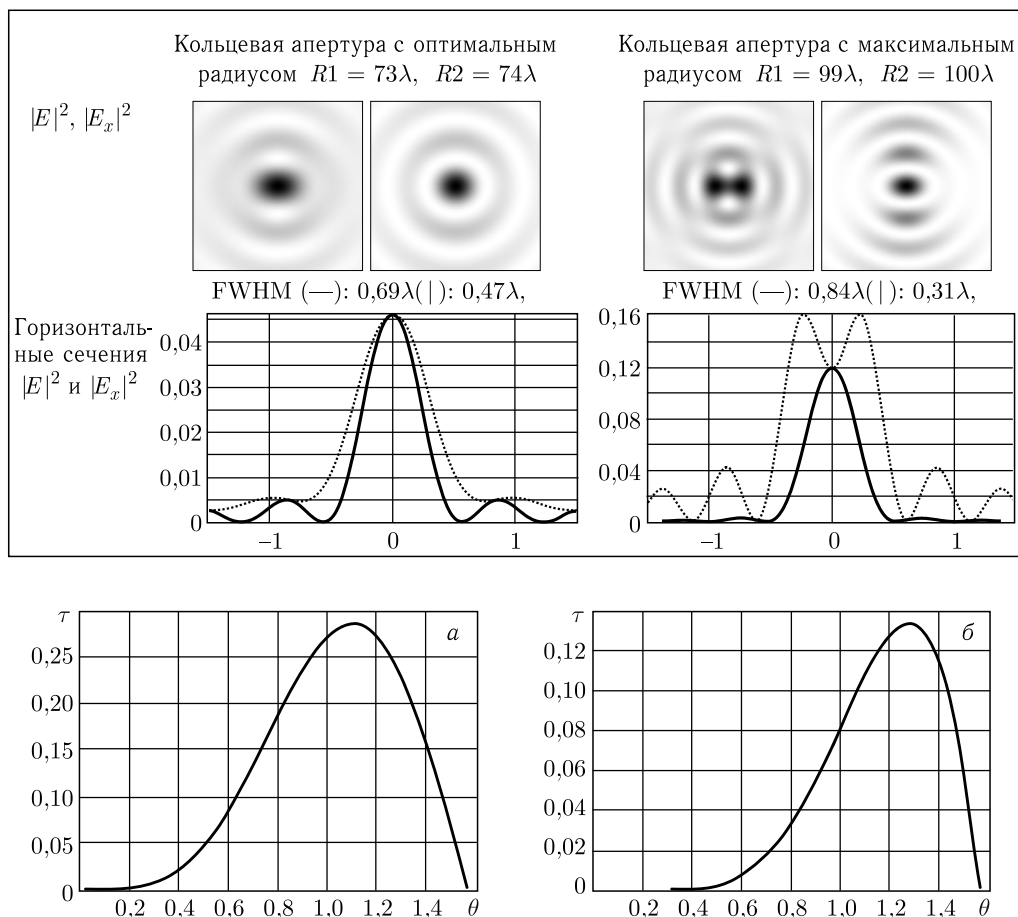


Рис. 4.6. Зависимость осевой интенсивности от угла θ для линейной x -поляризации для продольной компоненты при $|m| = 1$ (а) и для поперечных компонент при $|m| = 2$ (б)

радиуса, $R(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$:

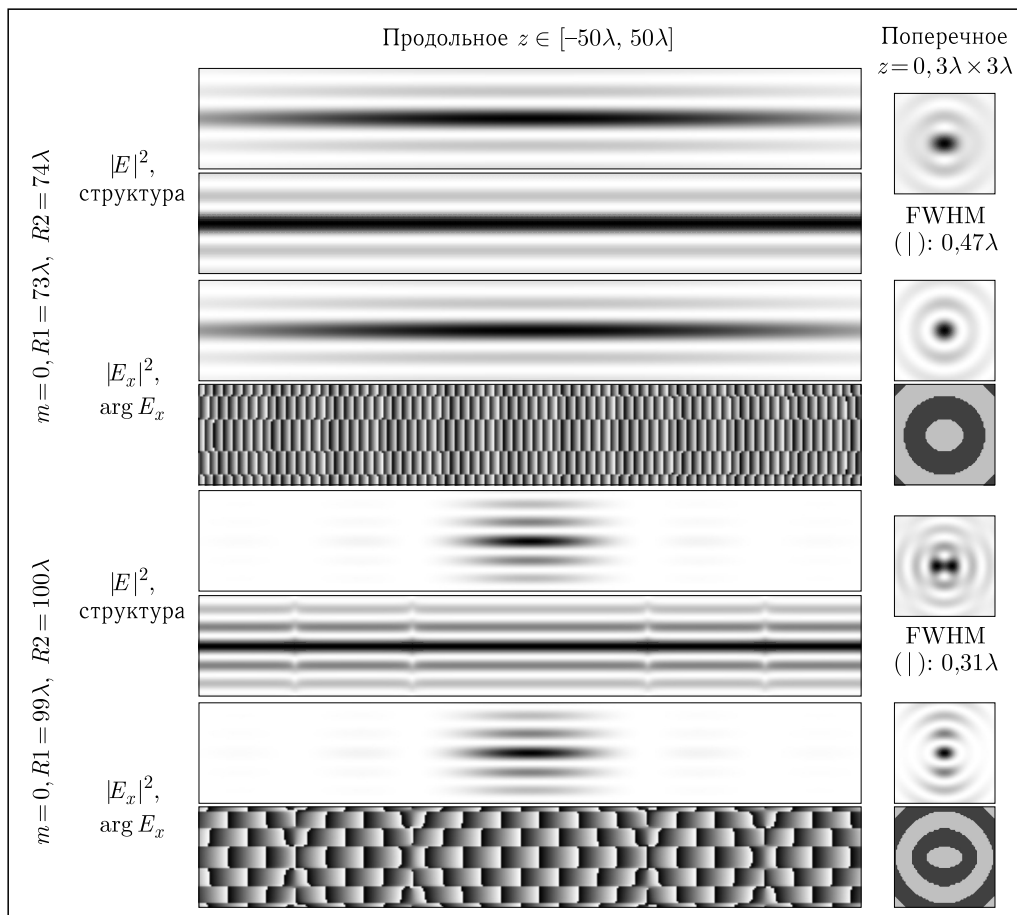
$$|E_{m=1}^{x,y}(0, 0, z)|^2 = \frac{(kf)^2}{16} \left| (\cos \theta_0 - 1) \sin \theta_0 \sqrt{\cos \theta_0} \right|^2. \quad (4.85)$$

На рисунке 4.6 показаны зависимости $\tau(\theta) = \sin^4 \theta_0 \cos \theta_0$ и $\tau(\theta) = (\cos \theta - 1)^2 \sin^2 \theta \cos \theta$ от угла $\theta \in [0, \pi/2]$, соответственно. Видно, что максимумы, сдвигаясь к краю апертуры, принимают все меньшие значения.

Разумеется, создать бесконечно узкую щель физически и невозможно, и энергетически невыгодно, поэтому ширина щели имеет определенный раз-

мер (в наших вычислениях она была равна длине волны), и приведенные выше выкладки становятся не совсем корректными.

Т а б л и ц а 4.7. Продольное и поперечное распределения интенсивности для линейно-поляризованного света при $m = 0$, ограниченного кольцевой диафрагмой



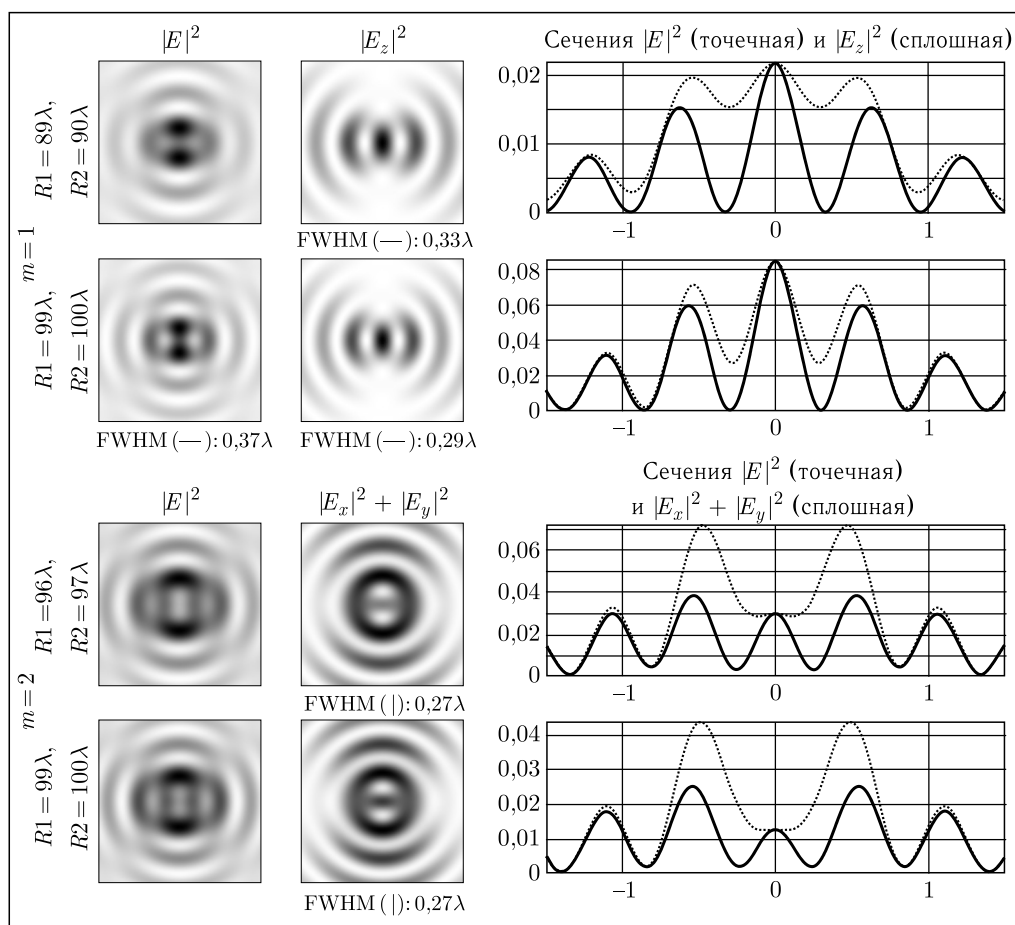
В таблице 4.7 приведено сравнение продольных и поперечных распределений интенсивности линейно-поляризованной падающей волны при $m = 0$, ограниченной кольцевой диафрагмой, внутренний и внешний радиусы которой обозначены как $R1$ и $R2$. Поперечное распределение размером $3\lambda \times 3\lambda$ показано в фокусе ($z = 0$), а продольная область рассмотрена в интервале $z \in [-50\lambda, 50\lambda]$, чтобы показать степень независимости полученного распределения от дефокусировки.

Как видно из табл. 4.7, использование кольцевой диафрагмы, средний радиус которой близок к максимальному, приводит к сокращению диапазона инвариантности к дефокусировке и концентрации энергии в фокальной области. Таким образом, если стоит задача наиболее компактной концентрации энергии в малой области, а не оптимального компромисса между глубиной

поля и его поперечной компактностью, то следует выбирать максимально возможный радиус кольцевой диафрагмы, так как в этом случае обеспечивается наибольшая числовая апертура фокусирующей оптической системы.

В таблице 4.8 приведены аналогичные результаты для вихревой функции пропускания, $0 < |m| \leq 2$. Максимизация вклада осевых компонент позволяет улучшить общий результат для линейной поляризации только при $m = 0$ и достичь субволновой локализации только в одном направлении.

Таблица 4.8. Продольное ($z \in [-50\lambda, 50\lambda]$) и поперечное ($z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$) распределения интенсивности для линейно-поляризованной волны с вихревой функцией пропускания ($0 < |m| \leq 2$), ограниченной кольцевой диафрагмой



Из таблицы 4.8 следует, что при использовании вихревого поля высоких порядков в отдельных компонентах векторного поля можно достичь существенной субволновой локализации ($\text{FWHM} = 0,28\lambda$) излучения в одном из направлений.

Это может иметь важное значение при взаимодействии лазерного излучения с веществами, избирательно чувствительными к различным составля-

ющим векторов электромагнитного поля [60]. Например, в работе [61] были использованы различные компоненты поля для возбуждения различных ориентаций флуорисцирующих молекул. Также, наоборот, возбуждение отдельных флуоресцирующих молекул может быть использовано для разделения компонент векторов поля в фокальной плоскости [62].

4.2.1.2. Круговая поляризация. Для круговой поляризации входного поля коэффициенты с учетом нормировки равны: $a(\phi) = 1/\sqrt{2}$, $b(\phi) = \pm 1/\sqrt{2}i$, $c(\phi) = 0$, а матрица поляризации равна

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1)] \pm i [\sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1)] \\ [\sin \phi \cos \phi (\cos \theta - 1)] \pm i [1 + \sin^2 \phi (\cos \theta - 1)] \\ -\sin \theta [\cos \phi \pm i \sin \phi] \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Матрица для вихревого поля в (4.74)

$$\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta) = \frac{1}{2} i^m \exp(im\varphi) \times \\ \times \begin{bmatrix} J_m(t) + \frac{1}{2} [J_m(t) + E2_m(t)] (\cos \theta - 1) \\ \text{sgn}(p)i \left\{ J_m(t) + \frac{1}{2} (J_m(t) - E2_m(t)) (\cos \theta - 1) \right\} \\ -E1_m(t) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (4.87)$$

где $E1_m(t) = \text{sgn}(p)ie^{\text{sgn}(p)i\phi} J_{m+\text{sgn}(p)1}(t)$, $E2_m(t) = -e^{\text{sgn}(p)i2\phi} J_{m+\text{sgn}(p)2}(t)$, $t = k\rho \sin \theta$, $\text{sgn}(p)$ — знак входной поляризации.

Поведение на оси при значениях вихревого индекса $|m| \leq 2$:

$$\mathbf{Q}_{m=0}(0, 0, \theta) = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \text{sgn}(p)i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

— круговая поляризация того же знака, что и в падающей волне;

$$\mathbf{Q}_{m=1}(0, 0, \theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin \theta \end{bmatrix}, \quad (4.89)$$

— имеется только продольная составляющая при знаке «−» входной поляризации (аналогичный результат при $m = -1$ и знаке входной поляризации «+»);

$$\mathbf{Q}_{m=2}(\theta) = \frac{1}{4} (1 - \cos \theta) \begin{bmatrix} -1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.90)$$

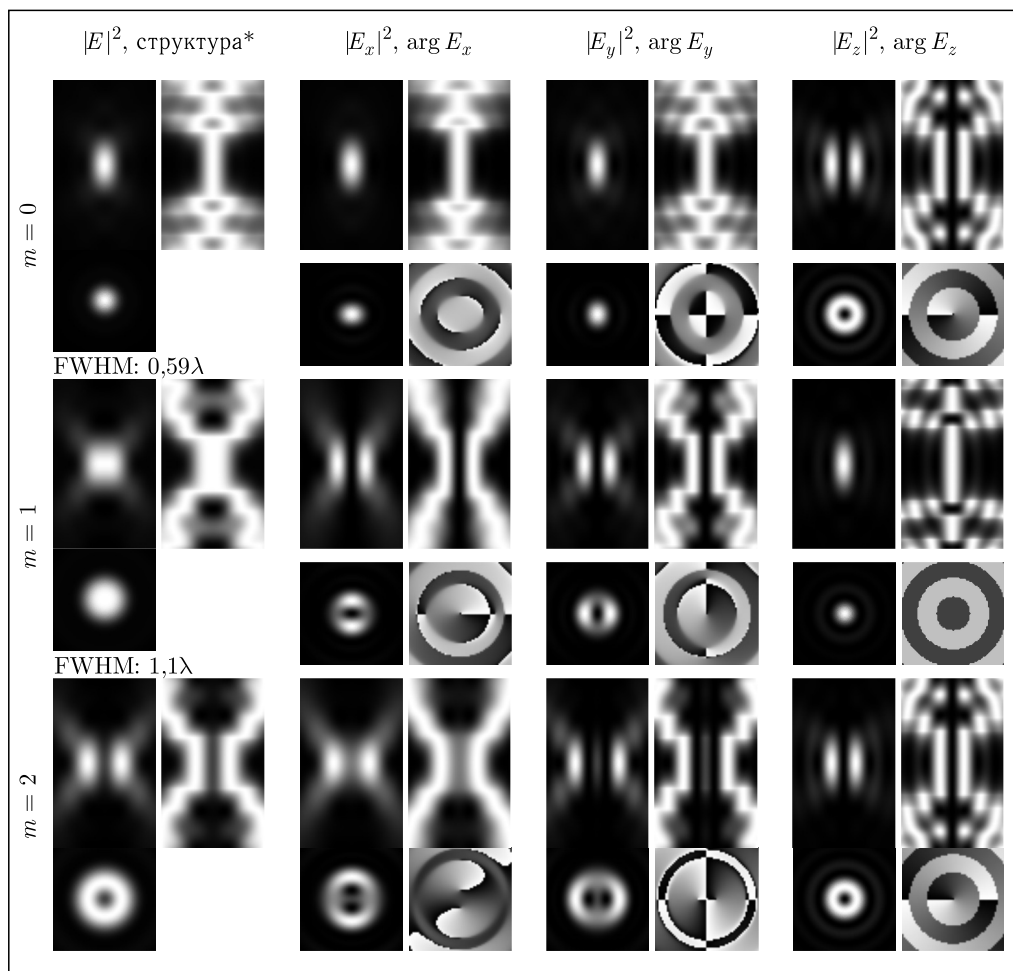
— круговая поляризация того же знака, что у падающей волны (аналогичный результат при $m = -2$ и знаке входной поляризации «+»).

Ситуация похожа на случай линейной поляризации, но участвуют обе поперечные компоненты.

При дальнейшем увеличении индекса m все компоненты на оси обнуляются.

В таблице 4.9 приведены распределения интенсивности волны в фокальной области для плоско-поляризованной (с круговой «+»-поляризацией) полноапертурной вихревой функции пропускания при $|m| \leq 2$ для апланатической системы с фокусом $f = 101\lambda$ и $\alpha = 82^\circ$.

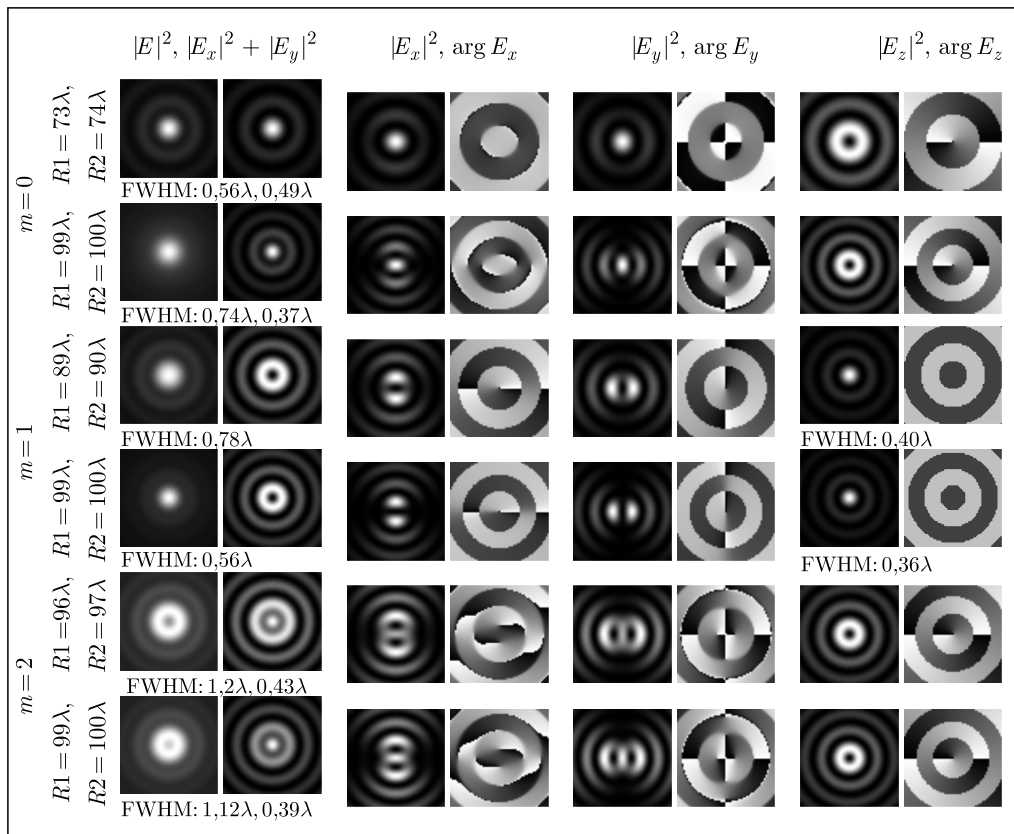
Таблица 4.9. Продольное ($z \in [-2,5\lambda, 2,5\lambda]$) и поперечное ($z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$) распределения интенсивности для плоско-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропускания $|m| \leq 2$



В таблице 4.10 приведены результаты для сравнения действия кольцевой диафрагмы, средний радиус которой близок к оптимальному, и диафрагмы с максимальным радиусом.

В первом случае, т.е. для оптимальной диафрагмы, при $m = 0$ в общей интенсивности обеспечивается глубокий фокус (более 100λ) при фокусном

Таблица 4.10. Поперечные ($z = 0$, $3\lambda \times 3\lambda$) распределения интенсивности поля для вихревой функции пропускания с круговой поляризацией ($|m| \leq 2$), ограниченной узкой кольцевой диафрагмой



пятне (FWHM: 0,56λ) немного меньше, чем скалярный предел для линзы (FWHM: 0,61λ), но при других значениях m субволновая локализация происходит только в отдельных компонентах.

Во втором случае (для диафрагмы с максимальным радиусом) в общей интенсивности можно достичь такой же субволновой локализации (FWHM: 0,56λ), но для $|m| = 1$. При этом происходит сокращение глубины фокуса в несколько раз и увеличение за счет этого интенсивности в фокальной плоскости. При других значениях m существенная субволновая локализация (FWHM 0,36λ) происходит только в отдельных компонентах.

4.2.2. Цилиндрические векторные пучки (радиальная и азимутальная поляризации). **4.2.2.1. Радиальная поляризация.** При радиальной поляризации излучения, падающего на высокоапертурную апланатическую фокусирующую систему, коэффициенты входной поляризации записываются как $a(\phi) = \cos \phi$, $b(\phi) = \sin \phi$, $c(\phi) = 0$, и матрица поляризации системы имеет

вид

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{bmatrix}. \quad (4.91)$$

Тогда матрица $\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta)$ в (4.74) для вихревой функции пропускания 4.72) может быть представлена следующим выражением:

$$\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta) = i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} C_m(t) \cos \theta \\ S_m(t) \cos \theta \\ -J_m(t) \sin \theta \end{bmatrix}, \quad (4.92)$$

где

$$C_m(t) = \frac{i}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(t) - e^{-i\varphi} J_{m-1}(t)],$$

$$S_m(t) = \frac{1}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(t) + e^{-i\varphi} J_{m-1}(t)], \quad t = k\rho \sin \theta.$$

Матрица вихревого пропускания на оси (при $\rho = 0$) будет содержать ненулевые компоненты только для порядков вихревой сингулярности $|m| \leq 1$:

$$\mathbf{Q}_{m=0}(0, 0, \theta) = -\sin \theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.93)$$

$$\mathbf{Q}_{m=1}(0, 0, \theta) = \frac{1}{2} \cos \theta \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

При $m = 0$ в фокальной области на оси будет формироваться только продольная компонента, а при $|m| = 1$ будут присутствовать только поперечные компоненты. Заметим, что ситуация аналогична линейной поляризации с вихрем первого и второго порядка, но в данном случае интенсивность в 4 раза выше. В таблице 4.11 приведены распределения поля в фокальной области для радиально-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропускания при $|m| \leq 1$ для апланатической системы с фокусом $f = 101\lambda$ и $\alpha = 82^\circ$. Продольные и поперечные размеры такие же, как в табл. 4.5 Из таблицы 4.11 видно, что полноапертурное равномерное по амплитуде поле не позволяет получить субволновую локализацию света в общей интенсивности.

При радиальной поляризации и наложении узкой кольцевой диафрагмы выражение (4.74) примет следующий вид:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) =$$

$$= -ikf i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} C_m(t_0) \cos \theta_0 \\ S_m(t_0) \cos \theta_0 \\ -J_m(t_0) \sin \theta_0 \end{bmatrix} \sqrt{\cos \theta_0} \sin \theta_0 \exp(ikz \cos \theta_0),$$

$$t_0 = k\rho \sin \theta_0. \quad (4.95)$$

Таблица 4.11. Продольное ($z \in [-2,5\lambda, 2,5\lambda]$) и поперечное ($z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$) распределения для радиально-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропускания $|m| \leq 1$

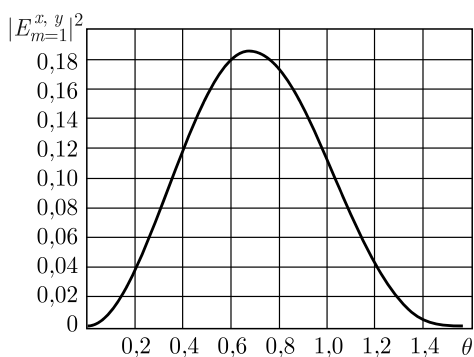
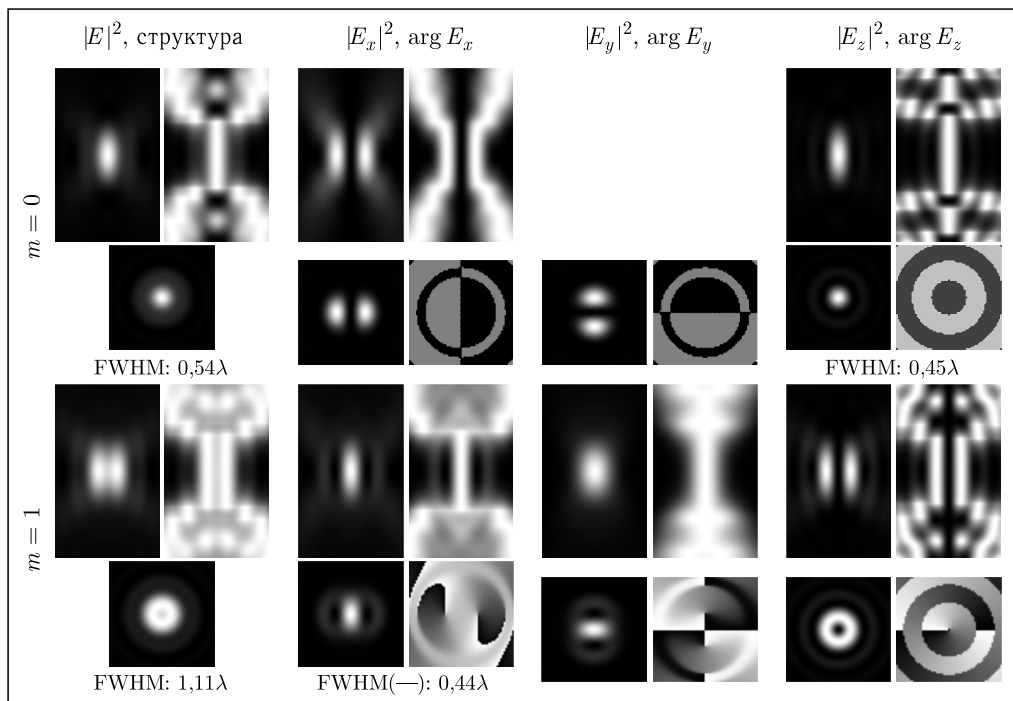


Рис. 4.7. Зависимость осевой интенсивности поперечных компонент от угла θ для радиальной поляризации при $m = 1$

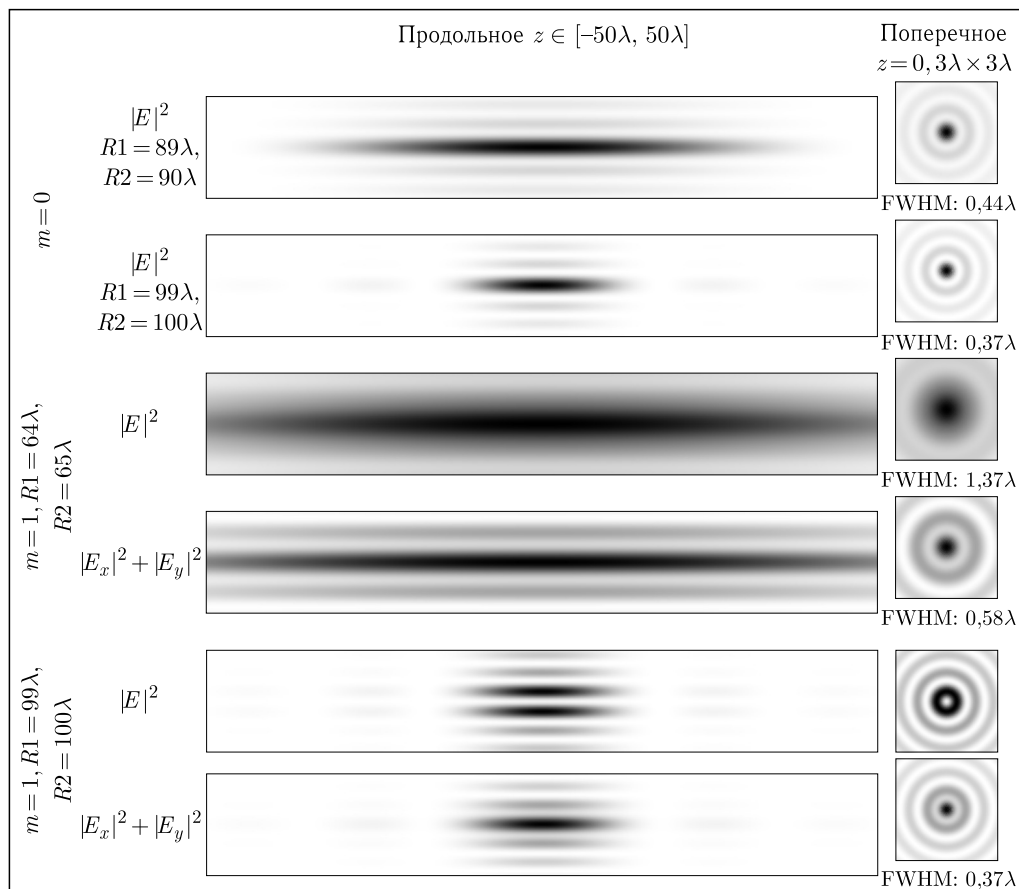
Очевидно, что для $m = 0$ оптимальное значение θ_0 получается как предыдущем разделе с вихрем первого порядка, а для $|m| = 1$ в осевую интенсивность вносят вклад только поперечные компоненты,

$$|E_{m=1}^{x,y}(0, 0, z)|^2 = \frac{(kf)^2}{4} \sin^2 \theta_0 \cos^3 \theta_0, \quad (4.96)$$

максимизация которых, как видно из рис. 4.7, происходит при $\theta_0 = 0.7$ рад. В таблице 4.12 приведено сравнение действия кольцевых диафрагм с различными средними радиусами.

Приведенные выше результаты численного моделирования показывают, что при использовании оптимального радиуса кольцевой диафрагмы для $m = 0$ можно достичь компромисса между глубиной фокуса, которая превышает 60λ , и компактностью фокусного пятна — оно имеет размер FWHM $0,44\lambda$, что меньше скалярного предела для линзы.

Таблица 4.12. Продольное и поперечное распределения интенсивности поля для радиально-поляризованной вихревой функции пропускания ($|m| \leq 1$), ограниченной узкой кольцевой диафрагмой



Увеличение радиуса кольцевой диафрагмы позволяет уменьшить FWHM до $0,37\lambda$, но за счет существенного (почти в 3 раза) сокращения глубины фокуса.

Так как вклад поперечных компонент в радиальную поляризацию пропорционален $\cos \theta$, то для высокоапертурных составляющих он нивелируется. Поэтому при $m = 1$ кольцевая диафрагма с максимальным радиусом, как видно из табл. 4.10, фактически оставляет только продольную компоненту. Чтобы сохранить поперечные компоненты в общем поле, нужно использовать диафрагму оптимального для них радиуса, что приводит к уширению фокусного пятна.

4.2.2.2. Азимутальная поляризация. В случае азимутальной поляризации падающей волны коэффициенты поляризации записываются в виде $a(\phi) = -\sin \phi$, $b(\phi) = \cos \phi$, $c(\phi) = 0$, и матрица поляризации системы

имеет вид:

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.97)$$

Тогда матрица вихревого поля $\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta)$ в выражении (4.74) равна

$$\mathbf{Q}(\rho, \varphi, \theta) = i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} -S_m(t) \\ C_m(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.98)$$

где

$$S_m(t) = \frac{1}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(t) + e^{-i\varphi} J_{m-1}(t)],$$

$$C_m(t) = \frac{i}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(t) - e^{-i\varphi} J_{m-1}(t)], \quad t = k\rho \sin \theta.$$

Как следует из выражения (4.98), продольная составляющая всегда отсутствует.

В таблице 4.13 приведены распределения поля в фокальной области для азимутально-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропускания при $|m| \leq 1$ для апланатической системы с фокусом $f = 101\lambda$ и $\alpha = 82^\circ$.

Стоит заметить, что при $m = 1$ вихревая особенность в центре фокальной области отсутствует, так как. поляризационный вихрь скомпенсирован скалярным вихрем функции пропускания.

Как видно из табл. 4.13, в суммарную интенсивность вносят вклад только поперечные компоненты, но для достижения субволновой локализации необходимо отсечь лучи, соответствующие низкой числовой апертуре фокусирующей системы.

При наложении узкой кольцевой диафрагмы выражение (4.74) в случае азимутальной поляризации примет следующий вид:

$$\mathbf{E}(\rho, \varphi, z) = -ikf i^m \exp(im\varphi) \begin{bmatrix} S_m(t_0) \\ -C_m(t_0) \\ 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \sqrt{\cos \theta_0} \sin \theta_0 \exp(ikz \cos \theta_0), \quad t_0 = k\rho \sin \theta_0. \quad (4.99)$$

На оптической оси (при $\rho = 0$) матрица (4.98) будет содержать ненулевые компоненты только для одного порядка сингулярности $|m| = 1$:

$$\mathbf{Q}_{m=\pm 1}(0, 0, \theta) = \frac{\pm i}{2} \cos \theta \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$

что соответствует круговой поляризации и аналогично радиальной поляризации с вихрем первого порядка (см. выражение (4.94)), с той существенной разницей, что продольная компонента отсутствует и не искажает общую интенсивность.

Для всех остальных значений $|m| \neq 1$ в осевых точках будет формироваться полный ноль интенсивности, так как все компоненты равны нулю.

Таблица 4.13. Продольное, $z \in [-2,5\lambda, 2,\lambda]$, и поперечное, $z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$, распределения для азимутально-поляризованной полноапертурной вихревой функции пропускания, $|m| \leq 1$

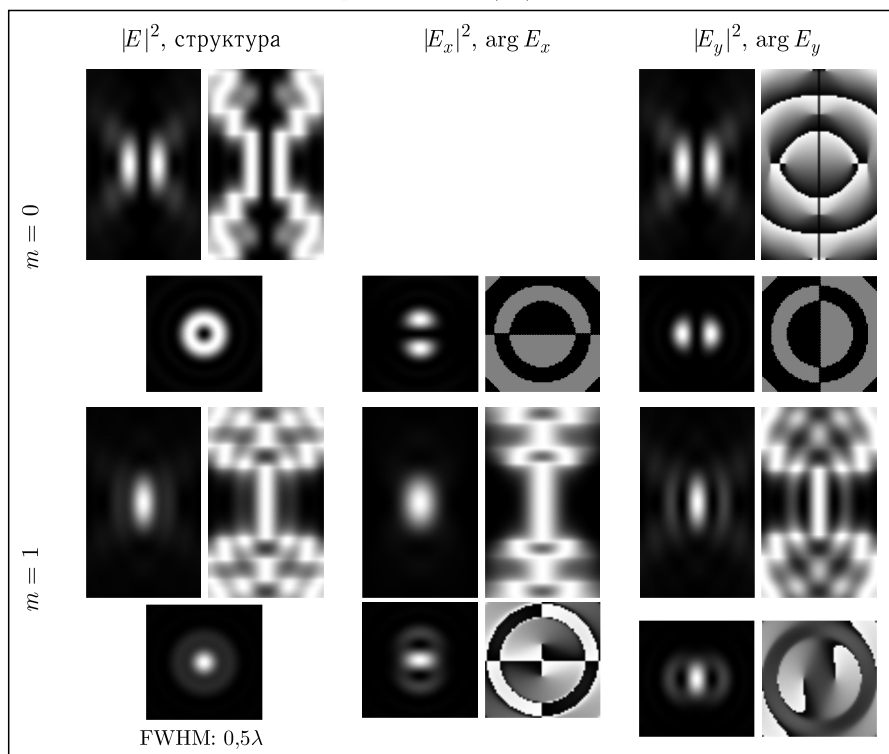
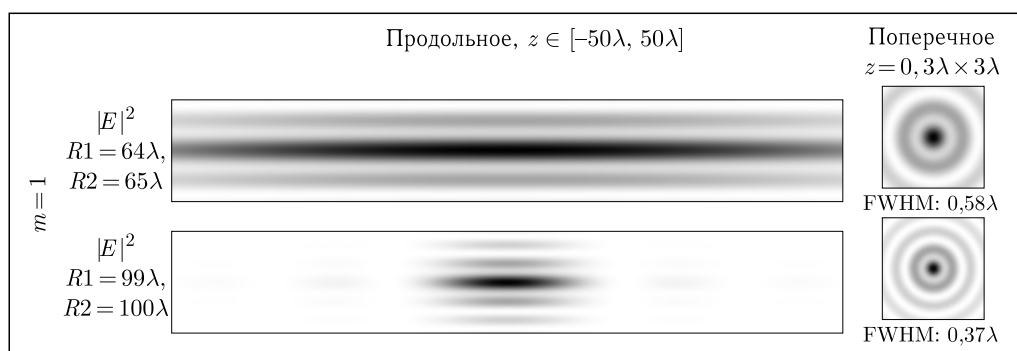


Таблица 4.14. Продольное и поперечное распределения интенсивности поля для азимутально-поляризованной вихревой функции пропускания ($|m| = 1$), ограниченного узкой кольцевой диафрагмой



В таблице 4.14 приведено сравнение действия узкой кольцевой щели различного радиуса, и видно, что для общей интенсивности достигнут результат, соответствующий в радиальной поляризации только поперечным компонентам. При выборе среднего радиуса кольцевой диафрагмы, близким к опти-

мальному получаем компромисс между глубиной фокуса (более 100 длин волн) и размером фокусного пятна (FWHM: $0,58\lambda < 0,61\lambda$ — скалярный предел для линзы). При выборе максимального радиуса происходит существенная субволновая локализация (FWHM: $0,37\lambda$) с одновременным уменьшением глубины фокуса (около 30 длин волн).

4.2.3. Обобщенная вихревая поляризация. Из анализа предыдущих разделов ясно, что если не рассматривается взаимодействие электромагнитного излучения с веществом, избирательно чувствительным к поперечным и продольным компонентам [60–62], то иногда полезно «разогнать» с помощью входного вихревого поля поперечную (или продольную) компоненту из центра, чтобы различные компоненты не накладывались и чтобы не уширялся пик общей интенсивности. При этом, чем выше будет номер вихря, тем большего радиуса получается зона нулевой интенсивности. Однако рассмотренные выше типы поляризации включают в себя вихревые сингулярности не выше второго порядка.

Поэтому в данном разделе рассматривается обобщенная вихревая поляризация, т.е. поляризация, коэффициенты которой содержат вихревые сингулярности произвольного порядка и их суперпозиции. Реализовать такую поляризацию можно одним из способов генерации произвольно-поляризованных пучков [30–33].

Выражение (4.74) справедливо, когда коэффициенты входной поляризации $a(\phi)$, $b(\phi)$, $c(\phi)$ могут быть представлены в виде (4.72).

В частном случае

$$a(\phi) = a \exp(il\phi), \quad b(\phi) = b \exp(ip\phi), \quad c(\phi) = c \exp(is\phi) \quad (4.101)$$

матрица поляризации

$$\mathbf{P}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} a \exp(il\phi) [1 + \cos^2 \phi (\cos \theta - 1)] + \\ + b \sin \phi \cos \phi \exp(ip\phi) (\cos \theta - 1) + c \cos \phi \exp(is\phi) \sin \theta \\ a \sin \phi \cos \phi \exp(il\phi) (\cos \theta - 1) + \\ + b \exp(ip\phi) [1 + \sin^2 \phi (\cos \theta - 1)] + c \sin \phi \exp(is\phi) \sin \theta - \\ - [a \exp(il\phi) \cos \phi + b \exp(ip\phi) \sin \phi] \sin \theta + c \exp(is\phi) \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

и матрица вихревого пропускания

$$\mathbf{Q}(\rho, \theta) = i^m \exp(im\varphi) \times \begin{bmatrix} ai^l e^{il\varphi} [J_{m+l}(t) + C_{2m+l}(t)(\cos \theta - 1)] + \\ + bi^p e^{ip\varphi} S_{m+p}(t)(\cos \theta - 1) + ci^s e^{is\varphi} C_{m+s}(t) \sin \theta \\ ai^l e^{il\varphi} S_{m+l}(t)(\cos \theta - 1) + bi^p e^{ip\varphi} [J_{m+p}(t) + \\ + S_{2m+p}(t)(\cos \theta - 1)] + ci^s e^{is\varphi} S_{m+s}(t) \sin \theta - \\ - [ai^l e^{il\varphi} C_{m+l}(t) + bi^p e^{ip\varphi} S_{m+p}(t)] \sin \theta + ci^s e^{is\varphi} J_{m+s}(t) \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

где

$$\begin{aligned}
 C_m(t) &= \frac{i}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(t) - e^{-i\varphi} J_{m-1}(t)], \\
 S_m(t) &= \frac{1}{2} [e^{i\varphi} J_{m+1}(t) + e^{-i\varphi} J_{m-1}(t)], \\
 SC_m(t) &= \frac{i}{4} [e^{i2\varphi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\varphi} J_{m-2}(t)], \\
 C2_m(t) &= \frac{1}{4} [2J_m(t) - e^{i2\varphi} J_{m+2}(t) - e^{-i2\varphi} J_{m-2}(t)], \\
 S2_m(t) &= \frac{1}{4} [2J_m(t) + e^{i2\varphi} J_{m+2}(t) + e^{-i2\varphi} J_{m-2}(t)], \quad t = k\rho \sin \theta.
 \end{aligned}$$

Заметим, что сформировать ненулевую продольную компоненту можно в любом (кроме азимутального) из рассмотренных выше вариантов острой фокусировки, при этом $s = 0$, а $c \neq 0$.

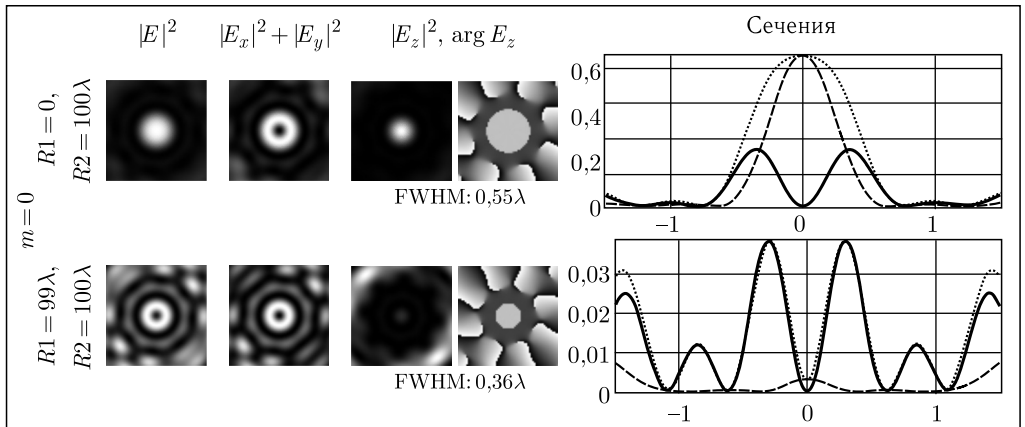
Рассмотрим возможность максимизации осевой интенсивности продольной компоненты при использовании узкой кольцевой диафрагмы:

$$\begin{aligned}
 E_z(\rho, \varphi, z) &= -ikf i^m e^{im\varphi} \left\{ \left[a i^l e^{il\varphi} C_{m+l}(t_0) + b i^p e^{ip\varphi} S_{m+p}(t_0) \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sin \theta_0 + c i^s e^{is\varphi} J_{m+s}(t_0) \cos \theta_0 \right\} \sqrt{\cos \theta_0} \sin \theta_0 \exp(ikz \cos \theta_0), \quad (4.104)
 \end{aligned}$$

где $t_0 = k\rho \sin \theta_0$.

Очевидно, получить «хорошо выделенное» субволновое центральное пятно в продольной компоненте можно при $m = -s$ (в том числе при $s = 0$) и $|l|, |p| \gg |s|$. Однако в этом случае размер пятна будет уменьшаться при

Таблица 4.15. Поперечные ($z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$) распределения интенсивности волны для вихревой поляризации с коэффициентами $a(\phi) = \exp(i9\phi)$, $b(\phi) = \exp(i9\phi)$, $c(\phi) = 1$



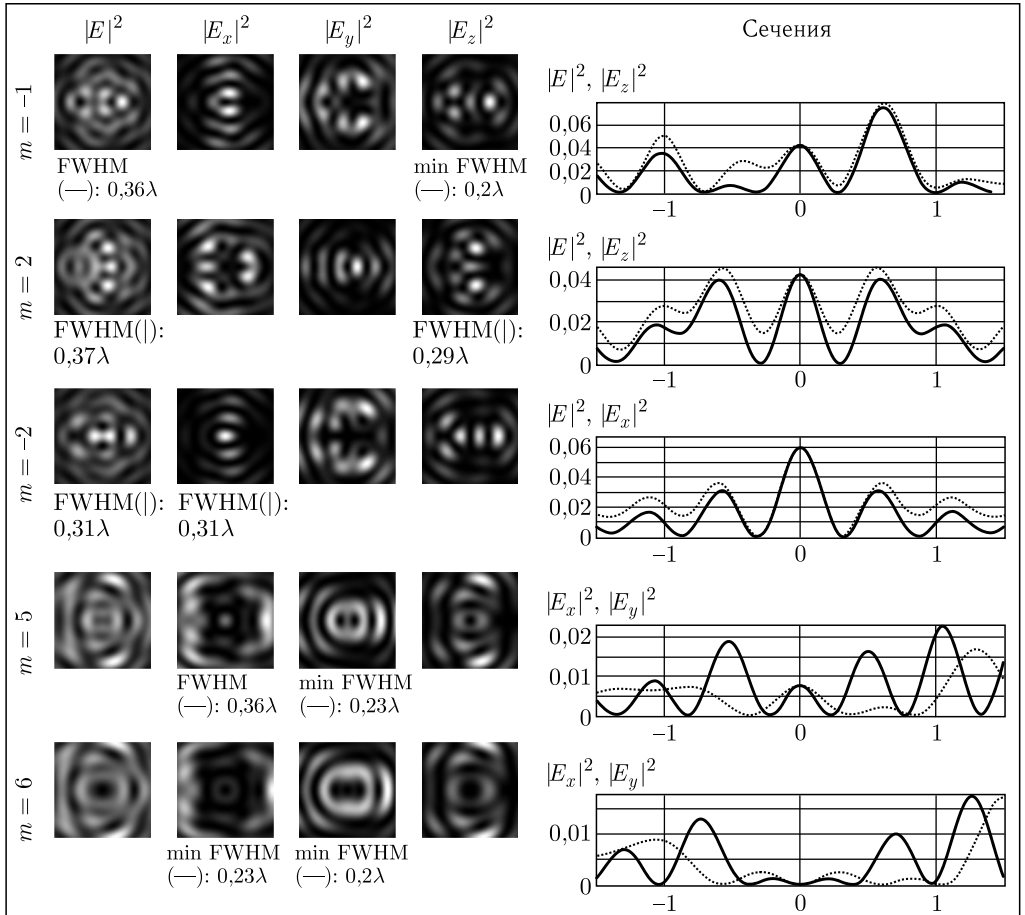
$\theta_0 \rightarrow 90^\circ$, что одновременно приводит к уменьшению интенсивности в этой компоненте, так как $\cos \theta_0 \rightarrow 0$ (см. табл. 4.15).

Поэтому лучше рассмотреть случай поперечной поляризации падающей волны. При нулевой входной продольной составляющей, $c(\phi) = 0$, выражение (4.104) будет включать слагаемые, пропорциональные $J_{m+l\pm 1}(t_0)$ и $J_{m+p\pm 1}(t_0)$, а следовательно, станет ненулевой интенсивностью в центральной точке при подаче на вход оптического вихря, $m = -(l \pm 1)$ или $m = -(p \pm 1)$ (см. табл. 4.16).

Если $l = p$ и $b = ia$, т. е. на входе круговая поляризация l -го порядка, то

$$|E_z(\rho, \varphi, z)|^2 = (kf)^2 \left| a J_{m+l+1}(k\rho \sin \theta_0) \sqrt{\cos \theta_0} \sin^2 \theta_0 \right|^2, \quad (4.105)$$

Т а б л и ц а 4.16. Поперечные ($z = 0, 3\lambda \times 3\lambda$) распределения интенсивности поля для вихревой поляризации с коэффициентами $a(\phi) = \exp(i2\phi)$, $b(\phi) = \exp(-i3\phi)$, $c(\phi) = 0$ при использовании узкой кольцевой диафрагмы с радиусами $R1 = 99\lambda$, $R2 = 100\lambda$



интенсивность станет ненулевой при $\rho = 0$ в случае вихревой функции пропускания с $m = -(l + 1)$.

Но ситуация в этом случае для всех компонент сведется к обычной круговой поляризации, так как поперечные компоненты получают аналогичную компенсацию (см. табл. 4.15).

Поэтому для формирования существенно субволновых структур, как в табл. 4.16, необходимо, чтобы $l \neq p$, даже если $|l| = |p|$.

Например, если $l = -p$, т. е. на входе вихревая поляризация l -го порядка, то

$$|E_z(\rho, \varphi, z)|^2 \sim (kf)^2 \left| \left[c_1 J_{m+l+1}(t_0) + c_2 J_{m+l-1}(t_0) + \right. \right. \\ \left. \left. + c_3 J_{m-l+1}(t_0) + c_4 J_{m-l-1}(t_0) \right] \sqrt{\cos \theta_0} \sin^2 \theta_0 \right|^2, \quad (4.106)$$

интенсивность станет ненулевой при $\rho = 0$ в тех же случаях, что и для произвольных $l \neq p$ (см. табл. 4.16).

4.2.4. Выводы. В данном параграфе проведен аналитический и численный анализ возможности субволновой локализации света и углубления фокуса высокоапертурной фокусирующей системы при использовании вихревой фазовой функции пропускания для различных типов входной поляризации света. В качестве обобщающего случая рассмотрена поляризация волны, компоненты которой могут быть представлены в виде суперпозиции угловых гармоник.

Показано, что при острой фокусировке лазерных пучков с вихревой сингулярностью субволновая локализация света (как и теневых областей) в отдельных компонентах векторного поля возможна при любых типах поляризации. Это обстоятельство полезно учитывать при рассмотрении взаимодействия лазерного излучения с веществами, избирательно чувствительными к поперечной и продольной составляющих электромагнитного поля.

Чтобы сформировать субволновую структуру в общей интенсивности поля, необходимы определенные типы поляризаций и дополнительная аподизация функции зрачка фокусирующей системы, например, диафрагмирование узкой кольцевой щелью. Оптимальный выбор радиуса такой щели, максимизирующий вклад определенной компоненты, позволяет достичь компромисса между глубиной фокуса и размером фокусного пятна.

Так, для линейной x -поляризации за счет максимизации поперечной компоненты можно получить в общей интенсивности вытянутое фокусное пятно с FWHM $0,47\lambda$ по узкой стороне, инвариантное к дефокусировке более чем на 50 длин волн. При FWHM $0,31\lambda$ чувствительность к дефокусировке гораздо выше — на расстоянии 15 длин волн от фокальной плоскости.

В случае азимутальной поляризации аналогичный результат будет симметричным и можно сформировать круглое фокусное пятно, не имеющее продольной компоненты, с FWHM $0,37\lambda$ общей протяженностью около 30 длин волн.

Также симметричный результат, но с меньшей степенью субволновой локализации получается при использовании круговой поляризации. При этом,

также как в линейной, меняя порядок вихревой сингулярности, можно управлять вкладом продольной и поперечных компонент в осевое распределение общей интенсивности.

Кроме этого, продольная компонента усиливается (выделяется) узкой кольцевой диафрагмой максимального радиуса и имеет наибольшую мощность при радиальной поляризации.

Использование обобщенной вихревой поляризации в сочетании с вихревыми пучками, ограниченными узкой кольцевой диафрагмой, позволяет формировать в фокальной области сложные субволновые распределения как общей, так и компонентной интенсивности. На рассмотренных примерах были получены детали с FWHM менее $0,22\lambda$.

4.3. Применение аксиконов в высокоапертурной фокусирующей системе

В работе [63] в рамках параксиальной скалярной модели было показано, что линзакон [64], состоящий из двух низкоапертурных элементов (линзы и аксикона), позволяет получить центральное световое пятно, размер которого соответствует нелинейному увеличению числовой апертуры тандема.

Наличие в тандеме хотя бы одного высокоапертурного элемента требует применения более строгой теории. В данном разделе рассмотрены линейные и вихревые аксиконы в качестве дополнения к высокоапертурной линзе в модели острофокусирующей системы в приближении Дебая.

Как было показано в предыдущем разделе, уменьшение поперечного размера фокусного пятна или/и увеличения продольной протяженности фокальной области высокоапертурной фокусирующей системы наилучшим образом получается при радиальной поляризации падающего света. Данный эффект связан с тем, что при радиальной поляризации в фокусе обеспечивается наилучшее перераспределение энергии в z -компоненту электрического поля.

Однако даже в этом случае не достигается предсказываемый теорией предел, связанный с размером бесселева пучка нулевого порядка ($\text{FWHM} = 0,36\lambda$) [65]. Дело в том, что, несмотря на мощную продольную компоненту, в фокальную интенсивность также вносят достаточный вклад поперечные компоненты, увеличивая общий размер центрального пятна. Для минимизации вклада поперечных компонент в фокальную область необходимо прилагать дополнительные усилия. Например, как было показано в предыдущем случае, можно использовать узкую кольцевую диафрагму, позволяющую проходить в фокус только периферийным лучам с наибольшим углом наклона к оптической оси. Но этот простой в реализации способ приводит к значительной потере эффективности.

Для полноапертурного усиления продольной компоненты перспективными являются параболическое зеркало и дифракционная линза [15], а также микроаксикон [21]. Все эти элементы должны быть высокоапертурными, а следовательно, в случае дифракционных элементов микрорельеф будет иметь достаточно сложные в изготовлении субволновые зоны.

Также известны работы, в которых используются зонные пластинки [18, 22, 65], расчет радиусов зон в которых выполняется специальным обра-

зом в зависимости от параметров фокусирующей системы, причем увеличение числа зон более трех нежелательно в связи с потерей эффективности [18].

В данном разделе в качестве аналогичного полноапертурного оптического элемента, удаляющего поперечные компоненты из фокальной области при острой фокусировке радиально-поляризованного пучка, предлагается использовать фазовые аксиконы. Фокальная область при дополнении высокоапертурной линзы даже «слабым» собирающим аксиконом выглядит как конус, острие которого имеет меньший поперечный размер, чем фокусное пятно отдельной линзы. Данный эффект связан с тем, что аксикон увеличивает числовую апертуру центральных лучей линзы и позволяет перенаправить их из фокальной плоскости ближе к плоскости линзы. В зависимости от параметров аксикона можно варьировать протяженность и «остроту» формируемого конуса.

Кроме продольной компоненты, полезными в различных приложениях являются также поперечные составляющие электрического поля. В частности, при прохождении через полые металлические волноводы радиально-поляризованные пучки демонстрируют большие потери энергии на стенках волновода, а азимутально-поляризованные пучки, соответственно, минимальные [66]. Также, различные компоненты векторного электромагнитного поля могут быть использованы для трехмерно-ориентированного возбуждения флуоресцирующих молекул [61].

В данном разделе показано, что при линейной поляризации излучения, которую имеют большинство лазеров, с помощью высокоапертурного линзакона можно сформировать в фокусе световое пятно, имеющее в поперечной компоненте площадь по полуспаду интенсивности $HMA = 0,139\lambda$ вместо $0,237\lambda$ для отдельной линзы. Однако из-за боковых лепестков, состоящих в основном из продольной компоненты, полное световое пятно (сумма интенсивностей всех компонент) в фокусе выглядит сплюснутым по одному направлению. Уменьшить размер светового пятна по этому направлению можно вплоть до $0,32\lambda$.

Также показана эффективность применения вихревых аксиконов [67, 68] в задаче формирования протяженных компактных распределений для круговой и азимутальной поляризаций. В этом случае происходит компенсация поляризационной сингулярности [69], присутствующей в круговой поляризации, что позволяет получать осесимметричные распределения. Аналогичный результат получают при азимутальной поляризации с той разницей, что в этом случае световое пятно более компактно в связи с отсутствием продольной компоненты.

Возможность достижения субволновой локализации света в различных компонентах электрического векторного поля при использовании вихревой пропускающей функции была подробно рассмотрена в предыдущем разделе и работе [70]. В данном разделе показано, что введение вихревой составляющей в аксикон при круговой поляризации позволяет управлять вкладом различных компонент векторного поля в центральной части, а следовательно, и острием фокального конуса, что может быть полезным при взаимодействии электромагнитного излучения с веществами, имеющими избирательную чувствительность к продольной или поперечной составляющей векторного поля [60, 61].

4.3.1. Дополнение линзы аксиконом: параксиальная скалярная модель. При освещении сферической линзы с фокусным расстоянием f плоским пучком, ограниченным круглой диафрагмой радиусом R , в фокальной плоскости линзы формируется картина, поперечная амплитуда которой пропорциональна [71] $\sim J_1(k\rho Rf^{-1})\rho^{-1}$, $k = 2\pi/\lambda$. При этом размер центрального пятна такого распределения определяется первым корнем нуля функции Бесселя первого порядка: $J_1(\gamma_{11}) = 0$, $\gamma_{11} = 3,83$.

Таким образом, минимально достижимый радиус центрального пятна, формируемого линзой от круглой диафрагмы, определяется выражением

$$\rho_{\text{lens}} = \frac{3,83\lambda f}{2\pi R} = 1,22 \frac{\lambda f}{2R}. \quad (4.107)$$

Воспользуемся выражением для числовой апертуры апланатических объектов в среде с показателем преломления n :

$$NA_{\text{lens}} = n \sin \theta \approx n \frac{R}{f}, \quad (4.108)$$

где θ — так называемый апертурный угол объектива (рис. 4.8).

Тогда можно оценить минимальный радиус фокусного пятна в свободном пространстве следующим образом:

$$\rho_{\text{lens}} = \frac{0,61}{NA} \lambda \geq 0,61 \lambda. \quad (4.109)$$

Также размер фокусного пятна определяется по полной ширине на уровне полуспада интенсивности (рис. 4.9), в случае линзы он равен:

$$\text{FWHM}_{\text{min}}^{\text{lens}} = 0,515 \lambda, \quad (4.110)$$

а минимальная площадь фокусного пятна, определяемая по площади на уровне полуспада интенсивности, будет:

$$\text{HMA}_{\text{min}}^{\text{lens}} = \pi \cdot (\text{FWHM}_{\text{min}}^{\text{lens}}/2)^2 \approx 0,21 \lambda^2. \quad (4.111)$$

Продольный размер фокусного пятна связан с понятием глубины фокуса (Depth of Focus, DOF), который для дифракционно-ограниченных систем

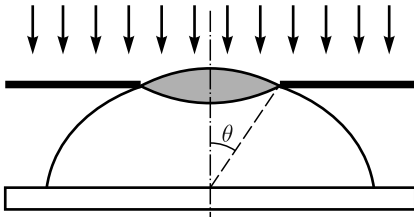


Рис. 4.8. Апертурный угол апланатического объектива

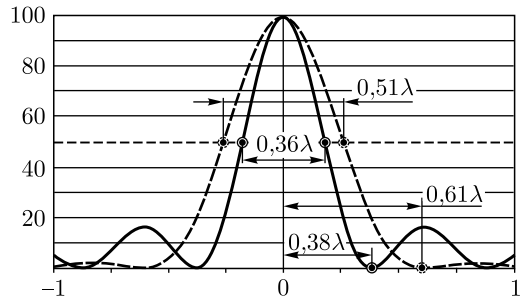


Рис. 4.9. Размер фокусного пятна для линзы (сплошная) и аксикона (пунктир)

оценивается выражением

$$\text{DOF}_{\text{lens}} = \frac{\lambda}{2 \sin^2 \theta} \geq 0,5\lambda, \quad (4.112)$$

из которого очевидно, что при увеличении числовой апертуры глубина фокуса уменьшается и стремится в пределе к половине длины волны.

Также известно [72], что при использовании линзы с узкой кольцевой диафрагмой в фокальной плоскости формируется картина, амплитуда интенсивности которой пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка $\sim J_0(k\alpha_0\rho)$, первый корень которой имеет меньшее значение: $J_0(\gamma_{01}) = 0$, $\gamma_{01} = 2,405$, следовательно, минимально достижимый размер будет меньше.

Однако такая схема является низкоэффективной из-за потери большей части энергии, экранируемой диафрагмой.

Световое поле с интенсивностью, пропорциональной функции Бесселя нулевого порядка, $|J_0(k\alpha_0\rho)|^2$, можно сформировать с помощью более энергетически выгодного оптического элемента — рефракционного аксикона [73], а также дифракционного линейного аксикона или дифракционного бинарного киноформа [74].

Для дифракционного аксикона комплексная функция пропускания описывается выражением

$$\tau_{ax}(r) = \exp(-ik\alpha_0 r), \quad (4.113)$$

параметр α_0 определяет угол сходимости лучей θ от аксикона к оптической оси:

$$\alpha_0 = \sin \theta \quad (4.114)$$

и фактически равен числовой апертуре аксикона.

Радиус центрального пятна в свободном пространстве

$$\rho_{ax} = \frac{2,405}{k\alpha_0} = \frac{0,38}{\sin \theta} \lambda \geq 0,38\lambda. \quad (4.115)$$

Размер центрального светового пятна, определяемый по полной ширине на уровне полуспада интенсивности (рис. 4.9), для аксикона равен

$$\text{FWHM}_{\min}^{ax} = 0,357 \lambda, \quad (4.116)$$

а минимальная площадь фокусного пятна, определяемая по площади на уровне полуспада интенсивности, равна

$$\text{HMA}_{\min}^{ax} = \pi \cdot (\text{FWHM}_{\min}^{ax}/2)^2 = 0,1 \lambda^2. \quad (4.117)$$

Протяженность фокальной области (максимальное расстояние сохранения бездифракционного распространения пучка), равна

$$z_{\max}^{ax} = \frac{R}{\alpha_0} \quad (4.118)$$

и в предельном случае, при $\sin \theta \rightarrow 1$, DOF аксикона равна радиусу оптического элемента R .

Для достижения минимального дифракционного предела в свободном пространстве все перечисленные выше элементы должны обладать предельной числовой апертурой.

Однако если рассмотреть тандем из двух оптических элементов, в частности, такой как линзакон [64], то сформировать фокусное пятно, близкое к дифракционному пределу, можно с помощью более «слабой» оптики [65].

При использовании собирающего аксикона комплексная функция пропускания линзакона имеет вид

$$\tau_{lx}(r) = \exp \left[-ik \left(\alpha_0 r + \frac{r^2}{2f} \right) \right], \quad (4.119)$$

и в этом случае формируется масштабно уменьшающийся бесселев пучок [65] с интенсивностью

$$I_{lx}(\rho, z) \sim \frac{2\pi A^2}{z\alpha_0} \left(\frac{\alpha_0 f z}{f - z} \right)^3 J_0^2 \left(\frac{k\alpha_0 f}{f - z} \rho \right) = \eta(z) J_0^2 [\beta(z)\rho] \quad (4.120)$$

вплоть до расстояния

$$z_{\max}^{lx} = \frac{R}{\alpha_0 + R/f} \leq z_{\max}^{ax}. \quad (4.121)$$

Минимальный радиус центрального светового пятна достигается в конце отрезка масштабного самовоспроизведения:

$$\rho_{\min}^{lx} = \frac{2,405}{2\pi (\sin \theta + R/f)} \lambda = \frac{0,38}{(\sin \theta + R/f)} \lambda, \quad (4.122)$$

и в общем случае он будет меньшего размера, чем фокусное пятно, формируемое каждым из элементов тандема по отдельности.

В зависимости от соотношения α_0 и числовой апертуры линзы уменьшение центрального светового пятна при дополнении аксикона линзой (или наоборот, линзы аксиконом) может быть очень значительным.

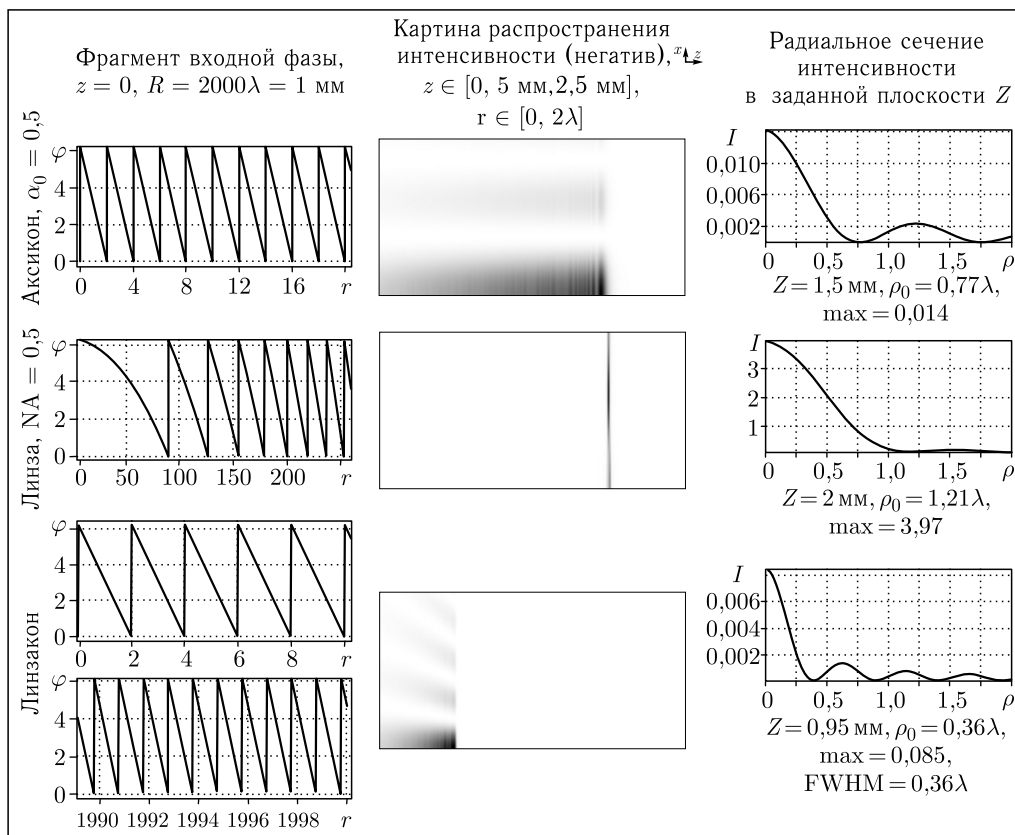
В частности, для $\alpha_0 = 0,5$ ($\rho_{ax} = 0,76\lambda$) и $R/f = 0,5$ ($\rho_{lms} = 1,22\lambda$) должен получиться минимально достижимый для аксикона предел $\rho_{\min}^{lx} = 0,38\lambda$. При $R = 2000\lambda$ (порядка 1 мм для оптических длин волн) $z_{\max}^{ax} = 2R \approx 2$ мм, а $z_{\max}^{lx} = R \approx 1$ мм.

Для численного моделирования действия линзакона в параксиальном случае можно использовать преобразование Френеля для аксиально-симметричных полей:

$$F(\rho, z) = \frac{k}{iz} \exp(ikz) \exp \left(\frac{ik\rho^2}{2z} \right) \int_0^\infty \tau(r) \exp \left(\frac{ikr^2}{2z} \right) J_0 \left(\frac{kr\rho}{z} \right) r dr. \quad (4.123)$$

В таблице 4.17 приведены результаты вычислений при следующих параметрах: $\lambda = 0,5$ мкм, $R = 1$ мм, $f = 2$ мм (числовая апертура $NA = R/f = 0,5$), $\alpha_0 = 0,5$, для подынтегральных функций использовалась дискретность 20 отсчетов на длину волны, а осевая область радиусом 2λ (1 мкм) имела дискретность 50 отсчетов на длину волны. Продольное распределение интенсивности вычислялось в диапазоне $z \in [0,5 \text{ мм}, 2,5 \text{ мм}]$.

Таблица 4.17. Среднеапертурный линзакон в параксиальной модели



Результаты численного моделирования вполне согласуются с приведенными выше рассуждениями. Продольные картины распространения наглядно показывают, как происходит перераспределение энергии вдоль оптической оси.

Соединение линзы с аксиконом, с одной стороны, уменьшает отрезок самовоспроизведения бездифракционного пучка по сравнению с аксиконом в 2 раза, но, с другой стороны, формируется более компактная картина, и интенсивность в центральном световом пятне увеличивается почти на порядок. По сравнению с линзой фокусное пятно имеет почти в 5 раз меньшую интенсивность, но глубина фокуса при этом увеличивается в 40 раз.

4.3.2. Аподизация короткофокусной линзы аксиконом: непараксиальная векторная модель в приближении Дебая. Рассмотрим высокоапертурную апланатическую фокусирующую оптическую систему (4.68) в радиально-вихревом представлении (4.74).

Линейная x -поляризация. Излучение большинства современных лазеров имеет линейную поляризацию. На рисунке 4.10 показаны графики осевого распределения интенсивности, формируемого линзаконном радиусом $R = 1 \text{ мм}$,

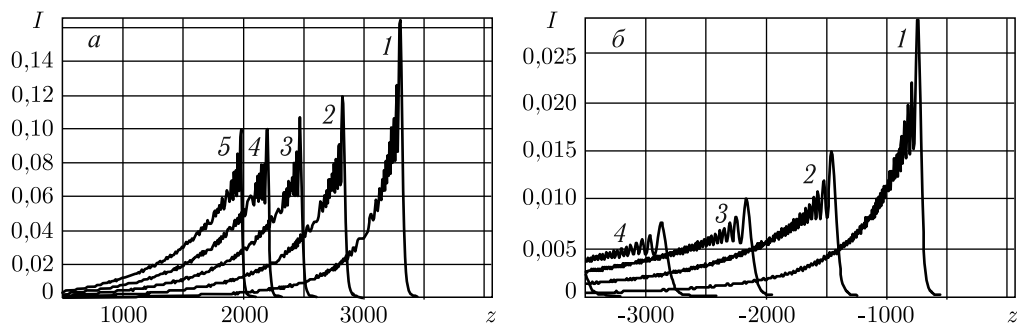


Рис. 4.10. Картина осевого распределения интенсивности, формируемого линзаконом в параксиальном (а) и непараксиальном (б) случаях для линзы с $NA = 0,5$ ($R = 2000\lambda$, $f = 4000\lambda$) и аксиконов с α_0 : 0,1 (1), 0,2 (2), 0,3 (3), 0,4 (4), 0,5 (5)

составленным из линзы с фокусным расстоянием $f = 2$ мм ($NA = 0,5$) и аксиконов с различными значениями параметра α_0 (от 0,1 до 0,5) с использованием параксиальной (рис. 4.10, а) и непараксиальной векторной (рис. 4.10, б) моделей. В последнем (непараксиальном) случае падающая волна была линейно-поляризованной, и на рис. 4.10, б приведена результирующая интенсивность волны. Рассматриваемая область имеет размеры $z \in [500\lambda, 4000\lambda]$ с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм, в непараксиальной модели отсчет расстояния идет от фокальной плоскости.

По результатам, приведенным на рис. 4.10, видно, что при использовании слабого аксикона имеется хорошее согласование результатов параксиальной и непараксиальной модели, однако при увеличении числовой апертуры аксикона рассогласование становится все сильнее, и при $\alpha_0 = 0,5$ приближение Дебая фактически перестает работать, так как рассматриваемая область слишком удаляется от плоскости фокуса.

Данной ситуации можно избежать, если повысить числовую апертуру фокусирующей линзы.

На рисунке 4.12 приведены результаты для тандема радиусом $R = 1$ мм, состоящего из линзы с фокусным расстоянием $f = 1,05$ мм ($NA = 0,95$) и ак-

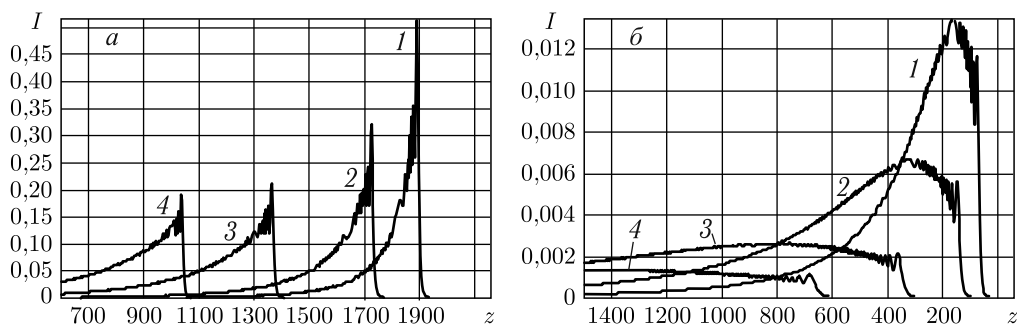


Рис. 4.11. Картина осевого распределения интенсивности, формируемого линзаконом в параксиальном (а) и непараксиальном (б) случаях для линзы с $NA = 0,95$ ($R = 2000\lambda$, $f = 2100\lambda$) и аксиконов с α_0 : 0,1 (1), 0,2 (2), 0,5 (3), 0,95 (4)

сиконов с различными значениями параметра α_0 (от 0,1 до 0,95) при этом рассматриваемый осевой отрезок $z \in [600\lambda, 2150\lambda]$. Применение параксиальной модели при использовании высокоапертурных оптических элементов некорректно, поэтому результаты для двух моделей существенно различаются.

Далее будет рассматриваться линзакон, включающий высокоапертурную линзу с фокусом $f = 101\lambda$ и радиусом $R = 100\lambda$. Для инфракрасного диапазона длин волн (например, $\lambda = 10$ мкм) такой элемент нельзя отнести к микрооптическим, так как для ста длин волн уже достигается радиус $R = 1$ мм, что достаточно удобно для проведения экспериментов.

В приближении Дебая корректность результатов обеспечивается при высоком значении числа Френеля

$$N_F = \frac{R^2}{\lambda f}. \quad (4.124)$$

В данном случае $N_F \approx 100$ достаточно велико [55].

Результаты численного моделирования для отдельной линзы с фокусом $f = 101\lambda$ и радиусом $R = 100\lambda$ и линзакон с различными аксиконами приведены в табл. 4.18. Число отсчетов по азимутальному углу равно 2001, поперечный размер фокальной области — $4\lambda \times 4\lambda$.

Как видно из табл. 4.18, при острой фокусировке поведение пучка, формируемого линзаконном со слабым аксиконом, близко к предсказанному параксиальной моделью.

Однако поперечное сечение из-за вклада продольной составляющей перестает быть симметричным и выглядит сплюсненным. При этом по вертикальной оси удается преодолеть предел, достигаемый не только линзой, но и аксиконом: $\text{FWHM} = 0,32\lambda$. Важно отметить, что в тандеме с сильной линзой, используя даже слабый аксикон (в частности, с числовой апертурой 0,1), в одном из направлений можно достичь предела, обеспечиваемого отдельно высокоапертурным аксиконом ($\text{FWHM} = 0,36\lambda$).

В таблице также приведены картины интенсивности в логарифмической шкале для визуализации «тонкой» структуры поля, включая области низкой интенсивности. Как видно, при дополнении линзы аксиконом коническая структура в фокальной области сохраняется даже в области низкой интенсивности. т.е. когда энергия на острие конуса обрывается, пучок не расходится сразу, как в случае с линзой, а некоторое время сохраняется узкая локализация световой энергии, но в малом количестве.

На рисунке 4.12 приведены результаты сравнения параксиальной и непараксиальной моделей для тандема радиусом $R = 100\lambda$ из линзы с фокусным расстоянием $f = 101\lambda$ мм ($NA = 0,95$) и аксиконов с различными значениями параметра α_0 : от 0 (отсутствие аксикона) до 0,95. Рассматриваемый осевой отрезок $z \in [20\lambda, 120\lambda]$, в поперечной плоскости $\rho \in [0, 0,6\lambda]$. В непараксиальном векторном случае поперечное распределение перестает быть симметричным, поэтому на рис. 4.12, *з* приведено вертикальное сечение, когда общая интенсивность совпадает с интенсивностью x -компоненты.

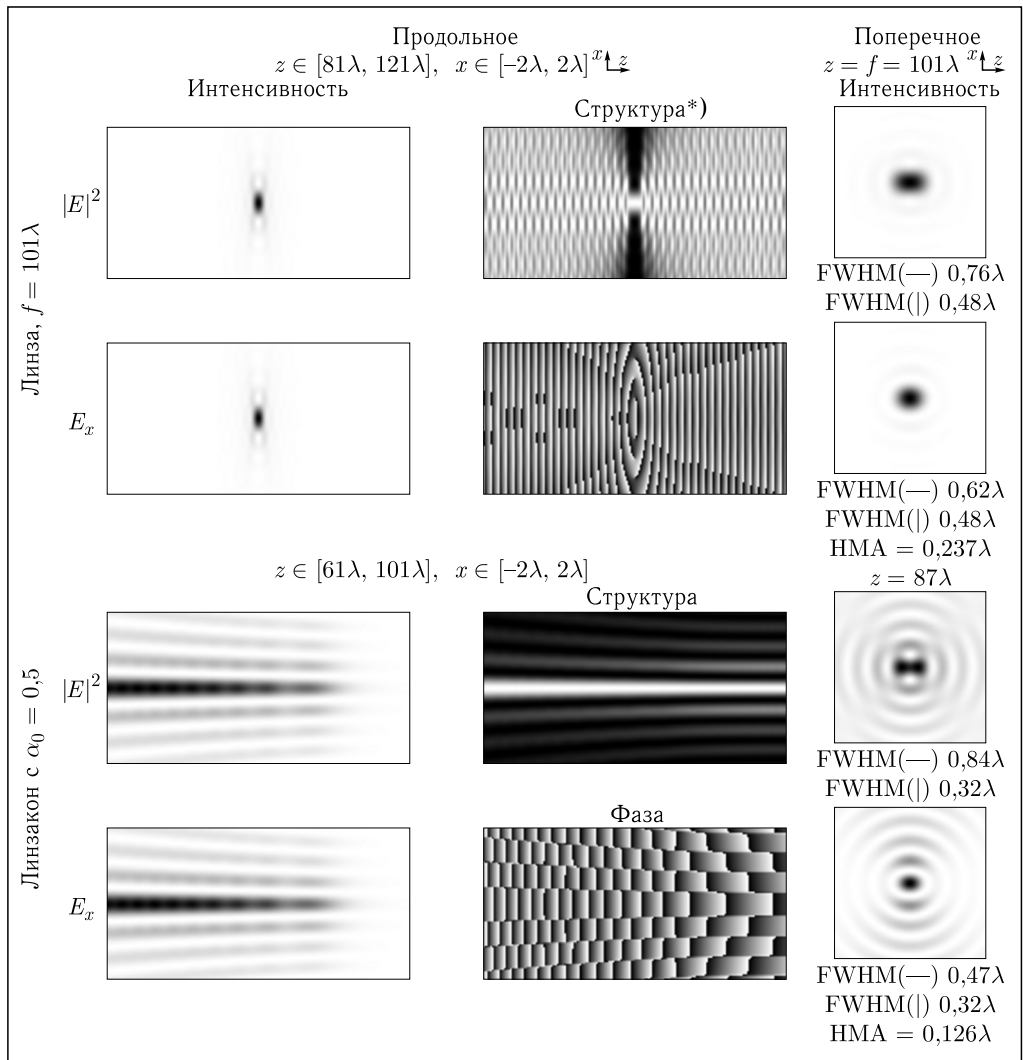
Как видно из рис. 4.12, *б*, для высокоапертурных линзы и аксикона параксиальная модель предсказывает уменьшение радиуса центрального светового

пятна до $0,2\lambda$ и результирующую при использовании непараксиальной векторной модели оценка сужения получается только до $0,33\lambda$ по одной координате.

В интенсивность осевого распределения основной вклад вносит x -компонента

$$E_x(\rho, z) = -\frac{kf}{2} \int_0^\alpha B(\theta) \exp(ikz \cos \theta) \sqrt{\cos \theta} (1 + \cos \theta) J_0(k\rho \sin \theta) \sin \theta d\theta. \quad (4.125)$$

Таблица 4.18. Продольное и поперечное распределения для волны с линейной x -поляризации



Продолжение табл. 4.18

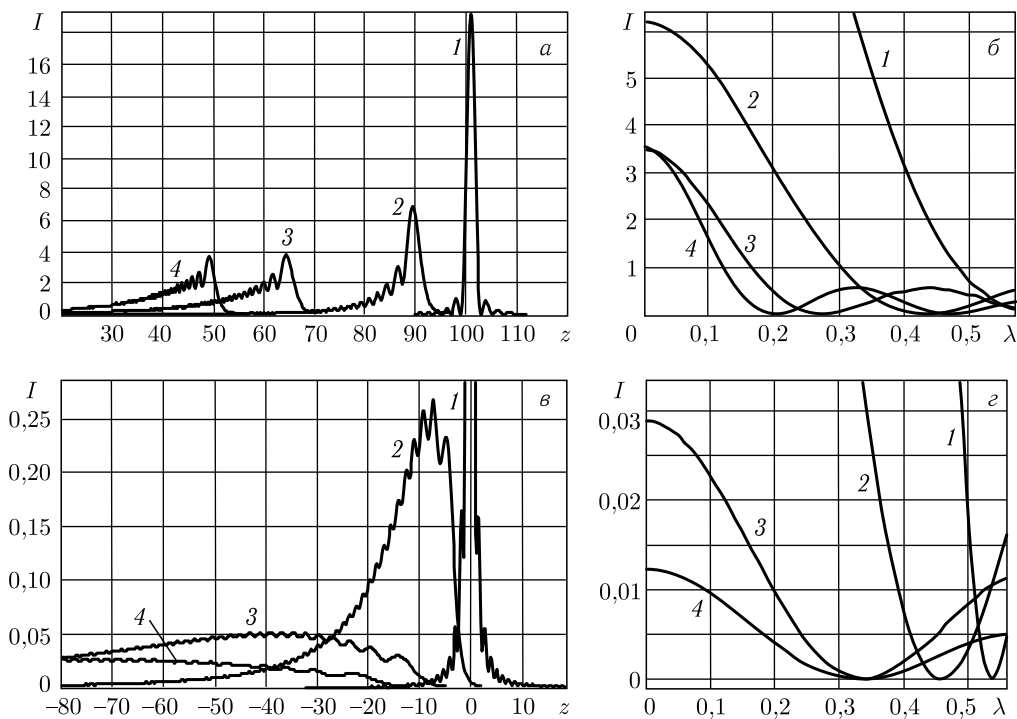
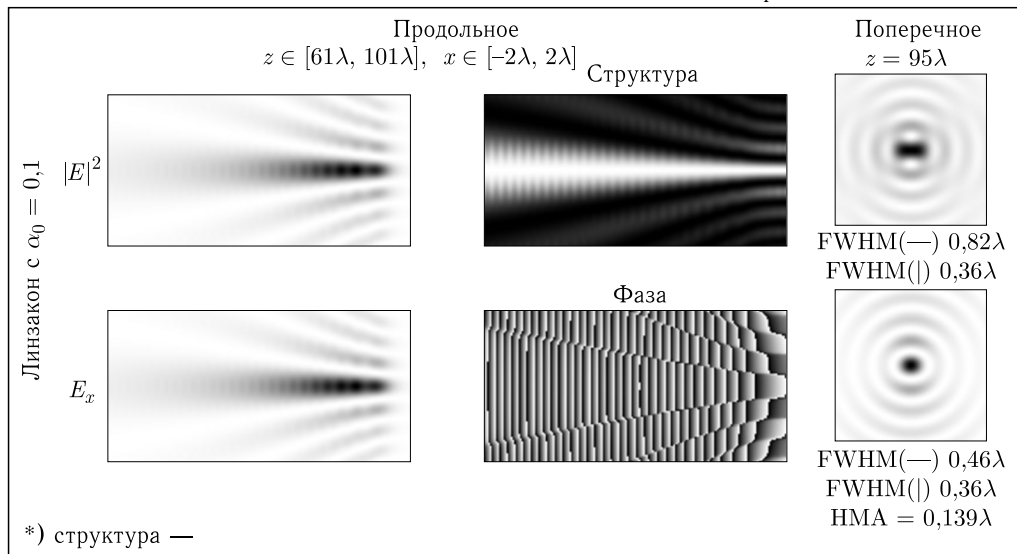


Рис. 4.12. Графики осевого (а), (е) и поперечного вертикального (б), (з) распределений интенсивности, формируемых линзаком в параксиальном (а), (б) и непараксиальном (е), (з) случае для линзы с $NA = 0,95$ ($R = 100\lambda$, $f = 101\lambda$) и аксионов с α_0 : 0 (без аксиона, 1), 0,1 (2), 0,5 (3) и 0,95 (4)

Наложение на линзу узкой кольцевой диафрагмы с функцией пропускания $B(\theta) = \delta(\theta - \theta_0)$ приведет к формированию волны, интенсивность которой пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка и не зависит от дефокусировки z :

$$|E_x(\rho, z)|^2 = \frac{(kf)^2}{4} J_0^2(k\rho \sin \theta_0) \left| \cos \theta_0 (1 + \cos \theta_0)^2 \sin^2 \theta_0 \right|. \quad (4.126)$$

Радиус центрального пятна связан с азимутальным углом θ_0 и не может быть меньше, чем

$$\rho_{\min}^\delta = 0,38\lambda. \quad (4.127)$$

Если используется аксикон, то распределение E_x на оси (при $\rho = 0$) описывается выражением

$$E_x(0, z) = \frac{kf}{2} \int_0^\alpha \exp[ik(z \cos \theta - \alpha_0 f \sin \theta)] \sqrt{\cos \theta} (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (4.128)$$

из которого видно, что при малых значениях числовой апертуры, т. е. малых углах θ , влияние аксикона незначительно, если же числовая апертура возрастает, то влияние усиливается, а при $\cos(\theta) \rightarrow 0$ зависимость от расстояния z исчезает.

Радиальная поляризация. В этом случае при использовании высокоапертурной фокусирующей оптической системы основной вклад в результирующую интенсивность осевого распределения вносит продольная компонента [75]:

$$E_z(\rho, z) = -kf \int_0^\alpha B(\theta) \exp(ikz \cos \theta) \sqrt{\cos \theta} J_0(k\rho \sin \theta) \sin^2 \theta d\theta. \quad (4.129)$$

Наложение на линзу узкой кольцевой диафрагмы также приводит к формированию функции Бесселя нулевого порядка

$$|E_z(\rho, z)|^2 = (kf)^2 J_0^2(k\rho \sin \theta_0) \left| \cos \theta_0 \sin^4 \theta_0 \right|, \quad (4.130)$$

но ее интенсивность (4.130) при $\theta_0 \rightarrow 90^\circ$ будет значительно больше, чем интенсивность (4.126). В частности, при $\theta_0 = 82^\circ$ интенсивность возрастает в 3 раза.

Тем не менее, диафрагмирование оптической системы связано с потерей энергетической эффективности, поэтому желательно выполнять не амплитудную, а фазовую аподизацию функции зрачка.

Если используется аксикон, то интенсивность на оси (при $\rho = 0$) описывается выражением, аналогичным выражению (4.128):

$$E_z(\rho, z) = -kf \int_0^\alpha \exp[ik(z \cos \theta - \alpha_0 f \sin \theta)] \sqrt{\cos \theta} \sin^2 \theta d\theta. \quad (4.131)$$

Определить расстояние, на котором осевое значение не слишком меняется, можно из условия

$$z_{\max} \leq \frac{\varepsilon}{\cos \theta} + \alpha_0 f \operatorname{tg} \theta, \quad (4.132)$$

из которого ясно, что при $\theta \rightarrow 90^\circ$ $z_{\max} \rightarrow \infty$ (аналогично введению узкой кольцевой апертуры), а при малых θ должно быть $z_{\max} \leq \varepsilon + \alpha_0 f \theta$, т.е. увеличение диапазона слабого изменения функции (4.131) происходит за счет внесения слагаемого $\alpha_0 f \theta$, связанного с фазовой функцией аксикона.

Таким образом, дополнение линзы аксиконом увеличивает числовую апертуру линзы на постоянную величину, что для высокоапертурных линз сказывается только на лучах, проходящих через центральную часть (рис. 4.13, а).

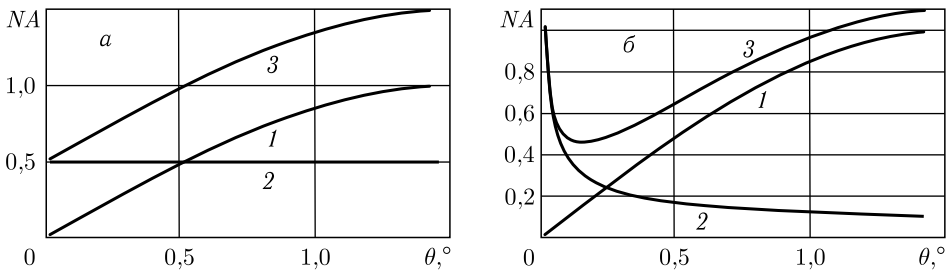


Рис. 4.13. График зависимости числовой апертуры NA от θ для линзакона (а), линия 1 соответствует высокоапертурной линзе, (2) — аксикону с $\alpha_0 = 0,5$, а (3 — суммарной числовой апертуре) и линзы, дополненной фраксиконом (б) $\exp(-i\sqrt{r})$

Очевидно, оптимальным в смысле выравнивания числовой апертуры дополнением к линзе является фазовый элемент, числовая апертура которого имеет зависимость $1 - \sin \theta$. Такой тандем будет работать как «сильный» линейный аксикон.

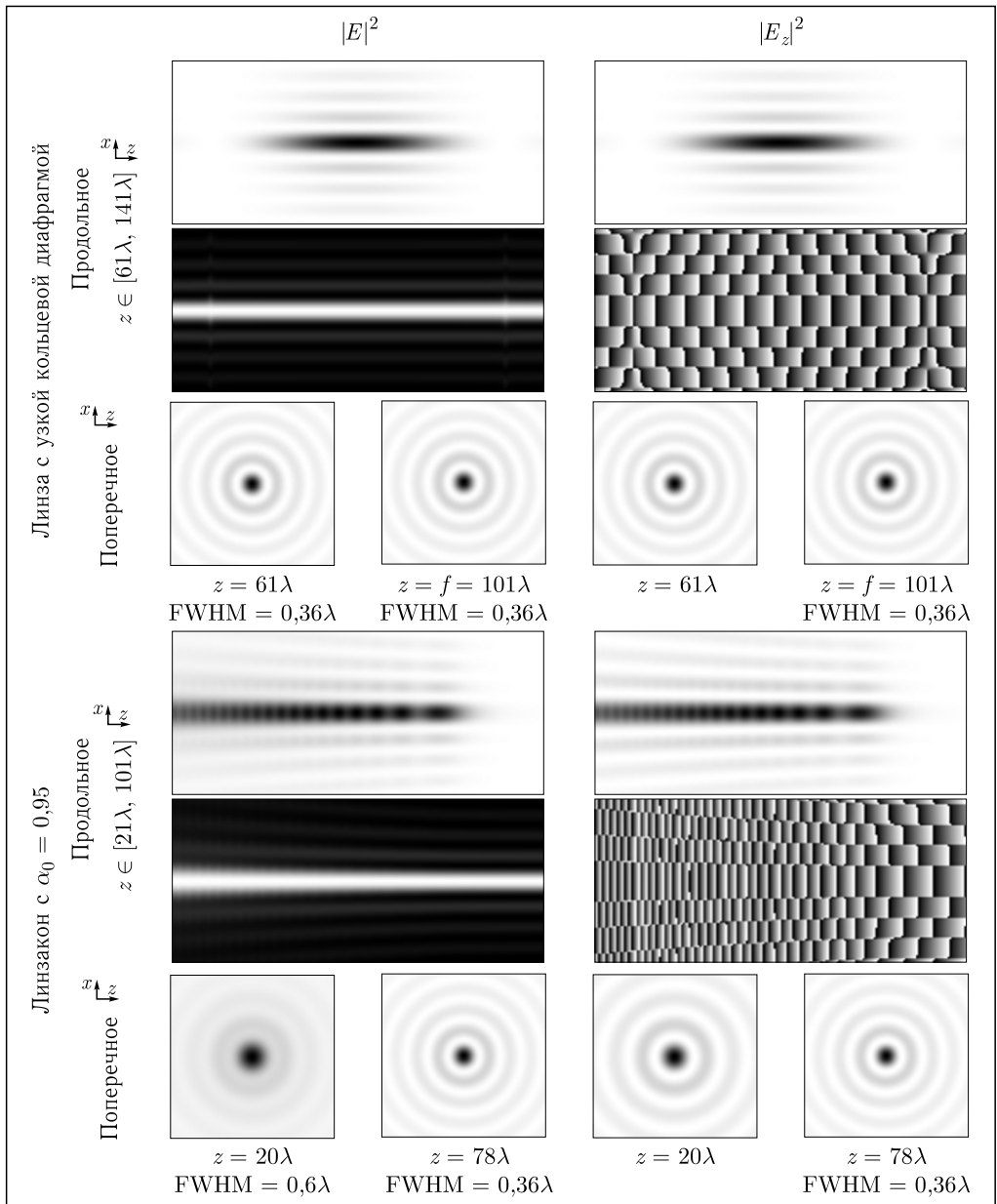
На рисунке 4.13, б приведен пример дополнения высокоапертурной линзы фраксиконом [42], $\exp(-i\alpha\sqrt{r})$ с $\alpha = 1$. В этом случае числовая апертура почти нигде не превосходит предельное для свободного пространства значение и существенно увеличивается в центральной части.

В таблице 4.19 приведены результаты численного моделирования фокусировки плоской волны, ограниченной кольцевой диафрагмой с радиусами $R_1 = 99\lambda$ и $R_2 = 100\lambda$, линзой с фокусным расстоянием 101λ , а также фокусировки плоской волны, ограниченной круглой диафрагмой с радиусом $R = 100\lambda$, линзаконом с параметром аксикона $\alpha_0 = 0,95$ ($z_{\max}^{ax} \approx 105\lambda$) при радиальной поляризации. Число отсчетов по азимутальному углу равно 2001. Поперечный размер — $4\lambda \times 4\lambda$.

Как видно из табл. 4.19 в случае радиальной поляризации распределение полной интенсивности имеет радиальную симметрию. Радиус центрального светового пятна достигает предсказанного для функции Бесселя нулевого порядка минимального значения и больше не уменьшается.

Вклад поперечных компонент для линзы с узкой (шириной λ) кольцевой диафрагмой практически отсутствует в фокальной области. Потеря энергии при диафрагмировании пропорциональна площади блокируемой центральной части линзы.

Таблица 4.19. Продольное и поперечное распределения при радиальной поляризации для линзы с узкой кольцевой диафрагмой и линзакон с высокоапертурным аксиконом



Для линзакон с полной апертурой, а значит, без потерь световой энергии падающей волны, формируется коническая фокальная область, на острие которой вклад поперечных компонент также отсутствует. При увеличении

числовой апертуры аксикона фокальный конус становится более вытянутым вдоль оптической оси (табл. 4.20) с почти равномерно распределенной интенсивностью (рис. 4.14). Заметим, что сердцевина и острие конуса содержат только продольную компоненту, а «оперение» дополняется поперечной составляющей (рис. 4.15).

Таблица 4.20. Продольное распределение при радиальной поляризации для полноапертурной линзы и линзаконов с низкоапертурными аксиконами, поперечный размер — $4\lambda \times 4\lambda$

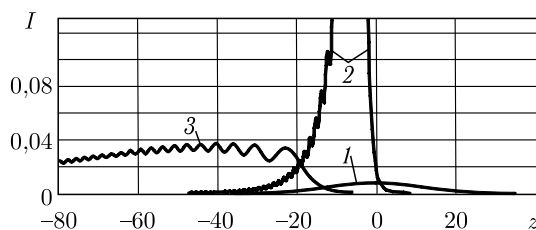
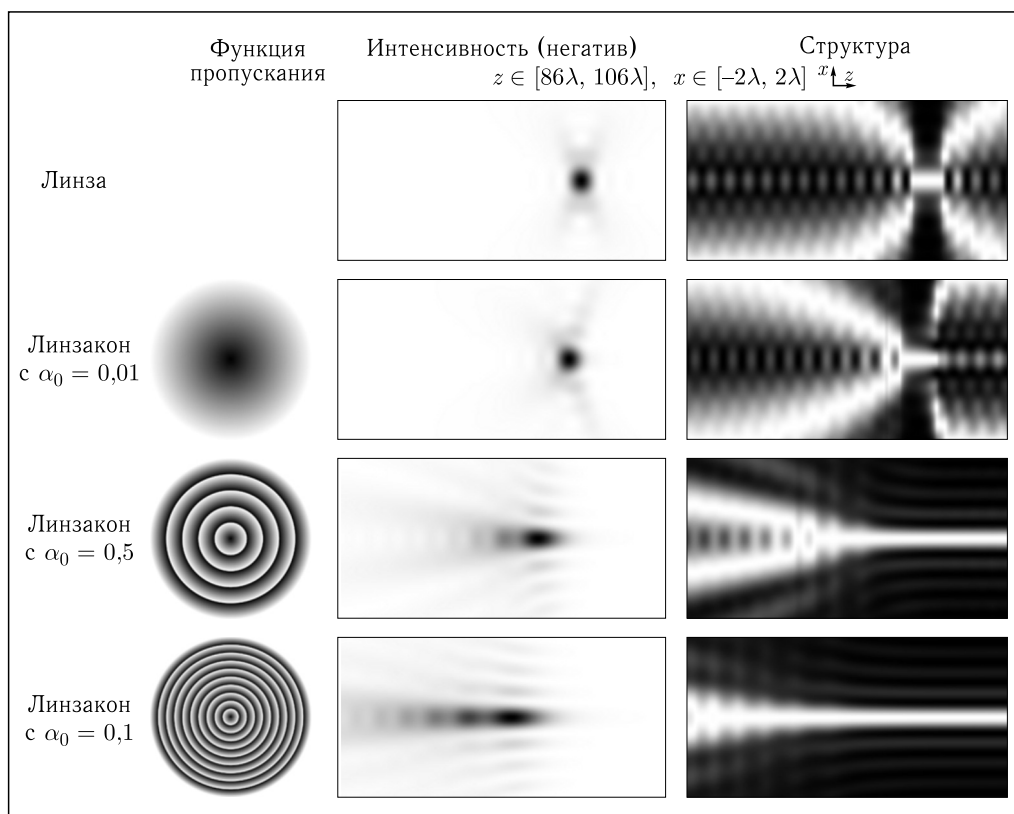


Рис. 4.14. Осевое распределение результирующей интенсивности, формируемое линзой с узкой кольцевой диафрагмой (1) и полноапертурным линзакон с $\alpha_0 = 0,1$ (2) и линзакон с $\alpha_0 = 0,95$ (3)

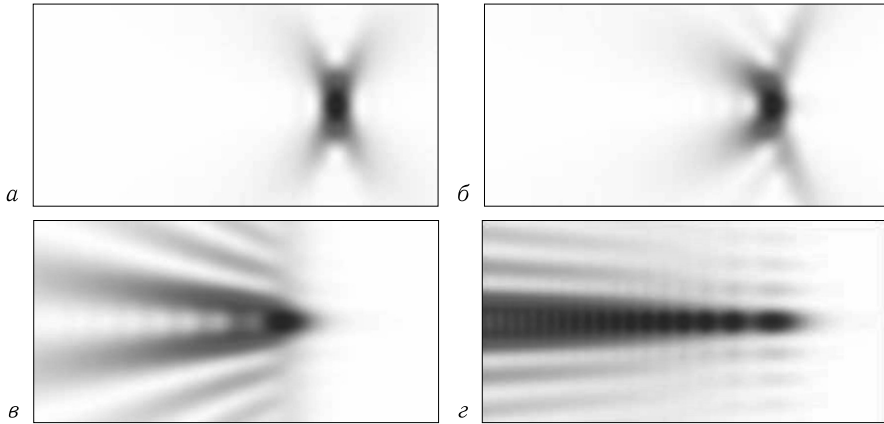


Рис. 4.15. Продольное распределение поперечной составляющей (красный цвет) и продольной компоненты (синий цвет) для (а) отдельной линзы и линзаконов с (б) $\alpha_0 = 0,01$, (в) $\alpha_0 = 0,05$ и (г) $\alpha_0 = 0,95$

4.3.3. Использование вихревых аксиконов для пространственного перераспределения компонент электрического поля в фокальной области. В работе [75] была показана возможность субволновой локализации излучения при острой фокусировке вихревого поля. Причем для азимутальной и круговой поляризаций центральное световое пятно будет симметричным.

При азимутальной поляризации эффект субволновой локализации возможен только для поперечной составляющей напряженности электрического поля, а при круговой поляризации и для продольной компоненты.

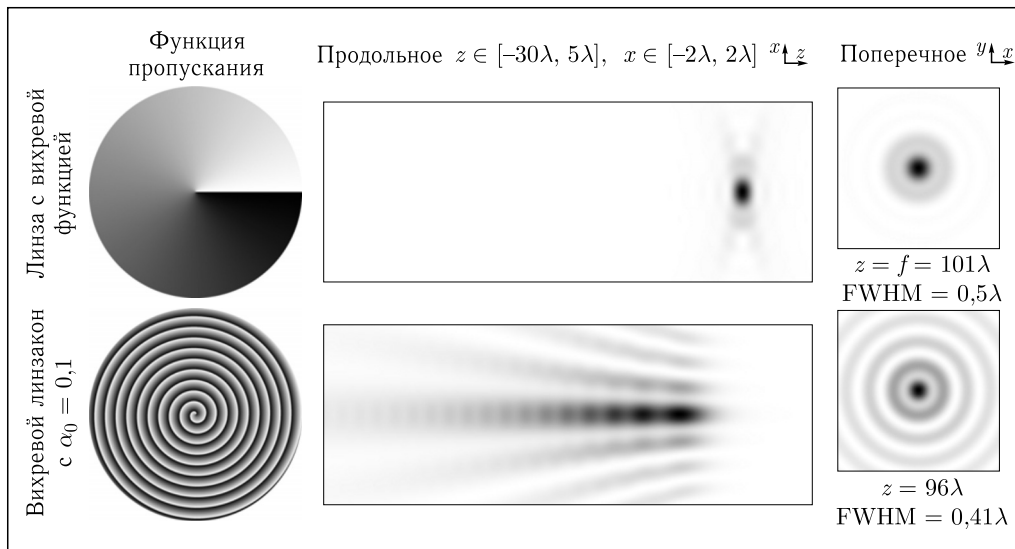
Азимутальная поляризация. В разделе 4.2 было показано, что для азимутальной поляризации наличие вихревой составляющей в функции пропускания (4.72) приводит к выражению для напряженности в фокальной области в виде (4.98). Как следует из выражения (4.98), продольная составляющая всегда отсутствует.

На оптической оси (при $\rho = 0$) фокальное поле будет содержать ненулевые компоненты только для одного порядка вихревой сингулярности ($|m| = 1$), которые выражаются через $J_0(t)$.

Круговая поляризация. Для круговой поляризации наличие вихревой составляющей в функции пропускания позволяет получить в фокальной области поле вида (4.97). На оптической оси (при $\rho = 0$) напряженность в фокальной области будет содержать ненулевые компоненты для порядков вихревой сингулярности $|m| \leq 2$, которые также выражаются через функции Бесселя нулевого порядка.

Применение вихревых фильтров позволяет выделять в осевом распределении различные компоненты напряженности электрического поля (продольную или поперечную): фазовая вихревая сингулярность компенсирует поляризационные сингулярности [69, 75], и в различных компонентах получаются ненулевые осевые слагаемые, пропорциональные $J_0(t)$, что определяет минимально достижимый размер центрального пятна бесселева пучка нулевого порядка, т. е. $\text{FWHM} = 0,36\lambda$.

Таблица 4.21. Продольное и поперечное ($4\lambda \times 4\lambda$) распределения полной интенсивности поля для азимутально-поляризованной вихревой функции пропускания ($|m| = 1$) и вихревого линзакона



Если использовать слабые вихревые аксиконы, как показано в табл. 4.23, то интенсивность на отрезке масштабного воспроизведения существенно варьируется и формирование компактного светового пятна происходит только в конце этого отрезка. Однако значение интенсивности на острие фокального конуса в этом случае значительно больше (сравнение приведено на рис. 4.12, в), что может быть актуально в некоторых задачах.

Таким образом, результаты численного моделирования в приближении Дебая показывают, что можно выполнить формирование компактного светового пятна при использовании в тандеме высокоапертурной линзы и низкоапертурного аксикона. Увеличение числовой апертуры аксикона приведет к более протяженному формированию компактной в поперечном направлении фокальной области при почти равномерном распределении интенсивности вдоль этой области, что повлечет уменьшение интенсивности в каждом отдельном поперечном сечении.

4.3.4. Выводы. В параграфе 4.3 рассмотрено в приближении Дебая применение аксиконов в высокоапертурных фокусирующих системах с различной поляризацией.

В результате исследований подтверждена возможность уменьшения размера фокусного пятна, формируемого высокоапертурной линзой, за счет дополнения такой линзы дифракционным аксиконом (эффект наблюдается даже при использовании низкоапертурного аксикона). Данный подход является альтернативным и энергетически эффективным по сравнению с кольцевым диафрагмированием.

Фокальная область при использовании такого линзакона выглядит как конус, что согласуется с результатами параксиального моделирования [65].

Таблица 4.22. Продольные и поперечные ($4\lambda \times 4\lambda$) распределения интенсивности волны и интенсивности ее компонент для вихревого линзакон с $\alpha_0 = 0,95$ ($|m| \leq 2$) и высокоапертурной линзы ($NA = 0,95$) при круговой поляризации

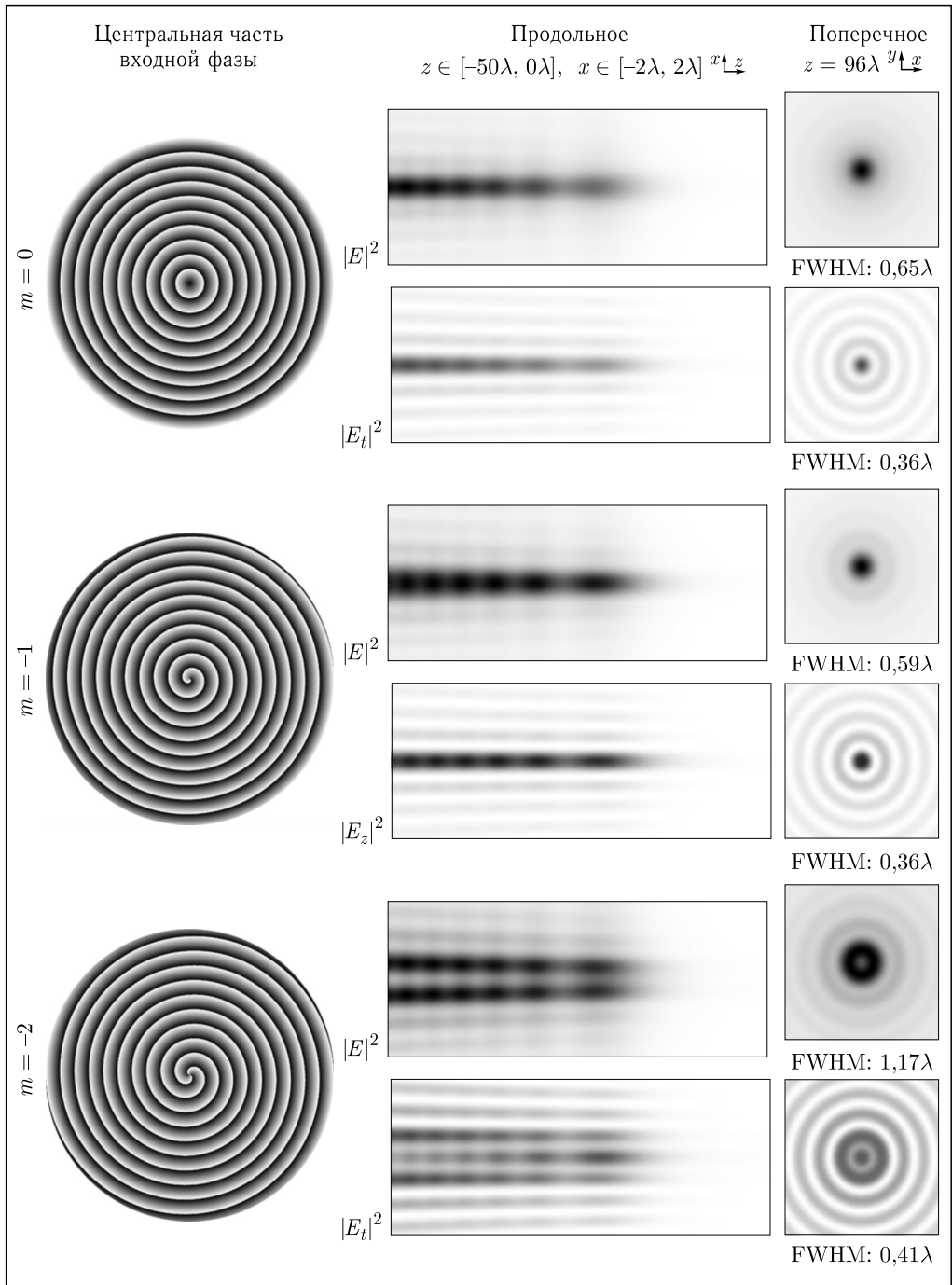
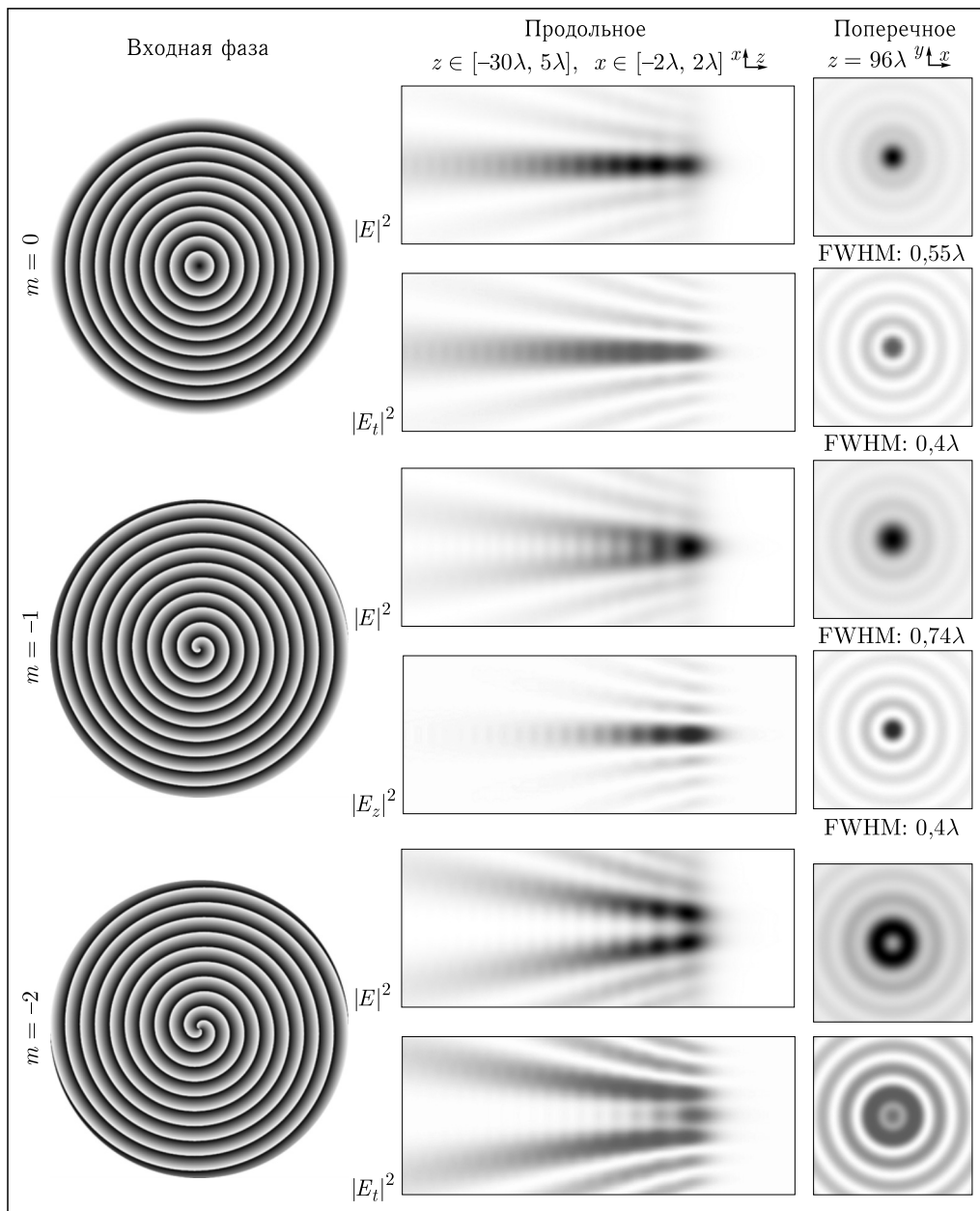


Таблица 4.23. Продольные и поперечные ($4\lambda \times 4\lambda$) распределения интенсивности волны и интенсивности ее компонент для вихревого линзакона с $\alpha_0 = 0,1$ ($|m| \leq 2$) и высокоапертурной линзы ($NA = 0,95$) при круговой поляризации



Однако в отличие от параксиальной модели, непараксиальные оценки определяют в качестве минимально достижимого предела размер центрального пятна бесселева пучка нулевого порядка (FWHM = $0,36\lambda$). В зависимости от

«силы» дифракционного аксикона фокусировка в область таких субволновых размеров происходит на более или менее протяженном отрезке.

Тем не менее, в случае линейной поляризации этот предел удастся преодолеть ($\text{FWHM} = 0,32\lambda$) в одном из поперечных направлений.

При круговой поляризации уменьшения размера фокусного пятна при сохранении его осевой симметрии можно достичь применением вихревых аксиконов. В этом случае происходит компенсация поляризационной сингулярности, присутствующей в круговой поляризации.

Аналогичная компенсация получается при азимутальной поляризации с той разницей, что в этом случае световое пятно будет более компактным в связи с отсутствием продольной компоненты.

Кроме того, в п. 4.3 показано, что введение вихревой составляющей (первого и второго порядка) в аксикон при круговой поляризации позволяет управлять вкладом различных компонент напряженности электрического поля в сердцевину и острие фокального конуса. При этом в каждой отдельной компоненте можно достичь субволновой локализации света ($\text{FWHM} = 0,41\lambda$), что может быть полезным при взаимодействии электромагнитного излучения с веществами, имеющими избирательную чувствительность к различным компонентам векторного поля.

4.4. Управление вкладом компонент векторного электрического поля в фокусе высокоапертурной линзы с помощью бинарных фазовых структур

В предыдущем разделе показана возможность выделения отдельных компонент напряженности электрического поля при использовании в качестве дополнительной функции пропускания линзы аксиконов и вихревых аксиконов. Однако изготовление многоуровневых дифракционных оптических элементов, позволяющих реализовать такую функцию пропускания, сопряжено с определенными сложностями. С другой стороны, суперпозицию оптических вихрей с противоположными знаками можно производить с помощью бинарной фазовой функции [76, 77].

В данном разделе рассматривается изменение вклада различных компонент напряженности электрического поля в интенсивность в фокальной области с помощью дополнения этой системы бинарными фазовыми дифракционными оптическими элементами.

4.4.1. Максимизация продольной компоненты для линейно-поляризованного излучения. Так как большинство современных лазеров излучает линейно-поляризованный свет, а использование поляризационных конверторов приводит к существенному усложнению оптической схемы, поиск простых способов уменьшения размера фокусного пятна при линейной поляризации остается актуальным. Без потери общности рассмотрим поляризацию вдоль одной из поперечных осей.

При линейной x -поляризации и в отсутствие y функции пропускания (4.71) вихревых компонент, $\Omega_B(\phi) = 1$, на оптической оси отличной от нуля

будет только x -компонента вектора (4.74):

$$E_x(0, 0, z) = -\frac{ikf}{2} \int_0^\alpha R(\theta)T(\theta) \sin \theta (\cos \theta + 1) \exp(ikz \cos \theta) d\theta. \quad (4.133)$$

Если же $\Omega_B(\phi) = \cos \phi$, тогда на оптической оси отличной от нуля будет только z -компонента:

$$E_z(0, 0, z) = \frac{ikf}{2} \int_0^\alpha R(\theta)T(\theta) \sin^2 \theta \exp(ikz \cos \theta) d\theta; \quad (4.134)$$

при $\Omega_B(\phi) = \sin \phi$ результирующая интенсивность световой волны, $|E|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$, всегда равна нулю.

Если же $\Omega_B(\phi) = \sin 2\phi$, тогда на оптической оси отличной от нуля будет только y -компонента:

$$E_y(0, 0, z) = -\frac{ikf}{2} \int_0^\alpha R(\theta)T(\theta) \sin \theta (1 - \cos \theta) \exp(ikz \cos \theta) d\theta. \quad (4.135)$$

Выражения в формулах (4.133)–(4.135) при прочих равных условиях отличаются подынтегральными функциями: $(1 + \cos \theta)$ для x -компоненты, $\sin \theta$ для z -компоненты и $(1 - \cos \theta)$ для y -компоненты, соответственно. Очевидно, в диапазоне углов $\theta \in [0, \pi/2]$ суммарный вклад для x -компоненты будет больше, чем для y -компоненты.

На рисунке 4.16 показан ход лучей при острой фокусировке линейно-поляризованного поля. При наличии бинарной фазы, меняющей направление векторов для половины лучей на противоположное, продольные компоненты будут складываться, а поперечные — вычитаться.

В таблице 4.24 приведены результаты численного моделирования для апланатического (свободного от сферической аберрации и комы) объектива с числовой апертурой $NA_{\text{obj}} \approx 0,99$. В этом случае используется функция аподизации зрачка $T(\theta) = \sqrt{\cos \theta}$. Красный и зеленый цвета (см. электронную версию) соответствуют поперечным компонентам (x и y), а синий — продольной компоненте. В таблицах также приведены значения полной ширины по полуспаду интенсивности в горизонтальном направлении $\text{FWHM}(-)$, площадь по полуспаду интенсивности НМА и значение интенсивности в центральной точке фокальной плоскости $I(0, 0, 0)$.

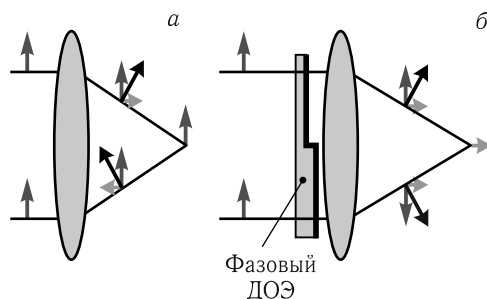


Рис. 4.16. Действие бинарной фазовой функции пропускания высокоапертурной линзы при линейной поляризации

Таблица 4.24. Результаты моделирования для апланатического объектива с $NA = 0,99$ при линейной x -поляризации, $R(\theta) = 1$

Фазовая функция пропус- кания	Продольное горизонтальное распределение в плоскости $y = 0$ ($\begin{smallmatrix} x \\ \uparrow \\ z \end{smallmatrix}$) $z \in [-3\lambda, 3\lambda]$, $x \in [-1,5\lambda, 1,5\lambda]$			Поперечное распределение в фокусе $ E ^2$ ($\begin{smallmatrix} x \\ \uparrow \\ y \end{smallmatrix}$)	FWHM(), НМА $I(0, 0, 0)$
	$ E_x ^2$	$ E_z ^2$	$ E ^2$		
					0,75λ 0,28λ ² 3,32
					1,52λ 0,64λ ² 1,58
					0,42λ (нет) 0,07

Как видно из табл. 4.24, введение линейной фазовой сингулярности приводит к исключению в центре фокальной области поперечных компонент и появлению продольной (кроме 3-й строки), причем максимальное значение будет достигаться при перпендикулярном расположении сингулярной линии и направления поляризации.

Для дифракционных линз используется правило Гельмгольца и функция аподизации зрачка $T(\theta) = (1/\cos \theta)^{3/2}$ [15]. На основании сравнения функций аподизации зрачка для объектива и дифракционной линзы (см. рис. 4.4) в [15] было сделано предположение, что с помощью параболического зеркала или дифракционной линзы можно достичь более компактной фокусировки.

Числовая апертура для дифракционных линз определяется по формуле:

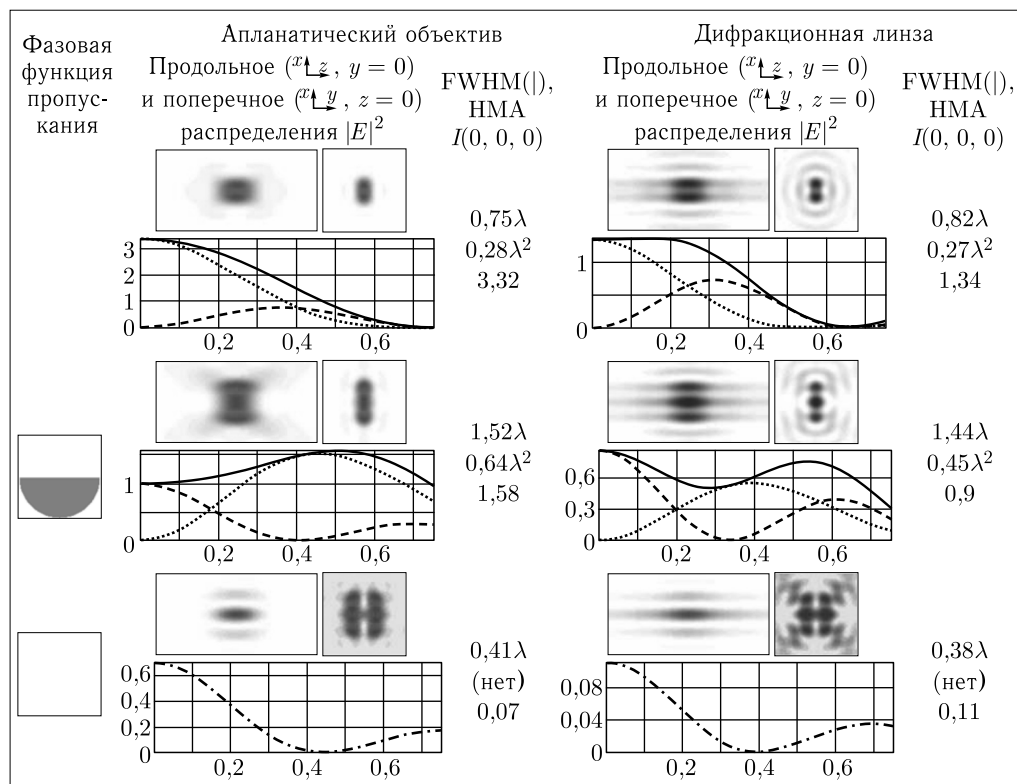
$$NA_{dl} = \sin \left[\arctg \left(\frac{R}{f} \right) \right] n, \quad (4.136)$$

где R — радиус линзы, f — фокусное расстояние, n — показатель преломления оптической среды.

В таблице 4.25 приведены для сравнения результаты численного моделирования для апланатического объектива и дифракционной линзы с высокой числовой апертурой, имеющих функцию пропускания $B(\theta, \phi) = R(\theta)\Omega_B(\phi)$, где $R(\theta) = 1$ и $\Omega_B(\phi) = 1$ (первая строка), $\Omega_B(\phi) = \arg(\cos \phi)$ (вторая строка) и $\Omega_B(\phi) = \arg(\sin 2\phi)$ (третья строка). Показано продольное горизонтальное сечение интенсивности $|E|^2$ в области $z \in [-3\lambda, 3\lambda]$, $x \in [-1,5\lambda, 1,5\lambda]$ и поперечное сечение в фокальной плоскости $x, y \in [-1,5\lambda, 1,5\lambda]$.

Из таблице 4.25 видно, что с помощью дифракционной линзы с числовой апертурой $NA = 0,99$ действительно получается фокусировка в меньшее по площади фокусное пятно, чем для апланатического объектива с той же чис-

Таблица 4.25. Результаты моделирования для апланатического объектива и дифракционной линзы с числовой апертурой $NA = 0,99$ при линейной x -поляризации, $R(\theta) = 1$



ловой апертурой. Также при дополнении фокусирующей системы функцией пропускания с фазовым скачком сильнее подавляются поперечные компоненты в центральной части и, следовательно, выделяется на оси продольная компонента. Это связано с резким увеличением функции аподизации зрачка при больших углах θ для дифракционной линзы, как показано во втором разделе на рис. 4.4.

Тем не менее, чтобы достаточно подавить поперечные компоненты (красный и зеленый цвет) вблизи оси с целью получения компактного центрального светового пятна, необходимо повысить числовую апертуру дифракционной линзы до $NA = 0,9987$ (рис. 4.17). При этом удастся преодолеть дифракционный предел (НМА = $0,13\lambda^2$) для линзы (НМА = $0,2\lambda^2$), но не для бесселева пучка (НМА = $0,1\lambda^2$). Значение интенсивности в центральном пятне при этом уменьшается почти в 8 раз по сравнению с апланатическим объективом в связи с удлинением продольного размера фокальной области и появлением боковых лепестков. Однако по сравнению с такой же дифракционной линзой, не имеющей каких-либо дополнений, потеря энергии нет.

Шахматная бинарная фаза позволяет выделить y -компоненту в плоскости $y = 0$ (по горизонтали FWHM(–) = $0,38\lambda$), но ее энергия изначально

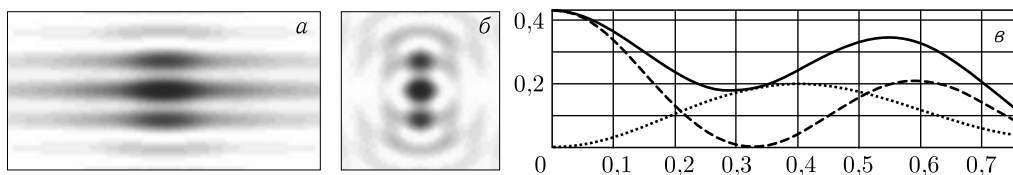


Рис. 4.17. Результаты моделирования для дифракционной линзы с числовой апертурой $NA = 0,9987$ при линейной x -поляризации, $B(\theta, \phi) = \arg(\cos \phi)$: продольное ($x \uparrow z, y = 0$) (а) и поперечное ($x \uparrow y, z = 0$) (б) распределения $|E|^2$, а также (в) сечение в фокальной плоскости вдоль оси x

слишком мала по сравнению с другими компонентами, поэтому значение интенсивности в центральной точке оказывается в 30 раз меньше, чем для фокусного пятна объектива.

Однако, как будет показано ниже, при использовании узкой кольцевой щели в фокальной плоскости остается энергии значительно меньше.

Известно, что при радиальной поляризации падающего света уменьшить вклад поперечных компонент в интенсивность фокальной области, а значит, уменьшить поперечный размер фокусного пятна, можно либо введением узкой кольцевой диафрагмы, пропускающей только периферийные лучи, либо с помощью кольцевых структур, как амплитудно-фазовых, так и чисто фазовых.

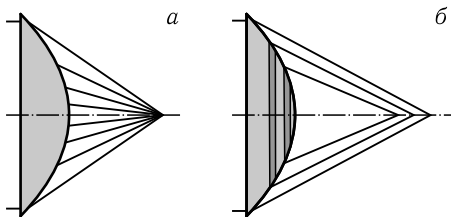


Рис. 4.18. Изменение наклона лучей в центральной части линзы за счет фазовой кольцевой структуры

В последних случаях энергия в центральной зоне линзы не блокируется, а может быть перенаправлена из фокальной области в другую часть пространства так, чтобы сформировать в околофокальной области некоторое заданное трехмерное распределение.

Как показано на рис. 4.18, за счет фазовой кольцевой структуры в центральной части линзы можно увеличить числовую апертуру и изменить наклон центральных лучей, перераспределяя тем самым вклад компонент электрического поля вдоль оптической оси.

Аналогичный подход был рассмотрен в скалярном случае в работе [63], где тандем из линзы и аксикона был представлен в виде дифракционных оптических элементов, фазовая функция которых пропорциональна радиальной координате в дробной степени.

В таблице 4.26 приведены для сравнения результаты моделирования ($z \in [-20\lambda, 20\lambda]$, $x, y \in [-1,5\lambda, 1,5\lambda]$) для апланатического объектива и дифракционной линзы с $NA = 0,99$ с узкой кольцевой диафрагмой, аппроксимирующей функцию:

$$B_\delta(\theta, \phi) = \delta(\theta - \pi/2) \quad (4.137)$$

и

$$B_{\delta c}(\theta, \phi) = \delta(\theta - \pi/2) \cos \phi. \quad (4.138)$$

Таблица 4.26. Результаты моделирования для апланатического объектива и дифракционной линзы с числовой апертурой $NA = 0,99$ при линейной x -поляризации $z \in [-20\lambda, 20\lambda]$, $x, y \in [-1,5\lambda, 1,5\lambda]$

Фазовая функция пропус- кания	Апланатический объектив				Дифракционная линза			
	$ E ^2$, FWHM(), НМА, $I(0, 0, 0)$				$ E ^2$, FWHM(), НМА, $I(0, 0, 0)$			
$R_\delta(\theta)$				0,84λ 0,28λ ² 0,0024				0,84λ 0,26λ ² 0,00017
$R_{\delta c}(\theta)$				0,43λ 0,17λ ² 0,0026				0,40λ 0,17λ ² 0,00021

Как видно из табл. 4.27, наложение узкой кольцевой диафрагмы приводит к «вытягиванию» фокусного пятна вдоль оптической оси, что соответствует формированию бесселева пучка нулевого порядка для x -компоненты. Дополнительное введение фазового скачка позволяет получить такое распределение для z -компоненты.

В этом случае энергия почти равномерно распределяется в довольно протяженной области, поэтому в фокальной плоскости остается только соответствующая доля — интенсивность в центральном пятне в 1600 раз ниже, чем для объектива без диафрагмы. При использовании дифракционной линзы получаются приблизительно такие же результаты с той разницей, что глубина резкости (протяженность фокальной области) значительно больше и доля энергии в каждой плоскости пропорционально уменьшается.

В таблице 4.27 приведены результаты моделирования для высокоапертурной фокусирующей системы, имеющей «полукольцевую» функцию пропускания:

$$B1(\theta, \phi) = \arg [R1(\theta) \cos \phi] = \arg [\cos (0,01kf \sin \theta) \cos \phi], \quad (4.139)$$

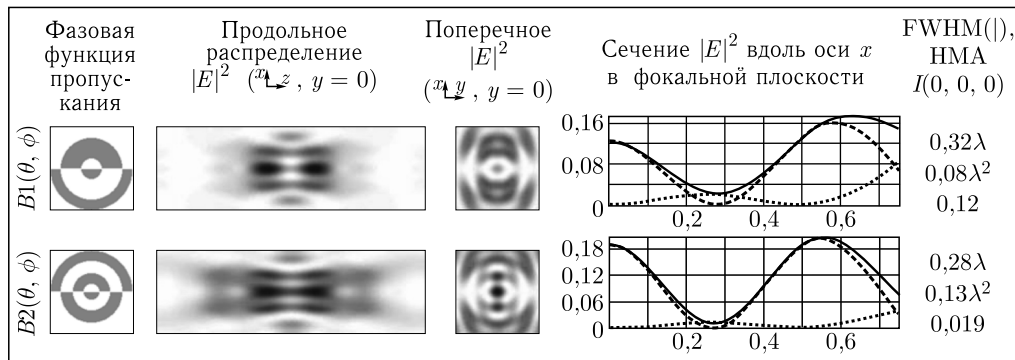
$$B2(\theta, \phi) = \arg [R2(\theta) \cos \phi] = \arg [GL_{3,0} \left((0,03kf \sin \theta)^2 \right) \cos \phi], \quad (4.140)$$

где $R2(\theta) = GL_{3,0}(t)$ — радиальная часть моды Лагерра–Гаусса [5].

Амплитудно-фазовые распределения, пропорциональные радиально-симметричным модам Лагерра–Гаусса, были использованы в работе [19] для радиальной поляризации.

Как видно из табл. 4.27, с помощью бинарной фазовой аподизации можно добиться значительного уменьшения размера фокусного пятна (НМА = $0,08\lambda^2$) без такой значительной потери энергии, как при использовании узкой кольцевой диафрагмы, хотя по сравнению с обычной острой фокусировкой интенсивность в центральном световом пятне уменьшается в 27 раз. Данная ситуация находится в полном соответствии с теорией Торалдо ди Франция [78], когда уменьшение размера центрального пятна достигается за счет потери эффективности и роста боковых лепестков. Тем не менее, в опре-

Таблица 4.27. Результаты моделирования для апланатического объектива с $NA = 0,99$, дополненного фазовой полукольцевой структурой, при линейной x -поляризации $z \in [-3\lambda, 3\lambda]$, $x, y \in [-1,5\lambda, 1,5\lambda]$



деленных оптических приложениях такие потери не являются существенными, особенно по сравнению с диафрагмированием. Например, сканирующие микроскопы могут работать всего с несколькими фотонами, что на полтора десятка порядков меньше мощности обычного лазера.

Круговая поляризация. Круговая поляризация также является распространенным и простым в реализации типом поляризации. Получить круговую поляризацию из линейной можно с помощью четвертьволновой пластинки [79]. Как было показано выше, при использовании вихревых функций пропускания происходит компенсация «поляризационной сингулярности», присутствующей в круговой поляризации, что позволяет получать осесимметричные распределения. Бинарная функция пропускания соответствует суперпозиции двух вихревых функций с противоположными знаками, одна компенсирует поляризационную сингулярность, а вторая вносит фазовую сингулярность в соответствующие компоненты. Поэтому в фокальной области формируется минимум интенсивности при использовании бинарных функций пропускания.

4.4.2. Увеличение эффективности при фокусировке радиально-поляризованного излучения. При радиальной поляризации излучения, падающего на высокоапертурную фокусирующую систему, на оптической оси отличной от нуля будет только z -компонента вектора (4.74), полностью соответствующая выражению (4.134), но с коэффициентом 2, т.е. интенсивность продольной компоненты будет в 4 раза выше, чем для линейной поляризации.

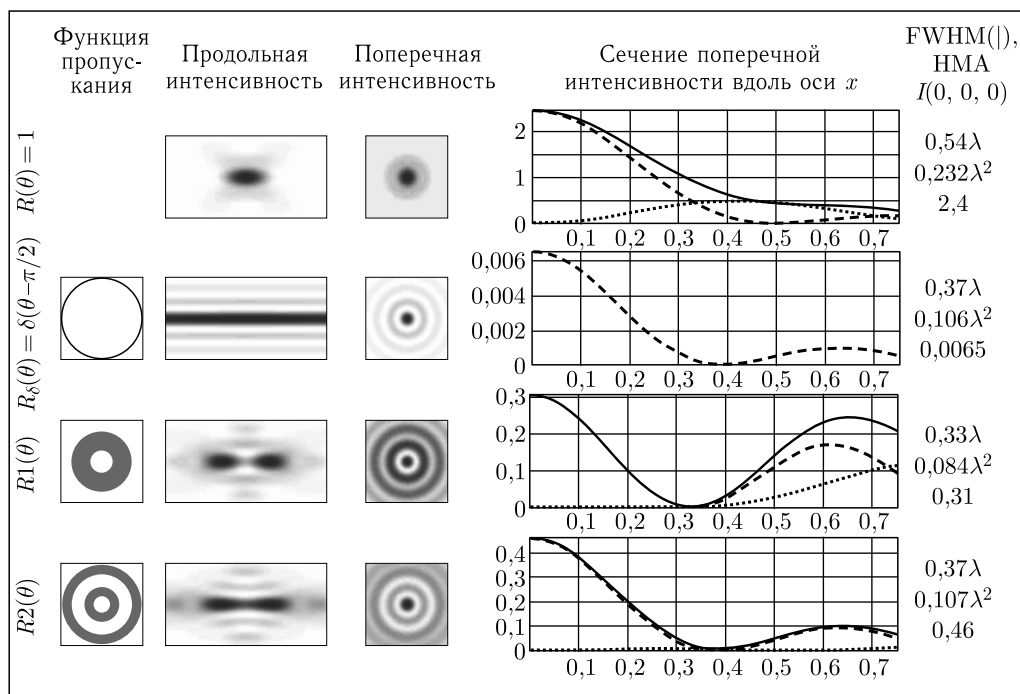
Тем не менее, только с помощью излучения радиальной поляризации преодолеть дифракционный предел невозможно, в этом случае $FWHM = 0,54\lambda$.

Использование узкой кольцевой диафрагмы позволяет сформировать в фокальной области протяженный бесселев пучок с ожидаемой $FWHM = 0,37\lambda$ и низкой интенсивностью (в 375 раз ниже, чем в фокусном пятне). Применение же полноапертурных бинарных фазовых кольцевых структур позволяет существенно уменьшить размер центрального светового пятна с гораздо мень-

шей потерей энергии — $\text{FWHM} = 0,33\lambda$ при уменьшении энергии примерно в 8 раз по сравнению с обычным объективом.

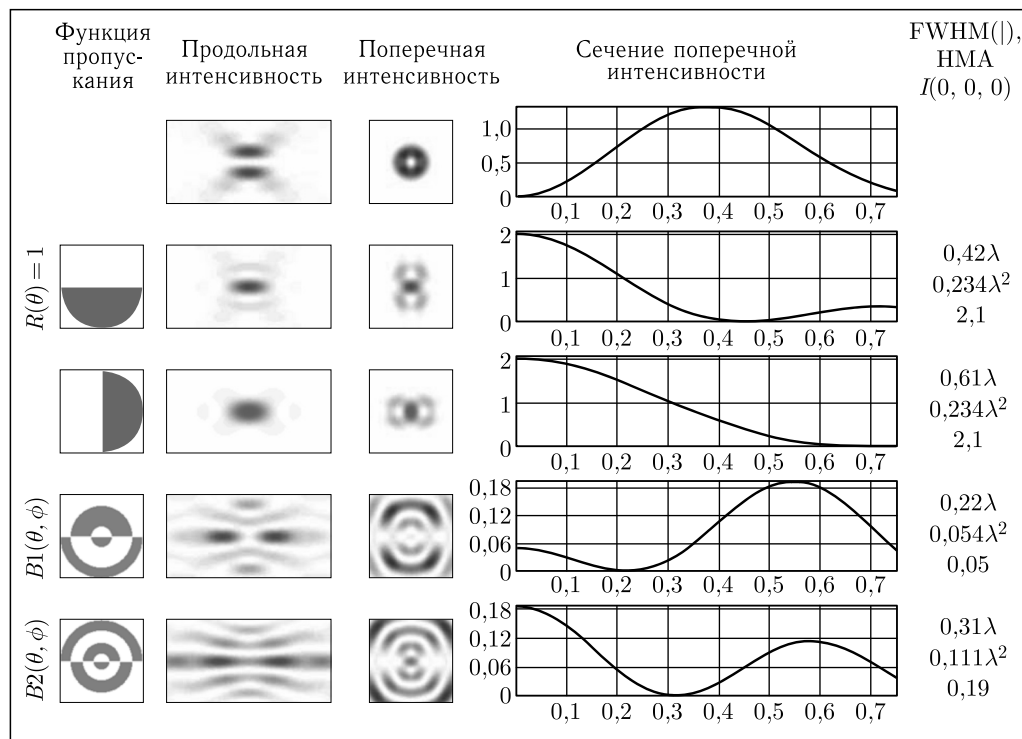
Билинза (линза с линейным фазовым скачком), соответственно, будет увеличивать в центральной части вклад поперечных компонент, но более эффективно в этом случае использовать с азимутальной поляризацией.

Таблица 4.28. Результаты моделирования для апланатического объектива с $NA = 0,99$ при радиальной поляризации



Как видно из табл. 4.28, в соответствии с выводами работы [80] использование в качестве пропускающей функции аксиконов и других кольцевых фазовых структур, например, радиальной части выражений (4.139) и (4.140), позволяет увеличить числовую апертуру линзы в ее центральной части и направить центральные лучи во внефокальную область. Таким образом, в фокусе останется только излучение с продольной компонентой, а центральные лучи не просто блокируются, а могут быть отклонены так, чтобы сформировать некоторое заданное распределение интенсивности вокруг фокуса (например, «оптические бутылки»).

Заметим, что блокирование центральных лучей позволяет только выделить продольную компоненту и получить распределение интенсивности, пропорциональное функции Бесселя нулевого порядка ($\text{FWHM} = 0,36\lambda$). А с помощью дополнительной кольцевой фазовой структуры можно получить центральное световое пятно меньшего размера ($\text{FWHM} = 0,33\lambda$), хотя, как и в случае линейной поляризации, за счет соответствующего уменьшения энергии в этом пятне.

Таблица 4.29. Результаты моделирования для апланатического объектива с $NA = 0,99$ при азимутальной поляризации

4.4.3. Преодоление предела при азимутальной поляризации за счет поперечных компонент электрического поля. В случае азимутальной поляризации падающей волны продольная составляющая всегда отсутствует. Вертикальная и горизонтальная бинарные асимметричные структуры будут выделять на оптической оси соответственно x - или y -компоненту с максимально достижимым значением интенсивности. Действие билинзы в случае азимутальной поляризации кардинально отличается от результата полученного в случае линейной поляризации. В рассматриваемом случае (табл. 4.29) вращение билинзы приводит лишь к вращению картины распределения интенсивности (хотя вклад компонент в осевой точке при этом меняется).

Дополнение линзы функциями вида (4.139) и (4.140) приводит к возникновению на оси ненулевых значений поперечных компонент (продольная компонента в азимутальной поляризации отсутствует), причем субволновая локализация получается минимальной из рассмотренных вариантов поляризации — $HMA = 0,054\lambda^2$. Интенсивность в центральном пятне в этом случае будет в 40 раз меньше, чем интенсивность фокусного пятна, формируемого введением фазового скачка.

Положительным моментом для осесимметричных поляризаций (радиальной и азимутальной) является независимость распределения общей интенсивности от поворота асимметричной бинарной структуры.

4.4.4. Выводы. В разделе 4.4 на основе векторной модели высокоапертурного объектива в приближении Дебая показана возможность использования бинарных фазовых структур для управления вкладом компонент векторного электрического поля на оптической оси при различных поляризациях падающего на фокусирующую систему излучения.

В частности, введение линейного фазового скачка перпендикулярно направлению линейной поляризации приводит к исключению в центре фокальной области поперечных компонент и появлению продольной. Это позволяет формировать в фокальной области центральное световое пятно, площадь которого значительно меньше дифракционного предела, равного $\text{НМА} = 0,2\lambda^2$.

Применение фазовых кольцевых структур позволяет уменьшить площадь центрального светового пятна вплоть до $\text{FWHM} = 0,33\lambda$ ($\text{НМА} = 0,084\lambda^2$) с эффективностью 13 % для радиальной поляризации.

Асимметричные бинарные фазовые структуры можно использовать для уменьшения площади центрального светового пятна для линейной поляризации — $\text{НМА} = 0,08\lambda^2$ с эффективностью 3,6 % и азимутальной поляризации — $\text{НМА} = 0,054\lambda^2$ с эффективностью 2,4 %.

Таким образом, уменьшение размера центрального пятна достигается за счет потери эффективности и роста боковых лепестков. Однако эти потери на порядок меньше, чем при использовании узких кольцевых диафрагм. Кроме того, энергия центральной зоны линзы может быть использована для формирования некоторого заданного трехмерного распределения в области, близкой к фокусу, или достаточно удаленной от него. В последнем случае удобнее использовать дифракционные линзы.

4.5. Минимизация размера светового или теневого фокусного пятна с контролируемым ростом боковых лепестков

В данном разделе рассматривается не просто управление вкладом различных компонент электрического поля в фокальную область [70], а минимизацию размера фокусного пятна (светового или теневого) за счет оптимального подбора пропускающей функции зрачка.

В работе [19] для уменьшения размера фокусного пятна, формируемого высокоапертурной фокусирующей системой, предлагалось использовать радиально-поляризованные моды Лаггера-Гаусса высшего радиального порядка, не имеющие вихревой фазовой составляющей.

Вихревая фазовая функция пропускания как фактор, позволяющий уменьшить размер светового пятна в отдельных компонентах остросфокусированного электрического поля при различных поляризациях, рассматривалась в работе [75], а возможность уменьшения фокусного пятна в общем распределении интенсивности за счет дополнительных вариаций по радиусу была показана в [70]. Использование в качестве пропускающих функций полиномов Цернике, в том числе имеющих вихревую фазовую зависимость, было рассмотрено в [81]. Это позволило одновременно вносить вихревую фазовую зависимость и амплитудные изменения по радиусу. При этом было показано, что можно уменьшать размеры не только светового пятна, но и теневой области.

В области оптического захвата и манипулирования [82], STED-микроскопии [83] и теневой микроскопии [84] также существует задача фокусировки в теневое пятно или световое кольцо с компактно локализованной нулевой интенсивностью в центре. Формирование такого фокального распределения осуществляется внесением в фокусируемый пучок вихревой фазовой сингулярности.

В данном разделе исследуется минимизация светового или теневого фокусного пятна при различных типах поляризации за счет дополнительной аподизации фокусирующей системы оптическим элементом с вихревой фазовой зависимостью от угла и полиномиальной амплитудной зависимостью от радиуса. Порядок и направление вихревой фазовой составляющей выбирается в зависимости от типа поляризации падающего на фокусирующую систему пучка [85], а коэффициенты в радиальном полиноме невысокой степени оптимизировались с учетом выполнения определенных условий, в частности, сохранения энергетической эффективности и обеспечения заданного уровня боковых лепестков. Поиск коэффициентов выполняется на основе минимизации функционала с использованием метода Брента [86].

4.5.1. Скалярный дифракционный предел: теоретический анализ.

Результат фокусировки ограниченной плоской волны, длиной волны λ и волновым числом $k = 2\pi/\lambda$ линзой радиусом R фокусным расстоянием f в скалярном случае соответствует выражению

$$E_0(\rho, \phi) = \frac{k}{if} \exp(ikf) \int_0^R J_0\left(\frac{kr\rho}{f}\right) r dr = \exp(ikf) \frac{R}{if} J_1\left(\frac{k\rho R}{f}\right), \quad (4.141)$$

где (ρ, ϕ) — полярные координаты в фокальной плоскости, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода n -го порядка.

Радиус фокусного пятна можно определить по первому нулю функции Бесселя первого порядка:

$$\rho_1 = \frac{3,83f}{kR} \approx \frac{0,61\lambda}{NA}, \quad (4.142)$$

где NA — числовая апертура линзы.

Хорошо известный способ уменьшения размера фокусного пятна — использовать не полную апертуру, а лишь узкое периферийное кольцо шириной δ . В этом случае получается спектр, связанный с функцией Бесселя нулевого порядка (для малого δ можно взять подынтегральное выражение в средней точке):

$$E_0(\rho, \phi) = \frac{k}{if} \exp(ikf) \int_{R-\delta}^R J_0\left(\frac{kr\rho}{f}\right) r dr \approx \exp(ikf) \frac{kR\delta}{if} J_0\left(\frac{k\rho R}{f}\right), \quad (4.143)$$

где радиус фокусного пятна можно определить по первому нулю функции Бесселя нулевого порядка:

$$\rho_{1\delta} = \frac{2,4f}{kR} \approx \frac{0,38\lambda}{NA}. \quad (4.144)$$

Как видно из сравнения формул (4.141) и (4.143), уменьшение поперечного размера фокусного пятна достигается за счет уменьшения интенсивности в фокусе ($\rho = 0$). При $\delta \sim \lambda$ уменьшение интенсивности будет пропорционально квадрату фокусного расстояния.

Таким образом, скалярный дифракционный предел в свободном пространстве ($NA = 1$) для фокусного светового пятна при использовании безабберационной полноапертурной фокусирующей системы по радиусу равен $\rho_l \approx 0,61\lambda$ (по полуспаду интенсивности $\text{FWHM}_l \approx 0,51\lambda$), а при использовании узкой кольцевой апертуры — $\rho_{l\delta} \approx 0,38\lambda$ ($\text{FWHM}_{l\delta} \approx 0,36\lambda$).

Также актуальной является задача фокусировки в теневое пятно или световое кольцо с компактно локализованной нулевой интенсивностью в центре. Формирование такого фокального распределения осуществляется внесением в фокусируемый пучок вихревой фазовой сингулярности.

Результат фокусировки ограниченной плоской волны с внесенной вихревой фазовой сингулярностью первого порядка в скалярном случае соответствует выражению

$$E_1(\rho, \phi) = \frac{k}{if} \exp(ikf) \exp(i\phi) \int_0^R J_1\left(\frac{kr\rho}{f}\right) r dr. \quad (4.145)$$

Интеграл в выражении (4.145) обычно записывается через суперпозицию функций Бесселя и Струве [5]:

$$\int_0^R J_1(\alpha r) r dr = \frac{\pi R}{2\alpha} [J_1(\alpha R) H_0(\alpha R) - J_0(\alpha R) H_1(\alpha R)], \quad (4.146)$$

которая неудобна для анализа. Поэтому выразим интеграл в выражении (4.145) через гипергеометрическую функцию:

$$\int_0^R J_1(\alpha r) r dr = \frac{\alpha R^3}{6} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}, 2; -\frac{\alpha^2 R^2}{4}\right), \quad (4.147)$$

где

$${}_1F_2(x; y_1, y_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)_n}{(y_1)_n \cdot (y_2)_n} \cdot \frac{z^n}{n!},$$

$$(a)_0 = 1, (a)_n = a \cdot (a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1).$$

Таким образом, выражение (4.145) можно записать в виде

$$E_1(\rho, \phi) = \exp(ikf) \exp(i\phi) \frac{k^2 R^3 \rho}{6if^2} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}, 2; -\frac{(k\rho R)^2}{4f^2}\right). \quad (4.148)$$

Если оставить в правой части формулы (4.148) только первые два члена ряда и приравнять производную нулю, то получим оценку для радиуса фокусного кольца:

$$\hat{\rho}_d = \frac{2\sqrt{10}f}{3Rk} \approx \frac{0,336\lambda}{NA}.$$

При точном расчете гипергеометрической функции (например, в Matlab) или вычислении интеграла в (4.148) методом прямоугольников получается большее значение (рис. 4.19):

$$\rho_d = \frac{0,39\lambda}{NA}. \quad (4.149)$$

Уменьшить размер светового кольца можно также наложением узкой кольцевой диафрагмы, пропускающей только периферийные лучи:

$$E_1(\rho, \phi) = \frac{k}{if} \exp(ikf) \exp(i\phi) \int_{R-\delta}^R J_1\left(\frac{kr\rho}{f}\right) r dr \approx \exp(ikf) \exp(i\phi) \frac{kR\delta}{if} J_1\left(\frac{k\rho R}{f}\right). \quad (4.150)$$

В этом случае радиус светового кольца определяется по максимальному значению функции Бесселя первого порядка:

$$\rho_{d\delta} = \frac{1,84f}{kR} \approx \frac{0,293\lambda}{NA}. \quad (4.151)$$

Уменьшение размера достигается за счет потери энергии в центральном кольце, а следовательно, за счет уменьшения интенсивности светового барьера. Однако компактность световой воронки может быть более важной характеристикой, чем ее глубина.

Из приведенных выше выкладок следует, что скалярный дифракционный предел в свободном пространстве ($NA = 1$) для светового кольца при использовании безаберрационной полноапертурной фокусирующей системы по радиусу равен $\rho_d \approx 0,39\lambda$ (это же значение имеет внутренний диаметр кольца по полуспаду интенсивности), а при использовании узкой кольцевой апертуры $\rho_{d\delta} \approx 0,29\lambda$.

Таким образом, дифракционный предел для светового кольца меньше, чем для светового пятна.

Достичь скалярного предела при использовании фокусирующих систем с высокой числовой апертурой проблематично из-за вклада в фокальную область различных компонент напряженности электрического поля. Для решения этой проблемы используют поляризации специальных типов, позволяющие максимизировать вклад одной из компонент, что приводит фактически

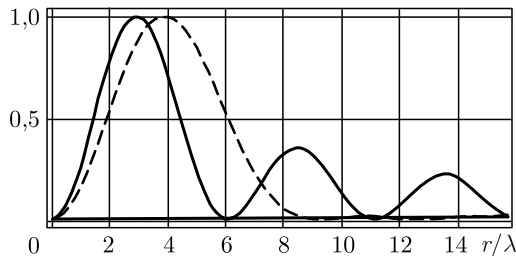


Рис. 4.19. Результаты расчета нормированной интенсивности для выражения (4.148) (пунктирная линия) и выражения (4.150) (сплошная линия) при $NA = 0,1$

к скалярному случаю. Для полноапертурной аподизации наиболее простыми в реализации являются дополнение фокусирующей системы фазовыми оптическими элементами и фокусировка мод лазерного излучения высоких порядков [19, 81]. В последнем случае распределение на выходном зрачке системы представимо в полиномиальном виде.

Далее рассмотрим возможность минимизации поперечного фокального размера с помощью полиномов невысокого порядка при выполнении определенных условий, в том числе сохранения энергетической эффективности или обеспечения заданного уровня боковых лепестков.

4.5.2. Оптимизация функции пропускания фокусирующей системы.

Рассмотрим острую фокусировку лазерных пучков с различной поляризацией при использовании в качестве функции пропускания $B(\theta, \phi)$ суперпозиции следующего вида [81]:

$$B_m(\theta, \phi) = \exp(im\phi) \sum_{s=0}^S c_s \sin^s \theta, \quad (4.152)$$

где c_s — коэффициенты полинома при фиксированном значении вихревого порядка m .

Такой вид освещающего пучка для распространенных типов поляризации позволяет использовать выражение вида (4.74), где

$$q(\theta) = \exp(ikz \cos \theta) \sqrt{\cos \theta} \sum_{s=0}^S c_s \sin^{s+1} \theta. \quad (4.153)$$

После выбора определенного типа поляризации и номера вихревой фазовой зависимости m оптимизацию коэффициентов в суперпозиции (4.153) можно выполнить на основе минимизации функционала, связывающего интенсивность выходного распределения и целевую функцию $T(\rho, \varphi)$ в области фокусировки:

$$\Phi \left\{ |\mathbf{E}_m(\rho, \varphi, z=0)|^2; T(\rho, \varphi) \right\} \xrightarrow{c_s} \min. \quad (4.154)$$

Целевая функция представляет собой суперпозицию функций, выражающих условия, которым должно удовлетворять распределение интенсивности в фокальной плоскости. В частности, это условия концентрации интенсивности в определенной области или штраф за превышение значений нормированной интенсивности заданного порога на некотором интервале.

Если рассмотреть функционал (4.154) для фиксированного значения полярного угла φ , то участвующие в нем функции будут зависеть только от радиуса и можно наглядно показать наложение условий на получаемое распределение интенсивности (см. рис. 4.20).

Для достижения определенного компромисса между уменьшением размера фокусного пятна и подавлением боковых лепестков нужно наложить условие концентрации энергии в фокальной плоскости в круге радиусом ρ_ϵ и обеспечения в кольце с радиусами $[\rho_\epsilon, \rho_\Delta]$ заданного уровня μ боковых лепестков. В области радиусом более ρ_Δ распределение интенсивности не контролируется.

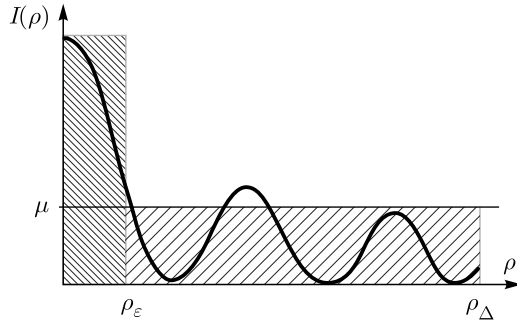


Рис. 4.20. Иллюстрация целевой функции в фокальной области при фиксированном значении полярного угла φ

Минимизация функционала (4.154) при фиксированном значении полярного угла φ выполнялась методом Брента [86]. Программный модуль, реализующий данный метод, был взят на открытом ресурсе ALGLIB [87].

4.5.3. Минимизация светового пятна для радиально-поляризованного излучения. Известно, что при радиальной поляризации обеспечивается наименьший поперечный размер фокусного пятна, связанный с максимизацией вклада продольной компоненты в суммарную интенсивность на оптической оси.

При радиальной поляризации в отсутствие фазовых вихрей вклад продольной компоненты в суммарную интенсивность на оптической оси является максимальным, однако на размер формируемого фокусного пятна влияют также поперечные компоненты, которые вносят свой вклад вблизи оптической оси (табл. 4.30, строка 1).

При использовании узкой кольцевой диафрагмы с радиусом, близким к радиусу фокусирующей линзы, и относительной шириной δ (нормированной на радиус апертуры) вклад поперечных компонент минимизируется и интенсивность в фокальной области будет определяться только продольной компонентой [81]:


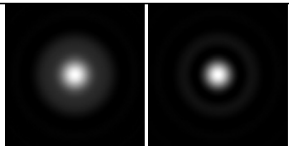
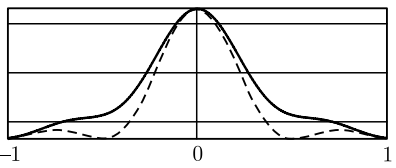


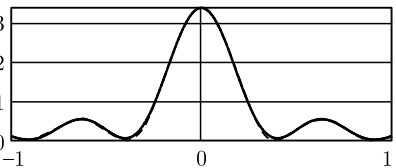

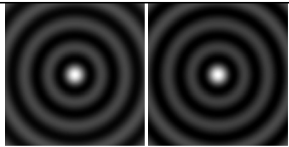
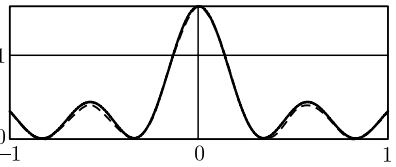

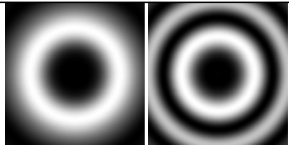
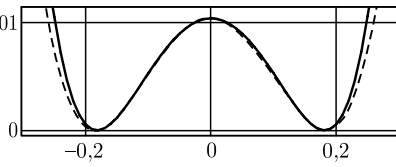
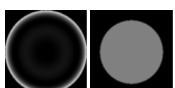
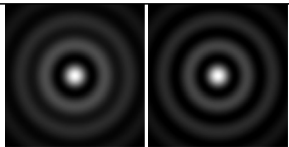
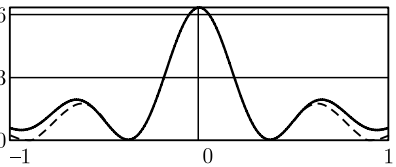

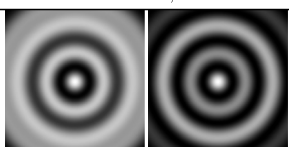
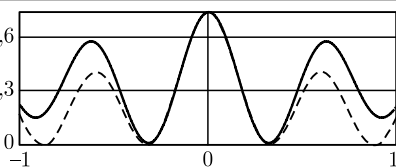

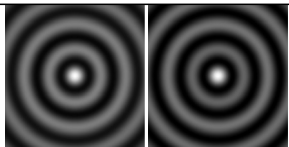
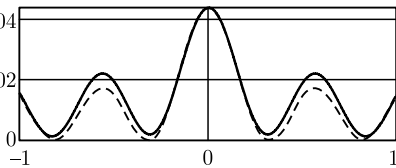
$$|E_0^z(\rho, \varphi, z=0)|^2 \sim \delta^{3/2} J_0^2(k\rho), \quad (4.155)$$

откуда следует, что радиус центрального светового пятна будет $\rho_\delta \approx 0,38\lambda$, что соответствует скалярному пределу (4.144). Интенсивность в нем будет очень мала, т.к. относительная ширина кольцевой апертуры $\delta \ll 1$ (табл. 4.30, строка 2).

Если ввести фазовый скачок на π радиан по среднему радиусу узкой кольцевой апертуры (это соответствует введению суперпозиции двух деструктивно интерферирующих пучков):

$$\tau(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < \Theta - \delta, \\ 1, & \Theta - \delta < \theta < \Theta - \delta/2, \\ \exp(i\pi), & \theta \geq \Theta - \delta/2, \end{cases} \quad (4.156)$$

Таблица 4.30. Результаты численного моделирования для пучка с радиальной поляризацией без вихревых составляющих ($m = 0$)

Функция пропускания (амплитуда и фаза)	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$ (общая и z -компонента)	Сечение поперечной интенсивности: общая (сплошная линия) и z -компонента (пунктирная линия)
$B(\theta, \phi) = \text{const}$ 	 $\text{FWHM} = 0,544\lambda, \text{FWHM}_z = 0,453\lambda$	
$\delta = 0,05$ 	 $\text{FWHM} = 0,378\lambda$	
$\tau(\delta), \delta = 0,2$ 	 $\text{FWHM} = 0,329\lambda$	
$\rho_\varepsilon = \rho_\Delta = 0,05\lambda$ 	 $\text{FWHM} = 0,203\lambda$	
$\rho_\varepsilon = 0,05\lambda$ $\rho_\Delta = 2\lambda, \mu = 0,3$ 	 $\text{FWHM} = 0,359\lambda$	
$\text{ЛГ}(3, 0), \sigma = R/2$ 	 $\text{FWHM} = 0,317\lambda$	
$\rho_\varepsilon = 0,05\lambda$ $\rho_\Delta = 1,5\lambda, \mu = 0,5$ 	 $\text{FWHM} = 0,313\lambda$	

то получим следующее распределение в фокальной плоскости для продольной (основной) компоненты ($NA = 1$):

$$\begin{aligned} E_0^z(\rho, \varphi, z = 0) &= ikf \int_0^{\Theta} \tau(\theta) J_m(k\rho \sin \theta) \sin^2 \theta \sqrt{\cos \theta} d\theta = \\ &= ikf \int_0^{\arcsin \Theta} \tau(x) x^2 (1 - x^2)^{-1/4} J_0(k\rho x) dx \approx \\ &\approx 2^{1/4} \delta^{3/4} \left[3^{-1/4} J_0 \left(k\rho \left(1 - \frac{3\delta}{4} \right) \right) - J_0 \left(k\rho \left(1 - \frac{\delta}{4} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Из выражения (4.157) видно, что в центре фокальной области будет ненулевое значение. Оценить радиус (до нулевого значения) этого слабого светового пятна можно, используя аппроксимацию функции Бесселя:

$$\rho_{\delta ph} \approx \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{0,288 + 0,72\delta}{0,288 + 1,488\delta}}. \quad (4.158)$$

При уменьшении ширины кольцевой диафрагмы получим предельное значение, меньшее скалярного предела (4.144): $\rho_{\delta ph} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \lambda/\pi \approx 0,318\lambda$. Заметим, что формула (4.158) предсказывает еще меньший размер при увеличении ширины диафрагмы, но в этом случае перестает работать приближение, при котором получено данное выражение. В табл. 4.30 (строка 3) приведены результаты использования кольцевой диафрагмы шириной $\delta = 0,2$ с внесением кольцевого фазового скачка на π радиан вдоль среднего радиуса диафрагмы. Видно, что размер светового пятна уменьшается до $\text{FWHM} = 0,329\lambda$ при некотором росте боковых лепестков, уровень интенсивности которых, однако, составляет менее 30% от интенсивности главного пика. Такие боковые лепестки могут быть эффективно отфильтрованы [89, 90]. Заметим также, что влияние боковых лепестков, если их интенсивность ниже определенного уровня, может нивелироваться при нелинейном взаимодействии света с носителями записи [91].

В случае использования полноапертурной функции пропускания, имеющей степенную зависимость от радиальной координаты, продольная компонента будет иметь следующий вид:

$$E_0^z(\rho, \varphi, z = 0) = ikf \int_0^{\pi/2} (\sin \theta)^{s+2} J_0(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} D\theta. \quad (4.159)$$

Тогда интенсивность вблизи оптической оси приближенно описывается выражением [81]:

$$\begin{aligned} I_0^z(\rho, \varphi, z = 0) &\approx \\ &\approx \left\{ \frac{kf \Gamma(3/4) \Gamma((s+3)/2)}{2 \Gamma((s+3)/2 + 3/4)} \left[1 - \frac{(s+3)}{(s+3) + 3/2} \left(\frac{k\rho}{2} \right)^2 \right] \right\}^2, \end{aligned} \quad (4.160)$$

откуда следует, что радиус центрального светового пятна определяется степенью s :

$$\rho_s = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{1 + \frac{3}{2(s+3)}}. \quad (4.161)$$

С ростом степени s радиус центрального светового пятна будет стремиться к значению $\rho_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \lambda/\pi \approx 0,32\lambda$.

Таким образом, использование полноапертурной степенной функции позволит уменьшить размер светового пятна сильнее, чем введение узкой кольцевой диафрагмы ($\rho_\delta \approx 0,38\lambda$), при этом достигается практически такой же размер пятна, как и при введении кольцевого фазового скачка ($\rho_{\delta ph} \approx 0,38\lambda$).

Однако такой эффект достигается бесконечным увеличением степени s , что фактически приводит к концентрации энергии освещающего пучка по периферийной части линзы. Таким образом, происходит аппроксимация степенной функцией узкой кольцевой диафрагмы.

Рассмотрим другой подход к уменьшению центрального пятна — за счет деструктивной интерференции. В этом случае в суперпозиции (4.153) нужно выбрать коэффициенты специальным образом [81].

При использовании суперпозиции (4.153) выражение для напряженности поля в фокальной плоскости принимает следующий вид:

$$\mathbf{E}_0(\rho, \varphi, z=0) = kf \begin{bmatrix} [\Gamma(1/4)/16] k\rho \cos \varphi \sum_{s=0}^S c_s \Phi_s^x(k\rho) \\ [\Gamma(1/4)/16] k\rho \sin \varphi \sum_{s=0}^S c_s \Phi_s^y(k\rho) \\ i [\Gamma(3/4)/2] \sum_{s=0}^S c_s \Phi_s^z(k\rho) \end{bmatrix}, \quad (4.162)$$

где

$$\Phi_s^x(t) = \Phi_s^y(t) = \frac{\Gamma((s+3)/2)}{\Gamma((2s+11)/4)} {}_1F_2\left(\frac{s+3}{2}; \frac{2s+11}{4}, 2; -\frac{t^2}{4}\right),$$

$$\Phi_s^z(t) = \frac{\Gamma((s+3)/2)}{\Gamma((2s+9)/4)} {}_1F_2\left(\frac{s+3}{2}; \frac{2s+9}{4}, 1; -\frac{t^2}{4}\right).$$

Если подставить несколько первых членов по s в выражение (4.162), например, для поперечных компонент,

$$\begin{aligned} E_0^{x,y}(\rho, \varphi, z=0) = & \\ & = k^2 \rho f \frac{\Gamma(1/4)}{16} \begin{bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{bmatrix} \left\{ \frac{c_0 \Gamma(3/2)}{\Gamma(11/4)} {}_1F_2\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \right. \\ & + \frac{c_1 \Gamma(2)}{\Gamma(13/4)} {}_1F_2\left(2; \frac{13}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \frac{c_2 \Gamma(5/2)}{\Gamma(15/4)} {}_1F_2\left(\frac{5}{2}; \frac{15}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \\ & \left. + \frac{c_3 \Gamma(3)}{\Gamma(17/4)} {}_1F_2\left(3; \frac{17}{4}, 2; -\frac{k^2 \rho^2}{4}\right) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

то становится ясно, что имеется схожая зависимость для слагаемых одинаковой четности. В этом случае для полиномов Цернике выражения будут более простыми [81].

С учетом только нулевой и второй степени радиального полинома выражение для поперечной компоненты вблизи оптической оси примет вид

$$\begin{aligned}
 E_0^{x,y}(\rho \rightarrow 0, \varphi, z = 0) &\approx k^2 f \rho \left[\frac{\cos \phi}{\sin \phi} \right] \frac{c_0 \Gamma(1/4)}{16} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(11/4)} \times \\
 &\times \left\{ \left(1 + \frac{6}{11} \frac{c_2}{c_0} \right) - \frac{3}{22} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{c_2}{c_0} \right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2} \right) + \frac{1}{66} \left(1 + \frac{14}{19} \frac{c_2}{c_0} \right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2} \right)^2 \right\}, \\
 E_0^z(\rho \rightarrow 0, \varphi, z = 0) &\approx i k f \frac{c_0 \Gamma(3/4)}{2} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(9/4)} \times \\
 &\times \left\{ \left(1 + \frac{2c_2}{3c_0} \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{15 \cdot 2c_2}{13 \cdot 3c_0} \right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{13 \cdot 24} \left(1 + \frac{21 \cdot 2c_2}{17 \cdot 3c_0} \right) \left(\frac{k^2 \rho^2}{2} \right)^2 \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.163}$$

Из выражений (4.163) видно, что в фокусе ($\rho = 0$) при $c_2 = -3c_0/2$ вклад продольной компоненты обращается в нуль. Вклад же поперечных компонент обращается в нуль при $c_2 = -11c_0/6$. Таким образом, полином Цернике (2, 0), у которого $c_2 = -2c_0$, будет почти оптимальным для максимизации вклада продольной компоненты [81].

Аналитические выкладки для большего числа слагаемых становятся трудоемкими, поэтому проще воспользоваться численной процедурой оптимизации коэффициентов при удовлетворении определенных условий.

В частности, размеры фокусного пятна можно сколь угодно уменьшить за счет многократного роста боковых лепестков и ухода практически всей энергии из фокуса [78] (табл. 4.30, строка 4). Для достижения компромисса между уменьшением размера фокусного пятна и удержанием энергии в центре наложим условие концентрации энергии в фокальной плоскости в круге радиусом ρ_ε и обеспечения в кольце с радиусами $[\rho_\varepsilon, \rho_\Delta]$ заданного уровня μ боковых лепестков (рис. 4.20).

За пределами радиуса ρ_Δ значения интенсивности не контролируется и может существенно превышать значение в центре. Увеличение области контроля, как правило, вместе с уменьшением потери энергии приводит к укрупнению размера фокусного пятна.

В строке 5 табл. 4.30 показаны результаты использования полноапертурной пропускающей функции в виде полинома третьего порядка с коэффициентами, подобранными так, чтобы концентрировать энергию в круге радиусом $\rho_\varepsilon \rho_\varepsilon = 0,05\lambda = 0,05$ и удерживать уровень боковых лепестков в кольце с радиусами $[0,05\lambda, 2\lambda]$ не выше $\mu = 0,3$ от значения в фокусном пятне. В этом случае размер полученного фокусного пятна меньше, чем при использовании узкой кольцевой апертуры, а интенсивность в фокусе в 2 раза выше.

В работе [19] было предложено для уменьшения размеров фокусного пятна использовать функции пропускания, пропорциональные модам Лагерра–Гаусса (ЛГ). Результаты фокусировки для ЛГ-мод зависят от радиуса перетяжки и радиального номера моды. Причем увеличение номера моды не обязательно приводит к уменьшению размера фокусного пятна. В частности, для $\sigma = R/2$ были получены следующие результаты: $\text{FWHM} = 0,437\lambda$ (для радиального номера ЛГ моды $n = 1$), $\text{FWHM} = 0,875\lambda$ ($n = 2$), $\text{FWHM} = 0,317\lambda$ ($n = 3$ — табл. 4.30, строка 6), $\text{FWHM} = 0,384\lambda$ ($n = 4$), $\text{FWHM} = 0,475\lambda$ ($n = 5$).

В этом случае также происходит значительный рост боковых лепестков, который в общей интенсивности приближается к уровню $\mu = 0,86$ от максимума (табл. 4.30, строка 6).

Результат для ЛГ-мод можно улучшить по уровню боковых лепестков до $\mu = 0,5$ при сохранении того же размера фокусного пятна ($\text{FWHM} = 0,313\lambda$) применением оптимизационного алгоритма к суперпозиции (4.153) — табл. 4.30, строка 7.

При наличии вихревых составляющих первого порядка ($|m| = 1$) при радиальной поляризации поперечные компоненты уже будут иметь ненулевые значения на оптической оси, а продольная компонента, наоборот, примет кольцевое распределение [81]. При этом вклад продольной компоненты в суммарную интенсивность сравним с вкладом поперечных компонент. Это особенно важно учитывать при взаимодействии излучения со средами, избирательно чувствительными к различным компонентам электрического вектора.

Заметим, что в этом случае наличие поперечных компонент в центральной части фокальной области мешает получить «чистое» световое кольцо. Для этой цели лучше подходит азимутальная поляризация.


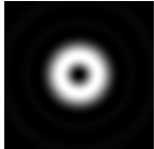
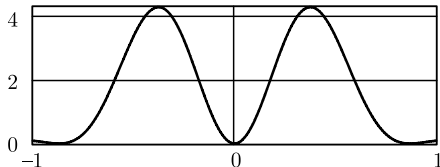


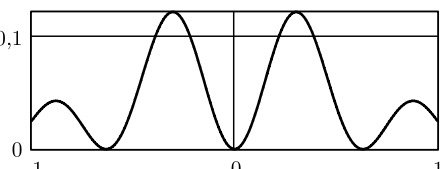


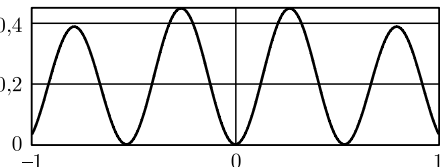


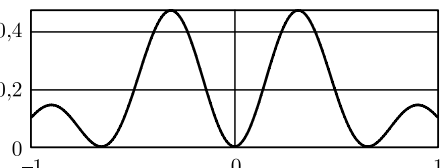
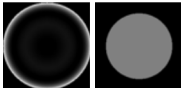

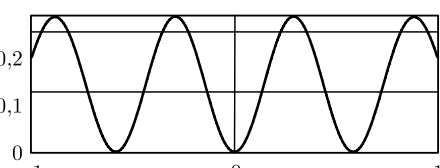


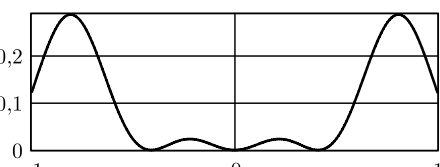
4.5.4. Формирование светового кольца субволнового радиуса при азимутальной поляризации лазерного излучения. При азимутальной поляризации вектор \mathbf{E} в фокальной плоскости ($z = 0$) будет содержать ненулевые компоненты только для одного порядка сингулярности $|m| = 1$. Для всех остальных значений $|m| \neq 1$ в осевых точках интенсивность будет всегда равна нулю, так как все компоненты равны нулю. Поэтому данную поляризацию удобнее всего использовать для формирования светового кольца (табл. 4.31, строка 1).

При $m = 0$ с учетом выражения (4.153) формула для \mathbf{E}_0 в фокальной плоскости сводится к компактному виду:

$$\mathbf{E}_0(\rho, \varphi, z = 0) = kf \begin{bmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \int_0^{\pi/2} \sum_{s=0}^S c_s \cdot (\sin \theta)^{s+1} J_1(k\rho \sin \theta) (\cos \theta)^{1/2} d\theta. \quad (4.164)$$

Интегралы в выражении (4.164) можно взять с использованием гипергеометрических функций, анализ которых [81] показывает, что радиус формируемого светового кольца зависит от степени s , но имеет предельное значение $\rho_{\min} \approx 0,26\lambda$ (оценка снизу).

Таблица 4.31. Результаты численного моделирования для пучка с азимутальной поляризацией без вихревых составляющих ($m = 0$)

Функция пропускания (амплитуда и фаза)	Поперечная интенсивность в фокусе, $3\lambda \times 3\lambda$	Сечение поперечной интенсивности
$B(\theta, \phi) = \text{const}$ 	 FWHM = $0,37\lambda$	
$\text{ring}(\theta), \delta = 0,05R$ 	 FWHM = $0,298\lambda$	
$\text{ring}(\theta)\tau(\theta),$ $\delta = 0,2R$ 	 FWHM = $0,264\lambda$	
$\rho_\varepsilon = 0,05\lambda$ $\rho_\Delta = 2\lambda, \mu = 0,3$ 	 FWHM = $0,31\lambda$	
$\rho_\varepsilon = 0,05\lambda$ $\rho_\Delta = 2\lambda, \mu = 1$ 	 FWHM = $0,284\lambda$	
$\rho_\varepsilon = \rho_\Delta = 0,05\lambda$ 	 FWHM = $0,22\lambda$	

При наложении узкой кольцевой диафрагмы интеграл в выражении (4.164) примет простой вид, не зависящий от полиномов:

$$\int_{\pi/2-\delta}^{\pi/2} J_1(k\rho \sin \theta) \sin \theta (\cos \theta)^{1/2} d\theta \sim \delta^{3/4} J_1(k\rho), \quad (4.165)$$

т.е. радиус светового кольца определяется первым максимумом функции Бесселя первого порядка $\rho_\delta \approx 0,293\lambda$, что соответствует скалярному пределу (4.149) (табл. 4.31, строка 2). Интенсивность фокусного кольца будет уменьшаться с уменьшением ширины кольцевой диафрагмы δ .

Также внесение дополнительного кольцевого фазового скачка на π радиан вдоль среднего радиуса диафрагмы позволяет уменьшить размер светового кольца до $\text{FWHM} = 0,329\lambda$ за счет дальнейшего уменьшения интенсивности в этом кольце (табл. 4.31, строка 3).

При использовании суперпозиции (4.153) можно попытаться достичь компромисса между уменьшением размера светового кольца и потерей энергии в центральной части. Для этого, в частности, можно удерживать невысокую интенсивность боковых лепестков относительно значения на центральном световом кольце в достаточно широкой области (табл. 4.32, строка 4).

Если позволить боковым лепесткам подниматься до уровня интенсивности на центральном кольце (табл. 4.31, строка 5), то можно преодолеть дифракционный предел при значении интенсивности на центральном кольце в 2 раза выше, чем при использовании узкой кольцевой апертуры.

Еще сильнее уменьшить центральное световое кольцо можно только за счет значительной потери энергии (табл. 4.31, строка 6).

Круговая поляризация. Этот тип поляризации привлекателен простотой получения из излучения линейной поляризации, характерной для большинства лазеров. Здесь не требуются сложные или дорогостоящие устройства, как в предыдущих двух случаях радиальной и азимутальной поляризации.

В случае круговой поляризации имеется зависимость соответствия знака поляризации и знака вихревого порядка. При значениях вихревого порядка $|m| \leq 2$ с противоположным поляризации знаком будут в наличии компоненты с ненулевыми значениями на оптической оси ($\rho = 0$). Этот факт будет негативно сказываться на попытках получить кольцевое распределение в общей интенсивности.

Рассмотрим для определенности случай круговой «+»-поляризации. Тогда при $m = 0$ и $m = -2$ в поперечных компонентах будет ненулевое значение на оптической оси, а в продольной компоненте будет иметь место световое кольцо. Причем при $m = -2$ энергия поперечных компонент на оси меньше, чем при $m = 0$. При $m = -1$ будет обратная ситуация, но для высокоапертурных фокусирующих систем, как правило, вклад продольной компоненты большой. Поэтому при необходимости формировать теньевое пятно удобнее использовать вариант с $m = -2$.

При использовании узкой кольцевой диафрагмы вклады продольной и поперечных компонент будут сравнимы, и будут мешать друг другу как в формировании компактного светового пятна, так и светового кольца.

Таким образом, для более распространенных и простых в реализации типов поляризации (круговой или линейной) получить оптимальные результаты можно только для отдельных компонент электрического поля — продольной или поперечных. Для суммарной интенсивности эффект оптимизации ухудшается за счет совместного вклада различных компонент. В этом случае нивелировать вклад нежелательной компоненты возможно при использовании материалов, избирательно чувствительных к различным компонентам электрического поля, а также в системе из двух встречных пучков [89].

4.5.5. Выводы. В разделе рассмотрены возможности минимизации светового и теневого фокусного пятна при различных типах поляризации с контролируемым ростом боковых лепестков за счет оптимальной аподизации фокусирующей системы. Рассматриваемая аподизация предусматривает внесение полиномиальной амплитудной зависимости от радиуса. При этом оптимизацию коэффициентов в полиномиальной зависимости можно выполнять различными методами с целью сохранения энергетической эффективности и обеспечения заданного значения боковых лепестков.

Исследования показали эффективность радиальной поляризации для формирования светового пятна минимального размера и азимутальной — для светового кольца.

В этом случае предел, предсказываемый скалярной теорией, достигается просто введением узкой кольцевой диафрагмы, блокирующей центральную часть фокусирующей системы. Для повышения эффективности можно использовать более широкую кольцевую диафрагму с радиальным фазовым скачком. Такой оптический элемент позволяет также получить фокусное пятно меньшего размера, чем предсказывает скалярная теория дифракции.

Существенно уменьшить световое или теневое фокусное пятно можно только за счет ухода энергии в боковые лепестки. В этом случае для контроля роста интенсивности боковых лепестков в некоторой области рядом с фокусным пятном можно использовать амплитудное радиально-полиномиальное распределение (которое оптимизируется, например, методом Брента).

Достижение компромисса между уменьшением размера фокусного пятна и удержанием энергии в центре зависит от размеров контролируемой фокальной области. За пределами контролируемой области уровень интенсивности может существенно превышать значение в центре. Однако увеличение области контроля, как правило, вместе с уменьшением потери энергии приводит к укрупнению размера фокусного пятна. Таким образом, полученные результаты полностью согласуются с теорией Торалдо Ди Франция [78].

Для более распространенных и простых в реализации типов поляризации, в частности, круговой или линейной, получить аналогичные результаты можно только для отдельных компонент напряженности электрического поля — продольной или поперечных. Для суммарной интенсивности эффект оптимизации ухудшается за счет совместного вклада различных компонент. В этом случае нивелировать вклад нежелательной компоненты возможно при взаимодействии излучения со средами избирательно чувствительными к различным компонентам электрического поля, а также в системе из двух встречных пучков [89]

Заклучение

Наиболее эффективным способом формирования вихревых полей является использование фазовых дифракционных оптических элементов, простейшими из которых являются спиральная фазовая пластинка и спиральный аксикон. В главе подробно рассмотрено использование элементов сингулярной оптики в острой фокусировке, когда сочетание поляризационных и фазовых особенностей приводит к разнообразным эффектам, в том числе к преодолению дифракционного предела в дальней зоне дифракции.

Аналитически и численно показано, что субволновая локализация энергии в отдельных компонентах напряженности электрического поля возможна при любых типах поляризации, что важно учитывать при взаимодействии лазерного излучения с веществами, избирательно чувствительными к различным составляющим векторного электромагнитного поля.

Однако для формирования существенно субволновых деталей в суммарной интенсивности электрического поля необходимы определенные типы поляризаций и дополнительная аподизация функции зрачка, например, диафрагмирование линзы узкой кольцевой щелью. Такое диафрагмирование является простым, но энергетически неэффективным способом. Поэтому в главе рассмотрен альтернативный и энергетически более эффективный способ дополнения фокусирующей линзы дифракционным аксиконном. Внесение такой фазовой аподизации позволяет управлять распределением вдоль оптической оси для различных компонент электрического поля. В частности, в этом случае в фокальной плоскости уменьшается вклад поперечных компонент за счет изменения угла наклона центральных лучей. Для радиально-поляризованного излучения фокальная область будет выглядеть как конус, острие которого содержит только продольную компоненту электрического поля и имеет поперечный размер меньше дифракционного предела ($\text{FWHM} = 0,41\lambda$).

В главе также показана возможность использования бинарных фазовых структур для изменения вклада компонент вектора напряженности электрического поля на оптической оси при различных поляризациях падающего на фокусирующую систему излучения. В частности, введение линейного фазового скачка перпендикулярно направлению линейной поляризации приводит к исключению в центре фокальной области поперечных компонент и появлению продольной. Применение бинарных фазовых кольцевых структур позволяет уменьшить размер центрального светового пятна для радиальной поляризации вплоть до $\text{FWHM} = 0,33\lambda$ с эффективностью 13%. Асимметричные бинарные фазовые структуры были использованы для уменьшения площади центрального светового пятна для линейной поляризации — $\text{НМА} = 0,08\lambda^2$ с эффективностью 3,6% и азимутальной поляризации — $\text{НМА} = 0,054\lambda^2$ с эффективностью 2,4%.

Таким образом, уменьшение размера центрального пятна достигается за счет потери эффективности и роста боковых лепестков, что полностью согласуется с теорией Торалдо Ди Франсия. Хотя эти потери на порядок меньше, чем при использовании узких кольцевых диафрагм, рост боковых лепестков выше 30% от максимума не желательны в системах изображения. В связи с этим в главе рассмотрен алгоритм достижения определенного

компромисса между уменьшением размера фокусного пятна, ростом боковых лепестков и дифракционной эффективностью. Компромисс достигается за счет оптимизации аподизирующей функции, представленной радиальным полиномом невысокой степени. Поиск коэффициентов полинома выполнялся методом Брента на основе минимизации функционала, который включает сразу несколько условий, например, уменьшение размера фокусного пятна при обеспечении заданного уровня боковых лепестков.

Литература к главе 4

1. Березный А.Е., Прохоров А.М., Сисакян И.Н., Сойфер В.А. Бессель-оптика // ДАН СССР. 1984. Т. 234(4). С. 802–805.
2. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkarev M.V. et al. The rotor phase filter // J. of Modern Optics. 1992. V. 39, No 5. P. 1147–1154.
3. Дифракционная компьютерная оптика / Под ред. В.А.Сойфера. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
5. Handbook of mathematical function / Ed by M. Abramovitz, I.A. Stegun. — NBS. Appl. Math. 1964. Ser. 55.
6. Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N., Soifer V.A. et al. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // J. Opt. Soc. Am. A. 2005. V. 22(5). P. 849–861.
7. Kotlyar V.V., Khonina S.N., Kovalev A.A., Soifer V.A. et al. Diffraction of a plane, finite-radius wave by a spiral phase plate // Optik Lett. 2006. V. 31. P. 1597–1599.
8. Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Khonina S.N., Skidanov R.V., Soifer V.A. et al. Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate // Appl. Opt. 2006. V. 45(12). P. 2656–2665.
9. Хонина С.Н., Устинов А.В., Ковалев А.А. Распространение радиально-ограниченных вихревых пучков в ближней зоне: I. Алгоритмы расчета // Компьютерная оптика. 2010. Т. 34, № 3. С. 317–332.
10. Хонина С.Н., Устинов А.В., Волоотовский С.Г. Алгоритмы быстрого расчета дифракции радиально-вихревых лазерных полей на микроапертуре // Изв. Самарского научн. центра РАН. 2010. Т. 12, № 4. С. 15–25.
11. Karman G.P., Beijersbergen M.W., van Duijl A. et al. Airy pattern reorganization and subwavelength structure in a focus // J. Opt. Soc. Am. A. 1998. V. 15, No 4. P. 884–899.
12. Quabis S., Dorn R., Eberler M. et al. Focusing light to a tighter spot // Opt. Commun. 2000. V. 179. P. 1–7.
13. Kant R. Superresolution and increased depth of focus: an inverse problem of vector diffraction // J. of Modern Optics. 2000. V. 47, No 5. P. 905–916.
14. Dorn R., Quabis S., Leuchs G. Sharper focus for a radially polarized light beam // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. P. 233901.
15. Davidson N., Bokor N. High-numerical-aperture focusing of radially polarized doughnut beams with a parabolic mirror and a flat diffractive lens // Optik Lett. 2004. V. 29, No 12. P. 1318–1320.

16. Sheppard C.J.R., Choudhury A. Annular pupils, radial polarization, and superresolution // *Appl. Opt.* 2004. V. 43, No 22. P. 4322–4327.
17. Pereira S.F., van de Nes A.S. Superresolution by means of polarisation, phase and amplitude pupil masks // *Opt. Commun.* 2004. V. 234. P. 119–124.
18. Wang H., Shi L., Lukyanchuk B. et al. Creation of a needle of longitudinally polarized light in vacuum using binary optics // *Nature Photonics*. 2008. V. 2. P. 501–505.
19. Kozawa Y., Sato S. Sharper focal spot formed by higher-order radially polarized laser beams // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2007. V. 24. P. 1793–1798.
20. Lerman G.M., Levy U. Effect of radial polarization and apodization on spot size under tight focusing conditions // *Opt. Exp.* 2008. V. 16, No 7. P. 4567–4581.
21. Котляр В.В., Стафеев С.С. Моделирование острой фокусировки радиально-поляризованной лазерной моды с помощью конического и бинарного микроаксионов // *Компьютерная оптика*. 2009. Т. 33, № 1. С. 52–60.
22. Zhan Q. Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications // *Advances in Optics and Photonics*. 2009. V. 1. P. 1–57.
23. Kozawa Y., Sato S. Generation of a radially polarized laser beam by use of a conical Brewster prism // *Optik Lett.* 2005. V. 30(22). P. 3063–3065.
24. Низьев В.Г., Якунин В.П., Туркин Н.Г. Генерация поляризационно-неоднородных мод в мощном CO₂-лазере // *Квантовая электроника*. 2009. № 39(6). С. 505–514.
25. Bomzon Z., Biener G., Kleiner V. Radially and azimuthally polarized beams generated by space-variant dielectric subwavelength gratings // *Optik Lett.* 2002. V. 27(5). P. 285–287.
26. Yonezawa K., Kozawa Y., Sato S. Compact Laser with Radial Polarization Using Birefringent Laser Medium, Jpn // *J. Appl. Phys.* 2007. V. 46(8A). P. 5160–5163.
27. Tidwell S.C., Ford D.H., Kimura W.D. Generating radially polarized beams interferometrically // *Applied Opt.* 1990. V. 29. P. 2234–2239.
28. Passilly N., de Saint Denis R., Aït-Ameur K. et al. Simple interferometric technique for generation of a radially polarized light beam // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2005. V. 22(5). P. 984–991.
29. Volpe G., Petrov D. Generation of cylindrical vector beams with few-mode fibers excited by Laguerre–Gaussian beams // *Opt. Comm.* 2004. V. 237. P. 89–95.
30. Davis J.A., McNamara D.E., Cottrell D.M. et al. Two dimensional polarization encoding with a phase only liquid-crystal spatial light modulator // *Appl. Opt.* 2000. V. 39. P. 1549–15541.
31. Neil M.A.A., Massoumian F., Juskaitis R. Method for the generation of arbitrary complex vector wave fronts // *Optik Lett.* 2002. V. 27(21). P. 1929–1931.
32. Iglesias I., Vohnsen B. Polarization structuring for focal volume shaping in high-resolution microscopy // *Opt. Commun.* 2007. V. 271. P. 40–47.
33. Khonina S.N., Karpeev S.V., Alferov S.V. Polarization converter for higher-order laser beams using a single binary diffractive optical element as beam splitter // *Optik Lett.* 2012. V. 37, No 12. P. 2385–2387.
34. Cicchitelli L., Hora H., Postle R. Longitudinal components for laser beams in vacuum // *Phys. Rev. A*. 1990. V. 41. P. 3727–3732.
35. Simpson N.B., Allen L., Padgett M. J. Optical tweezers and optical spanners with Laguerre-Gaussian modes // *J. of Modern Optics*. 1996. V. 43(12). P. 2485–2491.
36. Heckenberg N. R., Nieminen T.A., Friese M.E.J. et al. Trapping microscopic particles with singular beams // *Proc. SPIE*. 1998. V. 3487. P. 46–53.

37. *Helseth L.E.* Mesoscopic orbitals in strongly focused light // *Opt. Commun.* 2003. V. 224. P. 255–261.
38. *Сойфер В.А., Котляр В.В., Хонина С.Н.* Оптическое манипулирование микрообъектами: достижения и новые возможности, порожденные дифракционной оптикой // *Физика элементарных частиц и атомного ядра.* 2004. № 35(6). С. 1368–1432.
39. *Скиданов Р.В., Хонина С.Н., Котляр В.В., Сойфер В.А.* Экспериментальное исследование движения диэлектрических шариков в световых пучках с угловыми гармониками высоких порядков // *Компьютерная оптика.* 2007. № 31(1). С. 14–21.
40. *Franke-Arnold S., Allen L., Padgett M.* Advances in optical angular momentum // *Laser Photonics Rev.* 2008. V. 2. P. 299–313.
41. *Levenson M.D., Ebihara T., Dai G. et al.* Optical vortex masks for via levels // *J. Microlithography, Microfabrication, and Microsystems.* 2004. V. 3(2). P. 293–304.
42. *Unno Y., Ebihara T., Levenson M.D.* Impact of mask errors and lens aberrations on the image formation by a vortex mask // *J. of Microlithography, Microfabrication, and Microsystems.* 2005. V. 4(2). P. 023006.
43. *Willig K.I., Keller J., Bossi M. et al.* STED microscopy resolves nanoparticle assemblies // *New J. of Phys.* 2006. V. 8. P. 106.
44. *Torok P., Munro P.R.T.* The use of Gauss-Laguerre vector beams in STED microscopy // *Opt. Exp.* 2004. V. 12, No 15. P. 3605–3617.
45. *Helseth L.E.* Optical vortices in focal regions // *Opt. Commun.* 2004. V. 229. P. 85–91.
46. *Liu P., Lu B.* Phase singularities of the transverse field component of high numerical aperture dark-hollow Gaussian beams in the focal region // *Opt. Commun.* 2007. V. 272. P. 1–8.
47. *Singh R. K., Senthilkumaran P., Singh K.* Focusing of linearly-, and circularly polarized Gaussian background vortex beams by a high numerical aperture system afflicted with third-order astigmatism // *Opt. Commun.* 2008. V. 281. P. 5939–5948.
48. *Chen B., Pu J.* Tight focusing of elliptically polarized vortex beams // *Appl. Opt.* 2009. V. 48, No 7. P. 1288–1294.
49. *Rao L., Pu J., Chen Z. et al.* Focus shaping of cylindrically polarized vortex beams by a high numerical-aperture lens // *Opt. a. Laser Technol.* 2009. V. 41. P. 241–246.
50. *Beth R.A.* Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light // *Phys. Rev.* 1936. V. 50. P. 115–125.
51. *Holbourn A.H.S.* Angular momentum of circularly polarized light // *Nature (London).* 1936. V. 137. P. 31.
52. *Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C. et al.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45. P. 8185–8189.
53. *Barnett S. M., Allen L.* Orbital angular-momentum and non-paraxial light-beams // *Opt. Commun.* 1994. V. 110. P. 670–678.
54. *Soskin M.S., Gorshkov V.N., Vasnetsov M.V.* Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortices // *Phys. Rev. A.* 1997. V. 56. P. 4064–4075.

55. *Richards B., Wolf E.* Electromagnetic diffraction in optical systems. II. Structure of the image field in an aplanatic system // *Proc. Roy. Soc. A.* 1959. V.253. P. 358–379.
56. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1983.
57. *Gori F.* Polarization basis for vortex beams // *J. Opt. Soc. Amer. A.* 2001. V. 18, No 7. P. 1612–1617.
58. *Schwartz C., Dogariu A.* Backscattered polarization patterns, optical vortices, and the angular momentum of light // *Optik Lett.* 2006. V.31, No 8. P. 1121–1123.
59. *Bokor N., Davidson N.* A three dimensional dark focal spot uniformly surrounded by light // *Opt. Commun.* 2007. V. 279. P. 229–234.
60. *Grosjean T., Courjon D.* Photopolymers as vectorial sensors of the electric field // *Optics Express.* 2006. V. 14, No 6. P. 2203–2210.
61. *Xie X.S., Dunn R.C.* Probing single molecule dynamics // *Science.* 1994. V. 265. P. 361–364.
62. *Beverluis M.R., Novotny L., Stranick S.J.* Programmable vector point-spread function engineering // *Opt. Exp.* 2006. V. 14. P. 2650–2656.
63. *Хонина С.Н., Волотовский С.Г.* Фраксикон–дифракционный оптический элемент с конической фокальной областью // *Компьютерная оптика.* 2009. Т. 33, № 4. С. 401–411.
64. *Koronkevich V.P., Mikhaltsova I.A., Churin E.G. et al.* Lensacon // *Appl. Opt.* 1993. V. 34(25). P. 5761–5772.
65. *Kalosha V.P., Golub I.* Toward the subdiffraction focusing limit of optical superresolution // *Opt. Lett.* 2007. V. 32. P. 3540–3542.
66. *Yirmiyahu Y., Niv A., Biener G. et al.* Excitation of a single hollow waveguide mode using in-homogeneous anisotropic subwavelength structures // *Opt. Exp.* 2007. V. 15(20). P. 13404–13414.
67. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A. et al.* Trochoson // *Opt. Commun.* 1992. V. 91(3–4). P. 158–162.
68. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V. et al.* Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // *J. of Modern optics.* 2004. V. 51(14). P. 2167–2184.
69. *Zhan Q.* Properties of circularly polarized vortex beams // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, No 7. P. 867–869.
70. *Khonina S.N., Volotovskiy S.G.* Controlling the contribution of the electric field components to the focus of a high-aperture lens using binary phase structures // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2010. V. 27, No 10. P. 2188–2197.
71. *Гудмен Дж.* Введение в Фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
72. *Durnin J.* Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1987. V. 4, No 4. P. 651–654.
73. *McLeod J.H.* The axicon: a new type of optical element // *J. Opt. Soc. Am.* 1954. V. 44. P. 592–597.
74. *Fedotovskiy A., Lehovec H.* Optical filter design for annular imaging // *Appl. Opt.* 1974. V. 13(12). P. 2919–2923.
75. *Khonina S.N., Kazanskiy N.L., Volotovskiy S.G.* Vortex phase transmission function as a factor to reduce the focal spot of high-aperture focusing system // *J. of Modern Optics.* 2011. V. 58(9). P. 748–760.
76. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A. et al.* Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics // *J. of Modern Optics.* 1999. V. 46(2). P. 227–238.

77. *Khonina S.N., Balalayev S.A., Skidanov R.V.* et al. Encoded binary diffractive element to form hyper-geometric laser beams // *J. of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2009. V. 11. P. 065702–065709.
78. *Toraldo di Francia G.* Supergain antennas and optical resolving power // *Nuovo Cimento*. 1952. V. 9. P. 426.
79. *Ландсберг Г.С.* Оптика. Учеб. пособие, 6-е изд. — М.: Физматлит, 2003.
80. *Хонина С.Н., Волоотовский С.Г.* Исследование применения аксиконов в высокоапертурной фокусирующей системе // *Компьютерная оптика*. 2010. Т. 34, № 1. С. 35–51.
81. *Хонина С.Н., Устинов А.В., Пелевина Е.А.* Анализ влияния волновых aberrаций на уменьшение размеров фокального пятна в высокоапертурных фокусирующих системах // *Компьютерная оптика*. 2011. Т. 35, № 2. С. 203–219.
82. *Artl J., Padgett M.J.* Generation of a beam with a dark focus surrounded by regions of higher intensity: the optical bottle beam // *Optik Lett*. 2000. V. 25. P. 191–193.
83. *Hell S.W., Wichmann J.* Breaking the diffraction resolution limit by stimulated-emission-depletion fluorescence microscopy // *Optik Lett*. 1994. V. 19. P. 780–782.
84. *Biss D.P., Youngworth K.S., Brown T.G.* Dark field imaging with cylindrical-vector beams // *Appl. Opt*. 2006. V. 45. P. 470–479.
85. *Khonina S.N., Kazanskiy N.L., Volotovskiy S.G.* Influence of vortex transmission phase function on intensity distribution in the focal area of high-aperture focusing system // *Opt. Memory and Neural Networks (Allerton Press)*. 2011. V. 20(1). P. 23–42.
86. *Brent R.P.* Algorithms for Minimization Without derivatives. — Prentice-Hall, 1973.
87. <http://alglib.sources.ru/>
88. *Sales T.R.M., Morris G.M.* Diffractive superresolution elements // *J. Opt. Soc. Am. A*. 1997. Vol. 14. P. 1637.
89. *Bewersdorf J., Egner A., Hell S.W.* 4pi-confocal microscopy is coming of age // *G.I.T. Imaging & Microscopy*. 2004. V. 4. P. 24–25.
90. *Helseth L.E.* Breaking the diffraction limit in nonlinear materials // *Opt. Commun*. 2005. V. 256. P. 435.
91. *Helseth L.E.* Smallest focal hole // *Opt. Commun*. 2006. V. 257. P. 1–8.

Глава 5

ОПТИЧЕСКОЕ МАНИПУЛИРОВАНИЕ МИКРО- И НАНООБЪЕКТАМИ

Оптический захват и вращение микрообъектов основаны на хорошо известном явлении давления света. После создания лазеров появилась возможность создавать силу давления излучения достаточную для ускорения, замедления, отклонения, направления и стабильного захвата микрообъектов, размеры которых лежат в диапазоне от долей до десятков микрометров. Если показатель преломления объекта больше показателя преломления среды, то сила, возникающая в результате изменения направления движения света, действует на микрообъект так, что он двигается в область наибольшей интенсивности света.

Первые эксперименты по наблюдению захвата и ускорения микрообъектов, взвешенных в жидкости и газе, описаны в работе [1]. В 1977 г. наблюдалось изменение силы давления излучения на прозрачные диэлектрические сферические объекты в зависимости от длины волны и размера [2].

Если в первых работах было показано, что микрообъект можно захватывать и линейно перемещать, то в последующих рассматривалась возможность вращать и ориентировать в пространстве микрообъекты. Оптическое вращение позволяет реализовать бесконтактный привод микромеханических систем [3]. Оптическое вращение имеет большое значение в биологии [4].

Можно выделить три основных способа вращения микрообъектов:

- За счет спинового углового момента, который существует у полей с круговой поляризацией. При этом вращаются только двулучепреломляющие микрообъекты, например, микрообъекты из исландского шпата [5, 6]. Основной недостаток этого метода – ограничение на материал, из которого изготовлен микрообъект;
- За счет орбитального углового момента, возникающего из-за спиральной формы волнового фронта, например, пучков Гаусса–Лагеррра и Бесселя высших порядков. Передача орбитального углового момента происходит за счет частичного поглощения света в микрообъекте. Этот способ представлен в работах [3, 7, 8]. В этих работах пучки Гаусса–Лагеррра и Бесселя формировались с использованием амплитудных голограмм, что невыгодно с точки зрения энергетической эффективности. Гораздо эффективнее использовать чисто фазовые дифракционные оптические элементы, например для формирования пучков Бесселя [9]. Известны работы, в которых микрообъекты перемещаются по траекториям отличным от окружности, например, по световым треугольнику, квадрату, спирали [10, 11, 12, 13, 14].

- За счет изменения фазового набега в интерференционной картине (при захвате микрообъекта в интерференционную картину) между пучком, имеющим винтовой волновой фронт (например, пучок Гаусса–Лагерра), и Гауссовым пучком. И вращение этой картины осуществляется с помощью изменения оптической длины пути одного из пучков. Этот способ описан в работе [15]. Главный недостаток этого метода — необходимость использования довольно сложной оптической схемы. В этом случае также проще использовать ДОЭ, формирующий суперпозицию мод Бесселя или Гаусса–Лагерра [16]. Вращающиеся пучки Бесселя или Гаусса–Лагерра, у которых при распространении вдоль оптической оси вращается картина распределения интенсивности в поперечном сечении пучка, можно использовать для вращения микрообъектов с регулируемой скоростью с помощью линейного смещения источника излучения или фокусирующей линзы. При этом оптическая схема сводится, по сути, к одному ДОЭ.

Массивы 2D-ловушек (микрообъекты прижаты к препаратному столику микроскопа) имеют потенциальное применение для выстраивания элементов микрооптомеханических систем [17, 18], формирования различных микроконфигураций [19], сортировки биологических клеток [20] и других приложений, где не требуется продольное манипулирование объектами.

Система из двух ловушек была реализована с помощью разделителя пучка и преломляющей оптики [21, 22]. Однако, такой подход очень усложняется, если нужно большее число ловушек. Альтернативным и наиболее перспективным подходом является разделение и направление лазерного пучка с помощью ДОЭ [7, 23, 24, 25, 26].

В работе [27] предлагается динамический дифракционный элемент, представляющий собой матрицу $N \times N$ программируемых фазовых решеток, дополнить матрицей $N \times N$ микролинз. В работе [7] использован итерационный метод расчета фазовых ДОЭ, предназначенных для создания 2D- и 3D-массивов оптических ловушек. Экспериментально сформирована матрица из 8-ми гауссовых пучков. Основными недостатками пространственных модуляторов света на жидких кристаллах пока остаются низкая дифракционная эффективность (сильный дифракционный шум из-за крупной дискретности модуляторов) и недостаточное для реализации сложных фазовых распределений разрешение матрицы пикселей. Также, конечный размер пикселей ограничивает максимальный разброс дифракционных порядков (при высоких несущих пространственных частотах происходит бинаризация фазового профиля и дифракционная эффективность уменьшается).

Измерения показали [28], что после жидкокристаллического модулятора остается 15 % энергии падающего пучка. Потери энергии вызваны несколькими причинами:

- 1) непрозрачной частью панели (основные потери, до 65 %),
- 2) структура жидкокристаллического модулятора похожа на решетку, производящую высокие порядки (54 % потери),
- 3) невозможность сконцентрировать всю энергию в полезном порядке из-за того, что модулятор имеет максимальный фазовый сдвиг меньше 2π

(максимально достигнутое соотношение между первым и нулевым порядком 2:1) [28],

- 4) несоответствие квадратной апертуры панели круглому профилю падающего пучка (8 %). Таким образом, использование ДОЭ для формирования многопорядковых световых пучков для задач вращения микрообъектов, если не нужна динамика, предпочтительнее, чем использование динамических модуляторов света.

Существует значительное количество работ, в которых решения с разделяющимися переменными для уравнения Гельмгольца и Шредингера используются в оптике. В этих работах рассматриваются многомодовые пучки Бесселя [29] многопорядковые пучки Гаусса–Лагерра [30], непараксиальные световые пучки, которые сохраняют свою структуру при распространении [31], параболические пучки, волны Гельмгольца–Гаусса, параксиальные световые пучки, сохраняющие свою структуру с точностью до масштаба, моды Айнса–Гаусса [31], элегантные пучки Айнса–Гаусса [31], моды Эрмита–Лагерра–Гаусса [32], оптические вихри [33]. Некоторые из этих пучков были реализованы с помощью лазерных резонаторов [33], жидкокристаллических дисплеев [34, 35], фазовых ДОЭ [29, 36, 37]. Эти пучки могут дать новые дополнительные возможности в задаче «оптического пинцета».

Существует значительное количество работ [38–48], посвященных расчету сил, действующих на микрообъект. В известных работах по расчету сил, действующих на микрообъект с использованием геометрикооптического подхода, накладываются ограничения на форму микрообъекта и на форму светового пучка, а также, как правило, не рассматриваются параметры движения микрообъектов. Так в работе [39] рассматриваются только сферические микрообъекты в гауссовом пучке. В работе [42] сила рассчитывалась для несферических микрообъектов, но авторы ограничились случаем гауссового пучка. В работе [38] рассматриваются сферические и эллиптические микрообъекты в пучках Гаусса и Гаусса–Лагерра.

5.1. Методы расчета силы, действующей на микрообъект со стороны сфокусированного лазерного излучения

В данном разделе рассмотрен вывод выражений для силы, действующей на диэлектрический цилиндрический объект при освещении монохроматической электромагнитной волной.

5.1.1. Электромагнитная сила для трехмерного случая. В соответствии с уравнениями Максвелла для полного импульса системы — электромагнитное поле плюс объект V , ограниченный поверхностью S , будем иметь [49]

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_1} p_i dV + \frac{\partial}{\partial t} P_{0i} = - \oint_{S_1} \sigma_{ik} n_k dS, \quad (5.1)$$

где p_i — проекции вектора плотности импульса электромагнитного поля (V_1 и S_1 — объем и ограничивающая его поверхность, которые включают

объект $V \in V_1$), который связан с вектором Умова–Пойнтинга в гауссовой системе единиц соотношением

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{S}}{c} = \frac{1}{4\pi c} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}], \quad (5.2)$$

P_{0i} — проекции вектора импульса объекта, $\frac{\partial P_{0i}}{\partial t}$ — проекции вектора силы действия света на объект ($\mu = 1$):

$$\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2}{2} \delta_{ik} - E_i E_k - H_i H_k \right); \quad (5.3)$$

σ_{ik} — максвелловский тензор напряжений электромагнитного поля ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$); \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряженностей электрического и магнитных полей в вакууме.

После усреднения по времени за период $T = 2\pi/\omega$ величины \mathbf{E} монохроматического света:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{E}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \{ \mathbf{H}(\mathbf{x}) e^{i\omega t} \} \quad (5.4)$$

вместо уравнения (5.1) получим

$$F_i = \left\langle \frac{\partial P_{0i}}{\partial t} \right\rangle = - \oint \langle \sigma_{ik} \rangle n_k dS, \quad (5.5)$$

так как

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \int_V p_i dV \right\rangle = \int_V \left\langle \frac{\partial}{\partial t} p_i \right\rangle dV = 0. \quad (5.6)$$

Можно показать, что:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial P_x}{\partial t} \right\rangle &= \frac{1}{4\pi c} \{ \langle \text{Re} (i\omega E_y(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \text{Re} (H_z(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \rangle + \\ &+ \langle \text{Re} (E_y(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \text{Re} (i\omega H_z(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \rangle - \\ &- \langle \text{Re} (i\omega E_z(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \text{Re} (H_y(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \rangle - \\ &- \langle \text{Re} (E_z(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \text{Re} (i\omega H_y(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \rangle \} = 0, \end{aligned} \quad (5.7)$$

где $\text{Re}(\dots)$ — реальная часть комплексного числа, $\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$. Аналогично соотношению (5.7), для других проекций вектора импульса электрического поля можно показать, что $\left\langle \frac{\partial P_y}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial P_z}{\partial t} \right\rangle = 0$.

Для получения выражения для усредненного по времени тензора напряжений (5.3) учтем, что

$$\langle \text{Re} (E_i(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \text{Re} (E_j(\mathbf{x}) e^{i\omega t}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [E_i(\mathbf{x}) E_j^*(\mathbf{x})]. \quad (5.8)$$

Тогда вместо выражения (5.5) получим (ε_2 — диэлектрическая проницаемость среды), что

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{1}{8\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 |E_x|^2 + |H_x|^2 - \varepsilon_2 |E_y|^2 - |H_y|^2 - \varepsilon_2 |E_z|^2 - |H_z|^2 \right] dS_x + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} (\varepsilon_2 E_x E_y^* + H_x H_y^*) dS_y + \operatorname{Re} (\varepsilon_2 E_x E_z^* + H_x H_z^*) dS_z \right\}, \\
 F_y &= \frac{1}{8\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 |E_y|^2 + |H_y|^2 - \varepsilon_2 |E_x|^2 - |H_x|^2 - \varepsilon_2 |E_z|^2 - |H_z|^2 \right] dS_y + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} (\varepsilon_2 E_y E_z^* + H_y H_z^*) dS_z + \operatorname{Re} (\varepsilon_2 E_y E_x^* + H_y H_x^*) dS_x \right\}, \\
 F_z &= \frac{1}{8\pi} \oint_S \left\{ \frac{1}{2} \left[\varepsilon_2 |E_z|^2 + |H_z|^2 - \varepsilon_2 |E_x|^2 - |H_x|^2 - \varepsilon_2 |E_y|^2 - |H_y|^2 \right] dS_z + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{Re} (\varepsilon_2 E_z E_x^* + H_z H_x^*) dS_x + \operatorname{Re} (\varepsilon_2 E_z E_y^* + H_z H_y^*) dS_y \right\},
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $dS_x = -\frac{\partial z}{\partial x} dx dy$, $dS_y = \frac{\partial z}{\partial y} dx dy$, $dS_z = dx dy$, $E_1 = E_x$, $E_2 = E_y$, $E_3 = E_z$ (для H_i и F_i аналогично).

5.1.2. Электромагнитная сила для двумерного случая (ТЕ- и ТМ-поляризаций). Перепишем выражения (5.9) для силы действия света на микрообъект в 2D-случае. Для ТЕ-поляризации ($H_x = E_y = E_z = 0$) электрическое поле направлено вдоль оси X : $E_x \neq 0$, Z — оптическая ось, 2D-объект имеет вид цилиндра с произвольной формой сечения и имеет бесконечную протяженность вдоль оси X . Плоскость YOZ — плоскость падения света. В этом случае соотношение (5.9) примет вид

$$\begin{aligned}
 F_x &= 0, \\
 F_y &= \frac{1}{8\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[|H_y|^2 - \varepsilon_2 |E_x|^2 - |H_z|^2 \right] dS_y + \operatorname{Re} (H_y H_z^*) dS_z \right\}, \\
 F_z &= \frac{1}{8\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2} \left[|H_z|^2 - \varepsilon_2 |E_x|^2 - |H_y|^2 \right] dS_z + \operatorname{Re} (H_z H_y^*) dS_y \right\},
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

здесь S_1 — контур, охватывающий сечение объекта в плоскости YOZ . Сила F_z направлена вдоль оптической оси и является аналогом рассеивающей силы для рэлеевских частиц [45], а F_y — направлена поперек оптической оси и является аналогом градиентной силы [45]. Связь между проекциями H_y ,

H_z и E_x (ТЕ-поляризация) следует из уравнений Максвелла:

$$H_y = \frac{i}{k_0\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{ik_0\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}, \quad (5.11)$$

связь между проекциями E_y , E_z и H_x (ТМ-поляризация) имеет вид

$$E_y = \frac{1}{ik_0\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = \frac{i}{k_0\varepsilon} \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad (5.12)$$

где $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число, ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — магнитная проницаемость среды. Аналогично соотношению (5.10) сила давления света с ТМ-поляризацией на 2D-объект будет иметь следующие проекции ($E_x = H_y = H_z = 0$):

$$F_x = 0,$$

$$F_y = \frac{1}{8\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2} [\varepsilon_2 |E_y|^2 - \varepsilon_2 |E_z|^2 - |H_x|^2] dS_y + \varepsilon_2 \operatorname{Re} (E_y E_z^*) dS_z \right\}, \quad (5.13)$$

$$F_z = \frac{1}{8\pi} \oint_{S_1} \left\{ \frac{1}{2} [\varepsilon_2 |E_z|^2 - \varepsilon_2 |E_y|^2 - |H_x|^2] dS_z + \varepsilon_2 \operatorname{Re} (E_z E_y^*) dS_y \right\},$$

где (как и в (5.10)) $dS_y = n_y dl = \sin \varphi dl = dz$ и $dS_z = n_z dl = \cos \varphi dl = dy$, dl — элемент дуги.

5.1.3. Расчет силы для плоской волны. Для расчета силы действия светового поля на цилиндрический объект, необходимо рассчитать интеграл по контуру, внутри которого находится объект. Как следует из формул для расчета проекций сил (5.10), (5.13), сила не должна меняться при изменении радиуса интегрирования R_i , если объект полностью заключен в контур интегрирования: $R_i > R$.

Рассчитаем итеративным алгоритмом поле дифракции плоской волны на цилиндрическом объекте и будем рассчитывать силу, действующую на него при различных радиусах интегрирования. Параметры моделирования: падающая волна плоская, все рассчитанное поле дифракции 10×10 мкм, длина волны 1 мкм. Объект представляет собой цилиндр с круглым сечением диаметром 1 мкм или квадрат со стороной 1 мкм. Показатель преломления цилиндра $n_1 = 1,4$ ($\varepsilon_1 = 1,96$). Плотность потока световой энергии составляет 100 мВт/м^2 на всем поле дифракции.

На рисунке 5.1 представлена амплитуда поля дифракции ($|E_x|$, ТЕ-поляризация) плоской волны на цилиндрическом объекте при приведенных выше параметрах.

В таблице 5.1 приведена зависимость проекции силы F_z , действующей на цилиндр вдоль оси распространения света Z , от радиуса интегрирования R_i . Поскольку падающая волна плоская и распространяется вдоль оси Z , проекция силы вдоль оси Y должна быть равна нулю. Моделирование показывает, что проекция силы на ось Y в данном случае на три порядка меньше проекции силы вдоль оси Z . Например, при радиусе

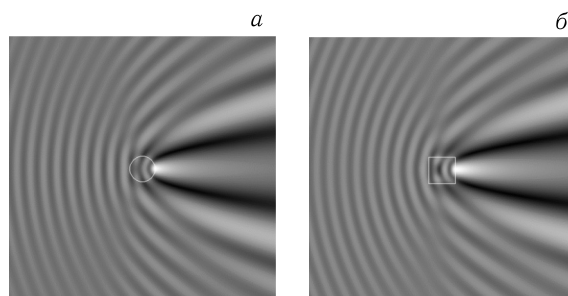


Рис. 5.1. Поле дифракции $|E_x|$, ТЕ-поляризация плоской волны на (а) цилиндре с круглым сечением; (б) на цилиндре с квадратной формой сечения

интегрирования $R_i = 5$ мкм для цилиндра с круглым сечением проекция силы $F_z = 0,33176 \cdot 10^{-10}$ Н/м, а проекция $F_y = 0,0007617 \cdot 10^{-10}$ Н/м.

Таблица 5.1. Зависимость проекции силы F_z от радиуса интегрирования R_i

Цилиндрический объект с круглым сечением				
R_i , мкм	5	3,75	2,5	1
$F_z, \cdot 10^{-10}$ Н/м	0,33176	0,32036	0,33213	0,31781
Цилиндрический объект с квадратным сечением				
R_i , мкм	5	3,75	2,5	1
$F_z, \cdot 10^{-10}$ Н/м	0,32137	0,31588	0,31792	0,31688

Как видно из табл. 5.1, разброс результатов расчета силы составляют меньше 5%. Число отсчетов на всем поле дифракции 256×256 . Этот результат доказывает, что сила по формулам (5.10) рассчитывается правильно (с погрешностью до 5%).

Рассмотрим зависимость силы, рассчитанной по формулам (5.10), от разрешения поля дифракции.

В таблице 5.2 приведена зависимость проекции силы F_z на ось Z от количества отсчетов на все поле дифракции при вышеприведенных параметрах. Сила рассчитывалась при радиусе интегрирования 2,5 мкм. Все поле дифракции бралось размером 5×5 мкм.

Таблица 5.2. Зависимость проекции силы F_z от количества отсчетов на все поле дифракции

Цилиндрический объект с круглым сечением				
$K \times K$, мкм	64×64	128×128	156×156	512×512
$F_z, \cdot 10^{-10}$ Н/м	0,4058	0,3523	0,3479	0,3454
Цилиндрический объект с квадратным сечением				
$K \times K$, мкм	64×64	128×128	156×156	512×512
$F_z, \cdot 10^{-10}$ Н/м	0,3220	0,3259	0,3216	0,3324

Из таблицы 5.2 видно, что при количестве отсчетов, приходящихся на все поле дифракции 64×64 , расчет силы в случае круглого сечения цилиндра

происходит менее точно, что обусловлено погрешностью в описании границы круглого сечения цилиндра ломаной линией. Различие трех последних значений силы для цилиндра с круглым сечением составляют 2 %, а для квадрата 1,5 %.

В таблице 5.3 приведена зависимость проекции силы F_z на ось Z при тех же условиях от количества отсчетов K , взятых на диаметре цилиндра с круглым сечением, при фиксированном разрешении поля дифракции — 256×256 отсчетов.

Таблица 5.3. Зависимость проекции силы F_z от количества отсчетов K взятых на диаметре круглого сечения цилиндра

K	12	25	50	100
$F_z, \times 10^{-10}$ Н/м	0,4046	0,3594	0,3497	0,3327

Из таблицы 5.3 видно, что при недостаточном разрешении объекта (в данном случае 12 отсчетов на диаметр круглого сечения цилиндра) проекция силы, действующей на цилиндр, считается неточно. Различие трех последних значений силы в табл. 5.3 составляет 8 %. При взятии менее 12 отсчетов на длину волны итеративный алгоритм перестает сходиться при заданных параметрах.

5.1.4. Расчет силы для непараксиального гауссова пучка (показатель преломления объекта больше показателя преломления среды). В этом разделе будут рассчитаны по формулам (5.10) проекции силы, действующие на диэлектрический цилиндр с круглым сечением в гауссовом пучке, в зависимости от смещения L центра цилиндра от центра перетяжки пучка.

Проекция силы, рассчитанные по формуле (5.10), действующей на цилиндр с круглым сечением в случае ТЕ-поляризованной волны, представлены на рис. 5.2. Параметры эксперимента: $D = \lambda = 2w_0 = 1$ мкм, $\varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_1 = 2$, мощность падающего излучения на единицу длины равна $P = 0,1$ Вт/м. Смещение от центра перетяжки L имеет размерность мкм.

Аналогичные проекции силы в случае ТМ-поляризации, рассчитанные по формулам (5.13), представлены на рис. 5.3.

Из рисунков 5.2, б и 5.3, б видно, что при поперечном смещении цилиндра вдоль оси Y возникает сила с проекцией F_y , стремящаяся вернуть цилиндр в центр перетяжки. Причем максимального значения проекции силы F_y и F_z достигают при поперечном смещении цилиндра L , примерно равном радиусу перетяжки гауссова пучка: $L \approx w_0$.

В работе [48] приводятся результаты численного моделирования силы, действующей на керровскую микросферу в 3D-случае. Параметры моделирования: показатель преломления сферы $n_1 = 1,4$, показатель преломления среды $n_2 = 1,33$, диаметр сферы $D = 2$ мкм, длина волны $\lambda = 1,06$ мкм, относительное отверстие (отношение апертуры линзы к фокусному расстоянию) $NA = 1,4$, смещение от фокуса по оси Z $L = 1$ мкм. Сила, действующая перпендикулярно направлению распространения света при смещении объекта от центра в плоскости, перпендикулярной направлению распространения излучения при данных параметрах равна $F = 0,3 \cdot 10^{-10}$ Н. Из рисунков 5.2, в

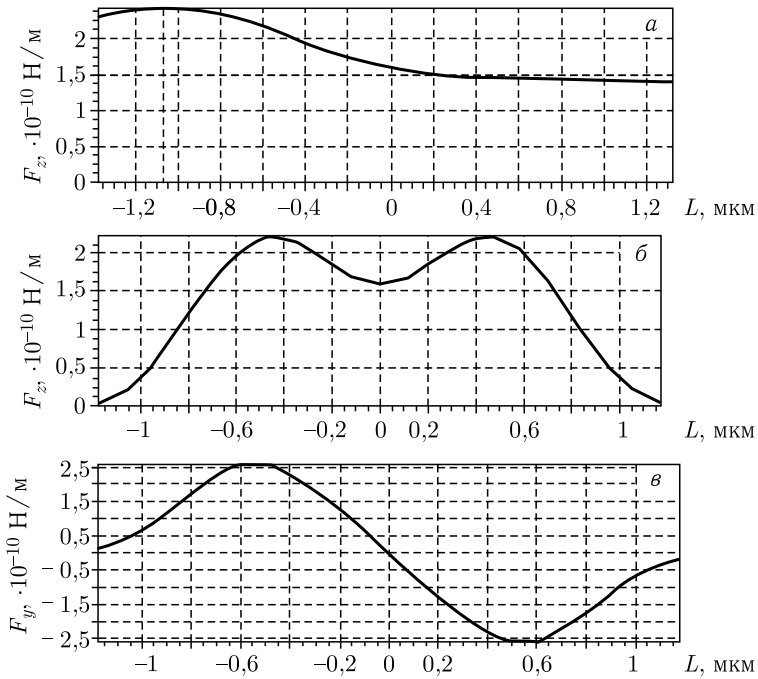


Рис. 5.2. ТЕ-поляризация: *a*) — зависимость проекции силы F_z от смещения L объекта вдоль оси Z через центр перетяжки ($Y = 0$), *б, в*) — зависимость проекций сил F_z и F_y от смещения L объекта вдоль оси Y через центр перетяжки ($Z = 0$)

и 5.3, *в* видно, что проекция силы F_y имеет тот же порядок на единицу длины цилиндра ($(0,5 \div 1) \times 10^{-10}$ Н/м).

На рисунке 5.4 представлена картина интерференции двух гауссовых пучков, направленных друг против друга с перетяжкой в начале координат, создающих стоячую волну. Рисунок 5.4, *a* отображает амплитуду суммарного поля $|E_x|$ (ТЕ-поляризация), рис. 5.4, *б* — модуль проекции вектора Умова–Пойнтинга на ось распространения света Z . Первый гауссов пучок направлен вдоль оси Z , второй пучок в обратном направлении оси Z . Для первого гауссова пучка длина волны излучения 1 мкм, мощность излучения 50 мВт/м, перетяжка гауссова пучка находится в начале координат, ее диаметр равен 1 мкм. Мощность излучения второго пучка 50 мВт/м, длина волны так же равна 1 мкм, а диаметр перетяжки равен 1,5 мкм. Если поместить в такое поле диэлектрический объект, имеющий размер порядка длины волны, то данное поле окажется для него ловушкой: он будет втягиваться в максимумы интенсивности поля. На рисунке 5.5 представлен график зависимости проекции силы F_z , направленной вдоль оси Z , от смещения L по оси Z . Объектом является цилиндр с круглым сечением с диаметром, равным 1 мкм, диэлектрическая проницаемость $\epsilon_1 = 2$. Все поле дифракции имеет размер $2,5 \times 2,5$ мкм. Из рисунка 5.5. видно, что вблизи перетяжки вдоль оси Z почти периодически через расстояние около 0,25 мкм имеют место точки, в которых сила равна нулю. Если центр цилиндра будет сов-

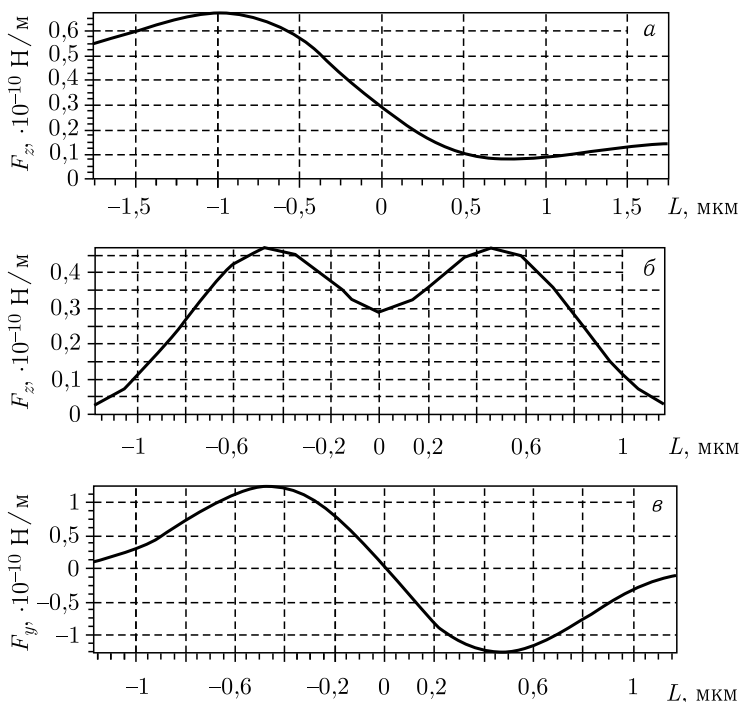


Рис. 5.3. ТМ-поляризация: а) — зависимость проекции силы F_z от смещения L объекта вдоль оси Z через центр перетяжки $4(Y=0)4$, б, в) — зависимость проекций сил F_z и F_y от смещения L объекта вдоль оси Y через центр перетяжки ($Z = 0$)

Рис. 5.4. Интерференционная картина двух непараксиальных гауссовых пучков, распространяющихся навстречу друг другу вдоль оси Z : суммарная амплитуда векторов электрической напряженности $|E_x|$ (а); проекция на ось Z вектора Умова–Пойнтинга $|S_z|$ (б)

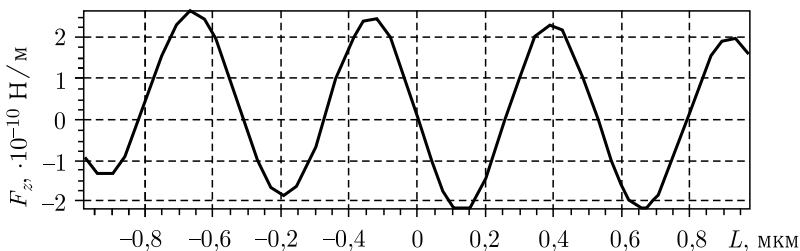
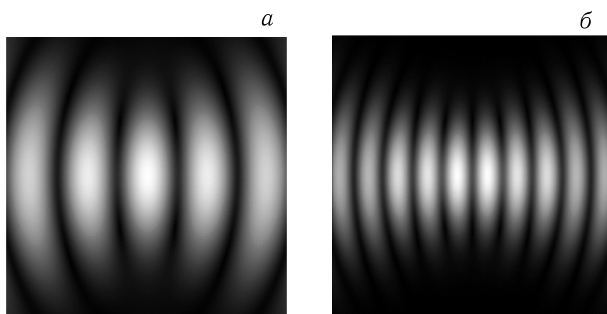


Рис. 5.5. Проекция на ось Z силы, действующей на цилиндр с круглым сечением с $\varepsilon_1 = 2$ в зависимости от смещения центра круга цилиндра вдоль оси Z

падать с этими точками, то цилиндр будет находиться в устойчивом или неустойчивом равновесии. Точки устойчивого и неустойчивого равновесия чередуются попеременно, т. е. примерно через каждые 0,5 мкм цилиндр будет находиться в «оптической ловушке» (в точке устойчивого равновесия).

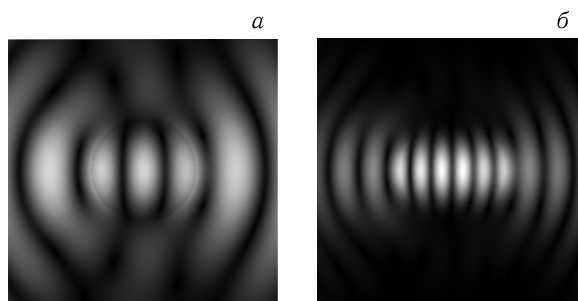


Рис. 5.6. То же, что и на рис. 5.4, но в присутствии цилиндра с круглым сечением в центре перетяжки

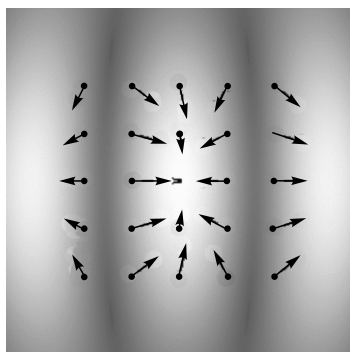


Рис. 5.7. Поле векторов сил, действующих со стороны двух встречных гауссовых пучков на цилиндр с круглым сечением, центр которого расположен в разных точках интерференционной картины: центр сечения цилиндра совпадает с началом каждой стрелки, а длина каждой стрелки пропорциональна модулю силы в данной точке

На рисунке 5.6 представлена картина дифракции направленных друг против друга гауссовых пучков, изображенных на рис. 5.4, на цилиндре с круглым сечением, описанном выше. Рисунок 5.6, *а* представляет напряженность электрического поля $|E_x|$ (ТЕ-поляризация), рис. 5.6, *б* — проекцию вектора Умова–Пойнтинга на ось Z . Объект расположен по центру перетяжки ($z = 0$). Для визуализации на рис. 5.6, *а* сам объект слегка затемнен.

На рисунке 5.7 приведена центральная часть картины дифракции рис. 5.6, *а* размером $0,31 \times 0,31$ мкм. Стрелками отображены направления силы, действующей на данный цилиндр со стороны излучения, при помещении объекта в каждую конкретную точку пространства. Можно видеть, что объект «втягивается» в максимумы интерференционной картины. Длина стрелки пропорциональна модулю силы.

Если показатель преломления среды меньше, чем показатель преломления частицы, то при определенных параметрах можно наблюдать «захват» частицы по оси Z не только в случае двух встречных пучков, но и в случае одного сфокусированного гауссова пучка.

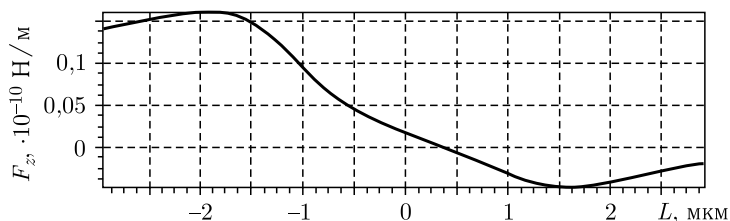


Рис. 5.8. Проекция силы F_z на ось Z для гауссова пучка, действующего на цилиндр с круглым сечением с $\varepsilon_1 = 1,2$ (среда $\varepsilon_2 = 1$)

На рисунке 5.8 представлена зависимость F_z от L при смещении цилиндра на расстояние L вдоль оси Z . Параметры эксперимента: длина волны 1 мкм, диаметр перетяжки гауссова пучка $2w_0 = 1$ мкм, диэлектрическая проницаемость частицы $\varepsilon_1 = 1,2$, среды $\varepsilon_2 = 1$, диаметр частицы $D = 2$ мкм. Из графика можно видеть механизм захвата: проекция силы F_z перед фокусом положительна и направлена в сторону фокуса, за фокусом отрицательна и толкает частицу назад, в фокус. Из численных экспериментов было определено, что возможность захвата зависит от диэлектрической проницаемости частицы. Для приведенных параметров «захват» имеет место при $1 < \varepsilon_1 < 1,35$. График зависимости силы F_z при данных параметрах и диэлектрической проницаемости частицы $\varepsilon_1 = 1,35$ показан на рис. 5.5.

Из рисунков 5.8 и 5.9 видно, что при смещении цилиндра вдоль оптической оси на расстояние $L \approx 0,4$ мкм сила, действующая на него со стороны пучка света, обращается в нуль: $F_y = F_z = 0$. Объяснить наличие такой точки равновесия для цилиндра можно в терминах двух сил (рассеивающей и градиентной), действующих на цилиндр вблизи перетяжки гауссова пучка. Действительно, когда центр цилиндра находится строго в центре перетяжки пучка, то на него действует только рассеивающая сила (фотоны толкают цилиндр вперед), которая пропорциональна интенсивности $|E_x|^2$. По мере смещения цилиндра из центра вдоль оптической оси возникает градиентная сила, обусловленная наличием градиента интенсивности $\nabla |E_x|^2$, которая направлена в центр пучка. При смещении $L \approx 0,4$ мкм эти силы сравниваются и цилиндр оказывается в положении равновесия.

Реальный цилиндрический объект имеет конечную длину. Но двумерное приближение, которое мы рассматриваем, можно будет применить к описанию реальной ситуации, если длина цилиндра будет много больше диаметра его

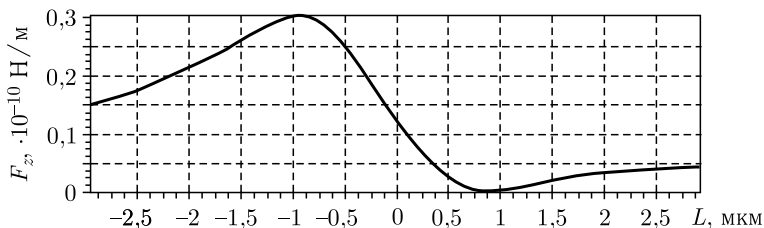


Рис. 5.9. Граница «захвата»: проекция силы F_z на ось Z для непараксиального гауссова пучка и цилиндра с круглым сечением с $\varepsilon_1 = 1,35$

сечения. Действительно, рассмотрим случай, когда трехмерный диэлектрический цилиндр конечной длины находится вблизи перетяжки цилиндрического гауссова пучка (см. рис. 5.10).

Пусть ось цилиндра наклоняется на угол θ , в плоскости XU . Тогда максимальное отклонение из точки устойчивого равновесия сечения цилиндра в плоскости YZ будет равно $\Delta y = l \cdot \operatorname{tg}(\theta)$, $\Delta y/a \ll m1$, где l — длина цилиндра, a — радиус его сечения. Это приведет к возникновению силы с проекции F_y , направленной в точку с максимумом интенсивности на оси пучка. То есть малые повороты, и смещения трехмерного цилиндра конечной длины вблизи точки устойчивого равновесия в области перетяжки цилиндрического гауссова пучка будут приводить к возникновению сил, стремящихся вернуть цилиндр в положение «оптического захвата».

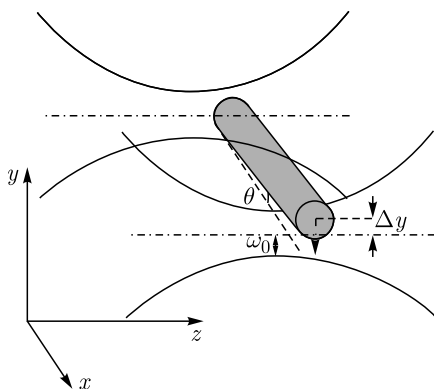


Рис. 5.10. Представление наклона трехмерного конечного цилиндра в двумерной модели

5.1.5. Расчет силы для объекта с показателем преломления объекта, меньшим показателя преломления среды. Интересно рассчитать поле и силу, действующую на диэлектрический 2D-объект, показатель преломления которого меньше, чем у среды.

На рисунке 5.11 представлена картина дифракции плоской волны в среде с показателем преломления $n_2 = 1,33$ (вода) на цилиндрическом объекте с круглым сечением с показателем преломления $n_1 = 1$ (цилиндрический пузырек воздуха). Диаметр цилиндра равен длине волны и равен 1 мкм. Рисунок 5.11, а представляет модуль напряженности электрического поля $|E_x|$ (ТЕ-поляризация), рис. 5.11, б — проекцию вектора Умова–Пойнтинга на ось Z . Энергия за «пузырек воздуха» почти не распространяется, что хорошо видно на сечениях, показанных на рис. 5.12, сделанных по оси Z через точку $Y = 0$.

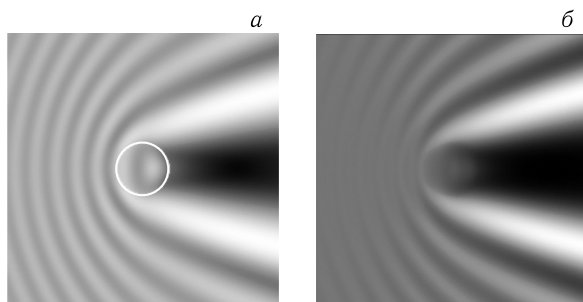


Рис. 5.11. Модуль напряженности электрического поля $|E_x|$ (а) и модуль проекции вектора Умова–Пойнтинга на ось Z $|S_z|$ (б) при дифракции плоской волны на воздушном цилиндре с круглым сечением в воде

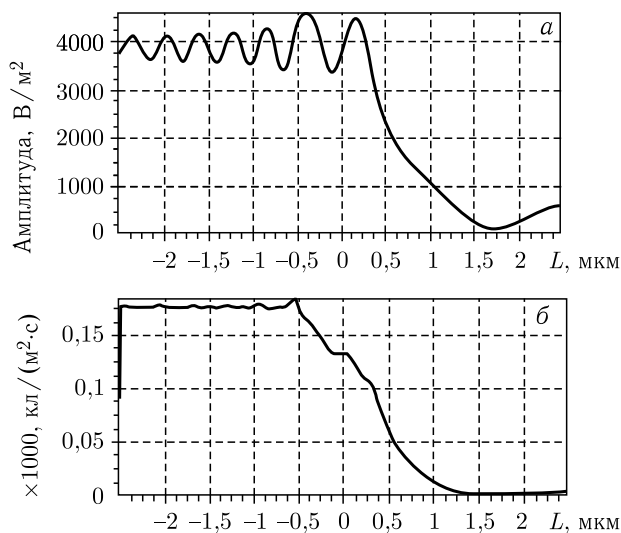


Рис. 5.12. Сечения картины 5.11, *а* (*а*) и 5.11, *б* (*б*) вдоль оси Z через точку $Y = 0$

Рисунок 5.12, *а* отображает значение амплитуды $|E_x|$, рис. 5.12, *б* — значение проекции вектора Умова–Пойнтинга на ось Z .

Если такой объект поместить вблизи фокуса гауссова пучка, то он будет выталкиваться из него, что проиллюстрировано на рис. 5.13.

На рисунке 5.13, *а* представлена зависимость силы F_z вдоль оси Z от смещения L по оси Z , на рис. 5.13, *б* — зависимость силы F_y от смещения L вдоль оси Y через фокус. Гауссов пучок имеет длину волны 1 $\mu\text{м}$, диаметр перетяжки равен 1 $\mu\text{м}$, мощность излучения 100 мВт/м. Видно, что при отклонении в любую сторону из фокуса в поперечном направлении сила, направленная в сторону отклонения возрастает, что приводит к устойчивому

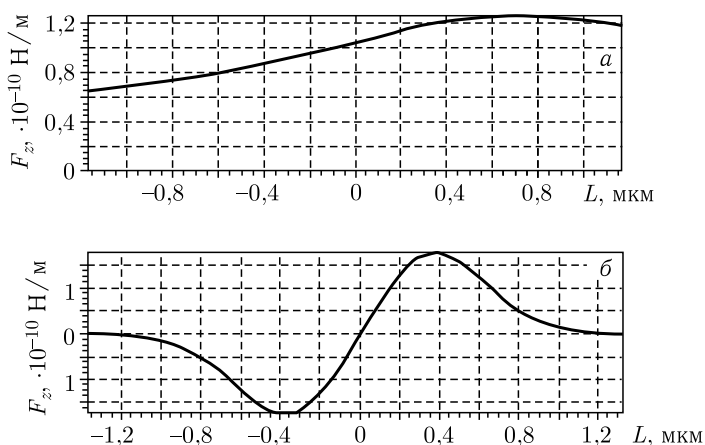


Рис. 5.13. Проекция силы действия непараксиального гауссова пучка на «цилиндрический пузырек воздуха» в воде: на продольную ось F_z (*а*) и поперечную ось F_y (*б*)

движению из фокуса в этом направлении. При отклонении вдоль оси распространения света Z сила, действующая на объект, перед фокусом меньше по модулю, чем после фокуса.

5.1.5.1. Методы расчета момента силы сфокусированного лазерного излучения. В этом разделе рассчитывается момент силы, действующий на цилиндрический микрообъект с эллиптическим сечением со стороны сфокусированного непараксиального гауссова пучка. Приведен расчет момента силы в зависимости от размеров и формы области интегрирования, охватывающей исследуемый микрообъект. Рассмотрен момент силы, действующий на микрообъект, расположенный в точке, где сила, действующая со стороны света, равна нулю. Так же рассмотрен момент силы, действующий на микрообъект с эллиптическим сечением в стоячей волне.

На рисунке 5.14 представлена схема рассматриваемой задачи.

Свет распространяется вдоль оси Z в среде с диэлектрической проницаемостью ε_1 и падает на объект с диэлектрической проницаемостью ε_2 . Тогда момент \mathbf{M} в любой точке A можно рассчитать по формуле [50]

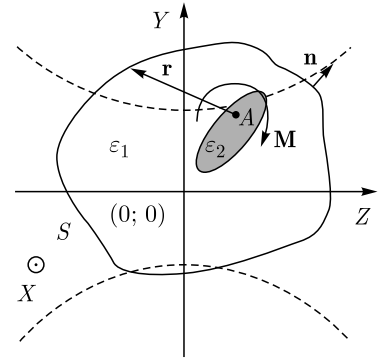


Рис. 5.14. Схема рассматриваемой задачи

$$\mathbf{M} = \oint_S \left[\mathbf{r} \times (\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) \right] dS, \quad (5.14)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности S , охватывающей рассматриваемый объект, A — точка, в которой рассчитывался момент \mathbf{M} , \mathbf{r} — радиус-вектор из точки A до поверхности интегрирования S , $\tilde{\mathbf{T}}$ — тензор напряжений Максвелла электромагнитного поля.

Произведение максвелловского тензора напряжений на нормаль можно расписать в следующем виде:

$$(\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} T_{ii} & T_{ij} & T_{ik} \\ T_{ji} & T_{jj} & T_{jk} \\ T_{ki} & T_{kj} & T_{kk} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} T_{ii}n_x + T_{ij}n_y + T_{ik}n_z \\ T_{ji}n_x + T_{jj}n_y + T_{jk}n_z \\ T_{ki}n_x + T_{kj}n_y + T_{kk}n_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Тогда

$$\mathbf{r} \times (\tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ t_x & t_y & t_z \end{bmatrix} = \mathbf{i}(r_y t_z - r_z t_y) - \mathbf{j}(r_x t_z - r_z t_x) + \mathbf{k}(r_x t_y - r_y t_x). \quad (5.16)$$

Для двумерного случая (цилиндрический объект) имеет смысл момент только относительно оси X , т. е.

$$M_x = \oint_S (r_y t_z - r_z t_y) dS. \quad (5.17)$$

Так как $E_y = E_z = H_x = 0$ для ТЕ-поляризации, окончательно получим:

$$\begin{aligned} M_x = & \frac{1}{4} \oint_S [\varepsilon_0 \varepsilon_1 |E_x|^2 + \mu \mu_0 |H_y|^2 - \mu \mu_0 |H_z|^2] r_y dy - \frac{1}{2} \oint_S \mu \mu_0 \operatorname{Re} (H_z H_y^*) r_y dz - \\ & - \frac{1}{4} \oint_S [\varepsilon_0 \varepsilon_1 |E_x|^2 - \mu \mu_0 |H_y|^2 + \mu \mu_0 |H_z|^2] r_z dz - \frac{1}{2} \oint_S \mu \mu_0 \operatorname{Re} (H_y H_z^*) r_z dy. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Расчет окончательной формулы момента для ТМ-поляризации отличается тем, что в выражении (5.17) $E_x = H_y = H_z = 0$.

Для проверки правильности формулы (5.18) был проведен расчет момента силы, действующего на эллиптическую микрочастицу со стороны непараксиального гауссова пучка при различных размерах квадратного контура интегрирования S . На рисунке 5.15, б представлен график изменения момента M_x от контура интегрирования, параметры которого указаны на рис. 5.15, а. Перетяжка гауссова пучка расположена в центре координат, свет распространяется в положительном направлении вдоль оси Z .

Расчет поля дифракции производился методом, описанным в предыдущем пункте. Интегрирование проводилось по квадратному контуру S , число отсчетов на рис. 5.15, а 254×254 . Это удобно тем, что не надо рассчитывать нормаль \mathbf{n} в каждой точке контура — интеграл по контуру (5.18) распадается на сумму интегралов, часть из которых берется по сторонам контура, параллельным оси Y , а другая часть по сторонам контура, параллельным оси Z . Мощность падающего излучения равнялась $P = 100$ мВт/м, длина волны $\lambda = 1$ мкм, диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_1 = 1$, диэлектрическая проницаемость частицы $\varepsilon_2 = 2$. Точка A , относительно которой рассчитывался момент, совпадает с центром эллиптической частицы.

Отметим, что момент силы \mathbf{M} измеряется в единицах $[\text{Н} \cdot \text{м}]$. Однако в данном случае размерность величины M_x будет $[(\text{Н}/\text{м}) \cdot \text{м}]$, так как сила в двумерном случае в силу бесконечности длины цилиндрического объекта вдоль оси X выражается в единицах $\text{Н}/\text{м}$ и является погонной силой на единицу длины микрообъекта.

Из рисунка 5.15 видно, что разброс значений M_x с изменением R составляет менее 4 %.

Отметим, что значение момента силы \mathbf{M} зависит от расположения точки A , относительно которой он рассчитывается, в случае, если сила, действующая на частицу, не равна нулю. Если рассчитать момент силы M_x для схемы на рис. 5.15, а при том же расположении цилиндра, но в случае, когда точка A имеет координаты $(0,25 \text{ мкм}; 0,25 \text{ мкм})$, значение M_x будет равно $M_x = 8,8 \cdot 10^{-17} (\text{Н}/\text{м}) \cdot \text{м}$.

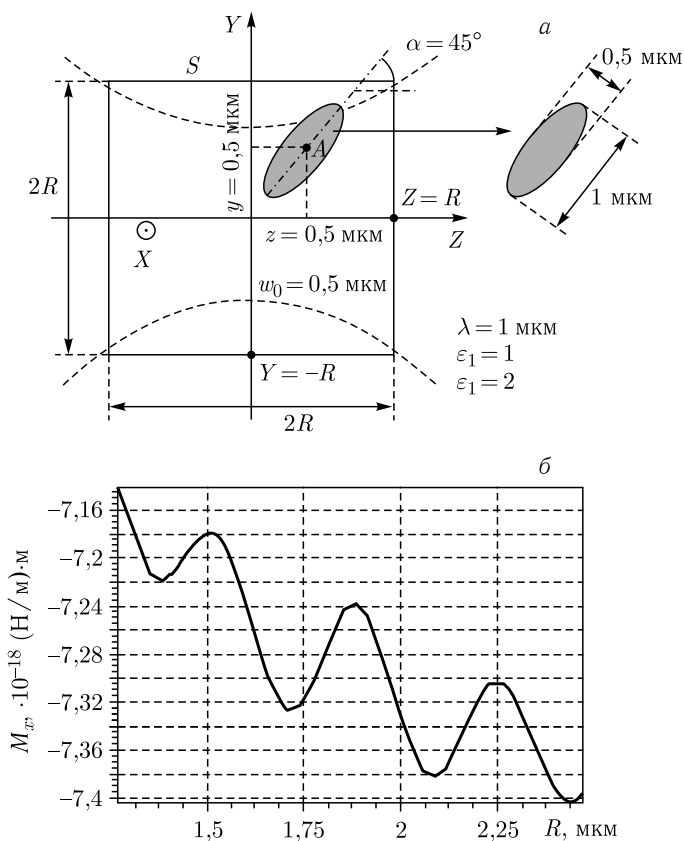


Рис. 5.15. Параметры расчета момента силы (а) и результаты расчета момента M_x (б) при разных R

На рисунке 5.16 представлена схема расчета момента силы M_x для случая, когда сила действия света на частицу равна нулю. Эллиптический цилиндр с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_2 = 2$ находится в воде с $\varepsilon_1 = 1,77$.

Момент силы M_x при нахождении эллиптического цилиндра в фокусе с точкой A , расположенной в центре частицы, равен $M_x = 7,11 \times 10^{-18} \text{ (Н/м) \cdot м}$. Если сдвинуть точку наблюдения A в точку с координатами $(0,96 \text{ мкм}; 0,26 \text{ мкм})$, то момент $M_x = 7,13 \cdot 10^{-18} \text{ (Н/м) \cdot м}$. Таким образом видно, что момент силы M_x , действующий на частицу, почти не зависит от точки, относительно которой он рассчитывается, если частица находится в точке, где сила, действующая со стороны светового поля, равна нулю.

На рисунке 5.17 приведен график зависимости момента силы M_x от угла α . Параметры моделирования такие же, как на рис. 5.15, а, но объект расположен по центру перетяжки, точка A расположена по центру объекта, больший диаметр эллипса равен $1,2 \text{ мкм}$, меньший — $0,3 \text{ мкм}$, диэлектрическая проницаемость объекта равна $\varepsilon_1 = 2,25$. Угол α определялся, как показано на рис. 5.16 (отсчитывался от оси Z против часовой стрелки).

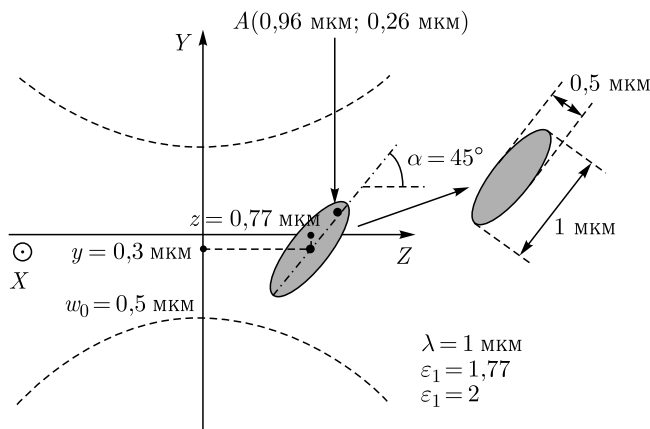


Рис. 5.16. Расчет момента силы при нахождении эллиптического цилиндра в точке равновесия (сила давления света на объект равна нулю)

Из рисунка 5.17 видно, что положения эллиптической частицы в фокусе, когда ее длинная ось расположена вдоль и поперек оптической оси, являются устойчивым равновесием ($M_x > 0$ при вращении частицы по часовой стрелке). При угле α , приблизительно равном 60° и 120° , существуют еще две точки неустойчивого равновесия, когда момент равен нулю. Это хорошо согласуется с данными работы [50], где получен аналогичный график зависимости момента силы от угла поворота частицы α .

На рисунке 5.18 представлен график зависимости момента силы M_x от смещения L частицы круглой формы радиусом 0,25 мкм по оси Y через центр перетяжки. Точка A расположена в центре частицы $A(0;0)$, и на 0,25 мкм выше центра по оси Y . Остальные параметры те же, что и на рис.5.15.

Как видно из рис. 5.18, момент силы относительно центра, действующий на круглую непоглощающую частицу, равен нулю при ее смещении вдоль оси Y , и изменяется при смещении точки A вверх на 0,25 мкм отно-

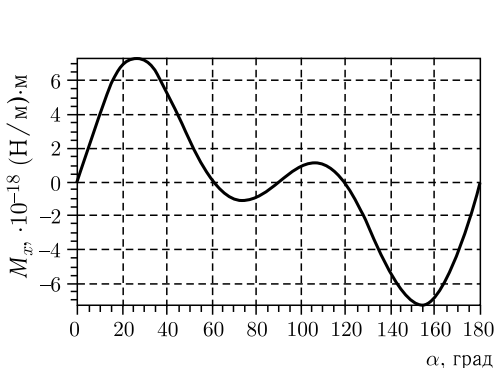


Рис. 5.17. Зависимость момента силы M_x , действующего на эллиптический цилиндр в фокусе гауссова пучка, от угла α

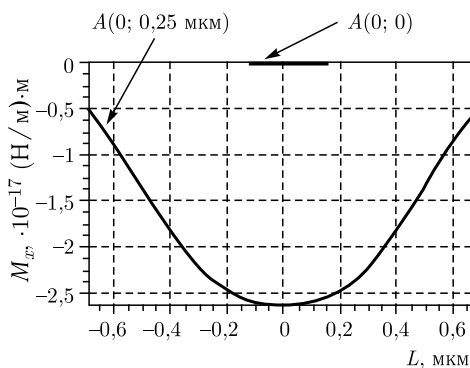


Рис. 5.18. Зависимость момента M_x от смещения L круглой частицы вдоль оси Y для двух положений точки A относительно центра частицы

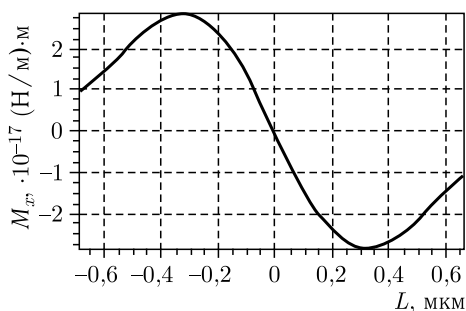


Рис. 5.19. Зависимость момента силы M_x от смещения L круглой поглощающей частицы ($\varepsilon_2 = 2 + 1i$) вдоль оси Y относительно точки $A(0;0)$

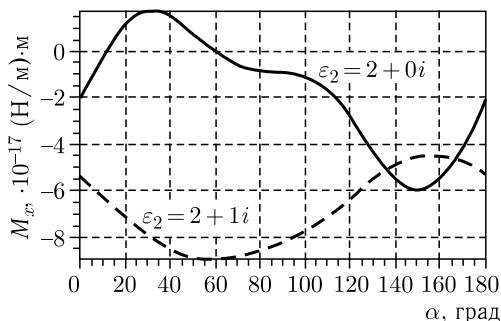


Рис. 5.20. Зависимость момента силы M_x , действующего на эллиптическую частицу, от угла поворота частицы α

сительно центра частицы по оси Y . Если же в функцию, описывающую диэлектрическую проницаемость частицы, добавить мнимую составляющую (поглощающая частица), то момент силы действующий на круглую частицу относительно центра, будет отличаться от нуля при аналогичном рис. 5.18 смещении частицы. На рисунке 5.19 приведен график зависимости момента силы, действующего на круглую частицу с $\varepsilon_2 = 2 + 1i$ относительно центра частицы. Остальные параметры те же, что и при расчете для рис. 5.15.

Как видно из рис. 5.19, момент силы, действующий на круглую поглощающую частицу относительно центра, не равен нулю при смещении частицы с оптической оси.

На рисунке 5.20 представлен график зависимости момента силы M_x , действующего на эллиптическую диэлектрическую ($\varepsilon_2 = 2 + 0i$) и поглощающую микрочастицу ($\varepsilon_2 = 2 + 1i$), от угла поворота частицы α . Частица расположена в координатах $(0; 0,25)$ относительно перетяжки пучка, момент рассчитывался относительно центра эллипса. Остальные параметры моделирования те же, что и для рис. 5.15, а.

Как видно из рис. 5.20, при добавлении мнимой части в функцию диэлектрической проницаемости частицы, увеличивается рассеивающая сила на частице, за счет чего при любом угле α момент силы отличен от нуля и направлен против часовой стрелки ($M_x < 0$).

На рисунке 5.21, а приведены результаты расчета зависимости момента M_x , действующего на эллиптическую частицу, расположенную по центру гауссова пучка, от угла поворота α . Все параметры такие же, как на рис. 5.15, а, только частица взята вдвое меньше (меньший диаметр эллипса 0,25 мкм, больший 0,5 мкм), диэлектрическая проницаемость частицы взята $\varepsilon_2 = 2$ и $\varepsilon_2 = 2 + 1i$. На рисунке 5.21, б построен такой же график, но для двух встречных гауссовых пучков, радиус перетяжки первого равен $\sigma_1 = 0,5$ мкм, второго — $\sigma_2 = 0,6$ мкм, интенсивность обоих гауссовых пучков одинакова и равна 5 мВт/м. Дифракция таких встречно направленных пучков на частице при $\alpha = 45^\circ$ представлена на рис. 5.21, в.

Как видно из рис. 5.21, при добавлении мнимой части в выражение функции диэлектрической проницаемости в случае, если цилиндр расположен

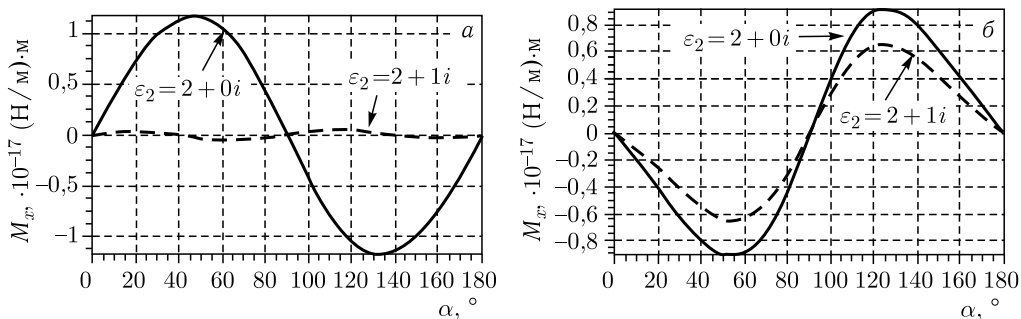


Рис. 5.21. (а) Зависимость момента M_x от угла α для одного гауссова пучка; (б) зависимость момента M_x от угла α для двух встречно направленных гауссовых пучков; (в) амплитуда поля $|E_x|$ при дифракции двух встречно направленных гауссовых пучков на эллиптической частице

в центре перетяжки одного гауссова пучка, момент силы сильно ослабляется и имеет несколько нулевых точек. Также видно, что положение устойчивого равновесия, при добавлении второго встречно направленного гауссова пучка, будет наблюдаться при расположении большей оси эллиптической частицы вдоль оси Y , т.е. эллиптическая частица стремится расположиться вдоль линии с максимумом интенсивности.

5.1.6. Геометрооптический метод расчета силы, действующей на микрообъект. Как видно из предыдущего раздела задача расчета силы в рамках электромагнитного подхода является очень трудоемкой по объему вычислений, а так как в задачах расчета сил, действующих на микрообъект в световом пучке, как правило, требуется провести вычисление силы в некоторой области, то объем вычислений возрастает пропорционально квадрату размера этой области. В этом случае, например, расчет сил для моделирования движения микрообъекта в пучке Бесселя может занимать десятки часов, что неприемлемо. В связи с этим возникает желание использовать более простой геометрооптический подход, дающий приближенные результаты. Геометрооптический подход был использован еще при расчете простейших оптических ловушек [40]. Однако в этой и других работах, как правило, рассматриваются некоторые упрощенные случаи, в которых накладываются ограничения либо на форму микрообъекта [40, 51], либо на форму светового пучка [46]. Рассмотрим метод расчета сил действующих на микрообъект произвольной формы в световом пучке с заданным распределением интенсивности и фазы [52].

Рассмотрим микрообъект произвольной формы в световом пучке. Будем считать, что соблюдается ряд условий.

1. Световой пучок задается функциями интенсивности $I(x, y)$ и фазы $\varphi(x, y)$, соответственно.
2. Микрообъект ограничен двумя поверхностями: верхней, которая задается функцией $f_1(x, y)$ и нижней, которая задается функцией $f_2(x, y)$ (рис. 5.22). Функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ однозначные.
3. Микрообъект движется в плоскости xy (впрочем, данный метод расчета силы легко распространяется и на трехмерное движение).
4. Световой пучок падает на микрообъект вертикально сверху вниз.

Единичные векторы $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$ задают направление падающего и преломленных лучей. При этом вектор $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ определяется, исходя из функции $\varphi(x, y)$. Этот вектор должен быть всегда перпендикулярен волновому фронту.

Компоненты силы действия \mathbf{F} единичного луча на микрообъект определяются формулами

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{N}{c} (a_x - c_x), \\ F_y &= \frac{N}{c} (a_y - c_y), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где N — мощность луча, c — скорость света.

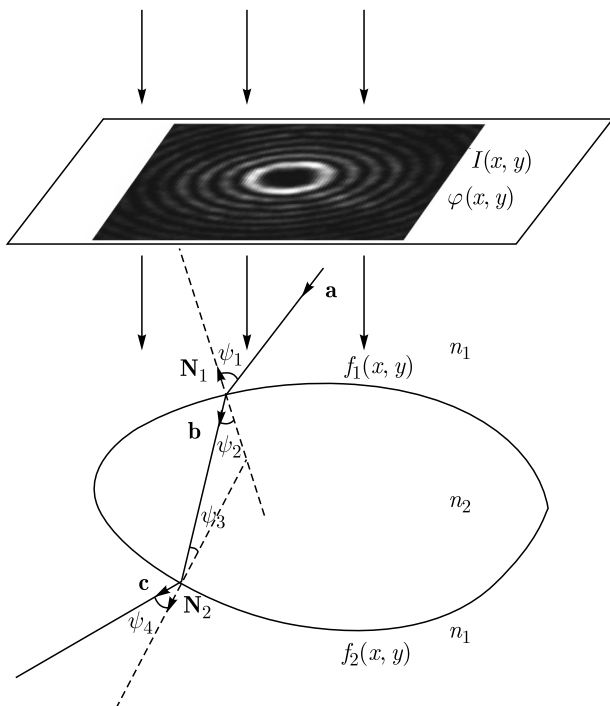


Рис. 5.22. Схема преломления световых лучей на микрообъекте

Для всего пучка они преобразуются к виду

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{c} \iint_{\Omega} I(x, y) (a_x - c_x) dx dy, \\ F_y &= \frac{1}{c} \iint_{\Omega} I(x, y) (a_y - c_y) dx dy, \end{aligned} \quad (5.20)$$

где Ω — область максимального по площади сечения микрообъекта в плоскости, перпендикулярной направлению распространения светового пучка. При этом надо учитывать, что направляющий вектор для преломленного выходящего луча напрямую зависит от направляющего вектора падающего луча:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{c} \iint_{\Omega} I(x, y) (a_x - c_x(\mathbf{a})) dx dy, \\ F_y &= \frac{1}{c} \iint_{\Omega} I(x, y) (a_y - c_y(\mathbf{a})) dx dy. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Зависимость $\mathbf{c}(\mathbf{a})$, т. е. направление луча после микрообъекта в зависимости от начального направления луча можно определить исходя из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} (\mathbf{N}_1, -\mathbf{a}) &= \cos(\psi_1), \\ (\mathbf{N}_1, -\mathbf{b}) &= \cos(\psi_2), \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \cos(\psi - \psi_{21}), \\ n_1 \sin \psi_1 &= n_2 \sin \psi_2, \\ (\mathbf{N}_2, \mathbf{b}) &= \cos(\psi_3), \\ (\mathbf{N}_2, \mathbf{c}) &= \cos(\psi_4), \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) &= \cos(\psi_3 - \psi_4), \\ n_2 \sin \psi_3 &= n_1 \sin \psi_4, \end{aligned} \quad (5.22)$$

где n_1, n_2 — показатели преломления среды и микрообъекта, соответственно, \mathbf{N}_1 и \mathbf{N}_2 — векторы нормали к поверхностям $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$, соответственно, $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ — углы падения и преломления на поверхностях. Путем несложных преобразований получаем из (5.22), что

$$\begin{aligned} b_x &= \frac{A_1^2}{A_1^2 + A_2^2} \left[\left(\frac{A_3 A_2}{A_1} + K_1 K_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\left(\frac{A_3 A_2}{A_1^2} + K_1 K_2 \right)^2 - \left(1 + \frac{A_2^2}{A_1^2} + K_1^2 \right) \left(\frac{A_3^2}{A_1^2} + K_1^2 - 1 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь введено несколько промежуточных обозначений, которые позволяют существенно упростить запись формулы:

$$A_1 = a_y - \frac{N_{1y} a_z}{N_{1z}}, \quad A_2 = a_x - \frac{N_{1x} a_z}{N_{1z}}, \quad A_3 = \frac{a_z \cos \psi_2}{N_{1z}} + \cos(\psi_1 - \psi_2),$$

$$K_1 = \frac{\cos \psi_2}{N_{1z}} - \frac{N_{1y}A_3}{A_1} \quad K_2 = \frac{N_{1x}}{N_{1z}} - \frac{N_{1y}A_2}{A_1}.$$

Аналогичным образом вычисляются и другие компоненты векторов $\mathbf{b}(b_x, b_y, b_z)$ и $\mathbf{c}(c_x, c_y, c_z)$. Так как совокупная запись этих формул очень громоздка и похожа на формулу (5.23), приводить ее не будем.

Для определения компонент направляющего вектора $\mathbf{a}(a_x, a_y, a_z)$ необходимо использовать функцию фазы $\varphi(x, y)$ светового пучка. Как уже указывалось выше, направляющий вектор должен быть всегда перпендикулярен волновому фронту. Тогда для направляющего вектора будет верным следующее соотношение:

$$\mathbf{a} = \frac{\text{grad } \varphi(x, y)}{|\text{grad } \varphi(x, y)|}. \quad (5.24)$$

Для векторов нормали можно выписать соотношения

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 = & \left(\frac{\frac{\partial f_1}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}} \right), \\ \mathbf{N}_2 = & \left(\frac{\frac{\partial f_2}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \frac{\frac{\partial f_2}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}, \right. \\ & \left. - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Аналогичным образом определялись параметры отраженных лучей (френелевское отражение). Используя формулы (5.21)–(5.25), можно рассчитать силу, действующую на микрообъект произвольной формы со стороны произвольного светового пучка. Зная механические свойства среды, в которой находится микрообъект, можно также моделировать движение микрообъекта. При моделировании движения микрообъекта в световом пучке решалась система уравнений движения:

$$\begin{cases} m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{св}} + \mathbf{F}_{\text{тр}}, \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \end{cases}$$

где $\mathbf{F}_{\text{св}}$ — сила действия светового пучка, $\mathbf{F}_{\text{тр}}$ — сила вязкого трения. На основе предложенного выше метода было разработано программное обеспечение, позволяющее не только рассчитывать силу действия света на микрообъект в заданном световом поле, но и моделировать движение данного микрообъекта в заданной среде. На рисунке 5.23 представлен интерфейс данного программного обеспечения.

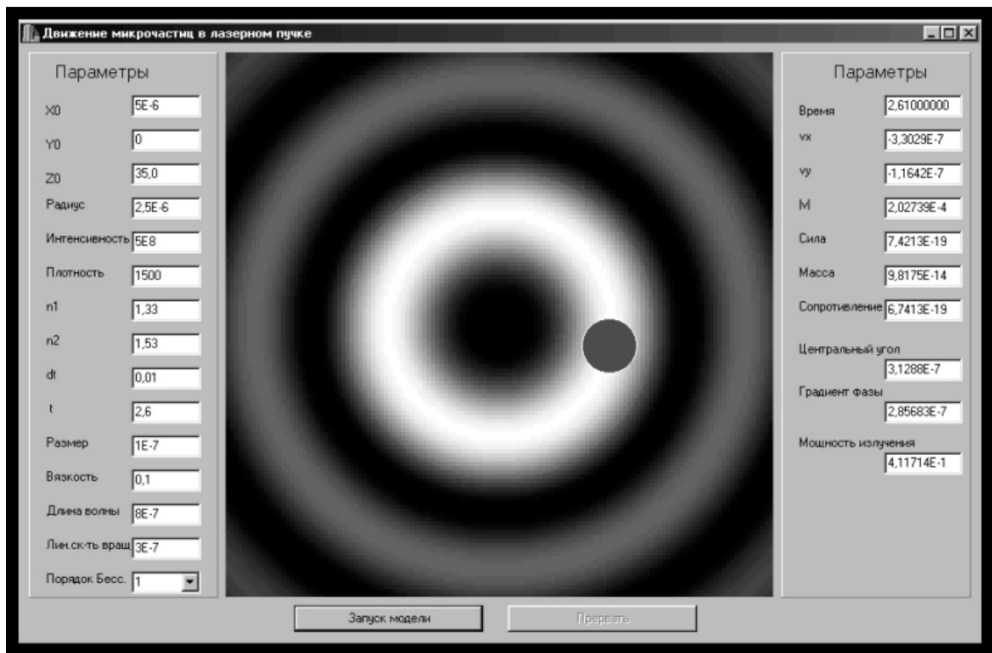


Рис. 5.23. Интерфейс программного обеспечения для моделирования движения микрообъектов в световом поле

Однако геометрикооптический подход для микрообъектов, сопоставимых по размеру с длиной волны, обычно дает очень неточный результат там, где нужно рассчитать, например интенсивность после микрообъекта. Насколько применим этот подход для расчета силы действия света, необходимо проверить. Для этого сравним значения сил, полученных двумя методами: геометрикооптическим, который был описан в этом разделе, и электромагнитным, описание которого приводится в следующем разделе.

5.1.7. Сравнение результатов расчетов силы в рамках геометрикооптического и электромагнитного подходов. Метод расчета силы, (5.19)–(5.25), позволяет рассчитать силу действия света и для цилиндрического микрообъекта [52]. Был аппроксимирован системой лучей непараксиальный гауссов пучок, по параметрам аналогичный пучку представленному на рис. 5.24. Цилиндрический объект с диаметром 1 мкм и показателем преломления 1,41 перемещался поперек оси гауссового пучка, при каждом его положении рассчитывались значения сил F_x и F_y . На рисунке 5.24 представлена аппроксимация гауссового пучка системой лучей и преломление

этой системы лучей при разных положениях цилиндрического микрообъекта относительно оптической оси.

Для цилиндрического микрообъекта была рассчитана сила действия света в гауссовом пучке. На рисунке 5.25, *а* представлен график зависимости проекций силы F_z от смещения относительно перетяжки вдоль оси распространения пучка, наложенный на график, представленный ранее в п. 5.1. На рисунке 5.25, *б* представлен график зависимости проекций силы F_y от смещения относительно оси распространения пучка наложенный на график, представленный ранее в п. 5.1 [53, 54, 55].

Для продольной силы (рис. 5.25, *а*) существует область, где среднеквадратичное отклонение силы, полученной в геометрикооптическом приближении, от силы, рассчитанной в рамках электромагнитного подхода, составляет не более 0,1. Как видно на рис. 5.25, *б* для поперечной силы также существует область, в которой СКО составляет не более 0,1.

Для определения погрешности использовалась стандартная формула для расчета среднеквадратичного отклонения (СКО):

$$\sigma = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{1i} - f_{2i})^2}}{\langle f_2 \rangle}, \quad (5.26)$$

где f_{1i} — точки дискретизации сравниваемой функции, f_{2i} — точки дискретизации эталонной функции, N — количество точек дискретизации функции, $\langle f_2 \rangle$ — среднее значение эталонной функции.

Полученные результаты позволяют утверждать, что геометрикооптический метод расчета силы, действующей на микрообъект со стороны светового пучка, имеет погрешность не более 0,1, за исключением случаев, не пред-

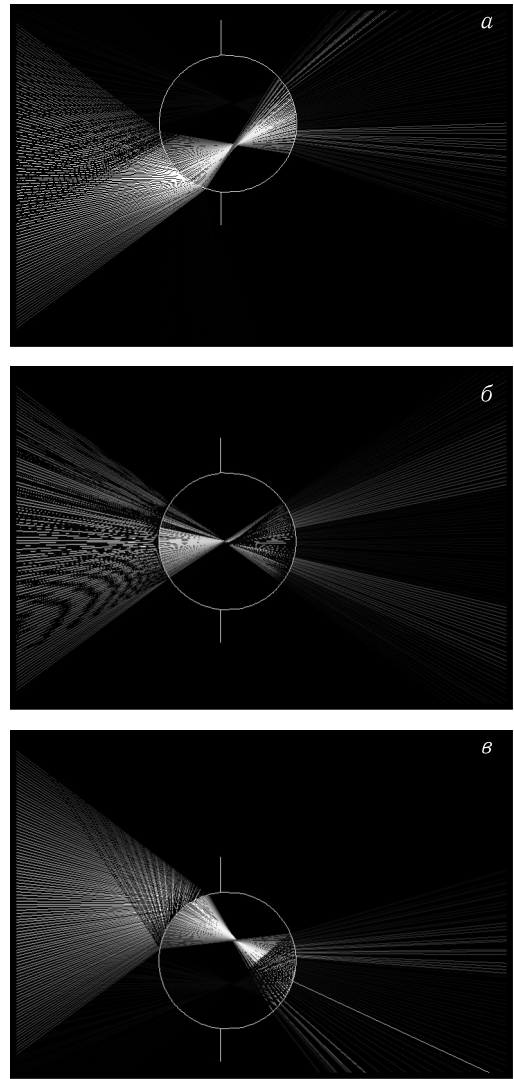


Рис. 5.24. Преломление лучей на цилиндрическом микрообъекте диаметром 1 мкм в разных положениях относительно оси пучка; смещение на 0,5 мкм вверх (*а*), точно на оси пучка (*б*), смещение на 0,5 мкм вниз (*в*)

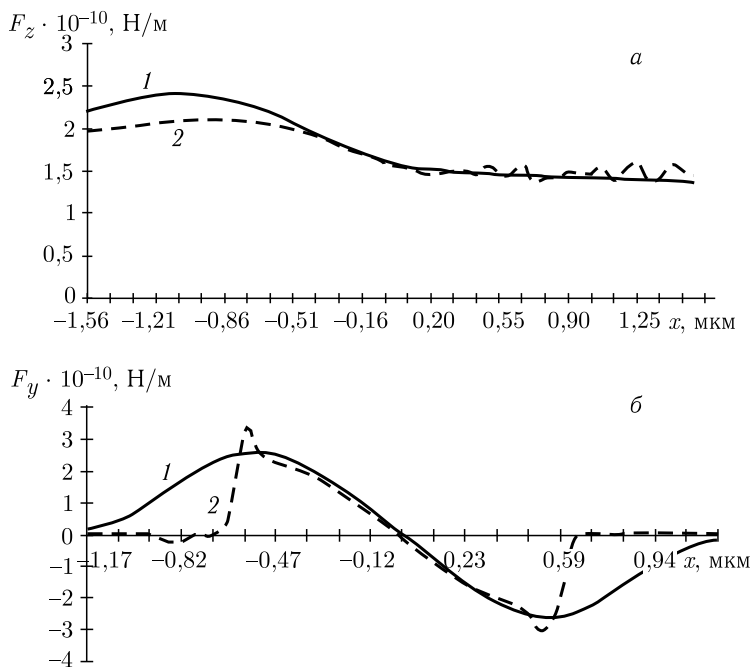


Рис. 5.25. Зависимость силы F_z от смещения L объекта вдоль оси Z через центр перетяжки ($Y = 0$) (а); зависимость силы F_y от смещения L объекта вдоль оси Y через центр перетяжки ($Z = 0$) (б), (1 — точный расчет, 2 — геометрический расчет)

ставяющих практического интереса, например, при смещении более 0,5 мкм от оси пучка на рис. 5.25, б. При этом, метод имеет намного меньшую вычислительную сложность, чем точные методы расчета, что позволяет не только рассчитывать силы, действующие на микрообъект в световом поле, но и моделировать движение микрообъекта.

5.2. Вращение микрообъектов в вихревых световых пучках

5.2.1. Вращение микрообъектов в бесселевых пучках. В оптических схемах, для вращения микрообъектов с помощью бесселева пучка [56, 57, 58, 61], для концентрации световой энергии в фокальной области, формируют с помощью сферической линзы преобразование бесселева пучка, произведенного аксиконом или голограммой. При этом оказывается, что бесселев пучок, обладающий свойством сохранять свой диаметр вблизи аксикона или голограммы, теряет это свойство при изображении с помощью сферической линзы и начинает расходиться.

Покажем, что изображение бездифракционного бесселева пучка с помощью сферической линзы приводит к расходящемуся параксиальному бесселеву пучку. На рисунке 5.26 показана оптическая схема.

В качестве начальной функции выберем функции нулевого порядка:

$$\Psi_0(r) = J_0(\alpha r). \quad (5.27)$$

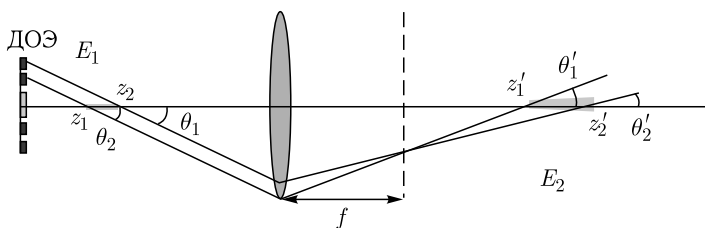


Рис. 5.26. Оптическая схема для формирования изображения бesselов пучка, применяемая для манипулирования микрообъектами

Чтобы найти как функция Ψ_0 преобразуется линзой, нужно промоделировать прохождение пучка в свободном пространстве на расстояние a с помощью преобразования Френеля, затем умножить на комплексную функцию пропускания линзы с фокусным расстоянием f и еще раз преобразовать оператором распространения (преобразование Френеля) на расстояние:

$$\Psi(u, v, z) = \left(\frac{k}{2\pi i} \right)^2 \frac{1}{az} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(r) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{(x - \xi)^2}{a} + \frac{(y - \eta)^2}{a} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{f} + \frac{(\xi - y)^2}{z} + \frac{(\eta - v)^2}{z} \right] \right\} dx dy d\xi d\eta. \quad (5.28)$$

При этом расстояние z связано с расстоянием a по формуле линзы. В уравнении (5.28) использована функция пропускания параксиальной линзы в виде

$$\tau(\xi, \eta) = \exp \left[-\frac{ik}{2f} (\xi^2 + \eta^2) \right]. \quad (5.29)$$

В результате вычисления интеграла (5.28) получим:

$$\Psi(\rho, z) = \frac{f}{(z - f)} J_0 \left(\frac{\alpha f \rho}{f - z} \right) \exp \left[-i \frac{\alpha^2}{2k} \left(a + \frac{fz}{f - z} \right) + i \frac{k \rho^2}{2(f - z)} \right], \quad (5.30)$$

где $\rho^2 = u^2 + v^2$.

Из уравнения (5.30) видно, что бesselов пучок (5.27) аналогично непараксиальному пучку расходится при $z > f$. Это связано с тем, что линза вносит в бesselов пучок расходящийся параболический волновой фронт.

На рисунке 5.27 показаны результаты эксперимента в сравнении с теоретическими результатами для функции бесселя 5-го порядка; для эксперимента были использованы: линза с фокусным расстоянием $f = 50$ мм, расстояние от ДОЭ до линзы равно 200 мм, He-Ne лазер с длиной волны 0,633 мкм.

Из рис. 5.27 видно качественное соответствие теории и эксперимента.

Может показаться, что бездифракционный бesselов пучок (5.27) при изображении линзой стал расходящимся бesselовым пучком (5.30) из-за того, что был рассчитан с помощью параксиального преобразования Френеля. Но это не так. Можно показать, что применение преобразования Френеля к бesselову пучку (5.28) сохраняет его свойство бездифракционности. Дей-

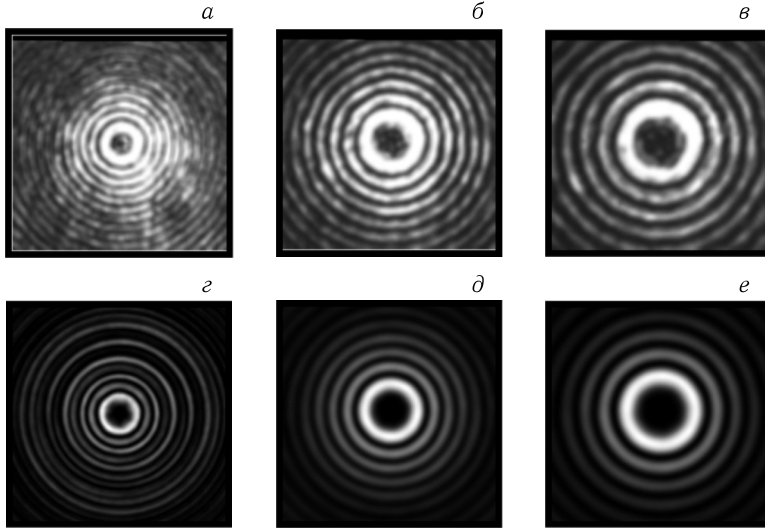


Рис. 5.27. Расходящийся параксиальный бesselев пучок на расстояниях 100 мм, 125 мм, 150 мм, соответственно, (а), (б), (в) — (эксперимент), (г), (д), (е) — (теория)

ствительно, выберем в качестве исходного светового поля бesselева пучка функцию:

$$\Psi_0(r, \varphi, z = 0) = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi), \quad (5.31)$$

тогда на расстоянии z от плоскости $z = 0$ получим

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta, z) = \frac{k}{2\pi i z} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} J_n(\alpha r) \exp(in\varphi) \exp\left[\frac{ik}{2z}(r^2 + \rho^2)\right] \times \\ \times \exp\left[-\frac{ik}{z}r\rho \cos(\theta - \varphi)\right] r dr d\varphi, \end{aligned} \quad (5.32)$$

где $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, $\theta = \arctg(\eta/\xi)$.

Заменяя интеграл по φ в (5.32) на функцию Бесселя n -го порядка, вместо (5.32) получим

$$\begin{aligned} \Psi(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{n+1}k}{z} \exp\left(\frac{ik}{2z}\rho^2\right) \exp(in\theta) \times \\ \times \int_0^\infty J_n(\alpha r) J_n\left(\frac{kr\rho}{z}\right) \exp\left(\frac{ik}{2z}r^2\right) r dr. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Интеграл в (5.33) можно вычислить, тогда вместо (5.33) получим

$$\Psi(\rho, \theta, z) = \exp\left(-i\frac{z\alpha^2}{2k}\right) J_n(\alpha\rho) \exp(in\theta). \quad (5.34)$$

Из уравнения (5.34) видно, что преобразование Френеля сохраняет исходный непараксиальный бesselев пучок (с точностью до фазового множителя) [60, 61]:

$$\Psi(\rho, \theta, z) = \exp\left(-i\frac{z\alpha^2}{2k}\right) \Psi_0(\rho, \theta). \quad (5.35)$$

В двумерном случае получается наиболее простая связь между скалярным и векторным бesselевыми пучками.

В двумерном случае разложение комплексной функции, удовлетворяющей уравнению Гельмгольца, по плоским волнам имеет вид [62]

$$\Psi(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(t) \exp\left[ik\left(xt + z\sqrt{1-t^2}\right)\right] dt, \quad (5.36)$$

где z — оптическая ось пучка (по оси y нет никаких изменений: $\frac{\partial}{\partial y} = 0$).

Если выбрать функцию $\Psi_0(t)$ в виде

$$\Psi_0(t) = \frac{(-i)^n \exp\left[in \arccos\left(\frac{t}{a}\right)\right] \text{rect}\left(\frac{t}{a}\right)}{2\pi\sqrt{a^2-t^2}}, \quad (5.37)$$

то подставив, (5.37) в (5.36), получим выражение для непараксиального двумерного пучка, который при $z = 0$ совпадает с бesselевым пучком:

$$\Psi(x, z) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\exp\left[in \arccos\left(\frac{t}{a}\right)\right]}{\sqrt{a^2-t^2}} \exp\left[ik\left(xt + z\sqrt{1-t^2}\right)\right] dt. \quad (5.38)$$

Из уравнения (5.38) при $z=0$ и после замены $t = a \cos \varphi$, получим

$$\Psi(x, z=0) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^\pi \exp(in\varphi) \exp(ika \cos \varphi) d\varphi = J_n(kax). \quad (5.39)$$

Чтобы получить компактную запись для бesselева пучка при любом z , запишем уравнение (5.36) в виде

$$\Psi(x, z) = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_0(\theta) \exp[ik(x \cos \theta + z \sin \theta)] d\theta. \quad (5.40)$$

Тогда при

$$\Psi_0(\theta) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \exp(in\theta), \quad (5.41)$$

вместо уравнения (5.38), получим

$$\Psi(x, z) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(in\theta) \exp[ik(x \cos \theta + z \sin \theta)] d\theta = J_n(kr) \exp(in\varphi), \quad (5.42)$$

где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$.

При $z = 0$ из уравнения (5.42) получим

$$\Psi(x, z = 0) = J_n(kr)(i\operatorname{sgn}x)^n. \quad (5.43)$$

Скалярный двумерный бesselев пучок (5.42) можно рассматривать и как векторный пучок, считая, что $\Psi(x, z)$ — это проекция на ось y вектора напряженности электрического поля $E_y(x, z) = \Psi(x, z)$ для ТЕ-поляризованной монохроматической электромагнитной волны. Такое поле описывается тремя величинами E_y , H_x , H_z , где H_x и H_z — проекции на оси x и z вектора напряженности магнитного поля волны. Их можно найти через E_y :

$$H_x = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad H_z = \frac{i}{k} \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (5.44)$$

С помощью уравнений (5.42) и (5.44) можно найти выражение для вектора Умова–Пойнтинга двумерного бesselева пучка. Действительно, вектор Умова–Пойнтинга для комплексных векторных полей имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*], \quad (5.45)$$

где c — скорость света.

В двумерном случае с учетом выражения (5.44) вместо (5.45) получим:

$$S_x = \frac{ic}{4\pi k} \left(E_y \frac{\partial E_y^*}{\partial x} - E_y^* \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) = \frac{c}{4\pi k} \operatorname{Im} \left(E_y \frac{\partial E_y^*}{\partial x} \right), \quad (5.46)$$

$$S_z = \frac{ic}{4\pi k} \left(E_y \frac{\partial E_y^*}{\partial z} - E_y^* \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) = \frac{c}{4\pi k} \operatorname{Im} \left(E_y \frac{\partial E_y^*}{\partial z} \right). \quad (5.47)$$

Подставив выражения (5.42) в уравнения (5.46) и (5.47), получим проекции вектора Умова–Пойнтинга для двумерного бesselева пучка ТЕ-поляризации:

$$S_x(x, z) = \frac{cnz}{4\pi k r^2} J_n^2(kr), \quad (5.48)$$

$$S_z(x, z) = \frac{-cnx}{4\pi k r^2} J_n^2(kr). \quad (5.49)$$

Из уравнений (5.48) и (5.49) следует, что, при $z = 0$, $S_x(x, z = 0) = 0$ и

$$S_z(x, z = 0) = \frac{-cn}{4\pi kx} J_n^2(kx), \quad (5.50)$$

а при $x = 0$, $S_z(x = 0, z = 0)$ и

$$S_x(x = 0, z) = \frac{cn}{4\pi kz} J_n^2(kz). \quad (5.51)$$

На рисунке 5.28 стрелками показано направление вектора Умова–Пойнтинга, которое следует из уравнений (5.48)–(5.51).

Пусть монохроматический пучок Бесселя линейно-поляризован вдоль оси x :

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x U(x, y, z) = \mathbf{e}_x J_n(\alpha r) \exp[i(\beta z + n\varphi)], \quad (5.52)$$

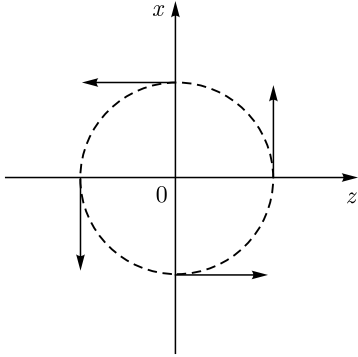


Рис. 5.28. Стрелками показано направление вектора Умова–Пойнтинга при $r = \text{const}$ для 2D-бесселева пучка n -го порядка

где $\alpha = k \sin \theta$, $\beta = k \cos \theta$, θ — угол наклона конической волны к оптической оси z , (r, φ) — полярные координаты. Из уравнений Максвелла,

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{H} = -ik\varepsilon\mathbf{E}, \end{cases} \quad (5.53)$$

найдем остальные проекции электрического и магнитного векторов:

$$\begin{cases} E_x = U, \\ E_y = \frac{1}{k^2\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \\ E_z = \frac{1}{k^2\varepsilon} \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x}, \end{cases} \quad \begin{cases} H_x = 0, \\ H_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial U}{\partial z}, \\ H_z = \frac{i}{k} \frac{\partial U}{\partial y}. \end{cases} \quad (5.54)$$

Видно, что проекции H_y и H_z — порядка k^{-1} , а E_y и E_z — порядка k^{-2} , т.е. малы по сравнению с E_x . Вектор Умова–Пойнтинга, определенный уравнением (5.45), с учетом (5.54) принимает следующий вид:

$$S_z = \frac{c}{4\pi k} \text{Im} \left[U^* \frac{\partial U}{\partial z} \right], \quad (5.55)$$

$$S_y = \frac{c}{4\pi k} \text{Im} \left[U^* \frac{\partial U}{\partial y} \right], \quad (5.56)$$

$$S_x = \frac{c}{4\pi \varepsilon k} \text{Im} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \frac{\partial U^*}{\partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} \frac{\partial U^*}{\partial y} \right]. \quad (5.57)$$

Подставим выражение для U из (5.52) в уравнения (5.55)–(5.57), получим проекции вектора Умова–Пойнтинга параксиального векторного 3D-бесселева пучка:

$$S_z = \frac{c\beta}{4\pi k} J_n^2(\alpha r), \quad (5.58)$$

$$S_y = \frac{cnx}{4\pi k r^2} J_n^2(\alpha r), \quad x = r \cos \varphi, \quad (5.59)$$

$$S_x = \frac{-cn}{4\pi k\varepsilon} \left\{ \left(\frac{\beta^2 y}{k^2 r^2} + \frac{n^2 x^2 y}{k^2 r^6} \right) J_n^2(\alpha r) - \left(\frac{\alpha y}{k^2 r^3} - \frac{2\alpha x^2 y}{k^2 r^5} + \frac{\alpha x y^2}{k^2 r^5} \right) J_n(\alpha r) \frac{\partial J_n(t)}{\partial t} + \left(\frac{\alpha^2 y^3}{k^2 r^4} - \frac{\alpha^2 x^2 y}{k^2 r^4} \right) \left(\frac{\partial J_n(t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{\alpha^2 x^2 y}{k^2 r^4} J_n(\alpha r) \frac{\partial^2 J_n(t)}{\partial t^2} \right\}. \quad (5.60)$$

Заметим, что уравнения (5.58) и (5.59) с точностью до знака совпадают с уравнениями (5.49) и (5.48), соответственно.

Если в уравнении (5.60) оставить только слагаемые, пропорциональные k^{-1} , а слагаемыми с k^{-2} и k^{-3} пренебречь, то вместо (5.60) получим более простое выражение:

$$S_x = \frac{-cn}{4\pi k\varepsilon} \left\{ \frac{\beta^2 y}{k^2 r^2} J_n^2(\alpha r) + \left(\frac{\alpha^2 y^3}{k^2 r^4} - \frac{\alpha^2 x^2 y}{k^2 r^4} \right) \left(\frac{\partial J_n(t)}{\partial t} \right)^2 + \frac{\alpha^2 x^2 y}{k^2 r^4} J_n(\alpha r) \frac{\partial^2 J_n(t)}{\partial t^2} \right\}. \quad (5.61)$$

Из уравнений (5.58)–(5.60) видно, что при $x = 0$

$$\begin{cases} S_y = 0, \\ S_x = \frac{-cn}{4\pi k\varepsilon} \left[\frac{\beta^2 y}{k^2 r^2} J_n^2(\alpha r) + \frac{\alpha^2 y^3}{k^2 r^4} \left(\frac{\partial J_n(t)}{\partial t} \right)^2 \right]. \end{cases} \quad (5.62)$$

Знак S_x определяется произведением ny , при $n > 0$ и при $r = \text{const}$ проекция S_x направлена, как на рис. 5.28 (ось z направлена к наблюдателю). При $y = 0$

$$\begin{cases} S_x = 0, \\ S_y = \frac{cnx}{4\pi k r^2} J_n^2(\alpha r). \end{cases} \quad (5.63)$$

Знак S_y определяется произведением nx . При $n > 0$ проекция S_x показана на рис. 5.29.

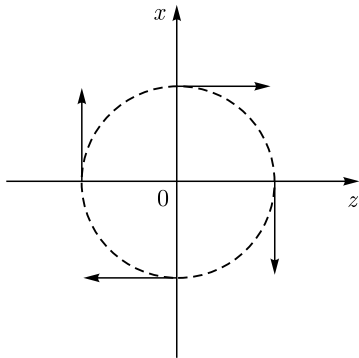


Рис. 5.29. Стрелками показано направление вектора Умова–Пойнтинга в сечении (x, y) 3D-параксиального бесселева пучка при $r = \text{const}$. Свет линейно-поляризован вдоль оси x

Орбитальный угловой момент электромагнитного поля определяется соотношением [63]

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{S}] = \left[\mathbf{r} \times \left\{ \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] \right\} \right]. \quad (5.64)$$

Проекция на оптическую ось орбитального углового момента для линейно-поляризованного электромагнитного поля, рассчитанная в параксиальном приближении, имеет вид

$$M_z = \frac{1}{8\pi k c} \left[y \operatorname{Im} \left(E \frac{\partial E^*}{\partial x} \right) - x \operatorname{Im} \left(E \frac{\partial E^*}{\partial y} \right) \right]. \quad (5.65)$$

Для линейно-поляризованного бesselева пучка,

$$E_x = J_n(\alpha r) \exp(in\varphi) \exp(i\beta z), \quad \alpha^2 + \beta^2 = k^2 \quad (5.66)$$

проекция на ось z орбитального углового момента будет иметь вид

$$M_z = \frac{n J_n^2(\alpha r)}{8\pi k c}. \quad (5.67)$$

Выражение (5.67) с точностью до постоянной совпадает с первым слагаемым в уравнении, полученном в работе [64].

Дифракционные оптические элементы позволяют формировать пучки Бесселя, сохраняющие модовый характер на большом расстоянии вдоль оси распространения. Исходя из геометрических соображений, расстояние, на котором сохраняется модовый характер одномодового бesselевого светового поля $J_n(\alpha r) \exp(in\varphi)$, оценивается следующей формулой [65]:

$$z_{\max} = R \left[\left(\frac{2\pi}{\alpha \lambda} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (5.68)$$

где R — радиус ДОЭ, α — параметр функции Бесселя.

В работе [59] показано, что при формировании бesselевых пучков голографическими оптическими элементами максимальное расстояние сохранения их модового характера увеличивается примерно в два раза по сравнению со способом формирования бesselевых пучков с помощью узкой щели [66]. Однако, необходимо некоторое расстояние от плоскости голографического оптического элемента, чтобы пучок сформировался. Таким образом, отрезок оптической оси, на котором бesselев пучок, формируемый конечным фазовым ДОЭ, сохраняет свой модовый характер, начинается с некоторого z_{\min} , необходимого для формирования пучка, и заканчивается на z_{\max} , определяемого радиусом ДОЭ R и параметром бesselева пучка α .

В работе [67] предложено формировать модовые пучки Бесселя с помощью спиральной зонной пластинки, функция пропускания которой имеет вид

$$\tau(r, \varphi) = \operatorname{sgn} (J_n(\alpha r)) \exp(in\varphi). \quad (5.69)$$

Винтовой ДОЭ с пропусканием (5.69) эффективно формирует световое поле, амплитуда которого пропорциональна функции Бесселя, $J_n(\alpha r) \exp(in\varphi)$, вблизи оптической оси на отрезке $0 < z < Rk/\alpha$ [67]. При этом ДОЭ с пропус-

канием (5.69) формирует световое кольцо в фурье-плоскости с максимальной интенсивностью [68].

При расчете фазы ДОЭ, для формирования бесселева пучка 5-го порядка выбирались следующие параметры: $R = 3$ мм, $\lambda = 633$ нм, $\alpha = 44,5$ мм⁻¹. На рисунке 5.30, *а* показан шаблон (600×600 отсчетов), по которому на технологической базе Университета Йоенсуу (Финляндия) был изготовлен 16-градационный ДОЭ (шаг дискретизации 10 мкм). На рисунке 5.30, *б* показана центральная часть микрорельефа ДОЭ при увеличении в 50 раз (вид сверху), а на рис. 5.30, *в* — при увеличении в 200 раз (вид под наклоном). Картины микрорельефа получены с помощью интерферометра NEWVIEW 5000 американской фирмы Zygo.

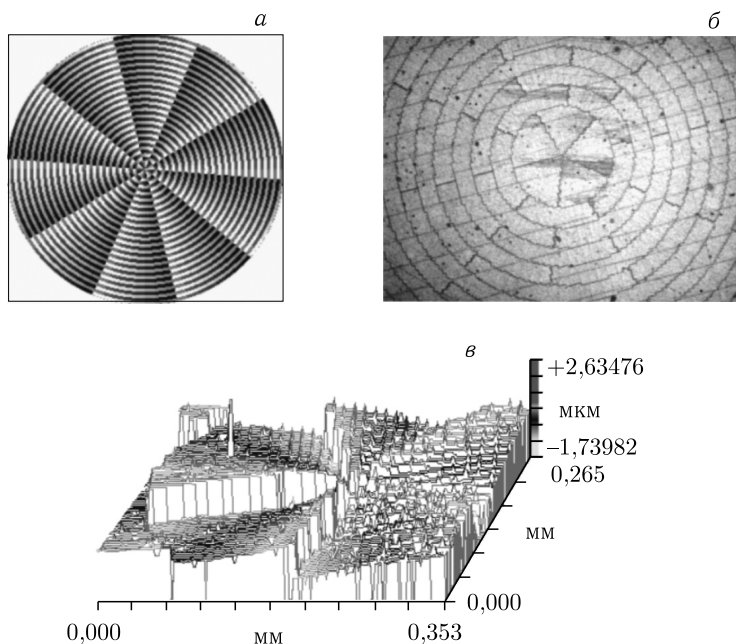


Рис. 5.30. Фазовый ДОЭ, формирующий бесселев пучок пятого порядка: шаблон фазы (*а*) и вид центральной части микрорельефа при увеличении в 50 раз (*б*) и 200 раз (*в*)

Результаты сравнения экспериментального формирования бесселева пучка 5-го порядка и численного моделирования на основе интегрального преобразования Френеля приведены на рис. 5.31. Изготовленный фазовый ДОЭ освещался коллимированным пучком He-Ne лазера. Полученное распределение интенсивности на разных расстояниях после ДОЭ регистрировалось с помощью CCD-камеры. На рисунке 5.31, *а–г* (в верхней строке) приведены экспериментально зафиксированные распределения интенсивности на следующих расстояниях от плоскости ДОЭ: 300 мм (*а*), 400 мм (*б*), 500 мм (*в*), 600 мм (*г*). На рисунке 5.31 *д–з* (в нижней строке) приведены соответствующие картины численного моделирования [60].

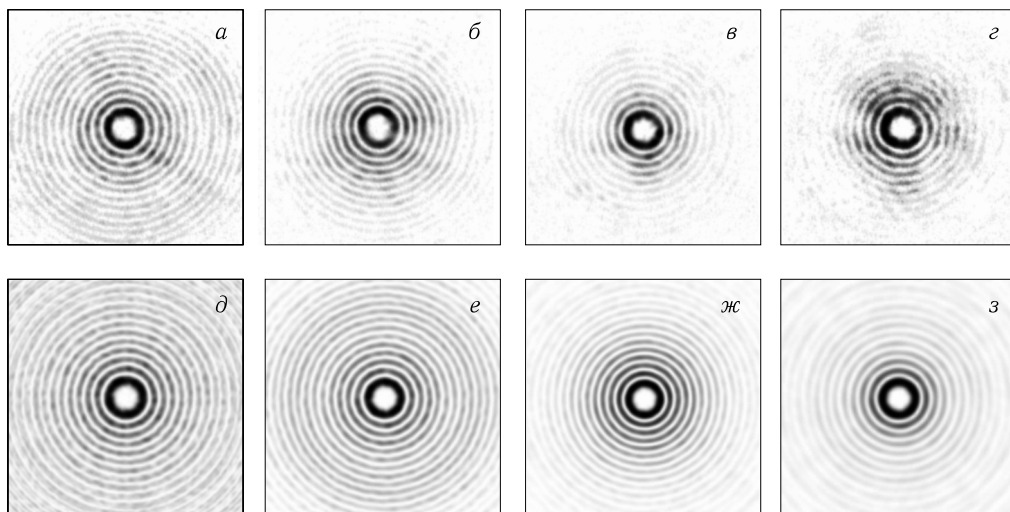


Рис. 5.31. Экспериментально зафиксированные распределения интенсивности (негатив) в поперечном сечении на следующих расстояниях от плоскости ДОЭ: 300 мм (а), 400 мм (б), 500 мм (в), 600 мм (г) и соответствующие результаты численного моделирования (д–з)

Из сравнения соответствующих картин на рис. 5.31 видно хорошее согласие теории с экспериментом.

Для проведения экспериментов по вращению микрообъектов был разработан макет экспериментальной оптической установки [60, 69], оптическая схема которой приведена на рис. 5.32, а. Основой установки является модифицированный микроскоп «Биолам-М». Для ввода лазерного излучения использовался стандартный оптический тракт осветителя. Внешний вид самой установки приведен на рис. 5.32, б.

При разработке этой оптической установки нужно было удовлетворить нескольким противоречивым требованиям: во-первых, для наибольшей эффективности фокусировки необходимо было использовать микрообъектив с большим увеличением, во-вторых, размер ДОЭ определял размер пучка, попадающего на микрообъектив, и например, для $90\times$ микрообъектива размер пучка был существенно больше входной апертуры, что неизбежно приводит к уменьшению энергии пучка. Кроме этого использование одного микрообъектива для фокусировки и формирования изображения приводит к необходимости совместить фокальную и рабочую плоскости микрообъектива. Обе эти проблемы были успешно решены с помощью корректирующей линзы L_1 . Для определения минимально необходимой мощности пучка с помощью разработанного метода расчета сил была определена минимальная интенсивность $2 \cdot 10^8$ Вт/м², при которой возможно движение микрообъекта диаметром 5 мкм, с показателем преломления 1,5 в бесселевом пучке 5-го порядка. При использовании микрообъектива $16\times$, это дает мощность пучка в рабочей плоскости 90 мВт. Учитывая, что потери при отражении от преломляющих поверхностей в фокусирующей системе составляют 55%–60% (экспериментально полученное значение), следует, что мощность пучка на выходе из ла-

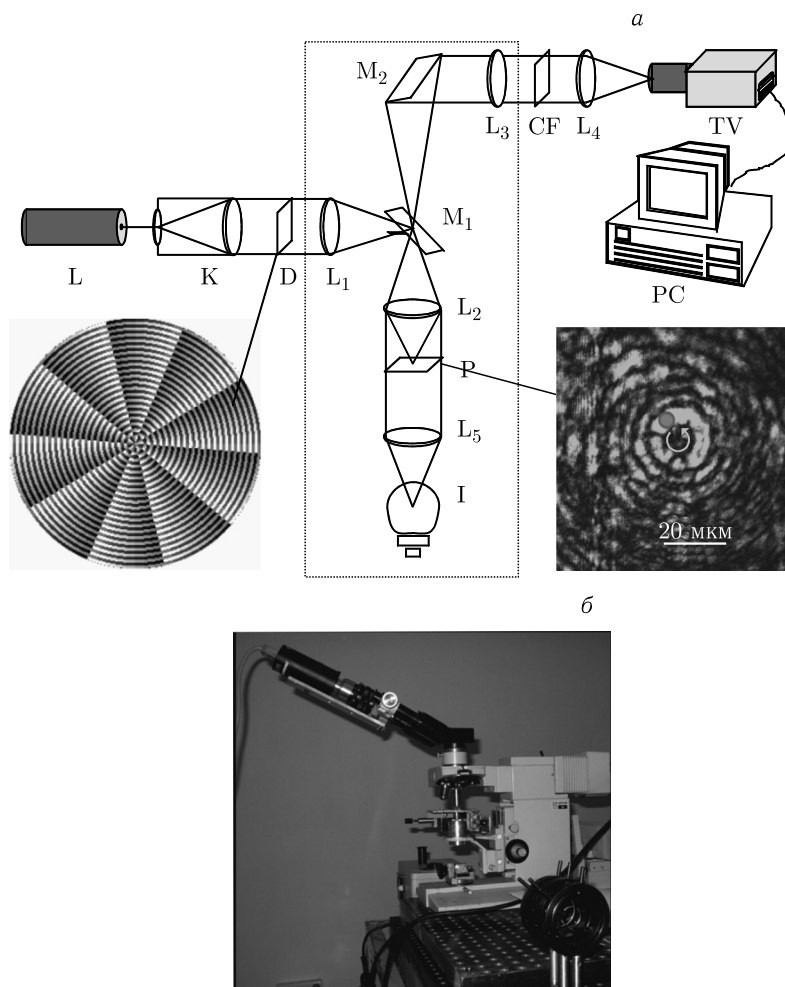


Рис. 5.32. Оптическая схема экспериментальной установки (а): L — аргонный лазер, K — коллиматор, D — ДОЭ, L₁ — корректирующая линза, M₁ — полупрозрачное зеркало микроскопа, M₂ — поворотное зеркало, L₂ — микрообъектив, P — кювета с микрообъектами, L₃ — окуляр микроскопа, CF — красный светофильтр, TV — телекамера, L₄ — объектив телекамеры, L₅ — конденсор осветителя, I — лампа осветителя, фотография экспериментальной установки (б)

зера должна быть около 200 мВт. При этом учитывалось, что в центральное кольцо бесселева пучка попадает не более 30 % энергии (экспериментально определенное значение).

Рассмотрим работу установки. Луч аргонного лазера после коллиматора K попадает на ДОЭ D, который формирует бесселев пучок пятого порядка. Затем корректирующая линза L₁ окончательно формирует пучок, который затем попадает в оптическую систему микроскопа (линзы L₁, L₂). Затем сформированный пучок изображается с уменьшением в кювете с водной взвесью микрообъектов. Фоновое освещение осуществляется лампой I, при помощи

линзы L_5 . Линза L_2 (микрообъектив $16\times$, $20\times$, $90\times$) используется для фокусировки и в то же время для формирования изображения области кюветы. В качестве микрообъектов были использованы клетки дрожжей. На рисунке 5.33 изображены разные стадии движения клетки дрожжей, захваченной первым световым кольцом бесселева пучка. Светофильтр CF в эксперименте был подобран так, чтобы было видно микрообъект, но не видно пучка. Всего микрообъект совершил восемь оборотов, после чего прилип ко дну. Параметры данного эксперимента: размер клетки $4,5 \times 7$, мощность пучка Бесселя 150–200 мВт, диаметр траектории 17 мкм [60].

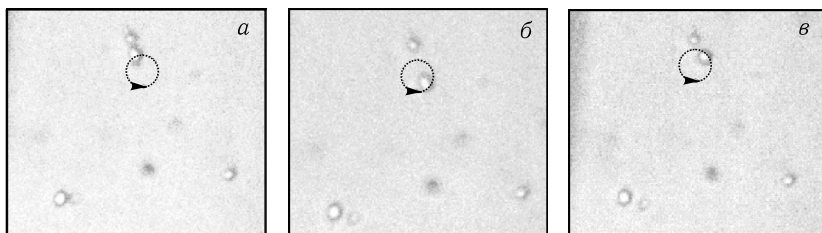


Рис. 5.33. Клетка дрожжей захватывается световым бесселевым пучком и совершает 8 оборотов по кольцу диаметром 17 мкм (первое кольцо бесселева пучка); а, б, в — стадии движения через 0,5 с, траектория показана контуром

Клетки дрожжей как объект для экспериментов по вращению в световых пучках имеет два существенных недостатка:

1. Подготовка этих микрообъектов для эксперимента занимает время порядка нескольких часов;
2. Невозможно точно определить размеры и форму клетки дрожжей, поэтому сложно моделировать их движение в световых пучках.

Этих недостатков лишены полистироловые шарики (производство АНО «Синтез полимерных сорбентов»), которые изготавливаются для использования в хроматографии. Кроме того, такие шарики часто используются в работах других экспериментаторов, что облегчает сравнение результатов экспериментов. Для экспериментов были выбраны полистироловые шарики диаметром 5 мкм. Они изготовлены с хорошей точностью ($\pm 0,1$ мкм), поэтому являются хорошим объектом для моделирования. Следует заметить, что диаметр шариков 5 мкм — очень большой для экспериментов по вращению; обычно в работах других экспериментаторов используются шарики диаметром 1 мкм (по массе в 125 раз меньше), однако если думать о дальнейшем практическом использовании результатов экспериментов (например, в микромеханике), этот размер является наиболее подходящим, так как сопоставим с характерными размерами микромеханических устройств. В следующем эксперименте бесселев пучок был сфокусирован так, что размер первого кольца составил 3 мкм, это меньше размера микрошарика, таким пучком удалось осуществить захват микрообъекта и передвижение его на 30 мкм в сторону. Перемещение микрообъекта осуществлялось с помощью смещения пучка поворотом зеркала на 1 градус. Стадии движения микрообъекта представлены

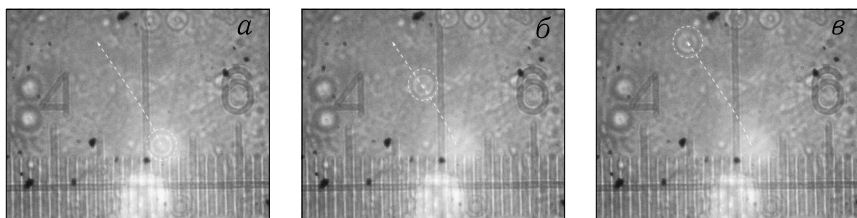


Рис. 5.34. Шарик из полистирола захватывается бesselевым пучком (диаметр первого светлого кольца 3 мкм) и перемещается на 30 мкм в сторону, *а, б, в* — стадии движения через 2 с

на рис. 5.34 (захваченный микрообъект выделен контуром). Мощность пучка около 200 мВт, использовался микрообъектив с увеличением $90\times$ [60].

Интересно было провести эксперимент с комбинированным движением микрообъекта. То есть, перемещая пучок, добиться, чтобы микрообъект еще и вращался. Такой эксперимент был проделан. Фазы движения пары слипшихся микро шариков представлены на рис. 5.35. Параметры этого эксперимента: мощность пучка 250 мВт, микрообъектив — $20\times$. В ходе перемещения на 50 мкм шарики совершили 4 оборота, вращаясь как единое целое [60].

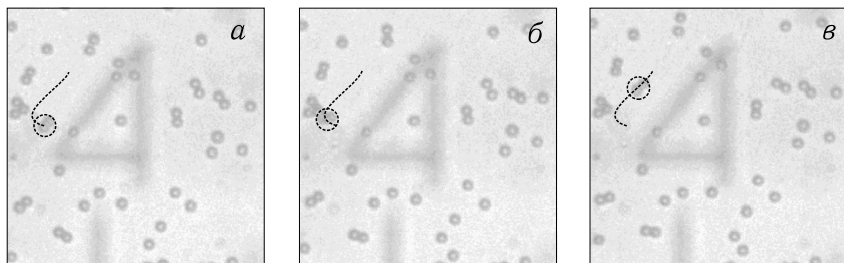


Рис. 5.35. Шарики из полистирола захватываются бesselевым пучком и линейно перемещаются на 50 мкм, одновременно вращаясь вокруг центра пучка (4 оборота), *а-в* — стадии движения через 1 с

5.2.2. Оптическое вращение с использованием многопорядковой спиральной фазовой пластины. Эксперимент по вращению микрообъектов [70–75] был проведен с использованием оптической схемы, показанной на рис. 5.36. Лазерный свет через коллиматор попадал на ДОЭ D, который формирует лазерный пучок с набором оптических вихрей. Тогда, используя оптическую систему микроскопа (линзы L_6 и L_2), лазерный пучок можно сфокусировать в кювету, содержащую водную взвесь полистироловых микросфер. Фоновое освещение генерируется лампой I с использованием линзы L_5 . Линза L_2 (микрообъектив $16\times$, $20\times$) фокусирует свет подсветки и одновременно формирует изображение рабочей области. Лазерный пучок фокусируется микрообъективом L_6 .

Схема, представленная на рис. 5.36, отличается от схемы на рис. 5.28, *а* тем, что фокусировка и наблюдение осуществляется через разные микрообъективы, что позволяет работать с пучками, не имеющими модовых свойств. Кроме этого, фокусировка лазерного пучка осуществляется снизу, что позво-

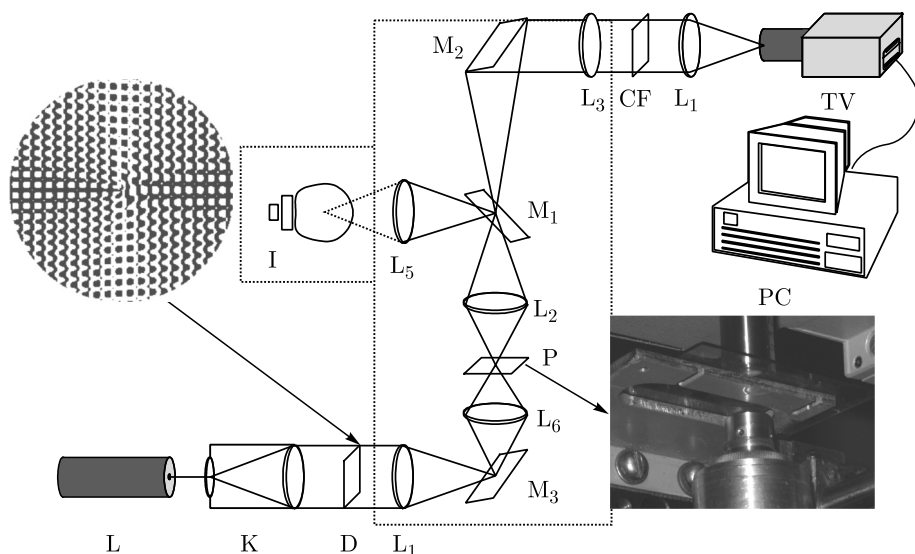


Рис. 5.36. Экспериментальная оптическая схема: L — аргонный лазер, K — коллиматор, D — ДОО, L₁ — корректирующая линза, M₁ — полупрозрачное зеркало микроскопа, M₂ — поворотное зеркало, L₂ — микрообъектив, P — кювета с микрочастицами, L₃ — окуляр микроскопа, CF — красный светофильтр, TV — CCD-камера, L₄ — объектив CCD-камеры, L₅ — конденсор осветителя, и I — лампа осветителя

ляет минимизировать силу трения микрообъекта о дно кюветы, но, к сожалению, налагает ограничения на мощность светового пучка (при некоторой мощности микрообъекты выдавливаются вверх и уходят из рабочей плоскости). Для экспериментов по вращению микрообъектов был использован ДОО, формирующий четыре оптических вихря с номерами порядков $(\pm 3, \pm 7)$. Фаза этого ДОО показана на рис. 5.37, а. Центральная часть рельефа этого ДОО представлена на рис. 5.37, б, д. На рисунке 5.37, в показано распределение интенсивности для элемента в зоне дифракции Фраунгофера.

Рисунок 5.38 показывает различные стадии движения полистироловых микрочастиц, захваченных лазерным пучком в светлом кольце (оптический

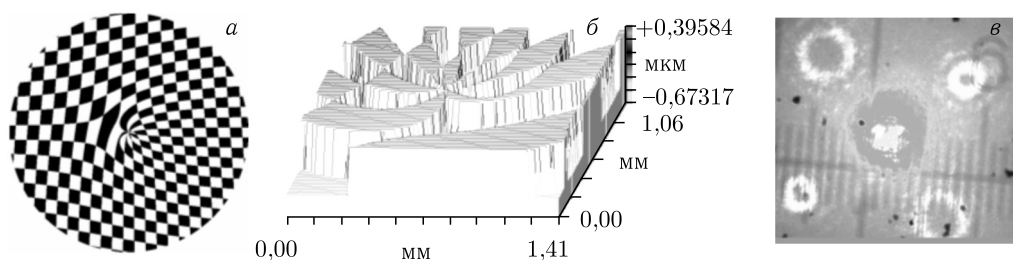


Рис. 5.37. Фаза ДОО для формирования оптических вихрей $-7, -3, 3, 7$ порядков (а), центральная часть микрорельефа (б), распределение интенсивности в картине дифракции (в)

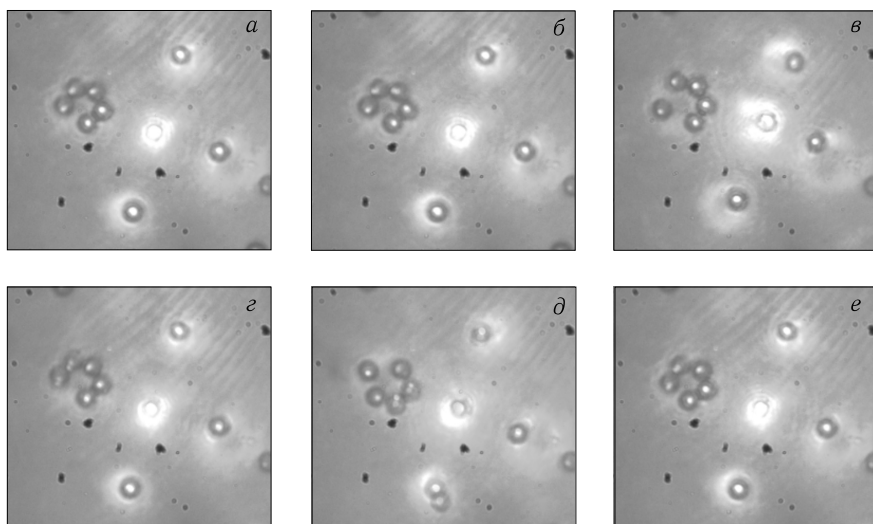


Рис. 5.38. Захват и вращение группы микрообъектов в оптическом вихре 7-го порядка, стадии движения показаны через 2,5 с

вихрь 7-го порядка). Диаметр орбиты 12 мкм. Микрошары находились в воде. Фокусировка осуществлялась с использованием $20\times$ микрообъектива.

Световой пучок с оптическим вихрем одновременно захватил и вращал группу микрообъектов. Следует заметить, что световые пучки с оптическими вихрями высоких порядков лучше вращают микрообъекты. Как хорошо видно на рис. 5.38, микрошар захвачен в световом пучке с оптическим вихрем третьего порядка, но он не двигается, в то время как группа микрошаров в световом пучке с оптическим вихрем седьмого порядка вращается с заметной скоростью. Был проведен усложненный эксперимент, в котором микрообъекты вращались в разных дифракционных порядках.

Рисунок 5.39 показывает различные стадии движения полистироловых шариков, захваченных несколькими оптическими вихрями. Световые пучки с оптическими вихрями одновременно захватывают и вращают группу микрошаров в разных порядках. Захвачено по четыре микрошара в оптические вихри 3-го и -3 -го порядков, четыре микрошара — в оптическом вихре 7-го порядка и пять микрошаров — в оптическом вихре — 7-го порядка.

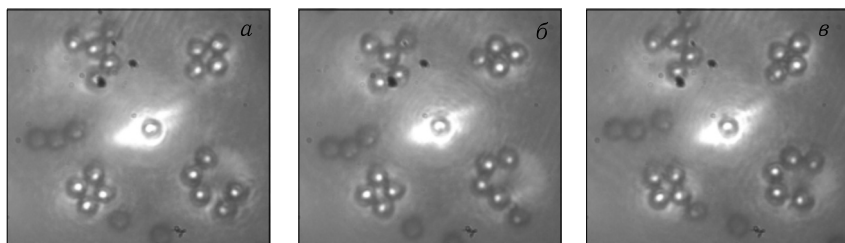


Рис. 5.39. Захват и вращение группы микрошаров в оптических вихрях 3-го, -3 -го и 7-го порядков, стадии движения показаны с интервалом в 5 с

В оптическом вихре 7-го порядка вращения микрошаров не наблюдается, по всей видимости, это связано с тем, что часть микрошаров прилипла ко дну кюветы.

Группы микрошаров вращаются в разных порядках светового пучка с оптическими вихрями 3-го и 7-го порядков. При этом из рис. 5.39 видно, что микрошары в оптических вихрях разных знаков вращаются в противоположных направлениях.

5.2.3. Вращение микрообъектов в вихревом световом кольце, сформированном аксиконом. Технология литографии позволяет легко изготовить бинарный фазовый дифракционный оптический элемент (ДОЭ) [76]. Однако фазовая функция винтового аксикона не бинарная. Поэтому нужно использовать простой метод преобразования полутоновой функции в бинарную функцию, который заключается в использовании несущей частоты. В этом случае функция пропускания бинарного фазового аксикона имеет вид

$$\tau_{n\beta}(r, \varphi) = \text{sign} [\cos (\alpha r + n\varphi + \beta r \cos \varphi)] \text{rect} \left(\frac{r}{R} \right), \quad (5.70)$$

где $\beta = 2\pi/T$ и T — период несущей пространственной частоты [77]. Как известно, бинарный ДОЭ формирует два одинаковых порядка дифракции, каждый из них имеет эффективность около 41 % [78]. Для пространственного разделения порядков должно выполняться условие $\beta > \alpha$. Поэтому радиусы колец в картине дифракции Фраунгофера для вихревого аксикона аппроксимируются выражением $\alpha f/k$. Рисунок 5.40, *а* показывает бинарную фазу ДОЭ, формирующего два одинаковых кольца с одинаковыми числами $n = 10$, но с разными знаками. На рисунке 5.40, *б* показана картина дифракции Фраунгофера для ДОЭ показанного на рис. 5.40, *а*. ДОЭ, имеет радиус $R = 2$ мм, длина волны $\lambda = 532$ нм.

Параметры аксикона $\alpha = 50 \text{ мм}^{-1}$, пространственная несущая частота $\beta = 100 \text{ мм}^{-1}$, фокусное расстояние сферической линзы $f = 420$ мм.

Фаза на рис. 5.40, *а* была использована при изготовлении амплитудного фотошаблона с разрешением 3 мкм с использованием круговой станции лазерной записи CLWS-200. Затем на стеклянной подложке толщиной 2,5 мм с показателем преломления 1,5 методом травления был изготовлен ДОЭ.

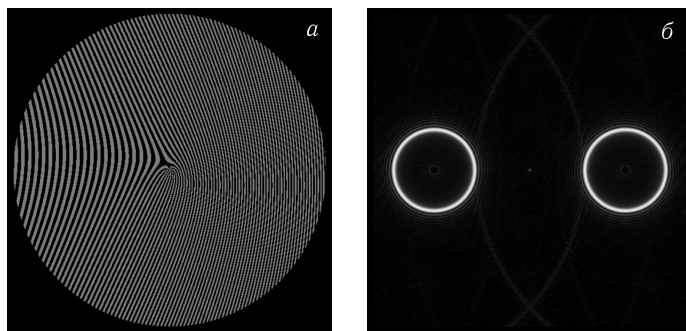


Рис. 5.40. Фаза бинарного винтового аксикона 10-го порядка (*а*); вычисленная картина дифракции плоской волны на ДОЭ, представленном на рис. 5.40, *а*, (*б*)

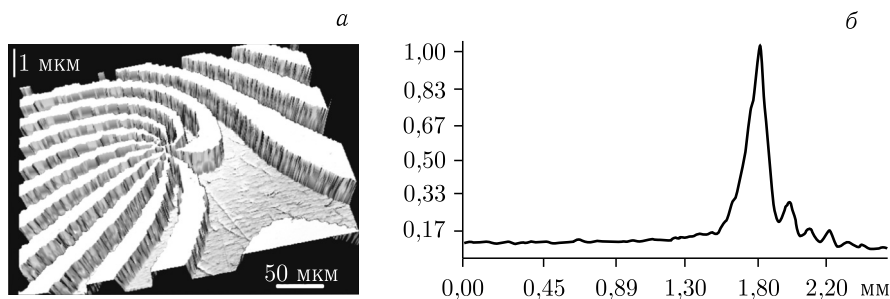


Рис. 5.41. Экспериментальное радиальное сечение светлого кольца в фокальной плоскости линзы ($f = 460$ мм)

При освещении ДОЭ радиусом $R = 2$ мм, представленного на рис. 5.40, плоской волной с длиной волны $\lambda = 532$ нм, формируются два одинаковых светлых кольца (каждое с эффективностью около 40 %) в фокальной плоскости линзы $f = 460$ мм. Радиальное сечение кольца, показанное на рис. 5.41, измерено с помощью CCD-камеры. Изготовленный ДОЭ использовался для захвата и вращения полистироловых микрошаров диаметром 5 мкм. ДОЭ освещался коллимированным световым пучком твердотельного неодимового лазера с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. Светлое кольцо радиусом 37,5 мкм было сформировано в фокальной плоскости 40× микрообъектива. Рисунок 5.42 показывает два последовательных снимка положения микрошаров, разделенные промежутком времени в десять секунд, видно десять полистироловых микрошаров, совершающих движение по светлomu кольцу.

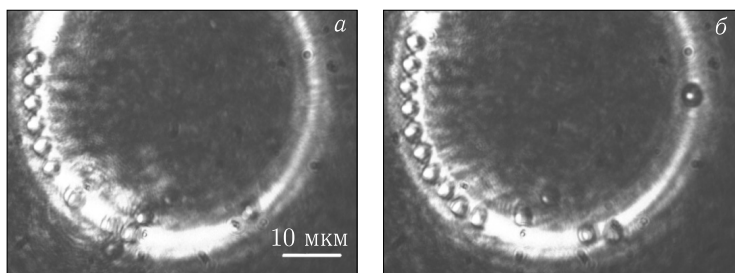


Рис. 5.42. Десять полистироловых шариков диаметром 5 мкм двигаются вдоль светлого кольца радиусом 37,5 мкм, сформированного винтовым аксиконом с номером $n = 10$, со средней скоростью около 4 мкм/с. Стадии движения (а) и (б) разделены интервалом в 10 с

5.2.4. Оптическое вращение в двойном светлом кольце. ДОЭ для формирования двойного кольца был реализован тремя разными способами: по технологии электронной литографии прямой записью электронным лучом на резисте; по технологии оптической литографии, с помощью изготовления бинарного фотошаблона и жидкостного травления стеклянной подложки; и с помощью жидко-кристаллического дисплея или динамического пространственного модулятора света [79].

Дифракционный элемент был изготовлен на подложке из плавленого кварца диаметром 1 дюйм и толщиной 3 мм. Этапы изготовления показаны на рис. 5.43. Сначала на верхнюю поверхность подложки из SiO_2 был нанесен РММА-резист толщиной 200 нм. Затем на подложку был наложен 15 нм слой Cu (рис. 5.43, а). Это необходимо для электропроводимости. После чего с помощью электронно-лучевой машины Leica Lion LV1 проводилась экспозиция. После экспозиции проводящий слой удалялся. Затем на полученный рельеф наносился слой (50 нм) Cr (рис. 5.43, б). Травление SiO_2 подложки выполнялось пошагово с помощью реактивного ионного травления в атмосфере CHF_3/Ar (рис. 5.43, в). После травления хромовая маска удалялась влажным травлением (рис. 5.43, д). Измеренная глубина рельефа ДОЭ составила 578 нм.

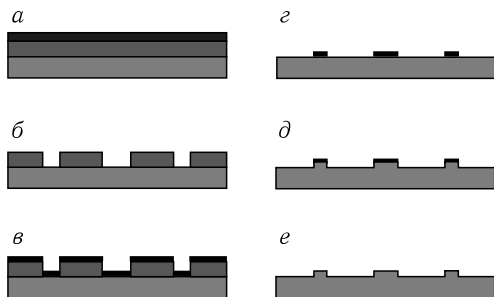


Рис. 5.43. Изготовление бинарного ДОЭ с помощью электронной литографии и реактивного ионного травления

По синтезированному изображению фазы ДОЭ был изготовлен фотошаблон на стеклянной подложке с напыленным слоем хрома. Запись фотошаблона производилась на станции лазерной записи CLWS-130 с точностью позиционирования 50 нм и разрешением 0,6 мкм. Изготовление самого ДОЭ производилось стандартными методами жидкостной фотолитографии на стеклянной подложке толщиной 2,5 мм. Глубина травления составила 0,5 мкм. Погрешность травления по высоте составила около 50 нм. На рисунке 5.44 показан бинарный профиль центральной части ДОЭ размером 260×350 мкм, измеренный с помощью интерферометра NewView 5000 Zygo.

Сечение одного периода модуляции рельефа поверхности представлено на рис. 5.45. Из рисунка 5.45 видно, что для длины волны лазерного излу-

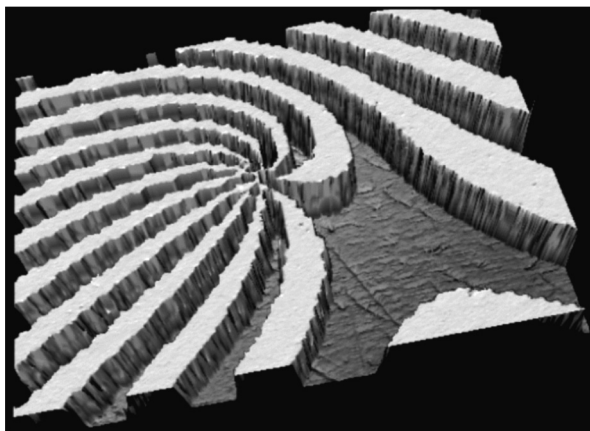


Рис. 5.44. Центральная часть рельефа ДОЭ размером 260×350 мкм

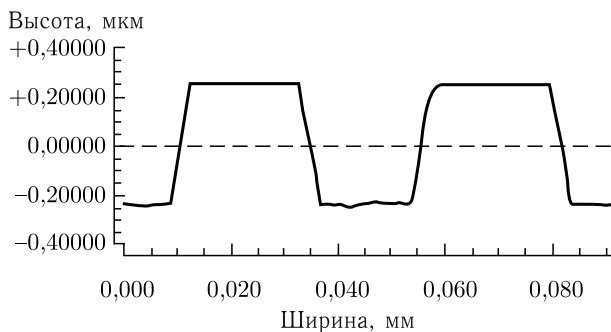


Рис. 5.45. Сечение центральной части микрорельефа ДОЭ, показанного на рис. 5.44

чения 532 нм глубина травления стекла составила 0,5 мкм. Трапецевидность отдельной ступеньки не превышает 25 % от ее ширины (примерно 20 мкм).

5.2.5. Формирование ДОЭ с помощью жидкокристаллического дисплея. На пространственный модулятор света CRL OPTO SXGA LCOS с активной областью 1316×1024 (1280×1024 без учета граничной области) пикселей (размер одного пикселя равен 15 мкм) выводилось изображение фазы ДОЭ размером 512×512 . Микродисплей формирует фазовое изображение за счет отражения поляризованного лазерного излучения от разных плоскостей: в закрытом состоянии отдельного элемента разрешения микродисплея свет отражается от внешней поверхности тонкой пленки, в открытом состоянии — от внутренней поверхности. В результате получается бинарный ДОЭ с диаметром 6,5 мм. Формируемое на микродисплее изображение обновляется с частотой 63 Гц. При этом время переключения отдельных пикселей не превышает 10 мкс.

На рисунке 5.46 показано распределение света в двойном кольце, сформированном в фокальной плоскости сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 138$ мм с помощью бинарного ДОЭ (5.70), фаза которого показана на рис. 5.40, *а* и который изготовлен разными способами: электронной литографией (*а*); оптической литографией (*б*) и с помощью модулятора света (*в*).

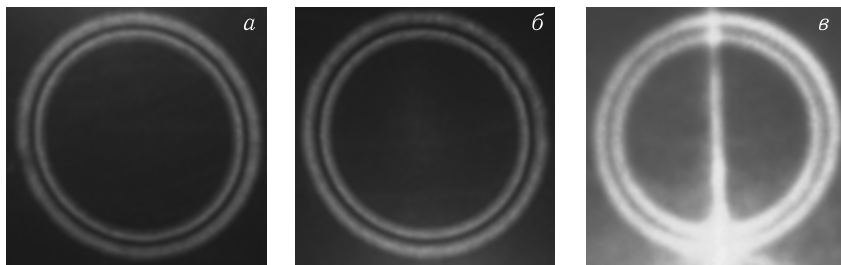


Рис. 5.46. Измеренная интенсивность в картинах дифракции Фраунгофера (двойное кольцо), сформированных с помощью бинарного ДОЭ, реализованного разными способами: электронной литографией (*а*); оптической литографией (*б*) и с помощью жидко-кристаллического дисплея (*в*)

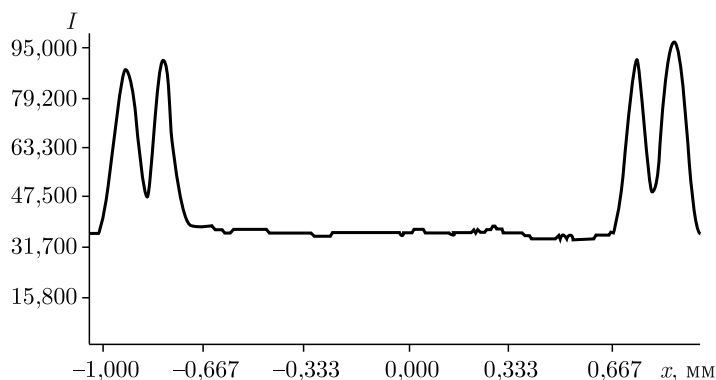


Рис. 5.47. Радиальное сечение интенсивности в картине дифракции Фраунгофера (рис. 5.46, б) в относительных единицах. По горизонтальной оси отложены миллиметры

Показан только минус первый дифракционный порядок. Размер картин дифракции на рис. 5.46 составляет 2×2 мм.

На рисунке 5.47 показано радиальное сечение двойного кольца картины дифракции Фраунгофера (рис. 5.46, б). Видно, что радиус кольца составляет около 0,8 мм, а ширина — около 0,3 мм.

В эксперименте, оптическая схема для проведения которого показана на рис. 5.48, был использован твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт [80]. В целях минимизации потерь мощности при отражениях на преломляющих поверхностях пучок не расширяется коллима-

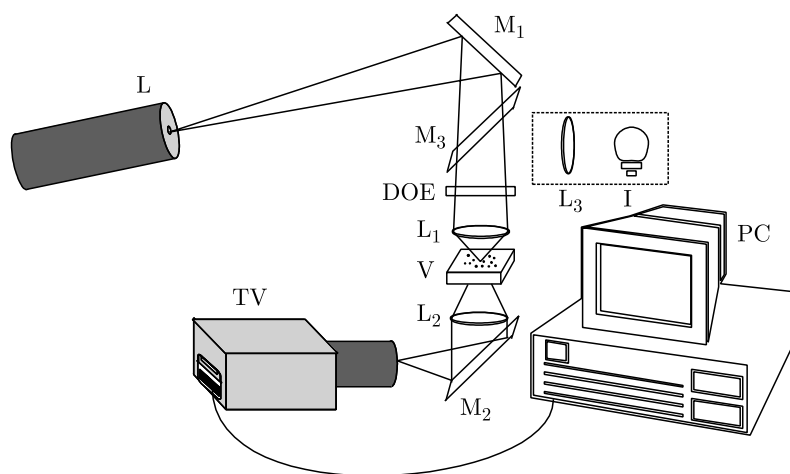


Рис. 5.48. Схема экспериментальной установки для вращения микрообъектов. L — твердотельный лазер, M_1 — первое зеркало, M_3 — полупрозрачное зеркало для освещения рабочей области, M_2 — второе поворотное зеркало, L_1 — фокусирующий микрообъектив (40 \times), L_2 — микрообъектив строящий изображение рабочей области (20 \times), L_3 — линза осветителя, I — лампа осветителя, V — кювета с микрообъектами, TV — видеокамера, PC — компьютер

тором, а нужный размер достигается увеличением расстояния между лазером и первым поворотным зеркалом. Поворотное зеркало M_1 направляет световой пучок на ДОЭ, затем микрообъектив L_1 ($40\times$, водная иммерсия, фокусное расстояние 4,3 мм) фокусирует пучок в рабочую область внутри кюветы V с микрообъектами, микрообъектив L_2 ($20\times$) формирует изображение рабочей области, а зеркало M_2 поворачивает световой пучок в направлении горизонтально расположенной телекамеры. В качестве микрообъектов использовались полистироловые шарики с диаметром 5 мкм.

Полистироловые микрошары захватываются светлыми кольцами и движутся вдоль них с примерно постоянной скоростью. Различные стадии движения микрошаров через интервал в 2,5 с в двойном светлом кольце представлены на рис. 5.45.

Радиус внутреннего кольца составлял 37 мкм, радиус внешнего кольца 48 мкм. Как видно из рис. 5.49, наблюдается устойчивое движение микрошаров вдоль внутреннего светлого кольца со средней скоростью около 3–4 мкм/с и движение микрошаров вдоль внешнего светового кольца со скоростью 0,5–0,7 мкм/с. Такая разница в скорости движения вызвана различными интенсивностями колец. Разница интенсивностей колец вызвана тем, что ДОЭ освещается гауссовым пучком с радиусом, меньшим радиуса ДОЭ (для уменьшения потерь при фокусировке).

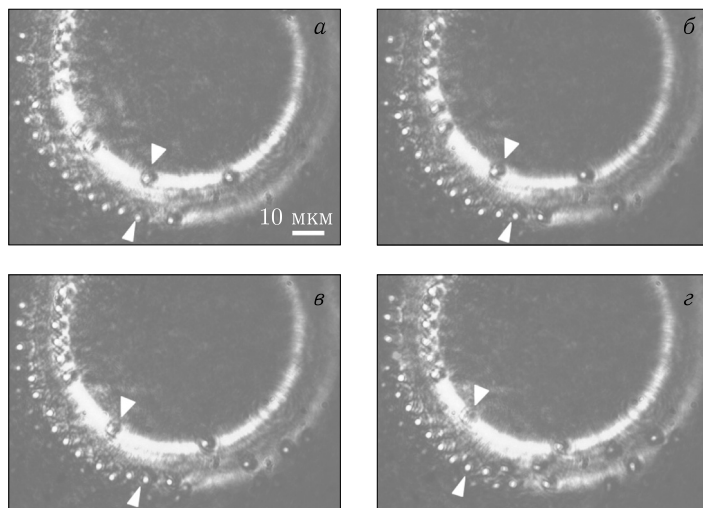


Рис. 5.49. Различные стадии движения микрошаров в двойном светлом кольце, сформированном составным аксиконом

5.2.6. Вращение микрообъектов в гипергеометрических пучках и пучках, не обладающих орбитальным угловым моментом, с использованием динамического модулятора света. Динамические модуляторы света позволяют в режиме реального времени формировать фазовые ДОЭ, в том числе и для задач оптического вращения [10, 34, 81, 82]. К сожалению, основной недостаток динамических модуляторов, как работающих на пропускание, так и отражающих, — чрезвычайно низкая дифракционная

эффективность. Это накладывает повышенные требования к формируемым пучкам. В частности необходимо минимизировать количество порядков, а также очевидно, что наиболее эффективно будет использовать световые пучки, обладающие модовыми свойствами.

Экспериментально гипергеометрические моды формировались с помощью жидко-кристаллического микро-дисплея с использованием оптической установки, схема которой представлена на рис. 5.50 [83].

Луч лазера расширяется коллиматором и попадает на пространственный модулятор света под углом, близким к 90° , и отражается в направлении телекамеры. ДОЭ формировался на динамическом модуляторе CRL OPTO с разрешением 1316×1024 и физическим размером 6,5 мм. Модулятор освещался плоским пучком от твердотельного лазера с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. При этом бинарная фаза, получаемая на модуляторе, кодировалась двумя способами.

1. Бинарная фаза $S(r, \varphi)$ при добавлении линейной несущей, удовлетворяет уравнению

$$S(r, \varphi) = \text{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{r}{w} + n\varphi + \alpha x \right] \right\}, \quad (5.71)$$

где $\text{sgn}(x)$ — знаковая функция, α — пространственная несущая частота, x — декартова координата. Амплитуда r^{-1} функции заменялась на постоянное значение.

Кодированный элемент формирует в плоскости дифракции Фраунгофера два симметричных порядка с гипергеометрическими модами.

2. При квадратичном радиальном кодировании бинарная фаза ДОЭ рассчитывается по формуле

$$S(r, \varphi) = \text{sgn} \left\{ \cos \left[\gamma \ln \frac{r}{w} + n\varphi + \frac{kr^2}{2f} \right] \right\}, \quad (5.72)$$

где f — фокусное расстояние сферической линзы.

Это значит, что из-за фактического добавления линзы гипергеометрические моды формируются в сходящемся пучке.

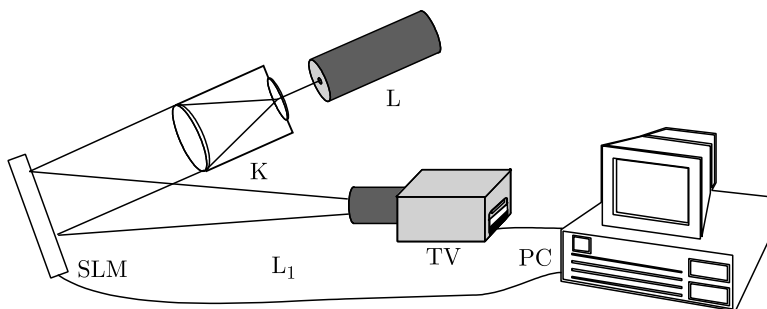


Рис. 5.50. Оптическая схема для эксперимента. L — твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт, K — коллиматор, SLM — пространственный модулятор света, TV — телекамера, PC — персональный компьютер

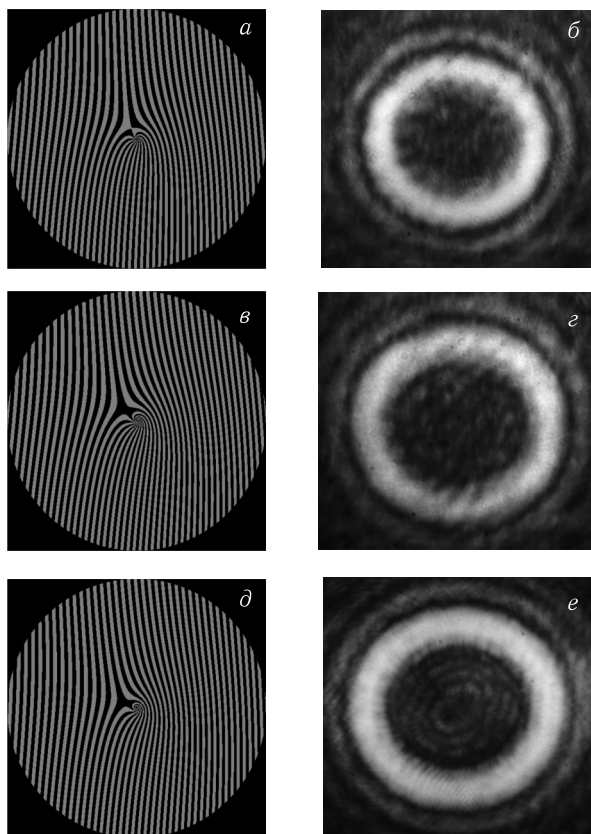


Рис. 5.51. Фаза, сформированная на динамическом пространственном модуляторе света для $n = 10$, $\gamma = 5$ (а), $n = 10$, $\gamma = 10$ (в) и $n = 5$, $\gamma = 10$ (д), и соответствующие распределения интенсивности на расстоянии 2000 мм от модулятора (б), (г) и (е)

На рисунке 5.51 представлены фазы линейно кодированных ДОЭ и распределения интенсивности на расстоянии 2000 мм от пространственного модулятора для различных n и γ .

Так как при линейном кодировании энергия делится между двумя порядками, а дифракционная эффективность ДОЭ, сформированного на модуляторе, невысока, полученные изображения обладают недостаточным контрастом. Для избавления от этого недостатка было использовано квадратичное кодирование (5.72). На рисунке 5.52 представлены виды фаз таких элементов (центральные части), формирующих гипергеометрические моды, и распределения интенсивностей на расстоянии 700 мм от ДОЭ.

На рисунке 5.53 представлено распределение интенсивности на разных расстояниях от ДОЭ.

Уменьшение размера гипергеометрической моды связано с тем, что фиксируемое изображение снималось в сходящемся пучке. Как видно из рис. 5.53, структура распределения сохраняется, что доказывает модовый характер светового пучка. Также экспериментально было определено, что в центральное

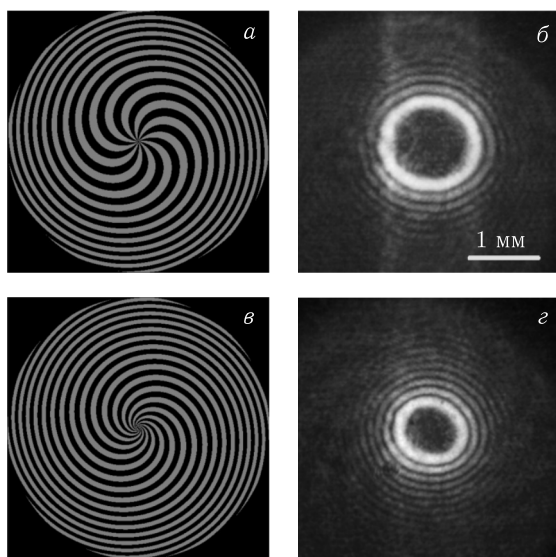


Рис. 5.52. фаза ДОЭ для гипергеометрической моды с параметрами $n = 10$, $\gamma = 1$ (а), распределение интенсивности в зоне дифракции Френеля (б), фаза ДОЭ для гипергеометрической моды с параметрами $n = 10$, $\gamma = 10$ (в), распределение интенсивности в зоне дифракции Френеля (г)

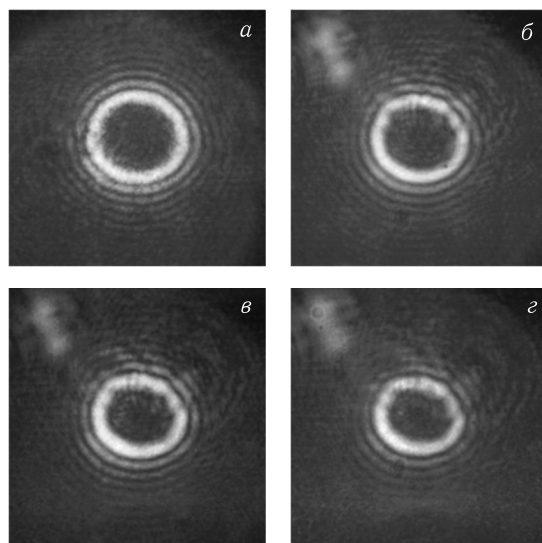


Рис. 5.53. Распространение пучка $n = 10$, $\gamma = 1$ 700 мм (а), 725 мм (б), 750 мм (в), 775 мм (г)

наиболее яркое кольцо идет 35–40% энергии пучка, что несколько больше, чем в пучках Бесселя. К сожалению, малая дифракционная эффективность в сочетании с относительно небольшой мощностью лазера (500 мВт) не позволила использовать сформированные гипергеометрические моды для вращения

микрообъектов (в большинстве известных работ мощность лазера больше 1 Вт). Удалось провести лишь захват группы микрообъектов. Для проведения эксперимента с вращением микрообъектов был изготовлен ДОЭ с фазой, представленной на рис. 5.52, в. С использованием оптической схемы, представленной на рис. 5.48, был проведен эксперимент по вращению полистироловых шариков диаметром 5 мкм в гипергеометрической моде с параметрами $n = 10$, $\gamma = 10$. На рисунке 5.54 представлены последовательные стадии движения (с интервалом 15 с) захваченного полистиролового шарика вдоль самого яркого светлого кольца гипергеометрической моды.

Проведенный эксперимент доказывает возможность использования гипергеометрических мод в задачах оптического захвата и вращения микрообъектов, при этом наличие дополнительного параметра γ позволяет изменять радиус наиболее яркого кольца без изменения параметров оптической схемы.

Любое параксиальное световое поле, описываемое комплексной амплитудой $E(x, y)$, при $z = 0$ можно разложить в ряд по базису мод Гаусса–Лагерра:

$$E(x, y) = \sum_{n,m} C(n, m) \Psi_{nm}(x, y), \quad (5.73)$$

где $C(n, m)$ — комплексные коэффициенты с номерами n и m , причем m — азимутальный индекс,

$$\Psi_{nm}(x, y) = a^{-1} \sqrt{\frac{n!}{(n + |m|)!}} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) \exp \left[-\frac{r^2}{2a^2} + im\varphi \right], \quad (5.74)$$

где $a = \frac{w_0}{\sqrt{2}}$, w_0 — радиус перетяжки гауссового пучка, (r, φ) — полярные координаты, $L_n^m(x)$ — присоединенные многочлены Лагерра. В работе [3] приведено условие на номера мод в уравнении (5.73), при которых картина интенсивности в поперечном сечении многомодового пучка Гаусса–Лагерра будет вращаться при распространении волны вдоль оси z :

$$B = \frac{2(n - n') + |m| - |m'|}{m - m'} = \text{const}, \quad (5.75)$$

где (n, m) и (n', m') номера двух любых мод из линейной комбинации (5.73). Постоянная величина $B/4$ равна числу оборотов, которое совершает много-

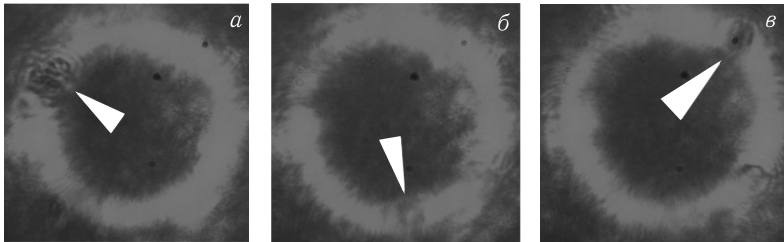


Рис. 5.54. Различные стадии движения микрошара в гипергеометрической моде с параметрами $n = 10$, $\gamma = 10$, сформированной бинарным ДОЭ, фаза которого представлена на рис. 5.52, в

модовый пучок Гаусса–Лагерра от $z = 0$ до $z = \infty$. Причем половину этих оборотов пучок совершит на расстоянии от $z = 0$ до $z = z_0$, где $z_0 = kw_0^2/2$ — расстояние Рэлея, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. В работе [33] получено уравнение для проекции на ось z линейной плотности орбитального углового момента линейно поляризованного лазерного пучка, состоящего из суперпозиции мод ГЛ (5.73):

$$\omega J_z = \frac{\sum_{n,m} m |C(n,m)|^2}{\sum_{n,m} |C(n,m)|^2}, \quad (5.76)$$

где ω — циклическая частота света. Из уравнений (5.73)–(5.76) следует:

- 1) фазы коэффициентов $C(n,m)$ не влияют на значения B и J_z , но влияют на вид интенсивности светового поля из уравнения (5.73) $I(x,y,z) = |E(x,y,z)|^2$;
- 2) число оборотов согласно уравнению (5.75) при вращении пучка (5.73) зависит только от комбинации номеров мод (n,m) и не зависит от выбора значений коэффициентов $C(n,m)$;
- 3) орбитальный угловой момент (5.76) определяется только азимутальными номерами m мод Гаусса–Лагерра и значениями модулей коэффициентов $|C(n,m)|$ и не зависит от выбора номеров n . Поэтому с помощью подходящего выбора комбинации номеров (n,m) и модулей коэффициентов $|C(n,m)|$ можно реализовать различные варианты сочетаний значений B и J_z .

На рисунке 5.55 приведены численные примеры. В первой строке показаны распределения интенсивности 4-модового пучка Гаусса–Лагерра с коэффициентами $C(8,0) = 1$, $C(11,2) = 1$, $C(10,-4) = i$, $C(9,6) = 1$. Такой пучок не вращается ($B = 0$), но имеет положительный орбитальный угловой момент ($\omega J_z = 1$). Во второй строке рис. 5.55 показаны распределения интенсивности 5-модового пучка Гаусса–Лагерра с коэффициентами $C(2,2) = i$, $C(3,1) = 1$, $C(4,0) = -1$, $C(4,-2) = 1$, $C(4,-4) = 1$. Такой пучок вращается влево ($B = -1$) и имеет отрицательный орбитальный угловой момент ($\omega J_z = -3/5$). В третьей строке рис. 5.55 показаны сечения интенсивности 3-модового пучка ГЛ с коэффициентами $C(10,-2) = 1$, $C(8,0) = 1$, $C(4,2) = 1$. Этот пучок вращается влево ($B = -3$), но не обладает орбитальным угловым моментом ($\omega J_z = 0$). И в четвертой строке рис. 5.55 показан 2-модовый пучок Гаусса–Лагерра с коэффициентами $C(1,-1) = 1$, $C(9,1) = 1$. Этот пучок вращается вправо ($B = 8$) и также не обладает орбитальным угловым моментом ($\omega J_z = 0$). Параметры моделирования: длина волны света $\lambda = 633$ нм; радиус перетяжки фундаментальной моды Гаусса–Лагерра $w_0 = 0,1$ мм; размер каждой картинке на рис. 5.55 — 1×1 мм; расстояние, на котором рассчитывались интенсивности на рис. 5.55 (слева направо): $z = 30$ мм, $z = 40$ мм, $z = 50$ мм.

Для суперпозиции мод Бесселя (5.73) запишем выражение

$$\Psi_{nm}(x,y) = [\sqrt{\pi} R J'_m(\gamma_n)]^{-1} J_m(k\alpha_n r) \exp(im\varphi), \quad (5.77)$$

где $\alpha_n = \cos \theta_n = \gamma_n/kR$, θ_n — угол наклона к оси z конической волны, $J_m(x)$, $J'_m(x)$ — функция Бесселя и ее производная, γ_n — корень функции

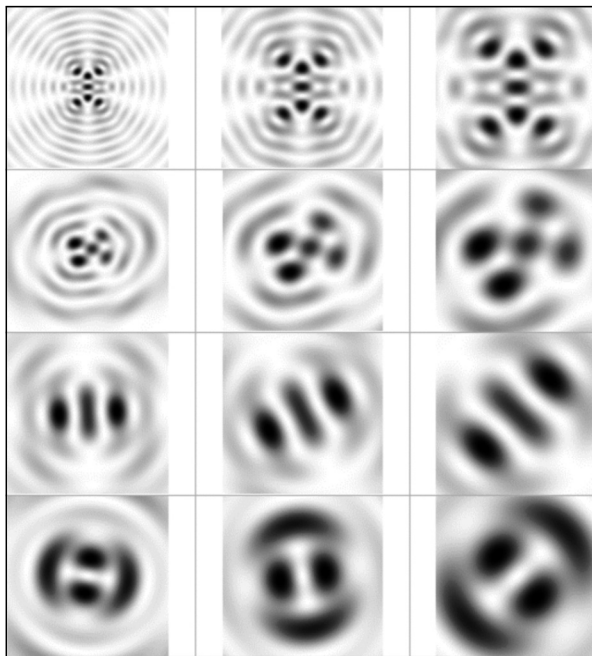


Рис. 5.55. Распределения интенсивности (негатив) в поперечном сечении многомодовых пучков Гаусса–Лагерра, рассчитанных на расстояниях $z = 30$ мм (1-й столбец), $z = 40$ мм (2-й столбец), $z = 50$ мм (3-й столбец) для: 4-х модового (1-я строка), 5-ти модового (2-я строка), 3-х модового (3-я строка) и 2-х модового (4-я строка)

Бесселя. Моды Бесселя (5.77) нормированы на единицу в круге радиусом R . Лазерный пучок (5.77), состоящий из мод Бесселя, будет вращаться [33] на конечном расстоянии от исходной плоскости ($z = 0$) при условии, что номера мод (n, m) , входящих в суперпозицию (5.77) будут удовлетворять условию:

$$B_1 = \frac{\alpha_n^2 - \alpha_{n'}^2}{m - m'} = \text{const.} \quad (5.78)$$

Число $B_1/2$ равно числу оборотов, которые совершает интенсивность в сечении пучка на расстоянии равном одной длине волны λ .

Проекция на ось z линейной плотности орбитального углового момента лазерного пучка на единицу мощности, состоящего из суперпозиции мод Бесселя рассчитывается с помощью уравнения (5.76). Из уравнений (5.76) и (5.78) следует, что подбором номеров (n, m) можно сформировать пучки Бесселя, обладающие вращением интенсивности в поперечном сечении ($B_1 \neq 0$), но имеющие нулевой орбитальный момент ($J_z = 0$). На рисунке 5.56 показаны распределения интенсивности 2-модового пучка Бесселя с коэффициентами $C(\alpha_5, 3) = 1$ и $C(\alpha_{10}, -3) = 1$. Такой пучок вращается влево ($B_1 = -12,5 \cdot 10^{-8}$) и не обладает орбитальным моментом ($J_z = 0$). Параметры расчета: $\lambda = 633$ нм, $\alpha_5 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_{10} = 10 \cdot 10^{-4}$, размер картин дифракции на рис. 5.56 — 5×5 мм.

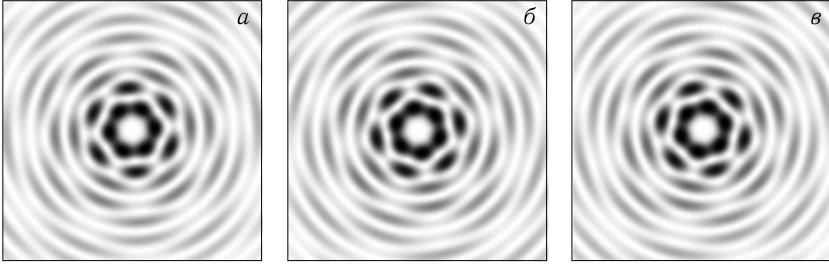


Рис. 5.56. Распределения интенсивности в сечении 2-модового пучка Бесселя, рассчитанные на разных расстояниях z от начальной плоскости: 1 м (а), 2 м (б) и 3 м (в)

Получить вращающийся пучок можно используя гипергеометрические моды. Как и моды Бесселя гипергеометрические моды обладают бесконечной энергией, и поэтому на практике их можно сформировать с помощью амплитудно-фазового фильтра или цифровой голограммы с кольцевой апертурой (кольцевая апертура может быть заменена на круговую, при некоторых условиях). Поэтому гипергеометрические моды будут сохранять свои модовые свойства только на конечном расстоянии вдоль оптической оси.

Для суперпозиции гипергеометрических мод (5.73) вместо выражении (5.74) и (5.77) запишем ($R \gg 1$) выражение

$$\Psi_{nm}(x, y) = \left(2\pi r^2 \ln R\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{\pi n}{\ln R} \ln r + im\varphi\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.79)$$

Эти моды будут ортонормированы в кольце с радиусами R и R^{-1} :

$$\int_{R^{-1}}^R \Psi_{nm}(r, \varphi) \Psi_{n'm'}^*(r, \varphi) r dr d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (5.80)$$

где $\delta_{nn'}$ — символ Кронекера. В зоне дифракции Френеля мода (5.79) имеет вид ($R \rightarrow \infty$, $x = \frac{kr^2}{2z}$)

$$\begin{aligned} \Psi_{nm}(r, \varphi, z) = & \frac{1}{2\pi |m|!} \left(\frac{2z}{k}\right)^{\frac{i\gamma-1}{2}} \exp\left[\frac{i\pi}{4}(-|m| + i\gamma - 1) + ix + im\varphi\right] \times \\ & \times x^{\frac{|m|}{2}} \Gamma\left(\frac{|m| + i\gamma + 1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{|m| + i\gamma + 1}{2}, |m| + 1; -ix\right), \end{aligned} \quad (5.81)$$

где $\gamma = \frac{\pi n}{\ln R}$, ${}_1F_1(a, b; x)$ — конфлюэнтная гипергеометрическая функция, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Условие вращения для многомодового гипергеометрического пучка имеет вид

$$B_2 = \frac{n - n'}{m - m'} = \text{const}, \quad (5.82)$$

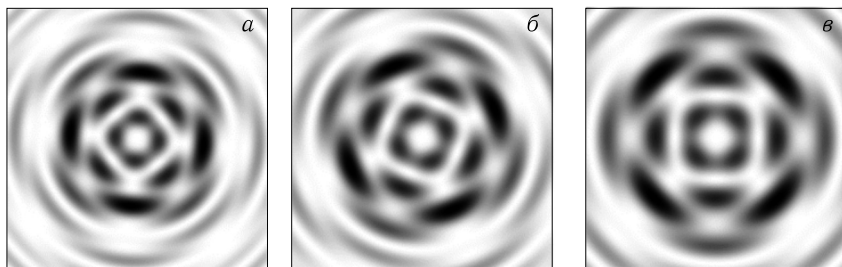


Рис. 5.57. Распределения интенсивности в сечении двухмодового гипергеометрического пучка, рассчитанные на разных расстояниях z от начальной плоскости: 1,5 м (а), 2 м (б) и 2,5 м (в)

где $B_2/4$ — число оборотов, которые совершит пучок (5.73) с модами (5.79) в промежутке от $z = 1$ до $z = R$. Заметим, что в промежутке от $z = R^{-1}$ до $z = 1$ гипергеометрический пучок совершит $B_2/4$ оборотов в обратную сторону.

Проекция на ось z линейной плотности орбитального углового момента лазерного пучка (5.73) на единицу мощности, с модами (5.79) описывается по-прежнему выражением (5.76). Поэтому, используя условие вращения (5.82) и выражение для орбитального углового момента (5.76), можно сформировать лазерный пучок, у которого, например, будет вращаться картина поперечного распределения интенсивности и будет нулевой орбитальный момент. На рисунке 5.77 показаны распределения интенсивности двухмодового гипергеометрического пучка с коэффициентами $C(0, 2) = 1$ и $C(3, -2) = 1$.

Такой пучок вращается влево ($B_2 = -0,75$) и не обладает орбитальным моментом ($J_z = 0$). Параметры расчета: $\lambda = 633$ нм, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_3 = 13,597$, размер картин дифракции на рис. 5.57 — 4×4 мм.

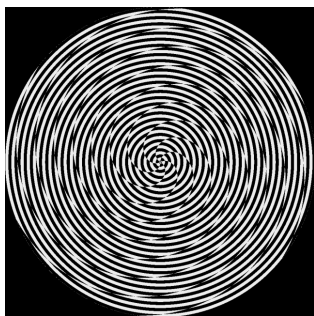


Рис. 5.58. Бинарная фазовая картина, сформированная на микродисплее

Заметим, что в работе [33] исследован частный случай гипергеометрических мод при $\gamma = -i$, которые формируются с помощью спиральной фазовой пластинки с пропусканием $\exp(im\varphi)$. Эти моды обладают одинаковыми фазовыми скоростями, и поэтому их линейная комбинация (5.73) не может вращаться при распространении. Это также следует из условия вращения (5.82) при $n = n' = \text{const}$ ($B_2 = 0$).

В заключение приведем некоторые экспериментальные результаты. При проведении экспериментов использовался бинарный жидко-кристаллический пространственный модулятор света CRL Opto SXGA H1 с разрешением 1280×1024 . На рисунке 5.58 показана бинарная фаза, предназначенная

для формирования светового поля, представляющего собой суперпозицию двух мод Бесселя с номерами $C(\alpha_1, 3) = C(\alpha_2, -3) = 1$ ($\alpha_1 = 1,4 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_2 = 7 \cdot 10^{-3}$). Размер сформированной фазы составил 7×7 мм.

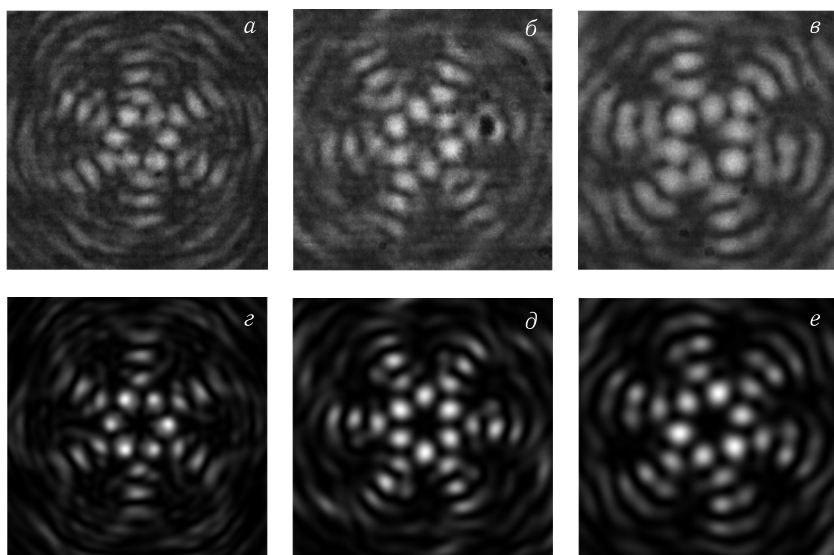


Рис. 5.59. Картина дифракции вращающегося двухмодового пучка Бесселя на разных расстояниях от микродисплея (*а, б, в* — эксперимент, *г, д, е* — теория): $z = 720$ мм (*а, г*); $z = 735$ мм (*б, д*); $z = 765$ мм (*в, е*)

Распределения интенсивности в сечении одного из двух сформированных пучков, измеренные на разных расстояниях от микродисплея с помощью CCD камеры, показаны на рис. 5.59 [84].

Как видно из рис. 5.59, наблюдается качественное соответствие между экспериментальными и теоретическими данными. В эксперименте была использована оптическая схема, представленная на рис. 5.45. В этой схеме зеркало M_1 было заменено на пространственный модулятор света. Был сформирован вращающийся многомодовый пучок Бесселя: $C(\alpha_1, 3) = C(\alpha_2, -3) = 1$, $\alpha_1 = 1,4 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_2 = 0,7 \cdot 10^{-4}$. Мощность пучка составила около 5 мВт, $\lambda = 0,532$ мкм.

На рисунке 5.60 представлены различные положения вращающегося пучка с нулевым орбитальным моментом с захваченным полистироловым шариком диаметром около 1 мкм. Картины *а, б, в* сняты при разном сдвиге

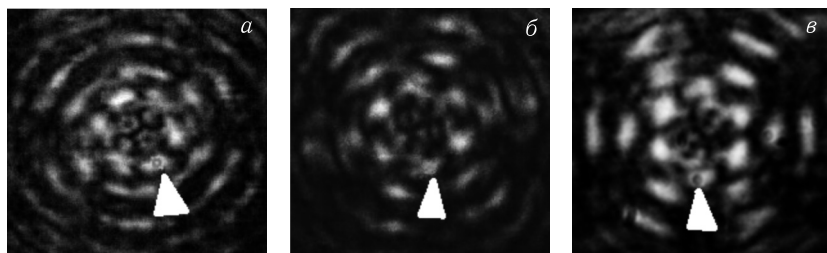


Рис. 5.60. Вращающийся пучок с захваченным полистироловым шариком диаметром 1 мкм

фокусирующего микрообъектива ($16\times$) от начальной плоскости: 0 мм — (а), 0,1 мм — (б), 0,2 мм — (в).

Поскольку смещение микрообъекта невелико, рассмотрим отдельно рис. 5.60, а и 5.60, в. Пунктирной линией отмечена середина пучка. По этой линии строится сечение пучка по рис. 5.61, б (рис. 5.61, в).

Как видно из рис. 5.61, захваченный в максимуме интенсивности микрочастица поворачивается вслед за поворотом пучка. Из сечения пучка видно, что максимумы на рис. 5.61, б ориентированы вертикально. Этот эксперимент показывает, что с помощью ДОЭ и очень простой оптической схемы можно получить контролируемое вращение микрообъекта вместе с пучком. Обычно этот эффект достигается с помощью довольно сложных интерферометров.

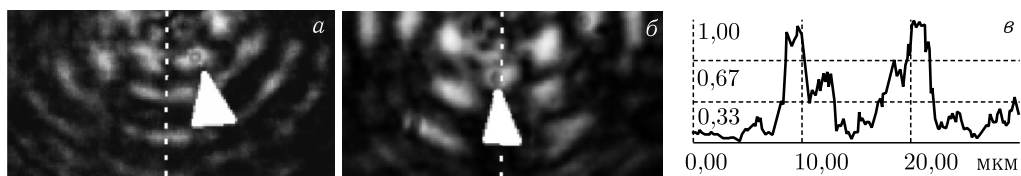


Рис. 5.61. Вращающийся пучок с захваченным полистироловым микрочастицей диаметром 1 мкм, интервал между кадрами (а) и (б) — 10 с, (в) — сечение по пунктирной линии пучка (б)

5.2.7. Исследование параметров вращения микрообъектов в световых пучках с орбитальным угловым моментом. Для сравнения движения микрообъектов в различных световых пучках наиболее удобно использовать среднюю скорость движения. Для определения средней скорости было разработано специальное программное обеспечение, позволяющее обрабатывать и выделять микрообъекты на последовательности изображений.

Для автоматического определения скорости вычислялась функция корреляции с одним из изображений микрообъектов. На рисунке 5.62, б, в представлены различные стадии обработки экспериментального изображения рис. 5.62, а, на рис. 5.62, б полностью убран пучок за счет разделения цветов, на рис. 5.62, в хорошо видны корреляционные пики на месте микрообъектов.

После этого координаты микрообъекта определялись по координатам максимума корреляционных пиков. Средняя скорость определялась как по времени, так и по ансамблю микрообъектов. На первом этапе определялась средняя

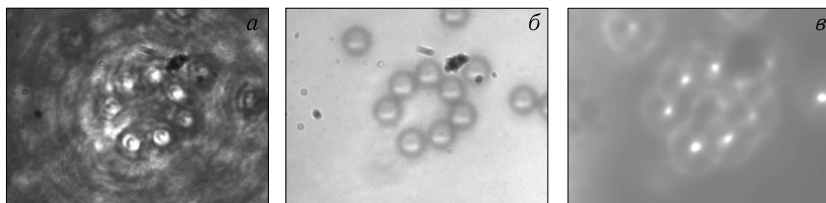


Рис. 5.62. Экспериментальное изображение с хорошо видимым ПБ 5-го порядка (а), изображение с почти убраным пучком и хорошо видимыми микрообъектами (б), изображение с корреляционными пиками на месте расположения микрообъектов

линейная скорость каждого микрообъекта в отдельности $\langle v_i \rangle$ по формуле

$$\langle v_i \rangle = \frac{1}{t} \int_0^t |\mathbf{v}_i(t)| dt, \quad (5.83)$$

где t — время наблюдения, $\mathbf{v}_i(t)$ — скорость движения микрообъекта в зависимости от времени. Затем определялась средняя скорость V по ансамблю микрообъектов:

$$V = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle v_i \rangle. \quad (5.84)$$

Для формирования пучка Бесселя пятого порядка использовался ДООЭ [69], фаза которого представлена на рис. 5.30, *a*, а функция пропускания задается формулой (5.69). Для формирования пучка Бесселя десятого порядка использовался бинарный спиральный аксикон, фаза которого представлена на рис. 5.40, а функция пропускания имеет вид [85]

$$E_2(r, \varphi) = \text{sgn}\{\exp(in\varphi + iar + iyr \cos \varphi)\}, \quad (5.85)$$

где y — несущая пространственная частота, a — параметр аксикона, $n = 10$ — порядок спирального аксикона.

Определяющим фактором для скорости движения микрообъектов является наличие сил сухого и вязкого трения. Но если величину силы вязкого трения довольно просто определить и оно зависит только от свойств жидкости (а они одинаковы по всему объему кюветы) и формы микрообъекта, то сила сухого трения может очень сильно меняться в зависимости от местоположения микрообъекта. Для минимизации влияния силы сухого трения о дно кюветы ПБ позиционировались в одно и то же место с погрешностью не более 2 мкм, поэтому характер трения одно кюветы не должен меняться при смене пучков. Сила вязкого трения пропорциональна скорости движения микрообъекта, следовательно, по скорости движения микрообъекта можно судить о величине силы действия на нее светового пучка. Перед каждым натурным экспериментом, проводился вычислительный эксперимент (с использованием разработанного метода), который позволял оценить скорость движения микрообъектов в конкретном световом пучке при заданных параметрах. Так для бесселева пучка пятого порядка было проведено моделирование для фокусирующего микрообъектива $16\times$ и мощности пучка 230 мВт (на выходе из лазера). Была получена средняя скорость движения 8 мкм/с для шариков диаметром 5 мкм,

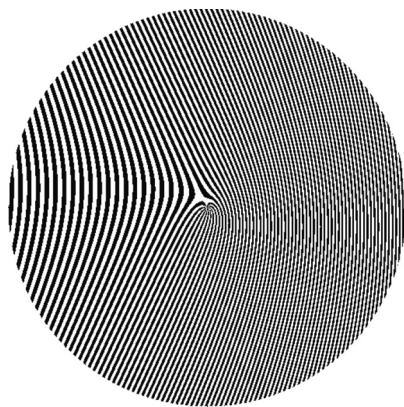


Рис. 5.63. Фаза бинарного аксикона для формирования пучка Бесселя десятого порядка

что дало основание полагать успешность натурального эксперимента при тех же параметрах.

Первоначально в схему был установлен ДОЭ, фаза которого представлена на рис. 5.30, *а*. Он сформировал бесселев пучок пятого порядка, в самое яркое кольцо которого было захвачено в итоге 7 микрошаров. Различные стадии движения этих микрошаров через интервал в семь секунд в ПБ пятого порядка представлены на рис. 5.64. Диаметр яркого кольца ПБ составил около 18 мкм.

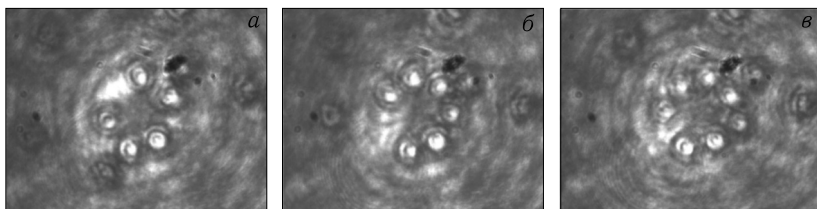


Рис. 5.64. Различные стадии движения полистироловых шариков в светлом кольце пучка Бесселя, сформированном ДОЭ (спиральным аксиконом 5-го порядка)

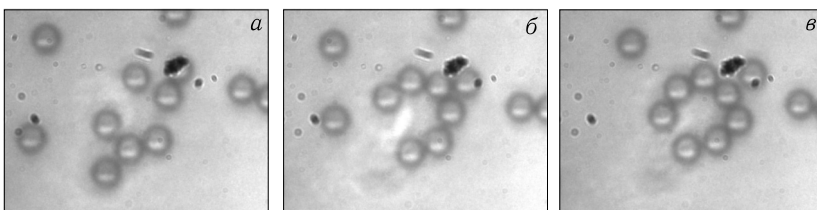


Рис. 5.65. Различные стадии движения микрошаров в светлом кольце, сформированном спиральным аксиконом 5-го порядка, после обработки с целью определения средней скорости

На рисунке 5.65 представлены обработанные картинки, на которых хорошо видны именно микрообъекты, и почти полностью «убран» пучок.

В данном эксперименте для определения средней скорости было использовано семь микрообъектов за время наблюдения 29 с. Всего было обработано 116 изображений с последовательными стадиями движения. Средняя скорость составила $1,3 \pm 0,1$ мкм/с.

Для сравнения был проведен аналогичный эксперимент с бесселевым пучком 10-го порядка. Различные стадии движения микрообъектов через интервал в одну секунду в бесселевом пучке десятого порядка представлены на рис. 5.66.

В этом эксперименте для определения средней скорости было использовано девять микрочастиц за время наблюдения 22 с. Всего было обработано 88 изображений с последовательными стадиями движения. Средняя скорость составила $2,9 \pm 0,3$ мкм/с. При этом надо учитывать, что использование бинарного аксикона (рис. 5.63, *а*) вдвое уменьшает энергию пучка, так как энергия делится между двумя (плюс и минус первыми) порядками. В таблице 5.4 представлены для сравнения параметры обоих экспериментов.

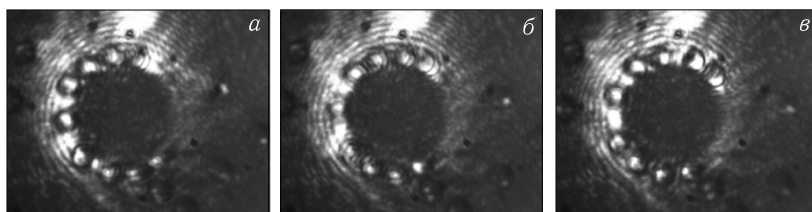


Рис. 5.66. Различные стадии движения микрообъектов в светлом кольце, сформированном бинарным аксиконом 10-го порядка (рис. 3.8, в)

Таблица 5.4. Сравнительные параметры экспериментов

Пучок	Мощность пучка в рабочей плоскости, мВт (с учетом потерь)	Средняя интенсивность на самом ярком кольце, Вт/м ²	Диаметр самого яркого кольца, мкм	Средняя скорость движения микрообъектов в мкм/с	Средняя скорость движения микрообъектов без учета остановившихся, мкм/с
Бесселев пучок 5-го порядка	230	$27 \cdot 10^7$	18	$1,3 \pm 0,1$	$3,4 \pm 0,4$
Бесселев пучок 10-го порядка	100	$8 \cdot 10^7$	37	$2,9 \pm 0,3$	$3,1 \pm 0,4$

Как видно из табл. 5.4, при использовании бесселева пучка 10-го порядка скорость движения микрообъектов возрастает более чем в два раза, при вдвое меньшей энергии пучка. Если считать что сила вязкого трения пропорционально скорости микрообъектов, то при одинаковой энергии пучков сила направленная вдоль кольца в бесселевом пучке 10-го порядка будет превосходить ту же силу для бесселева пучка 5-го порядка в четыре раза. Следует заметить, что при этом сложно учесть силу трения микрообъектов о дно кюветы, которая возрастает с увеличением мощности пучка (из-за давления света в результате френелевского отражения от микрообъектов). В частности из-за этой силы в обоих экспериментах отмечалась в ряде стадий движения полная остановка некоторых микрообъектов (на короткое время). Чтобы минимизировать влияние силы трения в тех же самых экспериментах средняя скорость измерялась в два этапа. На первом этапе вычислялась общая средняя скорость по формулам (5.83), (5.84), на втором этапе определялись микрообъекты и промежутки времени, в течении которых они имели текущую скорость меньше половины средней определенной на первом этапе. Затем вновь определялась средняя скорость по формулам (5.83), (5.84), но без учета указанных выше микрообъектов. Полученная средняя скорость указана в крайнем правом столбце табл. 5.4.

Во всем сказанном выше, как правило, основное внимание уделялось именно формированию оптического вихря безотносительно эффективности этого пучка в задачах вращения. В то же время, очевидно, что если рассматривать именно задачу эффективной передачи момента вращения микромеха-

ническим системам, то необходимо исследовать, как с изменением номера порядка оптического вихря будет изменяться доля энергии, переданная от светового пучка к микрообъекту. На качественном уровне определено, что при увеличении номера порядка оптического вихря скорость движения микрообъектов увеличивается [86, 87]. Но количественная оценка этой зависимости не была проведена. Для выполнения такого исследования дополнительно был проведен эксперимент по вращению полистироловых микрошариков в световых пучках с угловыми гармониками 30-го и 31-го порядков [88]. Схема экспериментальной установки для оптического вращения представлена на рис. 5.45.

В эксперименте был использован твердотельный лазер с длиной волны 532 нм и мощностью 500 мВт. В целях минимизации потерь мощности при отражениях на преломляющих поверхностях пучок не коллимируется, а нужный размер достигается увеличением расстояния между лазером и первым поворотным зеркалом. В качестве микрообъектов использовались полистироловые микрошарики с диаметром 5 мкм.

Для формирования набора из 4-х оптических вихрей (с номерами порядков -31 , -30 , 30 , 31) использовался ДОЭ, бинарная фаза которого представлена на рис. 5.67, *а* [88, 89]. На рисунке 5.67, *б* представлена центральная часть микрорельефа. На рисунке 5.67, *в* показано распределение интенсивности для ДОЭ в зоне дифракции Фраунгофера.

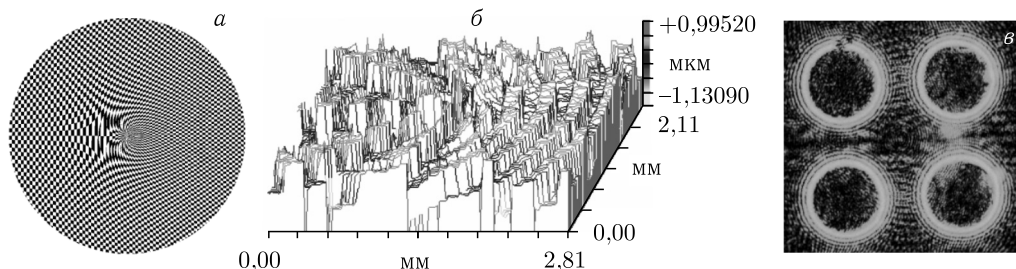


Рис. 5.67. Фаза ДОЭ для формирования оптических вихрей -31 , -30 , 30 , 31 порядков (*а*), фаза ДОЭ для формирования оптических вихрей -7 , -3 , 3 , 7 порядков (*з*), центральная часть микрорельефа ДОЭ (*б*), распределение интенсивности в картине дифракции (*в*)

В схему был установлен элемент, фаза которого представлена на рис. 5.67, *а*. В оптическом вихре 30-го порядка было захвачено в итоге 14 микрообъектов. Различные стадии движения этих микрообъектов через интервал в семь секунд представлены на рис. 5.68 (*а–з*). Точно такой же эксперимент был проведен для оптического вихря 31-го порядка, стадии движения представлены на рис. 5.68 (*д–и*).

Для сравнения движения микрообъектов в различных световых пучках наиболее удобно использовать среднюю скорость движения. Для определения средней скорости по методике, описанной в предыдущем разделе, были обработаны экспериментальные изображения. На рисунке 5.69 представлены обработанные изображения, на которых хорошо видны именно микрообъекты,

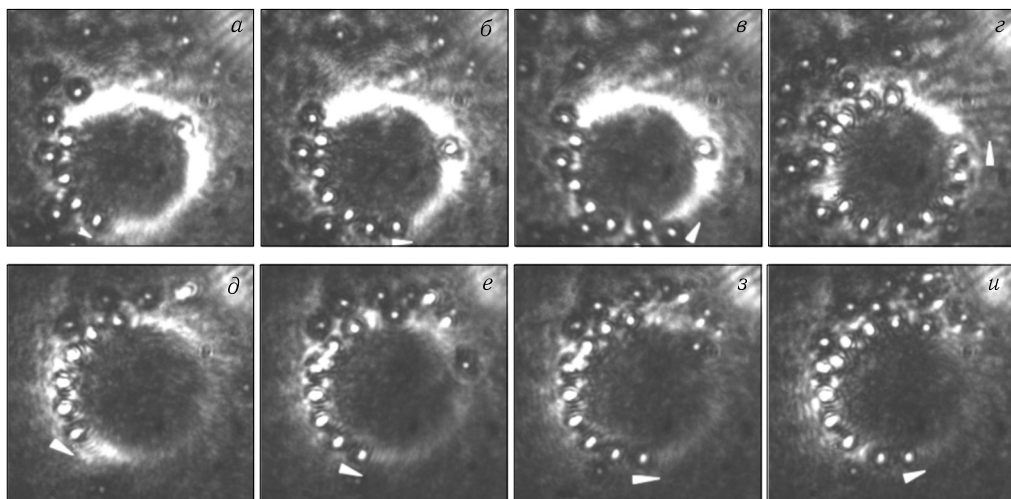


Рис. 5.68. Различные стадии движения микрообъектов в вихревых пучках, сформированных ДОЭ: (а–г) оптический вихрь 30-го порядка, (д–и) оптический вихрь 31-го порядка

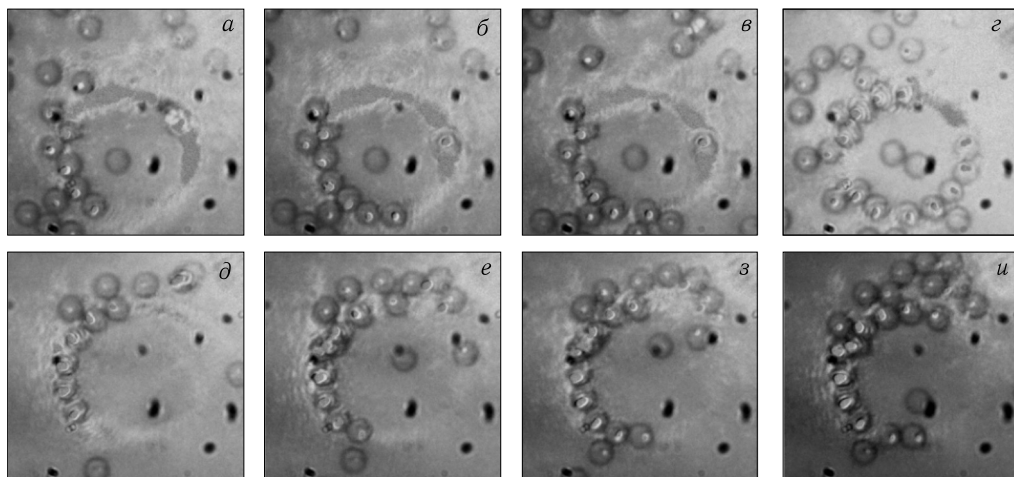


Рис. 5.69. Различные стадии движения микрообъектов в вихревых пучках, сформированных ДОЭ: (рис. 4.22, а), (а–г) оптический вихрь 30-го порядка, (д–и) оптический вихрь 31-го порядка, после компьютерной обработки изображений

и почти не видно пучка. Различная яркость изображений связана с изменением фоновой подсветки, почти незаметным на исходных изображениях.

В данном эксперименте для определения средней скорости было использовано четырнадцать и одиннадцать микрошаров (для 30-го и 31-го порядков соответственно) за время 19 с. Было обработано 76 изображений с последовательными стадиями движения для оптического вихря 30-го порядка. При этом в определении средней скорости не учитывались моменты времени, в течение

которых микрошары останавливались под воздействием силы трения. Средняя скорость составила 14 ± 3 мкм/с.

Для оптического вихря 31-го порядка было обработано 175 изображений, т.е. общее время эксперимента составило 44 с. Средняя скорость составила 11 ± 3 мкм/с.

На рисунке 5.70 представлены обработанные для определения средней скорости изображения различных стадий движения микрообъектов в оптических вихрях 3-го и 7-го порядков.

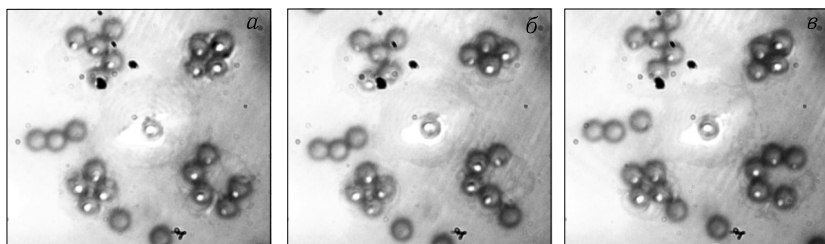


Рис. 5.70. Различные стадии движения микрообъектов в вихревых пучках, сформированных бинарным ДОЭ, фаза которого представлена на рис. 5.37, а

В этом эксперименте для определения средней скорости было использовано восемь микрошаров (для оптического вихря 3-го порядка) в течении 12 с, всего было обработано 48 изображений с последовательными стадиями движения. Средняя скорость составила 4 ± 2 мкм/с. Для определения средней скорости микрообъектов в оптическом вихре 7-го порядка были использованы результаты нескольких экспериментов (не только с рис. 5.70). В совокупности было использовано 16 микрошаров и обработано 203 изображения (общее время четырех экспериментов 51 с). Средняя скорость составила 6 ± 2 мкм/с. На основании этих данных была составлена табл. 5.5.

Таблица 5.5. Сравнительные параметры экспериментов

Порядок оптического вихря	Мощность пучка в рабочей плоскости, мВт (с учетом потерь)	Средняя интенсивность на самом ярком кольце, (Вт/м ²) · 10 ⁸	Диаметр кольца, мкм	Средняя скорость движения микрообъектов, мкм/с
3	50	3,2	9	4 ± 2
7	50	2,1	13	6 ± 2
30	40	0,9	27	14 ± 3
31	40	0,9	28	11 ± 3

Как видно из табл. 5.5 при увеличении номера порядка скорость движения микрообъектов в начале возрастает почти в два раза при дальнейшем росте номера порядка изменяется не столь сильно (правда при этом уменьшается интенсивность). Если считать, что сила вязкого трения пропорциональна скорости микрообъектов, то при одинаковой энергии пучков сила направленная вдоль кольца в оптическом вихре должна возрастать с номером порядка. Надо заметить, что при этом сложно учесть силу трения микрообъектов о дно

кюветы, которая возрастает с увеличением мощности пучка (из-за давления света в результате френелевского отражения от микрообъектов). Кроме того, как видно из рис. 5.69 и рис. 5.70, движение микрообъектов весьма неравномерно (есть кратковременные остановки), что указывает на неоднородности на дне кюветы. Также чрезвычайно тяжело точно определить мощность конкретного пучка, так как имеющиеся приборы позволяют определять интегральную мощность пучка (т.е. все четыре кольца одновременно вместе с нулевым порядком). Эту мощность затем приходится делить пропорционально яркости каждого изображения.

Согласно работе [90], передаваемый микрообъекту орбитальный угловой момент светового поля может быть выражен формулой

$$M = \frac{\lambda n P}{2\pi c} \eta_{\text{abs}}, \quad (5.86)$$

где M — передаваемый момент, λ — длина волны, n — порядок (номер) сингулярности, P — мощность пучка, η_{abs} — коэффициент поглощения микрообъектов. Используя эту формулу и считая, что для одной из экспериментально полученных точек наблюдается полное совпадение, строится теоретическая кривая зависимости скорости движения микрообъектов от номера сингулярности. На рисунке 5.71 представлена эта кривая с наложенными на нее экспериментальными точками.

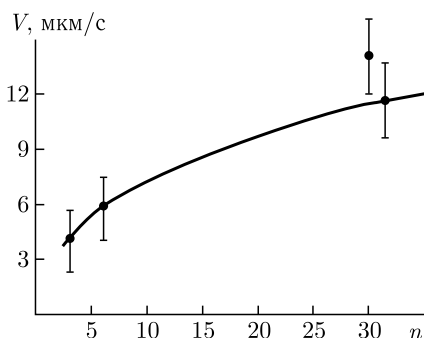


Рис. 5.71. Теоретическая зависимость скорости движения полистироловых шариков диаметром 5 мкм от номера сингулярности светового поля (кривая); экспериментальные данные по зависимости скорости движения полистироловых шариков диаметром 5 мкм от номера сингулярности светового поля (точки)

Несмотря на некоторую субъективность данных по средней скорости в табл. 5.5, как видно на рис. 5.71, экспериментальные данные достаточно хорошо согласуются с теоретическими в пределах погрешности эксперимента.

5.3. Вращение микрочастиц в световых пучках, рассчитанных и сформированных для получения максимального вращающего момента

5.3.1. Формирование световых пучков, состоящих из нескольких светлых колец. Для увеличения эффективности передачи вращательного момента от вихревого пучка к некоторому микрообъекту, например микротурбине необходимо, чтобы выполнялось несколько условий:

1. Равномерное распределение света по поверхности вращаемого микрообъекта.
2. Падение света под неким оптимальным углом в каждой точке микрообъекта.

К сожалению, с увеличением порядка вихревого пучка ширина светлого кольца в распределении интенсивности этого пучка относительно диаметра пучка уменьшается, что ведет к увеличению интенсивности света на малой части поверхности микрообъекта, что может привести к разрушению микрообъекта, если необходимо вращать его с высокой скоростью. Самый простой способ избежать этого — использовать вихревой пучок с распределением интенсивности в виде нескольких светлых колец.

Для получения вихревых пучков с распределением интенсивности в виде нескольких колец рассмотрим ДОЭ подобные тем, которые представлены на рис. 5.72. Фазовая функция такого ДОЭ представляет собой набор колец; в каждом кольце винтовая фаза повернута по отношению к предыдущему на 180° (добавка к фазовой функции $\pi/2$). При дифракции на таком ДОЭ формируется световой пучок, состоящий из нескольких колец.

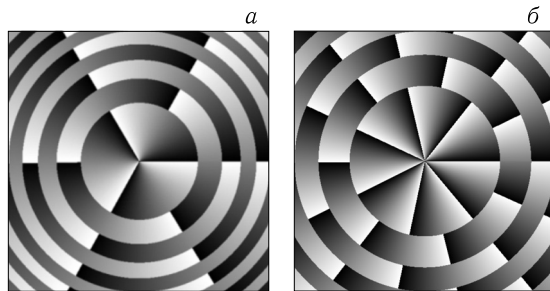


Рис. 5.72. ДОЭ для формирования вихревого пучка из нескольких светлых колец: (а) — 3-го порядка, (б) — 7-го порядка

Ширина колец в ДОЭ на рис. 5.72 разная это связано с тем, что при одинаковой ширине колец в ДОЭ, формируемый пучок имеет кольца разной интенсивности, что нежелательно (рис. 5.73, б).

К сожалению, во всех кольцах этого пучка одинаковый порядок винтовой фазы, это означает, что наклон волнового фронта в кольцах разный из-за разного диаметра колец (рис. 5.74).

При создании микротурбины с прямыми лопастями (то, что позволяет технология) эффективность передачи момента вращения от разных колец будет разная. Для увеличения этой эффективности необходимо, чтобы наклон волнового фронта для разных светлых колец был одинаковым (второе условие). К сожалению, создать элемент, который бы позволял формировать вихревые пучки кольцеобразной формы с разным номером сингулярности для каждого кольца невозможно из-за интерференционных эффектов. Но для задачи вращения микротурбины кольцевая форма вихревого пучка не обязательна. Для того чтобы вращающий момент от вихревого пучка эффективно передавался микротурбине должно выполняться условие равенства силы, действующей

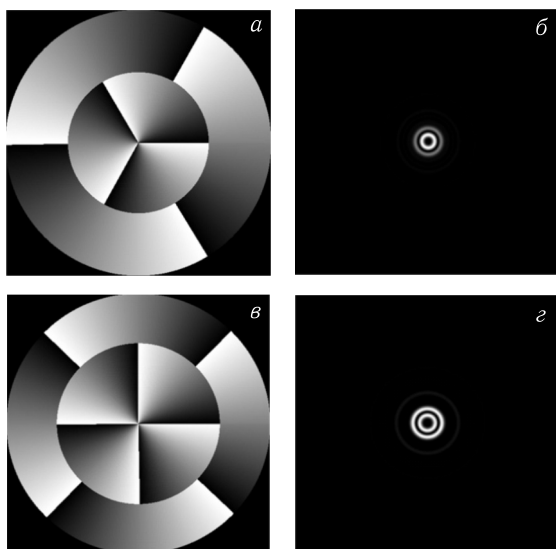


Рис. 5.73. ДОЭ и соответствующие им светлые кольца с равными энергиями (а, б) и равными яркостями (в, г)

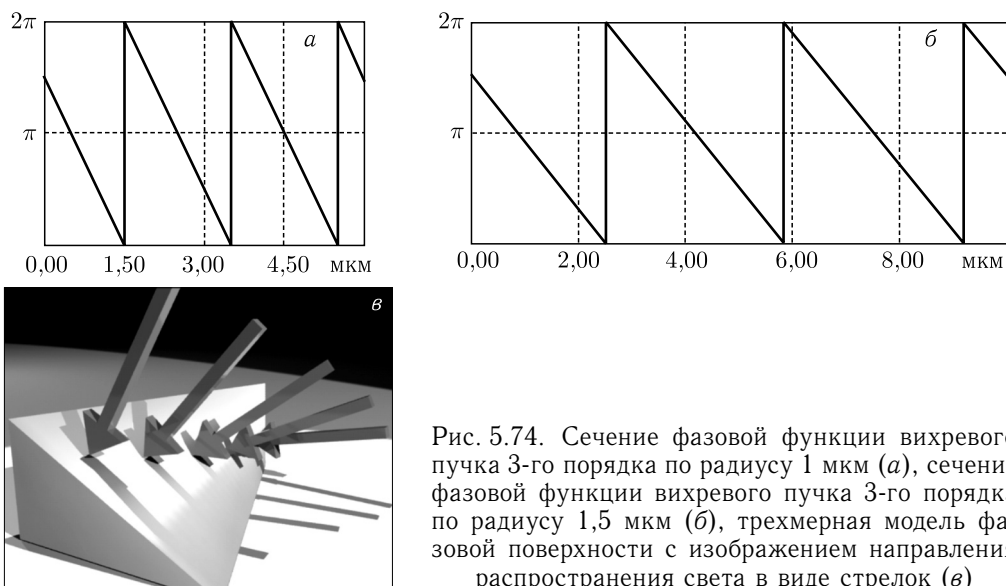


Рис. 5.74. Сечение фазовой функции вихревого пучка 3-го порядка по радиусу 1 мкм (а), сечение фазовой функции вихревого пучка 3-го порядка по радиусу 1,5 мкм (б), трехмерная модель фазовой поверхности с изображением направления распространения света в виде стрелок (в)

в целом на лопатку микротурбины при любой ее ориентации:

$$I_s(\varphi) = \int_0^R I(r, \varphi) dr = \text{const}, \quad (5.87)$$

где $I(r, \varphi)$ — интенсивность вихревого пучка в полярных координатах с центром на оси пучка, I_s — суммарная интенсивность пучка по выделенному

сектору. По сути это означает, что суммарная интенсивность на линии, проведенной из центра пучка не должна изменяться при любом ее повороте. Рассмотрим можно ли сформировать световые пучки, удовлетворяющие этому условию. Для этого нужно сделать элемент подобный, приведенному на рис. 5.72, но с разными значениями порядков сингулярности для разных колец. Фазовая функция такого элемента определяется формулой

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{cases} \exp(in\varphi), & r < R, \\ \exp(im\varphi), & r \geq R, \end{cases} \quad (5.88)$$

где r, ϕ — полярные координаты, R — граничный радиус, подбираемый эмпирическим путем.

Рассмотрим один из таких дифракционных оптических элементов (рис. 5.75, *а*). Граничная область такого элемента представляет собой фазовый винт 1-го порядка, центральная область — фазовый винт 2-го порядка. На рисунке 5.75, *б* представлено распределение интенсивности в формируемом таким элементом пучке.

Как видно из рис. 5.75, *в*, получившийся пучок удовлетворяет условию (5.87) (значение I_s почти не меняется), однако пучок несимметричен, что приведет к проблемам при центровке микротурбины. Для устранения несимметричности попробуем увеличить порядки сингулярности оптических вихрей в суперпозиции, сохранив при этом различие номеров порядков. На рисун-

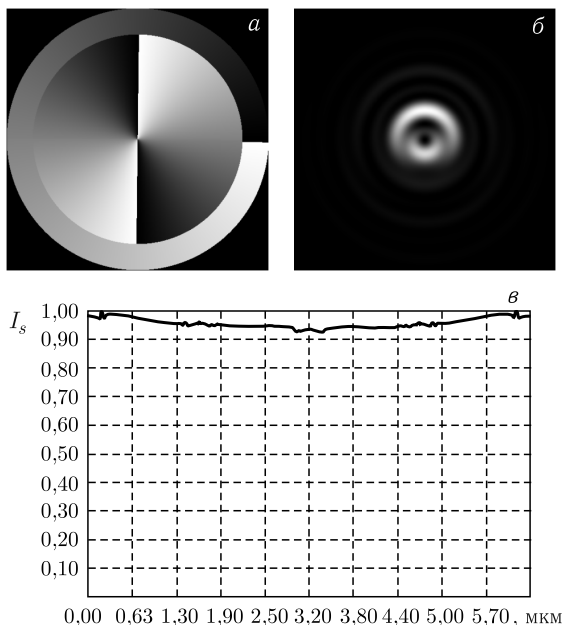


Рис. 5.75. Фазовая функция ДОО для формирования суперпозиции оптических вихрей 1-го и 2-го порядков (*а*), распределение интенсивности в суперпозиции оптических вихрей 1-го и 2-го порядков (*б*), график величины I_s в суперпозиции оптических вихрей 1-го и 2-го порядков (*в*)

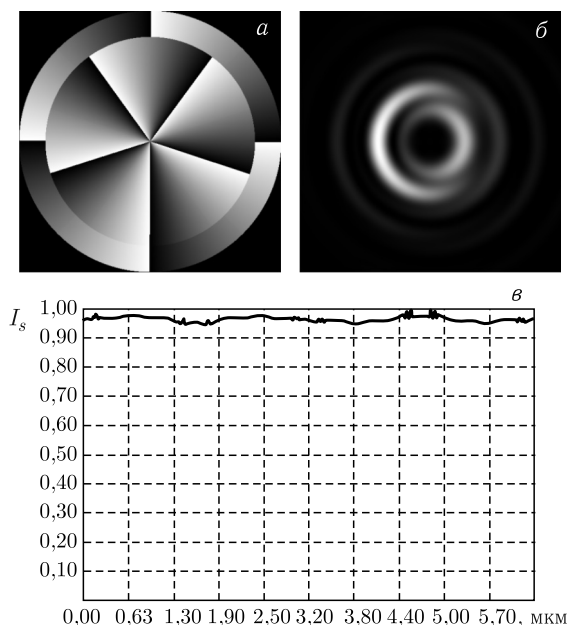


Рис. 5.76. Фазовая функция ДОЭ для формирования суперпозиции оптических вихрей 4-го и 5-го порядков (а), распределение интенсивности в суперпозиции оптических вихрей 4-го и 5-го порядков (б), график величины I_s в суперпозиции оптических вихрей 4-го и 5-го порядков (в)

ке 5.76, а приведена фазовая функция дифракционного оптического элемента формирующего суперпозицию оптических вихрей 4-го и 5-го порядков.

Как видно из рис. 5.76 простое увеличение порядка входящих в суперпозицию оптических вихрей не приводит к существенному улучшению. Еще один путь — увеличить разницу номеров порядков в суперпозиции. На рисунке 5.77, а, в, д приведены фазовые функции дифракционных оптических элементов, формирующего суперпозиции с разницей номеров в 2, 3, 4 соответственно.

Как видно из рис. 5.77 начиная с разницы номеров 2, наблюдаются вполне приемлемые распределения интенсивности по критерию симметрии. Также из рис. 5.77 следует вывод, что увеличение разницы номеров порядков ведет к уширению вихревой кривой вокруг внутреннего кольца. Существенное расширение этой кривой нежелательно так как в этом случае волновой фронт в крайних областях этой кривой будет иметь неоптимальный угол наклона, что приведет к потере эффективности при передаче вращающего момента. На рисунке 5.78 распределения интенсивности в пучке нанесены окружности по радиусу максимальной эффективности передачи момента вращения.

Как видно из рис. 5.78 окружность максимальной эффективности передачи момента вращения для суперпозиции вихревых пучков 1-го и 4-го порядков проходит почти по внутренней границе вихревой кривой. Для суперпозиции вихревых пучков 1-го и 5-го порядков — примерно по центру, а для суперпозиции вихревых пучков 1-го и 6-го — по внешней границе. На основании

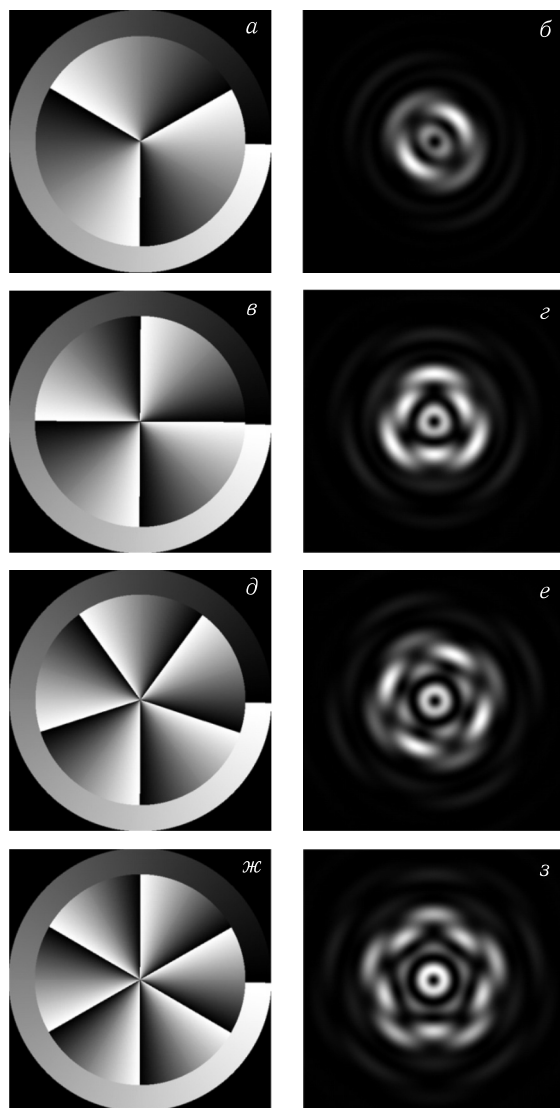


Рис. 5.77. Фазовые функции ДОЭ для формирования суперпозиций оптических вихрей с разницей номеров порядков 2, 3, 4, 5 соответственно (а, в, д, ж), распределение интенсивности в сформированных ими пучках (б, г, е, з)

этого можно предположить, что вращающий момент наиболее эффективно будет передаваться в суперпозиции вихревых пучков 1-го и 5-го порядков. Для проверки этого предположения была построена математическая модель, способная оценивать величину переданного момента вращения от светового пучка к микротурбине заданной формы. На рисунке 5.79 представлены разные сечения лопасти турбины.

Так в случае на рис. 5.79, а форма лопасти такова, что вихревой пучок, рассчитанный для нее, не оказывает давления в вертикальном направлении,

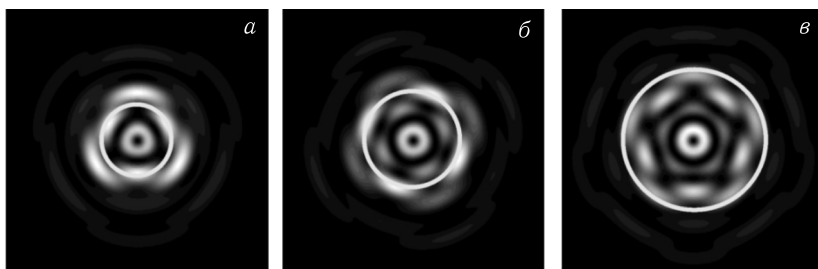


Рис. 5.78. Распределения интенсивности в суперпозиции вихрей 1-го и 4-го порядков (а), 1-го и 5-го порядков (б), 1-го и 6-го порядков (в) с наложенными окружностями оптимального радиуса

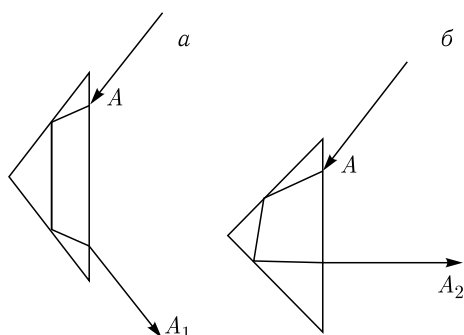


Рис. 5.79. A — падающий луч; A_1 — луч вышедший из лопатки с меньшим углом при основании; A_2 — луч вышедший из лопатки с большим углом при основании

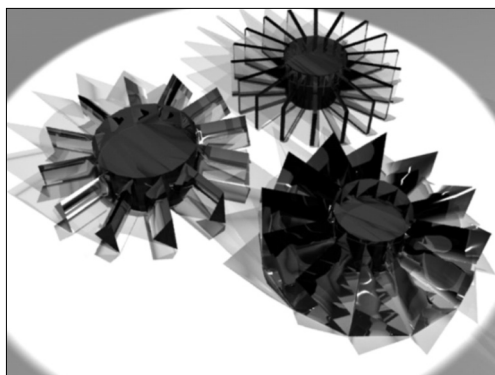


Рис. 5.80. Трехмерные модели микротурбин для приема вращательного момента от вихревых световых пучков

т. е. отсутствует z -составляющая силы, так как вертикальный импульс пучка не меняется. Но при этом проекция силы на ось y не является максимально возможной, этот максимум достигается в случае формы лопатки, представленном на рис. 5.79, б, но при этом появляется ненулевая компонента силы по оси z , что приводит к появлению силы трения в микромеханической системе. Для этой формы лопатки лучше использовать систему фокусировки пучка снизу, когда сила давления света компенсирует силу тяжести. На основании приведенных сечений были построены трехмерные модели микротурбин (рис. 5.80).

На рисунке 5.80 представлены трехмерные модели микротурбин как для случая отсутствующей z -компоненты силы, так и для максимальной силы по координате y .

Расчет сил, действующих на микротурбины, был проведен по методу, описанному в работе [52]. Для расчета сил и момента вращения на основании этого метода была разработана специальная моделирующая программа. Окно работы этой программы представлено на рис. 5.81.

- 1) сформировать суперпозицию двух оптических вихрей более высокого порядка;
- 2) сформировать пучок из суперпозиции трех и более оптических вихрей.

При формировании суперпозиции из двух вихревых пучков структура дифракционного оптического элемента остается прежней: граничная область отвечает за формирование внутреннего кольца, а внутренняя область отвечает за формирование внешней кривой. Для выбора пучка нужно определиться с геометрическими параметрами микротурбины. Исходя из возможности технологии изготовления и прочностных свойств материалов, диаметр микротурбины должен быть не менее 20 мкм, но не более 30 мкм (для большего диаметра турбины потребуется слишком большая интенсивность пучка). Под эти размеры были рассчитаны дифракционные оптические элементы, представленные на рис. 5.82.

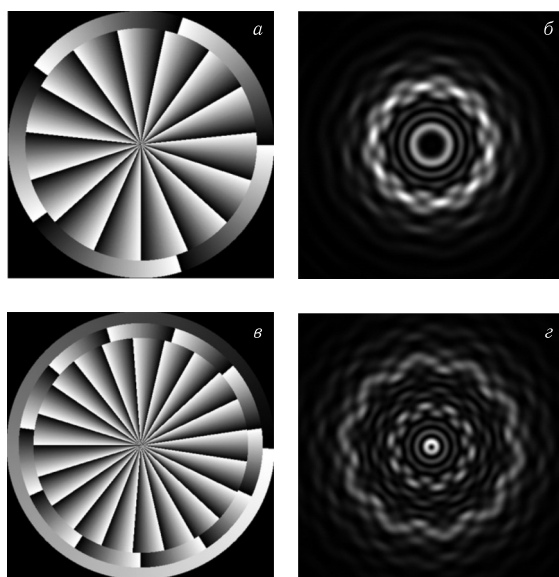


Рис. 5.82. Фазовые функции ДОО для формирования суперпозиций оптических вихрей 5-го и 15-го, соответственно (а), суперпозиции 1-го, 11-го и 21-го порядков (в), распределение интенсивности в сформированных ими пучках (б, г)

На рисунке 5.82,б пучок — суперпозиция оптических вихрей 5-го и 15-го порядков. Диаметр пучка по внешней границе вихревой кривой 22 мкм, диаметр внутреннего кольца 8 мкм. На рисунке 5.82,г пучок из суперпозиции вихревых пучков 1-го, 11-го и 21-го порядков. Диаметр этого пучка по внешней границе вихревой кривой 29 мкм, по внутреннему кольцу 1,5 мкм. К сожалению, такая конфигурация неудобна с точки зрения изготовления микротурбины. Воспользоваться центральным кольцом в этом случае не представляется возможным, так как для этого придется до предела утончить крепление лопаток к центральной оси (до 0,5 мкм), что недопустимо из соображений прочности. Для окончательного решения рассмотрим график зависимости I_s от полярного угла (рис. 5.83).

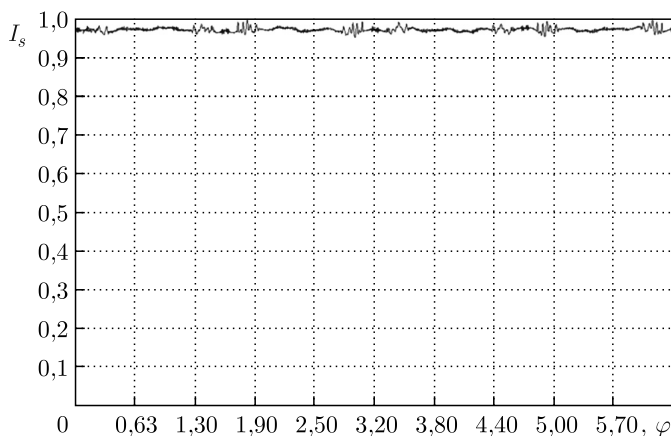


Рис. 5.83. Зависимость I_s от полярного угла для распределения интенсивности на рис. 5.82, б

Как видно из рис. 5.83 величина I_s изменяется не более чем на 4% от максимального значения. При этом изменение носит стохастический характер, т.е. скорее связано с погрешностью дискретизации изображения. Это означает, что градиентные силы не будут тормозить вращение турбины и, следовательно, такой вихревой пучок можно использовать для вращения микротурбин.

5.3.3. Экспериментальное формирование суперпозиций вихревых пучков. Для проведения экспериментов по формированию суперпозиций вихревых пучков было изготовлено несколько ДОЭ. Поскольку технология позволяет изготавливать только бинарные ДОЭ, то для экспериментов были рассчитаны закодированные аналоги полутоновых ДОЭ. Причем были

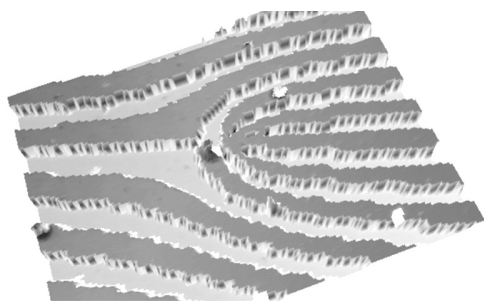


Рис. 5.84. Вид центральной части микрорельефа ДОЭ для формирования пучка, состоящего из оптических вихрей 6-го и 48-го порядков

изготовлены ДОЭ, как для формирования пучков с несколькими кольцами и одинаковым номером сингулярности, так и ДОЭ для формирования суперпозиции вихревых пучков с разными номерами сингулярности ДОЭ. На рисунке 5.84 представлен вид микрорельефа центральной части микрорельефа ДОЭ для формирования пучка состоящего из оптических вихрей 6-го и 48-го порядков.

и расходимостью пучка 1,2 мрад. Две линзы, образующие коллиматор, были использованы для расширения пучка. Апертура обрезала пучок до нужного диаметра. Камера использовалась для съемки формируемых распределений интенсивности на удалении 1000 мм от ДОЭ.

Оптическая схема эксперимента представлена на рис. 5.85. Нами был использован твердотельный лазер с длиной волны излучения 532 нм

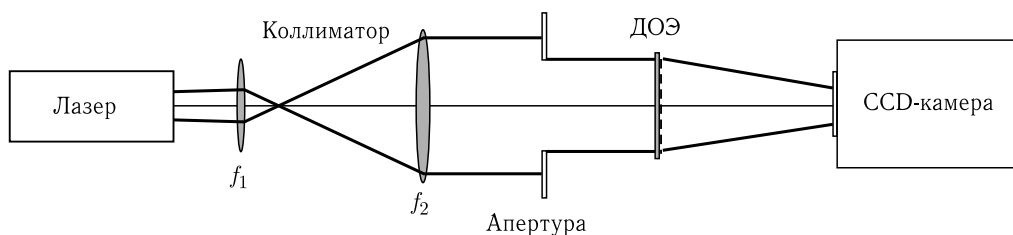


Рис. 5.85. Оптическая схема эксперимента

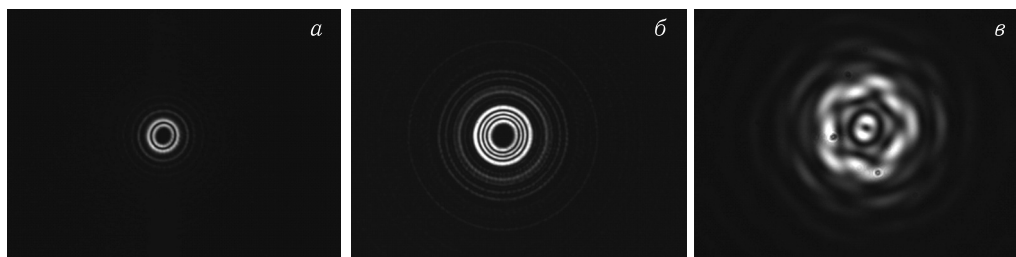


Рис. 5.86. Многокольцевые вихревые пучки (а) два кольца, (б) четыре кольца, суперпозиция вихрей первого и шестого порядков

На рисунке 5.86 представлены вихревые пучки с двумя и четырьмя кольцами, а также пучок суперпозиция вихря первого порядка и вихря шестого порядка.

Как видно из рис. 5.86, наблюдается качественное соответствие формируемых пучков результатам моделирования.

5.4. Световые пучки, специально сформированные для линейного перемещения и позиционирования микрообъектов

Представлены расчеты функций пропускания ДОЭ, формирующих световые ловушки для объектов, показатель преломления которых выше, чем у окружающей среды. Рассчитанные ловушки представляют собой определенное амплитудно-фазовое распределение. При этом распределение интенсивности задает область захвата, а распределение фазы позволяет осуществлять автоматическое перемещение захваченных объектов за счет градиента фазы [52, 93]. Для расчета ДОЭ, формирующих такие сложные распределения световых полей и имеющих фазовую функцию пропускания, используются методы кодирования амплитуды [94, 95, 96, 97].

Рассчитываемые фокусаторы можно разделить на несколько классов в зависимости от задачи, для решения которой они предназначены. Таким образом, будут рассмотрены фокусаторы, формирующие световые ловушки, позволяющие осуществлять точное позиционирование микрообъектов; фокусаторы, формирующие световые поля с заданным направлением градиента фазы для автоматического перемещения захваченных микрообъектов из начального положения в конечное; фокусаторы, формирующие световые поля для проведения сортировки объектов определенного размера из общего потока частиц

в жидкой среде; фокусаторы, формирующие наборы световых ловушек для выполнения фильтрации отдельных объектов из общего потока частиц.

Моделирование полученных элементов будет осуществляться с помощью программного обеспечения, которое для расчета распределений светового поля в плоскости фокусировки использует алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ).

5.4.1. Кодирование амплитуды методом локального фазового скачка.

Методы кодирования амплитуды широко используются, когда необходимо получить фазовую функцию, формирующую произвольное заданное распределение светового поля. Ранее кодирование амплитуды использовалось для расчета фазовых бинарных ДОЭ, формирующих моды Гаусса–Эрмита [96], гипергеометрические моды [98] и лазерные пучки Эйри [99]; пространственных фильтров для селекции мод [96]; пространственных согласованных фильтров [96]; композиционных ДОЭ для формирования нескольких изображений одновременно [97]. Самые распространенные методы, реализующие кодирование амплитуды — это метод локального фазового скачка [96, 98] и метод случайной фазовой маски [94, 95, 97, 100, 101].

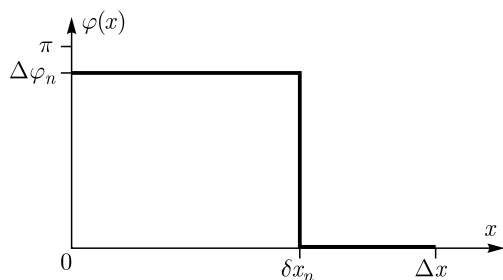


Рис. 5.87. Вид локального скачка фазы при кодировании амплитуды

Суть метода кодирования амплитуды с помощью локального скачка фазы заключается в замене каждого отсчета амплитуды A_n исходного распределения на участок рельефа прозрачного ДОЭ шириной Δx , который имеет ступенчатый скачок фазы $\Delta\phi_n$. Величина Δx является постоянной и определяется конкретными размерами рассчитываемых элементов. Фазовый скачок имеет два свободных параметра (рис. 5.87): ширину фазовой ступеньки δx_n и ее высоту $\Delta\phi_n$.

Для расчетов нами был выбран метод, основанный на вариации ширины фазового скачка. В работе [96] было получено, что с технологической точки зрения для вычисления δx_n выгоднее использовать следующее выражение:

$$\delta x_n = \frac{\Delta x}{2} (1 - A_n), \quad (5.89)$$

из которого следует, что ширина фазовой ступеньки пропорциональна нормированной амплитуде, $0 \leq A_n \leq 1$.

Данный метод позволяет путем изменения уровня амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, варьировать в широких пределах значения эффективности и ошибки формирования — можно добиться высокого качества формирования заданного поля, но пожертвовать эффективностью его формирования, и наоборот. Поэтому подбирая уровень кодирования, можно добиться подходящего соотношения ошибки формирования и эффективности формирования заданного светового поля для каждой конкретной задачи.

Таким образом, расчет фазовой функции ДОЭ будет проходить в несколько шагов: аналитическим путем или с помощью дискретных изображений задается амплитудно-фазовое распределение, которое необходимо сформировать в плоскости фокусировки:

$$A(\xi, \eta) = \sqrt{I_{\text{out}}(\xi, \eta)} \exp(i\Phi_{\text{out}}(\xi, \eta)), \quad (5.90)$$

где $I_{\text{out}}(\xi, \eta)$ — заданное распределение интенсивности, а $\Phi_{\text{out}}(\xi, \eta)$ — заданное распределение фазы в плоскости фокусировки. Для вычисления амплитудно-фазового распределения, формирующего в плоскости фокусировки заданное световое поле $A(\xi, \eta)$ с помощью алгоритма БПФ выполняется интегральное преобразование Фурье:

$$T(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int A(\xi, \eta) \exp\left[\frac{ik}{f}(\xi x + \eta y)\right] d\xi d\eta = \mathfrak{F}^{-1}\{A(\xi, \eta)\}, \quad (5.91)$$

где x, y — декартовы координаты в плоскости элемента, f — фокусное расстояние оптической системы, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Для полученного распределения $T(x, y)$ функции пропускания элемента осуществляется операция кодирования амплитуды методом локального фазового скачка (5.89); осуществляется преобразование обратное (5.91), чтобы наблюдать сформированное амплитудно-фазовое распределение в плоскости фокусировки, $F(\xi, \eta) = \mathfrak{F}\{T(x, y)\}$.

Далее для вычисления эффективности формирования ε и среднеквадратичного отклонения интенсивности (СКО) δ будем пользоваться следующими формулами:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{\xi, \eta \in D} F^2(\xi, \eta)}{\sum_{x, y \in G} I_{\text{in}}(x, y)}, \quad (5.92)$$

$$\delta^2 = \frac{\sum_{\xi, \eta \in D} [F^2(\xi, \eta) - I_{\text{out}}(\xi, \eta)]^2}{\sum_{\xi, \eta \in D} I_{\text{out}}^2(\xi, \eta)}, \quad (5.93)$$

где G — область, определяющая границы ДОЭ, D — область, задающая границы ловушки.

Согласно (5.89) максимальная ширина фазовой ступеньки равна $\Delta x/2$, при этом исходная амплитуда в точке должна быть равна 0. Таким образом, такая ступенька будет отклонять половину падающего на нее света, а половина падающего света будет также направляться в ту же точку, что и в случае отсутствия ступеньки, искажая тем самым формируемую картину светового поля. В ряде случаев, когда в вычисленном согласно (5.91) спектре заметно преобладают низкие частоты, это приводит к тому, что при любом выборе уровня амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, получаются высокие значения ошибки формирования светового распределения. Для решения этой проблемы использовалась операция дополнения нулями распределения $A(\xi, \eta)$, что с физической точки зрения эквивалентно умень-

шению радиуса падающего светового пучка, для того, чтобы он перекрывал только центральные области ДОЭ, вклад которых в формирование светового поля в этом случае максимален.

5.4.2. Модификация метода кодирования амплитуды для расчета световых полей со сложной структурой. Методы кодирования амплитуды дают хорошие результаты, когда формируемые распределения светового поля имеют простую структуру, например, в случае формирования простейших геометрических фигур [96, 102] или одномодовых пучков [96, 98]. При усложнении структуры формируемых полей, например, когда эталонные распределения представляют собой световые решетки или массивы разделенных в плоскости геометрических фигур, происходит возрастание ошибки формирования световых полей и снижение эффективности их формирования. Возрастание ошибки формирования происходит из-за появления значительных перепадов интенсивности между различными участками формируемых изображений, при этом изменение уровня амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, не исправляет полностью этой проблемы. Для решения этой проблемы может быть использован подход, который требует выполнения еще одной итерации кодирования амплитуды, но уже с измененным эталонным распределением светового поля.

Данный подход можно описать следующей последовательностью шагов: согласно (5.90) из заданных распределений интенсивности и фазы формируется выходная комплексная амплитуда $A(\xi, \eta)$; производится кодирование амплитуды, согласно описанной ранее схеме; осуществляется преобразование Фурье, согласно (5.91), и анализируется полученное распределение светового поля $F(\xi, \eta)$. Если полученный результат признается неудовлетворительным (т. е. ошибка формирования выше какого-то приемлемого значения), то производится замена модуля первоначальной комплексной амплитуды $A(\xi, \eta)$, учитывая полученное распределение $F(\xi, \eta)$:

$$|A'(\xi, \eta)| = ||A(\xi, \eta)| + \mu(|A(\xi, \eta)| - |F(\xi, \eta)|)|, \quad (5.94)$$

где $0 \leq \mu \leq 1$; производится операция кодирования амплитуды для вычисленного выходного распределения $A^1(\xi, \eta)$, $A'(\xi, \eta) = |A'(\xi, \eta)| \exp(i\Phi_{\text{out}}(\xi, \eta))$.

В рассмотренных далее примерах использование данного подхода для кодирования амплитуды позволило повысить качество и эффективность формирования заданных световых полей в тех случаях, когда кодирование амплитуды по описанной в п. 5.4.1 схеме не позволяло получить приемлемые результаты.

5.4.3. Фокусаторы для позиционирования микрообъектов. Позиционирование частиц представляет большой интерес для решения задачи сборки микросистем, так как, очевидно, что для этого необходимо расположить составляющие компоненты в точках с заданными координатами. Для решения этой задачи обычно используются световые поля, которые представляют собой набор световых пиков в точках с заданными координатами [23, 24, 27, 103]. В этом случае для захвата определенного микрообъекта необходимо, чтобы в область максимума интенсивности попадала какая-либо часть этого объекта, что требует подвода формируемой ловушки вплотную к нему. Это

заметно усложняет автоматическое позиционирование микрообъектов, и при отсутствии внешнего управления расположением формируемых ловушек заметно уменьшает вероятность их захвата в нужных координатах. Для решения этой проблемы может быть использован фокусатор в световой крест с градиентом фазы вдоль каждой из образующих его лучей. Такая форма формируемой световой ловушки позволяет увеличивать область захвата частиц, движущихся в общем потоке, а за счет наличия градиента фазы будет происходить перемещение захваченной частицы вдоль луча к центру креста. Таким образом, стабильность захвата микрообъекта в центре креста будет достигаться за счет наличия градиента фазы у каждого из образующих лучей.

Эталонное амплитудно-фазовое распределение светового поля для расчета такого фокусатора представлено на рис. 5.88. Видно, что фаза вдоль образующих крест лучей меняется от 0 радиан на краях до 2π в центре креста. Размерность входных изображений составляет 128×128 пикселей.

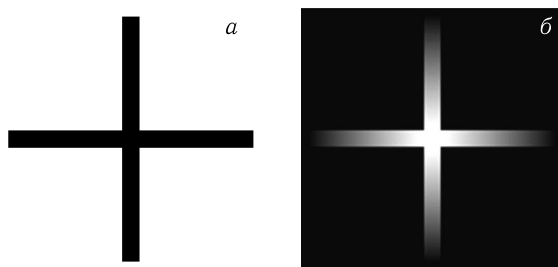


Рис. 5.88. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в крест с градиентом фазы

Параметры операции кодирования следующие: ширина участка ДОО, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 8$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,165$; исходное распределение комплексной амплитуды при расчете дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов.

Расчет производился согласно методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.1. Размерность рассчитанного элемента составила 1024×1024 пикселей. Фазовая функция $\phi(x, y)$ после кодирования амплитуды получается многоуровневой, для формирования ее бинарного вида использовалось кодирование фазы наложением решетки с частотой несущей β :

$$\varphi_b(x, y) = \arg \left[\varphi^*(x, y) \cdot e^{-i\beta x} + \varphi(x, y) \cdot e^{i\beta x} \right]. \quad (5.95)$$

После такого кодирования рассчитанный бинарный элемент будет формировать заданное световое распределение в двух дифракционных порядках $+1$ и -1 . Частота несущей при кодировании равнялась 27000 лин/м. Диаметр ДОО был равен 4 мм.

В результате для ДОО была рассчитана фазовая функция, представленная на рис. 5.89. Фаза за пределами расчетного контура не определена.

Получаемое в плоскости фокусировки распределение светового поля, рассчитанное с помощью алгоритма БПФ, представлено на рис. 5.90. Суммарная

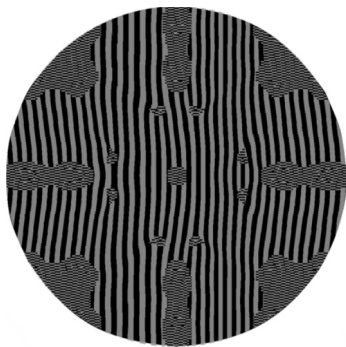
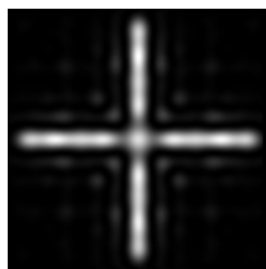


Рис. 5.89. Фазовая функция фокусатора в крест



a

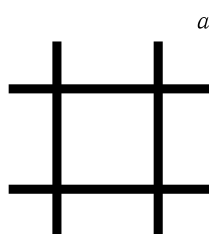


б

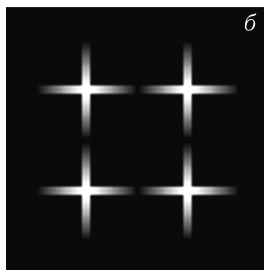
Рис. 5.90. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля: интенсивность (негатив) (*a*) и фаза (*б*)

эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков, вычисленная по формуле (5.93), для данного случая равна 43 %. СКО равно 39 %.

На основе такого элемента был рассчитан ряд световых полей в виде набора таких световых ловушек и световых решеток. Отдельные световые кресты можно формировать в точках, в которых должны захватываться отдельные микрообъекты, тем самым можно производить автоматическое точное позиционирование набора микрообъектов. Примеры эталонных распределений для расчета ряда фокусаторов, формирующих такие наборы световых ловушек, представлены на рис. 5.91–5.93.



a



б

Рис. 5.91. Распределение интенсивности (негатив) (*a*) и фазы (*б*) эталонного изображения для расчета фокусатора в решетку с четырьмя узлами

Параметры кодирования для случая формирования решетки с четырьмя узлами: диаметр ДОО — 4 мм; размерность входных изображений 256×256 пикселей; исходное распределение комплексной амплитуды при расчете дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; ширина участка ДОО, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,1$; частота несущей при кодировании — 27000 лин/м.

Расчет производился, согласно простому кодированию амплитуды, по схеме, описанной в п. 5.4.1. Рассчитанная фазовая функция ДОО, формирующего

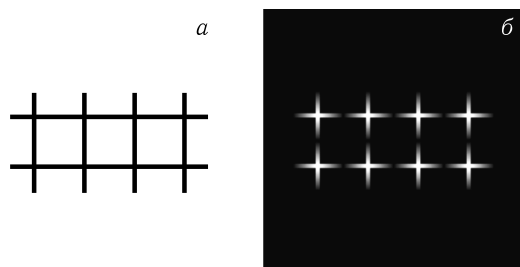


Рис. 5.92. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в решетку с восемью узлами

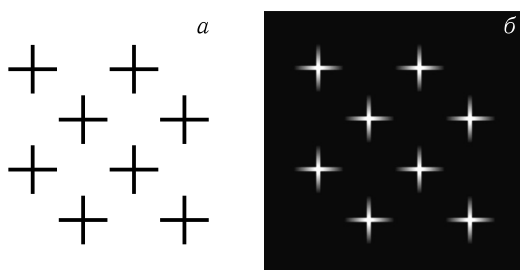


Рис. 5.93. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в набор из восьми крестов

в плоскости фокусировки изображение решетки с четырьмя узлами, представлена на рис. 5.94. Фаза за пределами расчетного контура не определена.

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны показаны на рис. 5.95. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 26 %. СКО равно 40 %.

Параметры кодирования для случая формирования решетки с восемью узлами: диаметр ДОЭ — 4 мм; размерность входных изображений

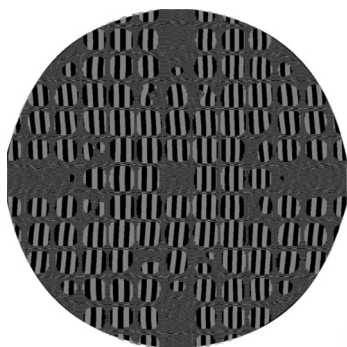


Рис. 5.94. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в решетку с четырьмя узлами

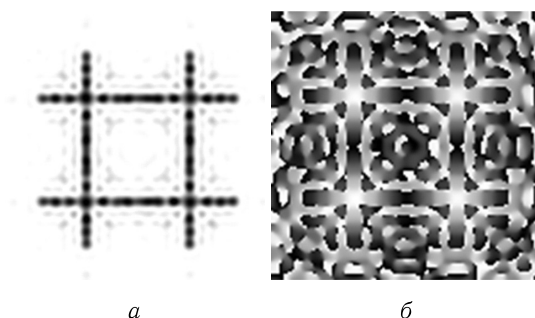


Рис. 5.95. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в решетку с четырьмя узлами

256×256 пикселей; исходное распределение комплексной амплитуды при расчете дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,06$; частота несущей при кодировании — 55000 лин./м.

Расчет производился согласно модифицированному методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.2. Рассчитанная фазовая функция ДОЭ, формирующего в плоскости фокусировки изображение решетки с восемью узлами, представлена на рис. 5.96. Фаза за пределами расчетного контура не определена.

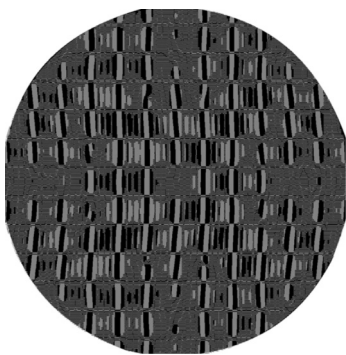


Рис. 5.96. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в решетку с восемью узлами

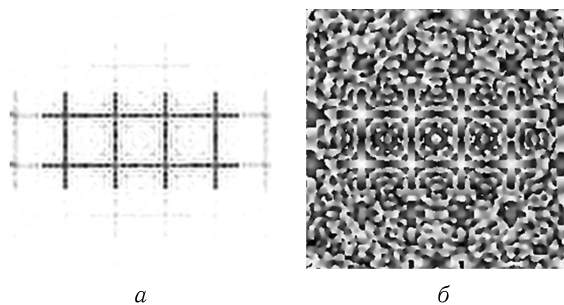


Рис. 5.97. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в решетку с восемью узлами

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны показаны на рис. 5.97. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 18 %. СКО равно 44 %.

Параметры кодирования для случая формирования набора из восьми крестов: диаметр ДОЭ — 4 мм; размерность входных изображений 256×256 пикселей; исходное распределение комплексной амплитуды при расчете дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,06$; частота несущей при кодировании — 55000 лин./м.

Расчет производился согласно модифицированному методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.2. Рассчитанная фазовая функция ДОЭ, формирующего в плоскости фокусировки набор из восьми крестов, представлена на рис. 5.95. Фаза за пределами расчетного контура не определена.

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны показаны на рис. 5.99. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 15 %. СКО равно 38 %.

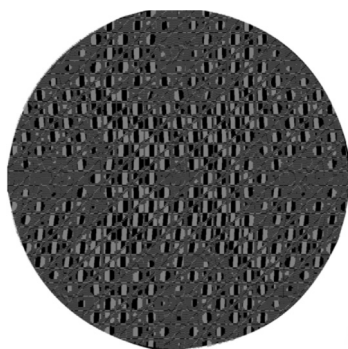
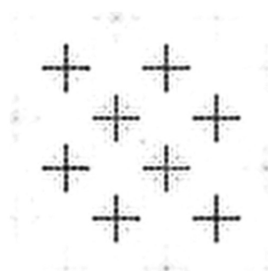
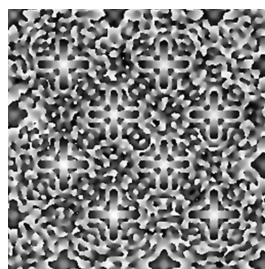


Рис. 5.98. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в решетку с восемью узлами



а



б

Рис. 5.99. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в набор из восьми крестов

Видно, что эффективность формирования таких световых ловушек получается различной и определяется сложностью формируемой структуры.

5.4.4. Фокусаторы для перемещения микрообъектов по заданным траекториям. Перемещение микрообъектов по заданной траектории является одной из самых распространенных задач, возникающих при манипулировании микрообъектами. Как было отмечено в введении, данную операцию можно осуществить двумя способами — либо с помощью модулятора света, на дисплей которого выводится последовательность голограмм, задающих новое положение формируемой ловушки [81, 104, 105], либо с помощью формирования определенных амплитудно-фазовых распределений, когда фазовое распределение задает направление движения захваченного объекта [93, 106]. Методы, основанные на перемещении захваченных микрообъектов за счет использования сформированных амплитудно-фазовых распределений, более выгодны для осуществления автоматического перемещения, так как не требуют участия оператора, который бы производил калибровку системы манипулирования при изменении внешних условий проведения эксперимента. Метод, использующий ПМС, невыгоден с точки зрения эффективности формирования заданного поля и требует высокой точности расположения элементов оптической схемы. В [106] вихревой характер формируемого поля накладывал на формируемое распределение светового поля ограничения. Так, невозможно формировать световые поля без вихревого характера или с произвольным фазовым распределением, т. е., например, нельзя сформировать световое кривую, вдоль которой фаза сначала возрастает, а затем уменьшается. Также нельзя произвольно задавать порядок изменения фазы для одной и той же кривой, что позволило бы изменять скорость движения захваченных частиц без изменения мощности используемого лазера. Кодирование амплитуды позволяет снять эти ограничения и рассчитывать элементы, эффективность которых превышает значения, получаемые с помощью ПМС. Стоит отметить, что все фокусаторы, формирующие заданное амплитудно-фазовое распределение,

могут быть использованы для перемещения микрообъектов по заданным траекториям.

Рассмотрим случаи расчета фокусаторов, формирующих букву «Г», световой треугольник и квадрат с градиентом фазы. На рисунке 5.100 представлено эталонное распределение интенсивности и фазы для случая формирования буквы «Г». Операции кодирования амплитуды и фазы выполнялись со следующими параметрами: размерность входных изображений 256×256 пикселей; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,075$; исходное распределение комплексной амплитуды дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; диаметр ДОЭ 4 мм; частота несущей при кодировании фазы $\beta = 55000$ лин./м.

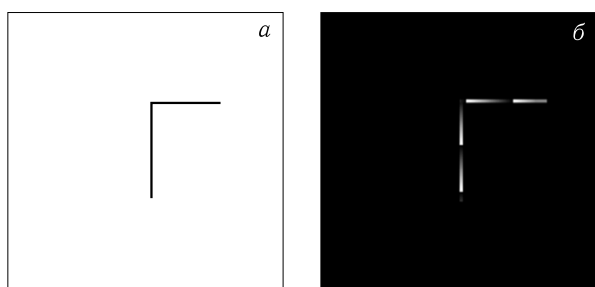


Рис. 5.100. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в букву «Г»

Расчет производился согласно методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.1. В результате для ДОЭ была рассчитана фазовая функция, представленная на рис. 5.101. Фаза за пределами расчетного контура не определена.

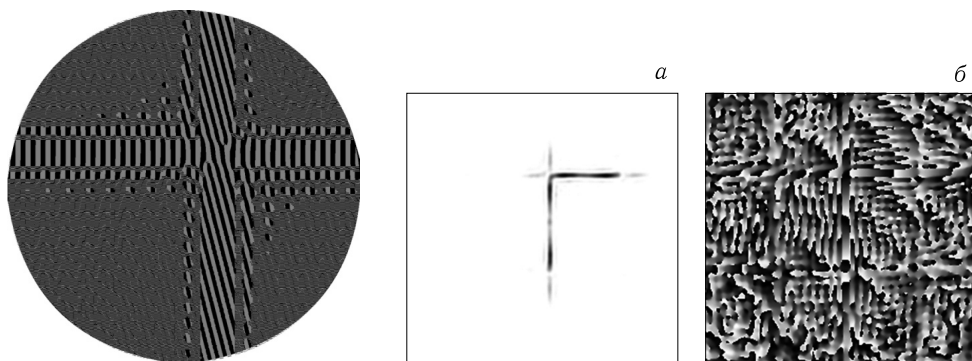


Рис. 5.101. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в букву «Г»

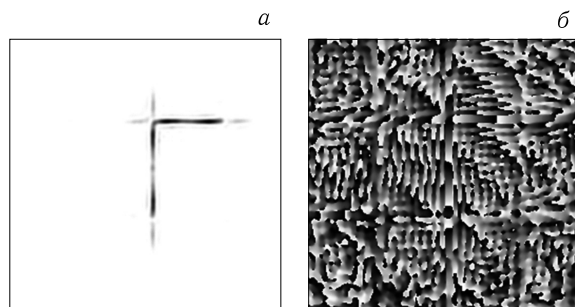


Рис. 5.102. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в букву «Г»

Размерность рассчитанного элемента составила 1024×1024 пикселей. Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны представлены на рис. 5.102. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 13 %. СКО равно 51 %.

Для случая формирования светового распределения в виде контура равноностороннего треугольника эталонное распределение интенсивности и фазы представлено на рис. 5.103.

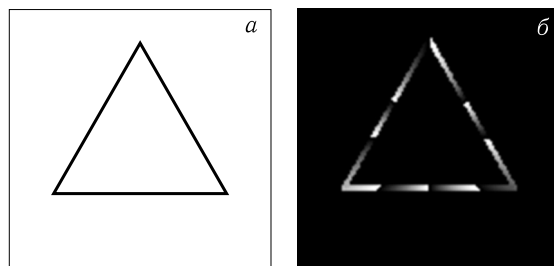


Рис. 5.103. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в равноносторонний треугольник

Операции кодирования амплитуды и фазы выполнялись со следующими параметрами: размерность входных изображений 256×256 пикселей; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,075$; исходное распределение комплексной амплитуды дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; диаметр ДОЭ 4 мм; частота несущей при кодировании фазы $\beta = 55000$ лин./м.

Расчет производился согласно методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.1. В результате для ДОЭ была рассчитана фазовая функция, представленная на рис. 5.104. Фаза за пределами расчетного контура не определена. Размерность рассчитанного элемента составила 1024×1024 пикселей.

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны представлены на рис. 5.105. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 35 %. СКО равно 50 %.

Для случая формирования светового распределения в виде контура квадрата эталонное распределение интенсивности и фазы представлено на рис. 5.106.

Операции кодирования амплитуды и фазы выполнялись со следующими параметрами: размерность входных изображений 256×256 пикселей; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,05$; исходное распределение комплексной амплитуды дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; диаметр ДОЭ 4 мм; частота несущей при кодировании фазы $\beta = 55000$ лин./м. Расчет производился согласно методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.1. В результате для ДОЭ была рассчитана фазовая функция, представленная

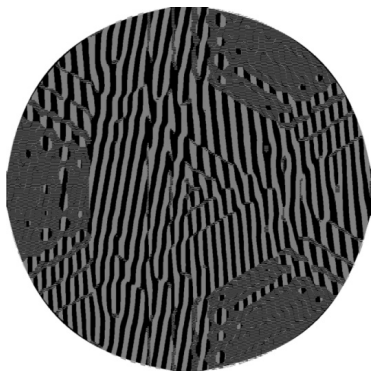


Рис. 5.104. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в контур равностороннего треугольника

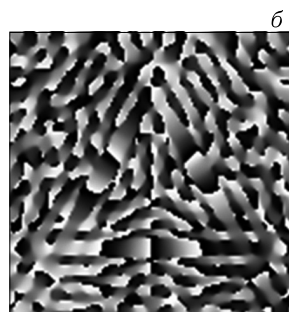
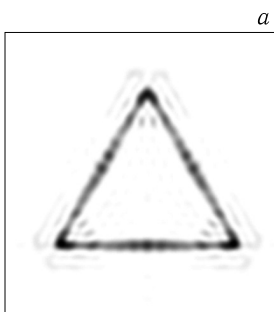


Рис. 5.105. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в контур равностороннего треугольника

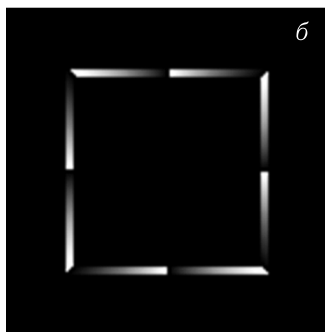
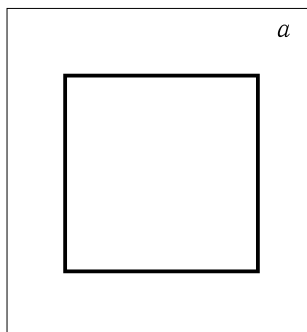


Рис. 5.106. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в контур квадрата

на рис. 5.107. Фаза за пределами расчетного контура не определена. Размерность рассчитанного элемента составила 1024×1024 пикселей.

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны представлены на рис. 5.105. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 34 %. СКО равно 49 %.

5.4.5. Фокусаторы для сортировки и фильтрации микрообъектов.

Задача сортировки микрообъектов возникает, когда необходимо выбрать из общего потока частиц те из них, параметры которых отличаются от параметров остальных частиц. Такими параметрами могут быть: размер исследуемых микрообъектов [103, 107, 108, 109, 110, 111, 112], их цвет [113], показатель преломления [111, 113]. Для осуществления различных типов сортировки применялись различные подходы, такие как использование массивов оптических вихрей с дробными топологическими зарядами [103], использование массивов ловушек [111], использование ловушек в виде светлой линии с несимметричным распределением интенсивности [107], использование за-

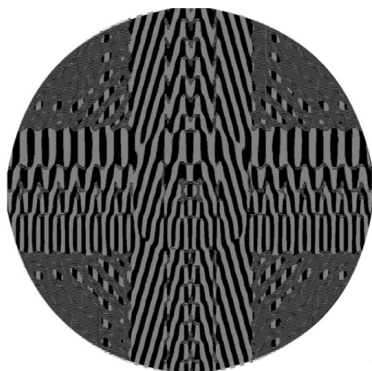


Рис. 5.107. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в контур квадрата

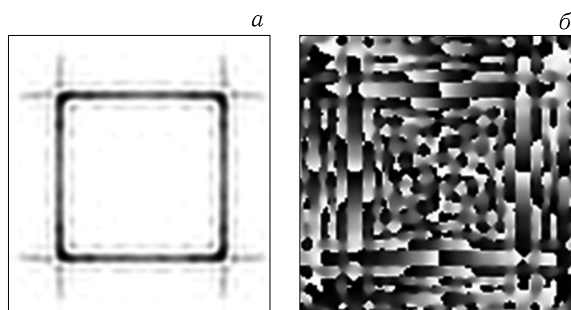


Рис. 5.108. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в контур квадрата

тухающих волн [108] и световых ловушек на чипе (optical traps on a chip), сформированных на основе эффекта Тальбота [109].

Если формировать поперек потока несколько светлых линий с различными параметрами, и каждая из них будет иметь градиент фазы, то можно добиться одновременной сортировки двух и большего числа микрообъектов различного вида из общего потока. Так как сила захвата, действующая на микрообъект, зависит от его размера, то для их сортировки можно формировать несколько светлых линий с отличающимися параметрами, например, интенсивностью или величиной перепада фазы на концах светового отрезка. Кроме того световые поля в виде нескольких светлых линий с одинаковыми параметрами могут быть использованы для повышения эффективности сортировки, когда часть частиц, не отсортированных с помощью одной из световых линий и прошедших дальше, будет отклоняться от общего потока с помощью следующей линии. Кодирование амплитуды позволяет осуществить расчет фазовой функции ДОЭ, который может формировать такой набор светлых линий.

Рассмотрим случай формирования двух светлых линий с различными величинами перепада фазы на концах этих отрезков. Эталонные распределения интенсивности и фазы такого светового поля представлены на рис. 5.109.

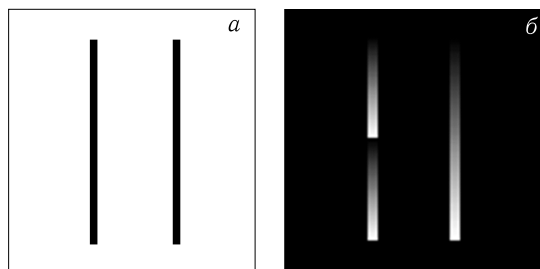


Рис. 5.109. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в две параллельные линии

Операции кодирования амплитуды и фазы выполнялись со следующими параметрами: размерность входных изображений 128×128 пикселей; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 8$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется, $A_{\text{enc}} = 0,2$; исходное распределение комплексной амплитуды дополнялось нулями до размеров 2048×2048 отсчетов; диаметр ДОЭ равен 4 мм; частота несущей при кодировании фазы $\beta = 55000$ лин./м.

Расчет производился согласно методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п.5.4.1. В результате для ДОЭ была рассчитана фазовая функция, представленная на рис.5.110. Фаза за пределами расчетного контура не определена. Размерность рассчитанного элемента составила 1024×1024 пикселей.

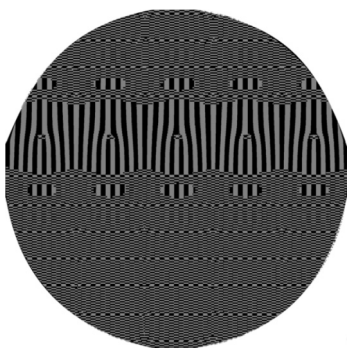


Рис. 5.110. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в две параллельные линии

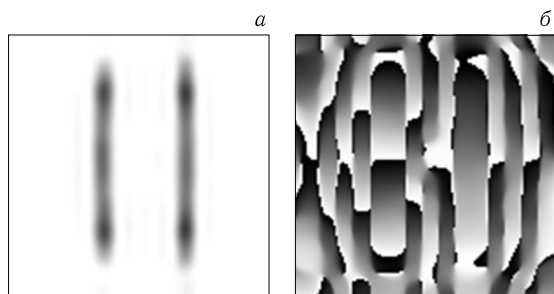


Рис. 5.111. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в две параллельные линии

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны представлены на рис. 5.111. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 14 %. СКО равно 47 %.

В данном случае частоту несущей при кодировании можно подобрать таким образом, что все четыре формируемые светлые линии будут находиться на одинаковом расстоянии между собой (рис. 5.112). То есть в ходе сортировки микрообъектов можно будет использовать сразу все четыре формируемые светлые линии, что должно повысить ее эффективность и скорость. В этом случае эффективность формирования такого светового распределения возрастает в два раза и достигает 28 %.

5.4.6. Фокусаторы для фильтрации отдельных микрообъектов. Задачу фильтрации отдельных микрообъектов [114] также можно отнести к задаче сортировки микрообъектов. Фильтрация подразумевает процесс разделения частиц в потоке, когда часть из них продолжает движение по потоку, а часть задерживается фильтрующей системой. Затем эти отфильтрованные частицы можно изъять из общего потока и манипулировать ими отдельно. Для осуществления фильтрации могут быть использованы описанные ранее

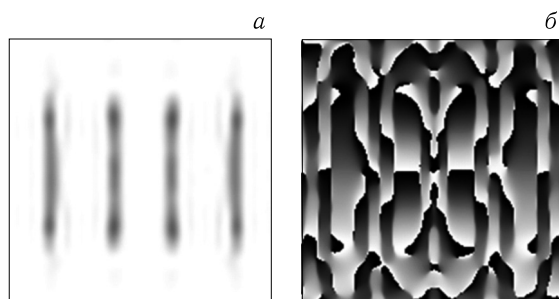


Рис. 5.112. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в четыре параллельные линии

фокусаторы в световой крест с градиентом фазы. Формируя такие ловушки под углом к потоку, можно увеличить площадь возможного захвата, тем самым повысив эффективность фильтрации.

Рассмотрим случай формирования набора из шести световых крестов, расположенных по диагонали [115]. В случае использования таких ловушек частицы, которые необходимо отфильтровать, будут захватываться в области световых крестов и за счет градиента фазы будут перемещаться в их центры. Эталонные распределения интенсивности и фазы такого светового поля представлены на рис. 5.113.

Операции кодирования амплитуды и фазы выполнялись со следующими параметрами: размерность входных изображений 256×256 пикселей; ширина участка ДОЭ, кодирующего один отсчет входного распределения амплитуды, $\Delta x = 4$; уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применяется $A_{\text{enc}} = 0,07$; исходное распределение комплексной амплитуды дополнялось нулями до размеров 1024×1024 отсчетов; диаметр ДОЭ был равен 4 мм; частота несущей при кодировании фазы $\beta = 55000$ лин./м.

Расчет производился согласно модифицированному методу кодирования амплитуды по схеме, описанной в п. 5.4.2. В результате для ДОЭ была рассчитана фазовая функция, представленная на рис. 5.114. Размерность рассчитанного элемента составила 1024×1024 пикселей. Фаза за пределами расчетного контура не определена.

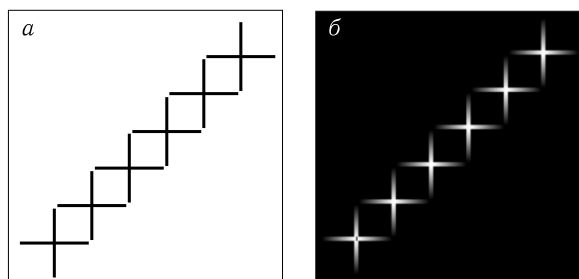


Рис. 5.113. Распределение интенсивности (негатив) (а) и фазы (б) эталонного изображения для расчета фокусатора в шесть крестов, расположенных по диагонали

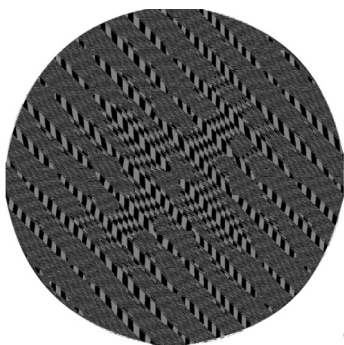


Рис. 5.114. Рассчитанная фазовая функция фокусатора в шесть крестов, расположенных по диагонали

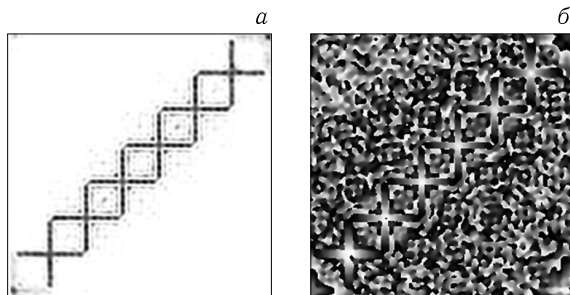


Рис. 5.115. Формируемое в плоскости фокусировки распределение светового поля (один из порядков): интенсивность (негатив) (а) и фаза (б) для фокусатора в шесть крестов, расположенных по диагонали

Результаты дифракции Фраунгофера на ДОЭ плоской волны представлены на рис. 5.115. Эффективность формирования заданного комплексного распределения в одном из порядков равна 15 %. СКО равно 43 %.

5.4.7. Экспериментальное исследование движения микрообъектов в световых полях с заданным амплитудно-фазовым распределением, сформированных бинарными фокусаторами. Для проведения экспериментов по манипулированию бинарные фокусаторы, фазовые функции которых рассчитаны в первой главе, были изготовлены методом фотолитографии на стеклянной подложке с разрешением в 2 мкм. Диаметр изготовленных элементов — 4 мм.

Экспериментально заданные амплитудно-фазовые распределения формировались с помощью бинарных фокусаторов с использованием оптической схемы, представленной на рис. 5.116.

С помощью двух выпуклых линз, образующих коллиматор К, производилось расширение лазерного луча, который затем попадает на бинарный

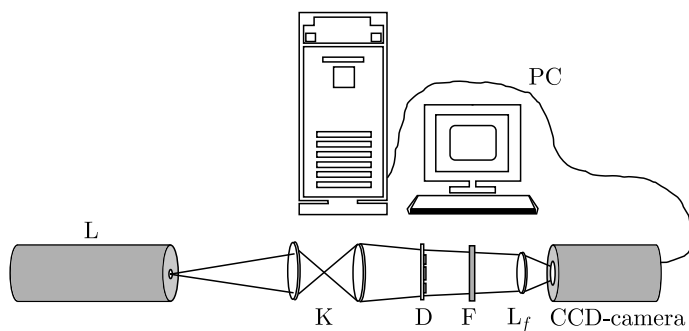


Рис. 5.116. Экспериментальная оптическая схема: L — лазер, K — коллиматор, D — ДОЭ, F — светофильтры, L_f — фокусирующая линза, CCD-камера — CCD-камера

ДОЭ D. Далее на пути луча находились затемняющие светофильтры F, которые служат для ослабления излучения, и собирающая линза L_f , которая служит для фокусировки лазерного луча на матрицу CCD-камеры CCD-камера VS-СТТ-252. В эксперименте был использован твердотельный неодимовый лазер с примесями редкоземельных металлов L , излучающий на длине волны 532 нм. Выходная мощность излучения около 500 мВт.

На рисунке 5.117 представлены трехмерные изображения различных участков микрорельефа изготовленных дифракционных оптических элементов, фазовые функции которых были приведены ранее на рис. 1.99 и 1.110, соответственно.

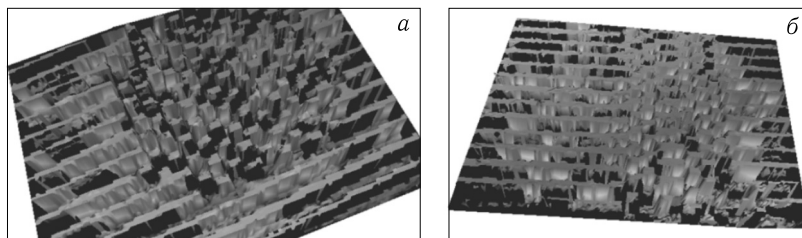


Рис. 5.117. Трехмерное изображение участка микрорельефа изготовленных дифракционных оптических элементов

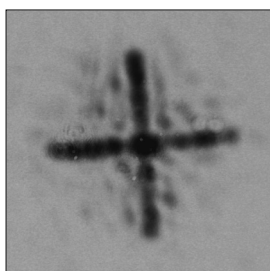


Рис. 5.118. Распределение интенсивности (негатив), сформированное бинарным фокусатором в крест

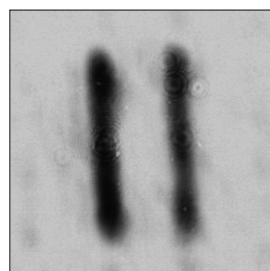


Рис. 5.119. Распределение интенсивности (негатив), сформированное бинарным фокусатором в две параллельные линии

На рисунке 5.118 показано распределение интенсивности в фокусе линзы, сформированное бинарным фокусатором в световой крест с градиентом фазы, фазовая функция которого представлена на рис. 5.89.

На рисунке 5.119 показано распределение интенсивности в фокусе линзы, сформированное бинарным фокусатором в две параллельные линии с градиентом фазы, фазовая функция которого представлена на рис. 5.110.

Как видно из представленных рисунков, структура сформированных полей хорошо согласуется с результатами моделирования, представленными ранее.

Часть экспериментов по формированию заданных амплитудно-фазовых распределений проводилась с помощью динамических пространственных модуляторов света с использованием оптической схемы, представленной на рис. 5.120. Лазерный луч, расширенный с помощью системы двух выпук-

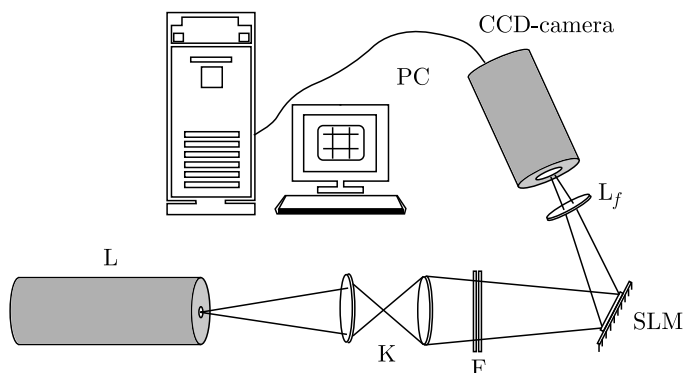


Рис. 5.120. Экспериментальная оптическая схема: L — лазер, К — коллиматор, F — светофильтры, L_f — фокусирующая линза, SLM — пространственный модулятор света, CCD-camera — CCD-камера

лых линз, образующих коллиматор К, направляется через систему ослабляющих светофильтров F на дисплей динамического модулятора света (SLM), так чтобы угол падения луча был как можно меньше. Отраженный от дисплея модулятора лазерный луч направляется на фокусирующую линзу L_f , которая проецирует полученное в ее фокусе изображение на матрицу CCD-камеры. Для освещения модулятора было использовано лазерное излучение с длиной волны 457 нм и с длиной волны 532 нм. Фазовая функция ДОО формировалась на бинарном динамическом модуляторе CRL OPTO с разрешением 1316×1024 пикселей (размер одного пикселя равен 15 мкм).

На рисунке 5.121 показано распределение интенсивности в фокусе линзы в виде решетки с четырьмя узлами, сформированное бинарным фокусатором, фазовая функция которого представлена на рис. 5.94.

На рисунке 5.122 показано распределение интенсивности в фокусе линзы в виде решетки с восемью узлами, сформированное бинарным фокусатором, фазовая функция которого представлена на рис. 5.96.

На рисунке 5.123 показано распределение интенсивности в фокусе линзы в виде набора из восьми крестов, сформированное бинарным фокусатором, фазовая функция которого представлена на рис. 5.98.

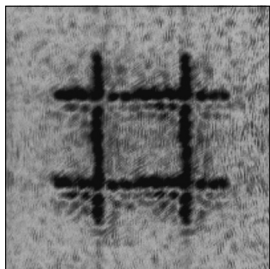


Рис. 5.121. Распределение интенсивности (негатив) в виде решетки с четырьмя узлами, сформированное бинарным фокусатором

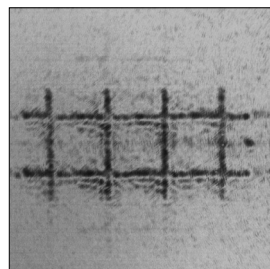


Рис. 5.122. Распределение интенсивности (негатив) в виде решетки с восемью узлами, сформированное бинарным фокусатором



Рис. 5.123. Распределение интенсивности (негатив) в виде набора из восьми крестов, сформированное бинарным фокусатором

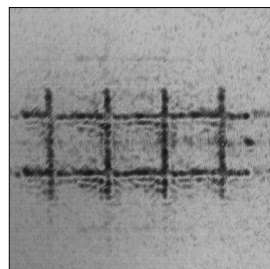


Рис. 5.124. Распределение интенсивности (негатив) в виде набора из шести крестов, расположенных по диагонали, сформированное бинарным фокусатором

На рисунке 5.124 показано распределение интенсивности в фокусе линзы в виде набора из шести крестов, расположенных по диагонали, сформированное бинарным фокусатором, фазовая функция которого представлена на рис. 5.114.

На рисунке 5.125 показано распределение интенсивности в фокусе линзы, сформированное бинарным фокусатором в контур равностороннего треугольника, фазовая функция которого представлена на рис. 5.104.

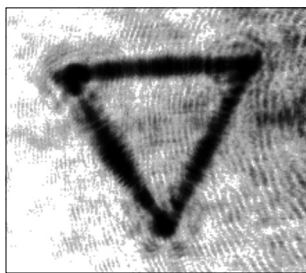


Рис. 5.125. Распределение интенсивности (негатив), сформированное бинарным фокусатором в контур равностороннего треугольника

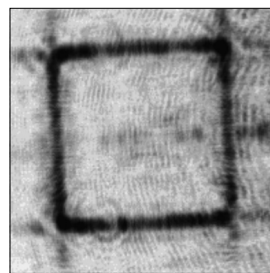


Рис. 5.126. Распределение интенсивности (негатив), сформированное бинарным фокусатором в контур квадрата

На рисунке 5.126 показано распределение интенсивности в фокусе линзы, сформированное бинарным фокусатором в контур квадрата, фазовая функция которого представлена на рис. 5.107.

Как видно из представленных рисунков, с помощью бинарного модулятора света также формируются световые ловушки, которые хорошо согласуются с результатами моделирования, представленными ранее.

Для проведения экспериментов по позиционированию микрообъектов [102] была собрана оптическая схема, представленная на рис. 5.127. В качестве источника лазерного излучения был выбран твердотельный неодимовый лазер с примесями редкоземельных металлов, излучающий на длине волны 532 нм. Выходная мощность излучения составляла около 500 мВт. В целях минимизации потерь мощности при отражении на преломляющих

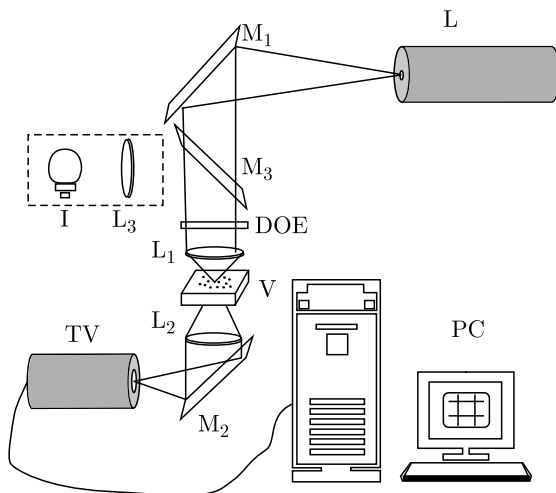


Рис. 5.127. Экспериментальная оптическая схема для осуществления манипулирования микрообъектами

поверхностях линз нужный размер лазерного луча для освещения ДОО достигается не использованием коллиматора, а путем увеличения расстояния между выходной апертурой лазера и первым поворотным зеркалом M_1 . Отразившийся от зеркала M_1 лазерный луч направляется на ДОО. Микрообъектив L_1 ($20\times$) фокусирует сформированный ДОО пучок на стеклянную подложку со взвесью микрочастиц в водяном растворе. Для освещения поверхности манипулирования используется система осветителя, состоящая из лампы и линзы L_3 . Микрообъектив L_2 ($16\times$) служит для построения изображения плоскости манипулирования на матрице CCD-камеры.

Для проведения экспериментов по автоматическому позиционированию микрообъектов были выбраны прозрачные микросферы полистирола диаметром 5 мкм.

На рисунке 5.128 представлены стадии движения захваченных в область светового креста микросфер. Интервал времени между кадрами 0,75 с. Как видно из представленных изображений, движение захваченных микросфер происходит от одного из краев креста к его центру, что полностью согласуется с расчетами. Измеренная скорость перемещения частицы равна $3,84 \pm 0,60$ мкм/с.

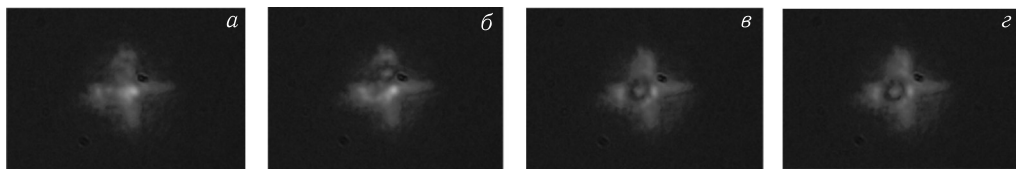


Рис. 5.128. Стадии движения полистиролового микрошара в световом пучке в виде креста. Интервал между кадрами — 0,75 с

В эксперименте по захвату и отклонению прозрачных микрообъектов из общего потока с помощью двух световых линий с градиентом фазы была использована оптическая схема, представленная на рис. 5.127. Для манипулирования был выбран тот же лазер, что и в опытах по позиционированию отдельных частиц. Объектами манипулирования были прозрачные микросферы полистирола диаметром 5 мкм.

На рисунке 5.129 и 5.130 представлены стадии движения микрочастиц, захваченных в область световых линий. Для их формирования был использован ДОЭ, фазовая функция которого представлена на рис. 5.110.

Как видно, при попадании в область световой линии микросфера полистирола начинает движение в направлении перпендикулярном общему потоку, что полностью согласуется с расчетами. Таким образом, происходит

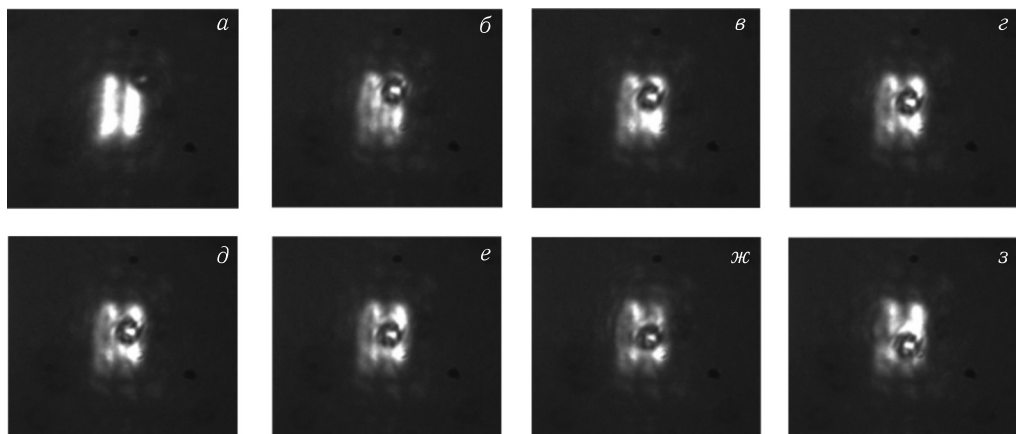


Рис. 5.129. Стадии движения полистиролового микрошара, захваченного одной из световых линий. Интервал между кадрами — 1,25 с

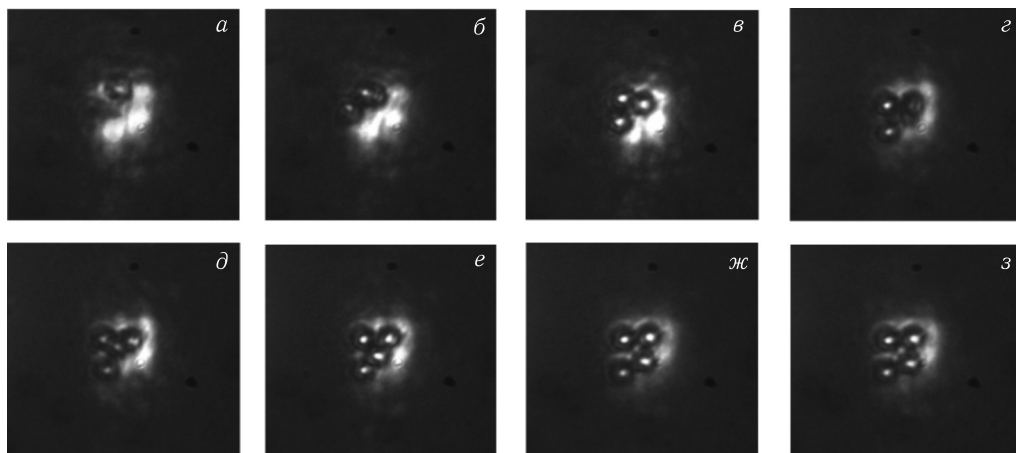


Рис. 5.130. Стадии движения полистироловых микрошаров, захваченных в световые линии. Интервал между кадрами — 1,5 с

отклонение частиц из общего потока, что можно рассматривать как их сортировку. Скорость движения микросферы для случая на рис. 5.129 равна $0,82 \pm 0,06$ мкм/с. Согласно результатам моделирования, представленным на рис. 5.130, фаза вдоль одной из линий растет в два раза быстрее. Поэтому скорость движения захваченной микросферы полистирола вдоль каждой из линий для случая на рис. 5.130 будет разной: так, для линии с большей разницей фаз на ее концах скорость движения частиц равна $1,45 \pm 0,4$ мкм/с, $1,77 \pm 0,4$ мкм/с; для линии с меньшим градиентом, соответственно, — $1,01 \pm 0,12$ мкм/с.

5.4.8. Линейное перемещение микрообъектов в суперпозиции двух вихревых пучков. Рассмотрим метод расчета ДОЭ формирующего световое поле для линейного перемещения микрообъекта на основе двух вихревых пучков. Вместо расчета специального фокусатора, требуемый элемент рассчитывается на основе линейно закодированного ДОЭ для формирования оптического «вихря» и формирует световой пучок в виде полоски с направленным вдоль нее градиентом фазы.

Расчет элемента производится на основе линейно закодированного оптического «вихря». Кодирование фазовой функции оптического «вихря» для приведения ее к бинарному виду осуществляется по формуле

$$\varphi_b(x, y) = \arg(\varphi^*(x, y) \cdot e^{-i\alpha x} + \varphi(x, y) \cdot e^{i\alpha x}), \quad (5.96)$$

где α — частота несущей, φ — исходная фаза, φ_b — новая бинарная фаза.

При линейном кодировании, для получения бинарного элемента, на получаемом изображении вместо одного кольца формируется сразу два, причем изменения фазы направлены в противоположные стороны. Если менять частоту линейного кодирования, то будет меняться расстояние между кольцами (рис. 5.131); при определенной частоте можно получить изображение, на котором кольца будут соприкасаться, а в месте соприкосновения будет формироваться полоска. При этом то, что пучки в $+1$ и -1 порядках имеют равные по величине, но противоположные по знаку порядки, обеспечивает сильный градиент фазы, направленный вдоль формируемой световой полосы, как показано на рис. 5.131.

Также следует отметить, что для формирования необходимой полоски подходят оптические вихревые пучки только с четным порядком, так как при нечетном порядке в месте соприкосновения колец вместо одной прямой полоски формируется две дуги (рис. 5.133). Хотя такой пучок также можно использовать, например, для захвата и линейного перемещения непрозрачного микрообъекта.

При увеличении порядка пучка увеличивается диаметр колец, а также и длина полосы (рис. 5.134), но при этом для каждого порядка оптимальная частота кодирования фазы для формирования полосы будет своя.

Расчет производился с помощью моделирующей программы, которая позволяла рассчитывать ДОЭ с заданными параметрами кодирования и порядка сингулярности, а также моделировала дифракционную картину формируемую таким элементом. Для более удобного расчета в данную программу была добавлена возможность рассчитывать несколько ДОЭ одновременно с раз-

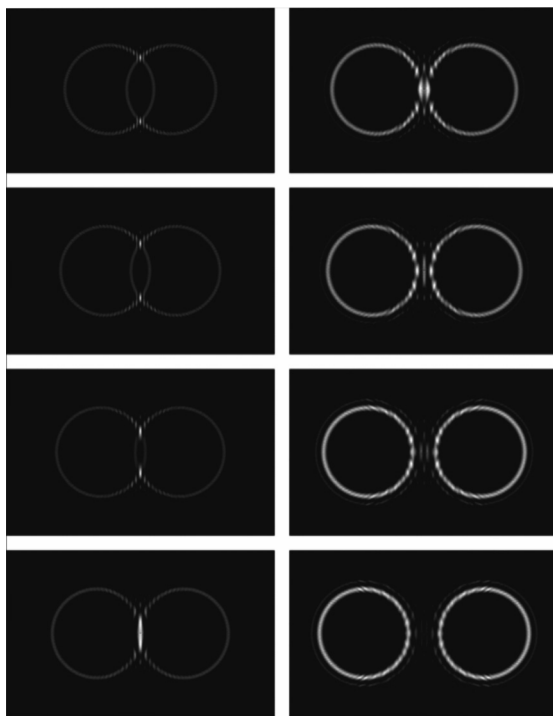


Рис. 5.131. Изменения дифракционной картины для ДОЭ, формирующего оптический вихрь, с $n = 60$ при изменении частоты кодирования от $18\,500$ до $36\,000\text{ м}^{-1}$ с шагом $2\,500\text{ м}^{-1}$ (сверху вниз частота увеличивается)



Рис. 5.132. Направления увеличения фазы вдоль колец для ДОЭ, формирующего два вихревых пучка 60-го порядка

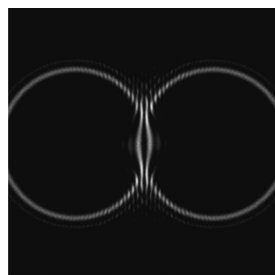


Рис. 5.133. Картина, возникающая при нечетном порядке сингулярности ($n = 101$)

личной частотой кодирования с заданным шагом, получать от них изображения колец и измерять длину и дифракционную эффективность полосы. Под дифракционной эффективностью в данном случае понималось отношение энергии попадающей в полосу к энергии, идущей на формирование всей дифракционной картины. По результатам расчетов программы было выбрано несколько ДОЭ, формирующих оптические вихревые пучки с различным порядком. Эти ДОЭ имеют оптимальную частоту кодирования фазы, при

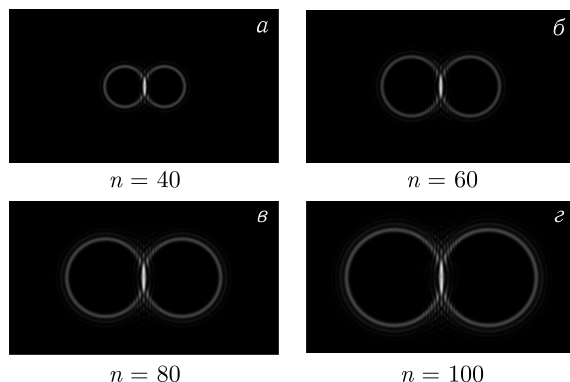


Рис. 5.134. Дифракционные картины, формирующиеся при разных порядках оптических вихревых пучков

которой образуется наиболее длинная и эффективная полоса. Параметры приведены в табл. 5.7.

Таблица 5.7. Зависимость эффективности и длины полоски от сингулярности при оптимальной частоте кодирования

Порядок	Частота кодирования, м^{-1}	Эффективность, %	Длина полосы, пиксель
20	9060	18,244	17
40	17 760	16,004	24
60	26 260	11,386	29
80	34 320	8,4575	38
100	42 360	6,5517	46

Из таблицы 5.7 можно отметить, что при возрастании сингулярности помимо увеличения длины полосы происходит уменьшение ее эффективности, поэтому в зависимости от условий задачи нужно будет выбирать что важнее: длина полосы или ее эффективность.

Все рассчитанные элементы были сформированы на пространственном модуляторе света CRL OPTO. С помощью компьютера бинарное изображение ДОЭ выводилось на экран модулятора, который создавал соответствующую задержку по фазе. На рисунке 5.135 приведен общий вид оптической схемы для получения дифракционной картины с помощью модулятора.

На рисунке 5.136 видно, что полоска формируется, но также видно, что создается много шума центральным пиком, это связано с тем, что качество формирования изображения с помощью модулятора намного ниже по сравнению с качеством ДОЭ, изготовленных на оптической подложке.

Далее все пять ДОЭ, рассчитанных выше, были изготовлены на стекле и исследованы. Для этого также на столе была собрана оптическая схема, представленная на рис. 5.137.

Как видно из рис. 5.138, данные ДОЭ тоже дают не самое качественное изображение, и в середине полоски также наблюдается усиление интенсивности. Это может быть связано с небольшой погрешностью высоты рельефа

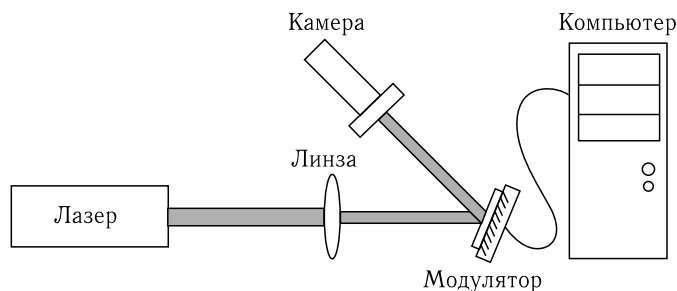


Рис. 5.135. Общий вид оптической схемы для получения дифракционной картины с помощью модулятора

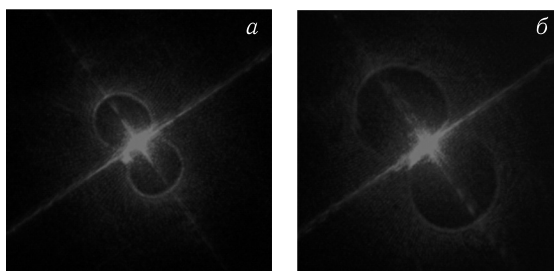


Рис. 5.136. Примеры изображений полученных с помощью модулятора

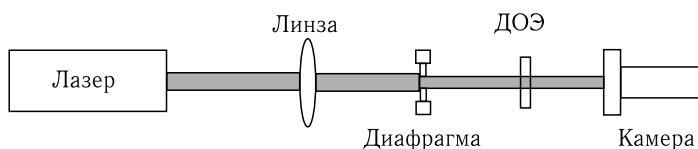


Рис. 5.137. Общий вид оптической схемы для получения дифракционной картины с помощью ДОО, изготовленных на стекле

ДОО. Достаточно высокая дифракционная эффективность полученных ДОО позволила провести эксперимент по манипуляции с их помощью микрочастицами.

Для этого на оптическом столе была собрана специальная схема (рис. 5.139). ДОО располагался на удалении от лазера, так чтобы выходящий луч успел расшириться и перекрыть весь элемент. После ДОО лазерный луч фокусировался микрообъективом до размеров подходящих для манипуляции частицами размером 5 мкм. В области фокуса этого микрообъектива находилась стеклянная подложка с нанесенной на нее каплей со взвесью полистироловых микрочастиц диаметром 5 мкм, а следом за ней находился еще один микрообъектив, формирующий изображение. Далее лазерный луч перенаправлялся зеркалом в камеру, перед которой стоял набор светофильтров, позволяющих ослабить пучок, но так чтобы при этом было возможно получить изображения изображение частиц и светового пучка.

Манипуляция микрочастицами осуществлялась с помощью ДОО, формирующего вихревой пучок 20-го порядка. Удалось осуществить захват и пе-

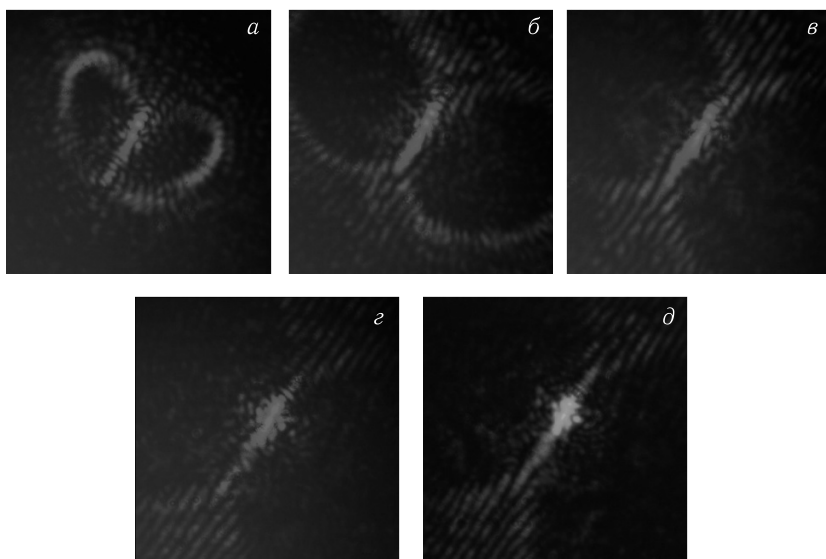


Рис. 5.138. Изображения, полученные с помощью ДОЭ, изготовленных на стекле и формирующих оптические вихревые пучки с $n = 20$ (а), $n = 40$ (б), $n = 60$ (в), $n = 80$ (г), $n = 100$ (д)

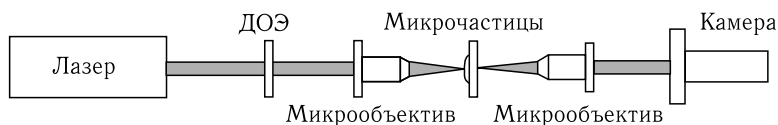


Рис. 5.139. Общий вид оптической схемы для осуществления микроманипуляции

редвижение частицы вдоль полосы, но в результате усиления интенсивности в центре, при достижении середины полоски, частица жестко фиксировалась в этом пике интенсивности. Стадии захвата и перемещения представлены на рис. 5.140.

На рисунке 5.140 видно как частица захватывается слева в область повышенной интенсивности и движется направо вдоль полоски примерно до ее середины.

5.5. Формирование массивов световых «бутылок» с помощью ДОЭ

Рассмотрим метод расчета функций пропускания ДОЭ, формирующих световые ловушки для объектов, показатель преломления которых ниже, чем у окружающей среды, и их массивы. К таким ловушкам относятся световые «бутылки» и полые световые пучки. Конечной целью будет алгоритм, позволяющий рассчитывать фазовые функции ДОЭ, формирующих как отдельные ловушки, имеющие форму простых геометрических фигур — кольцо, контур квадрата, равностороннего треугольника и т. д., так и набор таких ловушек для осуществления манипулирования несколькими микрообъектами.

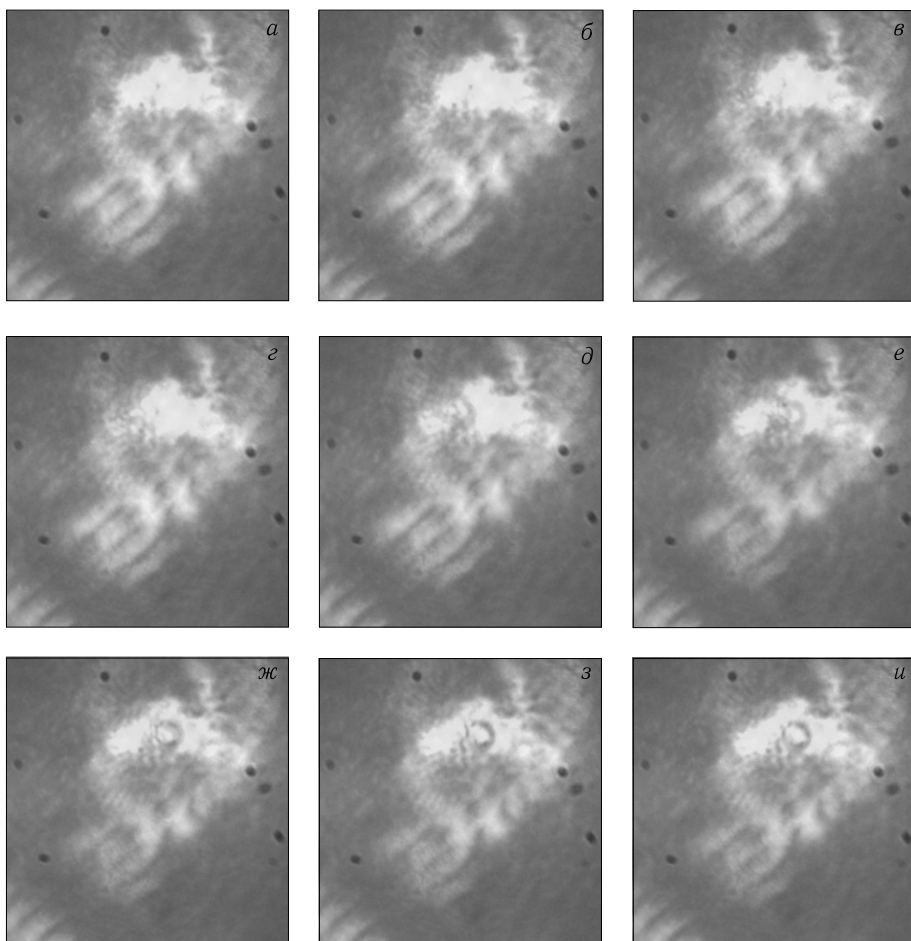


Рис. 5.140. Моменты захвата и перемещения частицы с промежутком между кадрами, равным 0,25 с

Разрабатываемый метод основан на использовании суперпозиции пучков Бесселя 0-го порядка, поэтому, сначала будут рассмотрены свойства таких пучков, и выделены те из них, которые будут в дальнейшем использованы нами для решения поставленной задачи. Далее будет описан алгоритм расчета комплексных функций пропускания ДОЭ, и указаны различия в его применении для случаев формирования световых «бутылок» и полых световых пучков. С целью повышения однородности формируемых распределений будет рассмотрена модификация данного алгоритма, в которой используется градиентный метод вычисления.

Моделирование полученных элементов будет осуществляться с помощью программного обеспечения, которое для расчета распределений интенсивностей светового поля в различных плоскостях использует преобразование Френеля, реализованное на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

5.5.1. Световые пучки Бесселя и их замечательные свойства. Одномодовый пучок Бесселя описывается следующей комплексной амплитудой:

$$\Psi_{nm}(r, \phi, z) = J_m(k\rho_n r) \exp\left(ik\sqrt{1-\rho_n^2}z\right) \exp(im\phi), \quad (5.97)$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя m -го порядка, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число света с длиной волны λ , (r, ϕ) — полярные координаты в плоскости перпендикулярной оси распространения пучка z , $\rho_n = \sin \theta_n$, θ_n — угол наклона к оси z конической волны, образующей пучок Бесселя.

Пучки Бесселя обладают рядом замечательных свойств: распространяться на конечном отрезке оси без дифракции [66, 116] могут образовывать световую «трубку» на оптической оси [59], самовоспроизведение на некотором расстоянии от препятствия, расположенного на оптической оси [117, 118], могут обладать орбитальным моментом [60, 64, 119, 120], продольной периодичностью [121], а также вращаться при своем распространении [60, 122].

Дифракционные оптические элементы позволяют формировать пучки Бесселя, сохраняющие модовый характер на большом расстоянии вдоль оси распространения. Исходя из геометрических соображений расстояние, на котором сохраняется модовый характер одномодового бesselева светового поля $J_n(\alpha r) \exp(in\varphi)$, оценивается следующей формулой [65]:

$$z_{\max} = R \left[\left(\frac{2\pi}{\alpha\lambda} \right)^2 - 1 \right]^{1/2}, \quad (5.98)$$

где R — радиус ДОЭ, α — параметр функции Бесселя.

Для формирования бездифракционных пучков Бесселя могут быть использованы дифракционные оптические элементы, функция пропускания которых имеет следующий вид [67–68]:

$$\tau(r, \varphi) = \operatorname{sgn} [J_m(\alpha r)] \exp(im\varphi), \quad (5.99)$$

где (r, φ) — полярные координаты в плоскости элемента, $\alpha = k\rho_n$ — параметр функции Бесселя.

Винтовой ДОЭ с пропусканием (5.99) эффективно формирует световое поле, амплитуда которого пропорциональна функции Бесселя $J_n(\alpha r) \exp(im\varphi)$, вблизи оптической оси до некоторого $z_{\max} = Rk/\alpha$ [67].

Стоит заметить, что при использовании конечного фазового ДОЭ пучок Бесселя начинает формироваться только на некотором расстоянии от плоскости элемента. Таким образом, отрезок, на котором пучок Бесселя сохраняет свой модовый характер, начинается с некоторого z_{\min} , необходимого для формирования пучка, и заканчивается на z_{\max} .

Пучки Бесселя нашли широкое применение в области лазерного манипулирования. Так, благодаря тому, что такие пучки распространяются без искажения на некотором отрезке оптической оси, удалось создать вертикальную цепочку из 16 кварцевых шариков диаметром 5 мкм [64], передвигать ее как единое целое и наклонять на 5 градусов. Возможность восстановления структуры пучка после прохождения препятствий также дает возможность одновременного манипулирования в нескольких плоскостях [123].

Продольная периодичность пучков Бесселя может быть использована для создания трехмерных световых ловушек.

5.5.2. Многомодовые пучки Бесселя. Многомодовые пучки Бесселя обладают теми же свойствами, что и одномодовые пучки Бесселя [84, 121, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130], поэтому они также широко используются в задачах лазерного манипулирования.

Исходя из формулы (5.99), можно получить следующую формулу для вычисления комплексной амплитуды элемента, формирующего суперпозицию N пучков Бесселя:

$$T(x, y) = \sum_{p=1} C_p \cdot \operatorname{sgn}(J_0(\alpha_p \mathbf{r})) \times \exp[i(xu + yv)], \quad (5.100)$$

где C_p — комплексные коэффициенты, отвечающие за вклад отдельных пучков в общее распределение формируемого светового поля; u, v — параметры, соответствующие осевому смещению центра пучка Бесселя; x, y — декартовы координаты, $r^2 = x^2 + y^2$. Квадрат модуля коэффициента C_p задает интенсивность отдельного светового пучка, а фаза этого коэффициента — фазовый сдвиг пучка.

Свойства многомодовых пучков, такие как продольная периодичность, поступательное вращение при распространении, фурье-инвариантность и инвариантность к усечению в зависимости от соотношения параметров отдельных одномодовых пучков были исследованы в работах [69, 121, 131, 132]. Таким образом, подбирая параметры пучков в суперпозиции можно добиться, чтобы формируемый пучок, представляющий собой суперпозицию, обладал свойствами, который можно было бы применить для создания трехмерных ловушек сложной формы.

Как известно, одномодовый пучок Бесселя 0-го порядка представляет собой световой осевой отрезок, радиально-симметричное распределение интенсивности в поперечном сечении которого описывается функцией Бесселя соответствующего порядка (рис. 5.141).

Продольная интерференция нескольких соосных одномодовых пучков Бесселя может приводить к тому, что формируемое распределение интенсивности

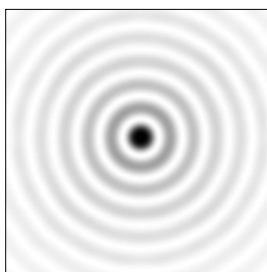


Рис. 5.141. Распределение интенсивности в сечении пучка Бесселя 0-го порядка (негатив)

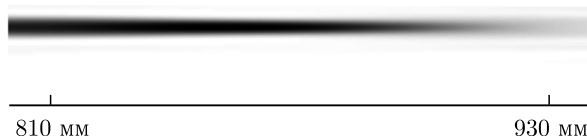


Рис. 5.142. Распределение интенсивности (негатив) суперпозиции пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ вдоль оптической оси

будет отличаться от представленного на рис. 5.141. Так, если рассматривать суперпозицию трех пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \times 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, то можно заметить, что распределение интенсивности для такого светового поля на ограниченном участке оси распространения пучка представляет собой световой осевой отрезок практически лишенный дополнительных колец, наличие которых характерно для одномодового пучка Бесселя 0-го порядка; причем на краях этого отрезка происходит его уширение (рис. 5.142).

5.5.3. Формирование световых «бутылок» за счет использования составных пучков Бесселя 0-го порядка. Суперпозиция пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ вдоль оптической оси, представленная в предыдущем разделе, может быть использована для дальнейшего конструирования трехмерных световых ловушек типа световые «бутылки» и полые световые пучки. Для этого может быть использован подход, рассмотренный в работе [97]. Предлагается формировать сложные распределения световых полей в плоскости фокусировки путем их конструирования из отдельных световых пятен. Таким образом, можно контролировать не только форму рассчитываемой световой ловушки, но и амплитудно-фазовое распределение в отдельных ее участках.

Вначале рассмотрим как с помощью пучка, представляющего собой суперпозицию трех соосных пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, можно сформировать простейшую световую бутылку. Как было описано выше, данный пучок позволяет формировать световой осевой отрезок без дополнительных световых колец, при этом на краях этого участка происходит расширение центрального светового пятна. Рассмотрим два таких сложных пучка Бесселя, находящихся на таком расстоянии друг от друга, на котором они будут очень слабо интерферировать. Будем считать, что каждый из этих пучков формируется элементом с радиусом 3 мм, функция пропускания которого вычисляется по формуле (5.100), при длине волны падающего излучения $\lambda = 532 \text{ нм}$. Можно предположить, что при уменьшении расстояния между ними, из-за незначительной интенсивности окружающих центральный пик колец, эти дополнительные кольца будут оказывать незначительное влияние на интерференционную картину. Таким образом, два световых отрезка будут распространяться вдоль оси, не оказывая друг на друга заметного воздействия, до тех пор, пока расстояние между ними не станет таким, что их можно будет рассматривать не как два отдельных световых отрезка, а как один, но удлинённый в направлении одной из поперечных координат. В итоге мы получим распределение светового поля, сечения которого представлены на рис. 5.143.

Если производить дальнейшее сближение формируемых светлых пятен, то будет происходить поперечное укорачивание этого отрезка, и в итоге при их совмещении получится одно пятно (рис. 5.144).

Если рассматривать не два, а большее число таких пучков, расположенных в линию на некотором удалении друг от друга, то можно сформировать распределение светового поля, которое будет представлять собой светлый

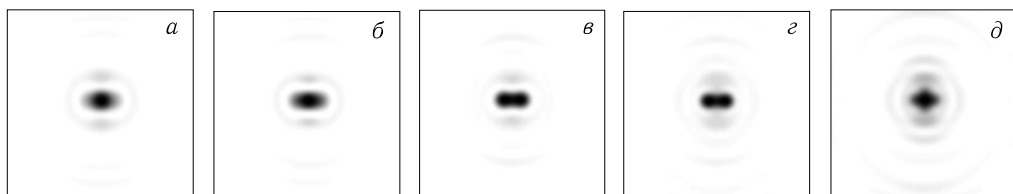


Рис. 5.143. Распределения интенсивности (негатив) суперпозиции двух разделенных пучков Бесселя на расстояниях 800 мм (а), 825 мм (б), 850 мм (в), 875 мм (г), 900 мм (д) от плоскости элемента

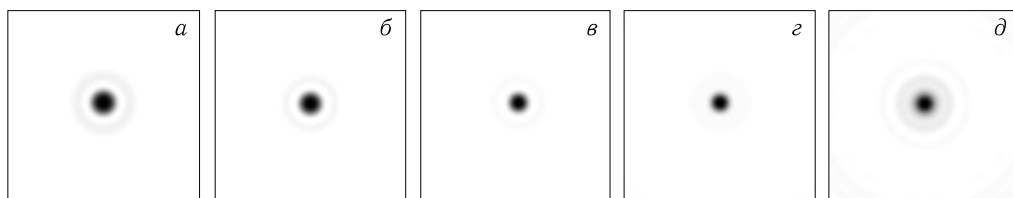


Рис. 5.144. Распределения интенсивности (негатив) суперпозиции двух совмещенных пучков Бесселя на расстояниях 800 мм (а), 825 мм (б), 850 мм (в), 875 мм (г), 900 мм (д) от плоскости элемента

прямоугольник параллельный оси распространения пучка. При этом меняя расстояние между отдельными интерферирующими сложными пучками Бесселя, можно менять поперечный размер этого светового прямоугольника.

Для формирования простейшей световой «бутылки» в качестве схемы расположения формируемых пучков выберем представленную на рис. 5.145.

Как видно, данная схема содержит 8 точек, расположенных симметрично относительно начала координат по периметру окружности диаметром 3 единицы. Шаг координатной сетки пропорционален размеру минимального дифракционного пятна, формируемого элементом с радиусом 3 мм на расстоянии z , на котором происходит формирование световой «бутылки» при длине волны излучения $\lambda = 532$ нм. Все коэффициенты C_p будем считать равными 1. Фазовую компоненту данных коэффициентов мы приравняли нулю, для того

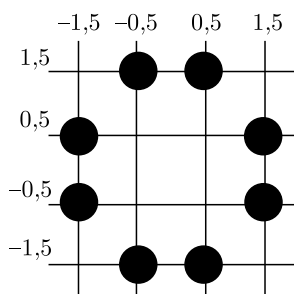


Рис. 5.145. Схема расположения пучков Бесселя для случая формирования одной световой «бутылки»

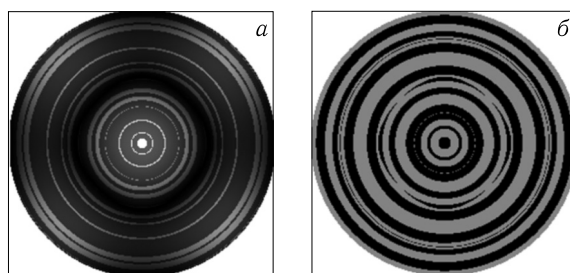


Рис. 5.146. Амплитудная (а) и фазовая (б) функции пропускания ДОЭ, формирующего одну световую «бутылку»

чтобы в области световой «бутылки» не возникало градиента фазы, наличие которого может вызывать движение захваченного в ловушку объекта [60]. Радиус рассчитываемого элемента, как и у рассмотренного ранее, $R = 3$ мм. Рассчитав по формуле (2.4) функцию пропускания ДОЭ, получим амплитудно-фазовое распределение, представленное на рис. 5.146. Как видно, фаза данного элемента имеет бинарный вид из-за симметричного расположения формируемых пучков. Если проигнорировать амплитудную составляющую данного комплексного поля, то можно получить чисто фазовую функцию пропускания.

Моделирование с помощью интеграла Френеля имеет вид

$$F(u, v, z) = -\frac{ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int T(x, y) \exp \left[\frac{ik}{2z} \left((x-u)^2 + (y-v)^2 \right) \right] dx dy, \quad (5.101)$$

где x, y — координаты во входной плоскости, u, v — координаты в выходной плоскости, удаленной на расстоянии z , $T(x, y)$ — функция пропускания ДОЭ, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Прохождение через такой фазовый ДОЭ с радиусом 2,1 мм плоской световой волны с длиной волны 532 нм дает распределения светового поля, представленные на рис. 5.147 (продольное распределение) и 5.148 (поперечные сечения).

Рис. 5.147. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световой «бутылки»

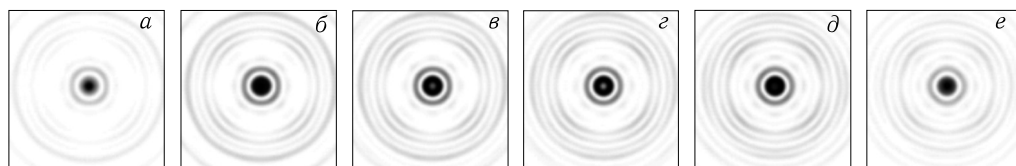
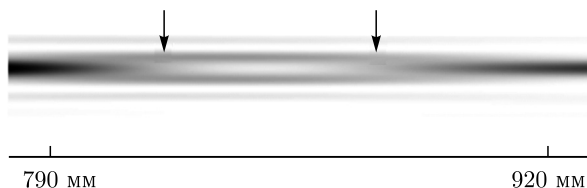


Рис. 5.148. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки» на расстояниях 790 мм (а), 810 мм (б), 830 мм (в), 850 мм (г), 870 мм (д), 890 мм (е) от плоскости элемента

Из анализа рисунков видно, что световая «бутылка» формируется на участке оси от 820 до 875 мм.

Если внимательно рассмотреть представленные на рис. 5.148 распределения интенсивности, то можно заметить, что область минимума интенсивности имеет достаточно небольшие размеры, и при этом отношение минимума интенсивности в центре кольца к максимуму на его периметре равно 0,26 к 1. Размеры этой области можно заметно увеличить, а отношение минимума интенсивности к максимуму уменьшить, если в рассмотренную выше схему расположения пучков добавить еще один составной пучок

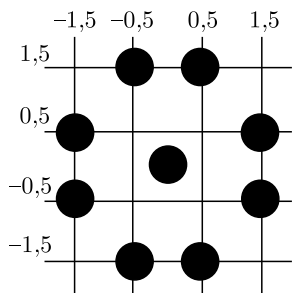


Рис. 5.149. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для случая формирования одной световой «бутылки»

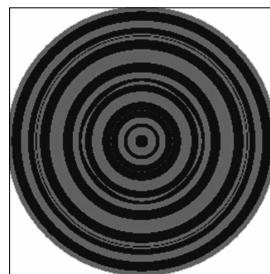


Рис. 5.150. Фазовая функция пропуска ДОЭ, формирующей одну световую «бутылку»

Бесселя (рис. 5.149), причем для него коэффициент C_p в разложении (5.100) принять равным $1 \cdot e^{i\pi}$.

Введение такого пучка не изменит бинарного характера фазового распределения (рис. 5.150), но приведет к деструктивной интерференции.

В результате этого происходит увеличение размеров области минимума интенсивности (рис. 5.151 и 5.152), и за счет этого отношение минимума интенсивности к максимуму уменьшится до 0 к 1.

В ряде случаев, которые мы рассмотрим далее, введение таких дополнительных пучков со сдвигом фазы позволяет убрать пики интенсивности, которые возникают в центральной части ловушек из-за интерференции между пучками, образующими внешнюю границу световых «бутылок».

Для вычисления эффективности формирования ловушки с помощью рассчитанных элементов воспользуемся формулой (5.92). Тогда для разных плоскостей, удаленных от элемента на расстояниях 770 мм, 790 мм, 810 мм, 830 мм, 850 мм, 870 мм, получим значения эффективности 8 %, 9 %, 11 %, 12 %, 13 %, 15 % и, соответственно, среднее значение эффективности будет равно 11,33 %.



Рис. 5.151. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световой «бутылки»

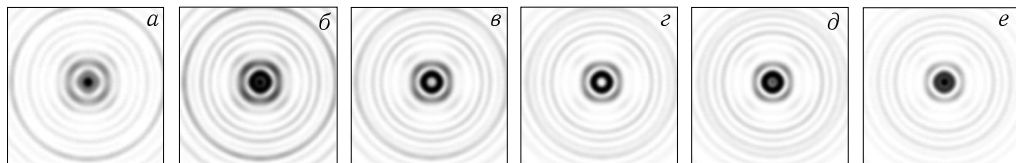


Рис. 5.152. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки» на расстояниях 770 мм (а), 790 мм (б), 810 мм (в), 830 мм (г), 850 мм (д), 870 мм (е) от плоскости элемента

Аналогично могут быть рассчитаны фазы элементов, формирующих одиночные световые «бутылки», сечение которых будет иметь форму отличную от окружности. В этих случаях точки расположения формируемых пучков в соответствующих схемах могут быть симметричными или несимметричными относительно начала координат. Если в первом из этих случаев фазовое распределение функции пропускания будет иметь бинарный вид, то во втором случае фаза будет многоуровневой. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим еще два случая формирования одиночных световых «бутылок» — в первом из них внешняя граница ловушки в сечении будет иметь вид квадрата, во втором — равностороннего треугольника. Заметим, что из-за отсутствия радиальной симметрии у таких фигур, коэффициенты C_p в разложении (5.100) будут отличаться между собой. Поэтому для их вычисления удобно воспользоваться одним из множества существующих на данный момент итеративных алгоритмов. Далее для этой цели мы рассмотрим разработанный алгоритм, основанный на градиентном методе.

5.5.4. Алгоритм повышения однородности формируемых световых ловушек на основе градиентной процедуры. Градиентные методы ранее неоднократно использовались в ряде работ для расчета самовоспроизводящихся многомодовых лазерных пучков [130], многопорядковых дифракционных решеток [133, 134, 135, 136, 137], композиционных ДОЭ [138], расчета квантованных ДОЭ [139]. Таким образом, можно сделать вывод о том, что данные методы широко используются для расчета дифракционных элементов. Суть градиентных методов заключается в минимизации выбранного функционала, который обычно вычисляется как ошибка формирования распределения светового поля в какой-то плоскости.

Пусть $I_0(x, y)$ — эталонное распределение интенсивности формируемой «световой бутылки» в плоскости, находящейся на расстоянии z от элемента. Это распределение можно задавать как аналитическим путем, так и с помощью графического файла. И пусть число точек, образующих это изображение, равно N . Координаты этих точек будут определять осевое смещение суперпозиций трех пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, которые и формируют контур ловушки. Как было отмечено выше, такая суперпозиция позволяет сформировать на оси пучка световое пятно, практически полностью убрав за счет интерференции концентрические окружности. Для вычисления светового поля, формируемого ДОЭ на расстоянии z от него, можно воспользоваться интегральным преобразованием Френеля (5.101).

Задачу поиска фазы $T(x, y)$ и соответственно аргументов C_p в выражении (5.100) для суперпозиции можно сформулировать как задачу минимизации следующего квадратичного критерия:

$$K = \frac{\iint_D [|B(u, \nu)| - A_0(u, \nu)]^2 du dv}{\iint_D A_0^2(u, \nu) du dv}, \quad (5.102)$$

где $A_0(u, \nu) = \sqrt{I_0(u, \nu)}$, D — ограниченная область, в которой рассчитывается ошибка.

Для минимизации этого критерия можно использовать градиентный метод. На первой итерации все коэффициенты C_p^1 равны 1. Далее по формуле (5.101) осуществляется преобразование Френеля комплексной функции пропускания ДОЭ, рассчитанной по формуле (5.100), чтобы получить распределение светового поля, формируемого этим элементом на расстоянии z от входной плоскости.

На основе полученного и заданного распределений световых полей вычисляется ошибка K . Новые значения коэффициентов $\omega_p^{j+1} = |C_p^{j+1}|$ вычисляются следующим образом:

$$\omega_p^{(j+1)} = \omega_p^{(j)} + \mu^{(j)} \frac{\partial K}{\partial \omega_p^{(j)}}, \quad (5.103)$$

где j — номер итерации.

Для вычисления градиента $\partial K / \partial \omega_p^{(j)}$ была использована следующая численная процедура: значение p -го коэффициента $\omega_p^{(j)}$ увеличивалось на малую величину Δ , при этом все остальные коэффициенты оставались неизменными. Затем на основе этого вектора коэффициентов $\omega_p^{(j)}$ вычислялось преобразование Френеля полученной комплексной функции пропускания $T(x, y)$ ДОЭ. В результате чего получается новая оценка ошибки $K_p^{(j)}$, и на ее основе вычисляется правосторонняя производная, т. е.

$$\frac{\partial K}{\partial \omega_p^{(j)}} = \frac{K_p^{(j)} - K^{(j)}}{\Delta}. \quad (5.104)$$

Для того, чтобы значения коэффициентов $\omega_p^{(j+1)}$ в результате вычисления по приведенным выше формулам не принимали отрицательных значений, в (5.103) вводились ограничения на шаг $\mu^{(j)}$, который на каждой итерации выбирался следующим образом:

$$\mu^{(j)} = \frac{\min_p \left\{ \frac{\omega_p^{(j)}}{\partial K / \partial \omega_p^{(j)}} \right\}}{\gamma \cdot \eta^{j-1}}. \quad (5.105)$$

Здесь параметры γ и η отвечают за скорость сходимости алгоритма. Рекомендуется выбирать эти значения из следующих промежутков: $2 \leq \gamma \leq 3$ и $1, 1 \leq \eta \leq 2$.

Далее на основе вычисленных значений коэффициентов $C_p^{(j+1)}$, согласно (2.4), рассчитывается новая оценка $T^{(j+1)}(x, y)$ комплексной функции ДОЭ и начинается новая итерация алгоритма.

Отметим, что при использовании в качестве начальных значений коэффициентов C_p^1 произвольных чисел, из-за того, что градиентные методы чувствительны к начальному приближению и из-за специфики расчета шага $\mu^{(j)}$, нам не удавалось получать удовлетворительные результаты. Таким образом,

в качестве начальной оценки коэффициентов C_p^1 рекомендуется выбирать постоянные значения.

С помощью данного алгоритма были рассчитаны некоторые элементы, формирующие световые «бутылки», внешняя граница которых имеет вид квадрата, равностороннего треугольника и прямоугольника с соотношением сторон 2 к 1. Для анализа распределений интенсивности, формируемых этими ловушками, были использованы следующие величины: эффективность формирования световой «бутылки», вычисляемая по формуле (5.92), и равномерность распределения интенсивности по контуру:

$$U = 1 - \frac{\sum_{m=1}^M |I_m - \bar{I}|}{M \cdot \bar{I}}, \quad (5.106)$$

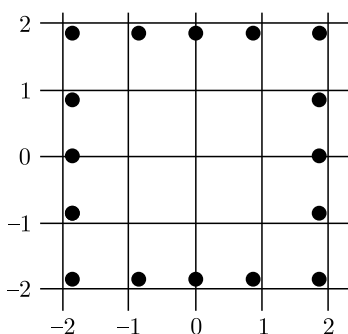


Рис. 5.153. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура квадрата

где I_m — интенсивность в точке m , M — число точек измерения, $\bar{I} = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M I_m$, — среднее значение интенсивности по контуру.

На рисунке 5.153 представлена схема расположения сложных пучков для формирования световой «бутылки», сечение внешней границы которой имеет форму контура квадрата. Общее число N одномодовых пучков, участвующих в вычислении функции пропускания, согласно (5.100), равно 48.

Начальные значения коэффициентов C_p^1 для $1 \leq p \leq N$ выбирались равными 1. Радиус рассчитываемого ДОЭ — 4 мм. Распределения светового поля, формируемые на первой итерации, представлены на рис. 5.154.

В результате выполнения 6 итераций представленного выше алгоритма была получена комплексная функция пропускания (рис. 5.155).

Результаты дифракции Френеля плоской волны с длиной волны 532 нм на ДОЭ представлены на рис. 5.156 и 5.157. Как видно, формируется одиночная световая «бутылка» хорошего качества. Значение однородности распределения интенсивности для сечения, удаленного на расстоянии 800 мм

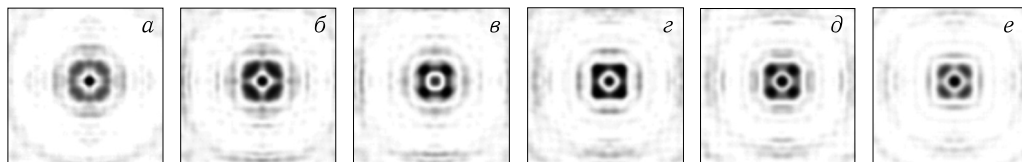


Рис. 5.154. Распределения интенсивности (негатив), формируемые на первой итерации, на расстояниях 760 мм (а), 780 мм (б), 800 мм (в), 820 мм (г), 840 мм (д), 860 мм (е) от плоскости элемента для случая расчета световой «бутылки» по схеме на рис. 5.153

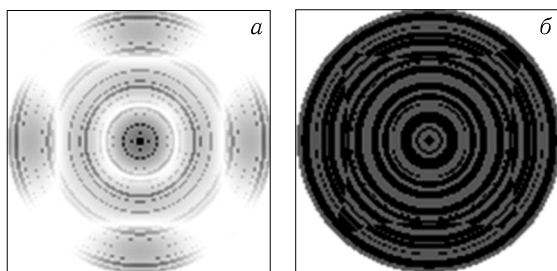


Рис. 5.155. Функция пропускания элемента, формирующего световую «бутылку», внешняя граница которой имеет форму контура квадрата: амплитуда (негатив) (а) и фаза (б)

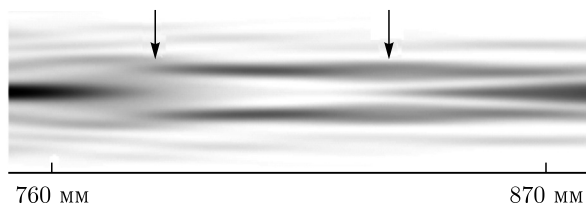


Рис. 5.156. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура квадрата, вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световой «бутылки»

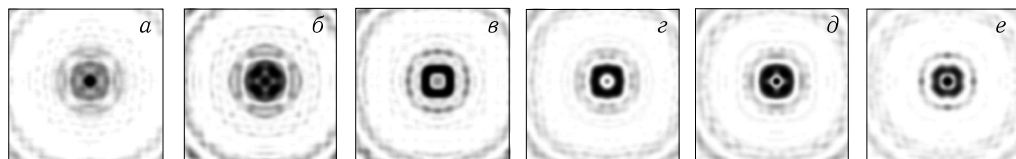


Рис. 5.157. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура квадрата, на расстояниях 760 мм (а), 780 мм (б), 800 мм (в), 820 мм (г), 840 мм (д), 860 мм (е) от плоскости элемента

от плоскости элемента, вычисленное по формуле (5.106) равняется 0,89. Средняя эффективность формирования ловушки 9%.

Аналогично были рассчитаны ловушки, внешняя граница которых имела контур равностороннего треугольника и прямоугольника. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму треугольника представлена на рис. 5.155. Общее число N одномодовых пучков, участвующих в вычислении функции пропускания согласно (5.100), равно 45.

Начальные значения коэффициентов C_p^1 для $1 \leq p \leq N$ выбирались равными 1. Радиус рассчитываемого ДОЭ — 3 мм. В ходе расчета было выполнено 16 итераций. Соответствующие распределения светового поля на первой итерации, рассчитанная функция пропускания и получающиеся распределения светового поля на последней итерации представлены, соответственно, на рис. 5.159–5.162. Значение однородности распределения интенсивности на расстоянии 820 мм равно 0,83. Среднее значение эффективности равно 11%.

Для случая формирования световой «бутылки», сечение которой имеет форму контура прямоугольника с соотношением сторон 2 к 1, соответствующая схема расположения пучков, функция пропускания и распределения интенсивности сформированных световых полей показаны на рис. 5.163–5.167

Рис. 5.158. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура равностороннего треугольника

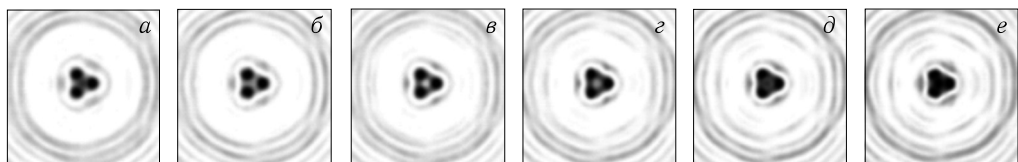
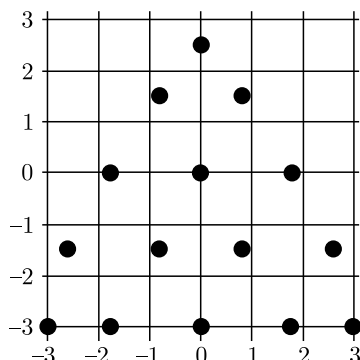


Рис. 5.159. Распределения интенсивности (негатив), формируемые на первой итерации, на расстояниях 760 мм (а), 780 мм (б), 800 мм (в), 820 мм (г), 840 мм (д), 860 мм (е) от плоскости элемента для случая расчета световой «бутылки» по схеме на рис. 5.158

Рис. 5.160. Функция пропускания элемента, формирующего световую «бутылку», внешняя граница которой имеет форму контура равностороннего треугольника: амплитуда (негатив) (а) и фаза (б)

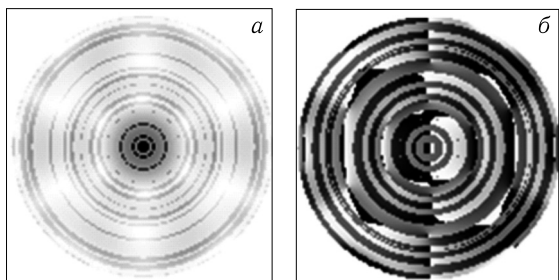
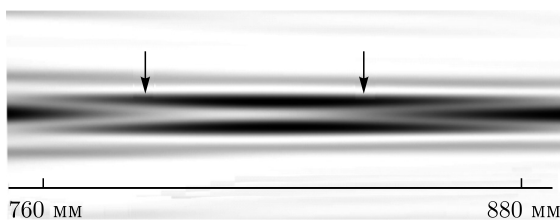


Рис. 5.161. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура равностороннего треугольника, вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световой «бутылки»



соответственно. В ходе расчета было выполнено 5 итераций описанной выше процедуры. Для данной ловушки значение однородности распределения интенсивности на расстоянии 830 мм равно 0,87, среднее значение эффективности равно 7%.

Из сравнения распределений интенсивности на рис. 5.156, 5.161, 5.166 можно заметить, что световые «бутылки» разной формы формируются

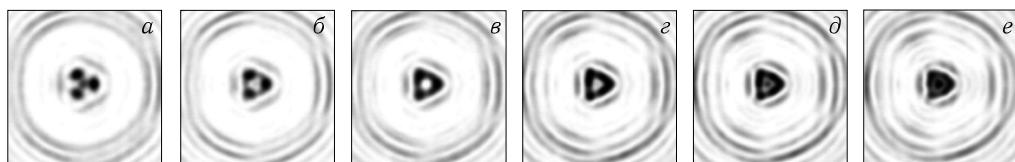


Рис. 5.162. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура равностороннего треугольника, на расстояниях 750 мм (а), 780 мм (б), 800 мм (в), 820 мм (г), 840 мм (д), 860 мм (е) от плоскости элемента

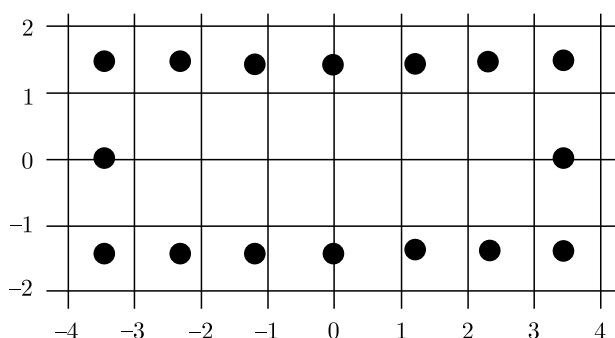


Рис. 5.163. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура прямоугольника

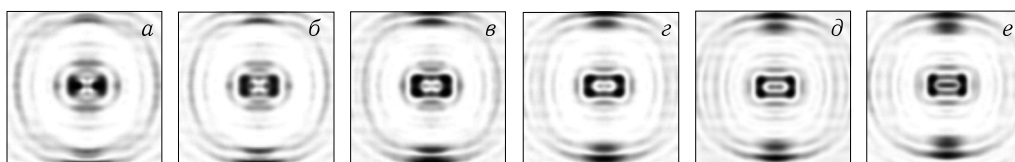


Рис. 5.164. Распределения интенсивности (негатив), формируемые на первой итерации, на расстояниях 760 мм (а), 780 мм (б), 800 мм (в), 820 мм (г), 840 мм (д), 860 мм (е) от плоскости элемента для случая расчета световой «бутылки» по схеме на рис. 5.163

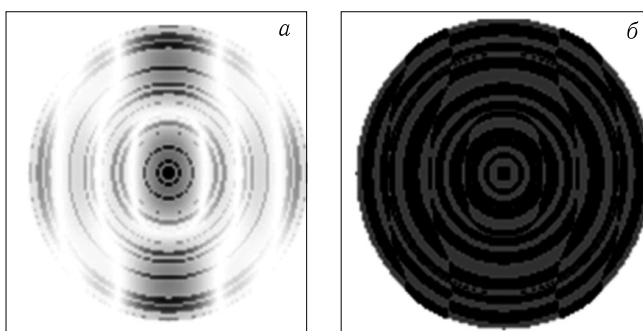


Рис. 5.165. Функция пропускания элемента, формирующего световую «бутылку», внешняя граница которой имеет форму контура прямоугольника: амплитуда (негатив) (а) и фаза (б)

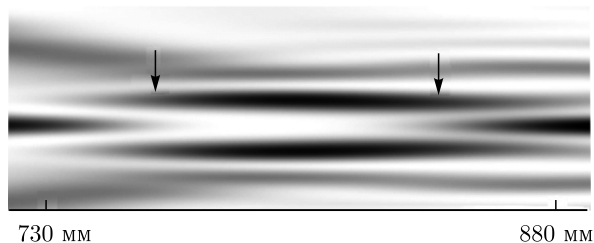


Рис. 5.166. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура прямоугольника, вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световой «бутылки»

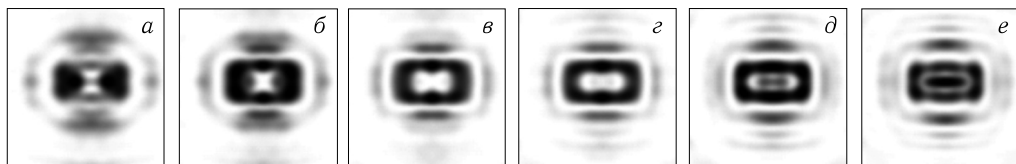


Рис. 5.167. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму контура прямоугольника, на расстояниях 770 мм (а), 790 мм (б), 810 мм (в), 830 мм (г), 850 мм (д), 870 мм (е) от плоскости элемента

на несколько отличающихся расстояниях от элемента; это можно объяснить разными поперечными размерами ловушек.

5.5.5. Формирование массивов световых «бутылок». Представленный выше метод формирования световых «бутылок» посредством использования суперпозиций пучков Бесселя может быть использован не только для формирования световых «бутылок», в сечении которых форма внешней границы имеет вид отличный от кольца, но и для формирования массивов таких ловушек. Ранее формирование массивов световых «бутылок» рассматривалось лишь в небольшом числе работ, так, в работе [140] с этой целью был использован обобщенный метод фазового контраста, а в работе [141] — составные голограммы, формирующие несколько удаленных друг от друга самовоспроизводящихся пучков Бесселя. В первой из представленных работ для формирования светового поля использовался пространственный модулятор света.

На рисунках 5.168, 5.169 представлены схемы расположения суперпозиций пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ для случая формирования двух и трех световых «бутылок», границы которых соприкасаются в плоскости, в которой поперечный размер области с минимумом интенсивности максимален. Радиус рассчитываемых элементов составляет 3 мм, длина волны падающего излучения равна 532 нм.

Как видно из рис. 5.168, в случае формирования двух световых бутылок использовалась схема с 15 составными пучками Бесселя. Таким образом, общее число одномодовых пучков, участвовавших в построении ловушек, было

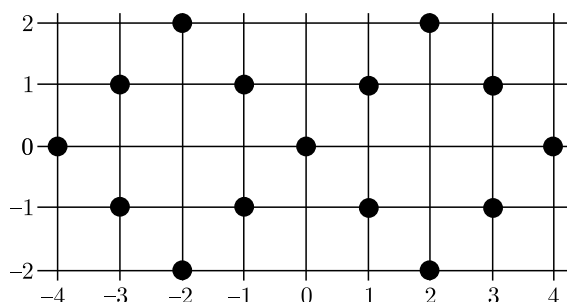


Рис. 5.168. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования двух световых «бутылок»

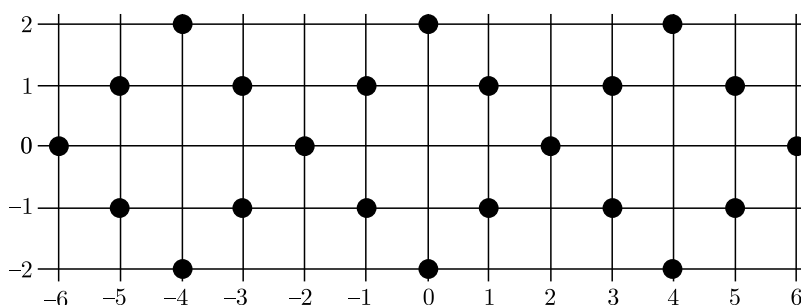


Рис. 5.169. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования трех световых «бутылок»

равно 45. В таблице 5.8 представлены рассчитанные значения коэффициентов $C_p(x, y)$ для каждого из отдельных составных пучков Бесселя.

В результате симметричного относительно начала координат расположения пучков, фаза рассчитанной по формуле (5.100) комплексной функции пропускания принимает бинарный вид (рис. 5.170, б).

Если проигнорировать амплитудную составляющую, то такой фазовый элемент будет формировать световое поле, распределение которого будет

Таблица 5.8. Значения коэффициентов C_p для случая формирования двух световых «бутылок»

Координаты центра пучка	Коэффициент C_p	Координаты центра пучка	Коэффициент C_p
(1; 1)	1	(-2; -2)	0,73
(1; -1)	1	(-2; 2)	0,73
(-1; 1)	1	(2; -2)	0,73
(-1; -1)	1	(2; 2)	0,73
(0; 0)	0,82	(3; -1)	0,73
(-4; 0)	0,73	(3; 1)	0,73
(-3; -1)	0,73	(4; 0)	0,73
(-3; 1)	0,73		

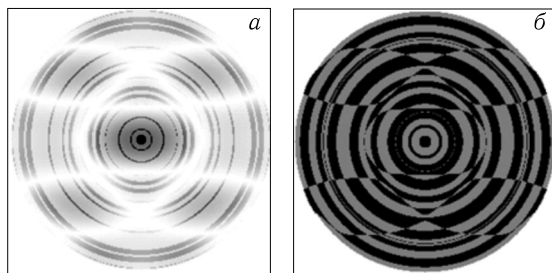


Рис. 5.170. Функция пропускания элемента, формирующего две световые «бутылки»: амплитуда (негатив) (а) и фаза (б)

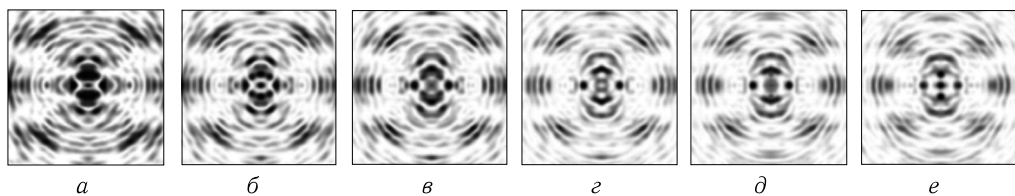


Рис. 5.171. Распределения интенсивности (негатив), формируемые фазовой функцией на рис. 5.170, б на расстояниях 790 мм (а), 810 мм (б), 830 мм (в), 850 мм (г), 870 мм (д), 890 мм (е) от плоскости элемента



Рис. 5.172. Кодированная фазовая функция пропускания элемента, формирующего две световые «бутылки»



Рис. 5.173. Распределения интенсивности (негатив) для двух сформированных световых «бутылок» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световых «бутылок»

иметь вид, представленный на рис. 5.171. Как видно, сформировать световые «бутылки» с помощью такого элемента не получается.

Метод кодирования амплитуды, описанный в предыдущей главе, позволяет перейти от амплитудно-фазовой функции пропускания ДОО к только фазовой. На рисунке 5.172 представлена фаза кодированного элемента. Уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не выполнялась, равен 0,1. Кодирование выполнялось по обеим пространственным координатам.

Распределения светового поля, формируемого таким элементом в пространстве, представлены на рис. 5.173, 5.174. Видно, что формируется две световые «бутылки». Среднее значение эффективности равно 8,5%. Значение однородности распределения интенсивности на расстоянии 840 мм равно 0,80.

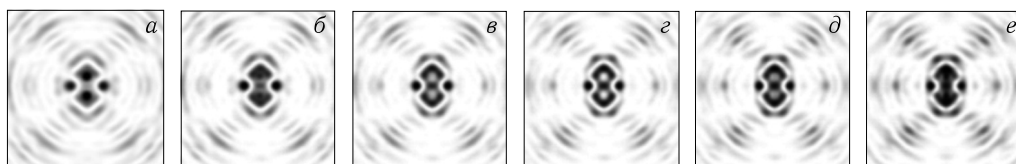


Рис. 5.174. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки», внешняя граница которой имеет форму треугольника, на расстояниях 780 мм (а), 800 мм (б), 820 мм (в), 840 мм (г), 860 мм (д), 880 мм (е) от плоскости элемента

В таблице 5.9 представлены рассчитанные значения коэффициентов $C_p(x, y)$ для случая формирования трех таких световых «бутылок».

Таблица 5.9. Значения коэффициентов C_p для случая формирования трех световых «бутылок»

Координаты центра пучка	Коэффициент C_p	Координаты центра пучка	Коэффициент C_p
(-6; 0)	0,6	(0; 2)	1,0
(-5; -1)	0,7	(1; -1)	1,0
(-5; 1)	0,7	(1; 1)	1,0
(-4; -2)	0,8	(2; 0)	0,9
(-4; 2)	0,8	(3; -1)	0,9
(-3; -1)	0,9	(3; 1)	0,9
(-3; 1)	0,9	(4; -2)	0,8
(-2; 0)	0,9	(4; 2)	0,8
(-1; -1)	1,0	(5; -1)	0,7
(-1; 1)	1,0	(5; 1)	0,7
(0; -2)	1,0	(6; 0)	0,6

В данном случае также из-за симметричного относительно начала координат расположения пучков фаза рассчитанной по формуле (5.100) функции пропускания ДОЭ имеет бинарный вид. Кодирование амплитуды по уровню 0,035 (осуществлялось по одной из пространственных координат) дало представленное на рис. 5.175 распределение фазы для элемента.

Распределение формируемого таким элементом светового поля представлено на рис. 5.176 и 5.177. Среднее значение эффективности равно 10%; для однородности распределения интенсивности на расстоянии 840 мм получается значение 0,77.

При дальнейшем увеличении числа ловушек с помощью указанного подхода трудно добиться хорошего сочетания дифракционной эффективности и качества формирования световых «бутылок». Увеличения значения эффективности формирования ловушек и качества их формирования, при их числе $M > 3$, можно добиться, если располагать их не в один ряд, а в несколько. Рассмотрим такой подход подробнее на примере простых световых «бутылок», поперечное сечение которых имеет форму кольца.

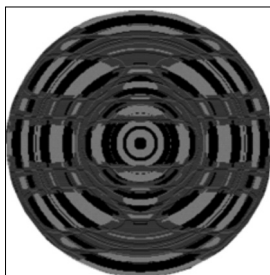


Рис. 5.175. Кодирующая фазовая функция пропускающего элемента, формирующего три световые «бутылки»

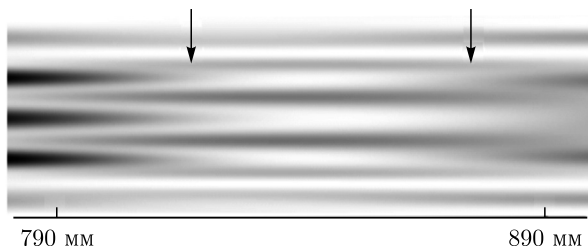


Рис. 5.176. Распределения интенсивности (негатив) для трех сформированных световых «бутылок» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световых «бутылок»

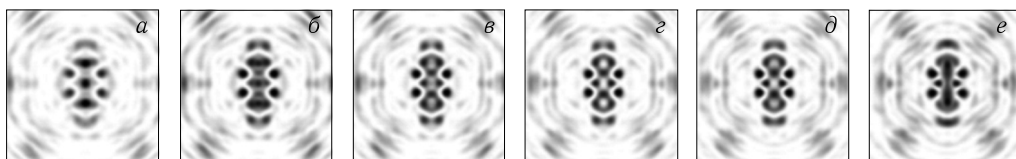


Рис. 5.177. Распределения интенсивности (негатив) для трех сформированных световых «бутылок» на расстояниях 780 мм (а), 800 мм (б), 820 мм (в), 840 мм (г), 860 мм (д), 890 мм (е) от плоскости элемента

Для создания такой одиночной световой «бутылки» нами был использован пучок Бесселя 0-го порядка, который формировался аксиконом с параметрами $R = 3$ мм, $\alpha = 21,85 \cdot 10^3$ м⁻¹, $\lambda = 532$ нм, функция пропускающего которого вычислялась по формуле (5.99). Если рассматривать только фазовое распределение, то функция пропускающего такого ДОЭ будет иметь вид, представленный на рис. 5.178.

При освещении такого элемента плоской волной с длиной волны $\lambda = 532$ нм, вдоль оси пучка, радиусом 3 мм, будут формироваться самовоспроизводящиеся световые «бутылки». На распределениях светового поля, представленных на рис. 5.179 и 5.180, видно, что одна из этих «бутылок» формируется на участке оптической оси от 500 до 524 мм.

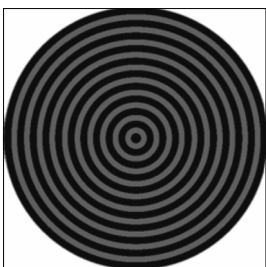


Рис. 5.178. Фазовая функция пропускающего элемента, формирующего световую «бутылку»

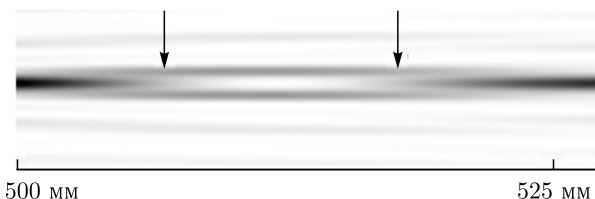


Рис. 5.179. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световой «бутылки»

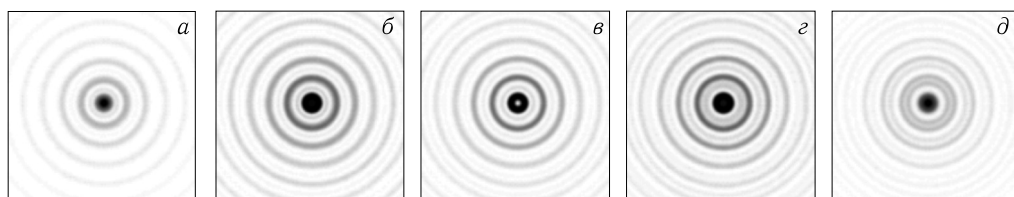


Рис. 5.180. Распределения интенсивности (негатив) для сформированной световой «бутылки» на расстояниях 502 мм (а), 507 мм (б), 512 мм (в), 517 мм (г), 522 мм (д) от плоскости элемента

Если формировать несколько таких световых пучков одновременно, то при условии, что соседние пучки будут иметь фазовый сдвиг, равный π , можно добиться формирования массива световых «бутылок», расстояние между которыми может быть меньше размеров самих ловушек. Данный подход похож на рассмотренный в работе [141], где для формирования массива световых «бутылок» были использованы составные голограммы, но при этом расстояние между формируемыми ловушками было в несколько раз больше поперечных размеров ловушек, что ограничивает область применения таких сложных ловушек.

Для вычисления функции пропускания элементов, формирующих несколько таких пучков, была использована формула (5.100). Для получения фазовых элементов амплитудная составляющая в случае числа формируемых ловушек $M < 3$ просто игнорировалась; при $M \geq 3$ производилось кодирование амплитуды по описанному ранее методу частичного кодирования. В случае трех ловушек уровень амплитуды, выше которого операция кодирования не применялась, равен 0,2; в случае пяти ловушек — 0,27. В результате были получены распределения фазовых функций элементов, формирующих две, три и, соответственно, пять световых бутылок (рис. 5.181). Бинарный вид фазовых распределений, также как и в рассмотренных ранее примерах, обусловлен симметричным расположением формируемых пучков относительно оси.

Распределения световых полей, полученные в результате моделирования прохождения плоской волны через ДОЭ, формирующие две и три световые бутылки, представлены на рис. 5.182–5.185, соответственно.

Средняя эффективность формирования соответствующих полей, вычисленная согласно формуле (5.92), равна: для случая двух световых «бутылок»

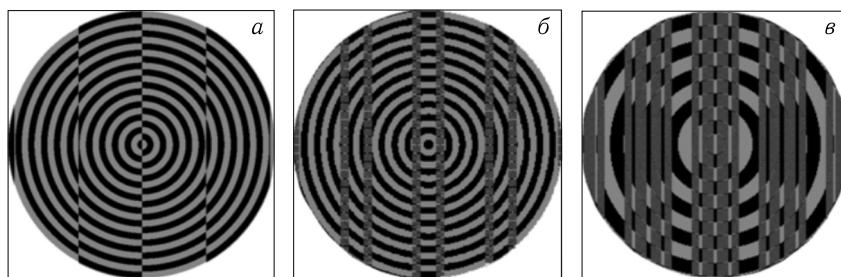


Рис. 5.181. Фазовые функции пропускания элементов, формирующих две (а), три (б) и пять (в) световых «бутылок»

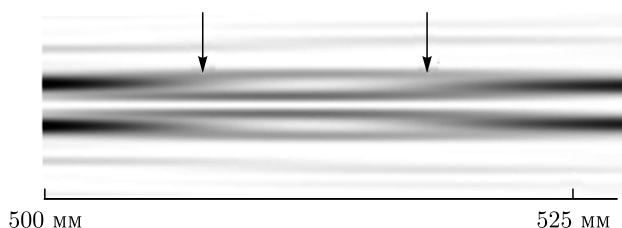


Рис. 5.182. Распределения интенсивности (негатив) для двух сформированных световых «бутылок» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световых «бутылок»

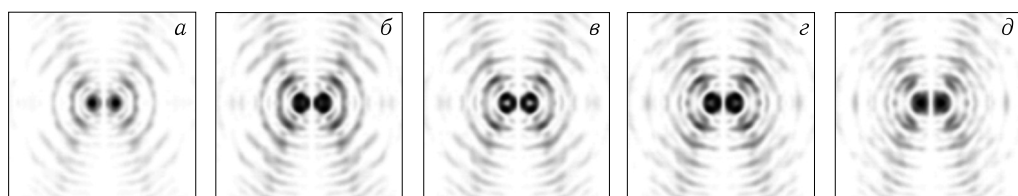


Рис. 5.183. Распределения интенсивности (негатив) для двух сформированных световых «бутылок» на расстояниях 502 мм (а), 507 мм (б), 512 мм (в), 517 мм (г), 522 мм (д) от плоскости элемента

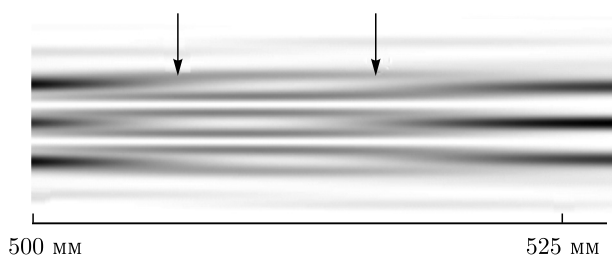


Рис. 5.184. Распределения интенсивности (негатив) для трех сформированных световых «бутылок» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световых «бутылок»

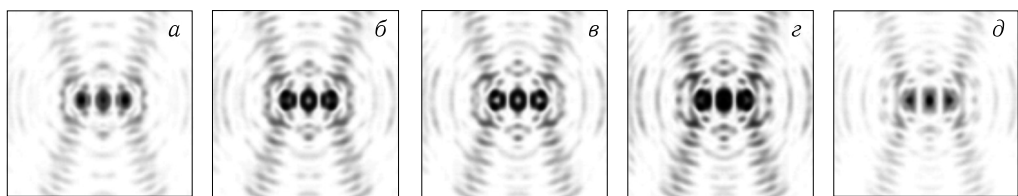


Рис. 5.185. Распределения интенсивности (негатив) для трех сформированных световых «бутылок» на расстояниях 502 мм (а), 507 мм (б), 512 мм (в), 517 мм (г), 522 мм (д) от плоскости элемента

6,0%, для трех — 5,5%. В случае формирования по описанной схеме пяти световых «бутылок» на участке от 500 до 525 мм ловушки искажены; но за счет того, что мы рассматриваем самовоспроизводящиеся пучки, они

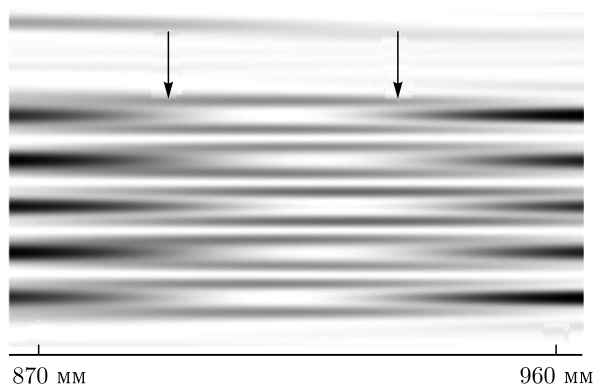


Рис. 5.186. Распределения интенсивности (негатив) для пяти сформированных световых «бутылок» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световых «бутылок»

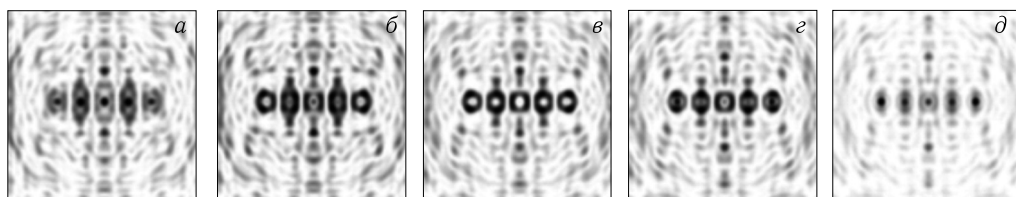


Рис. 5.187. Распределения интенсивности (негатив) для пяти сформированных световых «бутылок» на расстояниях 880 мм (а), 900 мм (б), 920 мм (в), 940 мм (г), 960 мм (д) от плоскости элемента

затем формируются на отрезке оси пучка от 880 мм до 960 мм, как видно из рис. 5.186–5.187. Эффективность их формирования равна 8 %.

Теперь рассмотрим, как на эффективности скажется то, что световые «бутылки» будут формироваться в два ряда. Для этого рассмотрим элемент, формирующий шесть ловушек в одной плоскости, расположенных в два ряда, при этом расстояние между рядами будет соизмеримо с расстояниями между ловушками в каждом из них. Если формировать такие ловушки в один ряд, то для того чтобы сформированные ловушки имели одинаковые энергетические характеристики, необходимо выполнять кодирование амплитуды с достаточно высоким уровнем амплитуды, выше которой операция кодирования не применяется, что приводит к снижению эффективности их формирования. Функция пропускания такого элемента имеет вид, представленный на рис. 5.188. Уровень кодирования амплитуды равен 0,3.

Формируемые распределения светового поля представлены на рис. 5.189 и 5.190. Вычисленная, согласно формуле (5.92), эффективность равна 12,5 %.

Таким образом, удалось добиться повышения эффективности по сравнению со случаем формирования пяти световых «бутылок», расположенных в ряд, на 4,5 %. Стоит отметить, что в данном случае в одном из направлений вдоль оптической оси возникают искажения некоторых из ловушек. Наличие этих искажений приводит к тому, что световая «бутылка» не закрывается

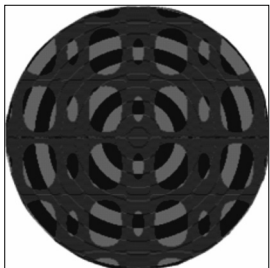


Рис. 5.188. Фазовая функция пропускания элемента, формирующего шесть световых «бутылок» в два ряда

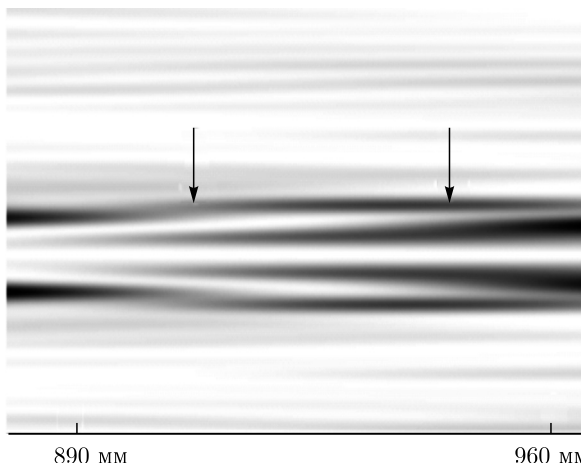


Рис. 5.189. Распределения интенсивности (негатив) для шести сформированных в два ряда световых «бутылок» вдоль оптической оси. Стрелочками указана область формирования световых «бутылок»

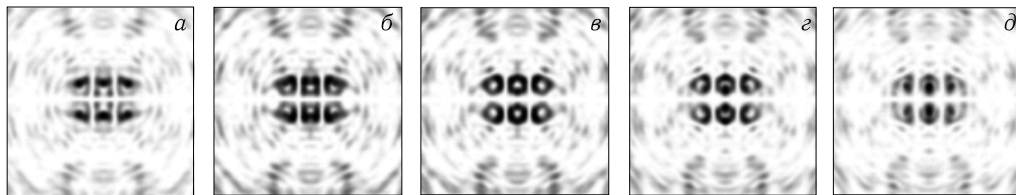


Рис. 5.190. Распределения интенсивности (негатив) для шести сформированных в два ряда световых «бутылок» на расстояниях 880 мм (а), 900 мм (б), 920 мм (в), 940 мм (г), 960 мм (д) от плоскости элемента

полностью, но за счет того, что размер колец, образующих ловушку, уменьшается, можно рассчитывать на стабильный захват частицы в такую ловушку.

5.5.6. Формирование массивов полых световых пучков. Как отмечалось ранее, фазы комплексных коэффициентов C_p в выражении (5.100) отвечают за фазовый сдвиг формируемых пучков относительно друг друга. Таким образом, если формировать $N_{\text{тр}}$ составных пучков Бесселя 0-го порядка с параметрами $\alpha_1 = 21,85 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_2 = 17,08 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $\alpha_3 = 10,31 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, и при этом значения фаз соответствующих им коэффициентов C_p будут линейно возрастать, то можно добиться формирования массивов не световых «бутылок», а полых световых пучков. Такие пучки могут рассматриваться в качестве универсальных ловушек, как для прозрачных, так и для непрозрачных частиц.

Рассмотрим формирование двух соприкасающихся полых световых пучков с помощью представленного выше подхода для формирования световых «бутылок» и их массивов. В качестве схемы расположения отдельных составных пучков Бесселя выберем схему, представленную на рис. 5.191.

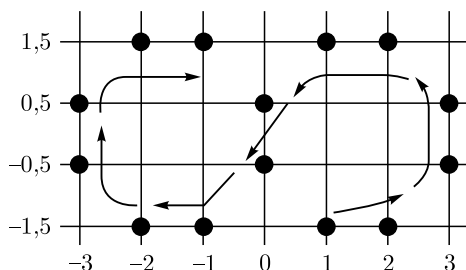


Рис. 5.191. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования двух полых световых пучков

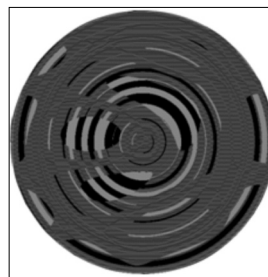


Рис. 5.192. Функция пропускания элемента, формирующего два полых световых пучка

Общее число одномодовых пучков, участвующих в формировании светового поля, равно 42. Пунктирная стрелка указывает направление линейного роста фаз коэффициентов C_p для соответствующих пучков. Фазы коэффициентов C_p возрастали от значения 0 радиан, для пучков с координатами $(1; -1,5)$, до значения $52/14\pi$ для пучков с координатами $(-1; 1,5)$. В отличие от случаев формирования массивов световых «бутылок» в случае формирования полых световых пучков не надо вычислять амплитуды коэффициентов C_p ; при расчете все они выбирались равными 1. Радиус ДОЭ составлял 3 мм. В результате расчета функции пропускания, согласно (5.100), и последующего выполнения операций кодирования амплитуды выше уровня 0,2 и бинаризации фазы была получена фазовая функция ДОЭ, представленная на рис. 5.192.

Результаты дифракции Френеля плоской световой волны с длиной волны $\lambda = 532$ нм и радиусом светового пучка 2 мм на ДОЭ представлены на рис. 5.193 и 5.194. Эффективность формирования световых ловушек, вычисленная согласно (5.102), равна 34 %.

Аналогично могут быть рассчитаны фазовые функции элементов, формирующих большее число соприкасающихся полых световых пучков. Если коэффициенты C_p пучков, располагающихся в симметричных относительно начала координат порядках, будут комплексно-сопряженными, то фазовое распределение функции пропускания согласно (5.100) будет бинарным. Для случаев формирования любого четного числа полых световых пучков можно рассчитать фазовую функцию бинарного вида.

Схемы для формирования трех и более полых световых пучков образуются из схемы для формирования двух пучков путем добавления дополнительных



Рис. 5.193. Распределения интенсивности (негатив) для двух сформированных полых световых пучков

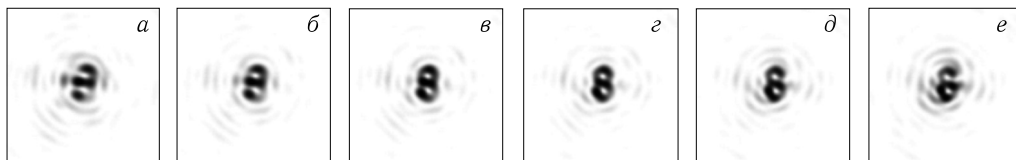


Рис. 5.194. Распределения интенсивности (негатив) для двух сформированных полых световых пучков на расстояниях 700 мм (а), 740 мм (б), 780 мм (в), 820 мм (г), 860 мм (д), 900 мм (е) от плоскости элемента

шести точек для каждого нового пучка. Таким образом, при расчете функции пропускания согласно (5.100) для случая трех полых пучков общее число N используемых пучков Бесселя 0-го порядка равно 60, в случае четырех — 78 и так далее. Соответствующие схемы представлены на рис. 5.195.

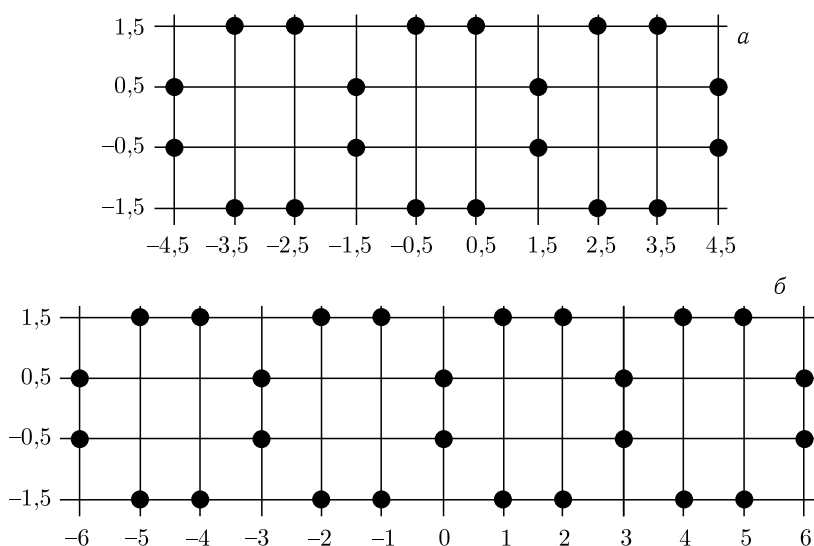


Рис. 5.195. Схема расположения суперпозиций пучков Бесселя для формирования трех (а) и четырех (б) полых световых пучков

Как было отмечено выше, в случае нечетного числа формируемых полых световых пучков фазовое распределение функции пропускания не бинарное. Для приведения к бинарному виду необходимо использовать процедуру кодирования фазы решеткой с несущей, согласно (5.95).

Согласно схеме для формирования трех полых световых пучков (рис. 5.195, а) вычисления по формуле (5.100) и последующие операции кодирования амплитуды выше уровня 0,2 и кодирования фазы согласно решеткой с частотой несущей $\beta = 10000$ лин/м дает бинарное фазовое распределение (рис. 5.196).

Радиус рассчитанного ДОЭ — 3 мм. Результат дифракции Френеля плоской световой волны с длиной волны $\lambda = 532$ нм и радиусом светового пучка 2 мм на ДОЭ представлены на рис. 5.197 и 5.198. Поскольку производится кодирование фазы, согласно (5.95), то формируется два дифракционных по-

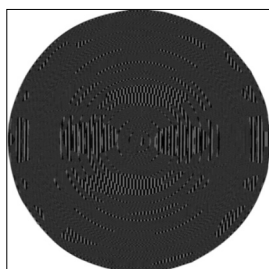


Рис. 5.196. Функция пропускания элемента, формирующего два полых световых пучка

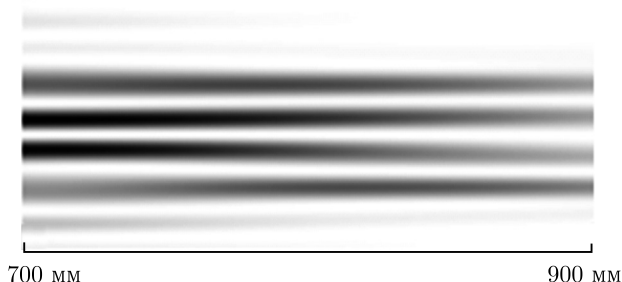


Рис. 5.197. Распределения интенсивности (негатив) вдоль оптической оси для трех сформированных полых световых пучков

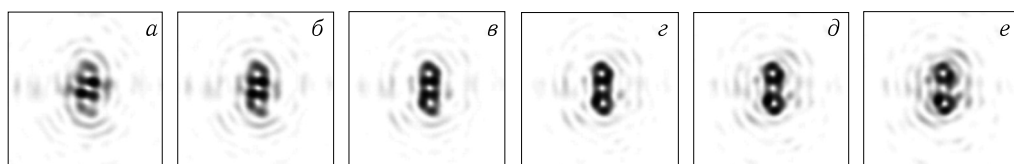


Рис. 5.198. Распределения интенсивности (негатив) для трех сформированных полых световых пучков на расстояниях 700 мм (а), 740 мм (б), 780 мм (в), 820 мм (г), 860 мм (д), 900 мм (е) от плоскости элемента

рядка, в каждом из которых можно наблюдать по три полых световых пучка. Расчеты, согласно (5.92), для суммарной эффективности обоих порядков дают значение в 31,5 %.

Как было указано выше, для случая формирования четырех полых световых пучков коэффициенты C_p можно подобрать таким образом, чтобы рассчитанное, согласно (5.100) фазовое распределение функции пропускания ДОЭ имело бинарный вид (рис. 5.199, б). Радиус ДОЭ — 3 мм.

Результаты дифракции Френеля плоской световой волны с длиной волны $\lambda = 532$ нм и радиусом светового пучка 2 мм на амплитудно-фазовом элементе представлены на рис. 5.200 и 5.201. Как видно, формируемые полые световые пучки имеют разрывы.

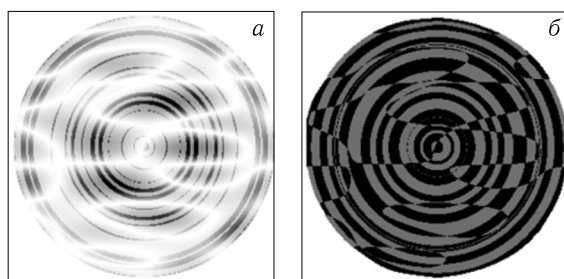


Рис. 5.199. Функция пропускания элемента, формирующего четыре полых световых пучка: амплитуда (негатив) (а) и фаза (б)

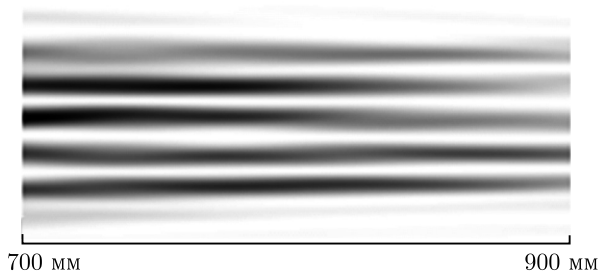


Рис. 5.200. Распределения интенсивности (негатив) вдоль оптической оси для четырех сформированных полых световых пучков

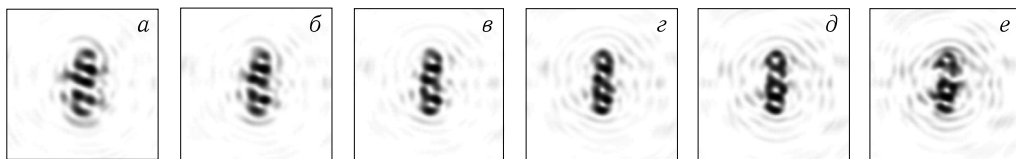


Рис. 5.201. Распределения интенсивности (негатив) для четырех сформированных полых световых пучков на расстояниях 700 мм (а), 740 мм (б), 780 мм (в), 820 мм (г), 860 мм (д), 900 мм (е) от плоскости элемента

Повысить качество формируемых в данном случае пучков можно путем изменения коэффициентов C_p . Если просто увеличивать фазы коэффициентов C_p соответствующих пучков при движении по контуру схемы их расположения, то рассчитанное распределение фазы функции пропускания не будет иметь бинарный вид (рис. 5.202). Радиус ДОЭ — 3 мм.

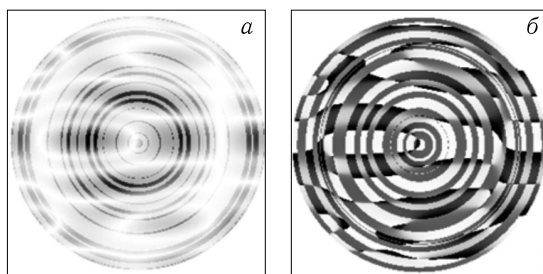


Рис. 5.202. Функция пропускания элемента, формирующего четыре полых световых пучка: амплитуда (негатив) (а) и фаза (б)

В результате операции кодирования амплитуды выше уровня 0,2 и последующей бинаризации получается фазовая функция пропускания ДОЭ, представленная на рис. 5.203.

Результаты дифракции Френеля плоской световой волны с длиной волны $\lambda = 532$ нм и радиусом светового пучка 2 мм на ДОЭ представлены на рис. 5.204 и 5.205.

В данном случае формируемое распределение интенсивности более равномерно и не имеет разрывов. Расчеты, согласно (5.92), для средней эффективности дают значение в 8%. Таким образом, как и в случае формирования

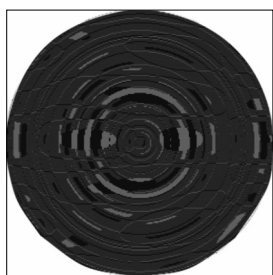


Рис. 5.203. Фазовая функция пропускания элемента, формирующего четыре полых световых пучка

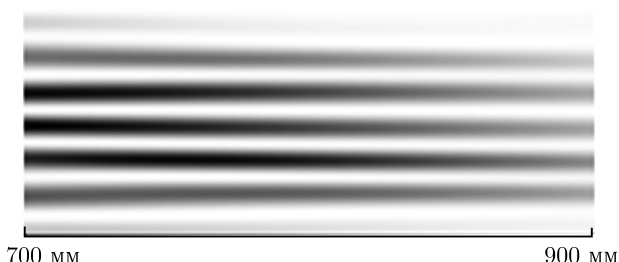


Рис. 5.204. Распределения интенсивности (негатив) вдоль оптической оси для четырех сформированных полых световых пучков

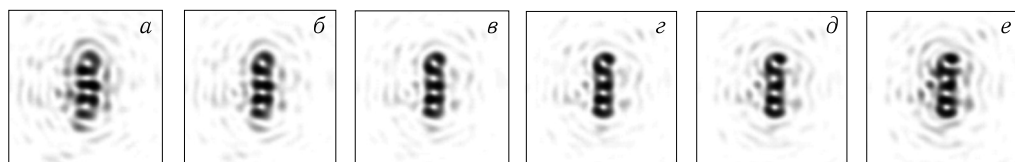


Рис. 5.205. Распределения интенсивности (негатив) для четырех сформированных полых световых пучков на расстояниях 700 мм (а), 740 мм (б), 780 мм (в), 820 мм (г), 860 мм (д), 900 мм (е) от плоскости элемента

световых «бутылок» при увеличении числа формируемых полых световых пучков эффективность их формирования снижается.

5.5.7. Экспериментальное формирование массивов световых «бутылок» с помощью бинарных ДОЭ. Бинарные ДОЭ, фазовые функции которых рассчитаны ранее и представлены на рис. 5.150, 5.172, 5.175, 5.178, 5.181, 5.196, 5.203, были изготовлены методом фотолитографии. Разрешение записи шаблона составило 1 мкм, глубина травления элемента — 530 нм. Диаметры изготовленных элементов — 4 и 4,4 мм. Соответствующие трехмерные изображения различных участков изготовленных дифракционных оптических элементов представлены на рис. 5.206.

Для оценки силы захвата микрообъекта используется закон Стокса:

$$F = 6\pi r\eta v, \quad (5.107)$$

где F — сила вязкого трения, равная силе оптического захвата, r — радиус микросферы, η — вязкость жидкости, v — скорость перемещения захваченной микросферы. Так как манипулируемые микрообъекты находятся в водном растворе, то η равно 0,9 мПа · с.

Для экспериментального формирования массивов световых «бутылок» [142] была использована оптическая схема, представленная на рис. 5.207. Диафрагма обрезала пучок до нужного размера, чтобы диаметры пучка и ДОЭ совпадали. Длина волны лазерного излучения равна 532 нм.

На рисунках 5.208–5.210 представлены результаты формирования одной, двух и, соответственно, трех световых «бутылок» с помощью бинарных элементов, фазовые функции которых представлены на рис. 5.150, 5.172, 5.175.

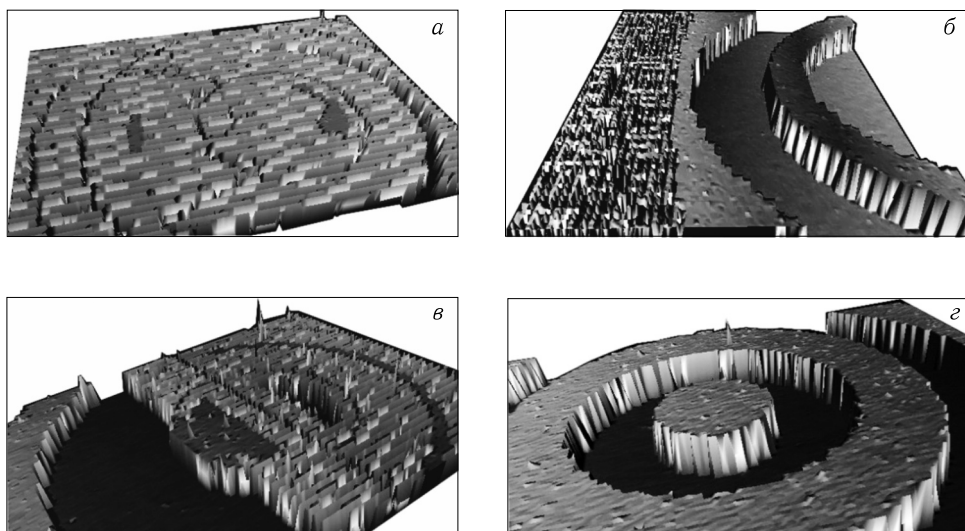


Рис. 5.206. Трехмерное изображение участка микрорельефа изготовленных дифракционных оптических элементов

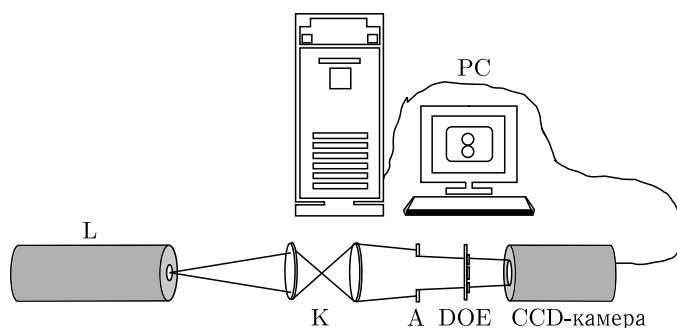


Рис. 5.207. Экспериментальная оптическая схема для формирования массивов световых «бутылок»

Результаты дифракции Френеля плоской световой волны на соответствующих элементах представлены на рис. 5.152, 5.174, 5.177. Как видно, сформированные изображения находятся в хорошем согласии с результатами моделирования. Небольшие несоответствия в расстояниях, на которых происходит формирование световых «бутылок», вызвано расходимостью пучка лазера.

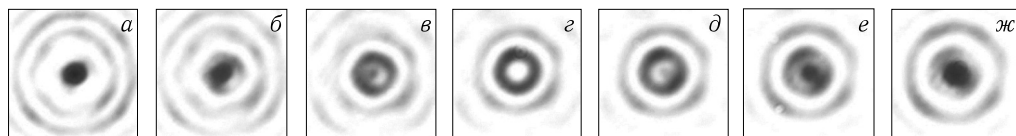


Рис. 5.208. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего одну световую «бутылку»: 625 мм (а), 650 мм (б), 675 мм (в), 700 мм (г), 725 мм (д), 750 мм (е), 775 мм (ж)

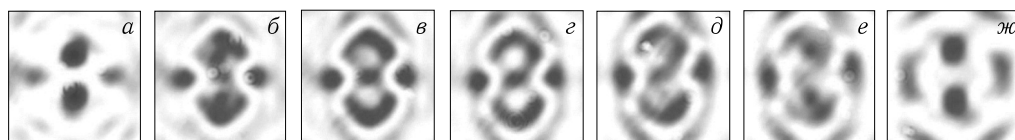


Рис. 5.209. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего две световые «бутылки»: 775 мм (а), 825 мм (б), 850 мм (в), 875 мм (г), 900 мм (д), 925 мм (е), 975 мм (ж)

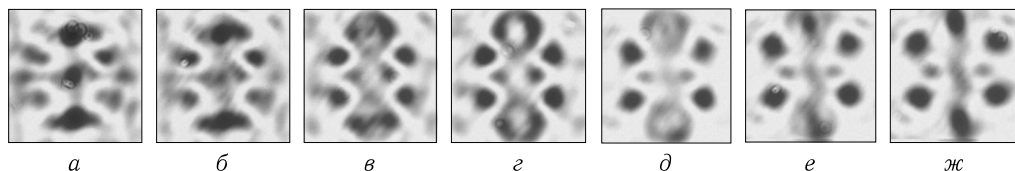


Рис. 5.210. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего три световые «бутылки»: 800 мм (а), 825 мм (б), 850 мм (в), 875 мм (г), 925 мм (д), 950 мм (е), 975 мм (ж)

На рисунках 5.211–5.215 представлены результаты формирования одной, двух, трех, пяти и, соответственно, шести световых «бутылок» с помощью бинарных элементов, фазовые функции которых представлены на рис. 5.178, 5.181.

Результаты дифракции Френеля плоской световой волны на элементах с данными фазовыми функциями представлены на рис. 5.180, 5.183, 5.185, 5.187, 5.190. Несоответствие расстояний, на которых формируются ловушка, вызвано тем, что при расчете диаметр элементов принимался равным 6 мм, а для эксперимента были изготовлены элементы диаметром 4 мм.

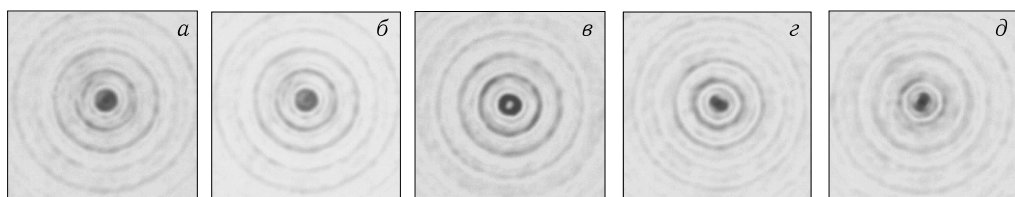


Рис. 5.211. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего одну световую «бутылку»: 195 мм (а), 200 мм (б), 205 мм (в), 210 мм (г), 215 мм (д)

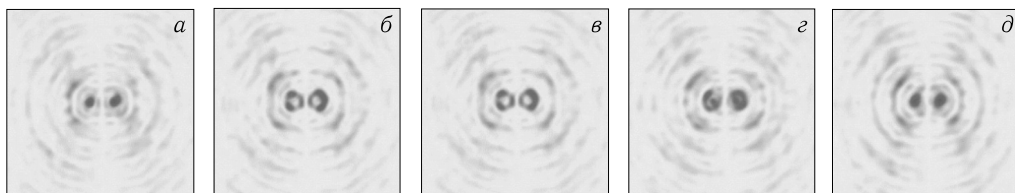


Рис. 5.212. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего две световые «бутылки»: 215 мм (а), 218 мм (б), 220 мм (в), 223 мм (г), 230 мм (д)

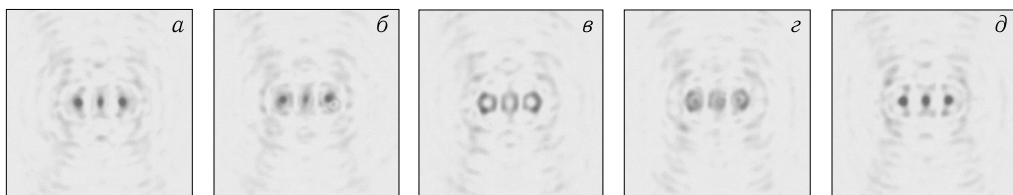


Рис. 5.213. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего три световые «бутылки»: 210 мм (а), 215 мм (б), 220 мм (в), 225 мм (г), 230 мм (д)

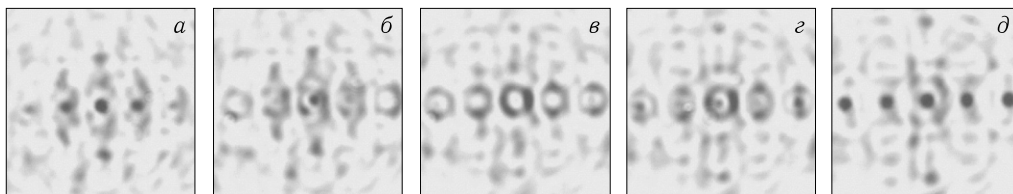


Рис. 5.214. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего пять световых «бутылок»: 410 мм (а), 420 мм (б), 430 мм (в), 440 мм (г), 455 мм (д)

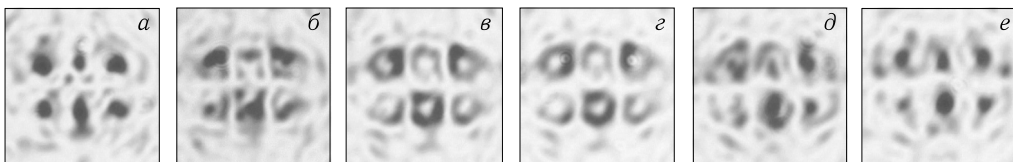


Рис. 5.215. Распределения интенсивности (негатив) на различных расстояниях от плоскости элемента, формирующего шесть световых «бутылок»: 395 мм (а), 415 мм (б), 425 мм (в), 435 мм (г), 445 мм (д), 460 мм (е)

Это было вызвано тем, чтобы упростить ввод сформированного ДОЭ пучка в фокусирующий микрообъектив. На основании представленных изображений можно сделать вывод о том, что световые «бутылки» формируются с хорошим качеством.

5.5.8. Захват прозрачных микрообъектов в системе световых «бутылок». Световые «бутылки» предназначены для захвата непрозрачных частиц (в более общем случае, для захвата частиц, показатель преломления которых ниже, чем у окружающей среды), но как показали расчеты [143] по методу, предложенному в работе [52], вполне могут быть использованы и для манипулирования прозрачными микрообъектами, показатель преломления которых выше, чем у окружающей среды.

Как известно, суммарный импульс светового пучка

$$\mathbf{P} = \frac{E}{c} \mathbf{A}, \quad (5.108)$$

где E — энергия в световом пучке, c — скорость света, \mathbf{A} — единичный вектор, задающий направление распространения света.

Если нужно рассчитать силу, то энергия делится на время действия t :

$$F = \frac{E}{tc} (1 + k) = \frac{W}{c} [1 + \chi], \quad (5.109)$$

где W — суммарная мощность светового пучка, попавшего на поверхность.

Исходя из (5.108), давление света при перпендикулярном падении на материальный объект описывается простой формулой

$$p = \frac{I}{c} (1 + \chi), \quad (5.110)$$

где I — интенсивность, χ — коэффициент отражения поверхности.

В случае, если световой пучок попадает на преломляющий объект сложной формы, расчет сил несколько усложняется (рис. 5.216).

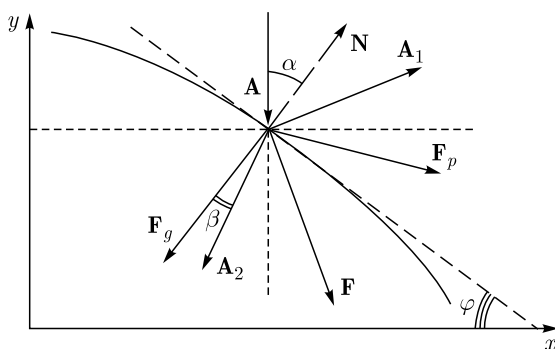


Рис. 5.216. Преломление луча на поверхности с учетом френелевского отражения

Предположим для простоты без потери общности, что изначально на преломляющую поверхность падает вертикально одиночный луч света с мощностью W . В результате образуются два луча: отраженный с мощностью W_1 и преломленный с мощностью W_2 . Отраженный луч является причиной возникновения силы светового давления, которая может быть определена по формуле

$$\mathbf{F}_p = -2\chi \frac{W}{c} \cos \alpha \mathbf{N}, \quad (5.111)$$

где угол α — угол падения, W — мощность падающего пучка, \mathbf{N} — вектор нормали к поверхности в точке падения луча, $\chi = \frac{\sin^2(\alpha - \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta)}$ — коэффициент отражения Френеля для случая s -поляризации света. S -поляризация выбрана не случайно: все эффекты захвата, которые будут описаны ниже, наиболее ярко проявляются именно в случае s -поляризации, хотя для p -поляризации они также присутствуют.

Преломленный луч дает градиентную силу:

$$\mathbf{F}_g = 2(1 - \chi) \frac{W}{c} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \frac{\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2|}, \quad (5.112)$$

где \mathbf{A}_1 — единичный вектор, задающий направление распространения отраженного пучка, \mathbf{A}_2 — единичный вектор, задающий направление распространения преломленного пучка, β — угол преломления.

Суммарная сила \mathbf{F} получается векторным сложением силы светового давления \mathbf{F}_p и градиентной силы \mathbf{F}_g :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}_g. \quad (5.113)$$

Как видно из рис. 5.216, проекции сил \mathbf{F}_p и \mathbf{F}_g на ось x направлены в разные стороны. Это означает, что проекция суммарной силы \mathbf{F} может быть направлена как в ту, так и в другую сторону. При небольших значениях φ — угла касательной к поверхности в точке падения к оси x , проекция \mathbf{F}_p на ось x меньше, чем проекция \mathbf{F}_g на ось x , и проекция суммарной силы на ось x положительная. Но с ростом φ коэффициент отражения растет, и, начиная с некоторого угла, знак проекции силы \mathbf{F} на ось x меняется, т.е. преобладает сила давления света, выталкивающая частицу из пучка. Следовательно, пучки типа световая «бутылка» можно использовать для захвата прозрачных микрочастиц. При правильно подобранном радиусе пучка сферическая прозрачная микрочастица будет захвачена в центре световой «бутылки».

Рассмотрим аналитически случай сферической микрочастицы. Как видно из рис. 5.217, угол падения α совпадает с углом между вертикалью и направлением на точку входа луча в микрочастицу. Это угол ϕ , в данном случае совпадающий с углом φ на рис. 5.217. Таким образом, формула (5.111) преобразуется к виду

$$\mathbf{F}_p = 2\chi \frac{W}{c} \cos \phi (-\mathbf{N}), \quad (5.114)$$

где $\mathbf{N} = (\sin \phi, \cos \phi)$.

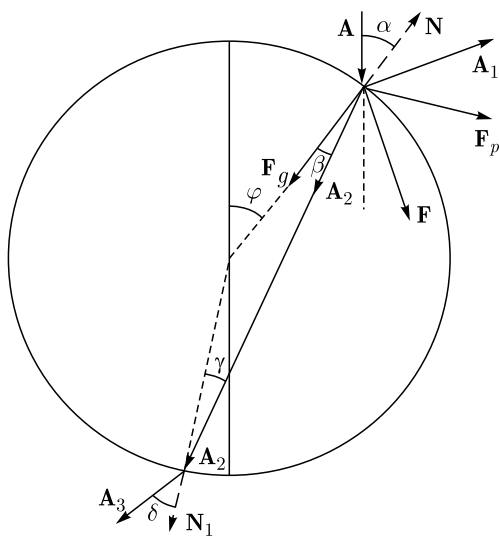


Рис. 5.217. Преломление луча света на сферической микрочастице

Для простоты рассмотрим только проекцию силы на ось x :

$$F_{px} = -2\chi \frac{W}{c} \cos \phi \sin \phi = -\chi \frac{W}{c} 2\phi. \quad (5.115)$$

Для силы \mathbf{F}_g проекцию на ось x можно записать с учетом векторов $\mathbf{A} = (0, -1)$, $\mathbf{A}_2 = (-\sin(\phi - \beta), -\cos(\phi - \beta))$ и соотношения

$$n_1 \sin \phi = n_2 \sin \beta, \quad (5.116)$$

где n_1 — показатель преломления среды, n_2 — показатель преломления микрочастицы.

После подстановки получаем

$$\begin{aligned} F_{gx} &= 2(1-k) \frac{P}{c} \sin \frac{\phi - \beta}{2} \cdot \frac{\sin(\phi - \beta)}{\sqrt{\sin^2(\phi - \beta) + (-1 + \cos(\phi - \beta))^2}} = \\ &= 2(1-k) \frac{P}{c} \sin \frac{\phi - \beta}{2} \frac{\sin(\phi - \beta)}{\sqrt{2(1 - \cos)(\phi - \beta)}} = \\ &= 2(1-k) \frac{P}{c} \sin \frac{\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right)}{2} \frac{\sin\left(\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right)\right)}{\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right)\right)\right)}}. \end{aligned} \quad (5.117)$$

Окончательно, подставляя значение френелевского коэффициента отражения, получим формулу для проекции градиентной силы на ось x :

$$\begin{aligned} F_{gx} &= 2 \left\{ 1 - \frac{\left[\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right) \right]}{\sin^2 \left[\phi + \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right) \right]} \right\} \frac{P}{c} \sin \frac{\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right)}{2} \times \\ &\times \frac{\sin\left(\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right)\right)}{\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\phi - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi\right)\right)\right)}}. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Однако формула (5.118) рассчитывает градиентную силу только с учетом одного преломления, в то время как преломление будет иметь место еще на одной поверхности (рис. 5.217).

Конечно, кроме второго преломления, присутствует еще и отражение на второй границе микрошара, но ввиду специфической геометрии задачи угол падения и отражения будет очень близок к вертикали и учет второго отражения при высокой сложности почти ничего не добавляет в баланс сил.

С учетом двух преломлений формула (5.112) преобразуется к виду

$$\mathbf{F}_g = 2(1 - k) \frac{P}{c} \sin \frac{\alpha - \delta}{2} \cdot \frac{\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3}{|\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3|}. \quad (5.119)$$

После преобразований получаем окончательную формулу для градиентной силы:

$$F_{1x} = 2 \left\{ 1 - \frac{\left[\phi - \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi \right) \right]}{\sin^2 \left[\phi + \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi \right) \right]} \right\} \frac{P}{c} \sin \frac{\phi - \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi \right)}{2} \times \\ \times \frac{\sin \left[2 \left(\phi - \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi \right) \right) \right]}{\sqrt{2 \left(1 - \cos \left(\phi - \arcsin \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \phi \right) \right) \right)}}. \quad (5.120)$$

Для расчета рассмотрим следующие параметры: $n_1 = 1,33$, $n_2 = 1,56$. Это показатели преломления воды и полистирола, соответственно. Просуммируем проекции сил \mathbf{F}_g и \mathbf{F}_p на ось x , нормируем сумму на максимальное значение и построим для нее график (рис. 5.218, сплошная линия).

Как видно из рис. 5.218, значение проекции силы меняет знак, если центральный угол ϕ равен примерно 83° , и достигает максимума, если угол ϕ равен примерно 87° . Это означает, что при диаметре кольцевого светового пучка немного меньше диаметра сферической микрочастицы он будет удерживать прозрачную микрочастицу в своем геометрическом центре. То есть, при правильно подобранном размере пучка получается универсальная ловушка для любых микрообъектов заданного размера. Радиус пучка по максимуму интенсивности будет связан с углом ϕ по формуле

$$R = r \sin \phi, \quad (5.121)$$

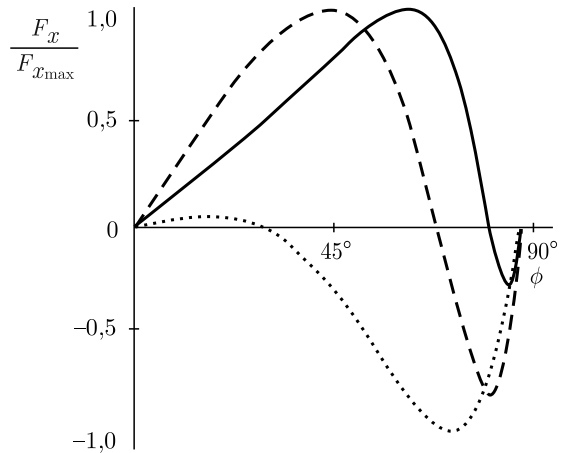


Рис. 5.218. Проекция суммарной силы, действующей на сферическую микрочастицу, в зависимости от значения центрального угла ϕ точки входа пучка: сплошная линия — для показателей преломления $n_1 = 1,33$, $n_2 = 1,56$, точечная линия — для показателей преломления $n_1 = 1$, $n_2 = 1,56$, штриховая линия — для показателей преломления $n_1 = 1,0$, $n_2 = 2,4$

где r — радиус микрочастицы, R — радиус пучка по максимуму интенсивности. При указанных выше параметрах — угол максимальной силы захвата $\phi = 87^\circ$ и радиус микрочастицы равен 2,5 мкм — радиус пучка должен быть равен 2,49 мкм, т. е. радиусы пучка и микрочастицы практически совпадают. Максимальное значение удерживающей силы при этом примерно в 4 раза меньше, чем значение градиентной удерживающей силы (рис. 5.218, сплошная линия).

Следует заметить, что с увеличением разности показателей преломления значение этой силы растет, а значение угла ϕ , при котором сила меняет знак, наоборот уменьшается. Так, при расположении полистироловой микрочастицы в воздухе $n_1 = 1,0$, $n_2 = 1,56$ максимальное значение только в 1,5 раза меньше максимального значения градиентной силы (рис. 5.218, точечная линия). А если взять, например, алмазную микрочастицу в воздухе $n_1 = 1,0$, $n_2 = 2,4$, то сила захвата давлением света будет превосходить градиентную силу почти в 10 раз (рис. 5.218, штриховая линия).

Для манипулирования прозрачными частицами была использована оптическая схема, представленная на рис. 5.127. Длина волны используемого лазерного излучения — 532 нм, максимальная средняя мощность лазера — 2000 мВт.

На рисунке 5.219 представлены стадии движения одной захваченной микросферы полистирола в одиночной световой «бутылке». Интервал времени между отдельными кадрами — 5 с. Средняя скорость перемещения микрочастицы составила $(0,60 \pm 0,04)$ мкм/с. Сила захвата, рассчитанная согласно (5.108), равна $(0,025 \pm 0,002)$ пкН.

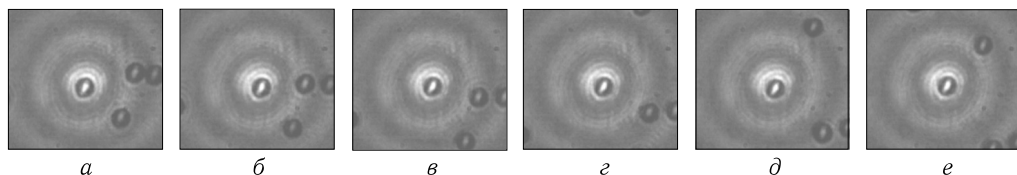


Рис. 5.219. Стадии движения полистиролового микрошара, захваченного в одиночной световой «бутылке». Интервал времени между кадрами — 5 с

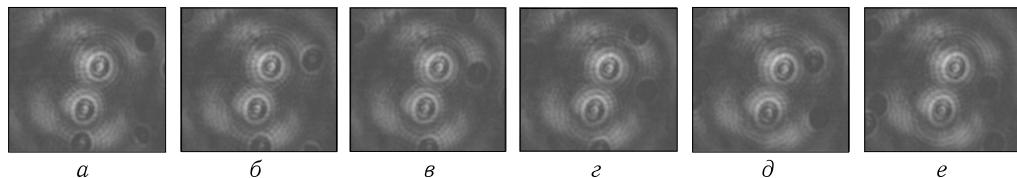


Рис. 5.220. Стадии движения двух полистироловых микрошаров, захваченных в двух световых «бутылках». Интервал времени между кадрами — 5 с

На рисунке 5.220 представлены стадии движения двух захваченных микросфер полистирола в двух световых «бутылках». Интервал времени между отдельными кадрами — 5 с. Средняя скорость перемещения микрочастиц

составила $(1,00 \pm 0,04)$ мкм/с. Сила захвата, рассчитанная согласно (5.108), равна $(0,042 \pm 0,002)$ пкН.

На рисунке 5.221 представлены стадии движения трех захваченных микросфер полистирола в трех световых «бутылках». Интервал времени между отдельными кадрами — 5 с. Средняя скорость перемещения микрочастиц составила $(0,7 \pm 0,04)$ мкм/с. Сила захвата, рассчитанная согласно (5.108), равна $(0,030 \pm 0,002)$ пкН.

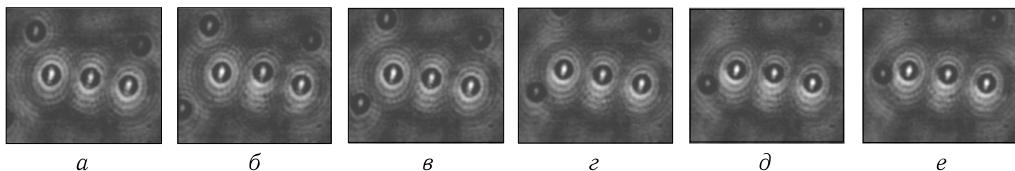


Рис. 5.221. Стадии движения трех полистироловых микрошаров, захваченных в трех световых «бутылках». Интервал времени между кадрами — 5 с

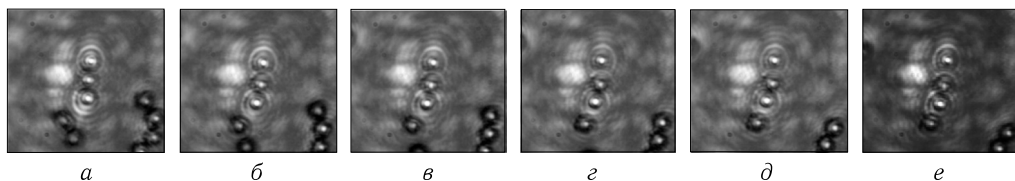


Рис. 5.222. Стадии движения трех полистироловых микрошаров, захваченных в световом поле из шести световых «бутылок». Интервал времени между кадрами — 4 с

На рисунке 5.222 представлены результаты захвата микросфер полистирола в системе из шести световых «бутылок».

Произвести захват сразу шести микросфер не удалось: постоянно часть микрочастиц выпала из ловушек, так как из-за разделения энергии излучения между шестью ловушками абсолютное значение силы захвата оказалось особенно малым для прозрачных микрообъектов. Поэтому на рис. 5.222 представлены стадии движения только трех микросфер полистирола. Интервал времени между отдельными кадрами — 4 с. Средняя скорость перемещения микрочастиц составила $(0,50 \pm 0,04)$ мкм/с. Сила захвата, рассчитанная согласно (5.108), равна $(0,021 \pm 0,002)$ пкН.

Таким образом, видно, световые «бутылки» действительно позволяют захватывать и перемещать прозрачные микрообъекты.

5.5.9. Захват и перемещение металлических микрочастиц олова, форма которых близка к сферической. Промышленно выпускаемые порошки металлов содержат микрочастицы чрезвычайно неправильной формы. Оптический захват таких микрочастиц, как правило, сопряжен с трудностями чисто технического характера. Для проведения экспериментов по захвату непрозрачных микрочастиц в системе световых «бутылок», путем создания электрической дуги между двумя оловянными электродами вблизи поверхности воды, были получены микрочастицы олова. Микрочастицы расплавленного металла при падении приобретали почти сферическую форму и застывали

так при попадании в воду. Таким образом, удалось получить в воде взвесь шарообразных микрочастиц с размерами от 1 до 20 мкм. Для оптического захвата и перемещения оловянных микрочастиц была использована оптическая схема, представленная на рис. 5.127. Для фокусировки пучка с целью получения световой «бутылки» нужного размера был использован микрообъектив с увеличением 20 \times . Мощность пучка составила около 1 Вт, длина волны используемого лазерного излучения — 532 нм.

К сожалению, описанный выше способ получения металлических микрочастиц дает относительно небольшую их концентрацию во взвеси и большой разброс по параметрам, поэтому захватить две примерно одинаковые по размерам микрочастицы оказалось затруднительно. На рисунке 5.223 представлены стадии перемещения с интервалом 2 с одной микрочастицы из олова диаметром около 3 мкм в двойной световой «бутылке». При этом микрочастица поочередно захватывалась и перемещалась в каждой из двух областей низкой интенсивности, что доказывает работоспособность обеих ловушек в пучке.

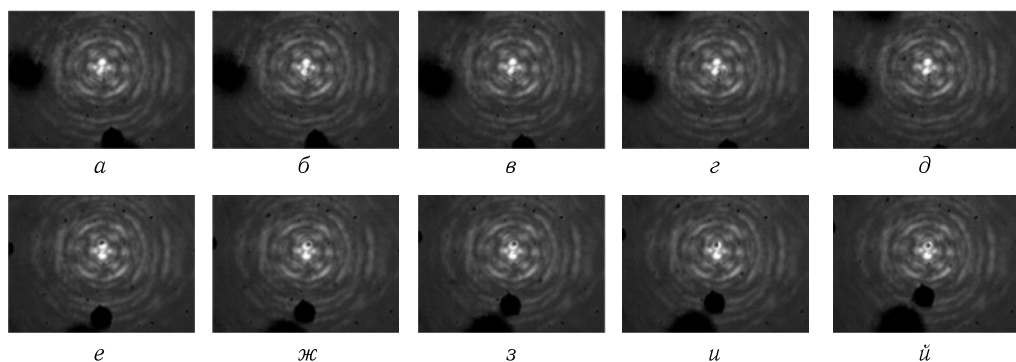


Рис. 5.223. Стадии перемещения оловянной микрочастицы диаметром 3 мкм в двойной световой «бутылке». Интервал времени между кадрами — 2 с

Средняя скорость перемещения составила 1,5 мкм/с. Считая, что частица имеет форму, близкую к сферической, и используя формулу (5.108), получаем значение силы захвата — 0,038 пкН.

5.5.10. Осаждение и позиционирование микрообъектов с помощью массивов полых световых пучков. Если манипулирование микрообъектами осуществляется в кювете, содержащей взвесь микрочастиц, то на дне кюветы концентрация микрочастиц относительно невелика, тогда как в придонном слое их количество на порядок больше. Для создания из микрочастиц структур на дне кюветы необходимо использовать полые световые пучки, сохраняющие структуру при распространении в свободном пространстве [69]. Массивы таких пучков позволяют решить задачу одновременного и параллельного позиционирования большого количества микрообъектов.

Полые световые пучки выглядят как некие световые трубки только в том случае, если рассматривать их свободное распространение после ДОЭ. При фокусировке эти пучки становятся своеобразными световыми воронками,

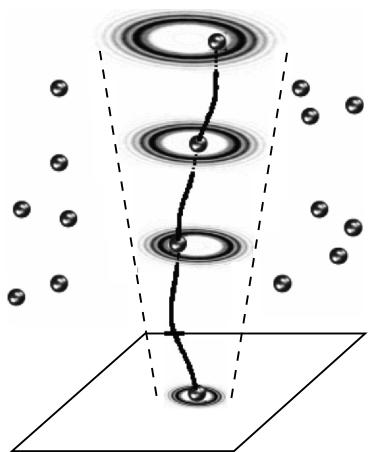


Рис. 5.224. Процесс осаждения микрочастиц из водной суспензии на оптическую подложку

которыми очень удобно осаждать микрочастицы из суспензии на дно подложки (рис. 5.224).

Использование нескольких рядом расположенных полых пучков позволяет одновременно с осаждением располагать микрочастицы в нужном порядке.

Для осуществления экспериментов по осаждению и позиционированию прозрачных микрообъектов была использована оптическая схема (рис. 5.127): L_1 — фокусирующий микрообъектив ($8\times$), L_2 — изображающий микрообъектив ($20\times$). В качестве объектов манипулирования были выбраны прозрачные микросферы полистирола диаметром 5 $\mu\text{м}$. Длина волны лазерного излучения — 532 нм, максимальная средняя выходная мощность лазера — 2000 мВт.

На рисунке 5.225 показаны стадии осаждения и позиционирования полистироловых микросфер в тройном полном пучке. Видно, что с помощью полых пучков осуществляется быстрый процесс выстраивания микрочастиц в линию. При этом

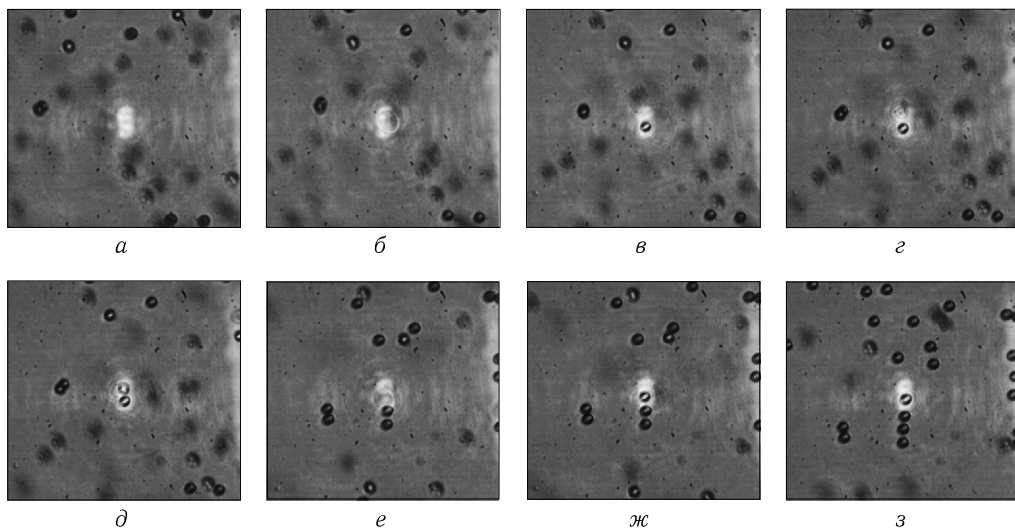


Рис. 5.225. Стадии процесса осаждения выстраивания в линию группы полистироловых микрочастиц: начальное состояние подложки (а), начало осаждения первой микрочастицы (б), окончание осаждения первой микрочастицы (в), начало осаждения второй микрочастицы (г), окончательное осаждение второй микрочастицы (д), начало осаждения третьей микрочастицы (е), окончательное осаждение третьей микрочастицы (ж), осаждение четвертой микрочастицы (з). Моменты времени на кадрах: а) 0 с; б) 4 с; в) 12 с; г) 16 с; д) 20 с; е) 50 с; ж) 58 с; з) 88 с

нет необходимости в больших перемещениях захватывающего пучка в сторону, так как микрочастицы сами попадают в ловушку.

5.6. Световые пучки, формируемые ДОЭ, для неповреждающего захвата биологических микробъектов

Манипулирование отдельными клетками играет важную роль в задачах оплодотворения *in vitro*, междуклеточных взаимодействий, слияния клеток, эмбриологии, микробиологии, исследования стволовых клеток и регенерационной медицины. Исследования поведения отдельных клеток дают информацию о химических внутриклеточных взаимодействиях, механических свойствах клеток, позволяют проводить исследования электромагнитных свойств материала клеток.

Несмотря на огромное количество преимуществ перед контактными техниками, оптический захват, тем не менее, может привести к повреждению захватываемого биоматериала [144], что в ряде случаев является крайне нежелательным эффектом.

Повреждение биологических микробъектов продолжает оставаться наибольшей трудностью, сдерживающей развитие технологии оптического пинцета. Основная причина повреждений также остается не до конца выясненной. В качестве возможных называются мультифотонная абсорбция [145], образование свободных атомов кислорода [146] и поглощение тепла раствором, окружающим фокус лазера [147].

Исследование Мирсаидова и его коллег [148] детально рассматривает проблемы фотоповреждения захватываемого биоматериала на примере бактерий *E. coli*, сравнивая множественные ловушки с разделением по времени и множественные ловушки на основе «holographic optical tweezers» (HOT). Аналогичные техники применяются достаточно широко (см, например, [149], [150]); авторы [148] приходят к выводу, что в обоих случаях основную роль играет поглощенная суммарно клеткой энергия. Результаты этого исследования показывают, что критическим для клетки *E. coli* является количество энергии в 5 Дж.

Суммируя различные исследования и различные рассмотренные в них факторы повреждения, можно сказать, что минимизировать эти повреждения можно выбирая правильную длину волны лазера — чтобы избежать излишнего поглощения, следя за временем экспозиции биологического материала внутри оптической ловушки и по возможности ограничивая мощность излучения, рассеиваемую на объекте. Кроме того, основная опасность повреждения заключается не столько в разрушении и смерти клетки (обычно мощность и длина волны захватывающего излучения лазера таковы, что гибель клетки наступает только через десятки минут), сколько в генетическом повреждении, а также в распределении этого излучения внутри самой клетки. Так, например, повреждение ядра клетки будет влиять на ее жизнеспособность гораздо сильнее, чем повреждение менее значимых органелл.

Различные модификации лазерного пучка, используемого для захвата, являются предметом неослабевающего интереса со стороны исследователей. Существующую литературу по этой теме можно классифицировать по двум

критериям: *цели* модификации пучка и *динамичности* используемого ДОЭ. Основные целевые направления следующие: создание систем оптических ловушек, позволяющих захватывать и манипулировать сразу несколькими частицами и наделение пучка некоторыми специальными свойствами. Используемый при этом ДОЭ может быть либо динамическим (так называемые НОТ, либо статическим — микрорельефом на прозрачной пластинке или оптоволокне (см., например, [151])). Разумеется, цель модификации зачастую определяет, должен ли используемый ДОЭ быть динамическим. Динамические ДОЭ обычно управляются с ЭВМ и могут быть легко изменены в режиме реального времени, что является их огромным преимуществом. Процесс изготовления статических ДОЭ, в то же время, весьма сложен и на большинстве своих этапов необратим. С другой стороны, энергетическая эффективность динамических ДОЭ — модуляторов — невелика и составляет порядка 15 %, поэтому статические ДОЭ предпочтительнее, если не предполагается динамического изменения профиля пучка.

Ярким представителем серии исследований оптического захвата с использованием оптического модулятора является работа под руководством Моради [152], где показана возможность создания множественных ловушек с помощью динамических ДОЭ с контролем силы захвата в каждой элементарной ловушке. Похожая работа была выполнена несколько ранее Эмилиани и его коллегами [153].

Особые свойства захватывающего пучка тоже имеют различные назначения. Во-первых, подобные модификации вносятся, чтобы добиться более устойчивого захвата или фиксированной ориентации захваченных объектов. В этом случае сечение пучка обычно сравнимо с размером захватываемого объекта. Во-вторых, отличные от гауссова распределения создаются для сортировки или конвейерного перемещения захваченных частиц в пространстве. Это позволяет осуществлять оптические манипуляции при неподвижном пучке.

В качестве модификаций первого из перечисленных типов часто используются различные суперпозиции мод свободного пространства. Так, например, различные порядки мод Гаусса-Лаггера используются для управления ориентацией и вращением захваченных частиц, как это было показано, например, в работах [154] и [155]. Особенный интерес вызывают так называемые «оптические бутылки» — пучки, поперечное распределение интенсивности которых имеет обширные области с нулевой интенсивностью. В работе [156] представлен новый тип пучков — пустые гиперсинус-гауссовы пучки, образующие в точке перетяжки четко выраженное кольцо. Олсон и его коллеги разработали метод получения «оптических тоннелей», используя генетические алгоритмы для нахождения коэффициентов при сферических функциях, в суперпозиции дающих необходимое распределение [157].

В работе [158] были изучены свойства пучка, являющегося суперпозицией двух пучков с коническими волновыми фронтами и топологическими зарядами противоположенных знаков. Было отмечено, что пучок может служить для захвата объектов определенного размера, поскольку захват становился возможным лишь начиная с определенного размера — зависящего, при том, от порядка выбранных аксиконов.

Моды могут совмещаться не только в фокальной плоскости. Разработанная композиция [159] с небольшим смещением гауссова пучка и моды Гаусса–Лагерра образует похожее в продольном сечении на подкову распределение интенсивности.

Иногда уже существующие распределения подвергаются небольшим модификациям при помощи фазовых ДОЭ. К примеру, в работе [160] изучались пучки Лоренц–Гаусса и оценивалось их возможное применение для оптического захвата. Было показано, что лоренц-гауссовы пучки при захвате объекта перед фокальной плоскостью обеспечивают большую устойчивость захвата.

Очень важным применением статических ДОЭ являются различные оптические конвейеры — распределения интенсивности, которые перемещают все захваченные частицы в определенном направлении, и фильтры — распределения интенсивности, захватывающие частицы только одного типа (одной формы, одной плотности, одного размера и т. д.). В таких схемах энергетическая эффективность оптических элементов часто играет большую роль. В качестве примера можно привести работу [161] — отметим, однако, что в самой работе используются модуляторы — ДОЭ для создания комбинаций оптических ловушек, позволяющих контролировать сбор частиц и их дальнейшее пространственное распределение. Можно также в качестве примера привести использование вихревых световых полей для перемещения микрообъектов по заданным траекториям без перемещения самого пучка [11, 162, 163].

Наконец, некоторые модификации пучка не требуют ни сложных модуляторов, ни дорогих в изготовлении ДОЭ. В работе [164] представлено изящное в своей простоте решение, позволяющее менять жесткость ловушки простым изменением выходного зрачка объектива, проецирующего пучок в предметную плоскость. Показано, что профиль потенциальной ямы вблизи максимума интенсивности пучка сильно зависит от формы апертуры.

Настоящая работа посвящена модификации используемого для захвата оптического пучка таким образом, чтобы снизить входную мощность пучка и одновременно обеспечить такое распределение интенсивности в фокальной плоскости, чтобы большая часть излучения пришлась на периферию захватываемого биологического объекта. Генетическая информация, повреждения которой следует избегать сильнее всего, находится в ядре, которое в свою очередь чаще всего располагается вблизи геометрического центра ядра. Для выбранного нами в качестве объекта эксперимента вида дрожжей *Saccharomyces cerevisiae* это верно в подавляющем большинстве случаев, что видно из исследования [165]. В этой работе для формирования распределения интенсивности в лазерном пучке используется статический микрорельеф на кварцевой пластинке, а для теоретической оценки динамики внутри оптической ловушки — многолучевая геометрическая оптика.

5.6.1. Модификация гауссова пучка с целью оптимизации силовых характеристик оптической ловушки. Про моделируем поле сил, действующих на сферический объект радиусом 5 мкм, помещенный в гауссов пучок. Теоретические основы такого расчета были изложены в работах [52] и [166], и там же подтверждены экспериментом. Для моделирования использовался

программный комплекс, описанный в [167], который позволяет рассчитывать силы действующие в световом пучке на неоднородный эллипсоидальный микрообъект. Моделирование основано на законах геометрической оптики, что, хотя и дает довольно значительную погрешность при вычислениях, обеспечивает эффективность вычислений, позволяющую быстро оценить продуктивность изучаемого пучка.

В ходе моделирования пучок представляется в виде большого количества лучей, интенсивность и направление которых определяются фазоамплитудными характеристиками пучка. Далее прослеживается путь каждого луча сквозь модель клетки и на разделах сред вычисляется сила воздействия луча.

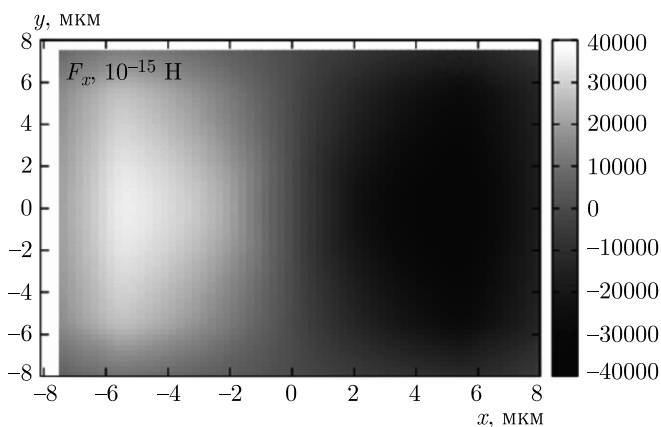


Рис. 5.226. Поле x -составляющей силы, действующей на сферический объект радиусом 5 мкм со стороны гауссова пучка

Результаты моделирования показывают, что силы оптического захвата достигают максимума, если объект несколько смещен относительно центра пучка (точки $(0,0)$ на рис. 5.226).

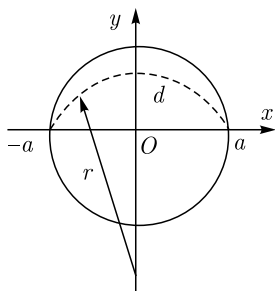


Рис. 5.227. Модификация гауссова пучка

Очевидно, что можно найти такую форму светового пучка, которая при той же мощности излучения будет обеспечивать большее значение силы в направлении одной из осей в плоскости сечения пучка (например, вдоль оси x), чем гауссов пучок.

Для этого будем деформировать пучок специальным образом. Пусть исходный гауссов пучок имеет радиус a . Модифицируем пучок таким образом, чтобы эквиосвещенными кривыми пучка стали замкнутые кривые, образованные из дуг двух окружностей разного радиуса, расположенных с небольшим смещением (см. рис. 5.227).

В качестве параметра, определяющего величину изгиба, можно выбрать $d = t_1 \cdot a$ — координату пересечения дуги с осью y . Саму дугу вспомогательной окружности можно задать уравнением $y = c(x)$. Такое распределение

амплитуды будет иметь форму полумесяца и может быть описано формулами:

$$A(x, y) = \exp\left(\frac{-x^2}{a^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(y - c(x) - t_3 \cdot a)^2}{(t_2 \cdot a)^2}\right), \quad c(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - r + d, \quad (5.122)$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{1 + t_1^2}{t_1}\right).$$

Параметры t_1 , t_2 и t_3 определяют особенности формы пучка. Параметр t_1 определяет соотношение внутренней и внешней полуокружности, ограничивающей полумесяц. Параметр t_2 определяет, насколько быстро спадает к краям пучка интенсивность светового поля. Параметр t_3 определяет стационарную, не зависящую от x ширину полумесяца.

Полученное распределение теперь используем для расчета силы, действующей на объект, освещенный пучком такой формы. Используя метод наискорейшего градиентного спуска для оптимизации формы пучка по параметрам t_1 , t_2 и t_3 , получим, что максимум силы достигается при $t_1 \rightarrow 1$, $t_2, t_3 \rightarrow 0$. В этом случае распределение интенсивности схлопывается в точку, т.е., становится дельта-функцией. Таким образом, в плоскости захвата объекта существует особая точка, такая, что для достижения максимальных значений силы в заданном направлении наиболее выгодно направить всю энергию пучка в эту точку. Расположение данной точки определяется формой объекта.

В силу дифракционных ограничений, однако, получить световые пучки с распределением интенсивности в виде дельта-функции невозможно. Чтобы максимально приблизиться к оптимальному распределению, остановим оптимизацию на стадии, когда дифракционный предел еще не перейден. При использовании водной среды ($n \approx 1,33$) и лазера с длиной волны $\lambda \approx 500$ нм дифракционный предел будет равен

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{2n} \approx 0,2 \text{ мкм}. \quad (5.123)$$

Для удовлетворения дифракционных ограничений наложим ограничение снизу на параметр $t_2 \geq 0,04$, что будет соответствовать расстоянию $a - d = 0,2$ мкм (характерная ширина полумесяца).

Для оптимизированных параметров распределения в этом случае получим следующие значения: $t_1 = 0,94$, $t_2 = ,04$, $t_3 = 0,0$. Распределение интенсивности светового пучка с такими параметрами изображено на рис. 5.225.

Моделируя освещение таким пучком эллипсоида, и принимая вклад силы каждого луча как

$$F_i = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-1}{c_0}(-I_r \mathbf{a}_r - I_d \mathbf{a}_d + I_e \mathbf{a}_e), \quad (5.124)$$

где I_e , I_r , I_d — соответственно, интенсивность падающего, отраженного и проходящего лучей, а \mathbf{a}_e , \mathbf{a}_r , \mathbf{a}_d — их направления, получим численную оценку [167].

Расчетные значения сил, действующих на сферический объект радиусом $R = 5$ мкм при освещении его гауссовым пучком, пучком-полумесяцем и пучком-дельта-функцией, приведены в табл. 5.10.

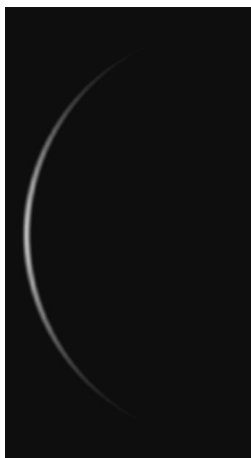


Рис. 5.228. Оптимизированное распределение интенсивности

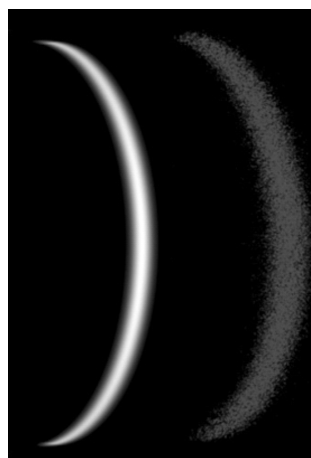


Рис. 5.229. Теоретическое (слева) и экспериментальное (справа) распределение интенсивности в пучке-полумесяце

Для удобства сравнения все результаты нормированы на максимальное значение, соответствующее дельта-функции.

Таблица 5.10. Значения силы при освещении объекта радиусом $R = 5$ мкм световыми пучками мощностью 300 мВт с различными распределениями интенсивности

Тип пучка	Абсолютное значение силы, пкН	Нормированное значение силы
Гауссов пучок	103	0,31
Оптимизированный пучок-полумесяц	293	0,88
Дельта-функция	333	1

Из таблицы видно, что оптимизированное распределение в виде полумесяца обеспечивает 0,88 теоретически достижимого максимума, а гауссово — только 0,31.

Для захвата эллипсоидальных частиц пучок-полумесяц был несколько видоизменен: путем простой подстановки, $x \rightarrow x_{\text{mod}} = kx$, внешняя дуга из круговой превращалась в эллиптическую, где k — отношение большой и малой полуосей эллипса. Для *Saccharomyces cerevisiae* $k \approx 1,5$.

5.6.2. Измерения энергетической эффективности ДОЭ, образующих пучки-полумесяцы. Для формирования описанного выше распределения интенсивности был рассчитан по алгоритму, описанному в работе [96], и изготовлен методом фотолитографии бинарный ДОЭ. Разрешение элемента — 1 мкм, глубина травления составляла (480 ± 50) нм.

На рисунке 5.230 изображена фазовая функция изготовленного ДОЭ, а на рис. 5.231 — участок его микрорельефа.

Были проведены опыты по измерению эффективности изготовленного ДОЭ. Эти эксперименты служили двум целям. Во-первых, измерялась ди-

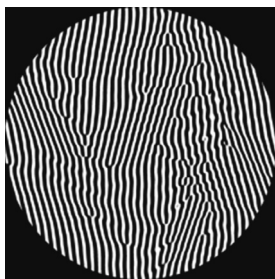


Рис. 5.230. Фазовая функция ДОЭ, формирующего распределение «полумесяца»

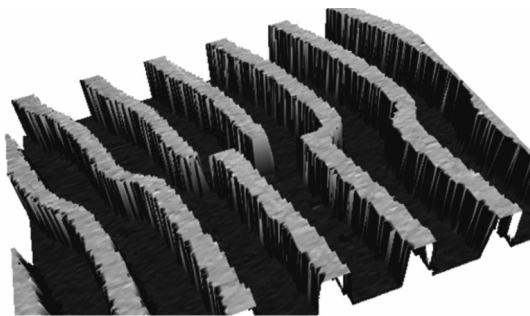


Рис. 5.231. Микрорельеф изготовленного ДОЭ

фракционная эффективность фазовой пластинки, которая является одним из показателей качества, как расчета фазового распределения, так и качества изготовления ДОЭ. Во-вторых, сравнение с гауссовым пучком, прошедшим ту же самую оптическую систему, позволит в дальнейшем сравнить эффективность распределения интенсивности в виде полумесяца: зная, какая часть входящего излучения дошла до фокуса пучка в случае гауссова пучка и пучка-полумесяца, и измерив максимальную силу захвата, которую может дать каждая из ловушек, можно сделать определенные заключения о силовой эффективности ловушки.

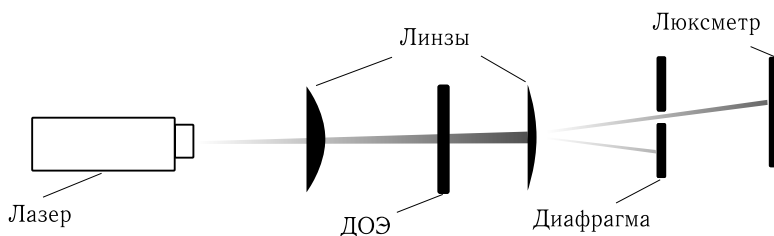


Рис. 5.232. Оптическая схема для измерения энергетической эффективности пучка-полумесяца

На рисунке 5.232 приведена схема, использовавшаяся для измерения энергетической эффективности пучков-полумесяцев. Луч твердотельного лазера с длиной волны $\lambda = 532$ нм через коллиматор направлялся на ДОЭ, после чего линзой фокусировался на приемный элемент люксметра. Диафрагмой отсекался зеркальный порядок и более высокие дифракционные порядки изображения. Коллиматором и фокусатором служили две линзы с фокусным расстоянием $f = 400$ мм.

Энергетическая эффективность оценивалась сравнением освещенности, достигаемой пучком-полумесяцем, с освещенностью, достигаемой гауссовым пучком. Для измерения использовалась та же схема, но без ДОЭ. Диафрагма была открыта на тот же самый радиус отверстия.

В таблице 5.11 приведены результаты измерений.

Таблица 5.11. Результаты измерения энергетической эффективности пучков-полумесяцев

Тип пучка	Освещенность, лкс	Энергетическая эффективность
Гауссов пучок	950 ± 100	1
Пучок-полумесяц	280 ± 50	$0,29 \pm 0,05$

5.6.3. Эксперименты по оптическим манипуляциям клетками *saccharomyces cerevisiae*. Для серии экспериментов культура *Saccharomyces cerevisiae* была выдержана в глюкозном растворе в течение 10 ч. Для опытов по захвату небольшое количество культуры растворяли в дистиллированной воде, чтобы обеспечить удобную для захвата концентрацию частиц.

Оптическая схема экспериментальной установки приведена на рис. 5.233. В качестве источника лазерного излучения использовался лазер с длиной волны $\lambda = 532$ нм и переменной мощностью (200–2000 мВт). Предметная плоскость подсвечивалась белым светом от лампы накаливания. Фиксация изображения в предметной плоскости осуществлялась с помощью CCD-камеры TMDSIPCAM8127J3 (30 кадров/с, 1080 p). Фильтр перед CCD камерой отсеивал большую часть лазерного излучения, чтобы не засвечивать изображение захваченных частиц.

Луч лазера с помощью поворотного зеркала направлялся на ДОЭ, после чего фокусировался внутри капли взвеси дрожжей *Saccharomyces cerevisiae* при помощи иммерсионного объектива с 40-кратным увеличением. Затем 8-кратный объектив проецировал изображение происходящего в предметной плоскости, которое при помощи еще одного поворотного зеркала через фильтр зеленых волн попадало на матрицу CCD-камеры. Изображение с камеры в режиме реального времени отображалось на экране ПК, позволяя управлять

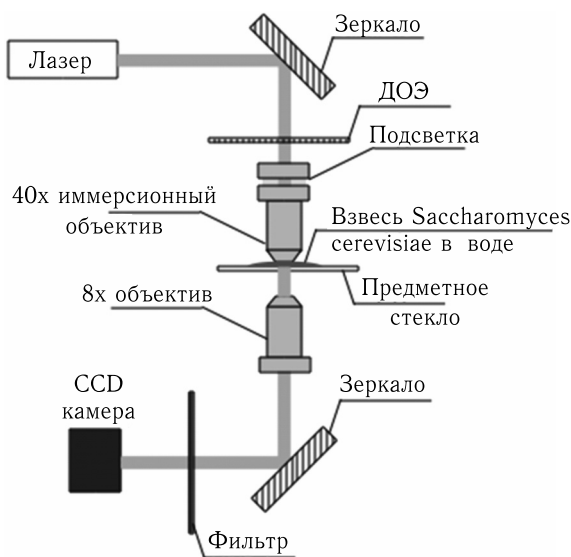


Рис. 5.233. Оптическая схема эксперимента

процессом захвата с помощью микровинтов предметного столика вручную, осуществляя визуальный контроль.

Цель серии опытов заключалась в определении критической скорости, при которой происходит вылет захваченного объекта из оптической ловушки, образованной пучком-полумесяцем и, для сравнения, гауссовым пучком. В этом случае пользуясь близостью формы захватываемых объектов к сферической, с достаточной степенью точности можно оценить максимальную удерживающую силу ловушки, предполагая ее линейную зависимость от скорости. Ранее [167] было показано, что равновесие между силой сопротивления среды и силами светового давления наступает практически мгновенно, а коэффициент в зависимости силы сопротивления от скорости можно принять равным $6\pi r\eta$. Проще говоря, можно не учитывать релаксационный период системы жидкость-клетка и считать силу светового давления в момент отрыва равной силе вязкого трения. Следовательно, из формулы Стокса имеем

$$F_{\max} = v_{\max} 6\pi r\eta. \quad (5.125)$$

Таким образом, для оценки сил используем метод, описанный в работе [168].

Попытки захвата клеток дрожжей пучками-полумесяцами оказались весьма успешными.

Первоначальное предположение полностью оправдалось: при захвате и перемещении основная доля облучения приходится на периферию клетки, как это видно на рис. 5.236. Кроме того, форма пучка обеспечивала дополнительную жесткость ловушки в поперечном движению направлении.

Для сравнения аналогичные эксперименты были произведены с гауссовым пучком. При захвате гауссовым пучком клетки временами вылетают из ловушки из-за поперечных движению микропотоков.

Таблица 5.12. Сравнение численных результатов экспериментов

Тип пучка	Входная мощность лазера, мВт	Эффективность пучка, отн. ед.	Мощность излучения в фокусе пучка	Максимальная сила захвата, пН
Полумесяц	1300	0,29	377	1200
Гауссов	250	1	250	400

Результаты эксперимента показывают, что при сравнимой мощности излучения, попадающей в фокус пучка, сила захвата пучка-полумесяца в несколько раз больше силы, которую можно получить, используя гауссов пучок.

На рисунке 5.234 и 5.235 приведено по одному эпизоду из серий экспериментов с пучком-полумесяцем и гауссовым пучком соответственно. Оба эпизода изображают изменение скорости в зависимости от времени от момента захвата клетки пучком, до момента ее вылета из пучка.

Неравномерность изменения скорости в эксперименте обусловлена несовершенством экспериментальной установки — предметный столик перемещался при помощи микровинтов, вращаемых вручную.

Тем не менее, видно, что выход микрообъекта из пучка-полумесяца происходит на более высокой скорости, и при этом, как видно на рис. 5.236,

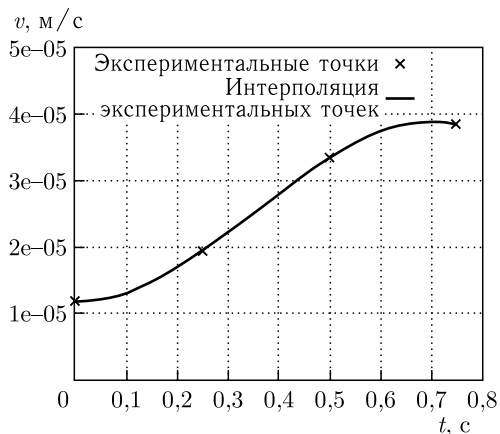


Рис. 5.234. Зависимость скорости частицы от времени в одном из эпизодов эксперимента с пучком-полумесяцем

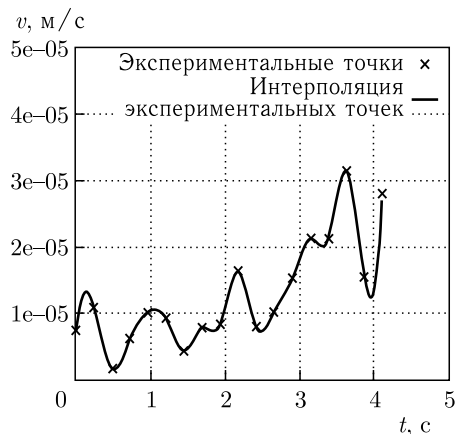


Рис. 5.235. Зависимость скорости от времени в одном из эпизодов эксперимента с гауссовым пучком

в захвате пучком-полумесяцем участвовали одновременно две клетки, что обеспечивало более высокую силу сопротивления среды.

Также можно отметить, что экспериментальные данные хорошо согласуются с данными расчета, приведенными в табл. 5.10. Если принять за метрику отношение

$$\sigma = \frac{F}{I}, \quad (5.126)$$

где F — сила захвата, а I — мощность излучения в фокусе пучка, то для теоретических выкладок имеем

$$\frac{\sigma_{\text{cresc}}}{\sigma_{\text{gauss}}} = \frac{0,88\sigma_{\Delta}}{0,31\sigma_{\Delta}} = 2,8, \quad (5.127)$$

где σ_{Δ} — отношение силы захвата пучка с распределением интенсивности, стремящимся к дельта-функции, к мощности излучения, тогда как эксперимент дает следующие значения:

$$\frac{\sigma_{\text{cresc}}}{\sigma_{\text{gauss}}} = \frac{3,18 \cdot 10^{-9} \text{ с/м}}{1,6 \cdot 10^{-9} \text{ с/м}} \approx 2. \quad (5.128)$$

Существенное увеличение отношения скорости перемещения микрообъекта к мощности рабочего пучка, показывает возможность уменьшения мощности, при использовании пучков в форме полумесяца, для перемещения биологических микрообъектов. К сожалению, из-за причин технического характера не был проведен тест на жизнеспособность клеток после перемещения, но и без этого теста ясно, что использование, пучков согласованных по форме с перемещаемым биологическим микрообъектом, как минимум, позволяет использовать пучки меньшей мощности, что в любом случае должно уменьшать вероятность повреждения биообъекта.

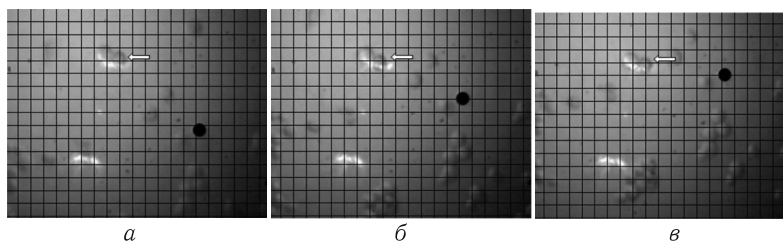


Рис. 5.236. Захват клеток дрожжей пучком-полумесяцем (а, б, в). Черная точка отмечает положение неподвижной относительно предметного столика клетки. Белая стрелка — положение захваченной частицы. Промежуток времени τ между снимками — 0,55 с

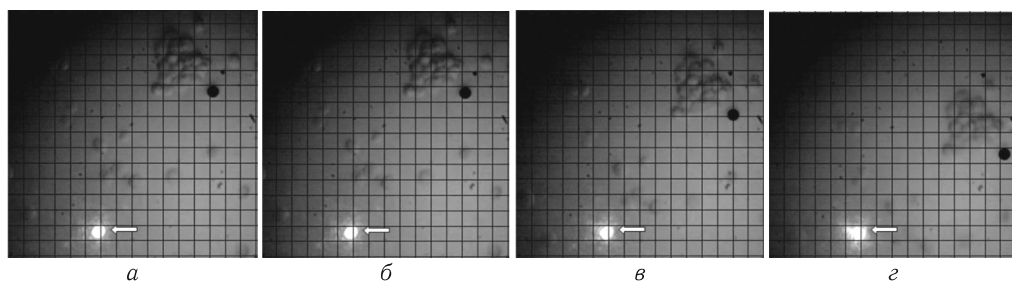


Рис. 5.237. Захват клеток дрожжей гауссовым пучком (а, б, в, г). Черная точка отмечает положение неподвижной относительно предметного столика клетки. Белая стрелка — положение захваченной частицы. Промежуток времени τ между снимками — 0,55 с

Литература к главе 5

1. *Ashkin A.* Acceleration and trapping of particles by radiation pressure // *Phys. Rev. Lett.* 1970. V. 24, No 4. P. 156–159.
2. *Ashkin A.* Observation of resonances in the radiation pressure on dielectric spheres // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38, No 23. P. 1351–1354.
3. *He H., Friese M.E.J., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H.* Direct observation of transfer of angular momentum to absorptive particles from a laser beam with a phase singularity // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, No 5. P. 826–829.
4. *Sato S., Ishigure M., Inaba H.* Optical trapping and rotational manipulation of microscopic particles and biological cells using higher-order mode Nd:YAG laser beams // *Electron. Lett.* 1991. V. 27, No 20. P. 1831–1832.
5. *Bretenaker F., Le Floch A.* Energy exchange between a rotating retardation plate and a laser beam // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 65, No 18. P. 2316.
6. *Chen C., Konkola P., Ferrera J. et al.* Analysis of vector Gaussian beam propagation and the validity of paraxial and spherical approximations // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2002. V. 19, No 2. P. 404–412.
7. *Cojoc D., Fabrizio E. Di, Businaro L. et al.* Design and fabrication of diffractive optical elements for optical tweezer arrays by means of e-beam lithography // *Microelectronic Engineering.* 2002. V. 61–62. P. 963–969.

8. *Friese M.E., Enger J., Rubinsztein-Dunlop H., Heckenberg N.R.* Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles // *Phys. Rev. A.* 1996. V. 54, No 2. P. 1593–1596.
9. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Shinkaryev M.V., Uspleniev G.V.* The phase rotor filter // *J. Mod. Opt.* 1992. V. 39, No 5. P. 1147–1154.
10. *Волостников В.Г., Котова С.П., Рахматулин М.П.* Управление скоростью вращения частицы, захваченной сфокусированным лазерным пучком, с помощью жидко-кристаллического модулятора // *Изв. Самарского научн. центра РАН.* 2000. Т. 2, № 1. С. 48–52.
11. *Abramochkin E.G., Kotova S.P., Korobtsov A.V. et al.* Microobject manipulations using laser beams with nonzero orbital angular momentum // *Laser physics.* 2006. V. 16, No 5. P. 842–848.
12. *Abramochkin E.G., Razueva E.V., Volostnikov V.G.* Application of spiral laser beams for beam shaping problem // *Proc. of LFNМ.* 2006. 29 June – 1 July. 2006. Kharkiv, Ukraine. P. 275–278.
13. *Abramochkin E.G., Razueva E.V., Volostnikov V.G.* Fourier invariant singular wave-fields and beam shaping problem // *Proc. of LFNМ.* 2006. 29 June – 1 July. 2006. Kharkiv, Ukraine. P. 370–373.
14. *Abramochkin E.G., Volostnikov V.G.* Gaussian beams: new aspects and applications // *Proc. of LFNМ.* 2006. 29 June – 1 July. 2006. Kharkiv, Ukraine. P. 267–274.
15. *Paterson L., MacDonald M.P., Arlt J. et al.* Controlled rotation of optically trapped microscopic particles // *Science.* 2001. V. 292, No 5518. P. 912–914.
16. *Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н.* Вращение световых многомодовых пучков Гаусса–Лагерра в свободном пространстве // *Письма в ЖТФ.* 1997. Т. 23, № 17. С. 1–6.
17. *Friese M.E.J., Nieminen T.A., Heckerberg N.R. et al.* Optical alignment and spinning of laser-trapped microscopic particles // *Nature.* 1998. V. 394, No 6691. P. 348–350.
18. *Higurashi E., Sawada R., Ito T.* Optically induced angular alignment of trapped birefringent microobjects by linear polarization // *Appl. Phys. Lett.* 1998. V. 73, No 21. P. 3034–3036.
19. *Holmlin R.E., Schiavoni M., Chen C.Y. et al.* Whitesides Light-driven microfabrication: Assembly of multicomponent, three-dimensional structures by using optical tweezers // *Angew. Chem. Int. Ed. Engl.* 2000. V. 39, No 19. P. 3503–3506.
20. *Grover S.C., Skirtach A.G., Gauthier R.C., Grover C.P.* Automated single-cell sorting system based on optical trapping // *J. Biomed. Opt.* 2001. V. 6, No 1. P. 14–22.
21. *Fellman E., Axner O.* Design for fully steerable dual-trap optical tweezers // *Appl. Opt.* 1997. V. 36, No 10. P. 2107–2113.
22. *Sasaki K., Kosioka M., Misawa H. et al.* Pattern formation and flw control of fine particles by laser-scanning micromanipulation // *Opt. Lett.* 1991. V. 16, No 19. P. 1463–1465.
23. *Dufresne E.R., Grier D.G.* Optical tweezer arrays and optical substrates created with diffractive optical elements // *Rev. Sci. Instr.* 1998. V. 69, No 5. P. 1974–1977.
24. *Dufresne E.R., Spalding G.C., Dearing M.T. et al.* Computer-generated holographic optical tweezer arrays // *Rev. Sci. Instrum.* 2001. V. 72, No 3. P. 1810–1816.

25. *Grier D.G., Dufresne E.R.* Apparatus for applying optical gradient forces. US Patent 6,055,106. The University of Chicago. 2000.
26. *Hahn J., Kim H., Choi K., Lee B.* Real-time digital holographic beam-shaping system with a genetic feedback tuning loop // *Appl. Opt.* 2006. V.45, No 5. P. 915–924.
27. *Curtis J.E., Koss B.A., Grier D.G.* Dynamic holographic optical tweezers // *Optics Communications*. 2002. V. 207, No 1–6. P. 169–175.
28. *Reicherter M., Haist T., Wagemann E.U., Tiziani H.J.* Optical particle trapping with computer-generated holograms written on a liquid-crystal display // *Opt. Lett.* 1999. V. 24, No 9. P. 608–610.
29. *Harris M., Hill C.A., Vaughan J.M.* Optical helices and spiral interference fringes // *Opt. Commun.* 1994. V. 106, No 4–6. P. 161–166.
30. *Хонина С.Н., Котляр В.В., Сойфер В.А. и др.* Фазовые дифракционные оптические элементы для одновременного формирования мод Гаусса–Лагерра в различных дифракционных порядках // *Компьютерная оптика*. 1999. Т. 19. С. 107–111.
31. *Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C., Chavez-Cedra S.* Parabolic nondiffracting optical wave fields // *Opt. Lett.* 2004. V. 29, No 1. P. 44–46.
32. *Abramochkin E.G., Volostnikov V.G.* Generalized Gaussian beams // *J. Opt. A: Pure and Appl. Opt.* 2004. V. 6, No 5. P. S157–S161.
33. *Kotlyar V.V., Almazov A.A., Khonina S.N.* Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate // *J. Opt. Soc. Am. A*. 2005. V. 22, No 5. P. 849–861.
34. *Bentley J.B., Devis J.A., Bandres M.A., Gutierrez-Vega J.C.* Generation of helical Ince-Gaussian beams with a liquid-crystal display // *Opt. Lett.* 2006. V. 31, No 5. P. 649–651.
35. *Chattrapaban N., Rogers E.A., Cofield D. et al.* Generation of nondiffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator // *Opt. Lett.* 2003. V. 28, No 22. P. 2183–2185.
36. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings // *Optik*. 1996. V. 102, No 2. P. 45–50.
37. *Kotlyar V.V., Soifer V.A., Khonina S.N.* Rotation of multimodal Gauss-Laguerre light beams in free space and in a fiber // *Optics and Lasers in Engineering*. 1998. V. 29, No 4–5. P. 343–350.
38. *Рахматулин М.П.* Разработка методов манипуляций микрообъектами лазерным излучением. Дис... канд. Физ.-мат. наук. — Самара, 2003.
39. *Ashkin A., Dziedzic J.M., Bjorkholm J.E. et al.* Observation of a single-beam gradient force optical trap for dielectric particles // *Opt. Lett.* 1986. V. 11, No 5. P. 288–290.
40. *Ashkin A., Dziedzic J. M.* Optical levitation by radiation pressure // *Appl. Phys. Lett.* 1971. V. 19, No 8. P. 283–285.
41. *Ashkin A.* Forces of a single-beam gradient laser trap on a dielectric sphere in the ray optics regime // *Biophys J.* 1992. V. 61, No 2. P. 569–582.
42. *Ganic D., Gan X., Gu M.* Exact radiation trapping force calculation based on vectorial diffraction theory // *Opt. Express*. 2004. V. 12, No 12. P. 2670–2675.
43. *Lemire T.* Coupled-multipole formulation for the treatment of electromagnetic scatter by a small dielectric particles of arbitrary sphere // *J. Opt. Soc. Am. A*. 1997. V. 14, No 2. P. 470–474.

44. *Marston P.L., Chrichton J.H.* Radiation torque on a sphere caused by circularly-polarized electromagnetic wave // *Phys. Rev. A.* 1984. V. 30, No 5. P. 2508–2516.
45. *Navade Y., Asakure T.* Radiation forces on a dielectric sphere in the Rayleigh scatterry regime // *Opt. Commun.* 1996. V. 124, No 5–6. P. 529–541.
46. *Nieminen T.A., Rubinsztein-Dunlop H., Heckenberg N.R.* Calculation and optical measurement of laser trapping forces on non-spherical particles // *J. of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer.* 2001. V. 70, No 4–6. P. 627–637.
47. *Rohrbach A., Stelzer E.H.* Optical trapping of dielectric particles in arbitrary fields // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2001. V. 18, No 4. P. 813–835.
48. *Pobre R., Salome C.* Radiation force on a nonlinear microsphere by a lightly focused Gaussian beam // *Appl. Opt.* 2002. V. 41, No 36. P. 7694–7701.
49. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. — 11-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
50. *Rockstuhl C., Herzig H.P.* Calculation of the torque on dielectric elliptical cylinders // *Opt. Soc. Am. A.* 2005. V. 22, No 1. P. 109–116.
51. *Shaohui Y., Baoli Y.* Transverse trapping forces of focused Gaussian beam on ellipsoidal particles // *J. Opt. Soc. Am. B.* 2007. V. 24, No 7. P. 1596–1602.
52. *Скиданов Р.В.* Расчет силы взаимодействия светового пучка с микрочастицами произвольной формы // *Компьютерная оптика.* 2005. Т. 28. С. 18–21.
53. *Котляр В.В., Налимов А.Г.* Расчет силы давления непараксиального гауссова пучка на однородный цилиндр с круглым сечением // *Компьютерная оптика.* 2005. Т. 27, С. 105–111.
54. *Котляр В.В., Налимов А.Г., Скиданов Р.В.* Быстрый метод расчета дифракции электромагнитной волны на цилиндрических диэлектрических объектах // *Компьютерная оптика.* 2003. Т. 25. С. 24–28.
55. *Котляр В.В., Налимов А.Г., Скиданов Р.В.* Метод быстрого расчета дифракции лазерного излучения на микрообъектах // *Оптический журнал.* 2005. Т. 72, № 5. С. 55–61.
56. *Arlt J., Garces-Chavez V., Sibbett W., Dholakia K.* Optical micromanipulation using a Bessel light beams // *Opt. Comm.* 2001. V. 197. P. 239–245.
57. *Garces-Chavez V., McGloin D., Melville H. et al.* Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam // *Nature.* 2002. V. 419, No 6903. P. 145–147.
58. *MacDonald M.P., Paterson L., Volke-Sepulveda K. et al.* Creation and manipulation of three-dimensional optically trapped structures // *Science.* 2002. V. 296, No 5570. P. 1101–1103.
59. *Turunen J.* Holographic generation of diffraction-free beams // *Applied Optics.* 1988. V. 27, No 19. P. 3959–3962.
60. *Сойфер В.А., Котляр В.В., Хонина С.Н., Скиданов Р.В.* Вращение микрочастиц в световых полях // *Компьютерная оптика.* 2005. Т. 28. С. 5–17.
61. *Khonina S.N., Skidanov R.V., Kotlyar V.V., Soifer V.A.* Rotating microobjects using a DOE-generated laser Bessel beam // *Proc. of SPIE.* 2004. V. 5456. P. 244–255.
62. *Miller W.* Symmetry and separation of variables. — Cambridge University Press., 1977.
63. *Allen L., Beijersbergen M.W., Spreeuw R.J.C., Woerdman J.P.* Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes // *Phys. Rev. A.* 1992. V. 45, No 11. P. 8185–8189.

64. *Volke-Sepulveda K., Garces-Chavez V., Chavez-Cerda S. et al.* Orbital angular momentum of a high-order Bessel light beam // *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* 2002. V. 4, No 2. P. S82–S89.
65. *Durnin J.* Exact solution for nondiffracting beams. I. The scalar theory // *J. Opt. Soc. Am. A.* 1987. V. 4, No 4. P. 651–654.
66. *Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H.* Diffraction-free beams // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 58, No 15. P. 1499–1501.
67. *Paterson C., Smith R.* Higher-order Bessel waves produced by axicon-type computer-generated holograms // *Opt. Commun.* 1996. V. 124, No 1–2. P. 121–130.
68. *Fedotowsky A., Lehovec K.* Optimal filter design for annular imaging // *Appl. Opt.* 1974. V. 13, No 12. P. 2919–2923.
69. *Скиданов Р.В.* Самовоспроизводящиеся лазерные пучки и их применение // *Компьютерная оптика.* 2006. Т. 29. С. 4–23.
70. *Котляр В.В., Ковалев А.А., Хонина С.Н. и др.* Дифракция конической волны и гауссова пучка на спиральной фазовой пластинке // *Компьютерная оптика.* 2005. Т. 28. С. 29–36.
71. *Сойфер В.А., Котляр В.В., Хонина С.Н., Скиданов Р.В.* Оптическое микроманипулирование с помощью ДОЭ // *Официальные материалы второго международного форума «Голография ЭКСПО-2005».* 2005. С. 69–70.
72. *Khonina S.N., Skidanov R.V., Kotlyar V.V. et al.* DOE-generated laser beams with given orbital angular moment: application for micromanipulation // *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.* 2005. V. 5962. P. 59622W.
73. *Khonina S.N., Skidanov R.V., Kotlyar V.V. et al.* Optical micromanipulation using DOEs matched with optical vortices // *Proc. SPIE.* 2006. V. 6187. P. 61871F.
74. *Skidanov R.V., Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A.* Optical microparticle trapping and rotating using multi-order DOE // *Proc. Of the ICO Topical Meeting on Optoinformatic/Information Photonics.* 2006. 4–7 Sep. 2006, Saint-Peterburg, Russia. P. 466–469.
75. *Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S.N., Skidanov R.V.* Remarkable laser beams formed by computer-generated optical elements: properties and applications // *Proc. SPIE.* 2006. V. 6252. P. 62521B.
76. *Guo C.S., Liu X., He J.L., Wang H.T.* Optimal annulus structures of optical vortices // *Opt. Express.* 2004. V. 12, No 19. P. 4625–4634.
77. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Khonina S.N. et al.* Diffraction of conic and Gaussian beams by a spiral phase plate // *Appl. Opt.* 2006. V. 45, No 12. P. 2656–2665.
78. *Soifer V.A., Kotlyar V.V., Khonina S.N., Skidanov R.V.* Optical data processing using DOEs // *Methods for Computer Design of Diffractive Optical Elements.* — Wiley-Interscience Publication John Wiley & Sons, Inc, 2002. Ch. 10. P. 673–754.
79. *Kotlyar V.V., Kovalev A.A., Skidanov R.V. et al.* Diffraction of a finite-radius plane wave and a Gaussian beam by a helical axicon and a spiral phase plate // *J. Opt. Soc. Am. A.* 2007. V. 24, No 7. P. 1955–1964.
80. *Сойфер В.А., Котляр В.В., Хонина С.Н., Скиданов Р.В.* Дифракционные элементы как безопорные компьютерные голограммы // *Труды всероссийского семинара «Ю.И. Денисюк — основоположник оптической голографии», ФТИ РАН, С.Пб.* 2007. С. 116–123.
81. *Leach J., Wulff K., Sinclair G. et al.* Interactive approach to optical tweezers control // *Appl. Opt.* 2006. V. 45, No 5. P. 897–903.

82. *Xun X.D., Cohn R.W.* Phase calibration of spatially nonuniform spatial light modulators // *Appl. Opt.* 2004. V. 43, No 35. P. 6400–6406.
83. *Котляр В.В., Скиданов Р.В., Хонина С.Н. и др.* Гипергеометрические моды // *Компьютерная оптика.* 2006. Т. 30. С. 16–22.
84. *Котляр В.В., Хонина С.Н., Скиданов Р.В., Сойфер В.А.* Вращение лазерных пучков, не обладающих орбитальным угловым моментом // *Компьютерная оптика.* 2007. Т. 31, No 1. С. 35–38.
85. *Skidanov R.V., Kotlyar V.V., Khonina V.V. et al.* Micromanipulation in Higher-Order Bessel Beams // *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics).* 2007. V. 16, No 2. P. 91–98.
86. *Davis J.A., Guertin J., Cottrell D.M.* Diffraction-free Beam Generated with Programmable Spatial Light Modulators // *Appl. Opt.* 1993. V. 32, No 31. P. 6368–6370.
87. *Davis J.A., Carcole E., Cottrell D.M.* Intensity and phase measurements of nondiffracting beams generated with the magneto-optic spatial light modulator // *Appl. Opt.* 1996. V. 35, No 4. P. 593–598.
88. *Скиданов Р.В., Хонина С.Н., Котляр В.В., Сойфер В.А.* Экспериментальное исследование движения диэлектрических шариков в световых пучках с угловыми гармониками высоких порядков // *Компьютерная оптика.* 2007. Т. 31, No 1. С. 14–21.
89. *Скиданов Р.В., Котляр В.В., Хонина С.Н.* Экспериментальное исследование передачи орбитального углового момента сферическим микрочастицам // *Изв. СНЦ РАН.* 2006. Т. 8, No 4. С. 1200–1203.
90. *Gao M., Gao C.* Generation and application of the twisted beam with orbital angular momentum // *Chinesse optics letters.* 2007. V. 5, No 2. P. 89–92.
91. *Farafonov V.S., Ilin U.B., Henning T.A.* A new solution of the light scattering problem for axisymmetric particles // *J. of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* 1999. V. 63, No 2–6. P. 205–215.
92. *Hong Du* Mie scattering calculations // *Applied Optics.* 2004. V. 43, № 9. P. 1951–1956.
93. *Jesacher A., Maurer C., Schwaighofer A. et al.* Fully phase and amplitude control of holographic optical tweezers with high efficiency // *Opt. Express.* 2008. V. 16, No 7. P. 4479–4486.
94. *Montes-Usategui M., Pleguezuelos E., Andilla J., Martin-Badosa E.* Fast generation of holographic optical tweezers by random mask encoding of Fourier components // *Opt. Express.* 2006. V. 14, No 6. P. 2101–2107.
95. *Montes-Usategui M., Mas J., Roth M. S., Martin-Badosa E.* Adding functionalities to precomputed holograms with random mask multiplexing in holographic optical tweezers // *Appl. Opt.* 2011. V. 50, No 10. P. 1417–1424.
96. *Котляр В.В., Хонина С.Н., Мелехин А.С., Сойфер В.А.* Кодирование дифракционных оптических элементов методом локального фазового скачка // *Компьютерная оптика.* 1999. Т. 19. С. 54–64.
97. *Котляр В.В., Хонина С.Н., Сойфер В.А.* Методы кодирования композиционных ДОЭ // *Компьютерная оптика.* 2001. Т. 21. С. 36–39.
98. *Khonina S.N., Balalayev S.A., Skidanov R.V. et al.* Encoded binary diffractive element to form hyper-geometric laser beams // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2009. V. 11, No 6. P. 065702–065708.
99. *Хонина С.Н., Скиданов Р.В., Моисеев О.Ю.* Формирование лазерных пучков Эйри с помощью бинарно-кодированных дифракционных оптических элементов для манипулирования микрочастицами // *Компьютерная оптика.* 2009. Т. 33, № 2. С. 138–146.

100. *Cohn R.W., Liang M.* Approximating fully complex spatial modulation with pseudorandom phase-only modulation // *Appl. Opt.* 1994. V.33, No 20. P. 4406–4415.
101. *Hassenbrook L.G., Lhamon M.E., Daley R.C. et al.* Random phase encoding of composite fully complex filters // *Opt. Lett.* 1996. V.21, No 4. P. 272–274.
102. *Скиданов Р.В., Порфирьев А.П.* Оптическая микроманипуляция с использованием бинарных фокусаторов // *Компьютерная оптика.* 2010. Т.34, № 2. С. 214–218.
103. *Guo C.S., Yu Y.N., Hong Zh.* Optical sorting using an array of optical vortices with fractional topological charge // *Opt. Commun.* 2010. V. 283, No 9. P. 1889–1893.
104. *Sinclair G., Jordan P., Courtial J. et al.* Assembly of 3-dimensional structures using programmable holographic optical tweezers // *Opt. Express.* 2004. V. 12, No 22. P. 5475–5480.
105. *Polin M., Ladavac K., Lee S.H. et al.* Optimized holographic optical traps // *Opt. Express.* 2005. V. 13, No 15. P. 5831–5845.
106. *Абрамочкин Е.Г., Афанасьев К.Н., Волостников В.Г. и др.* Формирование вихревых световых полей с заданной формой интенсивности для задач лазерной манипуляции микрообъектами // *Материалы XXVI школы по когерентной оптике и голографии «Голография: фундаментальные исследования, инновационные проекты и нанотехнологии».* — Иркутск: Папирус, 2005. С. 203–207.
107. *Cheong F.C., Sow C.H., Wee A T.S. et al.* Optical travelator: transport and dynamic sorting of colloidal microspheres with an asymmetrical line optical tweezers // *Appl. Phys. B.* 2006. V. 83, No 1. P. 121–125.
108. *Marchington R.F., Mazilu M., Kuriakose S. et al.* Optical deflection and sorting of microparticles in a near-field optical geometry // *Opt. Express.* 2008. V. 16, No 6. P. 3712–3726.
109. *Sun Y.Y., Yuan X.C., Ong L.S. et al.* Large-scale optical traps on a chip for optical sorting // *Appl. Phys. Lett.* 2007. V. 90, No 3. P. 031107-1–031107-3.
110. *Rodrigo P.J., Eriksen R.L., Daria V.R., Gluckstad J.* Interactive light-driven and parallel manipulation of inhomogeneous particles // *Opt. Express.* 2002. V. 10, No 26. P. 1550–1556.
111. *Dasgupta R., Ahlawat S., Gupta P.K.* Microfluidic sorting with a moving array of optical traps // *Appl. Opt.* 2012. V. 51, No 19. P. 4377–4387.
112. *Rodrigo P.J., Eriksen R.L., Daria V.R., Gluckstad J.* Dynamic formation of optically trapped microstructure arrays for biosensor applications // *Biosensors and Bioelectronics.* 2004. V. 19, No 11. P. 1439–1444.
113. *Rodrigo P.J., Daria V.R., Gluckstad J.* Real-time interactive optical micromanipulation of a mixture of high- and low-index particles // *Opt. Express.* 2004. V.12, No 7. P. 1417–1425.
114. *Prentice P.A., MacDonald M.P., Frank T.G. et al.* Manipulation and filtration of low-index particles with holographic Laguerre-Gaussian optical trap arrays // *Opt. Express.* 2004. V.12, No 4. P. 593–600.
115. *Порфирьев А.П.* Дифракционные оптические элементы для автоматической оптической сборки микросистем // *Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С.П. Королева (национального исследовательского университета).* 2010. Т. 4, No 24. С. 269–275.
116. *Балалаев С.А., Хонина С.Н.* Сравнение свойств гипергеометрических мод и мод Бесселя // *Компьютерная оптика.* 2007. Т. 31, № 4. С. 23–29.

117. *Herman R.M., Wiggins T.A.* Hollow beams of simple polarization for trapping and storing atoms // *J. Opt. Soc. Am.* 2002. V. 19, No 1. P. 116–121.
118. *McQueen C.A., Arlt J., Dholakia K.* An experiment to study a «nondiffracting» light beam // *Am. J. Phys.* 1999. V. 67, No 10. P. 912–915.
119. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A.* An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics // *J. of Modern. Opt.* 2001. V. 48, No 10. P. 1543–1557.
120. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R. V. et al.* Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements // *J. of Modern. Opt.* 2004. V. 51, No 14. P. 2167–2184.
121. *Kotlyar V.V., Khonina S.N., Soifer V.A.* An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images // *J. of Modern. Optics.* 1997. V. 44, No 7. P. 1409–1416.
122. *Paakkonen P., Lautanen J., Honkanen M. et al.* Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics // *J. of Modern. Opt.* 1998. V. 45, No 11. P. 2355–2369.
123. *Garces-Chavez V., McGloin D., Melville H. et al.* Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beam // *Nature.* 2002. V. 419, No 6903. P. 145–147.
124. *Porfirev A.P.* The generation of the hollow optical beams array by the superpositions of Bessel beams // *Asia-Pacific Conference on Fundamental Problems of Opto- and Microelectronics, Russia, Moscow–Samara, 4–8 July. LPI, 2011. 1 DVD-ROM, SAMP15.*
125. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A. et al.* Astigmatic Bessel laser beams // *J. of Modern Optics.* 2004. V. 51, No 5. P. 677–686.
126. *Chavez-Cerda S., Meneses-Nava M.A., Hickmann J.M.* Interference of traveling nondiffracting beams // *Opt. Lett.* 1998. V. 23, No 24. P. 1871–1873.
127. *Dudley A., Vasilyeu R., Forbes A. et al.* Superpositions of higher-order Bessel beams and nondiffracting speckle fields // *Proc. of SPIE.* 2009. V. 7430. P. 74300A-1–74300A-7.
128. *McGloin D., Garces-Chavez V., Dholakia K.* Interfering Bessel beams for optical micromanipulation // *Opt. Lett.* 2003. V. 28, No 8. P. 657–659.
129. *Vasilyeu R., Dudley A., Khilo N. et al.* Generating superpositions of higher-order Bessel beams // *Opt. Express.* 2009. V. 17, No 26. P. 23389–23395.
130. *Дифракционная компьютерная оптика / Под ред. В.А. Сойфера. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.*
131. *Khonina S.N., Kotlyar V.V., Soifer V.A. et al.* Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE // *Optik.* 1999. V. 110, No 3. P. 137–144.
132. *Котляр В.В., Сойфер В.А., Хонина С.Н.* Алгоритм расчета ДОЭ для генерации вращающихся модальных изображений // *Автометрия.* 1997. № 5. С. 46–54.
133. *Doskolovich L.L., Soifer V.A., Alessandretti G. et al.* Analytical initial approximation for multiorder binary gratings design // *Pure and Appl. Opt.* 1994. V. 3, No 6. P. 921–930.
134. *Krackhardt U., Mait J.N., Streibl N.* Upper bound on the diffraction efficiency of phase-only fanout elements // *Applied Optics.* 1992. V. 31, No 1. P. 27–37.
135. *Zhou C., Linen L.* Numerical study of Dammann array illuminators // *Appl. Opt.* 1995. V. 34, No 26. P. 5961–5969.

136. Котляр В.В., Готов П.А. Расчет четной симметричной бинарной решетки для генерации заданного набора дифракционных порядков // Компьютерная оптика. 1999. Т. 19. С. 74–79.
137. Досколович Л.Л., Петрова О.И., Сойфер В.А. *et al.* Градиентный метод расчета многопорядковых дифракционных решеток в приближении Рэлея // Компьютерная оптика. 1996. Вып. 16. С. 31–35.
138. Khonina S.N., Kotlyar V.V., Lushpin V.V., Soifer V.A. A method for design of composite DOEs for the generation of letter image // Optical Memory and Neural Networks. 1997. V. 6, No 3. P. 213–220.
139. Котляр В.В., Серафимович П.Г., Сойфер В.А. Градиентный алгоритм расчета ДОО с наложенными ограничениями на фазовую функцию и с регуляризацией // Компьютерная оптика. 1996. Т. 16. С. 50–53.
140. Gluckstad J., Daria V.R., Rodrigo P.J. Dynamic array of dark optical traps // Applied Physics Letters. 2004. V. 84, No 3. P. 323–325.
141. Yuan X.C., Tao S.H., Ahluwalia B.S. The generation of an array of nondiffracting beams by a single composite computer generated hologram // J. Opt. A.: Pure Appl. Opt. 2005. V. 7, No 1. P. 40–46.
142. Скиданов Р.В., Порфирьев А.П. Формирование массива световых «бутылок», основанное на использовании суперпозиции пучков Бесселя // Компьютерная оптика. 2012. Т. 36, No 1. С. 80–90.
143. Скиданов Р.В., Порфирьев А.П. Оптический захват микрочастиц в специальных ловушках // Компьютерная оптика. 2012. Т. 36, № 2. С. 211–218.
144. Leitz G., Fällman E., Tuck S., Axner O. Stress response in *Caenorhabditis elegans* caused by optical tweezers: wavelength, power, and time dependence // Biophys. J. 2002. V. 82, No 4. P. 2224–2231.
145. König K., Liang H., Berns M.W., Tromberg B.J. Cell damage in near-infrared multimode optical traps as a result of multiphoton absorption // Opt. Lett. 1996. V. 21, No 14. P. 1090–1092.
146. Thanh S.D., Zakharov N.C. Photogenerated singlet oxygen damages cells in optical traps // arXiv:0911.4651. 2009.
147. Peterman E.J.G., Gittes F., Schmidt C.F. Laser-Induced Heating in Optical Traps // Biophysical J. 2003. V. 84, No 2. P. 1308–1316.
148. Mirsaidov U., Timp W., Timp K. *et al.* Optimal optical trap for bacterial viability // Phys. Rev. E. Stat Nonlin. Soft. Matter Phys. 2008. V. 78, No 2. P. 021910.
149. Van der Horst A., Forde N.R. Calibration of dynamic holographic optical tweezers for force measurements on biomaterials // Opt. Express. 2008. V. 16, No 25. P. 20987–21003.
150. Emiliani V., Cojoc D., Ferrari E. *et al.* Wave front engineering for microscopy of living cells // Opt. Express. 2005. V. 13, No 5. P. 1395–1405.
151. Xin H., Li B. Targeted delivery and controllable release of nanoparticles using a defect-decorated optical nanofiber // Opt. Express. 2011. V. 19, No 14. P. 13285–13290.
152. Moradi A., Ferrari E., Garbin V. *et al.* Strength control in multiple optical traps generated by means of diffractive optical elements // Optoelectronics and Advanced Materials. Rapid Commun. 2007. V. 1, No 4. P. 158–161.
153. Emiliani V., Sanvitto D., Zahid M. Multi force optical tweezers to generate gradients of forces // Opt. Express. 2004. V. 12, No 17. P. 3906–3910.

154. *Dasgupta R., Ahlawat S., Verma R.S., Gupta P.K.* Optical orientation and rotation of trapped red blood cells with Laguerre-Gaussian mode // *Opt. Express*. 2011. V. 19, No 8. P. 7680–7685.
155. *Daria V.R., Go M.A., Bachor H.A.* Simultaneous transfer of linear and orbital angular momentum to multiple low-index particles // *J. of Optics*. 2011. V. 13, No 4. P. 044004.
156. *Sun Q., Zhou K., Fang G. et al.* Hollow sinh-Gaussian beams and their paraxial properties // *Opt. Express*. 2012. V. 20, No 9. P. 9682–9691.
157. *Olson C.C., Schermer R.T., Bucholtz R.T.* Tailored optical force fields using evolutionary algorithms // *Opt. Express*. 2011. V. 19, No 19. P. 18543–18557.
158. *Jesacher A., Fürhapter S., Bernet S. et al.* Size selective trapping with optical «cogwheel» tweezers // *Opt. Express*. 2004. V. 12, No 17. P. 4129–4135.
159. *Brijesh P., Kessler T.J., Zuegel J.D. et al.* Spatially shaping the longitudinal focal distribution into a horseshoe-shaped profile // *Quantum Electronics and Laser Science Conference*. 2007. QELS'07. P. 1–2.
160. *Jiang Y., Huang K., Lu X.* Radiation force of highly focused Lorentz-Gauss beams on a Rayleigh particle // *Opt. Express*. 2011. V. 19, No 10. P. 9708–9713.
161. *Steuernagel O.* Coherent Transport and Concentration of Particles in Optical Traps using Varying Transverse Beam Profiles // *arXiv:physics/0502023* 2005.
162. *Волостников В.Г., Котова С.П., Лосевский Н.Н. и др.* Манипуляция микрообъектами с помощью пучков с ненулевым орбитальным моментом // *Квантовая электроника*. 2002. Т. 32, № 7. С. 565–566.
163. *Абрамочкин Е.Г., Афанасьев К.Н., Волостников В.Г. и др.* Формирование световых вихревых полей с заданной формой интенсивности для задач лазерной манипуляции микрообъектами // *Известия РАН. Серия физическая*. 2008. Т. 72, № 1. С. 76–79.
164. *Bowman R., Gibson G., Padgett M.* Particle tracking stereomicroscopy in optical tweezers: Control of trap shape // *Opt. Express*. 2010. V. 18, No 11. P. 11785–11790.
165. *Saito T.L., Ohtani M., Sawai H.* SCMD: *Saccharomyces cerevisiae* Morphological Database // *Nucleic Acids Res*. 2004 V. 32. P. D319–322.
166. *Simpson S.H., Hanna S.* Computational study of the optical trapping of ellipsoidal particles // *Phys. Rev. A*. 2011. V. 84, № 5. P. 053805.
167. *Скиданов Р.В., Рыков М.А.* Моделирование движения биологических микрообъектов в световых пучках // *Компьютерная оптика*. 2010. Т. 34, № 3. С. 308–314.
168. *Svoboda K., Block S.M.* Biological Applications of Optical Forces // *Annual Rev. of Biophysics and Biomolecular Structure*. 1994. V. 23. P. 247–285.

Заключение

Здесь мы перечислим некоторые актуальные направления, в которых авторы видят предмет дальнейших исследований.

Несмотря на возможность локализации энергии плазмонной моды в области субволнового размера, существенным недостатком плазмонных структур, рассмотренных в первой главе, являются высокие потери на поглощение в металле, прямо пропорциональные степени локализации энергии моды. В то же время, существует тип поверхностных электромагнитных волн, которые могут распространяться в полностью диэлектрических структурах. Такие волны называются блоховскими поверхностными волнами (БПВ) или поверхностными состояниями фотонных кристаллов и, как следует из названия, распространяются вдоль границ раздела между однородной средой и фотонным кристаллом или между двумя различными фотонными кристаллами. В случае, когда все материалы структуры — диэлектрики, потери на поглощение, при распространении такой поверхностной волны, могут быть практически полностью устранены. Отсутствие потерь на поглощение делает БПВ перспективными в различных приложениях, в частности, в интегральной оптике и системах оптической передачи и обработки информации в наномасштабе.

Результаты первой главы также могут послужить основой при решении новых фундаментальных задач управления распространением БПВ. Указанные задачи включают расчет и создание нового класса элементов «двумерной» оптики, предназначенных для выполнения заданных преобразований БПВ (преломления, отражения и фокусировки), расчет дифракционных структур для эффективного возбуждения БПВ и формирования высокочастотных интерференционных картин БПВ.

Интересным развитием задачи расчета дифракционных решеток с резонансными свойствами для дифференцирования и интегрирования оптических импульсов авторы считают разработку методов расчета и создание планарных структур для заданных преобразований временных оптических сигналов, предназначенных для обработки информации на чипе. В этом случае в качестве временных сигналов могут использоваться плазмонные импульсы, а операции преобразования импульса (дифференцирования и интегрирования) будут выполняться микроструктурами, расположенными непосредственно на поверхности.

Фотонные кристаллы, рассмотренные во второй главе, являются перспективными компонентами для информационных технологий. С помощью должным образом рассчитанных субволновых отверстий в планарных волноводах можно создавать не только рассмотренные во второй главе ФК-волноводы, ФК-коллиматоры и ФК-линзы, но и ФК-призмы, ФК-зеркала, ФК-фильтры, ФК-резонаторы и т. д. Планарность и компактность (размер не превышает десятка микрон) данных компонентов нанофоники делает их перспективными для создания многокомпонентных устройств в телекоммуникационных системах, планарных сенсоров, планарных манипуляторов микрочастиц.

Материал третьей главы может служить базой для дальнейших исследований в задачах острой фокусировки лазерного света, в том числе:

- Острая фокусировка света фемтосекундных импульсов с учетом линейной и нелинейной дисперсии материала дифракционной линзы.
- Моделирование острой фокусировки света с помощью наноструктурированных волноводных планарных и 3D-компонентов микрооптики. Известно, что нанощели в планарных волноводах способны удерживать свет внутри щели, и при этом интенсивность внутри нанощели может быть на порядок больше, чем интенсивность внутри волновода.
- Оптимизация параметров компонентов микрооптики, формирующих «фотонные наноструи», фокусы с большой глубиной резкости, в том числе имеющие изогнутую траекторию. Известны световые поля, распространяющиеся по параболическим траекториям, например, лазерные пучки Эйри. Дифракция плоской волны на угловой фазовой ступеньке также приводит к формированию гиперболической «фотонной струи». Требуется рассчитать компоненты микрооптики, способные фокусировать свет в линию, отклоняющуюся от оптической оси заданным образом.

Разработанные в четвертой главе методы фокусировки сингулярных лазерных пучков требуют проведения достаточно сложных экспериментальных исследований. Также исследования четвертой главы планируется продолжить с учетом наличия в фокусирующей системе волновых aberrаций. В большинстве исследований отмечается негативное влияние aberrаций на структуру в фокальной области. Однако авторы планируют рассмотреть положительный аспект аподизации пропускающей функции линзы распределением, соответствующим полиномам Цернике. Первичные оптические aberrации, такие как сдвиг, наклон, сферическая aberrация, астигматизм, кома, описываются полиномами Цернике низких порядков и предположительно могут быть использованы для уменьшения поперечного размера фокального пятна ниже дифракционного предела. Также для фокусирующих систем является актуальной проблема уменьшения продольного размера светового пятна. Основные способы решения этой задачи основываются на интерференции нескольких когерентных пучков, чаще всего встречных. Использование в этом случае вихревых пучков открывает разнообразные возможности в формировании трехмерного распределения в фокальной области.

Дальнейшее развитие работ по оптическому микроманипулированию авторы видят в проведении совместных исследований и разработок со специалистами в области нанотехнологий, микромеханики и микробиологии с целью создания эффективных средств для бесконтактного микроманипулирования непрозрачными и прозрачными объектами размером от нескольких нанометров до нескольких микрометров, расположенных в жидкости или свободном пространстве.

Научное издание

<i>БЕЗУС Евгений Анатольевич</i>	<i>БЫКОВ Дмитрий Александрович</i>
<i>ДОСКОЛОВИЧ Леонид Леонидович</i>	<i>КОВАЛЕВ Алексей Андреевич</i>
<i>КОТЛЯР Виктор Викторович</i>	<i>НАЛИМОВ Антон Геннадьевич</i>
<i>ПОРФИРЬЕВ Алексей Петрович</i>	<i>СКИДАНОВ Роман Васильевич</i>
<i>СОЙФЕР Виктор Александрович</i>	<i>СТАФЕЕВ Сергей Сергеевич</i>
<i>ХОНИНА Светлана Николаевна</i>	

ДИФРАКЦИОННАЯ ОПТИКА И НАНОФОТОНИКА

Редактор *М.Б. Козинцова*
Оригинал-макет: *И.Г. Андреева*
Оформление переплета: *Н.Л. Лисицына*

Подписано в печать 26.07.14. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 49,4. Уч.-изд. л. 53,9. Тираж 250 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117342, Москва, ул. Бултерова, 17 Б
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ГУП МО «Коломенская типография».
140400, г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а.
ИНН 5022013940. Тел.: 8(496)618-69-33, 618-60-16.
E-mail: bab40@yandex.ru, www.kolomna-print.ru