Приложение к журналу
КВАНТ
№2/95

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ОПТИКА, КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Бюро Квантум

ПРИЛОЖЕНИЕ
к журналу КВАНТ № 2/1995

ПРАКТИКУМ
АБИТУРИЕНТА

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА, ОПТИКА, КВАНТОВАЯ ФИЗИКА

Под редакцией
В.В.Можаева и А.И.Черноуцана

Москва 1995
Бюро «Квантум»

УДК 087.5:[539.19+535+530.145]
ББК 22.36+22.34+22.31
П69

Приложение
к журналу «Квант»
№ 2/95

П69 **Практикум абитуриента:** Молекулярная физика, оптика, квантовая физика/Под ред. В.В.Можаева и А.И.Черноуцана. — М.: Бюро Квантум, 1995. — 128 с. (Прил. к журналу «Квант» №2/95)

Книга представляет собой сборник статей по молекулярной физике, оптике и квантовой физике, опубликованных в разные годы в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента» по физике. Каждая статья — как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо общей идеей. На разных примерах показывается, как надо подходить к решению задач данного типа, как избежать ошибок и ловушек, как проанализировать ответ и т.д.
Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам.

ББК 22.36+22.34+22.31

ISBN 5-85843-010-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этой книгой мы заканчиваем публикацию избранных статей из раздела «Практикум абитуриента». В предыдущих выпусках (Приложения к журналу «Квант» № 3/94 и № 5/94) были собраны статьи, посвященные механике и электродинамике. Здесь вы найдете статьи по молекулярной физике, оптике и квантовой физике, а также по некоторым общим вопросам.

Каждая статья «Практикума» — это как бы урок по решению задач определенного типа, объединенных какой-либо общей идеей. Обычно это задачи из конкретного раздела физики, а иногда объединяющим «стержнем», на который «нанизываются» задачи, служит какой-нибудь универсальный прием или подход, применимый к задачам из разных разделов. Ведущий урок «учитель» — автор статьи — на разных примерах показывает, как надо подходить к решению задач данного типа, как избежать ошибок и ловушек, как проанализировать ответ.

Важный совет — не идите по пути наименьшего сопротивления, просто читая текст, пассивно следуя за мыслью автора, а работайте над статьей «с карандашом в руках», сначала пытаясь решить задачу самостоятельно и только потом сверяя свое решение с авторским. Так, конечно, получается дольше, но зато гораздо эффективнее. И еще. «Проработав» статью, обязательно попробуйте решить предложенные в конце упражнения — вы поймете, насколько вам удалось овладеть материалом.

ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ И ЕГО СВОЙСТВА

И. Слободецкий

Многие задачи на изменение состояние идеального газа решаются с помощью уравнения газового состояния — уравнения Менделеева–Клапейрона, связывающего между собой параметры состояния — давление p, объем V и температуру T:

$$pV = \frac{m}{\mathrm{M}} RT,$$

где m — масса газа, М — молярная масса этого газа, $\frac{m}{\mathrm{M}} = \nu$ — число молей, R — газовая постоянная.

Начнем с того, что решим несколько типичных задач.

Задача 1. *Как менялся объем некоторой массы газа при его переходе из состояния 1 в состояние 2 (рис. 1)?*

Из уравнения газового состояния следует, что при постоянном объеме газа его давление пропорционально температуре:

$$p = \frac{1}{V} \frac{m}{\mathrm{M}} RT.$$

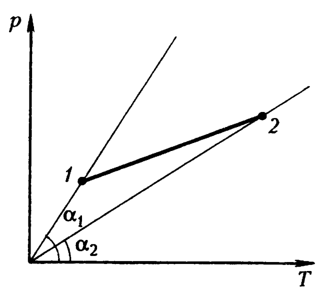


Рис. 1

График зависимости p от T — это прямая, уравнение которой

$$p = aT,$$

где $a = \frac{1}{V}\frac{m}{M}R$. Чем больше V, тем меньше коэффициент пропорциональности a и тем меньше угол α наклона графика к оси T.

Нарисуем две изохоры, проходящие через точки *1* и *2*. Так как $\alpha_1 > \alpha_2$, то $V_2 > V_1$, т.е. объем газа увеличивался.

Задача 2. *Как изменилась масса газа в баллоне емкостью V, если при нагревании газа от температуры T_1 до температуры T_2 давление в баллоне изменилось от p_1 до p_2? Молярная масса газа* M.

Запишем уравнение состояния газа в баллоне в начале и в конце процесса:

$$p_1V = \frac{m_1}{M}RT_1, \quad p_2V = \frac{m_2}{M}RT_2.$$

Здесь m_1 — масса газа в баллоне до нагревания, а m_2 — после нагревания. Выразим m_1 и m_2 из этих уравнений:

$$m_1 = \frac{MV}{R}\frac{p_1}{T_1}, \quad m_2 = \frac{MV}{R}\frac{p_2}{T_2}.$$

Тогда изменение массы

$$\Delta m = m_1 - m_2 = \frac{MV}{R}\left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right).$$

Задача 3. *Из сосуда объемом V, давление в котором p, откачивают воздух. Сколько качаний должен сделать поршневой насос объемом v для того, чтобы давление в сосуде упало в k раз? Температура воздуха не меняется.*

До того как насос сделал первое качание, для воздуха в сосуде можно записать

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где $m/$M — число молей воздуха. После первого качания, когда поршень насоса стоит в крайнем положении, объем этого воздуха равен $V + v$, давление p_1, причем

$$p_1(V + v) = \frac{m}{M}RT.$$

Это означает, что

$$p_1 = p\frac{V}{V + v}.$$

Аналогично найдем, что после второго качания давление в сосуде будет

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V+v} = p\left(\frac{V}{V+v}\right)^2,$$

а после n качаний —

$$p_n = p\left(\frac{V}{V+v}\right)^n.$$

По условию задачи

$$p_n = \frac{1}{k} p.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k} = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n, \text{ т.е. } n = -\frac{\lg k}{\lg \frac{V}{V+v}} = \frac{\lg k}{\lg \frac{V+v}{V}}.$$

* * *

Пусть в сосуде имеется смесь нескольких газов. Давление, которое создал бы каждый газ в отдельности, если из сосуда удалить остальные газы, называют парциальным давлением. Согласно закону Дальтона давление этой смеси равно сумме парциальных давлений. Это означает, что состояние каждого газа в смеси не зависит от состояния других газов. Одинаковыми являются только объем и температура (так как газы находятся в равновесии). Поэтому для каждого из газов независимо можно записать уравнение газового состояния. Рассмотрим пример.

Задача 4. *Определите плотность смеси, состоящей из $m_1 = 50$ г кислорода и $m_2 = 50$ г водорода при температуре $t = 20$ °C и давлении $p = 0,9$ атм.*

По закону Дальтона

$$p = p_1 + p_2,$$

где p_1 — парциальное давление кислорода и p_2 — парциальное давление водорода.

Обозначим объем сосуда V и запишем уравнение состояния каждого газа:

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_1} RT, \quad p_2 V = \frac{m_2}{M_2} RT.$$

Иными словами,

$$pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) RT.$$

Отсюда для плотности смеси, учитывая, что $M_1 = 32$ г/моль и $M_2 =$ $= 2$ г/моль, получаем

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V} = \frac{(m_1 + m_2)p}{RT(m_1/M_1 + m_2/M_2)} \approx 0{,}22 \text{ кг/м}^3 .$$

Задача 5. *Закрытый сосуд объемом $V = 5$ л разделен на две равные части неподвижной полупроницаемой перегородкой. В одной половине сосуда первоначально находится $m_1 = 30$ г водорода, в другой $m_2 = 160$ г кислорода. Через перегородку может диффундировать только водород. Какие давления установятся в сосуде после прекращения процесса диффузии, если сосуд находится все время при постоянной температуре $t = 27$ °C?*

Процесс диффузии прекратится, когда водород равномерно распределится по всему объему. В первой половине сосуда будет только водород, во второй — водород и кислород. Причем давление водорода в первой половине равно парциальному давлению водорода в смеси во второй половине сосуда. Если давление водорода обозначить p_1, то

$$p_1 = \frac{m_1/2}{M_1}\frac{RT}{V/2} = 74{,}7 \text{ атм}$$

($M_1 = 2$ г/моль — молярная масса водорода).

Во второй половине сосуда давление равно

$$p = p_1 + p_2, \text{ где } p_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V/2}$$

($M_2 = 32$ г/моль — молярная масса кислорода). Таким образом,

$$p = \left(2\frac{m_2}{M_2} + \frac{m_1}{M_1}\right)\frac{RT}{V} \approx 124{,}5 \text{ атм}.$$

* * *

Теперь поговорим о другом важном вопросе — о работе идеального газа.

Если газ расширяется при постоянном давлении p, то он совершает работу

$$A = p\Delta V ,$$

где ΔV — изменение объема газа. Получить эту формулу совсем нетрудно. Пусть газ находится в цилиндре с поршнем, площадь которого S. Тогда сила F, действующая со стороны газа, равна pS, и при смещении поршня на расстояние Δl газ совершает работу

$$A = F\Delta l = pS\Delta l.$$

Так как $S\Delta l = \Delta V$, то $A = p\Delta V$.

При уменьшении объема газа, когда $\Delta V < 0$, газ совершает отрицательную работу. Это означает, что внешние силы, действующие на поршень, совершают положительную работу.

А как быть в том случае, если давление в сосуде непостоянно? Например, меняется так, как показано на рисунке 2? Изменение объема газа можно разбить на маленькие участки, такие, что на них давление можно считать постоянным. На каждом из таких участков работа, совершаемая газом, равна произведению давления газа на изменение его объема. Это произведение равно площади выделенного на рисунке прямоугольника. Работа, совершаемая газом во время всего процесса, равна сумме таких произведений. При $\Delta V \to 0$ эта сумма стремится к площади фигуры, ограниченной графиком $p(V)$ и осью V.

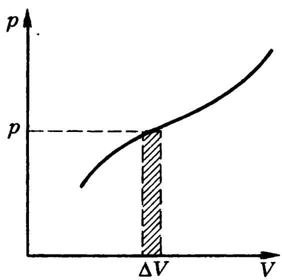


Рис.2

Итак, чтобы найти работу, совершаемую газом при определенном процессе, нужно нарисовать график зависимости его давления от объема и найти площадь фигуры под графиком.

Как это сделать?

Задача 6. *Над одним молем идеального газа совершается цикл (замкнутый процесс), показанный графически на рисунке 3. Какую работу совершил газ во время этого процесса?*

Нарисуем график зависимости p от V для данного процесса (рис.4). На участке $1-2$ давление меняется по закону $p = \alpha\sqrt{T}$, где α — некоторая постоянная. Выразим температуру газа через давление: $T = p^2/\alpha^2$ и подставим в уравнение Менделеева–Клапейрона $pV = RT$. Получим

$$p = \frac{\alpha^2}{R} V$$

— давление прямо пропорционально объему. На этом участке газ совершает положительную работу. Процесс *2—3* — изохорический,

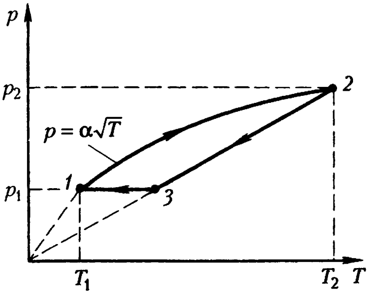


Рис.3

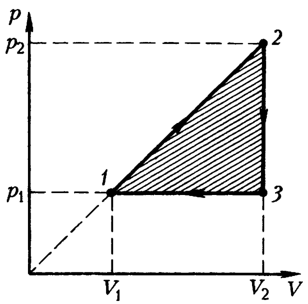


Рис.4

во время этого процесса работа равна нулю. В изобарическом процессе *3—1* работа совершалась над газом, т.е. газ совершал отрицательную работу. Таким образом, полная работа газа равна площади треугольника *1 2 3*:

$$A = \frac{p_2 - p_1}{2}(V_2 - V_1).$$

Так как

$$V_2 = \frac{RT_2}{p_2}, \quad V_1 = \frac{RT_1}{p_1},$$

окончательно получаем

$$A = \frac{p_2 - p_1}{2}\left(\frac{T_2}{p_2} - \frac{T_1}{p_1}\right)R.$$

* * *

Теплоемкость идеального газа (в отличие от жидкостей и твердых тел) зависит от того, какой процесс происходит с газом. Напомним, что теплоемкость — это количество теплоты, которое нужно сообщить газу для того, чтобы увеличить его температуру на 1 градус (точнее — отношение количества теплоты, поглощаемого газом при малом изменении его температуры, к этому изменению).

Когда масса газа равна единице массы, теплоемкость называют удельной, а когда процесс идет с одним молем газа, — молярной.

Если газу сообщается количество теплоты Q, то его можно представить в виде

$$Q = cm\Delta T,$$

где c — удельная теплоемкость, m — масса, ΔT — малое изменение температуры. Согласно первому закону термодинамики количество теплоты, сообщенное газу, равно сумме изменения внутренней энергии газа и работы, совершенной газом:

$$Q = \Delta U + A.$$

Следовательно, теплоемкость газа связана с тем, какую работу совершает газ.

Например, если работа совершается газом за счет уменьшения его внутренней энергии, теплоемкость газа равна нулю. Теплоемкость может быть и отрицательной, если газ за счет уменьшения своей внутренней энергии не только совершает работу, но еще и отдает во внешнюю среду некоторое количество теплоты (так что Q отрицательно).

Если процесс идет при постоянном объеме, то газ не совершает работы. В этом случае количество теплоты, которое сообщается газу, равно изменению его внутренней энергии. Теплоемкость газа во время изохорического процесса называют теплоемкостью при постоянном объеме и обозначают с индексом V. Например, удельную теплоемкость — c_V. Так как при любых процессах, при которых начальная и конечная температуры газа одни и те же, изменения внутренней энергии газа одинаковы (внутренняя энергия определяется температурой газа), то при любом процессе изменение внутренней энергии газа равно

$$\Delta U = c_V m\Delta T.$$

Поэтому первый закон термодинамики можно записать в виде

$$cm\Delta T = c_V m\Delta T + A.$$

Это означает, что для того чтобы узнать теплоемкость газа в каждом данном процессе, нужно найти выражение для работы, совершенной газом. А как это сделать, мы уже знаем.

Задача 7. *Найдите удельную теплоемкость газа при постоянном давлении, если его удельная теплоемкость при постоянном объеме c_V.*

Мы показали, что

$$c_p m\Delta T = c_V m\Delta T + A.$$

В нашем случае работа газа равна

$$A = p(V_2 - V_1),$$

где

$$V_1 = \frac{1}{p}\frac{m}{M}RT_1, \quad V_2 = \frac{1}{p}\frac{m}{M}RT_2,$$

и поэтому

$$A = \frac{m}{M}R\Delta T.$$

Это означает, что

$$c_p m\Delta T = c_V m\Delta T + \frac{m}{M}R\Delta T.$$

Отсюда

$$c_p = c_V + \frac{R}{M}.$$

Упражнения

1. До какой температуры нужно нагреть баллон емкостью $V = 10$ л, содержащий $m_1 = 14$ г азота и $m_2 = 30$ г гелия, для того, чтобы он разорвался, если баллон выдерживает давление не более $p = 100$ атм?

2. В сосуде находится $m_1 = 16$ г кислорода и $m_2 = 10$ г водорода. Во сколько раз изменится давление в сосуде, когда весь кислород соединится с необходимой для реакции частью водорода? Температура в сосуде поддерживается постоянной. Давлением насыщенных водяных паров пренебречь.

3. В закрытом поршнем цилиндре находится газ. В каком случае необходимо больше тепла для нагревания этого газа на одинаковое число градусов: если сосуд расположен так, как показано на рисунке 5,*а* или как на рисунке 5,*б*?

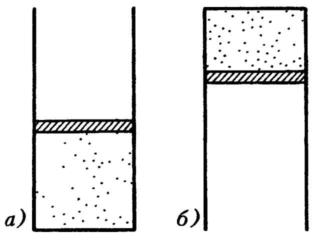


Рис.5

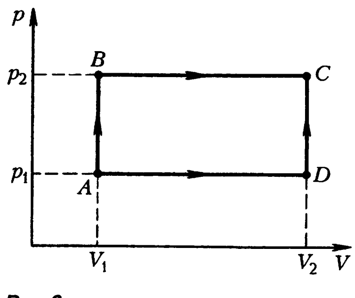


Рис.6

4. Если над идеальным газом совершается процесс ABC (рис. 6), то ему сообщается количество теплоты Q. Какое количество теплоты сообщается газу при процессе ADC?

5. Может ли удельная теплоемкость газа быть бесконечно большой?

ГАЗОВЫЕ ЗАКОНЫ И МЕХАНИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

Д. Александров

Школьный курс физики принято разбивать на отдельные темы, например — «Основы динамики», «Газовые законы», «Электростатика» и т.п. Соответственно и задачи по физике обычно подвергаются такой же классификации. Хорошо это или нет?

При известном опыте подобное «распределение» может помочь абитуриенту уже при беглом ознакомлении с условием задачи прикинуть, какие физические законы пригодятся для ее решения. Однако нередко на вступительных экзаменах встречаются задачи, которые трудно отнести к каким-то конкретным темам. Это может вызвать определенные затруднения, в результате чего в общем несложная задача решена не будет.

В этой статье мы рассмотрим круг задач, которые с первого взгляда можно было бы назвать «газовыми». На самом же деле для их решения помимо газовых законов вам понадобятся также и другие законы, прежде всего — законы механического равновесия.

Задача 1. *Воздушный шарик, вынесенный из теплой комнаты ($t_1 = +27$ °C) на мороз ($t_2 = -23$ °C), некоторое время свободно плавает в воздухе. Определите массу резиновой оболочки шарика. Его диаметр d = 40 см, молярная масса воздуха* M *= 29 г/моль, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Упругостью оболочки можно пренебречь.*

С виду это обычная задача на газовые законы. Такое впечатление усиливают и заданные в условии величины — кроме как в уравнение Менделеева—Клапейрона (уравнение состояния идеального газа) их больше некуда подставить. С другой стороны, очевидно, что массу оболочки из этого уравнения найти нельзя. Как же быть?

Прочитаем условие задачи еще раз, более внимательно — порой наиболее ценная информация содержится не в числовых данных, а в словах. Обратим внимание на две фразы: «Воздушный шарик... свободно плавает в воздухе» и «Упругостью оболочки можно пренебречь». В первом предложении зашифровано условие механического равновесия шарика: сила тяжести резиновой оболочки и теплого воздуха внутри шарика уравновешивается выталкивающей силой. По закону Архимеда эта сила равна весу жидкости или газа в объеме погруженного в них тела. Вторая фраза означает равенство давлений воздуха внутри шарика и снаружи.

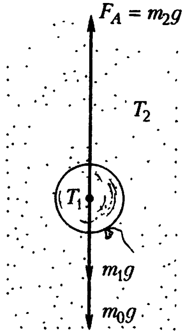


Рис. 1

Итак, запишем прежде всего условие равновесия шарика (рис. 1):

$$m_0g + m_1g = m_2g\,,$$

где m_0 — искомая масса резиновой оболочки, m_1 и m_2 — массы теплого и холодного воздуха в объеме шарика. Из уравнений Менделеева—Клапейрона найдем m_1 и m_2:

$$m_1 = \frac{Mp_0V}{RT_1}\,,\quad m_2 = \frac{Mp_0V}{RT_2}\,,$$

где $V = \pi d^3/6$ (здесь мы и воспользовались отсутствием упругости оболочки). Окончательно получаем

$$m_0 = \frac{Mp_0\pi d^3}{6R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) = 7{,}8 \text{ г}.$$

Задача 2. *На какую глубину нужно погрузить в воду тонкостенный стакан, перевернутый вверх дном, чтобы он утонул? Масса стакана m = 100 г, его объем V = 200 мл, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.*

Будем считать, что стакан погружается очень медленно. В таком случае и стакан, и заполняющая его вода в каждый момент времени будут находиться в равновесии. Очевидно, для этого к стакану придется прикладывать силу, уравновешивающую сумму архимедовой (выталкивающей) силы и силы тяжести. Вблизи поверхности воды эта сила должна быть направлена вниз: из условия задачи следует, что масса воды в объеме стакана больше массы самого стакана, и, следовательно, сила Архимеда в начальный момент больше силы тяжести. По мере погружения выталкивающая сила будет уменьшаться — она пропорциональна объему запертого в стакане воздуха, а он уменьшается, поскольку воздух сжимает все возрастающая сила давления со стороны воды. Нам нужно найти такую глубину, на которой архимедова сила сравняется по величине с силой тяжести. При погружении стакана на чуть большую глубину он утонет без посторонней помощи.

Теперь проведем соответствующие расчеты. Условие равновесия стакана в воде имеет вид (рис. 2)

$$mg = F_A, \text{ где } F_A = \rho g V_1.$$

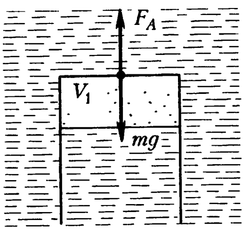


Рис.2

Объем V_1 запертого воздуха найдем из закона Бойля—Мариотта (уравнения изотермического процесса), так как температуру можно считать постоянной (это подразумевалось в условии задачи, хотя и не оговаривалось явно):

$$p_0 V = (p_0 + \rho g h) V_1,$$

где h — искомая глубина, на которую погружен стакан (мы считаем, что h много больше высоты стакана), ρ — плотность воды. Собрав вместе все уравнения, получим

$$mg = \frac{p_0 \rho g V}{p_0 + \rho g h}, \text{ откуда } h = \frac{p_0}{\rho g}\left(\frac{\rho V}{m} - 1\right) = 10 \text{ м}.$$

(Заметим, кстати, что давление водяного столба высотой 10 м соответствует нормальному атмосферному давлению, равному приблизительно 10^5 Па.)

Задача 3. *Открытую стеклянную трубку длиной $l = 1$ м наполовину погружают в ртуть. Затем трубку сверху закрывают и медленно вынимают (рис. 3). Какой длины столбик ртути останется в трубке? Атмосферное давление $p_0 = 750$ мм рт. ст.*

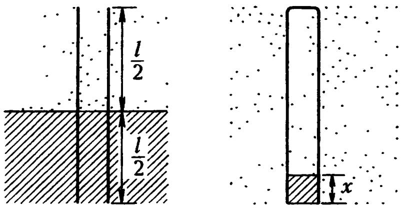


Рис.3

Пренебрежем капиллярными явлениями и будем считать, что ртуть из трубки вытекает очень медленно. Тогда очевидно, что ртуть будет вытекать до тех пор, пока разность сил давления воздуха снаружи и внутри трубки не уравновесит силу тяжести оставшегося столбика ртути. Отсюда найдем давление внутри трубки:

$$p = p_0 - \rho g x,$$

где x — искомая длина оставшегося столбика ртути. С другой стороны, это же давление можно найти из закона Бойля — Мариотта (температуру считаем постоянной)

$$p_0 \frac{l}{2} S = p(l - x)S.$$

Исключив p из обоих уравнений, получим

$$p_0 \frac{l}{2} = (p_0 - \rho g x)(l - x).$$

Это уравнение можно упростить, учитывая, что атмосферное давление задано в миллиметрах ртутного столба (в задачах такого рода это действительно удобнее). Подставив $p_0 = \rho g H$, где $H =$ $= 750$ мм, получим квадратное уравнение

$$x^2 - (H + l)x + \frac{Hl}{2} = 0.$$

Больший корень этого уравнения превышает длину трубки и нам не подходит. Остается второй корень:

$$x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2} = 25 \text{ см.}$$

Задача 4. *В сообщающиеся цилиндрические сосуды одинаковых размеров, один из которых запаян, а второй открыт, налита ртуть. Уровни ртути в сосудах одинаковы, длина части запаянного сосуда, заполненной воздухом, равна l_0. Атмосферное давление p_0, измеренное в миллиметрах ртутного столба, равно H. Какой станет разность уровней ртути в сосудах, если абсолютную температуру воздуха в запаянном сосуде увеличить в 2 раза?*

Решение этой задачи аналогично решению предыдущей, с той лишь разницей, что закон Бойля – Мариотта надо заменить объединенным газовым законом, поскольку температура газа изменяется:

$$\frac{p_0 l_0}{T} = \frac{p(l_0 + x)}{2T}.$$

Здесь x – расстояние, на которое опустится уровень ртути в запаянном сосуде (рис. 4). На такую же величину поднимется уровень ртути в открытом сосуде (диаметры сосудов одинаковы), поэтому уравнение гидростатики примет вид

$$p = p_0 + 2\rho g x.$$

Отсюда, подставив $p_0 = \rho g H$, получаем квадратное уравнение

$$2x^2 + (H + 2l_0)x - Hl_0 = 0.$$

Один корень этого уравнения отрицательный и не может быть ответом к задаче. Другой корень дает

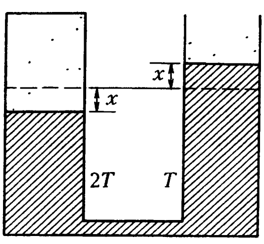


Рис.4

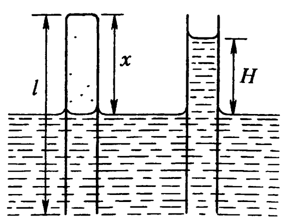


Рис.5

$$x = \left(\sqrt{(H+2l_0)^2 + 8Hl_0} - (H+2l_0)\right)\Big/4.$$

А искомая разность уровней ртути в сосудах составляет $h = 2x$.

Задача 5. *Запаянный с одного конца капилляр, длина которого l, опускают открытым концом в сосуд с водой так, что уровни воды в сосуде и капилляре совпадают (рис. 5). Определите длину непогруженной части капилляра, если в таком же открытом капилляре вода поднимается на высоту H. Атмосферное давление p_0.*

Решая третью задачу, мы пренебрегли поверхностными явлениями в жидкости. Это действительно можно делать, но только в том случае, если радиус трубки достаточно велик, значит, силы поверхностного натяжения малы. В данной задаче с капилляром это условие уже не выполняется.

При погружении запаянного капилляра в воду запертый в нем воздух сжимается, и его давление p становится больше атмосферного. В состоянии равновесия разность давлений воздуха компенсируется дополнительным давлением, обусловленным силами поверхностного натяжения. В открытом капилляре это давление компенсировало давление столба воды плотностью ρ и высотой H.

Так как силы поверхностного натяжения зависят лишь от самой жидкости и от степени ее смачивания стенок сосуда, а и то и другое одинаково для запаянного и открытого капилляров, можно записать

$$p - p_0 = \rho g H.$$

Согласно закону Бойля—Мариотта,

$$px = p_0 l,$$

где x — искомая длина «воздушной» части запаянного капилляра. Решая эти уравнения, получим

$$x = \frac{p_0 l}{p_0 + \rho g H}.$$

В заключение — более сложная задача, в которой обыгрывается интересный механический эффект.

Задача 6. *Нижний конец вертикальной узкой трубки длиной $2L$ запаян, а верхний открыт в атмосферу. В нижней половине трубки находится газ при температуре T_0, а верхняя половина трубки заполнена ртутью. Трубку начинают медленно нагревать. До какой минимальной температуры нужно нагреть газ в трубке, чтобы он вытеснил всю ртуть? Внешнее давление p_0, измеренное в мм рт. ст., равно L.*

Найдем сначала, при какой температуре T газ в трубке вытеснит столбик ртути длиной x (рис. 6). Для этого запишем объединенный газовый закон и уравнение гидростатики:

$$\frac{(p_0+\rho gL)L}{T_0}=\frac{p(L+x)}{T},\quad p=p_0+\rho g(L-x).$$

Учитывая, что $p_0=\rho gL$, получим

$$T=T_0\left(1-\frac{x}{2L}\right)\left(1+\frac{x}{L}\right).$$

Если попытаться найти из этой формулы ответ к задаче, подставив $x = L$, то получится, что $T = T_0$. Другими словами, газ и не надо было нагревать вовсе. Но это не так. Дело в том, что функция $T(x)$ — не монотонная (рис. 7) и при $x = L/2$ имеет максимум,

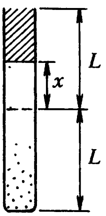


Рис.6

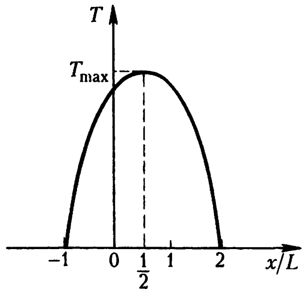


Рис.7

равный $T_{max}=9/8T_0$ (чтобы это получить, вспомним, что вершина параболы лежит посередине между корнями, а они, очевидно, равны $x_1=2L$ и $x_2=-L$). Так вот, для вытеснения всей ртути из трубки ее достаточно нагреть до температуры T_{max}, при которой равновесие ртути становится неустойчивым, а дальше все произойдет само собой.

Упражнения

1. Воздушный шарик объемом $V=1$ м^3 завис на высоте h = 1,5 км, где плотность воздуха (его молярная масса $M_в$ = 29 г/моль) на 20% меньше, чем у поверхности земли. Оболочка шарика, нерастяжимая и герметичная, имеет массу m = 770 г. У поверхности температура воздуха T = 300 К, давление $p=10^5$ Па. Каким газом заполнен шарик?

2. На какую глубину в жидкость плотностью ρ надо погрузить открытую трубку длиной L, чтобы, закрыв верхнее отверстие, вынуть столбик жидкости длиной $L/2$? Атмосферное давление p_0.

3. На поверхности жидкости плотностью ρ плавает цилиндрический тонкостенный стакан, наполовину погруженный в жидкость. На сколько погрузится стакан, если его поставить на поверхность жидкости вверх дном? Высота стакана H, давление воздуха p_0.

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

А. Шеронов

В этой статье будет рассказано о некоторых особенностях тепловых процессов, в которых главным действующим лицом является идеальный газ.

Как известно, газ может совершать работу за счет внешнего источника тепла или за счет своей внутренней энергии. Но при любом процессе выполняется основное соотношение термодинамики — закон сохранения энергии, или первый закон термодинамики. Запишем его в виде

$$Q = \Delta U + A$$

— подведенное к газу количество теплоты Q идет на изменение его внутренней энергии ΔU и совершение газом работы A против внешних сил.

Внутренняя энергия U идеального газа зависит только от температуры T и является функцией его состояния. Так, для одноатомного газа $U = \frac{3}{2}\nu RT$, где ν — число молей газа, R — газовая постоянная. Поэтому любое (как бесконечно малое, так и конечное) изменение внутренней энергии определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний:

$$\Delta U = \frac{3}{2}\nu R\Delta T$$

и не зависит от способа перехода от одного состояния к другому. Это остается справедливым и в том случае, если газ переводится из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние в результате неравновесного, необратимого процесса.

Элементарная, как ее иногда называют, работа ΔA по определению равна произведению давления p на малое изменение объема газа ΔV в двух соседних равновесных состояниях:

$$\Delta A = p\Delta V.$$

При конечном изменении объема от V_1 до V_2 в некотором обратимом процессе работа A численно равна площади под кривой зависимости давления газа от объема $p = p(V)$, ограниченной изохорами V_1 и V_2. Математически эта площадь равна

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV.$$

Для замкнутого цикла работа газа определяется площадью внутри кривых $p(V)$, образующих этот цикл. Работа газа при конечном изменении объема, как и работа газа в замкнутом цикле, зависит от вида функции $p(V)$.

Подведенное к газу в обратимом процессе количество теплоты Q можно выразить через теплоемкость газа C и малое изменение температуры ΔT известным соотношением

$$Q = C\Delta T.$$

Тогда первый закон термодинамики можно записать в виде

$$C\Delta T = \Delta U + p\Delta V.$$

Для того чтобы найти теплоемкость, нужно связать элементарную работу $p\Delta V$ с малой разностью температур ΔT двух соседних состояний рассматриваемого процесса. Это можно сделать с помощью уравнения состояния газа и уравнения процесса. Заметим, что теплоемкость одного и того же газа существенно зависит от вида процесса и может даже изменяться во время процесса.

Напомним основные характеристики часто встречающихся в задачах частных процессов.

В изохорическом процессе работа газом (или над газом) не производится. Нагревание или охлаждение газа приводит к соответствующему изменению его внутренней энергии:

$$\Delta U = Q = C_V\Delta T,$$

где C_V — это теплоемкость газа при постоянном объеме. В частности, для моля одноатомного газа $C_V = \frac{3}{2}R$.

В изотермическом процессе внутренняя энергия газа не меняется. При расширении газа от объема V_1 до объема V_2 при неизменной температуре T_0 им совершается работа, которую можно найти по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT_0}{V} dV = \nu RT_0 \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Из формулы для A видно, что работа газа на любом участке изотермы одинакова, если отношение конечного и начального объемов сохраняется постоянным. По закону сохранения энергии подведенное к газу количество теплоты равно совершенной газом работе. Поскольку температура газа не меняется, теплоемкость в изотермическом процессе оказывается бесконечно большой.

В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится. Теплоемкость газа в этом процессе по определению равна нулю. Работа совершается газом за счет изменения своей внутренней энергии:

$$A = -\Delta U.$$

Для одноатомного газа

$$A = -\frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1),$$

где T_2 и T_1 — температуры газа в конечном и начальном состояниях.

В изобарическом процессе с давлением p_0 работа газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A = p_0(V_2 - V_1).$$

Подведенное к газу количество теплоты идет на совершение работы A и увеличение внутренней энергии ΔU. Для одноатомного газа

$$A = \nu R(T_2 - T_1) \text{ и } \Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1).$$

Поэтому молярная теплоемкость газа в изобарическом процессе, ее обозначают C_p, оказывается равной $\frac{5}{2}R$.

Нетрудно видеть, что C_V и C_p связаны соотношением

$$C_p = C_V + R.$$

Наконец, немного о замкнутом цикле. В таком процессе внутренняя энергия газа не меняется — газ возвращается в исходное состояние. Тогда, по закону сохранения энергии, работа газа $A_ц$ в цикле равна разности количества теплоты Q_1, подведенного к газу, и количества теплоты Q_2, отведенного от газа. Коэффициентом полезного действия (КПД) цикла называется отношение

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A_ц}{Q_1}.$$

Обратите внимание на то, что иногда в задачах могут быть внешне простые участки зависимости $p = p(V)$, составляющие цикл, в ходе которых тепло как подводится, так и отводится. Если для такого участка найти итоговое подведенное или отведенное количество теплоты, то при определении КПД возникнет ошибка.

Особое место среди замкнутых обратимых циклов занимает цикл Карно. Он состоит из двух изотерм с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2, на которых подводится и отводится тепло, и двух адиабат. Только для цикла Карно КПД можно записать в виде

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Теперь перейдем к разбору некоторых характерных задач.

Задача 1. *Найдите работу, совершенную молем идеального газа в цикле, состоящем из двух участков линейной зависимости давления от объема и изохоры (рис. 1). Точки 2 и 3 лежат на изотерме, прямая 3—1 проходит через начало координат. Заданы температуры T_1 и $T_2 = T_3$.*

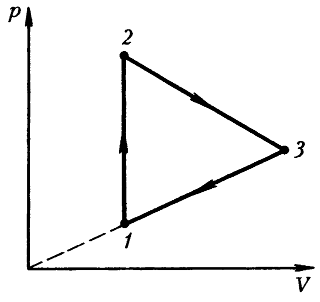


Рис. 1

Работа на изохоре *1—2* равна нулю. Работа на участке *2—3* равна площади трапеции. Учтя, что $p_2V_2 = p_3V_3 = RT_2$, имеем

$$A_{23} = \frac{p_2 + p_3}{2}(V_3 - V_2) = \frac{p_2V_3 - p_3V_2}{2} = RT_2\frac{(V_3/V_2)^2 - 1}{2(V_3/V_2)}.$$

Поскольку прямая *3—1* проходит через начало координат и, следовательно, $p_1/V_1 = p_3/V_3$, получаем $T_1/V_1^2 = T_1/V_2^2 = T_2/V_3^2$. Поэтому работу A_{23} можно окончательно записать в виде

$$A_{23} = RT_2\frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2/T_1}} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{T_2}{T_1}}(T_2 - T_1).$$

Работа на участке *3—1* тоже равна площади трапеции:

$$A_{31} = \frac{p_1+p_3}{2}(V_3 - V_1) = \frac{p_3V_3 - p_1V_1}{2} = \frac{R}{2}(T_2 - T_1).$$

Искомая работа в цикле равна

$$A_ц = A_{23} - A_{31} = \frac{R}{2}(T_2 - T_1)\left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1\right).$$

Заметим, что для участка прямой *2—3*, соединяющего точки изотермы, так же как и для самой изотермы, работа газа определяется лишь отношением объемов. Работа же газа вдоль участка произвольной прямой, проходящей через начало координат на диаграмме pV, определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний.

Задача 2. *Найдите молярную теплоемкость газа в процессе с линейной зависимостью давления от объема.*

Запишем закон сохранения энергии в виде

$$C\Delta T = C_V\Delta T + p\Delta V.$$

По условию $p = \alpha V + \beta$, где α и β — константы. С учетом уравнения состояния газа находим

$$RT = \alpha V^2 + \beta V.$$

Отсюда найдем связь между малыми изменениями температуры ΔT и объема ΔV:

$$R\Delta T = (2\alpha V + \beta)\Delta V.$$

Тогда окончательно для искомой теплоемкости получаем

$$C = C_V + \frac{p\Delta V}{\Delta T} = C_V + R\frac{\alpha V + \beta}{2\alpha V + \beta}.$$

Видно, что теплоемкость переменная и при отрицательном угловом коэффициенте прямой α может менять свой знак. Это означает, что с такими участками следует обращаться аккуратно (например, в задачах, где требуется найти КПД). Читателю рекомендуется самостоятельно проследить за изменением теплоемкости в зависимости от местоположения участка на плоскости pV. Мы же ограничимся замечанием, что для произвольной прямой, проходящей через начало координат ($\beta = 0$), теплоемкость постоянна и равна $C_V + R/2$.

Задача 3. *Моль идеального одноатомного газа из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, переходит в состояние 2, совершая некоторую работу A_{12}. Этот переход происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая в исходное состояние. Сначала сжатие происходит в процессе 2—3 с линейной зависимостью давления от объема, а затем — в адиабатическом процессе 3—1 (рис. 2). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессе сжатия 2—3—1 над газом совершена работа $A = 1090$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$, $V_2 = 2V_3$.*

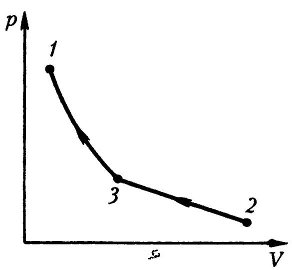


Рис.2

Процесс расширения газа через турбину в пустой сосуд неравновесный, так что всей массе газа в любой момент нельзя приписать некоторое определенное давление и конкретную температуру. Однако если начальное и конечное состояния равновесны, то на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что газ совершает работу за счет изменения своей внутренней энергии:

$$A_{12} = -(U_2 - U_1) = \frac{3}{2}R(T_1 - T_2).$$

По условию, работа по сжатию газа равна

$$A = A_{13} + A_{32} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_3) +$$

$$+RT_2\frac{(V_2/V_3)^2 - 1}{2V_2/V_3} = \frac{3}{2}R(T_1 - T_2) + \frac{3}{4}RT_2.$$

Здесь нами использованы равенства $T_2 = T_3$ и $V_2/V_3 = 2$ и выражение для работы на участке 2—3 из задачи 1. Из полученного выражения находим температуру T_2, а затем и работу A_{12}:

$$A_{12} = 2A - \frac{3}{2}RT_1 \approx 935 \text{ Дж}.$$

Задача 4. *КПД цикла 1—2—4—1, состоящего из трех участков линейной зависимости давления от объема (рис. 3), равен η_1. КПД аналогичного цикла 2—3—4—2 равен η_2. Найдите КПД цикла 1—2—3—4—1. Все участки линейной зависимости имеют положительные угловые коэффициенты.*

С одной стороны, по условию, на всех участках температура является монотонной функцией объема, т.е. либо растет, либо убывает. С другой стороны, можно показать (см. задачу 2), что на каждом участке теплоемкость хотя и изменяется по величине, но не меняет своего знака. Это означает, что тепло или подводится, или отводится. Для соответствующих циклов имеем

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_{24}}{Q_{12} + Q_{41}}, \quad \eta_2 = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{42}},$$

или

$$Q_{12} + Q_{41} = Q_{24}\frac{1}{1-\eta_1}, \quad Q_{23} + Q_{34} = Q_{42}(1-\eta_2).$$

Искомый КПД

$$\eta = 1 - \frac{Q_{23} + Q_{34}}{Q_{41} + Q_{12}} = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2.$$

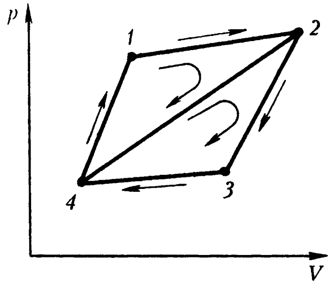


Рис.3

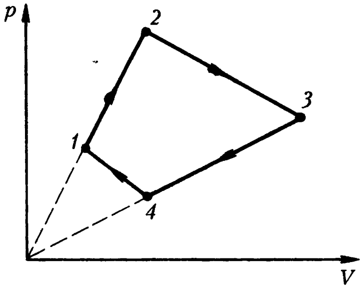


Рис.4

Упражнения

1. Найдите работу моля идеального газа в цикле, состоящем из четырех участков линейной зависимости давления от объема (рис. 4). Вершины цикла лежат на двух изотермах с заданными температурами T_1 и T_2. Прямые *1—2* и *3—4* проходят через начало координат, $V_2 = V_4$.

2. Моль одноатомного идеального газа из начального состояния *1* с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние *2*. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе *2—3* линейной зависимости давления от объема и, наконец, по изохоре *3—1* возвращают в исходное состояние (рис. 5). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе *1—2*, если в процессах *2—3—1* к газу в итоге подведено количество теплоты Q = 72 Дж. Известно, что $T_2 = T_3$ и $V_2 = 3V_1$.

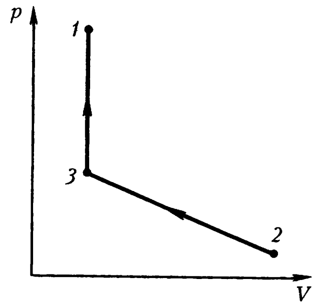


Рис.5

3. Моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса линейной зависимости давления от объема, изобары и изохоры (рис. 6). Найдите количество теплоты, отведенное от газа на участках, где его температура уменьшалась. Известно, что $T_1 = T_2$ и $p_1 = 4p_3$. Направление обхода указано стрелками. Температуру T_1 считать известной.

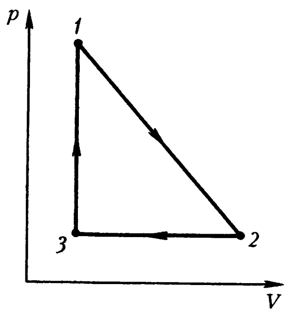


Рис.6

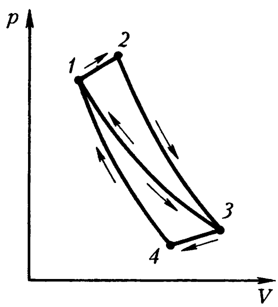


Рис.7

4. КПД циклов $1-2-3-1$ и $1-3-4-1$ (рис. 7) равны соответственно η_1 и η_2. Найдите КПД цикла $1-2-3-4-1$, если участки $2-3$ и $4-1$ – адиабаты, $1-3$ – изотерма, $1-2$ и $3-4$ – прямые с положительными угловыми коэффициентами.

СВОЙСТВА ПАРОВ

Л. Асламазов

В обычных условиях плотность пара невелика и взаимодействием между его молекулами можно пренебречь. Такие пары, как и идеальный газ, описываются уравнением Менделеева – Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

где p, V и T — соответственно давление, объем и температура пара, m — масса, M — молярная масса, R — газовая постоянная.

Задача 1. *Найдите отношение плотностей насыщенного водяного пара и воды при $t = 100$ °C. Давление насыщенного пара воды при этой температуре составляет $p_н = 10^5$ Па.*

Плотность пара $\rho = m/V$, где m — масса, V — объем пара. Из уравнения Менделеева – Клапейрона имеем

$$\rho = \frac{p_н M}{RT} = 0{,}57\ \text{кг/м}^3.$$

Отношение этой плотности к плотности воды $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 очень мало:

$$\frac{\rho}{\rho_в} = 5{,}7 \cdot 10^{-4}.$$

Пользуясь уравнением Менделеева – Клапейрона при решении задач на свойства паров, следует помнить, что масса пара, находящегося в закрытом сосуде, может меняться при изменении его параметров. Масса пара уменьшается в результате его конденсации и, наоборот, увеличивается при испарении жидкости в сосуде. Например, при изотермическом сжатии пар при некотором объеме V_0 становится насыщенным, при дальнейшем уменьшении объема масса пара уменьшается пропорционально объему, так что давление пара $p_0 = \frac{RT}{M}\frac{m}{V}$ остается постоянным (рис. 1).

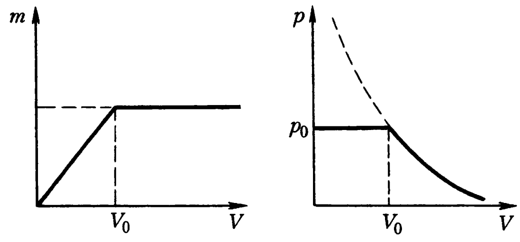


Рис. 1

Задача 2. *В откачанный сосуд объемом $V = 5 \cdot 10^{-3}$ м³ наливают $m_в = 10^{-3}$ кг воды. Определите давление паров в сосуде при температуре $t_1 = 20$ °С. Каким станет это давление, если: а) увеличить температуру до $t_2 = 100$ °С; б) соединить сосуд с другим откачанным сосудом того же объема и той же температуры (рис. 2)? Давление насыщенных водяных паров при температуре 20 °С равно $p_{н1} = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па, а при 100 °С — $p_{н2} = 10^5$ Па.*

Прежде всего найдем, какое минимальное количество воды необходимо для насыщения объема V. Из уравнения Менделеева—Клапейрона имеем

$$m = \frac{p_н V M}{RT},$$

где $p_н$ — давление насыщенного пара. Соответственно для температур $T_1 = 293$ К и $T_2 = 373$ К получаем

$$m_1 = 9 \cdot 10^{-5} \text{ кг и } m_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}.$$

Масса налитой воды $m_в = 10^{-3}$ кг меньше m_2, но больше m_1. Поэтому при температуре t_1 пар в сосуде будет насыщенным, и его давление составит

$$p_1 = p_{н1} = 2{,}3 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Давление ненасыщенного пара при температуре t_2 находится по его массе из уравнения Менделеева—Клапейрона:

$$p_2 = \frac{m_в R T_2}{MV} = 3{,}4 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

При подсоединении второго сосуда объем, занимаемый паром, увеличится вдвое. Следовательно, вдвое увеличится и минимальная масса воды, необходимой для насыщения этого объема. Однако она

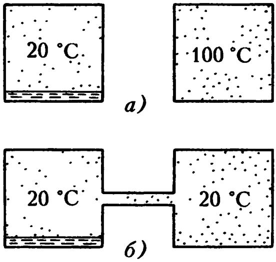


Рис.2

по-прежнему меньше массы налитой воды. Поэтому пар будет насыщенным, и его давление будет

$$p_3 = p_{н1} = 2{,}3 \cdot 10^3 \text{ Па}.$$

Заметим, что при решении задачи не учитывался объем, занимаемый водой в сосуде. Это можно делать, так как объем воды мал по сравнению с объемом сосуда.

* * *

В окружающем нас воздухе, наряду с другими газами, всегда присутствуют и водяные пары. Содержание их количественно можно описать с помощью двух характеристик — абсолютной и относительной влажности воздуха. Абсолютной влажностью воздуха называют плотность водяных паров $\rho = m/V$, а относительной влажностью — выраженное в процентах отношение давления водяного пара к давлению насыщенного пара при той же температуре, т.е.

$$f = \frac{p}{p_н} 100\%.$$

Относительную влажность воздуха можно также определить как отношение плотности водяного пара к плотности насыщенного пара при той же температуре. Действительно, при постоянной температуре плотность пара пропорциональна давлению, поэтому

$$\frac{\rho}{\rho_н} = \frac{p}{p_н}.$$

Например, в задаче 2 при 20 °C абсолютная влажность воздуха в сосуде $\rho_1 = m_1/V = 1{,}8\cdot 10^{-2}$ кг/м^3, относительная влажность $f_1 = 100\%$. При температуре 100 °C в том же сосуде абсолютная влажность $\rho_2 = m_в/V = 0{,}2$ кг/м^3, относительная влажность $f_2 = (p_2/p_н)\,100\% = 34\%$.

При изменении температуры, даже при постоянной абсолютной влажности, относительная влажность меняется. Так, по мере охлаждения влажного воздуха при некоторой температуре $T_р$ его относительная влажность достигает 100%, а пар, содержащийся в воздух, становится насыщенным. При дальнейшем охлаждении пар будет конденсироваться. Температура $T_р$ называется точкой росы (при этой температуре выпадает роса).

Задача 3. *При какой максимальной относительной влажности воздуха в комнате бутылка молока, вынутая из холодильника, не будет запотевать? Температура в холодильнике $t_1 = 5$ °C, а в комнате $t_2 = 25$ °C. Соответствующие давления насыщенных паров воды равны $p_{н1} = 866$ Па и $p_{н2} = 3192$ Па.*

Возле бутылки температура влажного воздуха становится равной t_1. Бутылка не запотевает, если относительная влажность воздуха при этой температуре не превышает 100%:

$$f_1 = \frac{\rho}{\rho_{н1}}100\% \le 100\%,$$

где $\rho_{н1} = p_{н1}M/(RT_1)$ — плотность насыщенного водяного пара при $T_1 = 278$ К, ρ — абсолютная влажность воздуха в комнате, не зависящая от температуры. Поэтому максимальная абсолютная влажность воздуха, при которой бутылка еще не запотевает, равна $\rho_0 = \rho_{н1}$. Соответствующая относительная влажность воздуха при температуре $T_2 = 298$ К будет

$$f_2 = \frac{\rho_0}{\rho_{н2}}100\% = \frac{p_{н1}T_2}{p_{н2}T_1}100\% \approx 30\%.$$

Задача 4. *Кондиционер пропускает через комнату ежесекундно $V = 3$ м^3 воздуха. Воздух забирается с улицы, где температура $t_1 = 40$ °C и влажность $f_1 = 80\%$, затем охлаждается в кондиционере до температуры $t_2 = 5$ °C, а в комнате нагревается до температуры $t_3 = 25$ °C. Какая масса воды ежесекундно конденсируется в кондиционере при таком режиме его работы? Какая влажность воздуха устанавливается в помещении? Давления насыщенных паров воды равны соответственно $p_{н1} = 7{,}4\cdot 10^3$ Па, $p_{н2} = 866$ Па и $p_{н3} = 3192$ Па.*

В объеме наружного воздуха V содержится

$$m_1 = \frac{f_1 \rho_{н1} V}{100\%} = \frac{f_1 p_{н1} MV}{RT_1 \cdot 100\%} = 0{,}12 \text{ кг}$$

воды ($\rho_{н1} = p_{н1}M/(RT_1)$ — плотность насыщенного пара воды при температуре T_1=313 K). Эта масса больше массы m_2 насыщенного водяного пара в том же объеме при температуре $T_2 = 278$ K:

$$m_2 = \rho_{н2} V = \frac{p_{н2} MV}{RT_2} \approx 0{,}02 \text{ кг}.$$

Поэтому в кондиционере ежесекундно конденсируется массы воды

$$m = m_1 - m_2 \approx 0{,}1 \text{ кг}.$$

Так как предполагается, что в помещении дополнительно вода не испаряется, абсолютная влажность воздуха там установится такой же, какая она у воздуха, поступающего из кондиционера:

$$\rho = \rho_{н2} = \frac{p_{н2} M}{RT_2}.$$

Соответствующая относительная влажность при комнатной температуре $T_3 = 298$ K будет

$$f_3 = \frac{\rho}{\rho_{н3}} 100\% = \frac{p_{н2} T_3}{p_{н3} T_2} 100\% \approx 30\%.$$

Задача 5. *В комнате объемом $V = 50$ м^3 влажность воздуха $f = 60\%$ при температуре $t = 20$ °C и давлении $p = 10^5$ Па. Чему равна масса влажного воздуха в комнате ? Как изменится эта масса при увеличении влажности на $\Delta f = 10\%$ при неизменных температуре и давлении? Изменится ли при этом общее число молекул влажного воздуха в комнате? Давление насыщенного пара $p_н = 2{,}3 \cdot 10^3$ Па.*

Масса влажного воздуха m складывается из массы сухого воздуха m_1 и массы водяного пара m_2:

$$m = m_1 + m_2.$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона

$$m_1 = \frac{p_1 V M_1}{RT} \text{ и } m_2 = \frac{p_2 V M_2}{RT},$$

где $M_1 = 29$ кг/кмоль и $M_2 = 18$ кг/кмоль — молярные массы воздуха и водяного пара, p_1 и p_2 — соответствующие парциальные давления. По условию задачи,

$$p_2 = \frac{f}{100\%} p_{н},$$

а согласно закону Дальтона,

$$p_1 = p - p_2 = p - \frac{f}{100\%} p_{н}.$$

Тогда окончательно получим

$$m = m_1 + m_2 = \frac{V}{RT}\left(pM_1 - \frac{f}{100\%} p_{н}(M_1 - M_2)\right) = 58 \text{ кг}.$$

Как видно из последней формулы, при увеличении влажности f при неизменных p и T масса влажного воздуха в комнате уменьшается ($M_1 - M_2 > 0$). Изменение массы при увеличении влажности на Δf будет равно

$$\Delta m = \frac{p_{н} V}{RT}(M_1 - M_2)\frac{\Delta f}{100\%} = 0{,}05 \text{ кг}.$$

Уменьшение массы влажного воздуха в комнате при увеличении влажности можно понять с помощью закона Авогадро: в одинаковых объемах при одинаковых давлениях и температурах содержится одинаковое число молекул любого газа. При увеличении влажности воздуха общее число молекул влажного воздуха в комнате не меняется, а происходит лишь замещение части молекул воздуха на молекулы воды: увеличивается число молекул водяного пара и уменьшается число молекул сухого воздуха. Так как $M_2 < M_1$, масса влажного воздуха уменьшается.

* * *

Превращение жидкости в пар, как известно, требует подвода энергии. Количество теплоты, которое необходимо подвести для того, чтобы испарить единицу массы жидкости при неизменной температуре и внешнем давлении, равном давлению ее насыщенных паров, называется удельной теплотой парообразования. Можно также сказать, что удельная теплота парообразования r — это то количество теплоты, которое надо затратить, чтобы перевести в пар единицу массы жидкости при ее кипении. Часть этой энергии идет на увеличение потенциальной энергии молекул (на работу против сил молекулярного притяжения), а часть — на работу по расширению против сил внешнего давления (так как удельный объем пара больше удельного объема жидкости).

Задача 6. *Определите, какая часть удельной теплоты парообразования воды идет на увеличение внутренней энергии системы при температуре T=373 К. Для воды $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг.*

Из закона сохранения энергии имеем

$$r = \Delta w + A,$$

где Δw — изменение внутренней энергии при испарении 1 кг жидкости, A — работа по расширению. Так как расширение происходит изобарически, то

$$A = p_н (v_н - v_0),$$

где $v_н = RT/(p_н \mathrm{M})$ — удельный объем насыщенного пара, а v_0 — удельный объем воды, которым по сравнению с $v_н$ можно пренебречь (см. задачу 1). Таким образом,

$$\frac{\Delta w}{r} = \frac{r - A}{r} = 1 - \frac{RT}{\mathrm{M}r} \approx 0{,}9,$$

т.е. на преодоление сил взаимодействия молекул при испарении воды при 373 К тратится 90% подводимого количества теплоты.

Задача 7. *В длинном цилиндрическом сосуде с невесомым поршнем площадью $S = 0{,}01$ м^2 находится $m_в = 0{,}01$ кг воды при температуре $T_0 = 273$ К. Поршень плотно прилегает к стенкам сосуда, но ходит без трения и в начальный момент находится у поверхности воды (рис. 3,а). Воду нагревают, причем мощность нагревателя $N = 1$ кВт постоянна, а теплоотводом через стенки сосуда и поршень можно пренебречь. Нарисуйте график зависимости высоты поднятия поршня h от времени t. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.*

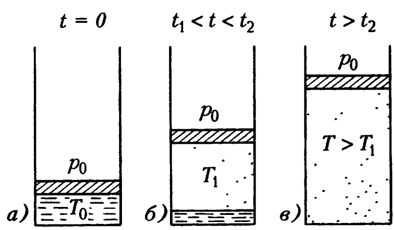


Рис.3

Пока давление насыщенных паров воды не станет равным нормальному атмосферному давлению (это произойдет при температуре $T_1 = 373$ К), поршень будет находиться у поверхности воды, поднимаясь только за счет ее теплового расширения. Время работы нагревателя t_1, необходимое для нагрева воды до температуры T_1, легко находится:

$$t_1 = \frac{cm_в(T_1 - T_0)}{N} = 4 \text{ с}$$

(здесь $c = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды). Соответствующий участок на графике (рис. 4) изображен прямой без наклона:

$$h = 0 \text{ при } 0 < t < t_1,$$

так как коэффициент теплового расширения воды пренебрежимо мал.

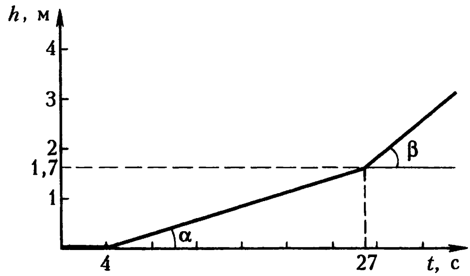


Рис.4

При температуре T_1 =373 К давление насыщенного пара становится равным внешнему давлению, и поршень начинает подниматься над поверхностью воды (см. рис. 3,б) — под поршнем образуется насыщенный водяной пар. Так как мощность нагревателя постоянна, масса пара

$$m = \frac{N(t - t_1)}{r}$$

(где $r = 2{,}3 \cdot 10^6$ Дж/кг — удельная теплота парообразования воды) пропорциональна времени работы нагревателя после достижения температуры T_1. Из уравнения Менделеева—Клапейрона объем пара

$$V = \frac{RT_1 m}{p_0 \mathrm{M}} = \frac{RT_1 N}{p_0 \mathrm{M} r}(t - t_1)$$

тоже пропорционален этому времени (поскольку T_1 и p_0 постоянны). Для высоты поднятия поршня имеем

$$h = \frac{V}{S} = \frac{RT_1 N}{p_0 \mathrm{M} r S}(t - t_1) \text{ при } t_1 < t < t_2,$$

где

$$t_2 = t_1 + \frac{m_в r}{N} = 27 \text{ с}$$

— момент времени, когда вся вода в сосуде испарится. На графике этот участок изображен прямой с углом наклона α, причем

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{RT_1N}{p_0\mathrm{M}rS} \approx 0{,}08 \ \text{м/с}.$$

После этого температура пара будет расти, и он перестанет быть насыщенным. Изменение температуры пара происходит по закону

$$\Delta T = \frac{N(t-t_2)}{c_p m},$$

где $c_p = 2\cdot10^3$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость водяного пара при изобарическом нагревании. Соответствующее изменение объема находится из уравнения Менделеева — Клапейрона:

$$\Delta V = \frac{mR\Delta T}{\mathrm{M}p_0} = \frac{NR(t-t_2)}{\mathrm{M}c_p p_0}.$$

Для высоты поднятия поршня имеем

$$h = h_1 + \frac{NR}{\mathrm{M}c_p p_0 S}(t-t_2) \ \text{при} \ t > t_2,$$

где

$$h_1 = \frac{m_{\text{в}}RT_1}{\mathrm{M}p_0S} \approx 1{,}7 \ \text{м}$$

— высота поднятия поршня в момент окончания испарения воды. На графике этот участок изображен прямой с углом наклона β, причем

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{NR}{\mathrm{M}c_p p_0 S} \approx 0{,}2 \ \text{м/с}.$$

Упражнения

1. В широкие сообщающиеся сосуды налита вода при температуре $T = 293$ К. Один из сосудов плотно закрывают. Определите разность уровней воды в сосудах, если давление насыщенного пара при этой температуре $p_н = 2\cdot10^3$ Па. Давлением паров воды в открытом сосуде можно пренебречь.

2. Тяжелая кастрюля, перевернутая вверх дном, плавает в воде. При температуре воды $T_1 = 293$ К воздух занимает всего $1/15$ часть объема кастрюли, а при нагреве до $T_2 = 373$ К — заполняет $2/3$ ее объема. Определите массу кастрюли, считая ее тонкостенным цилиндром с площадью дна $S = 10^{-2}$ м^2. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Давлением насыщенных паров воды при начальной температуре пренебречь. Температуру воздуха в кастрюле считать равной температуре воды.

3. Под стеклянный колпак поместили два сосуда с водой. Уровни воды в сосудах разные. Как будет меняться высота уровней со временем?

4. Объясните, почему сырая вода закипает быстрее, чем кипяченая. Закипит ли сырая вода в кастрюле, плавающей в кипящей кипяченой воде?

ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ

А. Буздин, С. Кротов

В этой статье речь пойдет о процессах, при которых происходит смена одного агрегатного состояния вещества на другое (одной фазы на другую). Такие процессы относятся к фазовым превращениям, или фазовым переходам. Это плавление твердого тела (и обратный ему процесс отвердевания, или кристаллизации, жидкости), конденсация пара (и обратный ему процесс испарения жидкости) и сублимация, или возгонка, — переход вещества из твердого состояния в газообразное, минуя жидкое (и обратный процесс, также называемый кристаллизацией).

С фазовыми превращениями мы часто сталкиваемся в повседневной жизни — когда кипятим воду для чая или варим суп, дышим на обледенелое стекло автобуса или любуемся сосульками, образовавшимися на карнизе дома. Мы уже привыкли и поэтому не задумываемся над тем, зачем зимой тротуар посыпают солью (а почему не сахаром?) или почему при пайке радиосхем пользуются оловом (а почему, скажем, не алюминием?).

Впрочем, зачем далеко ходить за примером? Основа существования всего живого в природе — вода — постоянно претерпевает различные фазовые переходы. Внимательно посмотрев на рисунок 1, скажите, какой процесс происходит при:

— сушке белья на морозе;

— образовании зимних узоров на стеклах (кстати, с какой стороны стекла образуются эти узоры?);

— запотевании стекол очков у человека, входящего с мороза в теплое помещение;

— образовании инея на деревьях или росы на траве.

(Попробуйте самостоятельно продолжить этот перечень.)

Опыт проведения приемных экзаменов в вузы показывает, что отношение абитуриентов к данной теме различное. Одни считают, что здесь все просто, другие испытывают трепет при встрече с любым вопросом. И обе точки зрения, на наш взгляд, правомерны. С одной стороны, для решения подавляющего большинства задач, где встре-

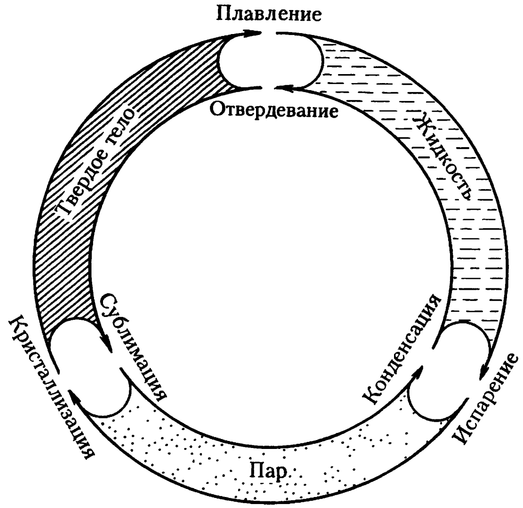


Рис. 1

чаются фазовые превращения, достаточно воспользоваться лишь уравнением теплового баланса, т.е. частным случаем закона сохранения энергии. С другой стороны, в таких задачах не всегда очевиден ответ на вопрос о том, каким будет конечное состояние рассматриваемой системы. Например, весь ли лед, брошенный в воду, растает или будут сосуществовать две фазы — лед и вода?

А теперь рассмотрим несколько конкретных задач и вопросов. Многие из них предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы. Начнем с задач, в которых центральное место занимает процесс плавления (или обратный ему процесс — отвердевание).

Задача 1. *В теплоизолированном сосуде находится вода, масса которой $m_1 = 1$ кг, а температура $t_1 = 30$ °С. В воду опускают лед, находящийся при температуре $t_2 = -20$ °С. Через некоторое время в сосуде оказалась вода с температурой $t_3 = 20$ °С. Найдите массу льда, опущенного в сосуд. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4{,}2$ кДж/(кг·К), льда $c_2 = 2{,}1$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкостью сосуда пренебречь.*

Обозначим массу льда через m_2. Тогда количество теплоты, полученное льдом при его нагревании до температуры таяния $t_0 = 0$ °С, будет равно

$$Q_1 = c_2 m_2 (t_0 - t_2).$$

Превращаясь в воду (при неизменной температуре!), этот лед получит количество теплоты

$$Q_2 = \lambda m_2 .$$

Образовавшаяся вода при последующем нагревании ее до температуры t_3 получит количество теплоты

$$Q_3 = c_1 m_2 (t_3 - t_0).$$

Вода, первоначально находящаяся в сосуде, при охлаждении до температуры t_3 отдаст количество теплоты

$$Q_4 = c_1 m_1 (t_1 - t_3).$$

Воспользовавшись уравнением теплового баланса

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = Q_4 ,$$

найдем массу льда, опущенного в сосуд:

$$m_2 = m_1 \frac{c_1 (t_1 - t_3)}{c_1 (t_3 - t_0) + c_2 (t_0 - t_2) + \lambda} \approx 0{,}09 \text{ кг}.$$

Задача 2. *В теплоизолированный сосуд, в котором находился лед массой $m_1 = 3$ кг при температуре $t_1 = -10\ ^\circ C$, ввели воду, масса которой $m_2 = 0{,}5$ кг, а температура $t_2 = 10\ ^\circ C$. Найдите массу льда в сосуде после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость льда $c_1 = 2{,}1$ кДж/(кг·К), удельная теплоемкость воды $c_2 = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda =$ $= 0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкость сосуда не учитывать.*

Эта задача отличается от предыдущей тем, что заранее неизвестно, в каком конечном агрегатном состоянии будет находиться система, в частности — какой будет ее конечная температура. Для ответа на этот вопрос найдем, прежде всего, количество теплоты, которое потребуется для того, чтобы весь находящийся в сосуде лед нагреть до температуры плавления $t_0 = 0\ ^\circ$C:

$$Q_1 = c_1 m_1 (t_0 - t_1) = 63 \text{ кДж}.$$

Если вся введенная в сосуд вода охладится до этой температуры, выделится количество теплоты

$$Q_2 = c_2 m_2 (t_2 - t_0) = 21 \text{ кДж} < Q_1 .$$

Превратившись в лед, вся вода может выделить еще количество теплоты

$$Q_3 = \lambda m_2 = 165 \text{ кДж} > Q_1 .$$

Таким образом, получаем, что конечная температура системы будет равна $t_0 = 0$ °C, при этом некоторая часть воды замерзнет. Ее массу Δm найдем из уравнения теплового баланса:

$$\Delta m = \frac{Q_1 - Q_2}{\lambda} \approx 0{,}1 \text{ кг}.$$

Следовательно, после установления равиовесия в сосуде будет

$$m_1^* = m_1 + \Delta m \approx 3{,}1 \text{ кг льда}.$$

Задача 3. *Ведро, в котором находится смесь воды со льдом массой m = 10 кг, внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости температуры t от времени τ изображен на рисунке 2. Какая масса льда была в ведре, когда его внесли в комнату? Теплоемкостью ведра пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0{,}33$ МДж/кг.*

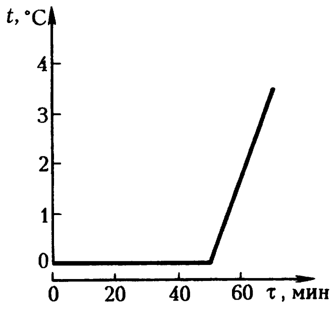


Рис.2

Как видно из графика, первые 50 минут температура смеси не менялась и оставалась равной $t_0 = 0$ °C. Все это время тепло, получаемое смесью из комнаты, шло на таяние льда. Через 50 минут весь лед растаял, и температура воды (бывшей в ведре и образовавшейся из льда) начала повышаться.

За 10 минут (от $\tau_1 = 50$ мин до $\tau_2 = 60$ мин) температура повысилась на $\Delta t = 2$ °C. Количество теплоты, поступившее к воде из комнаты за это время, равно

$$Q_1 = cm\Delta t = 84 \text{ кДж}.$$

Значит, за первые 50 минут (от 0 до τ_1) к смеси поступило количество теплоты

$$Q_2 = 5Q_1 = 420 \text{ кДж}.$$

Это тепло и пошло на таяние льда. Таким образом, масса льда равна

$$m_л = \frac{Q_2}{\lambda} \approx 1{,}3 \text{ кг}.$$

* * *

До сих мор мы считали, что температура плавления льда равна $t_0 = 0\,^\circ C$ ($T_0 = 273$ K). Однако это справедливо лишь при нормальном внешнем давлении $p_0 = 10^5$ Па. С изменением давления меняется и температура плавления, т.е. та температура, при которой находятся в равновесии (сосуществуют) две различные фазы — лед и вода. Аналогично, при фиксированном внешнем давлении вода и пар сосуществуют только при единственной температуре (речь идет о закрытом сосуде). То же относится и к случаю сосуществования льда и пара. Для переменных значений давления p и температуры T можно получить три различных кривых сосуществования фаз вода — пар, вода — лед и лед — пар. На рисунке 3 им соответствуют кривая испарения OK, кривая плавления OB и кривая сублимации AO. Все три кривые имеют общую точку O — так называемую тройную точку. Только в ней возможно одновременное сосуществование всех трех фаз. Для тройной точки воды, например, $T_{тр} = 273{,}16$ K и $p_{тр} = 609$ Па (4,6 мм рт. ст.).

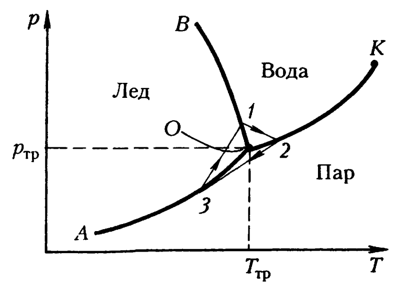


Рис.3

Заметим, что кривая испарения заканчивается в определенной точке (точке K), называемой критической. В этой точке теряется всякое различие между жидкостью и ее паром. При температурах выше критической газ сконденсировать нельзя, как бы сильно мы ни сжимали его. Интересно, что именно благодаря этому обстоятельству так долго не удавалось получить кислород, водород и гелий в жидком состоянии — критические температуры этих веществ очень низкие, а для ожижения вещество, прежде чем сжимать, предварительно нужно охладить до температуры ниже критической.

Удельная теплота плавления (а также парообразования и сублимации) как количественная характеристика фазового превращения вещества зависит от температуры и от внешнего давления. Для одного и того же вещества удельные теплоты плавления, парообразования и сублимации связаны друг с другом. Проиллюстрируем это следующими задачами.

Задача 4. *На сколько изменится удельная теплота плавления вещества при понижении температуры плавления на ΔT, если удельные теплоемкости вещества в жидкой и твердой фазах равны соответственно c_1 и c_2?*

Пусть, первоначально находясь в жидкой фазе при температуре T_0, вещество массой m переходит в твердое состояние, а затем охлаждается до температуры $T = T_0 - \Delta T$. Выделившееся при этом количество теплоты будет равно $(\lambda_0 + c_2\Delta T)m$, где λ_0 — удельная теплота плавления при температуре T_0. Переход в состояние с температурой T может осуществляться и другим путем — сначала вещество, оставаясь в жидкой фазе, охлаждается до температуры T, а затем переходит в твердую фазу. Во время этого перехода выделится количество теплоты, равное $(c_1\Delta T + \lambda)m$, где λ — удельная теплота плавления при температуре T.

Воспользуемся далее законом сохранения энергии для тепловых процессов (первым законом термодинамики). Будем считать, что в пределах интервала температур ΔT удельный объем вещества в жидком и в твердом состояниях не зависит от температуры. Тогда работа, связанная со скачком удельного объема в точке фазового превращения, в обоих случаях будет одной и той же. Учитывая, что изменение внутренней энергии системы не зависит от пути перехода, а определяется лишь начальным и конечным состояниями системы, запишем закон сохранения энергии в виде

$$(\lambda_0 + c_2\Delta T)m = (c_1\Delta T + \lambda)m.$$

Отсюда найдем изменение удельной теплоты плавления:

$$\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda = (c_1 - c_2)\Delta T.$$

Задача 5. *В тройной точке удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}48 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления $\lambda = 3{,}32 \cdot 10^5$ Дж/кг. Найдите удельную теплоту δ сублимации воды в тройной точке.*

Рассмотрим цикл, окружающий тройную точку (см. рис. 3), в котором по очереди происходят следующие превращения: плавление (в точке 1) $\rightarrow$ испарение (в точке 2) $\rightarrow$ конденсация газа в твердое тело (в точке 3). Если этот цикл проводится с некоторой массой вещества m и притока тепла извне нет (система теплоизолирована), то, согласно первому закону термодинамки, полное изменение внутренней энергии за цикл равно работе внешних сил:

$$m\lambda + mr - m\delta = A.$$

Неограниченно сжимая цикл около тройной точки, найдем, что $A \rightarrow 0$, а удельная теплота сублимации в этой точке равна

$$\delta = \lambda + r = 2{,}81 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

* * *

Вспомним теперь, что кипение жидкости начинается при температуре, когда давление насыщенного пара становится равным внешнему давлению. Как видно из кривой сосуществования жидкость — пар, давление насыщенного пара растет по мере увеличения его температуры.

Рассмотрим несколько задач, связанных с процессом кипения.

Задача 6. *Приготовление пищи в кастрюле-скороварке происходит при повышенном давлении. При этом температура превышает $t_к = 100$ °С. Было обнаружено, что сразу после разгерметизации скороварки испарилось 3% содержащейся в ней воды. Определите температуру, которую имела вода до разгерметизации. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}3$ МДж/кг. Теплообменом за время установления нового состояния равновесия и изменением удельной теплоты парообразования с температурой пренебречь.*

После разгерметизации скороварки давление станет равным атмосферному. Поскольку температура воды t в скороварке превышает температуру $t_к = 100$ °С кипения воды при нормальном атмосферном давлении, то начнется интенсивное испарение (кипение) воды. Оно будет происходить до тех пор, пока ее температура не уменьшится до значения $t_к$. При этом на испарение 3% воды, т.е. массы $0{,}03m$, где m — исходная масса воды в скороварке, потребуется количество теплоты $0{,}03mr$. Это тепло выделяется при охлаждении воды от температуры t до $t_к$. В результате мы можем записать

$$0{,}03mr = cm(t - t_к),$$

откуда следует, что температура воды в скороварке была равна

$$t = t_к + 0{,}03r/c \approx 116\,°C.$$

Обратим внимание на тот факт, что при расчете выделяющегося при охлаждении воды количества теплоты мы пренебрегаем уменьшением ее массы. Это оправдано, поскольку испаряется всего лишь 3% воды.

В связи с этой задачей разумно обсудить два вопроса.

1) Будет ли кипеть вода в пробирке, опущенной в кастрюлю с кипящей водой?

Процесс кипения, как известно, требует непрерывного подвода тепла. Когда вода в пробирке нагреется до температуры 100 °C, подвод тепла из кастрюли прекратится. Поэтому вода в пробирке кипеть не будет.

2) А что будет, если в пробирку поверх воды налить толуол (это более легкая жидкость, не смешивающаяся с водой), температура кипения которого 111 °C?

Здесь мы сталкиваемся с интересным явлением — так называемым пограничным кипением. Суть его состоит в том, что кипение начинается на границе двух жидкостей, когда сумма парциальных давлений их насыщенных паров равна внешнему атмосферному давлению. Ясно, что при этом давление насыщенных паров воды меньше атмосферного, а значит, и температура ниже 100 °C. Таким образом, при добавлении толуола в пробирку с водой кипение на границе толуол — вода начнется гораздо раньше, чем закипит вода в кастрюле.

Задача 7. *Во сколько раз плотность водяного пара под крышкой кастрюли, в которой кипит жирный бульон, больше плотности масляного пара? Давление насыщенного пара масла при температуре $t = 100$ °C равно $p_{нм} = 120$ Па. Молярная масса масла $M_м = 80$ г/моль.*

Давление насыщенных паров масла при температуре $t = 100$ °C примерно в тысячу раз меньше атмосферного давления ($p_{атм} = 10^5$ Па), а значит, и кипеть жирный бульон будет практически при этой температуре (обсуждавшийся выше эффект пограничного кипения в этом случае приводит к сдвигу температуры кипения лишь на 0,2 °C). Из уравнения Менделеева — Клапейрона следует, что отношение плотностей водяного и масляного паров будет равно

$$\frac{\rho_{вп}}{\rho_{мп}} = \frac{p_{нв}\mathrm{M}_в}{p_{нм}\mathrm{M}_м} = \frac{p_{атм}\mathrm{M}_в}{p_{нм}\mathrm{M}_м} \approx 190.$$

Задача 8. *В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем площадью $S = 100$ см^2 находится $m_1 = 18$ г насыщенного водяного пара. В цилиндр впрыскивают $m_2 = 18$ г воды при температуре $t_0 = 0$ °С. На сколько опустится поршень? Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/кг, удельная теплота парообразования $r = 2{,}3$ МДж/кг. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей в окружающую среду можно пренебречь.*

По условию задачи пар в сосуде насыщенный. Поскольку поршень невесомый, давление пара равно атмосферному давлению $p_0 = 10^5$ Па, а температура пара до впрыскивания воды была равна $t = 100$ °С. Этот момент самый важный в данной задаче. Нетрудно далее убедиться в том, что конечная температура системы после установления равновесия также будет равной t (покажите это самостоятельно). Следовательно, введенная в цилиндр вода нагреется до температуры t, что может произойти только за счет конденсации некоторой массы пара $m_п$:

$$cm_2(t - t_0) = m_п r, \text{ откуда } m_п = cm_2(t - t_0)/r \approx 3{,}3 \text{ г}.$$

Объем V, который занимал этот пар до конденсации, найдем из уравнения газового состояния:

$$V = \frac{m_п RT}{\mathrm{M}p_0} \approx 5{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

Считая объем, который занимает сконденсировавшаяся из пара вода, пренебрежимо малым (убедитесь в этом сами), получим, что перемещение поршня равно

$$h = \frac{V}{S} \approx 0{,}57 \text{ м} = 57 \text{ см}.$$

Упражнения

1. В закрытый сосуд объемом $V = 166$ л поместили воду, масса которой $m = 0{,}5$ кг, и нагрели до температуры $t = 127$ °С. Какова масса воды, оставшейся в сосуде при этих условиях? Объемом, занимаемым водой, по сравнению с объемом сосуда пренебречь. Давление насыщенных паров воды при температуре t равно $p_н = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па.

2. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t = 108$ °С и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость

воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}3$ МДж/кг. Теплообменом за время установления равновесия пренебречь.

3. На рисунке 4 представлена зависимость давления от температуры для

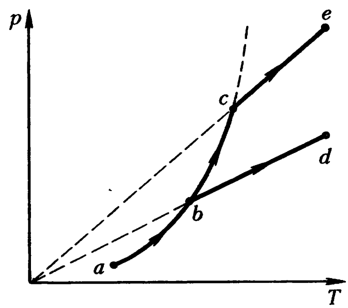


Рис.4

двух процессов — *abd* и *abce*, происходящих с двумя изолированными системами. Участок кривой *abc* является частью кривой сосуществования жидкости и пара. Считая объемы систем одинаковыми, объясните причину их различного поведения с ростом температуры.

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ И КАПИЛЛЯРНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

А. Буздин, С. Кротов

Поскольку эта тема содержит большое число тонкостей, при написании статьи мы уделяли больше внимания обсуждению отдельных теоретических вопросов, нежели решению стандартных задач.

Для начала стоит сказать несколько слов о специфике сил поверхностного натяжения, действующих на границе жидкости и ее пара.

Как известно, молекулы жидкости находятся так близко друг к другу, что взаимодействие между ними не учитывать нельзя. Поэтому при оценке внутренней энергии системы жидкость – пар существенную роль играет не только кинетическая энергия движения молекул, но и потенциальная энергия их взаимодействия.

Характерный радиус взаимодействия молекул жидкости приблизительно равен среднему расстоянию между ними, так что каждая молекула фактически взаимодействует лишь с ближайшими соседями. Молекулы вблизи свободной поверхности жидкости находятся в особом положении по сравнению с объемными, поскольку они взаимодействуют с молекулами как жидкости, так и ее пара (а это взаимодействие существенно слабее). Можно сказать, что на молекулы приповерхностного слоя приходится иная доля потенциальной энергии системы, чем на объемные молекулы. При возможных изменениях формы жидкости, при заданном объеме и фиксированной температуре, внутренняя энергия, отвечающая объемным молекулам, не меняется, а вклад поверхностной энергии будет тем больше, чем больше будет площадь свободной поверхности жидкости.

Коэффициентом поверхностного натяжения жидкости σ называют отношение работы ΔA, которую необходимо совершить, чтобы при постоянной температуре увеличить площадь поверхности жидкости на величину ΔS, к величине ΔS:

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}.$$

Можно сказать, что коэффициент поверхностного натяжения равен поверхностной энергии, приходящейся на единицу площади поверхности.

Объектами, в поведении которых наиболее ярко проявляется роль поверхностной энергии, являются мыльные пленки. Вот — пример.

Задача 1. *На мыльной пленке плавает петля из нити длиной l (рис. 1, а). Часть пленки, находящуюся внутри нити, осторожно прокалывают. Какую фигуру образует при этом нить? Каково натяжение нити в положении равновесия, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ?*

Очевидно, что после прокалывания оставшаяся пленка будет вести себя так, чтобы максимально уменьшить величину своей поверхности. Это приведет к тому, что при заданной длине нити l дырка образует фигуру максимальной площади. Как известно, такой фигурой является круг (рис. 1,б). Радиус круга найдем из соотношения

$$2\pi R = l, \text{ т.е. } R = \frac{l}{2\pi}.$$

Для определения натяжения нити рассмотрим малый элемент ее длины $\Delta l = R\Delta\varphi$ (рис. 2). Он находится под действием двух сил натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ ($T_1 = T_2 = T$), действующих со стороны соседних к элементу участков нити и направленных по касательным, и силы $2\vec{F}_н$ поверхностного натяжения мыльной пленки ($\vec{F}_н$ — сила со стороны одной поверхности пленки). Из условия равновесия элемента нити получим (проектируя силы на направление к центру круга)

$$2T\frac{\Delta\varphi}{2} - 2F_н = 0$$

(мы учли малость элемента и положили $\sin\varphi = \varphi$). Чтобы найти силу

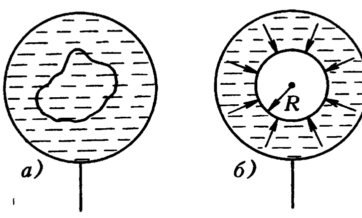


Рис. 1

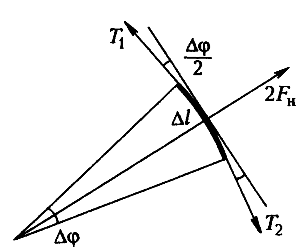


Рис. 2

$F_н$, дадим пленке (мысленно) возможность еще сократиться, так что элемент Δl переместится на величину ΔR. Энергия пленки при этом уменьшится на $\Delta E = 2\sigma\Delta l\,\Delta R$ за счет работы сил натяжения пленки $\Delta A = 2F_н\Delta R$. Откуда

$$\Delta E = \Delta A, \quad 2\sigma\Delta l\Delta R = 2F_н\Delta R, \quad F_н = \sigma\Delta l.$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения (характеризующий в данном случае одну из поверхностей мыльной пленки) получает еще одну интерпретацию – это сила, действующая на единичный линейный элемент границы поверхности и перпендикулярная этому элементу:

$$\sigma = \frac{F_н}{\Delta l}.$$

Поскольку $T\Delta\varphi = 2F_н$, натяжение веревки будет равно

$$T = 2\frac{F_н}{\Delta\varphi} = 2\sigma R = \sigma\frac{l}{\pi}.$$

Мы подробно остановились на этой задаче потому, что она показывает, откуда берут свое происхождение силы поверхностного натяжения. Оказывается, для проведения количественных расчетов удобно представление о том, что наличие поверхностной энергии эквивалентно тому, как если бы поверхность жидкости находилась в растянутом состоянии. При этом считают, что силы, растягивающие пленку, приложены к ее линейной границе. Если границу эту мысленно провести, деля пленку на две части, то части будут взаимодействовать между собой с силами, перпендикулярными границе. Казалось бы, все это очень похоже на растяжение резиновой пленки. Однако имеется принципиальное отличие. Состоит оно в том, что по мере увеличения поверхности пленки жидкости силы поверхностного натяжения остаются постоянными, тогда как при увеличении растяжения резиновой пленки натяжение в ней увеличивается. Итак, аналогия действительно есть, но пользоваться ею нужно осторожно. Тем не менее, при решении задач «силовой язык» часто оказывается более привычным, и им тоже стоит овладеть.

Рассмотрим в связи с этим такие задачи.

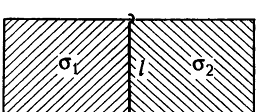


Рис.3

Задача 2. *Пленки двух жидкостей разделены подвижной планкой длиной l (рис. 3). Коэффициент поверхностного натяжения одной жидкости σ_1, другой σ_2. С какой силой нужно действовать на планку, чтобы она находилась в покое?*

Пусть, для определенности, $\sigma_2 > \sigma_1$. Предоставленная самой себе, система стремится к состоянию с минимальной поверхностной энергией. При этом пленка с большим коэффициентом поверхностного натяжения будет стремиться сократиться, растягивая при этом другую пленку и перемещая планку. Сила, действующая со стороны правой жидкости, будет равна $F_2 = 2\sigma_2 l$, а со стороны левой — $F_1 = 2\sigma_1 l$ (мы учли, что пленки имеют две поверхности). Чтобы планка находилась в равновесии, к ней, очевидно, необходимо приложить силу

$$F = F_2 - F_1 = 2(\sigma_2 - \sigma_1)l.$$

Задача 3. *Внешний радиус мыльного пузыря R, толщина его стенки h. Чему равно давление воздуха внутри пузыря? Чему равно давление в толще мыльной пленки? Считать, что пленка тонкая ($h \ll R$). Давление воздуха вне пузыря p_0. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.*

Хорошо знакомая всем сферическая форма мыльных пузырей обусловлена силами поверхностного натяжения. Действительно, если потенциальной энергией мыльной пленки в поле тяжести можно пренебречь по сравнению с ее поверхностной энергией (для тонких пленок это как раз имеет место), то последняя и будет ответственна за наблюдаемую геометрию. Но при неизменном объеме воздуха, содержащегося внутри пузыря, фигурой с наименьшей площадью поверхности будет шар. Следовательно, в равновесном состоянии пленка будет иметь форму сферической оболочки.

Разобьем (мысленно) сферическую оболочку на две равные половины и рассмотрим одну из них (рис. 4). Запишем условия равновесия внешней и внутренней полусферических поверхностей.

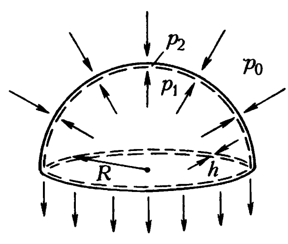


Рис.4

На внешнюю (радиусом R) действуют сила внешнего давления, равная $F_1 = p_0\pi R^2$ (покажите это самостоятельно) и направленная вниз, сила поверхностного натяжения, равная $F_2 = \sigma\cdot 2\pi R$ и направленная вниз, и противодействующая им направленная вверх сила давления сжатой жидкости (изогнутой жидкой пленки), равная $F_3 = p_2\pi R^2$. Равновесие пленки означает, что

$$F_1 + F_2 - F_3 = 0, \text{ т.е. } p_0\pi R^2 + 2\pi R\sigma = p_2\pi R^2,$$

откуда получаем искомое давление в толще пленки:

$$p_2 = p_0 + \frac{2\sigma}{R}.$$

На внутреннюю поверхность действуют сила давления жидкой пленки, направленная вниз и равная $F_4 = p_2\pi(R-h)^2$, сила поверхностного натяжения, равная $F_5 = \sigma \cdot 2\pi(R-h)$ и направленная вниз, и направленная вверх сила давления воздуха внутри пузыря, равная $F_6 = p_1\pi(R-h)^2$. Условие равновесия внутренней поверхности дает, что

$$F_4 + F_5 - F_6 = 0,$$

откуда находим давление воздуха внутри пузыря:

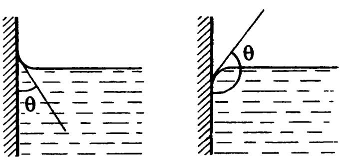
$$p_1 = p_2 + \frac{2\sigma}{R-h}, \text{ или } p_1 = p_0 + 2\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R-h}\right).$$

* * *

Обсудим теперь, как будет себя вести поверхность жидкости вблизи стенок сосуда, в который она налита.

Очевидно, что с учетом стенок сосуда в общее выражение для энергии системы жидкость — пар — стенки сосуда добавятся еще два слагаемых. Это энергия взаимодействия молекул жидкости с молекулами стенок (при данной температуре она тем больше, чем больше поверхность соприкосновения жидкости и сосуда) и энергия взаимодействия молекул пара и стенок. Равновесное положение поверхности жидкости и ее пара вблизи стенок сосуда установится таким, чтобы общая потенциальная энергия системы приняла минимальное значение. В большинстве случаев это приводит к тому, что поверхность жидкости вблизи стенок искривляется.

Так, если взаимодействие молекул жидкости и стенок сосуда оказывается наибольшим по сравнению с другими молекулярными взаимодействиями, т.е. жидкость смачивает сосуд, — граница раздела жидкости с паром вблизи стенок «ползет» вверх, образуя некоторый угол θ с вертикалью (рис. 5). Угол θ называется краевым углом. При фиксированной температуре он будет всегда одним и тем же для заданной жидкости и материала стенок. Чем сильнее взаимодействие молекул жидкости с молекулами стенок сосуда, по сравнению с взаимодействием молекул самой жидкости, тем меньше угол θ. В пределе, когда $\theta \to 0$, говорят, что жидкость полностью смачивает материал стенок сосуда. Наоборот, когда притяжение молекул жидкости друг к другу превалирует над притяжением молекул жидкости и стенок сосуда, имеем случай несмачивающей жидкости. При этом угол θ — тупой. В пределе, когда $\theta \to \pi$, говорят о полном несмачивании,



Смачивание *Несмачивание*

Рис.5

и граница жидкости вблизи стенок сосуда ведет себя так, как будто жидкость отталкивается от сосуда.

Проиллюстрируем сказанное следующей задачей.

Задача 4. *В тонкой горизонтально расположенной цилиндрической трубке находится капля: а) смачивающей; б) несмачивающей жидкости. Что произойдет с каплей, если трубку (с одного конца) нагреть?*

Поскольку коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры (уменьшается с ее ростом), при нагревании одного конца трубки, например левого, силы поверхностного натяжения справа начнут доминировать, и капля поползет — направо, если жидкость смачивает материал трубки, и налево, если не смачивает.

Кстати, ответьте самостоятельно на такой вопрос. Для того чтобы водоотталкивающая мазь лучше впитывалась в лыжные ботинки, как их нужно нагревать: снаружи или изнутри?

Рассмотрим стандартную экзаменационную задачу.

Задача 5. *Чему равна высота поднятия жидкости между двумя вертикальными параллельными стеклянными пластинами, расстояние между которыми d (рис. 6)? Коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ, плотность ρ, смачивание полное.*

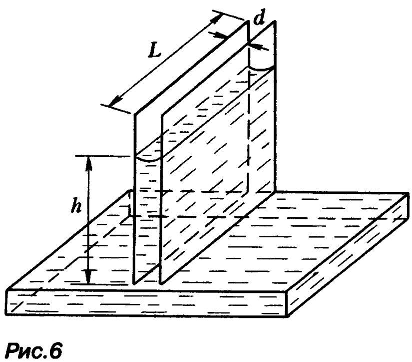


Рис.6

Пусть ширина пластины L, тогда по периметру верхней границы жидкости вдоль стеклянных пластин действует сила поверхностного натяжения, равная $F_н = 2\sigma L$ (коэффициент «2» появляется из-за того, то пластин две) и направленная вертикально вверх, поскольку смачивание полное. Эта сила удерживает жидкость между пластинами, а значит, она равна силе тяжести этой жидкости:

$$F_н = \rho g L d h$$

(Ldh — объем жидкости, поднявшейся между пластинами). Подставляя сюда выражение для $F_н$, находим высоту поднятия жидкости:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d}.$$

Как видно из решения этой задачи, высота поднятия жидкости тем больше, чем меньше зазор между стенками. Наиболее ярко этот эффект проявляется в тонких трубках — капиллярах (капиллярные явления, капиллярность). Для высоты поднятия жидкости в капилляре справедлива формула

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d},$$

где d — диаметр капилляра (постарайтесь самостоятельно вывести эту формулу).

Капиллярные явления встречаются очень часто: благодаря капиллярности фитиль обеспечивает горение керосиновой лампы, перьевые ручки, которые теперь почти полностью вытеснены шариковыми, позволяют писать на листе бумаги, приложенном даже к вертикальной стене, и т.п. Кстати, подумайте над таким вопросом. В невесомости обычная шариковая ручка отказывает, а перьевая?

Посмотрим на предыдущую задачу с другой стороны. Поднятие жидкости между пластинами означает, что давление непосредственно под вогнутой поверхностью жидкости меньше, чем давление под ее горизонтальной поверхностью (где оно равно атмосферному). Эта разность давлений Δp и уравновешивает давление столба жидкости, заключенного между стеклянными пластинками:

$$\Delta p = \rho g h,$$

или, подставляя найденное выражение для h,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d}.$$

Теперь нетрудно решить последнюю задачу.

Задача 6. *Между двумя горизонтальными квадратными стеклянными пластинками находится прослойка воды толщиной $d = 0{,}3$ мм. Какую силу необходимо приложить к пластинкам перпендикулярно поверхности, чтобы их разорвать? Сторона пластинки $a = 10$ см, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н / м, смачивание полное.*

Давление в жидкости между пластинками на величину $\Delta p = 2\sigma/d$ меньше атмосферного. Это означает, что пластинки прижаты друг к другу силой, равной $F = \Delta p S$, где $S = a^2$ — площадь пластинки.

Чтобы оторвать одну пластинку от другой, именно эту силу и необходимо скомпенсировать. В результате, подставляя численные данные, находим силу отрыва:

$$F = \frac{2\sigma}{d} a^2 = 4{,}8 \text{ Н}.$$

Однако, как оказывается, ничего не стоит разъединить пластинки, опустив их в воду. Можно также облегчить задачу, сдвигая их друг относительно друга.

Упражнения

1. Какую относительную ошибку допускают при измерении атмосферного давления по высоте ртутного столбика, если внутренний диаметр барометрической трубки $d = 5$ мм, а коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}48$ Н/м? Занижает или завышает показания такой барометр?

2. Капиллярная трубка погружена в воду таким образом, что длина непогруженной части составляет $l = 0{,}2$ м. Вода поднялась в трубке на высоту $l/2$. В этом положении верхний конец трубки зажимают пальцем и трубку медленно погружают в воду до тех пор, пока уровень воды в трубке не сравняется с уровнем воды в сосуде. Найдите длину выступающей из воды части трубки в этом случае. Внешнее атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

3. Два мыльных пузыря разных размеров соединены трубкой (рис. 7). Какой из них будет сдуваться?

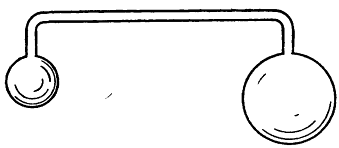


Рис.7

4. Брезентовая палатка хорошо защищает от дождя, но если во время дождя к потолку палатки прикоснуться рукой, потолок начинает «протекать». Почему?

5. На мыльном пузыре радиусом R_1 «сидит» пузырь радиусом R_2. Какой радиус кривизны имеет пленка, их разделяющая?

ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

С. Гордюнин, П. Горьков

Прежде всего вспомним основные законы геометрии световых лучей. В однородной прозрачной среде свет распространяется прямолинейно. Оптической характеристикой среды является ее показатель преломления $n > 1$, указывающий, во сколько раз скорость света в среде меньше скорости света в вакууме. Среда с большим показателем преломления называется оптически более плотной (или, для краткости, просто более плотной).

При падении луча света на границу раздела двух сред он разделяется на два луча (в общем случае — разной интенсивности) — на отраженный и преломленный (лучи *1** и *2* на рисунке 1), лежащие в одной плоскости с падающим лучом и с перпендикуляром к границе, проведенном в точке падения. При этом угол γ между нормалью к границе раздела и отраженным лучом (угол отражения) равен углу α_1 между нормалью и лучом падающим (угол падения). Угол падения α_1 с углом преломления α_2 (т.е. углом между нормалью и преломленным лучом) связаны соотношением, называемым законом Снеллиуса:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2.$$

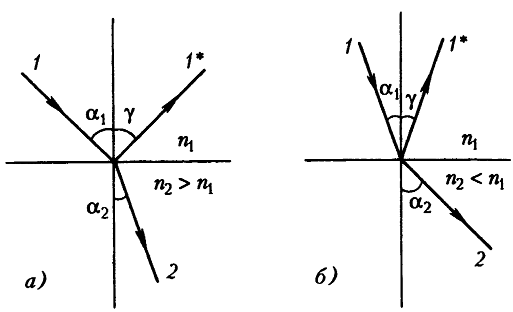


Рис. 1

В этом законе очевидным образом содержится факт обратимости световых лучей: если луч падает из первой среды под углом α_1, то он пойдет во второй среде под углом α_2, а если луч падает из второй среды под углом α_2, то он пойдет в первой среде под углом α_1.

Если луч переходит из менее плотной среды в более плотную (рис. 1, *а*), он прижимается к нормали ($\alpha_2 < \alpha_1$), а если из более плотной в менее плотную (рис. 1, *б*), то удаляется от нормали ($\alpha_2 > \alpha_1$). Наибольший угол падения (90°) имеют скользящие лучи, поэтому преломленный луч в более плотной среде ($n_2 > n_1$) не может составлять с нормалью угол, больший $\alpha_0 = \arcsin(n_1/n_2)$. Наоборот, при переходе из более плотной среды в менее плотную лучи, падающие под углами, большими α_0, будут полностью отражаться. Вот почему этот угол называется углом полного отражения. Математически это проявляется в том, что уравнение, выражающее закон Снеллиуса, не имеет решений для α_1 при $\alpha_2 > \alpha_0$ и $n_2 > n_1$.

Эти явления наглядно можно представить себе следующим образом. Если закрыть непрозрачным экраном всю поверхность раздела сред, оставив лишь небольшое отверстие, и освещать экран рассеянным светом, содержащим лучи всех направлений, то в более плотной среде все лучи, проходящие через отверстие, будут сосредоточены в конусе с углом $2\alpha_0$ (рис. 2,*а*). Его часто называют конусом полного отражения. Вне этого конуса будет темно. Если же на некотором расстояние h от плоской границы в более плотной среде поместить точечный источник света, то наблюдатель, смотрящий из менее плотной среды, увидит освещенной не всю поверхность раздела, а только круг радиусом (рис. 2, *б*)

$$R = h\,\mathrm{tg}\alpha_0 = \frac{hn_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}.$$

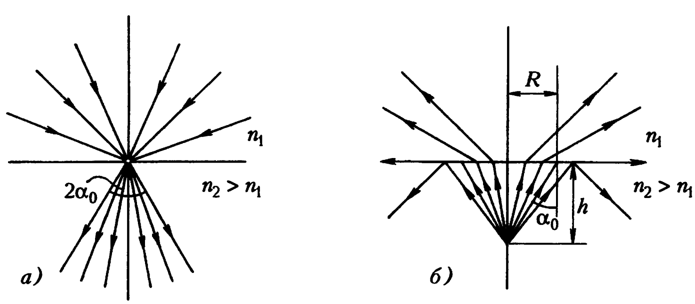


Рис.2

Из закона преломления световых лучей следует также факт непрямолинейного распространения света в неоднородной среде. Наиболее просто убедиться в этом, исследуя ход луча в слоистой среде, в которой показатель преломления меняется вдоль одной какой-то оси координат, например X. Такую среду можно представить как набор тонких пластинок с показателями преломления n_i. На границах раздела выполняются соотношения

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2 = \ldots = n_N \sin\alpha_N,$$

поскольку угол преломления в каждом слое является углом падения для следующего слоя (рис. 3,*а*). Другими словами, вдоль выбранного направления выполняется соотношение

$$n(x)\sin\alpha(x) = \mathrm{const}.$$

Этот важный и красивый закон (его называют обобщенным законом Снеллиуса) указывает на то, что наличие промежуточных слоев не сказывается на связи между углом падения из первой среды и углом преломления в последней. Если, конечно, луч вообще доходит до последней среды, а не поворачивает, испытав полное отражение (рис. 3, *б*). Именно поэтому при расчете различных оптических систем можно не учитывать наличие тонких прослоек между средами — слоев клея между линзами в сложных объективах, стеклянных стенок сосудов, в которые налита вода, и т.п.

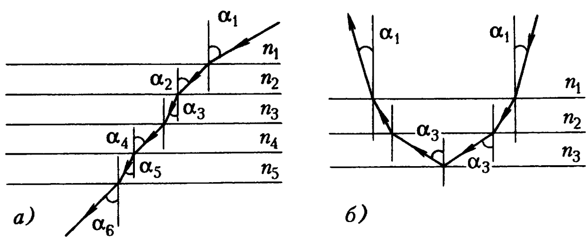


Рис.3

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Большинство из них взяты из вариантов приемных экзаменов в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Луч света падает на плоскопараллельную пластинку толщиной H=1 см, сделанную из стекла с показателем преломления n=1,73 (рис. 4). Из-за многократных отражений от граней* *пластинки на экране Э образуется ряд светлых пятен. Найдите расстояние между этими пятнами, если угол падения равен $\alpha = 60°$ и падающий луч перпендикулярен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.*

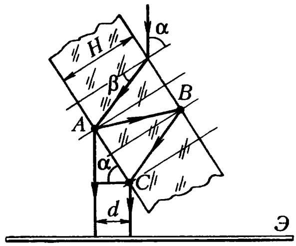


Рис.4

После однократного преломления на обеих гранях пластинки луч выходит из пластинки параллельно падающему лучу. Поскольку при дальнейших отражениях и преломлениях углы падения на грани одинаковы, все попадающие на экран лучи параллельны падающему. Расстояние d между этими лучами, равное расстоянию между пятнами на экране, найдем из рисунка:

$$d = AC\cos\alpha, \quad AC = 2H\operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}, \quad \sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$

откуда

$$d = \frac{H\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} \approx 0{,}58 \text{ см.}$$

Задача 2. *Оцените ошибку при фиксировании углового положения звезды, видимой с Земли под углом $\beta = 45°$ над горизонтом. Показатель преломления воздуха у поверхности Земли равен $n = 1{,}0003$.*

Положение звезды, видимое с Земли, отличается от истинного из-за преломления лучей атмосферой. Толщина атмосферы, т.е. высота, на которой практически нет воздуха и поэтому показатель преломления равен единице, составляет несколько десятков километров. Это гораздо меньше радиуса Земли, поэтому в данном случае можно считать атмосферу плоской. Ее показатель преломления постепенно изменяется от единицы у верхних слоев до значения $n > 1$ у поверхности Земли. От звезды идут параллельные лучи, падающие на верхние слои атмосферы под углом $\pi/2 - \alpha$, где α — истинное угловое положение звезды над горизонтом. А мы видим звезду под углом $\beta > \alpha$ (рис. 5). По закону преломления в слоистой среде получаем

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=n\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),$$

$$\text{или } \cos(\beta-(\beta-\alpha))=(1+(n-1))\cos\beta.$$

Учитывая, что $n-1 \ll 1$ и поэтому $\beta-\alpha \ll \beta$, приближенно имеем

$$\cos\beta+(\beta-\alpha)\sin\beta=\cos\beta+(n-1)\cos\beta.$$

Таким образом,

$$\beta-\alpha=(n-1)\operatorname{ctg}\beta=3\cdot 10^{-4}\ \text{рад}=1'.$$

Это и есть ошибка при определении положения звезды с Земли.

Задача 3. *В равнобедренной прямоугольной стеклянной призме, сделанной из стекла с показателем преломления n, основание AC и боковая грань BC — гладкие, а грань AB — матовая (рис. 6). Призма стоит на газете. Какую часть текста (по площади) будет видеть наблюдатель, смотрящий через гладкую грань BC?*

В этой задаче речь идет о рассматривании предмета, находящегося сразу за границей раздела двух сред — стекла и воздуха. Неправильно считать, что предмет находится непосредственно в стекле. Если бы это было так, то его можно было бы увидеть при любых значениях показателя преломления стекла, поскольку лучи от предмета идут в стекле во все стороны и какая-то их часть, не претерпев полного отражения, обязательно выйдет через прозрачную грань.

От предмета под стеклом лучи, конечно, тоже идут во все стороны, но они пересекают границу стекло — воздух и преломляются. В стекло они входят только внутри конуса полного отражения.

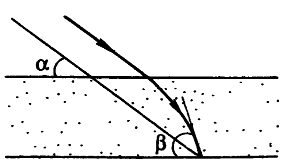


Рис.5

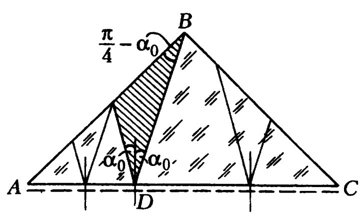


Рис.6

При растворах этого конуса $2\alpha_0 = 2\arcsin(1/n)$ часть лучей не попадет на грань BC (см. рис. 6). Если $\alpha_0 > \pi/4$, т.е. $n < 1/\sin(\pi/4) = \sqrt{2}$, через BC будет виден весь текст. Действительно, даже из точек вблизи вершины A некоторые лучи конуса будут падать на BC, причем их углы падения будут меньше чем $\pi/4$, т.е. они, преломляясь, будут выходить наружу. При больших n и соответственно меньших α_0 из некоторых точек вблизи вершины A все лучи конуса попадут на матовую грань AB. Чтобы найти невидимый участок AD, заметим, что $\angle ABD = \pi/4 - \alpha_0$, и воспользуемся теоремой синусов для треугольника ABD, откуда найдем долю видимого текста $k = DC/AC$:

$$\frac{1-k}{\sin(\pi/4-\alpha_0)} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sin(\pi/2+\alpha_0)},$$

$$k = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}\alpha_0) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right).$$

Но для того чтобы попадающие на грань BC лучи хотя бы частично выходили из нее, наименьший угол $\pi/4 - \alpha_0$ падения на грань должен быть меньше α_0, т.е. $\alpha_0 > \pi/8$, а $n < 1/\sin(\pi/8) \approx 2{,}61$. При предельном n

$$k_{\min} = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) \approx 0{,}7.$$

Итак,

при $n < \sqrt{2}$ виден весь текст;

при $\sqrt{2} < n < \dfrac{1}{\sin(\pi/8)}$ видна часть текста $k = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)$;

при $n > \dfrac{1}{\sin(\pi/8)}$ текста не видно совсем.

Задача 4. *Узкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара радиусом R, фокусируется на расстоянии $2R$ от его центра. Определите показатель преломления стекла.*

В этой задаче используются законы так называемой параксиальной оптики, т.е. оптики малых углов падения и преломления лучей. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, и закон преломления принимает вид

$$n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2.$$

Рассмотрим произвольный луч пучка, падающего на шар на расстоянии h от оси (рис. 7). Так как $h \ll R$ (пучок узкий), угол падения этого луча на шар $\alpha \approx h/R \ll 1$. Построив дальнейший ход этого луча, найдем все углы в треугольниках AOB, OBD и BDC:

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{n}, \quad \angle BOD = \frac{2\alpha}{n} - \alpha,$$

$$\angle BCD = \alpha - \left(\frac{2\alpha}{n} - \alpha\right) = 2\alpha\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Тогда

$$BD = R\left(\frac{2\alpha}{n} - \alpha\right), \quad DC = \frac{BD}{2\alpha(1 - 1/n)} = \frac{R\alpha(2/n - 1)}{2\alpha(1 - 1/n)} = R\frac{2-n}{2(n-1)}.$$

По условию задачи $DC=R$, откуда получаем $n = \frac{4}{3}$.

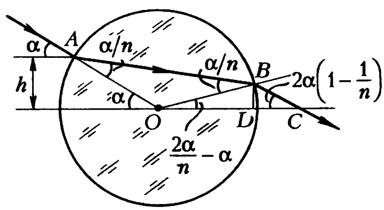


Рис.7

Очень существенно, что в окончательное выражение величина угла падения α не вошла — значит, все лучи пучка соберутся в одной точке. Это один из законов параксиальной оптики: узкие пучки параллельных лучей собираются преломляющей системой в одну точку — фокус (или в одной точке собираются их продолжения — мнимый фокус). Второй закон оптики параксиальных лучей состоит в том, что расходящиеся из одной точки под малыми углами лучи фокусируются преломляющей системой тоже в одну точку (с той же оговоркой относительно мнимого изображения). На этих законах основано решение многих задач, где одним из оптических элементов является глаз, — из-за малой величины зрачка глаз фокусирует лучи, падающие на него под малыми углами. В сущности поэтому мы и видим точку как точку, а не как протяженный источник.

Задача 5. *Если смотреть на капиллярную стеклянную трубку сбоку, то видимый внутренний радиус будет равен r. Каково истинное значение этого радиуса? Показатель преломления стекла n. Внешний радиус капилляра много больше внутреннего.*

Пусть OC — линия, соединяющая глаз и центр трубки, A — крайняя точка внутреннего диаметра капилляра (рис. 8). Расстояние от изображения (мнимого) точки A до оси OC равно видимому радиусу внутреннего канала r.

Мы знаем, что все лучи, расходящиеся из точки A под малыми углами, после преломления соберутся в одной точке. Поскольку нас интересует не точное местоположение этой точки, а только ее расстояние от OC, достаточно рассмотреть ход только одного луча ABD, такого, который на выходе из капилляра идет параллельно оси OC — ведь изображение точки A будет лежать на его продолжении (см. рис. 8). Расстояние между лучами BD и OC равно r, искомое расстояние $AO = r_0$. Так как внешний диаметр капилляра велик по сравнению с внутренним, угол падения α будет мал. Из треугольника OEB $r = R\alpha n$, где R — внешний радиус трубки, а из треугольника OAB, с учетом малости α, $r_0 = R\alpha$. Таким образом, $r_0 = \dfrac{r}{n}$.

Упражнения

1. В толще стекла с показателем преломления 1,4 создана плоскопараллельная пластина толщиной 3 см с другими оптическими свойствами. Зависимость показателя преломления n этой пластины от координаты x показана на рисунке 9. При каких углах падения α узкого пучка света на эту пластину пучок пройдет пластину насквозь?

2. Стеклянная пластинка, показатель преломления которой n_1, касается поверхности жидкости с показателем преломления $n_2 < n_1$. Покажите, что ни один из лучей, падающих на верхнюю поверхность стеклянной пластинки, не испытывает полного отражения на границе между стеклом и жидкостью.

3. На половину шара радиусом $r = 2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1{,}41$, падает параллельный пучок лучей

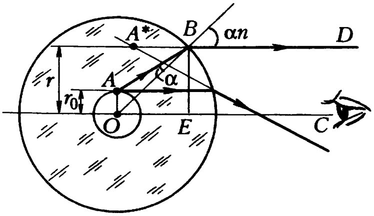


Рис.8

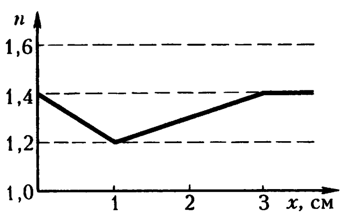


Рис.9

(рис. 10). Определите радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии L = 4,82 см от центра шара.

4. На каком расстоянии от центра стеклянного шара радиусом R должен находится муравей, чтобы его изображение за шаром было натуральной величины? Показатель преломления стекла n.

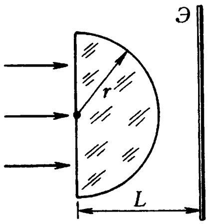


Рис. 10

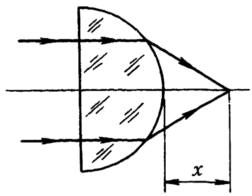


Рис. 11

5. Узкий пучок света, пройдя через полушарие из стекла с показателем преломления n, собирается на расстоянии x от выпуклой поверхности (рис. 11). На каком расстоянии от плоской поверхности соберутся лучи, если пучок пустить с противоположной стороны?

ЛИНЗЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЗ

Е. Кузнецов

Явление преломления света на сферической поверхности раздела двух оптических сред позволяет получать изображения светящихся предметов. Эта возможность осуществляется с помощью линзы — прозрачного тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями. Линза является основным оптическим элементом в таких приборах, как фотоаппарат, проекционный фонарь, микроскоп, телескоп и т.д.

На рисунке 1 показан разрез преломляющей сферической поверхности, разделяющей две оптические среды с различными показателями преломления. Очевидно, качественное изображение любого предмета возможно только в том случае, когда пучок лучей, исходящих из любой точки предмета (например, из точки P), после преломления соберется снова в точку. Вообще говоря, сферическая граница раздела двух сред не обеспечивает этого условия. Так, луч NB после преломления пересечет ось PQ, строго говоря, в другой точке, нежели луч MA. Однако при некоторых условиях пучок лучей, испущенных точкой, может собраться практически в точку. Это будет в том случае, когда высота h, на которой все лучи этого пучка пересекают преломляющую поверхность, мала по сравнению с радиусом кривизны OC преломляющей поверхности. Другими

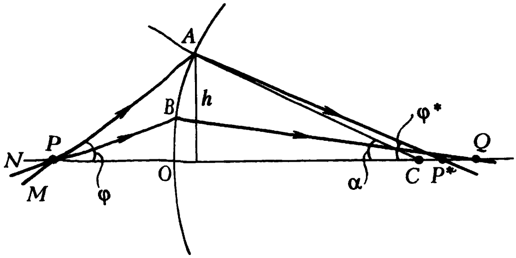


Рис. 1

словами, когда мал угол α. Лучи, удовлетворяющие этому условию, называются параксиальными. Для удаленных источников требование малости угла α эквивалентно требованию малости угла φ. Но малость угла φ не является достаточным условием параксиальности. Действительно, луч, параллельный оси PQ, но достаточно удаленный от нее (h велико), не будет параксиальным.

Таким образом, в зависимости от того, сколь хорошо выполняется условие параксиальности, в окрестности точки P^* будет более или менее большой кружок размытия. Однако на практике нет необходимости делать его меньше некоторой, вполне определенной, величины. Например, если кружок размытия станет меньше элемента сетчатки глаза (зерна фотоэмульсии на фотопленке, неровностей матового стекла и т.п.), он будет восприниматься нами как точка. Его дальнейшее уменьшение в нашем зрительном ощущении ничего не изменит.

Всюду в дальнейшем мы будем иметь дело только с параксиальными лучами. (Можно, в принципе, придумать такие преломляющие поверхности, для которых условие параксиальности лучей не является обязательным. Однако наиболее просты в изготовлении именно сферические поверхности.) Кроме того, ограничимся рассмотрением только тонких линз, т.е. таких линз, фокусные расстояния которых существенно больше их толщины.

Если тонкая линза изготовлена из материала с показателем преломления n, слева от линзы находится среда с показателем преломления n_1, а справа — с показателем преломления n_2, то имеют место соотношения

$$\frac{n_2}{F_2} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}, \tag{1}$$

$$\frac{n_1}{F_1} = \frac{n - n_1}{R_1} + \frac{n - n_2}{R_2}. \tag{2}$$

Здесь F_1 и F_2 — переднее и заднее фокусные расстояния линзы, R_1 и R_2 — радиусы кривизны соответствующих поверхностей линзы. Эти соотношения можно получить (проделайте это самостоятельно), рассматривая ход лучей, идущих от бесконечно удаленного источника, находящегося в первом случае слева от линзы, а во втором случае — справа. В частности, когда с обеих сторон от линзы находится воздух ($n_1 = n_2 = 1$), получаем

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{F_2} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{3}$$

Принято считать, что если поверхность своей выпуклой стороной обращена к среде с меньшим показателем преломления, то ее радиус кривизны R положителен ($R>0$), в противном случае $R<0$.

Линзы, у которых фокусное расстояние положительно ($F>0$), называются положительными или собирающими, если же $F<0$ — отрицательными или рассеивающими. Величина $D=1/F$ называется оптической силой линзы, она измеряется в диоптриях.

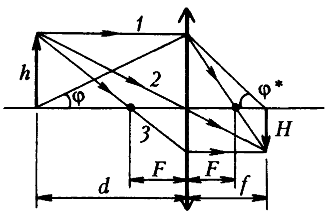


Рис.2

При построении изображений, полученных с помощью тонких линз, используют три основных (или базисных) луча, показанных на рисунке 2. С помощью этого рисунка нетрудно получить формулу тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

а также выражения для ее линейного (поперечного) увеличения:

$$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}=\frac{f-F}{F}=\frac{F}{d-F}$$

и углового увеличения:

$$\gamma=\frac{\operatorname{tg}\varphi^*}{\operatorname{tg}\varphi}=\frac{h/f}{h/d}=\frac{d}{f}=\frac{1}{\Gamma}.$$

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач.

Задача 1. *На поверхности воды ($n_в=1,3$) лежит двояковыпуклая тонкая стеклянная линза ($n_{ст}=1,5$) с радиусами кривизны $R_1=R_2=10$ см. Определите переднее и заднее фокусные расстояния линзы. Чему равно фокусное расстояние этой линзы в воздухе?*

Это относительно простая задача. Непосредственное применение формул (1) и (2), где $n_1=1$, $n_2=n_в=1{,}3$ и $n=n_{ст}=1{,}5$, дает

$$F_1\approx 14 \text{ см},\quad F_2\approx 18{,}5 \text{ см}.$$

Для фокусного расстояния линзы в воздухе формула (3) приводит к результату F=10 см.

Задача 2. *Дан ход луча ABC через тонкую положительную линзу. Постройте ход произвольного луча DE после преломления в линзе.*

Проведем луч A^*O, параллельный лучу AB и проходящий через оптический центр линзы (рис. 3). Он не преломится. Точка G пересечения этого луча с лучом BC лежит в фокальной плоскости. Луч D^*O, параллельный DE, пересечет фокальную плоскость в точке P. Через эту же точку пройдет, преломившись, и луч DE.

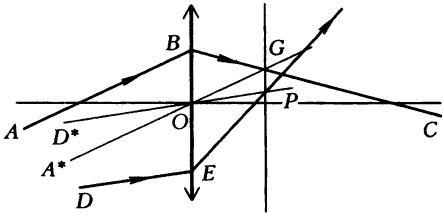


Рис.3

Задача 3. *Какие очки следует прописать близорукому человеку, который может читать текст, расположенный не далее 20 см?*

Очки ни в коей мере не исправляют дефектов человеческого глаза. Их роль сводится к тому, чтобы отобразить объекты окружающего мира на такое расстояние, с которого глаз четко различает предметы. В нашем случае для того чтобы близорукий человек мог видеть удаленные предметы, например звезду, очки должны создавать изображение звезды не далее 20 см от глаза, а глаз будет рассматривать уже это изображение. Предположим, что линза очков вплотную придвинута к глазу (небольшой зазор между линзой и глазом несущественно исказит приведенные ниже расчеты), и запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Здесь d — расстояние до звезды, а f — максимальное расстояние от изображения звезды до глаза. Член $\frac{1}{f}$ берется со знаком минус, поскольку изображение мнимое. Так как d очень велико, можно смело положить $\frac{1}{d}=0$. По условию задачи f = 20 см, тогда

$$F = -20 \text{ см}, \quad D = -5 \text{ дптр}.$$

Таким образом, близорукому человеку следует прописать очки с рассеивающими линзами оптической силы -5 дптр.

Задача 4. *С помощью линзы с фокусным расстоянием F на экране получают уменьшенное и увеличенное изображения предмета, находящегося на расстоянии L от экрана. Найдите отношение размеров изображений.*

Пусть высота предмета h. Тогда изображение имеет высоту $H=\Gamma h$, и отношение размеров изображений составляет

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{\Gamma_1 h}{\Gamma_2 h}=\frac{f_1/d_1}{f_2/d_1}.$$

Теперь нам нужно найти d_1, d_2, f_1 и f_2. По формуле линзы,

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

а из условия задачи

$$d+f=L.$$

Исключив d, получим квадратное уравнение

$$f^2-fL+FL=0,\ \text{откуда}\ f_{1,2}=\frac{L}{2}\pm\sqrt{\frac{L^2}{4}-FL}.$$

Кроме того, из свойства обратимости лучей $d_1=f_2$ и $d_2=f_1$. Таким образом,

$$\frac{H_1}{H_2}=\frac{f_1^2}{f_2^2}=\left(\frac{L/2+\sqrt{L^2/4-FL}}{L/2-\sqrt{L^2/4-FL}}\right)^2.$$

Задача 5. *С помощью положительной линзы получают изображения двух точечных источников A и B. Один из них расположен на оптической оси на двойном фокусном расстоянии от линзы, другой смещен от оси так, что прямая, соединяющая источники, образует с оптической осью угол φ= 30° (рис. 4). Под каким углом*

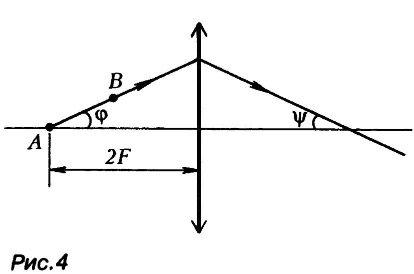


Рис.4

ψ к оси следует расположить плоский экран, чтобы одновременно получить на нем четкие изображения обоих источников?

Очевидно, экран нужно расположить по лучу, проведенному от источника A через точку B после его преломления в линзе. Запишем формулу для углового увеличения:

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma} = \frac{d}{f} = \frac{F}{f-F}.$$

Здесь f — расстояние от изображения источника A до линзы, а F — фокусное расстояние линзы. Поскольку A находится на двойном фокусном расстоянии от линзы, $f = 2F$. Следовательно,

$$\gamma = \frac{F}{2F-F} = 1, \text{ и } \psi = \varphi = 30^\circ.$$

Задача 6. *Сложный объектив состоит из двух тонких линз: положительной с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см и отрицательной с фокусным расстоянием $F_2 = -10$ см. Линзы расположены на расстоянии $l = 15$ см друг от друга. С помощью объектива получают на экране изображение Солнца. Какое фокусное расстояние должна иметь тонкая линза, чтобы изображение Солнца, полученное с ее помощью, имело такой же размер?*

Здесь мы уже имеем дело с системой линз. Найдем размер изображения Солнца, создаваемого сложным объективом, рассматривая ход лучей последовательно в обеих линзах. Изображение, создаваемое первой линзой, находится, очевидно, в ее фокальной плоскости. Размер этого изображения

$$H_1 = F_1 \mathrm{tg}\alpha,$$

где α — угловой диаметр Солнца, видимый с Земли (рис. 5). Увеличение, даваемое второй линзой, равно

$$\frac{H_2}{H_1} = \frac{f_2}{d_2}.$$

По формуле линзы имеем

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F_2},$$

где $d_2 = F_1 - l$ (изображение Солнца в первой линзе является мнимым источником для второй). Отсюда

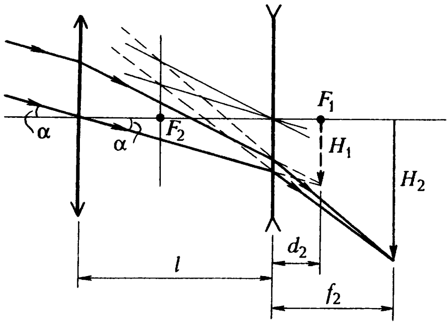


Рис.5

$$f_2 = \frac{F_2(F_1 - l)}{F_1 + F_2 - l}.$$

Таким образом, размер изображения, создаваемого всем объективом, составляет

$$H_2 = \frac{F_1 F_2 \operatorname{tg}\alpha}{F_1 + F_2 - l}.$$

Одиночная линза с фокусным расстоянием F дает изображение, имеющее размер

$$H_2 = F \operatorname{tg}\alpha.$$

Сопоставляя два последних выражения, получим

$$F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2 - l} = 40 \text{ см}.$$

Упражнения

1. На рисунке 6 дан ход луча ABC через тонкую отрицательную линзу. Найдите построением фокусное расстояние линзы.

2. Какие очки надо прописать дальнозоркому человеку, который резко видит предметы, расположенные не ближе 50 см?

3. Предмет в виде отрезка длиной l расположен вдоль оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием F. Середина отрезка находится на расстоянии d от линзы. Линза дает действительное изображение всех точек предмета. Определите продольное увеличение предмета.

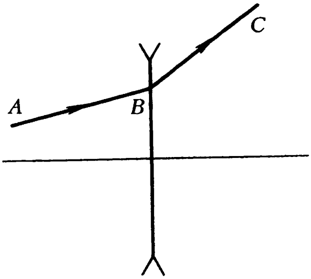


Рис.6

4. Оптическая система состоит из двух линз: собирающей с фокусным расстоянием F_1 =30 см и рассеивающей с фокусным расстоянием F_2 = = -30 см. Оптические оси линз совпадают. Параллельный пучок лучей падает на первую линзу и, пройдя через систему, собирается в некоторой точке, лежащей на оптической оси. На сколько сместится эта точка, если линзы поменять местами?

5. В проекционном аппарате используется сложный объектив, состоящий из двух собирающих линз с фокусными расстояниями F_1 = 20 см и F_2 = =15 см. Линзы расположены на расстоянии a =5 см друг от друга. Определите, с каким увеличением будет проецироваться диапозитив на экран, находящийся на расстоянии b =10 м от объектива проектора. К диапозитиву обращена линза с фокусным расстоянием F_2.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Н. Берюлева

Интерференционные картинки всем нам знакомы с детства. Это, например, радужные пятна от пролитого бензина на лужах или яркие цвета мыльных пузырей. Механизм образования разноцветной интерференционной картинки довольно сложен. Ограничимся лишь простыми примерами.

В Физическом энциклопедическом словаре читаем: «Интерференция — это усиление или ослабление амплитуды результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами складывающихся в пространстве двух (или нескольких) волн с одинаковыми периодами. Интерференция имеет место для всяких волн независимо от их природы». К этому можно добавить, что интерференционная картинка будет устойчивой, если складывающиеся волны имеют не только одинаковые периоды, но и постоянный (не зависящий от времени) сдвиг фаз. Такие волны называют когерентными.

Вспомним, как объясняется возникновение интерференционной картины при сложении колебаний от двух точечных когерентных источников света. Векторы напряженности $\vec{E}$ электрического поля (так называемые световые векторы) в электромагнитных волнах вблизи источников можно представить в виде

$$E_1 = A_1 \cos \omega t ,$$

$$E_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_0) .$$

Рассмотрим для простоты случай, когда источники света синфазны (сдвиг фаз $\varphi_0 = 0$) и амплитуды колебаний одинаковы ($A_1 = A_2 = A$).

Пусть расстояния от источников S_1 и S_2 до точки наблюдения C в плоскости P равны r_1 и r_2 соответственно (рис. 1). На пути от источников до точки наблюдения волны приобретут разность хода $\Delta r = r_1 - r_2$. В тех точках плоскости P, куда волны приходят в одинаковых фазах (т.е. с разностью хода, кратной длине волны:

$\Delta r = k\lambda$, где k — любое целое число), они усилят друг друга, и результирующий световой вектор будет колебаться с амплитудой $2A$. В этих точках находятся интерференционные максимумы. Там, куда две волны с равными амплитудами придут в противоположных фазах (т.е. с разностью хода, равной нечетному числу полуволн: $\Delta r = (2k+1)\lambda/2$), они полностью погасят друг друга. В этих точках находятся интерференционные минимумы, где никаких колебаний нет: $E = 0$ в любой момент времени.

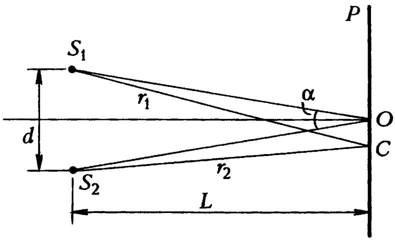


Рис. 1

Глаз наблюдателя усредняет картину во времени (при частотах, соответствующих световым колебаниям, глаз «не замечает» колебаний) и реагирует на интенсивность света, пропорциональную среднему значению от квадрата результирующего светового вектора. Что же увидит наблюдатель?

Если плоскость наблюдения параллельна линии S_1S_2 (как показано на рисунке 1) и расстояние d между источниками мало по сравнению с расстоянием L до плоскости P, интерференционная картина представляет собой систему чередующихся светлых и темных полос. Расположив плоскость наблюдения перпендикулярно к линии S_1S_2, можно увидеть интерференционную картину в виде концентрических колец.

Вернемся к рисунку 1. В точку O волны приходят с разностью хода $\Delta r = 0$. Угол $\alpha = d/L$, под которым из точки O (а при $d/L \ll 1$ из любой точки наблюдения) видны источники, называют углом схождения интерферирующих лучей, или углом интерференции. Расстояние между центрами соседних светлых (или темных) полос называют шириной интерференционной полосы. Посмотрим, от чего она зависит.

Задача 1. *Интерферируют две синфазные плоские волны. Чему равна ширина x интерференционной полосы, если угол схождения волн на экране α, а длина волны λ?*

На рисунке 2 изображены положения волновых фронтов в некоторый момент времени. Сплошные линии соединяют точки, где в этот момент напряженность электрического поля принимает амплитудное значение $E = +A$. Расстояния между соседними сплошными линиями равны λ . Штриховые линии объединяют точки, где напряженность поля $E = -A$. Расстояния между штриховыми линиями тоже равны λ .

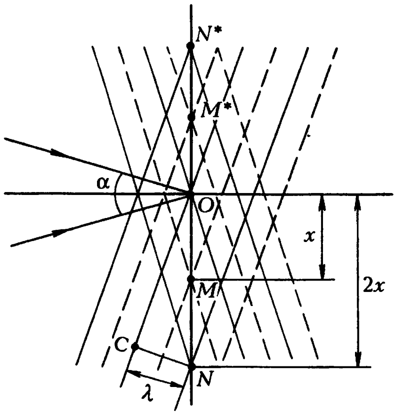


Рис.2

В точках O, M, N, M^*, N^* и т.д. две волны встречаются в одинаковых фазах. Поскольку фазы колебаний обеих волн одинаково меняются со временем $(\varphi = \omega t + \varphi_0)$, в любой момент времени волны будут приходить в эти точки в одинаковых фазах и, следовательно, усиливать друг друга. Точки O, M, N, M^*, N^* соответствуют интерференционным максимумам.

Из рисунка 2 видно, что $\angle NOC = \alpha/2$, $ON = 2x$ и $CN = \lambda$. Из соотношения

$$\frac{\lambda}{2x} = \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

найдем

$$x = \frac{\lambda}{\alpha} \text{ (для малых } \alpha).$$

Таким образом, ширина интерференционной полосы зависит от длины волны источников и угла схождения.

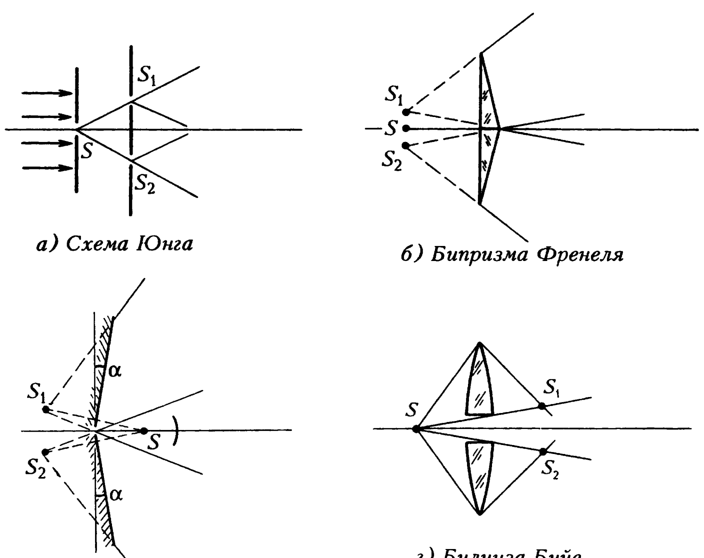
Этот результат справедлив для любой интерференционной схемы с малым углом схождения лучей (при достаточном удалении от источников волны всегда можно считать плоскими). В частности, для точечных источников (см. рис. 1)

$$\alpha = \frac{d}{L} \text{ и } x = \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda L}{d}.$$

В красном свете ($\lambda \approx 7 \cdot 10^{-7}$ м) полосы шире, чем в зеленом ($\lambda \approx 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м); с удалением экрана от источников полосы расширяются ($x \sim L$); сближение источников также ведет к уширению полос ($x \sim 1/d$).

Заметим, что два обычных независимых источника не являются когерентными, потому что разность фаз приходящих от них волн не постоянна. Для получения четкой интерференционной картины свет от одного источника делят на два пучка. Это можно сделать, например, с помощью одной из схем, представленных на рисунке 3. Расположив экран там, где пересекаются световые пучки, исходящие из двух источников (или их изображений) S_1 и S_2, можно наблюдать интерференционные полосы.

Вот еще один пример.



а) Схема Юнга *б) Бипризма Френеля*

в) Бизеркала Френеля *г) Билинза Бийе*

Рис.3

Задача 2. *Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $a = 5$ см вырезана полоса шириной $b = 5$ мм, а оставшиеся части сдвинуты вплотную (рис. 4). На расстоянии $d = 75$ см от линзы расположен точечный источник света S. Каково максимальное число полос в интерференционной картине для длины волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м?*

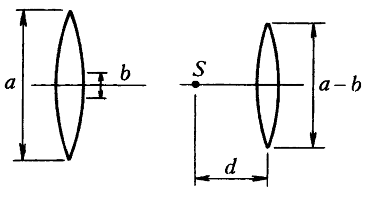


Рис.4

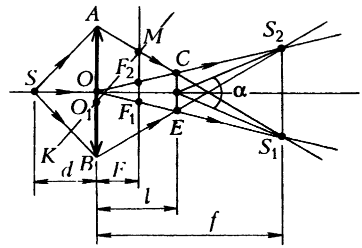


Рис.5

Построим изображение источника S в верхней половине срезанной линзы (рис. 5). Луч SO, параллельный оптической оси, после преломления в верхней части линзы пойдет через ее фокус F_1. Луч SA, преломившись в линзе, должен встретиться с параллельным ему лучом KO_1 в точке M фокальной плоскости линзы (луч KO_1 проходит через оптический центр O_1 верхней половины линзы, не преломляясь). Пересечение продолжений лучей AM и OF_1 дает положение изображения S_1 источника на расстоянии f от линзы.

Изображение S_2 источника в нижней половине линзы расположено симметрично относительно оси системы.

Из рисунка 5 видно, что в данном случае область перекрытия пучков ограничена и лежит между линзой и точкой пересечения лучей AS_1 и BS_2. На расстоянии l от линзы размер CE области перекрытия максимален. Здесь можно наблюдать $N = CE/x$ полос, где $x = \lambda/\alpha$ — ширина полосы. Угол схождения $\alpha = S_1S_2/(f - l)$, поэтому

$$N = \frac{CE}{\lambda}\frac{S_1S_2}{f-l}.$$

Из подобия треугольников F_2F_1O и CEO найдем

$$CE = F_2F_1\frac{l}{F} = \frac{bl}{F},$$

а из подобия треугольников AOC и S_1S_2C —

$$S_2S_1 = AO\frac{f-l}{l} = \frac{a-b}{2}\frac{f-l}{l}.$$

Тогда окончательно

$$N=\frac{CE}{\lambda}\frac{S_1S_2}{f-l}=\frac{b(a-b)}{2F\lambda}=450 \text{ полос.}$$

Теперь — несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 3. *От точечного монохроматического источника A отодвигают точечный монохроматический источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение (рис. 6). Расстояние между A и B при этом равно $d=2$ мм. Расстояние между источником A и экраном составляет $L=9$ м. На сколько нужно придвинуть экран к источнику A, чтобы в центре экрана (точке O_1) снова возникло потемнение?*

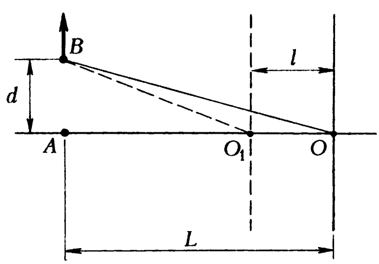


Рис.6

При удалении источника B первое потемнение в точке O возникнет при условии, что разность хода волн от B и A равна половине длины волны:

$$\Delta r = BO - AO = \frac{\lambda}{2}, \text{ или } \sqrt{L^2+d^2}-L=\frac{\lambda}{2}.$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние l, минимум в точке O_1 будет соответствовать разности хода три вторых длины волны:

$$\Delta r_1 = BO_1 - AO_1 = \frac{3\lambda}{2}, \text{ или } \sqrt{(L-l)^2+d^2}-(L-l)=\frac{3\lambda}{2}.$$

Преобразуем полученные выражения и воспользуемся приближенной формулой $(1+x)^{1/2}=1+x/2$ для $x \ll 1$:

$$\sqrt{1+\left(\frac{d}{L}\right)^2}-1=\frac{\lambda}{2L},\ \sqrt{1+\left(\frac{d}{L-l}\right)^2}-1=\frac{3\lambda}{2(L-l)},$$

или

$$d^2=\lambda L,\ d^2=3\lambda(L-l).$$

Отсюда

$$l=\frac{2}{3}L=6\ \text{м}.$$

Задача 4. *В интерференционной схеме с зеркалом Ллойда точечный источник S расположен на расстоянии $b=20$ см по горизонтали от плоского зеркала, на высоте $a=10$ см над плоскостью зеркала (рис. 7). Длина зеркала $d=10$ см. На расстоянии $L=1$ м от источника расположен экран P. Определите вертикальный размер интерференционной картины на экране.*

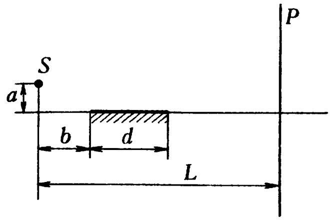


Рис.7

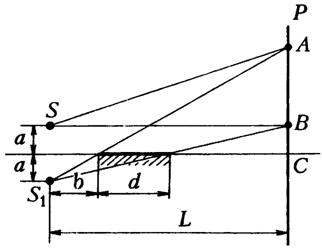


Рис.8

Построим изображение S_1 источника S в плоском зеркале (рис. 8). Лучи от источника S освещают практически весь экран. Лучи от изображения S_1 (лучи, отраженные от зеркала) перекрываются с лучами от S только в области AB. Введем обозначения: $AB=h$, $AC=z$, тогда из подобия треугольников найдем

$$\frac{b+d}{a}=\frac{L-b-d}{z-h},\ \frac{b}{a}=\frac{L-b}{z}.$$

Отсюда

$$h=\frac{La/b}{1+b/d}\approx 16{,}7\ \text{см}.$$

Упражнения

1. Два точечных синфазных монохроматических источника расположены на расстоянии d друг от друга (рис. 9). Прямо под источником A на

расстоянии $H = 8$ м наблюдается интерференция. Первый раз потемнение в точке C наблюдается при $d_1 = 2$ мм. В следующий раз потемнение наступает при расстоянии d_2. Найдите это расстояние.

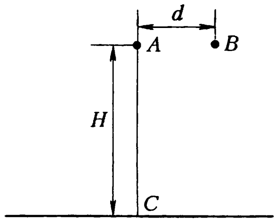


Рис.9

2. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 50$ см и диаметром $a = 5$ см разрезали по диаметру пополам и половинки раздвинули на расстояние $b = 5$ мм (см. рис. 3,*г*). Точечный источник света S расположен на расстоянии $d = 1$ м от линзы. На каком минимальном расстоянии от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

3. В схеме с бизеркалами Френеля (см. рис. 3,*в*) два одинаковых плоских зеркала образуют угол $2\alpha = 0{,}1$ рад. Точечный источник S находится на биссектрисе угла на расстоянии $d = 20$ см от линии пересечения зеркал. При каком минимальном размере зеркал на удаленном экране могут наблюдаться интерференционные полосы? Прямые лучи от источника на экран не попадают.

ФОТОНЫ

В. Можаев

Анализируя полученные на опыте закономерности электромагнитного излучения нагретых тел, Планк в 1900 году выдвинул гипотезу, которая коренным образом изменила ряд фундаментальных представлений классической физики и легла в основу квантовой теории. Согласно гипотезе Планка, энергия, излучаемая микроскопическими объектами (атомами, молекулами), может принимать не любые, а только определенные, дискретные значения, кратные минимальной порции $E = h\nu$. Здесь ν — частота излучения данного объекта, h — некоторая постоянная величина, получившая название постоянной Планка.

Развивая теорию квантов, Эйнштейн высказал гипотезу о том, что само электромагнитное излучение имеет прерывистую структуру, состоит из отдельных световых частиц (корпускул) — фотонов. Энергия фотона равна $h\nu$, а его импульс $p = h\nu/c = h/\lambda$ (где c — скорость света, λ — длина волны). В частности, на основе таких представлений о свете Эйнштейн в 1905 году построил количественную теорию фотоэлектрического эффекта.

Рассмотрим несколько конкретных примеров, в которых проявляются именно корпускулярные свойства света.

Задача 1. *На рисунке 1 приведен экспериментально полученный график зависимости задерживающий разности потенциалов $U_з$ (т.е. напряжения между катодом и анодом, при котором ток в вакуумном фотоэлементе становится равным нулю) от частоты ν падающего света. С помощью этого графика найдите значение постоянной Планка, работу выхода электронов из катода и красную границу фотоэффекта.*

При освещении фотокатода светом происходит взаимодействие квантов света с электронами вещества, причем в случае фотоэффекта речь идет о слабо связанных с атомами электронах, т.е. электронах проводимости. В результате взаимодействия фотона с одним из таких электронов энергия фотона $h\nu$ полностью передается электрону, и, если этой дополнительной энергии будет достаточно, электрон покинет поверхность фотокатода.

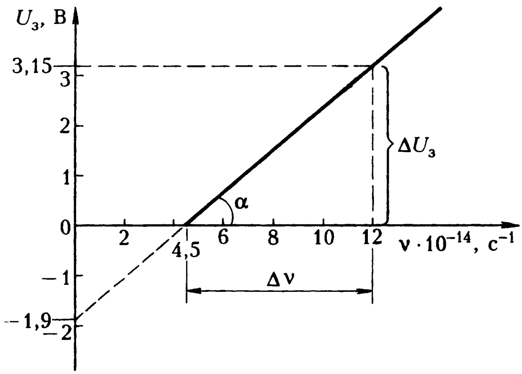


Рис. 1

Максимальная кинетическая энергия E_k электрона определяется уравнением Эйнштейна для фотоэффекта:

$$E_k = h\nu - A,$$

где A — работа выхода электрона с поверхности освещаемого вещества в вакуум. Очевидно, что фототок станет равным нулю, т.е. выбитые с поверхности катода электроны не дойдут до анода, если задерживающая разность потенциалов будет равна

$$U_з = \frac{E_k}{e}, \text{ или } U_з e = E_k,$$

где e — заряд электрона. Подставив это выражение в уравнение фотоэффекта, получим формулу, связывающую $U_з$ и частоту падающего света ν:

$$U_з = \frac{h}{e}\nu - \frac{A}{e}.$$

Как видно, отношение постоянной Планка h к заряду электрона e равно тангенсу угла наклона α экспериментальной прямой (см. рис. 1), следовательно,

$$h = e\,\mathrm{tg}\alpha = e\frac{\Delta U_з}{\Delta\nu} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-34}\,\text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Для определения работы выхода A продолжим экспериментальную прямую до пересечения с вертикальной осью. Величина отсекаемого отрезка, выраженная в электрон-вольтах, и будет равна работе выхода:

$$A = 1{,}9 \text{ эВ}.$$

Красной границей фотоэффекта называют наименьшую частоту света $\nu_к$ (или наибольшую длину волны $\lambda_к$), при которой возникает фотоэффект. Как видно из графика,

$$\nu_к = 4{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}.$$

Задача 2. *Свет от Солнца падает на плоское зеркало площадью $S = 1$ м^2 под углом $\alpha = 60°$. Найдите силу светового давления, считая, что зеркало полностью отражает весь падающий на него свет. Известно, что средняя мощность солнечного излучения, приходящаяся на 1 м^2 земной поверхности, перпендикулярной к излучению, равна $P = 1{,}4 \cdot 10^3$ Вт/м^2.*

Прежде всего обсудим, почему вообще существует световое давление и как его объяснить с квантовой точки зрения.

Падающие на зеркало фотоны упруго отражаются от него, при этом импульс фотонов изменяется. Это изменение обусловлено импульсом силы, действующей со стороны зеркала на фотоны в момент отражения (взаимодействия с зеркалом). По третьему закону Ньютона точно такая же сила (по модулю) будет действовать на зеркало со стороны фотонов (рис. 2). Она и создает световое давление.

Теперь проведем расчет. Найдем сначала импульс силы, действующей на зеркало в течение промежутка времени Δt со стороны

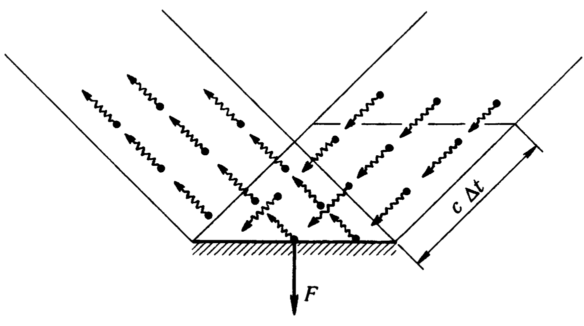


Рис.2

фотонов, обладающих энергией $h\nu_i$, где ν_i — некоторая фиксированная частота. Пусть концентрация таких фотонов в падающем потоке равна n_i. Тогда за время Δt на зеркало попадут $n_i c\Delta t S\cos\alpha$ фотонов (c — скорость света). Их суммарный импульс до взаимодействия с зеркалом равен

$$p_1 = (n_i c\Delta t S\cos\alpha)mc = n_i S\cos\alpha\cdot h\nu_i\Delta t.$$

После отражения импульс изменяется по направлению (угол отражения равен углу падения), а по модулю остается тем же:

$$p_2 = p_1.$$

Таким образом, изменение импульса равно

$$\Delta p = 2p_1\cos\alpha = 2n_i h\nu_i S\cos^2\alpha\cdot\Delta t,$$

и сила давления на зеркало со стороны фотонов данного сорта составляет

$$F_i = \frac{\Delta p}{\Delta t} = 2n_i h\nu_i S\cos^2\alpha.$$

Суммарная сила давления со стороны всех фотонов будет

$$F = \sum_i F_i = 2S\cos^2\alpha\cdot\sum_i n_i h\nu_i.$$

Поскольку мощность солнечного излучения, приходящаяся на единицу площади поверхности, перпендикулярной к направлению излучения, равна

$$P = c\sum_i n_i h\nu_i,$$

окончательное выражение для силы будет иметь вид

$$F = 2\frac{P}{c}S\cos^2\alpha \approx 2{,}3\cdot 10^{-6}\,\text{Н}.$$

Задача 3. *Тепловой фотоприемник представляет собой полую камеру с небольшим отверстием (рис. 3). Отношение площади внутренней поверхности камеры к площади отверстия $S/\sigma = \beta = 200$. На отверстие падает монохроматический пучок фотонов, сечение пучка равно сечению входного отверстия. При зеркальной внутренней поверхности камеры отношение концентрации фотонов в полости к концентрации фотонов в пучке равно $n_1/n_0 = 4$. Чему будет равно аналогичное отношение, если коэффициент поглоще-*

ния стенок приемника будет равен $k=0{,}01$? Излучением стенок можно пренебречь.

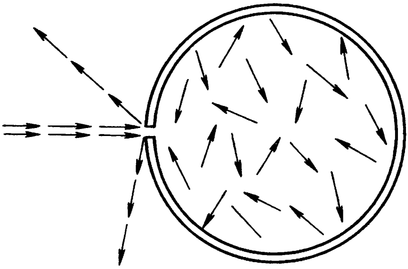


Рис.3

В первом случае, когда внутренняя поверхность фотоприемника полностью отражает падающее на нее излучение, в стационарном состоянии (в установившемся режиме) число фотонов, попадающих в полость приемника в единицу времени, равно числу фотонов, покидающих полость приемника. Если концентрация фотонов в падающем пучке n_0, а площадь входного отверстия приемника σ, то число фотонов, попадающих в приемник в единицу времени, равно

$$N_0 = n_0 c\sigma,$$

где c — скорость света. Число фотонов, покидающих приемник в единицу времени, пропорционально концентрации фотонов n_1 в приемнике, площади отверстия σ и скорости фотонов c:

$$N_1 = \alpha n_1 c\sigma,$$

где α — постоянный коэффициент пропорциональности. Из условия стационарности $N_0 = N_1$ получим

$$\alpha = n_0/n_1 = 1/4.$$

Во втором случае, когда стенки полости частично поглощают фотоны, в установившемся режиме число фотонов N_0, попадающих в полость приемника в единицу времени, равно числу фотонов N_2, покидающих полость через входное отверстие приемника в единицу времени, плюс число фотонов N_2^*, поглощаемых стенками полости за это же время:

$$N_0 = N_2 + N_2^*, \text{ или } n_0 c\sigma = \alpha n_2 c\sigma + k\alpha n_2 cS,$$

где n_2 — новая концентрация фотонов в полости приемника, (мы учли, что на любой участок внутренней поверхности камеры фотоны падают с той же интенсивностью, что и на выходное отверстие). Из последнего равенства найдем

$$\frac{n_2}{n_0} = \frac{1}{\alpha(1+k\beta)} = \frac{4}{3}.$$

Задача 4. *Найдите изменение длины волны света, излучаемого возбужденным атомом водорода, вследствие отдачи, которую испытывает ядро атома со стороны вылетающего кванта света.*

Воспользуемся законами сохранения энергии и импульса для изолированной системы.

В начальный момент, до излучения фотона, эта система представляет собой неподвижный атом водорода, находящийся в возбужденном состоянии, т.е. его электрон занимает не самый низкий энергетический уровень E_1, а какой-то более высокий уровень E_n. (Возбуждение атома может быть вызвано неким внешним воздействием, например столкновением с другим атомом или свободным электроном или поглощением кванта света.) Пусть разность энергий электрона в этом случае составляет $E_n - E_1 = h\nu_0$. Тогда полная энергия атома равна сумме энергии покоя ядра (протона) $m_p c^2$ и энергии электрона E_n, а импульс атома равен нулю.

После излучения атомом фотона с некоторой энергией $h\nu$ изолированная система будет включать в себя фотон и атом водорода, который, вследствие отдачи, приобретет некоторую скорость v. Полная энергия системы в этом случае будет равна $m_p c^2 + E_1 + m_p v^2/2 + h\nu$, а импульс системы будет $h\nu/c - m_p v$.

Согласно законам сохранения энергии и импульса, можно записать

$$m_p c^2 + E_n = m_p c^2 + E_1 + \frac{m_p v^2}{2} + h\nu, \quad 0 = \frac{h\nu}{c} - m_p v.$$

Учитывая, что $E_n - E_1 = h\nu_0$, получим

$$h\Delta\nu = h\nu - h\nu_0 = -\frac{m_p v^2}{2} = -\frac{(h\nu)^2}{2m_p c^2},$$

или

$$\Delta\nu = -\frac{h\nu^2}{2m_p c^2} = -\frac{h}{2m_p \lambda^2}.$$

Для относительно малых изменений частоты ($\Delta\nu \ll \nu$) можно записать

$$\Delta\nu = \Delta\left(\frac{c}{\lambda}\right) = -\frac{c}{\lambda^2}\Delta\lambda.$$

Тогда окончательно

$$\Delta\lambda = \frac{h}{2m_p c} \approx 6{,}7 \cdot 10^{-16} \text{ м}.$$

Упражнения

1. Найдите среднее число фотонов, попадающих в глаз за единицу времени, если смотреть на электрическую лампочку накаливания мощностью $P = 200$ Вт с расстояния $l = 10$ м. Средняя длина волны излучения лампочки $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ м. Диаметр зрачка глаза $d = 2$ мм. Рассеянием и поглощением света пренебречь.

2. До какого максимального потенциала зарядится уединенный медный шарик, если его облучать ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-7}$ м? Работа выхода электрона для меди составляет A=4,47 эВ.

3. Рубиновый лазер, работающий в импульсном режиме с длительностью импульса $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ с, излучает параллельный пучок света с энергией $E = 1$ Дж. Определите силу светового давления на шарик, освещаемый этим светом, если диаметр шарика равен диаметру лазерного пучка, а поверхность шарика полностью поглощает падающее на шарик излучение.

ЭЛЕМЕНТЫ АТОМНОЙ ФИЗИКИ

Ю. Самарский

Атомная физика — большой и важный раздел современной физики. Атом — по-гречески «неделимый» — оказался огромным миром, живущим по своим особым законам. Многие современные успехи в науке и ее приложениях были бы невозможны без выяснения сложного строения атома, без открытия новых законов движения микрочастиц — законов квантовой механики.

Из множества вопросов атомной физики в этой статье мы рассмотрим лишь два — дискретность спектров излучения и стабильность атомов. В каждом случае прежде напомним основные положения и закономерности, определяющие данное явление, а потом разберем конкретные задачи.

Квантовые представления о свете позволили объяснить многие явления, происходящие в атоме, и прежде всего — способность атомов поглощать и испускать фотоны лишь с определенной энергией.

Рассматривая одиночный свободный атом водорода, Бор в 1913 году пришел к выводу, что электрон в атоме может обладать только дискретными значениями энергии E_1, E_2, ..., E_n, или, как говорят, находиться на определенных энергетических уровнях. При этом энергия уровней равна

$$E_n = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}\frac{1}{n^2},$$

где n = 1, 2, ... — так называемое главное квантовое число, m — масса электрона, e — его заряд, h — постоянная Планка, ε_0 — электрическая постоянная. Каждому уровню энергии соответствует устойчивое (стационарное) состояние атома, в котором атом не излучает и не поглощает. Излучение фотона происходит при переходе атома с уровня с большей энергией на уровень с меньшей энергией. Самый низкий энергетический уровень атома ($n=1$) называется основным, а остальные — возбужденными. При поглощении фотона атом переходит в возбужденное состояние, занимая уровень с большей энергией. Энергия испускаемого (поглощаемого) фотона связана с энергией уровней, между которыми происходит переход, условием

$$E_k - E_n = h\nu_{kn}.$$

Частоты ν_{kn} соответствующих переходов обычно называют спектральными линиями. Подставляя значения E_k и E_n, все спектральные линии водорода можно выразить одной формулой:

$$\nu = \frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \text{ или } \frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где константа $R = (me^4)/(8h^3\varepsilon_0^2 c) = 10973731$ м$^{-1}$ называется постоянной Ридберга, а n и k — целые числа. Спектральную формулу удобно несколько преобразовать для расчета энергии возбуждения атома. Умножим левую и правую части последнего равенства на hc и получим

$$\frac{hc}{\lambda} = Rhc\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right), \text{ или } E_{\text{возб}} = E_{\text{ион}}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right),$$

где $E_{\text{возб}} = hc/\lambda = h\nu$ — энергия возбуждения атома, а $E_{\text{ион}} = Rhc$ — энергия ионизации атома, т.е. энергия, соответствующая удалению электрона из атома (переходу с уровня $n = 1$ на уровень $k \to \infty$).

Задача 1. *Первоначально невозбужденный водород начинает излучать фотоны, если через него пропустить пучок электронов, прошедших ускоряющую разность потенциалов, не меньшую $U_0 = 10{,}2$ В. Какую минимальную ускоряющую разность потенциалов должен пройти пучок протонов, чтобы при пропускании их через первоначально невозбужденный водород последний начал излучать фотоны? Чему равна (в электрон-вольтах) энергия ионизации атома водорода? Считать, что масса электрона много меньше массы протона и что атом водорода перед ударом покоился.*

Минимальная кинетическая энергия $E_{\min}$ частицы, налетающей на покоящийся атом и возбуждающей его, определяется из условия абсолютно неупругого взаимодействия частицы и атома, когда после взаимодействия скорость их относительно друг друга равна нулю. В этом случае законы сохранения импульса и энергии имеют вид

$$mv_0 = (m+M)v,$$

$$E_{\min} = \frac{mv_0^2}{2} = eU = \frac{(m+M)v^2}{2} + E_{\text{возб}},$$

где m — масса частицы, M — масса атома, v_0 — скорость налетающей частицы, v — скорость атома и частицы после столкновения, U — ускоряющая частицу разность потенциалов, $E_{возб}$ — энергия возбуждения атома. Решая эту систему уравнений, получим

$$E_{min} = eU = (1+\frac{m}{M})E_{возб}.$$

В случае бомбардировки водорода пучком электронов, когда $m/M \ll 1$, получаем

$$E_{возб} = eU_0.$$

Минимальная энергия возбуждения атома водорода связана с переходом его из основного состояния с квантовым числом $n=1$ в состояние с числом $k=2$. Согласно преобразованной спектральной формуле, имеем

$$E_{возб} = E_{ион}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{k^2}\right) = \frac{3}{4}E_{ион} = eU_0.$$

Отсюда

$$E_{ион} = \frac{4}{3}E_{возб} = \frac{4}{3}eU_0 = 13{,}6 \text{ эВ}.$$

В случае бомбардировки атомов водорода протонами, когда $m \approx M$, искомую минимальную ускоряющую разность потенциалов найдем из условия

$$eU_x = (1+\frac{m}{M})E_{возб} = 2E_{возб} = 2eU_0 = 20{,}4 \text{ эВ}, \text{ или } U_x = 20{,}4 \text{ В}.$$

Легко видеть, что возбуждать атомы водорода тяжелыми частицами энергетически невыгодно.

* * *

Свойство атомов некоторых веществ самопроизвольно испускать ионизирующее излучение называют радиоактивностью, а соответствующие вещества — радиоактивными. Анализ многочисленных опытов привел к выводу, что радиоактивность есть результат процессов, происходящих внутри атомных ядер и связанных с их сложным строением. Резерфорд первым установил основной закон радиоактивного распада: для каждого радиоактивного вещества существует определенный интервал времени, называемый периодом полураспада, в течение которого количество радиоактивного вещества убывает в 2 раза. Закон имеет вид

$$N_t = N_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где N_t — число радиоактивных атомов в произвольный момент времени t, N_0 — их первоначальное количество (при $t = 0$), T — период полураспада.

Задача 2. *В микрокалориметр с теплоемкостью C=100 Дж/К помещен образец радиоактивного кобальта с относительной атомной массой A=61. Масса образца $m = 10$ мг. При распаде одного ядра кобальта выделяется энергия $\omega = 2 \cdot 10^{-19}$ Дж. Через время $\tau = 50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t = 0{,}06$ °С. Каков период полураспада данного препарата кобальта?*

Повышение температуры калориметра определяется выделением энергии Q в образце при распаде ядер атомов кобальта:

$$C\Delta t = Q = \Delta N\omega .$$

Здесь ΔN — число распавшихся ядер за время τ . Его можно найти из закона радиоактивного распада:

$$\Delta N = N_0 - N_0 \cdot 2^{-\tau/T} = N_0(1 - 2^{-\tau/T}),$$

где N_0 — первоначальное число радиоактивных атомов. По закону Авогадро,

$$N_0 = N_A \frac{m}{\mathrm{M}},$$

где $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — постоянная Авогадро, $\mathrm{M} = A \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса кобальта. Теперь окончательно получаем

$$C\Delta t = N_A \frac{m}{A \cdot 10^{-3}}(1 - 2^{-\tau/T})\omega,$$

откуда находим период полураспада:

$$T = \frac{\tau}{\log_{1/2}(1 - (C\Delta t \cdot 10^{-3})/(N_A \omega m))} \approx 5700 \text{ с} \approx 95 \text{ мин}.$$

Задача 3. *В некоторый момент времени счетчик радиоактивного излучения, расположенный вблизи препарата фтора-18 с малым периодом полураспада, зафиксировал $I_0 = 77$ отсчетов в секунду. Через время $\tau = 14$ мин показания уменьшились до $I_1 = 70$ отсчетов в секунду. Определите период полураспада фтора-18.*

Счетчик радиоактивного излучения регистрирует интенсивность радиоактивного распада, которая определяется скоростью изменения числа нераспавшихся радиоактивных атомов:

$$I_0 = \frac{\Delta N_0}{\Delta t}, \quad I_1 = \frac{\Delta N_\tau}{\Delta t}.$$

Отсюда, используя закон радиоактивного распада, получаем

$$I_1 = I_0 \cdot 2^{-\tau/T}.$$

Следовательно, период полураспада равен

$$T = \frac{\tau}{\log_2(I_0/I_1)} \approx 6108 \text{ с} \approx 102 \text{ мин}.$$

Упражнения

1. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой атом водорода. Какова должна быть минимальная кинетическая энергия налетающего атома, чтобы в результате столкновения мог излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_{\text{ион}} = 13{,}6$ эВ.

2. Ампула с радиоактивным препаратом $^{24}_{11}Na$ охлаждается потоком воздуха. В начале опыта воздух нагревался на $\Delta t_1 = 2$ °C, а через время $\tau = 142$ мин — на $\Delta t_2 = 1{,}8$ °C. Каков период полураспада данного препарата?

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКЕ

А. Коржуев

Некоторое время тому назад в программе по физике для поступающих в вузы появился новый раздел — «Элементы теории относительности». Так что теперь на вступительном экзамене вам могут встретиться задачи и на эту тему.

Рассмотрим несколько конкретных задач на движение тел с так называемыми релятивистскими скоростями, т.е. со скоростями, сравнимыми со скоростью света. Для их решения нам понадобятся хорошо известные в классической механике законы сохранения импульса и энергии, но записанные в специальной форме.

Так, релятивистский импульс тела с массой покоя m_0, движущегося со скоростью v, вычисляется по формуле

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

а полная энергия —

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где c — скорость света. Заметим, что эти формулы справедливы лишь для частиц с отличной от нуля массой покоя. А например, для фотона — частицы, движущейся со скоростью c и имеющей нулевую массу покоя, энергия записывается в виде

$$E = h\nu,$$

а импульс —

$$p = \frac{h\nu}{c},$$

где $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, ν — частота излучения.

А теперь — задачи.

Задача 1. *При аннигиляции медленно движущихся электрона и позитрона образуются два гамма-кванта. Под каким углом друг к другу они разлетаются? Какова частота возникшего излучения?*

В рассматриваемом процессе

$$ {}^{1}_{0}p + {}^{-1}_{0}e \rightarrow 2\gamma $$

выполняются законы сохранения импульса и энергии. Поскольку начальные скорости частиц малы, по закону сохранения импульса получим

$$ 0 = \frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c}, \text{ т.е. } \nu_1 = \nu_2. $$

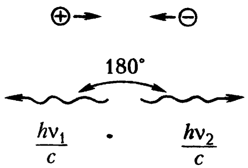


Рис. 1

Причем очевидно, что угол разлета равен 180° (рис. 1), ибо только в этом случае суммарный импульс частиц после взаимодействия может быть равным нулю.

Теперь запишем закон сохранения энергии:

$$ 2m_0c^2 = h\nu_1 + h\nu_2, $$

откуда, учитывая, что $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, найдем

$$ \nu = \frac{m_0c^2}{h}. $$

Задача 2. *Летевшая со скоростью $v = 0,8\ c$ нейтральная частица распадается на два фотона, движущихся затем в противоположных направлениях (рис. 2). Каково отношение частот этих квантов?*

Вновь применим законы сохранения импульса и энергии.

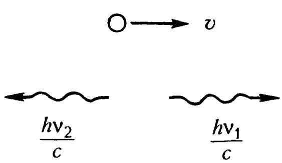


Рис. 2

Согласно закону сохранения импульса, начальный импульс частицы равен сумме проекций импульсов фотонов на первоначальное направление движения частицы:

$$ \frac{m_0v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{h\nu_1}{c} - \frac{h\nu_2}{c}, $$

а по закону сохранения энергии полная энергия частицы равна суммарной энергии квантов:

$$ \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2. $$

Подставляя сюда значение скорости $v=0{,}8\ c$ и умножая обе части первого уравнения на c, получим

$$\frac{4}{3}m_0c^2 = h\nu_1 - h\nu_2,\ \frac{5}{3}m_0c^2 = h\nu_1 + h\nu_2.$$

Вычитая и складывая эти два уравнения, найдем частоты излучений:

$$\nu_1 = \frac{3m_0c^2}{2h},\ \nu_2 = \frac{m_0c^2}{6h}$$

и искомое отношение:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = 9.$$

Задача 3. *При распаде нейтральной частицы образовались два фотона, движущихся под углами $\alpha_1=30°$ и $\alpha_2=60°$ к первоначальному направлению движения частицы. Какова была ее скорость?*

В этом случае закон сохранения импульса разумно записать в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси (рис. 3):

$$\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{h\nu_1}{c}\cos\alpha_1 + \frac{h\nu_2}{c}\cos\alpha_2,$$

$$0 = \frac{h\nu_1}{c}\sin\alpha_1 - \frac{h\nu_2}{c}\sin\alpha_2.$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2.$$

Из второго уравнения с учетом того, что $\sin\alpha_1 = 1/2$ и $\sin\alpha_2 = \sqrt{3}/2$, получим $\nu_1 = \nu_2\sqrt{3}$. Подставим этот результат в первое и третье уравнения:

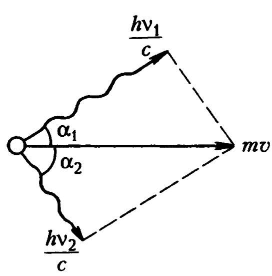


Рис.3

$$\frac{m_0 v c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 2h\nu_2, \qquad \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_2\left(\sqrt{3}+1\right).$$

Теперь разделим полученные равенства одно на другое и найдем

$$\frac{c}{v} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Окончательно

$$v = \frac{2c}{\sqrt{3}+1} \approx 0{,}73\ c.$$

Задача 4. *Частица, двигавшаяся первоначально со скоростью $v = 0{,}8\ c$, распадается на два фотона. Найдите минимальный угол разлета этих фотонов.*

Применив законы сохранения энергии и импульса, получим (рис.4)

$$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = h\nu_1 + h\nu_2,$$

$$\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 = \left(\frac{h\nu_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu_2}{c}\right)^2 - \frac{2h^2\nu_1\nu_2\cos\beta}{c^2}, \text{ где } \beta = 180^\circ - \alpha.$$

Подставим сюда v = 0,8 c и умножим второе равенство на c:

$$\frac{5}{3} m_0 c^2 = h\nu_1 + h\nu_2,$$

$$\frac{16}{9} m_0^2 c^4 = (h\nu_1)^2 + (h\nu_2)^2 + 2h^2\nu_1\nu_2\cos\alpha.$$

Выделим во втором уравнении полный квадрат:

$$\frac{16}{9} m_0^2 c^4 = (h\nu_1 + h\nu_2)^2 - 2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha).$$

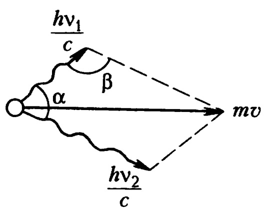


Рис.4

Так как сумма энергий фотонов постоянна и равна $\frac{5}{3}m_0c^2$, то

$$2h^2\nu_1\nu_2(1-\cos\alpha) = m_0^2c^4, \text{ т.е. } 1-\cos\alpha = \frac{m_0^2c^4}{2h^2\nu_1\nu_2}.$$

Чтобы угол разлета α, а значит, и разность $1-\cos\alpha$ были минимальными, произведение $\nu_1\nu_2$ должно быть максимальным. Как известно из математики, произведение двух чисел, сумма которых постоянна (ибо $h\nu_1 + h\nu_2 = \frac{5}{3}m_0c^2$), будет максимальным, когда сомножители равны: $\nu_1 = \nu_2$. Это же можно доказать более строго. Запишем произведение $\nu_1\nu_2$, а точнее $h\nu_1 h\nu_2$, в виде $\left(\frac{5}{3}m_0c^2 - h\nu_2\right)h\nu_2$ и исследуем на максимум функцию

$$f(\nu_2) = \left(\frac{5}{3}m_0c^2 - h\nu_2\right)h\nu_2 = \frac{5}{3}m_0c^2h\nu_2 - h^2\nu_2^2.$$

Ее графиком будет парабола (рис. 5), которая достигает максимума в точке

$$\nu_2 = \frac{5}{6}\frac{m_0c^2}{h}.$$

Тогда

$$h\nu_1 = \frac{5}{3}m_0c^2 - \frac{5}{6}m_0c^2 = \frac{5}{6}m_0c^2,$$

а искомое произведение

$$\nu_1\nu_2 = \frac{25}{36}\frac{m_0^2c^4}{h^2}.$$

Подставляя этот результат в выражение для разности $1-\cos\alpha$, получим

$$1-\cos\alpha_{\min} = \frac{18}{25} = 0{,}72, \text{ откуда } \alpha_{\min} = \arccos 0{,}28 \approx 47^\circ.$$

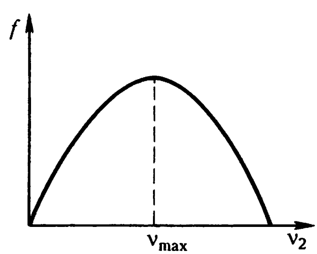


Рис. 5

Задача 5. *Может ли свободный электрон поглотить фотон?*

Опять воспользуемся законами сохранения импульса и энергии. Пусть электрон до поглощения фотона покоился, а затем приобрел скорость v. Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$m_0c^2 + h\nu = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

а согласно закону сохранения импульса,

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Найдя $h\nu$ из второго уравнения и подставив в первое, получим

$$m_0c^2 + \frac{m_0 vc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

После преобразований придем к уравнению

$$(c-v)^2 = c^2 - v^2.$$

Формальными его решениями являются значения скорости $v = c$ и $v = 0$. Другими словами, скорость электрона должна быть равна либо скорости света c, что невозможно, либо нулю, что не имеет физического смысла, поскольку в этом случае частота фотона оказывается равной нулю.

Упражнения

1. Докажите, что покоящийся свободный электрон не может излучить фотон.

2. При распаде нейтральной частицы образовались два фотона, двигавшиеся под углами $\alpha = 60°$ и $\beta = 90°$ к первоначальному направлению движения частицы. Какова ее первоначальная скорость?

3. Частота фотона, налетающего на покоящийся электрон, равна ν_1, скорость электрона после взаимодействия составляет 0,6 c. На сколько изменилось частота фотона и каков его угол рассеяния?

МОЖНО ЛИ ПРОВЕРИТЬ ОТВЕТ?

Г. Меледин

После решения задачи, особенно сложной, всегда хочется убедиться в правильности полученных результатов или хотя бы в отсутствии ошибок. Существует много способов, позволяющих быстро обнаружить ошибку. Например, можно сравнить свой ответ с ответами, полученными при решении этой же задачи иными методами. Однако такие возможности бывают далеко не всегда.

Рассмотрим несколько приемов, которыми широко пользуются физики. Это — проверка ответа на размерность или симметрию, исследование частных (или предельных) случаев и контроль за областью допустимых значений.

Чтобы проверить ответ одним из этих способов, надо получить его в алгебраической (буквенной) форме.

Проверка на размерность. Этот метод не нуждается в особых комментариях — при подстановке размерностей величин, входящих в формулу, в итоге должна получиться размерность искомой величины. Разумеется, все параметры надо выражать в одной и той же системе единиц. С точки зрения такой проверки, ответ удобно записать так, чтобы сразу была видна его размерность. Для этого обычно выделяют или безразмерные отношения, или устойчивые размерностные сочетания параметров типа v^2/g (размерность длины), $\rho g h$ (размерность давления), $\sqrt{l/g}$ (размерность времени) и т.п.

В качестве примера рассмотрим достаточно известную задачу.

Задача 1. *Через неподвижный блок перекинута незакрепленная нить, на концах которой подвешены грузы (рис. 1). Массы грузов m_1 и m_2. Найдите натяжение нити при движении грузов.*

Ответ: $T = \dfrac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g$.

Проверим размерность. Произведение масс, деленное на их сумму, имеет размерность массы, а умноженное на ускорение — дает размерность силы. Следовательно, размерности левой и правой частей формулы для натяжения нити совпадают.

Проверка на симметрию. Такой способ менее известен. Он заключается в следующем. Если в условие задачи какие-то одинаковые по размерности параметры входят таким симметричным образом, что при перестановке индексов, нумерующих параметры, задача не меняется, то такая же симметрия должна быть и в ответе.

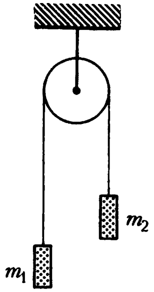


Рис. 1

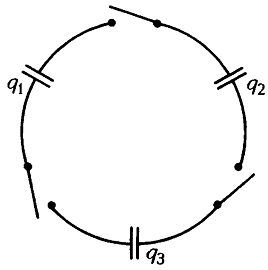


Рис. 2

Так, в задаче 1 натяжение нити не зависит от того, слева или справа от блока находится более тяжелый груз и каким из двух индексов — 1 или 2 — обозначена его масса. Значит, ответ не должен измениться при замене m_1 на m_2 и m_2 на m_1. Другими словами, выражение для натяжения нити должно быть симметричным относительно m_1 и m_2. Полученный ответ этому действительно удовлетворяет — и произведение, и сумма масс являются симметричными комбинациями параметров m_1 и m_2.

Приведем еще один пример, где есть подобная симметрия.

Задача 2. *Три конденсатора одинаковой емкости имеют заряды q_1, q_2 и q_3 соответственно. Их соединяют, как изображено на рисунке 2. Найдите установившиеся заряды на конденсаторах.*

Ответ: $q_1^* = \dfrac{2q_1 - q_2 - q_3}{3}$, $q_2^* = \dfrac{2q_2 - q_1 - q_3}{3}$, $q_3^* = \dfrac{2q_3 - q_1 - q_2}{3}$.

Ясно, что ничего не изменится, если мы последовательно сменим нумерацию зарядов ($q_1 \to q_2$, $q_2 \to q_3$, $q_3 \to q_1$) — это всего лишь повернет картинку. Ответ должен продемонстрировать такую же симметрию по отношению к циклическим перестановкам. Несложно убедиться, что наш ответ обладает этим свойством.

Для удобства контроля симметрию по параметрам при записи ответа надо сохранять.

Исследование частных случаев. Эту проверку проводят так. Выбирают простейшие значения параметров задачи, для которых ответ очевиден, и смотрят, дает ли полученная общая формула для этих частных значений параметров такой же результат.

Обратимся еще раз к задаче о блоке. Если масса одного из тел (m_1 или m_2) равна нулю, то другое тело свободно падает и нить не натянута. Такой же нулевой результат получается и из ответа.

Рассмотрим еще случай равных масс: $m_1 = m_2 = m$. При этом грузы или покоятся, или движутся равномерно. Следовательно, натяжение нити должно быть равно весу одного из грузов. Нетрудно видеть, что формула в ответе дает тот же результат.

Контроль за областью допустимых значений. Иногда при проверке на частных случаях обнаруживается несовпадение результата в частном случае с результатом, полученным из общей формулы. Обычно это объясняется тем, что взятое наугад частное значение параметра не попало в область допустимых значений. Такая неприятная возможность говорит о необходимости сопровождать ответ указанием области допустимых значений параметров.

Вот характерный пример.

Задача 3. *К телу массой m, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила $\vec{F}$, направленная вниз под углом α к горизонту (рис. 3). Коэффициент трения между телом и поверхностью μ. Найдите ускорение тела.*

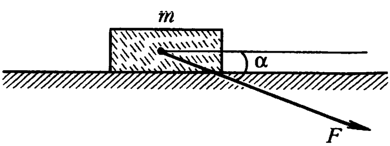


Рис.3

Типичный ответ: $a = \dfrac{F\cos\alpha - \mu(mg + F\sin\alpha)}{m}$.

Очевидно, что если тело не тянуть, оно ускоряться не будет. Проверим это: при $F = 0$ $a = -\mu g \neq 0$! В чем же дело?

Оказывается, правильный ответ должен быть таким:

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg + F\sin\alpha)}{m} \text{ при } F > \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha},$$

$$a = 0 \text{ при } 0 \leq F \leq \frac{\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}.$$

Таким образом, для $F = 0$ нужно пользоваться не первой, а второй формулой, и тогда никакого противоречия не наблюдается.

В заключение отметим, что всегда, когда в ответе появляется разность под знаком радикала или логарифм, обязательно надо находить область допустимых значений. Особого внимания требует разность в знаменателе; в этом случае надо немедленно проверить, при каких значениях параметров знаменатель может обратиться в нуль. Нередко это приводит к обнаружению ошибки. В нашем случае при $\cos\alpha \leq \mu\sin\alpha$ тело нельзя сдвинуть с места никакой сколь угодно большой силой — произойдет «заклинивание».

УРАВНЕНИЯ ДУМАЮТ ЗА НАС

В. Нахшин

Решение любой расчетной задачи по физике состоит из двух частей — физической и математической.

Пока мы обдумываем условие задачи, анализируем, в соответствии с какими физическими законами происходит данное явление, и составляем соответствующую систему уравнений, мы — физики. После этого физика временно отходит на задний план. Теперь мы — математики, и перед нами стоят иные проблемы: как наиболее рационально решить полученную систему уравнений и найти ответ? Причем ответ нужно найти в общем (буквенном) виде, чтобы слева от знака равенства стояла только искомая величина (в буквенном обозначении), а справа — комбинация из только известных величин (тоже в соответствующих буквенных обозначениях).

Но вот ответ в общем виде получен, и мы снова обращаемся к физике: прежде чем подставить числовые данные, надо проверить размерность искомой величины и проанализировать ответ с точки зрения его правдоподобности. Если размерность верна и ответ правдоподобен, можно подставлять данные и считать.

Описанные этапы решения присущи практически всем задачам. Однако иногда — а именно о таких случаях и будет рассказано в статье — после расчетов получается неожиданно абсурдный результат, что свидетельствует о неверном решении. Так бывает, например, когда ни условие задачи, ни интуиция, ни здравый смысл не могут подсказать, в какую сторону протекает тот или иной процесс или каким будет конечный результат.

Приступая к решению задачи, мы вынуждены предположить какой-то вариант и в соответствии с ним составить систему уравнений. Если ответ получится абсурдным, отчаиваться не стоит. Просто нам не повезло: наше предположение оказалось неверным. Однако определенную информацию мы все же получили — в предполагаемом направлении процесс не идет. Что же, допустим другой вариант, и так далее. Задача превращается в небольшое исследование, а уравнения — как бы в товарищей по размышлению. В конце концов они нас не подведут (разумеется, если мы их не подведем, т.е. не ошибемся в составлении и решении) и расскажут нам об истинном направлении процесса или о конечном результате.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *На вершине шероховатой наклонной плоскости укреплен блок, через который переброшена нить. К концам нити прикреплены два тела, массы которых $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг. Найдите ускорение системы и силу трения между первым телом и плоскостью, если коэффициент трения $\mu = 0{,}5$ и угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$.*

Куда ускоряется система и движется ли она вообще? Из условия задачи — не ясно. Между тем, знать это очень важно. Так, если система движется, имеет место трение скольжения и модуль этой силы равен $F_{тр} = \mu N$ (N — модуль силы нормальной реакции). Если же система покоится, на первое тело действует сила трения покоя, про которую известно только, что она не больше силы трения скольжения.

Может быть, подскажет интуиция? С одной стороны, первое тело тяжелее второго, но с другой стороны, второе тело висит в воздухе, а первое лежит на наклонной плоскости, да к тому же есть трение. Нет, интуиция нас не выручит, нужен анализ.

Попробуем переложить наши заботы на уравнения. Предположим, что блок вращается по часовой стрелке, т.е. второе тело опускается с ускорением, а первое с тем же по модулю ускорением поднимается по плоскости. Изобразим силы, действующие на каждое тело (рис. 1), и запишем систему уравнений второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие направления (для первого тела — это направления вдоль плоскости и перпендикулярно к ней, а для второго тела — это вертикальное направление):

$$T - m_1 g \sin\alpha - \mu N = m_1 a,$$

$$N - m_1 g \cos\alpha = 0,$$

$$m_2 g - T = m_2 a.$$

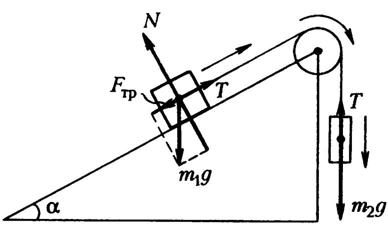


Рис. 1

Объединив эти уравнения в систему и решив ее, получаем

$$a = g\frac{m_2 - \mu m_1 \cos\alpha - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} \approx -1{,}6 \ \text{м/с}^2$$

— проекция ускорения на выбранное направление отрицательна. Значит, наше предположение неверно.

Что же тогда происходит с системой? Движется в противоположном направлении? А с каким ускорением?

В этом месте многие допускают ошибку, считая, что система ускоряется в противоположном направлении с тем же по модулю ускорением ($\approx 1{,}6$ м/с^2). Иногда так действительно можно считать. Например, если бы в нашей системе тел не было силы трения, при изменении выбранного направления движения на противоположное проекции всех сил изменили бы свой знак, и ускорение получилось бы таким же по модулю, но с противоположным знаком. В нашем же случае при новом предположении проекция силы трения по-прежнему отрицательна, поэтому соответствующая система уравнений будет другой (рис. 2):

$$m_1 g \sin\alpha - T - \mu N = m_1 a,$$

$$N - m_1 g \cos\alpha = 0,$$

$$T - m_2 g = m_2 a.$$

Отсюда

$$a = g\frac{m_1 \sin\alpha - \mu m_1 \cos\alpha - m_2}{m_1 + m_2} \approx -3{,}6 \ \text{м/с}^2.$$

И вновь проекция ускорения оказалась отрицательной. Следовательно, новое предположение тоже неверно.

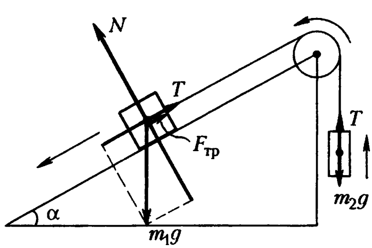


Рис.2

Итак, уравнения, «подумав» за нас, привели к выводу, что система не ускоряется, т.е.

$$a = 0.$$

Значит, для нахождения силы трения, точнее — силы трения покоя, нельзя пользоваться формулой $F_{тр} = \mu N$, справедливой для силы трения скольжения.

Для определения искомой силы посмотрим, какие еще силы (или их проекции) действуют на первое тело в направлении вдоль наклонной плоскости. Это — проекция силы тяжести, равная $m_1 g \sin\alpha = 15$ Н, и сила натяжения нити, модуль которой можно найти из условия покоя второго тела: $T = m_2 g = 20$ Н. Следовательно, сила трения покоя направлена вдоль плоскости вниз и равна

$$F_{тр\ п} = T - m_1 g \sin\alpha = 5\ \text{Н}.$$

Кстати, нетрудно убедиться в том, что в нашем случае сила трения $F_{тр\ п} = 5$ Н действительно меньше $\mu N = \mu m_1 g \cos\alpha \approx 13$ Н.

Задача 2. *В калориметр, содержащий $m_1 = 3$ кг льда при температуре $t_1 = -10$ °С, вливают $m_2 = 2$ кг воды при температуре $t_2 = 80$ °С. Какая температура установится в результате теплообмена? Теплоемкость калориметра не учитывать.*

Ясно, что конечная температура t находится в промежутке от t_1 до t_2:

$$-10\ °\text{C} < t < 80\ °\text{C}.$$

Следовательно, она может быть больше 0 °С — температуры таяния льда, меньше этой температуры или равной ей. Какой именно она окажется, заранее сказать нельзя. Будем к цели пробираться «на ощупь», перебирая возможные варианты и полагаясь на волю уравнений.

Предположим, что $t > 0$ °С, т.е. после установления теплового равновесия в калориметре будет только вода. Тогда лед получает тепло в три этапа: будучи собственно льдом, нагреваясь от −10 до 0 °С, превращаясь в воду при 0 °С и, будучи уже водой, нагреваясь от 0 °С до t. При этом вода отдает тепло только при охлаждении от температуры t_2 до t. Запишем соответствующее уравнение теплового баланса:

$$c_1 m_1 (0 - t_1) + \lambda m_1 + c_2 m_1 (t - 0) + c_2 m_2 (t - t_2) = 0,$$

где $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) и $c_2 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) — удельные теплоемкости льда и воды, $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг — удельная теплота плавления льда. Отсюда найдем

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 - \lambda m_1}{c_2(m_1 + m_2)}.$$

Подставив числовые данные, получаем $t < 0$ °C. Значит, наше предположение неверно.

Теперь допустим, что $t < 0$ °C. В таком случае вода отдает тепло в три этапа — охлаждаясь до 0 °C, превращаясь в лед при 0 °C и в качестве льда охлаждаясь до искомой температуры t, а первоначальный лед получает тепло только в один этап — нагреваясь от t_1 до t:

$$c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (0 - t_2) - \lambda m_2 + c_1 m_2 (t - 0) = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + \lambda m_1}{c_1 (m_1 + m_2)}.$$

Подставим числовые данные и убедимся, что $t > 0$ °C. Следовательно, и второе наше предположение было неверным.

Остается единственный вариант: $t = 0$ °C. Это и будет ответом задачи.

Здесь мы предвидим некоторое чувство досады у читателя: почему автор нарочито подбирает примеры, где все первоначальные предположения оказываются неверными и оба столь громоздких решения приводят к сравнительно простым результатам ($a = 0$, $t = 0$ °C)? Почему бы, в самом деле, не предположить заранее именно эти простейшие варианты?

Такой путь возможен, но облегчения он не сулит. Так, в первой задаче, предположив покой и не имея при этом формулы для силы трения покоя, мы должны будем составить систему из трех уравнений равновесия, но, решив ее и найдя силу трения, надо обязательно проверить, действительно ли она меньше силы трения скольжения. Если окажется, что нет, придется все решение, описанное выше, начинать сначала.

Во второй задаче, предположив $t = 0$ °C, мы должны подтвердить это уравнением теплового баланса, но неизвестно, как его составить. Мы не знаем, что раньше дошло до нуля: лед «снизу» или вода «сверху», и как следствие — расплавилась ли часть (и какая часть) льда или замерзла часть воды? Можно, конечно, опять что-то предположить, но число вариантов будет не меньше, а даже больше, чем в приведенном выше решении.

Задача 3. *Найдите токи во всех ветвях схемы, изображенной на рисунке 3. Здесь* $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E} = 1$ *В,* $r_1 = r_2 = r = 1$ *Ом и* $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ *Ом.*

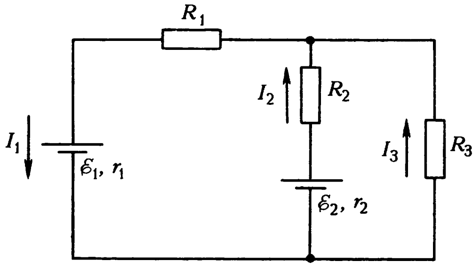


Рис.3

Предположим, что токи I_1, I_2 и I_3 направлены так, как показано на рисунке, хотя мы достоверно этого и не знаем. Если мы ошиблись, соответствующие уравнения нас поправят.

Поскольку в точках разветвления (узлах) электрический заряд не накапливается, заряд, поступающий в единицу времени в узел, равен заряду, уходящему из узла за то же время, т.е.

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Выделим в данной схеме два простых замкнутых контура, например левый и правый, и выберем в них направления обхода, например против часовой стрелки. Согласно закону сохранения энергии, алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения:

$$\mathscr{E} - \mathscr{E} = I_1R + I_1r + I_2r + I_2R,$$

$$-\mathscr{E} = -I_2R - I_2r + I_3R.$$

Объединим полученные уравнения в систему, для простоты подставим числовые данные и найдем

$$I_1 = -\frac{1}{31}\text{ A},\ I_2 = \frac{1}{31}\text{ A},\ I_3 = -\frac{2}{31}\text{ A}.$$

Первый и третий токи получились отрицательными. Это означает, что наши предположения об их направлениях оказались неверными. Числовые значения мы нашли верно, а направления этих токов противоположны предполагаемым.

Задача 4. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через какое время оно будет на высоте $h = 40$ м?*

Запишем известную формулу для координаты тела, брошенного вертикально вверх (положительным считаем направление вверх):

$$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая его относительно t, получим

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Однако при подстановке числовых данных выясняется, что выражение под корнем отрицательно. Что это означает?

Оказывается, это уравнение на своем языке подсказывает нам, что данное тело вообще не достигает такой высоты. В самом деле, максимальная высота подъема $h_{max} = v_0^2/2g \approx 31{,}5$ м, что меньше $h =$ $= 40$ м.

Так что бывают случаи, когда уравнения «думают» неожиданно, незапланированно.

Упражнения

1. Однородный рычаг массой $m = 10$ кг опирается на опору, находящуюся на расстоянии $l_1 = 25$ см от его левого конца. Длина рычага $l = 1$ м. К левому концу рычага подвешен груз массой $m_1 = 2$ кг. С какой силой надо действовать на правый конец вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, чтобы рычаг находился в равновесии?

2. В калориметр, где находится $m_1 = 1$ кг льда при температуре $t_1 = 0$ °C, впускают $m_2 = 500$ г водяного пара при температуре $t_2 = 100$ °C. Какая температура установится после того, как произойдет теплообмен? Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

3. Тело брошено с земли вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Какой путь пройдет оно за $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с и $t_3 = 5$ с полета? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

ЗАДАЧИ-ОЦЕНКИ

Г. Меледин

В жизни каждому нередко приходится делать прикидки, оценки: успею ли добраться, хватит ли денег, намного ли надо подвести регулятор часов, сумею ли удержать груз и т.п.

В деятельности исследователей оценки необходимы профессионально. Грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный этап подготовки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки. Они незаменимы в процессе обсуждения новых идей и проектов. Иногда оценки подсказывают путь точного решения задачи, дают возможность установить границы области применимости точного решения и понять, какие изменения потребуются при постановке и решении задачи вне пределов этой области.

Умение делать прикидки, наряду с интуицией, весьма существенно в творческой работе. Неслучайно поэтому, что задачи-оценки стали встречаться и на вступительных экзаменах в вузы. Например, уже много лет в каждом варианте письменного экзамена по физике для поступающих на физический факультет Новосибирского государственного университета есть задача-оценка. В формулировке такой задачи нет или почти нет необходимых для решения численных значений физических величин — предполагается, что каждый сам сможет их выбрать и задать.

Физическая постановка задачи, выбор и построение простейшей физической модели явления — наиболее важный и вместе с тем трудный этап решения задач-оценок. Нужно правильно отобрать физические параметры, наиболее существенные для задачи, определяющие ее физику, и пренебречь параметрами, слабо влияющими на интересующее нас явление. Для установления связей между различными параметрами существенно правильное использование основных физических законов и определений. Иногда можно ограничиться не очень строгими определениями или качественной трактовкой физических законов.

Прежде чем перейти к конкретным задачам, сделаем два небольших замечания. Во-первых, договоримся, что именно мы будем понимать под словами «оценка по порядку величины». Два численных значения какой-либо физической величины считаются отличающимися на порядок, если их отношение примерно равно 10, на два порядка, если оно равно 10^2, и т.д. С этой точки зрения число 89 должно считаться числом порядка 10^2, а число 15 — порядка 10. Если же два значения отличаются, например, в 1,3 раза, их нужно считать величинами одного порядка. То же самое относится к случаю, когда имеется отличие в 2,3 или даже в 5 раз. При грубых оценках такие отличия от точного результата не существенны.

Во-вторых, условимся об обозначениях. Наряду со знаком равенства «=» или знака приближенного равенства «≈» мы будем употреблять значок «~». Обычно он используется для записи факта пропорциональности двух величин. Мы же этим значком будем обозначить равенство по порядку величины, подчеркивая тем самым, что безразмерные коэффициенты пропорциональности в наших формулах — числа порядка единицы. Еще раз подчеркнем, что отличие коэффициентов «истинных» и «оценочных» в несколько раз для наших целей несущественно. Теперь рассмотрим несколько сравнительно несложных задач-оценок. Почти все они взяты из вариантов вступительных экзаменов на физический факультет НГУ.

Начнем с задач, в которых физика явления предельно ясна и нужно лишь разумно выбрать конкретные значения соответствующих физических величин.

Задача 1. *Оцените давление шариковой ручки на бумагу при письме.*

Чтобы сделать такую оценку, воспользуемся непосредственно определением давления: $p = F/S$. Теперь надо подумать о том, каковы численные значения силы и площади, входящих в это определение. Каждая линия, которую мы рисуем на бумаге во время письма, состоит из отдельных точек. Точку можно считать кружком, диаметр которого равен ширине следа d, оставляемого на бумаге: $S = \pi d^2/4$. Примем $d \sim 0{,}2$ мм (что достаточно правдоподобно). Усилие F, прилагаемое к ручке, тоже оценим «на глазок»: оно не превышает веса кисти руки, но заведомо больше веса ручки. Возьмем $F \sim 1$ Н. Тогда

$$p = \frac{F}{S} \sim \frac{4F}{\pi d^2} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Для того чтобы почувствовать, много это или мало, полезно сравнить полученное значение с каким-либо другим. Представьте себе, что на столе стоит гиря массой 1 кг. Ее диаметр в нижней части порядка 4 см, так что гиря оказывает на стол давление порядка

$8 \cdot 10^3$ Па. Значит, при письме шариковой ручкой давление на бумагу в несколько тысяч раз превышает давление килограммовой гири, стоящей на столе.

Задача 2. *Оцените скорость струи пара, выходящего из носика кипящего чайника.*

Пусть мощность нагревателя P, а удельная теплота парообразования воды r. Введем еще один параметр — долю мощности η, идущую на образование пара. Тогда $\eta P/r$ — это масса пара, образующегося в каждую единицу времени. Очевидно, сколько пара образовалось, столько же и выходит из чайника:

$$\frac{\eta P}{r} = \rho v S.$$

Здесь ρ — плотность пара при кипении, v — скорость вытекания пара, S — площадь сечения носика чайника. По закону Менделеева — Клапейрона плотность пара $\rho = p\mathrm{M}/(RT)$, где p — давление, М — молярная масса воды, R — газовая постоянная, T — температура пара. Окончательно получаем

$$v = \frac{\eta P}{r\rho S} = \frac{\eta PRT}{rp\mathrm{M}S}.$$

Если мощность нагревателя $P \sim 1$ кВт, $\eta \sim 0{,}5$, $S \sim 1$ см^2, $T \sim 373$ К, $p \sim 10^5$ Па (так как давление насыщенного пара при температуре кипения равно атмосферному давлению), а постоянные величины равны, соответственно, $R = 8{,}3$ Дж/(кг·К), $r = 2{,}3$ МДж/кг и $\mathrm{M} = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, то $v \sim 4$ м/с.

Задача 3. *Оцените, во сколько раз погожим солнечным днем светлее, чем ночью в полнолуние.*

Прежде всего заметим, что Луна лишь отражает свет, падающий на нее от Солнца. Будет считать, что освещенность, создаваемая Солнцем на Земле и на Луне, примерно одна и та же и равна $E_С$. На Луну попадает световая мощность $E_С \pi R^2$, где R — радиус Луны. Луна создает на Земле освещенность $E_Л = E_С \pi R^2 k/(2\pi l^2)$, где k — коэффициент отражения света от поверхности Луны, l — расстояние от Луны до Земли (считаем, что Луна равномерно «отбрасывает» отраженный свет внутри телесного угла, равного половине максимального).

Теперь найдем отношение освещенностей:

$$\frac{E_С}{E_Л} = \frac{2}{k}\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \frac{8}{k}\left(\frac{2R}{l}\right)^{-2},$$

где $2R/l$ — угловой размер Луны, равный по порядку величины

0,01 радиана. Возьмем $k \sim 0{,}2$, тогда окончательно

$$\frac{E_С}{E_Л} \sim 4 \cdot 10^5 .$$

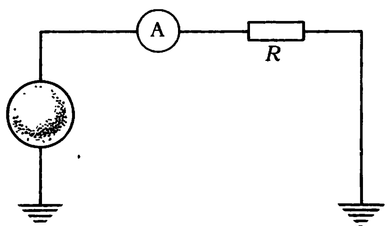
Задача 4. *Оцените, на сколько дальше упадет граната, если спортсмен будет бросать ее с разбега.*

Предположим, что при полете гранаты она поднимается на максимальную высоту H. Тогда время полета гранаты равно $2\sqrt{2H/g}$. Если в начальный момент горизонтальная проекция скорости гранаты увеличится на v, а вертикальная проекция останется практически без изменения, то время полета не изменится, а дальность полета возрастет на

$$l = 2v\sqrt{2H/g} .$$

Разумно положить $H \sim 5$ м, а $v \sim 8$ м/с (вспомните, например, что спринтеры пробегают стометровку за время порядка 10—12 с). Тогда $l \sim 20$ м — полученная оценка достаточно разумна.

Задача 5. *Оцените время разрядки металлического заряженного шара, соединенного с землей через резистор с известным сопротивлением (см. рисунок).*



Пусть потенциал заряженного шара φ, а заряд $Q = C\varphi$, где $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ — емкость шара (a — радиус шара). После соединения с землей и потенциал шара, и его заряд станут равными нулю. Во время разрядки по цепи пойдет ток I, который с течением времени будет, конечно, изменяться, но для оценки этим фактором мы пренебрежем. Тогда получим

$$I \sim \frac{Q}{t} \sim \frac{\varphi}{R},$$

где R — сопротивление резистора, t — время разрядки. Отсюда

$$t \sim \frac{QR}{\varphi} = CR = 4\pi\varepsilon_0 aR .$$

При $a \sim 1$ м, $R \sim 1$ МОм и $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м находим $t \sim 10^{-4}$ с.

* * *

В «Занимательной физике» Я.И.Перельмана есть рассказ, который называется «Сухим из воды». Он начинается так: «Положите монету на большую плоскую тарелку, налейте столько воды, чтобы она покрыла монету, и предложите гостям взять ее прямо руками, не замочив пальцев.

Эта, казалось бы, невозможная задача довольна просто решается с помощью стакана и горящей бумажки. Зажгите бумажку, положите ее горящей внутрь стакана и быстро поставьте стакан на тарелку вблизи монеты вверх дном. Бумажка погаснет, стакан наполнится белым дымом, затем под ним сама собой соберется вся вода с тарелки. Монета же, конечно, останется на месте, и через минуту, когда она обсохнет, вы сможете взять ее, не замочив пальцев».

Давайте в связи с этим рассказом решим такую задачу.

Задача 6. *Оцените минимальную температуру, до которой должен нагреться стакан, чтобы в него после остывания оказалась втянутой вся вода из тарелки.*

Решим сначала задачу точно (конечно, в рамках некоторых предположений, о которых позже скажем). Когда стакан подносят к поверхности воды, давление воздуха в нем равно атмосферному давлению $p_а$, а его температура T_x не известна. Когда стакан остынет и в него окажется втянутой масса воды m, давление воздуха в нем будет p, температура станет равной температуре T окружающего воздуха, а объем уменьшится на величину объема вошедшей воды, т.е. станет равным $(Sl - m/\rho)$, где S и l — площадь сечения стакана и его высота, ρ — плотность воды. Согласно закону Менделеева—Клапейрона,

$$\frac{p_а S l}{T_x} = \frac{pS(l - m/(\rho S))}{T}.$$

Из условия равновесия столбика воды,

$$pS + mg = p_а S.$$

Тогда

$$T_x = T\frac{1}{1 - \dfrac{mg}{p_а S}}\,\frac{1}{1 - \dfrac{m}{\rho l S}}.$$

Укажем теперь те неявные допущения, которые мы сделали при решении. Мы считали, что температура воздуха в стакане совпадает с температурой его стенок; что стакан ставится на воду медленно, так что начальное давление в нем совпадает с атмосферным; что давлением водяных паров в стакане можно пренебречь; что капиллярные эффекты пренебрежимо малы.

Интересно, что в полученную формулу для T_x учет изменения давления (обусловленного вошедшим в стакан водяным столбиком) и учет изменения объема воздуха в стакане вошли в виде независимых сомножителей. Поэтому их влияние можно исследовать раздельно.

Преобразуем первый сомножитель из правой части указанной формулы:

$$\frac{1}{1-\dfrac{mg}{p_{\text{а}}S}} = \frac{1}{1-\dfrac{p_{\text{вод}}}{p_{\text{а}}}} \approx 1+\frac{p_{\text{вод}}}{p_{\text{а}}}.$$

Атмосферное давление соответствует давлению водяного столба высотой 10 м, а в нашем случае ясно, что высота вошедшего в стакан столбика воды не может превышать высоту стакана, т.е. приблизительно 10 см, поэтому разумно давлением водяного столбика пренебречь и считать этот множитель приближенно равным единице.

Второй сомножитель связан с изменением объема воздуха в стакане. Объем воды и объем стакана уже не различаются столь сильно, как давления, поэтому объемом воды пренебречь нельзя.

Таким образом,

$$T_x = \frac{T}{1-\dfrac{m}{\rho lS}}.$$

Выберем численные значения параметров такими: $T\sim 300$ К, $m\sim 30$ г, $l\sim 10$ см и $S\sim 20$ см^2 (поскольку объем стакана равен 200 см^3, а его высота $l\sim 10$ см). Тогда

$$T_x\sim 353 \text{ К, или } t\sim 80\ {}^\circ\text{C}.$$

Поправка из-за учета изменения давления равна

$$\Delta T_x \approx T_x\frac{mg}{p_{\text{а}}S}\sim 0{,}1 \text{ К},$$

что, конечно же, мало по сравнению с найденным значением T_x. Получилось довольно забавно, что в результате мы пренебрегли эффектом изменения давления воздуха при остывании — эффектом, который собственно и создал задачу.

* * *

Иногда в задаче встречается значительно более сложная ситуация, и получение оценок соответственно усложняется. Вот — пример.

Задача 7. *Оцените частоту звука, генерируемого летящим комаром.*

Естественно предположить, что звук здесь возникает от периодического взмахивания крылышек комара. На самом деле физика полета комара очень непроста. Мы же будем пользоваться самой грубой моделью, считая, что взмахами крылышек создается такое изменение импульса воздуха в единицу времени, которое обеспечивает компенсацию действующей на комара силы тяжести:

$$\Delta p/\Delta t = mg.$$

За время Δt движения крылышек площадью S со скоростью v отбрасывается вниз масса воздуха $\Delta m = \rho_в v \Delta t S$, при этом ей сообщается импульс $\Delta p = \Delta m v = \rho_в v^2 \Delta t S$. Это создает силу F, действующую на крылышко вверх:

$$F \sim \Delta p/\Delta t \sim \rho_в v^2 S,$$

где $\rho_в$ — плотность воздуха. Введем характерный размер комара, например его длину $l \sim 4$ мм. Площадь пары крыльев $S \sim l^2$ — мы считаем, что длина комара того же порядка, что и размах его крыльев. Объем же комара разумно оценить как $\frac{1}{10} l^3$, поскольку поперечные размеры комара без крылышек заметно меньше его длины. Плотность комара примем равной плотности воды $\rho_{вод}$. Введем частоту взмахов крылышек ν, тогда скорость крыла $v \sim l\nu$. Записав условие равновесия комара

$$F \sim \rho_в v^2 l^2 \sim \rho_в \nu^2 l^4 = mg \sim \rho_{вод} l^3 g/10,$$

получаем

$$\nu_{зв} \sim \nu \sim \left(\frac{\rho_{вод}}{10\rho_в}\frac{g}{l}\right)^{1/2} \sim 400 \text{ Гц}.$$

Разумеется, цифре «4» верить нельзя, но в целом результат дает для частоты разумный порядок величины.

Заметим, что из полученной формулы следует, что частота обратно пропорциональна $\sqrt{l}$. Другими словами, чем крупнее насекомое, тем ниже издаваемый им звук. Действительно, сравните басовитое гудение шмеля (или жужжание пчелы) с тонким, звенящим звуком комара.

* * *

Довольно часто при решении задач-оценок применяется метод размерностей. В этом методе явно используется предположение о том, что параметры задачи входят в результат в виде сомножителей.

Числовые коэффициенты только из соображений размерностей получить нельзя. Иногда их можно определить из какого-нибудь частного случая, чаще эти коэффициенты условно полагают равными единице. Последнее может быть допустимо, если речь идет об оценке лишь по порядку величины.

Проиллюстрируем применение метода размерностей на конкретной задаче.

Задача 8. *Оцените время, через которое вы услышите гром после вспышки молнии, если известно, что молния ударила в дерево, находящееся от вас на расстоянии около 3 км.*

Поскольку свет распространяется со скоростью $\approx 3 \cdot 10^5$ км/с, вспышку молнии можно будет увидеть через время $\sim 10^{-5}$ с. Звук же идет гораздо дольше. Попробуем оценить скорость распространения звуковых колебаний в воздухе. Воспользуемся для этого методом размерностей.

Очевидно, что скорость v звука в среде зависит от параметров, характеризующих эту среду. Пусть для воздуха это будут давление p и плотность ρ. Предположим теперь, что

$$v \sim p^x \rho^y,$$

где x и y — неизвестные пока числа. Если подобная формула действительно существует, то размерности ее левой и правой частей должны быть, конечно, одинаковы.

Условимся размерность физической величины A обозначать $[A]$. Тогда

$$[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1},\ [p] = \text{Па} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},\ [\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3},$$

и можно записать

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = \left(\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}\right)^x \left(\text{кг} \cdot \text{м}^{-3}\right)^y.$$

Это равенство выполняется при условии, что

$$x + y = 0,\ -x - 3y = 1,\ -2x = -1.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} \text{ и } y = -\frac{1}{2},$$

поэтому получаем

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Числовой коэффициент в этой формуле из соображений размерностей определить нельзя. Предположим, что он порядка единицы (вообще говоря, это нужно было бы как-то проверить).

Для оценки скорости звука давление воздуха примем равным нормальному атмосферному давлению: $p \sim 1$ атм $\sim 10^5$ Па, а плотность воздуха будем считать равной плотности при нормальных условиях: $\rho \sim 1{,}3$ кг/м^3. Тогда скорость звука

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}} \sim 300 \text{ м/с},$$

и время, через которое наблюдатель услышит гром,

$$t \sim \frac{3 \cdot 10^3 \text{ м}}{300 \text{ м/с}} \sim 10 \text{ с}.$$

Это время на шесть порядков больше времени распространения света, что вполне разумно с точки зрения нашего жизненного опыта.

Упражнения

1. Оцените, как изменится давление атмосферы, если вся вода в океанах испарится.

2. Оцените скорость опускания парашютиста с раскрытым парашютом.

3. Оцените среднюю плотность Солнца.

4. Оцените, сколько оборотов (кувырков) совершит автомобиль, на полной скорости свободно упавший в километровую пропасть.

5. Оцените усилие спортсмена при толкании ядра.

6. Оцените силу натяжения цепи велосипеда при езде в гору.

7. Оцените, с какой скоростью летела капля воды, если при ударе о неподвижную стенку она оказала на нее среднее давление порядка 10^6 Па.

8. Оцените силу натяжения ремней безопасности, удерживающих человека в автомобиле, если автомобиль, движущийся со скоростью порядка 30 км/ч, столкнулся со столбом, в результате чего у автомобиля получилась вмятина глубиной около 30 см.

9. Оцените, на сколько отличаются расстояния уровней мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе.

10. Оцените, на каком расстоянии человек в яркой одежде, уходя в сосновый лес, потеряется из виду. (Подлеска нет.)

ПОВТОРИМ КОЛЕБАНИЯ

А. Зильберман

Колебания обычно возникают в системе, выведенной из состояния устойчивого равновесия. Во многих практически важных случаях, если возвращающая в положение равновесия сила линейно зависит от смещения, получаются гармонические колебания. Обычно этот так называемые малые колебания, когда равновесие нарушено незначительно.

Простейший пример — колебания математического маятника при небольших углах отклонения нити от вертикали. Еще пример — колебания груза под действием силы упругости пружины в отсутствие других сил. Он интересен тем, что колебания оказываются гармоническими, даже если они не малые — лишь бы пружина подчинялась условию (закону Гука) $F=-kx$, где x — удлинение пружины (смещение груза из положения равновесия), k — жесткость пружины, F — сила упругости пружины.

Разберем последний пример подробнее. Пусть груз прикреплен к горизонтальной пружине, второй конец которой закреплен, и находится на гладкой горизонтальной поверхности. Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид

$$mx'' = -kx\text{, или } x'' + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (1)$$

(здесь m — масса груза, x'' — его ускорение, точнее — проекция ускорения на горизонтальную ось X). Решением такого уравнения является функция

$$x = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi_0\right) = x_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \qquad (2)$$

где x_m — амплитуда, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота, φ_0 — начальная фаза колебаний. Частота определяется параметрами колеблющейся системы (k и m), амплитуда и начальная фаза зависят от того, как именно систему вывели из состояния равновесия, т.е. определяются начальными условиями.

Для нахождения x_m и φ_0 нужно составить дополнительно два уравнения. Достаточно задать, например, смещение x_0 и скорость v_0 в начальный момент времени $t_0 = 0$:

$$x_0 = x(t_0) = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_0 + \varphi_0\right) = x_m \cos\varphi_0,$$

$$v_0 = v(t_0) = x'(t_0) = -x_m\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\, t_0 + \varphi_0\right) = -x_m\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\varphi_0 .$$

Разделив второе уравнение на первое, найдем φ_0:

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = -\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_0}{x_0}, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{\frac{m}{k}}\frac{v_0}{x_0}\right).$$

Величину x_m проще всего найти, исключая тригонометрические функции обычным методом возведения в квадрат и сложения уравнений:

$$x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2 = x_m^2, \quad x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}v_0^2} .$$

Можно задавать координаты $x(t_1)$ и $x(t_2)$ в какие-то «удобные» моменты времени t_1 и t_2, или скорости $v(t_1)$ и $v(t_2)$, или координату $x(t_1)$ и скорость $v(t_2)$ и т.д. Важно только, чтобы моменты времени t_1 и t_2 не оказались разделенными целым числом полупериодов.

Таким образом, зная уравнение движения системы (уравнение (2)) и два дополнительных условия, мы полностью опишем движение. (То же можно сказать, например, и про равноускоренное движение — ускорение определено силами, а вместе с начальными координатой и скоростью это позволяет знать о таком движении абсолютно все.)

Уравнения, похожие на уравнение (1), получаются во многих задачах на колебания — нужно только правильно выбрать переменную. Проиллюстрируем это, несколько усложнив задачу про груз на пружине.

Задача 1. *Груз — чашка весов массой M — висит на пружине жесткостью k, а колебания возникают при падении в чашку грузика массой m (он пролетает до удара путь h и прилипает к чашке). Опишите движение чашки.*

Направим ось координат X и выберем начало координат 0 так, как показано на рисунке 1. Учитывая, что вначале чашка была в равновесии, запишем

$$Mg - k(l - l_0) = 0$$

(здесь l — длина пружины с подвешенной чашкой, l_0 — без нее).

При отклонении на x от начального положения, когда грузик уже прилип к чашке, уравнение движения системы будет иметь вид

$$(M+m)g - k(l - l_0 + x) = (M+m)x''.$$

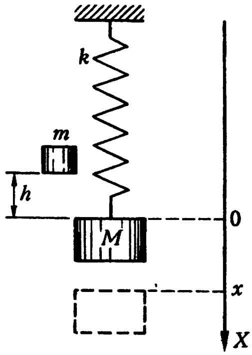


Рис. 1

Раскрывая скобки и учитывая первое уравнение, получим

$$x'' + \frac{k}{M+m}x = \frac{mg}{M+m}.$$

Это уравнение очень похоже на уравнение (1), мешает только правая часть — она не равна нулю. Ясно, почему так получилось: мы взяли начало координат не там, где нужно, — ведь положение равновесия у потяжелевшей чашки сдвинулось вниз на расстояние $\Delta x = mg/k$. Если мы введем новую переменную

$$x_1 = x - \Delta x = x - \frac{mg}{k},$$

то уравнение для x_1 будет практически таким, как (1):

$$x_1'' + \frac{k}{M+m}x_1 = 0$$

(напомним, что при такой замене переменной производные от x_1 такие же, как от x).

Мы не станем здесь решать задачу до конца, главное мы сделали — получили уравнение колебаний. Из него сразу найдем частоту колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}.$$

Для полного описания движения системы нужно вначале решить задачу о неупругом ударе груза о чашку, а затем найти амплитуду и начальную фазу колебаний. Проделайте это сами, а для контроля приводим ответ:

$$x_1 = m\sqrt{\frac{2gh}{k(M+m)}}\sin\sqrt{\frac{k}{M+m}}\,t.$$

Частоту гармонических колебаний системы можно находить и из энергетических соображений. Покажем это на примере идеального колебательного контура (без потерь), состоящего из замкнутых друг на друга конденсатора и катушки индуктивности.

Обозначим максимальный заряд конденсатора (амплитуду колебаний заряда) через q_m, а максимальный ток катушки (амплитуду колебаний тока) — I_m. Ток — это первая производная от заряда по времени, поэтому для гармонических колебаний справедливо соотношение

$$I_m = q_m \omega_0.$$

В тот момент, когда заряд максимален ($q = q_m$), ток равен нулю, а при $i = I_m$ заряд конденсатора обращается в нуль. Найдем энергии контура в указанные моменты времени и приравняем их:

$$\frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}, \text{ или } \frac{q_m^2}{2C} = \frac{Lq_m^2\omega_0^2}{2},$$

где C — емкость конденсатора, L — индуктивность катушки. Отсюда

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Применим энергетический метод к следующим двум задачам.

Задача 2. *Найдите период вертикальных колебаний груза массой m в системе, изображенной на рисунке 2. Считайте массу блока M сосредоточенной в его оси. Пружина имеет жесткость k, нить нерастяжима.*

Приравняем энергии системы в положении равновесия и в крайнем положении, когда скорость груза обращается в нуль. Но сначала — немного статики.

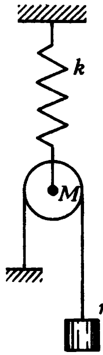


Рис. 2

Обозначив длину нерастянутой пружины через l_0, а длину ее в положении равновесия через l, запишем

$$k(l - l_0) = Mg + 2mg$$

(вниз на блок действуют две одинаковые силы натяжения нити, равные весу груза).

Пусть максимальное смещение оси блока вниз от положения равновесия равно x_m, тогда полная энергия системы в крайнем положении равна

$$E_1 = \frac{k(l - l_0 + x_m)^2}{2} - Mgx_m - mg(2x_m).$$

Обозначив скорость оси блока при прохождении положения равновесия через v_m, найдем выражение для полной энергии системы в этот момент:

$$E_2 = \frac{k(l - l_0)^2}{2} + \frac{1}{2}Mv_m^2 + \frac{1}{2}m(2v_m)^2.$$

Для гармонических колебаний в этом случае можно записать равенство

$$v_m = x_m \omega_0 .$$

Поэтому приравняв энергии, после простых преобразований получим

$$\frac{kx_m^2}{2} = \frac{Mx_m^2\omega_0^2}{2} + 2mx_m^2\omega_0^2 ,$$

откуда найдем частоту и период колебаний:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M+4m}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{M+4m}{k}} .$$

Эту задачу можно решить и при другом распределении масс в блоке — для этого к энергии поступательного движения блока нужно лишь прибавить энергию его вращения. Если, например, масса M не сосредоточена в оси, а распределена по окружности радиусом r с центром на оси, то полная кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{Mv^2}{2} + \frac{M(vr/R)^2}{2} ,$$

где R — радиус блока.

Задача 3. *В системе зажигания двигателя внутреннего сгорания используется явление самоиндукции. Катушка индуктивностью L подключается к аккумулятору с напряжением U_0 (рис.3), и когда ток достигает значения I_0, цепь размыкают. Параллельно катушке подключен разрядник P («свеча» зажигания), в котором при достижении напряжения $U (U \gg U_0)$ проскакивает искра. Какой важный параметр мы не задали? При каких соотношениях между всеми параметрами система будет работать?*

Важным параметром тут является емкость системы C. Она складывается из емкости разрядника, емкости между подводящими проводами и емкости между витками катушки. На схеме параллельно разряднику подключен соответствующий конденсатор.

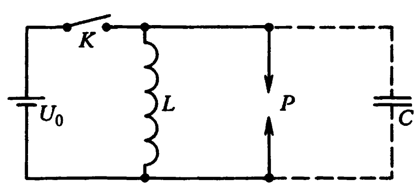


Рис.3

Проделаем расчет. Если бы разрядника не было, в контуре, состоящем из катушки и конденсатора, возникли бы колебания, при которых напряжение на конденсаторе максимально при токе катушки, равном нулю. Это напряжение U_m можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{LI_0^2}{2}=\frac{CU_m^2}{2},\ U_m=I_0\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Разряд происходит при условии $U \le U_m$, т.е.

$$U \le I_0\sqrt{\frac{L}{C}},\ \text{или}\ I_0 \ge U\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

В этой задаче есть одна тонкость. Как бы ни был устроен выключатель, он не может действовать мгновенно. В процессе размыкания активное сопротивление цепи меняется от нуля (вначале) до очень большой величины (когда цепь разомкнута), и в цепи выделяется тепло. Здесь снова важно влияние емкости C. Если время размыкания τ мало по сравнению с периодом колебаний $T=2\pi/\omega_0=2\pi\sqrt{LC}$, то выделившимся количеством теплоты по сравнению с энергией, запасенной в катушке, можно пренебречь.

Иногда «колебательное» уравнение возникает в задачах явно не колебательных. Рассмотрим пример.

Задача 4. *Тонкий однородный брусок длиной l скользит сначала по гладкому горизонтальному столу, а затем попадает на шероховатый участок с коэффициентом трения μ. Брусок останавливается, въехав туда наполовину. Найдите начальную скорость бруска и время торможения.*

Пусть в некоторый момент на шероховатой поверхности находится часть бруска длиной $x < l/2$. Считая, что силы нормальной реакции распределены вдоль бруска равномерно, найдем силу трения:

$$F_{\text{тр}}=-\mu mg\frac{x}{l}$$

и ускорение бруска:

$$a=x''=\frac{F_{\text{тр}}}{m}=-\mu g\frac{x}{l}.$$

Получили знакомое уравнение

$$x''+\frac{\mu g}{l}x=0.$$

Торможение начинается в момент, когда $x=0$, и заканчивается при скорости $v=0$, что соответствует ровно четверти периода «колебаний»; следовательно, время торможения равно

$$\tau=\frac{1}{4}T=\frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Разумеется, настоящих колебаний не будет — брусок после остановки назад не поедет (при отсутствии проскальзывания сила трения упадет до нуля).

Теперь запишем выражение для координаты x:

$$x = \frac{l}{2}\sin\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t \ \ (\text{при } 0 \le t \le \tau)$$

и для скорости v:

$$v = x' = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\cos\sqrt{\frac{\mu g}{l}}\,t \ \ (\text{при } 0 \le t \le \tau).$$

Отсюда найдем начальную скорость бруска:

$$v = v(t = 0) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu g l}\,.$$

Эту задачу можно усложнить, увеличив скорость так, чтобы брусок весь въезжал на шероховатую часть стола, — тогда после «гармонического» торможения наступит обычное. Хитрость же в том, что «гармоническая» часть займет теперь не четверть периода, а меньше. Рассчитайте сами время торможения при начальной скорости $v_0 = 2\sqrt{\mu g l}$. (Ответ: $\tau = \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$.)

Теперь обсудим задачу про слабо затухающие колебания в контуре.

Задача 5. *Катушка индуктивностью $L = 1$ Гн, имеющая активное сопротивление $R = 1$ Ом, и конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ образуют колебательный контур. В некоторый момент напряжение на конденсаторе равно $U_1 = 0{,}1$ В, а ток — максимален. Чему равен этот ток? Найдите приближенно потери энергии в контуре за один период. Через какой промежуток времени заряд конденсатора окажется нулевым? Подсказка: при выбранных параметрах контура колебания затухают медленно.*

Выделим в схеме отдельный элемент — резистор, обладающий только активным сопротивлением R. В тот момент, когда ток в контуре максимален, ЭДС индукции, возникающая в катушке, равна нулю. Значит, сумма напряжений на резисторе и конденсаторе — тоже нуль. Отсюда найдем максимальный ток:

$$I_m = \frac{U_1}{R} = 0{,}1 \text{ А}.$$

Для оценки тепловых потерь энергии в течение одного периода будем считать ток синусоидальным с амплитудой I_m. Тогда

$$\Delta E = Q = \frac{1}{2}I_m^2 R T = \frac{1}{2}I_m^2 R \cdot 2\pi\sqrt{LC} \approx 3 \cdot 10^{-5} \text{ Дж}.$$

Энергия, запасенная в контуре, составляет

$$E = \frac{1}{2}LI_m^2 + \frac{1}{2}CU_1^2 \approx 5\cdot 10^{-3}\ \text{Дж} \gg \Delta E\,.$$

Значит, наше приближение было корректным.

Чтобы рассчитать время τ «доразряда» конденсатора от заряда $q_1 = CU_1$ до нуля, воспользуемся связью между зарядом и током:

$$q_1 = \int_0^\tau i(t)\,dt = \int_0^\tau I_m \cos\omega_0 t\cdot dt = \frac{I_m}{\omega_0}\sin\omega_0\tau\,,$$

откуда

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}\arcsin\frac{CU_1\omega_0}{I_m} = \frac{1}{\omega_0}\arcsin(\omega_0 RC) \approx 10^{-6}\ \text{с}.$$

Упражнения

1. Рассчитайте период колебаний столба воды в U-образной трубке с площадью поперечного сечения $S = 0{,}2\ \text{см}^2$. Масса воды $m = 5$ г. Вязкостью пренебречь.

2. Электродвигатель вращает маховик массой $m = 0{,}1$ кг и радиусом $R = 5$ см при помощи резинового приводного ремня жесткостью $k = 20$ Н/см. При каком числе оборотов мотора колебания скорости маховика могут стать недопустимо большими? Считайте, что масса маховика сосредоточена на расстоянии $r = 3$ см от оси вращения. *Подсказка*: из-за неровностей вала мотора происходят толчки — один раз за оборот вала. Тут опасен резонанс.

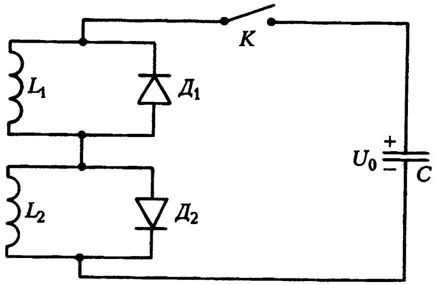


Рис.4

3. В некоторый момент в схеме, изображенной на рисунке 4, ключ K замыкают. Нарисуйте графики зависимостей $u_C(t)$, $i_{L1}(t)$ и $i_{L2}(t)$. Диоды считайте идеальными.

ОТВЕТЫ

Идеальный газ и его свойства

1. $T = \dfrac{pV}{R(m_1/M_1 + m_2/M_2)} \approx 1{,}5 \cdot 10^3$ К.

2. $\alpha = \dfrac{m_2^* M_1}{m_1 M_2 + m_2 M_1} \approx 0{,}73$ (здесь $m_2^* = 8$ г — масса оставшегося водорода).

3. Необходимое количество теплоты одинаково в обоих случаях.

4. $Q^* = Q - (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$.

5. Да, например при изотермическом процессе.

Газовые законы и механическое равновесие

1. Шарик заполнен гелием.

2. $h = \dfrac{L}{2}\left(1 + \dfrac{\rho g L}{2p_0}\right)$. 3. $x = H\dfrac{2p_0 + 3\rho g H}{4p_0 + 2\rho g H}$.

Работа и энергия идеального газа

1. $A = \dfrac{R(T_2 - T_1)^2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$. 2. $A_{12} = \dfrac{9}{17}\left(\dfrac{4}{3}RT_1 + Q\right) = 625$ Дж.

3. $Q_{\text{отв}} = \dfrac{33}{16}RT_1$. 4. $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

Свойства паров

1. $\Delta h = \dfrac{p_{\text{н}}}{\rho g} = 0{,}2$ м. 2. $m = \dfrac{p_0 S T_2}{g(10T_1 - T_2)} \approx 14$ кг.

3. Разность уровней будет уменьшаться за счет испарения воды в одном сосуде и конденсации в другом — до тех пор, пока уровни воды не сравняются, а пар не станет насыщенным около обеих поверхностей.
4. В кипяченой воде содержится меньше растворенных газов (чем в сырой), поэтому ее температура кипения более высокая. Сырая вода в кастрюле, плавающей в кипящей кипяченой воде, закипит.

Фазовые превращения

1. $m_{\text{в}} = m - p_{\text{н}} VM/(RT) \approx 0{,}3$ кг. 2. $\alpha = c(t - t_{\text{к}})/r \approx 0{,}015 = 1{,}5\%$ (здесь $t_{\text{к}}$ — температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении). 3. Масса системы, с которой проводится процесс *abce*, больше массы системы, с которой проводится процесс *abd*.

Поверхностное натяжение и капиллярные явления

1. Относительная ошибка составляет примерно 0,4%; барометр занижает показания.

2. $h=\dfrac{l}{2\left(1+\rho gl/(2p_0)\right)} = 9{,}9$ см.

3. Будет сдуваться меньший пузырь.

4. В месте прикосновения образуется большая капля, которую силы поверхностного натяжения уже не могут удержать.

5. $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1-R_2}$.

Преломление света

1. $\alpha<\arcsin(6/7)$. 3. $R = 2$ см.

4. $x=R/(n-1)$. 5. $y=x/n$.

Линзы и системы линз

1. См. рис. 1.

2. Дальнозоркому человеку следует прописать очки с собирающими линзами оптической силы $D = 2$ дптр.

3. $k=\dfrac{F^2}{(d-F)^2-(l/2)^2}$. 4. $x = 60$ см.

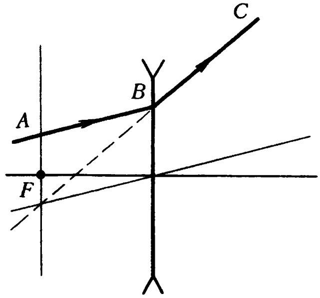


Рис. 1

5. $\Gamma \approx 99$.

Интерференция света

1. $d_2=\sqrt{3}d_1\approx 3{,}5$ мм. 2. $l_{\min}=d\dfrac{a/b+1}{a/b-1}\approx 122$ см.

3. $a\geq 2d\sin\alpha\approx 2d\alpha\approx 2$ см.

Фотоны

1. $n=\dfrac{P\lambda d^2}{16l^2hc}\approx 1{,}5\cdot 10^{12}$ с$^{-1}$. 2. $\varphi_{\max}=\dfrac{hc}{\lambda e}-\dfrac{A}{e}\approx 1{,}74$ В. 3. $F=\dfrac{E}{c\tau}\approx 6{,}7\cdot 10^{-6}$ Н.

Элементы атомной физики

1. $E_{k\min}=2E_{\text{возб}}=3/2\,E_{\text{пон}}= 20{,}4$ эВ.

2. $T=\dfrac{\tau}{\log_2(\Delta t_1/\Delta t_2)}\approx 934$ мин $\approx 15{,}6$ ч.

Законы сохранения в релятивистской динамике

1. Запишем закон сохранения энергии:

$$m_0c^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+h\nu,$$

откуда следует: $\nu<0$, что противоречит здравому смыслу.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Молекулярная физика, оптика, квантовая физика

Под редакцией
В.В.Можаева и А.И.Черноуцана

Приложение к журналу «Квант» № 2/95

Редактор *В.А.Тихомирова*
Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*
Технический редактор *Е.С.Потапенкова*
Компьютерная группа
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ИБ № 9

103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр.
Гарнитура литературная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 6,72. Тираж 15000 экз.
Заказ 322. Цена договорная.

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области

Тел.: (272) 71-336
Факс: (272) 62-536