

10 интересных формул физики, которых нет в школьном учебнике

$$R = n^2 \sigma T^4$$

$$\delta_x = \sqrt{\frac{kT}{\kappa}}$$

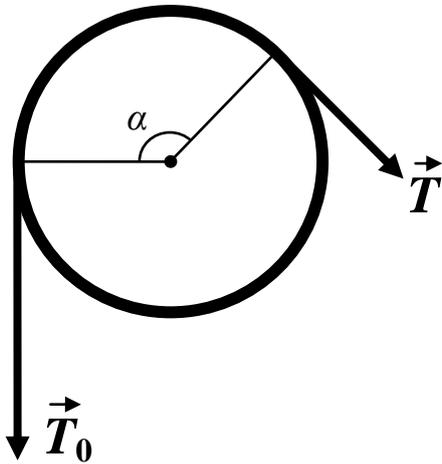
$$F_r = 2gh\rho S$$

Содержание

Формула Эйлера	3
Коэффициент жёсткости пружины.....	4
Частота колебаний струны	5
Закон Ньютона – Рихмана	6
Формула Герца.....	7
Скорость цунами	8
Формула Стокса.....	9
Формула Герца – Кнудсена	10
Тепловая мощность токов Фуко	11
Соотношение Седова – Тейлора	12
Ответы	13

Формула Эйлера

Швейцарский учёный **Леонард Эйлер** (1707 – 1783) внёс огромный вклад в развитие многих разделов математики и физики. Его имя носят формулы в геометрии, математическом анализе, кинематике. Одной из интересных физических формул Эйлера является формула для трения нити о цилиндр.



Эта формула позволяет рассчитать действие гениального в своей простоте приспособления для увеличения трения: оно состоит из каната, намотанного на столб или другую неподвижную опору круглого сечения.

Самый известный пример использования такого приспособления – швартовка корабля. Когда судно подходит к пристани, с него сбрасывают канат (швартов), один конец которого закрепляется на причальной тумбе, а другой наматывается на специальную опору на палубе – кнехт. Возникающая между швартовом и кнехтом сила трения останавливает движение судна.

Формула Эйлера связывает силы натяжения обеих концов нити:

$$T = T_0 e^{-\mu\alpha},$$

где T – сила натяжения ветви нити, набегающей на цилиндр; T_0 – сила натяжения ветви нити, сбегающей с цилиндра; μ – коэффициент трения между нитью и поверхностью цилиндра; α – угол обхвата нитью цилиндра.

Заметим, что сила натяжения свободного конца нити снижается с увеличением угла обхвата в геометрической прогрессии. Так, при коэффициенте трения $\mu = 0,4$ один оборот нити вокруг цилиндра ($\alpha = 2\pi$) уменьшает её натяжение в 12 раз. Если же сделать два оборота ($\alpha = 4\pi$), натяжение ослабнет уже в 150 раз! В этом случае груз массой в 1 тонну можно удержать в равновесии, прикладывая усилие, эквивалентное массе 7 кг.

Этот же принцип мы используем, когда завязываем шнурки или пришиваем пуговицу: чем больше оборотов нити сделано, тем крепче узел.

Вопросы и задания

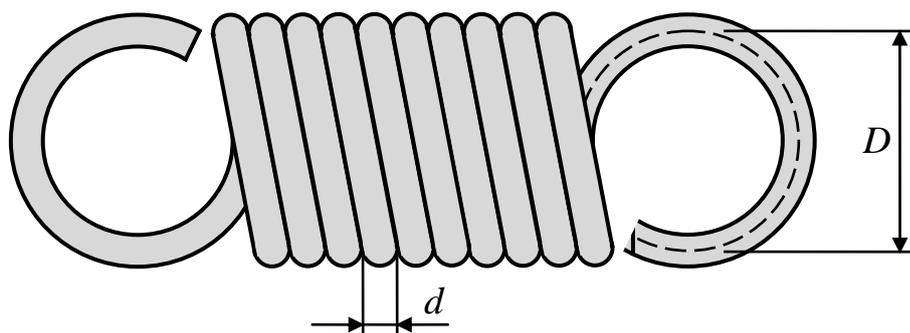
1. На неподвижный блок намотан трос, к одному из концов которого подвешен груз массой 270 кг. К другому концу привязана гиря массой 10 кг, которая удерживает груз в равновесии. Сколько раз трос обмотан вокруг блока, если коэффициент трения равен 0,15?

Коэффициент жёсткости пружины

При изучении упругих деформаций и закона Гука мы часто имеем дело с цилиндрическими винтовыми пружинами. Коэффициент жёсткости таких пружин определяется как свойствами вещества, из которого изготовлена пружина, так и её геометрическими характеристиками. Формула для вычисления жёсткости выглядит так:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3N},$$

где G – модуль сдвига материала проволоки (Па); d – диаметр проволоки (м); D – средний диаметр витка (м); N – число активных витков пружины.



В качестве среднего диаметра витка, как понятно из рисунка, выступает среднее арифметическое внешнего и внутреннего диаметра витка.

Под активными витками понимаются те витки, которые деформируются при нагружении пружины. Их число, очевидно, несколько меньше, чем общее число витков, и зависит от типа концов пружины.

Вопросы и задания

2. Во сколько раз возрастёт жёсткость цилиндрической пружины, если увеличить диаметр проволоки в 1,5 раза, не изменяя прочих параметров?

3. Пружина свита из стальной проволоки диаметром 2 мм и имеет внешний диаметр 3 см. Оцените число витков пружины, если её жёсткость равна 140 Н/м. Модуль сдвига стали равен 80 ГПа.

Частота колебаний струны

Вопрос о том, какие параметры определяют частоту колебаний натянутой струны, давно интересовал учёных. Впервые зависимость частоты от геометрических размеров струны и силы натяжения установил в 1625 году французский математик и физик **Марен Мерсенн** (1588 – 1648). Теоретически этот результат обосновал англичанин **Брук Тейлор** (1685 – 1731) в 1713 году. Было установлено, что в струне с двумя закреплёнными концами возникает целый набор колебаний с частотами, определяемыми формулой:

$$v = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{F}{\rho S}},$$

где l – длина струны, F – сила её натяжения, ρ – плотность материала струны, S – площадь поперечного сечения, n – натуральное число ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Эти частоты носят название *собственных частот колебаний струны*, а сами колебания называют *гармониками*. Натуральное число n в формуле представляет собой номер гармоники. Наименьшая частота, соответствующая $n = 1$, называется *основным тоном* (или *первой гармоникой*), а следующие – *обертонами* (или *высшими гармониками*). Обертонны не меняют частоты воспринимаемого звука, но влияют на его тембр. Таким образом, любое произвольное колебание струны может быть представлено как наложение (суперпозиция) различных гармоник.

Анализ приведённой формулы позволяет понять устройство и принцип звукоизвлечения струнных музыкальных инструментов. Как правило, в них используется небольшое число струн равной длины, основные частоты которых задаются путём подбора натяжения и плотности струны. Другие частоты получают за счёт укорачивания длины струны пальцами.

Вопросы и задания

4. К стальной струне длиной 75 см подвешен груз массой 7,3 кг. Вычислите частоту основного тона колебаний струны, если её диаметр равен 0,36 мм. Плотность стали принять равной 7800 кг/м^3 .

Закон Ньютона – Рихмана

Знаменитейший физик **Исаак Ньютон** (1643 – 1727) занимался не только механикой и оптикой, но успел оставить след и в термодинамике благодаря исследованию процесса охлаждения тел. Спустя полвека после Ньютона серию опытов по изучению охлаждения поставил и российский физик **Георг Рихман** (1711 – 1753) – тот самый, который был другом Ломоносова и погиб при проведении экспериментов с электричеством.

Результаты исследований двух учёных впоследствии были оформлены в виде закона Ньютона – Рихмана (в зарубежной литературе обычно используется название закон охлаждения Ньютона). Этот закон устанавливает связь между температурой тела и временем охлаждения:

$$T = T_S + (T_0 - T_S) e^{-\frac{\alpha S}{C} t},$$

где T – температура тела в момент времени t (К); T_S – температура окружающей среды (К); T_0 – начальная температура тела (К); α – коэффициент теплоотдачи ($\text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$); S – площадь поверхности границы раздела сред (м^2); C – теплоёмкость тела (Дж/К).

Коэффициент теплоотдачи α определяется экспериментально. По своему физическому смыслу это количество теплоты, отдаваемое в единицу времени с единицы площади при разности температур между телом и окружающей средой в 1 кельвин. Величина коэффициента теплоотдачи зависит от геометрической конфигурации тела, состояния поверхности, режима теплопередачи и других факторов.

Как видно из формулы, температура тела понижается по экспоненциальному закону, постепенно приближаясь к температуре окружающей среды, которая предполагается неизменной. При увеличении площади поверхности контакта двух сред процесс охлаждения ускоряется.

Вопросы и задания

5. Выведите формулу для времени охлаждения тела от температуры T_0 до температуры T .
6. Чай в кружке остыл от 100°C до 60°C за 5 минут. Какое время нужно ещё подождать, чтобы чай охладился до 30°C ? Температура воздуха в комнате равна 20°C .

Формула Герца

Немецкий физик **Генрих Герц** (1857 – 1894) известен, прежде всего, как учёный-экспериментатор, первым в истории доказавший существование электромагнитных волн. Однако Герц был и выдающимся теоретиком: в частности, он заложил основы такой научной дисциплины, как *механика контактного взаимодействия*. Этот раздел механики занимается изучением контакта тел друг с другом.

Интересный результат, полученный Герцем, – формула, позволяющая определить время соударения (продолжительность удара) двух одинаковых упругих шаров:

$$\tau = \frac{R}{(c^4 v)^{1/5}},$$

где R – радиус каждого из шаров, c – скорость звука в материале шаров, v – относительная скорость шаров до удара.

Необходимо отметить, что формула Герца является приближённой и позволяет оценить время соударения по порядку величины. Применять эту формулу можно в случае, если относительная скорость шаров достаточно мала по сравнению со скоростью звука (математически это условие можно записать в форме $v \ll c$). Для мало упругих и неупругих тел формула неприменима.

При обычных условиях опыта продолжительность удара двух небольших металлических шариков составляет десятитысячные доли секунды. В качестве иллюстрации влияния размеров шаров на время соударения можно привести такой пример: процесс удара двух стальных шаров, каждый из которых имеет размер Земли, при начальной скорости 1 км/с продолжался бы в течение нескольких часов.

Вопросы и задания

7. Два стальных шара радиусом 15 см движутся навстречу друг другу со скоростью 5 м/с. Оцените время соударения шаров. Скорость звука в стали принять равной 5200 м/с.

Скорость цунами

Волны, распространяющиеся на поверхности жидкости, в физике называют *гравитационно-капиллярными*, так как их распространение происходит под действием силы тяжести и силы поверхностного натяжения. Если длина волны велика, то влияние поверхностного натяжения становится несущественным, так что им можно пренебречь, поэтому такие волны называют просто *гравитационными*.

Хороший пример гравитационных волн – цунами, возникающие в океане в результате подводных землетрясений или извержений вулканов. Пока цунами не вышло на берег, его длина волны составляет десятки и сотни километров, что намного больше глубины океана. В связи с этим для физического описания цунами применяется так называемое «приближение мелкой воды». В этом приближении скорость цунами в открытом океане определяется очень простой формулой:

$$v = \sqrt{gH},$$

где g – ускорение свободного падения, H – глубина океана.

Нетрудно посчитать, что при средней глубине океана 4 км скорость цунами может достигать 200 м/с, что сравнимо со скоростью современного пассажирского самолёта. При этом высота цунами в местах зарождения невелика и обычно не превышает нескольких метров. Когда цунами приближается к берегу, его скорость резко снижается, а высота гребня составляет уже десятки метров.

Вопросы и задания

8. Какой должна быть глубина водоёма, чтобы возникшее в нём цунами могло превзойти скорость звука в воздухе? Есть ли такие глубины на Земле?
9. Между двумя последовательными волнами цунами прошёл 1 час. Определите длину волны, если глубина океана равна 2 км.

Формула Стокса

По мере распространения звуковой волны в среде её амплитуда уменьшается. Это происходит в результате поглощения звука – необратимого перехода энергии звуковой волны в теплоту. Данный процесс характеризуется коэффициентом поглощения γ , который позволяет вычислить звуковое давление на расстоянии x от источника звука:

$$p(x) = p_0 e^{-\gamma x},$$

где p_0 – звуковое давление, создаваемое в месте нахождения источника звука.

В газе или жидкости поглощение звука обусловлено двумя факторами: вязкостью и теплопроводностью. Если пренебречь теплопроводностью, то коэффициент поглощения звука в вязких средах определяется формулой Стокса:

$$\gamma = \frac{2\eta}{3\rho c^3} \omega^2,$$

где η – динамическая вязкость среды (Па·с), ρ – плотность среды (кг/м³), c – скорость звука в среде (м/с), ω – циклическая частота звуковой волны (рад/с).

Этот результат был получен английским физиком и математиком **Джорджем Стоксом** (1819 – 1903). Впоследствии формула была обобщена немцем **Густавом Кирхгофом** (1824 – 1887) с учётом влияния теплопроводности среды (полученное выражение известно как формула Стокса – Кирхгофа).

Коэффициент поглощения звука пропорционален квадрату частоты. Это означает, что звуки высоких частот поглощаются гораздо сильнее, чем низкочастотные. Хорошим доказательством этого факта служит звучание оркестра, удаляющегося от слушателя. Первыми пропадают высокие звуки скрипок и флейт, затем – средние корнетов и альтов, и наконец, когда оркестр уже совсем далеко, слышен лишь большой барабан.

Вопросы и задания

10. Почему тембр звука музыкального инструмента изменяется в зависимости от расстояния до него?

11. Во сколько раз уменьшится амплитуда ультразвука частотой 50 кГц, преодолевшего 10 м в воздухе? Вязкость воздуха – 18,1 мкПа·с, плотность – 1,29 кг/м³, скорость звука – 330 м/с. Влиянием теплопроводности пренебречь.

Формула Герца – Кнудсена

Генрих Герц, несмотря на короткую жизнь, успел исследовать и вопрос о механизме испарения жидкостей, получив в 1882 году формулу для скорости испарения. В 1915 году датский физик **Мартин Кнудсен** (1871 – 1949) провёл более точные измерения и уточнил результат Герца. Формула Герца – Кнудсена может быть записана в таком виде:

$$v = \alpha(p_{\text{н}} - p)S \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}},$$

где v – скорость испарения жидкости со свободной поверхности (масса жидкости, испаряющаяся в единицу времени); α – коэффициент испарения ($0 \leq \alpha \leq 1$); $p_{\text{н}}$ – давление насыщенного пара жидкости; p – парциальное давление пара над поверхностью жидкости; S – площадь поверхности; M – молярная масса жидкости; R – универсальная газовая постоянная; T – температура поверхности.

Формула учитывает все основные факторы, влияющие на интенсивность испарения: род вещества, температура, площадь поверхности. Безразмерный коэффициент испарения α учитывает наличие конденсации: он показывает, какая доля молекул пара конденсируется, ударяясь о поверхность жидкости.

Формула Герца – Кнудсена также учитывает, что жидкость в общем случае испаряется не в вакуум, а в пар с парциальным давлением p . Когда наступает динамическое равновесие, эта величина достигает значения $p_{\text{н}}$ и скорость испарения становится равной нулю.

Вопросы и задания

12. Определите скорость испарения воды в вакуум из сосуда с площадью поверхности $0,1 \text{ м}^2$ при температуре $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Давление насыщенного водяного пара при данной температуре составляет $2,33 \text{ кПа}$. Коэффициент испарения для воды равен $0,04$.

Тепловая мощность токов Фуко

Если проводник находится в переменном магнитном поле, в нём возникают индукционные токи, которые называют *вихревыми токами* или *токами Фуко* – в честь французского физика **Леона Фуко** (1819 – 1868). Фуко наиболее известен как создатель знаменитого маятника, наглядно доказывающего наличие суточного вращения Земли. Он же первым заметил, что металлические тела нагреваются в переменном магнитном поле.

Количество теплоты, выделяемое в единицу времени вихревыми токами (иными словами, тепловая мощность) в металлической пластине, может быть определена по формуле:

$$P = \frac{B_m^2 d^2 \omega^2}{24 \rho} V,$$

где B_m – амплитуда магнитной индукции (Тл), d – толщина пластины (м), ω – циклическая частота изменения магнитного поля (рад/с), ρ – удельное сопротивление материала пластины (Ом·м), V – объём пластины (м³).

Полезное применение токи Фуко нашли в индукционных печах, которые используются для плавления металлов. Как видно из формулы, тепловая мощность вихревых токов прямо пропорциональна квадрату частоты изменения магнитного поля, поэтому в индукционных печах применяются высокочастотные генераторы.

Но часто токи Фуко являются вредными: например, они могут приводить к значительным потерям электроэнергии в трансформаторах. Чтобы уменьшить нагревание сердечников, их делают не сплошными, а набирают из отдельных тонких пластин, изолированных друг от друга. Приведённая выше формула позволяет убедиться в эффективности такого подхода.

Вопросы и задания

13. Определите количество теплоты, которое выделится в стальной пластинке толщиной 0,5 мм и объёмом 2 см³ за 1 час пребывания в магнитном поле, изменяющемся согласно закону $B = 5\sin 100\pi t$. Удельное сопротивление стали принять равным 10^{-7} Ом·м.

Соотношение Седова – Тейлора

Задача о нахождении закона распространения ударной волны, возникающей в результате сильного точечного взрыва, стала актуальной в 1940-х годах при разработке атомной бомбы. Ответ на неё почти одновременно и независимо друг от друга нашли сразу несколько учёных: американец **Джон фон Нейман** (1903 – 1957), британец **Джеффри Тейлор** (1886 – 1975) и советский физик **Лев Седов** (1907 – 1999). В честь последних двоих полученная формула и обрела своё название.

При ядерном взрыве происходит быстрое (практически мгновенное) выделение огромной энергии в малой области пространства. В области взрыва образуется сильная сферическая ударная волна, отделяющая окружающую невозмущённую среду от движущегося за ударной волной раскалённого газа. Соотношение Седова – Тейлора утверждает, что такая ударная волна будет двигаться согласно уравнению:

$$r(t) = \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{1/5},$$

где $r(t)$ – расстояние от центра взрыва в момент времени t ; E – энергия, высвобожденная в результате взрыва; ρ_0 – плотность невозмущённой среды.

Примечательно, что эта формула была выведена исключительно путём анализа размерностей величин, которые должны влиять на распространение ударной волны. Очевидно, что её движение будет тем быстрее, чем больше энергия взрыва и чем меньше плотность окружающей среды.

Используя данное соотношение, учёные смогли определить энергию ядерного взрыва по экспериментальной зависимости радиуса фронта сферической ударной волны от времени.

Вопросы и задания

14. Ударная волна от ядерного взрыва за 4 секунды прошла в воздухе расстояние 1 км. Оцените энергию взрыва в тротиловом эквиваленте (1 кг ТНТ = 4,184 МДж).

Ответы

1. 3,5 раза.
2. В 5 раз.
3. 50.
4. 200 Гц.
5. $\Delta t = \frac{C}{\alpha S} \ln \frac{T_0 - T_s}{T - T_s}$.
6. 10 мин.
7. 10^{-4} с.
8. 11 км (немного больше глубины Марианской впадины).
9. 500 км.
10. Обертоны (высшие гармоники) поглощаются сильнее, чем основной тон.
11. В 1,3 раза.
12. 0,01 кг/с.
13. 1850 Дж.
14. 20 кт ТНТ.

Москаленко Артём Тимофеевич

**10 ИНТЕРЕСНЫХ ФОРМУЛ ФИЗИКИ,
КОТОРЫХ НЕТ В ШКОЛЬНОМ УЧЕБНИКЕ**

В эту небольшую брошюру вошли 10 интересных физических формул, выходящих за курс школьной физики, но вместе с тем достаточно простых и понятных старшеклассникам. С помощью этих формул можно объяснить явления, со многими из которых мы сталкиваемся ежедневно. В описании к формулам приведены занимательные факты и примеры из жизни, а также вопросы и задания на применение формул.

Брошюра адресована учащимся старших классов в качестве литературы для дополнительного чтения, а также всем, кто умеет увидеть красоту в физических формулах.

© Москаленко А.Т., 2018